ACADEMICIAN S. STOILOW

TEORIA FUNCŢIILOR DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ

vol. II

FUNCŢII ARMONICE. SUPRAFEŢE RIEMANNIENE

În colaborare cu
CABIRIA ANDREIAN CAZACU
candidat în ştiinţele fizico-matematice

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
1958

С. СТОИЛОВ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ТОМ II

(написан при сотрудничестве
Кабирии Андреян Казаку)

Перевод с румынского
И. БЕРШТЕЙНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1962

Предлагаемый вниманию читателя двухтомиый курс теории функций комплексного переменного отличается своеобразным отбором материала, написан на высоком методическом уровне и излагает эту науку с современных позиций. Одно из главных достоинств курса в том, что он вводит читателя в новейшие исследоваиия по наиболее актуальиым вопросам теории функций комплексного переменного.

Киига будет полезной студентам и аспирантам университетов и технических вузов, а также научным работникам в области математики и ее приложений.

Редакция литературы
по математическим наукам

С. Стоилов

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редактор *Н. И. Плужникова* Художник *В. М. Новоселова*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *С. В. Приданцева* Корректор *Е. В. Кочегарова*

Сдано в производство 17/I 1962 г. Подписано к печати 4/VII 1962 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$= =13 бум. л. 26 печ. л. Уч.-изд. л. 21,9. Изд. № 1/0431. Цена 1 р. 73 к. Зак. 123.

* * *

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

* * *

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий второй том моего трактата по теории функций комплексного переменного основан на лекциях, читанных мною в течение последних двух десятилетий в специальных курсах на физико-математическом факультете Бухарестского университета. Он посвящен центральным вопросам геометрической теории аналитических функций и построен так, чтобы ознакомить читателей с основами и одновременно ввести их в некоторые новейшие исследования; поэтому я считаю, что этот том является полезным дополнением к первому.

Кроме вопросов, которые служили предметом моих лекций в этот почти двадцатилетний период, настоящий том содержит также и более новые результаты, принадлежащие выдающимся молодым румынским исследователям.

Так, в главе V излагаются результаты, полученные Корнелиу Константинеску в исследованиях по принципу гиперболической метрики и его применениям для уточнения и обобщения классических теорем; в главе IX приведены некоторые результаты М. Журкеску относительно римановых поверхностей с абсолютно разрывной границей, а глава X содержит результаты, полученные Кабирией Андреян Казаку при исследовании нормально исчерпываемых накрывающих поверхностей.

Другие не менее важные работы молодых румынских математиков не могли быть включены в книгу, так как они не связаны непосредственно с вопросами, рассматриваемыми в различных главах этого тома. Однако ссылки на них приведены в соответствующих местах. Речь идет о результатах И. Берштейна о римановом накрытии неориентируемых поверхностей и о псевдогармонических функциях, Н. Бобока — о дифференцируемых многообразиях и задаче Дирихле, Ауреля Корня — о природе элементов идеальной границы абстрактных римановых поверхностей. Я старался дать возможно лучшее представление об исследованиях нашей молодой теоретико-функциональной школы, об их значении и перспективах.

Кабирия Андреян Казаку, доцент физико-математического факультета Бухарестского университета, обработала текст моих

лекций и с особым умением придала им тот стройный и цельный вид, в котором они приведены в книге. Ей принадлежат также исторические справки, сопровождающие некоторые из важнейших вопросов, рассмотренных в настоящем томе. Без ее весьма ценной помощи этот том, быть может, и не был бы опубликован. Выражаю ей здесь мою сердечную благодарность.

С. Стоилов

Глава I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. *Гармонической функцией* в области Ω плоскости (x, y) называется однозначная и непрерывная вместе со своими частными производными первых двух порядков функция $P(x, y)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

В полярных координатах (r, φ) уравнение (1) записывается в виде

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} = 0. \tag{2}$$

Это определение мы упростим в § 5 гл. II, исключив лишние условия.

Из классической теории функций комплексного переменного [1]) известно, что действительная и мнимая части аналитической функции

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

удовлетворяют условиям Коши — Римана

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial x}. \end{aligned} \tag{3}$$

Если функции P и Q имеют непрерывные частные производные второго порядка, то из условий Коши — Римана следует, что

$$\Delta P = 0 \quad \text{и} \quad \Delta Q = 0,$$

а следовательно, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — гармонические функции.

Обратно, если задана гармоническая функция $P(x, y)$, то существует бесконечное число аналитических функций с действительной частью $P(x, y)$. Эти функции различаются между собой на чисто мнимые постоянные.

Действительно, можно определить функцию $Q(x, y)$, удовлетворяющую вместе с $P(x, y)$ уравнениям (3), так как если

[1]) См., например, том I, гл. III, § 1, п. 7, стр. 83—84.

ввести обозначения

$$A(x,\ y)=\frac{\partial P}{\partial x}$$

и

$$B(x,\ y)=\frac{\partial P}{\partial y},$$

то система уравнений в частных производных

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-B(x,\ y),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=A(x,\ y)$$

вполне интегрируема (для нее выполняется условие совместности).

Функция $Q(x,\ y)$ получается при помощи квадратур

$$Q(x,\ y)=\int\limits_{x_0}^{x}-B(x,\ y)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y}A(x_0,\ y)\,dy+C,$$

где C — действительная постоянная.

Аналогично если известна функция $Q(x,\ y)$, то из соотношений (3) можно определить функцию $P(x,\ y)$.

Функции $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ называются *гармонически сопряженными*: $Q(x,\ y)$ гармонически сопряжена с $P(x,\ y)$, однако не $P(x,\ y)$, а $-P(x,\ y)$ гармонически сопряжена с $Q(x,\ y)$.

2. Теория гармонических функций играет важную роль в таких фундаментальных разделах анализа, как теория аналитических функций, теория потенциала, теория уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа и т. д. Гармонические функции имеют также важные приложения в математической физике: в гидродинамике, теории теплопроводности, теории электричества.

Так, например, в гидродинамике, если рассматривать потенциальное движение, при котором скорость имеет составляющие $X=\frac{\partial U}{\partial x}$, $Y=\frac{\partial U}{\partial y}$, где функция $U(x,\ y)$ называется потенциалом движения, то условие $\Delta U=0$ означает, что жидкость несжимаема.

В математическом анализе изучаются также гармонические функции произвольного числа n переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, определяемые как решения уравнения Лапласа

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}+\ \ldots\ +\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}=0.$$

Изучение таких функций имеет большое значение для современной физики. Они обладают многими свойствами гармонических функций двух переменных [1]).

В дальнейшем для более глубокого изучения свойств гармонических функций двух переменных мы будем постоянно проводить параллель с теорией аналитических функций.

Для упрощения записи мы будем рассматривать действительные функции переменных x и y как функции комплексного переменного $z = x + iy$ и будем обозначать

$$f(x,\ y) = F(z), \tag{4}$$

где значение $F(z)$, соответствующее z, *действительно.*

3. Благодаря тесной связи между теорией гармонических функций и теорией аналитических функций гармонические функции часто изучают на комплексной плоскости [2]). Понятие функции, гармонической в некоторой области Ω, содержащей бесконечно удаленную точку, определяется аналогично понятиям функции, голоморфной или мероморфной на бесконечности [3]). Функция $U(z)$ является гармонической в Ω, если она гармонична в $\Omega - \infty$ и если функция $U'(z') = U(1/z')$, получающаяся после инверсии $z = 1/z'$ является гармонической в некоторой окрестности начала координат на плоскости z'. Это определение основано на доказываемом в п. 13 свойстве инвариантности гармонических функций при конформных отображениях [4]).

---

[1]) В последние годы получены важные результаты относительно гармонических функций многих переменных, необходимые для построения теории, аналогичной теории аналитических функций; например, найдено обобщение теории абелевых интегралов.

[2]) Том I, гл. I, § 3, п. 23, стр. 38—40.

[3]) Том I, гл. II, § 2, п. 17, стр. 62.

[4]) В случае гармонических функций многих переменных также применяется преобразование при помощи взаимных радиусов-векторов, однако с некоторым видоизменением. Пусть, например, $U(x, y, z)$ — функция трех переменных, определенная в некоторой области Ω, содержащей внешность сферы достаточно большого радиуса, и гармоническая в конечных точках этой области. Функция $U(x, y, z)$ называется *гармонической на бесконечности*, если существует такая постоянная A [являющаяся значением $U(x, y, z)$ на бесконечности], что преобразование Кельвина функции $U^* = U - A$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, U^*\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

является гармонической функцией в окрестности начала координат.

См., например, Picard E., Traité d'analyse, ed. 2, Paris, 1905, t. II, ch. II, § 10, p. 64—65, а также Гурса Э., Курс математического анализа, М., 1934, т. III, § 529.

§ 2. ФОРМУЛЫ ГРИНА. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

4. При изучении гармонических функций мы будем пользоваться некоторыми интегральными формулами, следующими из первой формулы Грина; эти формулы справедливы не только для гармонических функций, но и вообще для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Произвольная *непрерывная дуга* на плоскости (x, y) определяется соотношениями

$$x = x(t),$$

$$y = y(t),$$

или

$$z = z(t) = x(t) + iy(t),$$

где t изменяется на отрезке $[a, b]$, а $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции t на этом отрезке.

Если не существует двух различных значений t_1 и t_2, таких, что $z(t_1) = z(t_2)$, то непрерывная дуга называется *простой дугой*, или *жордановой дугой*. Если ее концы совпадают, т. е. $z(a) = z(b)$, то дуга называется *простой замкнутой кривой*, или *жордановой кривой*, а ограниченная этой кривой компактная область на евклидовой плоскости (x, y) называется *жордановой областью*.

Если $x(t)$ и $y(t)$ — аналитические функции переменной t на отрезке $[a, b]$, т. е. если они разложимы в ряд Тейлора в окрестности любой точки t_0 отрезка $[a, b]$ (включая его концы):

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0 + \alpha_1 (t - t_0) + \alpha_2 (t - t_0)^2 + \ldots, \\ y &= \beta_0 + \beta_1 (t - t_0) + \beta_2 (t - t_0)^2 + \ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

и если, кроме того, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, то жорданова дуга или жорданова кривая называются *аналитическими* [1]).

Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — две действительные функции, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой области Ω, и пусть D — жорданова область, ограниченная кривой C, состоящей из конечного числа аналитических дуг, и такая, что $\overline{D} = D + C$ лежит в Ω [2]).

Первая формула Грина, известная также под названием формулы Грина — Римана, в применении к области D и к функ-

---

[1]) См. т. I, гл. I, § 3, п. 21, стр. 36 и гл. IV, § 3, п. 16, стр. 151.

[2]) Вообще мы будем обозначать через Ω произвольную область, а через D — область, ограниченную конечным числом жордановых кривых. Однако при применении формул Грина и следствий из них мы будем предполагать, что каждый контур состоит из конечного числа аналитических дуг.

циям P и Q выражает следующее соотношение между двойным и криволинейным интегралами:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C P\, dx + Q\, dy\ ^1). \tag{6}$$

Применяя эту формулу к функциям

$$P(x,\ y) = -U\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$Q(x,\ y) = U\frac{\partial V}{\partial x},$$

где $U(x,\ y)$ и $V(x,\ y)$ — действительные функции, непрерывные в Ω вместе со своими частными производными первых двух порядков, мы получаем из (6) соотношение

$$\iint_D (U_x V_x + U_y V_y)\, dx\, dy + \\ + \iint_D U\,\Delta V\, dx\, dy + \int_C U(V_y\, dx - V_x\, dy) = 0. \tag{7}$$

Последний интеграл можно представить в более сжатой форме, используя производную по внутренней нормали к кривой C.

Действительно, проведем через точку $(x,\ y)$ касательную к кривой C в положительном направлении относительно области D и внутреннюю нормаль (рис. 1) и обозначим соответственно через $(t,\ x)$, $(t,\ y)$ и $(n,\ x)$, $(n,\ y)$ углы наклона этой касательной и этой нормали к осям x и y, через dx и dy — бесконечно малые приращения и через ds — элемент дуги на кривой C, измеряемый в положительном направлении. Тогда можно написать

$$dx = \cos(t,\ x)\, ds,$$

$$dy = \cos(t,\ y)\, ds$$

и

$$\cos(t,\ x) = \cos(n,\ y), \tag{8}$$

$$\cos(t,\ y) = -\cos(n,\ x).$$

Следовательно,

$$V_y\, dx - V_x\, dy = [V_y \cos(n,\ y) + V_x \cos(n,\ x)]\, ds.$$

---

[1]) Доказательства этой формулы можно найти в любом курсе анализа; см., например, Nicolescu M., Analiza matematică, Ed. Acad. R. P. R., 1953, v. II, cap. XVII, § 1, 388—392. (См. также Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, М., 1949, т. III. — *Прим. перев.*)

Эта формула справедлива и в более общих предположениях. См., например, Krickeberg K., Über den Gausschen und Stokesschen Integralsatz, *Math. Nachr.*, 10, 5—6 (1953), 261—314; 11, 1—2 (1954), 35—60; 12, 5—6 (1954), 341—365.

Если $(x+l\cos(n, x),\ y+l\cos(n, y))$ — точка, лежащая на внутренней нормали на расстоянии $l>0$ от точки (x, y), то производная по направлению внутренней нормали определяется как

$$\lim_{\substack{l\to 0\\ l>0}} \frac{V[x+l\cos(n, x),\ y+l\cos(n, y)]-V(x, y)}{l} =$$

$$= V_x(x, y)\cos(n, x)+V_y(x, y)\cos(n, y) \qquad (9)$$

и обозначается через $\frac{\partial V}{\partial n_i}$. Для простоты мы не будем писать индекс i, подразумевая под $\frac{\partial V}{\partial n}$ производную по направлению внутренней нормали к кривой C.

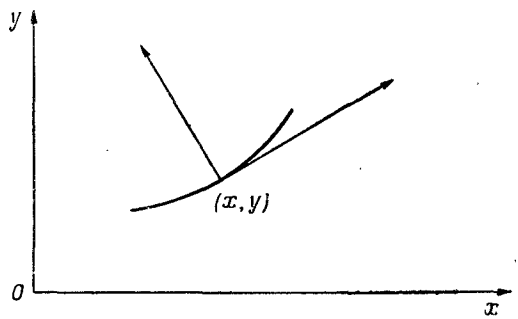

Рис. 1.

Учитывая это замечание, криволинейный интеграл в формуле (7) можно записать в виде

$$\int_C U\frac{\partial V}{\partial n}\,ds.$$

Подставляя это выражение в формулу (7), получаем

$$\int_D\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy+\int_D\int U\,\Delta V\,dx\,dy+$$

$$+\int_C U\frac{\partial V}{\partial n}\,ds=0. \qquad (10)$$

Это соотношение называется *предварительной формулой Грина*.

Меняя местами функции U и V в этой формуле и вычитая из нее полученное равенство, мы приходим ко *второй формуле*

Грина, симметричной относительно U и V:

$$\int\int_D (U\Delta V - V\Delta U)\,dx\,dy + \int_C \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds = 0. \quad (11)$$

5. Эти формулы, а также те, которые мы выведем из них в следующих пунктах, остаются справедливыми для многосвязных областей, ограниченных несколькими простыми замкнутыми кривыми C_0, C_1, ..., C_n, состоящими из конечного числа аналитических дуг. В этом случае через C мы обозначаем сумму контуров C_k ($k = 0, 1, \ldots, n$), рассматриваемых в положительном направлении относительно области D. Это означает, что если C_0 — внешний контур, отделяющий область D от бесконечно удаленной точки плоскости (z), а C_1, C_2, ..., C_n — внутренние контуры, то C_0 проходится в положительном направлении, а C_1, C_2, ..., C_n — в отрицательном направлении (рис. 2).

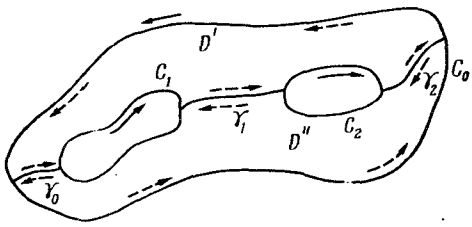

Рис. 2.

Для доказательства этого утверждения разобьем область D на односвязные области D' и D'', последовательно соединяя кривые C_0 и C_1, C_1 и C_2, ..., C_n и C_0 непересекающимися простыми дугами γ_0, γ_1, ..., γ_n, лежащими внутри D. Применим соответствующую формулу к областям D' и D'' и суммируем полученные соотношения; сумма двойных интегралов дает интеграл по области D, а сумма криволинейных — интеграл по контуру C, так как интегралы вдоль дуг γ_k ($k = 0, 1, \ldots, n$) взаимно уничтожатся [1]).

6. Если функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$, рассмотренные в п. 4, являются гармоническими в области D, то соотношение (11) сводится к равенству

$$\int_C \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds = 0. \quad (12)$$

[1]) Мы пользовались этим приемом в томе I для обобщения на многосвязные области некоторых теорем, установленных сначала в односвязном случае, например теоремы об изменении аргумента (гл. II, § 3, п. 21, стр. 64—67) и основной теоремы Коши (гл. III, § 3, п. 37, стр. 114—115).

Если $V=1$, а U — произвольная функция, обладающая свойствами, указанными в п. 4, то из формулы (11) следует, что

$$\iint_D \Delta U\,dx\,dy = \int_C \frac{\partial U}{\partial n_e}\,ds, \tag{13}$$

где n_e обозначает внешнюю нормаль к C. Если добавить предположение, что функция $U(x, y)$ является гармонической в D, то формула (13) принимает вид

$$\int_C \frac{\partial U}{\partial n}\,ds = 0. \tag{14}$$

Формулы (13) и (14) допускают следующую физическую интерпретацию: пусть $U(x, y)$ — потенциал установившегося движения жидкости. Тогда ΔU представляет собой дивергенцию вектора скорости $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) = \operatorname{grad} U$, $\int_C \frac{\partial U}{\partial n_e}\,ds$ равен потоку этого вектора (количеству жидкости, протекающему за единицу времени через кривую C). Соотношение (13) соответствует следующему физическому факту:

интеграл от дивергенции вектора скорости по области D равен потоку этого вектора через границу C.

Кроме того, соотношение (14) показывает, что в случае несжимаемой жидкости поток через замкнутый контур C равен нулю.

Формулы (12) и (14) остаются справедливыми и тогда, когда функции U и V гармоничны в D и непрерывно дифференцируемы в некоторой области Ω, содержащей $\bar{D}$ [1]).

7. С теоретической точки зрения формула (14) является для гармонических функций аналогом интегральной теоремы Коши. Установим теперь формулу, соответствующую интегральной формуле Коши.

Пусть $z = x + iy$ — фиксированная точка области D и $\zeta = \xi + i\eta$ — переменная точка в $\bar{D} = D + C$. Пользуясь сокращенным обозначением (4) п. 2, применим формулу (12) к заданной гармонической функции $U(\zeta)$ и к функции

$$V(\zeta) = \log \frac{1}{|\zeta - z|}$$

в области, получающейся из D после удаления целиком лежащего в D круга δ с центром в z, ограниченного окружностью γ (рис. 3). Это возможно, так как функция $V(\zeta)$ представляет собой

[1]) См., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, изд. 5, М. — Л., 1950, т. II, гл. VII, § 4, п. 194, стр. 572.

действительную часть аналитической функции $\log\frac{1}{\zeta-z}$ и, следовательно, является гармонической при любом ζ, отличном от z и ∞.

Функция $V(\zeta)$ играет такую же роль на плоскости, как ньютонов потенциал $1/r$ в пространстве (здесь r — расстояние между точками z и ζ).

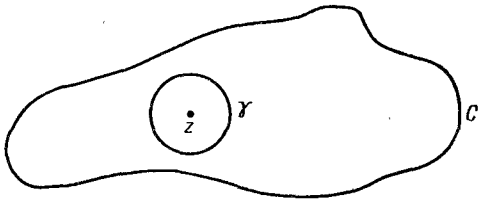

Рис. 3.

Вводя обозначение $\zeta - z = re^{i\theta}$ и принимая во внимание, что рассматриваемая область ограничена кривыми C и γ, мы получаем, согласно формуле (12),

$$\int_C \left(U\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n} - \log\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds = \int_\gamma \left(U\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n} - \log\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds =$$

$$= \int_\gamma U\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n}\,ds - \log\frac{1}{r}\int_\gamma \frac{\partial U}{\partial n}\,ds. \qquad (15)$$

Так как функция $U(\zeta)$ гармонична в D, а следовательно, и в круге δ, то, согласно формуле (14), имеем

$$\int_\gamma \frac{\partial U}{\partial n}\,ds = 0.$$

Однако нормаль к окружности γ совпадает с радиусом; поэтому на γ

$$\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \qquad (16)$$

и $ds = r\,d\theta$.

Следовательно,

$$\int_\gamma U\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n}\,ds = \frac{1}{r}\int_\gamma U\,ds = \int_0^{2\pi} U(r,\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} U(z)\,d\theta +$$

$$+ \int_0^{2\pi}[U(\zeta) - U(z)]\,d\theta = 2\pi U(z) + \int_0^{2\pi}[U(\zeta) - U(z)]\,d\theta.$$

Так как $U(\zeta)$ непрерывно зависит от ζ, то для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малом r имеем

$$|U(\zeta) - U(z)| < \varepsilon,$$

откуда следует, что

$$\left| \int_0^{2\pi} [U(\zeta) - U(z)]\, d\theta \right| < \varepsilon 2\pi.$$

С другой стороны, соотношение (15) показывает, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} [U(\zeta) - U(z)]\, d\theta$$

не зависит от r. Устремляя r к нулю, мы убеждаемся, что этот интеграл равен нулю.

Итак, формулу (15) можно записать в виде

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(U \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds, \qquad (17)$$

и мы получаем соотношение, аналогичное интегральной формуле Коши.

Формула (17) справедлива в предположении, что U является гармонической в D и непрерывно дифференцируемой в $\Omega \supset \overline{D}$.

8. В формулу (17) входят не только значения функции U на границе области, но и значения ее нормальной производной $\frac{\partial U}{\partial n}$. В следующих пунктах мы покажем, что для определения функции U достаточно знать только ее значения на границе области D.

Задача нахождения функции, гармонической в некоторой области, по ее значениям на границе этой области была названа Риманом *задачей Дирихле*. В классическом виде эта задача формулируется следующим образом.

Пусть на границе C области D задана непрерывная функция $f(\zeta)$. Найти непрерывную в $\overline{D}$ и гармоническую внутри области D функцию $U(z)$, принимающую на границе C значения $f(\zeta)$.

Таким образом, требуется, чтобы $U(z)$ стремилась к $f(\zeta)$, когда $z \in D$ стремится к $\zeta \in C$.

Задача Дирихле представляет интерес для физики. Так, потенциал установившегося движения несжимаемой жидкости, температура, электростатические и магнитные потенциалы — все являются гармоническими функциями. Примером физической задачи, приво-

дящей к задаче Дирихле, служит определение температуры внутри пластинки при известных ее значениях на контуре.

Из других физических задач возникла формулировка *задачи Неймана*: найти гармоническую в области D функцию $U(z)$ по заданным значениям ее нормальной производной dU/dn на C, а также *смешанной задачи Дирихле — Неймана*: найти гармоническую в D функцию по известным ее значениям на некоторых дугах σ границы C и значениям нормальной производной на остальной части C [1]).

Прежде чем приступить к изучению задачи Дирихле и установить формулу, в которую не входят значения нормальной производной, мы приведем некоторые приложения формулы (17).

§ 3. ФОРМУЛА СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ. ПРИЛОЖЕНИЯ

9. Предположим, что область D представляет собой круг с центром в точке $z = a$ и с радиусом $r = |\zeta - a|$. Так как в этом случае r постоянно, то, используя соотношения (16) и (14) и обозначения $\zeta - a = re^{i\theta}$ и $U(\zeta) = U(r, \theta)$, мы получаем из (17) *формулу среднего значения* (*формулу Гаусса*):

$$U(a) = \frac{1}{2\pi r}\int_C U\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r, \theta)\,d\theta. \tag{18}$$

Согласно формуле (18), значение гармонической функции в произвольной точке a области Ω, в которой эта функция является гармонической, равно среднему значению этой функции на любой окружности с центром в a, лежащей в Ω вместе с ограничиваемым ею кругом.

Это свойство является характеристическим свойством гармонических функций. Действительно, справедливо и обратное утверждение.

Функция $U(z)$, непрерывная вместе со своими частными производными первых двух порядков в области Ω и удовлетворяющая соотношению

$$U(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r, \theta)\,d\theta$$

в любой точке $a \in \Omega$ и для любого замкнутого круга $|z - a| \leqslant r$, лежащего в Ω, является гармонической.

[1]) Смешанная задача встречается главным образом в гидроаэродинамике. Различные приложения этих задач можно найти, например, в книгах: Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, М. — Л., 1951, гл. III, § 43—49, стр. 192—244 и Iacob C., Introducere matematică în mecanica fluidelor, Ed. Acad. R. P. R., Bucuresti, 1952, p. I.

Применяя к функции $U(z)$ формулу (13) относительно области $D: |z-a|<r$ и учитывая, что производная по внешней нормали к $C: |z-a|=r$ совпадает с производной по r, мы получаем

$$\iint_D \Delta U\, dx\, dy = \int_C \frac{\partial U}{\partial r}\, ds.$$

Однако, по предположению, $\int_0^{2\pi} U(r, \theta)\, d\theta$ не зависит от r; поэтому

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial U}{\partial r}\, d\theta = \frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} U(r, \theta)\, d\theta = 0.$$

Таким образом,

$$\iint_D \Delta U\, dx\, dy = 0,$$

откуда следует, что $\Delta U = 0$ в Ω.

Действительно, если бы в некоторой точке a из Ω мы имели $\Delta U \neq 0$, то ΔU было бы положительным или отрицательным в этой точке, а следовательно, и в некоторой ее окрестности. Выбирая замкнутый круг D в этой окрестности, мы получили бы в первом случае $\iint_D \Delta U\, dx\, dy > 0$, во втором случае $\iint_D \Delta U\, dx\, dy < 0$, что невозможно.

10. Принцип экстремума для гармонических функций. Формула среднего значения (18) позволяет установить другое основное свойство гармонических функций, называемое *принципом максимума и минимума*, или *принципом экстремума*.

Функция, гармоническая в области Ω, не равная тождественно постоянной, не может иметь локального максимума (соответственно минимума, в широком или в строгом смысле) во внутренних точках области Ω [1]).

Действительная функция $U(z)$ имеет локальный максимум в широком (соответственно строгом) смысле в точке $z=a$ ее области определения Ω, если существует лежащий в Ω круг $|z-a|<\rho$, в котором

$$U(a) \geqslant U(z) \text{ (соответственно } U(a) > U(z)) \text{ при } z \neq a.$$

[1]) Доказательство этого свойства, основанное на том, что отображения, определяемые аналитическими функциями, являются открытыми, приведено в томе I, гл. II, § 3, п. 27, стр. 72.

Пусть гармоническая функция $U(z)$, не равная постоянной в окрестности точки a, имеет в a локальный максимум в широком (соответственно строгом) смысле. Тогда в круге $|z-a|<\rho$, в котором $U(a)\geqslant U(z)$ (соответственно $U(a)>U(z)$) при $z\neq a$, можно найти точку z_0, удовлетворяющую соотношениям

$$U(a)>U(z_0)$$

и $$|z_0-a|=\rho_0<\rho.$$

Следовательно, существует такое число $\varepsilon>0$, что

$$U(a)>U(z_0)+\varepsilon.$$

В силу непрерывности функции $U(z)$ на окружности $\gamma:|z-a|=\rho_0$ в окрестности точки z_0 можно найти дугу σ длины s (рис. 4), на которой

$$U(a)\geqslant U(z)+\varepsilon. \qquad (19)$$

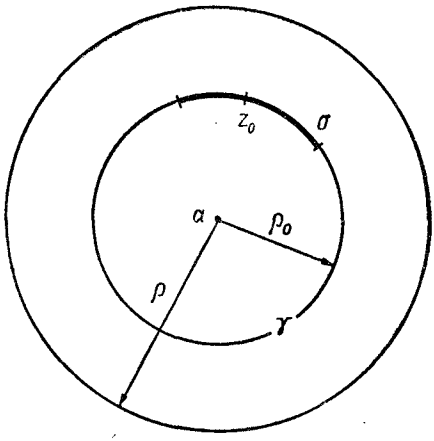

Рис. 4.

Применяя к окружности γ формулу среднего значения (18), получаем

$$U(a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}U(z)\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma-\sigma}U(z)\,d\theta$$

при $z-a=\rho_0 e^{i\theta}$, откуда, согласно (19),

$$U(a)\leqslant U(a)-\frac{\varepsilon s}{2\pi},$$

что противоречит предположению.

Аналогичное доказательство справедливо в случае минимума.

Итак, *максимумы и минимумы функции, гармонической в некоторой области и непрерывной в ее замыкании, достигаются на границе этой области.*

Хотя принцип максимума и минимума и не является характеристическим свойством гармонических функций[1]), из него можно вывести многие свойства этих функций.

[1]) В. Вылкович доказал принцип экстремумов в широком смысле для интегралов некоторых уравнений параболического типа в работе Vâlcovici V., Sur le théorème des valeurs extrêmes (TVE), *Revue de mathématiques pures et appliquées*, I, 1 (1956), 33—40 или *Bul. stiint. Acad. R. P. R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice*, VII, 3 (1955), 741—749.

11. В качестве первого приложения мы докажем единственность решения задач Дирихле и Неймана и смешанной задачи (п. 8).

Пусть $U_1(z)$ и $U_2(z)$ — два решения задачи Дирихле. Тогда $U_1(z) - U_2(z)$ — гармоническая функция, равная тождественно нулю на границе заданной области. Применяя принцип экстремумов, мы убеждаемся, что $U_1(z) \equiv U_2(z)$ во всей этой области.

Единственность решения задачи Неймана с точностью до аддитивной постоянной доказывается путем сведения этой задачи к задаче Дирихле для функции $V(z)$, гармонически сопряженной с искомой функцией $U(z)$ в области D.

Обозначая через ds элемент дуги на граничной кривой C области D и через $\frac{\partial}{\partial s}$ производную по касательной к C, взятую в положительном направлении относительно области D, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial n} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Так как в задаче Неймана $\frac{\partial U}{\partial n} = \varphi(s)$ — известная функция от s, то значения функции $V(z)$ на контуре определяются соотношением

$$V(s) = -\int \varphi(s)\, ds + c,$$

где c — произвольная постоянная.

После того как, решая задачу Дирихле, мы нашли $V(z)$, функция $U(z)$ получается уже при помощи квадратур (п. 1).

Итак, задача имеет бесконечное число решений, различающихся между собой на постоянные, наличие которых объясняется тем, что на границе известна лишь нормальная производная функции $U(z)$.

Докажем теперь единственность решения смешанной задачи.

Пусть σ — часть границы C, на которой задана сама функция, и $C - \sigma$ — часть границы, на которой задана нормальная производная. Если смешанная задача допускает два решения $U_1(z)$ и $U_2(z)$, то гармоническая функция $W(z) = U_1(z) - U_2(z)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} &W(z) = 0 \quad \text{на} \quad \sigma, \\ &\frac{\partial W(z)}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad C - \sigma. \end{aligned} \tag{20}$$

Применяя предварительную формулу Грина (10) при $U = V = W$, получаем

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy + \int_C W \frac{\partial W}{\partial n}\, ds = 0.$$

Согласно соотношениям (20), криволинейный интеграл равен нулю, следовательно, функция $W(z)$ постоянна в D. Так как $W(z)=0$ на σ, то $U_1(z)=U_2(z)$ в D.

§ 4. ФУНКЦИЯ ГРИНА. ФОРМУЛА ПУАССОНА

12. Формула (17), справедливая для функции, гармонической в области D и непрерывной вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой области Ω, содержащей замкнутую область $\overline{D}$, выражает значения этой функции внутри области D через ее значения и значения ее нормальной производной на контуре C. Теперь мы установим формулу, в которую входят только значения самой функции на контуре.

С этой целью заметим, что соотношение (17) остается в силе, если заменить функцию $\log\frac{1}{|\zeta-z|}$ произвольной функцией вида

$$K(\zeta, z)=\log\frac{1}{|\zeta-z|}+A(\zeta, z),$$

где $A(\zeta, z)$ при любом z из D является функцией переменной ζ, гармонической в D и непрерывной вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой области $\Omega\supset\overline{D}$. Действительно, функции $U(\zeta)$ и $A(\zeta, z)$ удовлетворяют соотношению (12).

Следовательно, можно написать

$$U(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left[U(\zeta)\frac{\partial K(\zeta, z)}{\partial n}-K(\zeta, z)\frac{\partial U(\zeta)}{\partial n}\right]ds. \qquad (21)$$

В предположении, что задача Дирихле разрешима, гармонической функции $A(\zeta, z)$, принимающей значения $-\log\frac{1}{|\zeta-z|}=\log r$ на контуре C, соответствует функция $K(\zeta, z)$, равная нулю на C. Эта функция $K(\zeta, z)$, которую мы обозначим через $G(\zeta, z)$, называется *функцией Грина* области D относительно *полюса* z. С помощью этой функции из соотношения (21) получается искомая формула [1])

$$U(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C U(\zeta)\frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n}ds. \qquad (22)$$

[1]) Формула (22) является непосредственным следствием соотношения (21) в предположении, что решение задачи Дирихле $A(\zeta, z)$ непрерывно дифференцируемо в некоторой области $\Omega\supset\overline{D}$.

Таким образом, если задана функция $U(z)$, гармоническая в замкнутой области $\overline{D}$[1]), то ее значения в D можо выразить через значения $U(\zeta)$ на контуре C при помощи формулы (22). Мы докажем также обратное, а именно если заданы значения $U(\zeta)$ на C, то функция, определяемая интегралом (22), дает решение задачи Дирихле.

Итак, задача Дирихле решена, если известна функция Грина. Однако для определения этой функции необходимо решить задачу Дирихле в частном случае, когда на границе задана функция $\log r$. Следовательно, задача Дирихле и задача нахождения функции Грина эквивалентны.

Для некоторых областей D, например для круга, функцию Грина можно определить непосредственно и по формуле (22) получить решение задачи Дирихле.

13. В предыдущем пункте мы видели, что *функция Грина области D относительно полюса $a \in D$ гармонична в $D - a$, в окрестности точки a представляется в виде*

$$G(z, a) = \log \frac{1}{|z-a|} + A(z, a), \tag{23}$$

где $A(z, a)$ — функция, гармоническая в окрестности точки a, и равна нулю на границе C области D[2]).

Эта функция определена однозначно, что следует из единственности решения задачи Дирихле (п. 8).

Для нахождения функции Грина можно иногда использовать ее инвариантность относительно конформных отображений области D.

Действительно, если $U(x, y)$ гармонична в D и если

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

— такая замена переменных, что функция $z = x + iy = f(\xi + i\eta)$ голоморфна в области Δ и принимает значения в D, то функция $H(\xi, \eta) = U[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$ гармонична в Δ. Это утверждение выводится либо из аналогичного свойства аналитических функций[3]), либо при помощи непосредственного вычисления.

---

[1]) Функция называется гармонической в замкнутой области $\overline{D}$, если она гармонична в некоторой области $\Omega \supset \overline{D}$. Очевидно достаточно предполагать, что $U(z)$ гармонична в D и непрерывно дифференцируема в $\Omega \supset \overline{D}$. Другие уточнения относительно формулы (22) будут сделаны в гл. II, § 4, п. 19 и в гл. V, § 5, п. 30.

[2]) Если бы $G(z, a)$ не имела логарифмической особенности в полюсе a, то она была бы тождественно равна нулю, согласно принципу экстремумов (п. 7).

[3]) Том I, гл. III, § 3, п. 45, стр. 125.

При конформном отображении $z = z(z')$ область D преобразуется в область D', а полюс a переходит в точку a'. При этом функция Грина области D относительно a преобразуется в функцию Грина области D' относительно a'.

Действительно,

$$G(z, a) = \log\frac{1}{|z-a|} + A(z, a) = \log\frac{1}{|z'-a'|} + A'(z', a'),$$

где

$$A'(z', a') = \log\left|\frac{z'-a'}{z(z')-a}\right| + A[z(z'), a]$$

является гармонической функцией в окрестности точки a', так как $A[z(z'), a]$ гармонична, согласно сделанному выше замечанию, причем в окрестности точки a'

$$z(z') - a = (z'-a')[c_0 + c_1(z'-a') + \ldots] \qquad (c_0 \neq 0).$$

14. Доказанное свойство дает возможность определить функцию Грина области D, когда известны ее конформное отображение на другую область D' и функция Грина области D'. Мы воспользуемся этим приемом для нахождения функции Грина круга $|z| < R$ относительно произвольной точки a, лежащей внутри круга.

Для этого заметим, что функция Грина единичного круга $|Z| < 1$ относительно начала координат равна

$$G(Z, 0) = \log\frac{1}{|Z|},$$

а конформное отображение круга $|z| < R$ на $|Z| < 1$, при котором точка $z = a$ переходит в точку $Z = 0$, определяется формулой

$$Z = \frac{R(z-a)}{R^2 - z\bar{a}}\ ^{1}).$$

Следовательно, функция Грина круга $|z| < R$ относительно полюса a имеет вид

$$G(z, a) = \log\left|\frac{R^2 - z\bar{a}}{R(z-a)}\right|. \tag{24}$$

15. Для того чтобы формулу (22) можно было применить в случае круга, мы вычислим нормальную производную $\frac{\partial G(\zeta, a)}{\partial n}$ в точке ζ на окружности $|\zeta| = R$.

Из соотношения (24) получаем в точке ζ

$$\frac{\partial G(\zeta, a)}{\partial n} = \left|\frac{R(\zeta-a)}{R^2 - \zeta\bar{a}}\right|\left(\frac{\partial}{\partial n}\left|\frac{R^2 - z\bar{a}}{R(z-a)}\right|\right)_{z=\zeta}.$$

---

[1]) Том I, гл. III, § 2, п. 13, стр. 80—90.

Первый сомножитель равен единице, согласно свойствам вышеприведенного линейного преобразования. Для вычисления второго сомножителя рассмотрим функцию

$$Z' = \frac{R^2 - z\bar{a}}{R(z-a)},$$

отображающую конформно круг $|z| < R$ на $|Z'| > 1$ и переводящую направление внутренней нормали к $|z| = R$ в направление внешней нормали к $|Z'| = 1$.

Нормальная производная $\frac{\partial |Z'|}{\partial n}$ в ζ равна отношению линейного элемента на преобразованной нормали к линейному элементу на нормали в ζ. Это отношение равно модулю производной $\left|\frac{dZ'}{dz}\right|_{z=\zeta}$ [1], независимо от направления.

Следовательно,

$$\frac{\partial G(\zeta, a)}{\partial n} = \frac{R^2 - |a|^2}{R|\zeta - a|^2}\ ^{2}).$$

Если ввести обозначения $\zeta = Re^{i\theta}$ и $a = z = re^{i\varphi}$, то формула (22) переходит в случае круга в *формулу Пуассона*

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\zeta)\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}\,d\theta\ ^{3}). \qquad (25)$$

Выражение

$$N(\zeta, z) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}$$

называется *ядром интеграла Пуассона* и, согласно соотношению

$$N(\zeta, z) = \mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\right)^{4}), \qquad (26)$$

является гармонической функцией z в круге $|z| < R$.

---

[1]) Том I, гл. III, § 1, п. 3, стр. 79.

[2]) Другие доказательства этой формулы, основанные на геометрических свойствах и на непосредственных вычислениях, можно найти, например, в работах: Montel P., Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes, Paris, 1932, ch. I, § 4, p. 5—8; Iacob C., Introducere matematică în mecanica fluidelor, cap. II, p. 48.

[3]) Формула Пуассона имеет аналог в n-мерном пространстве, что весьма важно для задач математической физики.

[4]) Через $\mathrm{Re}[f(z)]$ обозначается действительная часть $f(z)$, через $\mathrm{Im}[f(z)]$ — ее мнимая часть.

Применяя формулу Пуассона к функции $U(z) = 1$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(\zeta, z)\, d\theta = 1. \tag{27}$$

В следующих пунктах мы применим формулу Пуассона для исследования локальных свойств гармонических функций и для решения задачи Дирихле в случае круга.

16. Теорема Римана о конформном отображении на круг односвязной области, граница которой содержит более чем одну точку, и теорема Каратеодори [1]) дают возможность определить функцию Грина любой жордановой области относительно полюса a, если известна функция $Z = F(z)$, отображающая эту область конформно на $|Z| < 1$ и переводящая точку a в начало координат:

$$G(z, a) = \log \frac{1}{|F(z)|}\ ^{2}). \tag{28}$$

Обратно, если известна функция Грина $G(z, a)$ некоторой области D указанного вида с полюсом в $a \in D$, то функция, отображающая конформно эту область на единичный круг и переводящая a в начало координат, имеет, согласно соотношению (28), вид

$$F(z) = e^{-[G(z, a) + i\overline{G}(z, a)]}, \tag{29}$$

где $\overline{G}(z, a)$ — функция, гармонически сопряженная с $G(z, a)$; $F(z)$ определена с точностью до поворота.

§ 5. ФОРМУЛА Р. НЕВАНЛИННЫ (ИЕНСЕНА — ПУАССОНА)

17. Пусть функция $f(z)$ голоморфна и отлична от нуля в области $\overline{D}$ [3]). Тогда $U(z) = \log|f(z)|$ — гармоническая функция в некоторой области, содержащей область $\overline{D}$, и, согласно формуле (22),

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_C \log|f(\zeta)|\,\frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n}\, ds \tag{30}$$

в любой точке z из D.

---

[1]) Том I, гл. V, § 3, стр. 168—175, соотв. гл. IX, § 3, стр. 271—276.

[2]) Различные приложения этого способа, а также вычисления функции Грина в случае многосвязных областей можно найти в книге Iacob C., Introducere matematică în mecanica fluidelor, cap. II, p. 48—54.

[3]) Мы предполагаем, что функция Грина области D удовлетворяет условиям регулярности, необходимым для применения формулы (22).

Эту формулу можно обобщить на случай функции $f(z)$, мероморфной в области D и голоморфной и отличной от нуля на кривой C.

Пусть a — нули и b — полюсы функции $f(z)$ в области D, и пусть z_0 — произвольная точка в D, которую мы сначала будем считать отличной от точек a и b.

Проведем около точек a и b окружности γ_a и γ_b и около z_0 — окружность α таким образом, чтобы эти окружности были внешними по отношению друг к другу и лежали в D. Обозначим через Δ область, внутреннюю по отношению к кривой C и внешнюю по отношению к γ_a, γ_b и α, и через $G(z, z_0)$ — функцию Грина области D с полюсом в z_0.

Так как функции $\log|f(z)|$ и $G(z, z_0)$ являются гармоническими в области Δ и непрерывно дифференцируемыми в некоторой области, содержащей $\overline{\Delta}$, то к ним применима формула (12). Мы получаем соотношение

$$\int\limits_{C+\sum\limits_{a,b}\gamma_c+\alpha} \log|f(\zeta)|\frac{dG(\zeta, z_0)}{\partial n}\,ds - \int\limits_{C+\sum\limits_{a,b}\gamma_c+\alpha} \frac{\partial \log|f(\zeta)|}{\partial n} G(\zeta, z_0)\,ds = 0,$$

где производные $\partial/\partial n$ взяты по внутренней нормали относительно области Δ.

Последнее равенство можно представить в виде

$$\int\limits_C \log|f(\zeta)|\frac{\partial G(\zeta, z_0)}{\partial n}\,ds + \sum_{a,b}\int\limits_{\gamma_c}\left[\log|f(\zeta)|\frac{\partial G(\zeta, z_0)}{\partial n} - \frac{\partial \log|f(\zeta)|}{\partial n} G(\zeta, z_0)\right]ds + \int\limits_{\alpha}\left[\log|f(\zeta)|\frac{\partial G(\zeta, z_0)}{\partial n} - \frac{\partial \log|f(\zeta)|}{\partial n} G(\zeta, z_0)\right]ds = 0, \qquad (31)$$

так как $G(\zeta, z_0) = 0$ на C.

Оценим теперь интегралы вдоль γ_c и α.

Если c — одна из точек a или b, то на γ_c имеем

$$f(z) = (z-c)^p \varphi(z), \qquad (32)$$

где $p > 0$, если c — нуль, и $p < 0$, если c — полюс, причем $\varphi(c) \neq 0, \infty$.

Из (32) следует, что

$$\log|f(z)| = p\log|z-c| + \log|\varphi(z)|,$$

и так как функция $\log|\varphi(z)|$ является гармонической внутри γ_c, то, применяя формулу (12) к функциям $\log|\varphi(z)|$ и $G(z, z_0)$, получаем

$$\int_{\gamma_c}\left[\log|f(\zeta)|\frac{\partial G(\zeta, z_0)}{\partial n} - \frac{\partial \log|f(\zeta)|}{\partial n}G(\zeta, z_0)\right]ds =$$

$$= \int_{\gamma_c}\left[p\log|\zeta - c|\frac{\partial G(\zeta, z_0)}{\partial n} - p\frac{\partial \log|\zeta - c|}{\partial n}G(\zeta, z_0)\right]ds.$$

Пусть γ_c — окружность радиуса $|\zeta - c| = \rho_c$; тогда

$$\frac{\partial \log|\zeta - c|}{\partial n} = \frac{1}{\rho_c}$$

и, как показывает формула (14),

$$\int_{\gamma_c}\frac{\partial G(\zeta, z_0)}{\partial n}ds = 0.$$

Следовательно, интеграл вдоль γ_c равен

$$-p\int_{\gamma_c}G(\zeta, z_0)\frac{ds}{\rho_c} = -2\pi pG(c, z_0), \tag{33}$$

причем последнее равенство получается из формулы среднего значения Гаусса (18).

Для вычисления интеграла (31), взятого вдоль α, представим функцию Грина в виде

$$G(z, z_0) = \log\frac{1}{|z - z_0|} + h(z), \tag{34}$$

где $h(z)$ — функция, гармоническая в замкнутом круге, ограничиваемом α (п. 12, 13, соотношение (23)).

Функция $\log|f(z)|$ гармонична в замкнутом круге, ограничиваемом α; поэтому формула (13) применима к функциям $\log|f(z)|$ и $h(z)$ относительно α и в интеграле можно отбросить члены, содержащие $h(z)$:

$$\int_{\alpha}\left[\log|f(\zeta)|\frac{\partial G(\zeta, z_0)}{\partial n}ds - \frac{\partial \log|f(\zeta)|}{\partial n}G(\zeta, z_0)\right]ds =$$

$$= \int_{\alpha}\left[\log|f(\zeta)|\frac{\partial \log\frac{1}{|\zeta - z_0|}}{\partial n} - \frac{\partial \log|f(\zeta)|}{\partial n}\log\frac{1}{|\zeta - z_0|}\right]ds. \tag{35}$$

Так как $|\zeta - z_0| = r$ — радиус окружности α и так как функция $\log|f(z)|$ гармонична внутри α, то, повторяя прием, исполь-

зованный выше при вычислении интегралов вдоль γ_ε, мы получаем для интеграла (35) выражение

$$-\int_\alpha \log|f(\zeta)|\frac{ds}{r} = -2\pi \log|f(z_0)|. \tag{36}$$

Подставляя в исходное соотношение (31) результаты (33) и (36), получаем искомую формулу

$$\log|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_C \log|f(\zeta)|\frac{\partial G(\zeta, z_0)}{\partial n}ds - \\ -\sum_a G(a, z_0) + \sum_b G(b, z_0), \tag{37}$$

где суммы $\sum\limits_a$ и $\sum\limits_b$ берутся по всем нулям a и полюсам b, причем каждое слагаемое считается столько раз, каков порядок соответствующего нуля или полюса.

Если z_0 — нуль или полюс функции $f(z)$, то в круге, ограничиваемом α, имеем

$$f(z) = (z - z_0)^p \varphi(z), \tag{38}$$

где $\varphi(z_0) = c_p \neq 0$ — первый отличный от нуля коэффициент разложения $f(z)$ в ряд Тейлора или Лорана в окрестности точки z_0.

Применяя формулу (37) к функции $\varphi(z) = f(z)(z - z_0)^{-p}$, получаем

$$\log|c_p| = \frac{1}{2\pi}\int_C \log|f(\zeta)|\frac{\partial G(\zeta, z_0)}{\partial n}ds + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_C \log|\zeta - z_0|^{-p}\frac{\partial G(\zeta, z_0)}{\partial n}ds - \\ -\sum_{a \neq z_0} G(a, z_0) + \sum_{b \neq z_0} G(b, z_0). \tag{39}$$

Согласно соотношению (12), примененному к функциям $\log|z - z_0|$ и $G(z, z_0)$ в области, внутренней по отношению к C и внешней по отношению к α, имеем

$$\int_C \log|\zeta - z_0|\frac{\partial G(\zeta, z_0)}{\partial n}ds = \int_\alpha \left[\log|\zeta - z_0|\frac{\partial G(\zeta, z_0)}{\partial n} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \log|\zeta - z_0|}{\partial n} G(\zeta, z_0)\right]ds.$$

По формуле (34) для функции $G(z, z_0)$ внутри α последний интеграл равен

$$2\pi h(z_0).$$

Таким образом, (39) можно представить в виде

$$\log|c_p| = \frac{1}{2\pi}\int_C \log|f(\zeta)|\,\frac{\partial G(\zeta, z_0)}{\partial n}\,ds - \\ - \sum_{a\neq z_0} G(a, z_0) + \sum_{b\neq z_0} G(b, z_0) - ph(z_0). \quad (40)$$

Р. Неванлинна назвал соотношение (37) или (40) *формулой Иенсена—Пуассона*, так как из него получаются в качестве частных случаев формулы Иенсена и Пуассона.

18. При $f(z)=e^{\varphi(z)}$, где $\varphi(z)$ голоморфна в замкнутой области $\overline{D}$, вводя обозначение $\log|f(z)| = \operatorname{Re}[\varphi(z)] = U(z)$, мы получаем из формулы (37) соотношение (22); предполагая, что C — окружность $|z|=R$, мы получаем формулу Пуассона (25).

Применяя формулу (37), соответственно (40), при $z_0=0$ к функции $f(z)$, мероморфной в круге $|z|\leqslant R$ и отличной от нуля и ∞ на окружности $|z|=R$, получаем *формулу Иенсена*.

Если $f(0)\neq 0,\ \infty$, то

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta - \sum_a \log\frac{R}{|a|} + \sum_b \log\frac{R}{|b|}. \quad (41)$$

Если $f(z)=z^p\varphi(z)$, $\varphi(0)\neq 0,\ \infty$, то

$$\log|\varphi(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta - \sum_{a\neq 0}\log\frac{R}{|a|} + \\ + \sum_{b\neq 0}\log\frac{R}{|b|} - p\log R. \quad (42)$$

Выписывая при тех же условиях относительно $f(z)$ и области $D: |z|\leqslant R$ соотношение (37) для произвольной точки $z\in D$, мы получаем *формулу Неванлинны*:

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\zeta)|\,\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta - \\ - \sum_a \log\left|\frac{R^2-\bar{a}z}{R(a-z)}\right| + \sum_b \log\left|\frac{R^2-\bar{b}z}{R(b-z)}\right|, \quad (43)$$

где использованы обозначения $z=re^{i\varphi}$ и $\zeta=Re^{i\theta}$ [1]).

[1]) Если z — нуль или полюс функции $f(z)$, то вместо (37) следует применить формулу (40), учитывая, что $h(z)=\log\dfrac{R^2-|z|^2}{R}$.

Принимая во внимание, что ядро интеграла Пуассона равно $\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)$, а остальные члены в формуле (43) равны действительным частям соответствующих логарифмов, мы можем написать

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\zeta)|\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\theta - \sum_a \log\frac{R^2-\bar{a}z}{R(a-z)} + \\ + \sum_b \log\frac{R^2-\bar{b}z}{R(b-z)} + iC, \qquad (44)$$

где C — действительная постоянная.

19. Р. Неванлинна применил формулу Иенсена к исследованию распределения значений мероморфных функций. Теория распределения значений изучает распределение точек z, в которых аналитическая функция $f(z)$ принимает значение a. Из (41) и (42) Неванлинна вывел свою первую основную теорему, называемую также теоремой о равновесии, относительно модулей решений уравнения $f(z)=a$ для мероморфной функции $f(z)$.

Для установления этой теоремы введем обозначение

$$\log^+\alpha = \max(\log\alpha,\ 0)$$

при $\alpha > 0$ и подставим выражение

$$\log|f(Re^{i\theta})| = \log^+|f(Re^{i\theta})| - \log^+\frac{1}{|f(Re^{i\theta})|}$$

в формулы Иенсена (41) или (42), записанные в одинаковой форме, которая получается из (42), если заменить $\log|\varphi(0)|$ на $\log|c_p|$, где c_p — первый отличный от нуля коэффициент разложения Лорана или Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки $z=0$. Формула (41) соответствует случаю $p=0$.

Следуя Неванлинне, введем обозначения

$$m(R,\ f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(Re^{i\theta})|\,d\theta, \\ N(R,\ f) = \sum_b \log\frac{R}{|b|} + p\log R, \qquad (45)$$

где $p=n(0,\ \infty)$ обозначает порядок полюса $z=0$ для $f(z)$; число p равно нулю, если $z=0$ — обыкновенная точка.

Учитывая, что нули функции $f(z)$ являются полюсами для $1/f(z)$, можно записать формулу Иенсена в виде

$$\log|c_p| = m(R,\ f) + N(R,\ f) - m\left(R,\ \frac{1}{f}\right) - N\left(R,\ \frac{1}{f}\right). \qquad (46)$$

Рассмотрим теперь функцию $f(z)-a$, где a — произвольное комплексное число. Тогда

$$m(R,\ f-a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(Re^{i\theta})-a|\,d\theta.$$

Но

$$|\log^+|f-a|-\log^+|f||\leqslant\log^+|a|+\log 2. \tag{47}$$

Действительно,

$$\log^+|f-a|\leqslant\log^+(|f|+|a|)\leqslant\log^+|f|+\log^+|a|+\log 2; \tag{48}$$

это получается при рассмотрении следующих возможностей:

если $|f|\geqslant 1$ и $|a|\geqslant 1$, то

$$|f|\leqslant|fa| \quad\text{и}\quad |a|\leqslant|fa|,$$

откуда

$$|f|+|a|\leqslant 2|fa|;$$

если $|f|\geqslant 1$, а $|a|\leqslant 1$, то

$$|f|+|a|\leqslant 2|f|;$$

если оба числа $|f|$ и $|a|$ меньше единицы, то

$$|f|+|a|<2.$$

С другой стороны,

$$\log^+|f|=\log^+|(f-a)+a|\leqslant\log^+(|f-a|+|a|),$$

и, применяя неравенство (48), получаем

$$\log^+|f|\leqslant\log^+|f-a|+\log^+|a|+\log 2.$$

Из неравенства (47) выводим, что

$$|m(R,\ f-a)-m(R,\ f)|\leqslant\log^+|a|+\log 2,$$

и так как

$$N(R,\ f-a)=N(R,\ f),$$

то мы можем написать

$$|m(R,\ f)+N(R,\ f)-m(R,\ f-a)-N(R,\ f-a)|\leqslant\log^+|a|+\log 2. \tag{49}$$

Если пользоваться обозначением Р. Неванлинны

$$T(R,\ f)=m(R,\ f)+N(R,\ f), \tag{50}$$

то соотношения (46) и (49) принимают вид

$$T(R, f) = T\left(R, \frac{1}{f}\right) + \log|c_p| \tag{51}$$

и

$$|T(R, f) - T(R, f-a)| \leqslant \log^+|a| + \log 2. \tag{52}$$

Для интерпретации этих результатов заметим, что $m(R, f)$ возрастает одновременно с длиной тех дуг на $|z| = R$, на которых $|f(z)|$ принимает большие значения, а $N(R, f)$ тем больше, чем больше полюсов имеет $f(z)$ в $|z| < R$.

Вообще функция $m\left(R, \frac{1}{f-a}\right)$ возрастает с возрастанием длины дуг на окружности $|z| = R$, на которых $f(z)$ принимает значения, близкие к a, а $N\left(R, \frac{1}{f-a}\right)$ тем больше, чем большее число раз $f(z)$ принимает значение a в $|z| < R$.

Функция $m\left(R, \frac{1}{f-a}\right)$ выражает отклонение в среднем функции $f(z)$ от значения a на $|z| = R$, а $N\left(R, \frac{1}{f-a}\right)$ измеряет плотность корней уравнения $f(z) = a$, лежащих в $|z| < R$ [1]).

Формула (46) или (51), называемая также *формулой равновесия Р. Неванлинны*, выражает равновесие между сходимостью $f(z)$ к нулю на $|z| = R$ и числом нулей этой функции в $|z| < R$, с одной стороны, и стремлением $f(z)$ к бесконечности на $|z| = R$ и числом полюсов в $|z| < R$ — с другой стороны.

Из (52) вытекает *первая основная теорема Р. Неванлинны*, утверждающая, что это равновесие имеет место при любом значении a.

Действительно, из соотношения (51), написанного для $f(z) - a$, и из соотношения (52) мы заключаем, что

$$\left|T\left(R, \frac{1}{f-a}\right) - T(R, f)\right| \leqslant |\log|c|| + \log^+|a| + \log 2, \tag{53}$$

где c — первый отличный от нуля коэффициент в разложении Лорана или Тейлора функции $f(z) - a$ в окрестности начала координат.

---

[1]) Р. Неванлинна применяет также обозначения

$$m\left(R, \frac{1}{f-a}\right) = m(R, a), \quad N\left(R, \frac{1}{f-a}\right) = N(R, a)$$

и

$$m(R, f) = m(R, \infty), \quad N(R, f) = N(R, \infty).$$

При изучении функций, мероморфных на всей плоскости, R может быть взято сколь угодно большим [1]); доказывается, что, за исключением случая постоянной $f(z)$, $T(R, f)$ неограниченно возрастает одновременно с R [2]). Неравенство (53) содержит *первую основную теорему, выражающую симметрию мероморфных функций относительно различных комплексных значений a*: $T\left(R, \frac{1}{f-a}\right)$ при различных значениях a сохраняет инвариантное значение, определяемое $T(R, f)$ с точностью до ограниченного слагаемого.

Функция $T(R, f) = T(R)$ называется *характеристической функцией* мероморфной функции $f(z)$.

В первом томе [3]) доказано, что мероморфная функция имеет самое большее два исключительных (т. е. таких, которые функция не принимает) значения. Если a — такое значение, то $N\left(R, \frac{1}{f-a}\right)=0$, но вышеприведенная теорема показывает, что в этом случае $m\left(R, \frac{1}{f-a}\right)$ столь велико, что $T\left(R, \frac{1}{f-a}\right)$ отличается от $T(R, f)$ на ограниченное слагаемое. Вообще, чем меньше $m(R, a)$ при заданном значении a, тем больше $N(R, a)$ для этого значения. Исследование функций m и n позволило Р. Неванлинне глубже проникнуть при помощи второй основной теоремы в теорию исключительных значений, т. е. значений, принимаемых функцией $f(z)$ реже, чем остальные [4]).

---

[1]) Соотношение (46) остается в силе и тогда, когда на окружности $|z| = R$ функция $f(z)$ имеет нули или полюсы.

[2]) $T(R, f)$ является возрастающей функцией от R и выпуклой функцией от $\log R$.

[3]) Том I, гл. XI, § 2, п. 22, стр. 345.

[4]) Теория Р. Неванлинны применима также к некоторым функциям, мероморфным в круге. В качестве дополнения к приведенному изложению см. Nevanlinna R., Le théorème de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier — Villars, Paris, 1929, а также Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М., 1941 г. В связи с теорией Р. Неванлинны см. также гл. X, § 2 настоящего тома.

Глава II

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. РАЗЛОЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ

1. При помощи формулы Пуассона (гл. I, (25)) мы установим возможность разложения гармонической функции в ряд Фурье или Тейлора в окрестности произвольной точки области гармоничности.

Пусть $U(z)$ — функция, гармоническая в некоторой области Ω, и пусть z_0 — точка из Ω. Для простоты записи мы предположим, что $z_0 = 0$. Если $\gamma : |z| \leqslant R$ — круг достаточно малого радиуса, содержащийся в Ω, и если обозначить через $z = re^{i\varphi}$ внутреннюю точку этого круга, а через $\zeta = Re^{i\theta}$ — точку на окружности, то, применив формулу Пуассона, мы получим

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(Re^{i\theta})\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}\,d\theta. \qquad (1)$$

Разложим в ряд ядро интеграла Пуассона, рассматриваемое как функция переменных r и φ. С этой целью заметим, что рациональная функция

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)} = \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{r}{R}\right)\cos(\theta - \varphi) + \left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

разлагается, как любая рациональная функция от $\frac{r}{R}$, на простые дроби.

Для краткости введем обозначение $\theta - \varphi = \alpha$. Стоящий в знаменателе многочлен от r/R имеет корни $e^{\pm i\alpha}$, и ядро можно записать в виде

$$-1 + \frac{1}{1 - \frac{r}{R}e^{i\alpha}} + \frac{1}{1 - \frac{r}{R}e^{-i\alpha}} =$$

$$= -1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{-in\alpha} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\alpha, \qquad (2)$$

причем этот ряд сходится абсолютно при $r < R$ и равномерно при $|z| = r \leqslant R_1 < R$.

Подставляя это разложение в формулу (1) и интегрируя почленно (что допустимо, так как сходимость ряда (2) равномерна при фиксированном z и переменном ζ на окружности круга γ), получаем

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(Re^{i\theta})\,d\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(Re^{i\theta})\left(\frac{r}{R}\right)^n(\cos n\theta\cos n\varphi + \sin n\theta\sin n\varphi)\,d\theta = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi),$$

где a_n и b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ определяются формулами Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(Re^{i\theta})\cos n\theta\,d\theta,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(Re^{i\theta})\sin n\theta\,d\theta, \qquad (3)$$

и

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(Re^{i\theta})\,d\theta.$$

Чтобы все коэффициенты разложения $U(z)$ выражались при помощи формул (3), положим $\alpha_0 = \frac{a_0}{2}$.

Таким образом, для функции $U(z)$ получается разложение

$$U(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi), \qquad (4)$$

сходящееся абсолютно при $|z| = r < R$ и равномерно при $|z| = r \leqslant R_1 < R$.

Каждый член разложения (4)

$$\frac{r^n}{R^n}(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) = \operatorname{Re}\left(\frac{a_n - ib_n}{R^n}z^n\right) = \sum_{p=0}^{n} c_{p,\,n-p}x^p y^{n-p} \qquad (5)$$

является однородным гармоническим многочленом степени n относительно x и y.

Так как

$$\sum_{p=0}^{n} |c_{p,\,n-p}||x|^p |y|^{n-p} \leqslant \frac{|a_n|+|b_n|}{R^n}(|x|+|y|)^n$$

и коэффициенты a_n и b_n ограничены

$$|a_n| < M, \quad |b_n| < M,$$

то для абсолютной сходимости ряда по степеням x и y, который получается из разложения (4) после подстановки вместо общего члена многочлена (5):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n} c_{p,\,n-p}x^p y^{n-p} = \sum_{k,\,l=0}^{\infty} c_{k,\,l}x^k y^l, \tag{6}$$

достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|x|+|y| < R$. Действительно, в этом случае члены ряда (6) по модулю меньше членов абсолютно сходящегося ряда. Таким образом, сумма ряда (6) независимо от порядка слагаемых равна $U(z)$.

Итак, мы получили разложение гармонической функции $U(z)$ в ряд Тейлора по степеням x и y, сходящийся абсолютно внутри квадрата $|x|+|y| < R$, если R выбрано таким, что круг $|z| \leqslant R$ лежит в области гармоничности функции $U(z)$; этот ряд сходится равномерно внутри указанного квадрата [1]).

Вышеприведенные результаты, доказанные в предположении $z_0 = 0$, сохраняют силу для любой точки z из области гармоничности функций $U(z)$. Таким образом, можно сформулировать следующие теоремы.

1°. *Функция, гармоническая в некоторой области* Ω, *в окрестности любой точки* z_0 *из этой области разлагается в ряд* (4) *однородных гармонических многочленов* (5), *сходящийся равномерно в* $|z-z_0| = r \leqslant R_1 < R$.

Здесь R выбирается таким образом, чтобы круг $|z-z_0| \leqslant R$ содержался в Ω, $z-z_0 = re^{i\varphi}$, $\zeta - z_0 = Re^{i\theta}$, причем в формулах (3) следует заменить $U(Re^{i\theta})$ на $U(\zeta)$.

2°. *Гармоническая функция* $U(z) = U(x, y)$ *разлагается в ряд Тейлора*

$$\sum_{k,\,l=0}^{\infty} c_{k,\,l}(x-x_0)^k (y-y_0)^l \tag{7}$$

в окрестности любой точки (x_0, y_0) *ее области гармоничности, причем этот ряд сходится абсолютно по крайней*

[1]) Относительно равномерной сходимости внутри области см. том I, гл. V, § 1, п. 1, стр. 158—159.

мере в области

$$|x-x_0|+|y-y_0|<R \qquad (R>0).$$

2. Отметим три следствия этой теоремы.

1°. *Гармоническая функция аналитична относительно действительных переменных x и y.*

2°. *Следовательно, гармоническая функция имеет частные производные любого порядка.*

Частные производные гармонической функции по x и y также являются гармоническими функциями.

Действительно, так как можно изменить порядок дифференцирования, то

$$\Delta\frac{\partial^{p+q}U}{\partial x^p\,\partial y^q}=\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\,\partial y^q}\Delta U=0$$

при любых целых неотрицательных p и q.

Если положить $z=re^{i\varphi}$ и записать уравнение Лапласа в полярных координатах (гл. I, (2)), то можно заключить, что $\partial U/\partial\varphi$ является гармонической, а $\partial U/\partial r$ — нет. Однако заметим, что функция $r\partial U/\partial r$ гармонична.

3°. *Продолжение гармонической функции единственно.*

Если гармоническая в области Ω функция $U(z)$ тождественно равна нулю в произвольно малой области $\delta\subset\Omega$, то $U(z)\equiv 0$ во всей области Ω.

3. Так же как интегральная формула Коши[1]), формула Пуассона используется для установления одной теоремы о равномерно сходящихся рядах гармонических функций, аналогичной теореме Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty}U_n(z)$*—ряд функций, гармонических в области* Ω, *сходящийся равномерно внутри этой области. Тогда*:

1) *сумма этого ряда* $U(z)$ *является гармонической функцией в области* Ω;

2) *ряд можно дифференцировать почленно, причем сумма ряда из производных также гармонична в* Ω;

3) *ряд из производных любого порядка сходится равномерно внутри области* Ω.

1) По предположению, заданный ряд сходится равномерно в любой компактной подобласти $\overline{\Delta}$ из Ω. Около каждой точки $z_0\in\Omega$ опишем окружность $\gamma:|\zeta-z_0|=R$ так, чтобы круг $|\zeta-z_0|\leqslant R$ лежал внутри Ω, и напишем формулу Пуассона

[1]) Том I, гл. V, § 1, стр. 158—160.

(гл. I, (25)) для каждой из функций

$$U_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_n(\zeta)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta. \tag{8}$$

Так как сумма $\sum_{n=0}^{\infty}U_n(z)$ сходится равномерно на окружности γ, то мы можем изменить порядок суммирования и интегрирования. Следовательно, имеем

$$U(z)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}U_n(\zeta)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\zeta)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta. \tag{9}$$

Таким образом, функция $U(z)$ выражается внутри окружности γ при помощи формулы Пуассона.

Так как $U(\zeta)$ — непрерывная функция, а ядро интеграла Пуассона — гармоническая функция от z, то

$$\Delta U(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\zeta)\Delta N(\zeta,\ z)\,d\theta=0.$$

Так как z_0 — произвольная точка Ω, то утверждение 1) доказано.

2) Применяя соотношение (8), мы получаем для частных производных различных порядков функций $U_n(z)$ по x и y интегральные выражения, в которые входят те же производные ядра интеграла Пуассона:

$$\frac{\partial^{p+q}U_n(z)}{\partial x^p\,\partial y^q}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_n(\zeta)\frac{\partial^{p+q}N(\zeta,\ z)}{\partial x^p\,\partial y^q}\,d\theta; \tag{10}$$

эти выражения справедливы в любой точке круга, ограниченного окружностью γ.

Из (9) следует, что $U(z)$ удовлетворяет аналогичному условию; учитывая это и снова используя равномерную сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}U_n(\zeta)$ на γ, заключаем, что

$$\frac{\partial^{p+q}U(z)}{\partial x^p\,\partial y^q}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^{p+q}U_n(z)}{\partial x^p\,\partial y^q}.$$

Следовательно, ряд производных любого порядка сходится и имеет в качестве суммы производную того же порядка суммы заданного ряда.

3) Из той же равномерной сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(\zeta)$ и из соотношений (10) следует равномерная сходимость ряда производных в круге с границей γ. Для доказательства равномерной сходимости этого ряда внутри области Ω достаточно заметить, что центр z_0 окружности γ является произвольной точкой в Ω и что, согласно теореме Бореля — Лебега, любая лежащая в Ω компактная область $\overline{\Delta}$ может быть покрыта конечным числом кругов, в которых рассматриваемый ряд сходится равномерно.

4. *Замечание* 1. Если задан ряд вида (4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \tag{11}$$

и если ряды $\sum_{n=0}^{\infty} x^n a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} x^n b_n$ имеют общую область сходимости, т. е. оба ряда сходятся при $|x| < \rho$, где ρ фиксировано, то ряд (11) представляет гармоническую функцию в $|z| = r < \rho$. Действительно, этот ряд сходится равномерно внутри круга $|z| < \rho$ и состоит, согласно соотношению (5), из гармонических членов [1]).

Замечание 2. Для того чтобы ряд $\sum_{n=0} U_n(z)$, члены которого гармоничны в D и непрерывны в $D + C = \overline{D}$, сходился равномерно в $\overline{D}$, *достаточно*, чтобы этот ряд сходился равномерно на C.

Действительно, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, при достаточно большом n имеем на C

$$|U_n(\zeta) + U_{n+1}(\zeta) + \ldots + U_{n+p}(\zeta)| < \varepsilon,$$

и так как функция $U_n(z) + U_{n+1}(z) + \ldots + U_{n+p}(z)$ гармонична в D и непрерывна в $\overline{D}$, то из принципа максимума и минимума следует, что в $\overline{D}$

$$|U_n(z) + U_{n+1}(z) + \ldots + U_{n+p}(z)| < \varepsilon.$$

Однако равномерная сходимость ряда производных обеспечена лишь внутри области D.

5. В случае рядов неотрицательных гармонических функций общая теорема, доказанная в п. 3, может быть дополнена теоремой Гарнака.

[1]) Ряд (11) может сходиться и вне круга $|z| = r < \rho$. См., например, Picard E., Traité d'analyse, t. II, p, 52.

Формула Пуассона дает возможность установить для гармонических функций, неотрицательных в круге, двойное неравенство, которое, очевидно, справедливо для всех ограниченных снизу гармонических функций, так как эти функции становятся неотрицательными, если прибавить к ним некоторые постоянные.

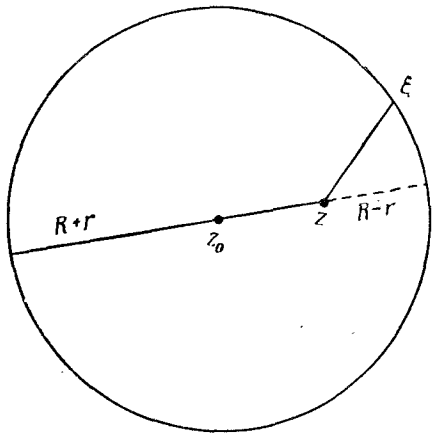

Рис. 5.

Пусть $U(z) \geqslant 0$ *—функция, гармоническая в круге* $|z-z_0| = r \leqslant R$. *Тогда*

$$U(z_0)\frac{R-r}{R+r} \leqslant U(z) \leqslant U(z_0)\frac{R+r}{R-r}. \tag{12}$$

Действительно, из формулы Пуассона (гл. I, (25)) следует, что

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\zeta)\frac{R^2-r^2}{|\zeta-z|^2}\,d\theta.$$

Из рис. 5 видно, что $R-r \leqslant |\zeta-z| \leqslant R+r$, а, следовательно, ядро интеграла Пуассона удовлетворяет при любом $|z-z_0| = r < R$ неравенствам

$$\frac{R-r}{R+r} \leqslant \frac{R^2-r^2}{|\zeta-z|^2} \leqslant \frac{R+r}{R-r}.$$

Так как $U(\zeta) \geqslant 0$, имеем

$$\frac{R-r}{R+r}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\zeta)\,d\theta \leqslant U(z) \leqslant \frac{R+r}{R-r}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\zeta)\,d\theta$$

и, применяя формулу среднего значения (гл. I, (18)), получаем неравенство (12).

6. При помощи неравенств (12) мы докажем *теорему Гарнака.*

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(z)$ *— ряд гармонических функций, неотрицательных в некоторой области* Ω. *Если этот ряд сходится в некоторой точке* z_0 *области* Ω, *то он сходится равномерно внутри этой области.*

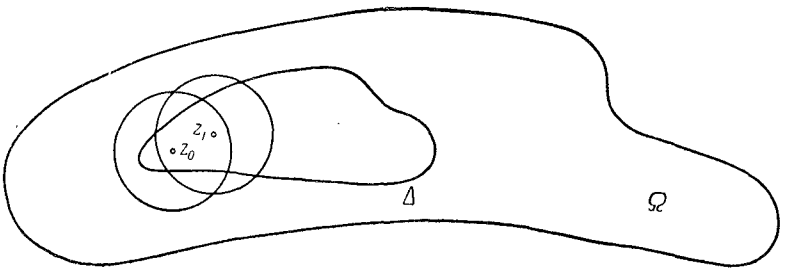

Рис. 6.

Рассмотрим снова окружность $\gamma : |\zeta - z_0| = R$, лежащую в Ω вместе с ограничиваемым ею кругом. Из неравенств (12) и из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(z_0)$ следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(z)$ сходится равномерно в круге $|z - z_0| \leqslant r \leqslant \frac{R}{2}$. Любая точка z_1 из этого круга может играть теперь роль z_0. Это значит, что можно доказать равномерную сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(z)$ в надлежащим образом выбранном круге $|z - z_1| \leqslant \frac{R_1}{2}$. Этот процесс может быть повторен неограниченное число раз. Равномерная сходимость заданного ряда в любой замкнутой и ограниченной области $\bar{\Delta}$, лежащей в Ω, доказывается при помощи покрытия $\bar{\Delta}$ конечным числом кругов, в которых ряд сходится равномерно, что возможно согласно теореме Бореля — Лебега (рис. 6).

7. Другим следствием неравенств (12) является результат, аналогичный теореме Лиувилля [1]).

Функция $U(z)$, *гармоническая и ограниченная снизу (или сверху) на всей конечной плоскости* z, *является постоянной.*

Можно предположить, что $U(z) \geqslant 0$, так как общий случай сводится к этому путем прибавления подходящей постоянной.

[1]) Том I, гл. III, § 3, п. 46, стр. 125—126.

Если функция $U(z)$ не равна постоянной, то существуют две точки z_1 и z_2, в которых она принимает различные значения. Вычитая друг из друга неравенства (12), выписанные для точек z_1 и z_2, для достаточно большого R (такого, что круг $|\zeta - z_0| < R$ содержит z_1 и z_2) и для $r = \max(|z_1 - z_0|, |z_2 - z_0|)$, получаем

$$|U(z_1) - U(z_2)| \leqslant \frac{4Rr}{R^2 - r^2} U(z_0).$$

Так как R может быть взято сколь угодно большим, то разность $U(z_1) - U(z_2)$ должна быть равна нулю, что противоречит сделанному предположению.

Для ограниченной сверху функции $U(z)$ теорема доказывается путем применения того же рассуждения к функции $-U(z)$.

§ 2. ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА

8. В главе I, § 4, п. 15 мы доказали, что гармоническая в круге $|z| \leqslant R$ функция $U(z)$ выражается через свои значения на окружности $|z| = R$ при помощи интегральной формулы Пуассона (гл. I, (25)). Теперь мы исследуем интеграл Пуассона независимо от гармонической функции, заданной в $|z| \leqslant R$, исходя только из распределения значений $f(\theta) = f(Re^{i\theta})$ на границе этой области и рассматривая интеграл Пуассона как функционал от $f(\theta)$:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)} f(\theta)\, d\theta. \qquad (13)$$

С этой целью предположим, что $f(\theta)$ *абсолютно интегрируема*[1], когда θ меняется между 0 и 2π, т. е. что интеграл

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta)|\, d\theta$$

существует и конечен. Это условие выполнено, в частности, тогда, когда $f(\theta)$ ограничена и интегрируема или когда $f(\theta)$ непрерывна.

Функция $\varphi(z)$ является гармонической в круге $|z| < R$.

Действительно, ядро интеграла Пуассона, которое мы будем обозначать через $N(z, \zeta)$ или $N(x, y, \theta)$, является, согласно соотношению (26) гл. I, гармонической функцией от z и, следовательно, бесконечно дифференцируемо по x и y (п. 2, 2°).

Для того чтобы установить существование частной производной $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ заметим, что если применить формулу конечных прира-

[1]) Можно предполагать, что функция абсолютно интегрируема по Лебегу.

щений, то разность

$$\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[N(x+\Delta x,\ y,\ \theta)-N(x,\ y,\ \theta)]\,f(\theta)\,d\theta$$

запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N'_x(x^*,\ y,\ \theta)\,f(\theta)\,d\theta, \tag{14}$$

где x^* — некоторое значение из интервала $(x,\ x+\Delta x)$.

Из равномерной непрерывности функции $N'_x(x,\ y,\ \theta)$ следует, что предел выражения (14) при $\Delta x\to 0$ существует и равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N'_x(x,\ y,\ \theta)\,f(\theta)\,d\theta. \tag{15}$$

Действительно, если Δx достаточно мало, то

$$|N'_x(x^*,\ y,\ \theta)-N'_x(x,\ y,\ \theta)|<\varepsilon$$

при любом $\varepsilon>0$ и разность интегралов (14) и (15) по абсолютной величине меньше, чем $\varepsilon\int_0^{2\pi}|f(\theta)|\,d\theta$, а следовательно, может быть сделана сколь угодно малой.

Аналогичным образом устанавливается существование остальных частных производных функции $\varphi(z)$, а также соотношение

$$\Delta\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta N f(\theta)\,d\theta=0,$$

которое доказывает наше утверждение.

9. Если рассматривать общий случай произвольной функции $f(\theta)$, абсолютно интегрируемой на интервале $(0,\ 2\pi)$, то функция $\varphi(z)$ не обязательно стремится к $f(\theta)$ при стремлении z к $\zeta=Re^{i\theta}$. Это следует из того, что $\varphi(z)$ не меняется при изменении значения $f(\theta)$ на множестве меры нуль, в частности, в точке.

Относительно предельных значений функции $\varphi(z)$, когда z стремится к точке на окружности, мы докажем следующую теорему.

В любой точке $\zeta_0=Re^{i\theta_0}$ на окружности $|z|=R$, в которой $f(\theta)$ непрерывна,

$$\lim_{z\to\zeta_0}\varphi(z)=f(\theta_0). \tag{16}$$

Способ доказательства этой теоремы, принадлежащий Г. Шварцу, применялся впоследствии в различных случаях.

Разобьем окружность $|\zeta| = R$ на дугу s, содержащую ζ_0, на которой θ меняется между $\theta_0 - h$, и $\theta_0 + h$, и дополнительную дугу S. Число $h > 0$ выбирается достаточно малым, чтобы колебание функции $f(\theta)$ на дуге s было меньше произвольного заданного $\varepsilon > 0$. Применяя формулу Пуассона к гармонической функции $U(z) = 1$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi)}\, d\theta = 1, \tag{17}$$

и, следовательно,

$$\varphi(z) - f(\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(z, \zeta)\,[f(\theta) - f(\theta_0)]\, d\theta. \tag{18}$$

Представим последний интеграл в виде суммы интеграла I_1 вдоль дуги s и интеграл I_2 вдоль S и оценим отдельно эти интегралы. Согласно предположению о колебании функции $f(\theta)$ на дуге s и соотношению (17), имеем

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_s N(z, \zeta)\, d\theta < \varepsilon. \tag{19}$$

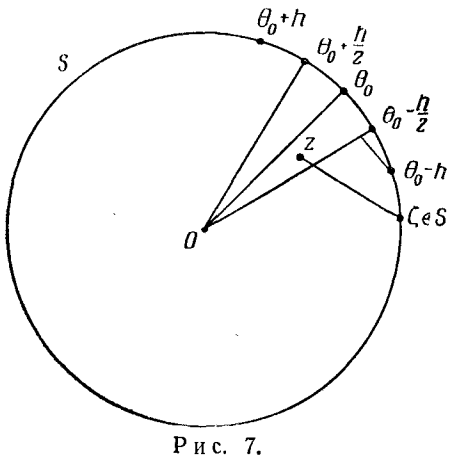

Рис. 7.

Пусть δ — расстояние от дуги S до сектора круга $|z| \leqslant R$, соответствующего дуге $\left[\theta_0 - \frac{h}{2},\ \theta_0 + \frac{h}{2}\right]$. Если z принадлежит внутренности этого сектора и ζ — точка на S, то знаменатель ядра интеграла Пуассона $|\zeta - z|^2$ превосходит $\delta^2 > 0$ (рис. 7).

Следовательно, при этих предположениях

$$|I_2| < \frac{R^2 - r^2}{2\pi\delta^2}\left(\int_S |f(\theta)|\,d\theta + \int_S |f(\theta_0)|\,d\theta\right) < (R^2 - r^2)\,k, \quad (20)$$

где k — надлежащим образом выбранная постоянная.

Когда точка z стремится к ζ_0, то, начиная с некоторого момента, она остается в указанном секторе и поэтому имеет место неравенство (20); так как при этом r стремится к R, то $|I_2|$ может быть сделан меньше ε.

Итак,

$$|I_1 + I_2| < 2\varepsilon,$$

как только z достаточно близко к ζ_0, что и доказывает теорему.

Изменив подходящим образом рассуждения Шварца, П. Фату[1]) обобщил эту теорему.

Пусть $f(\theta)$ — *ограниченная интегрируемая функция и*

$$F(\theta) = \int_0^\theta f(u)\,du.$$

В любой точке θ_0, *в которой* $f(\theta_0) = F'(\theta_0)$, *интеграл Пуассона* $\varphi(z)$ *стремится к* $f(\theta_0)$ *при стремлении* z *к* $Re^{i\theta_0}$ *по радиусу.*

§ 3. ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И ПРИНЦИПА МАКСИМУМА И МИНИМУМА

10. Предыдущие теоремы о $\varphi(z)$ показывают, что задача Дирихле в ее классическом виде, когда граничная функция $f(\theta)$ непрерывна, решается для круга при помощи интегральной формулы Пуассона.

Более того, эта задача разрешима для любой жордановой области D, ограниченной контуром C. Действительно, конформное отображение области D плоскости (z) на круг $|Z| < R$

$$Z = F(z),$$

продолженное на границу, устанавливает топологическое соответствие между замкнутыми областями $\overline{D}$ и $|Z| \leqslant R$, при котором границы соответствуют друг другу[2]).

Непрерывная функция на контуре C определяет непрерывную функцию на окружности $|Z| = R$, и, используя интеграл Пуассона,

[1]) См. Fatou P. Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.*, 30 (1906), 335—400, или Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 2, М.—Л., 1950, гл. I, § 1, стр. 52—56 и § 5, стр. 66—70.

[2]) Том I, гл. IX, § 3, стр. 271—276.

мы получаем гармоническую в $|Z| < R$ функцию $\varphi(Z)$, принимающую соответствующие значения на $|Z| = R$.

Так как свойство гармоничности является конформным инвариантом (гл. I, § 4, п. 13), то функция $U(z) = \varphi[F(z)]$ также гармонична в D и поэтому решает задачу Дирихле для жордановой области D.

11. Задачу Дирихле можно сформулировать в более общей форме, допуская в качестве граничного значения функцию $f(\zeta)$ с конечным числом разрывов. В этом случае требуется *определить такую гармоническую в D функцию $U(z)$, что в каждой точке $\zeta_0 \in C$, в которой $f(\zeta)$ непрерывна,*

$$\lim_{z \to \zeta_0} U(z) = f(\zeta_0) \qquad (z \in D).$$

В точках разрыва функции $f(\zeta)$ не налагается никаких условий.

В случае круга обобщенная таким образом задача Дирихле допускает решение, выражаемое интегралом Пуассона.

Пользуясь этим результатом и повторяя вышеприведенное рассуждение, основанное на свойствах конформного отображения жордановой области на круг, мы убеждаемся, что решение обобщенной задачи Дирихле существует и в случае произвольной жордановой области D.

12. В гл. I, § 3, п. 11 мы доказали, что решение задачи Дирихле в случае непрерывных данных на контуре единственно. Этот результат не имеет места для задачи Дирихле, обобщенной в указанном смысле.

Пусть, например, область D представляет собой круг $\left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ и $f(\zeta) = 0$ на всей окружности C, за исключением точки $\zeta = i$. Тогда решением обобщенной задачи Дирихле является не только функция $U_1(z) \equiv 0$, но и функция

$$U_2(z) = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (1-y)^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{iz}{1+iz}\right),$$

равная нулю на C, за исключением точки $\zeta = i$. Заметим, что функция $U_2(z)$ не ограничена в D[1]).

---

[1]) Другие такие примеры можно получить, если взять произвольную жорданову область D и рассматривать функцию $Z = F(z)$, конформно отображающую эту область на верхнюю полуплоскость $Y > 0$. Пусть $\zeta_0 \in C$ — точка, которая переходит при этом отображении в $Z = \infty$, и пусть $\Phi(Z)$ — целая функция, принимающая действительные значения на действительной оси. Тогда решением обобщенной задачи Дирихле для области D и граничного значения $f(\zeta) = 0$ на C, за исключением точки ζ_0,

Ниже мы введем условие ограниченности решения обобщенной задачи Дирихле и установим в этом случае единственность решения [1]).

Так же как в гл. I, § 3, п. 11, доказательство будет основано на принципе максимума и минимума, который мы применим тоже в обобщенном виде.

13. Обобщенный принцип максимума и минимума. В гл. I, § 3, п. 10 мы доказали, что гармоническая в некоторой области функция не может иметь локальных максимумов и минимумов во внутренних точках этой области и что максимумы и минимумы функции, гармонической в замкнутой области и не равной тождественно постоянной, достигаются на границе этой области. Сформулируем теперь принцип максимума и минимума в случае открытой области.

Пусть $U(z)$ — *функция, гармоническая в области* Ω. *Если для любой точки* ζ *на границе* Ω *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует окрестность точки* ζ *относительно* Ω [2]), *в которой*

$$U(z) < M + \varepsilon \qquad (\text{или } U(z) > m - \varepsilon), \tag{21}$$

то

$$U(z) \leqslant M \qquad (\text{или } U(z) \geqslant m) \tag{22}$$

в Ω [3]).

Действительно, функция $U(z)$ имеет в области Ω верхнюю грань $\sup U(z)$; значит, существуют последовательность точек $z_n \in \Omega$, такая, что $U(z_n) \to \sup U(z)$ $(n \to \infty)$. Последовательность z_n обладает в $\overline{\Omega}$ по крайней мере одной предельной точкой z_0. Точка z_0 принадлежит границе области Ω, так как если бы она лежала внутри Ω, то $U(z)$ имела бы в z_0 локальный максимум в широком смысле, что противоречило бы принципу максимума [4]). Однако, по предположению, если z_0 — граничная точка области Ω, то существует окрестность точки z_0 относи-

---

является как функция $U_1(z) = 0$, так и функция $U_2(z) = \operatorname{Im}\{\Phi[F(z)]\}$. Очевидно, что выбор полуплоскости на плоскости (Z) произволен. В приведенном в тексте примере функция $F(z) = \dfrac{iz}{1+iz}$ отображает область D на левую полуплоскость $\operatorname{Re} Z < 0$. В этом случае функция $\Phi(Z)$ должна быть целой и принимать на мнимой оси чисто мнимые значения. В приведенном примере $\Phi(Z) = Z$, а $U_2(z) = \operatorname{Re}\{\Phi[F(z)]\}$.

[1]) Очевидно, что для существования ограниченного решения необходимо, чтобы функция $f(\zeta)$ была ограниченной.

[2]) Если область Ω неограничена, то условие (21) должно быть выполнено в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки. — *Прим. перев.*

[3]) Эта теорема соответствует принципу Фрагмена — Линделёфа в теории аналитических функций (том I, гл. IX, § 2, п. 5, стр. 260—272).

[4]) Предполагается, что $U(z) \neq \text{const}$.

тельно Ω, в которой $U(z)$ удовлетворяет неравенству (21). Так как ε может быть взято произвольно малым, то

$$\sup_{z\in\Omega} U(z) \leqslant M, \quad \text{или} \quad U(z) \leqslant M \quad \text{при} \quad z \in \Omega.$$

Аналогично доказывается неравенство $U(z) \geqslant m$ в Ω.

14. Для *ограниченных гармонических функций* доказанная теорема справедлива и в том случае, когда неравенство (21) имеет место во всех граничных точках, за исключением конечного числа. Поэтому можно сформулировать *обобщенный принцип максимума и минимума.*

Если гармоническая в области Ω функция $U(z)$ обладает следующими свойствами:

1) *для любой точки ζ границы области Ω, за исключением конечного числа точек ζ_k ($k = 1, 2, \ldots, N$), и при любом $\varepsilon > 0$ существует окрестность точки ζ относительно Ω, в которой*

$$U(z) < M + \varepsilon \quad (\text{или } U(z) > m - \varepsilon);$$

2) *функция $U(z)$ ограничена сверху (или снизу) в Ω, то в любой точке $z \in \Omega$ имеем*

$$U(z) \leqslant M \quad (\text{или } U(z) \geqslant m).$$

а) Предположим сначала, что область Ω ограничена.

В этом случае можно выбрать достаточно большую положительную постоянную δ, такую, что гармоническая в Ω функция

$$h(z) = -\delta + \sum_{k=1}^{n} \log|z - \zeta_k|$$

отрицательна в Ω.

Пусть α — произвольное положительное число. Функция $U(z) + \alpha h(z)$, также гармоническая в Ω, удовлетворяет условию 1) в любой точке ζ границы области Ω без исключений. В случае $\zeta \neq \zeta_k$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) это следует из неравенства $h(z) < 0$ при $z \in \Omega$ и из предположения 1), которому удовлетворяет $U(z)$; в случае же исключительных точек условие 1) выполняется благодаря тому, что $h(z)$ стремится к $-\infty$ при стремлении z к ζ_k, тогда как $U(z)$ ограничена сверху в Ω. Применяя принцип максимума в том виде, как он был доказан в п. 13, мы убеждаемся, что

$$U(z) + \alpha h(z) \leqslant M$$

в области Ω. Так как это неравенство остается справедливым при стремлении положительного числа α к 0, то $U(z) \leqslant M$ в Ω, что доказывает принцип максимума для ограниченных областей Ω.

b) Если область Ω неограничена, но существует внешняя по отношению к Ω точка z_0, то преобразование $z' = \frac{1}{z - z_0}$ переводит область Ω в ограниченную область Ω', а условия, приведенные в формулировке теоремы, остаются в силе для Ω'. Таким образом, этот случай сводится к предыдущему.

c) Наконец, если область Ω не имеет внешних точек, то удалим из нее круг γ. Область $\Omega - \gamma$ удовлетворяет условию b); следовательно, в $\Omega - \gamma$ имеем $U(z) \leqslant M'$, где M' — наибольшее из чисел M и $M_1 = \max U(z)$ (максимум берется по всем z на окружности γ).

Если бы M_1 было больше, чем M, то $U(z)$ принимала бы максимальное значение в некоторой точке на окружности. Эта точка была бы локальным максимумом, лежащим внутри области гармоничности, что невозможно. Следовательно, $M_1 \leqslant M$. Итак, теорема доказана также и в случае c).

Замечание. Пример, рассмотренный в п. 12, показывает, что предположение 2) об ограниченности функции $U(z)$ необходимо для справедливости обобщенного принципа максимума и минимума. В этом примере Ω совпадает с кругом D, а $M = m = 0$ для любой точки $\zeta \neq i$ на окружности C. Хотя гармоническая функция $U_2(z)$ и удовлетворяет условию 1), она не ограничена в D и поэтому не может быть ограниченной сверху и снизу в D своими максимумом и минимумом, взятыми по C, за исключением точки $\zeta = i$. Этим объясняется то, что функция $U_2(z)$ не равна тождественно нулю.

15. Теперь мы в состоянии доказать, что обобщенная в смысле п. 11 задача Дирихле обладает единственным ограниченным решением. Действительно, пусть $U_1(z)$ и $U_2(z)$ — два таких решения; их разность — ограниченная гармоническая функция в области D; к ней применима теорема п. 14 при $M = m = 0$. Следовательно, $U_1(z) - U_2(z) = 0$ в области D, т. е. эти решения совпадают.

В п. 11 мы убедились в том, что интеграл Пуассона дает решение обобщенной задачи Дирихле в случае круга. Ядро интеграла Пуассона положительно; поэтому если на окружности задана ограниченная функция $f(\zeta) = f(\theta)$, непрерывная, за исключением конечного числа точек, то интеграл Пуассона ограничен сверху (соответственно снизу) верхней (соответственно нижней) гранью $f(\zeta)$. Тогда из доказанной выше теоремы единственности следует, что интеграл Пуассона дает единственное ограниченное решение соответствующей задачи Дирихле. Аналогично в случае произвольной жордановой области решение обобщенной задачи Дирихле для ограниченной функции $f(\zeta)$, непрерывной, за исклю-

чением конечного числа точек, которое получается путем сведения этой задачи к случаю круга при помощи конформного отображения, является единственным ограниченным решением [1]).

16. При стремлении $z \in D$ к точке $\zeta \in C$, в которой $f(\zeta)$ непрерывна, решение задачи Дирихле $U(z)$ стремится к $f(\zeta)$. В точках разрыва $f(\zeta)$ функция $U(z)$ может не стремиться ни к какому пределу, но ее значения заключены между верхней и нижней гранью $f(\zeta)$ на C.

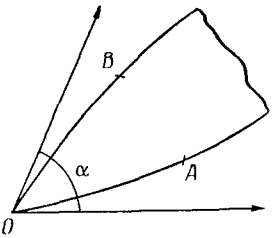

Рис. 8.

Рассмотрим теперь пример, иллюстрирующий поведение решения $U(z)$ в окрестности точки разрыва первого рода функции $f(\zeta)$.

Пусть D — область, граница которой содержит две дуги, пересекающиеся в точке O и обладающие в O вполне определенными касательными, образующими угол $\alpha \neq 0$. Обозначим через A и B две точки, расположенные на этих двух дугах. Для простоты будем считать, что O — начало координат и что касательная в O к дуге OA совпадает с положительной действительной полуосью, причем α — угол между осью Ox и касательной в O к дуге OB (рис. 8).

Предположим, что O — точка разрыва первого рода для $f(\zeta)$. Пусть

$$a = \lim_{\zeta \to 0} f(\zeta) \text{ по дуге } AO,$$

$$b = \lim_{\zeta \to 0} f(\zeta) \text{ по дуге } BO.$$

Функция $\frac{b-a}{\alpha} \arg z + a$ гармонична в D, так как $\arg z$ совпадает с мнимой частью аналитической функции $\log z$; кроме того,

---

[1]) Можно заметить, что доказательство теоремы единственности справедливо не только для жордановых областей, но и для любых областей. Однако в этом случае формулировка задачи Дирихле нуждается в некоторых уточнениях, которые мы не можем привести здесь и которые изучаются специально в теории обобщенной задачи Дирихле.

См., например, Kellog O. D., Foundations of potential theory, Berlin, 1929; Vasilesco Fl., La notion de point irrégulier dans le problème de Dirichlet, Actualités scientifiques et industrielles, nr. 660, Paris, 1938, или Brelot M., La théorie moderne du potentiel, *Ann. de l'Inst. Fourier*, IV (1952), 112—140; эта работа снабжена обширной библиографией. Относительно аксиоматизации задачи Дирихле см. Boboc N. et Radu N., Une classe de fonctions définies sur des variétés topologiques triangulables. Mesures associées-Fonctions de Green associées, *Rev. de Math. pures et appl.*, III, 2 (1958), 309—323.

она непрерывна на дугах AO и BO, за исключением точки O, где обладает разрывом первого рода с тем же скачком, что и $f(\zeta)$[1]).

Следовательно, гармоническая в D функция

$$U(z)-\left(\frac{b-a}{\alpha}\arg z+a\right)$$

непрерывна на дугах AO и BO, включая и точку O, которой соответствует значение 0. Согласно свойству решения задачи Дирихле, эта функция стремится к нулю при стремлении $z\in D$ к точке O.

Таким образом, при стремлении $z\in D$ к O по непрерывному пути CO, касательная к которому в O образует с OA угол $\theta\alpha\,(0<\theta<1)$, предел функции $U(z)$ равен $(b-a)\theta+a$. Так как θ может принимать любое значение между 0 и 1, то при стремлении z к O по различным путям $U(z)$ может стремиться к любому значению между a и b. Очевидно, что если z стремится к O по непрерывному пути, не имеющему касательной в точке O, то $U(z)$ не стремится ни к какому определенному пределу.

В §§ 4 и 5 мы используем возможность выразить решение задачи Дирихле в случае круга при помощи интеграла Пуассона для доказательства других свойств гармонических функций.

§ 4. ПРОДОЛЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

17. *Пусть Ω — область, граница которой содержит прямолинейный отрезок σ, и пусть $U(z)$ — функция, гармоническая в Ω и непрерывная в $\Omega+\sigma$. Если $U(z)$ равна нулю на σ, то она продолжается гармонически через σ в область Ω', симметричную области Ω относительно σ, и принимает в симметричных относительно σ точках противоположные значения.*

Предположим, что отрезок σ лежит на действительной оси[2]) (рис. 9).

Функция $U^*(z)$, определенная в области $\Omega+\sigma+\Omega'$ следующим образом:

$$U^*(z)=U(z)=U(x,\ y) \qquad \text{при} \quad z\in\Omega+\sigma,$$

$$U^*(z)=-U(\bar{z})=-U(x,\ -y) \qquad \text{при} \quad z\in\Omega',$$

непрерывна в этой области и гармонична в Ω и Ω'.

Докажем, что $U^*(z)$ является гармонической также и на σ. Пусть p — точка на σ и γ — окружность $|\zeta-p|=R$, причем

[1]) Действительно, при $\zeta\to 0$ по AO имеем $\arg\zeta\to 0$, а при $\zeta\to 0$ по BO имеем $\arg\zeta\to\alpha$, причем каждый раз значение аргумента берется в промежутке $[0,\ 2\pi)$.

[2]) Общий случай сводится к этому при помощи параллельного переноса и вращения.

радиус R достаточно мал, так что круг $\delta: |\zeta - p| \leqslant R$ лежит в области $\Omega + \sigma + \Omega'$. Достаточно доказать, что функция $U^*(z)$ является гармонической внутри δ. Для этого мы построим при помощи интеграла Пуассона гармоническую внутри δ функцию $u(z)$, принимающую на γ те же значения, что и $U^*(z)$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)} U^*(\zeta)\, d\theta,$$

где $z = p + re^{i\varphi}$, $\zeta = p + Re^{i\theta}$.

Так как в точках, симметричных относительно действительной оси, $U^*(\zeta)$ принимает противоположные значения, а ядро принимает равные значения при действительном z, то $u(z)$ обращается в нуль на действительной оси.

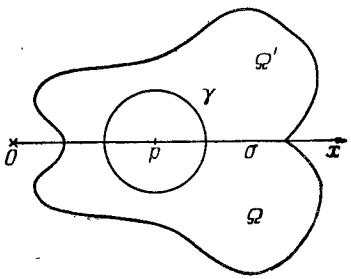

Рис. 9.

Следовательно, функции $U^*(z)$ и $u(z)$, гармонические в нижнем полукруге, совпадают на его границе. Согласно принципу максимума и минимума, они совпадают во всем нижнем полукруге. Аналогичным образом доказывается, что они совпадают и в верхнем полукруге. Так как функция $U^*(z)$ равна $u(z)$ в δ, то она гармонична в точке $z = p$.

18. Так же как и для аналитических функций[1]), теорема о гармоническом продолжении распространяется на случай, когда σ является дугой окружности или вообще аналитической дугой.

Справедливы следующие результаты.

Если функция $U(z)$, гармоническая в области Ω, граница которой содержит дугу окружности σ, непрерывна в $\Omega + \sigma$ и равна нулю на σ, то $U(z)$ продолжается гармонически через σ (и принимает противоположные значения в симметричных относительно σ точках).

Для доказательства этого предложения достаточно осуществить линейное преобразование, переводящее дугу окружности σ в прямолинейный отрезок, и применить предыдущую теорему.

19. *Функция $U(z)$, гармоническая в области Ω, граница которой содержит аналитическую дугу σ, непрерывная в $\Omega + \sigma$ и равная нулю на σ, продолжается гармонически через дугу σ.*

---

[1]) Том I, гл. IV, § 3, стр. 147—152.

В этом общем случае утверждается лишь возможность продолжения функции, без указания эффективного способа продолжения. Доказательство снова состоит в сведении задачи к случаю прямолинейного отрезка.

Пусть ζ_0 — точка на σ, и пусть

$$z = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) t^n \qquad (\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0) \tag{23}$$

— параметрическое представление дуги σ в окрестности ζ_0 (гл. I, (5)). Если t описывает отрезок действительной оси в окрестности начала координат плоскости (t), то z описывает участок дуги σ около точки ζ_0 (рис. 10).

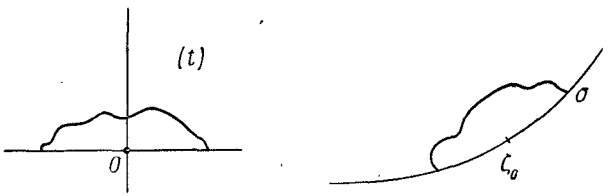

Рис. 10.

Если рассматривать t как комплексную переменную, то функция $z(t)$, определяемая соотношением (23), голоморфна в окрестности точки $t = 0$. Согласно предположению $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$ [1]) (которое эквивалентно $z'(0) \neq 0$), обратная функция $t(z)$ голоморфна в окрестности точки ζ_0. Эта функция конформно отображает [2]) некоторую окрестность точки ζ_0 на окрестность точки $t = 0$. Таким образом, дуга σ преобразуется локально в отрезок действительной оси, а $U(z)$ — в гармоническую функцию, к которой применима теорема о продолжении в ее первоначальном виде. Следовательно, $U(z)$ продолжается гармонически через σ в окрестности точки ζ_0.

Замечание. Приведенная теорема дает возможность утверждать, что формула (22) гл. I применима в случае области, ограниченной конечным числом аналитических простых замкнутых кривых C, так как соответствующая функция Грина продолжается гармонически через C.

20. Наконец, теорему о продолжении можно сформулировать в еще более общем виде, когда функция $U(z)$, рассматриваемая на дуге σ, аналитически зависит от параметра t этой дуги.

Пусть Ω — область, граница которой содержит аналитическую дугу σ с параметром t. Функция $U(z)$, гармоническая

[1]) Том I, гл. X, § 1, п. 1, стр. 286.
[2]) Том I, гл. III, § 1, п. 3—4, стр. 79—80 и § 3, п. 44, стр. 123—124.

в Ω, *непрерывная в* $\Omega + \sigma$ *и аналитически зависящая от* t *на* σ, *продолжается гармонически через* σ.

Достаточно доказать эту теорему в случае, когда σ — отрезок действительной оси, и применить предыдущие рассуждения.

Пусть x — параметр на σ, и пусть $U(z) = \varphi(x)$ на σ, где $\varphi(x)$ — аналитическая функция. Функция $\varphi(z)$ существует и голоморфна в некоторой окрестности отрезка σ, а, следовательно, $\operatorname{Re}[\varphi(z)]$ гармонична в этой окрестности. Так как $\varphi(x) = \operatorname{Re}[\varphi(x)]$ на σ, то функция

$$W(z) = U(z) - \operatorname{Re}[\varphi(z)]$$

гармонична в Ω, непрерывна в $\Omega + \sigma$ и равна нулю на σ. Согласно первой из приведенных теорем, она продолжается гармонически через σ. Так как $\operatorname{Re}[\varphi(z)]$ — гармоническая функция в окрестности σ, то отсюда следует, что заданная функция $U(z)$ также продолжается гармонически через σ.

Замечание. Продолжение функции $U(z)$ не определяется ее значениями $\varphi(x)$ на σ, а зависит также и от значения $U(z)$ внутри области Ω, что следует из выражения функции $W(z)$.

§ 5. РАСШИРЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАРМОНИЧНОСТИ

21. В гл. I, § 1, п. 1 мы назвали гармонической функцию, имеющую непрерывные частные производные первых двух порядков и удовлетворяющую уравнению Лапласа. Однако не все условия, входящие в это определение гармоничности, необходимы. Мы предположили существование и непрерывность всех частных производных первых двух порядков, и это позволило нам, применяя различные интегральные формулы анализа, доказать многочисленные свойства гармонических функций. В этом пункте, пользуясь интегралом Пуассона, мы докажем, что рассматриваемая функция гармонична в смысле первоначального определения (т. е. обладает непрерывными производными первых двух порядков) уже в том случае, когда она имеет частные производные, входящие в уравнение Лапласа, и удовлетворяет этому уравнению.

Таким образом, из следующей теоремы мы получим расширенное определение гармоничности.

Функция $U(z)$ *гармонична в области* Ω, *если она*

1) *непрерывна в* Ω,

2) *имеет в* Ω *частные производные* $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ [1]),

[1]) Из существования частных производных $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ следует только непрерывность по x производной $\frac{\partial U}{\partial x}$ и по y производной $\frac{\partial U}{\partial y}$.

3) *удовлетворяет в* Ω *уравнению Лапласа* $\Delta U = 0$.

Для доказательства этой теоремы достаточно установить, что функция $U(z)$, удовлетворяющая условиям 1), 2) и 3), является гармонической в любой точке $O \in \Omega$. Для упрощения записи предположим, что O совпадает с началом координат плоскости (z).

Пусть C — лежащий в Ω круг радиуса R с центром в O, и пусть $U^*(z)$ — функция, гармоническая в этом круге, равная $U(z)$ на окружности, полученная при помощи интеграла Пуассона:

$$U^*(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(Re^{i\theta})\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}\,d\theta.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(z) = U(z) - U^*(z) - a^2(x^2 + y^2 - R^2) \qquad (a \neq 0)$$

и докажем, что $\Phi(z) \geqslant 0$ в круге $|z| \leqslant R$; тогда, устремляя a к нулю, мы получим неравенство

$$U(z) - U^*(z) \geqslant 0.$$

Установив аналогичным образом противоположное неравенство, мы сможем заключить, что $U(z)$ равна гармонической функции $U^*(z)$ в окрестности произвольной точки O области Ω, т. е. докажем сформулированную теорему.

Функция $\Phi(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant R$ и равна нулю на его окружности C. Для доказательства неравенства

$$\Phi(z) \geqslant 0$$

достаточно убедиться в том, что $\Phi(z)$ не имеет минимума ни в одной из внутренних точек круга C. Действительно, если бы $\Phi(z)$ принимала в некоторой точке из $|z| \leqslant R$ отрицательное значение, то минимум этой функции в $|z| \leqslant R$ был бы отрицательным, и так как на окружности $\Phi(z) = 0$, то этот минимум достигался бы во внутренней точке круга C.

Итак, предположим, что $\Phi(z)$ имеет минимум в точке z_0, $|z_0| < R$. Тогда

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{z_0} = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{z_0} \geqslant 0. \tag{24}$$

(В самом деле, из неравенства

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{z_0} < 0$$

следовало бы существование горизонтального отрезка $(z_0, z_0 + h)$ $(h > 0)$, на котором $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ отрицательна, т. е. $\Phi(x, y_0)$ убывает, а это невозможно, если z_0 — точка минимума.)

Аналогично доказывается неравенство

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_{z_0} \geqslant 0. \tag{25}$$

Однако непосредственное вычисление дает

$$\Delta\Phi = -4a^2 < 0,$$

что противоречит неравенствам (24) и (25). Следовательно, функция $\Phi(z)$ не может иметь минимум во внутренней точке z_0 круга C, что полностью доказывает сформулированную теорему.

§ 6. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЕННОСТИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

22. В первом томе [1]) мы установили две теоремы о поведении однозначной ветви аналогической функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки z_0, а именно теорему Коши — Римана, согласно которой $f(z)$ не может быть ограниченной в окрестности z_0, и теорему Вейерштрасса, показывающую, что $f(z)$ полностью не определена [2]) в z_0, если z_0 является существенно особой точкой. Кроме того, мы привели разложение в ряд функции $f(z)$ в окрестности z_0.

Теперь мы приступим к исследованию изолированных особенностей гармонических функций. Среди доказываемых здесь результатов некоторые аналогичны соответствующим результатам для аналитических функций. Существуют, однако, и различия; например, простейшая изолированная особенность гармонической функции получается не при полюсе аналитической функции, действительной частью которой она является, а при логарифмической критической точке.

Докажем сначала следующую теорему:

Пусть Ω *— некоторая область и* z_0 *— точка из* Ω. *Функция* $U(z)$, *гармоническая в* $\Omega - z_0$ *и ограниченная сверху* (*или снизу*) *в окрестности точки* z_0, *имеет вид*

$$U(z) = -\lambda \log \frac{1}{|z - z_0|} + H(z), \tag{26}$$

где λ *— действительная постоянная,* $\lambda \geqslant 0$ (*соответственно* $\lambda \leqslant 0$), *а* $H(z)$ *— функция, гармоническая в окрестности* z_0 [3]).

---

[1]) Том I, гл. IV, § 4, стр. 152—157.

[2]) Можно выбрать такую последовательность точек z_n, стремящихся к z_0, чтобы $f(z_n)$ стремилась к любому заданному значению.

[3]) Так как функция $U(z)$ гармонична в $\Omega - z_0$, а функция $\log \frac{1}{|z - z_0|}$ гармонична всюду, за исключением точек z_0 и ∞, то $H(z)$ гармонична в Ω, если $\infty \notin \Omega$, и в $\Omega - \infty$ в противном случае.

Функция $U(z)$, гармоническая в $\Omega - z_0$ и ограниченная по абсолютной величине в окрестности точки z_0, является гармонической в Ω[1]).

Последняя часть этой теоремы, аналогичная теореме Коши и Римана, непосредственно вытекает из первой части, где $U(z)$ ограничена только с одной стороны, сверху или снизу, в окрестности z_0. Она показывает, что в случае ограниченности $U(z)$ и сверху и снизу в окрестности точки z_0, эта точка является только *кажущейся особенностью*, которая устраняется при продолжении $U(z)$

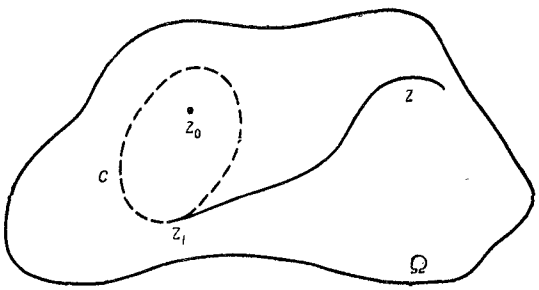

Рис. 11.

по непрерывности в z_0 (т. е. если положить $U(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} U(z)$ при $z \in \Omega - z_0$).

Для первой части этой теоремы мы приведем доказательство, основанное на теореме Коши — Римана для аналитических функций.

Рассмотрим функцию $\overline{U}(z)$, гармонически сопряженную с $U(z)$ в области $\Omega - z_0$. Как показано в гл. I, § 1, п. 3,

$$\overline{U}(z) = \int_{z_1}^{z} - U_y\,dx + U_x\,dy + K,$$

где z_1 — фиксированная точка в $\Omega - z_0$, а K — некоторая постоянная (рис. 11).

Функция $\overline{U}(z)$ может быть многозначной в $\Omega - z_0$, но разность между двумя ее значениями в некоторой точке равна целому крат-

---

[1]) Аналогичную теорему можно сформулировать для гармонических функций трех переменных, однако вместо $\log \frac{1}{r}$ следует взять $\frac{1}{r}$, где r — расстояние от особой точки до переменной точки.

ному числа a, где a — изменение $\overline{U}(z)$ на жордановой кривой c, охватывающей точку z_0:

$$a = \int_c -U_y\,dx + U_x\,dy\,^{1}).$$

Очевидно, что если число a равно нулю, то $\overline{U}(z)$ однозначна в $\Omega - z_0$.

Функция

$$\varphi(z) = e^{\frac{2\pi}{|a|}(U+i\overline{U})} \qquad (a \neq 0)$$

однозначна в $\Omega - z_0$; в самом деле, если z описывает замкнутый непрерывный путь вокруг z_0, к $\overline{U}(z)$ прибавляется целое кратное числа a, а экспоненциальная функция имеет период $2\pi i$.

Предположим, что $U(z)$ ограничена сверху в окрестности z_0 постоянной M:

$$U(z) < M.$$

Тогда в той же окрестности точки z_0 имеем

$$|\varphi(z)| = e^{\frac{2\pi}{|a|}U} < e^{\frac{2\pi}{|a|}M}. \tag{27}$$

Применим к аналитической функции $\varphi(z)$ теорему Коши — Римана. Из нее следует, что $\varphi(z)$ голоморфна в z_0 и разлагается в окрестности z_0 в ряд Тейлора

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= c_p(z-z_0)^p + c_{p+1}(z-z_0)^{p+1} + \ldots = \\ &= (z-z_0)^p[c_p + c_{p+1}(z-z_0) + \ldots],\end{aligned} \tag{28}$$

причем $c_p \neq 0$ и $p \geqslant 0$. Применяя теорему об изменении аргумента[2]) к функции $\varphi(z)$ на кривой c, на которой $\varphi(z)$ не имеет нулей, и принимая во внимание, что

$$\arg\varphi(z) = \frac{2\pi}{|a|}\overline{U}(z),$$

мы убеждаемся, что $p = 1$ и $a > 0$.

Из соотношений (27) и (28) следует, что

$$U(z) = \frac{a}{2\pi}[\log|z-z_0| + \log|c_1 + c_2(z-z_0) + \ldots|]. \tag{29}$$

Вводя обозначения

$$\lambda = \frac{a}{2\pi} > 0,$$

$$H(z) = \frac{a}{2\pi}\log|c_1 + c_2(z-z_0) + \ldots|,$$

---

[1]) Область Ω предполагается односвязной. В противном случае рассуждение применимо в некоторой окрестности точки z_0 в Ω.

[2]) Том I, гл. II, § 3, п. 21, стр. 64—67.

мы получаем из (29) соотношение (26), которое и требовалось доказать. Действительно, из $c_1 \neq 0$ следует, что $H(z)$ — гармоническая функция в окрестности точки z_0.

Если $a = 0$, то это же рассуждение применимо к аналитической функции $\varphi(z) = e^{U+iV}$. Снова используя теорему об изменении аргумента, мы получаем, что в разложении (28) $p = 0$. Следовательно, в этом случае $U(z)$ является гармонической в z_0 ($\lambda = 0$).

Если $U(z)$ ограничена снизу в окрестности точки z_0, то $-U(z)$ ограничена сверху в той же окрестности; применяя к функции $-U(z)$ предыдущие рассуждения, мы заключаем, что соотношение (26) имеет место и в этом случае (с постоянной $\lambda \leqslant 0$).

23. Итак, мы доказали, что если функция $U(z)$, гармоническая в $\Omega - z_0$, ограничена по модулю в окрестности точки z_0, то она гармонична и в z_0, так как формула (26) справедлива при $\lambda = 0$; если же $U(z)$ ограничена *только сверху или только снизу*, то в окрестности точки z_0 справедлива формула (26), где $\lambda > 0$ или $\lambda < 0$.

Мы будем говорить в этом случае, что $U(z)$ обладает в точке z_0 *логарифмической особенностью*, или *логарифмическим полюсом*. При стремлении z к z_0 функция $U(z)$ стремится к $-\infty$ (соответственно к $+\infty$).

Известно, что полюс является простейшей особенностью аналитических функций, причем функция непрерывна в полюсе, если ее значения рассматриваются на сфере Римана [1]).

Аналогично логарифмический полюс является простейшей особенностью гармонической функции. Гармоническая функция считается непрерывной в логарифмическом полюсе, если рассматриваются ее значения на замкнутой действительной прямой с присоединенными к ней точками $-\infty$ и $+\infty$.

Чтобы получить примеры гармонических функций, неограниченных ни сверху, ни снизу в окрестности изолированной особой точки z_0, можно рассмотреть действительные или мнимые части аналитических функций, имеющих полюс в точке z_0.

Пусть, например, $z_0 = 0$ и $U(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Так как линии уровня функции $U(z)$

$$U(z) = \frac{x}{x^2+y^2} = \alpha \qquad (\alpha \text{ — действительное число})$$

образуют пучок окружностей, касающихся в начале координат оси Oy, то очевидно, что в произвольной окрестности начала координат $U(z)$ принимает все действительные значения.

[1]) Том I, гл. II, § 2, п. 15, стр. 60 и § 3, п. 25, стр. 70.

Функция $\left(\log\frac{1}{|\zeta'-z|}-\log\frac{1}{|\zeta-z|}\right)\Big/|\zeta'-\zeta|$ является гармонической функцией переменной z. При стремлении ζ' к ζ по некоторой последовательности точек получается последовательность гармонических функций, сходящаяся равномерно к $\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial n}$ в окрестности точки z. Согласно теореме, установленной в гл. II, § 1, п. 3, предел этой последовательности также является гармонической функцией от z.

Докажем теперь гармоничность функции $\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial n}$ другим путем, применяя одну формулу, встречающуюся в теории потенциала двойного слоя [1]).

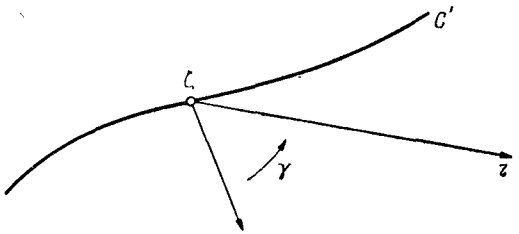

Рис. 13.

Пусть γ — угол между внутренней нормалью к C' в ζ и вектором $\overrightarrow{\zeta z}$ (рис. 13). Тогда

$$\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial n}=\frac{\cos\gamma}{r}. \tag{33}$$

Действительно,

$$\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial n}=-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial n}+\frac{\partial r}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial n}\right)=$$
$$=-\frac{1}{r}\left[\frac{\xi-x}{r}\cos(x,\ n)+\frac{\eta-y}{r}\cos(y,\ n)\right]=$$
$$=\frac{1}{r}\left[\cos(x,\ \overrightarrow{\zeta z})\cos(x,\ n)+\cos(y,\ \overrightarrow{\zeta z})\cos(y,\ n)\right]=\frac{\cos\gamma}{r}.$$

---

[1]) См., например, Iacob C., Introducere matematică în mecanica fluidelor, cap. III, p. 81.

Выбирая начало координат в точке ζ и направляя ось Ox по внутренней нормали, получаем

$$\frac{\cos\gamma}{r} = \frac{x}{r^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right),$$

что показывает гармоничность функции $\dfrac{\partial \log \dfrac{1}{r}}{\partial n}$ от z при любом $z \neq \zeta$, включая и точку $z = \infty$.

Таким образом, мы доказали, что $U_1(z)$ гармонична внутри кривой C_1 и $U_0(z)$ гармонична во внешности кривой C_0, за возможным исключением точки $z = \infty$. Следовательно, обе функции являются гармоническими в D.

26. Остается рассмотреть поведение функции $U_0(z)$ на бесконечности. Учитывая выражение (31) этой функции и соотношение (33), имеем

$$U_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_0'} \left[U(\zeta) \frac{\cos\gamma}{r} - \log \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U(\zeta)}{\partial n} \right] ds.$$

При стремлении z к бесконечности первое слагаемое под интегралом стремится к нулю, так как $U(\zeta)$ и $\cos\gamma$ ограничены на C_0'. Для оценки второго слагаемого выберем вспомогательную точку a внутри C_0' и обозначим $R = |z - a|$. Тогда

$$\int_{C_0'} \log r \frac{\partial U(\zeta)}{\partial n} ds = \log R \int_{C_0'} \frac{\partial U(\zeta)}{\partial n} ds + \int_{C_0'} \log \frac{r}{R} \cdot \frac{\partial U(\zeta)}{\partial n} ds.$$

Так как производная $\dfrac{\partial U(\zeta)}{\partial n}$ ограничена, а $\log \dfrac{r}{R}$ стремится к нулю при стремлении z к бесконечности, то последний интеграл также стремится к нулю одновременно с $\dfrac{1}{r}$. Следовательно, в окрестности бесконечно удаленной точки имеем

$$U_0(z) = \frac{\log|z-a|}{2\pi} \int_{C_0'} \frac{\partial U(\zeta)}{\partial n} ds + h_0(z), \tag{34}$$

где $h_0(z)$ — функция, гармоническая [1]) во внешности кривой C_0 и равная нулю на бесконечности.

---

[1]) Гармоничность функции $h_0(z)$ на бесконечности следует либо из теоремы п. 24, либо непосредственно из того, что $\dfrac{\cos\gamma}{r}$ и $\log \dfrac{r}{R}$ являются гармоническими на бесконечности.

Смотря по тому, имеем ли мы $\int_{C_0'} \frac{\partial U(\zeta)}{\partial n} ds = 0$ *или этот интеграл отличен от нуля,* $U_0(z)$ *является гармонической на бесконечности или имеет в этой точке логарифмический полюс.* В частности, если $U(z)$ является гармонической внутри C_0', то, согласно соотношению (14) гл. I, $\int_{C_0'} \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0$, а, следовательно, $U_0(z)$ является гармонической на бесконечности.

Очевидно, что функция $U_0(z)$ может быть представлена и в виде

$$U_0(z) = -K \log \frac{1}{|z|} + H_0(z), \tag{35}$$

где K — постоянная, а $H_0(z)$ — гармоническая функция, равная нулю на бесконечности.

Таким образом мы доказали *представимость функции* $U(z)$, *гармонической в двусвязной области* D, *в виде суммы двух функций с установленными выше свойствами*[1])

$$U(z) = U_0(z) + U_1(z). \tag{36}$$

27. Пользуясь полученным представлением для гармонических функций в двусвязных областях и доказанной в п. 7 теоремой Лиувилля, мы установим последнюю часть теоремы п. 22 без введения аналитических функций. *Если гармоническая функция* $U(z)$ *ограничена по абсолютной величине в окрестности изолированной особенности* z_0, *то эта особенность устранима.*

Предположим, что z_0 — бесконечно удаленная точка. Рассмотрим круговое кольцо $R_0 < |z| < R_1$, ограниченное окружностями $C_0 : |z| = R_0$ и $C_1 : |z| = R_1$, где R_0 взято достаточно большим для того, чтобы это круговое кольцо содержалось в некоторой окрестности точки z_0, в которой $U(z)$ гармонична и ограничена (за возможным исключением самой точки z_0). Согласно результатам п. 24—26, можно написать формулу (36)

$$U(z) = U_0(z) + U_1(z).$$

Так как R_1 может быть взято сколь угодно большим, функция $U_1(z)$ является гармонической на всей конечной плоскости. Функция $U_0(z)$, для которой справедливо представление (35), ограничена во внешности C_0 хотя бы с одной стороны, сверху или

[1]) Аналогичное представление возможно в случае гармонических функций трех переменных; для утверждений, связанных с поведением U_0 на бесконечности, нужно рассмотреть преобразование Кельвина (гл. I, § 1, п. 3, сноска [4]) на стр. 9).

снизу, смотря по тому, имеем ли мы $K \leqslant 0$ или $K \geqslant 0$. Так как $U(z)$ ограничена с обеих сторон, то из (36) следует, что $U_1(z)$ также должна быть ограничена сверху или снизу одновременно с $U_0(z)$. Следовательно, $U_1(z)$ является гармонической на всей конечной плоскости и ограничена сверху или снизу. Применяя теорему Лиувилля, заключаем, что $U_1(z)$ постоянна. Тогда из (36) вытекает, что $U_0(z)$ ограничена по абсолютной величине в окрестности бесконечно удаленной точки, а это возможно лишь тогда, когда постоянная K в соотношении (35) равна нулю. Отсюда следует гармоничность $U(z)$ при $z = \infty$.

28. При помощи представления (36) можно получить *разложение в ряд гармонической функции в окрестности изолированной особой точки.*

Мы снова предположим, что изолированная особая точка лежит в бесконечности. Возвращаясь к выражению (36) функции $U(z)$ в круговом кольце, ограниченном C_0 и C_1 (см. предыдущий пункт),

$$U(z) = U_0(z) + U_1(z),$$

где, согласно соотношению (35), имеем $U_0(z) = K \log |z| + H_0(z)$, а функция $H_0(z)$ гармонична и равна нулю при $z = \infty$, разложим в ряд функции $H_0(z)$ и $U_1(z)$.

Преобразование $z = \dfrac{R_0^2}{z'}$ отображает внешность C_0 на внутренность этой окружности, а функция $H_0\left(\dfrac{R_0^2}{z'}\right) = H_0'(z')$ является гармонической в круге $|z'| < R_0$. Применяя формулу (4), получаем

$$H_0'(z') = \sum_{n=1}^{\infty} r'^n (A_n' \cos n\varphi' + B_n' \sin n\varphi') \qquad (z' = r'e^{i\varphi'}),$$

откуда, если ввести обозначение $z = re^{i\varphi}\left(r' = \dfrac{R_0^2}{r} \text{ и } \varphi' = -\varphi\right)$, имеем

$$H_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \tag{37}$$

где $A_n = A_n' R_0^{2n}$ и $B_n = -B_n' R_0^{2n}$. Разложение (37) имеет место во внешности C_0.

В круге, ограниченном окружностью C_1, $U_1(z)$ разлагается в аналогичный ряд, и, следовательно, в круговом кольце функция $U(z)$ представляется рядом вида

$$U(z) = K \log r + \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \tag{38}$$

Этот ряд сходится в окрестности изолированной особой точки $z=\infty$, так как R_1 может быть взято сколь угодно большим. Очевидно, что точка $z=\infty$ является для $U(z)$ логарифмическим полюсом тогда и только тогда, когда $\alpha_n=\beta_n=0$ при $n>0$ и $K\neq 0$. Действительно, для этого необходимо и достаточно, чтобы $U_1(z)$ была гармонической на бесконечности или обладала там логарифмическим полюсом. В обоих случаях она ограничена с одной стороны и, согласно теореме Лиувилля, сводится к постоянной.

Если особенность z_0 находится в начале координат, то получаем аналогичное разложение, где вместо $\log r$ следует писать $-\log\frac{1}{r}$; для того чтобы $U(z)$ имела в точке $z_0=0$ логарифмический полюс, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_n=\beta_n=0$ при $n<0$ и $K\neq 0$.

Глава III

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

§ 1. АЛЬТЕРНИРУЮЩИЙ МЕТОД ШВАРЦА

1. Решение задачи Дирихле для жордановой области сводится при помощи конформного отображения к решению этой задачи для круга, которое получается при помощи интеграла Пуассона (гл. II, § 3, п. 10 и 15). В случае многосвязных областей этот метод уже неприменим. Поэтому мы приведем здесь один из общих методов решения задачи Дирихле — *альтернирующий метод Шварца*, который при некоторых условиях дает решение задачи для объединения двух областей, если это решение известно для каждой из них.

Пусть Ω_1 и Ω_2 — две области, имеющие общие точки, $\Omega_1\Omega_2\neq 0$, причем их границы пересекаются в конечном числе точек ζ_k $(k=1, 2, \ldots, p)$. Обозначим через α_1 и β_1 части границы области Ω_1, лежащие соответственно вне и внутри Ω_2, и через α_2, β_2 — части границы Ω_2, лежащие соответственно вне и внутри Ω_1 [1]).

Если обобщенная задача Дирихле (гл. II, § 3, п. 11) *разрешима для каждой из областей* Ω_1 *и* Ω_2, *то существует решение этой задачи для области* $\Omega_1+\Omega_2$, *стремящееся к заданным значениям в каждой точке границы этой области, за возможным исключением конечного числа точек* [2]).

2. Пусть $f(\zeta)$ — ограниченная функция с конечным числом разрывов, заданная на границе области $\Omega_1+\Omega_2$, состоящей из α_1, α_2 и точек ζ_k. Очевидно, можно предполагать, что $f(\zeta)\geqslant 0$, так как $f(\zeta)$ ограничена снизу; если $u(z)$ — решение задачи Дирихле для $f(\zeta)+c$, то $u(z)-c$ дает решение этой задачи для $f(\zeta)$ (c — действительная постоянная).

Для решения задачи Дирихле в области $\Omega_1+\Omega_2$ рассмотрим две последовательности функций: последовательность $\{U_n\}$, со-

---

[1]) Предполагается, что ни одна из областей не охватывает другой, т. е. множества β_1 и β_2 непусты.

[2]) Точнее, мы докажем, что решение задачи для $\Omega_1+\Omega_2$ принимает заданное значение $f(\zeta)$ в любой точке непрерывности функции $f(\zeta)$, за возможным исключением точек ζ_k, если только решения задачи Дирихле для Ω_1 и Ω_2 обладают этим свойством.

стоящую из ограниченных гармонических функций, определенных в Ω_1, и последовательность $\{V_n\}$, состоящую из ограниченных гармонических функций, определенных в $\Omega_2 (n = 0, 1, \ldots)$. Эти функции определяются последовательно как решения задачи

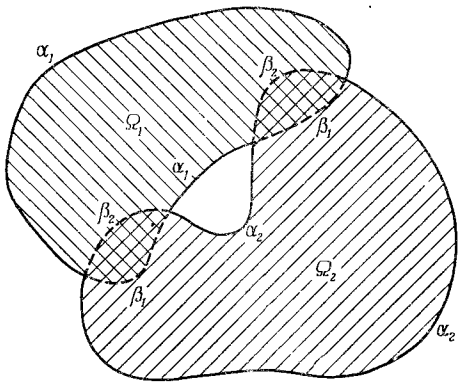

Рис. 14.

Дирихле для Ω_1, соответственно Ω_2, со следующими граничными условиями:

$$U_0 \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega_1$$

$$V_0 = \begin{cases} U_0 = 0 & \text{на } \beta_2, \\ f & \text{на } \alpha_2, \end{cases}$$

$$U_1 = \begin{cases} V_0 & \text{на } \beta_1, \\ f & \text{на } \alpha_1, \end{cases}$$

$$V_1 = \begin{cases} U_1 & \text{на } \beta_2, \\ f & \text{на } \alpha_2, \end{cases}$$

и вообще

$$U_n = \begin{cases} V_{n-1} & \text{на } \beta_1, \\ f & \text{на } \alpha_1, \end{cases}$$

$$V_n = \begin{cases} U_n & \text{на } \beta_2, \\ f & \text{на } \alpha_2. \end{cases}$$

Каждая функция U_n определяется как решение обобщенной задачи Дирихле в области Ω_1 с граничной функцией $f(\zeta)$, имеющей разрывы на α_1 и, возможно, в точках пересечения границ областей Ω_1 и Ω_2. Аналогичное замечание справедливо для функций V_n. Так как $U_0 \equiv 0$ и $0 \leqslant f(\zeta) \leqslant M$ на $\alpha_1 + \alpha_2$, то, применяя последовательно к функциям V_0, U_1, V_1, U_2, ... обобщенный прин-

цип максимума и минимума (гл. II, § 3, п. 14) и учитывая (1), выводим неравенства

$$\begin{aligned} 0 \leqslant U_n \leqslant M \quad & \text{в } \Omega_1, \\ 0 \leqslant V_n \leqslant M \quad & \text{в } \Omega_2. \end{aligned} \tag{2}$$

3. Покажем, что последовательности U_n и V_n соответственно сходятся в Ω_1 и в Ω_2 и что функции $U = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$, $V = \lim\limits_{n\to\infty} V_n$ являются гармоническими и совпадают в $\Omega_1\Omega_2$.

Для этого заметим, что $U_{n+1} - U_n$ является гармонической в Ω_1 и удовлетворяет соотношениям

$$U_{n+1} - U_n = \begin{cases} V_n - V_{n-1} & \text{на } \beta_1, \\ 0 & \text{на } \alpha_1. \end{cases} \tag{3}$$

Аналогично $V_n - V_{n-1}$ является гармонической в Ω_2 и

$$V_n - V_{n-1} = \begin{cases} U_n - U_{n-1} & \text{на } \beta_2, \\ 0 & \text{на } \alpha_2. \end{cases} \tag{4}$$

При помощи обобщенного принципа максимума и минимума можно установить, что

$$\begin{aligned} V_n - V_{n-1} \geqslant 0 \quad & \text{в } \Omega_2, \\ U_{n+1} - U_n \geqslant 0 \quad & \text{в } \Omega_1 \end{aligned} \tag{5}$$

при $n = 1, 2, \ldots$.

Действительно, $V_1 - V_0 \geqslant 0$ в Ω_2, так как, согласно соотношениям (4) и (2), имеем

$$V_1 - V_0 = \begin{cases} U_1 \geqslant 0 & \text{на } \beta_2, \\ 0 & \text{на } \alpha_2. \end{cases} \tag{6}$$

Аналогично $U_2 - U_1 \geqslant 0$ в Ω_1, так как из (3) и из неравенства (6) следует, что

$$U_2 - U_1 = \begin{cases} V_1 - V_0 \geqslant 0 & \text{на } \beta_1, \\ 0 & \text{на } \alpha_1. \end{cases}$$

То же рассуждение дает возможность доказать последовательно неравенства $V_2 - V_1 \geqslant 0$ в Ω_2, $U_3 - U_2 \geqslant 0$ в Ω_1 и т. д.

Таким образом, последовательности

$$U_0, U_1, \ldots, U_n, \ldots,$$
$$V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

являются возрастающими последовательностями гармонических функций, ограниченных соответственно в Ω_1, Ω_2. Они сходятся

в Ω_1, соответственно в Ω_2, и из теоремы Гарнака (гл. II, § 1, п. 6) следует, что функции

$$U = \lim_{n\to\infty} U_n \text{ и } V = \lim_{n\to\infty} V_n$$

являются гармоническими соответственно в Ω_1, Ω_2.

Однако $U_n = V_{n-1}$ на β_1 и $V_n = U_n$ на β_2; поэтому в пределе $U = V$ на дуге $\beta_1 + \beta_2$, которая вместе с точками ζ_k образует границу области $\Omega_1\Omega_2$. Следовательно, из того же обобщенного принципа максимума и минимума вытекает, что $U = V$ в $\Omega_1\Omega_2$.

Итак, мы доказали, что функция

$$W(z) = \begin{cases} U(z) & \text{в } \Omega_1, \\ V(z) & \text{в } \Omega_2 \end{cases}$$

является гармонической в $\Omega_1 + \Omega_2$.

4. Покажем теперь, что эта функция представляет собой решение задачи Дирихле для области $\Omega_1 + \Omega_2$ и граничной функции $f(\zeta)$. Для этого достаточно доказать, что $U(z)$ стремится к $f(\zeta)$, когда $z \in \Omega_1$ стремится к $\zeta \in \alpha_1$ (за возможным исключением конечного числа точек ζ), и повторить затем это рассуждение для функции $V(z)$ и границы α_2.

Пусть $\omega(z)$ — ограниченная гармоническая функция, определяемая в Ω_1 соотношениями

$$\omega(z) = \begin{cases} 0 & \text{на } \alpha_1, \\ M & \text{на } \beta_1. \end{cases}$$

Существование такой функции следует из нашего предположения о разрешимости обобщенной задачи Дирихле в области Ω_1 для ограниченной функции с конечным числом разрывов в точках ζ_k.

Из (1) и (2) следует, что гармоническая и ограниченная в Ω_1 функция $U_n - U_1$ удовлетворяет на границе этой области соотношениям

$$U_n - U_1 \leqslant M \text{ на } \beta_1,$$
$$U_n - U_1 = 0 \text{ на } \alpha_1.$$

Поэтому, применяя еще раз принцип максимума и минимума, получаем, что в Ω_1

$$U_n - U_1 \leqslant \omega.$$

Принимая во внимание, что последовательность U_n возрастает [см. (5)], получаем в Ω_1 неравенства $U_1 \leqslant U_n \leqslant U_1 + \omega$.

При $n \to \infty$ из приведенных соотношений вытекает, что

$$U_1 \leqslant U \leqslant U_1 + \omega \tag{7}$$

в Ω_1.

За исключением конечного числа точек $\zeta \in \alpha_1$, при стремлении $z \in \Omega_1$ к ζ функция $U_1(z)$ стремится к $f(\zeta)$, а $\omega(z)$ стремится к нулю, так как $U_1(z)$ и $\omega(z)$ являются решениями обобщенной задачи Дирихле для области Ω_1. Следовательно, из (7) вытекает, что, за исключением не более чем конечного числа точек $\zeta \in \alpha_1$, функция $U(z)$ стремится к $f(\zeta)$, когда $z \in \Omega_1$ стремится к ζ. Это рассуждение не применимо к точкам ζ_k, число которых тоже конечно.

Таким образом, мы доказали, что построенная выше функция $W(z)$ дает решение обобщенной задачи Дирихле для области $\Omega_1 + \Omega_2$.

Замечание. Если в любой точке непрерывности функции $f(\zeta)$, лежащей на границе области Ω_1, соответственно Ω_2, решение задачи Дирихле для области Ω_1, соответственно для Ω_2, стремится к $f(\zeta)$, то это остается справедливым в области $\Omega_1 + \Omega_2$ для решения соответствующей задачи Дирихле в точках границы области $\Omega_1 + \Omega_2$, отличных от ζ_k.

§ 2. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ D

5. Пусть D — двусвязная область, $n = 2$, ограниченная жордановыми кривыми C_0 и C_1. Чтобы решить задачу Дирихле для области D альтернирующим методом, выберем точки a_0 и b_0 на C_0 и a_1 и b_1 на C_1 таким образом, чтобы, соединяя a_0 с a_1 и b_0 с b_1 при помощи пар трансверсалей [1]), разложить область D на две жордановы области D_1 и D_2 (рис. 15).

На рис. 15 граница области D_1 проведена жирными линиями, а область D_2 заштрихована. Решение обыкновенной или обобщенной задачи Дирихле для жордановых областей D_1 и D_2 известно (гл. II, п. 10 и 15).

Применяя альтернирующий метод Шварца к областям $\Omega_k = D_k (k = 1, 2)$, мы заключаем, что решение обобщенной задачи Дирихле для области D существует. Однако если мы хотим решить обыкновенную задачу Дирихле, для которой функция $f(\zeta)$ непрерывна на границе $C_0 + C_1$, то, учитывая замечание п. 4, можно утверждать только, что решение $U(z)$, полученное при помощи альтернирующего метода, стремится к $f(\zeta)$, когда z стремится к ζ, за возможным исключением точек $\zeta_k = a_0$, a_1, b_0 и b_1. Нужно показать, что $U(z)$ стремится к $f(\zeta)$ также и в этих точках. Для этого выберем другие точки a_0', a_1', b_0' и b_1' и построим области D_1' и D_2' аналогично тому, как мы поступили выше.

[1]) *Трансверсалью* в области Ω называется простая дуга, соединяющая две точки границы Ω и лежащая внутри Ω, за исключением своих концов.

Затем применим альтернирующий метод к областям $\Omega_k = D'_k$ $(k = 1, 2)$. Полученное теперь решение $U'(z)$ обобщенной задачи Дирихле ограничено в D и принимает на $C_0 + C_1$ значения $f(\zeta)$, за возможным исключением точек a'_0, a'_1, b'_0 и b'_1. Следовательно, $U'(z)$ принимает значения $f(\zeta)$ в точках $\zeta = a_0$, a_1, b_0 и b_1. Однако из обобщенного принципа максимума и минимума (гл. II, § 3, п. 14) следует, что функции $U(z)$ и $U'(z)$ совпадают, поэтому $U(z)$ является решением обыкновенной задачи Дирихле.

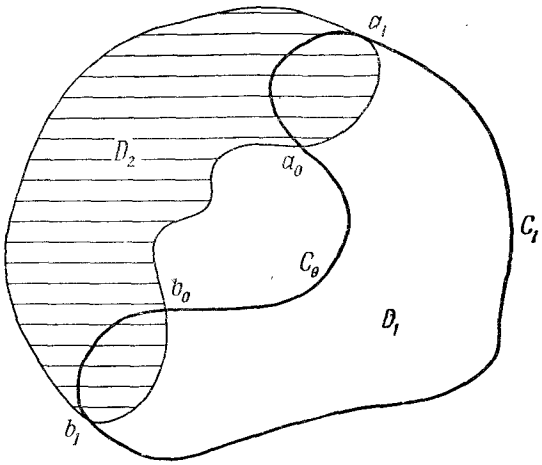

Рис. 15.

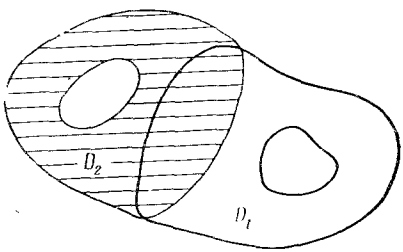

Рис. 16.

Итак, существование решения обыкновенной или обобщенной задачи Дирихле доказано для двусвязных областей. Тот же метод применим к трехсвязным областям, которые разбиваются при помощи трансверсалей на две двусвязные области (рис. 16), причем используется существование решений для этих областей.

Последовательно доказывается, что обыкновенная и обобщенная задачи Дирихле имеют решение и в случае многосвязной области, ограниченной n жордановыми кривыми. Согласно полученным ранее результатам (гл. I, § 3, п. 11 и гл. II, § 3, п. 15), это решение единственно.

Глава **IV**

ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ И ПРИНЦИП МИНИМУМА

1. В своей диссертации (1851 г.) и в мемуаре (1857 г.), посвященном абелевым интегралам, Риман использовал для доказательства некоторых теорем существования сведение задачи Дирихле к задаче нахождения минимума интеграла Дирихле, назвав этот способ *принципом Дирихле*[1]).

Интегралом Дирихле функции $F(z)$, *непрерывно дифференцируемой в произвольной области* Ω, *называется интеграл*

$$D_\Omega(F)=\int\limits_\Omega\int\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy, \tag{1}$$

причем двойной интеграл понимается в смысле предела интегралов

$$\int\limits_{D_n}\int\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

где D_n *при* $n\to\infty$ *аппроксимируют область* Ω[2]).

Рассмотрим семейство $\{F\}$, состоящее из функций, непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$, непрерывно дифференцируемых в D и принимающих на границе C области D заданные значения $f(\zeta)$, $\zeta\in C$. Как мы увидим ниже, можно доказать, что если в семействе $\{F\}$ имеется гармоническая функция $U(z)$ (являющаяся тогда решением задачи Дирихле с граничным значением $f(\zeta)$), то эта функция придает интегралу Дирихле минимальное значение, т. е.

$$D(U)\leqslant D(F)\quad\text{для любой}\quad F\in\{F\}.$$

Обратно, если в семействе $\{F\}$ существуют функции, для которых интеграл Дирихле в области D конечен, и существует функция $V(z)\in\{F\}$, для которой интеграл Дирихле минимален,

---

[1]) Как мы увидим ниже, аналогичные задачи о минимуме послужили для доказательства других теорем существования.

[2]) В обозначении интеграла Дирихле мы будем опускать иногда индекс Ω, если ясно, по какой области берется этот интеграл.

то $V(z)$ гармонична и дает решение задачи Дирихле с граничным значением $f(\zeta)$ [1]).

Рассматривая задачу Дирихле и нахождение минимума интеграла Дирихле как эквивалентные задачи, Риман выводит из существования нижней грани интегралов Дирихле $D(F)$ [2]) существование функций, для которых этот интеграл минимален, а следовательно, и существование решения задачи Дирихле. В 1869 году Вейерштрасс указал на несовпадение понятий нижней грани и минимума, подчеркнув, что принцип Дирихле нуждается в строгом доказательстве. Этот факт вызвал многочисленные исследования, дающие либо полное доказательство принципа Дирихле, либо решения задачи Дирихле другими способами. В последние десятилетия прошлого столетия появились метод Неймана для решения задачи Дирихле в случае выпуклых областей, изложенный нами в предыдущей главе альтернирующий метод Шварца, метод Пуанкаре, основанный на свойствах логарифмического потенциала, а в 1900 году Гильберт дал первое строгое доказательство принципа Дирихле [3]).

2. Прежде чем доказывать свойства минимума интеграла Дирихле, сделаем в этом пункте несколько замечаний.

Пусть Ω — произвольная область и $\{F\}$ — класс функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в Ω.

1°. $D(F) \geqslant 0$, *причем* $D(F) = 0$ *только если* $F(z)$ *постоянна в* Ω. Действительно, если $D(F) = 0$, то из непрерывности $\partial F/\partial x$ и $\partial F/\partial y$ следует, что они равны нулю в Ω, и поэтому $F(z)$ постоянна.

2°. *Если* $D(F_1)$ *и* $D(F_2)$ *конечны для функций* F_1 *и* F_2, *принадлежащих классу* $\{F\}$, *то интеграл* $D(\lambda F_1 + \mu F_2)$ *конечен при любых действительных* λ *и* μ *и*

$$D(\lambda F_1 + \mu F_2) = \lambda^2 D(F_1) + 2\lambda\mu D(F_1, F_2) + \mu^2 D(F_2), \qquad (2)$$

где

$$D(F_1, F_2) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx\, dy. \qquad (3)$$

Действительно, $D(\lambda F_1 + \mu F_2) \geqslant 0$, поэтому, применяя к выражению (2) свойство неотрицательных квадратичных форм, получаем

$$D^2(F_1, F_2) \leqslant D(F_1) D(F_2).$$

[1]) Если $D(F) = \infty$ для любой функции из $\{F\}$ (а это возможно, как показал Адамар при помощи примера, который мы рассмотрим в п. 5), принцип Дирихле не имеет места и, следовательно, не существует полной эквивалентности между этими двумя задачами.

[2]) Существование нижней грани вытекает из неравенства $D(F) \geqslant 0$.

[3]) Для других библиографических справок см. Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М., 1953.

Следовательно, интеграл $D(F_1, F_2)$ конечен и, согласно соотношению (2), $D(\lambda F_1 + \mu F_2)$ обладает тем же свойством.

3°. *Интеграл Дирихле является конформным инвариантом.* При помощи функции $z^* = \Phi(z)$ отобразим конформно область Ω на область Ω^* и обозначим $F^*(z^*) = F[\Phi^{-1}(z^*)]$. Тогда, как видно из непосредственного вычисления,

$$D_\Omega(F) = D_{\Omega^*}(F^*).$$

4°. *В полярных координатах r и φ интеграл Дирихле имеет вид*

$$D_\Omega(F) = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2\right] r\, dr\, d\varphi. \tag{4}$$

3. Докажем теперь минимальное свойство, названное Риманом *принципом Дирихле.*

Если $\overline{D}$ — замкнутая жорданова область, ограниченная простой замкнутой кривой C, $f(\zeta)$ — непрерывная функция на C и $\{F\}$ — семейство функций $F(z)$, непрерывных в $\overline{D}$, принимающих на C значения $f(\zeta)$ и непрерывно дифференцируемых в D, то гармоническая функция $U(z)$ из семейства $\{F\}$, которая существует и определена однозначно (гл. I, § 3, п. 11; гл. II, § 3, п. 10), *придает интегралу Дирихле*

$$D(F) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

минимальное значение. Среди всех функций семейства $\{F\}$ с конечным интегралом Дирихле $U(z)$ является единственной, для которой $D(F)$ принимает минимальное значение.

Достаточно доказать эту теорему для круга $|z| \leqslant 1$, так как любую жорданову область можно отобразить конформно на единичный круг, и это отображение, продолженное до топологического соответствия замкнутых областей, оставляет инвариантными свойства семейства $\{F\}$, гармоничность (гл. I, § 4, п. 13) и интеграл Дирихле (гл. IV, п. 2, 3°).

Итак, пусть $\overline{D}$ — замкнутый круг $|z| \leqslant 1$ и C — окружность $|z| = 1$. Пользуясь разложением функции $U(z)$ в ряд вида (4) гл. II, напишем

$$U(z) = \lim_{m \to \infty} U_m(z),$$

где

$$U_m(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \tag{5}$$

и $z = re^{i\varphi}$, а a_k и b_k определяются соотношениями (3) гл. II.

Предварительная формула Грина (гл. I, п. 10) применима к функциям $F - U_m$ и U_m, так как $U_m(z)$ является гармоническим многочленом и обладает непрерывными производными любого порядка. Таким образом, учитывая соотношение $\Delta U_m = 0$, получаем

$$D_{|z|\leqslant 1}(F - U_m,\ U_m) = \int\limits_{|z|\leqslant 1}\int \left[\frac{\partial (F - U_m)}{\partial x}\cdot\frac{\partial U_m}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial (F - U_m)}{\partial y}\cdot\frac{\partial U_m}{\partial y}\right] dx\, dy = -\int\limits_{|z|=1} (F - U_m)\frac{\partial U_m}{\partial n}\, ds. \qquad (6)$$

Но $\frac{\partial}{\partial n_e} = \frac{\partial}{\partial r}$, поэтому из (5) вытекает, что

$$\int\limits_{|z|=1} (F - U_m)\frac{\partial U_m}{\partial n_e}\, ds =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} [f(e^{i\varphi}) - U_m(e^{i\varphi})]\left[\sum_{k=1}^{m} k(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)\right] d\varphi =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} k a_k \int\limits_0^{2\pi} [f(e^{i\varphi}) - U_m(e^{i\varphi})]\cos k\varphi\, d\varphi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} k b_k \int\limits_0^{2\pi} [f(e^{i\varphi}) - U_m(e^{i\varphi})]\sin k\varphi\, d\varphi = 0.$$

Действительно,

$$\int\limits_0^{2\pi} [f(e^{i\varphi}) - U_m(e^{i\varphi})]\cos k\varphi\, d\varphi = 0$$

и

$$\int\limits_0^{2\pi} [f(e^{i\varphi}) - U_m(e^{i\varphi})]\sin k\varphi\, d\varphi = 0,$$

в чем легко убедиться, приняв во внимание соотношение (3) гл. II, соотношение (5) и равенства

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos h\varphi \cos k\varphi\, d\varphi = \pi\delta_h^k,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin h\varphi \cos k\varphi\, d\varphi = 0, \qquad (7)$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin h\varphi \sin k\varphi\, d\varphi = \pi\delta_h^k,$$

где δ_h^k — символ Кронекера, равный 1 при $k=h$ и 0 при $h\neq k$ (h и k — натуральные числа).

Таким образом, мы доказали, что

$$D(F-U_m,\ U_m)=0. \tag{8}$$

Если при $F\in\{F\}$ интеграл $D(F)$ *конечен*, то, согласно замечанию 2° п. 2 и соотношению (8), имеем

$$D(F)=D[(F-U_m)+U_m]=D(F-U_m)+D(U_m),$$

а следовательно, $D(F)\geqslant D(U_m)$.

При $r<1$ можно тем более написать

$$D_{|z|\leqslant r}(U_m)\leqslant D(F)=D_{|z|\leqslant 1}(F). \tag{9}$$

В круге $|z|\leqslant r<1$ частные производные функций $U_m(z)$ сходятся равномерно к частным производным функции $U(z)$ (гл. II, § 1, п. 3, 2) и 3)); поэтому, переходя к пределу под знаком интеграла, мы заключаем, что

$$D_{|z|\leqslant r}(U)\leqslant D_{|z|\leqslant 1}(F).$$

Это соотношение имеет место при любом $r<1$; устремляя r к единице, получаем

$$D_{|z|\leqslant 1}(U)\leqslant D_{|z|\leqslant 1}(F), \tag{10}$$

т. е. $U(z)$ минимизирует интеграл Дирихле [1]).

4. Нам остается доказать, что неравенство (10) является строгим для любой функции семейства $\{F\}$, отличной от U.

Пусть $V(z)$ — функция из $\{F\}$, для которой

$$D(V)=D(U).$$

Функция $U+\lambda(V-U)$, где λ — действительный параметр, принадлежит семейству $\{F\}$, а, следовательно, из (10) и (2) вытекает, что

$$D(U)\leqslant D[U+\lambda(V-U)]=D(U)+2\lambda D(U,\ V-U)+\lambda^2 D(V-U),$$

[1]) Рассуждение, примененное выше к областям $|z|<r$ и $|z|<1$, устанавливает в частном случае свойство полунепрерывности интеграла Дирихле. Если U_n — последовательность функций, гармонических в области Ω, сходящаяся равномерно внутри Ω к функции U, то

$$D_\Omega(U)\leqslant \varliminf_{n\to\infty} D_\Omega(U_n). \tag{11}$$

Действительно, для любой замкнутой области $\overline{\Delta}\subset\Omega$

$$D_\Delta(U)=\lim_{n\to\infty} D_\Delta(U_n)\leqslant \varliminf_{n\to\infty} D_\Omega(U_n),$$

и (11) вытекает из замечания, что Δ произвольна в Ω.

или

$$2\lambda D(U, V-U)+\lambda^2 D(V-U)\geqslant 0. \tag{12}$$

Чтобы неравенство (12) имело место при любом действительном λ, необходимо и достаточно, чтобы

$$D(U, V-U)=0. \tag{13}$$

Применяя теперь соотношение (2) к функции $U+\lambda(V-U)$ при $\lambda=1$, получаем

$$D(V)=D(U)+D(V-U). \tag{14}$$

Заметим, что соотношения (13) и (14) справедливы для любой функции $V\{F\}$, если U — гармоническая функция из семейства $\{F\}$.

Если $D(V)=D(U)$, то из (14) следует, что $D(V-U)=0$, откуда, согласно замечанию 1° п. 2, вытекает, что $V-U$ постоянна. Так как обе функции U и V совпадают при $|z|=1$, то $V=U$ во всей области D.

Следовательно, если в семействе $\{F\}$ имеются функции с конечным интегралом Дирихле, то единственной функцией, реализующей минимум этого интеграла, является именно гармоническая функция, представляющая собой решение задачи Дирихле с граничным значением $f(\zeta)$. В этом случае принцип Дирихле, определяющий минимизирующую функцию, и задача Дирихле равносильны.

Если $D(F)=\infty$ для любой функции семейства, то первая часть вышеприведенной теоремы очевидна, а вторая не имеет места. Принцип Дирихле неприменим.

5. Адамар показал, что последний случай может действительно иметь место.

Зададим на окружности $|z|=1$ функцию

$$f(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k^4\theta}{k^2}, \tag{15}$$

которая непрерывна на окружности, так как ряд (15) сходится абсолютно и равномерно.

В этом случае гармоническая функция семейства $\{F\}$ имеет вид

$$U(z)=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k^4}}{k^2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{k^4}\cos k^4\varphi}{k^2}, \tag{16}$$

где $z=re^{i\varphi}$.

Интеграл Дирихле в полярных координатах (п. 2, замечание 4°) при $|z| \leqslant r < 1$ имеет вид

$$D_{|z|\leqslant r}(U) = \int_0^r r\,dr \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial U}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial U}{d\varphi}\right)^2\right] d\varphi,$$

и так как из (16) вытекает, что

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k^4-1} \cos k^4\varphi$$

и

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k^4-1} \sin k^4\varphi,$$

то непосредственное вычисление, учитывающее соотношения (7), дает

$$D_{|z|\leqslant r}(U) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} r^{2k^4}. \tag{17}$$

Так как сумма ряда (17) стремится к бесконечности при $r \to 1$, то $D(U) = \infty$, а, следовательно, согласно доказанной выше теореме, $D(F) = \infty$ для любой $F \in \{F\}$ [1]).

6. В следующих пунктах мы установим некоторые свойства интеграла Дирихле от гармонической функции. Эти свойства будут использованы, в частности, при исследовании гармонических функций на римановых поверхностях, изучаемых в гл. VII—IX этого тома. Сделаем сначала следующие замечания.

1°. Если функция $U(z)$ гармонична в области Ω, $\overline{U}(z)$ — ее гармоническая сопряженная и $f(z) = U(z) + i\overline{U}(z)$, то производная

$$f'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} - i\,\frac{\partial U}{\partial y}$$

голоморфна в Ω и

$$D_\Omega(U) = \iint_\Omega |f'(z)|^2\,dx\,dy. \tag{18}$$

---

[1]) В общем случае, если $U(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$ — гармоническая функция в круге $|z| < 1$, то $D(U) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k\left(a_k^2 + b_k^2\right)$, и этот интеграл конечен тогда и только тогда, когда ряд сходится.

Этот интеграл называется *интегралом Дирихле аналитической функции* $f(z)$ и обозначается $D_\Omega(f)$.

2°. Пусть $U(z)$—функция, гармоническая в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной кривой C, состоящей из конечного числа аналитических дуг (или гармоническая в D и непрерывно дифферен-

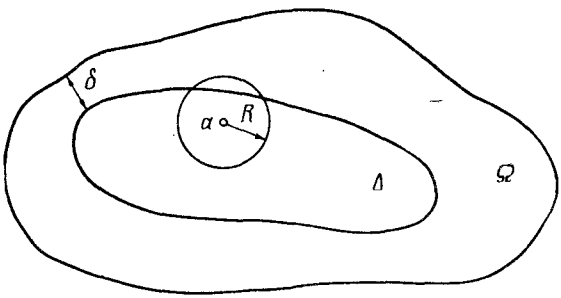

Рис. 17.

цируемая в $\Omega \supset \overline{D}$). Применяя предварительную формулу Грина [гл. I, (10)] и пользуясь соотношениями Коши — Римана, получаем

$$D(U) = \int_C U\, d\overline{U}. \tag{19}$$

Из той же формулы Грина следует соотношение

$$D(U,\ h) = \int_C h\, d\overline{U} \tag{20}$$

для любой функции h, непрерывной в $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируемой в D.

7. Оценим теперь сверху при помощи интеграла Дирихле частные производные $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ внутри области Ω.

Если интеграл Дирихле гармонической в области Ω *функции* $U(z)$ *удовлетворяет неравенству*

$$D_\Omega(U) < M, \tag{21}$$

то в любой замкнутой области $\overline{\Delta} \subset \Omega$ *имеем*

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \leqslant \frac{M}{\pi \delta^2}, \tag{22}$$

где δ *— расстояние от* $\overline{\Delta}$ *до границы области* Ω (рис. 17).

Пусть a—произвольная точка из $\overline{\Delta}$ и R—положительное число, $R < \delta$, такое, что круг $|z - a| \leqslant R$ лежит в Ω.

Образуем аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой равна $U(z)$: $f(z)=U(z)+i\overline{U}(z)$.

Применяя интегральную формулу Коши [1]) к голоморфной функции $f'(z)$, получаем

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-a|=r\leqslant R}\frac{f'(\zeta)}{\zeta-a}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f'(a+re^{i\varphi})\,d\varphi$$

($\zeta=a+re^{i\varphi}$); умножая на $r\,dr$ и интегрируя от 0 до R, получаем

$$\int\limits_0^R f'(a)\,r\,dr=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^R r\,dr\int\limits_0^{2\pi}f'(a+re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

или

$$f'(a)=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{|z-a|\leqslant R}f'(a+re^{i\varphi})\,d\omega,$$

где $d\omega$ — элемент площади в точке ζ.

Известное неравенство Шварца [2]) дает

$$|f'(a)|^2=\frac{1}{\pi^2R^4}\left|\iint\limits_{|z-a|\leqslant R}f'(a+re^{i\varphi})\,d\omega\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{|z-a|\leqslant R}|f'(a+re^{i\varphi})|^2\,d\omega=\frac{1}{\pi R^2}D_{|z-a|\leqslant R}(U). \qquad (23)$$

Однако a — произвольная точка из $\overline{\Delta}$, и в приведенном рассуждении R может быть взято сколь угодно близким к δ. Если заменить a на z, то в силу (21) неравенство (23) даст искомый результат

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2=|f'(z)|^2\leqslant\frac{1}{\pi\delta^2}D_\Omega(U)<\frac{M}{\pi\delta^2}.$$

8. При помощи теоремы, доказанной в п. 7, мы установим один признак равномерной сходимости последовательности гармонических функций.

---

[1]) Том I, гл. III, § 3, п. 39, стр. 117.

[2]) Если φ и ψ — две функции, суммируемые в квадрате на измеримом множестве E, то, согласно неравенству Шварца

$$\left|\int\limits_E\varphi\psi\,d\omega\right|^2\leqslant\int\limits_E|\varphi|^2\,d\omega\int\limits_E|\psi|^2\,d\omega.$$

Это следует из условия неотрицательности квадратичной формы от переменных λ и μ

$$\int\limits_E(\lambda\varphi+\mu\psi)^2\,d\omega=\lambda^2\int\limits_E\varphi^2\,d\omega+2\lambda\mu\int\limits_E\varphi\psi\,d\omega+\mu^2\int\limits_E\psi^2\,d\omega.$$

Пусть $U_n(z)$—последовательность функций, гармонических в области Ω, сходящаяся в некоторой точке $z_0 \in \Omega$, и пусть $D_\Omega(U_m - U_n) < \infty$ и стремится к нулю при $m, n \to \infty$. Тогда последовательность $U_n(z)$ сходится равномерно внутри Ω.

Пусть $\bar{\gamma}$ — замкнутый круг, лежащий в Ω и содержащий внутри точку z_0, и пусть ε—произвольное положительное число. Выбирая числа m и n достаточно большими и применяя к области $\bar{\Delta} = \bar{\gamma}$ предыдущую теорему, мы получаем

$$\left|\frac{\partial U_m}{\partial x} - \frac{\partial U_n}{\partial x}\right| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \left|\frac{\partial U_m}{\partial y} - \frac{\partial U_n}{\partial y}\right| < \varepsilon$$

в $\bar{\gamma}$; поэтому последовательности $\frac{\partial U_n}{\partial x}$ и $\frac{\partial U_n}{\partial y}$ сходятся равномерно в $\bar{\gamma}$. С другой стороны, для $z \in \bar{\gamma}$ имеем

$$U_n(z) - U_n(z_0) = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial U_n}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U_n}{\partial y}\,dy,$$

где интеграл берется вдоль произвольного пути внутри $\bar{\gamma}$.

Из равномерной сходимости последовательности производных в $\bar{\gamma}$ и из сходимости последовательности $U_n(z_0)$ вытекает равномерная сходимость в $\bar{\gamma}$ последовательности $U_n(z)$.

Чтобы доказать равномерную сходимость последовательности $U_n(z)$ в любой замкнутой области $\bar{\Delta} \subset \Omega$, рассмотрим замкнутую область $\bar{\Delta}_1 \subset \Omega$, содержащую точку z_0 и заданную область Δ, и покроем $\bar{\Delta}_1$ конечным числом кругов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$. Пусть γ_j—один из этих кругов, имеющий общие точки с γ, и пусть z_1 — точка из $\gamma \cap \gamma_j$. Последовательность $U_n(z_1)$ сходится, так как $z_1 \in \gamma$. Применяя приведенное выше рассуждение, мы доказываем равномерную сходимость последовательности $U_n(z)$ в γ_j. Повторяя это рассуждение, можно доказать, что последовательность сходится равномерно в любом из кругов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, а следовательно, и в $\bar{\Delta}$. Согласно теореме, установленной в гл. II, § 1, п. 3, 1), предел последовательности $U_n(z)$ является гармонической функцией в Ω.

Глава V

ФУНКЦИЯ ГРИНА. ПРИНЦИП ЛИНДЕЛЁФА И ПРИНЦИП ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕТРИКИ

§ 1. ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ D, ОГРАНИЧЕННЫХ КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ЖОРДАНОВЫХ КРИВЫХ

1. В главе I, § 4, п. 16 мы доказали существование функции Грина для жордановых областей, отображая конформно соответствующую область на круг и используя выражение функции Грина для круга. В п. 12 той же главы мы показали, что нахождение функции Грина сводится к решению задачи Дирихле с непрерывными данными на контуре. Это общее замечание и решение задачи Дирихле для многосвязных областей, ограниченных конечным числом жордановых кривых, данное в гл. III, § 2, позволит нам доказать существование функции Грина для любой области D.

Действительно, функция Грина $G(z, a)$ области D с полюсом в точке $a \in D$ — это гармоническая функция в $D-a$, равная нулю на границе C области D и допускающая в окрестности a представление вида

$$G(z, a) = \log \frac{1}{|z-a|} + A(z, a), \tag{1}$$

где $A(z, a)$ является гармонической.

Если область $\overline{D}$ компактна, то $A(z, a)$ гармонична в D и равна $\log|\zeta - a|$ на C. Поэтому, решив соответствующую задачу Дирихле, мы получим функцию $A(z, a)$, а следовательно, и $G(z, a)$[1]).

Установим теперь некоторые свойства функции Грина.

2. *Функция Грина положительна в D.* Действительно, $G(z, a) = 0$ на C и стремится к $+\infty$ при стремлении z к a. Значит, существует окрестность точки a в D, в которой $G(z, a) > 0$. Пусть γ — окружность с центром в a, лежащая в этой окрест-

[1]) Пусть $\infty \in D$, а $b \in \operatorname{ext} D$ (где $\operatorname{ext} D$ — внешность области D). Так как $G(z, a)$ при $a \neq \infty$ является гармонической в точке ∞, то мы имеем $A(z, a) = \log|z-b| + B(z, a)$, где $B(z, a)$ гармонична в D. Функцию $B(z, a)$ можно определить, решив задачу Дирихле для функции $\log\left|\frac{\zeta - a}{\zeta - b}\right|$ на C. В случае $a = \infty$ имеем $G(z, \infty) = \log|z| + A(z, \infty)$, и при нахождении функции $A(z, \infty)$ следует учитывать, содержит или не содержит область D начало координат. Случаи, когда бесконечно удаленная точка или начало координат лежат на C, можно устранить при помощи конформного отображения.

ности, и D^* — подобласть области D, ограниченная C и γ. В этой области функция $G(z, a)$ является гармонической, и на ее границе $\gamma + C$ имеем $G(z, a) \geqslant 0$. Следовательно, из принципа максимума и минимума (гл. I, § 3, п. 10) вытекает, что $G(z, a) \geqslant 0$ в D^*. Так как $G(z, a) \geqslant 0$ внутри γ, то наше утверждение полностью доказано.

3. *Если a и b — две точки из D, то функции Грина $G(z, a)$ и $G(z, b)$ области D относительно полюсов a и b удовлетворяют соотношению*

$$G(b, a) = G(a, b). \tag{2}$$

Если область D ограничена конечным числом простых замкнутых аналитических кривых, то соотношение (2) вытекает из формул типа формулы Грина (гл. I, (12) и (14)), примененных к функциям $G(z, a)$ и $G(z, b)$ в области $D^* \subset D$, ограниченной C и окружностями γ_a и γ_b с центрами в a и b, лежащими в D и внешними по отношению друг к другу. Для применения формулы (12) гл. I, кроме условий, наложенных на контур, которым граница области D^* удовлетворяет, функции $G(z, a)$ и $G(z, b)$ должны быть непрерывными и непрерывно дифференцируемыми в некоторой области Ω, содержащей $\overline{D}^*$. Эти условия, очевидно, выполнены на γ_a и γ_b. Для C они следуют из того, что функция Грина равна нулю на C и поэтому продолжается гармонически через C (гл. II, § 4, п. 19)[1]).

Таким образом, если интегралы берутся в положительном направлении, то можно написать

$$\int_{\gamma_a} \left[G(\zeta, a) \frac{\partial G(\zeta, b)}{\partial n} - G(\zeta, b) \frac{\partial G(\zeta, a)}{\partial n} \right] ds +$$

$$+ \int_{\gamma_b} \left[G(\zeta, a) \frac{\partial G(\zeta, b)}{\partial n} - G(\zeta, b) \frac{\partial G(\zeta, a)}{\partial n} \right] ds =$$

$$= \int_{C} \left[G(\zeta, a) \frac{\partial G(\zeta, b)}{\partial n} - G(\zeta, b) \frac{\partial G(\zeta, a)}{\partial n} \right] ds = 0, \tag{3}$$

так как $G(\zeta, a) = 0$ и $G(\zeta, b) = 0$ на C.

Вычислим интеграл по γ_a.

Функция $G(\zeta, b)$ гармонична в области $D - b$, а следовательно, и внутри γ_a. Ввиду соотношения (1) интеграл по γ_a разлагается

---

[1]) Условие аналитичности кривой C накладывается как раз для того, чтобы, гармонически продолжив G через C, установить непрерывность частных производных в некоторой области Ω, содержащей $\overline{D}^*$.

в сумму интеграла от функций $A(z, a)$ и $G(z, b)$:

$$\int_{\gamma_a}\left[A(\zeta, a)\frac{\partial G(\zeta, b)}{\partial n} - G(\zeta, b)\frac{\partial A(\zeta, a)}{\partial n}\right]ds,$$

равного нулю, согласно соотношению (12) гл. I (так как обе функции гармоничны внутри γ_a), и интеграла от функций $\log\frac{1}{|z-a|}$ и $G(z, b)$. Обозначив через r радиус окружности γ_a и через θ — аргумент $\zeta - a$, этот интеграл можно представить в виде

$$\int_{\gamma_a}\left[\log\frac{1}{r}\frac{\partial G(\zeta, b)}{\partial n} - G(\zeta, b)\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n}\right]ds =$$

$$= \log\frac{1}{r}\int_{\gamma_a}\frac{\partial G(\zeta, b)}{\partial n}ds + \int_0^{2\pi} G(a + re^{i\theta}, b)\,d\theta = 2\pi G(a, b);$$

это следует из соотношения (14) гл. I, соотношения $\frac{\partial \log(1/r)}{\partial n}ds = -\frac{\partial \log 1/r}{\partial r}r\,d\theta = d\theta$ и из формулы среднего значения (гл. I, (18)).

Аналогично вычисляется интеграл по γ_b, равный $-2\pi G(b, a)$. Подставляя эти результаты в соотношение (3), получаем искомое равенство.

4. Общий случай, когда область D ограничена конечным числом жордановых кривых, сводится к рассмотренному выше в силу инвариантности функции Грина при конформном отображении и следующей теоремы.

Любую область D, ограниченную конечным числом жордановых кривых $C_0, C_1, \ldots, C_p$, можно отобразить конформно на область, ограниченную простыми замкнутыми аналитическими кривыми, причем это отображение продолжается до топологического соответствия между замкнутыми областями.

Предположим, что C_0 — внешняя жорданова кривая, отделяющая D от бесконечно удаленной точки [1]).

При конформном отображении жордановой области, ограниченной C_0, на круг $|z'| < 1$ кривая C_0 переходит в окружность $|z'| = 1$, которую мы обозначим через C_0', а кривые $C_1, C_2, \ldots, C_p$ переходят в жордановы кривые $C_1', C_2', \ldots, C_p'$. Эти кривые ограничивают вместе с C_0' область D', образ области D. Ее граница

[1]) Случай, когда D содержит бесконечно удаленную точку, рассматривается аналогично.

содержит аналитическую кривую C_0'. Если отобразить затем конформно внешность кривой C_1' на круг $|z''|<1$, то C_1' перейдет в окружность $C_1'':|z''|=1$, C_0' перейдет в простую замкнутую аналитическую кривую, а $C_2', C_3', \ldots, C_p'$ преобразуются в жордановы кривые $C_2'', C_3'', \ldots, C_p''$. Образ D'' области D', ограниченный кривыми $C_0'', C_1'', \ldots, C_p''$, содержит в своей границе две аналитические кривые C_0'' и C_1''. Повторяя этот процесс, мы отобразим конформно внешность кривой C_2'' на круг $|z'''|<1$ и получим область, обладающую по крайней мере тремя аналитическими граничными кривыми. После конечного числа шагов (не более чем $p+1$) мы получим область, ограниченную только простыми замкнутыми аналитическими кривыми; эта область представляет собой образ области D при конформном отображении, являющемся суперпозицией рассмотренных отображений. Это отображение устанавливает топологическое соответствие между замкнутыми областями.

Доказанное таким образом для произвольных областей соотношение (2) называется *свойством симметрии функции Грина.*

5. Предложения, доказанные в пп. 2—4, показывают, что функцию $G^{-1}(z, a)=\dfrac{1}{G(z, a)}$ можно рассматривать как своего рода расстояние.

В самом деле, $G^{-1}(a, b)\geqslant 0$ при $a, b\in D$, причем $G^{-1}(a, b)=0$ только при $a=b$. Она обладает свойством симметрии $G^{-1}(a, b)=G^{-1}(b, a)$, однако не удовлетворяет аксиоме треугольника. При стремлении z к границе области $G^{-1}(z, a)$ стремится к $+\infty$.

6. Линии уровня функции Грина. Пусть $G(z, z_0)$ — функция Грина области D, и пусть $\overline{G}(z, z_0)$ — гармонически сопряженная функция. Исследуем множества точек

$$G(z, z_0)=\lambda=\text{const} \quad \text{и} \quad \overline{G}(z, z_0)=t=\text{const},$$

называемые линиями уровня функции G, соответственно $\overline{G}$ (как мы увидим, эти множества образуют некоторые кривые).

Если область D односвязна, то структура этих множеств легко выясняется при конформном отображении D на единичный круг $|\zeta|<1$, переводящем точку z_0 в $\zeta=0$. Действительно, функция Грина инвариантна при этом отображении, а линиями уровня функции Грина единичного круга с полюсом в $\zeta=0$, т. е. $\log\dfrac{1}{|\zeta|}$, служат окружности $|\zeta|=\text{const}$, тогда как линии уровня сопря-

женной функции — это радиусы $\arg\zeta = \text{const}$. Следовательно, в случае односвязной области линиями уровня $G(z, z_0) = \lambda$ являются простые замкнутые кривые, совпадающие при $\lambda = 0$ с границей C области D и стремящиеся при $\lambda \to +\infty$ к точке z_0; линиями уровня $\overline{G}(z, z_0) = t$ являются ортогональные к ним кривые, а именно простые дуги с одним концом в z_0 и с другим концом на C. Заметим, что $\overline{G}(z, z_0)$ меняется в отрезке длины 2π и что линии уровня $\overline{G}(z, z_0) = t_1$ и $\overline{G}(z, z_0) = t_2$ образуют в z_0 угол, равный $-(t_2 - t_1)$.

Что касается области D, граница которой состоит из p жордановых кривых C_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, p$), то мы докажем следующие результаты.

Если $\lambda > 0$ достаточно велико, то множество точек z, для которых $G(z, z_0) = \lambda$, является жордановой кривой. При $\lambda \to +\infty$ соответствующая линия уровня стремится к точке z_0, а при убывании λ эта кривая удаляется от z_0. Если область многосвязна, то при некотором значении λ линия уровня имеет самопересечение, а затем распадается на непересекающиеся простые замкнутые кривые. При достаточно малом λ линия уровня состоит из p жордановых кривых, и при $\lambda \to 0$ каждая из этих кривых стремится к одной из граничных кривых области D.

Для доказательства этих предложений заметим, что аналитическая функция $F(z) = G(z, z_0) + i\overline{G}(z, z_0)$ имеет производную $F'(z) = G'_x(z, z_0) - iG'_y(z, z_0)$, которая голоморфна в области $D - z_0$, причем z_0 является для этой производной простым полюсом с вычетом -1. В окрестности каждой точки $z \in D - z_0$, в которой $F'(z) \neq 0$, отображение, определяемое $F(z)$, конформно; следовательно, через точку z проходят линия $G(z, z_0) = \lambda$ и ортогональная к ней линия $\overline{G}(z, z_0) = t$, причем каждая из них образует в окрестности точки z простую аналитическую дугу. Если z — нуль порядка k производной $F'(z)$, то через эту точку проходят $k+1$ различных ветвей линии $G(z, z_0) = \lambda$ и $k+1$ различных ветвей линии $\overline{G}(z, z_0) = t$, расположенные попеременно таким образом, что касательные к этим ветвям в точке z разбивают плоскость на равные углы величиной $\dfrac{\pi}{2(k+1)}$.

Отсюда следует, что множество точек $G(z, z_0) = \lambda$ (или $\overline{G}(z, z_0) = t$) состоит из кривых; эти кривые являются простыми дугами в окрестности каждой точки z, где $F'(z) \neq 0$, и имеют самопересечения только в нулях производной $F'(z)$.

Число нулей $F'(z)$ конечно. Действительно, если область D ограничена простыми замкнутыми аналитическими кривыми, то $G(z, z_0)$ продолжается гармонически через ее границу (гл. II, § 4,

п. 19), а, следовательно, $F'(z)$ мероморфна в замкнутой области $\bar{D}$, и наше утверждение очевидно. Общий случай, когда область ограничена произвольными жордановыми кривыми, сводится к предыдущему при помощи конформного отображения, оставляющего инвариантными функцию Грина и топологическое строение линий уровня (см. теорему п. 4)[1]).

Следовательно, за исключением конечного числа значений λ, соответствующих нулям производной $F'(z)$, для которых линии уровня состоят из самопересекающихся кривых, любая линия уровня образована конечным числом непересекающихся простых замкнутых кривых[2]).

Однако ни одна из этих кривых не может ограничивать подобласть области D, в которой $G(z, z_0)$ была бы гармонической, так как, согласно принципу максимума и минимума (гл. I, § 3, п. 10), $G(z, z_0)$ была бы постоянной в этой области, что невозможно[3]).

Следовательно, каждая из двух областей, на которые такая жорданова кривая разбивает плоскость, содержит либо точку z_0, либо по крайней мере одну из граничных кривых области D.

Множество точек области D, которые можно соединить с z_0 при помощи непрерывного пути, не пересекающего линии уровня $G(z, z_0) = \lambda$, является областью D_λ; как следует из непрерывности функции Грина, она содержится в множестве $G(z, z_0) > \lambda$. Эта область ограничена кривыми, принадлежащими линии уровня $G(z, z_0) = \lambda$.

Мы утверждаем, что D_λ совпадает с множеством точек, в которых $G(z, z_0) > \lambda$. Действительно, $D - \bar{D}_\lambda$ состоит из конечного числа областей, в которых $G(z, z_0)$ гармонична и которые ограничены кривыми $G(z, z_0) = \lambda$ или $G(z, z_0) = 0$. Согласно принципу экстремума, $0 < G(z, z_0) < \lambda$ в этих областях, а следовательно, множество точек, в которых $G(z, z_0) > \lambda$, содержится в D_λ.

Итак, если область D ограничена[4]), то, за исключением конечного числа значений λ, линия уровня $G(z, z_0) = \lambda$ состоит из

[1]) Точнее, пользуясь теоремой об изменении аргумента, можно показать, что число нулей $F'(z)$ в D, считая их кратности, равно $p - 1$. См., например, Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М., 1941, гл. II, § 4, п. 26.

[2]) Эти кривые являются замкнутыми, так как они не могут оканчиваться ни на C, где $G(z, z_0) = 0$, ни в z_0, где $G(z, z_0) = +\infty$, ни в какой-либо другой точке области, как следует из приведенного выше рассуждения о локальном поведении линий уровня. Аналогично устанавливается, что число их конечно.

[3]) При этом две или более кривых, принадлежащих одной линии уровня, не могут ограничивать подобласть области D, в которой $G(z, z_0)$ является гармонической.

[4]) Случай $D \ni \infty$ рассматривается аналогично; нужно учитывать только, что D содержится теперь во внешности своих граничных кривых.

жордановой кривой, охватывающей точку z_0, и, быть может, еще других жордановых кривых, внешних по отношению друг к другу, причем каждая такая кривая охватывает хотя бы одну граничную кривую области D.

При достаточно большом λ линия уровня состоит из одной жордановой кривой, охватывающей точку z_0. В самом деле, возьмем круг δ с центром в z_0, лежащий вместе со своей окружностью γ внутри D, причем выберем его таким образом, чтобы $F'(z)$ не обращалась в нуль в $\overline{\delta} = \delta + \gamma$ [1]). Если обозначить через M максимум $G(z, z_0)$ на γ и применить принцип экстремума, то можно заключить отсюда, что $0 < G(z, z_0) < M$ в $D - \overline{\delta}$, а следовательно, при любом $\lambda > M$ линия уровня $G(z, z_0) = \lambda$ лежит в δ. Эта линия уровня состоит из единственной жордановой кривой [2]), охватывающей точку z_0. При $\lambda \to 0$ линия уровня $G(z, z_0) = \lambda$ состоит из p жордановых кривых, стремящихся к каждой из p граничных кривых области D.

Пусть C'_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, p$) — p жордановых кривых, лежащих в D и расположенных достаточно близко к кривым C_ν, так что C_ν и C'_ν ограничивают двусвязную область $\Delta_\nu \subset D$, причем замкнутые области $\overline{\Delta}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, p$) не пересекаются и область $D - \sum_{\nu=1}^{p} \overline{\Delta}_\nu$ содержит точку z_0. Если m — минимум функции Грина $G(z, z_0)$ на кривых C'_ν, то при любом $\lambda < m$ линия уровня $G(z, z_0) = \lambda$ лежит в области $\sum_{\nu=1}^{p} \Delta_\nu$, так как в $D - \sum_{\nu=1}^{p} \overline{\Delta}_\nu$ мы имеем $G(z, z_0) > m$. Снова ссылаясь на непрерывность функции Грина и на принцип экстремума, мы заключаем, что в каждой области Δ_ν имеется единственная жорданова кривая, принадлежащая линии уровня $G(z, z_0) = \lambda < m$.

Заметим также, что при каждом λ функция Грина области D_λ относительно полюса z_0 равна $G(z, z_0) - \lambda$, а в качестве сопряженной функции можно взять $\overline{G}(z, z_0)$.

Если выбрать λ достаточно большим, чтобы область D_λ была односвязной, то линии уровня функции $\overline{G}(z, z_0)$ будут выходить из z_0 и состоять из простых дуг в D_λ; $\overline{G}(z, z_0)$ принимает значения в отрезке длины 2π, и линии $\overline{G}(z, z_0) = t_1$ и $\overline{G}(z, z_0) = t_2$ образуют в z_0 угол, равный $-(t_2 - t_1)$. Линии $\overline{G}(z, z_0) = \text{const}$ заканчиваются на C. Они являются простыми дугами, все, за

---

[1]) Это построение возможно, так как $F'(z)$ имеет полюс в точке z_0.

[2]) Из существования других жордановых кривых следовало бы существование граничных кривых области D, лежащих в δ, что невозможно.

исключением конечного числа линий, имеющих самопересечение в нулях $F'(z)$ и разделяющих остальные линии на группы линий уровня с концами, лежащими на различных кривых C_ν.

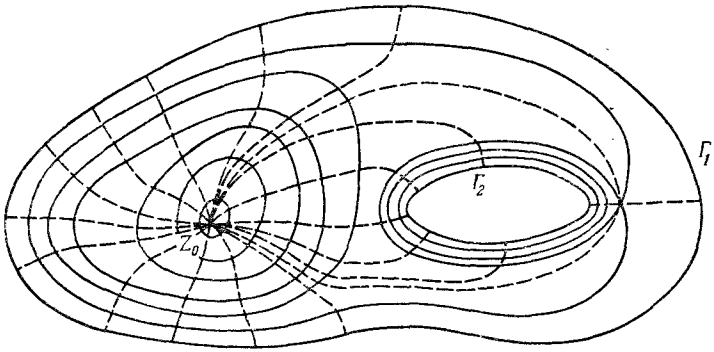

Рис. 18.

На рис. 18 изображены линии уровня $G(z, z_0) = \text{const}$. (сплошные линии) и линии уровня $\overline{G}(z, z_0) = \text{const}$. (пунктирные линии) для двусвязной области D.

§ 2. ПРИНЦИП ЛИНДЕЛЁФА

7. Принцип максимума и минимума (гл. I, § 3, п. 10) дает возможность установить некоторые общие свойства, известные под названием „принципов", при помощи которых можно доказать много теорем о гармонических и аналитических функциях, выявляющих их внутреннюю связь. В этом разделе мы изложим принцип Линделёфа, выражающий поведение функции Грина при отображении, определяемом голоморфной функцией. Этот принцип является существенным обобщением леммы Шварца.

Принцип Линделёфа формулируется следующим образом.

Пусть δ — *область на плоскости* (z), *ограниченная конечным числом жордановых кривых, и пусть* $Z = f(z)$ — *функция, голоморфная в* $\bar{\delta}$ [1]), *значения которой при* $z \in \delta$ *лежат внутри области* Δ *плоскости* (Z), *также ограниченной конечным числом жордановых кривых.*

Если Z_0 — *точка образа* $f(\delta)$ *области* δ, $\{z_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ — *множество точек из* δ, *для которых* $f(z_\nu) = Z_0$ [2]), *и* n_ν — *по-*

[1]) Функция $f(z)$ не обязательно голоморфна в $\bar{\delta}$.

[2]) Множество $\{z_\nu\}$ содержит по крайней мере одну точку z_0, так как $Z_0 \in f(\delta)$. Оно не более чем счетно, и если оно бесконечно, то его предельные точки лежат на границе области δ.

рядок нуля z_ν функции $f(z) - Z_0$, то, обозначая через $g(z, z_\nu)$ функцию Грина области δ с полюсом в z_ν и через $G(Z, Z_0)$ — функцию Грина области Δ с полюсом в Z_0, получаем

$$G(Z, Z_0) \geqslant \sum_\nu n_\nu g(z, z_\nu) \tag{4}$$

при произвольном $z \in \delta$ и $Z = f(z)$.

Если в соотношении (4) равенство имеет место в какой-либо одной точке $z \in \delta$, то оно имеет место во всей области δ.

Мы установим соотношение (4), исследуя в области δ функцию

$$I(z) = G[f(z), Z_0] - \sum_{\nu=0}^{N} n_\nu g(z, z_\nu), \tag{5}$$

где $N+1$ — число точек z_ν в области δ, если это число конечно, или произвольное натуральное число в противном случае. При этих условиях мы докажем неравенство

$$I(z) \geqslant 0. \tag{6}$$

Функция $I(z)$ гармонична в области $\delta - \{z_\nu\}$, так как если $z \neq z_\nu$, то $Z \neq Z_0$; поэтому функции $g(z, z_\nu)$ и $G[f(z), Z_0]$ гармоничны в окрестности точки z.

Так как $f(z)$ в окрестности z_ν разлагается в ряд

$$Z = f(z) = Z_0 + c_{n_\nu}(z - z_\nu)^{n_\nu} + c_{n_\nu+1}(z - z_\nu)^{n_\nu+1} + \ldots,$$

причем $c_{n_\nu} \neq 0$, то

$$G(Z, Z_0) = \log \frac{1}{|Z - Z_0|} + A(Z, Z_0) =$$

$$= n_\nu \log \frac{1}{|z - z_\nu|} + \log \frac{1}{|c_{n_\nu} + c_{n_\nu+1}(z - z_\nu) + \ldots|} + A[f(z), Z_0] =$$

$$= n_\nu \log \frac{1}{|z - z_\nu|} + A_1(z), \tag{7}$$

где функция $A_1(z)$ гармонична в окрестности точки z_ν.

Итак, если $\nu \leqslant N$, то $I(z)$ является гармонической в окрестности точки z_ν; это получается из (5) и (7) непосредственным вычислением.

Действительно,

$$g(z, z_\nu) = \log \frac{1}{|z - z_\nu|} + a(z, z_\nu),$$

где $a(z, z_\nu)$ является гармонической в окрестности точки z_ν и

$$I(z) = n_\nu \log \frac{1}{|z - z_\nu|} + A_1(z) - n_\nu \left[\log \frac{1}{|z - z_\nu|} + a(z, z_\nu) \right] - \sum_{k=0;\ k \neq \nu}^{N} n_k g(z, z_k).$$

При $\nu \geqslant N$, что может случиться лишь тогда, когда множество $\{z_\nu\}$ бесконечно, $I(z)$ стремится к $+\infty$ при $z \to z_\nu$, так как в окрестности точки z_ν имеем

$$I(z) = n_\nu \log \frac{1}{|z - z_\nu|} + A_1(z) - \sum_{k=0}^{N} n_k g(z, z_k),$$

а функция $A_1(z) - \sum_{k=0}^{N} n_k g(z, z_k)$ гармонична в этой окрестности.

Отсюда вытекает, что для каждой точки z_ν, для которой $\nu \geqslant N$, существует окрестность v_ν, в которой $I(z) > 0$.

При условии, что множество $\{z_\nu\}$ конечно, функция $I(z)$ гармонична в δ. Если z стремится к точке ζ, лежащей на границе области δ, то $g(z, z_\nu)$ стремится к нулю и $G(Z, Z_0) \geqslant 0$; поэтому, применяя принцип минимума для открытых областей (гл. II, § 3, п. 13), получаем искомое неравенство

$$I(z) \geqslant 0.$$

Если множество $\{z_\nu\}$ бесконечно, то для каждого z_ν при $\nu \geqslant N$ проведем окружность γ_ν с центром в z_ν, лежащую внутри v_ν, так чтобы все окружности были внешними по отношению друг к другу. Пусть δ^* — область, которую мы получим из δ, выбросив круги, ограниченные окружностями γ_ν. Функция $I(z)$ гармонична в δ^* и положительна на этих окружностях. При стремлении z к границе области δ функция $g(z, z_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$ стремится к нулю, а $G(Z, Z_0)$ остается неотрицательной. Следовательно, принцип максимума и минимума, примененный к открытой области δ^*, снова показывает, что $I(z) \geqslant 0$ в этой области. Однако окружности γ_ν выбирались так, чтобы $I(z)$ была положительной в ограничиваемых ими кругах. Отсюда следует, что соотношение (6) выполняется во всей области δ.

Так как N — произвольное натуральное число, то неравенство (4) вытекает из (6) и в случае бесконечного множества $\{z_\nu\}$. Одновременно мы доказали, что ряд $\sum_\nu n_\nu g(z, z_\nu)$ сходится и что функция

$$G[f(z), Z_0] - \sum_\nu n_\nu g(z, z_\nu) \qquad (8)$$

является гармонической и неотрицательной в δ независимо от того, бесконечно множество $\{z_\nu\}$ или нет.

Из неравенства (4) сразу следует, что

$$G(Z, Z_0) \geqslant \sum_\nu m_\nu g(z, z_\nu), \tag{9}$$

где $0 \leqslant m_\nu \leqslant n_\nu$, так как неравенство (4) лишь усиливается, если правой части опустить часть слагаемых $g(z, z_\nu)$, неотрицательных в δ. В частности, справедливо неравенство

$$G(Z, Z_0) \geqslant g(z, z_0), \tag{10}$$

где через z_0 обозначена произвольная точка, принадлежащая $\{z_\nu\}$. Это неравенство и является классической формой принципа Линделёфа [1]).

В каждом из соотношений (4), (9) и (10), если равенство имеет место в какой-либо одной точке из δ, то, согласно принципу максимума и минимума, оно имеет место в каждой точке δ. Очевидно, что в (9) знак равенства стоит только при $m_\nu = n_\nu$, а в (10) — только если множество $\{z_\nu\}$ состоит из одной точки z_0 и $n_0 = 1$.

8. Формулировка (10) принципа Линделёфа допускает следующее уточнение.

Если

$$G(Z, Z_0) = g(z, z_0) \tag{11}$$

в какой-либо точке $z \in \delta$ (*а следовательно, во всей области* δ), *то функция* $Z = f(z)$ *отображает конформно область* δ *на область* Δ.

Мы докажем эту теорему как частный случай следующего предложения.

Если

$$G(Z, Z_0) = \sum_{\nu=0}^{N} n_\nu g(z, z_\nu) \tag{12}$$

какой-либо точке $z \in \delta$ (*а следовательно, во всех точках* $z \in \delta$), *то* $Z = f(z)$ *отображает область* δ *на область* Δ, *причем*

---

[1]) См. Lindelöf E., Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes, *Acta Soc. sci. fenn.*, **35**, 7 (1908), p. 35. Обобщенная форма неравенства (4) использована Хейнсом М. (M. Heins) в работе On the Lindelöf principle, *Ann. of Math.*, **61**, 3 (1955), 440—473. Другое обобщение принципа Линделёфа дано О. Лехто (O. Lehto) в работе A majorant principle in the theory of functions, *Math., Scand*, 1 (1953), p. 5—17. См. также Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М., 1941.

каждая точка Δ *является образом* $n = \sum_{\nu=0}^{N} n_\nu$ *точек* δ *(с учетом их кратностей).*

9. Говорят, что *последовательность точек некоторой области стремится к границе этой области*, если она не содержит подпоследовательности, сходящейся к внутренней точке области [1]).

Внутреннее отображение $Z = f(z)$ области δ в область Δ определяет *полное накрытие* Δ областью δ, если любая последовательность точек δ, стремящаяся к границе этой области, переводится в последовательность точек Δ, стремящуюся к границе области Δ [2]).

Мы покажем, что отображение $Z = f(z)$, для которого выполняется соотношение (12), определяет полное накрытие Δ областью δ, и, используя только определение полного накрытия, докажем, что $f(\delta) = \Delta$ и что любая точка из Δ является образом ровно n точек из δ [3]).

Итак, *пусть* z_m^* *— последовательность точек из* δ, *стремящаяся к границе этой области; докажем, что последовательность* $f(z_m^*)$ *стремится к границе области* Δ.

Рассмотрим предельную точку P последовательности $f(z_m^*)$. Выделим из z_m^* подпоследовательность $z_{m'}^*$, такую, что $f(z_{m'}^*)$ сходится к P, а из последней выделим подпоследовательность $z_{m''}^*$, сходящуюся к какой-либо предельной точке ζ последовательности $z_{m'}^*$; по предположению, ζ принадлежит границе области δ.

Тогда

$$G(P, Z_0) = \lim_{m'' \to 0} G\left[f(z_{m''}^*), Z_0\right] =$$

$$= \lim_{m'' \to \infty} \sum_{\nu=1}^{N} n_\nu g(z_{m''}^*, z_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} n_\nu g(\zeta, z_\nu) = 0.$$

Следовательно, P не может лежать внутри области Δ, и последовательность $f(z_m^*)$ стремится к границе Δ.

---

[1]) Так как мы рассматриваем область комплексной плоскости, которая компактна, то всякая последовательность обладает хотя бы одной предельной точкой. Мы требуем, чтобы эти предельные точки находились на границе области.

[2]) См., например, Stoïlow S., Principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Paris, 1938 (или éd. 2, 1956), ch. VI, sect. II, p. 125—130.

[3]) Это свойства любого полного накрытия, а не только того, которое определяется голоморфной функцией $f(z)$ со свойством (12); это следует из доказательств 1° и 2° п. 10.

10. Из доказанного свойства вытекают такие следствия.

1°. *Образ области* δ *при отображении* $Z=f(z)$ *совпадает со всей областью* Δ, *т. е.* $f(\delta)=\Delta$.

Действительно, если бы включение $f(\delta)\subseteq\Delta$ было строгим, то в Δ существовала бы точка P, лежащая на границе множества $f(\delta)$, так как в противном случае область Δ распадалась бы на два непересекающихся непустых открытых множества $\Delta\cap f(\delta)$ и $\Delta\cap\operatorname{ext} f(\delta)$, что противоречит ее связности.

Пусть P_n — последовательность различных точек $f(\delta)$, сходящаяся к P, и пусть p_n — точка из $f^{-1}(P_n)\cap\delta$. Точки p_n все различны, так как функция $f(z)$ однозначна; множество этих точек имеет по крайней мере одну предельную точку p в $\overline{\delta}$. Выделим из последовательности p_n подпоследовательность $p_{n'}$, сходящуюся к p. Точка p не может принадлежать δ, так как тогда точка $P=\lim\limits_{n'\to\infty} f(p_{n'})$ совпадала бы с $f(p)$ и лежала бы в $f(\delta)$, в то время как, по предположению, P принадлежит границе множества $f(\delta)$. Следовательно, p принадлежит границе области δ, и последовательность $p_{n'}$ стремится к этой границе. Так как $Z=f(z)$ определяет полное накрытие области Δ, то $P_{n'}$ стремится к границе этой области, т. е. P принадлежит этой границе, а не области Δ, как мы предположили. Таким образом доказано, что $f(\delta)=\Delta$.

2°. *Каждая точка из* Δ *накрыта ровно* n *точками из* δ (*с учетом их кратностей*).

Обозначим через Δ_k множество точек из Δ, которые обладают k прообразами в δ. Применяя теорему обращения аналитических функций[1]), мы покажем, что это множество *открыто*.

Для этого рассмотрим точку $P\in\Delta_k$ и точки $p_1, p_2, \ldots, p_m$ из δ, в которых $f(z)$ принимает значение P. Пусть k_ν — кратность нуля p_ν функции $f(z)-P\left(\sum\limits_{\nu=1}^{m} k_\nu=k\right)$. Согласно теореме обращения, существует такая окрестность V_P точки P, что для каждой точки p_ν имеется область v_ν, содержащая p_ν внутри и k_ν-кратно накрывающая V_P. Предположим, что P не является внутренней точкой множества Δ_k. Ввиду того что все точки из V_P обладают по крайней мере k прообразами, существует последовательность точек P_n, имеющих более чем k прообразов, сходящаяся к P. Для каждой такой точки $P_n\in V_P$ существует, таким

[1]) См. том I, гл. X, § 1, стр. 286—287. Если свойства 1° и 2° доказываются для внутренних отображений, определяющих полные накрытия, то применяется теорема обращения внутренних отображений. См. Stoïlow S., Principes topologiques ... ch. V, sect. II, p. 108—117, или гл. VII, § 4, п. 16 настоящего тома.

образом, точка $p_n' \in f^{-1}(P_n) \cap \left(\delta - \sum_{\nu=1}^{m} v_\nu\right)$. Множество точек p_n' обладает по крайней мере одной предельной точкой $p' \in \delta - \sum_{\nu=1}^{m} v_\nu$. Эта точка принадлежит границе области δ. В самом деле, если бы p' лежала внутри δ, то, выбрав подпоследовательность $p_{n'}'$ из p_n', сходящуюся к p', и заметив, что $f(p') = \lim_{n' \to \infty} f(p_{n'}') = \lim_{n' \to \infty} P_{n'} = P$ и $p' \neq p_\nu$, мы получили бы, что значение P принимается в δ более чем k раз. Но если последовательность $p_{n'}'$ стремится к границе области δ, то последовательность $P_{n'}$ обладает тем же свойством, что невозможно, так как $P_{n'}$ стремится к точке P из Δ. Таким образом, множество Δ_k открыто.

Так как $\Delta = f(\delta)$, то $\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k$.

Следовательно, множество Δ представимо в виде суммы двух открытых непересекающихся множеств Δ_n и $\sum_{k=1,\, k\neq n}^{\infty} \Delta_k$. Так как Δ связно, то одно из этих множеств пусто. Однако Δ_n содержит точку Z_0. Действительно, это значение принимается n раз функцией $f(z)$ в точках z_ν.

Итак, мы доказали и последнюю часть теоремы, сформулированной в п. 8.

Если множество $\{z_\nu\}$ бесконечно, но в соотношении (4) имеет место равенство, мы не можем говорить о полном накрытии, которое всегда конечно.

Этот случай может все же представиться, как показывают следующие примеры:

$$\delta : |\operatorname{Im}(z)| < h, \quad Z = f(z) = \sin z \quad \text{и} \quad \Delta = f(\delta),$$
$$\delta : \operatorname{Re}(z) < 0, \quad Z = f(z) = e^z \quad \text{и} \quad \Delta : |Z| < 1.$$

11. Лемма Шварца является частным случаем принципа Линделёфа в виде (10). Действительно, пусть $\delta : |z| < R$, $\Delta : |Z| < M$ и $z_0 = Z_0 = 0$.

Тогда $g(z, 0) = \log \frac{R}{|z|}$, $G(Z, 0) = \log \frac{M}{|Z|}$, и из принципа Линделёфа следует, что

$$\log \frac{R}{|z|} \leqslant \log \frac{M}{|Z|},$$

причем равенство имеет место лишь тогда, когда $Z = f(z)$ отображает конформно круг δ на Δ.

Это и есть лемма Шварца [1]).

Если функция $Z = f(z)$ *голоморфна и ограничена в круге* $|z| < R$, $|f(z)| < M$ *при* $|z| < R$ *и* $f(0) = 0$, *то*

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{R}|z|$$

при $|z| < R$. *Равенство в одной точке влечет за собой равенство во всем круге* $|z| < R$. *В этом случае*

$$f(z) = \frac{M}{R} ze^{i\theta} \quad (\theta \text{ — действительная постоянная}).$$

Если применить принцип Линделёфа в случае, когда δ — единичный круг $|z| < 1$, Δ — единичный круг $|Z| < 1$, а $Z = f(z)$ — отображение δ в Δ, при котором точке $z_0 \in \delta$ соответствует точка $Z_0 = f(z_0) \in \Delta$, то мы получим лемму Шварца в том виде, который ей придал Пик [2]).

Действительно,

$$g(z, z_0) = \log \left| \frac{1 - \bar{z}_0 z}{z - z_0} \right|$$

и

$$G(Z, Z_0) = \log \left| \frac{1 - \bar{Z}_0 Z}{Z - Z_0} \right|;$$

следовательно, из принципа Линделёфа в виде (10) вытекает неравенство

$$\left| \frac{Z - Z_0}{1 - Z\bar{Z}_0} \right| \leqslant \left| \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} \right|. \tag{13}$$

В геометрической интерпретации это неравенство показывает, что неевклидово расстояние не возрастает при отображении $Z = f(z)$.

При помощи понятия неевклидова расстояния легко убедиться в том, что множество точек z, для которых

$$g(z, z_0) \geqslant \lambda \qquad (\lambda > 0),$$

или

$$\left| \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} \right| \leqslant e^{-\lambda}, \tag{14}$$

представляет собой неевклидов круг с неевклидовым центром z_0

---

[1]) Том I, гл. II, § 3, п. 29, стр. 73.

[2]) Том I, гл. III, § 2, п. 20, стр. 98, или Pick G., Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisformiger Bereiche, *Math. Ann.*, 77 (1916), 295—306.

и неевклидовым радиусом $\log \frac{1+e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$ [1]). Таким образом, принцип Линделёфа выражает следующее свойство: если z — точка неевклидова круга (14), то ее образ при голоморфном отображении $Z=f(z)$ круга $|z|<1$ в круг $|Z|<1$ содержится в неевклидовом круге с неевклидовым центром $Z_0=f(z_0)$, неевклидов радиус которого не превосходит неевклидова радиуса круга (14), а это и есть лемма Шварца — Пика.

12. В виде (10) принцип Линделёфа допускает следующую *геометрическую интерпретацию*, которая обобщает вышеприведенный результат.

Пусть функция $Z=f(z)$ голоморфна в области δ и принимает значения в области Δ, z_0 — точка из δ, $Z_0=f(z_0)$ — ее образ; пусть, далее, $g(z, z_0)$ и $G(Z, Z_0)$ — функции Грина областей δ и Δ. Если $\lambda>0$, то образ каждой точки z области

$$g(z, z_0)\geqslant\lambda \tag{15}$$

принадлежит области

$$G(Z, Z_0)\geqslant\lambda. \tag{16}$$

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРИНЦИПА ЛИНДЕЛЁФА

В настоящем разделе при помощи принципа Линделёфа в форме (10) мы установим неравенство Каратеодори и теорему Пикара. Прямое доказательство этих результатов приведено в томе I. Применение принципа Линделёфа раскроет их геометрический смысл.

13. Неравенство Каратеодори [2]).

Пусть функция $Z=f(z)$ *голоморфна в* $|z|<R$, $f(0)=0$ *и* $\operatorname{Re} f(z)<A$ *при* $|z|<R$. *Если* $|z|=r<R$, то

$$|f(z)|\leqslant\frac{2Ar}{R-r}. \tag{17}$$

Так как $f(0)=0$ и $\operatorname{Re} f(z)<A$ при $|z|<R$, то $A>0$.

---

[1]) Действительно, при отображении

$$z'=\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$$

множество точек, удовлетворяющих неравенству (14), переходит в круг $|z'|\leqslant e^{-\lambda}$, неевклидов радиус которого, совпадающий с неевклидовым радиусом исходного круга, равен неевклидову расстоянию точки $e^{-\lambda}$ до начала координат, т. е., если опустить численный множитель $1/2$, он равен $\log\frac{1+e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$. См. том I, гл. III, § 2, п. 18—19, стр. 95—96, формула (23).

[2]) Том I, гл. II, § 3, п. 30, стр. 74.

Пусть δ — круг $|z| < R$ и Δ — полуплоскость $\operatorname{Re} Z < A$. Согласно принципу Линделёфа,

$$\log \left| \frac{Z-2A}{Z} \right| \geqslant \log \frac{R}{|z|}, \tag{18}$$

так как функция Грина области Δ относительно полюса $Z=0$ равна $\log \left| \frac{Z-2A}{Z} \right|$ (рис. 19)[1]), а функция Грина области δ с полюсом $z=0$ равна $\log \frac{R}{|z|}$.

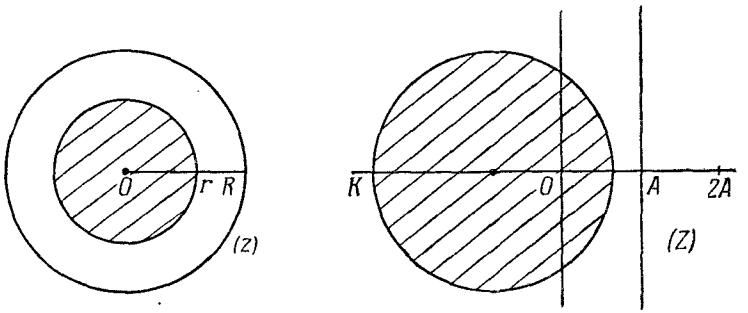

Рис. 19.

Неравенство (18) можно записать в виде

$$\left| \frac{Z}{Z-2A} \right| \leqslant \frac{|z|}{R}. \tag{19}$$

Следовательно, если $|z| = r$, то Z находится в круге, ограниченном окружностью

$$\left| \frac{Z}{Z-2A} \right| = \frac{r}{R}, \tag{20}$$

геометрическим местом точек P, отношение расстояний которых до начала координат 0 и до точки $2A$ постоянно и равно $\frac{r}{R} < 1$ (рис. 19). Максимальное расстояние $\overline{OK}$ точек этой окружности до $Z=0$ определяется соотношением (20):

$$\frac{\overline{OK}}{\overline{OK}+2A} = \frac{r}{R}, \text{ или } \overline{OK} = \frac{2AR}{R-r}.$$

Следовательно, при $|z| = r$ имеет место неравенство

$$|Z| = |f(z)| \leqslant \frac{2Ar}{R-r}.$$

[1]) При помощи дробно-линейного преобразования $\zeta = \frac{Z}{Z-2A}$ область Δ отображается конформно на $|\zeta| < 1$, причем $Z=0$ переходит в $\zeta = 0$.

14. Доказательство большой теоремы Пикара [1]).

Функция, мероморфная в окрестности изолированной существенно особой точки, принимает в произвольной окрестности этой точки любое комплексное значение, за возможным исключением не более чем двух значений.

Пусть $z=0$ — изолированная существенно особая точка мероморфной функции $f(z)$, и пусть $f(z)$ в некоторой окрестности этой точки не принимает трех значений, например 0, 1 и ∞. Тогда $f(z)$ голоморфна в круге с выколотым центром $0<|z|<R$ при некотором R и не принимает в нем значений 0 и 1. Мы покажем, что это несовместимо с тем, что $z=0$ — существенно особая точка.

Отобразим круг с выколотой точкой на полуплоскость $\operatorname{Im} u>0$ при помощи функции

$$z=Re^{iu} \qquad (u=s+it), \tag{21}$$

а плоскость (Z) без точек 0, 1 и ∞ — на полуплоскость $\operatorname{Im} U>0$ при помощи отображения

$$Z=\mu(U), \tag{22}$$

где μ — однозначная модулярная функция, определенная в $\operatorname{Im} U>0$.

Отображение $Z=f(z)$ принимает вид $U=\varphi(u)$ и переводит $\operatorname{Im} u>0$ в некоторую область полуплоскости $\operatorname{Im} U>0$. Действительно, когда z меняется в круге $|z|<R$ $(z\neq 0)$, $Z=f(z)$ меняется в области на плоскости (Z), не содержащей особых точек $Z=0$, 1, ∞ функции $\mu^{-1}(Z)=U$. Функция $\varphi(u)$, которая определяется, если выбрать одну из ветвей $\mu^{-1}(Z)$, голоморфна в каждой точке полуплоскости $\operatorname{Im} u>0$, и так как область $\operatorname{Im} u>0$ односвязна, то, согласно теореме о монодромии [2]), $\varphi(u)$ является также однозначной в этой области.

Применим принцип Линделёфа к этой функции, принимая за области Δ и δ соответственно $\operatorname{Im} U>0$ и $\operatorname{Im} u>0$.

Пусть u_0 — точка полуплоскости $\operatorname{Im} u>0$ и $U_0=\varphi(u_0)$. Функция Грина области $\operatorname{Im} u>0$ с полюсом в u_0 равна $\log\left|\dfrac{u-\overline{u}_0}{u-u_0}\right|$, а функция Грина для $\operatorname{Im} U>0$ имеет аналогичный вид; поэтому

$$\log\left|\frac{U-\overline{U}_0}{U-U_0}\right|\geqslant\log\left|\frac{u-\overline{u}_0}{u-u_0}\right|. \tag{23}$$

Пусть P — произвольное комплексное число, отличное от 0, 1 и ∞. Согласно теореме Вейерштрасса о существенно особых точках [3]), можно найти сходящуюся к нулю последовательность

[1]) Том I, гл. XI, § 3, п. 33—35, стр. 355—356.
[2]) Том I, гл. IV, § 1, п. 6, стр. 140.
[3]) Том I, гл. IV, § 4, п. 20, стр. 154.

точек z_n, такую, что $f(z_n)$ стремится к P. Обозначим через u_n точки, соответствующие z_n на плоскости u, выбранные в полосе $|\operatorname{Re} u| < \pi$. Так как z_n стремится к нулю, то u_n стремится к бесконечности, а именно $\operatorname{Im} u_n \to \infty$. С другой стороны, при $z_n \to 0$ последовательность $U_n = \varphi(u_n)$ сходится к некоторой точке Q, такой, что $\infty > \operatorname{Im} Q > 0$ и $\mu(Q) = P$.

Применим принцип Линделёфа к функции $U = \varphi(u)$ в областях $\operatorname{Im} u > 0$ и $\operatorname{Im} U > 0$ и в точках u_n и U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ вместо u_0 и U_0. В этом случае из неравенства (23) мы заключаем, что

$$\left|\frac{U-\bar{U}_n}{U-U_n}\right| \geqslant e^{\lambda}, \text{ если } \left|\frac{u-\bar{u}_n}{u-u_n}\right| \geqslant e^{\lambda},$$

при фиксированном $\lambda > 0$ (в обоих неравенствах λ и n одни и те же).

Эти соотношения определяют круги γ_n на плоскости (u) и Γ_n на плоскости (U) с неевклидовыми центрами u_n и U_n и с одним и тем же неевклидовым радиусом $\log\frac{e^{\lambda}+1}{e^{\lambda}-1}$, не зависящим от n и возрастающим при убывании λ [1]).

Так как U_n стремится к Q, то при достаточно большом n круги Γ_n содержатся в круге Γ: $\left|\frac{U-\bar{Q}}{U-Q}\right| \geqslant e^{\lambda-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ такое, что Γ лежит в $\operatorname{Im} U > 0$.

Образом Γ при отображении (22) является ограниченное множество $E \subset (Z)$, содержащее P, т. е. существует такое число M, что $|Z| < M$, если $Z \in E$ $\left(M > \max\limits_{U \in \Gamma} |\mu(U)|\right)$.

Однако при достаточно большом n множество E содержит все точки $Z = f(Re^{iu})$, для которых $u \in \gamma_n$. Следовательно, для этих точек выполняется неравенство

$$|f(Re^{iu})| < M. \tag{24}$$

Покажем теперь, что евклидовы радиусы кругов γ_n стремятся к бесконечности одновременно с n.

---

[1]) При конформном преобразовании $\zeta = \frac{u-u_n}{u-\bar{u}_n}$ полуплоскости $\operatorname{Im} u > 0$ на круг $|\zeta| < 1$ неевклидов круг γ_n переходит в круг $|\zeta| \leqslant e^{-\lambda}$ с центром $\zeta = 0$ и с тем же неевклидовым радиусом, что и γ_n. Как следует из формулы (23), т. I, гл. III, § 2, п. 18 стр. 95, этот радиус равен $\log\frac{e^{\lambda}+1}{e^{\lambda}-1}$.

Пусть ω_n — евклидов центр круга γ_n и u'_n — точка γ_n с наименьшей ординатой (рис. 20)[1]).

Неевклидов радиус круга γ_n (неевклидово расстояние между u_n и u'_n), вычисленный в неевклидовой метрике полуплоскости[2]), равен

$$\int_{t'_n}^{t_n} \frac{dt}{t} = \log \frac{t_n}{t'_n}.$$

Так как t_n стремится к бесконечности одновременно с n, а неевклидов радиус не зависит от n, то отношение $\frac{t_n}{t'_n}$ постоянно и, следовательно, разность $t_n - t'_n$ стремится к бесконечности.

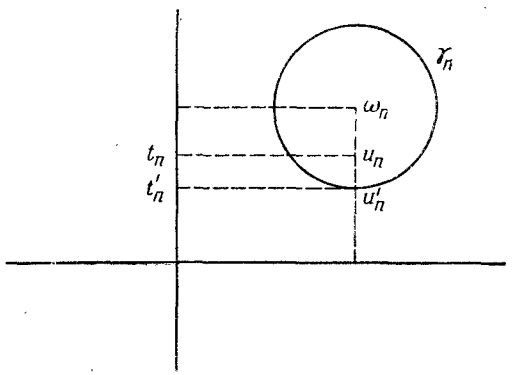

Рис. 20.

Евклидов радиус круга γ_n больше $t_n - t'_n$, поэтому он тем более стремится к бесконечности.

Взяв n достаточно большим, с тем чтобы диаметр круга γ_n был больше 2π, и применив преобразование (21), мы убеждаемся, что существует последовательность концентрических окружностей с центром $z = 0$ (например, образы диаметров кругов γ_n, параллельных действительной оси плоскости u), радиус которых стремится к нулю и на которых выполняется неравенство (24). Отсюда следует, что $|f(z)| < M$ в окрестности точки $z = 0$ и что эта точка не может быть особой для $f(z)$[3]), что противоречит условию.

---

[1]) Так как точки u_n и $\overline{u_n}$ симметричны относительно γ_n, то u_n имеет меньшую ординату, чем ω_n.

[2]) Том I, гл. III, § 2, п. 17, стр. 94, формула (21).

[3]) См. теорему Коши — Римана, том I, гл. IV, § 4, п. 19, стр. 152.

§ 4. ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ Ω

15. Пусть Ω — произвольная область, содержащая $z=\infty$, т. е. область с компактной границей F. Это условие не уменьшает общности получаемых результатов, так как при помощи конформного отображения любую область на плоскости можно преобразовать в область рассматриваемого типа.

Чтобы распространить результаты, доказанные для областей D, на произвольные области Ω, мы используем последовательности подобластей $D_n \subset \Omega$, ограниченных конечным числом жордановых кривых C_n и обладающих свойствами

$$\bar{D}_n \subset D_{n+1}, \tag{25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n = \Omega. \tag{26}$$

Такие последовательности областей мы будем называть *аппроксимирующими последовательностями*, или *исчерпаниями области* Ω.

Укажем способ построения последовательности областей D_n.

Из семейства кругов радиусом меньше ε ($\varepsilon > 0$), покрывающих границу F области Ω, выберем конечное число кругов с этим свойством. Это возможно в силу теоремы Бореля — Лебега. Пусть D_1 — связная компонента дополнения к объединению этих кругов относительно плоскости (z), содержащая $z=\infty$. Эта область содержится в Ω, и ее граница Γ_1 состоит из конечного числа жордановых кривых, каждая из которых образована дугами окружностей. Рассмотрим затем семейство кругов радиусом меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, покрывающих границу F и лежащих внутри выбранных ранее кругов. Из этого семейства выберем конечное покрытие F и обозначим через D_2 связную компоненту дополнения к выбранным кругам, содержащую точку $z=\infty$. Очевидно, что $\bar{D}_1 \subset D_2$ и $D_2 \subset \Omega$. Продолжая этот процесс, мы получаем последовательность областей D_n, ограниченных конечным числом жордановых кривых и удовлетворяющих свойству (25).

Чтобы доказать равенство $\sum_{n=1}^{\infty} D_n = \Omega$, достаточно заметить, что любую точку $p \in \Omega$ можно соединить с $z=\infty$ при помощи непрерывного пути L, лежащего в Ω на положительном расстоянии от F. При достаточно большом n радиусы кругов, выбранных на n-м шаге построения, меньше $\frac{\varepsilon}{n}$, и точка p и весь путь L находятся во внешней по отношению к этим кругам области, т. е. в D_n.

Проведенное построение дает возможность утверждать *существование аппроксимирующих последовательностей.*

16. Определим при помощи такой последовательности функцию Грина для области Ω.

Пусть z_0 — точка Ω (которая может совпадать с ∞), и пусть N — натуральное число, такое, что при $n \geqslant N$ точка z_0 принадлежит D_n. Обозначая через $G_n(z, z_0)$ функцию Грина области D_n с полюсом z_0, получаем

$$G_n(z, z_0) < G_{n+1}(z, z_0) \qquad (n \geqslant N)$$

в D_n, так как функция $G_{n+1}(z, z_0) - G_n(z, z_0)$ гармонична в D_n, положительна на Γ_n, а следовательно, согласно принципу максимума и минимума (гл. I, § 3, п. 10), положительна в D_n.

Тогда, согласно теореме Гарнака (гл. II, § 1, п. 6), $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(z, z_0)$ либо равен ∞, либо является гармонической функцией в $\Omega - z_0$. В последнем случае в окрестности точки z_0 предельная функция имеет вид

$$\log \frac{1}{|z - z_0|} + A(z, z_0), \tag{27}$$

где $A(z, z_0)$ — функция, гармоническая в этой окрестности; она положительна в Ω.

Эта предельная функция последовательности $G_n(z, z_0)$, если она существует, является, по определению, *функцией Грина области Ω с полюсом в z_0*; она обозначается через $G_\Omega(z, z_0)$, или просто $G(z, z_0)$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(z, z_0) = \infty$, то говорят, что *область Ω не имеет функции Грина с полюсом в z.*

17. Покажем, что *свойство области Ω обладать или не обладать функцией Грина не зависит от аппроксимирующей последовательности D_n.*

Пусть D_n' — другое исчерпание Ω. Тогда для любого n существуют m и m', такие, что

$$D_m \supset D_n', \quad D_{m'}' \supset D_n. \tag{28}$$

Если $G(z, z_0)$ существует и n достаточно велико, так что z_0 принадлежит D_n', то из первого соотношения (28) следует, что $G_n'(z, z_0)$ (функция Грина области D_n') удовлетворяет неравенству

$$G_n'(z, z_0) \leqslant G_m(z, z_0),$$

а следовательно, $G_n'(z, z_0) \leqslant G(z, z_0)$,
или

$$G'(z, z_0) = \lim_{n\to\infty} G_n'(z, z_0) \leqslant G(z, z_0). \tag{29}$$

Таким образом, из существования $G(z, z_0)$ мы вывели существование $G'(z, z_0)$ и неравенство (29). Если повторить это рассуждение, используя второе соотношение (28), то мы придем к противоположному неравенству, а следовательно, $G(z, z_0) = G'(z, z_0)$, т. е. функция Грина определена однозначно, независимо от использованной последовательности D_n, если она существует для одной такой последовательности.

18. Легко также доказать, что *существование или несуществование функции Грина не зависит от полюса* z_0.

Действительно, если функция $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(z, z_0)$ конечна в $\Omega - z_0$, то она конечна в любой точке $z_1 \in \Omega - z_0$. Однако $G_n(z_1, z_0) = G_n(z_0, z_1)$ при достаточно большом n, таком, что z_1 принадлежит области D_n; это следует из свойства симметрии функции Грина (п. 3 и 4). Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(z_0, z_1)$ конечен. Применяя теорему Гарнака, заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(z, z_1)$ является гармонической функцией в $\Omega - z_1$. Это и есть функция Грина области Ω с полюсом в z_1, т. е. $G_\Omega(z, z_1)$. Таким образом, из существования функции $G_\Omega(z, z_0)$ с полюсом в какой-либо одной точке $z_0 \in \Omega$ мы вывели существование функции $G_\Omega(z, z_1)$ для любого $z_1 \in \Omega - z_0$.

19. Функцию Грина, определенную выше для области Ω, можно охарактеризовать следующим свойством.

$G_\Omega(z, z_0)$ — *наименьшая из неотрицательных в* $\Omega - z_0$ *гармонических функций, обладающих в окрестности точки* z_0 *представлением*

$$\log \frac{1}{|z - z_0|} + Q(z, z_0), \tag{30}$$

где $Q(z, z_0)$ *гармонична в этой окрестности.*

Действительно, если $P(z, z_0)$ — функция указанного выше типа, то, согласно принципу максимума и минимума, в области D_n имеем

$$P(z, z_0) \geqslant G_n(z, z_0),$$

а следовательно, в области Ω имеем $P(z, z_0) \geqslant G(z, z_0)$.

Однако в силу того же принципа равенство в какой-либо одной точке $z_1 \in \Omega - z_0$ влечет за собой совпадение $P(z, z_0)$ и $G(z, z_0)$; следовательно, $G(z, z_0)$ действительно является наименьшей из функций $P(z, z_0)$ в каждой точке $\Omega - z_0$. Доказательство этого минимального свойства показывает, что существование положительной в $\Omega - z_0$ гармонической функции, обладающей представлением

вида (30) в окрестности точки z_0, необходимо и достаточно для существования функции Грина области Ω.

20. В том частном случае, когда Ω является областью D, ограниченной конечным числом жордановых кривых, функция Грина $G_D(z, z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} G_n(z, z_0)$ существует и совпадает с функцией Грина, определенной непосредственно (гл. I, § 4, п. 12 и гл. V, § 1). Действительно, если обозначить через $G'_D(z, z_0)$ функцию Грина, построенную согласно прямому определению, то для любого n, для которого $z_0 \in D_n$,

$$G'_D(z, z_0) > G_n(z, z_0),$$

а следовательно, $G_D(z, z_0)$ существует и

$$G'_D(z, z_0) \geqslant G_D(z, z_0). \tag{31}$$

Согласно принципу максимума и минимума для окрытых областей (гл. II, § 3, п. 13), любая функция $P(z, z_0)$ со свойствами, указанными в предыдущей теореме, удовлетворяет неравенству

$$G'_D(z, z_0) \leqslant P(z, z_0).$$

Это неравенство можно написать, в частности, для $P(z, z_0) = G_D(z, z_0)$, и вместе с соотношением (31) оно показывает, что $G_D(z, z_0)$ и $G'_D(z, z_0)$ совпадают.

21. Минимальное свойство функции Грина дает возможность доказать конформную инвариантность этой функции и в случае произвольных областей Ω.

Если область Ω, обладающая функцией Грина, отображается конформно на область Ω' при помощи функции $z' = f(z)$, то Ω' также обладает функцией Грина и

$$G_\Omega(z, z_0) = G_{\Omega'}(z', z'_0),$$

где $z, z_0 \in \Omega$ и $z' = f(z)$, $z'_0 = f(z_0)$.

Чтобы вывести заключение о существовании функции Грина $G_{\Omega'}(z', z'_0)$ и получить неравенство

$$G_{\Omega'}(z', z'_0) \leqslant G_\Omega(z, z_0),$$

достаточно заметить, что $G_\Omega[f^{-1}(z'), z_0]$ гармонична и положительна в $\Omega' - z'_0$ и обладает в окрестности точки z'_0 представлением вида (30).

Противоположное неравенство устанавливается аналогично.

< следует из предыдущего, *области Ω разбиваются ... класса: класс областей, имеющих функцию Грина, и класс областей, не имеющих ее.* К последнему классу принадлежит конечная плоскость. В этом легко убедиться, взяв $z_0 = 0$ и $D_n : |z| < R_n$, где R_n — возрастающая последовательность, стремящаяся к бесконечности. При этом $G_n(z, 0) = \log \frac{R_n}{|z|}$ стремится к бесконечности одновременно с n.

Области D принадлежат первому классу. Однако этот класс содержит также области Ω других видов. Приведем пример, который показывает, что *функция Грина области Ω не обязательно стремится к нулю при стремлении $z \in \Omega$ к определенной точке границы этой области.*

Пусть Ω — единичный круг с выколотым центром: $0 < |z| < 1$. Граница F этой области состоит из точки $z = 0$ и окружности $|z| = 1$. Любая аппроксимирующая область $D_n \subset \Omega$ лежит в области $D : |z| < 1$, следовательно, $G_n(z, z_0) \leqslant G_D(z, z_0)$. Таким образом, функция Грина $G_\Omega(z, z_0)$ области Ω с полюсом z_0 существует и не превосходит $G_D(z, z_0)$. В частности, $G_\Omega(z, z_0) = 0$ при $|z| = 1$. Из этих замечаний вытекает, что разность $G_D(z, z_0) - G_\Omega(z, z_0)$ гармонична в Ω, равна нулю на окружности $|z| = 1$ и ограничена в окрестности точки $z = 0$. Согласно последней части теоремы гл. II, § 6, п. 22, эта разность гармонична во всем единичном круге; она равна нулю на окружности, значит, она тождественно равна нулю. Таким образом, мы доказали, что $G_\Omega(z, z_0) = G_D(z, z_0)$.

Но $G_D(0, z_0) > 0$, и последнее соотношение показывает, что, хотя $z = 0$ является граничной точкой Ω, функция $G_\Omega(z, z_0)$ отлична от нуля в этой точке.

Следовательно, область Ω, не являющаяся областью D, может иметь граничные точки, в которых функция Грина отлична от нуля.

23. Несмотря на это, *если область Ω односвязна, то функция Грина стремится к нулю при приближении к границе этой области.*

Из существования функции Грина для области Ω следует, что граница этой области состоит более чем из одной точки, и поэтому Ω можно отобразить конформно на единичный круг $|u| < 1$ [1]. Пусть $u = F(z)$ — функция, реализующая это отображение. При стремлении $z \in \Omega$ к точке ζ, лежащей на границе Ω, $|u|$ стремится к единице [2]. Так как функция Грина инвариантна при конформном отображении, то $G_\Omega(z, z_0) = \log \frac{1}{|F(z)|}$ при $F(z_0) = 0$; поэтому $G_\Omega(z, z_0)$ стремится к нулю при $z \to \zeta$.

[1]) См. теорему Римана, том I, гл. V, § 3, стр. 168—175.
[2]) Том I, гл. IX, § 3, п. 19, стр. 275.

Полюс z_0 можно выбрать произвольным образом, потому что отображение $F(z)$ можно взять так, чтобы произвольная точка $z_0 \in \Omega$ переходила в центр единичного круга.

24. Следующая общая теорема дает сведения о поведении функции Грина в окрестности границы области Ω.

Функция Грина произвольной области Ω ограничена в окрестности границы F этой области.

Действительно, пусть K — круг, внутри которого лежит F (мы по-прежнему предполагаем, что $\infty \in \Omega$), и пусть C — окружность этого круга. Предположим, что полюс z_0 функции Грина не лежит в $\overline{K} = K + C$. В замкнутой области $\overline{KD}_n$, ограниченной при достаточно большом n контурами C и C_n, максимум функции $G_n(z, z_0)$ достигается на C, так как $G_n(z, z_0) = 0$ на C_n и $G_n(z, z_0) > 0$ в остальной части области $\overline{KD}_n$. Этот максимум возрастает одновременно с n, однако остается меньше максимума на C функции $G_\Omega(z, z_0)$, который равен конечному числу M, так как, по предположению, $G_\Omega(z, z_0)$ существует, а C лежит внутри Ω и не проходит через z_0. Следовательно, $G_n(z, z_0) < M$ на C и в $\overline{KD}_n$. Отсюда следует, что $G_\Omega(z, z_0) \leqslant M$ на множестве $K\Omega$, которое является окрестностью F относительно Ω.

25. В п. 22 мы показали при помощи непосредственной проверки, что комплексная плоскость с выколотой точкой не имеет функции Грина. Доказанное выше предложение дает возможность установить, что *любая область Ω, которая получается, если исключить из комплексной плоскости конечное число точек, не имеет функции Грина.*

Действительно, в противном случае функция Грина области Ω с полюсом z_0 была бы ограниченной и гармонической в окрестности каждой точки a_k ($k = 1, 2, \ldots, p$) а значит, согласно теореме гл. II, § 6, п. 22, и в самих точках a_k. Тогда $G(z, z_0)$ была бы гармонической и ограниченной снизу на всей комплексной плоскости, исключая точку z_0, а, следовательно, по теореме Лиувилля (гл. II, § 1, п. 7) она была бы постоянной, что невозможно.

26. *Свойство симметрии* функции Грина остается в силе для любой области Ω, так как оно имеет место для аппроксимирующих областей D_n.

27. Принцип Линделёфа в общем виде (п. 7) также выполняется для произвольных областей Ω. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить эту теорему к областям некоторого исчерпания области Ω. Однако здесь уже не справедливы заключения, сделанные в случае равенства.

§ 5. ПОСТОЯННАЯ РОБЕНА. ЕМКОСТЬ ЗАМКНУТОГО И ОГРАНИЧЕННОГО МНОЖЕСТВА

28. Предположим, что Ω содержит точку $z=\infty$, и рассмотрим последовательность аппроксимирующих областей D_n с функциями Грина

$$G_n(z,\ \infty)=\log|z|+A_n(z,\ \infty), \tag{32}$$

где функция A_n гармонична в окрестности точки $z=\infty$. Пусть $\gamma_n=A_n(\infty,\ \infty)$. Тогда

$$A_n(z,\ \infty)=\gamma_n+\varepsilon_n\left(\frac{1}{z}\right), \tag{33}$$

где функция $\varepsilon_n\left(\frac{1}{z}\right)$ гармонична в окрестности точки $z=\infty$ и стремится к нулю одновременно с $\frac{1}{z}$.

Теперь соотношение (32) можно записать в виде

$$G_n(z,\ \infty)=\log|z|+\gamma_n+\varepsilon_n\left(\frac{1}{z}\right).$$

Так как $G_n(z,\ \infty)$ образуют возрастающую последовательность и

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n=[G_{n+1}(z,\ \infty)-G_n(z,\ \infty)]_{z=\infty},$$

то последовательность γ_n также возрастает.

Если функция Грина $G(z,\ \infty)$ области Ω существует, то $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma$ конечен и

$$G(z,\ \infty)=\log|z|+\gamma+\varepsilon\left(\frac{1}{z}\right). \tag{34}$$

Если же область Ω не обладает функцией Грина, то $\gamma=\infty$ [1]). Предел γ последовательности γ_n называется *постоянной Робена* области Ω [2]). Это название связано с тем, что величину γ можно рассматривать как значение логарифмического потенциала, решающего задачу Робена.

Прежде чем сформулировать эту задачу, мы уточним понятие *логарифмического потенциала* [3]).

---

[1]) Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty}G_n(z,\ \infty)=\infty$, то возрастающая последовательность гармонических функций $A_n(z,\ \infty)$ также стремится к бесконечности, а следовательно, $\gamma=\lim A_n(\infty,\ \infty)=\infty$.

[2]) γ_n является постоянной Робена для D_n.

[3]) В связи со свойствами логарифмического потенциала см., например, P i c a r d E., Traité d'Analyse, t. II, ch. IV, sect. I, p. 89—96. Потенциал может быть определен при более общих предположениях относительно множества, на котором распределяются заряд или плотность. Тогда применяется интеграл Стильтьеса — Лебега. См. K e l l o g O. D., Foundations of potential theory и B r e l o t M., La théorie moderne du potentiel.

Логарифмический потенциал, соответствующий единичному заряду в точке ζ, равен $\log\frac{1}{r}$ в точке $a = x + iy$, где $r = |\zeta - a|$; составляющие силы равны $\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r}$ и $\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{1}{r}$. Название логарифмического потенциала объясняется тем, что рассматривается логарифмический, а не ньютонов закон притяжения между ζ и a.

Если на спрямляемой дуге C задано распределение заряда, такое, что на линейном элементе ds в точке $\zeta \in C$ заряд равен

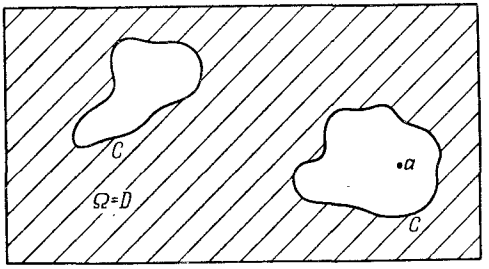

Рис. 21.

$d\mu(\zeta) = \rho(\zeta)\,ds$, причем функция $\rho(\zeta)$, называемая плотностью, непрерывна на C, то логарифмический потенциал в точке a равен

$$V(a) = \int_C \log\frac{1}{|\zeta - a|}\,d\mu(\zeta).$$

Аналогичное определение можно дать в случае распределения заряда $d\mu(\zeta) = \rho(\zeta)\,d\omega$ в области D, где ζ — точка из D и $d\omega$ — соответствующий элемент площади. На этот раз интеграл берется по D.

Задача Робена [1]) формулируется следующим образом.

Определить неотрицательное распределение заряда на множестве M, $\zeta \in M$, с полным зарядом, равным единице, таким образом, чтобы соответствующий потенциал, называемый также равновесным потенциалом, был постоянным на M.

29. Чтобы интерпретировать постоянную γ как значение равновесного потенциала, рассмотрим область $\Omega = D$, граница которой C состоит из конечного числа простых аналитических кривых, и внешнюю по отношению к D точку a (рис. 21) [2]).

[1]) Robin M. G., Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts, *Ann. Scient. École norm. supér.* III, 3 (supplément au t. III) (1886), p. 1—58.

[2]) Общий случай см. в работе Frostman O., Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles, *Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem.*, 3 (1935).

Функция $\log|z-a|-G(z,\infty)$ гармонична во всей области D. Поэтому, применяя формулу (22) гл. I и учитывая, что $G(\zeta,\infty)=0$ при $\zeta\in C$, получаем

$$\log|z-a|-G(z,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_C \log|\zeta-a|\,\frac{\partial G(\zeta,z)}{\partial n}\,ds. \quad (35)$$

Введем обозначения $H(z,\infty)=-\overline{G}(z,\infty)$. Тогда

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial H}{\partial s} \quad \text{и} \quad \frac{\partial G}{\partial s}=-\frac{\partial H}{\partial n}=0 \quad (36)$$

в каждой точке $\zeta\in C$. Так как $G(z,\infty)$ равна нулю на C и положительна в D, то $\frac{\partial G}{\partial n}>0$, значит, и $\frac{\partial H}{\partial s}>0$.

Подставляя в соотношение (35) вместо $\frac{\partial G}{\partial n}\,ds$ выражение

$$\frac{\partial H}{\partial s}\,ds=dH,$$

получаем

$$\log|z-a|-G(z,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_C \log|\zeta-a|\,dH(\zeta,z), \quad (37)$$

причем интеграл берется в направлении возрастания длин дуг.

Устремляя здесь z к бесконечности и принимая во внимание (34), получаем

$$\gamma=\frac{1}{2\pi}\int_C \log\frac{1}{|\zeta-a|}\,dH(\zeta,\infty) \quad (38)$$

для любого a, принадлежащего внешности области D.

Выражение, стоящее в правой части равенства (38), равно логарифмическому потенциалу в точке a, соответствующему распределению заряда $\frac{1}{2\pi}\,dH(\zeta,\infty)$ в каждой точке $\zeta\in C$. Полный заряд равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_C dH(\zeta,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial G(\zeta,\infty)}{\partial n}\,ds=1;$$

это следует из формулы (22) гл. I, примененной к гармонической в D функции $U(z)=1$.

Соотношение (38) показывает, что потенциал равен постоянной во внешности области D. В следующем пункте мы докажем, что логарифмический потенциал непрерывен на C. Следовательно, этот потенциал равен постоянной и на C. Поэтому в дополнении CD к области D

$$\gamma=\frac{1}{2\pi}\int_C \log\frac{1}{|\zeta-a|}\,dH(\zeta,\infty). \quad (39)$$

Таким образом, γ *является постоянным значением логарифмического потенциала, соответствующего неотрицательному распределению заряда* [1] $\frac{1}{2\pi} dH(\zeta, \infty)$, $\zeta \in C$, *с единичным полным зарядом. Этот потенциал решает задачу Робена для множества* C.

Выражение этого потенциала в области D определяется соотношением

$$\gamma - G(a, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_C \log \frac{1}{|\zeta - a|} dH(\zeta, \infty), \tag{40}$$

которое справедливо при $a \in D$; это выражение получается, если повторить предыдущие рассуждения, заменив разность $\log|z-a| - G(z, \infty)\,(a \in CD)$ функцией $\log|z-a| + G(z, a) - G(z, \infty)\,(a \in D)$, гармонической в D.

Пусть на C распределен другой заряд $d\mu \geqslant 0$, также с полным зарядом, равным единице; обозначим через $U(z)$ соответствующий логарифмический потенциал

$$U(z) = \int_C \log \frac{1}{|\zeta - z|} d\mu(\zeta)$$

и через m и M — минимум и максимум $U(z)$ на C. Покажем, что

$$m \leqslant \gamma \leqslant M. \tag{41}$$

В самом деле, функция

$$V(z) = G(z, \infty) + U(z)$$

гармонична в D и равна $U(z)$ на границе C этой области. Согласно принципу максимума и минимума,

$$m \leqslant V(z) \leqslant M$$

в D. В частности, эти неравенства выполняются в точке $z = \infty$, а так как $V(\infty) = \gamma$, то отсюда следует неравенство (41).

30. *Замечание.* Прием, при помощи которого мы вывели формулу (37) из (35), применим и в общем случае (формула (22) гл. I). Таким образом, для гармонической в D и непрерывной в $\bar{D}$ функции $U(z)$ мы получаем представление

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C U(\zeta)\, dH(\zeta, z). \tag{42}$$

[1] Неравенство $dH(\zeta, \infty) \geqslant 0$ следует из неравенства $\frac{\partial H}{\partial s} > 0$.

Эта формула справедлива при более общих предположениях, когда C состоит из произвольных жордановых кривых, а интеграл (42) рассматривается как интеграл Стильтьеса.

Действительно, в п. 6 мы доказали, что для достаточно малого λ точки ζ, удовлетворяющие неравенству $G(\zeta, z) > \lambda$, образуют область D_λ, ограниченную простыми замкнутыми аналитическими кривыми C_λ, стремящимися к C при $\lambda \to 0$ [1]).

Для D_λ имеем $G_{D_\lambda}(\zeta, z) = G(\zeta, z) - \lambda$, а функцию $H_{D_\lambda}(\zeta, z)$ можно считать равной $H(\zeta, z)$. Формула (42) применима к каждой из областей D_λ:

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_\lambda} U(\zeta)\, dH(\zeta, z). \tag{43}$$

Возьмем H в качестве параметра на кривых C_λ ($\zeta = \zeta_\lambda(H)$) и C ($\zeta = \zeta(H)$). Так как функция $U(\zeta)$ непрерывна в $\overline{D}$, ее значения в точках $\zeta_\lambda(H)$ и $\zeta(H)$ отличаются меньше чем на ε ($\varepsilon > 0$ произвольно) при достаточно малом λ. Следовательно, интеграл (43), равный

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U[\zeta_\lambda(H)]\, dH,$$

при $\lambda \to 0$ стремится к интегралу

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U[\zeta(H)]\, dH = \frac{1}{2\pi} \int_C U(\zeta)\, dH(\zeta, z),$$

что и доказывает наше утверждение.

Формула (42) остается в силе и тогда, когда $U(\zeta)$ имеет на C конечное число точек разрыва, если только эта функция ограничена в области [2]).

Эти общие рассмотрения показывают, что формулы (39) и (40) применимы также к областям, ограниченным контурами C, состоящими из произвольных жордановых кривых.

Одновременно из них следует, что формула (22) применима к функциям $U(z)$, гармоническим в D и непрерывным в $\overline{D}$, если контуры C состоят из конечного числа аналитических дуг. Действительно, в этом случае $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial H}{\partial s}$ во всех точках, за исклю-

---

[1]) Мы обозначили через ζ переменную точку в D.

[2]) См. Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1952, гл. VI, п. 3, стр. 297; относительно формулы (42) см. также гл. VI, § 1, п. 4 настоящего тома.

чением конечного числа, H абсолютно непрерывна и интеграл Стильтьеса переходит в интеграл Лебега [1]).

31. Непрерывность потенциала на C. В п. 29 мы пользовались непрерывностью потенциала на C. Для доказательства этого утверждения мы покажем, что разность

$$h(z, \zeta_0) = \int_C \log \frac{1}{|\zeta - z|} \rho(\zeta)\, ds - \int_C \log \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} \rho(\zeta)\, ds$$

становится сколь угодно малой по абсолютной величине одновременно с $|z - \zeta_0|$, если функция $\rho(\zeta)$ непрерывна на C.

В окрестности точки $\zeta_0 \in C$ определим на C последовательность дуг $\sigma_n \supset \sigma_{n+1}$, стягивающихся к ζ_0 при $n \to \infty$ и обладающих следующими свойствами:

1) $\sigma_0 = \sigma$ проектируется взаимно однозначно на любую касательную к σ;

2) для каждой дуги σ_n существует простая дуга c_n с теми же концами, что и σ_n, такая, что нормаль к c_n, проведенная из любой точки z жордановой области d_n, ограниченной c_n и σ_n, пересекает σ_n, причем $d_n \supset d_{n+1}$, а $\bigcap_n \overline{d_n} = \zeta_0$ (рис. 22).

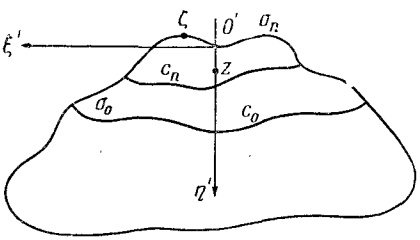

Рис. 22.

Так как кривая C аналитическая, то, взяв дугу σ достаточно малой в окрестности точки ζ_0, можно добиться выполнения условий 1) и 2).

Разобьем C на дугу σ_n и ее дополнение β_n; разность $h(z, \zeta_0)$ примет вид

$$h(z, \zeta_0) = \int_{\sigma_n} \log \frac{1}{|\zeta - z|} \rho(\zeta)\, ds + \int_{\beta_n} \log \frac{1}{|\zeta - z|} \rho(\zeta)\, ds - \int_{\sigma_n} \log \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} \rho(\zeta)\, ds - \int_{\beta_n} \log \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} \rho(\zeta)\, ds. \quad (44)$$

Оценим последовательно оба интеграла по σ_n и разность интегралов по β_n.

Пусть $z \in d_n$. Чтобы оценить интеграл

$$\int_{\sigma_n} \log \frac{1}{|\zeta - z|} \rho(\zeta)\, ds, \quad (45)$$

[1]) См., например, Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, М., 1950, гл. IX, п. 6 стр. 233.

сделаем замену переменных, принимая за начало координат O' — точку, в которой нормаль, проведенная через z, пересекает σ_n, и направляя ось $O'\eta'$ по этой нормали, а ось $O'\xi'$ — по касательной к σ (рис. 22).

Тогда, если $|\rho(\zeta)| < M$ на C, то

$$\left| \int_{\sigma_n} \log \frac{1}{|\zeta - z|} \rho(\zeta)\, ds \right| < M \int_{\xi_1'}^{\xi_2'} \log \frac{1}{|\xi'|} \sqrt{1 + \left| \frac{d\eta'}{d\xi'} \right|^2}\, d\xi',$$

где $\frac{d\eta'}{d\xi'}$ — угловой коэффициент касательной к σ_n в точке $\zeta = \xi' + i\eta'$ и ξ_1', ξ_2' — абсциссы концов дуги σ_n.

Последний интеграл стремится к нулю одновременно с $\frac{1}{n}$. Поэтому при достаточно большом n и $z \in d_n$ интеграл (45) может быть сделан по абсолютной величине меньше произвольного числа $\varepsilon > 0$.

Так как интеграл $\int_C \log \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} \rho(\zeta)\, ds$ конечен, то при достаточно большом n интеграл

$$\int_{\sigma_n} \log \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} \rho(\zeta)\, ds \tag{46}$$

также будет меньше ε по абсолютной величине.

С другой стороны,

$$\left| \int_{\beta_n} \log \left| \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - z} \right| \rho(\zeta)\, ds \right| < \varepsilon, \tag{47}$$

если z лежит достаточно близко к ζ_0, что также выполняется при $z \in d_n$ и достаточно большом n.

Так как интегралы (45), (46) стремятся к нулю при $n \to \infty$ и в силу неравенства (47), мы получаем из (44), что $h(z, \zeta_0)$ стремится к нулю при $z \to \zeta_0$.

32. Емкость замкнутого ограниченного множества. В п. 22 мы разделили области Ω на два класса в зависимости от того, имеют они функцию Грина или нет, а в п. 28 мы показали, что Ω принадлежит к первому или второму классу, смотря по тому, конечна или бесконечна постоянная Робена.

Постоянная k, определяемая соотношением

$$\log\frac{1}{k}=\gamma, \quad \text{т. е.} \quad k=e^{-\gamma}, \tag{48}$$

называется емкостью множества $C\Omega$ [1]).

При помощи понятия емкости можно следующим образом охарактеризовать оба класса областей Ω.

Область Ω *обладает или не обладает функцией Грина смотря по тому, положительна или равна нулю емкость дополнительного множества* $C\Omega$.

При конформном отображении множество $C\Omega$ емкости нуль переходит в множество емкости нуль, так как это отображение переводит Ω в область того же класса. Это замечание дает возможность выяснить, нулевую или положительную емкость имеет любое данное множество $C\Omega$ (дополнение произвольной области). Для этого нужно отобразить конформно Ω на область, содержащую $z=\infty$. Собственно говоря, чтобы установить, равна нулю или положительна емкость множества $C\Omega$, достаточно взять вместо ∞ точку $z_0\in\Omega$ и образовать $G(z, z_0)$. Это следует из того, что существование функции Грина области Ω не зависит от полюса (п. 18).

Если Ω содержит $z=\infty$, то $C\Omega$ является замкнутым ограниченным множеством. Определение емкости распространяется на любое замкнутое ограниченное множество E следующим образом: CE состоит не более чем из счетного множества областей, одна из которых Ω содержит точку $z=\infty$. Емкость множества E равна, по определению, емкости множества $C\Omega$.

Как мы увидим в гл. VI, важно лишь различие между множествами нулевой и положительной емкости. В последнем случае нас не интересует числовое значение емкости. Мы покажем, что эта классификация множеств конформно инвариантна, поэтому при помощи конформного отображения произвольному множеству, не обязательно ограниченному, можно сопоставить нулевую или положительную емкость.

---

[1]) В трехмерном пространстве емкость проводника k определяется как отношение заряда к равновесному потенциалу на проводнике: $k=\frac{1}{\gamma}$, или $\gamma=\frac{1}{k}$. Аналогично мы определили на плоскости емкость множества CD при помощи соотношения

$$\log\frac{1}{k}=\gamma.$$

Эта емкость называется также логарифмической. Понятие емкости было введено Н. Винером (N. Wiener) в работе Certain notions in potential theory, *Journ. of Math. and Phys. Mass. Inst. of Techn.*, **3** (1924), p. 24—51

Если множества E_1 и E_2 замкнуты и ограничены и E_2 содержит E_1, то емкость множества E_1 не превосходит емкости E_2. Если емкость множества E_1 равна нулю, то утверждение тривиально. Если же емкость множества E_1 положительна, то область Ω_1 — связная компонента множества CE_1, содержащая $z=\infty$ обладает функцией Грина $G_1(z, \infty)$. Область Ω_2 — связная компонента множества CE_2, содержащая $z=\infty$ — принадлежит Ω_1, и, согласно п. 19, соответствующая функция Грина $G_2(z, \infty)$ не превосходит $G_1(z, \infty)$. Из неравенства

$$G_1(z, \infty) - G_2(z, \infty) \geqslant 0$$

следует, что

$$\gamma(E_2) \leqslant \gamma(E_1).$$

33. Докажем теперь теорему о постоянной Робена γ.

Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_p$ — p жордановых кривых, лежащих в круге радиуса $1/2$, $C=\sum_{k=1}^{p} C_k$ и $\gamma(C_k)$ $(k=1, 2, \ldots, p)$, соответственно $\gamma(C)$, — их постоянные Робена. Тогда

$$\frac{1}{\gamma(C)} \leqslant \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\gamma(C_k)}. \tag{49}$$

Согласно соотношению (39), имеем

$$\gamma(C_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_k} \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, dH_k(\zeta, \infty), \tag{50}$$

где $-H_k(\zeta, \infty)$ — сопряженная к функции Грина области, внешней по отношению к C_k, а $z \in C_k$.

Пусть Ω — связная компонента множества CC, содержащая точку $z=\infty$, $G(z, \infty)$ — соответствующая функция Грина и μ — произвольное неотрицательное распределение на C с единичным полным зарядом.

Функция

$$G(z, \infty) + \int_C \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta) = \gamma(C) + \varepsilon\left(\frac{1}{z}\right) + \int_C \log \frac{|z|}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta)$$ [1])

---

[1]) Так как $\int_C d\mu(\zeta) = 1$, то $\log|z| = \int_C \log|z|\, d\mu(\zeta)$.

гармонична в Ω, равна

$$\int_C \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta)$$

на C и равна $\gamma(C)$ на бесконечности. Применяя принцип минимума (гл. I, § 3, п. 10), получаем неравенство

$$\gamma(C) \geqslant \min_{z \in C} \int_C \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta). \tag{51}$$

Положим теперь

$$\mu = \sum_{k=1}^{p} \delta_k \mu_k,$$

где

$$\mu_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} H_k(\zeta, \infty) & \text{при } \zeta \in C_k, \\ 0 & \text{на остальной части множества } C, \end{cases}$$

и δ_k — положительные числа, для которых $\sum_{k=1}^{p} \delta_k = 1$.

Непосредственно ясно, что минимум интеграла (51) при $z \in C$ равен его минимуму на некоторой кривой C_k и что из неравенства $|z-\zeta| < 1$ следует неравенство $\log \frac{1}{|z-\zeta|} > 0$; следовательно, используя соотношение (50), получаем

$$\min_{z \in C_k} \int_C \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta) \geqslant \delta_k \gamma(C_k).$$

Таким образом,

$$\gamma(C) \geqslant \min_{k=1, 2, \ldots, p} \delta_k \gamma(C_k). \tag{52}$$

Выберем δ_k так, чтобы выполнялись равенства

$$\delta_1 \gamma(C_1) = \delta_2 \gamma(C_2) = \ldots = \delta_p \gamma(C_p).$$

Так как $\sum_{k=1}^{p} \delta_k = 1$, то

$$\delta_k = \frac{1}{\gamma(C_k) \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\gamma(C_k)}}. \tag{53}$$

Из (52) и (53) следует доказываемое неравенство (49).

34. *Замечания.* 1°. Так как любое компактное множество α_k можно аппроксимировать жордановыми кривыми C_k области Ω_k —

связной компоненты множества $C\alpha_k$, содержащей $z=\infty$, то доказанная теорема немедленно обобщается.

Если α_k $(k=1, 2, \ldots, p)$ — p *замкнутых ограниченных множеств, лежащих внутри круга радиуса* $1/2$ *и* $\alpha=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k$, *то*

$$\frac{1}{\gamma(\alpha)}\leqslant\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\gamma(\alpha_k)}. \tag{54}$$

Более того, доказывается, что это неравенство остается в силе и в случае счетного числа множеств α_k $(k=1, 2, \ldots)$.

Действительно, для любого $\varepsilon>0$ каждое α_k можно заключить в множество α_k', лежащее в заданном круге радиуса $1/2$, так, чтобы

$$\frac{1}{\gamma(\alpha_k')}<\frac{1}{\gamma(\alpha_k)}+\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

По теореме Бореля — Лебега, множество $\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ можно покрыть конечным числом множеств α_k'. Пусть $\alpha_{k_1}', \alpha_{k_2}', \ldots, \alpha_{k_n}'$ — эти множества и $\alpha'=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{k_\nu}'$.

Тогда

$$\frac{1}{\gamma(\alpha)}\leqslant\frac{1}{\gamma(\alpha')}\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma(\alpha_{k_\nu}')}<\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{1}{\gamma(\alpha_{k_\nu})}+\frac{\varepsilon}{2^{k_\nu}}\right].$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\gamma(\alpha)}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma(\alpha_k)}+\varepsilon,$$

и так как ε произвольно, то

$$\frac{1}{\gamma(\alpha)}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma(\alpha_k)}. \tag{55}$$

2°. Эта теорема справедлива только при условии, что множество α (или множество C п. 33) содержится в некотором круге радиуса $1/2$.

Заметим, что если обозначить через α' образ α при линейном преобразовании $z=az'+b$, то $\gamma(\alpha')=\gamma(\alpha)+\log|a|$, а емкость умножается на $\frac{1}{|a|}$ (т. е. как раз на коэффициент, на который

увеличивается α, что и следовало ожидать). Поэтому, если при преобразовании $z = az' + b$ множества α и α_k переходят соответственно в подмножества α' и α'_k круга радиуса $1/2$, то мы можем лишь написать соотношение

$$\frac{1}{\gamma(\alpha) + \log|a|} \leqslant \sum_k \frac{1}{\gamma(\alpha_k) + \log|a|}.$$

В приложениях пользуются неравенствами (49) или (55), разбивая рассматриваемое множество на части, содержащиеся в кругах радиуса $1/2$.

§ 6. УНИВЕРСАЛЬНАЯ НАКРЫВАЮЩАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

35. В томе I[1]) мы определили *двумерное многообразие*, или *топологическую поверхность*, как связное локально евклидово хаусдорфово топологическое пространство размерности 2.

Поверхность V называется *накрывающей поверхностью* (поверхностью наложения) поверхности S, если существует однозначное и непрерывное отображение F поверхности V в S. Мы будем иногда обозначать эту накрывающую поверхность символом $(S)_F^V$, имеющим то преимущество, что он указывает одновременно поверхность S, накрывающую ее поверхность V, а также отображение F, осуществляющее накрытие. Образ точки из V при отображении F называется *проекцией*, или *следом*, этой точки на S. Риманову поверхность R заданной аналитической функции $w = f(z)$ можно рассматривать как накрывающую поверхность комплексной плоскости (z); в этом случае поверхность V состоит из элементов функции, а способ накрытия дается отображением $T(e) = z$, сопоставляющим каждому элементу из V его центр на (z), т. е. $R = (z)^V_{T(e)=z}$[2]). Однако $T(e) = z$ — это не произвольное непрерывное отображение; оно обладает вполне определенными топологическими свойствами и является *внутренним отображением*[3]).

Такое накрытие называется *римановым*. Исследованием римановых поверхностей мы будем заниматься позже. Здесь мы построим для произвольной плоской области Ω некоторую накрывающую поверхность V, которую мы назовем *универсальной*

---

[1]) Том I, гл. X, § 2, п. 13, стр. 294. См. также гл. VII, § 1, п. 1 настоящего тома.

[2]) Том I, гл. X, § 2, п. 17, стр. 297.

[3]) Том I, гл. II, § 3, п. 24—25, стр. 68—70 и Stoïlow S., Principes topologiques ..., ch. V, p. 102—121.

накрывающей поверхностью области Ω[1]). Она даст нам возможность углубить изучение свойств этой области. В случае универсальной накрывающей поверхности отображение F, реализующее накрытие, является *локально топологическим* (*локальным гомеоморфизмом*): для каждой точки p из V существует окрестность, которая отображается топологически на некоторую окрестность точки $z = F(p)$. Накрывающие поверхности с этим свойством называются *неразветвленными*; так как локальный гомеоморфизм является внутренним отображением, то неразветвленная поверхность представляет собой частный случай римановой накрывающей поверхности.

36. Для построения универсальной накрывающей поверхности области Ω мы рассмотрим некоторое множество „точек" V и определим однозначное отображение F множества V так, чтобы каждой точке $p \in V$ соответствовала точка $z = F(p) \in \Omega$.

Затем мы введем топологию на множестве V, выбрав подходящим образом окрестности точек V, и покажем, что F — локально топологическое отображение V на Ω, причем V — двумерное многообразие.

Пусть p_0 — точка поверхности V, которую мы хотим построить, z_0 — ее проекция на Ω, $z_0 = F(p_0)$ и v_{z_0} — окрестность точки z_0 в области Ω (внутренность круга с центром z_0, лежащего в Ω). Для каждой точки $z \in v_{z_0}$ выберем некоторую точку $p \in V$ и будем рассматривать, по определению, z как проекцию p, обозначая $z = F(p)$. Таким образом, мы получим множество точек $V_{p_0} \in V$; функция F взаимно однозначно отображает его на v_{z_0}. Окрестностями точки $p \in V_{p_0}$ мы будем считать множества точек из V_{p_0}, которые отображаются на окрестности точки $z = F(p)$. Множество V_{p_0} становится при этом топологическим пространством, гомеоморфным v_{z_0}, а F — топологическим отображением V_{p_0} на v_{z_0}. Мы перенесли, таким образом, топологию плоскости из v_{z_0} на V_{p_0}.

Продолжим теперь непрерывную функцию $F^{-1}(z)$, определенную сначала только на v_{z_0}, вдоль различных непрерывных путей, соединяющих в Ω точку z_0 с точками z этой области. Здесь нужно действовать так же, как если бы $F^{-1}(z)$ представляла собой элемент аналитической функции, определенной в v_{z_0}.

Чтобы полностью определить множество V, следует уточнить, при каких условиях двум путям λ и λ', соединяющим точки z_0 и z в Ω, соответствуют одна и та же точка или различные точки V.

---

[1]) Универсальная накрывающая поверхность была введена А. Пуанкаре и использована в его мемуарах о теории униформизации. Построение этой поверхности является частным случаем униформизации.

Два непрерывных пути λ и λ' с общими концами a и b, лежащих в области Ω (или на произвольной поверхности), называются *гомотопными*, если их можно непрерывно деформировать друг в друга в Ω (или на рассматриваемой поверхности) таким образом, чтобы концы оставались все время на месте [1]).

Разобьем множество непрерывных путей из Ω с началом в z_0 и с концом в z на классы гомотопных путей. Это возможно, так как гомотопность является отношением эквивалентности (т. е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности). Далее мы установим взаимно однозначное соответствие между классами гомотопных путей с концами z_0 и z и точками из V, проектирующимися в z. Двум гомотопным путям λ и λ' соответствует в V одна и та же точка p; двум негомотопным путям соответствуют две различные точки p и p'.

В частности, точки из V, которые проектируются в z_0, соответствуют гомотопическим классам замкнутых путей с началом в z_0 [2]). Продолжая функцию F^{-1}, исходя из значения $p_0 = F^{-1}(z_0)$, вдоль путей, гомотопных нулю (т. е. путей, которые можно непрерывно деформировать в точку, например в точку z_0), мы получаем то же значение p_0. Замкнутые пути, принадлежащие другим гомотопическим классам (если они существуют), приводят к другим точкам из V с проекцией z_0, которые мы обозначим через p_0^1, p_0^2, ...

В качестве *окрестностей* произвольной точки $p = p^*$ из V выберем множества, содержащие точки p, которые получаются при помощи путей $\lambda^* l$, где λ^* соответствует p^*, а l — произвольный путь из точки $z^* = F(p^*)$, лежащий в некотором круге с центром в z^* внутри Ω [3]).

Относительно этой системы окрестностей V является *хаусдорфовым* топологическим пространством, а F — локальным гомеоморфизмом. Так как окрестности гомеоморфны евклидовой плоскости, то V — *локально евклидово* двумерное пространство. Непрерывным путям из Ω соответствуют непрерывные пути на V, и каждая точка $p \in V$ определяется при помощи пути, соединяющего ее с p_0; поэтому V — *связное* пространство.

---

[1]) Том I, гл. II, § 3, п. 19, стр. 64, и гл. III, § 3, п. 33, стр. 111. Это определение применимо и к замкнутым путям, когда a и b совпадают.

[2]) Классы гомотопных замкнутых путей образуют группу. Произведением двух путей λ_1, λ_2 называется путь, который получается, если последовательно проходить путь λ_1, а затем λ_2. Произведением классов путей λ_1 и λ_2 является класс пути $\lambda_1\lambda_2$. Эта группа называется *фундаментальной группой* поверхности (группой Пуанкаре, или одномерной гомотопической группой). Она играет важную роль при топологическом изучении поверхности.

[3]) Мы обозначили через $\lambda^* l$ путь, получаемый при последовательном прохождении λ^* и l.

Следовательно, V — *двумерное многообразие* [1]); вместе с отображением $z = F(p)$ оно образует накрывающую поверхность области Ω, которую мы назовем *универсальной*.

37. Замкнутые пути на V проектируются в гомотопные нулю пути на Ω. Следовательно, исходные пути на V также гомотопны нулю. Отсюда следует, что поверхность V односвязна.

Если сама область Ω односвязна, то все пути из Ω, имеющие общие концы, гомотопны, поэтому в каждую точку $z \in \Omega$ проектируется единственная точка $p \in V$. В этом случае V гомеоморфна Ω, а F является топологическим отображением V на Ω [2]). Тогда говорят, что универсальная накрывающая области Ω однолистна.

Если же Ω многосвязна, то в каждую из ее точек проектируется бесконечное число точек V. Действительно, пусть λ_1 — не гомотопный нулю замкнутый путь с началом в z_0. Классу путей, гомотопных λ_1, соответствует точка $p_0^1 \in V$, $F(p_0^1) = z_0$, отличная от p_0. Классы путей, гомотопных $2\lambda_1$, $3\lambda_1$, ..., $n\lambda_1$, ..., где $n\lambda_1$ обозначает путь λ_1, проходимый последовательно n раз, различны между собой. Им соответствуют различные не равные p_0 и p_0^1 точки на V: p_0^2, p_0^3, ..., p_0^n .... Следовательно, в V существует бесконечное число точек, проектирующихся в точку z_0. Это рассуждение применимо к любой точке $z \in \Omega$, а, следовательно, V накрывает область Ω бесконечнолистно. В каждую точку $z \in \Omega$ проектируется счетное множество точек из V, так как из каждого класса гомотопных путей можно выбрать в качестве представителя ломаную линию, состоящую из отрезков, концы которых обладают рациональными координатами, за возможным исключением точек z_0 и z [3]).

Доказывается также, что V является *поверхностью со счетной базой*, т. е. на V существует счетное множество окрестностей, путем объединения которых можно образовать любое открытое множество на V. Это дает возможность триангулировать V. Поэтому многообразие V можно назвать поверхностью также и в более узком смысле, когда поверхностью считается триангулируемое двумерное многообразие; этим понятием мы будем пользоваться в гл. VII [4]). Там мы покажем, что V является римановой накрывающей поверхностью для Ω.

---

[1]) Том I, гл. X, § 2, п. 10, стр. 292, п. 12—13, стр. 294—295.

[2]) Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы о монодромии (том I, гл. IV, § 1, п. 6, стр. 141) для аналитических функций комплексного переменного.

[3]) Для этого пользуются рассуждением, аналогичным тому, которое мы применили при доказательстве теоремы Пуанкаре — Вольтерра (том I, гл. IV, § 1, п. 7, стр. 142).

[4]) См. Stoïlow S., Principes topologiques..., ch. III, sect. I—II, p. 63—75.

Универсальная накрывающая поверхность определяется не только для плоских областей, но и для произвольных поверхностей. Более того, этот метод можно использовать при построении накрывающего пространства некоторого топологического пространства в весьма широких предположениях.

38. На любом топологическом пространстве можно определить непрерывные функции. Так, в случае поверхности V комплексная функция $\varphi(p)=w$, определенная и однозначная в некоторой области на V, непрерывна в точке p_0 этой области, если для любой окрестности точки $w_0=\varphi(p_0)$ существует окрестность точки p_0, образ которой лежит в этой окрестности точки w_0.

Отображение $F(p)=z$ локально взаимно однозначно; поэтому *метрику области* Ω *можно локально перенести на* V при помощи обратного отображения $p=F^{-1}(z)$ в каждой области поверхности V, которая отображается топологически на область из Ω. Следовательно, в окрестности каждой точки из V можно говорить о линейном элементе, об элементе площади и об угле между дзумя кривыми, придавая им значения их проекций на Ω. Кроме того, можно определить *гармонические* и *аналитические* функции на V.

Функция $U(p)$ (соответственно $f(p)$) является гармонической (соответственно аналитической) в некоторой области на V, если для каждой точки p_0 этой области существует окрестность точки $z_0=F(p_0)$, взаимно однозначный образ некоторой окрестности точки p_0, в которой $U\left[F^{-1}(z)\right]$ (или $f\left[F^{-1}(z)\right]$) гармонична (соответственно аналитична) [1].

Задача Дирихле разрешима для любой области $D\subset V$, ограниченной конечным числом жордановых кривых. Действительно, для любой области D, проектирующейся взаимно однозначно на область $\Delta\subset\Omega$, решение задачи Дирихле получается при помощи решения той же задачи для области Δ. Поэтому альтернирующий метод Шварца, если его применить достаточное число раз, решает эту задачу для произвольной области D (гл. III, § 2) [2].

39. Изменяя соответствующим образом альтернирующий метод Шварца, мы сможем построить для любой области D на V и любой точки $p_0\in D$ *функцию Грина с полюсом* p_0, которую мы

---

[1]) Аналогичные рассмотрения можно провести на любой неразветвленной накрывающей поверхности и, как мы увидим дальше, на любой римановой поверхности (гл. VII, § 7).

[2]) Альтернирующай метод, а также принцип максимума и минимума, на котором он основывается, справедливы для областей на V.

обозначим через $G_D(p, p_0)$ [1]). Эта функция характеризуется следующими свойствами:

1) она гармонична в $D - p_0$;

2) принимает значение нуль на границе области D;

3) существует окрестность точки p_0, проектирующаяся взаимно однозначно на окрестность v_{z_0} точки $z_0 = F(p_0)$, в которой

$$G_D[p(z), p_0] = \log \frac{1}{|z - z_0|} + A(z, z_0), \tag{56}$$

где $A(z, z_0)$ гармонична в v_{z_0} и $p(z) = F^{-1}(z)$.

Исчерпание любой области на поверхности при помощи областей, ограниченных конечным числом жордановых кривых [2]), дает возможность говорить о функции Грина для произвольной области Ω на V и, в частности, для самой поверхности V; при этом следует поступать так же, как в § 4. Так как V односвязна, то области D_n могут быть выбраны односвязными.

Если выбрать точку $p_0 \in V$ и исчерпание поверхности V, состоящее из односвязных областей D_n, для которых $p_0 \in D_1$, то последовательность функций Грина $G_{D_n}(p, p_0)$ является возрастающей, как это следует из принципа максимума и минимума. Возможны два случая: либо последовательность $G_{D_n}(p, p_0)$ сходится к гармонической и положительной в $V - p_0$ функции, обладающей в окрестности точки p_0 представлением вида (56), либо эта последовательность стремится к бесконечности. В первом случае мы обозначим предельную функцию через $G_V(p, p_0)$ и назовем ее *функцией Грина поверхности V с полюсом p_0*, а во втором случае мы будем говорить, что V не обладает функцией Грина.

При помощи приемов, аналогичных использованным в § 4, можно показать, что в случае поверхности V также справедливы свойства функции Грина, приведенные в п. 17—22, 24 и 26.

40. Более того, мы распространим на области D_n, а затем при помощи предельного перехода на всю поверхность V возможность конформного отображения односвязной плоской области, обладающей функцией Грина, на единичный круг.

Пусть $G_n(p, p_0)$ — функция Грина области D_n и $\overline{G}_n(p, p_0)$ — гармонически сопряженная с ней функция. Функция $\overline{G}_n(p, p_0)$ является гармонической в $D_n - p_0$. Эта функция многозначна и обладает периодом 2π при обходе вокруг точки p_0. Это можно установить следующим образом: замкнутые пути в $D_n - p_0$ либо гомотопны нулю, либо обходят точку p_0 в положительном или отрицательном направлении

[1]) Мы разовьем этот способ в гл. IX, § 1, п. 4—5.

[2]) Возможность исчерпания вытекает из существования триангуляции на V (гл. VII, § 6, п. 34).

конечное число раз. Приращение $\overline{G}_n$ на пути, гомотопном нулю, равно нулю, а на пути, обходящем точку p_0 один раз в положительном направлении, оно равно -2π. Действительно, такой путь можно непрерывно деформировать в путь, тоже обходящий p_0 один раз в положительном направлении, но лежащий в окрестности точки p_0, которую функция F отображает взаимно однозначно на окрестность точки z_0 и в которой, как показывает (56),

$$\overline{G}_n[p(z_0),\ p_0] = \arg\frac{1}{z-z_0} + \overline{A}(z,\ z_0), \tag{57}$$

где функция $\overline{A}(z,\ z_0)$ гармонична в этой окрестности.

Покажем теперь, что функция

$$u = u_n(p) = e^{-[G_n(p,\ p_0)+i\overline{G}_n(p,\ p_0)]} \tag{58}$$

отображает конформно область D_n на круг $|u| < 1$.

Из свойств функций G_n и $\overline{G}_n$ и из выражения (58) вытекает, что $u_n(p)$ голоморфна в D_n, обращается в нуль в p_0 и $|u_n(p)| < 1$ в D_n.

Предположим, что образ Δ_n области D_n при отображении (58) не совпадает со всем единичным кругом; тогда внутри этого круга имеется хотя бы одна точка u^*, лежащая на границе области Δ_n. Пусть $u^{(\nu)}$ — последовательность различных между собой точек Δ_n, сходящаяся к u^*, и $p^{(\nu)}$ — последовательность точек D_n, таких, что $u_n(p^{(\nu)}) = u^{(\nu)}$. Точки $p^{(\nu)}$ также различны между собой ввиду однозначности функции $u_n(p)$. Пусть p^* — предельная точка последовательности $p^{(\nu)}$ в $\overline{D}_n$. Эта точка не может принадлежать области D_n, так как $u_n(p^*) = u^*$ лежала бы тогда в Δ_n. Однако p^* не может находиться также и на границе D_n, так как, выбрав подпоследовательность $p^{(\nu')}$ исходной последовательности, сходящуюся к p^*, мы получили бы, что $G(p^{(\nu')},\ p_0) \to 0$ при $\nu' \to \infty$ и $|u^*| = 1$.

Наконец, однолистность функции $u_n(p)$ доказывается при помощи того же рассуждения, что и вторая часть принципа Линделёфа (п. 8—10). Множество значений из круга $|u| < 1$, принимаемых рассматриваемой функцией однократно, открыто, так же как и множество значений, принимаемых не менее двух раз. Между тем первое множество не пусто, так как значение $u = 0$ принимается только в точке p_0. Действительно, в любой точке $p \neq p_0$ из D_n имеем

$$G_n(p,\ p_0) < \infty, \text{ а следовательно, } |u_n(p)| > 0.$$

41. Докажем теперь теорему о конформном отображении поверхности V.

Пусть универсальная накрывающая поверхность V обладает функцией Грина $G_V(p,\ p_0)$; обозначим через $\overline{G}_V(p,\ p_0)$

гармонически сопряженную к ней функцию. Тогда функция

$$u = e^{-[G_V(p, p_0) + i\overline{G}_V(p, p_0)]} \tag{59}$$

отображает конформно V на круг $|u| < 1$.

Сохраняя вышеприведенные обозначения для исчерпания $\{D_n\}$ поверхности V и нормируя надлежащим образом постоянные, входящие в определение функций $\overline{G}_n(p, p_0)$, мы получаем

$$u(p) = \lim_{n\to\infty} u_n(p).$$

Так же как и функции $u_n(p)$ в D_n, функция $u(p)$ голоморфна на V, равна нулю в p_0 и удовлетворяет неравенствам $0 < |u(p)| < 1$ в $V - p_0$.

Чтобы установить однолистность отображения $u = u(p)$, мы воспользуемся тем, что $u(p)$ является пределом равномерно сходящейся внутри V (т. е. в любой компактной подобласти V) последовательности функций $u_n(p)$, однолистных и не сводящихся к постоянным [1]).

Итак, функция (59) конформно отображает поверхность V на область Δ круга $|u| < 1$. Покажем, что Δ совпадает со всем единичным кругом.

Пусть $G_\Delta(u, 0)$ — функция Грина этой области и $p(u)$ — отображение, обратное к $u(p)$. Пользуясь свойством минимума функции Грина, устанавливаем равенство

$$G_\Delta(u, 0) = G_V[p(u), p_0] = \log \frac{1}{|u|}\ ^{2}).$$

Следовательно, области Δ и $|u| < 1$ имеют одну и ту же функцию Грина с полюсом в $u = 0$. Если бы Δ не совпадала с $|u| < 1$, то существовала бы граничная точка области Δ, лежащая внутри единичного круга. В такой точке $\log \frac{1}{|u|}$ положителен, тогда как $G_\Delta(u, 0) = 0$, так как Δ односвязна (п. 23).

Таким образом, теорема о конформном отображении универсальной накрывающей поверхности на единичный круг полностью

---

[1]) Здесь используется рассуждение, основанное на теореме Руше. См. том I, гл. V, § 3, п. 16, стр. 171—172.

[2]) Действительно, функция $G_\Delta[u(p), 0]$ гармонична, положительна в $V - P_0$ и допускает в окрестности точки p_0 представление вида (56); следовательно, можно написать

$$G_V(p, p_0) \leqslant G_\Delta[u(p), 0],$$

или

$$G_V[p(u), p_0] \leqslant G_\Delta(u, 0).$$

Противоположное неравенство доказывается аналогично.

доказана в случае существования функции Грина для этой поверхности. Эта теорема дает возможность утверждать, что структура линий уровня функции Грина та же, что и в случае плоской жордановой области (п. 6).

42. Докажем теперь следующее предложение.

Если Ω обладает функцией Грина, то V также обладает функцией Грина.

Пусть D_n — аппроксимирующая последовательность поверхности V и Δ_n — проекция области D_n на плоскость (z). Области Δ_n образуют исчерпание Ω, так как любая точка $z \in \Omega$ является проекцией хотя бы одной точки $p \in V$, но при достаточно большом n точка p лежит в D_n, а следовательно, z содержится в Δ_n. С другой стороны, из соотношения $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$ и из того, что отображение $z = F(p)$ является внутренним, следует включение $\overline{\Delta}_n \subset \Delta_{n+1}$.

Обозначая через $G_{D_n}(p, p_0)$ и $G_{\Delta_n}(z, z_0)$ функции Грина областей D_n и Δ_n с полюсами p_0 и $z_0 = F(p_0)$ и замечая, что $G_{\Delta_n}[F(p), z_0]$ является положительной в $D_n - F^{-1}(z_0)$ гармонической функцией, обладающей в окрестности точки p_0 представлением вида (56), получаем

$$G_{D_n}(p, p_0) \leqslant G_{\Delta_n}[F(p), z_0].$$

По предположению, Ω обладает функцией Грина, поэтому последовательность $G_{\Delta_n}(z, z_0)$ сходится к конечной предельной функции $G_\Omega(z, z_0)$. Установленное неравенство показывает, что последовательность $G_{D_n}(p, p_0)$ ограничена, а следовательно, сходится в каждой точке p, для которой $F(p) \neq z_0$; отсюда вытекает существование функции Грина $G_V(p, p_0)$.

Отметим, что это рассуждение справедливо и в том случае, когда V — произвольная неразветвленная накрывающая поверхность области Ω. Этот результат переносится и на разветвленные накрытия.

43. *Для того чтобы универсальная накрывающая поверхность V области Ω обладала функцией Грина, необходимо и достаточно, чтобы граница этой области содержала по крайней мере три точки.*

Покажем сначала, что это условие достаточно.

Проделав, если это необходимо, дробно-линейное преобразование, можно предполагать, что Ω не содержит точек 0, 1 и ∞. Пусть $z = \mu(\zeta)$ — однозначная модулярная функция[1]), переводящая верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ в плоскость (z) с исключенными точками 0, 1, ∞. Если выбрать определенную

[1]) Том I, гл. XI, § 2, п. 19—21, стр. 340—344.

ветвь обратной функции $\lambda(z)=\zeta$, то функция $\lambda[F(p)]=\zeta$ будет аналитической на V. Она также однозначна, так как любой из ее элементов неограниченно продолжается аналитически на V, а V односвязна[1]). Поэтому функция $\lambda[F(p)]=\zeta$ отображает поверхность V на область Ω' верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$. Это отображение локально взаимно однозначно и конформно; поэтому оно определяет неразветвленную накрывающую поверхность $(\Omega')^{V}_{\lambda[F(p)]=\zeta}$. Однако область Ω' обладает функцией Грина, так как она является подобластью верхней полуплоскости. Следовательно, замечание, сделанное в конце предыдущего доказательства, показывает, что V также обладает функцией Грина.

44. *Замечание.* Из приведенного доказательства вытекает, что *существуют области* Ω, *не имеющие функции Грина, универсальные накрывающие которых обладают функцией Грина*; например плоскость, из которой исключили конечное число $p\geqslant 3$ точек (п. 25).

В частности, если Ω — плоскость с исключенными тремя точками, например 0, 1 и ∞, то функция $\lambda[F(p)]=\zeta$ отображает конформно V на $\operatorname{Im}\zeta>0$. В самом деле, предположим, что двум различным точкам p_0 и p_1 из V соответствуют различные проекции z_0 и z_1. Тогда точки ζ_0 и ζ_1 также различны, так как $\lambda(z)=\zeta$ — однолистная функция. Если точкам p_0 и p_1 соответствует одна и та же проекция z_0, то существует путь l на V, соединяющий p_0 и p_1, проекция которого $l'=F(l)$ — замкнутый путь, не гомотопный нулю. Если бы ζ_0 и ζ_1 совпадали, то образ пути l при отображении $\zeta=\lambda[F(p)]$ был бы замкнутым путем l''. Так как Ω' — это верхняя полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta>0$, т. е. односвязная область, то l'' можно было бы непрерывно деформировать внутри Ω' в точку. Тогда путь l' обладал бы тем же свойством, так как он является образом пути l'' при отображении $\mu(\zeta)=z$. Но это невозможно, так как путь l' не гомотопен нулю. Следовательно, ζ_0 и ζ_1 — различные точки.

Таким образом, V можно отобразить конформно на $\operatorname{Im}\zeta>0$, и можно сказать, что универсальная накрывающая поверхность V плоскости (z) с тремя исключенными точками есть риманова поверхность многозначной модулярной функции $\lambda(z)=\zeta$.

45. Докажем теперь, что V обладает функцией Грина *только тогда*, когда Ω имеет по крайней мере три граничные точки.

Действительно, если область Ω не имеет ни одной граничной точки, то V совпадает со сферой Римана. Если Ω обладает един-

[1]) Здесь применяется теорема о монодромии, том I, гл. IV, § 1, п. 6, стр. 141.

ственной граничной точкой, то эта область односвязна и V совпадает с ней. Наконец, если Ω имеет две граничные точки α и β, то V является римановой поверхностью функции $\zeta = \log\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ и конформно эквивалентна плоскости с одной исключенной точкой (т. е. конечной плоскости). Во всех этих случаях V не имеет функции Грина.

Таким образом, универсальная накрывающая поверхность области Ω может быть:

1) замкнутой — и тогда она конформно эквивалентна комплексной плоскости,

2) открытой и конформно эквивалентной комплексной плоскости с исключенной точкой,

3) открытой и конформно эквивалентной внутренности круга.

Эти три случая называются соответственно эллиптическим, параболическим и гиперболическим [1]).

§ 7. ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МЕТРИКА. ПРИНЦИП ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕТРИКИ

46. Универсальная накрывающая поверхность позволяет ввести в любой области Ω, обладающей по крайней мере тремя граничными точками, некоторую метрику, которую мы назовем гиперболической. Она обобщает на случай области Ω неевклидову метрику, определенную в круге [2]).

Если Ω — область, имеющая по крайней мере три граничные точки, то, как мы убедились в п. 41 и 43, ее универсальная накрывающая V отображается конформно на круг $|u| < 1$ при помощи функции $u = t(p)$, определенной формулой (59).

Гиперболическая метрика в единичном круге определяется в точке u выражением

$$d\sigma_u = \frac{|du|}{1-|u|^2}, \tag{60}$$

или $d\sigma_u = \frac{ds}{1-|u|^2}$, где ds — евклидов линейный элемент.

При помощи конформного отображения $u = t(p)$ перенесем эту метрику на V, определяя неевклидов линейный элемент $d\sigma$ на V в точке p через линейный элемент $d\sigma_u$:

$$d\sigma = \frac{|du|}{1-|u|^2}. \tag{61}$$

[1]) Они приводят к классификации односвязных римановых поверхностей; первый тип поверхности отличается топологически от остальных двух тем, что в этом случае поверхность замкнута. Оба типа открытых поверхностей топологически эквивалентны, но конформно различны. Действительно, теорема Лиувилля показывает, что не существует конформного отображения круга $|z| < 1$ на $|z| < \infty$ (том. I, гл. V, стр. 169).

[2]) Том I, гл. III, § 2, п. 16—19, стр. 92—97.

Введенная таким образом метрика на V не зависит от конформного отображения, использованного для перехода от V к единичному кругу.

Действительно, если $u' = t'(p)$ — другое конформное отображение поверхности V на $|u'| < 1$, то функция $u = t\left[t'^{-1}(u')\right]$ конформно отображает единичный круг на себя. Следовательно, эта функция задает линейное преобразование, оставляющее инвариантным единичный круг, т. е. неевклидово движение. Так как неевклидова метрика инвариантна относительно любого неевклидова движения, то

$$\frac{|du'|}{1-|u'|^2} = \frac{|du|}{1-|u|^2}.$$

47. Покажем теперь, что для двух точек p_0^1, $p_0^2 \in V$ с одной и той же проекцией $z_0 \in \Omega$ имеем

$$d\sigma_{p_0^1} = d\sigma_{p_0^2},$$

и поэтому *можно определить гиперболическую метрику в самой области* Ω, *положив*

$$d\sigma_{z_0} = d\sigma_{p_0^k}, \tag{62}$$

независимо от использованной точки $p_0^k \in V$ *с проекцией* z_0.

Пусть u_0^1 и u_0^2 — точки круга $|u| < 1$, соответствующие точкам p_0^1 и p_0^2 при отображении $u = t(p)$. Очевидно, что

$$d\sigma_{p_0^1} = \frac{|du_0^1|}{1-|u_0^1|^2} \quad \text{и} \quad d\sigma_{p_0^2} = \frac{|du_0^2|}{1-|u_0^2|^2}.$$

Построим конформное отображение $p^2 = \varphi(p^1)$ поверхности V на себя со свойствами

$$F(p^2) = F(p^1) \quad \text{и} \quad p_0^2 = \varphi\left(p_0^1\right)^1).$$

При преобразовании $u = t(p)$ отображение φ дает неевклидово движение

$$u^2 = t\left\{\varphi\left[t^{-1}(u^1)\right]\right\},$$

переводящее u_0^1 в u_0^2; следовательно, $d\sigma_{p_0^2}$ равно $d\sigma_{p_0^1}$.

Отображение φ можно определить, сопоставляя каждой точке $p^1 \in V$ точку p^2, соответствующую класссу путей, гомотопных пути $\lambda\mu$, где λ — проекция пути, соединяющего p_0^1 с p_0^2, а μ — проекция пути, соединяющего p_0^1 с p^1 (точка p_0^1 играет здесь ту же

[1]) Такое отображение называется скольжением поверхности V; эти отображения образуют группу.

роль, что точка p_0 при построении универсальной накрывающей, п. 36). Как в аналогичных случаях, рассмотренных раньше (п. 44), доказывается, что это соответствие не зависит от пути и взаимно однозначно. Оно является конформным отображением, так как в окрестностях двух соответствующих точек p^1 и p^2 сопоставляются точки, имеющие одни и те же проекции; это отображение состоит собственно в проектировании окрестности точки p^1 при помощи $z = F(p)$ и в обратном отображении F^{-1} со значением p^2 в точке $F(p^1)$.

Таким образом, в Ω можно ввести неевклидову метрику, которую мы назвали *гиперболической*, приписывая линейному элементу в точке $z \in \Omega$ значение $d\sigma$ соответствующего линейного элемента в любой точке $p \in V$ с проекцией z.

Эта метрика зависит от вида области Ω и существует при более общих предположениях, чем метрика, определяемая функцией $\frac{1}{G(z, z_0)}$. Действительно, она существует всегда, когда V — поверхность гиперболического типа, т. е. когда Ω обладает хотя бы тремя граничными точками. Длина кривой в этой метрике задается интегралом линейного элемента по этой кривой, а гиперболическое расстояние между двумя точками равно нижней грани гиперболических длин дуг, соединяющих эти точки. Длина кривых, ведущих к границе области Ω, бесконечна. Так же как и в евклидовой геометрии, мы назовем неевклидовым кругом геометрическое место точек, неевклидово расстояние которых до некоторой фиксированной точки (неевклидова центра) меньше некоторого положительного числа (неевклидова радиуса).

48. В п. 11 мы показали, что принцип Линделёфа обобщает лемму Шварца — Пика на области, обладающие функцией Грина. Теперь мы выведем из этой леммы принцип, применимый ко всем областям, в которых можно определить гиперболическую метрику.

С этой целью заметим, что из неравенства

$$\left| \frac{Z - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 Z} \right| \leqslant \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right|, \tag{63}$$

справедливого для функции $Z = f(z)$, $Z_0 = f(z_0)$, голоморфной в круге $|z| < 1$, со значениями в круге $|Z| < 1$, устремляя z к z_0 и обозначая через z произвольную точку z_0 в $|z| < 1$, получаем

$$\frac{|dZ|}{1 - |Z|^2} \leqslant \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Это соотношение, если его записать в гиперболической метрике единичного круга, принимает вид

$$d\sigma_Z \leqslant d\sigma_z \tag{64}$$

и выражает следующее геометрическое свойство: при отображении $Z=f(z)$ круга $|z|<1$ в круг $|Z|<1$ неевклидов линейный элемент в точке z не меньше преобразованного линейного элемента.

Интегрируя неравенство (64) по произвольной дуге круга $|z|<1$, мы убеждаемся, что неевклидова длина образа этой дуги при отображении $Z=f(z)$, голоморфном в круге $|z|<1$ и со значениями в круге $|Z|<1$, не превосходит неевклидовой длины исходной дуги.

Если в какой-нибудь одной точке z_0 круга $|z|<1$ имеем

$$d\sigma_Z = d\sigma_z, \tag{65}$$

то $Z=f(z)$ — линейное преобразование единичного круга на себя.

Действительно, из неравенства (63) вытекает, что функция

$$\frac{Z-Z_0}{1-Z\overline{Z}_0}:\frac{z-z_0}{1-z\overline{z}_0}=\frac{f(z)-Z_0}{1-f(z)\,\overline{Z}_0}:\frac{z-z_0}{1-z\overline{z}_0},$$

голоморфная в круге $|z|<1$, по модулю не превосходит единицы в круге $|z|<1$. Однако ее модуль в точке $z=z_0$ равен $\frac{d\sigma_Z}{d\sigma_z}=1$. Следовательно, эта функция является постоянной, равной по модулю единице, откуда вытекает, что при условии (65) $f(z)$ — линейное преобразование.

Таким образом, если какая-либо одна дуга переводится в дугу той же неевклидовой длины, то $Z=f(z)$ — линейное преобразование.

49. Приведенные результаты можно сформулировать, заменяя круги $|z|<1$ и $|Z|<1$ произвольными областями, которые допускают гиперболическую метрику. Это обобщение составляет содержание *принципа гиперболической метрики.*

Пусть ω *и* Ω *— две произвольные области на плоскости* (z), *соответственно* (Z), *причем каждая из них обладает по крайней мере тремя граничными точками.*

Если $Z=f(z)$ *— функция, голоморфная в* ω, *со значениями в* Ω, *то, обозначая через* $d\sigma_z$ *и* $d\sigma_Z$ *линейные элементы в гиперболической метрике областей* ω *и* Ω *соответственно в точках* z *и* $Z=f(z)$, *получаем неравенство*

$$d\sigma_Z \leqslant d\sigma_z. \tag{66}$$

Обозначим через v универсальную накрывающую области ω и через V — универсальную накрывающую области Ω. Пусть $u=t(p)$ и $U=T(P)$ — соответственно конформные отображения этих поверхностей на $|u|<1$ и $|U|<1$; далее, пусть $z=\varphi(p)$ и $Z=\Phi(P)$ — отображения, проектирующие v на ω и V на Ω. Мы

построим функцию $U = F(u)$, голоморфную в круге $|u| < 1$, такую, что

$$|F(u)| < 1 \text{ и } \Phi T^{-1}(U) = f\varphi t^{-1}(u). \tag{67}$$

Функция $Z = f\varphi t^{-1}(u)$ голоморфна в круге $|u| < 1$ и поэтому определяет в любой точке u_0 этого круга элемент аналитической функции. Функция $U = T\Phi^{-1}(Z)$ также аналитична и, вообще говоря, многозначна в Ω. Выделяя элемент этой функции с центром в точке $Z_0 = f\varphi t^{-1}(u_0)$, мы получим путем суперпозиции этих двух функций элемент аналитической функции в точке u_0 со значениями в круге $|U| < 1$. Он неограниченно продолжается в $|u| < 1$ и, согласно теореме о монодромии, определяет однозначную и голоморфную в этом круге функцию, которую мы обозначим $U = F(u)$ и которая, очевидно, удовлетворяет условиям (67). Применяя к этой функции лемму Шварца — Пика в установленном выше виде (64), мы заключаем, что

$$d\sigma_U \leqslant d\sigma_u,$$

причем равенство имеет место лишь тогда, когда F — линейное преобразование единичного круга на себя. Однако, согласно определению гиперболической метрики, $d\sigma_z = d\sigma_u$ и $d\sigma_Z = d\sigma_U$ при $z = \varphi t^{-1}(u)$ и $Z = \Phi T^{-1}(U)$. Учитывая (67), получаем искомое неравенство

$$d\sigma_Z \leqslant d\sigma_z.$$

В этом соотношении *равенство имеет место лишь тогда, когда отображение* $\Phi^{-1} f\varphi$ *является конформным отображением универсальной накрывающей* v *на* V.

Таким образом, принцип гиперболической метрики доказан полностью [1]).

50. Этот принцип можно сформулировать также относительно поведения неевклидовой длины кривых или неевклидова расстояния при голоморфном отображении.

Пусть ω и Ω — две плоские области, причем каждая из них обладает по крайней мере тремя граничными точками, и пусть $Z = f(z)$ — голоморфная в ω функция со значениями в Ω.

Если l — произвольная кривая в ω и L — ее образ в Ω, то гиперболическая длина кривой L не превосходит гиперболической длины l, причем равенство имеет место лишь тогда, когда $Z = f(z)$

[1]) Из нашего доказательства видно, что мы не использовали однозначности функции $Z = f(z)$. Таким образом, в формулировке принципа гиперболической метрики предположение голоморфности $f(z)$ в ω можно заменить более общим предположением, что $f(z)$ аналитична и неограниченно продолжается в ω.

определяет конформное отображение универсальной накрывающей v на V.

Если z_1 и z_2 — две точки области ω, а Z_1 и Z_2 — их образы в Ω, то гиперболическое расстояние между Z_1 и Z_2 не превосходит гиперболического расстояния между z_1 и z_2. Образ неевклидова круга с центром в $z_0 \in \omega$ содержится в неевклидовом круге того же неевклидова радиуса с центром в $Z_0 = f(z_0)$.

51. Предположим теперь, что области ω и Ω обладают функциями Грина.

Если эти области односвязны, принцип гиперболической метрики и принцип Линделёфа совпадают, так как области

$$g_\omega(z,\ z_0) \geqslant \lambda \text{ и } G_\Omega(Z,\ Z_0) \geqslant \lambda,$$

входящие в формулировку последнего принципа, представляют собой неевклидовы круги с центрами в z_0 и Z_0, радиус которых равен $\log \dfrac{1+e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$ в гиперболической метрике этих областей.

Однако если одна из областей, скажем Ω, многосвязна, то, используя неравенство

$$G_\Omega[Z(P),\ Z_0] \geqslant G_V(P,\ P_0)$$

при $P \neq P_0$, которому удовлетворяют функция Грина области Ω и функция Грина ее универсальной накрывающей V, мы заключаем, что неевклидов круг в Ω с центром Z_0, проекция неевклидова круга $G_V(P,\ P_0) \geqslant \lambda$, содержится строго внутри области $G_\Omega(Z,\ Z_0) \geqslant \lambda$.

Следовательно, если ω односвязна, а Ω многосвязна, то принцип гиперболической метрики дает более точную оценку области, в которой содержится образ неевклидова круга $g_\omega(z,\ z_0) \geqslant \lambda$ при отображении $Z = f(z)$, чем принцип Линделёфа.

Приведенный пример показывает, что эти два принципа, вообще говоря, различны. Более того, принцип гиперболической метрики применим и тогда, когда нельзя говорить о принципе Линделёфа, например в случае области, обладающей по крайней мере тремя граничными точками, но не имеющей функции Грина.

§ 8. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРИНЦИПА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕТРИКИ

Так же как и принцип Линделёфа, принцип гиперболической метрики можно использовать для того, чтобы получить более простые доказательства и уточнения классических теорем.

Докажем при помощи этого принципа теоремы Ландау и Шоттки.

52. Пункты 41 и 43 показывают, что универсальная накрывающая плоскости с исключенными $p \geqslant 3$ точками $a_1, a_2, \ldots, a_p$ отображается конформно на единичный круг $|\zeta| < 1$. Функция $\varphi(\zeta, a_1, a_2, \ldots, a_p)$, получающаяся в результате суперпозиции отображения, обратного к этому конформному, и отображения, проектирующего универсальную накрывающую на плоскость с исключенными точками $a_1, a_2, \ldots, a_p$, обобщает модулярную функцию, соответствующую случаю $p = 3$.

Пусть функция $Z = f(z)$, мероморфная в круге $|z| < R$, не принимает в этом круге ни одного из значений a_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ и голоморфна в точке $z = 0$.

Применяя принцип гиперболической метрики для областей

$$\omega : |z| < R \text{ и } \Omega : (Z) - \{a_1, a_2, \ldots, a_p\},$$

получаем

$$d\sigma_Z \leqslant d\sigma_z. \tag{68}$$

Однако гиперболическая метрика в круге $|z| < R$ задается элементом [1])

$$d\sigma_z = \frac{R\,|dz|}{R^2 - |z|^2}. \tag{69}$$

Рассмотрим вышеприведенную функцию $Z = \varphi(\zeta, a_1, a_2, \ldots, a_p)$, переводящую $|\zeta| < 1$ в плоскость (Z) с исключенными точками $a_1, a_2, \ldots, a_p$, причем

$$\varphi(0, a_1, a_2, \ldots, a_p) = f(0).$$

Тогда при $\zeta = 0$ и $Z = f(0)$ имеем

$$d\sigma_Z = d\sigma_\zeta = |d\zeta|. \tag{70}$$

Принимая во внимание, что точки $\zeta = 0$ и $z = 0$ имеют один и тот же образ Z, из (68), (69) и (70) при $\zeta = 0$ и $z = 0$ получаем

$$|d\zeta| \leqslant \frac{|dz|}{R}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{dZ}{dz}\right|_{z=0} \leqslant \left|\frac{dZ}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} \frac{1}{R},$$

или

$$|f'(0)|\,R \leqslant |\varphi'(0, a_1, a_2, \ldots, a_p)|. \tag{71}$$

---

[1]) Действительно, $|z| < R$ отображается конформно на $|z'| < 1$ при помощи функции $z' = \frac{z}{R}$, а следовательно,

$$d\sigma_z = d\sigma_{z'} = \frac{|dz'|}{1 - |z'|^2} = \frac{R\,|dz|}{R^2 - |z|^2}.$$

Неравенство (71) при условии $f'(0) \neq 0$ дает оценку сверху для радиуса R:

$$R \leqslant \frac{|\varphi'(0, a_1, a_2, \ldots, a_p)|}{|f'(0)|}. \tag{72}$$

Значение $\varphi'(0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ зависит лишь от $a_1, a_2, \ldots, a_p$ и от $f(0)$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Если функция $Z = f(z)$ мероморфна в круге $|z| < R$, не принимает в этом круге значений $a_1, a_2, \ldots, a_p$ $(p \geqslant 3)$ и голоморфна в начале координат, то для радиуса R имеется оценка сверху, зависящая только от $a_1, a_2, \ldots, a_p$ и от $f(0)$ и $f'(0)$ (первых двух коэффициентов разложения $f(z)$ в точке $z = 0$)[1].

В теореме Ландау[2] предполагается, что $p = 3$, $f(z)$ голоморфна в круге $|z| < R$, $z = \infty$ — одно из исключительных значений, а 0 и 1 — остальные два.

Неравенство (72) нельзя уточнить, так как в случае

$$f(z) = \varphi\left(\frac{z}{R}, a_1, a_2, \ldots, a_p\right) \tag{73}$$

оно сводится к тождеству. В самом деле, $\varphi'(0, a_1, a_2, \ldots, a_p) = Rf'(0)$. Впрочем, функция $f(z)$ из (73) получается при суперпозиции конформного отображения круга $|z| < R$ на универсальную накрывающую плоскости (Z) с исключенными точками $a_1, a_2, \ldots, a_p$ и проектирования этой поверхности на накрываемую ею область; поэтому, согласно принципу гиперболической метрики, мы должны иметь равенство в (68), а следовательно, и в (72).

53. Предположим теперь снова, что функция $Z = f(z)$ мероморфна в круге $|z| < R$ и не принимает в нем значений $a_1, a_2, \ldots, a_p$ $(p \geqslant 3)$, и применим принцип гиперболической метрики к указанным областям ω и Ω. Тогда если z содержится в круге $|z| \leqslant r$ при $r < R$, то $Z = f(z)$ содержится в замкнутом неевклидовом круге с центром в $f(0)$, неевклидов радиус которого равен неевклидову радиусу круга $|z| \leqslant r$:

$$\int_0^r \frac{R\,dt}{R^2 - t^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{r}{R}}{1 - \frac{r}{R}}.$$

---

[1]) Оценка (72) в случае $f'(0) = 0$ заменяется оценкой

$$\left|\frac{\varphi'(0, a_1, a_2, \ldots, a_p)}{c_k}\right|^{\frac{1}{k}},$$

где c_k — первый отличный от нуля коэффициент разложения $f(z)$ в окрестности начала координат. См., например, Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М., 1941, гл. IV, § 5, п. 52.

[2]) Том I, гл. XI, § 3, п. 24, стр. 348.

Пусть $d\left(\frac{r}{R}, a_1, a_2, \ldots, a_p\right)$—наименьшее расстояние точек этого неевклидова круга до точек $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Оно положительно, так как круг замкнут и не содержит ни одной из этих точек. Чтобы число d было всегда конечным, мы будем измерять это расстояние на сфере (Z)[1]).

Действительно, если бы одна из этих точек a_k совпадала с $Z=\infty$ и расстояние измерялось бы в евклидовой метрике плоскости, то d было бы бесконечным. Это невозможно, если расстояние измеряется на сфере. Таким образом, мы определили число $d\left(\frac{r}{R}, a_1, a_2, \ldots, a_p\right)$, зависящее только от $f(0)$ (т. е. от центра неевклидова круга), от точек $a_1, a_2, \ldots, a_p$ и от отношения $\frac{r}{R}$. Установленный результат можно сформулировать следующим образом.

Если функция $Z=f(z)$ мероморфна в круге $|z|<R$ и не принимает в нем значений $a_1, a_2, \ldots, a_p$ $(p\geqslant 3)$, то сферическое расстояние образа круга $|z|\leqslant r<R$ до точек $a_1, a_2, \ldots, a_p$ не меньше числа $d\left(\frac{r}{R}, a_1, a_2, \ldots, a_p\right)$, зависящего только от переменных, указанных в скобках, и от $f(0)$[2]).

Теорема Шоттки[3]) относится к случаю $p=3$, $a_1=\infty$, $a_2=0$, $a_3=1$ и вместо оценки сферического расстояния d дает оценку сверху значений $|f(z)|$ при $|z|\leqslant r$, т. е. указывает только расположение образа круга $|z|\leqslant r$ относительно одного из исключительных значений $Z=\infty$.

54. Как упрощается доказательство при использовании принципа гиперболической метрики, мы покажем на примере большой теоремы Пикара (излагаемое ниже доказательство принадлежит К. Константинеску[4])).

В качестве области ω возьмем круг с выколотой точкой $0<|z|<R$. Универсальная накрывающая этой области отобра-

---

[1]) Как мы покажем подробно в гл. X, § 2, п. 34, линейный элемент в сферической метрике равен

$$\frac{|dz|}{1+|z|^2}\quad\left(\text{радиус сферы равен }\frac{1}{2}\right).$$

[2]) Заметим, что при возрастании r число d убывает. Можно сказать, что образ круга $|z|\leqslant r$ при отображении $Z=f(z)$ содержится в сфере (Z), из которой мы исключили сферические шапочки с центрами $a_1, \ldots, a_p$ и сферическим радиусом d.

[3]) Том, I, гл. XI, § 3, п. 26—28, стр. 348—351.

[4]) Constantinescu C., Cîteva aplicaţii ale principiului metricii hiperbolice, *Studii şi cercetări matematice*, VI, 3—4 (1957), § 2, p. 529—530.

жается конформно на правую полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ при помощи функции $w = \log \frac{R}{z}$. Это получается при помощи рассуждения, аналогичного тому, которое мы применили для определения универсальной накрывающей плоскости с тремя исключенными точками (п. 44). Так как гиперболическая метрика инвариантна при конформном отображении, то

$$d\sigma_z = d\sigma_w.$$

Однако в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ гиперболическая метрика задается соотношением [1])

$$d\sigma_w = \frac{|dw|}{2 \operatorname{Re} w}.$$

Следовательно, в гиперболической метрике области имеем

$$d\sigma_z = \frac{|dz|}{2|z| \log \frac{R}{|z|}}.$$

Длина окружности $|z| = r$ в этой метрике равна

$$l(r) = \int\limits_{|z|=r} d\sigma_z = \int\limits_0^{2\pi} \frac{r\, d\theta}{2r \log \frac{R}{r}} = \frac{\pi}{\log \frac{R}{r}}.$$

Непосредственно видно, что $\lim\limits_{r \to 0} l(r) = 0$. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в окрестности своей существенно особой точки $z = 0$. Предположим, что существуют три значения, которые функция $f(z)$ не принимает в $\omega : 0 < |z| < R$, и что одним из этих значений является $w = \infty$. Тогда $f(z)$ голоморфна в ω. Положим $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Функция $M(r)$ возрастает и стремится к бесконечности при $r \to 0$. Обозначим через z_n последовательность точек, стремящихся к нулю, и через z_n' — последовательность точек, для которых $|z_n'| = |z_n|$ и $|f(z_n')| = M(|z_n|)$. Применим теперь принцип гиперболической метрики к функции $Z = f(z)$ и к областям $\omega : 0 < |z| < R$ и Ω : плоскость (Z) с исключенными тремя точками, соответствующими значениям, не принимаемым $f(z)$ в ω. Гиперболическое расстояние между точками $Z_n = f(z_n)$ и $Z_n' = f(z_n')$ не превосходит гиперболического расстояния между точками z_n и z_n', которое не превосходит $l(|z_n|)$. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} l(|z_n|) = 0$, то гиперболическое расстояние между Z_n и Z_n'

[1]) Том. I, гл. III, § 2, п. 17, стр. 94, формула (21).

стремится к нулю одновременно с $\frac{1}{n}$; значит,

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} f(z'_n) = \infty.$$

Так как последовательность z_n произвольна, то $z=0$ — полюс функции $f(z)$, что невозможно, так как мы предположили, что эта точка является существенной особенностью.

55. Углубляя изучение гиперболической метрики, соответствующей плоскости с тремя исключенными точками a, b и c (обозначим ее через $D(a, b, c)$), Константинеску доказывает и обобщает при помощи принципа гиперболической метрики большое число классических теорем[1]). Далее мы рассмотрим некоторые из этих результатов.

Пусть $w=\mu(z)$ — однозначная модулярная функция, отображающая конформно треугольник со сторонами $x=0$, $y\geqslant 0$; $x=1$, $y\geqslant 0$ и $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, $y\geqslant 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w\geqslant 0$, причем вершины треугольника 0, 1 и ∞ переходят соответственно в точки 0, 1 и ∞. Обозначим через $\lambda(w)$ функцию, обратную к модулярной[2]).

Функция

$$\zeta=-e^{-\frac{\pi i}{z}}$$

голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ и переводит полупрямую $x=0$, $y>0$ в отрезок $(-1, 0)$ на плоскости (ζ), а полуокружность $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, $y>0$ — в отрезок $(0, +1)$. Следовательно, функция

$$\zeta(w)=-e^{-\frac{\pi i}{\lambda(w)}},$$

где для $\lambda(w)$ взята ветвь, переводящая полуплоскость $\operatorname{Im} w\geqslant 0$ в рассматриваемый треугольник, непрерывна на отрезке действи-

---

[1]) См. Constantinescu C., цит. в сноске [4]) на стр. 138, а также Einige Anwendungen des hyperbolischen Masses, *Math. Nachrichten*, 15, 3 (1956), 155—172. Автор распространяет принцип гиперболической метрики на границу области, изучая таким образом мероморфные функции в верхней полуплоскости или в окрестностях неизолированных особенностей специального типа. См. также Constantinescu C., Über die defekten Werte der meromorphen Funktionen deren charakteristische Funktion sehr langsam wächst, *Compositio Math.*, 13, 2 (1957), 129—147; Über eine Klasse meromorphen Funktionen die höchstens einen defekten Wert besitzen können, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. R.*, 1 (49), 2 (1957), 131—140.

[2]) Том I, гл. XI, § 2, п. 19—21, стр. 340—345.

тельной оси $-\infty < \operatorname{Re} w < +1$, который она отображает на отрезок $(-1, +1)$, причем точке $w = 0$ соответствует точка $\zeta = 0$. В силу принципа симметрии[1]) эта функция голоморфна в точке $w = 0$. Легко убедиться в том, что $\zeta(w)$ не обращается в нуль в области, дополнительной к отрезку $(+1, +\infty)$ действительной оси, кроме точки $w = 0$; поэтому

$$-e^{-\frac{\pi i}{\lambda(w)}} = wH_0(w),$$

где функция H_0 голоморфна и отлична от нуля.

Отсюда следует, что

$$\lambda(w) = \frac{-\pi i}{\log w + H(w)}, \tag{74}$$

где $H(w)$ — голоморфная функция.

При помощи этого выражения мы введем гиперболическую метрику в области $D(0, 1, \infty)$. Имеем

$$d\sigma_w = d\sigma_z = \frac{|dz|}{2y} = \frac{|\lambda'(w)|\,|dw|}{2 \operatorname{Im} \lambda(w)}.$$

Однако из (74) следует, что

$$|\lambda'(w)| = \frac{\pi\,|1 + wH'(w)|}{|w|\,|\log w + H(w)|^2}$$

и

$$\operatorname{Im} \lambda(w) = \frac{-\pi\,[\log|w| + \operatorname{Re} H(w)]}{|\log w + H(w)|^2},$$

поэтому

$$d\sigma_w = \frac{K(w)\,|dw|}{2\,|w| \log \dfrac{1}{|w|}}, \tag{75}$$

где

$$K(w) = \frac{|1 + wH'(w)|}{1 - \dfrac{\operatorname{Re} H(w)}{\log(1/|w|)}}. \tag{76}$$

Соотношение (76) показывает, что

$$\lim_{w \to 0} K(w) = 1. \tag{77}$$

Далее мы будем обозначать через $d(a, b)$, $\rho(a, b)$ гиперболическое, соответственно сферическое, расстояние между точками a, $b \in \Omega$[2]). Здесь Ω — произвольная область на сфере Римана (z),

---

[1]) Том I, гл. IV, § 3, стр. 147—152.

[2]) Предполагается, что радиус сферы равен $\frac{1}{2}$.

граница которой содержит по крайней мере три точки. Рассмотрим функцию

$$I(z, \Omega) = \lim_{z' \to z} \frac{d(z', z)}{\rho(z', z)}.$$

Область $D(0, a, b)$ на плоскости (z) получается при конформном отображении области $D(0, 1, \infty)$ на плоскости (w) при помощи функции

$$\frac{w}{w-1} = \frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{b}{a}, \tag{78}$$

или

$$z = \frac{ab}{(w-w_0)(a-b)},$$

где w_0 — точка, соответствующая точке $z = \infty$ при отображении (78):

$$w_0 = \frac{b}{b-a}.$$

Обозначим через $d(w_1, w_2)$ и $d'(z_1, z_2)$ гиперболические расстояния между точками w_1, $w_2 \in D(0, 1, \infty)$ и между их образами z_1, $z_2 \in D(0, a, b)$. Так как гиперболическая метрика конформно инвариантна, то

$$d(w_1, w_2) = d'(z_1, z_2).$$

Следовательно,

$$I[\infty, D(0, a, b)] = \lim_{z \to \infty} \frac{d'(z, \infty)}{\rho(z, \infty)} =$$

$$= \lim_{w \to w_0} \frac{d(w, w_0)}{\operatorname{arc\,ctg} \left| \dfrac{ab}{(w-w_0)(a-b)} \right|} =$$

$$= \lim_{w \to w_0} \frac{d(w, w_0)}{\rho(w, w_0)} \lim_{w \to w_0} \frac{\rho(w, w_0)\,|ab|}{|w-w_0|\,|a-b|} =$$

$$= I[w_0, D(0, 1, \infty)] \frac{|ab|}{(1+|w_0|^2)\,|a-b|}.$$

Учитывая (75), получаем

$$I[\infty, D(0, a, b)] = \frac{K\left(\dfrac{b}{b-a}\right)|a|}{2 \log \left| \dfrac{b-a}{b} \right|}. \tag{79}$$

56. В этом пункте мы установим несколько лемм, которые дадут возможность оценить значение I.

1°. $\lim\limits_{a' \to a} I[\infty, D(0, 1, a')] = I[\infty, D(0, 1, a)]$.

Области $D(0, 1, a)$ и $D(0, 1, a')$ на плоскостях (z) и (z') отображаются конформно друг на друга при помощи преобразования

$$z\frac{1-a}{z-a}=z'\frac{1-a'}{z'-a'}. \tag{80}$$

Обозначая через d, соответственно d', расстояния в гиперболических метриках и через

$$z_0=\frac{a(1-a')}{a-a'}$$

точку, соответствующую точке $z'=\infty$ при преобразовании (80), и представляя (80) в виде

$$z'=\frac{z}{z-z_0}\cdot\frac{a'(1-a)}{a'-a},$$

получаем

$$I[\infty, D(0, 1, a')]=\lim_{z'\to\infty}\frac{d'(z', \infty)}{\rho(z', \infty)}=\lim_{z\to z_0}\frac{d(z, z_0)}{\rho(z, z_0)}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{\rho(z, z_0)}{\rho(z', \infty)}=$$

$$=I[z_0, D(0, 1, a)]\lim_{z\to z_0}\frac{\operatorname{arctg}\left|\dfrac{z-z_0}{1+z\bar{z}_0}\right|}{\operatorname{arc\,ctg}|z'|}=$$

$$=I\left[\frac{a(1-a')}{a-a'}, D(0, 1, a)\right]\frac{|aa'(1-a)(1-a')|}{|a|^2|1-a'|^2+|a-a'|^2}.$$

Так как $I[z, D(0, 1, a)]$ — непрерывная функция от z, то из последнего соотношения вытекает лемма 1°.

2°. *Для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое положительное число* $\mu(\varepsilon)$, *что при* $|a|\geqslant\varepsilon$ *и* $|1-a|\geqslant\varepsilon$ *имеем*

$$I[\infty, D(0, 1, a)]\geqslant\mu(\varepsilon).$$

Действительно, в противном случае существует последовательность точек a_n, удовлетворяющая условиям леммы 2°, для которой

$$\lim_{n\to\infty}I[\infty, D(0, 1, a_n)]=0.$$

Без ограничения общности можно предположить, что последовательность a_n сходится к некоторой точке a_0. Очевидно, что $a_0\neq0$ и $a_0\neq1$. Кроме того, $a_0\neq\infty$, так как иначе [см. (79) и (77)]

$$\lim_{n\to\infty}I[\infty, D(0, 1, a_n)]=\infty.$$

Согласно лемме 1°,

$$I[\infty, D(0, 1, a_0)]=\lim_{n\to\infty}I[\infty, D(0, 1, a_n)]=0. \tag{81}$$

С другой стороны,

$$I[\infty, D(0, 1, a_0)] = \lim_{z\to\infty} \frac{d(z, \infty)}{\rho(z, \infty)}.$$

Обозначая через $f(t)$ функцию, отображающую конформно круг $|t| < 1$ на универсальную накрывающую области $D(0, 1, a_0)$ так, что

$$f(t) = \frac{\alpha_{-1}}{t} + \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots \quad (\alpha_{-1} \neq 0),$$

получаем

$$d(z, \infty) = d(t, 0) = \frac{1}{2} \log \frac{1+|t|}{1-|t|}$$

и

$$\rho(z, \infty) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{|z|} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{|f(t)|}.$$

Таким образом,

$$I[\infty, D(0, 1, a_0)] = \lim_{t\to 0} |tf(t)| = |\alpha_{-1}| > 0,$$

что противоречит равенству (81).

3°. *Пусть a, b, c — вершины некоторого треугольника и $l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3$ — длины его сторон. Тогда*

$$I[\infty, D(a, b, c)] \geqslant \min\left(\frac{Bl_3}{\log \frac{l_2}{l_1}}, Bl_3\right), \tag{82}$$

где B — положительная абсолютная постоянная.

Для доказательства этой леммы заметим сначала, что при аффинном преобразовании $w = \alpha z + \beta$, при котором точки a, b, c переходят соответственно в a', b' и c', как показывает непосредственная проверка, имеем

$$I[\infty, D(a', b', c')] = |\alpha| I[\infty, D(a, b, c)]. \tag{83}$$

Поэтому параллельные переносы и вращения оставляют инвариантным выражение $I[\infty, D(a, b, c)]$.

Произведем параллельный перенос, переводящий в начало координат общую вершину сторон l_1 и l_3, и обозначим через a_0 и b_0 остальные две вершины нового треугольника:

$$l_1 = |b_0| \leqslant l_2 = |a_0 - b_0| \leqslant l_3 = |a_0|.$$

Тогда

$$I[\infty, D(a, b, c)] = I[\infty, D(0, a_0, b_0)] = \frac{K\left(\frac{b_0}{b_0 - a_0}\right)|a_0|}{2 \log \left|\frac{b_0 - a_0}{b_0}\right|}.$$

Предположим сначала, что

$$\left|\frac{b_0}{b_0-a_0}\right|\leqslant\frac{1}{e}.$$

Полагая

$$\underline{K}(r)=\min_{|w|\leqslant r}K(w),$$

получаем

$$K\left(\frac{b_0}{b_0-a_0}\right)\geqslant\underline{K}\left(\frac{1}{e}\right)>0,$$

откуда

$$I[\infty,\ D(a,\ b,\ c)]\geqslant\frac{\underline{K}\left(\frac{1}{e}\right)l_3}{2\log\frac{l_2}{l_1}}. \tag{84}$$

Если

$$\left|\frac{b_0}{b_0-a_0}\right|>\frac{1}{e},$$

то, применяя преобразование $w=\frac{z}{b_0}$, получаем из (83)

$$I[\infty,\ D(0,\ a_0,\ b_0)]=|b_0|I\left[\infty,\ D\left(0,\frac{a_0}{b_0},\ 1\right)\right].$$

Однако

$$\left|\frac{a_0}{b_0}\right|\geqslant 1 \qquad \text{и} \qquad \left|1-\frac{a_0}{b_0}\right|=\left|\frac{b_0-a_0}{b_0}\right|\geqslant 1,$$

следовательно, согласно лемме 2°, можно написать

$$I\left[\infty,\ D\left(0,\ 1,\frac{a_0}{b_0}\right)\right]\geqslant\mu(1),$$

или

$$I[\infty,\ D(a,\ b,\ c)]=|b_0|\mu(1)\geqslant\frac{\mu(1)}{1+e}l_3, \tag{85}$$

так как

$$|a_0|\leqslant|b_0|+|a_0-b_0|\leqslant(1+e)|b_0|.$$

Лемма 3° получается из (84) и (85), если взять B равным наименьшему из чисел $\frac{\mu(1)}{1+e}$ и $\frac{1}{2}\underline{K}\left(\frac{1}{e}\right)$.

57. Приведем первое приложение леммы 3°.

Пусть F — множество значений, не принимаемых функцией $z=\frac{1}{f(t)}$, где $f(t)$ мероморфна в круге $|t|<1$, $f(0)=0$ и $f'(0)=1$. Если диаметр L множества F больше $\frac{1}{B}$, то множество F содержится в двух кругах радиуса $\frac{L}{e^{BL}}$.

Пусть a и b — две точки из F, для которых $|a-b|=L$, и пусть c — произвольная точка F (если F состоит только из двух точек, то теорема тривиальна). Обозначим через d и d' гиперболическую метрику областей $|t|<1$, соответственно $D(a, b, c)$; согласно принципу гиперболической метрики (п. 49), имеем соотношение

$$d'(\infty, z) \leqslant d(0, t) = \frac{1}{2} \log \frac{1+|t|}{1-|t|}.$$

Таким образом,

$$I[\infty, D(a, b, c)] = \lim_{z\to\infty} \frac{d'(\infty, z)}{\rho(\infty, z)} \leqslant \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}\log\frac{1+|t|}{1-|t|}}{\operatorname{arc\,tg}|f(t)|} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left| \frac{t}{|f(t)|} \right| = \frac{1}{|f'(0)|} = 1.$$

По лемме 3°

$$I[\infty, D(a, b, c)] \geqslant \min\left(\frac{BL}{\log\frac{L}{l}}, BL\right),$$

где $l = \min(|a-c|, |b-c|)$. Так как $BL > 1$, то имеем

$$\frac{BL}{\log\frac{L}{l}} \leqslant 1, \quad \text{или} \quad l \leqslant \frac{L}{e^{BL}},$$

что и доказывает теорему.

Этот результат содержит следующую теорему А. Берманта [1]). *Пусть E_1 и E_2 — два непересекающихся замкнутых множества на плоскости (z). Любая голоморфная в круге $|t|<1$ функция $f(t)$, для которой $f(0)=0$ и $f'(0)=1$, не покрывающая множество kE_1, покрывает множество kE_2, где k — произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству $k < N(E_1, E_2)$ ($N(E_1, E_2)$ — положительное число, зависящее только от E_1 и E_2), и kE — образ множества E при преобразовании $z' = kz$* [2]).

58. Теперь мы будем считать, что точки a, b, c подвижны. Если две из них совпадают, то гиперболическая метрика области $D(a, b, c)$ становится тождественно равной нулю. Поэтому мы

---

[1]) Берман т А., Растяжение модулярной функции и задачи о покрытиях, *Матем. сб.*, **15** (57), 2 (1944), 285—321.

[2]) Constantinescu C., Einige Anwendungen des hyperbolischen Masses, цит. на стр. 140. В той же работе приведены другие теоремы о покрытиях, осуществляемых функциями, мероморфными в единичном круге.

предположим, что попарные расстояния между точками a, b, c больше некоторого произвольного, но фиксированного положительного числа. Дадим следующее определение.

Дисперсией системы трех точек a, b, c называется число

$$\varepsilon(a, b, c) = \min[\rho(a, b), \rho(b, c), \rho(c, a)],$$

а дисперсией замкнутого множества F — число

$$\varepsilon(F) = \sup \varepsilon(a, b, c),$$

где a, b, c пробегают все тройки точек из F.

Уточним теперь теорему Ландау п. 52, определив верхнюю границу для радиуса R, не зависящую от значения функции $Z = f(z)$ в точке $z = 0$, если заменить обыкновенную производную $f'(z) = \frac{dZ}{dz}$ сферической производной

$$Df(z) = \lim_{z' \to z} \frac{\rho[f(z'), f(z)]}{\rho(z', z)}\ ^{1}).$$

Одновременно мы покажем, что эта оценка не зависит от исключительных значений $a_1, a_2, \ldots, a_p$, а только от их дисперсии, так как R можно оценить сверху равномерно относительно всех систем исключительных значений, для которых дисперсия больше некоторого числа $\varepsilon > 0$.

Если функция $Z = f(z)$ — мероморфна в круге $|z| < R$, а дисперсия значений, которые $f(z)$ не принимает в этом круге, больше ε, то

$$R \leqslant \frac{\operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2}}{2B\, Df(0)}. \tag{86}$$

В случае $f(0) \neq \infty$ мы можем перевести точку $f(0)$ в точку $Z = \infty$ при помощи вращения сферы. Это не меняет ни $Df(0)$, ни дисперсию исключительных значений. Поэтому можно предположить, что $f(0) = \infty$.

Пусть a, b, c — три исключительных значения функции $f(z)$ в круге $|z| < R$, для которых $\varepsilon(a, b, c) \geqslant \varepsilon$.

Обозначая через d и d' гиперболические расстояния относительно областей $|z| < R$ и $D(a, b, c)$ на плоскости (Z) и применяя принцип гиперболической метрики п. 49, получаем

$$I[\infty, D(a, b, c)] = \lim_{Z \to \infty} \frac{d'(Z, \infty)}{\rho(Z, \infty)} \leqslant \lim_{z \to 0} \frac{d(z, 0)}{\rho[f(z), f(0)]} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\frac{1}{2} \log \frac{R + |z|}{R - |z|}}{\rho(z, 0)} \lim_{z \to 0} \frac{\rho(z, 0)}{\rho[f(z), f(0)]} = \frac{1}{R\, Df(0)}. \tag{87}$$

---

[1]) $Df(z) = |f'(z)| \frac{1 + |z|^2}{1 + |Z|^2}$, если z и Z отличны от ∞.

Из леммы 3° п. 56 следует, что

$$I[\infty, D(a, b, c)] \geqslant \min\left(\frac{Bl_3}{\log\frac{l_2}{l_1}}, Bl_3\right),$$

где $l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3$ — стороны треугольника (a, b, c). Так как сферическое расстояние между двумя вершинами не меньше ε, то

$$2\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3.$$

Если

$$\frac{l_2}{l_1} \leqslant e,$$

то

$$\frac{Bl_3}{\log\frac{l_2}{l_1}} \geqslant Bl_3 \geqslant 2B\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}.$$

Если же

$$\frac{l_2}{l_1} > e,$$

то

$$Bl_3 \geqslant \frac{Bl_3}{\log\frac{l_2}{l_1}} \geqslant Bel_1 \geqslant 2Be\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} > 2B\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, в каждом из этих случаев

$$I[\infty, D(a, b, c)] \geqslant 2B\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}. \tag{88}$$

Таким образом, из (87) и (88) следует (86).

Глава VI

ГАРМОНИЧЕСКАЯ МЕРА

§ 1. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ГАРМОНИЧЕСКАЯ МЕРА

1. В отличие от остальных использовавшихся до сих пор мер или метрик, которые относились к множествам, лежащим внутри областей, их определявших, исследуемая ниже гармоническая мера относится к некоторым множествам, выбранным на границе рассматриваемой области.

Пусть D — область, ограниченная конечным числом жордановых кривых C, и пусть α — множество, состоящее из конечного числа дуг, лежащих на C. *Гармонической мерой* множества α относительно области D в точке z этой области мы назовем значение в этой точке гармонической и ограниченной в D функции $\omega(z, \alpha, D)$, равной единице в каждой внутренней точке дуг, принадлежащих α, и нулю в каждой внутренней точке из β (где β — дополнение α относительно C)[1].

Существование и единственность функции $\omega(z, \alpha, D)$ обеспечивается разрешимостью обобщенной задачи Дирихле для области D (гл. II, § 3, п. 10, 11, и гл. III, § 2) и единственностью решения этой задачи (гл. II, § 3, п. 15). Из свойств решения задачи Дирихле и обобщенного принципа максимума и минимума (гл. II, § 3, п. 13) следует также, что $\omega(z, \alpha, D)$ стремится к единице при стремлении $z \in D$ к некоторой внутрен-

---

[1]) Ограниченная гармоническая функция, равная единице на некоторых дугах границы области и нулю на дополнительных дугах, играет большую роль в задачах, где строится некоторая гармоническая мажоранта, например в исследованиях Т. Карлемана: Carleman T., Sur les fonctions inverses des fonctions entières, *Arkiv Mat. Astron. Fisik*, **15**, 10 (1921), p. 7 и братьев Ф. и Р. Неванлинна: Nevanlinna F. u. R., Über die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **50**, 5 (1922), p. 46. Использованная разными авторами гармоническая мера была систематически исследована Р. Неванлинной, который на VIII конгрессе скандинавских математиков (Стокгольм, 1934) сделал первый обзорный доклад по этому вопросу (Nevanlinna R., Das harmonische Mass von Punktmengen und seine Anwendung in der Functionentheorie, 8 Skand. Math. Kongr. Stockholm, p. 116—133). Более подробно о гармонической мере см. Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М., 1941, и Голузин Г. М., Геометрическая теория функции комплексного переменного, М., 1950.

ней точке ζ дуг α и к нулю при стремлении z к внутренней точке ζ дуг β. Если z стремится к одному из концов дуг α, то можно применить предложение гл. II, § 3, п. 16, и, следовательно, функция ω не определена. Для любой точки $z \in D$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant \omega(z, \alpha, D) \leqslant 1 \text{ [1]}. \tag{1}$$

Из определения гармонической меры следует ее *конформная инвариантность*.

Гармоническая мера *аддитивна*: легко проверить, что если α_1 и α_2 — два множества непересекающихся дуг, то

$$\omega(z, \alpha_1, D) + \omega(z, \alpha_2, D) = \omega(z, \alpha_1 + \alpha_2, D) \text{ [2]}. \tag{2}$$

2. Докажем теперь, что гармоническая мера *непрерывно* зависит от дуг α.

Так как гармоническая мера аддитивна, мы можем ограничиться случаем, когда α состоит из единственной дуги, один конец которой изменяется непрерывно в зависимости от введенного на C параметра t. Пусть α_t — дуга, соответствующая значению t параметра, и ζ_t — ее переменный конец. Предположим, что α_t возрастает одновременно с t. Приращению Δt параметра t соответствует приращение $\Delta\alpha$ дуги α [3]. Согласно соотношению (2), имеем

$$\omega(z, \Delta\alpha, D) = \omega(z, \alpha_{t+\Delta t}, D) - \omega(z, \alpha_t, D).$$

Обозначим через $\rho(\Delta t)$ максимальное расстояние между ζ_t и точками дуги $\Delta\alpha$ и через d — число, большее, чем диаметр области D.

Функция

$$h(z) = \log \frac{d}{|z - \zeta_t|} : \log \frac{d}{\rho(\Delta t)}$$

является гармонической в области D [4]. При любом $z \in \overline{D}$ выполняется неравенство $d \geqslant |z - \zeta_t|$, а следовательно, $h(z) > 0$; если $z \in \Delta\alpha$, то $\rho(\Delta t) \geqslant |z - \zeta_t|$, а следовательно, $h(z) \geqslant 1$. Но функция $\omega(z, \Delta\alpha, D)$ равна нулю на $C - \Delta\alpha$ и единице на $\Delta\alpha$. Применяя

[1]) Если в какой-либо одной точке имеет место равенство, то ω — постоянная. Если β состонт лишь из конечного числа точек, то $\omega(z, \alpha, D) = 1$; если рассматривать множество α, состоящее из конечного числа точек, то $\omega(z, \alpha, D) = 0$. В частности, $\omega(z, C, D) = 1$.

[2]) Очевидно, что $\omega(z, \alpha, D) = 1 - \omega(z, \beta, D)$.

[3]) Мы рассматриваем случай $\Delta t > 0$. В случае $\Delta t < 0$ применяется аналогичное рассуждение.

[4]) Более того, $h(z)$ гармонична в $\overline{D} - \zeta_t$ и имеет в точке ζ_t логарифмический полюс, в котором она равна $+\infty$ (область D предполагается ограниченной).

к разности $h(z) - \omega(z, \Delta\alpha, D)$ обобщенный принцип максимума и минимума, получаем неравенство

$$\omega(z, \Delta\alpha, D) < h(z)$$

для любого $z \in D$.

При стремлении Δt к нулю $\rho(\Delta t)$ также стремится к нулю, а следовательно, и $h(z)$ стремится к нулю. Таким образом, предыдущее неравенство дает возможность утверждать, что $\omega(z, \Delta\alpha, D)$ стремится к нулю одновременно с Δt или что $\omega(z, \alpha_t, D)$ изменяется непрерывно в зависимости от t.

3. В качестве первого приложения покажем, как при помощи гармонической меры можно выразить решение обобщенной задачи Дирихле (гл. II, § 3, п. 11).

Пусть снова D — область, ограниченная конечным числом жордановых кривых C, и пусть $U(\zeta)$ — определенная на C ограниченная функция

$$|U(\zeta)| < M \quad \text{при} \quad \zeta \in C,$$

имеющая не более конечного числа точек разрыва. *Решением соответствующей задачи Дирихле является функция*

$$U(z) = \int_C U(\zeta)\, d\omega(z, \zeta), \tag{3}$$

где $d\omega(z, \zeta) = \omega(z, dl)$[1], *а* dl *— элемент дуги на* C *в точке* ζ.

Интеграл (3) определяется следующим образом.

Рассматриваются различные разбиения контура C при помощи конечного числа n точек ζ_k на дуги l_k[2], и для каждого такого разбиения образуется сумма

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} U(\zeta_k)\, \omega(z, l_k). \tag{4}$$

Как при определении интеграла Римана[3], доказывается, что если наибольший диаметр дуг l_k стремится к нулю, то предел сумм (4) существует и равен, по определению,

$$\int_C U(\zeta)\, d\omega.$$

---

[1]) Для сокращения записи мы не будем включать область в обозначение гармонической меры, если это не может привести к недоразумениям. Например, мы пишем $\omega(z, dl)$ вместо $\omega(z, dl, D)$.

[2]) Пусть C_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, p$) — кривые, образующие границу C, и $\zeta_{n_{\nu-1}}, \zeta_{n_{\nu-1}+1}, \ldots, \zeta_{n_\nu - 1}$ — точки ζ_k на C_ν ($n_0 = 0$ и $n_p = n$, где n — число точек деления).

[3]) См., например, определение интеграла от комплексной функции, данное в томе I, гл. III, § 3, п. 23—24, стр. 100—102.

Разовьем первую часть этого метода, причем одновременно мы покажем равномерную сходимость сумм (4) к интегралу внутри области D.

Пусть ζ_k $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ — разбиение C и $\zeta'_h (h=0, 1, \ldots, m-1)$ — его подразбиение, определяющее дуги l'_h.

В силу аддитивности гармонической меры в равенстве (4) функцию $\omega(z, l_k)$ можно заменить суммой $\sum \omega(z, l'_h)$, распространенной на все дуги l'_h, объединение которых образует l_k. Обозначая через k_h индекс k со свойством $l'_h \subset l_k$ и через S' — сумму, соответствующую разбиению ζ'_h,

$$S' = \sum_{h=0}^{m-1} U(\zeta'_h)\, \omega(z, l'_h),$$

получаем

$$S - S' = \sum_{h=0}^{m-1} [U(\zeta_{k_h}) - U(\zeta_h)]\, \omega(z, l'_h).$$

Каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и замкнутая область $\bar{\Delta} \subset D$, каждую точку разрыва функции U можно заключить в дугу λ_j достаточно малого диаметра, так чтобы объединение λ этих дуг при $z \in \bar{\Delta}$ удовлетворяло неравенству

$$\omega(z, \lambda) < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{5}$$

Если разбиение, определяемое точками ζ_k, достаточно мелко, то колебание функции $U(\zeta)$ на дугах l_k, имеющих общие точки с $C - \lambda$, меньше $\frac{\varepsilon}{2}$; обозначая через λ' объединение этих дуг, получаем

$$|S - S'| < \frac{\varepsilon}{2}\omega(z, \lambda') + 2M\omega(z, \lambda).$$

Учитывая неравенства (1) и (5), заключаем, что

$$|S - S'| < \varepsilon$$

для любого $z \in \bar{\Delta}$.

Если выбирать последовательность разбиений $\zeta_k^{(n)}$ $(n=1, 2, \ldots)$, каждое из которых является подразбиением предыдущего, таким образом, чтобы наибольший из диаметров дуг $l_k^{(n)}$ стремился к нулю, то последовательность сумм $S^{(n)}$ будет сходиться равномерно внутри D к функции $U(z)$. Так как суммы $S^{(n)}$ гармоничны в D, то и их предел $U(z)$ обладает этим свойством (гл. II, § 1, п. 3). Сравнивая суммы, соответствующие двум разбиениям, при помощи

их общего подразбиения, можно показать, что предел $U(z)$ не зависит от выбранной последовательности разбиений. Как и каждая из сумм S, предел $U(z)$ ограничен числом M.

Чтобы доказать, что $U(z)$ является решением задачи Дирихле, достаточно показать, что $U(z)$ стремится к $U(\zeta_0)$, когда $z \in D$ стремится к $\zeta_0 \in C$ (если $U(\zeta)$ непрерывна в ζ_0).

Для этого рассмотрим разность

$$U(\zeta_0) - \int_C U(\zeta)\, d\omega(z, \zeta),$$

которую можно представить в виде

$$\int_C [U(\zeta_0) - U(\zeta)]\, d\omega(z, \zeta), \tag{6}$$

так как

$$\int_C d\omega(z, \zeta) = \omega(z, C) = 1.$$

Пусть σ — дуга, для которой ζ_0 является внутренней точкой. Интеграл (6) разлагается в сумму

$$\int_\sigma [U(\zeta_0) - U(\zeta)]\, d\omega + \int_{C-\sigma} [U(\zeta_0) - U(\zeta)]\, d\omega.$$

Если дуга σ достаточно мала, а ε — произвольное положительное число, то первый из этих интегралов по абсолютной величине меньше $\varepsilon\omega(z, \sigma)$, а следовательно, меньше ε. Второй интеграл по абсолютной величине меньше $2M\omega(z, C - \sigma)$, и, если z лежит достаточно близко к ζ_0, этот интеграл также становится меньше ε.

Таким образом, интеграл (3) дает решение задачи Дирихле.

4. В главе I (22) мы установили интегральное выражение решения задачи Дирихле при помощи функции Грина, справедливое при более жестких ограничениях относительно границы C области D. Так же как и формула (42) гл. V, соотношение (3) имеет то преимущество, что оно применимо к произвольным жордановым контурам C.

Мы рассмотрим связь между формулами (42) гл. V и (3) гл. VI и получим таким образом *геометрическую интерпретацию* гармонической меры.

Применяя соотношение (42) гл. V к функции $\omega(z, \alpha)$, мы можем написать

$$\omega(z, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha dH(\zeta, z).$$

Следовательно, гармоническая мера $\omega(z, \alpha)$ множества α равна приращению функции $H(z, \zeta)$ на α, умноженному на $\frac{1}{2\pi}$ (здесь H — функция, сопряженная с функцией Грина, взятая с обратным знаком).

Если множество α состоит из одной дуги с концами ζ_1 и ζ_2, то

$$\omega(z, \alpha) = \frac{1}{2\pi}[H(\zeta_2, z) - H(\zeta_1, z)]^1). \qquad (7)$$

Согласно установленным в гл. V, § 1, п. 6 свойствам линий уровня функции Грина и сопряженной с ней функции, разность $H(\zeta_2, z) - H(\zeta_1, z)$ равна углу между линиями уровня

$$H(\zeta, z) = H(\zeta_1, z)$$

и

$$H(\zeta, z) = H(\zeta_2, z),$$

проходящими через концы дуги α.

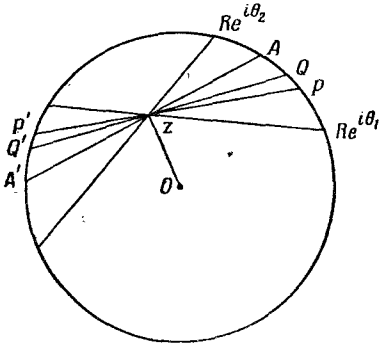

Рис. 23.

Итак, *гармоническая мера дуги α в точке z равна деленному на 2π углу между линиями уровня функции, гармонически сопряженной с функцией Грина с полюсом в z, проходящими через концы α.*

Если α состоит из нескольких дуг, то $\omega(z, \alpha)$ равна деленной на 2π сумме этих углов, взятых для каждой дуги в отдельности.

5. В случае круга можно получить другую геометрическую интерпретацию гармонической меры.

Предположим, что область D — это круг $|z| < R$, а α — дуга, заключенная между $Re^{i\theta_1}$ и $Re^{i\theta_2}$ (рис. 23). Применяя формулу Пуассона (гл. I, (25)), получаем

$$\omega(z, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}\, d\theta, \qquad (8)$$

где $z = re^{i\varphi}$.

Через точку z проведем хорду AA', перпендикулярную к Oz, и произвольную хорду PP'. Известно, что

$$\overline{Pz} \cdot \overline{P'z} = \overline{Az}^2 = R^2 - r^2.$$

---

[1]) В частности, $d\omega(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} dH(\zeta, z)$.

Пусть P — аффикс числа $Re^{i\theta}$, тогда

$$\overline{Pz}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi);$$

поэтому ядро интеграла Пуассона равно

$$\frac{\overline{P'z}}{\overline{Pz}}.$$

Придадим θ приращение $\Delta\theta$ и проведем хорду QQ' через точку z и точку Q с аргументом $\theta + \Delta\theta$. Так как треугольники zPQ и $zQ'P'$ подобны, то

$$\frac{\overline{P'z}}{\overline{Qz}} = \frac{\overline{Q'P'}}{\overline{QP}}.$$

В пределе, когда $\Delta\theta$ стремится к нулю, $\overline{Qz}$ стремится к $\overline{Pz}$, и мы можем написать

$$\frac{\overline{P'z}}{\overline{Pz}} = \frac{d\theta'}{d\theta},$$

где θ' — аргумент P'.

Подставляя этот результат в выражение (8), получаем соотношение

$$\omega(z,\ \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta'}{d\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}(\theta_2' - \theta_1'). \tag{9}$$

Итак, *гармоническая мера* $\omega(z,\ \alpha)$ *равна выраженной в радианах длине дуги, описываемой концом* P' *хорды* PP', *проведенной через* z, *когда* P *описывает дугу* α, *деленной на* 2π.

6. Пусть t — угол, под которым дуга α видна из точки z. Соотношение (9) можно записать также в виде

$$\omega(z,\ \alpha) = \frac{1}{2\pi}[2t - (\theta_2 - \theta_1)]. \tag{10}$$

Таким образом, мы видим, что в случае круга и множества, состоящего из одной дуги, линиями уровня гармонической меры являются дуги окружностей, проходящие через концы α и заполняющие внутренность круга. Если обозначить через $\overline{\omega}(z, \alpha)$ функцию, гармонически сопряженную с гармонической мерой, то линиями уровня $\overline{\omega}(z, \alpha) = \text{const}$. будут дуги окружностей, принадлежащих пучку, ортогональному к пучку окружностей, проходящих через концы α [1]).

[1]) Из соотношения (10) легко заключить, что аналитическая функция $\varphi(z) = \omega + i\overline{\omega}$ выражается в виде

$$\frac{i}{\pi}\log\frac{z_1 - z}{z_2 - z} + \frac{1}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) + ik,$$

Пользуясь существованием конформного отображения жордановых областей на круг, которое продолжается до топологического соответствия замкнутых областей, и конформной инвариантностью гармонической меры, можно обобщить приведенные результаты о линиях уровня функций $\omega(z, \alpha)$ и $\bar{\omega}(z, \alpha)$. Если D — жорданова область, а α — простая дуга, лежащая на ее границе, то линия уровня $\omega(z, \alpha) = k$ $(0 \leqslant k \leqslant 1)$ является простой дугой l_k, концы которой совпадают с концами α. При $k = 1$ дуга l_1 совпадает с α, при $k = 0$ дуга l_0 совпадает с дополнительной к α дугой, а при возрастании k от нуля до единицы l_k описывает область D. Линии уровня $\bar{\omega}(z, \alpha) = h$ $(-\infty < h < +\infty)$ также являются простыми дугами с одним концом на α, с другим на $C - \alpha$.

Заметим, что область $D_k : k < \omega(z, \alpha) < 1$ $(k < 1)$ является жордановой и что

$$\omega(z, \alpha, D_k) = \frac{1}{1-k}[\omega(z, a) - k]\ ^{1}).$$

§ 2. ТЕОРЕМА О ДВУХ КОНСТАНТАХ. ПРИЛОЖЕНИЯ

7. Докажем теперь при помощи гармонической меры теорему о двух константах, углубляющую принцип максимума модуля [2]) и уточняющую следствия этого принципа: лемму Карлемана и теорему Фрагмена — Линделёфа [3]).

Принцип максимума модуля дает возможность оценить сверху модуль функции, голоморфной в замкнутой области, при помощи ее максимума на границе этой области. Теорема о двух константах, принадлежащая Ф. и Р. Неванлинна и А. Островскому [4]),

---

где $z_1 = Re^{i\theta_1}$, $z_2 = Re^{i\theta_2}$ и k — действительная постоянная. Ветвь, соответствующая значениям ω в интервале $[0, 1]$, отображает конформно круг D на полосу $0 < \omega < 1$, причем дуга α переходит в прямую $\omega = 1$, а дополнительная к ней дуга переходит в мнимую ось $\omega = 0$; при стремлении z к z_1 или к z_2 функция ω стремится соответственно к $-\infty$ или к $+\infty$.

Связь между ω и углом t, под которым дуга α видна из z, устанавливается и в случае, когда α состоит из нескольких дуг, и оправдывает название угловой меры, которое Р. Неванлинна дал сначала гармонической мере.

[1]) В общем случае, когда число контуров области D и дуг, образующих α, произвольно, линия уровня $\omega(z, \alpha) = \text{const}$. может состоять из нескольких ветвей. Все они или оканчиваются в концах дуг α, или являются замкнутыми кривыми, охватывающими по крайней мере одну граничную кривую области D. См. Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М., 1941, гл. II, § 5.

[2]) Том I, гл. II, § 3, п. 26—28, стр. 70—73.

[3]) Том I, гл. IX, § 2, п. 8, стр. 264 и п. 13, стр. 269—270.

[4]) Nevanlinna F. u. R., Über die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, цит. на стр. 149; Ostrowski A., Über allgemeine Konvergenzsätze der komplexen Funktionentheorie, *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, 32 (1923), 185—194.

указывает более точную верхнюю границу модуля функции внутри области, когда максимум на некоторой части контура меньше, чем максимум модуля на всей границе.

Пусть D — область, ограниченная конечным числом жордановых кривых, C — ее граница, α — множество, состоящее из конечного числа дуг, принадлежащих C, и β — дополнение к α относительно C.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в D, и при любом $\zeta \in C$, отличном от концов дуг α, имеем

$$\overline{\lim_{z \to \zeta \in \alpha}} |f(z)| \leqslant M \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{z \to \zeta \in \beta}} |f(z)| \leqslant m; \tag{11}$$

тогда при любом $z \in D$

$$|f(z)| \leqslant M^{\omega(z, \alpha)} m^{\omega(z, \beta)} = m \left(\frac{M}{m}\right)^{\omega(z, \alpha)} [1]. \tag{12}$$

Предположим, что $m \leqslant M$, и рассмотрим гармоническую в D функцию

$$K(z) = \omega(z, \alpha) \log M + \omega(z, \beta) \log m,$$

равную $\log M$ на α и $\log m$ на β.

Функция $\log|f(z)|$ гармонична в области D, за исключением нулей функции $f(z)$, в которых она имеет логарифмические полюсы со значением $-\infty$.

Заключим каждый нуль $f(z)$ в круг γ, лежащий в D вместе со своей границей и такой, что на его окружности

$$\log|f(z)| < \log m; \tag{13}$$

эти круги выбираются таким образом, чтобы они не пересекались. Область Δ, полученная из D после исключения кругов $\overline{\gamma}$, ограничена контуром C и окружностями этих кругов.

Так как на этих окружностях, как и во всей области D,

$$K(z) = \omega(z, \alpha) \log \frac{M}{m} + \log m \geqslant \log m,$$

то, учитывая значения $K(z)$ на α и β и неравенства (11) и (13), мы заключаем, согласно обобщенному принципу максимума (гл. II, § 3, п. 14)[2], что в Δ

$$\log|f(z)| \leqslant K(z).$$

---

[1]) Принцип максимума модуля дает нам более слабое неравенство $|f(z)| \leqslant M$ в D. Если $M = m$ или $\omega(z, \beta) = 0$, то теорема о двух константах сводится к этому принципу.

[2]) Обе функции ограничены сверху, поэтому можно допустить существование конечного числа граничных точек (концов дуг α), о которых мы ничего не знаем.

Так как круги γ можно выбрать произвольно малыми, то соотношение (12) имеет место во всей области D [1]).

Доказанная теорема дает также оценку модуля $f(z)$, не зависящую от z. Пусть d — замкнутая область, лежащая внутри D, и

$$\mu(d, \alpha) = \max_{d} \omega(z, \alpha);$$

тогда при любом $z \in d$

$$|f(z)| \leqslant \left(\frac{M}{m}\right)^{\mu(d, \alpha)} m.$$

В соотношении (12) равенство имеет место для функции вида

$$f(z) = e^{ic} M^{\varphi} m^{1-\varphi},$$

где через φ мы обозначили функцию $\omega(z, \alpha) + i\bar{\omega}(z, \alpha)$ и через c — действительную постоянную.

8. Обобщение леммы Карлемана. Пусть D — жорданова область, ограниченная отрезками OA и OB, лежащими на сторонах угла AOB раствора $\lambda\pi$, для которого действительная ось служит биссектрисой, и простой жордановой дугой ACB, соединяющей точки A и B, не пересекая OA и OB (рис. 24).

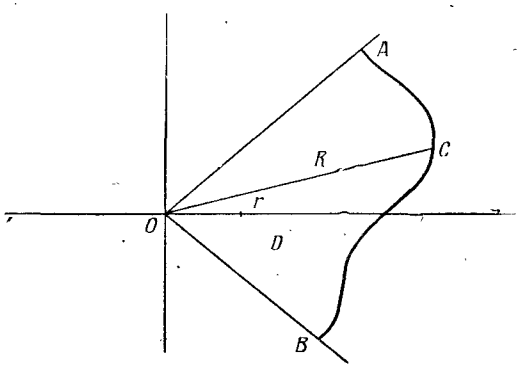

Рис. 24.

Обозначим через R наибольшее расстояние от точки O до дуги ACB и через $z = r$ внутреннюю точку области D, лежащую на биссектрисе угла AOB.

[1]) Очевидно, что если $f(z)$ не имеет нулей в D, то приведенное рассуждение применимо непосредственно к D.

В томе I мы доказали лемму Карлемана.

Если функция $f(z)$ *голоморфна в* D *и*

$$\overline{\lim_{z\to\zeta\in OA,\,OB}}\,|f(z)|\leqslant M,$$

$$\overline{\lim_{z\to\zeta\in ACB}}\,|f(z)|\leqslant m,$$

то

$$|f(r)|\leqslant M^{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} m^{\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}. \tag{14}$$

Теорема о двух константах дает возможность обобщить эту лемму и установить неравенство, справедливое во всей области D и переходящее в неравенство (14) на действительной оси.

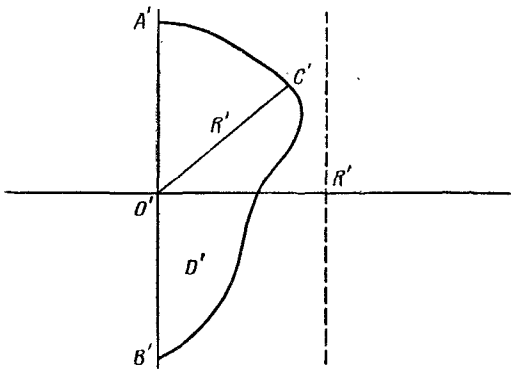

Рис. 25.

Действительно, обозначая через α дугу AOB и применяя эту теорему, получаем

$$|f(z)|\leqslant\left(\frac{M}{m}\right)^{\omega(z,\,\alpha)} m. \tag{15}$$

Оценим сверху функцию $\omega(z, \alpha)$, отобразив конформно область D при помощи функции $z'=z^{\frac{1}{\lambda}}$ на область D', лежащую в полосе $\Delta: 0<\operatorname{Re} z'<R'$, где $R'=R^{\frac{1}{\lambda}}$ (рис. 25), и заменив $\omega(z, \alpha)$ гармонической мерой мнимой оси относительно полосы Δ в точке z'.

В силу конформной инвариантности гармонической меры имеем

$$\omega(z,\ \alpha)=\omega(z',\ \alpha',\ D'),$$

где $z' = z^{\frac{1}{\lambda}}$ и α' — образ $A'O'B'$ дуги α. Однако непосредственно видно, что

$$\omega(z', \alpha', D') \leqslant \omega(z', \operatorname{Re} z' = 0, \Delta)$$

и

$$\omega(z', \operatorname{Re} z' = 0, \Delta) = 1 - \frac{x'}{R'}.$$

Следовательно,

$$\omega(z, \alpha) \leqslant 1 - \frac{x'}{R'} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \cos\frac{\varphi}{\lambda},$$

где $z = re^{i\varphi}$, и неравенство (15) принимает вид

$$|f(z)| < m\left(\frac{M}{m}\right)^{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \cos\frac{\varphi}{\lambda}}, \tag{16}$$

что и является искомым обобщением леммы Карлемана.

9. Укажем теперь другое приложение теоремы о двух константах: *уточнение теоремы Фрагмена — Линделёфа.*

Пусть функция $f(z)$ голоморфна внутри некоторого угла раствора $\lambda\pi$ с вершиной в начале координат и удовлетворяет неравенству

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} |f(z)| \leqslant c$$

в любой конечной точке ζ, лежащей на сторонах угла. Тогда либо для любого z, лежащего внутри угла,

$$|f(z)| \leqslant c,$$

либо для любого положительного $k < \frac{1}{\lambda}$ существует стремящаяся к бесконечности одновременно с n последовательность положительных значений r_n, таких, что

$$M(r_n) = \max_{|z|=r_n} |f(z)| > e^{r_n^k}.$$

Предположим, что угол, о котором идет речь в теореме, определяется неравенством $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ ($\lambda = 1$) и что $c = 1$ [1]).

[1]) Эти предположения не ограничивают общности результата, так как случай произвольного угла можно свести к рассматриваемому при помощи конформного отображения, оставляющего на месте окружности с центром в вершине угла, а постоянная c становится равной 1, если умножить функцию на $\frac{1}{c}$.

Применяя теорему о двух константах к полукругу $D: (|z| < r) \cap (\operatorname{Im} z > 0)$ и выбирая в качестве дуги α полуокружность $(|z| = r) \cap (\operatorname{Im} z > 0)$, получаем

$$|f(z)| \leqslant M(r)^{\omega(z,\,\alpha,\,D)}, \tag{17}$$

так как $M = M(r)$ и $m = 1$.

Гармоническая мера $\omega(z, \alpha, D)$ определяется при помощи следующего геометрического замечания. Угол θ, под которым виден из z отрезок $[-r, r]$ действительной оси, является гармонической

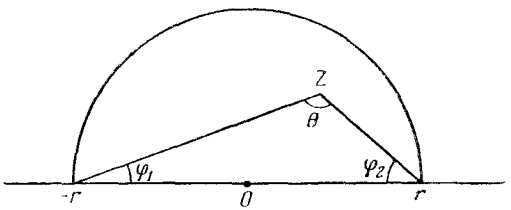

Рис. 26.

в D функцией, равной $\frac{\pi}{2}$ на α и π на отрезке $[-r, r]$ (рис. 26). Следовательно,

$$\omega(z, \alpha, D) = \frac{2}{\pi}(\pi - \theta).$$

Однако

$$\theta = \arg \frac{z-r}{z+r}.$$

Обозначая

$$\varphi_1 = \arg(z+r) = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{r+x},$$

$$\varphi_2 = \pi - \arg(z-r) = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{r-x},$$

мы получаем соотношение

$$\omega(z, \alpha, D) = \frac{2}{\pi}(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Если r достаточно велико, а z — фиксированная точка, то мы можем пользоваться разложением в ряд Тейлора в окрестности начала координат функции

$$\operatorname{arc\,tg} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \ldots.$$

Таким образом, мы заключаем, что

$$\omega(z, \alpha, D) = \frac{2}{\pi r}\left(\frac{ry}{r+x} + \frac{ry}{r-x} - \frac{ry^3}{3(r+x)^3} - \frac{ry^3}{3(r-x)^3} + \dots\right) = \frac{4y}{\pi r}\left[1 + \varepsilon\left(\frac{1}{r}\right)\right], \quad (18)$$

где $\varepsilon\left(\frac{1}{r}\right)$ — функция, стремящаяся к нулю одновременно с $\frac{1}{r}$.

Из соотношений (17) и (18) вытекает неравенство

$$\log|f(z)| \leqslant \frac{4y}{\pi} \cdot \frac{\log M(r)}{r}\left[1 + \varepsilon\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

справедливое при достаточно большом r.

Следовательно,

$$\log|f(z)| \leqslant \frac{4y}{\pi} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r}. \quad (19)$$

Если

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r} \leqslant 0,$$

то существует последовательность полуокружностей со стремящимися к бесконечности радиусами, на которых $|f(z)| \leqslant 1$; следовательно, $|f(z)| \leqslant 1$ при $\operatorname{Im} z > 0$.

Напротив, если

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r} = \mu > 0,$$

то при любом положительном $\mu' < \mu$ и любой последовательности чисел r_n, стремящейся к бесконечности, имеем, начиная с достаточно большого номера n,

$$M(r_n) > e^{\mu' r_n}.$$

Однако $e^{\mu' r_n} > e^{r_n^k}$ при $0 < k < 1$ и достаточно большом r_n, так что мы получили уточнение теоремы Фрагмена — Линделёфа.

Пусть задана голоморфная в верхней полуплоскости функция $f(z)$, для которой

$$\varlimsup_{z\to\zeta} |f(z)| \leqslant 1;$$

тогда либо

$$|f(z)| \leqslant 1$$

для любого z, принадлежащего $\operatorname{Im} z > 0$, либо существует такое положительное число μ, что при любом μ', $0 < \mu' < \mu$, имеем

$$M(r) > e^{\mu' r},$$

если r достатоточно велико.

Из неравенства (19) следует также, что предположение $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log M(r)}{r}=-\infty$ влечет за собой тождественное обращение в нуль функции $f(z)$.

10. Теорема о двух константах приводит также к *теореме Адамара о трех кругах* [1]).

Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в замкнутом круговом кольце $r_1\leqslant|z|\leqslant r_2 (r_1<r_2)$, и пусть, как обычно,

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|.$$

Если выбрать в качестве области D это круговое кольцо, а в качестве множества α — окружность $|z|=r_2$, то, применяя теорему о двух константах для $M=M(r_2)$, $m=M(r_1)$,

$$\omega(z,\ \alpha)=\frac{\log|z|/r_1}{\log r_2/r_1}\quad\text{и}\quad\omega(z,\ \beta)=\frac{\log|z|/r_2}{\log r_1/r_2},$$

мы получаем неравенство, справедливость которого утверждает теорема о трех кругах:

$$\log M(r)\leqslant\log M(r_1)\frac{\log r/r_2}{\log r_1/r_2}+\log M(r_2)\frac{\log r/r_1}{\log r_2/r_1},$$

показывающее, что $\log M(r)$ *является выпуклой функцией от* $\log r$.

Эта теорема обобщается следующим образом: если $f(z)$ голоморфна в $\overline{D}$, то $\log\max|f(z)|$ на линии уровня $\omega(z,\ \alpha,\ D)=\lambda$ является выпуклой функцией от λ.

§ 3. ПРИНЦИП Р. НЕВАНЛИННЫ, ИЛИ ПРИНЦИП ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ. ПРИЛОЖЕНИЯ

11. Известно, что гармоническая мера остается инвариантной при конформных отображениях. Относительно поведения гармонической меры при отображении, осуществляемом голоморфной, но не обязательно однолистной функцией, Р. Неванлинна сформулировал принцип гармонической меры.

Введем предварительно следующее определение.

Пусть $Z=f(z)$ — функция, голоморфная в некоторой области D [2]), пусть ζ — точка, принадлежащая границе D. *Множеством предельных значений* [3]) функции $f(z)$ в точке ζ называется

[1]) Том I, гл. II, § 3, п. 31, стр. 75—76.

[2]) Это определение справедливо для произвольной области Ω.

[3]) Различные виды множеств предельных значений были введены В. Гроссом (Gross W., Über die Singularitäten analytischer Funktionen, *Monatshefte für Math. und Physik*, 29 (1918), 3—47).

множество значений a, таких, что существует последовательность точек $z_\nu \in D$, сходящаяся к ζ, для которой $\lim\limits_{\nu\to\infty} f(z_\nu) = a$. Очевидно, что это множество можно определить также следующим образом: построим последовательность областей $d_n \subset D$ со свойствами 1) $d_n \supset d_{n+1}$ и 2) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{d}_n$ состоит из одной точки ζ. Можно взять, например, убывающую последовательность чисел r_n, $\lim r_n = 0$, и жордановы области d_n, принадлежащие соответственно кругам $|z-\zeta| < r_n$. Образом d_n при отображении f является некоторая область $f(d_n)$. Очевидно, что $f(d_n) \subset f(D)$ и $f(d_n) \supset f(d_{n+1})$. Множеством предельных значений функции $f(z)$ в точке ζ является $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(\bar{d}_n)$ [1]). Множество предельных значений функции $f(z)$ относительно множества α, принадлежащего границе D, определяется как объединение предельных множеств функции $f(z)$ в точках α.

Теперь мы можем сформулировать принцип гармонической меры.

Пусть функция $Z = f(z)$ голоморфна в области D плоскости (z), ограниченной конечным числом жордановых кривых C, и принимает значения в некоторой области Δ плоскости (Z), также ограниченной конечным числом жордановых кривых Γ. Предположим, что множество α состоит из конечного числа дуг, принадлежащих C, и что множество предельных значений $f(z)$ относительно множества α, из которого исключены концы образующих его дуг, может быть заключено в конечное число континуумов $\bar{\delta}$ из $\bar{\Delta}$, ограниченных или состоящих из конечного числа жордановых дуг β. Если z — точка из D, для которой $Z = f(z)$ не принадлежит множеству $\bar{\delta}$, и если через Δ^* обозначить подобласть $\Delta - \bar{\delta}$, ограниченную дугами из β и Γ и содержащую точку Z, то

$$\bar{\omega}(z, \alpha, D) \leqslant \omega(Z, \beta, \Delta^*). \tag{20}$$

Равенство в какой-либо одной точке $z \in D$ влечет за собой равенство во всей области.

Так же как при доказательстве остальных принципов (гл. V, § 2, п. 7 и § 7, п. 49), мы применим принцип максимума и минимума.

Пусть α — множество дуг из D, образы которых принадлежат β, и пусть D^* — та из подобластей D, ограниченных дугами из C и из $\bar{\alpha}$, в которой находится точка z (рис. 27).

[1]) Такие последовательности областей d_n были использованы в томе I, гл. IX, § 3, п. 17—18, стр. 272—274 при доказательстве теоремы Каратеодори.

Образ $f(D^*)$ области D^* при отображении $Z=f(z)$ содержится в Δ^*. Действительно, если бы в D^* существовала точка z^*, такая, что $f(z^*)=Z^*\notin\Delta^*$, то можно было бы соединить точки z и z^* в D^* при помощи непрерывного пути L.

Тогда путь $f(L)$ содержался бы в Δ. Так как $Z\in\Delta^*$ и $Z^*\notin\Delta^*$, то на пути L, при прохождении его начиная от z, существовала бы первая точка z_1, для которой $Z_1=f(z_1)$ принадлежит границе области Δ^*. Так как Z_1 содержится внутри Δ, то эта точка принадлежала бы множеству β. Следовательно, z_1 принадлежала бы множеству $\overline{\alpha}$, что невозможно.

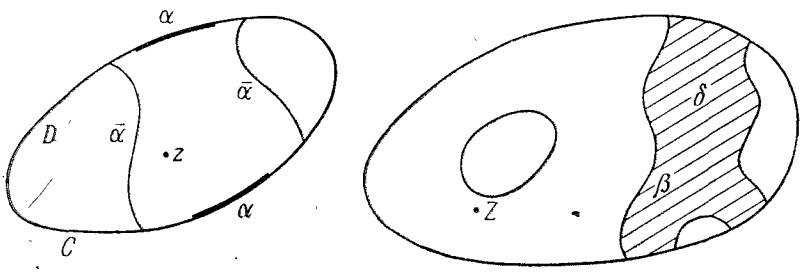

Рис. 27.

12. Для доказательства неравенства (20) рассмотрим разность $\omega[f(z),\beta,\Delta^*]-\omega(z,\alpha,D)$ в области D^*, в которой эта разность является гармонической.

Граница области D^* состоит из:

1) дуг α, за исключением их концов,

2) дуг $\overline{\alpha}$, внутренних по отношению к D,

3) дуг из $C-\alpha$,

4) конечного числа точек, являющихся концами дуг α.

1) При стремлении z из D^* (а следовательно, и из D) к внутренней точке ζ дуг α функция $\omega(z,\alpha,D)$ стремится к единице, а Z стремится к значениям из $\overline{\delta}$, т. е. к β. Могут представиться два случая:

a) Z не стремится к концам дуг из β, и тогда $\omega(Z,\beta,\Delta^*)$ стремится к единице;

b) Z стремится также и к концам дуг из β.

Предположим пока, что имеет место случай a). Тогда при стремлении z к внутренней точке дуг α функция $\omega[f(z),\beta,\Delta^*]-\omega(z,\alpha,D)$ стремится к нулю.

2) Так как $\overline{\alpha}$ является множеством внутренних точек D, то при стремлении z к точке $\zeta\in\overline{\alpha}$ функция $\omega(\zeta,\alpha,D)$ стремится к определенному значению, заключенному между 0 и 1. С другой

стороны, $Z=f(\zeta)$ стремится к точке $f(\zeta)$ из β, внутренней по отношению к Δ (так как $f(D)\subset\Delta$), и $\omega(Z, \beta, \Delta^*)$ стремится к единице.

Следовательно, в этом случае разность $\omega[f(z), \beta, \Delta^*] - \omega(z, \alpha, D)$ стремится к положительному пределу.

3) Наконец, при стремлении z к точке $\zeta\in C-\alpha$ функция $\omega(z, \alpha, D)$ стремится к нулю, а $\omega[f(z), \beta, \Delta^*]$ неотрицательна; поэтому

$$\varliminf_{z\to\zeta}[\omega(f(z), \beta, \Delta^*) - \omega(z, \alpha, D)]\geqslant 0. \tag{21}$$

Таким образом, в случае а) для любой точки ζ на границе области D^*, за исключением конечного числа точек 4), и для любого $z\in D^*$ имеет место неравенство (21). Так как обе функции ω ограничены, то из обобщенного принципа минимума (гл. II, § 3, п. 14) вытекает в случае а) искомое неравенство (20) для любого $z\in D^*$.

13. В случае b) мы расширим множество $\overline{\delta}$, добавив к нему некоторую окрестность относительно Δ^* достаточно малого радиуса $\varepsilon>0$ каждого из концов дуг β на границе Δ^*, являющегося предельным значением функции $f(z)$ для граничных точек области D, лежащих внутри дуг α. Пусть $\overline{\delta}_\varepsilon$ — замыкание полученного таким образом множества. Оно ограничено конечным числом жордановых дуг β_ε, состоящих из частей дуг β и дуг окружностей добавленных окрестностей. Обозначим через Δ_ε^* область из Δ^*, ограниченную дугами из Γ и β_ε и содержащую внутри точку Z. Применяя к Δ_ε^* соображения, высказанные выше относительно Δ^*, обозначим через $\overline{\alpha}_\varepsilon$ дуги из D, образы которых принадлежат дугам β_ε, и через D_ε^* — область, содержащую z и ограниченную дугами из C и $\overline{\alpha}_\varepsilon$. Очевидно, что $D_\varepsilon^*\subset D^*$. Границу области D_ε^* также образуют множества 1) — 4), однако на этой границе существуют только дуги со свойством а): если $z\in D_\varepsilon^*$ стремится к внутренней точке ζ некоторой дуги α на границе области D_ε^*, то Z стремится к точке из β (так как множество предельных значений функции $f(z)$ на α, за исключением концов составляющих его дуг, содержится в $\overline{\delta}$), являющейся внутренней для дуги β_ε. Применяя результат, установленный выше в случае а), заключаем, что при любом $z\in D_\varepsilon^*$

$$\omega[f(z), \beta_\varepsilon, \Delta_\varepsilon^*] - \omega(z, \alpha, D)\geqslant 0, \tag{22}$$

Неравенство (22) справедливо при любом ε. При ε, стремящемся к нулю, β_ε, Δ_ε^* и D_ε^* стремятся к β, Δ^* и D^*, а $\omega[f(z), \beta_\varepsilon, \Delta_\varepsilon^*]$ сходится, возрастая, к $\omega[f(z), \beta, \Delta^*]$. Следовательно, мы получили соотношения (20) также и в случае b).

Таким образом, принцип гармонической меры доказан для любого $z \in D$, такого, что $Z \notin \overline{\delta}$, так как любое z с этим свойством содержится в некоторой области D^*.

Согласно принципу минимума, если в соотношении (20) равенство имеет место в одной точке, то оно имеет место всюду [1]).

Однако можно показать, что функция $f(z)$, для которой в (20) имеет место равенство, не обязательно однолистна [2]).

14. *Замечания.* 1°. Принцип гармонической меры допускает следующую геометрическую интерпретацию: образ множества точек z, для которых

$$\lambda < \omega(z, \alpha, D) < 1 \quad (0 < \lambda < 1),$$

содержится в множестве точек Z, определенном неравенствами

$$\lambda < \omega(Z, \beta, \Delta^*) \leqslant 1.$$

Кроме того, образ множества, для которого $\lambda \leqslant \omega(z, \alpha, D) \leqslant 1$, содержится в множестве $\lambda \leqslant \omega(Z, \beta, \Delta^*) \leqslant 1$. Он совпадает с множеством $\lambda \leqslant \omega(Z, \beta, \Delta^*) \leqslant 1$ только в случае экстремальной функции $f(z)$, для которой в соотношении (20) выполняется равенство.

2°. При применении принципа гармонической меры Δ и δ могут быть взяты произвольно. Однако предпочтительно выбирать эти множества возможно меньшими, как это следует из одного предложения, известного под названием *принципа Карлемана расширения области.*

Пусть D — область, ограниченная конечным числом жордановых кривых C, и пусть α — конечное число дуг, принадлежащих C, а γ — дополнение α относительно C. Обозначим через D' некоторую область, полученную из D при расширении ее через дуги γ. Область D' содержит D и ограничена конечным числом жордановых кривых, состоящих из дуг α и дуг γ', не лежащих внутри области D. Они являются либо полностью внешними по отношению к D, либо частично совпадают с дугами γ. Возможно также, что γ' полностью совпадает с γ, и тогда $D' = D$.

При этих условиях

$$\omega(z, \alpha, D) \leqslant \omega(z, \alpha, D'), \tag{23}$$

причем равенство имеет место только при $D = D'$.

Очевидно, что соотношение (23) можно записать также в виде

$$\omega(z, \gamma, D) \geqslant \omega(z, \gamma', D').$$

---

[1]) Ясно, что в этом случае не существует дуг $\overline{\alpha}$.

[2]) См. Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М., 1941, § 1, п. 34.

Сформулированное предложение проверяется непосредственно. Оно получается также сразу из принципа гармонической меры, примененного к области D при $Z = f(z) = z$, если положить $\Delta = D'$, $\beta = \alpha$, а следовательно, $\Delta^* = D'^*$ [1]).

15. Применим сначала принцип гармонической меры для того, чтобы еще раз установить теорему о двух константах (п. 7).

Пусть D — область, ограниченная конечным числом жордановых кривых C, и пусть γ — множество, состоящее из конечного числа дуг, принадлежащих C.

Если функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в D и если для точки $\zeta \in C$, не являющейся концом дуг γ, имеем

$$\overline{\lim_{z \to \zeta \in \gamma}} |f(z)| \leqslant M \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{z \to \zeta \in C - \gamma}} |f(z)| \leqslant m \quad (m < M),$$

то

$$|f(z)| \leqslant m^{\omega(z,\, C-\gamma,\, D)}\, M^{\omega(z,\, \gamma,\, D)} = m \left(\frac{M}{m}\right)^{\omega(z,\, \gamma,\, D)} \tag{24}$$

в любой точке $z \in D$. Неравенство (24) непосредственно следует из принципа гармонической меры, примененного к области D, функции $f(z)$ и множеству α, состоящему из дуг $C - \gamma$ (в качестве Δ и δ выбираются круги $|Z| < M$ и $|Z| < m$). Тогда β — окружность $|Z| = m$, а Δ^* — круговое кольцо $m < |Z| < M$, и мы имеем

$$\omega(z, \alpha, D) \leqslant \omega(Z, \beta, \Delta^*) = \frac{\log(M/|Z|)}{\log(M/m)},$$

откуда следует, что

$$|Z| \leqslant m \left(\frac{M}{m}\right)^{\omega(z,\, \gamma,\, D)}.$$

16. К лемме Шварца (гл. V, § 2, п. 11) можно сделать следующее дополнение, касающееся поведения функции на границе и принадлежащее К. Лёвнеру [2]).

Пусть функция $Z = f(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$, принимает значения в круге $|Z| < 1$ и $f(0) = 0$.

Если α — дуга окружности $|z| = 1$, такая, что множество предельных значений функции $f(z)$ относительно α принадлежит окружности $|Z| = 1$, то это множество является ду-

---

[1]) Это предложение было использовано при обобщении леммы Карлемана из п. 8.

[2]) Löwner K., Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I, *Math. Ann.*, 89 (1923), 103—121.

гой β *окружности* $|Z| = 1$ [1]), *и длина дуги* β *не меньше длины дуги* α.

Применяя принцип гармонической меры к области $D: |z| < 1$, функции $f(z)$ и дуге α для $\Delta: |Z| < 1$ и β, получаем $\Delta^* = \Delta$ и

$$\omega(z, \alpha, D) \leqslant \omega(Z, \beta, \Delta).$$

Однако, как следует из формулы (9), при $z = 0$, $Z = 0$ значение $\omega(0, \alpha, D)$ равно деленной на 2π радианной мере дуги α, а значение $\omega(0, \beta, \Delta)$ равно деленной на 2π радианной мере β. Таким образом, лемма Лёвнера полностью доказана.

Приведем также прямое доказательство леммы Лёвнера.

Функция $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ голоморфна в круге $|z| < 1$ и $|\varphi(z)| < 1$ в этом круге. При стремлении z к точке дуги α величина $|\varphi(z)|$ стремится, по предположению, к единице. Следовательно, $\varphi(z)$ не обращается в нуль в окрестности α. Функция $\log|\varphi(z)|$ гармонична в окрестности α и равна нулю на α. Она продолжается гармонически через α (гл. II, § 4, п. 18). Отсюда следует, что аналитическая функция $\log\varphi(z)$ также продолжается через α, поэтому это справедливо и для $\varphi(z)$. Таким образом, мы установили, что $\varphi(z)$ голоморфна в окрестности дуги α. Множество $\beta' = \varphi(\alpha)$ является точкой или дугой окружности единичного круга. Если z описывает дугу α в некотором направлении, то $\varphi(z)$ описывает множество β' все время в одном и том же направлении; это следует из свойств конформных отображений и из того, что $|\varphi(z)| < 1$ при $|z| < 1$ [2]). Следовательно, когда z описывает однократно дугу α, $\varphi(z)$ описывает однократно β', сохраняя все время одно и то же направление. Обозначая через ζ_1 и ζ_2 концы α в порядке, соответствующем положительному направлению, получаем

$$\arg\varphi(\zeta_2) - \arg\varphi(\zeta_1) \geqslant 0.$$

---

[1]) Пусть r_n — убывающая последовательность, стремящаяся к нулю ($n = 1, 2, \ldots$), и δ_n — область $\bigcup_{\zeta \in \alpha} [(|z - \zeta| < r_n) \cap (|z| < 1)]$.

Множеством предельных значений является $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(\delta_n)}$; оно не сводится к точке, так как тогда $f(z)$ можно было бы продолжить по непрерывности на α с постоянным значением на этой дуге. Согласно принципу симметрии (том I, гл. V, § 2, п. 15, стр. 169), $f(z)$ была бы голоморфной в окрестности любой внутренней точки ζ дуги α и постоянной на α, а следовательно, по теореме единственности (том I, гл. II, § 2, п. 12, стр. 56) она равнялась бы постоянной с модулем единица. Это противоречит предположению, что $f(0) = 0$. Согласно лемме 2 тома I, гл. IX, § 3, п. 18, стр. 273, множество предельных значений является континуумом.

[2]) См. т. I, гл. III, § 2, п. 11, замечание 2, стр. 88.

Отсюда сразу следует, что

$$\arg f(\zeta_2) - \arg f(\zeta_1) \geqslant \arg \zeta_2 - \arg \zeta_1,$$

а поэтому длина дуги β больше или равна длине дуги α.

Из приведенного рассуждения вытекает, что длина β равна длине α, когда $\varphi(z)$ принимает постоянное значение c, где $|c| = 1$, а $f(z) = cz$ — поворот.

§ 4. АБСОЛЮТНАЯ ГАРМОНИЧЕСКАЯ МЕРА

17. Введенная в п. 1 гармоническая мера зависит не только от множества α, но и от области D и точки z. Р. Неванлинна определил также *абсолютную гармоническую меру*, обращение которой в нуль зависит только от свойств рассматриваемого множества.

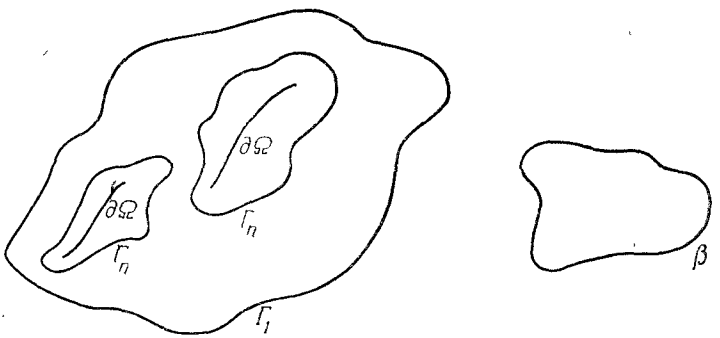

Рис. 28.

Пусть α — замкнутое ограниченное множество на плоскости (z). Дополнение к α является открытым множеством, состоящим из не более чем счетного числа областей. Обозначим через Ω одну из этих областей, если их несколько, или дополнение множества α в противном случае. Область Ω можно аппроксимировать последовательностью областей D_n, ограниченных конечным числом жордановых кривых Γ_n (гл. V, § 4, п. 15).

Рассмотрим жорданову кривую β, принадлежащую вместе со своей внутренностью δ области D_1, и обозначим через (Γ_n, β) подобласть области D_n, внешнюю по отношению к β, а через $\omega(z, \Gamma_n, \beta)$ — гармоническую меру Γ_n относительно этой области (рис. 28). Функция $\omega(z, \Gamma_n, \beta)$ гармонична и ограничена в (Γ_n, β), равна единице на Γ_n и нулю на β.

Любая точка z области $\Omega - \overline{\delta}$ принадлежит некоторой области D_n при достаточно большом n, а функции $\omega(z, \Gamma_n, \beta)$ образуют убы-

вающую последовательность; это следует из принципа расширения области (п. 14, 2°) или проверяется непосредственно.

Действительно, разность $\omega(z, \Gamma_n, \beta) - \omega(z, \Gamma_{n+1}, \beta)$ равна нулю на β и положительна на Γ_n; она гармонична в области (Γ_n, β), и поэтому в этой области

$$\omega(z, \Gamma_n, \beta) > \omega(z, \Gamma_{n+1}, \beta).$$

Рассматриваемая последовательность ограничена снизу нулем; поэтому для любого фиксированного $z \in \Omega - \overline{\delta}$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(z, \Gamma_n, \beta)$. Согласно теореме Гарнака (гл. II, § 1, п. 6), этот предел является гармонической функцией.

Мы обозначим эту предельную функцию через $\omega(z, \alpha, \beta)$ и назовем ее *гармонической мерой* множества α относительно β и Ω в точке z.

18. При помощи того же принципа расширения области доказывается, что $\omega(z, \alpha, \beta)$ *не зависит от рассматриваемого исчерпания области* Ω.

Действительно, пусть D'_m — другое исчерпание Ω, такое, что $\overline{\delta} \subset D'_1$. Для любого n существует такое m, что $D_n \subset D'_m$. Тогда

$$\omega(z, \Gamma_n, \beta) > \omega(z, \Gamma'_m, \beta),$$

а следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \omega(z, \Gamma_n, \beta) \geqslant \lim_{m\to\infty} \omega(z, \Gamma'_m, \beta).$$

Противоположное неравенство устанавливается аналогично.

19. Очевидно, что $\omega(z, \alpha, \beta) \geqslant 0$.

Если $\omega(z, \alpha, \beta) = 0$ в какой-либо одной точке области $\Omega - \overline{\delta}$, то, согласно принципу минимума, гармоническая мера множества α относительно Ω и β равна нулю всюду в $\Omega - \overline{\delta}$.

Мы покажем, что обращение в нуль гармонической меры множества α не зависит не только от исчерпания D_n области Ω и от точки z, но и от Ω и β. Это характеристическое свойство множества α. Этим оправдывается название *абсолютной гармонической меры* α, которое дается функции $\omega(z, \alpha, \beta)$.

20. *Если* $\omega(z, \alpha, \beta) = 0$, *то множество* α *вполне разрывно, и поэтому его дополнение состоит из единственной области* Ω.

Это предложение показывает, что обращение в нуль функции $\omega(z, \alpha, \beta)$ не зависит от выбора Ω. Чтобы доказать его, рассмотрим множество α, содержащее некоторый континуум, и установим неравенство $\omega(z, \alpha, \beta) > 0$ для любой области Ω.

Различаются два случая, смотря по тому, существуют или не существуют точки, внешние по отношению к Ω.

В первом случае, если a — внешняя точка для Ω, а γ — окружность с центром в a, также лежащая во внешности Ω, то, согласно принципу расширения области (п. 14, 2°), имеем

$$\omega(z, \Gamma_n, \beta) > \omega(z, \gamma, \beta) > 0, \tag{25}$$

где через $\omega(z, \gamma, \beta)$ обозначена гармоническая мера γ относительно области (γ, β).

Переходя к пределу, мы получаем из (25) неравенство

$$\omega(z, \alpha, \beta) \geqslant \omega(z, \gamma, \beta) > 0.$$

Если область Ω не имеет внешних точек, то она представляет собой дополнение множества α. Так как α содержит континуум, то существуют две точки a, $b \in \alpha$, связанные континуумом. Однозначная и однолистная в Ω ветвь функции $z' = \sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$ отображает конформно область Ω на область Ω', имеющую внешние точки. Действительно, если z_1' принадлежит Ω', то $-z_1'$ принадлежит дополнению Ω' [1]. Пусть Γ_n' и β' — образы кривых Γ_n и β при этом отображении. Тогда

$$\omega(z, \Gamma_n, \beta) = \omega(z', \Gamma_n', \beta'). \tag{26}$$

Как доказано в первом случае, существует такое число μ [2], что

$$\omega(z', \Gamma_n', \beta') > \mu > 0. \tag{27}$$

Переходя к пределу, получаем из соотношений (26) и (27)

$$\omega(z, \alpha, \beta) \geqslant \mu > 0.$$

21. Докажем теперь, что *если* $\omega(z, \alpha, \beta) = 0$, *то, заменяя кривую* β *другой жордановой кривой* $\beta^* \in \Omega$ [3], *мы снова получаем* $\omega(z, \alpha, \beta^*) = 0$.

Для этого мы рассмотрим последовательно три следующих случая:

a) β^* охватывает β;

b) β охватывает β^*;

c) β и β^* пересекаются или являются внешними по отношению друг к другу.

---

[1]) Этот метод использован при доказательстве теоремы Римана (том I, гл. V, § 3, п. 15, 2°, стр. 169).

[2]) В качестве μ можно взять гармоническую меру границы области Ω' в точке z' относительно β'.

[3]) Согласно п. 20, существует лишь одна область Ω.

В каждом случае мы выбираем область D_1 таким образом, чтобы она содержала обе кривые.

а) Если β^* охватывает β, то, согласно принципу расширения области (п. 14, 2°), имеем

$$\omega(z, \Gamma_n, \beta) \geqslant \omega(z, \Gamma_n, \beta^*).$$

Это неравенство сохраняется при предельном переходе. Следовательно,

$$\omega(z, \alpha, \beta) \geqslant \omega(z, \alpha, \beta^*).$$

Однако, по предположению, $\omega(z, \alpha, \beta) = 0$. С другой стороны, $\omega(z, \alpha, \beta^*) \geqslant 0$. Следовательно, $\omega(z, \alpha, \beta^*) = 0$.

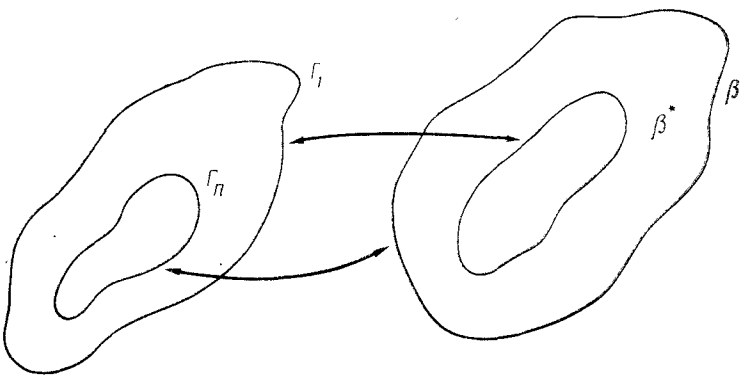

Рис. 29.

b) Предположим теперь, что β охватывает β^* (рис. 29), и введем обозначения

$$\max_{z \in \Gamma_1} \omega(z, \Gamma_n, \beta^*) = \lambda_n,$$

$$\max_{z \in \beta} \omega(z, \Gamma_n, \beta^*) = \mu_n.$$

В области (Γ_n, β) разность

$$\omega(z, \Gamma_n, \beta^*) - \omega(z, \Gamma_n, \beta)$$

является гармонической функцией, равной нулю на Γ_n и не превосходящей μ_n на β. Из принципа максимума вытекает, что во всей области (Γ_n, β), а следовательно, и на Γ_1 эта разность не превосходит μ_n. Однако при любом $\varepsilon > 0$ и при достаточно большом n имеем $\omega(z, \Gamma_n, \beta) < \varepsilon$ на Γ_1. Таким образом, при этих условиях

$$\lambda_n < \mu_n + \varepsilon. \tag{28}$$

Рассмотрим в области (Γ_1, β^*) разность

$$\omega(z, \Gamma_n, \beta^*) - \lambda_n \omega(z, \Gamma_1, \beta^*),$$

которая гармонична, равна нулю на β^* и неположительна на Γ_1. Согласно тому же принципу максимума, в области (Γ_1, β^*) и, в частности, на кривой β имеем

$$\omega(z, \Gamma_n, \beta^*) \leqslant \lambda_n \omega(z, \Gamma_1, \beta^*).$$

Это соотношение имеет место также и в точке (в одной из точек) кривой β, в которой $\omega(z, \Gamma_n, \beta^*)$ принимает наибольшее значение. Если z_0 — такая точка, то

$$\mu_n \leqslant \lambda_n \omega(z_0, \Gamma_1, \beta^*),$$

и так как

$$\omega(z_0, \Gamma_1, \beta^*) \leqslant \mu_1,$$

то имеем неравенство

$$\mu_n \leqslant \lambda_n \mu_1. \tag{29}$$

Из (28) и (29) вытекает, что при достаточно большом n

$$\mu_n \leqslant \mu_1 (\mu_n + \varepsilon),$$

$$\mu_n \leqslant \frac{\varepsilon \mu_1}{1 - \mu_1}.$$

Так как ε — произвольное положительное число, то очевидно, что μ_n стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности; следовательно, $\omega(z, \alpha, \beta^*) = 0$.

c) В последнем случае рассмотрим вспомогательную жорданову кривую β', лежащую в области Ω и охватывающую β и β^*. Согласно случаю a), из равенства $\omega(z, \alpha, \beta) = 0$ вытекает, что $\omega(z, \alpha, \beta') = 0$, а согласно случаю b), имеем отсюда $\omega(z, \alpha, \beta^*) = 0$.

22. Итак, мы поставили в соответствие каждому компактному [1]) множеству α его гармоническую меру относительно Ω и β, а именно $\omega(z, \alpha, \beta)$, и показали, что имеются две возможности, зависящие только от множества α:

либо $\omega(z, \alpha, \beta) = 0$,

либо $\omega(z, \alpha, \beta) > 0$ в Ω.

---

[1]) При помощи линейного преобразования любое замкнутое множество, отличное от всей плоскости, можно перевести в компактное множество. Таким образом, мы можем сопоставить ему гармоническую меру. К тому же результату можно прийти, если применить непосредственно вышеприведенный процесс. Действительно, мы не пользовались ограниченностью α. Гармоническую меру можно определить также для произвольных множеств, пользуясь внутренней и внешней мерами.

Прежде чем установить связь между классами компактных множеств нулевой или положительной гармонической меры и классами компактных множеств нулевой или положительной емкости (гл. V, § 5, п. 32), сделаем некоторые замечания, касающиеся приведенных выше предложений, а также некоторых общих свойств гармонической меры.

В п. 20 мы показали, что множества нулевой гармонической меры вполне разрывны. Обратное предложение не имеет места. Это показывает следующий пример.

При помощи приема Г. Кантора легко построить вполне разрывное совершенное множество положительной меры. Удалим из единичного отрезка открытый интервал, середина которого совпадает с серединой отрезка, а длина меньше $^1/_2$ (и равна, например, $^1/_3$). Оставшееся множество, которое мы обозначим M_1, состоит из двух отрезков: $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Из каждого отрезка удалим открытый интервал, середина которого совпадает с серединой рассматриваемого отрезка и длина которого равна $\frac{1}{2 \cdot 3^2}$; общая длина удаленных интервалов на этом шаге построения равна $\frac{1}{3^2}$. Обозначим через M_2 оставшееся множество, состоящее из 2^2 отрезков. Повторяя эту операцию n раз, мы получаем множество M_n, состоящее из 2^n отрезков и построенное из M_{n-1} путем удаления 2^{n-1} открытых интервалов общей длины $\frac{1}{3^n}$. Очевидно, что множество $M \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ является совершенным вполне разрывным множеством и что мера его равна $^1/_2$, так как общая длина удаленных промежутков равна $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$.

В п. 42 мы покажем, что любое множество положительной линейной меры имеет положительную гармоническую меру. На основании этого результата наше утверждение полностью доказано. Однако, не пользуясь результатами, которые еще не установлены, мы можем при помощи множества M построить вполне разрывное множество положительной гармонической меры.

Отобразим множество M на единичную окружность следующим образом: сначала произведем растяжение отрезка (0, 1) в отрезок $[0, 2\pi]$, а затем, фиксируя на окружности точку P_0, которая соответствует началу отсчета (и началу отрезка), сопоставим каждой точке образа множества M на $[0, 2\pi]$ с абсциссой t точку P на

окружности, такую, что длина дуги P_0P в положительном направлении равна t [1]).

Пусть $\mathfrak{M}$ — вполне разрывное множество на окружности, полученное таким образом. Покажем, что гармоническая мера $\mathfrak{M}$ положительна.

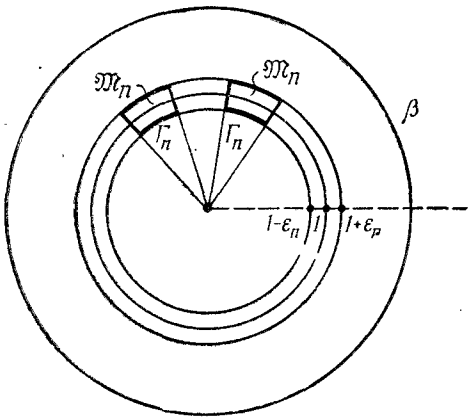

Рис. 30.

Множество $\mathfrak{M}$ можно аппроксимировать на окружности множествами $\mathfrak{M}_n (n = 1, 2, \ldots)$ со свойствами

$$\mathfrak{M}_n \supset \mathfrak{M}_{n+1} \quad \text{и} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M},$$

каждое из которых является объединением конечного числа дуг.

Пусть $\Omega = (z) - \mathfrak{M}$. Возьмем убывающую последовательность чисел ε_n, стремящихся к нулю одновременно с $1/n$, и выберем в качестве кривых Γ_n жордановы кривые, состоящие из отрезков радиусов, проведенных в концы дуг множеств $\mathfrak{M}_n$ и дуг окружностей $|z| = 1 \pm \varepsilon_n$. Кривые Γ_n образуют границы областей D_n, аппроксимирующих Ω. Мы определим гармоническую меру множества $\mathfrak{M}$ в точке $z = 0$, пользуясь в качестве кривой β окружностью $|z| = \rho$, где $\rho > 1 + \varepsilon_1$; таким образом, мы получим

$$\omega(0, \mathfrak{M}, \beta) = \lim_{n \to \infty} \omega(0, \Gamma_n, \beta).$$

[1]) Наглядно соответствие устанавливается следующим образом. Расположим единичный круг таким образом, чтобы он касался в точке P_0 отрезка $[0,2\pi]$ в нуле, и заставим его катиться по отрезку. Каждой точке t отрезка сопоставляем точку P окружности, попадающую в t при этом движении.

Пусть D — единичный круг, C — его окружность, и пусть $\omega(z, \mathfrak{M}_n, D)$ — (относительная) гармоническая мера множества дуг $\mathfrak{M}_n$ в точке z.

Функции $\omega(z, \mathfrak{M}_n, D)$ и $\omega(z, \Gamma_n, \beta)$ гармоничны и ограничены в $D \cap D_n$. Разность

$$\omega(z, \Gamma_n, \beta) - \omega(z, \mathfrak{M}_n, D)$$

положительна на дугах $C - \mathfrak{M}_n$, так как здесь $\omega(z, \Gamma_n, \beta)$ положительна, а $\omega(z, \mathfrak{M}_n, D) = 0$. Она положительна также на дугах из Γ_n, лежащих внутри D, так как на них $\omega(z, \Gamma_n, \beta) = 1$ и $\omega(z, \mathfrak{M}_n, D) < 1$. Применяя обобщенный принцип максимума (гл. II, § 3, п. 14) (так как имеется конечное число исключительных точек, а именно концы дуг из $\mathfrak{M}_n$), получаем в области $D \cap D_n$

$$\omega(z, \Gamma_n, \beta) > \omega(z, \mathfrak{M}_n, D).$$

В точке $z = 0$ это неравенство показывает, что $\omega(z, \Gamma_n, \beta)$ больше, чем деленная на 2π сумма длин дуг $\mathfrak{M}_n$, см. (9). Очевидно, что сумма длин этих дуг больше длины l множества $\mathfrak{M}$, которая положительна (в вышеприведенном случае $l = \pi$).

Переходя к пределу, получаем

$$\omega(0, \mathfrak{M}, \beta) \geqslant \frac{l}{2\pi} > 0,$$

откуда и следует наше утверждение.

23. В этом пункте мы приведем два свойства множеств нулевой гармонической меры.

1°. *Если α — множество нулевой гармонической меры и $\alpha' \subset \alpha$, то гармоническая мера множества α' также равна нулю.*

Пусть Γ_n и Γ_n' — границы областей D_n и D_n', аппроксимирующих соответственно $\Omega = (z) - \alpha$ и $\Omega' = (z) - \alpha'$, причем $D_n' \supset D_n$. Взяв жорданову кривую β, лежащую вместе со своей внутренностью в D_1, получаем

$$\omega(z, \Gamma_n', \beta) \leqslant \omega(z, \Gamma_n, \beta),$$

а следовательно, переходя к пределу,

$$\omega(z, \alpha', \beta) \leqslant \omega(z, \alpha, \beta) = 0.$$

2°. *Если α' и α'' — два множества нулевой гармонической меры, то $\alpha = \alpha' + \alpha''$ — также множество нулевой гармонической меры.*

Пусть $\Omega = \Omega' \cap \Omega''$. Аппроксимирующие области D_n' и D_n'' можно выбрать таким образом, чтобы область $D_n' \cap D_n''$ также была некоторой областью D. Тогда последовательность областей

$D_n = D_n' \cap D_n''$ будет аппроксимировать Ω, а граница Γ_n области D_n будет состоять из дуг, принадлежащих Γ_n', и дуг, принадлежащих Γ_n''.

Рассмотрим функцию $\omega(z, \Gamma_n, \beta) - \omega(z, \Gamma_n', \beta) - \omega(z, \Gamma_n'', \beta)$, где β — жорданова кривая, лежащая вместе со своей внутренностью в D_1. Эта функция гармонична и не положительна в (Γ_n, β). Действительно, на β она равна нулю, а на Γ_n отрицательна, так как $\omega(z, \Gamma_n, \beta) = 1$, и в зависимости от того, принадлежит z множеству Γ_n' или Γ_n'', один из вычитаемых членов равен 1, а другой положителен. Однако для фиксированной точки $z \in \Omega$ и достаточно большого n имеем

$$\omega(z, \Gamma_n', \beta) < \varepsilon \text{ и } \omega(z, \Gamma_n'', \beta) < \varepsilon$$

($\varepsilon > 0$ произвольно). Следовательно,

$$\omega(z, \Gamma_n, \beta) < 2\varepsilon,$$

откуда и вытекает свойство 2°.

24. Если α — множество положительной гармонической меры, то очевидно, что

$$0 < \omega(z, \alpha, \beta) < 1$$

внутри области Ω. На β имеем $\omega(z, \alpha, \beta) = 0$, однако на α не всегда $\omega(z, \alpha, \beta) = 1$. Например, функция $\omega(z, \alpha, \beta)$ продолжается гармонически в изолированную точку множества α, принадлежащую границе Ω (гл. II, § 4, п. 22), и, согласно принципу максимума, не может в этой точке равняться 1. Тем не менее справедливо следующее предложение.

Если функция $\omega(z, \alpha, \beta)$ не равна тождественно нулю, то она ограничена снизу положительным числом в окрестности α:

$$\varliminf_{z \to \zeta \in \alpha} \omega(z, \alpha, \beta) = \mu > 0.$$

Пусть β^* — жорданова кривая, лежащая в D_1 и охватывающая β, и пусть

$$m = \min_{z \in \beta^*} \omega(z, \alpha, \beta);$$

согласно принципу минимума это число положительно. Так как последовательность $\omega(z, \Gamma_n, \beta)$ убывает (п. 17), то для любого номера n имеем

$$\omega(z, \Gamma_n, \beta) > m \tag{30}$$

на β^* и, следовательно, согласно тому же принципу минимума, во всей области (Γ_n, β^*). Однако при стремлении n к бесконечности

область (Γ_n, β^*) стремится к внешней по отношению к β^* подобласти из Ω, и если n достаточно велико, то в каждой точке z этой подобласти справедливо неравенство (30). Переходя к пределу, получаем

$$\omega(z, \alpha, \beta) \geqslant m,$$

а следовательно, $\mu \geqslant m > 0$.

25. Приведем еще одно свойство, характеризующее гармоническую меру, подобно тому как предложение гл. V, § 4, п. 19, характеризует функцию Грина.

Гармоническая мера $\omega(z, \alpha, \beta)$ *в каждой точке* $z \in \Omega$ *равна верхней грани функций* $V(z)$, *гармонических в* $\Omega - \bar{\delta}$, *равных нулю на* β *и меньших единицы в* $\Omega - \bar{\delta}$.

Любая точка $z \in \Omega - \bar{\delta}$ является внутренней для области (Γ_n, β), если n достаточно велико. В этой области

$$\omega(z, \Gamma_n, \beta) > V(z),$$

так как обе функции равны нулю на β и $\omega(z, \Gamma_n, \beta) = 1 > V(z)$ на Γ_n. Переходя к пределу, получаем из (31) соотношение

$$\omega(z, \alpha, \beta) \geqslant V(z).$$

Так как $\omega(z, \alpha, \beta)$ сама является функцией вида $V(z)$, предложение доказано.

26. Установим теперь связь между гармонической мерой границы некоторой области и существованием функции Грина этой области.

Пусть Ω — область с компактной границей α.

Для того чтобы область Ω *обладала функцией Грина, необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела положительную абсолютную гармоническую меру.*

Предложим, что точка $z = 0$ принадлежит области Ω, и рассмотрим последовательность аппроксимирующих областей D_n, такую, что точки $z = 0$ и $z = \infty$ принадлежат D_1.

Для доказательства достаточности сформулированного условия выберем $z = 0$ в качестве полюса и предположим, что Ω не обладает функцией Грина, т. е. что последовательность, состоящая из функций Грина $G_n(z, 0)$ областей D_n с полюсом в $z = 0$, стремится к бесконечности одновременно с n.

Пусть β — окружность $|z| = \rho$, где ρ взято достаточно малым, с тем чтобы окружность β лежала в области D_1, и пусть $\omega(z, \Gamma_n, \beta)$ — гармоническая мера Γ_n по отношению к области (Γ_n, β).

Полагая

$$M_n = \max_{z \in \beta} G_n(z,\ 0)$$

и применяя принцип максимума и минимума [1]), мы заключаем, что в области $(\Gamma_n,\ \beta)$

$$G_n(z,\ 0) \leqslant M_n[1 - \omega(z,\ \Gamma_n,\ \beta)]. \qquad (32)$$

Существует по крайней мере одна точка z_n на β, в которой

$$G_n(z_n,\ 0) = M_n;$$

поэтому неравенство (32) можно записать также в виде

$$1 - \omega(z,\ \Gamma_n,\ \beta) \geqslant \frac{G_n(z, 0)}{G_n(z_n, 0)},$$

откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(z_0,\ \Gamma_n,\ \beta) = 0$ в любой фиксированной точке $z = z_0,\ z_0 \neq \infty$.

Если N_0 — первый номер n, для которого $z_0 \in D_n$, то мы все время будем предполагать, что $n \geqslant N_0$.

Так как M_n стремится к бесконечности одновременно с n, то отношение $\dfrac{G_n(z_0,\ 0)}{G_n(z_n,\ 0)}$ стремится к единице, если разность $G_n(z_0,\ 0) - G_n(z_n,\ 0)$ остается ограниченной при стремлении n к бесконечности.

Рассмотрим разность $G_n(z,\ z_0) - G_n(z,\ z_n)$; согласно определению функции Грина, эта разность может быть представлена в виде

$$G_n(z,\ z_0) - G_n(z,\ z_n) = \log\left|\frac{z - z_n}{z - z_0}\right| + u(z), \qquad (33)$$

где $u(z)$ — функция, гармоническая в D_n и равная $\log\left|\dfrac{\zeta - z_0}{\zeta - z_n}\right|$ в каждой точке $\zeta \in \Gamma_n$. Так как кривые Γ_n лежат по внутренности, а β и z_0 во внешности Γ_N, на конечном расстоянии от Γ_{N_0}, то $\log\left|\dfrac{\zeta - z_0}{\zeta - z_n}\right|$ ограничен на Γ_n независимо от номера n, а следовательно, существует такое число A, что

$$|u(z)| < A$$

в области D_n. Придавая z значение 0, получаем из (33) неравенство

$$|G_n(z_0,\ 0) - G_n(z_n,\ 0)| < \left|\log\frac{\rho}{|z_0|}\right| + A.$$

---

[1]) Действительно, неравенство (32) имеет место и на β и на Γ_n.

Таким образом, несуществование функции Грина области Ω влечет за собой обращение в нуль абсолютной гармонической меры границы этой области.

27. Установим обратное утверждение, т. е. необходимость условия, сформулированного в п. 26.

Рассмотрим снова исчерпание $\{D_n\}$ такое, что D_1 содержит $z=0$, и пусть $z_0 \neq 0$ — точка из D_{N_0}. При любом положительном A область $G_{N_0}(z,\ 0) > A$ содержит внутри начало координат (гл. V, § 1, п. 6). Поэтому существует окрестность начала координат $|z| < \rho$, принадлежащая этой области, для которой z_0 является внешней точкой. Возьмем $|z|=\rho$ в качестве кривой β. Так как последовательность $G_n(z,\ 0)$ возрастает (гл. V, § 4, п. 16), то при любом $n > N_0$ имеем $G_n(z,\ 0) > A$ в круге $|z| \leqslant \rho$. Применяя принцип экстремума, получаем неравенство

$$G_n(z,\ 0) > A\,[1 - \omega(z,\ \Gamma_n,\ \beta)],$$

справедливое во всей области $(\Gamma_n,\ \beta)$, а следовательно, и в z_0.

Если $\omega(z,\ \alpha,\ \beta)=0$, то при достаточно большом n

$$\omega(z_0,\ \Gamma_n,\ \beta) < \frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad G_n(z_0,\ 0) > \frac{A}{2}.$$

Так как A — произвольное положительное число, то последнее неравенство показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(z_0,\ 0)=\infty$, т. е. область Ω не обладает функцией Грина.

§ 5. ПОВЕДЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОКРЕСТНОСТИ МНОЖЕСТВ НУЛЕВОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ

В следующих пунктах мы докажем несколько теорем, показывающих, что во многих задачах теории функций можно пренебрегать множествами нулевой абсолютной гармонической меры. В этом изложении мы сопоставим аналогичные результаты, относящиеся к гармоническим и аналитическим функциям.

28. Обобщение принципа максимума и минимума. *Пусть функция $U(z)$ гармонична и ограничена в некоторой области Ω:*

$$U(z) \leqslant M \text{ при } z \in \Omega.$$

Если во всех точках границы Γ области Ω, за исключением точек некоторого множества α нулевой гармонической меры, имеем

$$\overline{\lim}\, U(z) \leqslant C,$$

то

$$U(z) \leqslant C$$

в Ω.

Предположим, что существует точка $z_0 \in \Omega$, в которой $U(z_0) > C$; рассмотрим точку $z_1 \in \Omega$, в которой $U(z_1) < U(z_0)$, и постоянную C', удовлетворяющую неравенствам

$$U(z_1) < C' < U(z_0) \tag{34}$$

и

$$C' > C.$$

Так как $U(z_1) < C'$, то существует лежащий в Ω замкнутый круг $|z - z_1| \leqslant r$, в котором

$$U(z) < C'.$$

Возьмем окружность этого круга в качестве кривой β и построим гармоническую функцию в области $\Omega \cap (\Gamma_n, \beta)$ [1]):

$$V(z) = U(z) - C - (M - C)\,\omega(z, \Gamma_n, \beta).$$

На окружности β имеем

$$V(z) < C' - C;$$

на Γ_n —

$$V(z) \leqslant 0,$$

а на части Γ, принадлежащей внешности кривых Γ_n, —

$$\overline{\lim}\, V(z) < 0.$$

Применяя принцип максимума (гл. II, § 3, п. 13), мы заключаем, что

$$V(z) < C' - C \tag{35}$$

в $\Omega \cap (\Gamma_n, \beta)$.

Из неравенства (35), написанного для точки z_0, вытекает, что

$$U(z_0) < C' + (M - C)\,\omega(z_0, \Gamma_n, \beta). \tag{36}$$

Однако, по предположению,

$$\lim_{n \to \infty} \omega(z, \Gamma_n, \beta) = 0,$$

поэтому из неравенства (36) следует, что

$$U(z_0) \leqslant C',$$

а это противоречит одному из неравенств (34).

Аналогично обобщается и принцип минимума. Эти результаты широко обобщают теорему, доказанную в гл. II, § 3, п. 14.

---

[1]) Как и в предыдущих пунктах, Γ_n — граница области D_n, принадлежащей исчерпанию области $(z) - \alpha$.

29. *Замечание.* В томе I [1]) мы доказали одну общую теорему об условиях, при которых применим принцип максимума, хотя на границе области Ω существует множество исключительных точек, в которых поведение функций известно лишь частично.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области Ω, и в каждой точке ζ границы этой области, за исключением точек некоторого множества E, имеем

$$\overline{\lim_{z\to\zeta,\ z\in\Omega}} |f(z)| \leqslant C.$$

Предположим, что существует функция $\omega(z)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) *$\omega(z)$ голоморфна в Ω* [2]);
2) $|\omega(z)| < 1$ *в* Ω;
3) $\omega(z) \neq 0$ *в* Ω;
4) *при любом положительном действительном σ имеем*

$$\overline{\lim_{z\to\zeta,\ z\in\Omega}} |\omega(z)|^{\sigma} |f(z)| \leqslant C$$

в любой точке ζ множества E.

При этих условиях

$$|f(z)| \leqslant C$$

во всей области Ω.

Применяя эту теорему, следует выбирать функцию $\omega(z)$ в зависимости от условий, которым удовлетворяют E и $f(z)$ [3]).

30. Обобщение теоремы Коши—Римана. *Если $U(z)$ — функция, гармоническая и ограниченная в области Ω, за исключением множества $\alpha \subset \Omega$ нулевой гармонической меры, то $U(z)$ продолжается гармонически на всю область Ω* [4]).

Обозначим через M число, такое, что

$$|U(z)| < M$$

в $\Omega - \alpha$, и выберем некоторую жорданову кривую β в области Ω, охватывающую множество α.

Рассмотрим функцию $U_{\beta}(z)$, гармоническую во внутренности D кривой β и равную $U(z)$ на β, и докажем, что $U_{\beta}(z) = U(z)$ в $\Omega \cap D$.

---

[1]) Том I, гл. IX, § 2, п. 6, стр. 272.

[2]) Более общо можно предполагать, что $\omega(z)$ неоднозначна, но голоморфна в каждой точке из Ω и что только модуль $|\omega(z)|$ однозначен.

[3]) См. том I, гл. IX, § 2, п. 7—8, стр. 263—264 или Julia G., Principes géométriques d'analyse, Paris, 1932, t. II, ch. I, § 5—15, p. 5—17.

[4]) Lindeberg J. W., Sur l'existence des fonctions d'une variable complexe et des fonctions harmoniques bornées, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **11**, 6 (1918), 27 p. и Myrberg P. J., Über die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche, *Acta Math.*, **61** (1933), 39—79.

Для этого образуем гармоническую в (Γ_n, β) функцию

$$U(z) - U_\beta(z) - 2M\omega(z, \Gamma_n, \beta),$$

которая равна нулю на β и отрицательна на Γ_n. Согласно принципу максимума, имеем

$$U(z) < U_\beta(z) + 2M\omega(z, \Gamma_n, \beta)$$

в (Γ_n, β). Учитывая, что гармоническая мера множества α равна нулю, и переходя к пределу, получаем $U(z) \leqslant U_\beta(z)$ в $\Omega \cap D$.

Противоположное неравенство

$$U(z) \geqslant U_\beta(z)$$

доказывается аналогично путем рассмотрения функции

$$U(z) - U_\beta(z) + 2M\omega(z, \Gamma_n, \beta),$$

которая положительна в (Γ_n, β).

В случае когда множество α состоит из одной точки, приведенный результат переходит в последнюю часть теоремы гл. II, § 6, п. 22. Из первой части этой теоремы вытекает, что ограниченность функции $U(z)$ снизу и сверху необходима. Действительно, если α содержит только одну точку, а функция $U(z)$ ограничена лишь с одной стороны, то она обладает в этой точке логарифмической особенностью.

31. Для справедливости теоремы необходимо также, чтобы гармоническая мера множества α была равна нулю; это показывает следующий пример.

Пусть α — множество положительной гармонической меры, лежащее в области D, ограниченной жордановой кривой β, причем $\Delta = D - \alpha$ также является областью [1]). Функция $\omega(z, \alpha, \beta)$ гармонична и ограничена в Δ. Если бы эта функция продолжалась через α, то она была бы тождественно равна нулю в D, так как она равна нулю на β. Это противоречило бы предположению, что $\omega(z, \alpha, \beta) > 0$ в Δ.

32. Непосредственным следствием доказанной в предыдущих пунктах теоремы является следующее обобщение теоремы Лиувилля (гл. II, § 1, п. 7).

Если α — множество нулевой гармонической меры, а $U(z)$ — гармоническая функция, ограниченная в $(z) - \alpha$, то $U(z)$ постоянна.

---

[1]) Например, можно взять $\alpha = \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — построенное в п. 22 вполне разрывное множество положительной гармонической меры.

33. Рассмотренное обобщение теоремы Коши — Римана характеризует замкнутые множества α на плоскости, в окрестности которых существует ограниченная гармоническая функция, для которой хотя бы часть множества α состоит из особых точек.

Аналогичные исследования проведены также для аналитических функций. Например, в томе I [1]) мы сформулировали следующую теорему, принадлежащую П. Пенлеве, Д. Помпейю и А. Безиковичу.

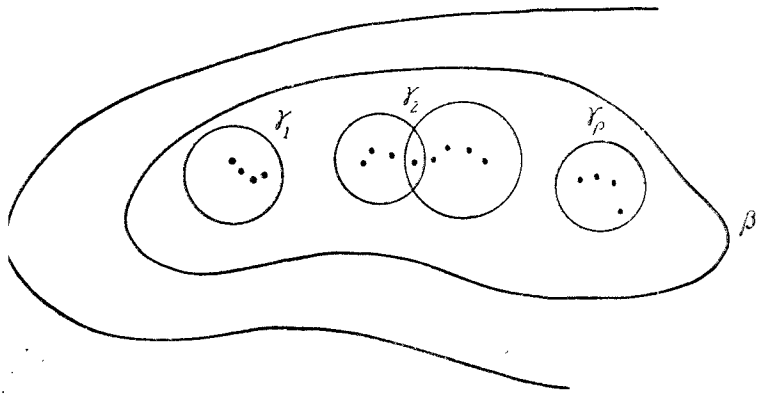

Рис. 31.

Пусть E — множество нулевой линейной меры (длины), содержащееся в области Ω, и пусть функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в $\Omega - E$. Тогда $f(z)$ продолжается аналитически на всю область Ω.

Так как множество E нулевой длины, его можно заключить в конечное число кругов, для которых общая длина окружностей меньше ε, где $\varepsilon > 0$ — произвольно. Обозначим через γ объединение кривых, состоящих из дуг этих окружностей и отделяющих E от границы Ω, а через β — спрямляемую жорданову кривую, лежащую в Ω и охватывающую кривые γ (рис. 31). Применяя интегральную формулу Коши к области, ограниченной кривыми β и γ, получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Интеграл по γ не зависит от ε. Если $|f(z)| < M$ в $\Omega - E$ и если обозначить через l длину кривых γ и через d — расстояние от z

[1]) Том I, гл. IV, § 4, п. 21, стр. 155.

до γ, то

$$\left|\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right|<\frac{M}{d}\,l<\frac{M}{d}\,\varepsilon.$$

При $\varepsilon\to 0$ расстояние d возрастает, а следовательно, интеграл по γ равен нулю и

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

при любом $z\in D-E$, где D — внутренность кривой β. Однако интеграл по β является голоморфной функцией в D [1]), поэтому $f(z)$ аналитически продолжается на множество E.

В п. 42 мы покажем, что множества нулевой гармонической меры имеют всегда нулевую линейную меру, однако существуют множества нулевой линейной меры, гармоническая мера которых положительна.

Если учесть связь между аналитическими и гармоническими функциями, то из предыдущей теоремы вытекает возможность гармонического продолжения на множество E гармонической в $\Omega-E$ функции $U(z)=\operatorname{Re} f(z)$, где функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в $\Omega-E$. Этот результат справедлив в более широких предположениях относительно множества E, чем теорема о гармоническом продолжении, приведенная в п. 30. Однако условия, налагаемые на $U(z)$, здесь более ограничительны. Действительно, не только функция $U(z)$ должна быть ограниченной в $\Omega-E$, но и функция $\tilde{U}(z)$, гармонически сопряженная с $U(z)$, должна быть однозначной и ограниченной в $\Omega-E$, чтобы $f(z)=U(z)+i\tilde{U}(z)$ была голоморфной и ограниченной в этой области. Например, если множество E имеет нулевую линейную меру, но положительную гармоническую меру, то из приведенной теоремы не следует, что $\omega(z, E, \beta)$ продолжается гармонически на множество E (что противоречило бы замечанию п. 31), а следует лишь то, что $\omega(z, E, \beta)$ не однозначна в $\Omega-E$.

34. Полная характеристика замкнутых плоских множеств, для которых справедлива теорема, аналогичная теореме Коши — Римана, дана Л. Альфорсом и А. Бёрлингом [2]).

В произвольной области Ω рассматриваются различные классы функций $\mathscr{F}(\Omega)$ (или, сокращенно, $\mathscr{F}$):

класс $\mathscr{B}$ голоморфных и ограниченных в Ω функций, нормированных условием $|f(z)|\leqslant 1$ в Ω при $f(z)\in\mathscr{B}$;

---

[1]) См. том I, гл. III, § 3, п. 40, стр. 118—120.

[2]) Ahlfors L., and Beurling A., Conformal invariants and function-theoretic null-sets, *Acta Math.*, 83, 1—2 (1950), 101—129.

класс $\mathscr{B}_0$ функций из класса $\mathscr{B}$ со свойством $f(z_0)=0$ в некоторой точке $z_0\in\Omega$;

класс $\mathscr{SB}$ ($\mathscr{SB}_0$) однолистных функций из класса $\mathscr{B}$ (соответственно $\mathscr{B}_0$), дополненный постоянными[1]);

класс $\mathscr{D}$ голоморфных функций с ограниченным интегралом Дирихле

$$\iint\limits_{\Omega}|f'(z)|^2\,dx\,dy\leqslant\pi;$$

класс $\mathscr{E}$ голоморфных функций, обладающих тем свойством, что отображение $\dfrac{1}{f(z)-f(z_0)}$ при $z\in\Omega$ и $f(z)\in\mathscr{E}$ оставляет непокрытой площадь, по крайней мере равную π; соответствующие классы $\mathscr{SD}$, $\mathscr{D}_0$, $\mathscr{SD}_0$, $\mathscr{SE}$, $\mathscr{E}_0$, $\mathscr{SE}_0$.

Каждому классу $\mathscr{F}$ сопоставляется класс *нулевых множеств* $N_{\mathscr{F}}$, образованный замкнутыми множествами E, для которых

$$M_{\mathscr{F}}(z_0,\ \Omega)=\sup_{f\in\mathscr{F}(\Omega)}|f'(z_0)|=0,$$

где z_0 — точка из $(z)-E$, а Ω — связная компонента множества $(z)-E$, содержащая z_0.

Доказывается, что для указанных классов $\mathscr{F}$ обращение в нуль величины $M_{\mathscr{F}}(z_0,\ \Omega)$ в некоторой точке z_0 влечет за собой обращение ее в нуль всюду, а следовательно, в случае $E\in N_{\mathscr{F}}$ класс $\mathscr{F}(\Omega)$ сводится к постоянным.

Это утверждение очевидно для классов однолистных функций. Приведем здесь его доказательство только для класса $\mathscr{B}$, который нас больше всего интересует.

Если $M_{\mathscr{B}}(z,\ \Omega)=0$ в некоторой точке $z_0\in\Omega$, то любая функция $f(z)\in\mathscr{B}(\Omega)$ должна удовлетворять соотношению $f'(z_0)=0$. Предположим, что в классе $\mathscr{B}(\Omega)$ существует функция $f(z)$, не равная тождественно постоянной. В окрестности точки z_0 эта функция имеет разложение вида

$$f(z)=f(z_0)+c_k(z-z_0)^k+c_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\ldots,$$

где $c_k\neq 0$ и $k>1$. Функция

$$F(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)^{k-1}}$$

ограничена, причем $F'(z_0)=c_k\neq 0$, что противоречит нашему предположению. Поэтому $\mathscr{B}(\Omega)$ содержит только постоянные, а $M_{\mathscr{B}}(z,\Omega)$ равно нулю всюду.

---

[1]) Это дополнение делается для получения компактных классов. Класс $\mathscr{SB}_0$, его компактность и величина $M_{\mathscr{SB}_0}(0,\ \Omega)=\sup\limits_{f\in\mathscr{SB}_0}|f'(0)|$ использованы при доказательстве теоремы Римана о конформном отображении (том I, гл. V, § 3, п. 16, стр. 170—172).

Альфорс и Бёрлинг устанавливают [1]) следующие соотношения между различными введенными выше конформными инвариантами $M_{\mathscr{F}}$:

$$M_{\mathscr{B}} = M_{\mathscr{B}_0},\quad M_{\mathscr{D}} = M_{\mathscr{D}_0},\quad M_{\mathscr{S}} = M_{\mathscr{S}_0}$$

и

$$M_{\mathscr{B}} = M_{\mathscr{S}} \geqslant M_{\mathscr{J}\mathscr{S}} = M_{\mathscr{D}} \geqslant M_{\mathscr{J}\mathscr{D}} = M_{\mathscr{J}\mathscr{B}}.$$

Из этих соотношений вытекают включения

$$N_{\mathscr{B}} \subset N_{\mathscr{D}} \subset N_{\mathscr{J}\mathscr{B}}$$

между соответствующими нулевыми множествами.

35. Из сказанного выше относительно продолжения гармонических функций следует, что множества нулевой гармонической меры являются множествами класса $N_{\mathscr{B}}$.

Относительно множеств $N_{\mathscr{B}}$ мы докажем следующую теорему.

Пусть Ω — некоторая область и E — замкнутое подмножество Ω, не разбивающее этой области. Для того чтобы любая функция, голоморфная и ограниченная в $\Omega - E$, была голоморфной в Ω, необходимо и достаточно, чтобы E принадлежало классу $N_{\mathscr{B}}$ [2]).

Поступая так же, как в п. 33, когда множество E было нулевой длины, мы применим интегральную формулу Коши. Пусть β — спрямляемая жорданова кривая из Ω, содержащая множество E в своей внутренности D и отделяющая его от границы области Ω. Аппроксимируем область $D - E$ последовательностью областей D_n, ограниченных кривой β и конечным числом спрямляемых жордановых кривых C_n. Любая функция $f(z)$, голоморфная и ограниченная в $\Omega - E$, представляется в D_n в виде суммы двух функций:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

и

$$f_2(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{37}$$

Функция $f_1(z)$ голоморфна в D, а следовательно, и на E, а $f_2(z)$ голоморфна и ограничена во внешности кривых C_n. Действительно, пусть β^* — жорданова кривая из D, охватывающая C_n,

---

[1]) Ahlfors L., and Beurling A., цит. раб. § 1, p. 105.

[2]) Эта теорема содержится в неявном виде в диссертации П. Пенлеве (Painlevé P., Sur les lignes singulières des fonctions analutiques, *Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse*, 2 (1888), p. B. 1 — B. 130). Альфорс и Бёрлинг называют поэтому множества $N_{\mathscr{B}}$ *множествами Пенлеве.*

и пусть D_n^* — область, ограниченная β^* и C_n. В $\bar{D}_n^*$ — функция $f_2(z)$ ограничена, так как она является разностью двух ограниченных функций $f(z)$ и $f_1(z)$. Во внешности кривой β^* ограниченность $f_2(z)$ вытекает из формулы (37), если использовать оценку модуля интеграла [1]).

Однако, согласно соотношению

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

$f_2(z)$ не зависит от кривых C_n.

Устремляя n к бесконечности, мы заключаем, что функция $f_2(z)$ голоморфна и ограничена в $(z) - E$.

Если множество E принадлежит классу $N_{\mathscr{B}}$, то $f_2(z)$ сводится к постоянной, а следовательно, согласно соотношению (38), $f(z)$ продолжается аналитически на всю область Ω.

Необходимость условия вытекает из определения множеств $N_{\mathscr{B}}$ и из включения

$$\mathscr{B}\{(z) - E\} \subset \mathscr{B}(\Omega - E)\ ^2).$$

Подчиняя голоморфную в $\Omega - E$ функцию $f(z)$ различным условиям, можно получить и другие результаты о возможности аналитического продолжения $f(z)$ на всю область Ω. Например, если $f(z)$ голоморфна и ее интеграл Дирихле ограничен в $\Omega - E$, то она продолжается аналитически на всю область Ω тогда и только тогда, когда E принадлежит классу $N_{\mathscr{D}}$ [3]).

36. В заключение этого раздела приведем широкое обобщение теоремы Лиувилля, принадлежащее Р. Неванлинне.

Если α — множество нулевой гармонической меры, а функция $Z = f(z) \not\equiv$ const. мероморфна в области $\Omega = (z) - \alpha$, то гармоническая мера множества Φ лакунарных [4]) значений функции $f(z)$: $\Phi = (Z) - f(\Omega)$ равна нулю.

Предположим, что гармоническая мера множества Φ положительна и что это множество компактно. Последнее условие всегда выполняется после соответствующего линейного преобразования.

---

[1]) См. том I, гл. III, § 3, п. 26, стр. 102—103.

[2]) Теорема п. 33 показывает, что множества нулевой длины содержатся в классе $N_{\mathscr{B}}$. На прямой или даже на аналитической кривой эти классы множеств совпадают (см. Ahlfors L. and Beurling A., цит. раб., § 6, p. 122, теоремы 11 и 11′). Если множество $E \in N_{\mathscr{B}}$ состоит из особенностей голоморфной в $\Omega - E$ функции $f(z)$, то теорема Вейерштрасса справедлива для любой точки из E, не являющейся полюсом (том I, гл. IV, § 4, п. 21, стр. 155—156).

[3]) Ahlfors L., Beurling A., цит. раб., § 3, p. 112, теорема 5 или Sario L., Über Riemannschen Flächen mit hebbaren Rand, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, seria A I, **50** (1948), 79 p.

[4]) То есть значений, не принимаемых функцией. — *Прим. перев.*

Пусть β — окружность, лежащая в $f(\Omega)$, вместе с ограничиваемым ею кругом, и α^* — множество точек из Ω, образы которых принадлежат этому кругу. По предположению,

$$\omega(Z, \Phi, \beta) > 0$$

в любой точке Z связной компоненты множества $(Z) - \Phi$, содержащей β. Обозначим через Z_0 такую точку. Тогда

$$\omega(Z_0, \Phi, \beta) > 0.$$

Граница связной компоненты множества $\Omega - \alpha^*$, содержащей точку z_0, $f(z_0) = Z_0$ (обозначенной Ω_0), состоит из точек множества α и точек, принадлежащих границе множества α^*, образы которых при $Z = f(z)$ попадают на окружность β. Функция $\omega[f(z), \Phi, \beta]$ гармонична в Ω_0 и равна нулю на части границы области Ω_0, принадлежащей границе α^*. Однако гармоническая мера подмножества множества α, лежащего на границе области Ω_0, равна нулю (п. 23,1°). Применяя обобщенный принцип максимума и минимума (п. 28), заключаем, что

$$\omega[f(z), \Phi, \beta] \equiv 0$$

в Ω_0. В частности, это соотношение имеет место в точке z_0. Следовательно,

$$\omega(Z_0, \Phi, \beta) = 0,$$

что противоречит неравенству (39).

Таким образом, мы доказали, что гармоническая мера множества Φ равна нулю [1]).

37. Другой результат, справедливый в более общих предположениях относительно особого множества, однако дающий более слабые утверждения о лакунарном множестве, установлен Мэри Картрайт [2]).

Пусть функция $Z = f(z)$ мероморфна в области $\Omega - E$, где E — компактное множество нулевой линейной меры, лежащее в Ω и содержащее по крайней мере одну существенно особую точку функции $f(z)$. В этом случае множество лакунарных значе-

---

[1]) При доказательстве существенно использовано то, что Ω совпадает с множеством $(z) - \alpha$, а не является его частью. Только в этом случае можно утверждать, что граница области Ω_0 состоит из точек α и точек, лежащих на границе α^*. Следовательно, теорема Неванлинны является обобщением теоремы Лиувилля, а не большой теоремы Пикара.

[2]) Cartwright Mary, The exceptional values of functions with a nonenumerable set of essential singularities, *Quarterly Journ. of math.*, 8 (1937), 303—307.

ний функции $f(z)$, а именно $\Phi = (Z) - f(\Omega)$, не может иметь положительной плоской меры.

Предположим, что плоская мера множества Φ положительна. Если бы Φ содержало континуум, то при помощи преобразований, аналогичных примененным в п. 20[1]), мы получили бы из $f(z)$ голоморфную и ограниченную в $\Omega - E$ функцию, обладающую на E по крайней мере одной особенностью, что невозможно, так как линейная мера E равна нулю (п. 33).

Следовательно, множество Φ вполне разрывно. Так как его поверхностная мера положительна, оно имеет подмножество Φ^*, совершенное, вполне разрывное и обладающее положительной площадью. При помощи Φ^* можно образовать функцию Помпейю [2])

$$P(Z) = \int\int_{\zeta \in \Phi^*} \frac{d\omega}{\zeta - Z},$$

которая голоморфна в $(Z) - \Phi^*$, непрерывна, а следовательно, ограничена в (Z) и имеет особенности на Φ^*. Функция $P[f(z)]$ голоморфна и ограничена в $\Omega - E$. Согласно теореме п. 33, она голоморфна в Ω. Несмотря на это, при стремлении z к существенно особой точке $z' \in E$ функции $f(z)$ образ $Z = f(z)$ стремится к произвольному заданному значению b. Следовательно, $P[f(z)]$ стремится к произвольному значению $P(b)$, которое принимает функция $P(Z)$, что приводит к противоречию [3]).

38. В этом разделе мы рассмотрели только некоторые теоремы о множествах нулевой абсолютной гармонической меры. Эти множества встречаются, например, при изучении мероморфных функций с ограниченной характеристикой $T(r)$ в единичном круге (гл. I, § 5, п. 19)[4]). Исследователи, принадлежащие преимущественно к японской математической школе, обобщили теорию распределения

---

[1]) Если Φ содержит некоторый круг, то достаточно применить к $f(z)$ линейное преобразование. В противном случае применяется преобразование $\sqrt{\frac{f(z)-p}{f(z)-q}}$, где p и q принадлежат одному и тому же континууму, а затем, если необходимо, еще одно линейное преобразование.

[2]) Pompeiu D., Sur la continuité des fonctions de variables complexes, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, (2), **7** (1905), 264—315.

[3]) Можно также доказать теорему: множество лакунарных значений в $(z) - E$ мероморфной функции $f(z) \not\equiv$ const. принадлежит классу $N_{\mathscr{P}}$, если E принадлежит этому классу (Ahlfors L. and Beurling A., цит. раб., p. 108, теоремы 2 и 2′).

[4]) Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М., 1941, гл. VII, и Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, М., 1948, гл. IV, стр. 272—333.

значений на функции, мероморфные на плоскости, за исключением множества нулевой гармонической меры, и углубили изучение свойств множеств предельных значений мероморфной функции в окрестности такого множества [1]).

§ 6. МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ НУЛЕВОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ

39. В п. 2 мы видели, что множества нулевой гармонической меры вполне разрывны. В настоящем разделе мы исследуем связь между нулевой гармонической мерой и другими мерами. Для этого мы сначала определим *меры Хаусдорфа*.

Пусть $h(r)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция от r ($r \geqslant 0$), для которой $h(0) = 0$. Назовем h-мерой множества α неотрицательное конечное или бесконечное число $m(\alpha, h)$, определенное следующим образом. Покроем α произвольной последовательностью кругов C_ν радиусов $r_\nu \leqslant \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$; $\nu = 1, 2, \ldots$) и обозначим через $m_\varepsilon(\alpha, h) \geqslant 0$ нижнюю грань соответствующих сумм $\sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu)$. Это число возрастает при убывании ε. По определению,

$$m(\alpha, h) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_\varepsilon(\alpha, h).$$

Следовательно,

$$0 \leqslant m(\alpha, h) \leqslant +\infty.$$

Выбирая в качестве $h(r)$ различные функции, мы получаем: линейную меру, если $h(r) = 2\pi r$, плоскую меру, если $h(r) = \pi r^2$, λ-мерную меру, если $h(r) = r^\lambda$ ($\lambda > 0$), и логарифмическую меру, если $h(r) = 1/\log \frac{1}{r}$ ($0 < r < 1$).

Множество α является множеством нулевой h-меры, если при любом $\eta > 0$ его можно покрыть совокупностью кругов C_ν достаточно малых радиусов r_ν, таких, что $\sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu) < \eta$.

---

[1]) Библиографические указания относительно многочисленных работ, опубликованных К. Кунугви, И. Тумура, С. Каметани, М. Цудзи, К. Носиро, Т. Курода, М. Оцука и др., можно найти, например, в работах Noshiro K., Contributions to the theory of the singularities of analytic functions, *Jap. Journ. Math.*, 19 (1948), 299—327, Kuroda T., On the uniform meromorphic functions with set of capacity zero of essential singularities, *Tôhôku Math. Journ.*, seria II, **3,3** (1951), 257—269, и Ohtsuka M., On exceptional values of a meromorphic function, *Nagoya Journ.*, 9 (oct. 1955), 119—121. (См. также Noshiro K., Cluster sets; русский перевод готовится Издат. ин. лит. — *Прим. ред.*)

Если α — множество нулевой λ-мерной меры и если $\lambda_1 > \lambda$, то λ_1-мерная мера α также равна нулю. Множество нулевой логарифмической меры обладает также нулевой λ-мерой.

40. Докажем сначала следующее достаточное условие равенства нулю гармонической меры множества α:

Множество нулевой логарифмической меры обладает также нулевой гармонической мерой.

Пусть α — множество нулевой логарифмической меры. Тогда ли любом $\varepsilon > 0$ можно так покрыть α кругами C_ν, чтобы

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\log \frac{1}{r_\nu}} < \varepsilon. \tag{40}$$

Предположим, что α и $\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu$ содержатся в круге $|z| < \frac{1}{2}$ (общий случай можно свести к этому при помощи линейного преобразования).

Если обозначить через γ и γ_ν постоянные Робена множеств $\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu$ и C_ν, то, применяя неравенство (49) гл.V, получаем

$$\frac{1}{\gamma} \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu}. \tag{41}$$

Однако функция Грина для внешности круга C_ν равна $\log \frac{|z - z_\nu|}{r_\nu}$, а следовательно, $\gamma_\nu = \log \frac{1}{r_\nu}$. Из (40) и (41) вытекает, что

$$\frac{1}{\gamma} < \varepsilon, \quad \text{или} \quad e^{-\gamma} < e^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Емкость множества α не превосходит емкости объединения кругов C_ν. Так как последняя мажорируется величиной $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ при любом $\varepsilon > 0$, то емкость множества α равна нулю. Согласно п. 26, теорема полностью доказана [1]).

41. Если $\int_0 \frac{h(r)}{r}\, dr$ сходится, то любое множество нулевой гармонической меры обладает также нулевой h-мерой. Для дока-

[1]) Сформулированное условие является только достаточным. Можно построить множества нулевой гармонической меры, логарифмическая мера которых положительна. См. Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М., 1941, гл. V, § 6.

зательства этой теоремы мы установим сначала одно вспомогательное предложение (использованное П. Бутру, А. Блохом, А. Картаном, Л. Альфорсом и Р. Неванлинной) относительно функции $h(r)$.

Пусть E — компактное множество, $h(r)$ — непрерывная функция, возрастающая при $r \geqslant 0$, $h(0)=0$ и $h(\infty) \geqslant 1$, и пусть μ — неотрицательное и вполне аддитивное распределение масс, определенное на измеримых по Лебегу подмножествах $e \subset E$; это значит, что для любого не более чем счетного объединения e взаимно непересекающихся множеств e_k имеем

$$\mu(e)=\sum_k \mu(e_k).$$

Предположим, что $\mu(E)=1$, и образуем монотонно возрастающую функцию от r:

$$\mu(r, a)=\mu[(|z-a| \leqslant r) \cap E].$$

В указанных выше предположениях имеем

$$\mu(r, a) \leqslant h(r) \tag{42}$$

при любом a, за возможным исключением некоторого множества значений a, которое можно покрыть последовательностью кругов C_ν радиусом r_ν, таких, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu) \leqslant 6.$$

Рассмотрим функцию

$$\lambda_1(r)=\sup_a \mu(r, a), \tag{43}$$

которая является возрастающей функцией от r.

Если

$$\lambda_1(r) \leqslant h(r)$$

при любом $r \geqslant 0$, то очевидно, что теорема доказана.

В противном случае верхняя грань значений r, для которых

$$\lambda_1(r) \geqslant h(r), \tag{44}$$

равняется конечному числу $r_1 \geqslant 0$, так как $\lambda_1(r) \leqslant 1$ и $h(r)$ принимает значения, большие единицы при достаточно большом r (рис. 32).

Следовательно, неравенство $r \geqslant r_1$ влечет за собой

$$\lambda_1(r) \leqslant h(r). \tag{45}$$

Покажем, что

$$\lambda_1(r_1)=h(r_1). \tag{46}$$

В самом деле, если $r_1 \geqslant 0$, то, каково бы ни было $\eta \geqslant 0$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lambda_1(r_1+\varepsilon) \leqslant h(r_1+\varepsilon) < h(r_1)+\eta,$$

а следовательно,

$$\lambda_1(r_1) \leqslant h(r_1).$$

Однако из второго свойства верхней грани и из неравенства (44) вытекает существование последовательности чисел $\varepsilon_n > 0$, стремящихся к нулю одновременно с $\frac{1}{n}$, таких, что

$$\lambda_1(r_1-\varepsilon_n) > h(r_1-\varepsilon_n) > h(r_1)-\eta,$$

откуда

$$\lambda_1(r_1) = h(r_1).$$

Учитывая (43), можно выбрать такую точку a_1, что

$$\lambda_1(r_1) \leqslant \mu(r_1, a_1)+\frac{1}{2}. \tag{47}$$

Рассмотрим круг $C_1 : |z-a_1| \leqslant r_1$.

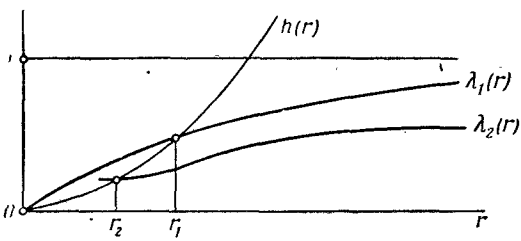

Рис. 32.

Могут представиться два случая: либо $E \subset C_1$, и теорема снова доказана, так как

$$h(r_1) = \lambda_1(r_1) \leqslant 1+\frac{1}{2} < 6, \tag{48}$$

либо множество $E - C_1$ непусто, и мы можем повторить по отношению к нему то же рассуждение, что и по отношению к E.

Образуем функцию

$$\lambda_2(r) = \sup_{a \notin C_1} \mu(r, a),$$

очевидно удовлетворяющую неравенству

$$\lambda_2(r) \leqslant \lambda_1(r). \tag{49}$$

Из (45), (46) и (49) вытекает, что

$$\lambda_2(r) \leqslant h(r) \tag{50}$$

при $r \geqslant r_1$.

Если неравенство (50) выполняется при любом $r \geqslant 0$, то сформулированная теорема доказана, так как соотношение (42) справедливо всюду, за исключением множества, покрываемого C_1, для которого, согласно (48), имеем $h(r_1) < 6$.

В противном случае определим число r_2 (положительное и не превосходящее r_1), равное верхней грани значений r, для которых

$$\lambda_2(r) \geqslant h(r).$$

Снова имеем

$$\lambda_2(r) \leqslant h(r)$$

при $r > r_2$ и

$$\lambda_2(r_2) = h(r_2). \tag{51}$$

Пусть a_2 — точка, лежащая во внешности C_1, в которой

$$\lambda_2(r_2) \leqslant \mu(r_2, a_2) + \frac{1}{2^2}, \tag{52}$$

и пусть C_2 — круг $|z - a_2| \leqslant r_2$.

В этом случае либо $E \subset C_1 + C_2$, и теорема доказана, так как

$$h(r_1) + h(r_2) \leqslant \mu(r_1, a_1) + \frac{1}{2} + \mu(r_2, a_2) + \frac{1}{4} < 6$$

согласно соотношениям (46), (47), (51) и (52)), либо множество $E - (C_1 + C_2)$ непусто и можно повторить рассуждение для этого множества.

Если теорема еще не доказана на $(n-1)$-м шаге рассуждений, то образуем функцию

$$\lambda_n(r) = \sup_{a \notin C_1 + C_2 + \ldots + C_n} \mu(r, a),$$

возрастающую при возрастании r и удовлетворяющую неравенству

$$\lambda_n(r) \leqslant \lambda_{n-1}(r).$$

При $r \geqslant r_{n-1}$ имеем

$$\lambda_n(r) \leqslant h(r).$$

Если это соотношение справедливо при любом r, то теорема доказана, так как $\sum_{\nu=1}^{n-1} h(r_\nu) < 6$.

В противном случае определим r_n как верхнюю грань чисел r, для которых

$$\lambda_n(r) \geqslant h(r).$$

Теперь имеем

$$0 < r_n \leqslant r_{n-1},$$
$$\lambda_n(r) \leqslant h(r) \quad \text{при} \quad r \geqslant r_n,$$
$$\lambda_n(r_n) = h(r_n).$$

Выберем такую точку a_n, лежащую вне кругов $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, что

$$\lambda_n(r_n) \leqslant \mu(r_n, a_n) + \frac{1}{2^n},$$

и круг $C_n: |z - a_n| < r_n$.

Если $E \subset C_1 + C_2 + \ldots + C_n$, то теорема вытекает из неравенства $\sum_{\nu=1}^{n} h(r_\nu) < 6$, которое мы установим ниже, а если $E - (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)$ непусто, то процесс продолжается.

Заметим, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} h(r_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu(r_\nu) \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \mu(r_\nu, a_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2^\nu}.$$

Сумма $\sum_{\nu=1}^{n} \mu(r_\nu, a_\nu)$ равна массе μ множества $E(C_1 + C_2 + \ldots + C_n)$, причем каждый участок считается столько раз, сколько раз его покрывает $\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu$. Так как каждый из C_ν кругов имеет центр, внешний по отношению к остальным кругам [1]), то каждая точка покрыта не более чем пятью кругами [2]).

Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mu(r_\nu, a_\nu) \leqslant 5\mu(E) = 5$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n} h(r_\nu) < 6.$$

Итак, если после конечного числа шагов неравенство (42) имеет место при любом r или круги C_ν покрывают множество E,

---

[1]) Если a_h и a_k — два центра ($h < k$), то a_k лежит вне C_h по построению, а a_h — вне C_k, так как $r_k \leqslant r_h$.

[2]) Соединим произвольную точку z прямолинейными отрезками с центрами покрывающих ее кругов C_ν. Если a_h и a_k — два таких центра, то угол $\angle a_h z a_k$ больше $\frac{\pi}{3}$. Следовательно, z покрыта не больше чем пятью кругами.

то теорема доказана. В противном случае процесс продолжается неограниченно и строится последовательность кругов C_ν, для которых

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu) \leqslant 6.$$

Из сходимости ряда $\sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu)$ вытекает, что $h(r_\nu)$, а следовательно, и r_ν стремятся к нулю одновременно с $\frac{1}{\nu}$.

Докажем, что в этом случае соотношение (42) справедливо для любого $a \notin \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu$ (если такая точка существует). Пусть

$$\lambda(r) = \sup_{a \notin \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu} \mu(r, a).$$

При любом ν имеем

$$\lambda(r) \leqslant \lambda_\nu(r).$$

Если r — произвольное положительное число, то $r_\nu < r$ при достаточно большом ν, а следовательно, $\lambda_\nu(r) \leqslant h(r)$.

Таким образом,

$$\lambda(r) \leqslant h(r),$$

и теорема полностью доказана.

42. В качестве приложения можно доказать следующую теорему.

Если α — компактное множество нулевой гармонической меры, то h-мера α равна нулю при любом $h(r)$, для которого интеграл $\int_0 \frac{h(r)}{r}\,dr$ сходится.

Пусть $\Omega = (z) - \alpha$, D — одна из аппроксимирующих областей, ограниченных конечным числом жордановых кривых Γ, и γ_D — постоянная Робена области D, которая, по предположению, стремится к $+\infty$ при стремлении D к Ω.

Применяя формулу (39) гл. V, п. 29, при любом $z \in \alpha$ можно написать

$$\gamma_D = \int_\Gamma \log \frac{1}{|\zeta - z|}\,d\mu(\zeta), \tag{53}$$

где использовано обозначение $d\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\,dH(\zeta, \infty)$.

Вместо того чтобы интегрировать, заставляя ζ описывать кривую γ, мы рассмотрим интеграл (53) как интеграл Стильтьеса

относительно μ, взяв в качестве переменной $r = |\zeta - z|$, и обозначим

$$\mu(r, z) = \mu[(|\zeta - z| \leqslant r) \cap \Gamma].$$

Получаем

$$\gamma_D = \int_{\mu=0}^{1} \log \frac{1}{r}\, d\mu(r, z) = \int_0^R \log \frac{1}{r} \cdot \frac{d\mu(r, z)}{dr}\, dr, \qquad (54)$$

где в правой части стоит интеграл Лебега [1]), а R — число, выбранное таким образом, чтобы множество $(z) - D$ лежало в круге $|\zeta - z| < R$ (для всех областей D рассматриваемого исчерпания).

Интегрируя по частям, из (54) получаем

$$\gamma_D = \left[\left(\log \frac{1}{r}\right)\mu(r, z)\right]_0^R + \int_0^R \frac{\mu(r, z)}{r}\, dr = \log \frac{1}{R} + \int_0^R \frac{\mu(r, z)}{r}\, dr \text{ [2])}.$$

Применим теперь предложение п. 41 к множеству $E = (z) - D$ и к рассматриваемой здесь массе μ. Из него следует, что для любой функции $h(r)$ из п. 41 и при любом $z \notin \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu$ имеем $\mu(r, z) \leqslant h(r)$ или

$$\gamma_D \leqslant \log \frac{1}{R} + \int_0^R \frac{h(r)}{r}\, dr. \qquad (55)$$

Если $\int_0 \frac{h(r)}{r}\, dr$ сходится, то соотношение (55) не может иметь места, так как оно противоречит тому, что γ_D стремится к ∞; следовательно, $E \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu$. Тем более $\alpha \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu$, где $\sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu) \leqslant 6$.

Пусть ε — произвольное положительное число и $h' = \frac{6h}{\varepsilon}$. Так как интеграл $\int_0 \frac{h'(r)}{r}\, dr$ также сходится, то из вышеприведенного рассуждения, примененного к h', вытекает, что α можно покрыть последовательностью кругов C_ν, для которых $\sum_{\nu=1}^{\infty} h'(r_\nu) \leqslant 6$, или $\sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu) \leqslant \varepsilon$. Это показывает, что h-мера множества α равна нулю.

---

[1]) Функция $\mu(r, z)$ возрастает, однако ее производная может существовать не во всех точках r.

[2]) Действительно, $\mu(R, z) = 1$ и $\mu(0, z) = 0$.

Таким образом, множество α нулевой гармонической меры имеет нулевую λ-мерную меру при любом $\lambda > 0$ [1]), в частности α является множеством нулевой линейной меры.

43. Приведем теперь пример множества нулевой линейной меры, но положительной гармонической меры.

Для этого рассмотрим канторово множество, построенное, как и в п. 22, с той лишь разницей, что на каждом шаге построения удаляются интервалы с суммой длин, равной умноженной на $1 - \frac{1}{p}$ сумме длин интервалов, удаленных на предыдущем шаге ($p > 1$). Таким образом, после n шагов из исходного единичного отрезка $[0, 1]$ получается множество M_n, образованное из 2^n равных между собой отрезков с суммой длин, равной $\frac{1}{p^n}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Канторово множество $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ совершенно, нигде не плотно, и его длина равна нулю. Покажем, что это множество имеет положительную логарифмическую емкость, и применим теорему п. 26.

Будем пользоваться постоянной Робена отрезка $[0, 1]$:

$$\gamma_{[0, 1]} = \log 4,$$

которая определяется при помощи преобразования Жуковского [2]) и следующего замечания.

---

[1]) Доказанную в этом пункте теорему можно применить и к функции

$$h(r) = \frac{1}{\log \frac{1}{r} \log_2 \frac{1}{r} \ldots \left(\log_n \frac{1}{r}\right)^{1+\eta}},$$

где $\log_k$ означает повторенный k раз логарифм, а $\eta > 0$. Однако теорема не применима к логарифмической мере, так как $\int_0 \frac{h(r)}{r}\, dr$ расходится при $h(r) = \frac{1}{\log \frac{1}{r}}$.

[2]) Действительно при преобразовании $w = 2u - 1$ отрезок $[0, 1]$ на плоскости (u) переходит в отрезок $[-1, 1]$ на плоскости (w). Применяя затем преобразование Жуковского $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$ со значением радикала, при котором функция имеет полюс в точке $w = \infty$, мы переводим внешность отрезка $[-1, 1]$ в область $|z| > 1$. Следовательно, функцией Грина отрезка $[0, 1]$ относительно полюса $u = \infty$ служит

$$\log |z| = \log |u| + \log 4 + \varepsilon\left(\frac{1}{u}\right).$$

При линейном преобразовании $z^* = az + b$ постоянные Робена множества E и его образа E^* связаны соотношением

$$\gamma_E = \gamma_{E^*} + \log|a|^{1}).$$

Постоянные Робена γ_n множеств M_n образуют монотонно возрастающую последовательность и стремятся к постоянной Робена γ множества M.

Найдем сначала связь между γ_n и γ_{n-1}, разлагая M_n на подмножества

$$M_n' = M_n \cap \left[0, \frac{1}{2p}\right] \text{ и } M_n'' = M_n \cap \left[1 - \frac{1}{2p}, 1\right],$$

которые подобны M_{n-1} с отношением подобия $1 : 2p$. Согласно сделанному выше замечанию,

$$\gamma(M_n') = \gamma(M_n'') = \gamma_{n-1} + \log 2p. \tag{56}$$

Однако известно (гл. V, (39) и гл. VI, § 1, п. 4), что

$$\gamma(M_n') = \int_{M_n'} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu'(\zeta)$$

и

$$\gamma(M_n'') = \int_{M_n''} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu''(\zeta),$$

где $d\mu'(\zeta)$ (соответственно $d\mu''(\zeta)$) — гармоническая мера бесконечно малой дуги $d\zeta$ в бесконечно удаленной точке относительно внешности M_n' (соответственно M_n'').

Рассмотрим распределение масс $\mu = \frac{1}{2}(\mu' + \mu'')$ и соответствующий потенциал

$$u(z) = \frac{1}{2}\int_{M_n'} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu' + \frac{1}{2}\int_{M_n''} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu''.$$

Если $z \in M_n'$, то

$$u(z) = \frac{\gamma(M_n')}{2} + \frac{1}{2}\int_{M_n''} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu''.$$

---

[1]) Следует учесть, что $G_{(z)-E}(z, \infty) = G_{(z^*)-E^*}(z^*, \infty)$.

Однако при $z \in M_n'$ и $\zeta \in M_n''$

$$1 - \frac{1}{p} \leqslant |\zeta - z| \leqslant 1$$

и

$$\frac{1}{2}\gamma\left(M_n'\right) \leqslant u(z) \leqslant \frac{1}{2}\gamma\left(M_n'\right) + \frac{1}{2}\log\frac{p}{p-1}.$$

Это соотношение справедливо и при $z \in M_n''$ ввиду симметричности множеств M_n' и M_n'' и распределений μ' и μ'' относительно точки $z = \frac{1}{2}$. Принимая во внимание предложение, установленное в гл. V, § 5, п. 29, и соотношение (56), получаем

$$\gamma_{n-1} + \log 2p \leqslant 2\gamma_n \leqslant \gamma_{n-1} + \log 2p + \log\frac{p}{p-1}.$$

Применяя последовательно это соотношение и учитывая, что постоянная Робена отрезка [0,1] равна $\log 4$, получаем неравенства

$$\log 2p + \frac{\log\frac{2}{p}}{2^n} \leqslant \gamma_n \leqslant \log 2p + \frac{\log\frac{2}{p}}{2^n} + \log\frac{p}{p-1},$$

которые показывают, что постоянная Робена γ множества M конечна:

$$\log 2p \leqslant \gamma \leqslant \log\frac{2p^2}{p-1}\ ^{1}).$$

---

[1]) Другие соображения относительно связи между гармонической мерой и h-мерами можно найти, например, в книге: Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М., 1941, гл. V, § 6.

Глава VII

РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

В томе I[1]) мы сопоставили каждой аналитической функции, определенной совокупностью ее тейлоровых, критических алгебраических, полярных и критических полярных элементов, риманову поверхность, на которой эта функция однозначна.

Наиболее глубокие свойства классов аналитических функций отражаются на свойствах соответствующих римановых поверхностей. Понятие римановой поверхности лежит в основе геометрической теории аналитических функций, исключительная плодотворность которой проявляется во многих исследованиях, начиная с гениальной работы Б. Римана, блестяще продолженной Ф. Клейном, А. Пуанкаре, П. Кёбе и другими. Хотя это понятие было введено Риманом еще в 1857 г. при изучении алгебраических функций и их интегралов [2]), понятие римановой поверхности, рассматриваемой независимо от некоторой аналитической функции, смогло получить строгое определение лишь после развития теории абстрактных пространств и топологических многообразий. Общее понятие абстрактной римановой поверхности было впервые строго определено Г. Вейлем [3]).

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ РАССМОТРЕНИЯ

В этом вводном разделе мы кратко изложим топологические понятия, необходимые для определения и изучения римановых поверхностей [4]).

---

[1]) Том I, гл. X, § 2, стр. 292—305.

[2]) Riemann B., Theorie der Abelschen Functionen, *Borchardt's Journ. für reine und angewandte Math.*, 54 (1857); Werke, Leipzig, 1876, S. 81—135.

[3]) Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig — Berlin, 1913 (I-ste Aufl.), 1923 (2-te Aufl.) или Stuttgart, 1955 (3-te Aufl.).

Относительно теории римановых (абстрактных или накрывающих) поверхностей см. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М. — Л., 1950, гл. VIII, § 1—6, стр. 610—673, и Pfluger A., Theorie der Riemannschen Flächen, Berlin, 1957. (См. также Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, М., 1960. — *Прим. ред.*)

[4]) Эти топологические понятия были уже использованы в томе I, гл. X, § 2, п. 9—15, стр. 292—296, а также в гл. V, § 6 этого тома. Топологические пространства можно ввести также при помощи других определений,

1. Пусть S — множество элементов (называемых точками) и $\{v\}$ — семейство подмножеств множества S, которые мы назовем окрестностями точек, принадлежащих S.

Множество S образует (хаусдорфово, или отделимое) *топологическое пространство*, если выполняются следующие условия (аксиомы):

A) для каждой точки $p \in S$ существует по крайней мере одна окрестность v_p этой точки; любая окрестность v_p точки p содержит точку p;

B) если v_p — окрестность точки p, а p' — точка из v_p, то существует окрестность $v_{p'}$ точки p', содержащаяся в v_p;

C) если v_p и v'_p — две окрестности одной и той же точки p, то существует окрестность v''_p этой точки, принадлежащая пересечению $v_p \cap v'_p$;

D) для любых двух различных точек p, $p' \in S$ существуют непересекающиеся окрестности v_p и $v_{p'}$: $v_p \cap v_{p'} = 0$.

Топологическое пространство S *связно*, если его нельзя представить как объединение двух непересекающихся непустых открытых (или замкнутых) относительно S множеств A и B. Топологическое пространство, в котором две произвольные точки можно соединить непрерывным путем, связно.

Если для каждой точки $p \in S$ существует окрестность v_p, гомеоморфная n-мерному евклидову пространству, то топологическое пространство S называется *локально евклидовым пространством размерности n*.

Отделимое, связное, локально евклидово топологическое пространство размерности n называется *n-мерным топологическим многообразием*.

Двумерные многообразия называют также *топологическими поверхностями*, хотя это название применяется и в более узком смысле, как мы увидим в п. 7.

2. В томе I[1]) мы показали, как каждой аналитической функции $w = f(z)$ можно сопоставить двумерное топологическое многообразие V, называемое *топологической моделью* римановой области существования функции $f(z)$. Точками многообразия V являются элементы функции $f(z)$. Произвольная точка $p_0 = e_0$

аналогичных тем, которые мы излагаем в п. 1. См., например, Stoïlow S., Principes topoloques ..., ch. I,sect. I, p. 1—17; Alexandroff P. und Hopf H., Topologie, I, Berlin, 1935; Kuratowski C., Topologie, Monografie matematyczne, t. XX, Warszawa — Wroclaw, 1948; Бурбаки Н. Общая топология, Основные структуры, М., 1958.

[1]) Гл. X, § 2, п. 16, стр. 296.

определяется соответствующим рядом $\sum_{n=\mu}^{\infty} c_n (z-z_0)^{\frac{n}{k}}$ (μ — целое число, k — натуральное число), сходящимся в круге $|z-z_0|<R_0$. Точка z_0 называется центром элемента e_0, а R_0 — его радиусом сходимости. При $z_0=\infty$ элементам соответствуют ряды вида $\sum_{n=\mu}^{\infty} c_n z^{-\frac{n}{k}}$ с кругом сходимости $|z|>R_0$. Окрестность $v_{p_0}=v^r_{p_0}$ точки $p_0 \in V$ определяется как множество элементов, полученных при продолжении e_0 в некотором круге $|z-z_0|<r\leqslant R_0$ (или $|z|>r\geqslant R_0$)[1]).

§ 2. АБСТРАКТНЫЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

Пользуясь вышеприведенными топологическими понятиями, мы определим в настоящем разделе *абстрактную риманову поверхность*, или риманову поверхность в смысле Г. Вейля и Т. Радо.

3. На любом двумерном топологическом многообразии V каждой точке $p_0 \in V$ можно сопоставить окрестность v_{p_0}, которая отображается топологически на единичный круг $|z|<1$ при помощи гомеоморфизма

$$z=t_{p_0}(p), \tag{1}$$

причем

$$t_{p_0}(p_0)=0. \tag{2}$$

Мы назовем эту окрестность, это отображение и соответствующий круг *параметрической окрестностью*, *параметрическим отображением* и *параметрическим кругом*, так как при отображении (1) любая функция $F(p)$, определенная в окрестности v_{p_0}, переходит в функцию комплексного переменного z:

$$F(p)=F\left[t_{p_0}^{-1}(z)\right]=f(z). \tag{3}$$

Переменное z называется *локальным параметром*, ибо такое представление функции $F(p)$ справедливо только локально в окрестности точки p_0. При этом z называется также *локальной униформизирующей*, так как мы увидим в п. 5, что в случае римановой поверхности аналитической функции элементы функции становятся однозначными функциями этого параметра. Параметрические окрестности и отображения называются также *отмеченными* окрестностями и *отмеченными* топологическими отображениями. Параметрический круг, соответствующий точке p_0, мы будем обозначать через K_{p_0}.

---

[1]) Эти окрестности зависят как от p_0, так и от r, и поэтому обозначены через $v^r_{p_0}$.

Абстрактная риманова поверхность — это двумерное многообразие V, для которого параметрические окрестности и соответствующие топологические отображения выбраны так, чтобы имело смысл понятие аналитической функции с сохранением его локальных свойств.

Мы будем исходить из следующего определения аналитической функции.

Однозначная в области $\Omega \subset V$ функция $F(p)$ называется *аналитической, регулярной или голоморфной* в Ω, если при любом $p_0 \in \Omega$ функция (3)

$$f(z) = F\left[t_{p_0}^{-1}(z)\right]$$

голоморфна в окрестности точки $z = 0$ [1]).

Для того чтобы это определение имело смысл независимо от локального параметра z, необходимо и достаточно, чтобы параметрическое отображение $z = t_{p_0}(p)$ было голоморфной функцией параметра z', соответствующего любой точке $p_0' \in v_{p_0}$, в окрестности точки $z' = 0$.

Действительно, функция $z = t_{p_0}(p)$ голоморфна как функция от z в круге K_{p_0}; поэтому если $p_0' \in v_{p_0}$, то функция

$$z = t_{p_0}\left[t_{p_0}^{-1}(z')\right] = t_{p_0}\, t_{p_0'}^{-1}(z') \qquad (4)$$

также должна быть голоморфной функцией от z' в окрестности точки $z' = 0$; это необходимо для того, чтобы аналитичность данной функции не зависела от локального параметра.

Обратно, если функция $z = t_{p_0}\, t_{p_0'}^{-1}(z')$ голоморфна в пересечении окрестностей v_{p_0} и $v_{p_0'}$ при любом $p_0' \in v_{p_0}$, то функция $F(p)$, голоморфная в v_{p_0} относительно параметра z, голоморфна в $v_{p_0} \cap v_{p_0'}$ относительно z'.

Таким образом, если v_{p_0} и $v_{p_0'}$ — две параметрические окрестности на произвольном двумерном топологическом многообразии и если пересечение $v_{p_0} \cap v_{p_0'}$ непусто, то образами этих множеств при параметрических отображениях t_{p_0} и $t_{p_0'}$ являются два открытых

---

[1]) Аналогично определяются функции, мероморфные в области Ω, а также аналитические образы (аналитические функции, рассматриваемые в целом).

множества из K_{p_0} и $K_{p_0'}$, между которыми отображение

$$z = t_{p_1} t_{p_0}^{-1}(z')$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие (рис. 33).

Это соответствие является гомеоморфизмом и называется *соотношением соседства*. Как мы видели, для того чтобы можно было говорить об аналитических функциях на V, необходимо и достаточно, чтобы соотношения соседства были конформными отображениями (голоморфными и взаимно однозначными). Отсюда вытекает следующее определение.

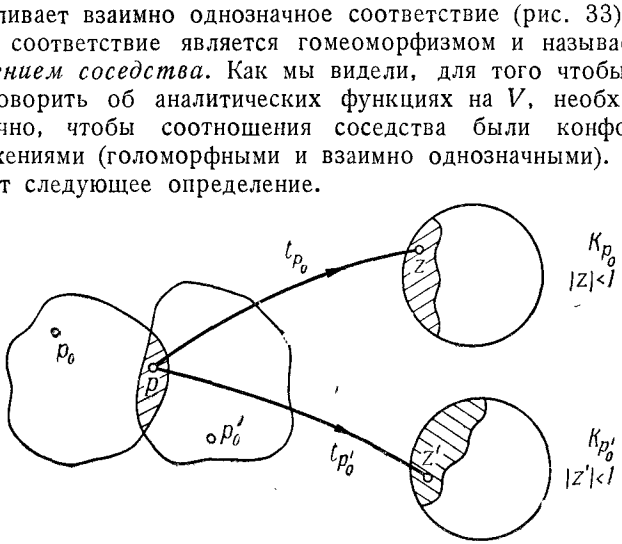

Рис. 33.

Абстрактная риманова поверхность — это двумерное топологическое многообразие, для которого соотношения соседства являются конформными отображениями.

4. На абстрактной римановой поверхности можно ввести *конформную метрику*.

Пусть γ_1 и γ_2 — две простые дуги, исходящие из точки $p \in v_{p_0}$, которые переходят при параметрическом отображении (1) в две простые дуги c_1 и c_2 в круге K_{p_0}, обладающие в точке $z = t_{p_0}(p)$ касательными. Тогда, по определению, угол между дугами γ_1 и γ_2 равен углу между c_1 и c_2.

Угловая метрика, определенная таким образом в каждой параметрической окрестности путем перенесения метрики из параметрического круга при помощи соответствующего топологического отображения, определена однозначно на V.

Действительно, если p принадлежит одновременно параметрической окрестности $v_{p_0'}$ и если при отображении $z' = t_{p_0'}(p)$ дугам γ_1 и γ_2 соответствуют дуги c_1' и c_2', то эти дуги также имеют касательные в точке $z' = t_{p_0'}(p)$ и образуют угол, равный углу

между дугами c_1 и c_2 в K_{p_0}, так как отображение (4) является конформным. Поэтому мера, сопоставляемая углам на V, не зависит от параметрической окрестности.

Можно сказать, что абстрактная риманова поверхность — это двумерное топологическое многообразие, снабженное конформной структурой [1]).

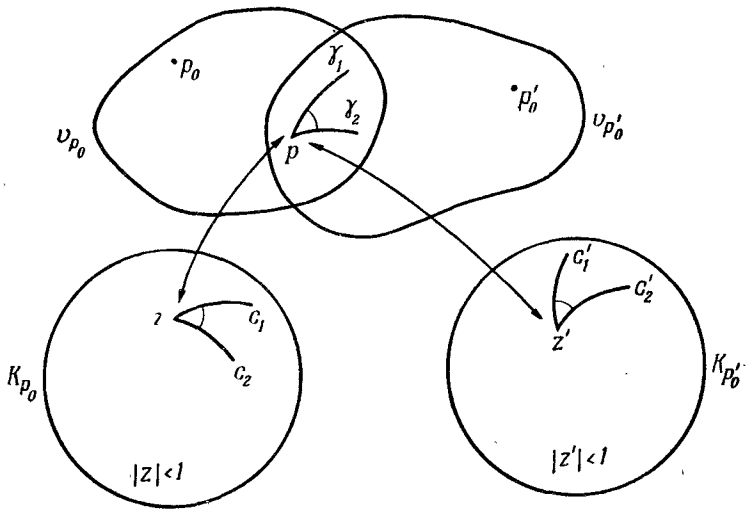

Рис. 34.

5. Приложение: *абстрактная риманова поверхность R_f аналитической функции f.*

Пусть V — топологическая модель римановой области существования аналитической функции $w=f(z)$. Для каждой точки $p_0=e_0\in V$ выберем параметрическую окрестность $v_{p_0}^{R_0}$ и определим соответствующее топологическое отображение на параметрический круг $K_{p_0}:|\zeta|<1$ следующим образом.

а) Если p_0 — вейерштрассов или полярный элемент ($k=1$), то существует топологическое соответствие между точками $p\in v_{p_0}^{R_0}$ и центрами z, $|z-z_0|<R_0$, кругов сходимости этих элементов. Этот круг отображается топологически (и конформно) на $|\zeta|<1$ при помощи преобразования $\zeta=\dfrac{1}{R_0}(z-z_0)$.

[1]) В отличие от произвольного топологического многообразия риманова поверхность обладает определенными метрическими свойствами, которые дают возможность вводить аналитические функции. Впрочем, на римановой поверхности можно всегда определить метрику. См., например, Неванлинна Р., Униформизация, М., 1955, гл. IV, § 3, п. 4.23—4.24 и гл. VIII, § 1, п. 8.8.

Если обозначить через $z = T(p)$ отображение, определенное на V и ставящее в соответствие каждой точке $p \in V$ центр z ее круга сходимости, то отмеченным топологическим отображением будет

$$\zeta = \frac{1}{R_0}[T(p) - T(p_0)]. \tag{5}$$

b) Если p_0 — алгебраический или полярный критический элемент ($k > 1$), то существует топологическое соответствие между $v_{p_0}^{R_0}$ и k-листным кругом, лежащим над $|z - z_0| < R_0$.

Преобразование

$$\zeta = \left[\frac{1}{R_0}(z - z_0)\right]^{\frac{1}{k}}$$

отображает его на круг $|\zeta| < 1$.

Следовательно, в качестве параметрического отображения мы возьмем

$$\zeta = \left\{\frac{1}{R_0}[T(p) - T(p_0)]\right\}^{\frac{1}{k}}. \tag{6}$$

c) В случае $z_0 = \infty$ вышеприведенные отображения соответствующим образом видоизменяются и в качестве локального параметра берется

$$\zeta = \left(\frac{R_0}{z}\right)^{\frac{1}{k}} = \left[\frac{R_0}{T(p)}\right]^{\frac{1}{k}}. \tag{7}$$

Легко убедиться, что соотношения соседства являются конформными отображениями.

6. Две абстрактные римановы поверхности *конформно эквивалентны*, если существует топологическое отображение

$$p' = \varphi(p) \qquad (p \in R \quad \text{и} \quad p' \in R'),$$

при котором параметрические отображения $t_{p_0}(p)$, соответствующие точкам $p_0 \in R$, переходят в аналитические функции, регулярные в окрестностях точек $p_0' = \varphi(p_0) \in R'$ [1]), и обратно.

Тогда $p' = \varphi(p)$ является конформным отображением поверхности R на R', т. е. R и R' не отличаются с точки зрения их конформно инвариантных свойств. Их можно рассматривать как два представления одной и той же абстрактной римановой поверхности.

[1]) Следовательно, функция $z = t_{p_0}\varphi^{-1}t_{p_0'}^{-1}(z')$ должна быть голоморфной в окрестности точки $z' = 0$. Функции, аналитические на R, становятся аналитическими на R', и обратно.

Отметим, что одно и то же топологическое многообразие V может соответствовать двум различным абстрактным римановым поверхностям. Например, евклидову плоскость $V=(z)-\infty$ можно рассматривать как абстрактную риманову поверхность, если для каждой точки $z_0\in V$ взять в качестве локального параметра $\zeta=z-z_0$ (а в качестве параметрической окрестности круг $|z-z_0|<1$). Пусть R — полученная таким образом риманова поверхность. Очевидно, что аналитические функции, однозначные и регулярные на R, — это целые функции. Ту же риманову поверхность мы получим, если взять в качестве локального параметра для точки z_0 любую функцию, голоморфную и однолистную в окрестности этой точки, принимающую в ней значение 0: $\zeta^*=\alpha_1(z-z_0)+\alpha_2(z-z_0)^2+\ldots$ $(\alpha_1\neq 0)$, и отображающую эту окрестность на $|\zeta^*|<1$.

Теперь мы используем то, что многообразия $(z)-\infty$ и $|t|<1$ топологически эквивалентны, но их нельзя конформно отобразить друг на друга[1]). На основании этого мы рассмотрим V как риманову поверхность R', конформно эквивалентную единичному кругу, но отличную с конформной точки зрения от R. Единичный круг $|t|<1$ становится абстрактной римановой поверхностью, если сопоставить, например, каждой точке t_0 параметр $\tau=\dfrac{t-t_0}{1-|t_0|}$ и параметрическую окрестность $|t-t_0|<1-|t_0|$. Применяя гомеоморфизм

$$z=\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}|t|\right)e^{i\arg t}, \tag{8}$$

отображающий топологически $|t|<1$ на $(z)-\infty$, мы определим R', взяв в качестве параметрической окрестности точки z_0, соответствующей t_0, образ при отображении (8) круга $|t-t_0|<1-|t_0|$ и в качестве параметра $\tau=\dfrac{t(z)-t_0}{1-|t_0|}$. Римановы поверхности R и R', соответствующие одному и тому же многообразию V, не являются конформно эквивалентными. Действительно, в случае эквивалентности должно было бы существовать конформное отображение $z'=\varphi(z)$ поверхности R на R', и так как (8) является конформным отображением R' на $|t|<1$, то отображение $t=\dfrac{2}{\pi}[\operatorname{arctg}|\varphi(z)|]\,e^{i\arg z}$ было бы ограниченной целой функцией.

§ 3. ТРИАНГУЛИРУЕМЫЕ И ОРИЕНТИРУЕМЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

7. Многообразия со счетной базой. Триангулируемость. Топологическое пространство допускает *счетную базу окрестностей*, если существует *счетное множество окрестностей*

[1]) Том I, гл. V, § 3, п. 14, стр. 169.

$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$, такое, что любая окрестность v является объединением окрестностей v_n:

$$v = \bigcup_i v_{n_i}.$$

Т. Радо доказал *существование счетной базы окрестностей для любой абстрактной римановой поверхности* [1]).

Однако это доказательство основано на теории униформизации [2]). Т. Радо показал, что двумерные многообразия со счетной базой характеризуются возможностью их триангуляции.

Жорданова область T на двумерном многообразии V называется *топологическим треугольником*, если ей сопоставляется топологическое отображение τ на плоский треугольник, причем на границе T отмечаются три точки, соответствующие вершинам треугольника на плоскости. Эти точки называются *вершинами* T. Простые дуги на границе T с концами в этих вершинах называются *сторонами* T. Отображение τ, соответствующее треугольнику T, определено лишь с точностью до инвариантности вершин этого треугольника. В определении T можно заменить τ любым другим топологическим отображением, сопоставляющим T те же вершины [3]).

Двумерное многообразие V называется *триангулируемым*, если на V существует не более чем счетное множество треугольников T_i, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\sum_i T_i = V$;

2) если $i \neq j$, то пересечением треугольников T_i и T_j является либо пустое множество, либо общая сторона, либо общая вершина;

3) любая точка на V имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом треугольников T_i.

Треугольники T_i образуют *триангуляцию* многообразия V. Очевидно, что любое триангулируемое многообразие допускает

---

[1]) Radó T., Über den Begriff der Riemannschen Fläche, *Acta Szeged*, II (1925), 101—121.

[2]) Р. Неванлинна устанавливает теорему Радо при помощи теорем существования гармонических функций на абстрактных римановых поверхностях, вводит метрику на поверхности и применяет следующий критерий П. С. Александрова: метризуемое двумерное топологическое многообразие, на котором существует счетное всюду плотное множество точек, обладает счетной базой окрестностей. См. Униформизация, гл. II, § 1, 2.20, стр. 57—58 и гл. IV, § 3, стр. 163—166. См. также Boboc N., Sur la caractérisation des variétés différentiables à base dénombrable, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, XXIV, 4 (1958), 391—395.

[3]) В комбинаторной топологии топологические треугольники называются двумерными топологическими симплексами, стороны — одномерными симплексами, а вершины — нульмерными симплексами. См., например, Alexandroff P. und Hopf H., Topologie I, или Александров П. С., Комбинаторная топология, М. — Л., 1947.

бесконечное число триангуляций. Если разбить треугольники T_i некоторой триангуляции на меньшие треугольники, удовлетворяющие условиям 1)—3), то мы получим подразделение исходной триангуляции.

Группируя надлежащим образом треугольники подразделения так, чтобы снова удовлетворялись условия 1)—3), можно получить триангуляцию, не являющуюся подразделением исходной. В некоторых вопросах важно, чтобы любой треугольник триангуляции содержался в некоторой параметрической окрестности; этого всегда можно добиться при помощи подходящего подразделения.

Пользуясь тем, что двумерное многообразие локально евклидово, и условием 3), можно получить такие следствия:

1°. Любая точка на V, не принадлежащая никакой стороне, принадлежит единственному треугольнику.

2°. Любая сторона является общей стороной в точности двух треугольников.

3°. Любая вершина является вершиной конечного числа треугольников $T_1, \ldots, T_k$, каждый треугольник T_i имеет единственную общую сторону с T_{i+1}, T_k имеет одну общую сторону с T_1.

Т. Радо доказал следующий признак триангулируемости [1]).

Для того чтобы двумерное топологическое многообразие V было триангулируемым, необходимо и достаточно, чтобы существовало покрытие многообразия V не более чем счетным семейством открытых множеств G, гомеоморфных евклидовой плоскости, т. е. чтобы V допускало счетную базу окрестностей.

Существуют двумерные многообразия, не имеющие счетной базы. Таким примером является многообразие Прюфера [2]).

Двумерное многообразие со счетной базой (триангулируемое) называется также *топологической поверхностью*. В определении абстрактных римановых поверхностей, данном Г. Вейлем, рассматриваются топологические поверхности в этом смысле. Согласно Вейлю, абстрактная риманова поверхность — это топологическая поверхность (триангулируемое многообразие) с конформными соотношениями соседства. Значение мемуара Радо состоит в выделении нетриангулируемых двумерных многообразий и в доказательстве того, что двумерные многообразия с конформными соотношениями соседства всегда триангулируемы, а следовательно, в упрощении определения абстрактных римановых поверхностей.

---

[1]) Radó T., Über den Begriff der Riemannschen Fläche, цит. раб., или Stoïlow S., Principes topologiques ..., ch. III, sect. II, § 4, p. 73—75.

[2]) Radó T., Über den Begriff der Riemannschen Fläche, цит. раб., или Stoïlow S., Principes topologiques ... ch. III, sect. II, § 3, p. 71—73.

(См. также Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, М., 1960, стр. 68. — *Прим. ред.*)

В нижеследующем мы будем называть поверхностью триангулируемое двумерное многообразие.

Топологическое многообразие называется *замкнутым* или *компактным*, если любое бесконечное множество его точек обладает по крайней мере одной предельной точкой на многообразии. В противном случае многообразие *открыто*. Компактные триангулируемые поверхности отличаются тем, что их триангуляции содержат конечное число треугольников.

8. Ориентируемые поверхности. Двумерное топологическое многообразие называется *ориентируемым*, если параметрические отображения можно выбрать так, чтобы соотношения соседства сохраняли ориентацию. Это определение имеет смысл, так как соотношения соседства топологически отображают плоские области на плоские области, а на плоскости ориентация областей имеет смысл.

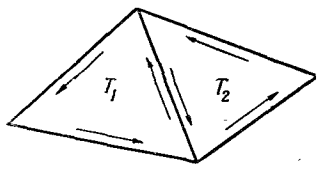

Рис. 35.

Исходя из этого определения, мы сразу получаем, что *абстрактная риманова поверхность ориентируема.*

Для поверхностей ориентируемость можно определить при помощи триангуляции.

Треугольник T поверхности V ориентирован, если зафиксирован порядок следования вершин, определенный с точностью до четной перестановки. Следовательно, любой треугольник обладает двумя ориентациями.

Сторона ориентирована, если установлены ее начало и конец.

Пусть ABC — вершины треугольника T. Ориентированный треугольник ABC *индуцирует* на каждой стороне вполне определенную ориентацию: AB, BC и CA.

Треугольники T_1 и T_2, имеющие общую сторону, называются *когерентно* ориентированными, если их ориентации индуцируют на общей стороне противоположные ориентации (рис. 35).

Триангулируемое многообразие называется ориентируемым, если ориентация одного треугольника этого многообразия приводит единственным образом к ориентации всех остальных треугольников триангуляции путем перенесения ориентации от каждого треугольника T_i к соседним треугольникам T_i'.

Можно показать, что ориентируемая поверхность в смысле локального определения является ориентируемой и в смысле этого определения и обратно [1]).

[1]) См., например, Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, Kap. I, § 10, S. 57—67, или Неванлинна Р., Униформизация, гл. II, § 5, 2.95—2.99, стр. 105—109.

Конечная последовательность треугольников $T_1, T_2, \ldots, T_n$ некоторой триангуляции поверхности V с тем свойством, что T_i и $T_{i+1} (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ имеют общую сторону, образует *цепь*; цепь, в которой T_n также имеет общую сторону с T_1, называется циклом треугольников. Очевидно, что поверхность V ориентируема тогда и только тогда, когда любой цикл треугольников сохраняет ориентацию (т. е. ориентация треугольника T_i, перенесенная вдоль цикла, совпадает в T_i с исходной ориентацией).

Простая замкнутая кривая Γ на поверхности V называется *двубережной*, если существует такая окрестность G этой кривой (открытая область на V, содержащая Γ), что множество $G - \Gamma$ состоит из двух различных областей. В противном случае кривая называется *однобережной*. При помощи этих понятий устанавливается следующий признак, который можно использовать как другое определение ориентируемости[1]). Для того чтобы поверхность была ориентируемой, необходимо и достаточно, чтобы любая простая замкнутая кривая на этой поверхности была двубережной.

Примерами неориентируемых поверхностей являются проективная плоскость (замкнутая поверхность) и лист Мёбиуса (открытая поверхность).

§ 4. НАКРЫВАЮЩИЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ. ВНУТРЕННИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

9. В определении абстрактной римановой поверхности, приведенном в § 2, мы пользовались только введением на многообразии конформной метрики, которая дала нам возможность говорить об аналитических функциях. Понятие абстрактной римановой поверхности удобно главным образом в теории конформных отображений и униформизации. Однако в других вопросах теории функций, например в теории распределения значений, необходимо учитывать также свойства накрытия, определяемого римановыми поверхностями.

Вообще говоря, накрывающая поверхность определяется в топологии следующим образом.

Пусть V и V_0 — два топологических пространства и

$$T(p) = p_0 \qquad (p \in V \quad \text{и} \quad p_0 \in V_0)$$

— непрерывное отображение V в V_0.

Рассмотрим множество M пар элементов $[p, T(p)] = (p, p_0)$, взаимно однозначно соответствующих точкам $p \in V$. Если окрестностями точки $(p, p_0) \in M$ считать подмножества из M, соответ-

[1]) Stoïlow S., Principes topologiques ..., ch. II, sect. I, § 3—4, p. 65—68 и sect. II, § 1—2, p. 68—71.

ствующие окрестностям точки $p \in V$, то множество M становится топологическим пространством, гомеоморфным V; оно называется *накрывающим пространством пространства* V_0, *соответствующим отображению* T, и обозначается через $(V_0)_T^V$. Топологические свойства $(V_0)_T^V$ не отличаются от свойств V, которое называется топологической моделью накрывающего пространства. Однако $(V_0)_T^V$ — это не только топологическое пространство. Каждой точке $(p, p_0) \in (V_0)_T^V$ соответствует вполне определенная точка p_0 — *проекция*, или *след*, этой точки на V_0. Поэтому накрывающее пространство — это топологическое пространство, к которому присоединяется непрерывное отображение в другое пространство (накрываемое пространство).

Если между топологическими пространствами V и V' существует топологическое соответствие

$$p = h(p')$$

и если положить

$$p_0 = T'(p') = T[h(p')],$$

то накрывающие пространства $(V_0)_T^V$ и $(V_0)_T^{V'}$ не отличаются друг от друга и считаются двумя различными представлениями одного и того же накрывающего пространства. Если V и V_0 — двумерные многообразия или поверхности, то пространство $(V_0)_T^V$ называется *накрывающим многообразием*, соответственно *накрывающей поверхностью*.

10. Понятие римановой накрывающей поверхности определяется строго[1]) путем топологической характеристики непрерывного отображения, осуществляющего накрытие. Это определение позволяет выделять листы и точки ветвления, не прибегая к триангуляции.

Римановой накрывающей поверхностью (*или римановой поверхностью наложения*) *называется двумерное топологическое многообразие* V, *для которого существует внутреннее отображение* $z = T(p)$ $(p \in V)$ *этого многообразия в комплексную плоскость* (*сферу*) (z)[2]).

Внутреннее отображение[3]) двумерного топологического многообразия V в другое двумерное многообразие V_0 — это непрерывное отображение V в V_0, обладающее следующими свойствами:

---

[1]) Stoïlow, Principes topologiques .... Эта монография охватывает результаты ряда работ, опубликованных автором в 1926—1936 гг.

[2]) Stoïlow S., Principes topologiques ..., ch. V, sect. III, § 4, p. 119,

[3]) Stoïlow S., Principes topologiques ... ch. V, sect. I, p. 102—107, или том I, гл. II, § 3, п. 25—26, стр. 70—72.

1) любое открытое множество на V переходит в открытое множество на V_0;

2) никакой континуум из V не переходит в единственную точку из V_0.

В томе I мы показали, что любая аналитическая функция дает внутреннее отображение [1]). Кроме того, любое топологическое отображение является внутренним [2]).

Согласно приведенному определению, *риманова накрывающая поверхность — это накрывающая поверхность сферы при помощи внутреннего отображения.*

Мы будем обозначать эту накрывающую поверхность так:

$$R = (z)_T^V.$$

В соответствии с данным в п. 9 определением эквивалентности накрывающих поверхностей две римановы накрывающие поверхности $R = (z)_T^V$ и $R' = (z)_{T'}^{V'}$ рассматриваются как тождественные, если существует топологическое отображение $p' = \varphi(p)$ поверхности V на V', при котором соответствующие точки обладают одной и той же проекцией

$$T(p) = T'[\varphi(p)].$$

11. Приложение: *риманова накрывающая поверхность аналитической функции* $w = f(z)$. Если V — топологическая модель римановой области существования функции f, то отображение T, сопоставляющее каждому элементу $e_0 \in V$ центр z_0 его круга сходимости: $T(e_0) = z_0$, является внутренним, а риманова поверхность функции $w = f(z)$ — это риманова накрывающая поверхность $(z)_T^V$.

12. Риманова накрывающая поверхность была определена при помощи свойства многообразия V в целом, а именно предполагалось существование внутреннего отображения V в сферу. Это свойство является топологическим и не использует конформных отображений. Несмотря на это, на любой римановой накрывающей можно ввести конформную метрику, если при помощи отображения T перенести на V конформную метрику сферы. Для этого мы сначала исследуем локальные свойства внутренних отображений [3]),

---

[1]) Stoïlow S., Principes topologiques ..., ch. V, sect. I, p. 102—107, или том I, гл. II, § 3, п. 25—26, стр. 70—72.

[2]) Это утверждение является следствием теоремы Броуэра об инвариантности открытых множеств при топологическом отображении многообразия в другое многообразие той же размерности. См., например, Stoïlow S., Principes topologiques ..., ch. I, sect. II, p. 17—29.

[3]) Stoïlow S., Sur les transformations continues et la topologie des fonctions analytiques, *Ann. Ec. Norm.*, seria 3, **45** (1928), 347—382, или Principes topologiques ..., ch. V, sect. II, p. 108—117.

т. е. такие свойства, которые относятся только к окрестности некоторой точки и поведению отображения в этой окрестности. Так как двумерные топологические многообразия локально евклидовы, для локального исследования внутренних отображений можно ограничиться случаем, когда оба многообразия являются евклидовыми плоскостями. Итак, предположим, что V и V_0 — евклидовы плоскости, и рассмотрим внутреннее отображение V в V_0:

$$P = T(p) \qquad (p \in V \text{ и } P \in V_0). \tag{9}$$

Пусть D — область на V_0 без внутренней границы и $A \in D$, $a \in V$ — такие точки, что $T(a) = A$.

Максимальной областью замкнутой области $\overline{D}$ относительно a мы назовем замыкание множества точек $p \in V$, которые можно соединить с a при помощи непрерывного пути, такого, что его образ при отображении T лежит в D. Эту область мы будем обозначать $(\overline{D}, a)$.

Образ области $(\overline{D}, a)$ при отображении T содержится, очевидно, в $\overline{D}$. Если p — внутренняя точка $(\overline{D}, a)$, то $P = T(p)$ — внутренняя точка $\overline{D}$, а если p лежит на границе $(\overline{D}, a)$, то P является граничной точкой $\overline{D}$.

Нормальной областью многообразия V для отображения (9) *назовем любую замкнутую* и компактную область $\delta \subset V$, образы всех граничных точек которой при отображении (9) лежат на границе множества $T(\delta)$. Это множество представляет собой замкнутую компактную область на V_0.

1°. Существует тесная связь между максимальными областями и нормальными областями: *нормальные области — это компактные максимальные области, и обратно.*

Действительно,

$$\delta = [T(\delta), a]$$

для любой внутренней точки a области δ.

С другой стороны, если (Δ, a) — максимальная область некоторой замкнутой области, Δ [1]) — замкнута и компактна в V, то ее образ также замкнут и компактен в V_0. Поэтому он совпадает со всей областью Δ и (Δ, a) удовлетворяет условиям определения нормальной области.

2°. *Если* δ *— нормальная область,* $\Delta = T(\delta)$, a *— внутренняя точка* δ *и* Δ' *— замкнутая область, заключенная в* Δ *и содержащая точку* $A = T(a)$, *то область* (Δ', a) *нормальна.*

---

[1]) При построении максимальной области (Δ, a) замкнутая область Δ рассматривается как замыкание своей внутренности.

3°. *Две максимальные области, соответствующие одной и той же замкнутой области, либо совпадают, либо не имеют общих внутренних точек*[1]).

4°. *В любой окрестности точки $a \in V$ можно найти нормальную область, содержащую a внутри.*

Предложения, сформулированные выше для максимальных и нормальных областей, следуют из их определений и из определения внутренних отображений. Рассмотрим подробнее доказательство предложения 4°.

Для этого возьмем в окрестности точки a простую замкнутую кривую γ, охватывающую эту точку и не проходящую через такие точки p, для которых $T(p) = T(a) = A$. Согласно условию (2) определения внутренних отображений (п. 10), множество точек p, удовлетворяющих этому равенству, вполне разрывно. Возможность построения γ является классическим свойством вполне разрывных множеств[2]). Пусть ρ — минимум расстояния от $T(\gamma)$ до A. Если взять внутри круга радиуса ρ с центром в A замкнутую область Δ, то область (Δ, a) нормальна, так как она компактна (предложение 1°). Действительно, (Δ, a) лежит во внутренности кривой γ.

13. Установим теперь две леммы, играющие особенно важную роль при изучении внутренних отображений.

Если задана нормальная область δ отображения (9) *и $\Delta = T(\delta)$, то каждой простой дуге Σ, лежащей вместе со своими концами A и B внутри Δ, и каждой точке $a \in \delta$, принадлежащей прообразу точки A ($T(a) = A$), соответствует простая дуга σ, исходящая из a и содержащаяся вместе со своими концами внутри δ, такая, что $T(\sigma) = \Sigma$ и на σ отображение* (9) *топологическое.*

---

[1]) Две различные максимальные области могут обладать общими граничными точками. Например, это так в случае $\Delta = (|z| > 1) \cap (|z - a| < a + 1)$

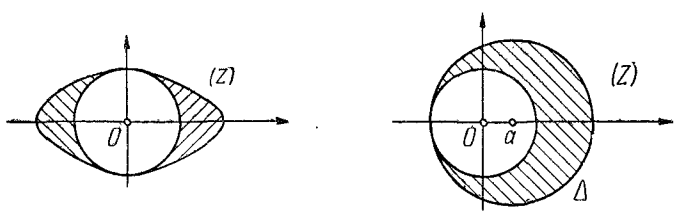

Рис. 36.

($a > 0$) и $Z = z^2$ (рис. 36). Максимальные области на плоскости (z) заштрихованы в противоположных направлениях.

[2]) См., например, Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного, М., 1948, § 43, стр. 203. — *Прим. перев.*

Пусть $[0, 1]$ — промежуток изменения параметра t, определяющего положение точки $P(t)$ на Σ: $P(0)=A$ и $P(1)=B$. Разобьем этот промежуток на 2^n равных промежутков и введем обозначение $A_n^i = P\left(\frac{i}{2^n}\right)$ $(i=0, 1, \ldots, 2^n;\ A_n^0 = A$ и $A_n^{2^n} = B)$. Заключим каждую дугу $A_n^{i-1}A_n^i$ из Σ $(i=1, 2, \ldots, 2^n)$ во внутренность замкнутой области Δ_n^i так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $\Delta_n^i \subset \Delta$;

2) $\Delta_n^i \cap \Delta_n^j = 0$ при $|i-j| \geqslant 2$;

3) $\Delta_{n+1}^i \subset \Delta_n^{i'}$, если аналогичное включение справедливо для соответствующих дуг на Σ;

4) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i}^{2^n}\Delta_n^i\right) = \Sigma$.

Для того чтобы получить область Δ_n^i, возьмем, например, круг достаточно малого радиуса ρ_n и заставим его центр описывать дугу Σ. При $n \to \infty$ радиус ρ_n должен стремиться к нулю убывая.

Множество областей Δ_n^i, соответствующих одному и тому же n, назовем *цепочкой* $\{\Delta_n^i\}$. Каждой цепочке $\{\Delta_n^i\}$ сопоставим цепочку областей $\delta_n^i \subset \delta_n$, так чтобы δ_n^i была максимальной областью для Δ_n^i. Для этого построим сначала $\delta_n^1 = (\Delta_n^1, a)$. Так как область δ_n^1 нормальна, то $T(\delta_n^1) = \Delta_n^1$. Следовательно, существует хотя бы одна точка a_n^1, для которой $T(a_n^1) = A_n^1$. Множество точек a_n^1, являющихся прообразами A_n^1 в δ_n^1, замкнуто и компактно. Так как отображение T непрерывно, то для каждой точки a_n^1 существует окрестность, образ которой принадлежит $\Delta_n^1 \cap \Delta_n^2$. Следовательно, каждую из точек a_n^1 можно заключить в некоторый круг γ так, чтобы $T(\gamma) \subset \Delta_n^1 \cap \Delta_n^2$. Согласно лемме Бореля — Лебега, можно выбрать конечное число кругов γ, покрывающих множество a_n^1. Согласно предложению 3° п. 12, две максимальные области (Δ_n^2, a_n^1), соответствующие точкам a_n^1 одного и того же γ, совпадают; поэтому существует конечное число областей (Δ_n^2, a_n^1). Обозначим через δ_n^2 какую-либо одну из них. Продолжая это построение, мы получим конечное число цепочек $\{\delta_n^i\}$, удовлетворяющих требуемому условию:

$$\delta_n^i = (\Delta_n^i, a_n^{i-1}), \quad \text{причем} \quad T(a_n^{i-1}) = A_n^{i-1}.$$

Цепочка $\{\Delta_{n+m}^i\}$ $(i=1, 2, \ldots, 2^{n+m})$ лежит внутри цепочки $\{\Delta_n^i\}$ $(i=1, 2, \ldots, 2^n)$ таким образом, что $\Delta_{n+m}^j \subset \Delta_n^k$ при $j=2^m(k-1)+1, 2^m(k-1)+2, \ldots, 2^m k$. Если r — натуральное число и если $r<m$, то цепочка $\{\Delta_{n+r}^i\}$ содержится указанным образом в цепочке $\{\Delta_n^i\}$ и содержит цепочку $\{\Delta_{n+m}^i\}$. Кроме того, каждая данная цепочка $\{\delta_{n+m}^i\}$ всегда содержится в некоторой цепочке $\{\delta_n^i\}$, и существует цепочка $\{\delta_{n+r}^i\}$, содержащая $\{\delta_{n+m}^i\}$ и содержащаяся в $\{\delta_n^i\}$.

Так как при каждом n существует конечное число цепочек $\{\delta_n^i\}$, то среди этих цепочек существует хотя бы одна, которая содержит цепочки $\{\delta_m^i\}$ при любом $m>n$. Пусть $\{\delta_1^i\}$ — цепочка, удовлетворяющая этому условию. Среди цепочек $\{\delta_2^i\}$, содержащихся в $\{\delta_1^i\}$, выберем одну, содержащую цепочки $\{\delta_m^i\}$ при любом $m>2$. Продолжая построение, мы получаем последовательность цепочек

$$\{\delta_1^i\}, \{\delta_2^i\}, \ldots, \{\delta_n^i\}, \ldots, \tag{10}$$

каждая из которых содержится в предыдущих и включает в себя последующие.

Множества $\bigcup_i \delta_n^i$, соответствующие цепочкам последовательности (10), являются компактными континуумами; они образуют убывающую последовательность $\bigcup_i \delta_n^i \supset \bigcup_i \delta_{n+1}^i$. Пересечением σ этих континуумов является либо континуум, либо одна точка [1]). Покажем, что σ — континуум.

Действительно, если P_0 — произвольная, но фиксированная точка Σ, то каждое множество $\bigcup_i \delta_n^i$ последовательности (10) содержит хотя бы одну точку p_{0n}, для которой $T(p_{0n})=P_0$. Любая предельная точка p_0 последовательности выбранных точек p_{0n} удовлетворяет условию $T(p_0)=P_0$ и принадлежит σ. Следовательно, σ не может состоять из одной точки.

Из условия 4) вытекает, что $T(\sigma) \subset \Sigma$, и поэтому $T(\sigma)=\Sigma$. Чтобы доказать, что T — топологическое отображение дуги σ на Σ, достаточно показать, что отображение (9) устанавливает взаимно однозначное соответствие между σ и Σ. Действительно, T непрерывно, а σ компактно; поэтому если T — взаимно однозначно, то T^{-1} также является непрерывным [2]).

[1]) Том I, гл. IX, § 3, п. 18, стр. 273—274.
[2]) Том I, гл. I, § 3, п. 18, стр. 34—35.

Пусть p_1 и p_2 — две различные точки σ, для которых

$$T(p_1) = T(p_2) = P.$$

Из условия 2) вытекает, что при любом n области δ_n^i, содержащие p_1 и p_2, либо соседние, либо совпадают. В обоих случаях они образуют континуум c_n, и последовательность $c_1, c_2, \ldots, c_n$ состоит из компактных континуумов, причем $c_n \supset c_{n+1}$. Следовательно, пересечение $\bigcap_n c_n = c$ является либо континуумом, либо точкой. Второе предположение невозможно, так как c содержит различные точки p_1 и p_2.

Однако $T(c) \subset \bigcap_n T(c_n) = P$, что противоречит условию 2) определения внутренних отображений. Таким образом, первая лемма полностью доказана.

14. Приведем теперь еще одну лемму, дополняющую первую. *В области δ существует только конечное число дуг σ, удовлетворяющих условиям первой леммы.*

Заметим сначала, что две различные такие дуги σ_1 и σ_2, исходящие из одной и той же точки a, не могут иметь второй общей точки a', если они не совпадают между a и a'. Действительно, тогда часть дуги σ_1 и часть дуги σ_2 образовали бы простую замкнутую кривую, ограничивающую жорданову область d. Образ $T(\bar{d})$ был бы компактной областью с границей, состоящей из части простой дуги Σ, что невозможно.

Если бы в δ существовало бесконечное число различных дуг $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$, то их концы $b_1, b_2, \ldots$ должны были бы быть различными. Так как точки b_i принадлежат замкнутой и компактной области δ, то они обладают предельной точкой b_0 в δ. Из соотношений $T(b_i) = B$ вытекает, что $T(b_0) = B$, т. е. что b_0 принадлежит внутренности δ, так как B является внутренней точкой для Δ. Продолжим дугу Σ другой дугой Σ', лежащей вместе со своими концами B и B' в Δ, так чтобы Σ и Σ' образовали простую дугу. Согласно предыдущей лемме, для каждой из точек b_i можно построить дугу σ_i', которую преобразование (9) топологически отображает на Σ'. Проведя относительно $\Sigma + \Sigma'$ рассуждение, аналогичное рассуждению для Σ, и заметив, что точки b_i различны, можно убедиться в том, что две дуги σ_i' не пересекаются. В частности, концы b_i' дуг σ_i', соответствующие B', различны и обладают предельной точкой b_0', которая является внутренней точкой δ; очевидно, что $T(b_0') = B'$.

Построим два круга радиусом, меньшим произвольного числа $\varepsilon > 0$, с центрами b_0 и b_0' так, чтобы эти круги лежали внутри δ. Существуют две дуги σ_i', например σ_1' и σ_2', с концами b_1, соответственно b_2, в круге с центром в b_0 и с концами в b_1', соответственно b_2', в круге с центром в b_0'. Тогда можно соединить b_1 с b_2 и b_1' с b_2' простыми дугами α и α', содержащимися в соответствующих кругах. Множество $\sigma_1' + \sigma_2' + \alpha + \alpha'$ или часть этого множества является простой замкнутой кривой, определяющей жорданову область d. Ее образ $T(\bar{d})$ — замкнутая ограниченная область, граница которой принадлежит множеству $\Sigma' + T(\alpha) + T(\alpha')$. Так как ε может быть взято произвольно малым, то можно предположить, что множества $T(\alpha)$ и $T(\alpha')$ лежат в заранее заданных окрестностях точки B, соответственно B'; тогда граница ограниченной области $T(\bar{d})$ не может содержаться в $\Sigma' + T(\alpha) + T(\alpha')$. Полученное противоречие показывает, что в δ существует лишь конечное число дуг σ_i.

15. В качестве первого приложения приведенных лемм докажем следующую теорему.

Если A — произвольная точка из V_0, то множество точек $a \in V$, удовлетворяющих условию

$$T(a) = A,$$

состоит из изолированных точек.

Так как множество $\{a\}$ замкнуто (в силу непрерывности отображения T), то достаточно доказать, что оно не имеет предельных точек.

Предположим, что a_0 — предельная точка множества $\{a\}$. Согласно предложению 4° п. 12, можно построить нормальную область δ, содержащую внутри точку a_0. Тогда $A = T(a_0)$ лежит внутри области $\Delta = T(\delta)$. Выбирая внутри Δ дугу Σ с концами A и B и применяя первую лемму п. 13, мы построим для каждого $a \in \delta$ соответствующие дуги σ. Так как a_0 — предельная точка множества $\{a\}$, то в δ существует бесконечное множество точек a, а следовательно, и дуг σ. Согласно второй лемме п. 14, каждая дуга может пересекаться лишь с конечным числом других дуг σ. Пусть σ_1 — одна из этих дуг. Существует бесконечное число дуг σ, не пересекающихся с σ_1; пусть σ_2 — одна из них. Существует бесконечное число дуг σ, не пересекающихся ни с σ_1, ни с σ_2; пусть σ_3 — одна из них. Продолжая, получаем последовательность попарно непересекающихся дуг σ_n с одним и тем же образом Σ. Рассуждая, как в п. 14, мы приходим к противоречию. Следовательно, в области δ имеется лишь конечное число точек a, и точка a_0 не может существовать.

16. Теорема о локальном обращении внутренних отображений.

В любой окрестности каждой точки $a \in V$ существует замкнутая жорданова область $\gamma \subset V$, содержащая внутри точку a, являющаяся нормальной областью для отображения T и обладающая следующими свойствами.

Область γ можно разбить на конечное число n секторов при помощи n простых дуг, исходящих из a и оканчивающихся на границе γ, причем две любые такие дуги имеют единственную общую точку a. Каждый из этих секторов отображается на $T(\gamma)$, и отображение T является топологическим внутри каждого сектора и на каждой дуге, разбивающей γ, причем оно переводит эти дуги в одну и ту же дугу, лежащую внутри $T(\gamma)$ (за исключением одного из ее концов, находящегося на границе $T(\gamma)$)[1]).

Из теоремы, установленной в п. 15, вытекает, что существует окрестность v точки a, которая не содержит других точек со свойством $T(a) = A$. Пусть δ — нормальная область, лежащая в v и содержащая внутри точку a, существование которой обеспечивается предложением 4° п. 12. Рассмотрим внутри области $\Delta = T(\delta)$ круг Γ с центром в A и на окружности C круга Γ — точку B. Из теоремы п. 15 вытекает, что в δ существует только конечное число точек b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, таких, что $T(b_i) = B$.

Так как δ — нормальная область, то, согласно первой лемме, существует исходящая из b_1 простая дуга σ_1, лежащая внутри δ, которую отображение (9) переводит в C, причем каждой точке на C, отличной от B, соответствует единственная точка на σ_1, а точке B соответствуют концы b_1 и b_2 этой дуги, которые могут совпадать или быть различными. Чтобы построить σ_1, достаточно разложить C на две взаимно дополнительные дуги BB' и $B'B$ при помощи двух различных точек B и B' и применить последовательно два раза первую лемму.

Предположим, что $b_2 \neq b_1$. Пусть тогда σ_2 — дуга, аналогичная σ_1, исходящая из b_2, и пусть b_3 — ее конец. Продолжая дальше таким же образом, мы получим не более чем через m шагов простую замкнутую кривую c, лежащую внутри δ. Действительно, σ_i — простые дуги, а две последовательные дуги σ_i не могут иметь в окрестности их общего конца других общих точек. Когда p описывает c в некотором направлении, точка $P = T(p)$ описывает $n \leqslant m$ раз C все время в одном и том же направлении.

---

[1]) Stoïlow S., Sur les transformations continues et la topologie des fonctions analytiques, p. 367, или Les propriétés topologiques des fonctions analytiques d'une variable, *Ann. Inst. H. Poincaré*, II (1932), 233—266.

Пусть γ — замкнутая жорданова область на V, ограниченная кривой c. Ее образ $T(\gamma)$ — замкнутая ограниченная область, граница которой принадлежит C; следовательно, $T(\gamma)$ совпадает с Γ, и γ — нормальная область. Очевидно, что $\gamma \subset \delta$ (п. 12, 2°).

На c существует n точек b_i.

Предположим сначала, что $n = 1$. Мы покажем, что в этом случае отображение (9) является топологическим в γ. В противном случае внутри γ существовали бы две различные точки p_1 и p_2 с одним и тем же образом P. Через A, P и B проведем простую дугу Σ, лежащую внутри Γ, за исключением своего конца B. Первая лемма показывает, что в γ существуют две простые дуги, исходящие соответственно из p_1 и p_2, которые преобразование (9) отображает топологически на дугу $PB \subset \Sigma$, и две аналогичные дуги, исходящие из тех же точек, которые отображаются на дугу $PA \subset \Sigma$. Действительно, b и a — это единственные точки из γ, которые отображение (9) переводит в B, соответственно в A. Первые две дуги имеют своим концом b, а вторые — a. Поэтому существует жорданова область d, ограниченная этими дугами или их частями. Тогда граница замкнутой и ограниченной области $T(\bar{d})$ принадлежит Σ, что невозможно. Следовательно, p_1 должна совпадать с p_2. С другой стороны, отображение (9) является топологическим и на c, согласно первой лемме (использованной при построении кривой c) и предположению $n = 1$.

Предположим теперь, что $n > 1$. Пусть b_1 и b_2 — две точки b_i, а σ_1 и σ_2 — две простые дуги, исходящие соответственно из b_1 и b_2, которые отображаются топологически на указанную выше дугу Σ. За исключением точек b_1 и b_2, эти две дуги лежат внутри γ, так как a — единственная точка из δ, принадлежащая прообразу точки A, a лежит внутри δ, а дуги σ_1 и σ_2 не могут пересекать c. Докажем, что эти дуги не имеют других общих точек, кроме a. Действительно, пусть β — их первая точка пересечения при движении вдоль σ_1 и σ_2, начиная от b_1, соответственно b_2, по направлению к a. Дуги $b_1\beta$ и $b_2\beta$ образуют вместе с каждой из дуг b_1b_2 кривой c жорданову область, содержащуюся в γ. Если $\beta \neq a$, то одна из этих областей, скажем d, не содержит a и поэтому не содержит ни одного прообраза точки A при отображении (9). Однако $T(\bar{d})$ — это замкнутая и компактная область с границей, принадлежащей Σ и C, поэтому она совпадает с Γ. Таким образом, в d должна существовать точка, являющаяся прообразом A. Это противоречие показывает, что β не может отличаться от a.

Если предположить теперь, что b_1 и b_2 — две последовательные точки b_i на c, то замкнутая жорданова область, ограниченная

дугами σ_1, σ_2 и дугой b_1b_2 кривой c, на которой нет других точек b_i, отображается в Γ так же, как и указанная выше область d. Отображение является топологическим на каждой из дуг σ_1 и σ_2 и на дуге b_1b_2 между ее концами. Внутренность этой области отображается топологически на внутренность C, исключая дугу Σ. Это доказывается при помощи рассуждения, аналогичного проведенному выше в случае $n=1$.

Итак, теорема полностью доказана. *Она показывает, что с топологической точки зрения локальное обращение внутренних отображений осуществляется так же, как обращение аналитических функций* [1]).

17. Из теоремы обращения вытекают следующие выводы относительно римановых накрывающих поверхностей $(z)_T^V$.

1°. *Внутреннее отображение*

$$z=T(p) \tag{11}$$

является локально взаимно однозначным (или локально топологическим) в любой точке $p\in V$, кроме некоторого множества изолированных точек V.

2°. *В окрестности этих точек p_0 отображение* (11) *топологически эквивалентно отображению $z=\zeta^n$, где n — целое число, $n\geqslant 2$, т. е. существует топологическое отображение $p=t(\zeta)$ некоторой окрестности v_{p_0} точки p_0 на круг $|\zeta|<r$, $r>0$, такое, что $p_0=t(0)$ и $z=T[t(\zeta)]=\zeta^n$.*

Точки p_0 называются *точками ветвления* порядка $n-1$ римановой накрывающей $(z)_T^V$, а точки, в окрестности которых T является локально топологическим, называются *обыкновенными*.

18. Эти предложения дают возможность рассматривать $(z)_T^V$ как абстрактную риманову поверхность.

Для каждой обыкновенной точки $p_0\in V$ отображения (11) существует окрестность v_{p_0}, которую T отображает топологически на круг радиуса R_0 на плоскости (z) с центром $z_0=T(p_0)$. В качестве локального параметра возьмем

$$\frac{1}{R_0}(z-z_0)=\frac{1}{R_0}[T(p)-T(p_0)].$$

Если p_0 — точка ветвления порядка $n-1$, то, согласно теореме обращения или приведенному свойству 2°, мы возьмем в качестве локального параметра

$$\left(\frac{z-z_0}{R_0}\right)^{\frac{1}{n}}=\left[\frac{T(p)-T(p_0)}{R_0}\right]^{\frac{1}{n}},$$

[1]) Том I, гл. X, § 1, п. 1—3, стр. 286—288.

а в качестве параметрической окрестности v_{p_0} — внутренность максимальной области относительно p_0, соответствующую кругу $|z - z_0| < R_0$ достаточно малого радиуса.

В случае $z_0 = \infty$ приведенные определения следует надлежащим образом изменить, как в п. 5. Легко убедиться в том, что соотношения соседства конформны.

Следовательно, *любую риманову накрывающую можно рассматривать как абстрактную риманову поверхность*, если перенести на V конформную метрику сферы при помощи отображения T. Риманову накрывающую поверхность можно рассматривать как реализацию получаемой таким образом абстрактной поверхности.

Различные римановы накрывающие могут соответствовать одной и той же абстрактной римановой поверхности. Например, римановы накрывающие $R = (z)^{(w)}_{w=z}$ и $R' = (z)^{(w')}_{(w'^2=z)}$ не только имеют одну и ту же топологическую модель, но и соответствуют одной и той же абстрактной римановой поверхности: комплексной плоскости [1]), хотя их способы накрытия отличаются друг от друга.

Отметим, что справедливо обращение предложения, установленного в этом пункте: *любая абстрактная риманова поверхность может быть превращена в риманову накрывающую*. Это вытекает из существования на абстрактной римановой поверхности R аналитической функции, имеющей R своей римановой поверхностью. Однако в то время как каждой накрывающей соответствует единственная абстрактная поверхность, каждой абстрактной поверхности соответствует бесконечное число накрывающих [2]).

Изучение абстрактных римановых поверхностей дает то преимущество, что все свойства конформно эквивалентных накрывающих устанавливаются одновременно.

---

[1]) Поверхности R соответствуют локальные параметры $z - z_0 = w - w_0$ при конечном w_0 и $\frac{1}{z} = \frac{1}{w}$ при $w_0 = \infty$.

Поверхности R' соответствуют локальные параметры $z - z_0 = \frac{w'^2 - w_0'^2}{|w_0'|^2}$ при $w_0' \neq 0, \infty$, $z^{1/2} = w'$ при $w_0' = 0$ и $z^{-1/2} = \frac{1}{w'}$ при $w_0' = \infty$.

[2]) Каждой римановой поверхности R соответствует аналитическая функция и даже бесконечное число таких функций, для которых R — риманова поверхность. Эта теорема, известная уже Риману в случае замкнутых поверхностей, была доказана в общем случае П. Кёбе в 1909 году. Ему принадлежит также метод, основанный только на теории комплексных функций; см. Koebe P., Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten, *Acta Math.*, 50 (1927), 27—157. См. также гл. VIII, § 3. п. 16, и гл. IX, § 5 этого тома.

19. В отличие от абстрактных римановых поверхностей, которые были определены при помощи локального свойства: возможности конформного отображения некоторой окрестности любой точки на круг на плоскости, — римановы накрывающие поверхности были введены при помощи свойства в целом: существования внутреннего отображения их топологической модели в сферу.

Исследование локальных свойств внутренних отображений даст нам возможность сформулировать в этом пункте локальное определение римановых накрывающих поверхностей.

Риманова накрывающая поверхность — это накрытие сферы (z) *двумерным многообразием* V *при помощи непрерывного отображения*

$$z = T(p), \tag{12}$$

обладающего следующими свойствами:

1) *на* V *можно определить конечное или счетное число замкнутых и компактных областей* δ_i, *так чтобы каждая точка* V *была внутренней точкой хотя бы одной области* δ_i. *Очевидно, что* $\bigcup_i \delta_i = V$;

2) *для каждой области* δ_i *существуют два топологических отображения* $h^i(p)$ *и* $h_0^i(z)$, *отображающих соответственно* δ_i *на круг* $|\xi| \leqslant 1$ *и* $T(\delta_i)$ *на круг* $|\zeta| \leqslant 1$ *так, что отображение*

$$h_0^i T (h^i)^{-1}$$

круга $|\xi| \leqslant 1$ *на круг* $|\zeta| \leqslant 1$ *можно представить в виде*

$$\zeta = \xi^{n_i},$$

где n_i *— положительное целое число, зависящее от* δ_i (рис. 37).

Очевидно, что если существует одна такая система δ_i, то существует и бесконечное число таких систем. Множество точек $\{[p, T(p)]\}$ при $p \in \delta_i$ образует замкнутую компактную область D_i римановой поверхности $(z)_T^V$; n_i называется *числом листов* D_i. Если $n_i > 1$, то точка $p_i \in \delta_i$, для которой $h^i(p_i) = 0$, не является произвольной в δ_i. Она соответствует точке ветвления порядка $n_i - 1$ накрывающей поверхности. В каждой области D_i существует не более одной точки ветвления. Эти точки не зависят от системы областей δ_i и характеризуются тем, что отображение T не является взаимно однозначным ни в какой их окрестности.

В случае замкнутого многообразия V, и только в этом случае, можно выбрать конечное число замкнутых областей δ_i, покрывающих V в смысле свойства 1). Это же свойство имеет место

для любого замкнутого и компактного множества произвольного многообразия V [1]).

Если R — риманова поверхность в смысле данного выше определения, то для каждой точки $p_0 \in V$ и каждой окрестности U_{p_0} этой точки на V существует замкнутая и компактная область $d \subset U_{p_0}$, которая содержит p_0 внутри, переходит при отображении T в круг с центром $z_0 = T(p_0)$ и удовлетворяет свойству 2) [2]). Если число n, соответствующее d, равно единице, то область $[d, T(d)]$ римановой поверхности называется *однолистным кругом*, а если это

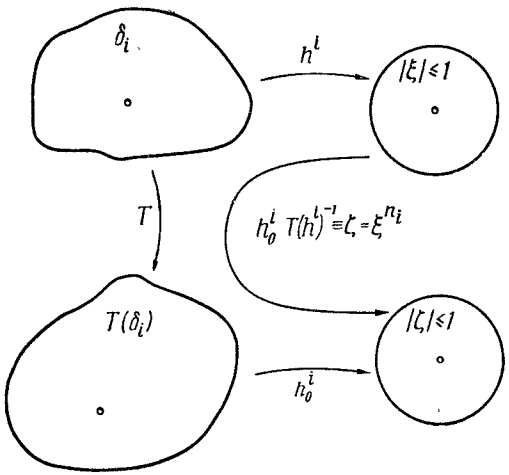

Рис. 37.

число больше единицы, то эта область называется *многолистным кругом*; точка $[p_0, T(p_0)]$ называется центром этого круга. Можно показать, что для каждой римановой накрывающей в смысле данного выше определения можно выбрать области δ_i, соответствующие однолистным или многолистным кругам таким образом, чтобы каждый круг пересекал лишь конечное число других кругов [3]).

20. В этом пункте, пользуясь свойствами внутренних отображений, мы докажем, что *риманова накрывающая, определенная в п.* 10, *является также римановой накрывающей в смысле определения п.* 19.

Рассмотрим на плоскости (z) счетное множество M, всюду плотное на (z) и содержащее точку $z = \infty$. Обозначим через $\{\Gamma\}$

[1]) Stoïlow S., Principes topologiques ..., ch. II, sect. I, § 3, p. 33.
[2]) Stoïlow S., Principes topologiques .... ch. II, sect. I, § 5, p. 34—36.
[3]) Stoïlow S., Principes topologiques ... ch. II, sect. I, § 6, p. 36—38.

семейство кругов с рациональными радиусами и с центрами в точках из M и через $\{\Delta\}$ — семейство нормальных областей на V, удовлетворяющих следующим условиям:

1) каждая область Δ содержится в подмножестве $G \subset V$, гомеоморфном евклидовой плоскости;

2) Δ является максимальной областью одного из кругов $\{\Gamma\}$ относительно некоторой точки из V.

Следовательно, любая точка $p \in V$ является внутренней точкой некоторой области Δ. Покажем, что семейство $\{\Delta\}$ содержит только счетное множество различных областей.

Так как V связно и локально евклидово, то любые две точки p_0 и p_1 этого многообразия всегда можно соединить при помощи непрерывного пути. Пусть l — такой путь. Согласно лемме Бореля — Лебега, его можно покрыть конечным числом областей Δ. Отсюда вытекает, что для каждой пары областей Δ_0 и Δ_1 из $\{\Delta\}$ существует конечная *цепочка* (последовательность) областей Δ, начинающаяся с Δ_0, кончающаяся в Δ_1 и такая, что две последовательные области этой цепочки всегда имеют общие внутренние точки.

Очевидно, достаточно показать, что множество таких цепочек счетно. Для этого мы установим, что любая область Δ имеет общие внутренние точки только со счетным множеством других областей. Так как в цепочке существует лишь конечное число областей и так как две последовательные области имеют общие точки, то предложение будет полностью доказано.

Пусть Δ_1 — область, имеющая общие точки с Δ_0. Если обозначить через F_0 границу Δ_0, то $T(\Delta_1 \cap F_0)$ — дуга окружности круга $\Gamma_0 = T(\Delta_0)$, принадлежащая Γ_1. Теорема обращения из п. 16 показывает тогда, что множество $\Delta_1 \cap F_0$ состоит из дуг, у которых только концы расположены на границе Δ_1. Если Δ_1' — другая область Δ, также соответствующая Γ_1, то $\Delta_1' \cap \Delta_1$ не может иметь внутренних точек (п. 12, 3°). Следовательно, если две области Δ_1 и Δ_1', соответствующие одному и тому же кругу Γ_1, обе имеют общие внутренние точки с Δ_0, то они высекают на F_0 простые дуги, которые могут иметь только попарно общие концы. В соответствии с результатом, установленным в п. 15, существует конечное число попарно различных дуг $\Delta_1 \cap F_0$, а следовательно, только конечное число областей Δ_1, соответствующих Γ_1 и имеющих общие внутренние точки с Δ_0. Однако множество $\{\Gamma\}$ счетно; поэтому множество областей $\{\Delta\}$, имеющих общие внутренние точки с Δ_0, также счетно.

Следовательно, V можно покрыть счетным множеством областей Δ. Так как эти области компактны в G (а не только в V), то каждую из них можно покрыть конечным числом нормальных

областей, аналогичных области γ в теореме обращения из п. 16. Таким образом, V можно покрыть счетным множеством областей γ. Так как области γ удовлетворяют условию 2) п. 19, то теорема полностью доказана.

21. Покажем теперь, что *риманова накрывающая в смысле определения п. 19 триангулируема и ориентируема*[1]).

Применяя критерий Радо из п. 7, можно сразу доказать триангулируемость накрывающей. Чтобы получить покрытие V счетным множеством областей, гомеоморфных евклидовой плоскости, достаточно взять в качестве областей G_i внутренности областей δ_i.

Из свойства триангулируемости римановых поверхностей и из п. 17 вытекает, что *множество точек ветвления такой поверхности не более чем счетно.*

Покажем теперь, что риманова поверхность $R=(z)_T^V$, удовлетворяющая определению п. 19, ориентируема.

С этой целью мы триангулируем V таким образом, чтобы в каждом треугольнике T_i отображение (12) было топологическим. Триангуляцию с этим свойством можно получить, взяв треугольники внутри областей δ_i и использовав точки ветвления в качестве вершин. Если бы поверхность V не была ориентируемой, то на ней существовал бы цикл треугольников

$$T_0,\ T_1,\ \ldots,\ T_n, \tag{13}$$

не сохраняющий ориентации T_0 (п. 8). Каждому треугольнику T_i отображение (12) ставит в соответствие на (z) жорданову область D_i. Положительному направлению обхода, выбранному на T_0, соответствует определенное направление обхода на D_0, а положительной ориентации, индуцированной T_0 на T_1, T_2 и т. д., соответствует ориентация, индуцированная D_0 на D_1, D_2.... Если цикл (13) не сохраняет ориентации T_0, то цикл жордановых областей D_i не сохраняет ориентации D_0. Однако это невозможно, так как комплексная область (z) является ориентируемой поверхностью. Таким образом, поверхность V, а следовательно, и R ориентируемы.

22. Эквивалентность определений п. 10 и 19 будет полностью установлена на основании теоремы, которую мы докажем, следуя М. Хейнсу[2]).

Любая триангулируемая и ориентируемая поверхность V допускает внутреннее отображение в сферу (комплексную плоскость).

---

[1]) Stoïlow S., Sur les transformations intérieures et la caractérisation topologique des surfaces de Riemann, *Compositio Math.*, III (1936), 435—440.

[2]) Heins M., Interior mapping of an orientable surface into S^2, *Proc. Am. Math. Soc.*, 2 (1951), 951—952.

Рассмотрим триангуляцию на V и разобьем каждый треугольник этой триангуляции на 6 меньших треугольников при помощи медиан. Мы получим так называемое барицентрическое подразделение заданной триангуляции. Обозначим через a вершины треугольников старой триангуляции, через b — середины сторон этих треугольников и через c — их барицентры (точки пересечения медиан). Каждый треугольник новой триангуляции имеет одну вершину a, одну вершину b и одну вершину c (рис. 38).

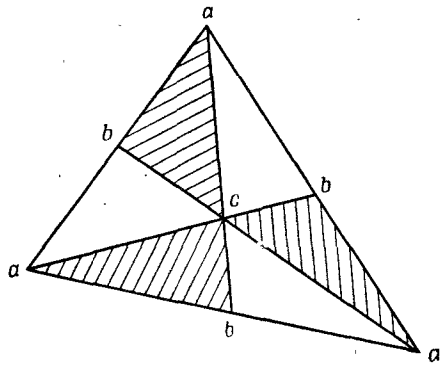

Рис. 38.

Так как поверхность V ориентируема, то, фиксируя определенную ориентацию треугольников исходной триангуляции, можно разбить треугольники барицентрического подразделения на два класса: заштрихованные и незаштрихованные треугольники.

Одна из сторон ab каждого треугольника подразделения лежит на стороне некоторого исходного треугольника. Смотря по тому, содержит сторона ab начало или конец исходной стороны в направлении ориентации, выбранной на V, мы заштрихуем или не заштрихуем треугольник abc. Таким образом, два треугольника из одного и того же класса не имеют общей стороны.

Выберем на экваторе сферы S три различные точки: α, β и γ. На дугу $\alpha\beta$, не содержащую γ, мы отобразим топологически стороны ab, аналогично на дуги $\beta\gamma$ и $\gamma\alpha$ мы отобразим топологически стороны bc и ca. Затем мы продолжим это отображение сторон до топологического отображения каждого заштрихованного треугольника на верхнюю полусферу и каждого незаштрихованного треугольника — на нижнюю полусферу[1]). Таким образом, мы получим однозначное отображение поверхности V в сферу S, которое локально взаимно однозначно, за исключением точек a, b и c. Эти точки проектируются соответственно в α, β и γ. В β проектируются только точки ветвления порядка 1 полученной таким образом накрывающей поверхности, а в γ — точки порядка 2. Построенное отображение является внутренним.

Итак, мы доказали, что любая триангулируемая и ориентируемая поверхность может быть топологической моделью римановой

[1]) Это возможно, как будет показано в п. 25.

накрывающей поверхности в смысле определения п. 10. Кроме эквивалентности определения в целом и локального определения римановых накрывающих (п. 10 и 19), мы получили в п. 20—22 *топологическую характеристику римановых поверхностей*. С топологической точки зрения римановы поверхности совпадают с триангулируемыми и ориентируемыми многообразиями.

23. Римановы накрывающие были определены как накрытия сферы (комплексной плоскости) двумерными многообразиями при помощи внутренних отображений. Это понятие можно обобщить, если заменить накрываемую сферу произвольным триангулируемым и ориентируемым двумерным многообразием V_0. Полученная таким образом риманова накрывающая также триангулируема и ориентируема. Она становится обычной римановой поверхностью, если рассматривать V_0 как риманову поверхность, накрывающую сферу, и применять сложное отображение, получающееся путем суперпозиции отображений V в V_0 и V_0 в сферу [1]).

§ 5. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАМКНУТЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ. ПОЛИЭДРИЧЕСКИЕ ОБЛАСТИ

24. Учитывая данную в п. 22 характеристику римановых поверхностей, для того чтобы получить топологическую классификацию этих поверхностей, мы будем рассматривать только триангулируемые и ориентируемые двумерные многообразия (ориентируемые поверхности).

Прежде всего мы разделим все поверхности на два класса: класс замкнутых, или компактных, поверхностей и класс открытых поверхностей. В настоящем разделе мы займемся замкнутыми поверхностями.

Полиэдрической областью на поверхности Σ называется замкнутая область $D \subset \Sigma$, ограниченная конечным числом μ непересекающихся простых замкнутых кривых, которые можно считать состоящими из линий некоторой триангуляции [2]).

---

[1]) Относительно внутренних отображений в случае неориентируемых поверхностей см. Bernstein I., Sur un problème de M. Stoïlow, *Comptes Rendus Acad. Paris*, 242, 24 (1956), 2796—2798.

[2]) Полиэдрические области — это связные объединения конечного числа треугольников. Замкнутая ломаная — это простая замкнутая кривая, состоящая из сторон триангуляции. Всегда можно предполагать, что контуры полиэдрической области не пересекаются, так как от возможных общих точек можно избавиться путем соответствующего изменения триангуляции и увеличения области в окрестностях этих точек. Полиэдрические области называются также *поверхностями с краем*, хотя они и не являются поверхностями в принятом здесь смысле, так как они не локально евклидовы на своих контурах.

В частности, замкнутые поверхности можно рассматривать как полиэдрические области, для которых $\mu = 0$.

25. Пусть Σ — сфера (комплексная плоскость). *Две полиэдрические области на Σ тогда и только тогда топологически эквивалентны, когда μ для них одинаково.*

При $\mu = 1$ предложение очевидно. Для доказательства следует применить стереографическую проекцию, теорему о конформном отображении односвязных плоских областей с более чем одной граничной точкой и продолжить соответствие на границу [1]). Докажем теперь следующее уточнение сформулированной теоремы.

Пусть D и D' — две замкнутые жордановы области и C и C' — их границы. Если задано топологическое соответствие τ между C и C', то существует топологическое отображение [2]) $\mathcal{T}$ замкнутой области D на D', которое совпадает на C и C' с τ.

Так как области D и D' можно отобразить топологически на единичные круги Δ и Δ', а заданное соответствие τ между C и C' индуцирует соответствие τ^* между окружностями Γ и Γ' этих двух кругов, достаточно доказать существование топологического отображения $\mathcal{T}^*$ круга Δ на Δ', совпадающего с τ^* на окружности. Чтобы получить отображение $\mathcal{T}^*$, мы сопоставим точкам из Δ, лежащим на радиусе с аргументом θ, точки с тем же модулем из Δ', лежащие на радиусе с аргументом θ', где θ' определяется из равенства $e^{i\theta'} = \tau^*(e^{i\theta})$.

Предположим теперь, что $\mu > 1$ и что граница области D состоит из попарно непересекающихся жордановых кривых C_1, C_2, ..., C_μ. Покажем, что *можно отобразить D топологически на аналогичную область D', ограниченную μ кругами C_1', C_2', ..., C_μ', таким образом, чтобы на границе области D это соответствие совпало с μ заданными топологическими отображениям τ_i кривых C_i на C_i', если только все отображения τ_i одновременно сохраняют направление обхода или изменяют его.*

Соединим кривые C_i (соответственно C_i') при помощи попарно непересекающихся простых дуг λ_i и λ_i', лежащих внутри области D (соответственно D'), обозначая через λ_i (соответственно λ_i') дугу, соединяющую C_i с C_{i+1} (соответственно C_i' с C_{i+1}') ($i = 1, 2, \ldots$ ..., $\mu - 1$) (рис. 39).

---

[1]) Том I, гл. I, § 3, п. 23, стр. 38—40; гл. V, § 3, стр. 168—175; гл. IX, § 3, стр. 271—276.

[2]) $\mathcal{T}$ не является, вообще говоря, конформным.

Множества

$$\Delta = D - \sum_{l=1}^{\mu} C_l - \sum_{l=1}^{\mu-1} \lambda_l,$$

$$\Delta' = D' - \sum_{l=1}^{\mu} C'_l - \sum_{l=1}^{\mu-1} \lambda'_l$$

являются внутренностями жордановых областей (каждая дуга λ_l и λ'_l проходится дважды в противоположных направлениях). Согласно теореме, доказанной выше для случая $\mu = 1$, можно

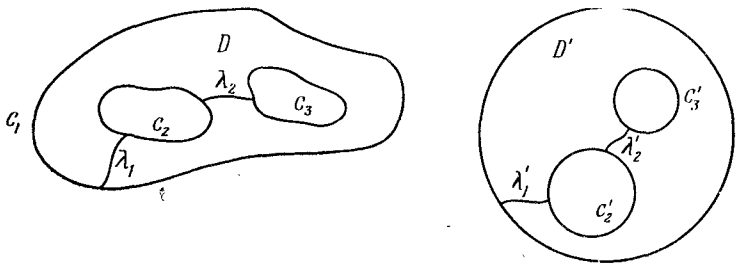

Рис. 39.

установить топологическое соответствие $\mathcal{T}$ между Δ и Δ', совпадающее на границе с заданным топологическим отображением τ. Выберем τ так, чтобы двум совпадающим точкам на λ_l соответствовали две совпадающие точки на λ'_l и чтобы на C_l и C'_l отображение τ совпадало с τ_l. Кроме того, мы проведем λ_l и λ'_l таким образом, чтобы их концы на C_l и C_{l+1} (соответственно на C'_l и C'_{l+1}) соответствовали друг другу при отображениях τ_l и τ_{l+1}. Тогда соответствие $\mathcal{T}$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

26. Рассмотрим теперь случай произвольной поверхности Σ.

Говорят, что простая замкнутая кривая или замкнутая ломаная π разбивает полиэдрическую область D, если в D найдутся по крайней мере две точки, которые нельзя соединить непрерывным путем на D, не пересекающим кривую π.

Наибольшее число простых замкнутых попарно непересекающихся кривых $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p$, лежащих внутри D, которые, взятые вместе, не разбивают области D, называется *родом* D.

Это понятие можно определить также следующим образом: род области D равен максимальному числу простых замкнутых ломаных в D, отличных от контуров и различных между собой, которые допускают произвольно малые деформации в попарно непересекающиеся простые замкнутые кривые, лежащие в D и не разбивающие эту область.

Докажем следующую теорему.

Две полиэдрические области D и D' тогда и только тогда гомеоморфны, когда они имеют один и тот же род p и одно и то же число граничных кривых.

27. Если род полиэдрической области равен нулю, то ее называют также областью, *подобной однолистной*. Установим сначала сформулированную теорему в частном случае $p=0$.

Любая полиэдрическая область D рода нуль гомеоморфна некоторой плоской области (или области на сфере) с тем же числом граничных кривых.

Рассмотрим триангуляцию поверхности Σ, построенную таким образом, чтобы каждый контур D был замкнутой ломаной, состоящей из сторон этой триангуляции. Пусть T_0 — треугольник из D и $\mathcal{T}_0$ — топологическое отображение этого треугольника на некоторый треугольник T_0' на плоскости (z), при котором вершины T_0' являются образами вершин T_0. Пусть T_1 — треугольник из D, имеющий общую сторону L_1 с T_0; продолжим топологическое отображение $\mathcal{T}_0$, построив топологическое отображение $\mathcal{T}_1$ треугольника T_1 на плоский треугольник T_1'. Треугольник T_1' мы выберем таким образом, чтобы он имел общую сторону $\mathcal{T}_0(L_1)$ с T_0' и не имел общих внутренних точек с T_0'. Отображение $\mathcal{T}_1$ мы построим так, чтобы $\mathcal{T}_0$ и $\mathcal{T}_1$ совпадали на L_1 и $\mathcal{T}_1$ переводило вершины T_1 в вершины T_1'. Таким образом, полиэдрическая область $D_1 = T_0 \cup T_1$ отображается топологически на плоскую область $D_1' = T_0' \cup T_1'$. Пусть T_2 — другой треугольник из D, имеющий общую сторону L_2 с D_1. Повторяя этот процесс, мы получим топологическое отображение полиэдрической области $D_2 = T_0 \cup T_1 \cup T_2$ на плоскую область $D_2' = T_0' \cup T_1' \cup T_2'$. Эту операцию можно продолжать до тех пор, пока мы не получим в сумме область D. Что это возможно, доказывается методом индукции.

Предположим, что полиэдрическая область $D_{k-1} = T_0 \cup T_1 \cup \ldots \cup T_{k-1}$ уже отображена топологически на плоскую область D_{k-1}'. Пусть T_k — треугольник из $\overline{D - D_{k-1}}$, имеющий общую сторону L_k с D_{k-1}, и пусть $D_k = D_{k-1} \cap T_k$. Так как род области D равен нулю, то треугольник T_k отделяется от D_{k-1} границей π_k области D_{k-1}, состоящей из сторон триангуляции и содержащей L_k. Следовательно, T_k не имеет с D_{k-1} других общих точек, кроме тех, которые лежат на π_k. Отсюда вытекает, что можно отобразить топологически T_k на плоский треугольник T_k', лежащий вне D_{k-1}', так чтобы это отображение являлось продолжением отображения D_{k-1} на D_{k-1}' и переводило вершины T_k в

вершины T_k'. Таким образом, мы получаем топологическое отображение области D_k на $D_k' = D_{k-1}' \cup T_k'$.

Если D обладает по крайней мере одним контуром, то эта область отображается топологически на плоскую область D', причем контуры областей D и D' соответствуют друг другу при этом отображении. Если D — замкнутая поверхность, то D' совпадает со всей комплексной плоскостью (z) (сферой). Следовательно, любая замкнутая поверхность рода нуль гомеоморфна сфере.

28. Общую теорему о гомеоморфизме двух полиэдрических областей можно доказать, применяя предложение п. 27.

Пусть D — полиэдрическая область рода p и $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p$ — система замкнутых ломаных триангуляции, попарно не пересекающихся и не разбивающих области D. Разрезая область D вдоль кривых π_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$, мы получаем полиэдрическую область D^*, которая, кроме μ контуров исходной области D, имеет еще $2p$ контуров. Действительно, из каждой кривой π_i при помощи произвольно малой деформации получается *два* контура $\pi_{i,1}$ и $\pi_{i,2}$ области D^* (так как область D ориентируема).

Однако род области D^* равен нулю, так как в противном случае на D существовала бы не разбивающая ее замкнутая ломаная π^*. Тогда $\pi^*, \pi_1, \ldots, \pi_p$ не разбивали бы D, а следовательно, род области D был бы равен по крайней мере $p+1$. Применяя теорему п. 27 и учитывая то, что на контурах отображение можно считать совпадающим с заданным отображением, мы получаем возможность отобразить топологически D^* на плоскую область Δ, ограниченную $2p+\mu$ контурами.

Мы скажем, что такое отображение является *каноническим*, если

1) область Δ содержит внутри бесконечно удаленную точку и ограничена окружностями;

2) $2p$ из этих окружностей образуют пары $\{C, C'\}$, симметричные относительно действительной оси, а остальные μ окружностей, которые обозначим через $\{\Gamma\}$, имеют центры, лежащие на этой оси;

3) точки на $\pi_{i,1}$ и $\pi_{i,2}$, которые соответствуют одной и той же точке контура π_i, отображаются на симметричные окружности C_i и C_i' в точки, симметричные относительно действительной оси. Контуры области D отображаются на $\{\Gamma\}$ (рис. 40).

Пусть D' — другая полиэдрическая область, род которой также равен p и число контуров μ. Поступая, как и выше, мы сможем отобразить топологически область D'^* также на Δ. Путем суперпозиции отображений D^* на Δ и Δ на D'^* мы получим топологическое отображение D на D'.

В частном случае $\mu = 0$ из доказанной теоремы вытекает следующее утверждение.

Для того чтобы две ориентируемые замкнутые поверхности были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их род был равен одному и тому же числу[1]).

Следовательно, род — это единственный топологический инвариант замкнутой и ориентируемой триангулируемой поверхности.

Топологические модели замкнутых римановых поверхностей — это сфера, тор и обобщенный тор с p дырами. Эти модели называются

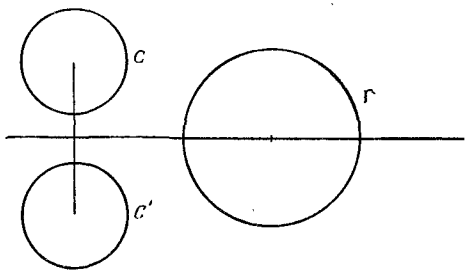

Рис. 40.

нормальными формами. Они могут быть заменены плоскими каноническими образами, если условиться считать за одну точку симметричные точки симметричных окружностей $\{C\}$.

29. Приложения. В заключение этих топологических рассуждений о полиэдрических областях и замкнутых поверхностях мы докажем теорему Эйлера и формулу Римана — Гурвица.

Эйлер дал соотношение между числом граней, ребер и вершин обычных многогранников, которое сводится к соотношению между числом треугольников, сторон и вершин произвольной триангуляции сферы.

Теорема Эйлера была распространена на случай произвольной ориентируемой полиэдрической области D рода p с μ граничными контурами.

Пусть N_0, N_1 *и* N_2 — *число вершин, сторон и треугольников в* D. *Тогда*

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2 - c, \tag{14}$$

где

$$c = 2p + \mu. \tag{15}$$

Число c называется *порядком связности* области D. Иногда вместо c применяется число

$$\rho = c - 2, \tag{16}$$

называемое *характеристикой* области D.

[1]) Jordan C., Sur la déformation des surfaces, *Journ. de Math. pures et appl.*, seria 2, XI (1866), 105—109.

Чтобы установить соотношение (14), займемся сначала простейшим случаем:

$$p=0 \quad \text{и} \quad \mu=1.$$

Область D можно рассматривать как плоскую замкнутую область, ограниченную единственной ломаной (п. 27); соотношение (14) переходит в соотношение

$$N_0-N_1+N_2=1. \tag{17}$$

Оно выполняется, если D состоит из одного треугольника. С другой стороны, если оно справедливо для областей, состоящих из $n-1$ треугольников и ограниченных одним контуром, то оно сохраняется и тогда, когда число этих треугольников возрастает на единицу. Действительно, при переходе от $n-1$ к n либо числа N_0 и N_2 возрастают на единицу, а N_1 — на два, либо N_0 остается неизменным, а N_1 и N_2 возрастают на единицу.

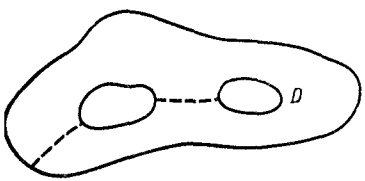

Рис. 41.

Рассмотрим теперь случай

$$p=0 \quad \text{и} \quad \mu \text{ — произвольно.}$$

При помощи разрезов, последовательно соединяющих контуры области D, можно снова получить предыдущий случай (рис. 41).

Каждый из этих разрезов (мы предполагаем, что они проведены по ломаным триангуляции) вводит два новых участка контура. Каждый такой участок содержит на одну вершину больше, чем число его сторон. Следовательно, для каждого разреза мы должны добавить к левой части соотношения (14) единицу, чтобы можно было применить соотношение (17). Сделано $\mu-1$ разрезов, а следовательно,

$$N_0-N_1+N_2+(\mu-1)=1,$$

или

$$N_0-N_1+N_2=2-\mu. \tag{18}$$

Если $p\neq 0$, то, разрезая область D p ломаными, мы превращаем ее в область, подобную однолистной, с c контурами, и тогда из (18) получаем (14).

30. Формула Гурвица. В гл. V, § 2, п. 9 и 10 мы пользовались понятием полного накрытия.

Пусть V и V_0 — две открытые триангулируемые и ориентируемые поверхности и

$$P=T(p) \quad (p\in V,\ P\in V_0) \tag{19}$$

— внутреннее отображение V в V_0. Говорят, что $T(p)$ определяет *полное накрытие* поверхности V_0 поверхностью V, если для

любой последовательности a_n точек из V, стремящихся к границе V[1]), последовательность образов $A_n = T(a_n)$ стремится к границе V_0.

Установленные в гл. V свойства полных накрытий справедливы не только когда T — аналитическая функция, а V и V_0 — плоские области, но и вообще в условиях приведенного здесь определения. Действительно, доказательство сохраняется, если вместо теоремы обращения аналитических функций применить теорему п. 16. Таким образом, можно сформулировать следующие результаты:

1°. *V полностью накрывает V_0*: $T(V) = V_0$.

2°. *Каждая точка $A \in V_0$ является образом n точек $a \in V$, если считать каждую точку a, удовлетворяющую уравнению $T(a) = A$, m раз, где $m - 1$ — ее порядок ветвления относительно отображения* (19). Число m называется *степенью накрытия*.

Любое внутреннее отображение T замкнутой поверхности V на поверхность V_0 (которая в силу непрерывности T также должна быть замкнутой) обладает свойствами 1° и 2° и также будет рассматриваться как полное накрытие.

31. Предположим теперь, что V и V_0 являются обобщенными торами соответственно с p и p_0 дырами, из которых исключены μ, соответственно μ_0, точек. Пусть S и S_0 — эти торы и F и F_0 — множества исключенных точек. В этом случае $\mu_0 \leqslant \mu \leqslant n\mu_0$.

Рассмотрим последовательность точек $a_k \in V$, сходящуюся к точке $a \in F$. Так как накрытие является полным, то последовательность $A_k = T(a_k)$ стремится к F_0. Если бы эта последовательность обладала двумя предельными точками $A \in F_0$ и $A' \in F_0$, то для любого непрерывного пути l на V, проходящего последовательно через точки a_k, его образ L пересекал бы бесконечное число раз замкнутую кривую γ на V_0, отделяющую A от A'. Тогда существовала бы сходящаяся к a последовательность точек (на l), образы которых лежали бы на γ. Так как γ компактна в V_0, то это означало бы, что образ последовательности не стремится к границе V_0, что невозможно; поэтому последовательности a_n, сходящейся к $a \in F$, соответствует последовательность A_n, сходящаяся к точке $A \in F_0$.

С другой стороны, любая последовательность, сходящаяся к точке из F_0, является образом некоторой последовательности, стремящейся к F. Отсюда вытекает, что

$$\mu_0 \leqslant \mu.$$

---

[1]) Последовательность a_n стремится к границе V, если она не содержит компактных в V бесконечных подпоследовательностей.

Одновременно мы доказали, что отображение T непрерывно продолжается на F и определяет непрерывное отображение S в S_0. Это отображение является внутренним, и поэтому определяет полное накрытие S_0 поверхностью S; это вытекает из следующей *теоремы о непрерывном продолжении внутренних отображений* [1]).

Если отображение

$$P = T(p)$$

двумерного многообразия S в двумерное многообразие S_0 обладает следующими свойствами:

1) *непрерывно на S;*

2) *является внутренним в $S - F$, где $F \subset S$ — вполне разрывное замкнутое множество;*

3) *множество $F_0 = T(F)$ замкнуто и вполне разрывно на S_0;*

то T является внутренним отображением на всем многообразии S.

Степень накрытия S_0 многообразием S при помощи продолженного отображения T также равна n, а следовательно,

$$\mu \leqslant n\mu_0 \text{ [2])}.$$

32. В этом пункте мы установим формулу Гурвица, выражающую общее число r точек ветвления отображения T, рассматриваемых с соответствующими кратностями, в зависимости от p, p_0, μ, μ_0 и n.

Триангулируем S_0 таким образом, чтобы каждый треугольник T_l^0 был взаимно однозначным образом каждой из своих максимальных областей при отображении (19). Это возможно, согласно теореме обращения п. 16, если выбрать образы точек ветвления среди вершин. Каждому T_l^0 будут соответствовать n максимальных областей T_k, в которых отображение (19) является топологическим и которые образуют триангуляцию S.

Обозначим через N_0, N_1 и N_2, соответственно через N_0^0, N_1^0 и N_2^0, число вершин сторон и треугольников триангуляций много-

[1]) Эта теорема доказывается от противного; предполагают, что для некоторой точки $a \in F$ существует содержащая a внутри замкнутая и компактная область $\delta \subset S$, для которой $A = T(a)$ — граничная точка для $T(\delta)$. См. Stoïlow S., Principes topologiques... ch. VI, sect. I, § 1, p. 122—123.

[2]) Вышеприведенные результаты применимы в общем случае, когда V и V_0 — триангулируемые и ориентируемые поверхности конечного рода и V_0 обладает конечным числом граничных элементов (п. 33). Согласно теореме о гомеоморфизме (п. 39), V и V_0 можно топологически отобразить на области из S и S_0. Отсюда вытекает также, что число граничных элементов V конечно.

образий S и S_0, получаемых таким образом. Согласно теореме Эйлера (п. 29), имеем

$$\begin{aligned} N_0 - N_1 + N_2 &= 2 - 2p, \\ N_0^0 - N_1^0 + N_2^0 &= 2 - 2p_0. \end{aligned} \tag{20}$$

Каждому треугольнику T_i^0 соответствует n треугольников T_k, а каждой стороне на S_0 соответствует n сторон триангуляции на S. Следовательно,

$$\begin{aligned} N_2 &= nN_2^0, \\ N_1 &= nN_1^0. \end{aligned} \tag{21}$$

Однако благодаря существованию точек ветвления некоторые из вершин триангуляции S_0 могут иметь менее чем n различных прообразов на S. Обозначая через $\bar{r}$ число точек ветвления отображения, продолженного на все многообразие S, получаем

$$N_0 = nN_0^0 - \bar{r}. \tag{22}$$

Из (20), (21) и (22) вытекает, что

$$\bar{r} = (2 - 2p_0)\, n + (2p - 2). \tag{23}$$

Точки ветвления продолженного отображения, не являющиеся точками ветвления заданного отображения, могут принадлежать только множеству F, причем число их равно $n\mu_0 - \mu$. Действительно, если бы не существовало таких точек, то мы имели бы $n\mu_0 = \mu$. Таким образом,

$$r = \bar{r} + n\mu_0 - \mu,$$

и соотношение (23) принимает вид

$$r = (2 - c_0)\, n + (c - 2), \tag{24}$$

где

$$c = 2p + \mu, \quad c_0 = 2p_0 + \mu_0\ ^{1}).$$

Соотношение (24) представляет собой формулу Гурвица. В случае замкнутых поверхностей $\mu = \mu_0 = 0$ эта формула переходит в соотношение (23), а если $V_0 = S_0$ — сфера, то $p_0 = 0$ и (24) переходит в формулу Римана

$$r = 2n + 2p - 2, \tag{25}$$

---

[1]) Так как $r \geqslant 0$, то $c_0 \leqslant c$.

связывающую число точек ветвления, род и число листов римановой поверхности алгебраической функции[1]).

Формула Гурвица применима в случае, когда V и V_0 являются внутренностями полиэдрических областей, так как они отображаются топологически на обобщенные торы с p и p_0 дырами, из которых удалены μ, соответственно μ_0, точек.

§ 6. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОТКРЫТЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ. ГРАНИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ. ПОЛИЭДРИЧЕСКИЕ АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ОБЛАСТИ

В предыдущем разделе (п. 28) мы показали, что род полностью характеризует замкнутую риманову поверхность с топологической точки зрения. Определение рода (п. 26) применимо и к открытым поверхностям, но этот инвариант уже не характеризует их полностью. Для их классификации необходимо определить граничные элементы; это понятие обобщает понятие связной компоненты границы плоской области. Известно, что граница плоской области состоит из множества тех точек на плоскости, которые не являются ни внутренними, ни внешними. Это определение нельзя распространить на поверхности, так как римановы поверхности не рассматриваются как вложенные в какое-либо другое пространство. Поэтому мы дадим внутреннее определение границы поверхности, аппроксимируя поверхность при помощи полиэдрических областей.

33. Граничный элемент поверхности. Пусть Σ — триангулируемая ориентируемая открытая поверхность и Δ_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) — последовательность замкнутых областей, удовлетворяющих следующим условиям:

1) граница каждой области Δ_i является простой замкнутой кривой γ_i на Σ;

2) для любого i имеем $\Delta_{i+1} \subset \Delta_i$;

3) $$\bigcap_{i=0}^{\infty} \Delta_i = 0.$$

Последнее условие показывает, что Δ_i не компактны на Σ, так как в противном случае пересечение $\bigcap_{i=0}^{\infty} \Delta_i$ содержало бы по крайней мере одну точку из Σ.

---

[1]) Формула Гурвица была обобщена С. Стоиловым в работе Stoïlow S., Du nombre des points de ramification des transformations intérieures sur une variété topolohique à deux dimensions, *Bull. des Sc. Math.* séria 2, 57 (1933), 355—376. См. Principes topologiques..., ch. VI, sect. IV p. 135—139.

По определению, каждой такой последовательности областей Δ_i, удовлетворяющих этим трем условиям, соответствует *граничный элемент* α поверхности Σ, а Δ_i образуют *определяющую последовательность для* α.

В п. 35 мы докажем, что на любой открытой поверхности существуют определяющие последовательности, а следовательно, граничные элементы.

Две определяющие последовательности Δ_i и Δ_i' на одной и той же поверхности называются *эквивалентными*, если каждому натуральному n соответствуют натуральные числа ν и μ, такие, что

$$\Delta_n \supset \Delta_\nu', \tag{26}$$

$$\Delta_n' \supset \Delta_\mu. \tag{27}$$

Заметим, что любое из включений (26) и (27) влечет за собой второе. Действительно, если (26) справедливо, то области Δ_i не могут быть внешними по отношению к Δ_n', так как каждая Δ_i содержит области Δ_ν' с достаточно большим номером ν; последние же области также содержатся в Δ_n', если $\nu > n$. Однако условие 3) показывает, что при достаточно большом μ область Δ_μ не содержит точек из γ_n', а следовательно, $\Delta_n' \supset \Delta_\mu$.

По определению, две эквивалентные последовательности определяют один и тот же граничный элемент.

Понятия определяющей последовательности и эквивалентности топологически инвариантны. Отсюда следует, что любое топологическое отображение одной поверхности на другую устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между их граничными элементами [1]).

34. Полиэдрические области, аппроксимирующие Σ. Пусть T_i — треугольники некоторой триангуляции Σ. При помощи этих треугольников мы построим последовательность

$$\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots \tag{28}$$

полиэдрических областей, аппроксимирующих Σ и обладающих следующими свойствами:

1) при любом n имеем $\Pi_n \subset \operatorname{int} \Pi_{n+1}$;

[1]) В качестве примера можно рассмотреть плоскую область Ω с границей F. Вообще говоря, F — это замкнутое множество, состоящее из континуумов и из точек, не принадлежащих никакому континууму из F. Каждый такой континуум или каждая такая точка представляет собой граничный элемент области Ω, который определяется различными эквивалентными последовательностями Δ_i. Так, например, единичный круг обладает единственным граничным элементом.

2) $\bigcup_i \Pi_i = \Sigma$;

3) при любом n не существует кривой на Σ, лежащей вне Π_n и соединяющей два различных контура Π_n.

Из этого последнего условия вытекает, что число открытых областей, образующих множество $\Sigma - \Pi_n$, равно числу контуров Π_n, т. е. границей каждой из этих областей служит лишь один такой контур.

Рассмотрим треугольник T_0 и все треугольники, обладающие общей вершиной или стороной с T_0. Эти треугольники (вместе с T_0) образуют полиэдрическую область P, которую, возможно, придется расширить [1]), чтобы ее контуры были простыми. Если P удовлетворяет условию 3), то мы возьмем $\Pi_0 = P$. В противном случае рассмотрим цепь треугольников T_i, внешнюю по отношению к P, соединяющую один из контуров P с другим [2]). Множество, состоящее из P и из этой цепи, является полиэдрической областью с меньшим числом контуров, чем область P'. Действительно, два контура области P, соединенные цепью треугольников, заменяются единственным контуром области P', а новых контуров мы не прибавляем. Если P' не удовлетворяет условию 3), то, повторяя эту операцию, мы уменьшим число контуров P' на единицу. После конечного числа операций мы придем к полиэдрической области, либо удовлетворяющей условию 3), либо ограниченной единственным контуром. В качестве Π_0 возьмем эту последнюю область. Пусть Γ_h — некоторый контур области Π_0. Рассмотрим все треугольники T_i, имеющие общую вершину или сторону с Γ_h. Множество этих треугольников образует вместе с Π_0 полиэдрическую область P_h, к которой мы снова применим процесс, примененный выше к P. Таким образом, получатся полиэдрические области P_1^h, каждая из которых имеет с Π_0 только общий контур Γ_h [3]) и удовлетворяет условию 3). Положим, по определению,

$$\Pi_1 = \Pi_0 + \bigcup_h P_1^h.$$

Продолжая этот процесс, мы образуем последовательность Π_n со свойствами 1)—3), так как в силу связности Σ мы исчерпаем при помощи такого построения множество всех треугольников T_i.

35. Пользуясь построенной в предыдущем пункте последовательностью Π_n, мы покажем, что *любая открытая поверхность*

[1]) См. сноску [2]) на стр. 232.

[2]) Для построения этой цепи, возможно, придется изменить триангуляцию Σ в окрестности кривой, соединяющей эти контуры.

[3]) Так как Γ_h разбивает Σ, то Γ_h отделяет треугольники из P_1^h от Π_0.

обладает по крайней мере одним граничным элементом. С этой целью рассмотрим открытое множество $G_0 = \Sigma - \Pi_0$, состоящее из конечного числа ν попарно непересекающихся открытых областей, каждая из которых ограничена одним из контуров области Π_0. Пусть

$$G_0^0,\ G_0^1,\ G_0^2,\ \ldots,\ G_0^{\nu} \tag{29}$$

— эти компоненты G_0. Так как поверхность Σ открыта, последовательность Π_n не может содержать только конечное число членов, и поэтому последовательность (29) содержит по крайней мере один член, например G_0^0, имеющий общие точки со всеми множествами $G_m = \Sigma - \Pi_m (m > 0)$.

Обозначим через

$$G_1^0,\ G_1^1,\ \ldots,\ G_1^{\nu_1}$$

компоненты G_1, содержащиеся в G_0^0. По крайней мере одна из них, например G_1^0, содержит точки из всех множеств G_m $(m > 1)$. Продолжая таким образом, получаем бесконечную последовательность

$$G_0^0,\ G_1^0,\ G_2^0,\ \ldots,\ G_n^0,\ \ldots \tag{30}$$

открытых областей, причем граница каждой из них в Σ является замкнутой ломаной триангуляции (контуром некоторого Π_i) и каждая из них включена в предыдущую. Не существует точки, общей для всех этих областей, так как любая точка из Σ лежит внутри некоторого Π_i, а последовательность (30) содержит области из G_i, т. е. из дополнения к Π_i. Замкнутые области $\overline{G}_i^0$ образуют на Σ определяющую последовательность. Следовательно, каждая открытая поверхность Σ обладает по крайней мере одним граничным элементом. Замкнутая поверхность не имеет граничных элементов, так как в силу ее компактности на ней не может выполняться условие 3).

36. Любой граничный элемент можно получить при помощи определяющей последовательности, полученной так же, как последовательность (30) получается из последовательности аппроксимирующих полиэдрических областей (28). Действительно, пусть

$$\Delta_0,\ \Delta_1,\ \ldots,\ \Delta_n,\ \ldots \tag{31}$$

— произвольная определяющая последовательность элемента α. Нужно построить определяющую последовательность, аналогичную (30) и эквивалентную последовательности (31). Для этого достаточно показать, что каждой области Δ_n из (31) соответствует компонента H_{ν_n} некоторого множества $G_{\nu_n} = \Sigma - \Pi_{\nu_n}$, где ν_n

неограниченно возрастает одновременно с n, так что

$$H_{\nu_0},\ H_{\nu_1},\ \ldots,\ H_{\nu_n},\ \ldots$$

является определяющей последовательностью, причем

$$H_{\nu_n} \subset \Delta_n.$$

Возьмем ν_0 достаточно большим, таким образом, чтобы область Π_{ν_0} покрывала границу Δ_0 на Σ. Так как область Δ_0 не компактна, а Π_{ν_0} компактна, то в Δ_0 существуют точки из G_{ν_0}, и, следовательно, по крайней мере одна компонента множества G_{ν_0} содержится в Δ_0. Пусть $H^0_{\nu_0}$, $H^1_{\nu_0}$, $\ldots$, $H^p_{\nu_0}$ — все компоненты множества G_{ν_0}, лежащие внутри Δ_0. По крайней мере одна из них, обозначим ее H_{ν_0}, содержит точки из каждой области Δ_n. Рассуждая так же, как в п. 34, когда мы установили, что эквивалентность определяющих областей может быть определена при помощи одного только соотношения (26) или (27), можно показать существование такого номера $m > 0$, что

$$\Delta_m \subset H_{\nu_0}.$$

Применяя к Δ_m рассуждение, использованное выше для Δ_0, определяем компоненту H_{ν_m} множества G_{ν_m} со свойством

$$H_{\nu_m} \subset \Delta_m.$$

Для индексов i между 0 и m возьмем $\nu_i = \nu_m$. Тогда

$$H_{\nu_i} \subset \Delta_i.$$

Продолжая таким образом, мы определим такое $m' > m$, что

$$\Delta_{m'} \subset H_{\nu_m}$$

и т. д. Это приведет нас к последовательности H_{ν_n}, удовлетворяющей требуемым условиям. Последовательность H_{ν_n} будет определяющей последовательностью, эквивалентной Δ_n. Доказанное предложение показывает важное значение аппроксимирующих полиэдрических областей: они дают *нормальные* определяющие последовательности для граничных элементов.

37. Множество граничных элементов α открытой поверхности Σ образует *идеальную границу* [1]) поверхности. В п. 33 мы видели, что множества $\{\alpha\}$ и $\{\alpha'\}$ граничных элементов двух гомеоморфных поверхностей Σ и Σ' могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие. Вводя топологию на идеальной границе, мы уточним условия, при которых это соответствие можно рас-

[1]) Это название оправдывается тем, что граница не определяется при помощи точек.

сматривать как гомеоморфизм. С этой целью дадим следующее определение.

Последовательность граничных элементов

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

с определяющими последовательностями

$$\{\Delta_i^1\}, \{\Delta_i^2\}, \ldots, \{\Delta_i^n\}, \ldots$$

сходится к граничному элементу α с определяющей последовательностью $\{\Delta_i\}$, если для любого p существует такое N, что при $n > N$

$$\Delta_i^n \subset \Delta_p,$$

как только i больше, чем подходящим образом выбранное число I_n, вообще говоря, зависящее от n.

Это определение не зависит от рассматриваемых определяющих последовательностей; число N зависит только от p и от α_n.

Взаимно однозначное соответствие между множествами $\{\alpha\}$ и $\{\alpha'\}$ называется *гомеоморфизмом*, если каждой последовательности элементов α_n, сходящейся к α, соответствует последовательность элементов α_n', сходящаяся к α', и наоборот.

38. Классификация граничных элементов. Граничный элемент α поверхности Σ называется элементом *первого рода*, если для некоторой определяющей последовательности Δ_i, соответствующей α, внутренность Δ_n при достаточно большом n является поверхностью рода нуль. Род элементов не изменяется при топологическом отображении и не зависит от выбранной определяющей последовательности (так как образ поверхности рода нуль также является поверхностью рода нуль). Поверхность конечного рода обладает только граничными элементами первого рода. Действительно, одна из полиэдрических аппроксимирующих областей Π_n (28) имеет тот же род, что и Σ. Тогда области Π_m ($m > n$) также имеют тот же род, что и Σ, а следовательно, компоненты множества $\Sigma - \Pi_m$ подобны однолистным.

Любой граничный элемент, который не является элементом первого рода, называется *элементом второго рода*.

39. Относительно топологической характеристики открытых триангулируемых и ориентируемых поверхностей Б. Керекьярто доказал следующую теорему: [1])

---

[1]) См. B de Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie, Berlin, 1923, Кар. V, § 1, S. 170, или Stoïlow S., Principes topologiques ..., ch. IV, sect. II—III, p. 92—101. Керекьярто рассматривает также случай неориентируемых поверхностей, когда существуют граничные элементы 3-го рода.

Для того чтобы две открытые ориентируемые поверхности Σ *и* Σ' *были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковый род и чтобы множества их граничных элементов первого рода соответствовали друг другу при некотором гомеоморфизме множеств всех граничных элементов* $\{\alpha\}$ *и* $\{\alpha'\}$.

Если род поверхности конечен, то не существует граничных элементов второго рода; следовательно, для гомеоморфности рассматриваемых поверхностей достаточно, чтобы они были одинакового рода и чтобы существовал гомеоформизм между $\{\alpha\}$ и $\{\alpha'\}$.

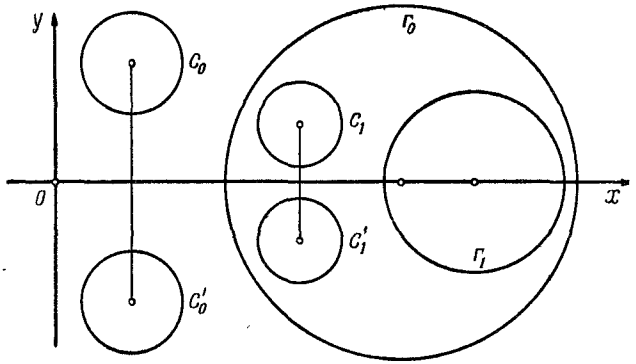

Рис. 42.

Необходимость условия очевидна, а достаточность устанавливается при помощи следующего *канонического представления открытых поверхностей.*

Пусть Σ — открытая ориентируемая поверхность и Π_n — последовательность аппроксимирующих полиэдрических областей для Σ (п. 34). Чтобы канонически представить полиэдрическую область Π_0 рода p_0 с μ_0 контурами, возьмем $2p_0$ окружностей на плоскости (z), образующих пары $\{C_0, C_0'\}$, симметричные относительно действительной оси, и μ_0 окружностей $\{\Gamma_0\}$ с центрами на действительной оси. Выберем эти окружности таким образом, чтобы они были внешними по отношению друг к другу (рис. 42). Далее, как в п. 28, отобразим полиэдрическую область Π_0 на внешнюю по отношению к этим окружностям область D_0 так, чтобы симметричные точки на C_0 и C_0' представляли одну и ту же точку на Π_0, а контуры Π_0 отображались на $\{\Gamma_0\}$. Каждому контуру области Π_0, а следовательно, каждой окружности Γ_0 соответствует область на Σ, которая принадлежит нормальной определяющей последовательности некоторого граничного элемента поверхности Σ. Эта область отображается в (z) на внутренность соответствующей

окружности Γ_0; для этого мы продолжаем отображение области Π_0 через Γ_0 следующим образом. Множество $\overline{\Pi_1 - \Pi_0}$ состоит из μ_0 полиэдрических областей, которые имеют общий контур с Π_0. Каждая из этих компонент отображается канонически на внутренность соответствующей окружности Γ_0. Следовательно, внутри этой окружности Γ_0 берется некоторое число (равное удвоенному роду компоненты) окружностей $\{C_1, C_1'\}$, симметричных относительно действительной оси, и некоторое число (равное числу контуров, отличных от Γ_0) окружностей $\{\Gamma_1\}$ с центрами на действительной оси (рис. 42).

Таким же образом следует поступить со всеми окружностями $\{\Gamma_0\}$, а затем отобразить Π_1 на область D_1, внешнюю по отношению к окружностям $\{C_0, C_0'\}$, $\{C_1, C_1'\}$ и $\{\Gamma_1\}$, склеивая отображения областей Π_0 и $\overline{\Pi_1 - \Pi_0}$ вдоль окружностей $\{\Gamma_0\}$. Таким способом мы отобразим последовательно области Π_2, Π_3, ..., Π_n, ..., выбирая окружности $\{\Gamma_n\}$ с радиусами, стремящимися к нулю одновременно с $\frac{1}{n}$. Любая последовательность кругов Γ_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), где $\Gamma_n \subset \Gamma_{n-1}$, определяет в точности одну точку на действительной оси. Обозначим через F множество этих точек. Оно замкнуто и ограничено. Указанное построение приводит к каноническому отображению H поверхности Σ на область

$$D = \bigcup_n D_n,$$

дополнительную к внутренностям окружностей $\{C_n\}$ и $\{C_n'\}$ и к множеству F. Две симметричные точки окружностей C_n и C_n' представляют одну и ту же точку поверхности Σ. Любая другая точка из D представляет одну и только одну точку этой поверхности.

Каждому граничному элементу Σ соответствует точка из F, и обратно. Действительно, каждой нормальной определяющей последовательности граничного элемента соответствует последовательность кругов Γ_n, определяющая точку из F, а именно последовательность кругов Γ_n, на внутренность которых отображаются области нормальной последовательности при отображении H. Ясно, что это соответствие является гомеоморфизмом между множеством $\{\alpha\}$ граничных элементов Σ и множеством F.

Пусть $\{\omega\}$ — множество центров окружностей $\{C\}$. Точки F, соответствующие элементам α первого рода, не являются предельными для точек из $\{\omega\}$. Обозначим через F_1 эти точки и через F_2 — множество $F - F_1$. Все точки из F_2 являются

предельными точками множества $\{\omega\}$ и соответствуют элементам α второго рода.

40. Для того чтобы полностью доказать теорему Керекьярто, мы используем следующие леммы: [1])

1°. *Пусть A и B — два ограниченных плоских множества и A' и B' — их производные множества. Предположим, что*

$$AA' = 0 \text{ и } BB' = 0$$

и что между A' и B' существует топологическое соответствие t. Тогда t можно продолжить на $\overline{A}$ и $\overline{B}$, т. е. существует топологическое соответствие T между $\overline{A}$ и $\overline{B}$, совпадающее с t на A' и B'.

2°. *Пусть заданы замкнутые ограниченные вполне разрывные множества F и F', лежащие на плоскостях R и R', и топологическое соответствие t между F и F'. Тогда это соответствие может быть продолжено на R и R', т. е. существует топологическое отображение T плоскости R на R', совпадающее с t на F и F'. Более того, можно потребовать, чтобы бесконечно удаленные точки обеих плоскостей соответствовали друг другу.*

Приведем теперь доказательство теоремы.

Рассмотрим сначала две поверхности Σ и Σ' бесконечного рода и предположим, что между множествами $\{\alpha\}$ и $\{\alpha'\}$ существует гомеоморфизм, при котором элементы первого рода соответствуют друг другу. Представляя канонически Σ и Σ' при помощи отображений H и H', устанавливаем топологическое соответствие между F и F', при котором F_1 соответствует F_1', а F_2 соответствует F_2'. Но F_2 и F_2' являются производными множествами для $\{\omega\}$ и $\{\omega'\}$, не содержащих своих предельных точек. Применяя лемму 1°, получаем топологическое соответствие между $F \cup \{\omega\}$ и $F' \cup \{\omega'\}$. Эти множества замкнуты, ограничены и разрывны. Поэтому лемма 2° дает возможность продолжить это соответствие до отображения плоскостей (z) и (z'). Далее, это соответствие видоизменяется так, чтобы окружности $\{C\}$, центры которых соответствуют друг другу, отображались друг на друга, причем симметричные точки должны иметь симметричные образы. Так как канонические образы Σ и Σ' при отображениях H, соответственно H', топологически эквивалентны, то Σ и Σ' гомеоморфны.

Во втором случае Σ и Σ' имеют один и тот же конечный род. Не существует множеств F_2 и F_2', а $\{\omega\}$ и $\{\omega'\}$ состоят из од-

[1]) Stoïlow S., Principes topologiques ..., ch. IV, sect. III, §§ 1—2, p. 93—98.

ного и того же конечного числа точек. Лемма 2° снова дает возможность продолжить соответствие между $F \cup \{\omega\}$ и $F' \cup \{\omega'\}$ на плоскости (z) и (z'), откуда вытекает, как и выше, что Σ и Σ' гомеоморфны.

41. Каноническое представление Σ (п. 39) дает возможность построения нормальных форм (аналогичных обобщенному тору в случае замкнутых поверхностей) для всех топологических моделей открытых римановых поверхностей [1]). Достаточно положить верхнюю полуплоскость на нижнюю и склеить симметричные точки окружностей C и C'.

Простой способ образования всех топологических моделей ориентируемых поверхностей был дан П. Кёбе. Рассматриваются следующие три типа полиэдрических областей:

1) обыкновенный тор, из которого исключена внутренность двух непересекающихся жордановых областей;

2) сфера, из которой исключена внутренность трех непересекающих жордановых областей;

3) плоская жорданова область.

Любую ориентируемую поверхность можно получить путем последовательного склеивания конечного или бесконечного числа областей 1), 2) или 3), деформируя их края таким образом, чтобы они совпадали. Если построенная поверхность обладает границей, то точки граничных кривых следует исключить из этой поверхности.

§ 7. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

42. Как мы видели в п. 3, двумерное многообразие становится римановой поверхностью лишь тогда, когда на нем определена конформная метрика, придающая смысл понятию аналитической функции на этом многообразии.

Пусть R — абстрактная риманова поверхность, Ω — некоторая область на R и $F(p)$ — действительная или комплексная однозначная функция, определенная в Ω. Если v_{p_0} — параметрическая окрестность точки $p_0 \in \Omega$ (предполагается, что эта окрестность содержится в Ω), z — локальный параметр, а $z = t_{p_0}(p)$ — параметрическое отображение, то функцию $F(p)$ можно изучать в параметрическом круге $K_{p_0}: |z| < 1$ как функцию комплексного переменного z

$$F(p) = F\left[t_{p_0}^{-1}(z)\right] = f(z).$$

[1]) Множество различных моделей имеет мощность континуума. См. B. de Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie, Kap. V, § 1, S. 171.

Рассмотрим другую параметрическую окрестность $v^*_{p_0}$, содержащую некоторую точку $p \in v_{p_0}$. В окрестности $v^*_{p_0}$ функции $F(p)$ соответствует функция

$$F\left[t^{-1}_{p_0^*}(z^*)\right] = f^*(z^*).$$

Тогда в точке p имеем

$$f(z) = f^*(z^*), \tag{32}$$

если $z = t_{p_0}(p)$, а $z^* = t_{p_0^*}(p)$.

Следовательно, определенной в Ω функции $F(p)$ соответствуют в различных параметрических окрестностях функции $f(z)$, связанные между собой соотношением *инвариантности* (32).

Комплексная функция $F(p)$ является *аналитической* голоморфной или мероморфной в Ω, если $f(z)$ соответственно голоморфна или мероморфна в соответствующем параметрическом круге.

Действительная функция $U(p)$ называется *гармонической* [1]) в Ω, если $u(z) = U\left[t^{-1}_{p_0}(z)\right]$ является гармонической в K_{p_0}.

Если R — риманова накрывающая, $R = (z)^V_T$, то единственное отличие состоит в частном виде локального параметра, который выражается тогда во всех точках R при помощи z (п. 18). Таким образом мы будем говорить, что определенная однозначно в области $\Omega \subset V$ функция $w = F(p)$ является *аналитической* голоморфной или мероморфной в $[\Omega, T(\Omega)]$, если для каждой точки (p_0, z_0) этой области существует круг $\Gamma \subset R$ с центром (p_0, z_0), в котором функция $F\left[T^{-1}(z)\right]$ допускает представление вида

$$w = \sum_{n=\mu}^{\infty} c_n (z - z_0)^{\frac{n}{k}}, \tag{33}$$

где k — число листов Γ, а μ — целое число [2]). При $z_0 = \infty$ вместо $\left(z - z_0\right)^{\frac{1}{k}}$ следует брать $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{k}}$.

В дальнейшем, если это не будет приводить к недоразумениям, мы будем обозначать функции на абстрактных римановых поверхностях просто через $f(z)$, где z — параметр, соответствующий произвольной окрестности точки p.

---

[1]) Гармоническая функция называется также потенциалом.

[2]) Очевидно, что F голоморфна, если $\mu \geqslant 0$, при любом $p \in \Omega$.

Замечание. Аналитическая функция $w = f(z)$, однозначная на римановой поверхности R, определяет внутреннее отображение R в сферу (w). Таким образом, риманову поверхность обратной функции $z = f^{-1}(z)$ мы получаем, как накрывающую поверхность

$$R' = (w)^R_{w=f(z)}.$$

43. Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в области $\Omega \subset R$. Продифференцировав ее по z, мы получаем в каждой параметрической окрестности v_{p_0} функцию $\frac{df}{dz} = f'(z)$. Однако связь между производными относительно различных параметров не определяется уже законом инвариантности (32). Действительно, в пересечении $v_{p_0} \cap v^*_{p_0}$ имеем соотношение

$$\frac{df}{dz} = \frac{df^*}{dz^*} \cdot \frac{dz^*}{dz}.$$

Следовательно, при переходе от одного параметра к другому производная преобразуется как *коварианта*.

Этот результат свидетельствует о важности изучения ковариант на римановых поверхностях. Они определяются следующим образом: ковариантой $f_p(z)$ (или сокращенно $f(z)$) называется величина, определенная в области $\Omega \subset R$, которая зависит не только от точки $p \in \Omega$, но и от соответствующего локального параметра z, и которая преобразуется при замене параметра по закону ковариантности

$$f_p(z) = f_{p^*}(z^*) \frac{dz^*}{dz}. \tag{34}$$

Аналитической ковариантой называется коварианта, которая является аналитической функцией каждого локального параметра. Она удовлетворяет в параметрическом круге K_{p_0} соотношениям Коши — Римана

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial y},$$

где $z = x + iy$.

Различие между ковариантой и функцией не проявляется при локальном исследовании, пока мы остаемся внутри некоторой параметрической окрестности и не изменяем параметра; оно состоит в различном способе преобразования (34) и (32) коварианты и функции при замене параметра. В теории аналитических функций на конечной плоскости, где связь между локальными параметрами $z - z_0$ определяется параллельными переносами $\left(\text{а, следовательно, } \frac{dz^*}{dz} = 1\right)$ производные могут изучаться как функции. Различие

проявляется лишь при рассмотрении бесконечно удаленной точки комплексной плоскости, для которой в качестве локального параметра берется $\frac{1}{z}$. Другой случай, когда любая коварианта является одновременно и функцией, осуществляется на торе. Действительно, тор можно получить из комплексной плоскости путем отождествления точек, сравнимых (конгруэнтных) относительно решетки параллелограммов, порождаемой числами ω_1 и ω_2 $\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right.$ не равно действительному числу$\left.\right)$, т. е. точек, эквивалентных относительно группы параллельных переносов, порождаемой переносами $z' = z + \omega_1$ и $z'' = z + \omega_2$. Любой фундаментальный параллелограмм решетки образует полную систему представителей классов сравнимых точек. Отождествление сравнимых точек равносильно склеиванию замкнутого параллелограмма вдоль противоположных сторон, чтобы точки, отличающиеся на ω_1, соответственно на ω_2, совпадали [1]). Следовательно, при надлежащем выборе локальных параметров на торе соотношения соседства являются параллельными переносами и не существует различия между соотношениями (32) и (34).

На римановой накрывающей можно избежать изучения ковариант, если взять в каждой точке p_0 производную относительно локального параметра, который полностью определяется переменной на накрываемой сфере.

44. В то время как производная аналитической функции $f(z)$ ковариантна, ее дифференциал

$$f'(z)\,dz$$

инвариантен. Действительно, при замене параметра

$$\frac{df}{dz}\,dz = \frac{df^*}{dz^*}\,dz^*.$$

Вообще, каждой коварианте $\varphi(z)$ определенной в Ω, мы сопоставим *дифференциал* $\varphi(z)\,dz$, который однозначен в Ω [2]). Если коварианта является аналитической, то дифференциал также будет называться аналитическим.

---

[1]) Каждой эллиптической функции соответствует на торе однозначная аналитическая функция, регулярная всюду, за исключением конечного числа полюсов. См., например, Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, гл. VIII, § 1, 5, стр. 612.

[2]) Однако можно рассматривать также дифференциал любой дифференцируемой функции $f(z)$, взяв $df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$. Этот дифференциал также инвариантен при замене параметра $z \leftrightarrow z^*$.

Если в каждой отмеченной окрестности v_{p_0} определена функция $\varphi_{p_0}(z)$, голоморфная и однозначная в круге $|z|<1$, и если при замене параметра $z \longleftrightarrow z^*$ для $p \in v_{p_0} \cap v^*_{p_0}$ и $z = t_{p_0}(p)$, соответственно $z^* = t_{p_0}^*(p)$, имеем

$$\varphi_{p_0}(z)\,dz = \varphi^*_{p_0}(z^*)\,dz^*, \tag{35}$$

то говорят, что на R определен *однозначный и регулярный (голоморфный) аналитический дифференциал.*

45. Интеграл дифференциала по спрямляемому непрерывному пути (или по ломаной) определяется при помощи соответствующего интеграла в параметрическом круге. Если путь не содержится в одной окрестности, то его можно покрыть конечным числом параметрических окрестностей и разложить на пути, содержащиеся в таких окрестностях; интеграл равен, по определению, сумме соответствующих интегралов. Результат интегрирования не зависит от использованных окрестностей; это следует из свойства инвариантности дифференциалов [1]).

Предположим, что рассматриваемый дифференциал является аналитическим, регулярным и однозначным. Тогда, по теореме Коши [2]), в каждой параметрической окрестности и вообще в каждой односвязной области его интеграл зависит только от концов пути.

Таким образом, интеграл регулярного и однозначного в области $\Omega \subset R$ аналитического дифференциала $\varphi(z)\,dz$ является функцией (однозначной или многозначной в Ω), так как он инвариантен при замене параметра $z \longleftrightarrow z^*$.

Обозначая через $w = u + iv$ эту функцию, $w = \int \varphi\,dz$, получаем $dw = du + i\,dv = \varphi\,dz$.

46. В то время как интеграл по кривой был введен для дифференциалов (ковариант), интеграл по области определяется для величин T, называемых *тензорами*, которые зависят как от точки $p \in R$, так и от локального параметра z, и которые при замене параметра $z \longleftrightarrow z^*$ преобразуются по закону

$$T^* = T\left|\frac{dz}{dz^*}\right|^2 = T\frac{D(x,\ y)}{D(x^*,\ y^*)}, \tag{36}$$

где $\dfrac{D(x,\ y)}{D(x^*,\ y^*)}$ — якобиан преобразования $z \longleftrightarrow z^*$.

[1]) Очевидно, что интеграл дифференциала может рассматриваться также как интеграл соответствующей ковариванты, которая считается непрерывной. Не имеет смысла говорить об интеграле функции на римановой поверхности, так как если $f(z)$ — произвольная функция, то дифференциал $f(z)\,dz$ не обязательно инвариантен при замене параметра.

[2]) Том I, гл. III, § 3, п. 35, стр. 113.

Пусть T — тензор, непрерывный в области Ω, содержащей полиэдрическую область $\Pi \subset R$. Если Π содержится в параметрической окрестности, то интеграл от T по Π определяется через соответствующий интеграл в параметрическом круге. В общем случае Π разлагается на конечное число полиэдрических областей, каждая из которых содержится в некоторой параметрической окрестности, и интеграл $\int\int_{\Pi} dx\,dy$ определяется как сумма интегралов, соответствующих частичным областям. Интеграл не зависит от использованных параметров.

В частности, на римановой поверхности можно рассматривать *интеграл Дирихле*.

Предположим, что $f(z)$ — однозначная функция, непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой области $\Omega \subset R$, содержащей полиэдрическую область Π. Так как

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

является тензором [1]), то имеет смысл интеграл Дирихле этой функции по области Π

$$D_{\Pi}(f) = \int\int_{\Pi} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy. \tag{37}$$

Интеграл Дирихле функции f, распространенный на открытую область Ω, равен, по определению, пределу интегралов Дирихле функции f по последовательности полиэдрических областей $\Pi_n \subset \Omega$, образующих исчерпание этой области $\left(\Pi_n \subset \operatorname{int} \Pi_{n+1},\ \bigcup_n \Pi_n = \Omega\right)$.

Таким образом, имеем

$$D_{\Omega}(f) = \lim_{n\to\infty} D_{\Pi_n}(f), \tag{38}$$

где $D_{\Omega}(f)$ — конечное или бесконечное число. В частности, это определение применимо в случае $\Omega = R$ (где R — открытая поверхность).

Если f — аналитическая функция $w = u + iv$, то интеграл

$$D_{\Pi}(w) = \int\int_{\Pi} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 dx\,dy \tag{39}$$

также называется интегралом Дирихле дифференциала dw или коварианты $\frac{dw}{dz}$.

---

[1]) Это свойство указано в гл. IV, п. 2, 3°.

Очевидно, что если $\varphi = \frac{dw}{dz}$, то равенство (39) представляется в виде

$$D_{\Pi}(w) = \int\int_{\Pi} \varphi\bar{\varphi}\, dx\, dy.$$

При этом интеграл Дирихле гармонической функции u равен

$$D_{\Pi}(u) = D_{\Pi}(w)\ ^{1}). \tag{40}$$

Аналогичные соотношения имеют место и для Ω.

47. Из способа определения аналитических и гармонических функций вытекает, что все локальные свойства, доказанные для таких функций на плоскости, сохраняются также на римановых поверхностях. Напомним, в частности, следующие интегральные соотношения, которые мы будем применять в дальнейшем.

1°. Если u — гармоническая функция в области Ω, содержащей полиэдрическую область Π [2]), с границей Γ, образованной жордановыми кривыми, каждая из которых состоит из конечного числа аналитических дуг, то

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0, \text{ или } \int_{\Gamma} d\bar{u} = 0. \tag{41}$$

Здесь мы обозначили через ds элемент дуги на Γ и через $\frac{\partial}{\partial n}$ — производную по внутренней нормали к Γ.

2°. Кроме того,

$$D_{\Pi}(u) = -\int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int_{\Gamma} u\, d\bar{u}, \tag{42}$$

где $\bar{u}$ — сопряженная к u гармоническая функция, а интеграл берется в положительном направлении относительно Π.

3°. Теорема Коши [3]) применима теперь к ковариантам или к аналитическим дифференциалам (а не к самим функциям): *если φ — регулярная и однозначная в области $\Omega \supset \Pi$ аналитическая ковариантa, то*

$$\int_{\Gamma} \varphi\, dz = 0. \tag{43}$$

[1]) Заметим, что $D_{\Pi}(w)$ — это площадь образа Π при отображении $w(z)$, если считать каждую область с соответствующей кратностью накрытия.

[2]) Формулы (41) и (42) имеют место также в том случае, когда функция u гармонична внутри Π и непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка в Ω. Они следуют из формул (14) гл. I и (19) гл. IV, примененных к каждому треугольнику из Π в предположении, что триангуляция достаточно мелкая для того, чтобы каждый треугольник содержался в некоторой параметрической окрестности.

[3]) Том I, гл. III, § 3, п. 36—37, стр. 113—115.

Для аналитических ковариант или дифференциалов определяется также понятие *вычета*. Предположим, что φ — однозначная аналитическая коварианта, определенная в окрестности точки p_0, за исключением самой этой точки. Функция $\varphi(z)$ в параметрическом круге K_{p_0} имеет изолированную особенность в точке $z=0$. Поэтому она допускает разложение в ряд Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n. \tag{44}$$

Вычетом φ в точке p_0 называется коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ в разложении (44)[1]). Вычет не зависит от использованного параметра. Его можно определить также при помощи соотношения

$$\int_\gamma \varphi(z)\,dz = 2\pi i c_{-1}, \tag{45}$$

где γ — спрямляемая жорданова кривая в окрестности p_0, охватывающая эту точку. При помощи этого определения можно обобщить также теорему о вычетах.

Аналитическое продолжение функции определяется так же, как в случае плоских областей; оно приводит к понятию аналитической функции в целом (аналитического образа) как совокупности элементов, полученных при помощи продолжения из некоторого исходного элемента[2]).

Из теорем об аналитическом продолжении, остающихся справедливыми на римановых поверхностях, мы будем в особенности часто пользоваться теоремой о монодромии.

48. В заключение этого раздела рассмотрим задачу Дирихле для полиэдрических областей на римановой поверхности.

Предположим, что на границе Γ полиэдрической области $\Pi \subset R$ задана ограниченная функция, непрерывная за исключением конечного числа точек. Задача Дирихле заключается в построении гармонической функции, однозначной и ограниченной внутри Π и принимающей на Γ заданные значения в каждой точке их непрерывности.

Если Π лежит в некоторой параметрической окрестности, то решение этой задачи сводится при помощи параметрического ото-

---

[1]) Том I, гл. III, § 3, п. 48, стр. 130.

[2]) Для простоты элементы функций берутся в параметрических окрестностях. Рассматриваются также аналитическое продолжение ковариант и гармоническое продолжение. См. Неванлинна Р., Униформизация, гл. III, § 3, стр. 123—129 и § 6, стр. 150—152.

бражения к решению задачи Дирихле для образа П в параметрическом круге (гл. III, § 2). Общий случай решается затем при помощи альтернирующего метода Шварца (гл. III, § 1)[1]).

[1]) На открытой римановой поверхности задачу Дирихле можно ставить не только для полиэдрических областей, но и для областей, не компактных на R. В гл. IX, § 3, п. 34 мы решим такую задачу для области $R - \overline{\delta}$, которая получается из R после удаления замкнутой жордановой области $\overline{\delta}$. Относительно задачи Дирихле в общем случае см. Неванлинна Р., Униформизация, гл. X, § 3, стр 355—364.

Глава VIII

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА ЗАМКНУТЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В главах VIII и IX настоящего тома мы построим и изучим простейшие виды гармонических и аналитических функций на замкнутых, соответственно на открытых, римановых поверхностях. Для достижения большей общности и для упрощения изложения мы будем рассматривать абстрактные римановы поверхности, пока свойства накрытия не играют роли. Каждый раз, когда мы будем пользоваться накрывающими поверхностями, это будет специально оговорено.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

1. В силу принципа максимума и минимума на замкнутой римановой поверхности не существует однозначных гармонических функций и регулярных (голоморфных) аналитических функций, не равных тождественно постоянным. Поэтому функции, которые мы построим, должны будут либо обладать особенностями, либо быть многозначными.

С этой целью мы используем сначала альтернирующий метод Шварца для того, чтобы получить возможность строить в многосвязных плоских областях многозначные гармонические функции, различные значения которых отличаются на постоянные.

Пусть D — плоская область, ограниченная $m+1$ жордановыми кривыми C, C', C'', ..., $C^{(m)}$, и пусть M_kN_k ($k=1, 2, \ldots, m$) — m разрезов, проведенных по непересекающимся простым дугам, соединяющим в D кривые C и $C^{(k)}$ ($M_k \in C$, $N_k \in C^{(k)}$) (рис. 43). *Тогда существует функция u, гармоническая и однозначная в разрезанной области D, принимающая на кривых C и $C^{(k)}$ заданные значения φ*[1]) *и имеющая на разрезах M_kN_k постоянные скачки h_k.*

Говорят, что функция u имеет *скачок* h_k на M_kN_k, если функция u продолжается гармонически через M_kN_k в обе стороны, и продолжение u_k^- через M_kN_k равно $u_k^+ - h_k$ (здесь u_k^- и u_k^+ —

[1]) Предполагается, что значения φ ограничены и обладают не более чем конечным числом точек разрыва.

значения функции на берегах $-(M_kN_k)$ и $+(M_kN_k)$, сделанного разреза).

Скачок функции u на M_kN_k равен изменению функции u на замкнутом пути из D, охватывающем только контур $C^{(k)}$ и обходящем его один раз. Он называется также *периодом* u на $C^{(k)}$, так как этот скачок равен $\int\limits_{C^{(k)}} du$.

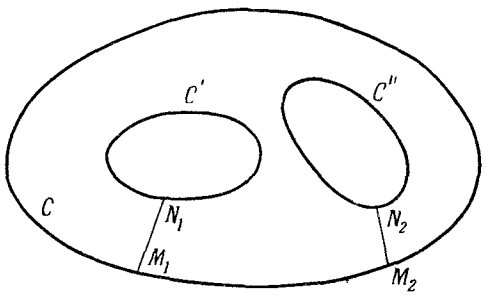

Рис. 43.

Очевидно, контур $C^{(k)}$ ориентирован так, что его начало лежит на $-(M_kN_k)$, а конец — на $+(M_kN_k)$.

Предположим сначала, что область D ограничена только кривыми C и C'. Пусть MN — разрез этой области, φ — заданные

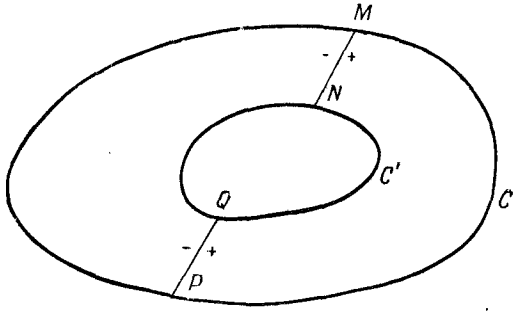

Рис. 44.

значения на C и C' и h — некоторая постоянная (рис. 44). Зададимся целью построить однозначную гармоническую и ограниченную функцию u в разрезанной области D, ограниченной C, C', $+(MN)$ и $-(MN)$, принимающую на C и C' значения φ (в точках непрерывности функции φ) и продолжаемую гармонически через MN так, что если u^+ и u^- — значения функции u на $+(MN)$

и $-(MN)$, то гармоническое продолжение u через MN равно $u^+ - h$.

Решая задачу Дирихле, образуем сначала гармоническую и ограниченную в $D - MN$ функцию u_1, принимающую значения φ на C и C', произвольно заданные значения u_1^+ на $+(MN)$ и значения $u_1^+ - h$ на $-(MN)$ [1]. Затем проведем новый разрез PQ (рис. 44) и, обозначив через $+(PQ)$ и $-(PQ)$ берега этого разреза, определим при помощи решения другой задачи Дирихле гармоническую и ограниченную в $D - PQ$ функцию v_1, принимающую на C и C' значения φ и удовлетворяющую соотношениям

$$v_1 = \begin{cases} u_1 & \text{на } +(PQ), \\ u_1 - h & \text{на } -(PQ). \end{cases}$$

После этого построим последовательно гармонические и ограниченные в $D - MN$, соответственно в $D - PQ$, функции u_n и v_n, равные φ на C и C' и удовлетворяющие соотношениям

$$u_n = \begin{cases} v_{n-1} + h & \text{на } +(MN), \\ v_{n-1} & \text{на } -(MN) \end{cases}$$

и

$$v_n = \begin{cases} u_n & \text{на } +(PQ), \\ u_n - h & \text{на } -(PQ). \end{cases} \tag{1}$$

Следовательно,

$$u_n = v_n \quad \text{на } +(PQ)$$

и

$$u_n = v_{n-1} \quad \text{на } -(MN). \tag{2}$$

Покажем, что пределы последовательностей u_n и v_n существуют.

Функция $u_n - u_{n-1}$ удовлетворяет соотношениям

$$u_n - u_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{на } C \text{ и } C', \\ v_{n-1} - v_{n-2} & \text{на } \pm(MN)\ [2]. \end{cases} \tag{3}$$

Таким образом, из принципа максимума и минимума вытекает, что в любой точке из $D - MN$

$$|u_n - u_{n-1}| \leqslant \omega_{MN} \max_{MN} |v_{n-1} - v_{n-2}|, \tag{4}$$

где через ω_{MN} обозначена гармоническая мера дуг $+(MN)$ и $-(MN)$ относительно области $D - MN$, т. е. гармоническая и

[1]) Эти значения также ограничены и имеют конечное число точек разрыва.

[2]) При рассмотрении разностей скачок на MN уничтожается.

ограниченная в $D-MN$ функция, равная нулю на C и C' и единице на $+(MN)$ и на $-(MN)$.

Аналогично

$$v_n - v_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{на } C \text{ и } C', \\ u_n - u_{n-1} & \text{на } \pm(PQ), \end{cases} \tag{5}$$

а следовательно, в $D-PQ$ имеем

$$|v_n - v_{n-1}| \leqslant \omega_{PQ} \max_{PQ} |u_n - u_{n-1}|, \tag{6}$$

где ω_{PQ} — гармоническая мера дуг $+(PQ)$ и $-(PQ)$ относительно области $D-PQ$.

Введем обозначения:

$$q' = \max_{PQ} \omega_{MN},$$

$$q'' = \max_{MN} \omega_{PQ}$$

и положим

$$q = q'q''.$$

Очевидно, что $q < 1$.

Пользуясь принципом максимума и минимума и соотношениями (3), (4), (5) и (6), получаем

$$\max_{MN} |u_3 - u_2| = \max_{MN} |v_2 - v_1| \leqslant q'' \max_{PQ} |u_2 - u_1| \leqslant q \max_{MN} |u_2 - u_1|,$$

и вообще

$$\max_{MN} |u_{n+1} - u_n| \leqslant q^{n-1} \max_{MN} |u_2 - u_1|.$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n-1} - u_n)$ мажорируется сходящимся рядом $\left(\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}\right) \max_{MN} |u_2 - u_1|$, откуда вытекает равномерная сходимость в $D-MN$ последовательности u_n.

Предел u является гармонической в $D-MN$ функцией, принимающей значения φ на C и C' и имеющей скачок h на MN. Таким же образом доказывается, что предел последовательности v_n существует и является гармонической в $D-PQ$ функцией, принимающей значения φ на C и C' и имеющей скачок h на PQ.

Однако из соотношений (2) вытекает, что

$$u^- = v^- \quad \text{на} \quad -(MN),$$

$$u^+ = v^+ \quad \text{на} \quad +(PQ).$$

Следовательно, $u = v$ в подобласти области D, ограниченной $+(PQ)$ и $-(MN)$.

Так как v не имеет скачка на MN, то

$$u^+ - h = v^- \quad \text{на} \quad +(MN)$$

и функция u^- продолжается гармонически через MN, причем ее продолжение равно $u^+ - h$.

Общий случай произвольного числа контуров рассматривается последовательно.

Например, для трех контуров следует пользоваться функциями u_n и v_n, обладающими скачком на одном из разрезов; например, можно рассматривать u_n и v_n, определенные в $D - M_2N_2$, соответственно в $D - PQ$ (PQ — разрез, соединяющий в D кривые C и C''), и имеющие на M_1N_1 скачок h_1. Существование таких функций вытекает из предыдущего изучения двусвязных областей. Приведенное выше рассуждение применимо и в этом случае, так как разности $u_n - u_{n-1}$ и $v_n - v_{n-1}$ не имеют уже скачков на M_1N_1 и являются гармоническими в $D - M_2N_2$ (соответственно в $D - PQ$).

Доказанная в настоящем пункте теорема даст нам возможность построить, вообще говоря, многозначную гармоническую функцию u, имеющую в области D, ограниченной C, $C^{(k)}$ и разрезами M_kN_k, однозначную ветвь, принимающую на C и $C^{(k)}$ заданные значения и обладающую на M_kN_k заданными постоянными скачками h_k.

Если $h_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), то решенная нами задача сводится к задаче Дирихле, так как функция u однозначна.

2. Ниже мы будем пользоваться следующими предложениями.

1°. *Пусть функция $U(z)$ гармонична в круге $|z| < r$, непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant r$ и $U(0) = 0$.*

Введем обозначения

$$M_t = \max_{|z|=t} U(z), \quad m_t = \min_{|z|=t} U(z).$$

Если $0 < \rho < r$, то существует такое не зависящее от функции $U(z)$ число q ($0 < q < 1$)

$$q = \frac{2\rho}{\rho + r},$$

что

$$M_\rho \leqslant M_r q \quad \text{и} \quad m_\rho \geqslant m_r q, \tag{7}$$

а, следовательно,

$$M_\rho - m_\rho \leqslant q(M_r - m_r). \tag{8}$$

Эти соотношения устанавливаются при помощи формулы Пуассона (гл. I, (25))

$$U(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(re^{i\theta}) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi)} d\theta.$$

Вычтем M_r из обеих частей этого равенства и, применяя формулу (18) гл. I, изменим знак таким образом, чтобы подинтегральное выражение было неотрицательным:

$$M_r - U(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [M_r - U(re^{i\theta})] \frac{r^2-\rho^2}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}\, d\theta.$$

Учитывая, что

$$M_r - U(re^{i\theta}) \geqslant 0$$

и что

$$\frac{r^2-\rho^2}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)} \geqslant \frac{r-\rho}{r+\rho},$$

получаем

$$M_r - U(\rho e^{i\varphi}) \geqslant \frac{r-\rho}{r+\rho}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [M_r - U(re^{i\theta})]\, d\theta.$$

Однако, по предположению,

$$U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})\, d\theta = 0,$$

поэтому последнее неравенство записывается также в виде

$$M_r - U(\rho e^{i\varphi}) \geqslant \frac{r-\rho}{r+\rho} M_r$$

или

$$M_\rho \leqslant q M_r.$$

Неравенство

$$m_\rho \geqslant q m_r$$

является непосредственным следствием принципа минимума и соотношения $q < 1$, а (8) получается из (7) при вычитании.

2°. *Если функция $U(z)$ гармонична в круговом кольце $\rho \leqslant |z| \leqslant r$ и имеет в нем однозначную сопряженную $\overline{U}(z)$, то*

$$\int_0^{2\pi} U(\rho e^{i\theta})\, d\theta = \int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Так как функция $\overline{U}(z)$ однозначна, то

$$\int_{|z|=t} d\overline{U} = 0 \tag{9}$$

при $\rho \leqslant t \leqslant r$.

С другой стороны, полагая $z = te^{i\theta}$, получаем

$$\int\limits_{|z|=t} d\bar{U} = \int\limits_{|z|=t} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta}\, d\theta = t\frac{d}{dt} \int\limits_{|z|=t} U(te^{i\theta})\, d\theta,$$

а следовательно, равенство (9) показывает, что $\int\limits_0^{2\pi} U(te^{i\theta})\, d\theta$ не зависит от t.

§ 2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА ЗАМКНУТЫХ АБСТРАКТНЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

3. Пусть γ — простая замкнутая кривая на торе R, ограничивающая на нем жорданову область δ. Обозначим через A и B параллель и меридиан тора, не имеющие общих точек с γ (рис. 45).

Мы построим гармоническую и многозначную в $R - \overline{\delta}$ функцию, обладающую на A и на B скачками, равными соответственно a и b (где a и b — произвольные действительные числа) [1]).

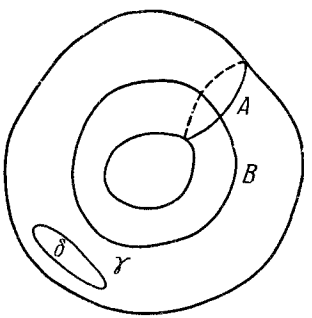

Рис. 45.

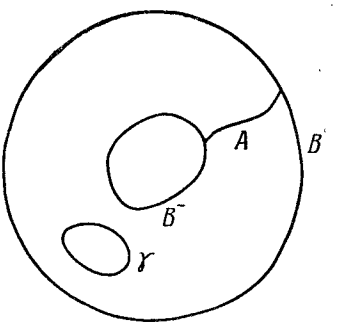

Рис. 46.

Разрезая тор вдоль кривой B, мы получаем полиэдрическую область R^*, подобную однолистной (нулевого рода), ограниченную двумя берегами B^+ и B^- разреза B. На R^* кривая A становится трансверсалью [2]) (рис. 46).

Согласно теореме пункта 1 [3]), можно определить функцию u_1, гармоническую в области, ограниченной кривыми γ, B^+ и B^-,

[1]) Скачок функции на A равен ее периоду на B при подходящей ориентации B.

[2]) Трансверсалью называется простая дуга, расположенная в полиэдрической области, концы которой лежат на контурах этой области.

[3]) Эта теорема доказана для плоских областей, но очевидно, что доказательство переносится без изменений на любую область, подобную однолистной, которая топологически эквивалентна плоской области. — *Прим. перев.*

принимающую на γ, B^+ и B^- заданные значения и имеющую скачок a на A. Выберем значения на B^+ и B^- таким образом, чтобы их разность в точках, соответствующих одной и той же точке на B, была равна b. Обратимся снова к тору; функция u_1 гармонична в $R-\overline{\delta}-A-B$, причем ее скачок на A равен a и она принимает на γ заданные значения, а на берегах разреза B ее значения отличаются на b.

Поступая так же, как в п. 1, мы получаем функцию u с теми же свойствами, которая, однако, продолжается гармонически через B, т. е. имеет на B скачок b.

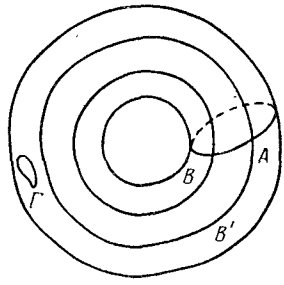

Рис. 47.

С этой целью выберем новую кривую B' с теми же свойствами, что и B, но не имеющую с B общих точек (рис. 47). Кривые B и B' будут теперь играть ту же роль, что и разрезы MN и PQ из п. 1. Согласно приведенным выше замечаниям, можно последовательно построить гармонические соответственно в $R-\overline{\delta}-A-B$ и в $R-\overline{\delta}-A-B'$ функции u_n и v_n, имеющие на A скачок a и принимающие на γ заданные значения, а на обоих берегах кривых B и B' значения, отличающиеся на b. Можно повторить рассуждение п. 1.

Разности $u_{n+1}-u_n$ и $v_{n+1}-v_n$ равны нулю на γ, гармоничны соответственно в $R-\overline{\delta}-B$ и в $R-\overline{\delta}-B'$ и однозначны в $R-\delta$, так как скачки на A и разности значений на B и B' одни и те же при любом n.

Применяя принцип максимума и минимума, получаем

$$\max_B |u_{n+1}-u_n| = \max_B |v_n-v_{n-1}| \leqslant q'' \max_{B'} |v_n-v_{n-1}| = \\ = q'' \max_{B'} |u_n-u_{n-1}| \leqslant q \max_B |u_n-u_{n-1}|,$$

где через q' обозначен максимум на B' гармонической меры дуг B^+ и B^- относительно области $R-\overline{\delta}-B$, через q'' — максимум на B гармонической меры дуг B'^+ на B'^- и через q — произведение $q'q''$. Очевидно, что $q<1$; поэтому последовательности u_n и v_n сходятся соответственно к функциям u и v, гармоническим в $R-\overline{\delta}-B$ и в $R-\overline{\delta}-B'$, принимающим на γ заданные значения и имеющим на A скачок a. Связь между функциями u и v показывает, что u продолжается гармонически через B, и поэтому если обозначить через u^+ и u^- значения этой функции на B^+ и B^-, то $u^+-b=u^-$. Таким образом, u имеет на B скачок b (причем v имеет на B' тот же скачок b).

4. Шаг за шагом приведенная теорема существования распространяется на поверхности R произвольного рода p.

Чтобы можно было сформулировать эту теорему в общем случае, сделаем сначала некоторые топологические замечания относительно обобщенного тора рода p.

Пусть A — простая замкнутая кривая, проходящая через одну из дыр, и B — простая замкнутая кривая, окружающая эту дыру и пересекающая кривую A в единственной точке P (рис. 48а).

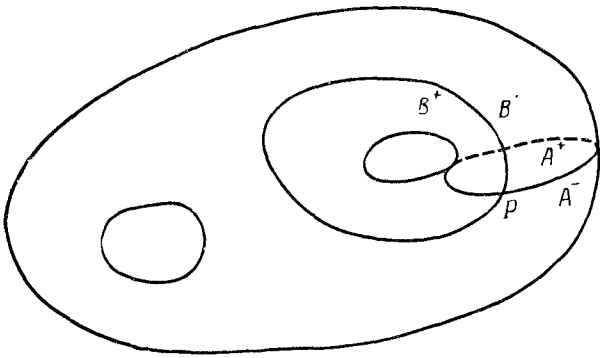

Рис. 48а.

Кривые A и B, взятые вместе, не разбивают R. Если разрезать поверхность тора вдоль этих кривых, то полученная полиэдрическая область будет ограничена простой замкнутой кривой, состоящей при соответствующем обозначении берегов A и B из дуг A^+, B^+, A^-, B^-. Этот единый контур, образованный берегами рассматриваемых двух кривых, называется *циклическим сечением* (Rückkehrschnitt), а кривые A и B называются *сопряженными*.

Если R — обобщенный тор рода p, то на R можно провести p таких попарно непересекающихся циклических сечений A_k и B_k, которые, взятые вместе, не разбивают тора (рис. 48б). Они обобщают систему кривых, состоящую в случае обычного тора из параллели и меридиана.

Система p непересекающихся кривых $A_1, A_2, \ldots, A_p$, а также система сопряженных к ним кривых $B_1, B_2, \ldots, B_p$ не разбивает R. Существование этих систем на R следует из того, что род поверхности равен p (гл. VII, § 5, п. 26). Разрезая R вдоль кривых A_k, мы получаем полиэдрическую область рода нуль, ограниченную $2p$ контурами A_k^+ и A_k^- (при этом B_k становятся трансверсалями).

Обозначим через P_k точку пересечения кривых A_k и B_k и возьмем на R точку P_0, не принадлежащую этим кривым. Про-

ведем простые дуги l_k, соединяющие P_0 с P_k. Они попарно не пересекаются и имеют с кривыми A_k и B_k одну общую точку P_k. Разрезая R вдоль кривых A_k, B_k и l_k, получаем односвязную область, контур которой образуют берега проведенных разрезов. Это разбиение R называется *каноническим*.

Доказывается, что любой замкнутый путь на R можно непрерывно деформировать в путь, состоящий из кривых A_k и B_k и из

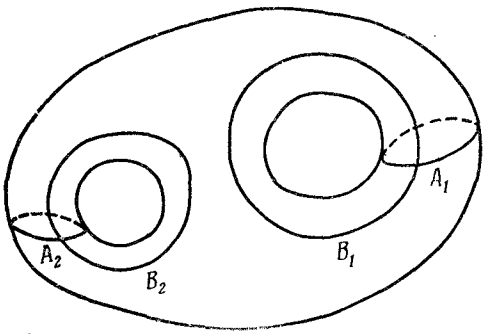

Рис. 48б.

простых дуг, проходимых дважды в противоположных направлениях [1]).

Сформулируем теперь обобщение предложения п. 3.

Пусть A_k и $B_k (k = 1, 2, \ldots, p)$ — система циклических сечений на поверхности R рода p и γ — простая замкнутая кривая на R, не пересекающая этих кривых и ограничивающая на R жорданову область δ. Тогда, каковы бы ни были действительные числа a_k и b_k, существует гармоническая в $R - \overline{\delta}$ функция, принимающая на γ заданные значения и имеющая на A_k и B_k скачки a_k и b_k.

5. При помощи приведенного метода мы получили гармонические функции с заданными периодами в полиэдрической области $R - \overline{\delta}$, однако не на самой R. Чтобы построить гармонические функции с заданными периодами на R, возьмем две жордановы кривые c и γ, лежащие в параметрической окрестности некоторой

[1]) См., например, Picard E., Traité d'analyse, t. II, ch. XIII, § 20—21, p. 421—425. В наших рассуждениях можно использовать также каноническое представление R на плоскости (гл. VII, § 5, п. 28). Кривые A_k^+ и A_k^- соответствуют парам окружностей $\{C, C'\}$, симметричных относительно действительной оси, а B_k переходят в дуги, соединяющие эти окружности.

точки $O \in R$ и соответствующие окружностям $|z| = r$ и $|z| = \rho$ параметрического круга ($\rho < r$).

Обозначим через d, соответственно через δ, жордановы области, ограниченные c, соответственно γ, через (c, γ) — двусвязную область $d - \overline{\delta}$, соответствующую круговому кольцу $\rho < |z| < r$, и через A_k и B_k — систему циклических сечений на R (п. 4), которую мы выберем в $R = \overline{d}$.

Мы определим последовательно, применяя предыдущую теорему и решая задачу Дирихле, гармонические в $R - \overline{\delta}$ функции u_n с заданными скачками a_k и b_k на A_k и B_k и гармонические в области d функции v_n, такие, что

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi \text{ на } \gamma, \\ v_1 &= u_1 \text{ на } c, \\ u_2 &= v_1 \text{ на } \gamma, \\ v_2 &= u_2 \text{ на } c \end{aligned} \tag{10}$$

и вообще

$$\begin{aligned} u_n &= v_{n-1} \text{ на } \gamma, \\ v_n &= u_n \text{ на } c. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= v_n - v_{n-1} \text{ на } \gamma \\ \text{и} \qquad & \qquad (11) \\ v_n - v_{n-1} &= u_n - u_{n-1} \text{ на } c. \end{aligned}$$

Покажем сначала, что среднее значение функций v_n на γ или на c не зависит от n.

Для этого обозначим через C жорданову кривую, соответствующую в параметрической окрестности точки O окружности $|z| = t$ ($\rho \leqslant t \leqslant r$), и через K — границу односвязной полиэдрической области $R - \sum_{k=1}^{p} (A_k + B_k + l_k)$, полученной из R путем канонического разбиения (п. 4)[1]). При любом m функция u_m гармонична и однозначна в области, ограниченной C и K. Следовательно, имеем

$$\int_C \frac{\partial u_m}{\partial n}\, ds = \int_K \frac{\partial u_m}{\partial n}\, ds$$

при подходящем выборе направления интегрирования (гл. VII, (41)).

Так как K состоит из дуг, проходимых дважды в противоположных направлениях, а частные производные функции u_m не

[1]) Предполагается, что это разбиение произведено в $R - \overline{d}$.

имеют скачков на A и B, то интеграл по K равен нулю. Отсюда вытекает, что

$$\int_C \frac{\partial u_m}{\partial n}\, ds = 0, \text{ или } \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_m(t, \theta)}{\partial t}\, d\theta = 0.$$

Интегрируя по t, получаем, что

$$\int_0^{2\pi} u_m(t, \theta)\, d\theta$$

не зависит от t.

В частности, для $t = r$ и $t = \rho$ имеем

$$\int_0^{2\pi} u_m(r, \theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} u_m(\rho, \theta)\, d\theta. \tag{12}$$

Учитывая соотношения (10) и (12), получаем

$$\int_0^{2\pi} v_m(r, \theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} v_{m-1}(\rho, \theta)\, d\theta.$$

Следовательно, при любом n

$$\int_0^{2\pi} v_n(r, \theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} v_1(r, \theta)\, d\theta,$$

или, согласно формуле среднего значения,

$$v_n(0) = v_1(0).$$

Этот результат дает возможность применить предложение 1° п. 2 к функциям $v_n - v_{n-1}$.

Положим

$$M_t^{(n)} = \max_{|z|=t} (v_n - v_{n-1}), \quad m_t^{(n)} = \min_{|z|=t} (v_n - v_{n-1}).$$

Для

$$q = \frac{2\rho}{r + \rho}$$

имеем

$$M_\rho^{(n)} - m_\rho^{(n)} \leqslant q\,(M_r^{(n)} - m_r^{(n)}).$$

Из соотношений (10) и из принципа максимума и минимума следует, что

$$M_r^{(n+1)} - m_r^{(n+1)} = \max_c (u_{n+1} - u_n) - \min_c (u_{n+1} - u_n) \leqslant$$

$$\leqslant \max_\gamma (u_{n+1} - u_n) - \min_\gamma (u_{n+1} - u_n) = M_\rho^{(n)} - m_\rho^{(n)},$$

или

$$M_r^{(n+1)} - m_r^{(n+1)} \leqslant M_\rho^{(n)} - m_\rho^{(n)}. \tag{14}$$

Неравенства (13) и (14) приводят к соотношению

$$M_r^{(n+1)} - m_r^{(n+1)} \leqslant q\,(M_r^{(n)} - m_r^{(n)}),$$

откуда следует, что

$$M_r^{(n+1)} - m_r^{(n+1)} \leqslant q^{n-1}\,(M_r^{(2)} - m_r^{(2)}). \tag{15}$$

Так как $v_{n+1} - v_n = 0$ в точке $z = 0$ и эта разность гармонична в круге $|z| \leqslant r$, то из принципа максимума и минимума вытекает, что $v_{n+1} - v_n$ обращается в нуль также и на $|z| = r$; следовательно, на c имеет место неравенство

$$|v_{n+1} - v_n| \leqslant M_r^{(n+1)} - m_r^{(n+1)}. \tag{16}$$

Соотношения (15) и (16) устанавливают равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (v_{n+1} - v_n)$ на c.

Отсюда получаем, как и в п. 1, равномерную сходимость в $\bar{d}$ последовательности v_n к гармонической функции v, а затем, применяя (10), — равномерную сходимость в $R - \delta$ последовательности u_n к гармонической функции u. Те же соотношения (10) показывают, что $u = v$ в области (γ, c), а следовательно, v является гармоническим продолжением u в δ.

Таким образом, мы построили *гармоническую в R функцию* (равную u в $R - \delta$ и v в δ) *без особенностей, обладающую заданными скачками a_k и b_k на A_k, соответственно на B_k. Такая функция называется гармонической функцией первого рода.*

Две функции первого рода с одинаковыми периодами отличаются на постоянную, так как функции первого рода без скачков сводятся к постоянным, ибо они регулярны и однозначны на R.

Отметим также, что существование гармонических функций первого рода с заданными скачками доказано для поверхностей R рода $p \geqslant 1$. Если род поверхности равен нулю, то R — сфера и единственными функциями первого рода являются постоянные.

6. Связь между родом поверхности и гармоническими функциями первого рода дается следующей теоремой.

На поверхности R рода p существует (с точностью до аддитивных постоянных) ровно $2p$ гармонических функций первого рода, линейно независимых над полем действительных чисел.

Действительно, для каждого пути A_k (соответственно B_k) можно образовать функцию $u^{(k)}$ (соответственно $u'^{(k)}$), имеющую скачок 1 на A_k (соответственно на B_k) и 0 на остальных кривых. Эти функции линейно независимы, так как сумма

$$\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k u^{(k)} + \lambda'_k u'^{(k)}) \tag{17}$$

является функцией первого рода, обладающей на A_k скачком λ_k и на B_k скачком λ'_k. Для того чтобы эта функция сводилась к постоянной, необходимо и достаточно, чтобы λ_k и λ'_k были равны нулю ($k = 1, 2, \ldots, p$).

С другой стороны, любая гармоническая функция первого рода является (с точностью до аддитивной постоянной) линейной комбинацией функций $u^{(k)}$ и $u'^{(k)}$.

7. Пусть u — гармоническая функция первого рода. Сопряженная с u гармоническая функция $\bar{u}$ также является гармонической функцией первого рода, а функция $u + i\bar{u}$ называется *аналитической функцией первого рода*; она регулярна в каждой точке R, но многозначна (за исключением случая постоянных). Предыдущий результат показывает, что можно построить аналитическую функцию первого рода с произвольными действительными частями скачков на A_k и B_k [1]). Аналитическая функция первого рода с действительными (или чисто мнимыми) периодами является постоянной.

На замкнутой римановой поверхности рода p существует (с точностью до постоянных) p и только p аналитических функций первого рода, линейно независимых над полем комплексных чисел.

Пусть u_1 — гармоническая функция первого рода и $\bar{u}_1$ — ее гармоническая сопряженная.

Из соотношений Коши — Римана вытекает, что не может выполняться равенство

$$au_1 + b\bar{u}_1 = c, \tag{18}$$

где a, b и c — действительные постоянные и $a^2 + b^2 \neq 0$.

---

[1]) Можно также построить аналитические функции первого рода с произвольно заданными мнимыми частями скачков на A_k и B_k.

Действительно, из соотношения (18) следует, что

$$a\frac{\partial u_1}{\partial x}+b\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x}=0,$$

$$a\frac{\partial u_1}{\partial y}+b\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial y}=0,$$

откуда

$$a\frac{\partial u_1}{\partial x}-b\frac{\partial u_1}{\partial y}=0,$$

$$a\frac{\partial u_1}{\partial y}+b\frac{\partial u_1}{\partial x}=0.$$

Если $a^2+b^2\neq 0$, то u_1 — постоянная.

Предполагая, что $p\geqslant 1$, рассмотрим теперь другую гармоническую функцию первого рода u_2, такую, что u_2, u_1 и $\overline{u}_1$ линейно независимы, и ее гармоническую сопряженную $\overline{u}_2$.

Если бы выполнялось соотношение

$$a_1u_1+b_1\overline{u}_1+a_2u_2+b_2\overline{u}_2=c,$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 — действительные коэффициенты, не равные одновременно нулю, а c — действительная постоянная, то функция

$$(a_1-ib_1)(u_1+i\overline{u}_1)+(a_2-ib_2)(u_2+i\overline{u}_2)$$

с постоянной действительной частью сама равнялась бы постоянной.

Согласно первому шагу рассуждения, числа a_2 и b_2 не могут одновременно равняться нулю. Однако, предполагая, что $a_2-ib_2\neq 0$, мы получили бы

$$u_2+i\overline{u}_2=\alpha(u_1+i\overline{u}_1)+\beta, \tag{19}$$

где α и β — комплексные постоянные; отсюда следовало бы линейное соотношение с действительными коэффициентами между u_1, $\overline{u}_1$ и u_2, противоречащее выбору u_2.

Продолжая таким образом, мы установим существование p аналитических функций первого рода, линейно независимых над полем комплексных чисел:

$$f_1=u_1+i\overline{u}_1,\quad f_2=u_2+i\overline{u}_2,\quad \ldots,\quad f_p=u_p+i\overline{u}_p. \tag{20}$$

Докажем, что существует не более чем p таких функций.

Для этого обозначим через a_k^j и b_k^j, соответственно через $\overline{a}_k^j$ и $\overline{b}_k^j$, скачки функций u_j и $\overline{u}_j$ $(j=1, 2, \ldots, p)$ на A_k и B_k $(k=1, 2, \ldots, p)$.

Пусть $u+i\overline{u}$ — произвольная аналитическая функция первого рода.

Так как u_j и $\overline{u_j}$ линейно независимы, то из теоремы, установленной в п. 6, вытекает, что существуют такие действительные постоянные α_j, β_j и γ, что

$$u = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \overline{u_j} + \gamma.$$

Положим

$$\lambda_j = \alpha_j - i\beta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Тогда имеем

$$u = \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_j + \gamma\right).$$

Аналитическая функция

$$u + i\overline{u} - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_j$$

с постоянной действительной частью сама является постоянной. Следовательно,

$$u + i\overline{u} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_j + \gamma + i\overline{\gamma}$$

(где $\overline{\gamma}$ — действительная постоянная).

8. Гармонические и аналитические функции первого рода регулярны в каждой точке на R. Теперь мы построим функции с некоторыми особенностями.

Докажем сначала, что *на R можно построить гармонические функции, обладающие заданными скачками на A_k и B_k и регулярные, за исключением точки $O \in R$, в окрестности которой они имеют вид*

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z} + U(z), \tag{21}$$

где z — соответствующий точке O локальный параметр, а $U(z)$ — гармоническая функция в параметрическом круге. В полярных координатах $z = te^{i\theta}$ представление (21) имеет вид

$$\frac{\cos\theta}{t} + U(t, \theta). \tag{22}$$

Эти функции называются *элементарными гармоническими функциями второго рода.* Они определены с точностью до постоянной, так как разность двух функций второго рода с одинаковыми периодами и особенностями является функцией первого рода с равными нулю скачками, т. е. постоянной.

Для построения функции второго рода вернемся к рассуждениям п. 5, только теперь мы будем рассматривать гармонические

в $d-O$ функции v_n, имеющие в O представление вида (22), где функции V_n гармоничны в d. Они получаются при решении задачи Дирихле. Действительно, функция V_n гармонична в d и принимает на c значения

$$V_n = v_n - \frac{\cos\theta}{t}.$$

Примененные в п. 5 неравенства остаются в силе, так как средние значения функций v_n на γ и c равны между собой и не зависят от номера n. Это можно получить так же, как в п. 5, учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{t}\, d\theta = 0.$$

Таким образом можно построить гармоническую функцию u второго рода с заданными периодами, обладающую в O той же особенностью, что и функция

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \frac{\cos\theta}{t}$$

в точке $z=0$.

Функция $u+i\bar{u}$ называется *элементарной аналитической функцией второго рода*. Она, вообще говоря, многозначна и обладает в точке $O \in R$ простым полюсом с главной частью $\frac{1}{z}$.

Отметим, что можно строить однозначные на R аналитические функции второго рода, выбирая достаточно большое число q точек $O_1, O_2, \ldots, O_q$ и образуя для каждой из этих точек элементарную аналитическую функцию второго рода F_k. Параметры λ_k можно определить таким образом, чтобы они не были одновременно равны нулю и чтобы функция $F = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k F_k$ имела равные нулю периоды. Это дает $2p$ однородных линейных уравнений с q неизвестными λ_k; если $q>2p$, то эта система обладает нетривиальными решениями.

Аналогично строятся гармонические и аналитические функции второго рода с заданными периодами, обладающие в точке O той же особенностью, что и

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z^k} = \frac{\cos k\theta}{t^k}, \quad \text{соответственно } \frac{1}{z^k} \tag{23}$$

(k — натуральное число).

При помощи линейных комбинаций таких функций можно получить аналитическую функцию с заданными действительными

частями периодов [1]) и с заданными полюсами, в которых она имеет заданные главные части разложения Лорана.

9. Применяя развитый в п. 5 метод построения гармонических функций на R к функциям v_n, обладающим в области d (принадлежащей параметрической окрестности некоторой точки $O \in R$) представлением вида

$$v_n = \log \left| \frac{z-b}{z-a} \right| + V_n, \tag{24}$$

где a и b точки из δ [2]), а V_n — гармоническая функция в d, получаем (*элементарную*) *гармоническую функцию третьего рода*.

Метод п. 5 применим и в этом случае, так как

$$\int_{\gamma} \log \left| \frac{z-b}{z-a} \right| d\theta = \int_{c} \log \left| \frac{z-b}{z-a} \right| d\theta. \tag{25}$$

Действительно, функция $\arg \dfrac{z-b}{z-a}$, гармонически сопряженная с $\log \left| \dfrac{z-b}{z-a} \right|$, однозначна в (γ, c), а следовательно, (24) вытекает из предложения 2° п. 2.

Построенная таким образом элементарная гармоническая функция третьего рода обладает логарифмическими полюсами a и b, лежащими в одной и той же параметрической окрестности. Однако можно построить гармоническую функцию третьего рода u с одним логарифмическим полюсом в a, где она ведет себя, как $\log 1/|z_a - a|$, и другим логарифмическим полюсом в b, где она ведет себя, как $\log |z_b - b|$ (z_a и z_b — локальные параметры, соответствующие параметрическим окрестностям на R, содержащим точки a и b; a и b могут быть произвольными точками на R). Для этого мы соединим a и b на R непрерывным путем L и выберем на L точки $a_0 = a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n = b$, таким образом, чтобы две последовательные точки a_k и a_{k+1} находились в одной и той же параметрической окрестности. Сумма построенных для этих точек функций u_k дает искомую функцию u, так как особенности в промежуточных точках $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ взаимно уничтожаются при сложении [3]). Добавляя функцию первого рода, можно получить гармоническую функцию третьего рода с заданными периодами.

---

[1]) В частности, периоды могут быть чисто мнимыми.

[2]) Мы обозначили одинаковыми буквами точки a и b и соответствующие точки параметрического круга.

[3]) Если точки $a_0, a_1, \ldots, a_n = a_0$ взяты на замкнутом пути, то этот способ приводит к построению функции первого рода при помощи функции третьего рода (см. также гл. IX, § 4, п. 39).

Если u — элементарная гармоническая функция третьего рода, то $u+i\bar{u}$ называется *элементарной аналитической функцией третьего рода*. Она обладает логарифмическими особенностями в точках a и b: $\log 1/|z_a - a|$, соответственно $\log(z_b - b)$. Действительные части ее периодов можно задавать произвольно.

Как мы увидим в следующем разделе, аналитические функции первого, второго и третьего рода являются абелевыми интегралами на поверхности R.

10. Результаты п. 5, 8 и 9 показывают, что дифференциал или ковариант, соответствующие аналитической функции первого, второго или третьего рода, являются однозначными и регулярными, за исключением конечного числа полюсов. Дифференциалы или коварианты первого рода всюду регулярны и образуют p-мерное линейное пространство над полем комплексных чисел, где p — род поверхности. Коварианты второго рода имеют полюсы с равными нулю вычетами, а коварианты третьего рода имеют также и отличные от нуля вычеты. Однако сумма вычетов всегда равна нулю [1]).

1°. При помощи формулы Грина и интегральной теоремы Коши устанавливаются следующие *соотношения Римана.*

Обозначим через φ *и* φ^* *две коварианты первого рода и через* a_k *и* b_k, *соответственно* a_k^* b_k^*, — *их периоды по кривым* A_k *и* B_k. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{p} (a_k b_k^* - a_k^* b_k) = 0. \tag{26}$$

При этом

$$\iint_R \varphi\bar{\varphi}^* dx\,dy = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{p} (a_k\bar{b}_k^* - \bar{a}_k^* b_k); \tag{27}$$

в частности, интеграл Дирихле определяется выражением

$$D_R(\varphi) = \iint_R |\varphi|^2 dx\,dy = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{p} (a_k\bar{b}_k - b_k\bar{a}_k). \tag{28}$$

Кроме того, обозначим берега B_k через B_k^+ и B_k^- таким образом, чтобы скачок Φ на B_k был равен a_k.

Рассмотрим каноническое разбиение поверхности R (п. 4) и обозначим (как в п. 5) через K границу односвязной области $R-\sum_{k=1}^{p}(A_k+B_k+l_k)$. Применяя теорему Коши к ковариванте первого рода $\Phi\varphi^*$, получаем $\int_K \Phi\varphi^*\,dz=0$. Так как интегралы, взятые по путям l_k^+ и l_k^-, взаимно уничтожаются, интеграл по K равен сумме интегралов по путям, составленным из A_k^+, B_k^+, A_k^- и B_k^-. Далее, предполагая, что A_k^+ и B_k^+ одинаково ориентированы с A_k, соответственно с B_k, получаем

$$\int_{A_k^+}\Phi\varphi^*\,dz+\int_{A_k^-}\Phi\varphi^*\,dz=\int_{A_k^+}(\Phi^+-\Phi^-)\,\varphi^*\,dz=$$

$$=-b_k\int_{A_k^+}\varphi^*\,dz=-a_k^*b_k,$$

$$\int_{B_k^+}\Phi\varphi^*\,dz+\int_{B_k^-}\Phi\varphi^*\,dz=a_kb_k^*. \tag{29}$$

Следовательно, соотношение (26) удовлетворяется.

Равенство (27) можно установить так же, как и (26), используя, однако, не теорему Коши, а одно следствие первой формулы Грина, (гл. I, (6)):

$$\iint_R\varphi\bar{\varphi}^*\,dx\,dy=\frac{i}{2}\int_K\Phi\bar{\varphi}^*d\bar{z}\ ^{1}). \tag{30}$$

2°. Соотношение (28) показывает, что *любая функция первого рода, периоды которой по кривым* $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *(соответственно по кривым* $B_1, B_2, \ldots, B_p$*) равны нулю, является постоянной.*

3°. *Если* φ *— ковариванта первого рода, а* φ^* *— ковариванта третьего рода с полюсами* P_μ *и вычетами* c_μ $(\mu=1, 2, \ldots, m)$, *то, сохраняя обозначения из* 1° *и применяя теорему о выче-*

[1]) Пусть T — треугольник на R и C — его граница, φ^*—аналитическая ковариванта и Φ—регулярная аналитическая функция. Если $\varphi=d\Phi/dz$, где z — локальный параметр, то, по первой формуле Грина для ковариванты $\bar{\Phi}\varphi^*$,

$$\iint_T\varphi^*\bar{\varphi}\,dx\,dy=-\frac{i}{2}\int_C\varphi^*\bar{\Phi}\,dz \tag{31}$$

Переходя к комплексно сопряженным и суммируя по всем треугольникам некоторой триангуляции R, получаем (30).

тах (гл. VII, § 7, п. 47, 3°) *к* $\Phi\varphi^*$, *получаем соотношение*

$$\sum_{k=1}^{p}(a_k b_k^* - a_k^* b_k) = 2\pi i \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \Phi(P_\mu). \tag{32}$$

11. Установим теперь следующее предложение.

Периоды функции первого рода по путям $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *(соответственно по путям* $B_1, B_2, \ldots, B_p$*) можно задавать произвольным образом.*

Для этого рассмотрим снова функции f_j из (20).

Положим $A_{jk} = a_k^j + i\overline{a}_k^j$ и $B_{jk} = b_k^j + i\overline{b}_k^j$ $(j, k = 1, 2, \ldots, p)$. Тогда периоды функции f_j по путям A_k и B_k записываются матрицами $\|A_{jk}\|$, соответственно $\|B_{jk}\|$. Применяя к функциям f_j линейное преобразование с невырожденной матрицей $\|C_{lj}\|$, получаем функции

$$F_l = \sum_{j=1}^{p} C_{lj} f_j,$$

которые также линейно независимы; их периоды записываются матрицами

$$\|C_{lj}\|\,\|A_{jk}\| \quad \text{и} \quad \|C_{lj}\|\,\|B_{jk}\|.$$

Так как в качестве $\|C_{lj}\|$ можно взять матрицу, обратную к $\|A_{jk}\|$ [1]), то можно получить систему F_l с периодами по A_k, равными единице при $k = l$ и нулю при $k \neq l$. Функция $F = \sum_{l=1}^{p} \alpha_l F_l$ имеет произвольно заданные периоды α_l на A_l.

12. Так как частное двух ковариант является функцией, то из существования ковариант на R снова вытекает существование функций, однозначных и регулярных на R, за исключением конечного числа полюсов. Эти функции называются *рациональными функциями* на R [2]). Такое название оправдывается их свойствами, а также теоремой п. 17.

1°. Если $w = f(z)$ — рациональная функция на замкнутой поверхности R, то она определяет накрытие плоскости (w) при помощи R, которое является полным, согласно гл. VII, § 5, п. 30. Из этого замечания вытекает следующее предложение.

Рациональная функция на замкнутой римановой поверхности R *принимает любое комплексное значение, конечное*

[1]) Согласно замечанию 2° п. 10, матрица $\|A_{ik}\|$ невырожденна.

[2]) Если R — сфера, то эти функции совпадают с обычными рациональными функциями, если R — тор, то они совпадают с эллиптическими функциями.

или бесконечное, одно и то же конечное число раз (равное степени накрытия $(w)_f^R$ [1]).

2°. Этот результат дает возможность установить связь между аналитическими ковариантами, которые однозначны и регулярны всюду на R, кроме своих полюсов, и характеристикой поверхности R.

Пусть N *и* P *— сумма порядков нулей и полюсов коварианты* φ *на* R. *Тогда разность* $N-P$ *равна характеристике* R [2]).

13. Теорема Абеля [3]). *Для того чтобы на* R *существовала рациональная функция* $f(z)$ *с заданными нулями* P_μ *и полюсами* Q_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$ [4]), *необходимо и достаточно, чтобы для любой аналитической функции* Φ *первого рода выполнялось соотношение*

$$\sum_{\mu=1}^{n} [\Phi(P_\mu) - \Phi(Q_\mu)] = C, \tag{33}$$

где C *— период* Φ *по замкнутому пути* α, *не зависящему от* Φ:

$$C = \int_\alpha d\Phi.$$

Пусть $f(z)$ — рациональная функция на R с нулями P_μ и полюсами Q_μ. Для упрощения изложения предположим, что эти нули и полюсы являются простыми. Тогда $\varphi\, dz = (f'/f)\, dz$ является дифференциалом третьего рода с простыми полюсами P_μ и Q_μ и с вычетами $+1$ в P_μ и -1 в Q_μ. Если λ — спрямляемый непре-

[1]) Очевидно, что любое решение уравнения $f(z) = w$ считается со своей кратностью. Если R — сфера или тор, то приведенное утверждение сводится к известному свойству рациональных или эллиптических функций (том I, гл. VII, § 1, п. 5, стр. 213).

[2]) Доказательство этой теоремы см. в книге: Неванлинна Р., Униформизация, гл. III, § 2, 3.13, стр. 119 и § 5, 3.49, стр. 147—148. Из этой теоремы, если учесть, что эллиптические функции являются также ковариантами на торе (гл. VII, п. 43), снова вытекает свойство, доказанное в т. I, гл. VII, § 1, п. 5, стр. 213.

[3]) Эта теорема была доказана Абелем как необходимое условие не только для функций первого рода, но и для функций других родов (Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes (1826), Œuvres Complètes d'Abel, 1881, t. I, p. 145—241). Теорема играет важную роль в теории алгебраических кривых. См. классическую ее формулировку в п. 19.

[4]) Точка, соответствующая кратному нулю или полюсу, выписывается в последовательности P_μ, соответственно Q_μ, столько раз, какова ее кратность.

рывный замкнутый путь на R, не проходящий через точки P_μ и Q_μ, то

$$\int_\lambda \varphi\, dz = 2N\pi i \qquad (N \text{ — целое}),$$

так как изменение аргумента $f(z)$ на λ равно целому кратному 2π.

Обратно, если $\varphi\, dz$ — дифференциал третьего рода на R с полюсами P_μ и Q_μ с вычетами $+1$, соответственно -1, периоды которого являются целыми кратными $2\pi i$, то

$$f(z) = e^{\int \varphi\, dz}$$

— рациональная функция на R, обладающая нулями, соответственно простыми полюсами, в точках P_μ и Q_μ.

Следовательно, доказательство теоремы Абеля сводится к установлению необходимых и достаточных условий для существования дифференциала третьего рода с заданными простыми полюсами, периоды которого кратны $2\pi i$.

14. Обозначим через $\varphi^* dz$ такой дифференциал и через $2\pi i l_k$ и $2\pi i m_k$ (l_k и m_k — целые числа) периоды $\varphi^* dz$ по путям A_k, соответственно B_k, из п. 4. Если $\varphi\, dz$ — произвольный дифференциал первого рода, $\Phi = \int \varphi\, dz$ — соответствующая функция и a_k и b_k — ее периоды A_k и B_k, то из (32) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{p} (a_k m_k - b_k l_k) = \sum_{\mu=1}^{n} [\Phi(P_\mu) - \Phi(Q_\mu)]. \tag{34}$$

Следовательно, если на R существует дифференциал с требуемыми свойствами, то для каждой функции первого рода Φ имеет место соотношение (34), где m_k и l_k — целые числа, не зависящие от Φ.

Обратно, если соотношение (34) выполняется для некоторых целых чисел m_k и l_k и любой функции Φ первого рода, то существует дифференциал $\varphi^* dz$ третьего рода с заданными полюсами и с периодами, кратными $2\pi i$. Рассмотрим дифференциал третьего рода $\varphi^* dz$ с простыми полюсами P_μ и Q_μ и с вычетами $+1$, соответственно -1, периоды которого a_k^* и b_k^* чисто мнимые. Покажем, что эти периоды кратны $2\pi i$.

Действительно, если $\varphi\, dz$ — дифференциал первого рода, то из соотношения (34) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{p} (a_k b_k^* - b_k a_k^*) = 2\pi i \sum_{\mu=1}^{n} [\Phi(P_\mu) - \Phi(Q_\mu)].$$

Однако, по предположению,

$$\sum_{k=1}^{p}(a_k m_k - b_k l_k) = \sum_{\mu=1}^{n}[\Phi(P_\mu) - \Phi(Q_\mu)].$$

Следовательно, полагая $a_k^* = 2\pi i a_k^{**}$ и $b_k^* = 2\pi i b_k^{**}$, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{p}[a_k(b_k^{**} - m_k) - b_k(a_k^{**} - l_k)] = 0. \tag{35}$$

Пусть $a_k' = \operatorname{Re} a_k$ и $b_k' = \operatorname{Re} b_k$. Из равенства (35), рассматривая действительную часть, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{p}[a_k'(b_k^{**} - m_k) - b_k'(a_k^{**} - l_k)] = 0.$$

Так как a_k' и b_k' могут быть заданы произвольным образом, то

$$b_k^{**} = m_k \quad \text{и} \quad a_k^{**} = l_k;$$

это показывает, что периоды a_k^* и b_k^* являются кратными $2\pi i$.

Число

$$C = \sum_{k=1}^{p}[a_k m_k - b_k l_k]$$

равно периоду Φ на замкнутом пути

$$\alpha = \sum_{k=1}^{p}[m_k A_k - l_k B_k];$$

следовательно, теорема Абеля доказана полностью.

15. Применяя эту теорему к сфере, получаем, что каждой системе нулей и полюсов P_μ и Q_μ соответствует рациональная функция, так как единственная коварианта первого рода — это $\varphi \equiv 0$.

На торе, соответствующем фундаментальному параллелограмму решетки (ω_1, ω_2) с комплексным отношением ω_2/ω_1, существует единственная не равная тождественно нулю коварианта первого рода. Так как эта коварианта является также однозначной функцией первого рода, то она постоянна, поэтому можно считать, что она равна единице. Тогда ее периодами будут числа $\int_A dz = \omega_1$ и $\int_B dz = \omega_2$, а C будет иметь вид $C = M\omega_1 + N\omega_2$, где M и N целые. Поэтому теорема Абеля сводится к предложениям, доказанным в томе I, гл. VII, § 2, п. 9—11, стр. 216—219.

§ 3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И АБЕЛЕВЫ ИНТЕГРАЛЫ

В томе I[1]) мы доказали, что риманова поверхность аналитической функции тогда и только тогда замкнута, когда функция является алгебраической. Для того чтобы установить связь между алгебраическими функциями и их интегралами и результатами предыдущего раздела, мы предположим, что рассматриваемая замкнутая риманова поверхность является накрывающей поверхностью $R = (z)_T^V$.

16. *На поверхности R существуют аналитические функции, для которых R—риманова поверхность.* Пусть $w = f(z)$— однозначная аналитическая функция на R, регулярная, за исключением конечного числа полюсов в выбранных точках на R с различными проекциями на (z). Предположим также, что эти проекции отличны от проекции точек ветвления R. Существование такой функции обеспечивается замечанием п. 8.

Мы утверждаем, что риманова поверхность функции $f(z)$ совпадает с $R = (z)_T^V$ (гл. VII, § 4, п. 9).

Действительно, $f(z)$ имеет один и только один риманов элемент в каждой точке R. Покажем, что не существует двух точек на R, в которой $f(z)$ имеет один и тот же элемент. Предположим, что это не так, а именно существуют две точки P, $P' \in R$, в которых $f(z)$ имеет один и тот же элемент. Очевидно, что точки P и P' можно рассматривать как обыкновенные точки, проекция которых отлична от проекции точек ветвления[2]).

Соединим на R точку P с полюсом A функции $f(z)$ при помощи непрерывного пути L, проекция которого $l = T(L)$ не проходит через проекции точек ветвления R. Согласно первой лемме о внутренних отображениях (гл. VII, § 4, п. 13), на R существует единственный путь L' с началом в P', проекция которого совпадает с l. Пусть A' — конец этого пути. Так как аналитические продолжения вдоль L и L' совпадают с продолжением вдоль l рассматриваемого элемента, то $f(z)$ имеет полюс в точке A'. Однако это противоречит способу выбора полюсов $f(z)$, так как A и A' имеют одну и ту же проекцию.

Следовательно, $R = (z)_T^V$ — риманова поверхность функции $f(z)$. Так как R замкнута, то функция $w = f(z)$ является алгебраической, а следовательно, существует неприводимый многочлен $\mathscr{P}(z, w)$, такой, что $\mathscr{P}[z, f(z)] = 0$[3]).

---

[1]) Том I, гл. X, § 3, стр. 305—316.

[2]) Если P и P' не удовлетворяют этим условиям, то их можно заменить подходящими точками из их окрестностей.

[3]) Том I, гл. X, § 3, п. 34, стр. 314—315.

17. *Любая аналитическая функция $F(z)$ на R, однозначная и регулярная всюду, кроме конечного числа полюсов, является алгебраической. Если $w=f(z)$ — функция, для которой R — риманова поверхность, то существует рациональная функция от z и w: $\Psi(z, w)$, такая, что $F(z)=\Psi[z, f(z)]$.*

Первая часть этого предложения вытекает из рассуждений, аналогичных проведенным в п. 16. В каждой точке на R функция F обладает единственным элементом, а аналитическое продолжение элемента функции F на (z) можно осуществить вдоль пути, не проходящего через неалгебраические особенности[1]). В каждой точке на (z) функция $F(z)$ имеет конечное число элементов. Поэтому риманова поверхность функции $F(z)$ замкнута, а $F(z)$ является алгебраической[2]).

Предположим теперь, что R имеет m листов, и обозначим через $W_1, W_2, \ldots, W_m$, соответственно через $w_1, w_2, \ldots, w_m$, значения функций $W=F(z)$ и $w=f(z)$ на различных листах R.

Функции

$$W_1+W_2+\ldots+W_m,$$
$$W_1w_1+W_2w_2+\ldots+W_mw_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$W_1w_1^{m-1}+W_2w_2^{m-1}+\ldots+W_mw_m^{m-1}$$

являются симметрическими и поэтому однозначны на (z). Так как у них нет других особенностей, кроме полюсов, то они являются рациональными функциями.

Следовательно, W_1 — рациональная функция от $z, w_1, w_2, \ldots, w_m$:

$$W_1=\Psi_1(z, w_1, w_2, \ldots, w_m).$$

Однако $\Psi_1(z, w_1, w_2, \ldots, w_m)$ — симметрическая функция относительно $w_2, w_3, \ldots, w_m$ — нулей частного

$$\frac{\mathcal{P}(z, w)}{w-w_1}.$$

Следовательно, $\Psi_1(z, w_1, w_2, \ldots, w_m)$ — рациональная функция от z и w_1:

$$W_1=\Psi(z, w_1).$$

В силу симметрии это соотношение имеет место для любого $k=1, 2, \ldots, m$, и поэтому можно написать

$$W=\Psi(z, w).$$

---

[1]) Том I, гл. X, § 3, п. 31, стр. 311—312.

[2]) Здесь снова используются свойства внутренних отображений. Функция $F(z)$ может обладать алгебраическими или полярными критическими точками в проекциях точек ветвления R.

Таким образом мы доказали, что любая аналитическая и однозначная на $R=(z)_T^V$ функция $W(z)$, не имеющая неалгебраических особенностей, является рациональной функцией $\Psi(z, w)$ от z и от алгебраической функции $w(z)$, римановой поверхностью которой является $(z)_T^V$ и которая удовлетворяет алгебраическому соотношению $\mathscr{P}(z, w)=0$, где $\mathscr{P}$ — многочлен.

18. Заметим теперь, что так как R — риманова накрывающая, то производная $d\Phi/dz$ по z любой аналитической функции $\Phi(z)$ первого, второго или третьего рода также является аналитической и однозначной функцией на R и имеет в качестве особенностей только полюсы, алгебраические критические точки или критические полюсы [1]). Поэтому теорема п. 17 показывает, что

$$\frac{d\Phi}{dz}=\Psi(z, w),$$

где $\Psi(z, w)$ — рациональная функция от z и от алгебраической функции $w=f(z)$ с римановой поверхностью $(z)_T^V$, удовлетворяющей уравнению $\mathscr{P}(z, w)=0$, где $\mathscr{P}(z, w)$ — многочлен.

Отсюда для функции $\Phi(z)$ сразу следует представление

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z}\Psi(z, w)\,dz,$$

причем $\mathscr{P}(z, w)=0$.

Абелевым интегралом называется любой интеграл вида

$$\int\Psi(z, w)\,dz,$$

где $\Psi(z, w)$ — рациональная функция от z и w и $\mathscr{P}(z, w)=0$ ($\mathscr{P}$ — многочлен).

Таким образом, *функции первого, второго и третьего рода, построенные в п. 7—9, являются абелевыми интегралами.* Обратное утверждение также справедливо.

Следовательно, абелевы интегралы можно разбить на три класса:

---

[1]) Даже производная аналитической функции первого рода обладает на R полюсами в точках ветвления поверхности. Действительно, если P_0 — точка ветвления порядка k с проекцией z_0, то $\Phi(z)$ обладает в окрестности P_0 разложением $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n/k}$, а следовательно, $d\Phi/dz$ имеет, вообще говоря, в этой точке полюс, соответствующий разложению $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{k}c_n(z-z_0)^{n/k-1}$. Очевидно, что на (z) эта функция имеет также критические полярные или алгебраические точки.

интегралы первого рода, которые не имеют особенностей на римановой поверхности R функции $w(z)$, но которые многозначны, если они не равны тождественно постоянным;

интегралы второго рода, обладающие полюсами на R;

интегралы третьего рода, которые, кроме полюсов, могут обладать еще и логарифмическими особенностями на R.

Если род R равен p, то существуют p линейно независимых абелевых интегралов первого рода (кроме постоянных).

В частном случае, когда равенство $\mathscr{P}(z, w) = 0$ сводится к

$$w^2 = P(z),$$

где $P(z)$ — многочлен, абелевы интегралы являются элементарными функциями, если степень $P(z)$ равна 1 или 2, эллиптическими интегралами, если эта степень равна 3 или 4, и гиперэллиптическими интегралами, если эта степень больше 4. Род поверхности R равен p, если степень $P(z)$ равна $2p+1$ или $2(p+1)$.

Система p линейно независимых интегралов первого рода имеет вид

$$\int_0^z \frac{\zeta^h\, d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}},$$

где $h = 0, 1, \ldots, p-1$ [1]).

19. В п. 13 и 14 мы доказали теорему Абеля. Приведем теперь первоначальную формулировку, данную Абелем.

Пусть $\mathscr{P}(z, w)$ — неприводимый многочлен от z и w, и пусть $\lambda(z, w, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ — другой многочлен от z и w, зависящий рационально от параметров $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Рассмотрим уравнения

$$\mathscr{P}(z, w) = 0 \tag{36}$$

и

$$\lambda(z, w, a_1, a_2, \ldots, a_r) = 0. \tag{37}$$

С геометрической точки зрения соотношения (36) и (37) представляют алгебраические кривые, пересекающиеся в конечном числе n точек $(z_1, w_1), (z_2, w_2), \ldots, (z_n, w_n)$. Значения $z_1, z_2, \ldots, z_n$ являются корнями некоторого алгебраического уравнения степени n

$$Q(z, a_1, \ldots, a_n) = 0 \tag{38}$$

с рациональными относительно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ коэффициентами. Вообще говоря, можно допустить, что соответствующее значение w

[1]) В томе I, гл. XI, § 1. стр. 317—332 изучались эллиптические интегралы первого рода.

дается соотношением

$$w = \psi(z, a_1, a_2, \ldots, a_r), \tag{39}$$

где ψ — рациональная функция от z и $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Если

$$\int_{(z_0, w_0)}^{(z, w)} \Psi(z, w)\, dz \tag{40}$$

— произвольный абелев интеграл, то теорема Абеля утверждает, что сумма

$$S = \sum_{\mu=1}^{n} \int_{(z_0, w_0)}^{(z_\mu, w_\mu)} \Psi(z, w)\, dz \tag{41}$$

является алгебраически-логарифмической функцией параметров a_i.

Действительно, S определена с точностью до суммы целых кратных периода интеграла, которые не зависят от параметров a.

Если обозначить через δ полный дифференциал по этим параметрам, то

$$\delta S = \sum_{\mu=1}^{n} \Psi(z_\mu, w_\mu)\, \delta z_\mu.$$

Дифференциалы δz_μ вычисляются при помощи (38) и (39). Дифференциал δS представляет собой линейное однородное выражение относительно δa_k. Коэффициент при δa_k — рациональная функция от $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и $a_1, a_2, \ldots, a_r$, симметрическая относительно z, и поэтому коэффициент при δa_k — рациональная функция от $a_1, a_2, \ldots, a_r$, т. е. $\Psi_k(a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

Следовательно,

$$\delta S = \Psi_1(a_1, a_2, \ldots, a_r)\, \delta a_1 + \ldots + \Psi_r(a_1, a_2, \ldots, a_r)\, \delta a_r.$$

Интегрируя этот полный дифференциал, мы получим для S выражение вида

$$S = \varphi + \sum c \log \Phi, \tag{42}$$

где φ и Φ — рациональные функции от $a_1, a_2, \ldots, a_r$, а c — постоянные.

Если абелев интеграл (40) первого рода, то сумма S остается конечной для любых комплексных (конечных или бесконечных) значений параметров $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Следовательно, из (42) вытекает, что S сводится к постоянной, а теорему Абеля можно сформулировать в следующем виде.

Если интеграл (40) *является абелевым интегралом первого рода, то сумма*

$$S=\sum_{\mu=1}^{n}\int_{(z_0,\ w_0)}^{(z_\mu,\ w_\mu)}\Psi(z,\ w)\,dz,$$

где $(z_\mu,\ w_\mu)$ *представляют собой точки пересечения кривых* (36) *и* (37), *изменяющиеся в зависимости от параметров* a_1, a_2, ..., a_r, *не зависит от этих параметров.*

Сумма S имеет постоянное значение, с точностью до сумм кратных периодов интеграла (40), которые изменяются в зависимости от выбранного пути интегрирования.

Пусть R — риманова поверхность, определенная алгебраическим уравнением (36), и пусть $F(z)$ — рациональная функция на R. Согласно теореме, доказанной в п. 17,

$$F(z)=\rho(z,\ w),$$

где ρ — рациональная функция от z и w, а $\mathscr{P}(z,\ w)=0$.

Если в качестве соотношения (37) взять равенство

$$\rho(z,\ w)-a=0,$$

то соответствующие значения $(z_\mu,\ w_\mu)$ — это точки на R, в которых F принимает значение a.

Обозначим эти точки при $a=0$, соответственно при $a=\infty$, через P_μ и Q_μ; пусть

$$\Phi=\int\Psi(z,\ w)\,dz$$

— абелев интеграл первого рода (40); установленная в этом пункте теорема Абеля показывает, что

$$\sum_{\mu=1}^{n}[\Phi(P_\mu)-\Phi(Q_\mu)]=C,$$

где C — период Φ на пути α, не зависящем от Φ (т. е. некоторая линейная комбинация периодов Φ на A_k и B_k).

Таким образом, теорема Абеля в приведенном виде выражает необходимость условия п. 13 [1]).

[1]) Более подробные сведения относительно замкнутых римановых поверхностей и алгебраических функций (в частности, относительно конформных классов и их модулей) можно найти в следующих, уже упоминавшихся книгах: Picard E., Traité d'Analyse; Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche; а также в работах Fatou P., Appell P., Goursat E., Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales (2-ème éd.), t. I et II, Paris, 1929—1930; Чеботарев Г. Н., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948; Шевалле Кл., Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной, М., 1959.

Глава **IX**

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА ОТКРЫТЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В то время как теория функций на замкнутых римановых поверхностях и конформная классификация этих поверхностей были закончены к началу этого века, исследование открытых римановых поверхностей развилось лишь позднее, после того как выкристаллизовались понятия абстрактной римановой поверхности и римановой накрывающей поверхности. В этом вопросе существенную роль сыграло определение идеальной границы римановой поверхности. Результаты, установленные для границ плоских областей при помощи гармонической меры (или емкости), были распространены также на открытые римановы поверхности, что привело к первому разделению их на два класса: класс поверхностей с нулевой границей (характеризующийся равенством нулю гармонической меры идеальной границы и несуществованием функции Грина) и класс поверхностей с положительной границей [1]).

Поверхности с нулевой границей имеют много свойств, приближающих их к замкнутым поверхностям. На эти поверхности распространяется принцип максимума и минимума, и на них не существует отличных от постоянных однозначных и ограниченных снизу или сверху гармонических функций. Р. Неванлинна[1]) построил теорию абелевых интегралов на римановых поверхностях, в которой сохраняются классические результаты случая замкнутых поверхностей.

В более поздних исследованиях устанавливается связь между классом поверхностей с нулевой границей и другими важными классами римановых поверхностей [2]).

---

[1]) Nevanlinna R., Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer, Riemannschen Mannigfaltigkeit, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Seria A, I, 1 (1941) 1—34.

Относительно функций Грина см. Myrberg P. J., Über die Existenz der Greenschen Funktion auf einer gegebenen Riemannschen Fläche, цит. раб., стр. 39—79.

[2]) См., например, работы, посвященные классу Иверсена: Stoïlow S., Sur les singularités des fonctions analytiques multiformes dont la surface de Riemann a sa frontière de mesure harmonique nulle, *Mathematica* (Cluj),

Задача классификации открытых римановых поверхностей является широким обобщением проблемы типа, которая требует нахождения необходимых и достаточных условий того, чтобы односвязная открытая риманова поверхность была конформно эквивалентна евклидовой плоскости (параболический тип) или единичному кругу (гиперболический тип) [1]. Ее решение связано с определением системы конформных инвариантов, которые должны характеризовать класс конформно эквивалентных римановых поверхностей [2].

В качестве такого критерия рассматривалось существование или несуществование на римановой поверхности различных классов гармонических или аналитических функций [3].

Если F — конформно инвариантный класс функций, содержащий постоянные, то римановы поверхности разделяются на два непересекающихся класса относительно F: поверхности, на которых все функции класса F постоянны, и поверхности, на которых существуют непостоянные функции из F. Первый класс, который мы обозначим через O_F, содержит поверхности с идеальной границей, „слабой" относительно класса F, а второй класс — поверхности с „сильной" идеальной границей [4]. Класс F может быть классом HB однозначных и ограниченных гармонических функций или классом HD однозначных гармонических функций с ограниченным интегралом Дирихле, классом AB регулярных и однозначных ограниченных аналитических функций или классом AD регулярных и однозначных аналитических функций с конечным интегралом Дирихле. Изучались также классы $F = SB$ и $F = SD$

---

19 (1943), 126—138; Quelques remarques sur les éléments frontière des surfaces de Riemann et sur les fonctions correspondant à ces surfaces, *C. R. Acad. Paris*, **227** (1948), 1326—1328 и Note sur les fonctions analytiques multiformes, *Ann. Soc. Polonnaise de math.*, XXV (1952), 69—74; Jurchescu M., Asupra funcţiilor analitice definite prin ecuaţii diferenţiale nealgebrice, *Bull. ştiint. Acad R. P. R.*, Sect. mat. fiz., VII, 2 (1955), 347—354 и Recouvrements riemanniens définis par équations différentielles du second ordre, *C. R. Acad. Paris*, **247** (1957), 627—629; Kuroda T., On Analytic Functions on Some Riemann Surfaces, *Nagoya Math. Journ.*, **10** (June 1956), 27—50.

[1]) Относительно проблемы типа см., например, монографию Волковыского Л. И., Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XXXIV, М. — Л., 1950.

[2]) Sario L., Sur la classification des surfaces de Riemann, Den 11te Skand. Mat. Kongress, Oslo, 1952, 229—238.

[3]) Вместо функций можно пользоваться дифференциалами. См. Неванлинна Р., Униформизация, гл. X, § 8, стр. 394—405.

[4]) Sario L., Über Riemannschen Flächen mit hebbarem Rand, цит. раб. Ahlfors L., Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions, *Comment. Math. Helvetici*, **24** (1950), 100—134. Конформная классификация плоских областей на основании этих принципов развита в уже упоминавшейся работе Ahlfors L., Beurling A., Conformal invariants and function-theoretic null-sets.

однолистных, однозначных и регулярных аналитических функций, ограниченных или с конечным интегралом Дирихле. В этом смысле класс поверхностей с нулевой границей совпадает с O_G, т. е. с классом поверхностей, не имеющих функции Грина [1]).

В этой классификации римановых поверхностей идеальная граница рассматривалась в целом. Постепенно стали учитывать также индивидуальные свойства элементов идеальной границы. При этом был введен и исследован новый интересный класс римановых поверхностей — класс D поверхностей с абсолютно разрывной границей [2]).

§ 1. ГАРМОНИЧЕСКАЯ МЕРА ИДЕАЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ. ФУНКЦИЯ ГРИНА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

1. Пусть R — открытая абстрактная риманова поверхность, Γ — идеальная граница этой поверхности (гл. VII, § 4, п. 37) и $\Pi_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ — последовательность полиэдрических областей, образующих исчерпание R [3]), $\Pi_n \subset \operatorname{int} \Pi_{n+1}$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n = R$. Граница Γ_n каждой области Π_n состоит из конечного числа попарно непересекающихся жордановых кривых; в случае необходимости мы будем предполагать, что каждая из них образована конечным числом аналитических дуг. В качестве Π_0 возьмем такую жорданову область, что $F_n = \overline{\Pi_n - \Pi_0}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

---

[1]) Относительно классов O_{HB} и O_{HD} см. также работу Cornea A., On the behaviour of analytic functions in the neighbourhood of the boundary of a Riemann surface, *Nagoya Math. Journ.*, **12** (dec. 1957), 55—58. Также в связи с классификацией римановых поверхностей см. Constantinescu C., Cornea A., Über den idealen Rand und einige seiner Anwendungen bei der Klassification der Riemannschen Flächen, *Nagoya Math. Journ.*, **13** (1958), 169—233; Cornea A., Über eine Formel in der Extremisierungstheorie, *Rev. Math. pures et appl.*, III, 4 (1958) и Părți singulare ale frontierei ideale, *Comunicările Acad. R. P. R.*, VIII, 7 (1958). Constantinescu C., Sur le comportement des fonctions analytiques à la frontière idéale d'une surface de Riemann, *C. R. Acad. Paris*, **245**, 23 (1957), 1955—1997; Ideale Randcomponenten einer Riemannschen Fläche, *Rev. Math. pures et appl.*, III, 4 (1958) и Asupra clasificării suprafețelor riemanniene, кандидатская диссертация, Бухарест, 1957.

[2]) Sario L., Capacity of boundary and of boundary component, *Ann. of Math.*, **59** (1954), 135—144; Jurchescu M., Suprafețe rimanniene cu frontiera absolut discontinuă, кандидатская диссертация, Бухарест, 1956; Modulus of a boundary component, *Pacific Journ. of Math.* цит. раб.; L'invariance K-quasiconforme de la parabolicité d'un élément frontière, *C. R. Acad. Paris*, **246** (1958), 2997—2999.

[3]) В гл. VII, § 6, п. 34 мы устаиовили существование такого исчерпания поверхности R.

является полиэдрической областью. Граница области F_n образована жордановыми кривыми из Γ_n и Γ_0.

Гармоническая мера Γ_n относительно F_n

$$\omega_n(z) = \omega(z, \Gamma_n, F_n) = \omega(z, \Gamma_n, \Gamma_0) \tag{1}$$

— это гармоническая функция, ограниченная в F_n, равная единице на Γ_n и нулю на Γ_0 (гл. VI, § 1, п. 1). Ее существование обеспечивается возможностью решения задачи Дирихле для полиэдрических областей на римановой поверхности (гл. VII, § 7, п. 48).

Как и в гл. VI, § 4, п. 17, можно показать, что функции ω_n образуют убывающую последовательность

$$\omega_n \geqslant \omega_{n+1} \tag{2}$$

внутри F_n.

Действительно, $\omega_n = 1$ и $\omega_{n+1} < 1$ на Γ_n, следовательно, $\omega_n - \omega_{n+1} \geqslant 0$ на Γ_n, тогда как $\omega_n - \omega_{n+1} = 0$ на Γ_0. Из принципа максимума и минимума[1]) вытекает, что неравенство (2) справедливо внутри F_n.

Применяя теорему Гарнака[1]) (гл. II, § 1, п. 6), получаем, что последовательность ω_n сходится равномерно внутри области $R - \Pi_0$ к некоторой гармонической функции, которую мы назовем *гармонической мерой идеальной границы* поверхности R и обозначим

$$\omega(z) = \omega(z, \Gamma, \Gamma_0). \tag{3}$$

Как и в гл. VI, § 4, п. 17—21, следует различать два случая (не зависящие от Π_n и Γ_0):

либо $\omega \equiv 0$ (для этого необходимо и достаточно, чтобы $\omega(z, \Gamma, \Gamma_0)$ обращалась в нуль в какой-либо одной точке z),

либо $\omega > 0$ в $R - \Pi_0$.

В первом случае R называется *римановой поверхностью с идеальной границей гармонической меры нуль* или просто *римановой поверхностью с нулевой границей*, а во втором — поверхностью с *границей положительной гармонической меры*.

2. Примером абстрактной римановой поверхности с нулевой границей может служить область $(z) - M$ комплексной плоскости, где M — компактное множество нулевой гармонической меры (гл. VI, § 4, п. 19).

3. Ниже мы изложим два характеристических свойства римановых поверхностей с нулевой границей: первое из них обобщает связь, установленную в случае плоских областей между гармони-

[1]) Эта теорема остается справедливой на римановых поверхностях, так как она вытекает из локальных свойств гармонических функций (гл. VII, § 7, п. 47).

ческой мерой и функцией Грина (гл. VI, § 4, п. 26—27), а второе использует интеграл Дирихле.

4. Функция Грина для римановой поверхности. Как мы видели в гл. I, § 4, п. 12 и гл. V, § 1, п. 1, в случае плоских полиэдрических областей построение функции Грина сводится к решению некоторой задачи Дирихле. Этот способ неприменим непосредственно к полиэдрическим областям на римановой поверхности. Действительно, если O — точка на R, выбранная в качестве полюса функции Грина, а z — локальный параметр в этой точке, при котором точке O соответствует в параметрическом круге точка $z=0$, то функция $\log\frac{1}{|z|}$ имеет смысл только локально на R. Для того чтобы построить функцию Грина полиэдрической области $\Pi\subset R$ с полюсом $O\in\Pi$, мы используем альтернирующий метод Шварца (гл. III, § 1) так же как мы поступили в гл. VIII, § 2, п. 5. Путем предельного перехода относительно исчерпания поверхности R областями Π_n мы определим функцию Грина этой поверхности [1]).

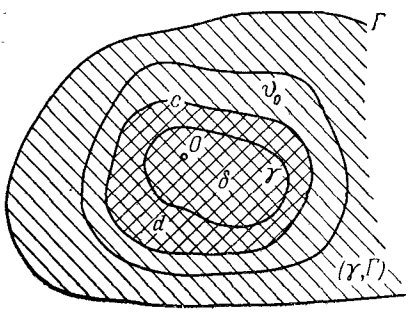

Рис. 49.

5. Пусть Π — полиэдрическая область на R с границей Γ, O — точка из Π и z — соответствующий O локальный параметр. Проведем в параметрической окрестности υ_0 точки O жордановы кривые c и γ, которым в параметрическом круге $|z|<1$ соответствуют окружности $|z|=r$ и $|z|=\rho$ ($\rho<r$), и обозначим, как в гл. VIII, § 2, п. 5, через d и δ жордановы области, ограниченные c и γ, и через (γ, Γ) — подобласть Π, ограниченную γ и Γ (рис. 49).

Построим, последовательно решая задачи Дирихле, функции u_k, гармонические в (γ, Γ) и функции v_k, гармонические в d, определенные условиями

$$u_1=\begin{cases}\log\frac{1}{\rho} & \text{на } \gamma,\\ 0 & \text{на } \Gamma,\end{cases}\qquad u_2=\begin{cases}v_1+\log\frac{1}{\rho} & \text{на } \gamma,\\ 0 & \text{на } \Gamma,\end{cases}\tag{4}$$

$$v_1=u_1-\log\frac{1}{r}\quad\text{на } c,\qquad v_2=u_2-\log\frac{1}{r}\quad\text{на } c$$

[1]) Аналогично можно строить на R и другие гармонические функции с заданными особенностями.

и вообще

$$u_{k+1}=\begin{cases} v_k+\log\dfrac{1}{\rho} & \text{на } \gamma,\\ 0 & \text{на } \Gamma,\end{cases}$$

$$v_{k+1}=u_{k+1}-\log\frac{1}{r} \quad \text{на } c.$$

Из соотношений (4) и из способа определения функций u_k и v_k вытекает, что $u_{k+1}-u_k$ — гармоническая функция в (γ, Γ) и что

$$u_{k+1}-u_k=\begin{cases} v_k-v_{k-1} & \text{на } \gamma,\\ 0 & \text{на } \Gamma,\end{cases} \tag{5}$$

а $v_{k+1}-v_k$ — гармоническая функция в d и

$$v_{k+1}-v_k=u_{k+1}-u_k \quad \text{на } c. \tag{6}$$

Введем обозначения

$$M=\max_c|u_2-u_1|,$$

$$q=\max_c[1-\omega(z, \Gamma, \gamma)],$$

где $\omega(z, \Gamma, \gamma)$ — гармоническая мера Γ в области (γ, Γ).

Применяя принцип максимума и минимума, получаем

$$\max_c|u_2-u_1|=\max_c|v_2-v_1|\geqslant$$

$$\geqslant\max_\gamma|v_2-v_1|=\max_\gamma|u_3-u_2|.$$

Следовательно, так как $u_3-u_2=0$ на Γ, то этот же принцип показывает, что

$$|u_3-u_2|\leqslant M[1-\omega(z, \Gamma, \gamma)]$$

в (γ, Γ). Таким образом, на c имеем

$$\max_c|u_3-u_2|\leqslant Mq.$$

Аналогично доказывается последовательно, что

$$\max_c|u_k-u_{k-1}|\leqslant Mq^{k-2},$$

откуда

$$\max_\gamma|u_{k+1}-u_k|\leqslant Mq^{k-2}. \tag{7}$$

Последнее неравенство вместе с замечанием, что $u_{k+1}-u_k=0$ на Γ, показывает, что

$$|u_{k+1}-u_k|\leqslant Mq^{k-2}$$

в $\overline{(\gamma, \Gamma)}$.

Таким образом, ряд $\sum_{k=2}^{\infty}(u_{k+1}-u_k)$ мажорируется в $\overline{(\gamma, \Gamma)}$ сходящимся рядом $\sum_{k=2}^{\infty} Mq^{k-2}$. Отсюда следует равномерная сходимость последовательности u_k в $\overline{(\gamma, \Gamma)}$. Предел u является гармонической в (γ, Γ) функцией (гл. II, § 1, п. 3).

Учитывая соотношения (6) и (7), устанавливаем равномерную сходимость последовательности v_n в $\overline{d}$ к гармонической в d функции v.

В области $\overline{(\gamma, c)}$ сходятся обе последовательности u_k и v_k. Переходя к пределу в соотношениях (4), получаем, что

$$u = v + \log\frac{1}{|z|} \tag{8}$$

как на c, так и на γ, а следовательно, во всей области $\overline{(\gamma, c)}$.

Таким образом, мы построили функцию u, гармоническую в (γ, Γ), равную нулю на Γ и удовлетворяющую соотношению (8) в (γ, c). При помощи гармонического продолжения (гл. II, § 4, п. 20) мы получаем, что соотношение (8) остается справедливым в окрестности O. Поэтому функция u является *функцией Грина области* Π, т. е. $G_\Pi(z, O)$.

Действительно, *она гармонична в* $\Pi - O$, *равна нулю на* Γ *и в окрестности точки* O *представляется в виде* (8):

$$\log\frac{1}{|z|} + v,$$

где функция v *гармонична в этой окрестности.*

Описанный выше способ позволяет получать гармонические функции в полиэдрической области $\Pi \subset R$ с заданными особенностями в окрестности некоторой точки O, лежащей внутри γ, заменяя $\log\frac{1}{|z|}$ функцией, гармонической в (γ, c), обладающей в δ требуемыми особенностями.

6. Для перехода к случаю римановой поверхности R рассмотрим исчерпание этой поверхности полиэдрическими областями Π_n, выбранными так, чтобы точка O лежала внутри Π_0. Проведем кривые γ и c в некоторой параметрической окрестности O, лежащей внутри Π_0, и построим, как и в п. 5, функции Грина $G_n(z, 0)$ областей Π_n [1]).

Как и в случае плоских областей (гл. V, § 4, п. 16), можно показать, что последовательность функций G_n возрастает.

---

[1]) Мы имеем $\Pi = \Pi_n$ и $\Gamma = \Gamma_n$.

Снова могут представиться два случая: либо последовательность G_n сходится к конечным значениям в отличных от O точках поверхности R, либо она стремится к бесконечности на R, причем в обоих случаях сходимость равномерна в любой компактной подобласти R.

В первом случае предельная функция называется *функцией Грина поверхности* R и обозначается $G_R(z, O)$. Она положительна, гармонична в $R - O$ и обладает в окрестности точки O представлением вида (8).

Во втором случае говорят, что *поверхность* R *не имеет функции Грина.*

Эта классификация не зависит от исчерпания Π_n и от полюса O. Свойство симметрии функции Грина (гл. V, § 1, п. 3 и § 4, п. 26) остается в силе. Эта функция также является нижней гранью гармонических и положительных в $R - O$ функций $P(z)$, обладающих представлением вида (8) в окрестностях точки O [1]).

7. Докажем теперь следующую теорему.

Для того чтобы риманова поверхность R *имела границу гармонической меры нуль, необходимо и достаточно, чтобы она не имела функции Грина.*

Для того чтобы установить необходимость этого условия, следует поступить так же, как в случае плоских областей (гл. VI, § 4, п. 27).

Пусть A — произвольное число и C — жорданова кривая, выбранная в параметрической окрестности точки O достаточно близко от O, так чтобы при $n > n_0$ выполнялось неравенство

$$G_n > A$$

в ограниченной кривой C жордановой области D и на C. В существовании такой кривой можно убедиться следующим образом: для фиксированного n_0 можно выбрать кривую C в окрестности точки O таким образом, чтобы в $\overline{D}$ иметь

$$G_{n_0} > A,$$

так как G_{n_0} стремится к $+\infty$ при стремлении z к нулю. Однако так как последовательность G_n возрастает, то тем более

$$G_n > A$$

в $\overline{D}$ при $n > n_0$.

---

[1]) Действительно, $P \geqslant G_n$ в каждой области Π_n, а следовательно, в пределе $P \geqslant G_R$ в R.

Так как $G_n > A$ на C и $G_n = 0$ на Γ_n, то из принципа максимума и минимума вытекает, что

$$G_n > A(1 - \omega_n) \tag{9}$$

в (C, Γ_n), где $\omega_n = \omega(z, \Gamma_n, C)$.

Если R имеет нулевую границу, то ω_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Пусть P — точка, произвольно выбранная в $R - \overline{D}$; тогда при достаточно большом n будет $\omega_n(P) < \frac{1}{2}$, а следовательно, из (9) вытекает, что $G_n(P, O) > \frac{A}{2}$. Так как A произвольно, то

$$\lim_{n\to\infty} G_n(P, O) = +\infty,$$

а следовательно, R не имеет функции Грина.

8. Чтобы доказать, что любая поверхность R с границей положительной гармонической меры обладает функцией Грина, вернемся к рассуждениям п. 5.

Пусть $u_k^{(n)}$ и $v_k^{(n)}$ — функции u_k и v_k, построенные для $\Pi = \Pi_n$, причем c и γ взяты в параметрической окрестности точки $O \in \Pi_0$ и $\Gamma = \Gamma_n$.

Из определения (4) этих функций

$$u_1^{(n)} = \begin{cases} \log\frac{1}{\rho} & \text{на } \gamma, \\ 0 & \text{на } \Gamma_n, \end{cases}$$

$$v_1^{(n)} = u_1^{(n)} - \log\frac{1}{r} \quad \text{на } c$$

вытекает, что

$$u_1^{(n)} = \left(\log\frac{1}{\rho}\right)(1 - \omega_n),$$

где

$$\omega_n = \omega(z, \Gamma_n, \gamma),$$

$$v_1^{(n)} = \left(\log\frac{1}{\rho}\right)(1 - \omega_n) - \log\frac{1}{r} \quad \text{на } c.$$

Однако

$$u_2^{(n)} - u_1^{(n)} = \begin{cases} v_1^{(n)} & \text{на } \gamma, \\ 0 & \text{на } \Gamma_n. \end{cases}$$

Следовательно, из принципа максимума и минимума вытекает неравенство

$$\max_c \left| u_2^{(n)} - u_1^{(n)} \right| \leqslant \log\frac{1}{r} + q_n \log\frac{1}{\rho} = M^{(n)},$$

где

$$q_n = \max_c (1 - \omega_n).$$

Повторяя рассуждение п. 5, получаем, что

$$\max_c \left| u_k^{(n)} - u_{k-1}^{(n)} \right| \leqslant M^{(n)} q_n^{k-2}. \tag{10}$$

Предположим теперь, что граница R имеет положительную гармоническую меру. Тогда $1 - \omega_n$ — возрастающая последовательность, сходящаяся к положительной в $R - \overline{\delta}$ гармонической функции $1 - \omega$, где ω — гармоническая мера границы R. Значит, последовательность q_n возрастает и стремится к числу

$$q = \max_c (1 - \omega),$$

удовлетворяющему неравенствам $0 < q < 1$.

В силу этих замечаний неравенство (10) можно заменить соотношением

$$\max_c \left| u_k^{(n)} - u_{k-1}^{(n)} \right| < M q^{k-2},$$

где $M = \log \frac{1}{r} + q \log \frac{1}{\rho}$.

Таким образом, мы получили не зависящую от n оценку разности $u_k^{(n)} - u_{k-1}^{(n)}$.

Предельная функция последовательности $u_k^{(n)}$

$$u^{(n)} = u_1^{(n)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(u_k^{(n)} - u_{k-1}^{(n)} \right)$$

мажорируется, таким образом, независимо от n суммой сходящегося ряда $\log \frac{1}{\rho} + M \sum_{k=0}^{\infty} q^k$. Однако $u^{(n)} = G_n$ и из ограниченности сверху функций G_n вытекает существование функции Грина $G_R(z, O)$ поверхности R.

9. При помощи интеграла Дирихле (гл. VII, п. 46) можно иначе охарактеризовать римановы поверхности с нулевой границей.

Для того чтобы риманова поверхность R имела нулевую границу, необходимо и достаточно, чтобы для любого исчерпания R при помощи полиэдрических областей Π_n

$$\lim_{n \to \infty} D_{F_n}(\omega_n) = 0^1). \tag{11}$$

В настоящем пункте мы рассмотрим исчерпание Π_n, для которого каждая кривая из Γ_n состоит из конечного числа аналитических дуг.

---

[1]) Как и в п. 1, $F_n = \overline{\Pi_n - \Pi_0}$ и $\omega_n = \omega(z, \Gamma_n, \Gamma_0)$.

Применяя формулу (42) гл. VII к функции ω_n, равной единице на Γ_n и нулю на Γ_0, получаем

$$D_{F_n}(\omega_n) = -\int_{\Gamma_n} \frac{\partial \omega_n}{\partial n_i}\, ds, \tag{12}$$

где интеграл взят в положительном направлении относительно F_n, т. е. в направлении, оставляющем область F_n слева.

С другой стороны, учитывая, что ω_n является гармонической в F_n, и применяя формулу (41) гл. VII, получаем

$$\int_{\Gamma_n+\Gamma_0} \frac{\partial \omega_n}{\partial n_i}\, ds = 0. \tag{13}$$

Следовательно,

$$D_{F_n}(\omega_n) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \omega_n}{\partial n_i}\, ds, \tag{14}$$

где интеграл берется в положительном направлении относительно F_n.

На Γ_0 имеем $\omega_n = 0$, а внутри F_n выполняется неравенство $\omega_n > 0$; отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial n_i} \geqslant 0.$$

При стремлении n к бесконечности последовательность ω_n убывает, а одновременно с ней убывает и $\partial\omega/\partial n_i$. Из равномерной сходимости последовательности ω_n к ω вытекает равномерная сходимость производных $\partial\omega_n/\partial n_i$ к $\partial\omega/\partial n_i$ (гл. II, § 1, п. 3)[1]), откуда следует равенство

$$D_R(\omega) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \omega}{\partial n_i}\, ds, \tag{15}$$

из которого сразу следует доказываемая теорема.

Если $\omega = 0$, то, согласно (15), $D_R(\omega) = 0$. Обратно, если $D_R(\omega) = 0$, то $\int_{\Gamma_0} \frac{\partial \omega}{\partial n_i}\, ds = 0$, и так как $\frac{\partial \omega}{\partial n_i} \geqslant 0$, то $\frac{\partial \omega}{\partial n_i} = 0$ на Γ_0. Однако мы имеем также $\frac{\partial \omega}{\partial s} = 0$ на Γ_0, так как $\omega = 0$ на Γ_0. Поэтому аналитическая функция $\omega + i\tilde{\omega}$ постоянна на Γ_0, и так как Γ_0 состоит из аналитических дуг, то эта функция равна постоянной и $\omega = 0$. Таким образом $D_R(\omega) = 0$ влечет за собой $\omega = 0$.

---

[1]) Равномерная сходимость последовательности $\frac{\partial \omega_n}{\partial n_i}$ на аналитических дугах из Γ_0 следует из того, что функции ω_n продолжаются гармонически через эти дуги (гл. II, § 4, п. 19).

10. В п. 1 и 4—6 мы исследовали гармоническую меру границы римановой поверхности и функцию Грина этой поверхности. Однако эти понятия можно определить не только для всей границы, но и для одного граничного элемента. При помощи логарифмической емкости граничного элемента[1]) или его гармонической меры[2]) удалось охарактеризовать класс римановых поверхностей, называемых поверхностями с абсолютно разрывной границей, широко обобщающий класс поверхностей с нулевой границей.

11. Чтобы определить гармоническую меру граничного элемента, М. Журкеску решает следующую задачу на минимум.

Пусть R — открытая риманова поверхность, γ — граничный элемент поверхности R и Π_n — последовательность полиэдрических областей, образующая исчерпание этой поверхности. Предположим, что каждая кривая границы Γ_n области Π_n является аналитической и разбивает R на две непересекающиеся части, одна из которых, содержащаяся в $R-\Pi_n$, некомпактна.

Обозначим через γ_n кривую из Γ_n, отделяющую γ от Π_n[3]), и через β_{ni} — остальные кривые из Γ_n. Ориентируем Γ_n в положительном направлении относительно Π_n.

Пусть G — связная компонента множества $R-\Pi_0$, содержащая γ на своей идеальной границе, $G_n=(\operatorname{int}\Pi_n-\Pi_0)\cap G$ и Γ_n^* — та часть границы G_n, которая принадлежит Γ_n[4]).

Рассматривается класс $\{\varphi\}_\gamma$, *состоящий из всех функций* φ, *гармонических и однозначных в* G *и удовлетворяющих условиям*

1) $\varphi=0$ *на* γ_0,

2) $\int\limits_{\gamma_n} d\overline{\varphi}=1,\quad \int\limits_{\beta_{ni}} d\overline{\varphi}=0.$

Требуется найти функцию и из класса $\{\varphi\}_\gamma$, *минимизирующую интеграл Дирихле* $D_G(\varphi)$[5]).

---

[1]) Sario L., Capacity of boundary and of boundary component, цит. раб.

[2]) Jurchescu M., Suprafeţe riemanniene cu frontiera absolut discontinuă. Излагаемые ниже результаты содержатся в гл. I этой диссертации.

[3]) Жорданова кривая c отделяет граничный элемент γ от множества $K\subset R$, если $R-c$ несвязно и если одна из связных компонент этого множества содержит K, а вторая содержит γ на своей идеальной границе.

[4]) Если Π_0 односвязна, то $G=R-\Pi_0$, $G_n=\operatorname{int}\Pi_n-\Pi_0$ и $\Gamma_n^*=\Gamma_n$.

[5]) Доказывается, что свойство 2) не зависит от используемого исчерпания. Для упрощения записи мы не будем писать индекса G, обозначая интеграл Дирихле по G через $D(\varphi)$.

Минимум интеграла Дирихле, существование которого будет доказано ниже, обозначается через μ_γ и называется *модулем граничного элемента* γ относительно его окрестности G [1]).

Модуль обладает свойством монотонности: если R принадлежит римановой поверхности R', а γ отделяет в R' область Π_0 от граничного элемента γ' поверхности R', то (исходя из той же полиэдрической области Π_0)

$$\mu_\gamma \leqslant \mu_{\gamma'}. \tag{16}$$

12. *Если минимум* μ_γ *конечен, то задача имеет единственное решение.*

Действительно, предположим, что существуют два решения u' и u'':

$$D(u') = D(u'') = \mu_\gamma < +\infty.$$

Тогда функция $h = u'' - u'$ гармонична в G, равна нулю на γ_0, обладает конечным интегралом Дирихле $D(h)$ (гл. IV, п. 2, 2°) и удовлетворяет соотношениям $\int\limits_{\beta_{ni}} d\bar{h} = 0$, $\int\limits_{\gamma_n} d\bar{h} = 0$.

Следовательно, при любом действительном ε функция $u' + \varepsilon h$ принадлежит классу $\{\varphi\}_\gamma$ и обладает конечным интегралом Дирихле $D(u' + \varepsilon h)$.

Из неравенства

$$D(u') \leqslant D(u' + \varepsilon h) = D(u') + 2\varepsilon D(u', h) + \varepsilon^2 D(h)$$

вытекает, как и в гл. IV, п. 4, что $D(u', h) = 0$. Выбирая $\varepsilon = 1$, получаем $D(h) = 0$; это означает, что h — постоянная. Так как $h = 0$ на γ_0, то $u' = u''$.

Предложенная задача на минимум будет сначала решена для областей Π_n и граничных элементов γ_n, что приведет к нахождению функции u_n; затем мы покажем, что последовательность u_n компактна, т. е. что из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри G. Наконец, мы докажем, что предел такой подпоследовательности является решением задачи для поверхности R.

---

[1]) В теории конформных отображений модуль кругового кольца $r' < |w| < r''$ равен $\frac{1}{2\pi} \log \frac{r'}{r''}$; два круговых кольца тогда и только тогда конформно эквивалентны, когда их модули равны. Модуль граничного элемента обобщает модуль двусвязной области. См. Jurchescu M., Suprafețe rimanniene cu frontiera absolut discontinuă, cap. II, § 2, 2.1—2.2, p. 45—47. Задачу на минимум можно рассматривать и в случае, когда γ является не элементом, а частью границы (Jurchescu M., там же, cap. II, § 2, 2.4, p. 49).

13. В настоящем пункте мы будем предполагать, что R является внутренностью полиэдрической области Π [1]), лежащей на объемлющей поверхности R' и имеющей границу Γ, состоящую из конечного числа непересекающихся простых замкнутых аналитических кривых. Рассмотрим полиэдрическую область Π_0 внутри R, ограниченную непересекающимися простыми замкнутыми аналитическими кривыми Γ_0. Обозначим через γ граничный элемент R (одну из кривых Γ) и через γ_0 — кривую из Γ_0, отделяющую Π_0 от той связной компоненты G множества $R-\Pi_0$, на границе которой находится γ. Таким образом, граница G содержит кривые γ_0, $\gamma=\gamma_1$ и конечное число кривых β_i из Γ, которые мы обозначим через $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_q$. Для упрощения записи положим

$$\sum_{k=1}^{q}\gamma_k=\Gamma^*.$$

Ставится задача построения функции u в классе гармонических в $\overline{G}$ [2]) функций φ, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) u равна нулю на γ_0;

2) $\int\limits_{\gamma_1} d\bar{u}=1$, $\int\limits_{\gamma_i} d\bar{u}=0$ $(i=2, 3, \ldots, q)$;

3) $D(u)\leqslant D(\varphi)$ для любой функции φ со свойствами 1) и 2).

Покажем, что в классе φ свойство 3) равносильно следующему свойству:

3′) u постоянна на граничных кривых области G.

Для этого мы *построим в классе φ функцию u, удовлетворяющую* условиям 1), 2) и 3′), и покажем, что эта функция минимизирует интеграл Дирихле.

Пусть ω_k — гармоническая мера кривой γ_k относительно области G $(k=1, 2, \ldots, q)$. Если существует функция класса φ, которая постоянна на γ_k, то, обозначая через x_k значение этой функции на γ_k и применяя принцип максимума и минимума, получаем, что

$$u=\sum_{k=1}^{q}x_k\omega_k. \tag{17}$$

Из свойства 2) вытекает тогда, что x_k должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{q}A_{ik}x_k=\delta_{1i}, \tag{18}$$

---

[1]) Установленные здесь результаты будут затем применены к областям Π_n некоторого исчерпания.

[2]) Так как это предложение применяется к областям некоторого исчерпания, то это условие удовлетворяется.

где

$$A_{ik} = \int_{\gamma_i} d\bar{\omega}_k, \tag{19}$$

а δ_{il} — символ Кронекера, равный единице при $i = 1$ и нулю при $i \neq 1$.

Вторая формула Грина

$$\int_{\Gamma^*} \omega_i \, d\bar{\omega}_k - \omega_k \, d\bar{\omega}_i = 0$$

показывает, что

$$A_{ik} = A_{ki}.$$

Докажем, что определитель $|A_{ik}|$ отличен от нуля.

Для этого вычислим интеграл Дирихле функции u, определенной равенством (17); согласно формуле (42) гл. VII

$$D(u) = \int_{\Gamma^*} u \, d\bar{u} = \sum_{i,\,k=1}^{q} A_{ik} x_i x_k.$$

$D(u)$ — положительно определенная квадратичная форма относительно x_i. Действительно, $D(u) \geqslant 0$ и $D(u) = 0$ только при $u = 0$, что имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0$. Следовательно, $|A_{ik}| > 0$.

Система (19) обладает единственным решением, подстановка которого в соотношение (17) однозначно определяет функцию u со свойствами 1), 2) и 3′).

Покажем теперь, что эта функция удовлетворяет также и условию 3).

Образуем для любой функции φ со свойствами 1) и 2) разность $h = \varphi - u$. Тогда

$$D(\varphi) = D(u) + 2D(u, h) + D(h).$$

Согласно предварительной формуле Грина,

$$D(u, h) = \int_{\Gamma^*} u \, d\bar{h} = \int_{\Gamma^*} \sum_{k=1}^{q} x_k \omega_k \, d\bar{h} = \sum_{k=1}^{q} x_k \int_{\gamma_k} d\bar{h} = 0,$$

так как $\int_{\gamma_k} d\bar{h} = 0$ при любом k.

Следовательно,

$$D(\varphi) = D(u) + D(h),$$

откуда вытекает, что u удовлетворяет условию 3).

Согласно предложению из п. 12, так как модуль μ_γ конечен, u определяется однозначно условиями 1), 2) и 3), а следовательно, в классе φ свойства 3) и 3′) равносильны.

При этом

$$D(u) = \int_{\Gamma^*} u\, d\bar{u} = x_1,$$

а следовательно, модуль μ_γ граничного элемента γ относительно G равен значению x_1 на γ минимизирующей функции u.

14. *Функция u удовлетворяет в G неравенствам*

$$0 < u < x_1. \tag{20}$$

Действительно, пусть m — минимум и M — максимум постоянных x_k. Тогда внутри G имеем

$$m < u < M.$$

Обозначим через $\gamma(m)$ кривую γ_k (или, если их несколько, то одну из них), на которой $u = m$. На $\gamma(m)$ справедливо соотношение $\frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0$ $\left(\text{где } \frac{\partial u}{\partial n} \text{ — производная функции } u \text{ по направлению внутренней нормали относительно } G\right)$, так как $u = m$ на $\gamma(m)$ и $u > m$ в G. Однако $\frac{\partial u}{\partial n}$ не может равняться нулю на $\gamma(m)$, так как тогда аналитическая функция $u + i\bar{u}$ была бы постоянной на $\gamma(m)$, что невозможно. Следовательно,

$$\int_{\gamma(m)} d\bar{u} = -\int_{\gamma(m)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds < 0.$$

Учитывая свойство 2), имеем $\gamma(m) = \gamma_0$ и $m = 0$.

Аналогично через $\gamma(M)$ обозначается кривая γ_k, на которой $u = M$, и доказывается, что $\int_{\gamma(M)} d\bar{u} > 0$, откуда вытекает, что $\gamma(M) = \gamma_1$ и $M = x_1 = \mu_\gamma$.

В случае, когда род G равен нулю, доказывается, что функция $w = e^{2\pi(u+i\bar{u})}$ отображает конформно G на круговое кольцо $1 < |w| < e^{2\pi\mu_\gamma}$, в котором проведены разрезы по дугам окружностей с центром $w = 0$, соответствующие граничным кривым γ_k $(k = 2, 3, \ldots, q)$.

15. Рассмотрим теперь, как в п. 11, произвольную открытую риманову поверхность R и определим для каждой полиэдрической

области ее исчерпания Π_n функцию u_n, существование которой было доказано в п. 13. Эта функция гармонична в G_n, равна нулю на γ_0 и постоянна на кривых γ_n и β_{nl}:

$$u = \mu_n \quad \text{на} \quad \gamma_n, \quad u = x_{nl} \quad \text{на} \quad \beta_{nl}.$$

Она удовлетворяет также условиям 2) п. 11.

Согласно свойству монотонности [соотношение (16)], последовательность μ_n возрастает и

$$\mu_n \leqslant \mu_\gamma = \inf_{\varphi} D(\varphi).$$

Если модуль μ_γ конечен, то последнее неравенство и соотношение (20) показывают, что u_n неотрицательны и образуют ограниченную в G последовательность, а значит, согласно теореме Гарнака (гл. II, § 2, п. 6), множество u_n компактно [1]).

В случае $\mu_\gamma = \infty$, согласно той же теореме, имеются две возможности: либо последовательность u_n ограничена внутри G (т. е. на любом компактном множестве из G), и поэтому она компактна, либо она сходится равномерно к бесконечности внутри G. Однако последнюю возможность следует исключить, что вытекает из следующего рассуждения.

Пусть m — произвольный, но фиксированный индекс, и пусть s — гармоническая функция, ограниченная в G_m, равная нулю на γ_0, равная a на Γ_m^* и удовлетворяющая соотношению $\int\limits_{\Gamma_m^*} d\bar{s} = 1$.

Применяя вторую формулу Грина к функциям $u_n (n > m)$ и s в области $\overline{G}_m$, получаем

$$\int\limits_{\Gamma_m^*} u_n \, d\bar{s} - s \, d\bar{u}_n = 0,$$

так как u_n и s равны нулю на γ_0. Так как $s = a$ на Γ_m^*, а $\int\limits_{\Gamma_m^*} d\bar{u}_n = 1$, то $\int\limits_{\Gamma_m^*} u_n \, d\bar{s} = a$, т. е.

$$\min_{\Gamma_m^*} u_n \leqslant a$$

при любом n. Это исключает возможность равномерной сходимости последовательности u_n к бесконечности.

---

[1]) То есть из любой последовательности этого множества можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно внутри G.

Таким образом, мы доказали, что последовательность u_n компактна, независимо от того, является ли μ_γ конечным или бесконечным.

16. Пусть $u = u_\gamma$ — одна из предельных функций последовательности u_n. Эта функция принадлежит семейству $\{\varphi\}_\gamma$, что вытекает из справедливости условий 1) и 2) п. 11, если учесть теорему Гарнака. С другой стороны, из свойства полунепрерывности интеграла Дирихле (гл. IV, (11)] следует неравенство

$$D(u) \leqslant \lim_{n\to\infty} D(u_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_n,$$

и так как $\mu_n \leqslant \mu_\gamma$, то $D(u) \leqslant \mu_\gamma$.

По определению,

$$D(u) \geqslant \mu_\gamma,$$

откуда

$$D(u) = \mu_\gamma,$$

т. е. u является решением задачи на минимум для поверхности R.

В случае конечного μ_γ предложение п. 12 показывает, что существует единственная предельная функция последовательности u_n.

17. Докажем теперь следующую теорему.

Для любого граничного элемента γ поверхности R имеются две возможности:

либо модуль $\mu_\gamma(G)$ конечен, какова бы ни была область Π_0,

либо $\mu_\gamma(G)$ бесконечен, какова бы ни была Π_0.

Если Π_0 и Π_0' — две полиэдрические области на R, удовлетворяющие условиям, наложенным в п. 11 на области, образующие исчерпание R, то можно всегда найти третью область Π_0'', ограниченную аналитическими жордановыми кривыми и содержащую внутри себя области Π_0 и Π_0'. Поэтому достаточно доказать сформулированную теорему в случае, когда Π_0' содержит внутри Π_0.

Пусть Π_n — некоторое исчерпание R, такое, что Π_1 содержит область Π_0', и пусть u_n, соответственно u_n', — функция, решающая задачу на минимум для области G_n, соответственно G_n', где $G_n' = (\operatorname{int}\Pi_n - \Pi_0') \cap G'$, а G' — связная компонента множества $R - \Pi_0'$, содержащая γ на своей границе. Применяя вторую формулу Грина в области G_n' к функциям u_n и u_n', получаем

$$\int_{\Gamma_n^*} u_n \, d\bar{u}_n' - u_n' \, d\bar{u}_n = \int_{\gamma_0'} u_n \, d\bar{u}_n',$$

или

$$\mu_n - \mu'_n = \int_{\gamma_0'} u_n \, d\bar{u}'_n. \tag{21}$$

Взяв последовательность значений n_k, для которых u_{n_k} и u'_{n_k} сходятся соответственно к функциям u_γ и u'_γ, получаем из (21), что

$$\mu_\gamma - \mu'_\gamma = \int_{\gamma_0'} u_\gamma \, d\bar{u}'_\gamma .$$

Таким образом, μ_γ и μ'_γ одновременно конечны или бесконечны.

В первом случае γ называется граничным элементом *гиперболического типа*, а во втором случае—элементом *параболического типа*.

18. Гармоническая мера граничного элемента. Функция $\omega_n(z) = \frac{1}{\mu_n} u_n(z)$ гармонична и однозначна в $\overline{G}_n$, равна нулю на γ_0, единице на γ_n и постоянной, заключенной между нулем и единицей, на β_{ni}.

Согласно принципу максимума и минимума, в G_n

$$0 < \omega_n < 1.$$

При $n \to \infty$ в случае, когда модуль μ_γ конечен, последовательность u_n сходится к пределу u, и значит ω_n сходится к конечной предельной функции $\omega = \omega_\gamma(z)$, не зависящей от выбранного исчерпания, а только от γ и от G.

Функция ω_γ гармонична в G, равна нулю на γ_0 и удовлетворяет в G неравенствам

$$0 < \omega_\gamma < 1. \tag{22}$$

Модуль μ_γ связан с ω_γ соотношением

$$\mu_\gamma = \frac{1}{D(\omega_\gamma)}. \tag{23}$$

Если $\mu_\gamma = \infty$, то последовательность $\omega_n(z) = \frac{1}{\mu_n} u_n(z)$ сходится равномерно к $\omega_\gamma = 0$.

Назовем ω_γ *гармонической мерой граничного элемента* γ.

Граничный элемент тогда и только тогда является элементом параболического типа, когда его гармоническая мера равна нулю.

В случае, когда R обладает единственным граничным элементом, ω_γ — это гармоническая мера идеальной границы.

19. Каждому граничному элементу γ можно также сопоставить гармоническую емкость, которая обращается в нуль одновременно с гармонической мерой. Л. Сарио [1]) ввел эту емкость путем решения следующей задачи.

Пусть снова γ — граничный элемент поверхности R, O — фиксированная точка на R, υ_0 — параметрическая окрестность точки O и Π_n — исчерпание поверхности R, обладающее указанными в п. 11 свойствами, причем Π_0 должна содержать внутри окрестность υ_0.

Рассматривается класс функций $\{t\}_\gamma$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $t(z)$ гармонична в $R-O$ и обладает в υ_0 относительно фиксированного параметра z представлением вида

$$t(z)=\log|z|+\varepsilon(z),$$

где $\varepsilon(z)$ — гармоническая в υ_0 функция, равная нулю в точке $z=0$;

2) $\int\limits_{\gamma_n} d\bar{t}=2\pi$ и $\int\limits_{\beta_{nl}} d\bar{t}=0$ для любого n.

Требуется определить функцию t_γ из этого семейства, для которой достигает минимума интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} t\,d\bar{t}=\frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Gamma_n} t\,d\bar{t}. \tag{24}$$

Решение всегда существует и определено однозначно при условии, что минимум интеграла (24), который мы обозначим через k_γ, конечен. Его можно найти, решая задачу на минимум для полиэдрической области Π_n и переходя затем к пределу. В случае области Π_n определение минимизирующей функции равносильно нахождению функции из семейства $\{t\}_{\gamma_n}$, которая постоянна на кривых γ_n и β_{nl} границы Γ_n области Π_n.

Доказывается, что максимальное значение функции t_n, решающей задачу для Π_n, — это ее значение на γ_n, которое мы обозначим через k_n; оно равно также минимуму интеграла (24) относительно Π_n. При $n\to\infty$ значения k_n образуют возрастающую последовательность, предел которой, конечный или бесконечный, равен k_γ.

Если $k_\gamma<\infty$, то последовательность t_n сходится к предельной функции $t_\gamma(z, O)$, которая удовлетворяет условиям 1) и 2) и решает задачу на минимум для R. Если $k_\gamma=\infty$, то последо-

---

[1]) Sario L., Capacity of boundary and of boundary component, цит. раб.

вательность t_n компактна и любая предельная функция $t_\gamma(z, O)$ является решением задачи.

Сарио называет число $k_\gamma = k_\gamma(O)$ постоянной Робена поверхности R для граничного элемента γ, а $c_\gamma(O) = e^{-k_\gamma(O)}$ — логарифмической емкостью элемента γ в точке O.

Доказывается, что c_γ положительна или равна нулю, смотря по тому, конечен или бесконечен модуль μ_γ, так как из второй формулы Грина [гл. I, (12)], примененной в G_n к функциям t_n и u_n, путем предельного перехода относительно подходящей подпоследовательности индексов n можно вывести соотношение

$$k_\gamma - 2\pi\mu_\gamma = \int_{\gamma_0} t_\gamma \, d\bar{u}_\gamma.$$

Отсюда следует, что обращение в нуль емкости граничного элемента происходит тогда и только тогда, когда этот элемент является параболическим; оно не зависит от точки $O \in R$ и от используемого локального параметра [1]).

Из функции Сарио t_γ можно получить функцию Грина поверхности R для элемента γ.

Введем обозначение

$$g_n(z, O) = k_n - t_n(z, O).$$

Если $k_\gamma < \infty$, то, переходя к пределу, получаем функцию

$$g_\gamma(z, O) = k_\gamma - t_\gamma(z, O)$$

со следующими свойствами:

---

[1]) Равносильное этому определение емкости получается путем обобщения понятия периметра компоненты границы плоской области, принадлежащего Л. Альфорсу и А. Бёрлингу, см. Ahlfors L., Beurling A., Conformal invariants and function-theoretic null-sets, цит. раб. См. Jurchescu M., Suprafețe riemanniene cu frontiera absolut discontinuă, cap. I, § 3, 3.4, p. 26—27. Связь между функциями t_γ и u_γ обобщает связь между функцией Грина и гармонической мерой.

Взяв в качестве Π_0 полиэдрическую область $t_\gamma \leqslant \lambda$ и обозначив через u_γ функцию, решающую задачу на минимум из п. 13, соответствующую связной компоненте G множества $R - \Pi_0$, содержащей γ на своей границе, получим

$$u_\gamma = \frac{1}{2\pi}(\lambda - t_\gamma).$$

См. также Iacob C., Sur le problème de Dirichlet dans un domaine plan multiplement connexe ..., *Journ. Math. pures et appl.*, **IX**, 18 (1939), 363—383.

a) $g_\gamma(z, O)$ гармонична в $R-O$ и обладает в окрестности точки O параметрическим представлением вида

$$g_\gamma(z, O) = \log\frac{1}{|z|} + k_\gamma + \varepsilon(z),$$

где z — параметр, соответствующий этой окрестности, а функция $\varepsilon(z)$ гармонична в этой окрестности и равна нулю в точке $z=0$;

b) $g_\gamma(z, O) > 0$ на R;

c) $g_\gamma(P, O) = g_\gamma(O, P)$, где O и P—произвольные точки на R.

Мы назовем $g_\gamma(z, O)$ функцией Грина поверхности R для граничного элемента γ и полюса O.

Если $k_\gamma = \infty$, то g_n стремятся к бесконечности равномерно внутри R, и тогда заведомо R не имеет функции Грина для γ.

Итак, поверхность R обладает или не обладает функцией Грина для элемента γ, в зависимости от того, положительна или равна нулю гармоническая мера этого элемента, т. е. является он гиперболическим или параболическим.

20. Открытая риманова поверхность R называется *поверхностью с абсолютно разрывной границей*, или поверхностью класса D, если $\omega_\gamma \equiv 0$ для любого граничного элемента γ поверхности R ($\mu_\gamma = \infty$ или $c_\gamma = 0$)[1].

Так как равенство $\mu_\gamma(G) = \infty$ не зависит от выбора G, то абсолютная разрывность границы римановой поверхности является свойством только самой этой границы. Оно инвариантно не только при конформных отображениях всей поверхности R, но и при таких отображениях произвольной окрестности идеальной границы.

Поверхности с нулевой границей принадлежат классу D, так как если ω — гармоническая мера границы относительно $R-\Pi_0$, то $\omega_\gamma \leqslant \omega$ для любого граничного элемента γ поверхности R. В случае, когда R обладает единственным граничным элементом или конечным числом граничных элементов, поверхности с нулевой границей и поверхности с абсолютно разрывной границей совпадают.

§ 2. СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С НУЛЕВОЙ ГРАНИЦЕЙ[2]

В настоящем разделе мы установим ряд лемм и теорем об аналитических и гармонических функциях и их дифференциалах на

[1] В цитированной работе Suprafete riemanniene cu frontiera absolut discontinuă M. Журкеску исследует свойства класса D.

[2] См. Nevanlinna R., Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, цит. раб.

римановой поверхности R с нулевой границей. В частности, мы будем изучать дифференциалы первого рода: аналитические, регулярные и однозначные на R с конечным интегралом Дирихле относительно R. Такие дифференциалы с конечным интегралом Дирихле называются суммируемыми в квадрате. Как мы увидим в § 4 п. 36, рассмотрение таких дифференциалов необходимо для перенесения теории абелевых интегралов на случай открытых римановых поверхностей с нулевой границей.

21. Докажем сначала следующую общую лемму:

Пусть R — произвольная открытая риманова поверхность (не обязательно с нулевой границей), Π_n — *исчерпание* R и ω_n — *гармоническая мера границы* Γ_n *области* Π_n *относительно* $F_n = \overline{\Pi_n} - \Pi_0$. *Полное приращение любого регулярного и однозначного на* R *аналитического дифференциала* dw *на линии уровня* $\omega_n = \lambda$

$$L(\lambda) = \int\limits_{\omega_n = \lambda} |dw| \tag{25}$$

удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_0^1 L^2(\lambda)\, d\lambda \leqslant D_{F_n}(w)\, D_{F_n}(\omega_n). \tag{26}$$

Действительно,

$$L(\lambda) = \int\limits_{\omega_n = \lambda} \left| \frac{dw}{d\bar{\omega}_n} \right| d\bar{\omega}_n \text{ [1]}.$$

Применяя неравенство Шварца (гл. IV, сноска [2]) на стр. 81), получаем

$$L^2(\lambda) \leqslant \int\limits_{\omega_n = \lambda} \left| \frac{dw}{d\bar{\omega}_n} \right|^2 d\bar{\omega}_n \int\limits_{\omega_n = \lambda} d\bar{\omega}_n. \tag{27}$$

Далее, как и в соотношении (12) [или в гл. VII, (42)],

$$D_{F_n}(\omega_n) = \int\limits_{\Gamma_n} d\bar{\omega}_n = \int\limits_{\omega_n = \lambda} d\bar{\omega}_n, \tag{28}$$

где оба интеграла взяты в положительном направлении относительно F_n, соответственно относительно области, ограничиваемой Γ_0 и $\omega_n = \lambda$ (т. е. $d\bar{\omega}_n \geqslant 0$).

---

[1]) Это соотношение можно получить, используя криволинейные координаты ω_n и $\bar{\omega}_n$ и принимая во внимание, что $d\bar{\omega}_n \geqslant 0$, когда линия $\omega_n = \lambda$ описывается в положительном направлении относительно области $0 < \omega_n < \lambda$.

С другой стороны,

$$D_{0\leqslant\omega_n\leqslant\lambda}(w)=\int\limits_{\lambda'=0}^{\lambda}d\lambda'\int\limits_{\omega_n=\lambda'}\left|\frac{dw}{d\bar{\omega}_n}\right|^2 d\bar{\omega}_n$$

(так как можно взять производную w по любому направлению и воспользоваться координатами ω_n и $\bar{\omega}_n$), откуда следует, что

$$\frac{d}{d\lambda}D_{0\leqslant\omega_n\leqslant\lambda}(w)=\int\limits_{\omega_n=\lambda}\left|\frac{dw}{d\bar{\omega}_n}\right|^2 d\bar{\omega}_n. \tag{29}$$

Искомое неравенство (26) непосредственно вытекает из (27), если учесть (28) и (29).

22. Следствие. *Если R имеет нулевую границу, а дифференциал dw суммируем в квадрате, то при достаточно большом n существует такое λ, что $L(\lambda)<\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ произвольно).*

Если дифференциал dw суммируем в квадрате, то интеграл $D_R(w)$ конечен, и поэтому существует такое число M, что

$$D_{F_n}(w)\leqslant M$$

при любом n.

Так как R имеет нулевую границу, то из установленной в п. 9 теоремы следует, что

$$D_{F_n}(\omega_n)<\frac{\varepsilon}{M}$$

при достаточно большом n.

Тогда неравенство (26) принимает вид

$$\int\limits_0^1 L^2(\lambda)\,d\lambda\leqslant\varepsilon,$$

следовательно, существует такое λ, что

$$L(\lambda)<\varepsilon$$

при любом достаточно большом n.

23. Докажем теперь еще одну лемму.

Если dw — однозначный аналитический дифференциал, регулярный и суммируемый в квадрате на римановой поверхности R с нулевой границей, и если P_0 — произвольная точка на R, то при любом $\varepsilon>0$ существует множество γ_ε, состоящее из конечного числа простых замкнутых аналитических кривых и отделяющее P_0 от идеальной границы Γ

поверхности R[1]), *на котором полное приращение дифференциала* dw *меньше* ε:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} |dw| < \varepsilon. \tag{30}$$

Пусть Π_0 — жорданова область, содержащая P_0. Покажем, что в качестве γ_ε можно взять линию уровня $\omega_n = \lambda$, если n достаточно велико, а λ — надлежащим образом выбранное число.

Действительно, заключение предыдущего пункта показывает, что соотношение (30) выполняется в этом случае. С другой стороны, множество γ_ε отделяет P_0 от границы R, так как, согласно свойствам линий уровня гармонической меры, оно отделяет P_0 от Γ_n.

24. *За исключением тривиального случая* $dw = 0$, *любая кривая* (*или любое объединение кривых*) γ_ε, *для которой* $\int_{\gamma_\varepsilon} |dw| < \varepsilon$, *стремится к границе поверхности* R *при* $\varepsilon \to 0$.

В противном случае на R существует компактная область Δ, через которую проходят кривые γ_ε при $\varepsilon \to 0$. На каждой γ_ε можно выбрать точку P_ε, принадлежащую Δ. Эти точки будут обладать в Δ хотя бы одной предельной точкой P_0. Пусть ε_n — убывающая и стремящаяся к нулю последовательность, такая, что P_{ε_n} стремится к P_0.

При отображении параметрической окрестности точки P_0 на параметрический круг $|t| < 1$ точке P_0 соответствует $t = 0$, а точкам P_{ε_n} при достаточно большом n соответствуют стремящиеся к нулю точки t_n, которые мы будем считать принадлежащими кругу $|t| < r_0$, где $r_0 < 1$. Тогда в $|t| < r_0$ существует кривая l_n — образ γ_{ε_n}, которая соединяет t_n с $|t| = r_0$ и на которой полное приращение dw меньше ε_n (рис. 50).

Согласно теореме о монодромии (гл. VII, § 7, п. 47), каждая ветвь функции $w(t)$ однозначна и регулярна в круге $|t| < 1$. Поэтому в круге $|t| \leqslant r_0$ она, кроме того, ограничена,

$$|w(t)| < M.$$

Применяя лемму Шварца, получаем

$$|w(t) - w(0)| < 2M|t|.$$

---

[1]) Говорят, что γ отделяет P_0 от идеальной границы поверхности R, если множество точек на R, которые можно соединить с P_0 непрерывными путями, не пересекающими γ, компактно в R. См. сноску [3]) на стр. 301.

Обозначим через s_n отрезок, соединяющий t_n с 0, и через L_n — множество $l_n + s_n$.

Покажем, что

$$|w(t) - w(0)| \leqslant 2M|t_n| + \varepsilon_n = \eta_n$$

при $t \in L_n$.

Действительно, если $t \in s_n$, то

$$|w(t) - w(0)| \leqslant 2M|t| \leqslant 2M|t_n| < \eta_n,$$

а если $t \in l_n$, то

$$|w(t) - w(0)| \leqslant |w(t) - w(t_n)| + |w(t_n) - w(0)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{l_n} |dw| + 2M|t_n| \leqslant \varepsilon_n + 2M|t_n| = \eta_n.$$

Однако при любом r, заключенном между 0 и r_0, на окружности $|t| = r$ имеется по крайней мере одна точка пересечения с L_n, в которой

$$|w(t) - w(0)| \leqslant \eta_n,$$

а следовательно, и предельная точка таких точек; в ней $w(t) = w(0)$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$. Но отсюда вытекает, что $w(t)$ постоянная, или $dw = 0$.

Таким образом предложение полностью доказано.

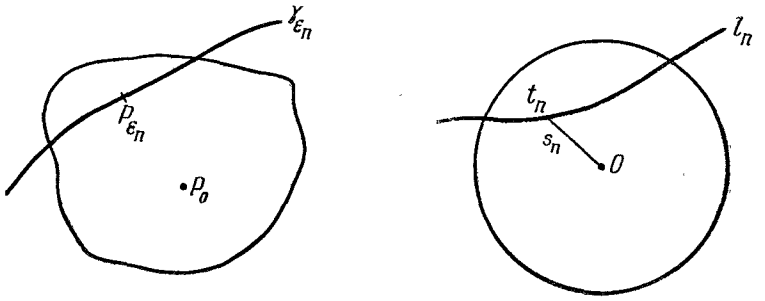

Рис. 50.

25. *Замечание.* В доказательствах приведенных выше лемм (п. 21—24) мы использовали только множества F_n. Поэтому леммы п. 22—24 остаются в силе также на поверхности $R - \Pi_0$ для регулярных и однозначных на $R - \Pi_0$ аналитических дифференциалов dw, для которых интеграл $D_{R-\Pi_0}(w)$ конечен, если R имеет нулевую границу, а Π_0 — жорданова область на R. Очевидно, что в лемме из п. 23 кривые γ_ε отделяют точку $P_0 \in R - \Pi_0$ не от границы этой поверхности, а от границы R.

26. Докажем теперь для поверхностей с нулевой границей некоторые теоремы, аналогичные теоремам, установленным в гл. VI, о поведении аналитических функций на плоскости в окрестности множеств нулевой гармонической меры.

Пусть $dw = du + i\,d\bar{u}$ *— регулярный однозначный и суммируемый в квадрате аналитический дифференциал на римановой поверхности* R *с нулевой границей. Предположим, что функция* u *гармонична и однозначна в области* $G \subset R$ *с внутренней границей*[1]) Γ_0 *и что* $u = u_0 = \text{const}$ *на* Γ_0. *Тогда* $u = u_0$ *в* G, *а следовательно, и на всей поверхности* R.

Если область G компактна, то Γ_0 — это вся граница G, и тогда, применяя принцип максимума и минимума, мы сразу получаем сформулированную теорему.

Предположим, что G некомпактна, и установим сначала следующую лемму.

В условиях сформулированной теоремы

$$\int_{\Gamma_0} d\bar{u} = 0. \tag{31}$$

Построим для дифференциала dw кривые γ_{ε_n} со свойством $\int_{\gamma_{\varepsilon_n}} |dw| < \varepsilon$, отделяющие точку $P_0 \in \Gamma_0$ от границы R, т. е. от идеальной границы G[2]).

Пусть G_n — область, ограниченная дугами γ_{ε_n} и Γ_0 и содержащая P_0 на своей границе. Эта область компактна.

Если обозначить через Γ_{0n}, соответственно через γ_n, дуги из Γ_0, соответственно из γ_{ε_n}, лежащие на границе области G_n, то $u = u_0$ на Γ_{0n} и $\int_{\gamma_n} |dw| < \varepsilon_n$.

Так как u гармонична и однозначна в G_n, то, согласно соотношению (41) гл. VII, имеем

$$\int_{\Gamma_{0n}+\gamma_n} d\bar{u} = 0.$$

---

[1]) Внутренней границей области $G \subset R$ называется граница G относительно R, т. е. множество точек из R, не являющихся ни внутренними, ни внешними для G.

[2]) Идеальная граница области G состоит из граничных элементов α поверхности R, для которых любая определяющая последовательность Δ_n содержится в G, начиная с некоторого индекса n. Область G называется также окрестностью элемента α на R.

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{\Gamma_{0n}} d\bar{u}\right| \leqslant \int\limits_{\gamma_n} |d\bar{u}| \leqslant \int\limits_{\gamma_n} |dw| \leqslant \varepsilon_n.$$

При $n \to \infty$ кривые Γ_{0n} стремятся к Γ_0, и из вышеприведённых неравенств вытекает, что

$$\int\limits_{\Gamma_0} d\bar{u} = 0.$$

27. При помощи этой леммы мы сможем доказать сформулированную теорему и для некомпактной области G. Для упрощения изложения можно предположить, что $u_0 = 0$, так как этого всегда можно добиться, рассматривая вместо u функцию $u - u_0$.

Предположим, что u принимает в некоторой точке из G значение $u_1 > 0$, и обозначим через $G' \subset G$ подобласть области G, в которой $0 \leqslant u < u_1$ и которая содержит точку P_0 на своей границе. Эта область ограничена дугами из Γ_0, на которых $u = 0$, и дугами Γ_1, на которых $u = u_1$.

Рассмотрим кривые γ_{ε_n}, о которых шла речь в доказанной лемме, и области $G_n^1 \subset G^1$, отделяемые кривыми γ_{ε_n} от идеальной границы области G^1 и содержащие точку P_0 на своей границе. Граница области G_n^1 состоит из дуг, принадлежащих кривым Γ_0, Γ_1 и γ_{ε_n}; мы обозначим их соответственно через Γ_{0n}, Γ_{1n} и γ_n.

Согласно формулам (42) и (41) гл. VII, имеем

$$D_{G_n^1}(u) = \int\limits_{\Gamma_{0n}+\Gamma_{1n}+\gamma_n} u\, d\bar{u} = u_1 \int\limits_{\Gamma_{1n}} d\bar{u} + \int\limits_{\gamma_n} u\, d\bar{u}$$

и

$$\int\limits_{\Gamma_{0n}+\Gamma_{1n}+\gamma_n} d\bar{u} = 0, \tag{32}$$

где интегралы взяты в положительном направлении относительно G_n^1. Так как $0 \leqslant u \leqslant u_1$ на γ_n, то

$$\left|\int\limits_{\gamma_n} u\, d\bar{u}\right| \leqslant u_1 \int\limits_{\gamma_n} |d\bar{u}|,$$

а равенство (32) показывает, что

$$\left|\int\limits_{\Gamma_{1n}} d\bar{u}\right| \leqslant \left|\int\limits_{\Gamma_{0n}} d\bar{u}\right| + \int\limits_{\gamma_n} |d\bar{u}|;$$

следовательно,

$$D_{G_n^1}(u) \leqslant u_1\left(\left|\int\limits_{\Gamma_{0n}} d\bar{u}\right| + 2\int\limits_{\gamma_n} |d\bar{u}|\right).$$

Переходя к пределу, получаем $D_{G^1}(u) = 0$, откуда следует, что $u = 0$ в G^1, так как $u = 0$ в точке P_0. Это противоречит предположению, что $u > 0$ в некоторой точке на R. Аналогичным образом можно устранить возможность $u < 0$. Следовательно, u постоянна на R.

28. Из этой теоремы вытекает следующее предложение.

На римановой поверхности R с нулевой границей любая однозначная гармоническая функция u с конечным интегралом Дирихле $D_R(u) < \infty$ равна тождественно постоянной.

Действительно, пусть u_0 — одно из значений функции u. Если u не сводится к постоянной u_0, то существует область G, во всех точках которой $u > u_0$, а на ее внутренней границе $u = u_0$. Предыдущая теорема применима, так как дифференциал $dw = du + i\,d\bar{u}$ однозначен, регулярен и суммируем в квадрате. Следовательно, $u = u_0$ [1]).

29. Обобщенный принцип максимума и минимума. *Пусть u — однозначная гармоническая функция, определенная в области G с внутренней границей Γ_0 на римановой поверхности R с нулевой границей. Если интеграл Дирихле функции u на R конечен и $m \leqslant u \leqslant M$ на Γ_0, то $m \leqslant u \leqslant M$ в G.*

Предположим, что существует точка $P_0 \in G$, в которой $u(P_0) > M$; выберем такое число M_1, что

$$u(P_0) > M_1 > M.$$

К области $G^* \subset G$, содержащей точку P_0, в которой

$$u(P) > M_1,$$

применима теорема п. 26, так как внутренняя граница этой области определяется равенством $u = M_1$. Следовательно, $u = M_1$ в G^*. Однако тогда $u = M_1$ во всей области G, что невозможно.

Аналогично доказывается принцип минимума.

30. Снова предполагая, что R *имеет нулевую границу*, покажем, что *однозначная ограниченная гармоническая функция u*:

$$|u| < M$$

---

[1]) Эта теорема доказывает включение $O_G \subset O_{HD}$.

в области G с компактной внутренней границей Γ_0 имеет относительно G конечный интеграл Дирихле:

$$D_G(u) < +\infty.$$

Для этого установим соотношение

$$D_G(u) = \int_{\Gamma_0} u\, d\bar{u}, \tag{33}$$

которое для компактной области G непосредственно следует из предварительной формулы Грина и неоднократно использовалось в наших рассуждениях [гл. VII, (42)][1]).

Для доказательства формулы (33) для некомпактной области G, но компактного множества Γ_0 рассмотрим исчерпание области G при помощи областей G_n, ограниченных дугами Γ_{0n} из Γ_0 и дугами γ_n[2]), и обозначим через u_n ограниченные в G_n гармонические функции, равные u на Γ_{0n} и M на γ_n.

Из принципа максимума и минимума следует, что

$$0 < u_n - u < M\omega_n \tag{34}$$

в G_n, где через ω_n обозначена гармоническая мера дуги γ_n в G_n.

Так как последовательность ω_n стремится к нулю одновременно с $1/n$, равномерно внутри G, то неравенства (34) обеспечивают равномерную сходимость внутри G последовательности u_n к u, а следовательно, такую же сходимость последовательностей частных производных $\partial u_n/\partial x$ и $\partial u_n/\partial y$; отсюда вытекает, что при надлежащем выборе постоянных интегрирования последовательность $\bar{u}_n$ сходится равномерно внутри G к $\bar{u}$.

Как и в предыдущих пунктах, имеем

$$D_{G_n}(u_n) = \int_{\Gamma_{0n}+\gamma_n} u_n d\bar{u}_n = \int_{\Gamma_{0n}} u\, d\bar{u}_n + M \int_{\gamma_n} d\bar{u}_n. \tag{35}$$

Принимая во внимание равномерную сходимость последовательности $\bar{u}_n$ к $\bar{u}$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_{0n}} u\, d\bar{u}_n = \int_{\Gamma_0} u\, d\bar{u}. \tag{36}$$

---

[1]) Очевидно предполагается, что Γ_0 удовлетворяет условиям регулярности, необходимым для применимости формул гл. VII, п. 47.

[2]) В качестве областей G_n можно взять области, принадлежащие $\operatorname{int} F_n \cap G$, соответствующие исчерпанию поверхности R, при котором Π_0 является внешней по отношению к G.

Покажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n} d\bar{u}_n = 0. \tag{37}$$

Применяя вторую формулу Грина к гармоническим функциям u_n и ω_n в области G_n, получаем

$$\int_{\Gamma_{0n}+\gamma_n} u_n\, d\bar{\omega}_n - \omega_n\, d\bar{u}_n = 0. \tag{38}$$

Соотношение (38) можно записать также в виде

$$\int_{\Gamma_{0n}} u\, d\bar{\omega}_n + M\int_{\gamma_n} d\bar{\omega}_n = \int_{\gamma_n} d\bar{u}_n. \tag{39}$$

Однако, согласно результатам п. 9, имеем

$$D_{G_n}(\omega_n) = \int_{\gamma_n} d\bar{\omega}_n = -\int_{\Gamma_{0n}} d\bar{\omega}_n \tag{40}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} D_{G_n}(\omega_n) = 0. \tag{41}$$

Из неравенства

$$\left|\int_{\Gamma_{0n}} u\, d\bar{\omega}_n\right| \leqslant -M\int_{\Gamma_{0n}} d\bar{\omega}_n = MD_{G_n}(\omega_n)'$$

и из соотношений (39)—(41) получаем (37), а из (35) — (37) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} D_{G_n}(u_n) = \int_{\Gamma_0} u\, d\bar{u}.$$

Какова бы ни была компактная подобласть $\Delta \subset G$, Δ содержится в G_n при достаточно большом n, а следовательно,

$$D_\Delta(u) = \lim_{n\to\infty} D_\Delta(u_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} D_{G_n}(u_n) = \int_{\Gamma_0} u\, d\bar{u}.$$

Таким образом,

$$D_G(u) \leqslant \int_{\Gamma_0} u\, d\bar{u}; \tag{42}$$

это показывает, что интеграл $D_G(u)$ конечен и теорема доказана.

Лемма из п. 23 дает теперь возможность выбрать кривые γ_{ε_n} таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{\gamma_{\varepsilon_n}} |dw| < \varepsilon_n,$$

и тем более неравенство

$$\int_{\gamma_{\varepsilon_n}} |d\bar{u}| < \varepsilon_n.$$

Обозначим через G_{ε_n} области из G, отделяемые кривыми γ_{ε_n} от идеальной границы G, и через $\Gamma_{0\varepsilon_n}$ — часть Γ_0, лежащую на границе области G_{ε_n}.

Так как

$$D_{G_{\varepsilon_n}}(u) = \int_{\Gamma_{0\varepsilon_n}} u\, d\bar{u} + \int_{\gamma_{\varepsilon_n}} u\, d\bar{u}$$

и

$$\int_{\gamma_{\varepsilon_n}} u\, d\bar{u} \geqslant -M \int_{\gamma_{\varepsilon_n}} |d\bar{u}| \geqslant -M\varepsilon_n$$

то получаем, что

$$D_{G_{\varepsilon_n}}(u) \geqslant \int_{\Gamma_{0\varepsilon_n}} u\, d\bar{u} - M\varepsilon_n,$$

откуда путем предельного перехода заключаем, что

$$D_G(u) \geqslant \int_{\Gamma_0} u\, d\bar{u}. \tag{43}$$

Соотношения (42) и (43) полностью доказывают сформулированную лемму.

31. При помощи теоремы предыдущего пункта можно легко доказать, что *однозначная и ограниченная гармоническая функция на римановой поверхности R с нулевой границей имеет на R конечный интеграл Дирихле*: $D_R(u) < +\infty$.

Пусть $\Delta \subset R$ — жорданова область, ограниченная кривой Γ_0. Если взять $G = R - \bar{\Delta}$, то предыдущая теорема показывает, что

$$D_G(u) < +\infty.$$

Однако

$$D_R(u) = D_G(u) + D_\Delta(u)$$

и

$$D_\Delta(u) < +\infty.$$

Следовательно, результаты, установленные для однозначных гармонических функций с конечным интегралом Дирихле на R (римановой поверхности с нулевой границей), справедливы и для гармонических функций, однозначных и ограниченных на R. Таким образом, теорема из п. 28 показывает, что однозначные и ограниченные на R гармонические функции сводятся к постоянным[1]).

§ 3. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С НУЛЕВОЙ ГРАНИЦЕЙ

32. Мы убедились, что на римановой поверхности R с нулевой границей однозначные гармонические функции, ограниченные или имеющие конечный интеграл Дирихле, являются постоянными. В настоящем разделе мы докажем общую теорему существования однозначных гармонических функций с заданными особенностями, о которых предполагается, что они находятся в окрестности точки $O \in R$. Повторяя прием, примененный в п. 5 для построения функции Грина, возьмем в параметрической окрестности точки O кривые γ и c, которым в параметрическом круге $|z| < 1$ соответствуют окружности $|z| = \rho$ и $|z| = r$ $(\rho < r < 1)$. Как и в п. 5, обозначим через δ жорданову область, ограниченную кривой γ, через d — жорданову область, ограниченную c, и через (γ, c) — двусвязную область, заключенную между c и γ.

Если φ — однозначная гармоническая функция в (γ, c), обладающая в δ определенными особенностями, то для существования однозначной и ограниченной в $R - \bar{\delta}$ гармонической функции u, которая продолжается гармонически через γ и удовлетворяет в d соотношению

$$u = \varphi + v, \tag{44}$$

где v — гармоническая в d функция, необходимо и достаточно, чтобы гармонически сопряженная с φ функция $\bar{\varphi}$ была однозначна в (γ, c).

Отметим, что, согласно соотношению (44), функция u обладает в δ особенностями функции φ. Одновременно можно заметить, что для $\varphi = \log 1/|z|$ функция $\bar{\varphi} = \arg 1/z$ не является однозначной, что объясняет несуществование функции Грина для римановых поверхностей с нулевой границей.

33. Покажем, что однозначность $\bar{\varphi}$ необходима для существования функции u.

Для этого предположим, что задача решена.

---

[1]) В частности, теоремы из п. 31 и 28 показывают, что $O_G \subset O_{HB}$.

Так как функция u гармонична, однозначна и ограничена в $R-\bar{d}$, то из теоремы, установленной в п. 30, следует, что

$$D_{R-\bar{d}}(w) < +\infty$$

для $w = u + i\bar{u}$.

Применяя в $R-\bar{d}$ леммы из п. 23 и 24 к дифференциалу dw, что возможно, согласно замечанию из п. 25, мы убеждаемся в существовании кривых γ_{ε_n}, на которых

$$\int_{\gamma_{\varepsilon_n}} |dw| < \varepsilon_n$$

и которые стремятся к идеальной границе R при $n \to \infty$.

Тогда

$$\left| \int_{\gamma_{\varepsilon_n}} d\bar{u} \right| < \varepsilon_n,$$

и так как

$$\int_c d\bar{u} = \int_{\gamma_{\varepsilon_n}} d\bar{u},$$

то

$$\int_c d\bar{u} = 0. \tag{45}$$

Заметим теперь, что функция $v = u - \varphi$ гармонична в односвязной области d, и поэтому гармонически сопряженная с ней функция $\bar{v} = \bar{u} - \bar{\varphi}$ также однозначна в d, или

$$\int_c d\bar{v} = 0. \tag{46}$$

Из (45) и (46) вытекает равенство

$$\int_c d\bar{\varphi} = 0,$$

которое доказывает, что $\bar{\varphi}$ однозначна в (γ, c).

Действительно, на любой простой замкнутой кривой c^* из (γ, c), охватывающей γ, имеем

$$\int_{c^*} d\bar{\varphi} = \int_{\gamma} d\bar{\varphi} = \int_c d\bar{\varphi} = 0.$$

34. Прежде чем доказывать достаточность сформулированного условия, приведем следующую общую теорему.

Пусть δ *— жорданова область на римановой поверхности* R *(с нулевой или положительной границей), ограниченная кривой* γ. *Тогда можно построить однозначную и ограниченную в* $R-\overline{\delta}$ *гармоническую функцию* U, *принимающую на* γ *заданные значения*[1]).

Рассмотрим исчерпание поверхности R при помощи областей Π_n, такое, что $\overline{\delta}=\Pi_0$, и обозначим через F_n множество $\Pi_n-\overline{\delta}$ и через M — верхнюю грань заданных на γ значений, которые можно считать положительными (гл. III, § 1, п. 2). Решая задачу Дирихле, построим гармонические в F_n функции U_n, принимающие на γ заданные значения и на Γ_n — значение M. Эти функции образуют убывающую последовательность, ограниченную сверху числом M. Значит, последовательность U_n сходится равномерно внутри $R-\overline{\delta}$ к гармонической функции U $(0\leqslant U\leqslant M)$, принимающей на γ заданные значения.

35. Предполагая теперь, что $\overline{\varphi}$ однозначна в области (γ, c) (лежащей в параметрической окрестности точки O), покажем, что существует функция u, о которой идет речь в теореме, сформулированной в п. 32. Для этого мы используем альтернирующий метод Шварца, подобно тому, как мы поступили в гл. VIII, § 2, п. 5.

Определим последовательно в областях $R-\overline{\delta}$ и d гармонические и ограниченные функции u_n и v_n, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} &u_1=\varphi \text{ на } \gamma,\\ &v_1=u_1-\varphi \text{ на } c,\\ &u_2=v_1+\varphi \text{ на } \gamma,\\ &v_2=u_2-\varphi \text{ на } c,\\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

и вообще

$$\begin{aligned} &u_n=v_{n-1}+\varphi \text{ на } \gamma,\\ &v_n=u_n-\varphi \text{ на } c. \end{aligned} \tag{47}$$

Докажем сначала, что

$$\int_c (v_n-v_{n-1})\,d\theta=0. \tag{48}$$

Функции $\overline{v_n}$ однозначны в d, поэтому применение предложения 2° из гл. VIII, § 1, п. 2 дает

$$\int_\gamma v_n\,d\theta=\int_c v_n\,d\theta. \tag{49}$$

[1]) Предполагается, что эти значения непрерывны всюду, за исключением конечного числа точек, и ограничены.

Кроме того,

$$\int_{\gamma} \varphi\, d\theta = \int_{c} \varphi\, d\theta, \tag{50}$$

так как, по предположению, φ однозначна в (γ, c).

Далее, функции u_n также однозначны в (γ, c). Действительно, u_n гармонична, однозначна и ограничена в $R - \bar{\delta}$, поэтому

$$D_{R-\bar{\delta}}(u_n) < +\infty$$

(п. 31), и на основании рассуждения из п. 33 имеем

$$\int_{\gamma} d\bar{u}_n = \int_{c} d\bar{u}_n = 0.$$

Следовательно, снова применяя предложение 2° из гл. VIII, § 1, п. 2, получаем

$$\int_{\gamma} u_n\, d\theta = \int_{c} u_n\, d\theta. \tag{51}$$

С другой стороны, соотношения (47) дают

$$\int_{\gamma} u_n\, d\theta = \int_{\gamma} v_{n-1}\, d\theta + \int_{\gamma} \varphi\, d\theta,$$

$$\int_{c} v_n\, d\theta = \int_{c} u_n\, d\theta - \int_{c} \varphi\, d\theta.$$

Складывая последние два равенства и применяя соотношения (49)—(51), получаем (48); поэтому $v_n - v_{n-1} = 0$ в O $(z = 0)$.

Как и в гл. VIII, § 2, п. 5, применяется предложение 1° из гл. VIII, § 1, п. 2 и доказывается равномерная сходимость последовательности v_n в $\bar{d}$ к гармонической в d функции v. Далее устанавливается равномерная сходимость внутри $R - \bar{\delta}$ последовательности u_n к гармонической и ограниченной в $R - \bar{\delta}$ функции u. Переходя к пределу в соотношениях (47), мы убеждаемся, что функции u и v удовлетворяют в области (γ, c) требуемым условиям (44). Таким образом, теорема из п. 32 полностью доказана.

§ 4. АБЕЛЕВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С НУЛЕВОЙ ГРАНИЦЕЙ [1])

36. В случае замкнутых поверхностей абелевы дифференциалы бывают трех родов:

[1]) Nevanlinna R., Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, цит. раб.

дифференциалы первого рода, однозначные и регулярные аналитические (голоморфные) на R;

дифференциалы второго рода, обладающие полюсами, но с нулевыми вычетами;

дифференциалы третьего рода, имеющие полюсы с отличными от нуля вычетами (гл. VIII, § 2, п. 10).

Чтобы сохранить результаты классической теории, развитой для случая замкнутых поверхностей, Р. Неванлинна рассматривал дифференциалы, суммируемые в квадрате [1]). Действительно, абелевы дифференциалы первого рода на замкнутой римановой поверхности R_1 образуют линейное пространство, размерность которого равна роду этой поверхности (гл. VIII, § 2, п. 7). Если удалить из R_1 одну точку, то получается открытая поверхность R_1^* того же рода. Абелевы интегралы и дифференциалы первого рода на R_1 остаются интегралами и дифференциалами того же рода на R_1^*, но зато интегралы и дифференциалы второго рода на R_1, которые обладают только одним полюсом в удаленной точке, становятся интегралами и дифференциалами первого рода на R_1^*. Следовательно, дифференциалы первого рода не образуют уже на R_1^* линейного пространства, размерность которого равна роду поверхности. Однако классический результат сохраняется, если следующим образом видоизменить определение.

Абелевым дифференциалом первого рода называется любой регулярный аналитический (голоморфный) дифференциал dw, однозначный и суммируемый в квадрате на R.

Эти дифференциалы соответствуют, вообще говоря, многозначным аналитическим функциям w без особенностей на R, которые называются абелевыми интегралами первого рода.

37. Прежде чем приступить к построению таких интегралов, рассмотрим их свойства.

Интеграл абелева дифференциала первого рода, взятый по простой замкнутой кривой α на R, равен нулю, если α разбивает поверхность R, т. е. если множество $R - \alpha$ состоит из двух непересекающихся связных множеств G' и G''.

В случае, когда одно из них, например G', компактно, имеем

$$\int_{\alpha} dw = 0,$$

так как α является границей полиэдрической области G' (в подходящей триангуляции R) и применима теорема Коши (гл. VII, § 7, п. 47, 3°).

[1]) Это условие относится к поведению дифференциала в окрестности идеальной границы.

Чтобы доказать сформулированное предложение также в случае, когда обе области G' и G'' некомпактны, рассмотрим исчерпание Π_n поверхности R, для которого

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_n} |dw| = 0.$$

Если n достаточно велико ($n > N_0$), то кривая α лежит внутри области Π_n.

При $n > N_0$ обозначим через G'_n пересечение $G' \cap \Pi_n$ и через Γ'_n — часть границы области G'_n, лежащую на Γ_n. Так как, кроме Γ'_n, граница G'_n содержит еще и α, то, снова применяя теорему Коши, получаем

$$\int_\alpha dw = -\int_{\Gamma'_n} dw \text{ [1]}.$$

Однако

$$\int_{\Gamma'_n} |dw| \leqslant \int_{\Gamma_n} |dw|,$$

а следовательно,

$$\int_\alpha dw = 0.$$

В случае когда α не разбивает поверхности R (т. е. когда $R - \alpha$ состоит из одной области), интеграл $\int_\alpha dw$, вообще говоря, отличен от нуля и называется *периодом* дифференциала dw по α. Различные значения функции w отличаются на линейную комбинацию таких периодов (интегралов dw по путям α, не разбивающим поверхности R).

Если род поверхности R равен нулю, то не существует кривых α, не разбивающих этой поверхности, и поэтому w является однозначной функцией на R, так как интеграл $\int_\alpha dw$ равен нулю на любой простой замкнутой кривой α. Действительная часть функции u также однозначна. Тогда теорема из п. 23 показывает, что u, а следовательно, и w постоянны. Таким образом, дифференциалы первого рода на поверхностях, подобных однолистным, с нулевой границей тождественно равны нулю, $dw = 0$, а абелевы интегралы первого рода постоянны.

[1]) В этом равенстве интегралы берутся в одном и том же направлении относительно области G'_n.

Те же рассмотрения показывают, что дифференциалы первого рода с нулевыми периодами по любой простой замкнутой кривой тождественно равны нулю.

38. Чтобы получить дифференциал первого рода, построим дифференциалы третьего рода, обладающие в двух точках a и b на R простыми полюсами с вычетами $\pm \frac{1}{2\pi i}$.

Пусть a и b — две точки из некоторой параметрической окрестности точки $O \in R$ и γ и c — две жордановы кривые из этой окрестности, выбранные так, как в теореме существования из п. 32, причем γ должна охватывать точки a и b. Обозначим теми же буквами аффиксы этих точек в параметрическом круге и соединим их во внутренности γ при помощи простой дуги σ.

Функция

$$\varphi = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\log\frac{z-a}{z-b}\right) = \frac{1}{2\pi}\arg\frac{z-a}{z-b}$$

гармонична и однозначна в (γ, c), а гармонически сопряженная с ней функция

$$\bar{\varphi} = -\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{z-a}{z-b}\right|$$

также однозначна в (γ, c).

На основании теоремы из п. 32 существует однозначная и ограниченная в $R - \bar{\delta}$ гармоническая функция u, которая продолжается гармонически через γ и обладает в δ теми же особенностями, что и φ.

Гармонически сопряженная с ней функция $\bar{u}$ также однозначна в (γ, c) (п. 33). Из выражения функции $\bar{\varphi}$ вытекает, что $\bar{u}$ однозначна в d. Из п. 30 следует неравенство $D_{R-\bar{\delta}}(w) < +\infty$, где $w = u + i\bar{u}$ (п. 30) [1].

Очевидно, что функция u однозначна в $R - \sigma$. Если пересечь разрез σ, обходя точку a в положительном направлении, то $\arg(z-a)$ возрастает на 2π, а следовательно, u возрастает на единицу. Значения u на обоих берегах разреза отличаются на единицу, а следовательно, u имеет на σ скачок, равный единице (гл. VIII, § 1, п. 1). Таким образом, различные значения функции w отличаются на постоянные с целой действительной частью. Дифференциал dw однозначен и регулярен на R, за исключением точек a и b, в которых он имеет полюсы с вычетами $\pm \frac{1}{2\pi i}$.

---

[1]) Отметим, что $D_R(w) = +\infty$, так как $D_{\bar{\delta}}(\varphi) = +\infty$, $D_{\delta}(v) < +\infty$ и $u = v + \varphi$.

39. Поступая так же, как в гл. VIII, § 2, п. 8, можно построить дифференциалы и интегралы третьего рода для точек a и b, расположенных произвольно на R. Этим же способом мы будем строить абелевы дифференциалы и интегралы первого рода на поверхности R, род которой не меньше единицы.

Пусть α — простая замкнутая кривая, не разбивающая поверхности R. Разобьем α на дуги при помощи точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, выбранных таким образом, чтобы каждая дуга $\sigma_k \subset \alpha$, заключенная между a_k и a_{k+1} $[k \equiv 1, 2, \ldots, n \pmod n]$, лежала в некоторой параметрической окрестности на R.

Для каждой пары точек a_k и a_{k+1} построим, поступая, как в предыдущем пункте, дифференциал третьего рода dw_k и соответствующую гармоническую функцию u_k.

Функция

$$u = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

гармонична в R, так как при сложении особенности функций u_k в точках a_k взаимно уничтожаются. Обозначим через $\overline{\Delta}$ замкнутую и компактную на R область, содержащую внутри кривую α. Так как u ограничена в $\overline{\Delta}$, то

$$D_{\overline{\Delta}}(u) < +\infty.$$

С другой стороны, так как dw_k суммируем в квадрате в $R - \Delta$, то, согласно 2°, гл. IV, п. 2, имеем

$$D_{R-\overline{\Delta}}(u) < +\infty.$$

Таким образом, дифференциал dw, соответствующий функции u, является абелевым дифференциалом первого рода, т. е. регулярным аналитическим однозначным суммируемым в квадрате дифференциалом на R.

Заметим, что функция u однозначна в $R - \alpha$, но при пересечении этой кривой имеет равный единице скачок. Действительно, при пересечении кривой α в какой-либо точке дуги σ_k функция u_k имеет скачок, равный единице, а u_j при $j \neq k$ непрерывны.

40. Абелевы интегралы первого рода на поверхности R, род которой не меньше единицы, являются многозначными функциями без особенностей. Как и в случае классических абелевых интегралов, их периоды получаются из системы основных периодов (число которых равно удвоенному роду поверхности) как линейные комбинации этих периодов с целыми коэффициентами. Если род поверхности бесконечен, то, несмотря на то, что „базис" периодов (система основных периодов) также бесконечен, каждый период

получается из основных периодов как конечная сумма с целыми коэффициентами.

Сформулированные выше результаты получаются, если воспользоваться каноническим представлением поверхности R на плоскости (гл. VII, § 6, п. 39) и теоремами из п. 37.

Из канонического представления (рис. 51) видно, что период по любой простой замкнутой кривой α, не разбивающей поверхности R, является конечной линейной комбинацией с целыми

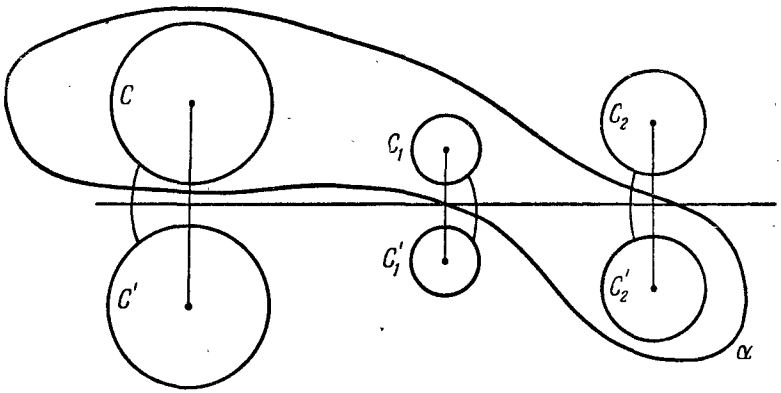

Рис. 51.

коэффициентами периодов по кривым, соответствующим парам окружностей (C,C') (у которых следует отождествить точки, симметричные относительно действительной оси), и периодов по сопряженным к ним кривым, которым в плоском представлении соответствуют простые дуги, соединяющие симметричные точки на C и C'.

Если риманова поверхность R рода p имеет нулевую границу, то абелевы дифференциалы первого рода образуют p-мерное линейное пространство над полем комплексных чисел. В случае бесконечного рода эти дифференциалы снова образуют линейное пространство, но с бесконечным (счетным) числом линейно независимых элементов [1]).

41. В п. 38 и 39 мы построили абелевы дифференциалы третьего и первого рода. Пользуясь той же общей теоремой существования гармонических функций с заданными особенностями (п. 32) и взяв $\varphi = \operatorname{Re}\frac{1}{z^m}$ (m — натуральное число), можно построить диф-

[1]) Это пространство можно рассматривать как гильбертово пространство; см. Неванлинна Р., Униформизация, гл. X, § 6 и 7, стр. 374—394.

ференциалы второго рода, однозначные и регулярные на $R - O$, обладающие в O полюсом с вычетом, равным нулю, и имеющие конечный интеграл Дирихле $D_{R-\bar{\delta}}(w)$.

§ 5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ЗАДАННОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В случае замкнутой римановой поверхности R мы доказали (в гл. VIII, § 3, п. 16) существование аналитической на R функции, для которой R является римановой поверхностью. Рассмотрим теперь открытую риманову накрывающую

$$R = (z)_T^V$$

и построим аналитическую функцию, римановой поверхностью которой является R, полностью доказав таким образом теорему, сформулированную в сноске [2]) на стр. 226.

Теоремы существования гармонических или аналитических функций на римановой поверхности, изложенные в гл. VIII и в предыдущих разделах гл. IX, основывались на альтернирующем методе Шварца. В настоящем разделе мы будем опираться на свойства интеграла Дирихле и на принцип Дирихле [1]).

42. Если Ω — область на поверхности R (которая может совпадать со всей поверхностью R), то мы будем говорить, что функция φ принадлежит *семейству* $\{A\}$ в Ω, если φ непрерывна в Ω и удовлетворяет следующему условию:

для любой обыкновенной точки $(p, z) \in \Omega$ существует такой круг $\gamma_p \subset \Omega$ с центром в этой точке, что если положить

$$\varphi(p) = f(z),$$

$z = T(p)$, то $f(z)$ имеет непрерывные частные производные в любой точке этого круга, за исключением точек, принадлежащих конечному числу лежащих в этом круге аналитических дуг, на которых производные могут даже не существовать. Некоторые из этих дуг могут состоять из одной точки. Мы рассматриваем точки ветвления поверхности R как такие дуги, расположенные на окружности некоторых кругов γ_p.

Произведем триангуляцию Ω таким образом, чтобы каждый треугольник лежал внутри хотя бы одного круга γ_p и чтобы исключительные дуги разбивали его не более чем на конечное

[1]) См. Stoïlov S., Principes topologiques ... ch. II, sect. III, p. 43—62. Излагаемый ниже метод принадлежит Г. Вейлю (Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, Kap. II, §§ 12—15, S. 78—107); он был упрощен Р. Курантом (Hurwitz und Courant, Funktionentheorie, 3-te Aufl., Berlin, 1929) и П. Фату (Appel P., et Goursat E., Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, t. II).

число областей δ_i. В каждой области δ_i интеграл Дирихле можно определить так же, как для плоской области, путем перехода к пределу в интеграле, взятом для последовательности областей, внутренних по отношению к δ_i (гл. VII, § 7, п. 46). Положим, по определению,

$$D_{\Omega}(\varphi) = \sum_i D_{\delta_i}(\varphi). \tag{52}$$

Так как все члены этого ряда неотрицательны, то $D_{\Omega}(\varphi)$ имеет вполне определенное конечное или бесконечное значение.

43. *Замечания.* 1°. Установленные в гл. IV, п. 2 свойства интеграла Дирихле остаются в силе для функций семейства $\{A\}$ и областей на римановых поверхностях.

2°. Мы будем применять принцип Дирихле (гл. IV, п. 3, 4) в следующей формулировке.

Пусть Γ *— однолистный или многолистный круг из* R *и* $\varphi(p)$ *— функции, принадлежащие семейству* $\{A\}$ *внутри* Γ, *непрерывные в* $\overline{\Gamma}$ *и принимающие одни и те же непрерывные значения на границе* Γ. *Из всех этих функций* φ *гармоническая функция и придает интегралу Дирихле* $D_{\Gamma}(\varphi)$ *наименьшее значение. Если* $D_{\Gamma}(u) < \infty$, *то* u *— единственная среди функций* φ, *для которой интеграл Дирихле принимает наименьшее значение* [1]).

3°. Мы будем также пользоваться доказанной в гл. IV, п. 8 теоремой о сходимости, которая остается в силе для областей $\Omega \subset R$, и следующей теоремой.

4°. *Пусть задана компактная однолистная* [2]) *область* $\Omega_0 \subset R$, *и пусть* Ω *— подобласть* Ω_0 *и* δ *— аналитическая дуга, часть границы области* Ω, *принадлежащая* Ω_0.

---

[1]) В связи с доказательством этой теоремы отметим, что предварительная формула Грина

$$D(f, \psi) + \int_D \int f \Delta\psi \, dx\, dy + \int_C f \frac{d\psi}{dn}\, ds = 0$$

[гл. I, (10)] справедлива для непрерывной в $\overline{D}$ функции f, принадлежащей семейству $\{A\}$ внутри D, и для непрерывной и дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой области $\Omega \supset \overline{D}$ функции ψ [как и в гл. IV, (3), мы пользуемся обозначением $D(f, \psi) = \int_D \int \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dx\, dy$].

Кроме того, при помощи конформного отображения (такое отображение оставляет инвариантными интеграл Дирихле и гармонические функции) многолистный круг может быть преобразован в однолистный.

[2]) Так мы называем область на R, на которой не существует двух различных точек с одной и той же проекцией на (z).

Предположим, что функции из последовательности u_n гармоничны в Ω и непрерывны в $\Omega+\delta$, причем

$$\lim_{n\to\infty} D_\Omega(u_n)=0.$$

Если $u_n=0$ на δ, то последовательность u_n стремится к нулю в Ω.

Докажем эту теорему в предположении, что δ прямолинейный отрезок. Общий случай рассматривается аналогично.

Так как область Ω лежит на одном листе поверхности R, то можно предположить, что она является плоской областью. Функции u_n продолжаются через δ по симметрии, принимая равные значения противоположного знака в симметричных относительно δ точках (гл. II, § 4, п. 17). Если обозначить через Ω_1 область, симметричную Ω, то

$$\lim_{n\to\infty} D_{\Omega+\delta+\Omega_1}(u_n)=0.$$

Применяя к области $\Omega+\delta+\Omega_1$ оценку из гл. IV, п. 7, можно заключить, что $\frac{du_n}{dx}$ и $\frac{du_n}{dy}$ стремятся равномерно к нулю в любой замкнутой и ограниченной области

$$\overline{\Delta}\subset\Omega+\delta+\Omega_1.$$

Так как $u_n=0$ на δ, причем $\delta\subset\overline{\Delta}$ при соответствующем выборе этой области, то отсюда вытекает, что u_n сходится к нулю в $\overline{\Delta}$, а следовательно, и в Ω.

44. Пусть O — точка на римановой поверхности R; для простоты предположим, что эта точка является обыкновенной и проектируется в $z=0$. Мы построим однозначную и гармоническую на $R-O$ функцию u, которая ведет себя в окрестности точки O подобно функции

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Предположим, что риманова поверхность R покрыта счетным множеством однолистных или многолистных кругов Γ_i ($i=1, 2, \ldots$) таким образом, что каждый Γ_i имеет общие точки только с конечным числом других кругов (гл. VII, § 4, п. 19). Более того, мы допустим, что система кругов Γ_i удовлетворяет следующим условиям, которые легко осуществимы:

1) никакой круг Γ_i не содержится полностью в другом круге Γ_j;

2) O является центром круга Γ_1 и не принадлежит никакому другому кругу Γ_j [1]).

[1]) Условие 1) выполняется, если отбросить, в случае необходимости, некоторые из кругов Γ_i, а 2) получается, если заменить, в случае необходимости, конечное число кругов Γ_i конечным числом других кругов.

Рассмотрим теперь круг $C \subset R$ с центром O, целиком лежащий внутри Γ_1 и не имеющий общих точек с кругами $\Gamma_i (i \geqslant 2)$. Существование круга C вытекает из условия 2).

Определим на R функцию S следующим образом:

a) $S = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x}{a^2}$ внутри C, где через $z = x + iy$ мы обозначили проекцию точки $p \in C$, $z = T(p)$, а через a — радиус круга $T(C)$;

b) $S \equiv 0$ вне и на границе C.

Условимся говорить, что определенная на R функция Φ принадлежит семейству $\{\Phi\}$, если она удовлетворяет следующим условиям:

α) $S + \Phi$ непрерывна в $R - O$;

β) Φ непрерывна в точке O, а следовательно, непрерывна всюду на R, за исключением окружности круга C;

γ) в любой области на R, не содержащей точек границы круга C, функция Φ принадлежит семейству $\{A\}$ в смысле п. 42;

δ) интеграл $D_R(\Phi)$ конечен, причем он определяется как сумма интегралов Дирихле по областям на R, представляющим собой внутренность C и внешность C.

Заметим, что все функции семейства $\{\Phi\}$ обладают на границе C одним и тем же скачком. Разность двух функций из $\{\Phi\}$ принадлежит на R семейству $\{A\}$ [1]).

Когда Φ пробегает все семейство $\{\Phi\}$, интеграл $D_R(\Phi)$ имеет конечную нижнюю грань d ($d \geqslant 0$). Поэтому существует последовательность функций $\Phi_n \subset \{\Phi\}$, такая, что

$$\lim_{n \to \infty} D_R(\Phi_n) = d.$$

Такая последовательность будет называться в дальнейшем *минимизирующей последовательностью.*

45. Одновременно с минимизирующей последовательностью Φ_n рассмотрим другую последовательность функций $\varphi_n \in \{A\}$ в R, удовлетворяющих неравенствам

$$D_R(\varphi_n) < M,$$

где число M фиксировано.

Покажем, что справедливо соотношение

$$\lim_{n \to \infty} D_R(\Phi_n, \varphi_n) = 0. \tag{53}$$

---

[1]) Семейство $\{\Phi\}$ непусто. Например, этому семейству принадлежит функция $N - S$, где N определена на R следующим образом:

1) $N = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x}{r^2}$ внутри Γ_1 (r — радиус круга $T(\Gamma_1)$);

2) $N \equiv 0$ вне и на границе Γ_1.

Действительно, если h — постоянная, то принадлежность функции $\Phi_n - h\varphi_n$ семейству $\{\Phi\}$ влечет за собой неравенство

$$D(\Phi - h\varphi_n) \geqslant d$$ [1])

или, в силу соотношения (2) гл. IV,

$$D(\Phi_n) \geqslant d + h[2D(\Phi_n, \varphi_n) - hD(\varphi_n)]. \qquad (54)$$

Если бы соотношение (53) не выполнялось, то существовало бы такое число $\alpha > 0$, что

$$D(\Phi_n, \varphi_n) > \alpha, \quad \text{или} \quad D(\Phi_n, \varphi_n) > -\alpha$$

для бесконечного числа значений n. Предположим, например, что

$$D(\Phi_n, \varphi_n) > \alpha.$$

Так как $D(\varphi_n) < M$, то из неравенства (54) следует для бесконечного числа значений n и для $h > 0$ соотношение

$$D(\Phi_n) \geqslant d + h(2\alpha - hM).$$

Взяв $h = \frac{\alpha}{M}$, получаем

$$D(\Phi_n) \geqslant d + \frac{\alpha^2}{M}$$

для бесконечного числа значений n; это противоречит тому, что Φ_n — минимизирующая последовательность.

Таким образом, соотношение (53) доказано.

В частности, соотношение (53) применимо к последовательности

$$\varphi_n = \Phi_m - \Phi_n,$$

где m неограниченно возрастает произвольным способом одновременно с n, так как $D(\Phi_m)$ и $D(\Phi_n)$ ограничены, а поэтому существует такое число M, что

$$D(\Phi_m - \Phi_n) < M.$$

Следовательно,

$$\lim_{m,\ n \to \infty} D(\Phi_m - \Phi_n, \Phi_n) = 0.$$

Так как

$$D(\Phi_m) = D(\Phi_m - \Phi_n) + 2D(\Phi_m - \Phi_n, \Phi_n) + D(\Phi_n),$$

то, устремляя m и n к бесконечности, получаем соотношение

$$\lim_{m,\ n \to \infty} D(\Phi_m - \Phi_n) = 0, \qquad (55)$$

[1]) Для упрощения записи мы будем опускать в выражениях $D_R(\Phi)$ и $D_R(\Phi, \varphi)$ индекс R.

являющееся основным свойством минимизирующих последовательностей и справедливое независимо от того, как стремятся к бесконечности m и n.

46. Гармонизация минимизирующей последовательности. Определим для каждой функции Φ_n функцию Φ_n^1 со следующими свойствами:

1) $\Phi_n^1 \equiv \Phi_n$ вне и на границе Γ_1,

2) $\Phi_n^1 = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x}{a^2} - S + V_n$ в Γ_1, где V_n — гармоническая в Γ_1 функция, принимающая на границе Γ_1 значения

$$\Phi_n - \left(\frac{x}{r^2} + \frac{x}{a^2}\right)$$

(таким образом, Φ_n^1 непрерывна на этой границе).

Обозначим теперь через B функцию, определенную в Γ_1 следующим образом:

a) $B \equiv 0$ внутри C,

b) $B = -\left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x}{a^2}\right)$ в $\overline{\Gamma_1 - C}$.

Тогда $\Phi_n^1 + B = V_n$.

Гармоническая в Γ_1 функция V_n принимает на границе круга Γ_1 одинаковые значения с функцией $\Phi_n + B$, которая уже не является гармонической, но принадлежит семейству $\{A\}$ в Γ_1.

Согласно принципу Дирихле, п. 43, 2°, имеем

$$D_{\Gamma_1}(V_n) = D_{\Gamma_1}(\Phi_n^1 + B) \leqslant D_{\Gamma_1}(\Phi_n + B),$$

или

$$D_{\Gamma_1}(\Phi_n^1) \leqslant D_{\Gamma_1}(\Phi_n) + 2D_{\overline{\Gamma_1 - C}}(\Phi - \Phi_n^1,\ B), \tag{56}$$

так как $B \equiv 0$ внутри C.

К последнему слагаемому из (56) применима предварительная формула Грина, так как $\Phi_n - \Phi_n^1$ принадлежит семейству $\{A\}$ в $\overline{\Gamma_1 - C}$, а B непрерывна в этой замкнутой области вместе со всеми своими производными [1]). Однако в этой области $\Delta B = 0$, и вычисление показывает, что $\partial B/\partial n = 0$ на границе C; так как $\Phi_n - \Phi_n^1 = 0$ на окружности круга Γ_1, то

$$D_{\overline{\Gamma_1 - C}}(\Phi_n - \Phi_n^1,\ B) = 0.$$

Таким образом, из (56) вытекает неравенство

$$D_R(\Phi_n^1) \leqslant D_R(\Phi_n),$$

[1]) См. сноску [1]) на стр. 332.

показывающее, что Φ_n^1 тем более является минимизирующей последовательностью.

Применяя к этой последовательности соотношение (55), получаем

$$\lim_{m,\, n\to\infty} D_R(\Phi_m^1 - \Phi_n^1) = 0,$$

а поэтому тем более имеем

$$\lim_{m,\, n\to\infty} D_{\Gamma_1}(\Phi_m^1 - \Phi_n^1) = 0,$$

или, согласно определению функции Φ_n^1,

$$\lim_{m,\, n\to\infty} D_{\Gamma_1}(V_m - V_n) = 0. \tag{57}$$

Функции Φ_n минимизирующей последовательности определены лишь с точностью до аддитивных постоянных, так как в рассуждении учитывается только значение их интеграла Дирихле $D_R(\Phi_n)$. Поэтому можно выбрать эти постоянные так, чтобы среднее значение функции V_n на окружности Γ_1 равнялось нулю, т. е.

$$V_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_n(re^{i\theta})\,d\theta = 0$$

(гл. I, (18)). Так как последовательность $V_n(0)$ сходится, то теорема из п. 43, 3° показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$ существует и является внутри Γ_1 гармонической функцией, которую мы обозначим через V. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n^1 = V - B = U_1.$$

Функция U_1 определена только внутри Γ_1. Она гармонична в этой области за исключением границы круга C, на которой она имеет скачок. Поэтому функция

$$U_1 + S = V + \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x}{a^2}$$

непрерывна и гармонична в $\Gamma_1 - O$.

47. Пусть Γ_2 — один из кругов $\Gamma_i\,(i \neq 1)$, имеющий общие внутренние точки с Γ_1. Из построения кругов Γ_i следует, что Γ_2 и C не пересекаются. В п. 46 мы гармонизировали последовательность Φ_n в Γ_1. Гармонизируем теперь последовательность Φ_n^1 в Γ_2, заменяя ее последовательностью Φ_n^2 следующим образом:

1) $\Phi_n^2 = \Phi_n^1$ вне и на границе Γ_2;

2) Φ_n^2 гармонична в Γ_2 и принимает на границе Γ_2 те же значения, что и Φ_n^1.

Так как Φ_n^2 гармонична *всюду в* Γ_2, то, снова используя принцип минимума п. 43, 2°, получаем

$$D_R(\Phi_n^2) \leqslant D_R(\Phi_n^1);$$

это показывает, что функции Φ_n^2 принадлежат семейству $\{\Phi\}$ и образуют минимизирующую последовательность.

Последовательность

$$\Phi_1^1,\ \Phi_1^2,\ \Phi_2^1,\ \Phi_2^2,\ \ldots,\ \Phi_n^1,\ \Phi_n^2,\ \ldots$$

также является минимизирующей, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} D_R(\Phi_n^1 - \Phi_n^2) = 0;$$

тем более

$$\lim_{n\to\infty} D_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2}(\Phi_n^1 - \Phi_n^2) = 0. \tag{58}$$

Однако $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ принадлежит однолистной области на R. Все функции $\Phi_n^1 - \Phi_n^2$ гармоничны внутри $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и непрерывны на границе этой области, содержащей дугу окружности Γ_2, на которой $\Phi_n^1 - \Phi_n^2 = 0$. Согласно теореме п. 43, 4°, получаем

$$\lim_{n\to\infty} (\Phi_n^1 - \Phi_n^2) = 0 \tag{59}$$

внутри области $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

С другой стороны, из того, что последовательность Φ_n^2 является минимизирующей, вытекает, что

$$\lim_{m,\ n\to\infty} D_{\Gamma_2}(\Phi_m^2 - \Phi_n^2) = 0.$$

Однако соотношение (59) показывает, что внутри Γ_2 существует точка сходимости для Φ_n^2, и поэтому, согласно теореме п. 43, 4°, предел

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n^2 = U_2$$

существует и является в Γ_2 гармонической функцией. Согласно соотношению (59), в $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ имеем

$$U_1 \equiv U_2,$$

а следовательно, гармоническая функция U_2 является продолжением в $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ функции U_1.

Аналогичным образом можно гармонизировать последовательность Φ_n^2 в Γ_3, заменяя ее другой последовательностью Φ_n^3, кото-

рую определяют, исходя из Φ_n^2, подобно тому, как Φ_n^2 определяли, исходя из Φ_n^1.

Таким образом, в каждом круге Γ_i определяется функция U_i, гармоническая всюду в этом круге при $i \geqslant 2$. В пересечениях двух кругов Γ_i соответствующие функции U_i совпадают. Следовательно, множество этих функций U_i образует однозначно определенную функцию U, непрерывную на R, за исключением точек границы круга C.

Функция

$$u = U + S$$

однозначна и гармонична в $R - O$, а в точке O она ведет себя, как функция

$$\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Она удовлетворяет всем условиям из п. 44 [1]).

48. При помощи этой функции u мы построим аналитическую функцию, соответствующую поверхности R. Чтобы подчеркнуть, что u обладает особенностью в точке O, мы обозначим эту функцию через u_O и примем соглашение обозначать через u_P аналогичную функцию, имеющую особенность в произвольной точке $P \in R$.

Рассмотрим множества

$$\Delta_i = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_i,$$

каждое из которых состоит из конечного числа компактных областей на R и суммой которых является вся поверхность R. Очевидно, что при любом значении i имеем $\Delta_i \subset \Delta_{i+1}$.

Выберем из множества $E_n = \Delta_{n+1} - \Delta_n$ конечное число точек A_j таким образом, чтобы в E_n любой круг из R, диаметр проекции которого на (z) больше $\frac{1}{n}$, содержал по крайней мере одну точку A_j. Множество точек A_j счетно. Можно также считать, что точки A_j выбраны так, чтобы их проекции на (z) были различными и отличались от проекций точек ветвления. Условимся также приписывать индексы точкам A_j так, чтобы при $n' < n''$ все точки A_j, принадлежащие $E_{n'}$, имели строго меньший индекс, чем любая точка A_j из $E_{n''}$.

---

[1]) Можно показать, что функция U определяется с точностью до аддитивной постоянной условием минимизации $D_R(\Phi)$. См., например, Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche; Courant R. (Hurwitz A., Courant R.), Funktionentheorie и Fatou P. (Appell P. et Goursat E.), Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.

Построим теперь функции u_{A_j}, соответствующие точкам A_j.

Пусть $k(r)$ — наибольший индекс, такой, что A_r лежит вне $\Delta_{k(r)}$. Функция $k(r)$ не убывает и возрастает неограниченно вместе с r. Модуль $|u_{A_r}|$ непрерывен в $\Delta_{k(r)}$, и так как $\Delta_{k(r)}$ — компактная область на R, то существует такое конечное положительное число M_r, что

$$|u_{A_r}| < M_r.$$

Тогда ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j M_j} u_{A_j}$$

сходится абсолютно и равномерно в любой компактной области поверхности R, не содержащей точек A_j. Пусть H — его сумма, функция H гармонична в $R - \sum_{j=1}^{\infty} A_j$. В точках A_j она ведет себя так же, как S в точке O (п. 44).

Функция

$$\varphi = \frac{\partial H}{\partial x} - i \frac{\partial H}{\partial y}$$

является аналитической и однозначной на R, имеет полюсы в точках A_j и регулярна в обыкновенных точках из $R - \sum_{j=1}^{\infty} A_j$. Эта функция, рассматриваемая как аналитическая функция от z, обладает алгебраическими или полярными критическими элементами в точках ветвления поверхности R.

Пусть R_0 — риманова поверхность функции $\varphi(z)$. Покажем, что R_0 совпадает с R.

Действительно, R_0 не может иметь точек, не принадлежащих R, так как продолжение осуществляется только в R. При этом R_0 не может быть собственным подмножеством R, так как, с одной стороны, любая точка проекции R является точкой проекции R_0, а с другой стороны, двум различным точкам из R с одной и той же проекцией не может соответствовать один и тот же элемент функции $\varphi(z)$, т. е. одна и та же точка на R_0. Действительно, пусть P_1 и P_2 — две точки на R, в которых соответствующие разложения в ряд функции $\varphi(z)$ совпадают, и пусть z_0 — общая проекция P_1 и P_2. Продолжим на R элемент из P_1 вдоль конечного пути $L \subset R$, соединяющего P_1, например, с точкой A_1 и не проходящего через точки A_j и через точки ветвления поверхности R. Это продолжение на R соответствует продолжению, осуществляемому из z_0 вдоль проекции L_0 пути L. Продолжая теперь элемент функции из точки P_2 вдоль пути с той же проекцией L_0,

что и L, мы придем либо снова к точке A_1, либо к точке B, которой соответствует тот же элемент, что и точке A_1[1]). Первую возможность следует исключить, так как она приводит к тождественности точек P_1 и P_2. Вторая возможность также приводит к противоречию, так как A_1 и B имеют одну и ту же проекцию и A_1 является полюсом, тогда как B — обыкновенная точка (отличная от A_j и от точек ветвления R).

Следовательно, элементы в точках P_1 и P_2 различны. Таким образом, мы доказали, что R_0 и R совпадают.

Следовательно, *каждой римановой поверхности R соответствует аналитическая функция (и даже бесконечное число таких функций), римановой поверхностью которой является R*[2]).

49. Применяя теорему существования из п. 48 и определение римановых накрывающих поверхностей (гл. VII, § 4, п. 10), докажем теперь следующую теорему, дающую топологическую характеристику аналитических функций.

Для любого внутреннего отображения

$$w = T(p) \tag{60}$$

двумерного многообразия V в комплексную плоскость (w) существует топологическое отображение многообразия V, преобразующее V в риманову поверхность и T — в аналитическую функцию, для которой R — риманова поверхность.

Пусть R' — риманова накрывающая поверхность

$$R' = (w)_T^V.$$

Согласно теореме п. 48, существует аналитическая функция

$$z = f(w) = f(T(p)), \tag{61}$$

где $f(T(p))$ однозначна на V и R', для которой R' — ее римана поверхность.

Обозначим через

$$w = \varphi(z) \tag{62}$$

---

[1]) Продолжение (т. е. „поднятие" пути L_0 на поверхность от точки P_2) может быть проведено полностью, так как иначе мы натолкнулись бы на границу R. Это невозможно, ибо элемент из P_2 совпадает, по предположению, с элементом из P_1, продолжение которого привело ко всему пути L_0.

[2]) Доказывается, что для любой открытой римановой поверхности R существует функция, *голоморфная* на R. При помощи обобщения теоремы Вейерштрасса о бесконечных произведениях, можно получить голоморфные функции на открытой римановой поверхности R, для которых R — риманова поверхность. См., например, Behnke H., Sommer F., Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955, Kap. VI, § 6, S. 555—567.

обратную к (61) функцию и через R — риманову поверхность функции $\varphi(z)$

$$R = (z)^V_{z=f(T(p))}.$$

Поверхности R и R' гомеоморфны друг другу и гомеоморфны V, поэтому существует топологическое отображение

$$p = \tau(q),$$

преобразующее R в V таким образом, что на R функция (62) записывается в виде

$$w = F(q) = T(\tau(q)),$$

что доказывает теорему.

Таким образом, любое внутреннее отображение топологически эквивалентно аналитической функции, а следовательно, топологическая теория аналитических функций совпадает с теорией внутренних отображений.

Глава X

РЕГУЛЯРНО ИСЧЕРПЫВАЕМЫЕ И НОРМАЛЬНО ИСЧЕРПЫВАЕМЫЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

Исследованные в гл. IX классы открытых римановых поверхностей определялись существованием на этих поверхностях некоторых гармонических и аналитических функций. В этой главе мы изучим два класса римановых поверхностей, определенных некоторыми внутренними свойствами регулярно исчерпываемые поверхности и нормально исчерпываемые поверхности.

Теория регулярно исчерпываемых поверхностей, принадлежащая Л. Альфорсу [1]), основана на метрико-топологическом исследовании римановых поверхностей. Она открывает новые пути для теории функций и применяется не только к аналитическим функциям, но и к более общим внутренним отображениям, называемым псевдоаналитическими, или квазиконформными, отображениями.

§ 1. ТЕОРИЯ НАКРЫВАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПО Л. АЛЬФОРСУ

1. Элементарные метрические свойства сферы. Для исследования, которое мы собираемся предпринять, необходимо сначала установить некоторые элементарные свойства обычной евклидовой метрики на *сфере* V_0.

Заметим, что эта метрика обладает следующими свойствами:

1) Любой (открытой или замкнутой) простой кривой на V_0 метрика сопоставляет конечную или бесконечную, но всегда положительную длину. Любой области на V_0, ограниченной простой кривой конечной длины, сопоставляется вполне определенная конечная и положительная площадь.

2) Длины и площади обладают свойством аддитивности.

3) Нижняя грань длин всех дуг на V_0, соединяющих две фиксированные точки P и Q на этой сфере, конечна и положительна, если $P \neq Q$. Эта нижняя грань является расстоянием (на V_0) между точками P и Q.

---

[1]) Ahlfors L., Zur Theorie der Überlagerungsflächen, *Acta Math.*, 65 (1935), 157—194. (Русский перевод в *Усп. матем. наук*, ст. серия, вып. VI.—*Прим. ред.)*

Изложение теории Альфорса можно также найти в книге: Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М., 1941, гл. XIII, содержащей также сравнение этой теории с теорией распределения значений по Р. Неванлинне.

4) Каждая точка $P \in V_0$ для любого $\varepsilon > 0$ обладает окрестностью, все точки которой расположены на расстоянии от P, меньшем ε.

Кроме этих четырех очевидных свойств евклидовой метрики, мы упомянем еще одно пятое свойство, которое легко доказать.

5) Любая точка $P \in V_0$ обладает окрестностями U_P, для которых существует такая постоянная k, зависящая только от U_P, что любая простая замкнутая кривая C длины L, содержащаяся в U_P, ограничивает область, площадь которой меньше kL [1]).

Действительно, пусть U_P — сферическая шапочка (меньшая полусферы) с центром в P и с радиусом ρ на сфере радиуса R. Площадь этой шапочки меньше [2]) $\pi\rho^2$. Покажем, что 5) справедливо для U_P и $k = \pi\rho$.

Если $L \geqslant \rho$, то ограничиваемая кривой C область содержится в U_P и поэтому ее площадь меньше, чем $\pi\rho^2 = k\rho \leqslant kL$.

Если $L < \rho$, то, так как максимальное расстояние между двумя произвольными точками области, ограничиваемой C и содержащейся в U_P, меньше L и поэтому площадь этой области меньше πL^2, эта площадь тем более меньше $\pi\rho L = kL$.

2. Первая лемма Альфорса (частный случай сферы). *Пусть сфера V_0 разбита на два подмножества конечным числом попарно непересекающихся простых замкнутых кривых $\{C\}$ таким образом, что каждое подмножество состоит из областей, определяемых кривыми $\{C\}$. Тогда существует такая постоянная k, зависящая только от V_0, что если обозначить через A и A' площади подмножеств, на которые разбита V_0, и через L — общую длину кривых $\{C\}$, то*

$$\min(A,\ A') \leqslant kL \text{ [3])}.$$

Если рассматривать только значения L, превосходящие некоторое положительное число ε, то сформулированное свойство очевидно, так как достаточно взять $k = \frac{A_0}{2\varepsilon}$, где A_0 — площадь V_0. Тогда $kL > \frac{A_0}{2}$ и ясно, что наименьшая из величин A и A' не превосходит $\frac{A_0}{2}$.

---

[1]) Ясно, что если существует одна такая окрестность, то существует и бесконечное их число: например, все окрестности, которые содержатся в первой.

[2]) В самом деле, площадь шапочки равна $2\pi Rh$ (где h — ее высота), и имеем

$$h = R\left(1 - \cos\frac{\rho}{R}\right) < \frac{\rho^2}{2R}.$$

[3]) $\min(A, A')$ обозначает наименьшую из величин A и A'.

Поэтому остается показать, что рассматриваемое свойств справедливо для достаточно малых значений L.

Рассмотрим для каждой точки $P \in V_0$ окрестность U_P, удовлетворяющую условию 5). В каждой из этих окрестностей определим, согласно условию 4), окрестность U'_P, соответствующую $\varepsilon_P \leqslant \frac{\delta_P}{2}$ (здесь δ_P—минимальное расстояние от P до границы U_P). Классическая теорема Бореля — Лебега позволяет выбрать из этих окрестностей U'_P *конечное* число окрестностей, которые также покрывают V_0; пусть $U'_{P_1}, U'_{P_2}, \ldots, U'_{P_m}$ —выбранные окрестности. Обозначим через ε наименьшее из чисел $\varepsilon_{P_1}, \varepsilon_{P_2}, \ldots, \varepsilon_{P_m}$. Любая замкнутая кривая длины $l < \varepsilon$ содержится целиком внутри одной из окрестностей $U_{P_1}, U_{P_2}, \ldots, U_{P_m}$, соответствующих окрестностям $U'_{P_1}, U'_{P_2}, \ldots, U'_{P_m}$ и содержащих их. Следовательно, к *любой* замкнутой кривой на V_0 длины $l < \varepsilon$ применимо свойство 5), т. е. она ограничивает на V_0 область, площадь которой меньше kl, где k — постоянная (наибольшая из постоянных $k_1, k_2, \ldots, k_m$, соответствующих, согласно 5), окрестностям $U_{P_1}, U_{P_2}, \ldots, U_{P_m}$).

Предположим теперь, что $L < \varepsilon$. Тогда длина каждой из кривых $C_i \in \{C\}$ равна $L_i < \varepsilon$ и каждая такая кривая ограничивает область, площадь которой меньше $L_i k$. Взятые вместе, они ограничивают площади, сумма которых меньше kL $\left(L = \sum_i L_i\right)$. Однако точки, внешние по отношению к областям, ограничиваемым $\{C_i\}$, принадлежат все одной и той же области, ограничиваемой $\{C\}$, а поэтому принадлежат одному из тех подмножеств, на которые было разбито V_0. Дополнительное к нему множество содержится в областях, ограничиваемых $\{C_i\}$, и поэтому его площадь меньше kL. Лемма доказана.

3. Вторая лемма Альфорса вполне аналогична первой, но касается не площадей A, A', а длин λ, λ'. Однако здесь необходимо наложить на рассматриваемые кривые некоторые ограничения.

Регулярной кривой на V_0 мы назовем кривую, удовлетворяющую условиям, аналогичным условиям 5) из п. 1 для областей. Точнее, простая (замкнутая или открытая) кривая γ на V_0 называется регулярной, если любой точке $P \in V_0$ соответствует такая окрестность U_P, что каждая содержащаяся в U_P замкнутая кривая длины L ограничивает область, внутри которой дуги γ удовлетворяют неравенству $\lambda < k'L$, где λ — общая длина этих дуг и k' зависит только от U_P[1]).

[1]) Здесь имеет место то же замечание, что и для условия 5) п. 1.

Очевидно, что на V_0 регулярные кривые существуют. Например, любая дуга окружности является такой кривой [1]). В этом можно убедиться, взяв для V достаточно малые сферические шапочки с центром в P.

На основании этого условия регулярности для γ можно вполне аналогично первой лемме доказать *вторую лемму Альфорса* (частный случай сферы).

Если сфера V_0 разбита на два подмножества, как в первой лемме, и если γ — регулярная кривая (в определенном выше смысле), то существует такая постоянная k', зависящая только от V_0 и от γ, что

$$\min(\lambda, \lambda') < k'L,$$

где λ и λ' обозначают соответственно длины частичных дуг γ, принадлежащих каждому из двух подмножеств, на которые разбита V_0.

4. Обобщение предыдущих свойств на случай замкнутых поверхностей и полиэдрических областей. Рассмотрим сначала полиэдрическую область, являющуюся замкнутой поверхностью V_0 [2]). Говорят, что на V_0 определена (линейная и поверхностная) *метрика*, если каждой дуге простой кривой на V_0 сопоставлено положительное (конечное или бесконечное) число, называемое *длиной*, и каждой области на V_0, ограниченной простой замкнутой кривой конечной длины, — конечное положительное число, называемое *площадью* этой области. Метрика должна также удовлетворять условиям, указанным выше в п. 1 для случая сферы и евклидовой метрики. Условия 1)—4) требуются обычно для любой абстрактной метрики. Условие 5) является несколько более специальным, но мы будем предполагать, что заданная на V_0 метрика удовлетворяет также и этому условию.

В случае такой метрики (очевидно, что на каждой V_0 существует бесконечное число метрик такого рода) доказательства, приведенные выше для сферы и использующие только упомянутые пять условий, остаются в силе, и поэтому леммы Альфорса (с тем же определением регулярных кривых) справедливы для произвольных замкнутых поверхностей с *нормальной* метрикой, т. е. метрикой, удовлетворяющей всем пяти условиям.

Перейдем теперь к случаю полиэдрической области.

Любая полиэдрическая область V_0 с нормальной метрикой может быть дополнена другой тождественной ей областью таким

---

[1]) Достаточно заметить, что отношение длины дуги окружности к длине соответствующей хорды всегда заключено между 1 и $\pi/2$.

[2]) Мы будем здесь рассматривать только ориентируемые поверхности.

образом, чтобы вместе они образовали замкнутую поверхность также с нормальной метрикой; для этого достаточно представить себе два экземпляра полиэдрической области V_0 и склеить их по соответствующим граничным кривым. Тогда заданные на каждом экземпляре нормальные метрики приводят к нормальной метрике на всей замкнутой поверхности.

Трансверсалью называется простая замкнутая кривая, лежащая в данной полиэдрической области целиком, кроме своих двух концов, расположенных на граничных кривых этой области. Например, на рис. 52, изображающем полиэдрическую область нулевого рода с тремя граничными кривыми, проведенные пунктиром линии являются трансверсалями. При удвоении полиэдрической области эти трансверсали становятся замкнутыми кривыми, и поэтому леммы Альфорса в общем случае полиэдрической области можно сформулировать следующим образом.

Рис. 52.

Первая лемма. *Пусть полиэдрическая область V_0 разбита конечным числом (попарно непересекающихся) замкнутых кривых и трансверсалей*[1]) $\{C\}$ *на два подмножества таким образом, что каждое из этих подмножеств состоит из областей, определяемых $\{C\}$. Тогда существует такая постоянная k, зависящая только от V_0, что если обозначить через A и A' площади областей, на которые разбита V_0, и через L — общую длину системы замкнутых кривых и трансверсалей $\{C\}$, то*

$$\min(A,\ A') < kL.$$

Для случая длин имеет место

Вторая лемма. *Если полиэдрическая область V_0 разбита на два подмножества, как и в первой лемме, и если γ — регулярная (в вышеприведенном смысле) кривая, то существует такая постоянная k', зависящая только от V_0 и от γ, что*

$$\min(\lambda,\ \lambda') < k'L,$$

где λ и λ' — длины частичных дуг γ, принадлежащих соответственно подмножествам, на которые разбита V_0.

Эти две леммы будут нам полезны для доказательства основных теорем теории Альфорса.

---

[1]) Очевидно, что в случае замкнутых поверхностей трансверсалей не существует.

5. О римановом накрытии полиэдрических областей. Рассмотрим риманову поверхность (R)[1]), определенную как накрытие $(V_0)_T^V$ замкнутой поверхности V_0 произвольной топологической поверхностью V посредством внутреннего отображения T (гл. VII, § 4, п. 10 и 23).

На V рассмотрим полиэдрическую область W (в общем случае, когда V является открытой поверхностью, эта область может быть только частью V). Кроме того, рассмотрим на V_0 полиэдрическую

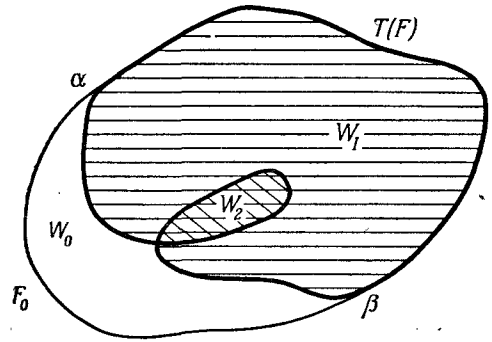

Рис. 53.

область W_0 и предположим, что образ $T(W)$ области W содержится в W_0. Тогда можно говорить, что W_0 *накрыта* областью W, подобно тому как V_0 накрыта V, причем накрытие следует считать *частью римановой поверхности* (R), задаваемой накрытием $(V_0)_T^V$.

Пусть F_0 — граница W_0 и F — граница W. Та часть множества $T(F)$, которая не принадлежит F_0, называется *относительной границей накрытия* W_0 *областью* W. На рис. 53 F_0 образована внешней кривой и W_0 — ограниченная ею область, $T(W)$ совпадает с заштрихованной областью, $T(F)$ обозначена жирной линией, а относительная граница — часть $T(F)$ между точками α и β.

Мы предположим также, что $T(F)$ и относительная граница состоят из кривых с *конечным числом точек самопересечения* и поэтому они разбивают W_0 на конечное число областей.

На рис. 53 одна из этих областей заштрихована дважды, а вторая только один раз. Это соответствует разделению W на *листы* согласно следующему определению.

Совокупность точек из W_0, которым при отображении T^{-1} соответствуют *по крайней мере* n точек на W, мы будем назы-

[1]) В §§ 1 и 2 этой главы мы обозначаем римановы поверхности через (R), так как буква R будет использована в теории распределения значений для радиуса круга $|z| < R$.

вать *n-м листом* W и обозначать через W_n. На рисунке лист W_1 заштрихован один раз, а лист W_2 — дважды.

Из свойств внутренних отображений вытекает, что число листов конечно, так как в компактной на V полиэдрической области W может существовать только *конечное* число точек с одинаковыми образами (гл. VII, § 4, п. 15) и число этих точек ограничено на W, когда образ описывает W_0.

6. В п. 4 мы ввели на V_0 (а следовательно, и на W_0) нормальную метрику. При помощи внутреннего отображения T эта метрика переносится на V (а следовательно, и на W) следующим образом.

Если на V задана дуга кривой, то из свойств внутренних отображений вытекает, что ее можно разбить на частичные дуги, на которых отображение является топологическим, т. е. *взаимно однозначным*. Мы сопоставим каждой из этих частичных дуг *длину ее образа на* V_0, а всей дуге на V — *сумму длин дуг, на которые она разбита*.

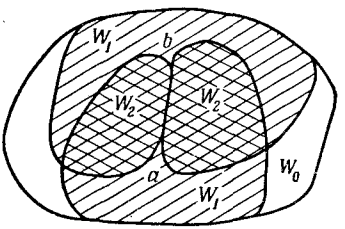

Рис. 54.

Аналогично, если на V задана компактная область D, ограниченная простой замкнутой кривой, то, как следует из теории внутренних отображений, эту область можно разбить на конечное число подобластей, в каждой из которых отображение T является топологическим. Каждой такой подобласти из D сопоставляется *площадь ее взаимно однозначного образа на* V_0, а всей области D — *сумма площадей подобластей, на которые она была разбита*.

Таким образом, если учесть определение листов W_n, площадь области W можно записать в виде

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_N, \tag{1}$$

где A_n обозначает площадь W_n в W_0.

Аналогично, если L_n — длина относительной границы области W_n [1]) и L — длина всей относительной границы накрытия W_0 областью W, то имеет место соотношение

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_N, \tag{2}$$

где участки, которые являются общими границами двух различных областей из W_n, считаются дважды (например, дугу ab на рис. 54 следует считать дважды). Заметим, что W_n может состоять из *нескольких* областей без общих граничных дуг.

[1]) То есть той части границы W_n, которая лежит *внутри* W_0.

7. Наконец, определим понятие среднего числа листов накрытия.

Если разделить площадь A области W, вычисленную по формуле (1), на площадь A_0 области W_0, то получим величину S, называемую *средним числом листов W над W_0*. Обозначая через S_n такое среднее число, соответствующее W_n, согласно (1), имеем

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_N. \qquad (1')$$

Ниже мы будем рассматривать также *среднее число листов W над Δ*, где область Δ является частью W_0 (с теми же свойствами, что и W_0). Эту величину обозначают через $S(\Delta)$. По определению, имеем

$$S(\Delta) = \frac{A(W')}{A(\Delta)},$$

где $A(W')$ — площадь той части из W, которая лежит над Δ, а $A(\Delta)$ — площадь Δ.

Аналогично (1′) имеем

$$S(\Delta) = S_1(\Delta) + S_2(\Delta) + \ldots + S_N(\Delta). \qquad (1'')$$

8. Аналогичные определения можно дать для *дуг кривых* и их *длин*. Пусть γ — кривая на W_0. Обозначим через $s(\gamma)$ *среднее число листов накрытия W над γ*. Если через $s_1(\gamma)$, $s_2(\gamma)$, ... обозначить аналогичные величины для различных листов накрытия, то будем иметь соотношение

$$s(\gamma) = s_1(\gamma) + s_2(\gamma) + \ldots + s_N(\gamma). \qquad (2')$$

9. Первая теорема Альфорса (*теорема о накрытии*). Рассмотрим область $\Delta \subset W_0$ и листы W_1, W_2, ..., W_N накрытия W области W_0. Область Δ накрыта частями каждого из этих листов, и между соответствующими выражениями $S_n(\Delta)$ имеет место соотношение (1″). Таким образом, имеем

$$S - S(\Delta) = \sum_{n=1}^{N} [S_n - S_n(\Delta)],$$

где обозначения те же, что и выше.

Пусть ΔW_n — часть W_n, которая содержится в Δ, и пусть $A(M)$ обозначает площадь множества M. Очевидно, что

$$A(\Delta W_n) \leqslant A(W_n),$$

и, следовательно,

$$\frac{A(\Delta W_n)}{A(\Delta)} = S_n(\Delta) \leqslant \frac{A(W_n)}{A(\Delta)} = \frac{A(W_0)}{A(\Delta)} \frac{A(W_n)}{A(W_0)} = \frac{A(W_0)}{A(\Delta)} S_n.$$

Таким образом,

$$S_n(\Delta) \leqslant \frac{A(W_0)}{A(\Delta)} S_n.$$

Отношение, стоящее в правой части этого неравенства, мы обозначим через q. Постоянная q зависит только от W_0 и Δ. Вышеприведенное соотношение принимает вид

$$S_n(\Delta) \leqslant qS_n. \tag{3}$$

Заменим теперь W_n на $W_0 - W_n$. Часть множества $W_0 - W_n$, содержащаяся в Δ, равна $\Delta - \Delta W_n$, и поэтому в левой части неравенства, аналогичного (3), получим

$$\frac{A(\Delta - \Delta W_n)}{A(\Delta)} = 1 - S_n(\Delta),$$

а в правой части множителем при q будет среднее число листов $W_0 - W_n$ над W_0:

$$\frac{A(W_0 - W_n)}{A(W_0)} = 1 - S_n.$$

Следовательно, кроме (3), имеем соотношение

$$1 - S_n(\Delta) \leqslant q(1 - S_n), \tag{4}$$

где q имеет тот же смысл, что и в (3).

Так как (по определению) $q \geqslant 1$, то из (3) следует, что

$$\max[S_n,\ S_n(\Delta)] \leqslant qS_n,$$

а (4) дает неравенство

$$\max[1 - S_n,\ 1 - S_n(\Delta)] \leqslant q(1 - S_n).$$

Так как величины S_n, $S_n(\Delta)$, $1 - S_n$ и $1 - S_n(\Delta)$ все положительны, то

$$|S_n - S_n(\Delta)| \leqslant \max[S_n,\ S_n(\Delta)] \leqslant qS_n \tag{5}$$

и

$$|S_n - S_n(\Delta)| = |(1 - S_n) - [1 - S_n(\Delta)]| \leqslant$$
$$\leqslant \max[1 - S_n,\ 1 - S_n(\Delta)] \leqslant q(1 - S_n), \tag{6}$$

а следовательно,

$$|S_n - S_n(\Delta)| \leqslant q \min[S_n,\ 1 - S_n]. \tag{7}$$

Предположим теперь, что метрика в W_0 нормальна в смысле п. 4. Тогда, так как S_n и $1 - S_n$ получаются при делении площадей множеств W_n и $W_0 - W_n$ на постоянную площадь области W_n, можно считать, что W_0 разбита *относительной* границей листа W_n на два подмножества, W_n и $W_0 - W_n$, и мы находимся

в условиях первой леммы. Из этой леммы вытекает, что существует такое число k, зависящее только от W_0, что

$$\min[S_n,\ 1-S_n] \leqslant kL_n,$$

где L_n — длина рассматриваемой относительной границы.

Следовательно, из (7) вытекают неравенства

$$|S_n - S_n(\Delta)| \leqslant q\,kL,$$

суммируя которые по n от 1 до N, получаем

$$|S - S(\Delta)| \leqslant kL, \tag{I}$$

где k — другая постоянная, *зависящая только от* W_0 *и от* Δ, а L — длина относительной границы W над W_0.

Соотношение (I) составляет содержание *первой теоремы Альфорса*. Ее можно сформулировать следующим образом.

Если задана подобласть $\Delta \subset W_0$, *то какова бы ни была накрывающая полиэдрическая область* W, *среднее число листов* W *над* W_0 *отличается от среднего числа листов* W *над* Δ *на величину, оцениваемую сверху числом* kL, *т. е. произведением длины относительной границы* W *над* W_0 *на постоянную* k, *зависящую только от* W_0 *и от* Δ, *но не от* W.

В качестве непосредственного приложения этой теоремы получаем при $L = 0$ следующий результат:

Если накрытие W_0 областью W не имеет относительной границы, то среднее число листов *одинаково для всех* Δ [1]).

10. Теорема (I) может быть дополнена *важным результатом*, касающимся числа листов накрытия над *регулярной кривой* — вместо Δ (области, лежащей в W_0) здесь выступает регулярная кривая γ, содержащаяся в W_0. Дополнительная теорема (I′) выражается соотношением, вполне аналогичным соотношению (I):

$$|S - s(\gamma)| \leqslant kL, \tag{I′}$$

где S, $s(\gamma)$, k и L были определены выше.

Рассмотрим сначала кривую γ на W_0, разбивающую W_0 на две области (γ может быть трансверсалью или надлежащим образом выбранной замкнутой кривой). Пусть D — та из этих областей, которая имеет меньшую площадь.

Применяя *первую лемму* к разбиению W_0 на DW_n и $W_0 - DW_n$, получаем

$$A(DW_n) \leqslant k[L_n(\gamma) + L_n]. \tag{8}$$

[1]) Это имеет место в случае полного накрытия. Тогда W является нормальной областью (гл. VII, § 4, п. 12, § 5, п. 30).

Здесь L_n — длина относительной границы W_n над W_0, а $L_n(\gamma)$ — длина той части из γ, которая принадлежит W_n. На рис. 55 W_n заштрихованы в одном направлении, а D — в другом. Дважды заштрихованный участок соответствует DW_n.

Выпишем теперь соотношение, аналогичное (8), заменив DW_n на $D - DW_n$ (на рис. 55 $D - DW_n$ — верхняя область):

$$A(D) - A(DW_n) \leqslant k\,[L_0(\gamma) - L_n(\gamma) + L_n]; \tag{9}$$

здесь k — имеет то же значение, что и в (8), а $L_0(\gamma)$ обозначает полную длину γ (на W_0).

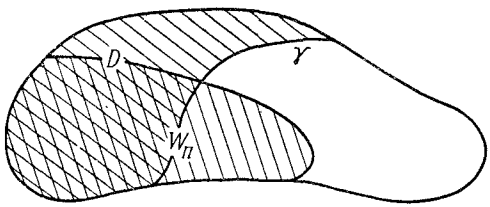

Рис. 55.

Разделим теперь (8) и (9) на $A(D)$ и учтем то, что $s_n(\gamma) = \frac{L_n(\gamma)}{L_0(\gamma)}$; получим неравенства

$$S_n(D) \leqslant \frac{k}{A(D)}\,[L_n(\gamma) + L_n] = \frac{k}{A(D)}\,[L_0(\gamma)\,s_n(\gamma) + L_n] \tag{8'}$$

и

$$1 - S_n(D) \leqslant \frac{k}{A(D)}\,[L_0(\gamma) - L_n(\gamma) + L_n)] = \frac{k}{A(D)}\,\{L_0(\gamma)\,[1 - s_n(\gamma)] + L_n\}. \tag{9'}$$

С другой стороны, применяя первую лемму к разбиению W_0 на D и $W_0 - D$, получаем с тем же k

$$A(D) \leqslant kL_0(\gamma), \text{ или } \frac{k}{A(D)}\,L_0(\gamma) \geqslant 1,$$

а следовательно,

$$s_n(\gamma) \leqslant \frac{k}{A(D)}\,[L_0(\gamma)\,s_n(\gamma) + L_n] \tag{8''}$$

и

$$1 - s_n(\gamma) \leqslant \frac{k}{A(D)}\,\{L_0(\gamma)\,[1 - s_n(\gamma)] + L_n\}. \tag{9''}$$

Таким образом, учитывая (8′) и (9′), а также (8″) и (9″), получаем

$$|S_n(D)-s_n(\gamma)|\leqslant \max[S_n(D),\ s_n(\gamma)]\leqslant$$
$$\leqslant \frac{k}{A(D)}[L_0(\gamma)\,s_n(\gamma)+L_n]$$

и

$$|S_n(D)-s_n(\gamma)|=|[1-S_n(D)]-[1-s_n(\gamma)]|\leqslant$$
$$\leqslant \max[1-S_n(D),\ 1-s_n(\gamma)]\leqslant$$
$$\leqslant \frac{k}{A(D)}\{L_0(\gamma)\,[1-s_n(\gamma)]+L_n\}.$$

Следовательно,

$$|S_n(D)-s_n(\gamma)|\leqslant \frac{k}{A(D)}\{L_n+L_0(\gamma)\min[s_n(\gamma),\ 1-s_n(\gamma)]\}.$$

Применяя теперь вторую лемму, находим

$$|S_n(D)-s_n(\gamma)|\leqslant \frac{k}{A(D)}[L_n+L_0(\gamma)\,k'L_n]=\frac{k}{A(D)}[1+k'L_0(\gamma)]\,L_n.$$

Положим

$$\frac{k}{A(D)}[1+k'L_0(\gamma)]=k''$$

и просуммируем по n; получим

$$|S(D)-s(\gamma)|\leqslant k''L, \tag{10}$$

где k'' зависит только от W_0, от D и от γ.

Учитывая еще теорему (I), которая выражается неравенством

$$|S-S(D)|\leqslant kL, \tag{11}$$

из (10) получаем неравенство

$$|S-s(\gamma)|\leqslant kL$$

с другой постоянной k, также зависящей только от W_0, D и от γ. Однако, так как D зависит только от γ и от W_0, то можно сказать, что k в последнем неравенстве зависит только от γ и от W_0 и соотношение (I′) доказано для кривой γ, *разбивающей* W_0 *на две области*.

Для доказательства соотношения (I′) в случае произвольных регулярных кривых заметим, что если γ и γ' — две произвольные регулярные кривые на W_0, причем γ' является частью γ, то имеем

$$|s(\gamma)-s(\gamma')|<kL, \tag{12}$$

где k — постоянная, зависящая только от W_0, от γ и от γ'.

Действительно, рассуждение, проведенное выше для получения соотношения (I), приведет к (12), если вместо W_0 и Δ рассмотреть γ и γ' и применить вместо первой леммы вторую, касающуюся кривых и их длин.

Рассмотрим произвольную регулярную кривую γ, и пусть γ' — часть этой кривой. Построим кривую γ'', содержащую γ' и разбивающую W_0 на две области (рис. 56). Так как γ' является частью γ и γ'', то, как мы заметили,

$$|s(\gamma) - s(\gamma')| < kL$$

и

$$|s(\gamma') - s(\gamma'')| < k'L,$$

откуда

$$|s(\gamma) - s(\gamma'')| < kL \text{ (с другим } k).$$

Рис. 56.

Учитывая теперь то, что γ'' разбивает W_0 на две области и что для таких кривых соотношение (I′) доказано, получаем для γ, т. е. *для произвольной регулярной кривой*, соотношение (I′).

Следовательно, мы доказали следующее дополнение к первой теореме Альфорса:

Если γ — регулярная кривая на W_0, то какова бы ни была полиэдрическая область W, накрывающая область W_0, среднее число листов W над W_0 отличается от среднего числа листов W над γ на величину, оцениваемую сверху числом kL, где L — длина относительной границы W над W_0 и k — постоянная, зависящая только от W_0 и от γ и не зависящая от W.

Это дополнение к теореме (I) выражается вышеприведенным соотношением (I′).

11. В гл. VII, § 5, п. 29 мы ввели понятия характеристики и порядка связности полиэдрической области. При этом были доказаны теорема Эйлера (гл. VII, § 5, п. 29) и формула Гурвица (гл. VII, § 5, п. 32). Кроме этих результатов, мы будем пользоваться ниже *теоремой аддитивности характеристик.*

Предположим, что в полиэдрической области D проведена некоторая система попарно непересекающихся простых замкнутых кривых и трансверсалей. Пусть D_k — области из D, определяемые этой системой, и ρ_k — характеристика D_k. Тогда, *каково бы ни было число замкнутых кривых, характеристика* ρ *области* D *равна*

$$\rho = \sum_k \rho_k + n, \tag{13}$$

где n — число трансверсалей в D.

Рассмотрим триангуляцию D, такую, что кривые и трансверсали нашей системы состоят из сторон этой триангуляции.

Теорема аддитивности легко выводится из замечания, что в формуле Эйлера

$$-N_0+N_1-N_2=\rho \tag{14}$$

(гл. VII, (14) и (16)) можно учитывать только внутренние стороны и вершины из области D (т. е. не принимать в расчет границу D). Действительно, каждый граничный контур вводит в левую часть (14) одинаковое число сторон и вершин, и поэтому его вклад равен нулю.

При вычислении ρ_k можно не учитывать вершин и сторон замкнутых ломаных, а также ломаных, соответствующих трансверсалям, принадлежащим границе D_k. Следовательно, в сумме $\sum_k \rho_k$ по сравнению с ρ недостает только вершин сторон, принадлежащих замкнутым кривым и трансверсалям, проведенным в D. Однако мы заметили, что для замкнутых ломаных величина $-N_0+N_1=0$, а для открытых ломаных (трансверсалей) имеем, очевидно, $-N_0+N_1=1$, так как их концы лежат на границе D и не учитываются при вычислении выражения ρ. Таким образом, разность между ρ и $\sum_k \rho_k$ равна как раз числу n этих трансверсалей, что и дает соотношение (13).

12. Вторая теорема Альфорса (*основная теорема*). Первая теорема, называемая также *теоремой о накрытии*, дает соотношения между средним числом листов S полиэдрической области W, накрывающей основную область W_0, и средним числом $S(\Delta)$ для той же W над областью $\Delta\subset W_0$. В это соотношение входит, с одной стороны, постоянная k, зависящая только от W_0 и от Δ (но не зависящая от W), а с другой стороны — длина L относительной границы W (п. 9). Теперь мы приведем соотношение между характеристиками ρ и ρ_0 областей W и W_0.

Если не существует относительной границы (т. е. если $L=0$) и накрытие является полным (гл. VII, § 5, п. 30), то формула Гурвица (гл. VII, (16) и (24)) дает такое соотношение в виде

$$\rho=n\rho_0+r,$$

где n — *число листов* W над W_0 (мы заметили, что в случае $L=0$ *любой лист* W_n *полностью* накрывает W_0), а r — число точек ветвления накрытия, считаемых со своими порядками.

Так как r неотрицательно, то из вышеприведенного соотношения вытекает, что

$$\rho\geqslant n\rho_0. \tag{15}$$

Это соотношение, справедливое в случае $L = 0$, будет теперь обобщено на случай, когда существует относительная граница (т. е. $L \neq 0$). Это обобщение дается *второй теоремой Альфорса* (названной автором *основной метрико-топологической теоремой*).

Характеристика ρ *накрывающей области* W *и характеристика* ρ_0 *основной области* W_0 *связаны соотношением*

$$\rho^+ \geqslant \rho_0 S - kL, \tag{II}$$

где $\rho^+ = \rho$, *если* $\rho \geqslant 0$, и $\rho^+ = 0$, *если* $\rho < 0$, *а* k *зависит только от* W_0 *и от заданной в* W_0 *метрики и является положительным числом.*

Бросается в глаза аналогия между соотношением (II) и соотношением (15), которое оно обобщает: число листов из (15) заменено в (II) средним числом листов, что естественно, так как здесь листы покрывают W_0 лишь частично и не все покрывают одинаковую площадь W_0 (поправочным членом по сравнению с (15) является $-kL$).

Заметим также, что в (II) вместо ρ должно выступать ρ^+, так как S и L могут быть сколь угодно малыми и поэтому правая часть может быть сколь угодно близкой к нулю.

С другой стороны, (II) не нуждается в доказательстве при $\rho_0 \leqslant 0$, так как тогда правая часть отрицательна или равна нулю и неравенство тривиально. Поэтому теорема интересна *только в случае* $\rho_0 > 0$.

Мы докажем теорему для случая области W_0, подобной однолистной [1]). Это важнейший случай, в особенности для теории распределения значения мероморфных функций, которую мы собираемся рассмотреть. Впрочем, общий случай может быть сведен к рассматриваемому здесь при помощи рассуждения, использующего общие топологические свойства поверхностей [2]).

В случае, когда W_0 подобна однолистной, ее можно считать областью на сфере, ограниченной q контурами (простыми жордановыми кривыми без общих точек). Тогда имеем $\rho_0 = q - 2$ (так как род области равен нулю, а ее порядок связности равен q). Так как число ρ_0 предполагается положительным, то очевидно, что мы должны иметь $q \geqslant 3$. Поэтому в качестве W_0 мы возьмем *область на сфере, ограниченную по крайней мере тремя контурами.*

---

[1]) Область называется подобной однолистной, если ее род равен нулю (гл. VII, § 5, п. 26).

[2]) Альфорс Л., К теории поверхностей наложения, § 4, п. 16 (*Успехи матем. наук*, ст. серия, вып. VI).

Сформулированная теорема выражается в рассматриваемом случае соотношением

$$\rho^+ \geqslant (q-2)\,S - kL, \qquad (\mathrm{II}_1)$$

которое мы и собираемся доказать.

Проведем в области W_0, выбранной как указано выше, q трансверсалей, которые разбивают эту область на две односвязные области. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$ — эти трансверсали. Внутреннее отображение, определяющее накрытие W_0 областью W, сопоставляет в W трансверсалям $\gamma_i\,(i=1, 2, \ldots, q)$ некоторое число трансверсалей σ [1]), разбивающих W на различные (вообще говоря, многосвязные) области $\{D\}$. Пусть $n(\sigma)$ — число трансверсалей из W. Согласно теореме аддитивности характеристик (13), обозначая через ρ характеристику W и через $\rho(D)$ — характеристику области D, получаем соотношение

$$\rho = n(\sigma) + \sum_D \rho(D),$$

где суммирование распространено на все области D, на которые разбита W. Так как каждая из них обладает по крайней мере одной граничной кривой, то все они имеют характеристику $\geqslant -1$. Поэтому, если обозначить через $N(D)$ число областей D, то из вышеприведенного равенства вытекает неравенство

$$\rho \geqslant n(\sigma) - N(D). \qquad (16)$$

Из соотношения (16) мы выведем сформулированную выше теорему.

13. Для этого, следуя Альфорсу, проведем классификацию трансверсалей σ и областей D [2]). Предположим, что существует D, ограниченная (кроме граничных кривых W) единственной трансверсалью σ. Такие области D образуют *класс* $\{D_1\}$. Соответствующие трансверсали σ образуют *класс* $\{\sigma_1\}$.

Класс $\{D_2\}$ образован областями D, каждая из которых, кроме граничных кривых W и трансверсалей из класса $\{\sigma_1\}$, ограничена единственной трансверсалью, не принадлежащей $\{\sigma_1\}$. Класс трансверсалей $\{\sigma_2\}$ состоит из тех трансверсалей, которые ограничивают некоторую область из $\{D_2\}$ (рис. 57).

Продолжая эту классификацию, мы получим две конечные последовательности классов областей $\{D_1\}, \{D_2\}, \ldots, \{D_p\}$ и трансверса-

[1]) Каждая σ соединяет точки границы W, но $T(\sigma)$ может быть только частью соответствующей кривой γ.

[2]) Заметим, что любая σ принадлежит границе двух различных областей D, так как кривые γ обладают этим свойством относительно соответствующих областей.

лей $\{\sigma_1\}$, $\{\sigma_2\}$, ..., $\{\sigma_p\}$. Каждый такой класс вполне определен [1]), однако, вообще говоря, не каждая область D и не каждая трансверсаль σ входят в классификацию.

Обозначим через $\{G\}$ семейство областей D (*не* принадлежащих ни к одному из классов $\{D_c\}$ ($c = 1, 2, \ldots, p$; $p \leqslant n(\sigma)$) и займемся сначала только классифицированными областями и трансверсалями.

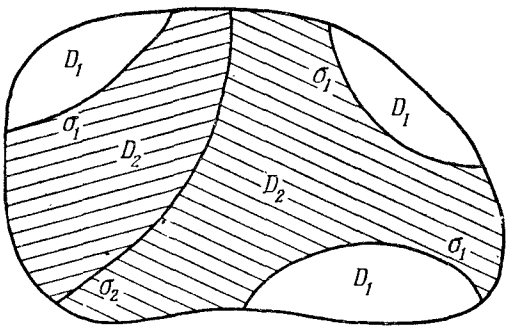

Рис. 57.

Рассмотрим трансверсаль σ_p из класса $\{\sigma_p\}$ с наибольшим номером. Так как σ_p принадлежит определенному классу, то она должна лежать на границе определенной области $D_p \subset W$ и разбивать W на две части. Действительно, пусть W'_p — та часть W, в которой лежит D_p [2]), и W''_p — остальная часть. *Тогда W'_p не может содержать никакой трансверсали σ, не принадлежащей одному из классов $\{\sigma_c\}$ при $c < p$ и никакой области D из семейства $\{G\}$.*

Для того чтобы легче понять это заключение, рассмотрим пример, изображенный на рис. 58, где $p = 3$. Заштрихованная область слева от σ_3 есть D_3. Согласно определению класса $\{D_3\}$, она может обладать граничными трансверсалями только из классов $\{\sigma_1\}$ и $\{\sigma_2\}$. Пусть σ_2 на рисунке является одной из этих трансверсалей из класса $\{\sigma_2\}$. Согласно определению класса $\{\sigma_2\}$, кроме D_3, она ограничивает еще одну область D_2 из класса $\{D_2\}$. В свою очередь последняя может обладать другими граничными трансверсалями, обязательно принадлежащими классу $\{\sigma_1\}$. Таким образом, очевидно,

---

[1]) Определенной D_k соответствует однозначно определенная σ_k в том же классе.

[2]) То есть часть, образованная точками из W, достижимыми по непрерывным путям, исходящим из D_p и не пересекающим σ_p.

что W_p' может содержать только классифицированные трансверсали с номером класса, меньшим p, и классифицированные области D с теми же номерами (W_p' не содержит никакой области G). Следовательно, нельзя перейти на другую сторону от σ_p, исходя из W_p' и двигаясь по непрерывному пути, не пересекающему σ_p.

Что касается W_p'', то могут представиться два случая:

(1) в W_p'' трансверсаль σ_p ограничивает другую область из класса $\{D_p\}$;

(2) в W_p'' трансверсаль σ_p ограничивает область G из семейства $\{G\}$.

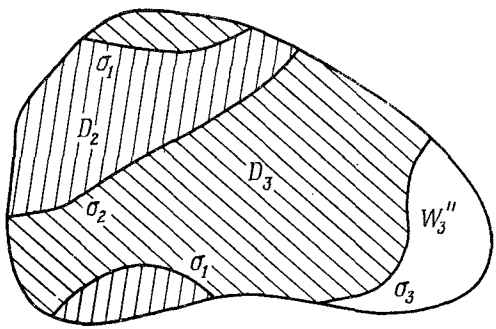

Рис. 58.

В случае (1) рассуждение, примененное к W_p', применимо также к W_p'', и, следовательно, W *не содержит областей из семейства* $\{G\}$; *все области* D *классифицированы и все трансверсали* σ *также классифицированы.*

В этом случае каждая σ_c однозначно соответствует некоторой D_c и обратно, т. е. *области* D *и трансверсали* σ *взаимно однозначно соответствуют друг другу с единственным исключением*: существует трансверсаль σ_p, соответствующая двум областям D_p (p — наибольшее из c). Наглядное представление о таком случае можно получить, дополняя рис. 58 слева от σ_3 так, как это сделано справа от этой трансверсали.

В случае (2) для области $G \in \{G\}$, ограниченной в W_p'' трансверсалью σ_p, могут иметь место два подслучая:

$(2)_1$ все остальные трансверсали σ, ограничивающие G, принадлежат классам $\{\sigma_c\}$ (G ограничена по крайней мере двумя трансверсалями σ_p, где p — наибольшая из c; см. рис. 59, где $p=3$);

$(2)_2$ существуют по крайней мере две граничные трансверсали G, которые не классифицированы (не принадлежат ни одному из классов $\{\sigma_c\}$) [1]).

В подслучае $(2)_1$ к каждой граничной трансверсали σ_ν $(\nu \leqslant p)$ области G применимо рассуждение, проведенное выше для части W'_p, соответствующей σ_p, и можно показать, что существует единственная G; с другой стороны от трансверсалей σ_ν находятся только классифицированные области и классифицированные трансверсали.

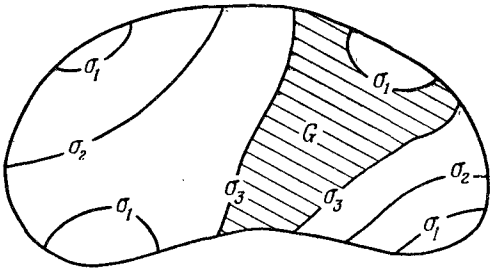

Рис. 59.

На рис. 59 (где $p=3$) видно, как расположены классифицированные области вокруг G. Область G заштрихована. Она ограничена двумя трансверсалями σ_3 из класса с максимальным номером и одной трансверсалью σ_1.

В этом случае *все трансверсали из W классифицированы. В подслучае $(2)_2$ существуют по крайней мере две неклассифицированные трансверсали и несколько областей G.*

Мы разделим эти области на два новых семейства: семейство $\{G'\}$, которое содержит те области из $\{G\}$, *на границе которых лежит не более чем $q-1$ неклассифицированных граничных трансверсалей*, и семейство $\{G''\}$, которое содержит области, *обладающие по крайней мере q неклассифицированными граничными трансверсалями.*

Трансверсали, не принадлежащие ни одному из классов $\{\sigma_c\}$, мы обозначим соответственно $\{\sigma_{11}\}$, $\{\sigma_{12}\}$, $\{\sigma_{22}\}$, смотря по тому, ограничивают ли они две области из $\{G'\}$, или одну из $\{G'\}$ и одну из $\{G''\}$, или две области из $\{G''\}$.

14. Предположим, что мы имеем общий случай $(2)_2$, когда в W существуют также и неклассифицированные трансверсали [2]). Тогда

[1]) Действительно, если бы существовала только одна трансверсаль такого рода, то, по определению, она была бы классифицированной и мы пришли бы к противоречию.

[2]) Может случиться, что в W не существует классифицированных трансверсалей (например, рис. 60).

1°. *Классифицированные* области D_c и трансверсали σ_c, если такие существуют, взаимно однозначно соответствуют друг другу: каждой D_c соответствует вполне определенная σ_c и обратно.

2°. Граница каждой области G' содержит *не менее двух и не более* $q-1$ *неклассифицированных трансверсалей* (они принадлежат семействам, обозначенным $\{\sigma_{11}\}$ и $\{\sigma_{12}\}$).

3°. Граница каждой области G'' содержит *не менее* q *неклассифицированных трансверсалей из семейств* $\{\sigma_{12}\}$ или $\{\sigma_{22}\}$.

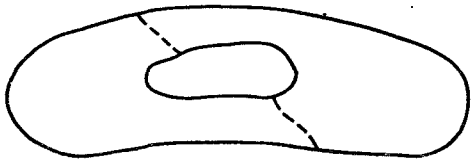

Рис. 60.

Случай $(2)_2$ является наиболее важным для второй теоремы Альфорса, так как мы увидим, что в остальных случаях эта теорема довольно тривиальна.

Итак, рассмотрим этот случай $(2)_2$. Так как на основании свойства 1° (классифицированные) трансверсали σ_c и области D_c взаимно однозначно соответствуют друг другу, то в соотношении (16)

$$\rho \geqslant n(\sigma) - N(D)$$

в правой части взаимно уничтожаются члены, соответствующие классифицированным σ и D. Остаются лишь области $\{G\}$ и трансверсали $\{\sigma_{11}\}$, $\{\sigma_{12}\}$ или $\{\sigma_{22}\}$.

Если обозначить через $n(\sigma_{ij})$ число трансверсалей из семейства $\{\sigma_{ij}\}$ и соответственно через $N(G')$ и $N(G'')$ — число областей из семейств $\{G'\}$ и $\{G''\}$, то соотношение (16) можно представить в виде

$$\rho \geqslant \left[n(\sigma_{11}) + \frac{1}{2}\, n(\sigma_{12}) - N(G')\right] + \left[n(\sigma_{22}) + \frac{1}{2}\, n(\sigma_{12}) - N(G'')\right]. \tag{17}$$

Из 2° вытекает, что

$$n(\sigma_{11}) + \frac{1}{2}\, n(\sigma_{12}) - N(G') \geqslant 0, \tag{18}$$

а свойство 3° дает

$$n(\sigma_{22}) + \frac{1}{2}\, n(\sigma_{12}) - \frac{q}{2}\, N(G'') \geqslant 0. \tag{19}$$

Действительно, пусть G_i' — область из семейства $\{G'\}$ и $n_i(\sigma_{12})$ и $n_i(\sigma_{11})$ — соответствующие числа трансверсалей из $\{\sigma_{12}\}$ и $\{\sigma_{11}\}$.

Согласно 2°, имеем

$$n_i(\sigma_{12}) + n_i(\sigma_{11}) \geqslant 2,$$

и поэтому, если просуммируем по всем $G_i' \in \{G'\}$, получим

$$\sum_i [n_i(\sigma_{12}) + n_i(\sigma_{11})] \geqslant 2N(G'). \tag{20}$$

Однако σ_{12} принадлежит лишь одной области G_i', тогда как σ_{11} всегда принадлежит двум G_i'. Следовательно, (20) дает

$$n(\sigma_{12}) + 2n(\sigma_{11}) \geqslant 2N(G'),$$

что совпадает с (18).

Аналогичным образом получается и (19). Действительно, обозначая через G_i'' область из семейства $\{G''\}$, на границе которой лежат $n_i(\sigma_{12})$ и $n_i(\sigma_{22})$ трансверсалей, согласно 3°, имеем соотношение

$$n_i(\sigma_{12}) + n_i(\sigma_{22}) \geqslant q,$$

откуда, как и выше, получаем

$$n(\sigma_{12}) + 2n(\sigma_{22}) \geqslant qN(G''),$$

что совпадает с (19).

Согласно соотношению (18), вместо (17) можно написать неравенство

$$\rho \geqslant n(\sigma_{22}) + \frac{1}{2} n(\sigma_{12}) - N(G''),$$

или с учетом (19)

$$\rho \geqslant \frac{q-2}{q}\left[n(\sigma_{22}) + \frac{1}{2} n(\sigma_{12})\right].$$

Тем более справедливо соотношение

$$\rho^+ \geqslant \frac{q-2}{q} n(\sigma_{22}) \qquad (q \geqslant 3). \tag{21}$$

Для доказательства теоремы остается найти оценку снизу для $n(\sigma_{22})$.

15. Для этого введем *средние числа листов* области W над трансверсалями γ_i ($i = 1, 2, \ldots, q$) на W_0. Каждая трансверсаль σ лежит над одной из трансверсалей γ_i. Пусть $\lambda(\sigma)$ — отношение длины σ к длине той γ_i, на которую или на частичную дугу которой отображается σ при помощи внутреннего отображения, определяющего накрытие. Применяя обозначение $s(\gamma_i)$ для среднего числа листов W над γ_i, имеем

$$\sum_{i=1}^{q} s(\gamma_i) = \sum_{\sigma_c} \lambda(\sigma_c) + \sum_{\sigma_{11}} \lambda(\sigma_{11}) + \sum_{\sigma_{12}} \lambda(\sigma_{12}) + \sum_{\sigma_{22}} \lambda(\sigma_{22}), \tag{22}$$

где суммы в правой части относятся ко всем трансверсалям σ.

Согласно дополнению к первой теореме Альфорса, п. 10, существует такая постоянная k_i, зависящая только от γ_i и от W_0, что

$$|S - s(\gamma_i)| \leqslant k_i L,$$

где S — среднее число листов W над W_0, а L — длина относительной границы W над W_0.

Из этого соотношения получаем

$$s(\gamma_i) \geqslant S - kL,$$

откуда, суммируя по i, имеем

$$\sum_{i=1}^{q} s(\gamma_i) \geqslant qS - kL, \tag{23}$$

где k — другая положительная постоянная, зависящая только от W_0 и от трансверсалей γ_i. Исключая $\sum_{i=1}^{q} s(\gamma_i)$ из (22) и (23), находим

$$\sum_{\sigma_c} \lambda(\sigma_c) + \sum_{\sigma_{11}} \lambda(\sigma_{11}) + \sum_{\sigma_{12}} \lambda(\sigma_{12}) + \sum_{\sigma_{22}} \lambda(\sigma_{22}) \geqslant qS - kL.$$

Так как, очевидно,

$$\lambda(\sigma) \leqslant 1 \quad \text{и, следовательно,} \quad \sum_{\sigma_{22}} \lambda(\sigma_{22}) \leqslant n(\sigma_{22}),$$

то последнее соотношение дает

$$n(\sigma_{22}) \geqslant qS - kL - \left[\sum_{\sigma_c} \lambda(\sigma_c) + \sum_{\sigma_{11}} \lambda(\sigma_{11}) + \sum_{\sigma_{12}} \lambda(\sigma_{12})\right]. \tag{24}$$

Итак, достаточно показать, что выражение, заключенное в скобки, можно оценить сверху числом $k'L$, где k' — постоянная, аналогичная k. Это выражение состоит из трех частей. Займемся по очереди каждой из них.

16. Оценка суммы $\sum \lambda(\sigma_c)$ (для классифицированных трансверсалей σ_c). Пусть W_0' и W_0'' — односвязные области, на которые трансверсали γ разбивают W_0.

Покажем сначала, что существует такая постоянная k, что какова бы ни была накрывающая полиэдрическая область W области W_0' (или W_0''), для каждой пары трансверсалей (γ_i, γ_j) имеем

$$|s(\gamma_i) - s(\gamma_j)| \leqslant kL, \tag{25}$$

где $s(\gamma)$ относится к трансверсалям σ из соответствующей области W.

Действительно, применяя дополнение к первой теореме Альфорса, как и выше получаем для γ_i

$$|s(\gamma_i) - S'| \leqslant k_i L' \text{ [1]}$$

и для γ_j

$$|s(\gamma_j) - S'| \leqslant k_j L',$$

откуда следует, что

$$|s(\gamma_i) - s(\gamma_j)| \leqslant (k_i + k_j)\ L' \leqslant kL,$$

где k — наибольшее из чисел $k_i + k_j$ при $i, j = 1, 2, \ldots, q$.

Применим это соотношение к *классифицированным* областям D, которые, очевидно, являются полиэдрическими *накрывающими* областями области W_0' (или W_0'').

Так как мы имеем случай $(2)_2$, то можем воспользоваться свойством 1° п. 14, выражающим тот факт, что классифицированные области D_c и классифицированные трансверсали σ_c взаимно однозначно соответствуют друг другу. Пусть σ_c — трансверсаль, соответствующая D_c, и пусть, например, γ_1 — трансверсаль γ_i, над которой лежит σ_c.

Тогда, учитывая (25) (при $W = D_c$), находим

$$\lambda(\sigma_c) \leqslant s(\gamma_1) \leqslant s(\gamma_j) + kL(D_c),$$

где $L(D_c)$ — длина относительной границы D_c (над W_0' или над W_0'', смотря по тому, какую из этих областей накрывает D_c); здесь j — любое из чисел $1, 2, \ldots, q$.

Суммируя *по* j, получаем

$$q\lambda(\sigma_c) \leqslant \sum_{j=1}^{q} s(\gamma_j) + qkL(D_c),$$

или (так как в сумму входит один раз каждая из граничных трансверсалей области D_c и не входят другие трансверсали)

$$q\lambda(\sigma_c) \leqslant \sum_{\sigma \in \partial D_c} \lambda(\sigma) + qkL(D_c), \tag{26}$$

где мы указали, что суммирование производится по тем σ, которые лежат на границе D_c.

Просуммируем соотношение (26) *по всем классифицированным областям* $\{D_c\}$.

В нашем случае $(2)_2$ каждая σ_c лежит на границе единственной D_c. Однако, так как мы собираемся применять получаемое теперь соотношение также и в случаях $(2)_1$ и (1), то мы произведем несколько завышенную оценку, вспомнив, что во *всех* слу-

---

[1]) S' обозначает здесь число S для W_0' (или W_0''), а L' — относительная граница соответствующих областей W.

чаях σ_c может лежать на границе не более чем *двух* областей D_c. Следовательно,

$$\sum_c \left[\sum_{\sigma \in \partial D_c} \lambda(\sigma) \right] \leqslant 2 \sum_{\sigma_c} \lambda(\sigma_c).$$

С другой стороны, имеем $\sum_c L(D_c) \leqslant L$, где L обозначает (как и до сих пор) длину всей относительной границы W над W_0.

Следовательно, соотношение (26), просуммированное по всем σ_c, можно заменить соотношением

$$q \sum_{\sigma_c} \lambda(\sigma_c) \leqslant 2 \sum_{\sigma_c} \lambda(\sigma_c) + kqL,$$

и так как $q > 2$, то имеем оценку

$$\sum_{\sigma_c} \lambda(\sigma_c) \leqslant kL \tag{27}$$

с другим k такого же вида.

Напомним, что соотношение (27) *справедливо* также и в случаях (1) и $(2)_1$, а не только в случае $(2)_2$.

17. Оценка сумм $\sum_{\sigma_{11}} \lambda(\sigma_{11})$ и $\sum_{\sigma_{12}} \lambda(\sigma_{12})$. Рассмотрим теперь область G_m, принадлежащую семейству $\{G'\}$. Согласно 2°, существует *не более* $q-1$ граничных трансверсалей σ_{11} или σ_{12} области G_m. Тогда существует по крайней мере одна трансверсаль γ_l, например γ_m, над которой *не* лежит ни одна из *неклассифицированных* граничных трансверсалей области G.

Пусть $s(\gamma_m)$ — среднее число листов области G_m над γ_m. Применяя (25) к $W = G_m$ и к трансверсали σ_{11}, лежащей на границе G_m, получаем

$$\lambda(\sigma_{11}) \leqslant s(\gamma_r) \leqslant s(\gamma_m) + kL(G_m),$$

где $s(\gamma)$ относится к $\sigma \subset G_m$ (а следовательно, $s(\gamma_m)$ относится только к классифицированным σ), а γ_r — это та γ_l, над которой лежит рассматриваемая σ_{11} (а следовательно, $r \neq m$).

Аналогично для σ_{12}, лежащей на границе G_m, имеем

$$\lambda(\sigma_{12}) \leqslant s(\gamma_j) \leqslant s(\gamma_m) + kL(G_m),$$

где γ_j — та γ_l, над которой лежит рассматриваемая σ_{12}, а следовательно, $j \neq m$.

Просуммируем теперь по *всем* трансверсалям $\{\sigma_{11}\}$ и $\{\sigma_{12}\}$ из границы области G_m. Получаем

$$\sum_{G_m} (\sigma_{11}) + \sum_{G_m} \lambda(\sigma_{12}) \leqslant (q-1)\, s(\gamma_m) + (q-1)\, kL(G_m). \tag{28}$$

Просуммируем и это соотношение по всем областям G_m, т. е. по *всем* областям из $\{G'\}$. В левой части получим выражение

$$2\sum_{G'}\lambda(\sigma_{11})+\sum_{G'}\lambda(\sigma_{12})$$

(так как σ_{11} принадлежит *двум* G_m, а σ_{12} — только одной такой области), а в правой части $\sum_m s(\gamma_m)$ относится только к γ_m, т. е. к тем трансверсалям из W_0, *над которыми не лежат трансверсали* σ_{11} *или* σ_{22}, *а лежат только классифицированные трансверсали*. Однако каждая из этих трансверсалей ограничивает *самое большее* одну область G'. Следовательно,

$$\sum_m s(\gamma_m)\leqslant\sum_{\sigma_c}\lambda(\sigma_c)$$

и, согласно (27),

$$\sum_m s(\gamma_m)\leqslant k'L. \tag{29}$$

С другой стороны, $\sum_m L(G_m)\leqslant L$; поэтому суммирование (28) по всем областям G' дает неравенство

$$2\sum_{\sigma_{11}}\lambda(\sigma_{11})+\sum_{\sigma_{12}}\lambda(\sigma_{12})\leqslant(q-1)\sum_m s(\gamma_m)+(q-1)kL,$$

из которого, учитывая (29), получаем неравенство

$$2\sum_{\sigma_{11}}\lambda(\sigma_{11})+\sum_{\sigma_{12}}\lambda(\sigma_{12})\leqslant kL$$

с другим k.

Отсюда и вытекает искомая оценка для сумм $\sum_{\sigma_{11}}\lambda(\sigma_{11})$ и $\sum_{\sigma_{12}}\lambda(\sigma_{12})$:

$$\sum_{\sigma_{11}}\lambda(\sigma_{11})+\sum_{\sigma_{12}}\lambda(\sigma_{12})\leqslant kL. \tag{30}$$

Из (24), (27) и (30) получаем неравенство

$$n(\sigma_{22})\geqslant qS-kL$$

с *положительной* постоянной k, зависящей только от W_0 и от трансверсалей γ_i. Наконец, подставляя эту оценку в (21), получаем для случая $(2)_2$

$$\rho^+\geqslant(q-2)S-kL$$

с другой положительной постоянной k $(q\geqslant 3)$.

Таким образом, соотношение (II_1) доказано для случая $(2)_2$. Оно является важнейшим частным случаем соотношения (II).

18. Остается рассмотреть случаи (1) и $(2)_1$, в которых существуют только классифицированные трансверсали $\{\sigma_c\}$. Здесь соотношение (22) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{q} s(\gamma_i) = \sum_{\sigma_c} \lambda(\sigma_c) \tag{22'}$$

и неравенство (23), являющееся следствием первой теоремы Альфорса, дает

$$qS \leqslant \sum_{\sigma_c} \lambda(\sigma_c) + kL,$$

т. е., учитывая соотношение (24), *которое справедливо также и в случаях* (1) и $(2)_1$, получаем

$$qS \leqslant (k+h)L = k'L.$$

В этом случае S также оценивается сверху произведением $k'L$ с надлежащим образом выбранной постоянной k'. Поэтому

$$(q-2)S - kL \leqslant (k'-k)L.$$

Если взять постоянную $k > k'$, то тривиальным образом [1]) получаем соотношение (II_1):

$$\rho^+ \geqslant (q-2)S - kL.$$

Таким образом, вторая теорема Альфорса, выражаемая соотношением (II_1), полностью доказана [2]).

19. Односвязные накрывающие поверхности сферы. Применим теперь обе теоремы Альфорса, следуя автору, к наиболее важному случаю накрывающих поверхностей, что приведет нас к формулировке предложений, составляющих основу современной теории распределения значений мероморфных функций.

Итак, рассмотрим риманову накрывающую поверхность $(R) = (V_0)_T^V$ поверхности V_0, соответствующую внутреннему отображению T, и предположим, что V_0 является *евклидовой сферой единичного радиуса*, а V — произвольная открытая *односвязная* топологическая поверхность. Такая поверхность характеризуется тем, что она топологически эквивалентна евклидовой плоскости [3]).

---

[1]) Потому мы и отметили важность случая $(2)_2$, что в этом случае соотношение не тривиально и интересующие нас следствия касаются этого случая.

[2]) Другое доказательство дано Токи (T ô k i Y., Proof of Ahlfors principal covering theorem, *Rev. de Math. pures et apll.*, II (1957), 277—280.

[3]) В определении (R) можно заменить V евклидовой плоскостью.

Пусть $\{W_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — последовательность областей, образующих исчерпание (R). Так как (R) односвязна, то области W_i можно считать жордановыми (т. е. гомеоморфными замкнутым кругам). Каждая W_i является также полиэдрической областью, и, взяв V_0 в качестве основной поверхности (вместо рассматривавшейся до сих пор области W_0), мы можем применить доказанные теоремы к каждой области W_i в отдельности. Здесь роль W_0 играет сама V_0, которая является полиэдрической областью.

Итак, рассмотрим на сфере V_0 произвольную фиксированную жорданову область Δ и естественную евклидову сферическую метрику. Внутреннее отображение T определяет риманово накрытие V_0 областью W [1]) (и накрытие Δ частью области W), к которому применимы теоремы Альфорса.

В первой теореме рассматриваются величины S и $S(\Delta)$. Разобьем теперь S на две части, каждая из которых имеет вполне определенный геометрический смысл и соответствует величинам, рассматриваемым обычно в *теории распределения значений мероморфных функций по Р. Неванлинне*.

Точки из W, образ которых лежит в Δ, образуют в W конечное число областей, причем некоторые из них не имеют точек на границе W, а другие обладают точками, образующими части этой границы. Первые называются *островами*, а вторые — *полуостровами* (в терминологии Альфорса: Inseln и Zungen). Каждая из этих областей накрывает при помощи отображения T область $\Delta \subset V_0$. Однако остров *не имеет* в Δ *относительной границы*: образы при отображении T всех граничных точек острова принадлежат границе Δ. Наоборот, полуостров обладает в Δ относительной границей: образ части границы полуострова (именно той, которая лежит на границе W) содержится, вообще говоря, внутри Δ. Если пользоваться терминологией из гл. VII, § 4, п. 12, то можно говорить, что как острова, так и полуострова являются максимальными областями (Δ, a), где a — одна из точек области W, образ которой лежит *внутри* Δ, причем эти максимальные области рассматриваются только в W. Тогда острова — это максимальные области, *компактные* внутри Δ, в то время как полуострова *не компактны внутри* Δ.

Так как при накрытии области Δ острова не имеют относительной границы, то к ним применима формула Гурвица, которая (в силу того, что Δ — жорданова область и ее характеристика равна -1) дает следующее выражение для характеристики:

$$p = r - n,$$

[1]) При рассмотрении *каждой области* W_i *в отдельности* мы будем опускать индекс i.

где r — число точек ветвления, лежащих внутри острова, и n — число его листов. Известно, что накрытие полиэдрической области другой такой же областью, при котором нет относительной границы, всегда имеет одно и то же число листов над каждой из точек накрытой области; иными словами, *все* листы накрывают одну и ту же область (а именно всю Δ, гл. VII, § 5, п. 30). Это число n называется *кратностью острова*.

Характеристика ρ, взятая с обратным знаком, называется *простой кратностью* острова. Очевидно, что если остров односвязен ($\rho = -1$), то простая кратность равна единице. В остальных случаях она всегда не превосходит единицы.

20. Равенство (A) Альфорса. Пусть $n(\Delta)$ — *сумма* кратностей всех островов из W, накрывающих Δ. Вклад островов в $S(\Delta)$ равен $n(\Delta)$ (так как площадь каждого острова в точности равна n-кратной площади Δ). Пусть $m(\Delta)$ — та часть из $S(\Delta)$, которая соответствует полуостровам, накрывающим Δ. Тогда по определению $m(\Delta)$ имеем соотношение

$$n(\Delta) + m(\Delta) = S(\Delta)$$

и, согласно первой теореме Альфорса,

$$n(\Delta) + m(\Delta) = S + O(L), \qquad (A)$$

где S — среднее число листов W над V_0 (т. е. над сферой единичного радиуса), а $O(L)$ — величина, отношение которой к длине L относительной границы W над V_0 (т. е. в нашем случае *всей* границы W, так как V_0 не имеет границы) остается *ограниченным при всех* W для произвольного фиксированного Δ.

Равенство (A) Альфорса соответствует первой основной теореме Неванлинны (гл. I, п. 19), которую оно обобщает. Следующее неравенство таким же образом соответствует второй теореме Неванлинны [1]).

21. Неравенство (B) Альфорса. Рассмотрим теперь на основной сфере V_0 вместо Δ область $Q = V_0 - \sum_{h=1}^{q} \Delta_h$, где Δ_h ($h = 1, 2, \ldots, q$) — попарно непересекающиеся жордановы области, причем $\sum_{h=1}^{q} \Delta_h$ не покрывает всей проекции W на V_0. Пусть $p(\Delta_h)$ ($h = 1, 2, \ldots, q$) — сумма простых кратностей островов из W, накрывающих Δ_h [2]).

---

[1]) Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, гл. IX.

[2]) Может случиться, что $p(\Delta_h) = 0$, например, если никакой остров не накрывает Δ_h.

Введем обозначение

$$p=\sum_{h=1}^{q} p(\Delta_h)$$

и постараемся найти для p оценку снизу. На рис. 61 (который изображает W) мы *дважды* заштриховали *полуострова и один раз — острова*, соответствующие произвольной из Δ_h. Полуострова разбивают W на некоторое число *односвязных* областей, названных нами W' (на рисунке можно увидеть три области W'). Каждая из W' содержит внутри себя острова или, может быть (как, например, средняя область W' на рис. 61), не содержит ни одного острова. Удалим из W' содержащиеся в ней острова. Тогда остаются области (на рис. 61 незаштрихованные), которые уже, вообще говоря, не односвязны и которые мы назовем $\overline{W}$. Эти области $\overline{W}$ являются накрывающими областями для

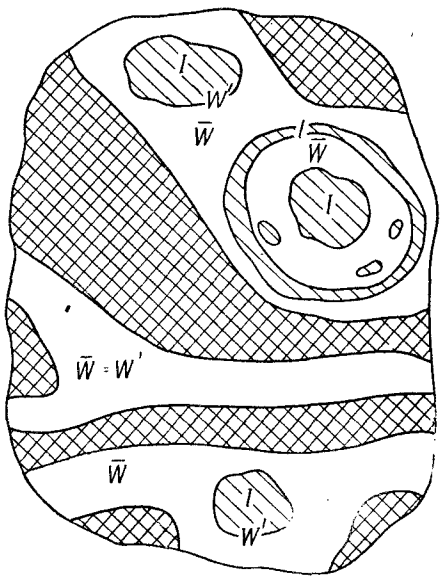

Рис. 61.

$$Q=V_0-\sum_{h=1}^{q}\Delta_h,$$

причем соответствующее накрытие может быть либо полным (т. е. без относительной границы), либо частичным (с относительной границей).

Заметим, что разложение W' на соответствующие острова и на $\overline{W}$ производится только замкнутыми кривыми — границами островов. Следовательно, теорема аддитивности характеристик дает (так как здесь нет трансверсалей)

$$\rho(W')=\sum_{W'}\rho(I)+\rho(\overline{W}),$$

где I — острова, лежащие *внутри* W'. Если просуммировать эти равенства по различным W', лежащим в W, то получаем

$$\sum_{W}\rho(W')=\sum_{W}\rho(I)+\sum_{W}\rho(\overline{W}),$$

где вторая сумма относится теперь ко *всем островам* из W.

Однако мы заметили, что все W' односвязны. Следовательно, $\rho(W')=-1$, и если через $N(W')$ обозначить *число* областей W', то вместо предыдущего соотношения получим

$$\sum_W \rho(I)+\sum_W \rho(\overline{W})+N(W')=0.$$

Если опять ввести величину

$$p=-\sum_W \rho(I),$$

то вышеприведенное соотношение принимает вид

$$p=\sum_W \rho(\overline{W})+N(W').$$

Но те из областей $\overline{W}$, которые состоят из W', не содержащих островов (как, например, средняя область W на рисунке), односвязны; пусть $N_1(\overline{W})$ — их число. Так как характеристика каждой из них равна -1, то

$$p=\sum_W \rho^+(\overline{W})+N(W')-N_1(\overline{W}),$$

где ρ^+ обозначает (как и выше) ρ, если $\rho\geqslant 0$, и нуль, если $\rho<0$.

С другой стороны, так как любая односвязная $\overline{W}$ совпадает с той W', из которой она состоит, то разность

$$\beta=N(W')-N_1(\overline{W})$$

равна числу тех W', *которые содержат по крайней мере один остров*. Таким образом, наше соотношение представимо в виде

$$p=\sum_W \rho^+(\overline{W})+\beta,$$

где сумма распространена на всю область W.

Применим теперь к каждому $\rho^+(\overline{W})$ вторую теорему (II_1) Альфорса, доказанную выше, причем здесь роль W_0 играет Q. После суммирования по всей области W получаем при $q\geqslant 2$

$$p\geqslant (q-2)S(Q)-kL;$$

действительно, длина относительной границы W над Q не превосходит L, где L — длина границы W над V_0, а $\beta\geqslant 0$.

Применяя теперь первую теорему Альфорса из п. 9 (при $\Delta=Q$), получаем неравенство

$$p\geqslant (q-2)S-kL \qquad (\mathrm{B})$$

с обычными обозначениями (т. е. S *обозначает среднее число листов* W *над* V_0, L *— длина относительной границы* W

над V_0, а k — положительная постоянная, зависящая только от областей Δ_h).

Неравенство (B) соответствует второй теореме Неванлинны, которую оно обобщает. Хотя мы доказали его при $q > 2$, оно справедливо также и в случаях $q = 1$ и $q = 2$, так как теорема (II_1) п. 13 в этих случаях тривиальна.

§ 2. РЕГУЛЯРНО ИСЧЕРПЫВАЕМЫЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

22. Пусть снова (R) обозначает открытую риманову накрывающую поверхность $(R) = (V_0)_T^V$, где V_0 — сфера единичного радиуса, V — некомпактное двумерное топологическое многообразие и T — внутреннее отображение V в V_0.

Для того чтобы извлечь из доказанных в § 1 основных теорем и из равенства (A) и неравенства (B) важные следствия, касающиеся свойств накрытия, определим, следуя Л. Альфорсу, класс регулярно исчерпываемых римановых поверхностей.

Поверхность (R) называется *регулярно исчерпываемой*, если на V существует аппроксимирующая последовательность $\{W_i\}$ полиэдрических областей, обладающих следующими свойствами:

1) $\sum_{i=1}^{\infty} W_i = V$;

2) $W_i \subset W_{i+1}$;

3) если обозначить через Γ_i границу W_i, через L_i — длину границы $T(\Gamma_i)$ той части из (R), которая соответствует W_i, т. е. $(V_0)_T^{W_i}$, и через $4\pi S_i$ — площадь этой части поверхности (R), определенную, как в п. 6 [1]), то

$$\lim_{i\to\infty} \frac{L_i}{S_i} = 0\ ^{2}). \tag{31}$$

Прежде чем развить следствия из основных теорем, справедливые для регулярно исчерпываемых поверхностей, мы приведем несколько примеров, показывающих, что этот класс поверхностей содержит важнейшие случаи римановых поверхностей, порождаемых аналитическими функциями.

23. Конформные и квазиконформные отображения. Предположим, что топологическая модель V римановой поверхности (R) односвязна, или, что с топологической точки зрения то же самое,

---

[1]) Площади и длины на (R) измеряются в евклидовой метрике основной сферы V_0.

[2]) Условие (31) введено для того, чтобы в различных неравенствах ((I) п. 9, (II) или (II_1) п. 12 и 13, (A) п. 20 и (B) п. 21) можно было пренебречь членом kL.

возьмем в качестве V евклидову плоскость переменных (x, y). Так как накрытой поверхностью V_0 является евклидова сфера единичного радиуса, то отображение T можно выразить при помощи функций

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y), \end{aligned} \tag{32}$$

где (u, v) — система координат на сфере V_0, а $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — непрерывные функции, определенные на всей плоскости (x, y) так, чтобы (32) являлось внутренним отображением. Мы будем здесь предполагать, что эти функции дважды непрерывно дифференцируемы.

Сфера V_0, накрытая плоскостью (x, y) при помощи отображения (32), определяет односвязную риманову поверхность (R). Рассмотрим на сфере V_0 обычную евклидову метрику и перенесем ее на (R) так, как было указано в общем случае.

Линейный элемент ds на V выражается при помощи дифференциальной квадратичной формы

$$ds^2 = E(x, y)\,dx^2 + 2F(x, y)\,dx\,dy + G(x, y)\,dy^2, \tag{33}$$

где E, F, G — непрерывно дифференцируемые функции, выражающиеся через $u(x, y)$, $v(x, y)$ и их частные производные и зависящие также от координат (u, v), выбранных на сфере.

Если (x_0, y_0) и (u_0, v_0) — точки на плоскости и на сфере, соответствующие друг другу при отображении (32), то из (33) вытекает, что бесконечно малому кругу с центром в (u_0, v_0) на сфере соответствует бесконечно малый эллипс с центром в (x_0, y_0) на плоскости. Действительно, дифференциальная квадратичная форма (33) должна быть определенной, т. е.

$$EG - F^2 \geqslant 0, \tag{34}$$

и положительной, т. е. $E \geqslant 0$ и $G \geqslant 0$.

Неравенство (34) не может обращаться в *равенство* ни в какой области плоскости (x, y). Действительно, если бы это было так, то извлекая из (33) корень, мы имели бы соотношение

$$ds = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy,$$

где M и N — вполне определенные непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции, и на (x, y) существовала бы кривая, проходящая через (x_0, y_0), а именно интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

вдоль которой ds равно нулю. Эта кривая отображалась бы при (32) в кривую нулевой длины, т. е. в *точку* (так как здесь все

величины являются *действительными*). Последнее противоречило бы предположению о том, что (32) определяет внутреннее отображение плоскости (x, y) в V_0.

Таким образом, $E \geqslant 0$ и $G \geqslant 0$ *на всей плоскости, и в каждой области существуют точки, в которых* $EG - F^2 > 0$.

Если ads и bds представляют собой полуоси эллипса с центром в (x, y), определяемого отображением (32) (а следовательно, a и b являются функциями от (x, y)), то эксцентриситет этого эллипса измеряется величиной

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^{1}.$$

Так как a^2 и b^2 определяются корнями уравнения

$$1 - (E + G)\alpha + (EG - F^2)\alpha^2 = 0$$

(относительно α), то можно найти

$$h = \frac{a^2 + b^2}{2ab} = \frac{E + G}{2\sqrt{EG - F^2}} \tag{35}$$

(в точках, в которых $EG - F^2 \neq 0$).

Эллипс (33), определяемый отображением (32), мы будем называть *характеристическим*.

Заметим, что не может быть

$$E + G < 2\sqrt{EG - F^2}.$$

Действительно, $E \geqslant 0$ и $G \geqslant 0$, и, возводя в квадрат это неравенство, мы придем к противоречию.

Следовательно, всегда имеем

$$h = \frac{E + G}{2\sqrt{EG - F^2}} \geqslant 1,$$

а если здесь имеется *равенство*, то непременно должно быть

$$E = G, \quad F = 0, \tag{36}$$

т. е. эллипс является *окружностью*.

Если существует такое (конечное) k, что в любой точке (x, y)

$$E + G \leqslant 2k\sqrt{EG - F^2}, \tag{37}$$

величина h ограничена. Случай, когда соотношение (37) удовлетворяется с $k = 1$, влечет за собой выполнение условий (36) на

[1]) Эксцентриситет эллипса $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ $(b \leqslant a)$ связан с h соотношением $2h = \sqrt{1 - e^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$.

всей плоскости (x, y) и соответствует *конформному отображению*. В общем случае, когда $k \neq 1$, говорят, что отображение является *квазиконформным* [1]).

24. Докажем следующую теорему:

Любая риманова поверхность (R), порождаемая квазиконформным (или в частности конформным) отображением всей евклидовой плоскости [2]) *в евклидову сферу, регулярно исчерпываема.*

Для удобства записи введем на плоскости комплексную переменную $z = x + iy$ и рассмотрим круг

$$|z| \leqslant r.$$

Область, соответствующая этому кругу на (R), является полиэдрической областью $W(r)$; после перенесения евклидовой метрики сферы V_0 на (R) она будет обладать площадью $A(r)$ и контуром длины $L(r)$ (см. п. 6). Имеем

$$A(r) = \int_0^r d\rho \int_{|z|=\rho} \sqrt{EG - F^2}\,|dz|, \tag{38}$$

где $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (для вычисления интеграла можно, например, считать, что dx и dy выражены как дифференциалы относительно угла θ, фиксирующего положение z на $|z| = \rho$).

---

[1]) Это понятие было введено Грёчем (Grötsch H., Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss.*, Math. Nat. Kl., Leipzig, 80 (1928), 503—507).

Среди многочисленных исследований, посвященных этим отображениям, называемым также псевдоаналитическими, следует упомянуть: Лаврентьев М. А., Sur une classe de representations continues, *Матем. сб.*, 42 (1935), 407—424; Волковыский Л. И., Квазиконформные отображения, Львов, 1954; Ahlfors L., On quasiconformal mappings, *Journ. d'Analyse Math.*, III (1953—1954), 1—58. (См. русский перевод в книге: Альфорс Л. и Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, М., 1961. — *Прим. перев.*) Hersch J., Contribution a la theorie des fonctions pseudoanalytiques, *Comment. Math. Helv.*, 30 (1956), No 1, p. 19, Andreian — Cazacu C., Sur les transformations pseudo-analytiques, *Rev. de math. pures et appl.*, II (1957), 383—397.

Параллельно с исследованием псевдоаналитических функций изучались также псевдогармонические функции, обобщающие (только с топологической, но не метрической точки зрения) гармонические функции. См. монографию: Морс М., Топологические методы в теории функций комплексного переменного, М., 1951, и работу Bernstein I., A topological characterisation of the pseudo-conjugate of a pseudo-harmonic function, *Rev. de math. pures et appl.*, 1. 1 (1956), 45—48.

[2]) Подчеркнем, что здесь *существенно* то, что отображение квазиконформно (или конформно) на всей евклидовой плоскости; это будет видно из приведенного ниже доказательства.

Аналогично имеем

$$L(r)=\int\limits_{|z|=r}\frac{ds}{|dz|}\,|dz|, \tag{39}$$

где, как и выше,

$$ds^2=E\,dx^2+2F\,dx\,dy+G\,dy^2.$$

Отношение $\frac{ds}{|dz|}$ не превосходит $1/b$, если $b\,ds$ — *меньшая* из полуосей характеристического эллипса в точке z, так как $|dz|\geqslant b\,ds$. Следовательно,

$$\frac{ds^2}{|dz|^2}\leqslant\frac{1}{2}\left[(E+G)+\sqrt{(E+G)^2-4(EG-F^2)}\right].$$

Из условия квазиконформности (7) вытекает неравенство

$$\frac{ds^2}{|dz|^2}\leqslant\left(k+\sqrt{k^2-1}\right)\sqrt{EG-F^2}\leqslant 2k\sqrt{EG-F^2}. \tag{40}$$

С другой стороны, из неравенства Шварца (гл. IV, п. 7) и соотношения (39) получаем, что

$$[L(r)]^2\leqslant 2\pi r\int\limits_{|z|=r}\frac{ds^2}{|dz|^2}\,|dz|,$$

а следовательно, пользуясь (40),

$$[L(r)]^2\leqslant 4\pi kr\int\limits_{|z|=r}\sqrt{EG-F^2}\,|dz|. \tag{41}$$

Однако из (38) имеем

$$A(r)=\int\limits_0^r d\rho\int\limits_{|z|=\rho}\sqrt{EG-F^2}\,|dz|,$$

и следовательно производная функции $A(r)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{dA(r)}{dr}=\int\limits_{|z|=r}\sqrt{EG-F^2}\,|dz|,$$

что после подстановки в (41) дает, наконец,

$$[L(r)]^2\leqslant 4\pi kr\,\frac{dA(r)}{dr},$$

или

$$\frac{dr}{r}\leqslant 4\pi k\,\frac{dA(r)}{[L(r)]^2}. \tag{42}$$

Это соотношение приведет нас к оценке при $r \to \infty$ отношения $\frac{L(r)}{A(r)}$, при помощи которой будет доказано существование регулярного исчерпания поверхности (R).

Пусть H_r — промежутки на *оси значений* r (если такие существуют), в которых

$$L(r) \geqslant [A(r)]^{1/2+\varepsilon} \tag{43}$$

при произвольном фиксированном положительном ε.

Интегрируя по H_r, из (42) получаем

$$\int_{H_r} d\log r \leqslant 4\pi k \int_{H_r} \frac{dA(r)}{[L(r)]^2} \leqslant 4\pi k \int_{H_r} \frac{dA(r)}{[A(r)]^{1+2\varepsilon}} \leqslant 4\pi k \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+2\varepsilon}}.$$

Следовательно, вариация $\log r$ на совокупности промежутков H_r является *конечным* числом, не превосходящим $\int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+2\varepsilon}}$ (последний интеграл *конечен*).

Таким образом, *на оси значений* r, *за возможным исключением промежутков* H_r, *на которых вариация* $\log r$ *конечна*, непременно имеем

$$L(r) < [A(r)]^{1/2+\varepsilon}, \tag{44}$$

т. е. соотношение (43) не удовлетворяется.

Так как вариация $\log r$ на всей полуоси положительных r бесконечна [1]), то очевидно, что *для бесконечного числа значений* r, стремящихся к бесконечности, имеем

$$\lim \frac{L(r)}{A(r)} = 0,$$

а это означает, что для римановой поверхности, порождаемой отображением (32), удовлетворяющим условию квазиконформности (37) на всей плоскости, существует регулярное исчерпание. Действительно, в качестве областей исчерпания W_l можно взять последовательность кругов $|z| \leqslant r$, радиусы которых стремятся к бесконечности и не принадлежат промежуткам H_r [2]).

Таким образом мы получили весьма общий класс регулярно исчерпываемых поверхностей.

---

[1]) Здесь существенно используется то, что отображение квазиконформно на всей плоскости (см. сноску [2]) на стр. 376).

[2]) Если $A(r)$ не стремится к бесконечности при $r \to \infty$, то следует пользоваться методом, описанным в работе: Tsuji M., Theory of meromorphic functions on an open Riemann surface with null baundary, *Nagoua Math. Journ.*, 6 (Oct. 1953), 137—150.

25. То, что отображение было определено (и квазиконформно) на *всей* плоскости, весьма существенно. Действительно, это позволило заключить, что существует последовательность значений r, стремящихся к бесконечности, для которых удовлетворяется соотношение (44), а отсюда и вытекает возможность регулярного исчерпания. Однако до этого места доказательства мы не пользовались тем, что отображение квазиконформно на всей плоскости. Посмотрим, в какой степени можно освободиться от этого предположения и, следовательно, расширить введенный класс регулярно исчерпываемых поверхностей (R).

Предположим, что отображение (42), определяющее (R), задано и квазиконформно *только в круге*

$$|z| < R \quad (R > 0 \text{ — конечное число}). \tag{45}$$

С топологической точки зрения новая поверхность эквивалентна рассмотренной выше, так как внутренность круга и евклидова плоскость топологически эквивалентны. Однако, хотя существует топологическое, *но не существует квазиконформного взаимно однозначного отображения круга на всю евклидову плоскость* [1]). Следовательно, если допустить, что риманова поверхность (R) определяется квазиконформным внутренним отображением *конечного круга* (45) в сферу, то ту же риманову поверхность (R) нельзя определить *также при помощи квазиконформного отображения всей плоскости*. Рассматриваемые теперь поверхности отличны от тех, которые мы рассматривали в п. 24. Впрочем, мы увидим, что только некоторые из них являются регулярно исчерпываемыми.

Соотношение (42) может быть выписано и здесь при $r < R$. Если поверхность (R) нерегулярно исчерпываема, то мы должны иметь

$$A(r) \leqslant qL(r) \quad (q \text{ — положительная постоянная})$$

во всем промежутке [2]) $H: r_0 < r < R \quad (r_0 > 0 \text{ и } r < R)$.

Тогда (42) дает

$$\frac{dr}{r} \leqslant 4\pi k \frac{dA(r)}{[A(r)]^2} \quad \text{(с другим } k\text{)}.$$

---

[1]) См., например, Волковыский Л. И., Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности, гл. I, § 3, стр. 36, теорема 5.

[2]) Действительно, в противном случае существуют такие стремящиеся к R значения $r_1, r_2, \ldots$, что $\lim\limits_{i \to \infty} \frac{L(r_i)}{A(r_i)} = 0$.

И, таким образом, интегрируя от r до R, получаем

$$\log\frac{R}{r}\leqslant 4\pi k\int_r^R\frac{dA(r)}{[A(r)]^2}\leqslant\frac{4\pi k}{A(r)} \tag{46}$$

$$\left(\text{интеграл понимается здесь как } \lim_{\rho\to R}\int_r^{\rho}\frac{dA(r)}{[A(r)]^2}\right).$$

Из (46) вытекает, что при $r\to R$ имеем

$$A(r)\leqslant\frac{4\pi k}{\log\dfrac{R}{r}}<\frac{4\pi kR}{R-r}$$

$$\left(\text{так как } \log\frac{R}{r}>1-\frac{r}{R} \text{ при } r\to R\right).$$

Так как радиус R конечен, то имеем

$$A(r)=O\left(\frac{1}{R-r}\right),$$

где $O[\varphi(r)]$ обозначает функцию, отношение которой к $\varphi(r)$ остается *ограниченным* (по абсолютной величине) при $r\to R$.

Следовательно, *если* $A(r)$ *возрастает при* $r\to R$ быстрее, чем $1/(R-r)$[1]), *то риманова поверхность, порождаемая квазиконформным в круге* (45) *отображением* (32), *также является регулярно исчерпываемой.*

26. Применим теперь результаты § 1 к случаю регулярно исчерпываемой римановой поверхности (R). Обозначим, как в п. 21, через W_i последовательность полиэдрических областей, образующих регулярное исчерпание поверхности (R), и через S_i — среднее число листов W_i над V_0.

1°. Пусть Δ — фиксированная жорданова область на V_0 и $S_i(\Delta)$ — среднее число листов W_i над Δ. Из первой теоремы Альфорса п. 9, примененной к областям W_i, и из условия регулярности исчерпания (31) вытекает соотношение

$$\lim_{i\to\infty}\frac{S_i(\Delta)}{S_i}=1. \tag{47}$$

Таким образом, *при регулярном исчерпании римановой поверхности* (R) *отношение между средним числом листов области* W_i (*из последовательности исчерпания*) *над сферой* V_0 *и средним числом листов* W_i *над фиксированной областью* $\Delta\subset V_0$ *стремится к единице при стремлении* i *к бесконечности.*

[1]) Это значит, что $\overline{\lim\limits_{r\to R}}\,[A(r)(R-r)]=\infty$.

Это показывает, что регулярно исчерпываемые поверхности обладают некоторой *правильностью распределения листов*, так как фиксированная область $\Delta \subset V_0$ выбрана произвольным образом [1]).

2°. Что касается второй теоремы Альфорса, то из вида правой части неравенства (II) или (II_1) можно заметить, что наиболее интересным является тот случай, когда при исчерпании римановой поверхности (R) число S становится бесконечно большим относительно L. Из (18) вытекает, что только случай $(2)_2$ может привести к регулярному исчерпанию.

3°. Равенство (A) в случае регулярно исчерпываемой поверхности (R), когда можно не учитывать слагаемого $O(L)$, выражает тот факт, что сумма вкладов в $S(\Delta)$ от островов и полуостровов является „асимптотически" одинаковой для всех областей Δ. Вот точная формулировка этого свойства:

При регулярном исчерпании поверхности (R) *областями* W_i *имеем*

$$\lim_{i \to \infty} \frac{n_i(\Delta) + m_i(\Delta)}{S_i} = 1, \tag{48}$$

где область Δ *фиксирована и* $m_i(\Delta)$, $n_i(\Delta)$ *и* S_i *обозначают величины из* п. 20, *соответствующие* W_i.

4°. Однако, как мы убедимся в следующих пунктах, наиболее важные следствия вытекают из соотношений (A) и (B), рассматриваемых в совокупности.

27. Если сохранить использованные в п. 19—21 обозначения, то неравенство (B) записывается в виде

$$p = \sum_{h=1}^{q} p(\Delta_h) \geqslant (q-2)S - kL.$$

Из соотношения Гурвица (гл. VII, § 5, п. 32 или гл. X, § 1, п. 19) следует, что для каждого острова, накрывающего Δ_h, а следовательно, и для суммы этих островов

$$p(\Delta_h) = n(\Delta_h) - r(\Delta_h), \tag{49}$$

где $n(\Delta_h)$ обозначает сумму числа листов островов, а $r(\Delta_h)$ — сумму их точек ветвления, каждая из которых учитывается с соответствующим порядком.

Следовательно, подставляя это в (B), получаем неравенство

$$\sum_{h=1}^{q} n(\Delta_h) - \sum_{h=1}^{q} r(\Delta_h) \geqslant (q-2)S - kL,$$

[1]) В неравенстве (I) k зависит от Δ, но соотношение (47) имеет место для каждой области Δ в отдельности (вообще говоря, неравномерно относительно Δ).

или, перенося qS из правой части в первую сумму,

$$2S + kL \geqslant \sum_{h=1}^{q} [S - n(\Delta_h)] + \sum_{h=1}^{q} r(\Delta_h).$$

Заменив $S - n(\Delta_h)$, согласно равенству (A), на $m(\Delta_h) - O(L)$ и перенося $O(L)$ в левую часть, где мы объединяем это выражение с kL, получим соотношение

$$2S + kL \geqslant \sum_{h=1}^{q} m(\Delta_h) + \sum_{h=1}^{q} r(\Delta_h) \qquad (B')$$

(с другим k). Из этого соотношения, получающегося, как мы видели, на основе совокупности (A) и (B), мы выведем *для случая существования регулярного исчерпания* важные следствия.

Дефектом области Δ называется величина

$$\delta(\Delta) = \varliminf_{i \to \infty} \frac{m_i(\Delta)}{S_i} \qquad (50)$$

относительно *всех регулярных исчерпаний* V полиэдрическими областями W_i.

Мы видели [соотношение (48)], что для регулярного исчерпания

$$\lim_{i \to \infty} \frac{n_i(\Delta) + m_i(\Delta)}{S_i} = 1$$

$\left(\text{так как } \lim_{i \to \infty} \frac{L_i}{S_i} = 0\right)$, поэтому дефект *заключен в промежутке*

$$0 \leqslant \delta(\Delta) \leqslant 1.$$

Показателем ветвления области Δ называется величина

$$\theta(\Delta) = \varliminf_{i \to \infty} \frac{r_i(\Delta)}{S_i} \qquad (51)$$

по-прежнему относительно *всех* регулярных исчерпаний V при помощи областей W_i. Ясно, что $\theta(\Delta) \geqslant 0$.

Следующие теоремы относятся к *регулярно исчерпываемым поверхностям*.

28. Теорема о дефекте (обобщение теоремы Неванлинны). *Если на сфере V_0 задано некоторое число q попарно непересекающихся жордановых областей Δ_h, то сумма дефектов и показателей ветвления этих областей не превосходит 2.*

Действительно, если учесть регулярность исчерпания, то из (B') и из определений $\delta(\Delta)$ и $\theta(\Delta)$ немедленно следует, что

$$\sum_{h=1}^{q} \delta(\Delta_h) + \sum_{h=1}^{q} \theta(\Delta_h) \leqslant 2. \qquad (52)$$

29. Теорема о дисках. *Предположим, что над* Δ_h *лежат только острова, которые либо являются многосвязными, либо если они односвязны, то их кратность по крайней мере равна* μ_h. *При этих условиях между коэффициентами* μ_h, *соответствующими областям* Δ_h, *имеет место соотношение*

$$\sum_{h=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_h}\right)\leqslant 2. \tag{53}$$

Действительно, учитывая значение μ_h для каждой области W_i из рассматриваемого исчерпания, получаем [1])

$$S(\Delta_h)\geqslant n(\Delta_h)\geqslant \mu_h p(\Delta_h), \tag{54}$$

так как $n(\Delta_h)$ и $p(\Delta_h)$ относятся только к островам, а для многосвязных островов $p(\Delta_h)\leqslant 0$.

С другой стороны, так как, согласно первой теореме Альфорса,

$$|S-S(\Delta_h)|\leqslant kL,$$

то из неравенства

$$S(\Delta_h)\leqslant S+kL$$

и из (54) следует, что

$$p(\Delta_h)\leqslant \frac{S}{\mu_h}+\frac{k}{\mu_h}L. \tag{55}$$

Подставим теперь (55) в (B), тогда

$$S\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\mu_h}\geqslant (q-2)S-kL$$

(с другим k), или

$$2S+kL\geqslant S\sum_{h=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_h}\right).$$

Это соотношение имеет место для каждой полиэдрической области W_i из исчерпания поверхности V. Учитывая регулярность исчерпания и переходя от областей W_i к поверхности V, получим

$$2\geqslant \sum_{h=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_h}\right),$$

т. е. нужное соотношение.

[1]) Для упрощения записи мы опускаем индекс i в выражениях S_i, $S_i(\Delta_h)$ и т. д.

30. Вспоминая, что мероморфные на всей плоскости функции порождают регулярно исчерпываемые римановы поверхности (п. 24), мы можем вывести из полученных теорем некоторые давно известные теоремы о мероморфных функциях. Например, из теоремы о дефекте легко выводится теорема Пикара[1]) об исключительных значениях мероморфной на всей плоскости функции.

Действительно, предположим, что *три* точки сферы V_0 не накрыты поверхностью, порождаемой рассматриваемой мероморфной функцией. Тогда ясно, что $n_l(\Delta) = 0$ для любой полиэдрической области W_l, принадлежащей некоторому исчерпанию V; следовательно, дефект равен единице для любой области Δ, содержащей внутри себя по крайней мере *одну* из этих трех точек. Однако, Δ_h можно выбрать таким образом, чтобы каждая из этих областей содержала одну из рассматриваемых точек. С другой стороны, согласно теореме о дефекте, имеем

$$\sum_{h=1}^{3} \delta(\Delta_h) \leqslant 2.$$

Таким образом, невозможно, чтобы *три* различные области имели дефект, равный единице, что и приводит к теореме Пикара.

31. Переходя к *теореме о дисках*, заметим, что она остается в силе для случая, когда некоторые из областей Δ_h не накрыты *никаким островом*, если таким областям Δ_h сопоставить коэффициент $\mu_h = \infty$. Действительно, соотношение (55) *остается в силе* для такой Δ_h, так как, согласно определению p, она не дает никакого вклада в эту величину. Так как вклад такой области Δ_h в (B) равен нулю, то в (55) можно положить $\mu_h = \infty$ и заключение остается в силе.

Предположим, что на сфере V_0 найдутся n значений функции $f(z)$, для которых все точки z, удовлетворяющие уравнению

$$f(z) = b,$$

являются точками ветвления, т. е. нулями производной или кратными полюсами функции $f(z)$ (если $b = \infty$).

Такое значение b называется *вполне разветвленным* значением функции $f(z)$.

Из *теоремы о дисках* непосредственно следует, что

1°. *В случае мероморфной функции, принимающей все значения* (включая ∞), *может существовать не более четырех вполне разветвленных значений.*

---

[1]) Том I, гл. XI, § 2, п. 22, стр 345—346.

2°. *В случае, когда $f(z)$ выпускает некоторое значение (т. е. никогда не принимает его), могут существовать самое большее два вполне разветвленных значения.*

Действительно, в первом (общем) случае возьмем *пять* точек b на сфере V_0 и окружим каждую из них достаточно малой областью Δ_h таким образом, чтобы никакие две из этих областей не имели общих точек. Так как для каждой из этих областей коэффициент μ_h должен быть не меньше двух, то очевидно, что сумма в (53) будет больше двух.

Если существует выпускаемое значение, то один из коэффициентов μ_h уже равен ∞. Если бы существовали еще три области с коэффициентами $\mu_h \geqslant 2$, то мы снова получили бы противоречие с (53).

3°. *В случае двух выпускаемых значений существование вполне разветвленных значений невозможно.*

32. Рассмотрим функцию $f(z)$ с *одним выпускаемым значением* (например, целую функцию). Тогда если на сфере V_0 взять три попарно непересекающиеся жордановы области Δ_1, Δ_2, Δ_3, *ни одна из которых не содержит выпускаемой точки*, то можно утверждать, что *по крайней мере одна из этих областей накрыта также и островом, состоящим из одного листа.*

Эта теорема была найдена Валироном и Блохом в следующем виде [1]): *Риманова поверхность аналитической функции, обратной к целой функции, содержит однолистные круги произвольно большого радиуса.* В этой формулировке сфера V_0 заменена комплексной плоскостью (w) значений $f(z)$ и области Δ_h берутся в виде кругов, радиусы которых могут быть сколь угодно большими, так как здесь выпускается значение ∞.

33. Можно также заметить, что все эти следствия остаются в силе, если мы будем рассматривать функции, мероморфные не на всей плоскости, а только в круге $|z| < R$ плоскости переменной z, при условии, *что удовлетворяется условие регулярного исчерпания*, т. е. условие

$$A(r) \neq O\left(\frac{1}{R-r}\right), \quad \text{или} \quad \overline{\lim_{r \to R}} A(r)(R-r) = \infty,$$

где через $A(r)$ обозначена измеренная на сфере V_0 площадь части римановой поверхности, соответствующей при отображении $f(z)$ кругу $|z| \leqslant r$ (п. 25).

[1]) Valiron G., Sur les théorèmes de M. Bloch, Landau, Montel et Schottky, *C. R. Acad. Paris*, **183** (1926), 728—730 и Bloch A., Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **17** (3) (1925), 1—22.

Эти следствия остаются в силе также для римановых поверхностей, *порождаемых квазиконформными отображениями плоскости или круга*, удовлетворяющими приведенному выше условию.

Отсюда видно, как широко можно обобщить классические свойства функций, мероморфных на всей плоскости, давно установленные для таких функций (например, классическую теорему Пикара).

34. Приложения предыдущих теорем к функциям, мероморфным на плоскости или в круге. Теория, которую мы развили, следуя Альфорсу, ведет свое начало от теории распределения значений аналитических функций. В п. 30—33 мы ознакомились с некоторыми почти непосредственными приложениями теоремы о дефекте и теоремы о дисках, которые в свою очередь являются следствиями общих теорем Альфорса. Теперь мы подробнее рассмотрим теорию распределения значений мероморфных функций, стараясь раскрыть факты, вытекающие из теории Альфорса, в случае, когда фигурирующие в предыдущих теоремах области Δ_h заменяются точками, а также проследить связь между этими фактами и ранее известными результатами общей теории Неванлинны [1]).

В теории мероморфных функций обычно исчерпание плоскости комплексного переменного (или круга $|z| < R$, в котором определена функция) производится при помощи концентрических кругов $|z| \leqslant r$, причем радиус r возрастает до бесконечности (или до R в случае круга) [2]). Основные соотношения (A) и (B) остаются в силе, и так как в настоящем случае W зависит только от r, то их можно выписать в следующем виде:

$$n(r, \Delta) + m(r, \Delta) = S(r) + O[L(r)], \tag{A}$$

$$p(r) = \sum_{h=1}^{q} p(r, \Delta_h) \geqslant (q-2)\,S(r) - RL(r). \tag{B}$$

Действительно, величины L, S, $p(\Delta_h)$, $n(\Delta)$, $m(\Delta)$ относятся к фиксированному W, которое зависит здесь от r.

Пусть W_r — часть римановой поверхности, лежащая над кругом $|z| \leqslant r$. Мы покажем теперь, что если взять в качестве метрики на сфере V_0, на которой функция принимает свои значения, евклидову метрику и *перенести ее на W_r при помощи внутреннего отображения, определяющего риманову поверхность*

---

[1]) Nevanlinna R., Le théorème de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes.

[2]) Относительно исчерпания плоскости при помощи произвольных жордановых областей см. Andreian Cabiria, Asupra teoriei lui R. Nevanlinna, *Bul. ştiinţ. Acad. R. P. R., sect. mat-fiz.*, VI, 2 (1954), 271—296.

(в нашем случае таким отображением является как раз заданная функция $f(z)$), *то мы получим для площади* W *выражение*

$$A(r)=\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{|f'(z)|^2}{[1+|f(z)|^2]^2}\,r\,dr\,d\varphi,$$

где φ — угол между радиусом-вектором точки z и положительной полуосью плоскости (z). *Для длины* $L(r)$ *контура области* W_r *получаем*

$$L(r)=\int_0^{2\pi}\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\,r\,d\varphi,$$

(в качестве V_0 мы берем сферу радиуса 1/2).

В самом деле, пусть (Z) — плоскость значений $f(z)=Z$. Будем считать, что она касается в начале координат сферы V_0, и осуществим, как показано на рис. 62, стереографическую проекцию [1]), устанавливающую взаимно однозначное соответствие между плоскостью (Z) и сферой V_0. Точке Z на плоскости соответствует на сфере точка M. Линейному элементу $|dZ|$ на плоскости соответствует линейный элемент $d\sigma$ на сфере. Вычислим сначала отношение между длинами этих линейных элементов. Для этого заметим, что, так как стереографическая проекция является инверсией (с центром в N), то углы сохраняются и поэтому искомое отношение не зависит от направления элемента $|dZ|$; следовательно, мы можем его вычислить для бесконечно малого перемещения Z вдоль радиуса-вектора OZ. Однако легко убедиться, что длина дуги OM на V_0 равна $\operatorname{arc\,tg}|Z|$.

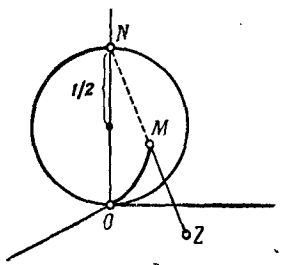

Рис. 62.

Если Z смещается *вдоль радиуса-вектора*, то $|dZ|=d|Z|$ и искомое отношение равно производной вышеприведенного выражения по $|Z|$, т. е.

$$\frac{d\sigma}{|dZ|}=\frac{d\sigma}{d|Z|}=\frac{1}{1+|Z|^2}.$$

Следовательно, приращение $d\sigma$ дуги OM на сфере равно

$$\frac{|dZ|}{1+|Z|^2}.$$

Выразим теперь линейный элемент $|dZ|$ при помощи переменной $z=re^{i\varphi}$. Имеем

$$|dZ|=|f'(z)|\,ds,$$

[1]) Том I, гл. I, § 3, п. 23, стр. 38—40.

где ds — евклидов линейный элемент на (z), т. е. $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$. Таким образом, вдоль $|z| = r = \text{const}$, мы имеем $ds = r\,d\varphi$ и, следовательно,

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \frac{|f'(z)|\,r\,d\varphi}{1+|f(z)|^2} = r\int_0^{2\pi} \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\,d\varphi.$$

Элементы площади на плоскости, ограниченные радиусами-векторами и концентрическими кругами, равны $r\,d\varphi\,dr$, и, следовательно,

$$A(r) = \iint_{|z|\leqslant r} \frac{|f'(z)|^2}{[1+|f(z)|^2]^2} r\,d\varphi\,dr = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{|f'(z)|^2}{[1+|f(z)|^2]^2} r\,d\varphi\,dr.$$

Таким образом, имеем (учитывая, что площадь сферы V_0 равна π)

$$S(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{|f'(z)|^2}{[1+|f(z)|^2]^2} r\,d\varphi\,dr.$$

Пользуясь этими выражениями для $L(r)$ и $S(r)$, можно написать

$$n(r, \Delta) + m(r, \Delta) = S(r) + O(L) \quad (|O(L)| < kL(r)), \qquad \text{(A)}$$

$$p(r) = \sum_{h=1}^{q} p(r, \Delta_h) \geqslant (q-2)\,S(r) - kL(r), \qquad \text{(B)}$$

где величины k зависят *только* от Δ и от Δ_h.

Относительно (A) следует заметить, что если стягивать единственную входящую в это соотношение область Δ к точке, то k может возрастать до бесконечности (п. 9), и *поэтому* (A) *нельзя выписать для точки* вместо области.

Напротив, в (B) области Δ_h можно заменить *точками на сфере, на которой принимает значения* $f(z)$.

Утверждая это, мы имеем в виду, что $p(r, \Delta)$ заменяется числом $\bar{n}(r, a)$ точек круга $|z| \leqslant r$, в которых $f(z) = a$, причем каждая из этих точек *считается один раз независимо от того, является ли она простым или кратным корнем уравнения.* Действительно, это понятие соответствует в случае точки a величине $p(r, \Delta)$ для области Δ, т. е. простой кратности островов, соответствующих Δ.

Таким образом в (B) может быть произведена замена выражения

$$p(r) = \sum_{h=1}^{q} p(r, \Delta_h)$$

выражением

$$\bar{n}(r) = \sum_{h=1}^{q} \bar{n}(r, a_h).$$

Для доказательства поместим каждую точку a_h в область Δ_h таким образом, чтобы каждая Δ_h содержала единственную a_h. Если взять Δ_h *достаточно малыми* (предполагая, что r фиксировано), то область $|z| \leqslant r$ будет содержать над Δ_h только острова, и все они односвязны. Стянем еще больше Δ_h к a_h так, чтобы каждый из соответствующих островов содержал *единственный* (простой или кратный) корень уравнения $f(z) = a_h$. Тогда из определений p и $\bar{n}$ немедленно получим, равенство

$$p(r, \Delta_h) = \bar{n}(r, a_h).$$

Таким образом, вышеприведенное утверждение доказано, и из (B) следует, что

$$\sum_{h=1}^{q} \bar{n}(r, a_h) \geqslant (q-2)\,S(r) - O[L(r)], \qquad (B_1)$$

где $S(r)$ и $L(r)$ можно заменить выражениями, полученными выше в виде двойного и простого интегралов, а $O[L(r)]$ является (как обычно) функцией r, отношение которой к $L(r)$ остается *ограниченным* по абсолютной величине (когда r изменяется произвольно).

Из соотношения (44) следует, что в случае *квазиконформного* отображения евклидовой плоскости (z) в V_0 (в частности, в случае такого *конформного* отображения) можно некоторым образом оценить $L(r)$, т. е. *если* $f(z)$ *мероморфна на всей плоскости* (z), то неравенство

$$L(r) < [A(r)]^{1/2+\varepsilon} = \pi^{1/2+\varepsilon}[S(r)]^{1/2+\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

справедливо на всей положительной полуоси r, *кроме некоторых промежутков, полная логарифмическая длина которых конечна.*

35. Теоремы Неванлинны для функций, мероморфных на всей плоскости. Теория Неванлинны применима к функциям более общим, чем те, которые мероморфны на всей плоскости; в частности, она охватывает даже функции, порождающие нерегулярно исчерпываемые римановы поверхности. Зато все получаемые в этой теории результаты касаются *точечных значений* функции, и поэтому ни одна из рассматриваемых двух теорий (Альфорса и Неванлинны) не содержит полностью другой.

Так как наше изложение посвящено главным образом теории Альфорса, то в отношении теории Неванлинны мы ограничимся случаем функций, *мероморфных на всей плоскости*; в этом случае мы покажем, что соотношения, установленные Неванлинной непосредственно и при помощи других методов, являются „интегральной формой“ соотношений теории Альфорса.

Если $n(r, a)$ обозначает полное число лежащих в $|z| < r$ корней уравнения $f(z) = a$, где a принадлежит сфере значений функции $f(z)$, а $n_1(r, a)$ — число тех точек ветвления, в которых $f(z) = a$ и которые содержатся в $|z| < r$ (каждая из них считается со своей кратностью), то имеем

$$n(r, a) - n_1(r, a) = \overline{n}(r, a),$$

где $\overline{n}(r, a)$ имеет тот же смысл, что и в п. 34 (соотношение (B_1)). Следовательно, соотношение (B_1) записывается в виде

$$\sum_{h=1}^{q} [n(r, a_h) - n_1(r, a_h)] \geqslant (q-2) S(r) - O[L(r)],$$

где, как мы видели в п. 34,

$$S(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{|f'(z)|^2}{[1+|f(z)|^2]^2} r \, d\varphi \, dr$$

и

$$L(r) = r \int_0^{2\pi} \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} d\varphi. \tag{56}$$

Из соотношения (B_1) Альфорса мы получим путем интегрирования основную теорему Неванлинны. Хотя (B_1) справедливо для *любой функции* $f(z)$, *мероморфной* в $|z| < R$, и для любого $r < R$ (подобно тому, как соотношения (A) и (B) Альфорса справедливы для любой римановой поверхности), метод, которому мы будем следовать и который указан А. Дингасом [1]), дает возможность перейти от (B_1) к основной теореме Неванлинны только в случае функций, мероморфных на *всей* плоскости.

36. Прежде чем излагать этот метод, установим связь между введенными выше величинами $n(r, a)$, $n_1(r, a)$ и $S(r)$ и величинами Неванлинны $N(r, a)$, $N_1(r, a)$ и $T(r)$ (гл. I, § 5, п. 19). Пусть α_i — те точки из круга радиуса r с центром в начале координат, в которых рассматриваемая мероморфная функция $Z = f(z)$ принимает (конечное или бесконечное) значение a. Согласно определениям, приведенным в гл. I, § 5, п. 19, имеем

$$N(r, a) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \sum_i \log \frac{r}{|\alpha_i|} + n(0, a) \log r.$$

Если пользоваться числами $n(\rho, a)$ при $\rho \leqslant r$, то сумму $\sum \log \frac{r}{|\alpha_i|}$ можно представить в виде интеграла Стильтьеса, и интегрированием

[1]) Dinghas A., Eine Bemerkung zur Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen, *Math. Zeitschr.*, 44 (1939), 568—572.

по частям мы получаем

$$\sum \log \frac{r}{|a_l|} = \int_0^r \log \frac{\rho}{r}\, d\,[n(\rho, a) - n(0, a)] = \int_0^r \frac{n(\rho, a) - n(0, a)}{\rho}\, d\rho.$$

Следовательно [1],

$$N(r, a) = \int_0^r \frac{n(r, a) - n(0, a)}{r}\, dr + n(0, a) \log r, \tag{57}$$

и если $n(0, a) = 0$, то

$$N(r, a) = \int_0^r \frac{n(r, a)}{r}\, dr.$$

Мы будем пользоваться обозначением

$$N_1(r, a) = \int_0^r \frac{n_1(r, a) - n_1(0, a)}{r}\, dr + n_1(0, a) \log r, \tag{58}$$

а также связью между характеристической функцией Неванлинны $T(r)$ (гл. I, (50)) и средним числом листов $S(r)$, вытекающей из следующей геометрической интерпретации характеристической функции, данной Т. Шимицу и Л. Альфорсом [2].

$T(r)$ отличается от $\int_0^r \frac{S(r)}{r}\, dr$ только на функцию, ограниченную при $r \to \infty$ [3].

Так как в устанавливаемых ниже результатах для перехода от областей исчерпания W_r ко всей поверхности V мы устремим r к бесконечности, то в качестве характеристической функции мы возьмем $\int_0^r \frac{S(r)}{r}\, dr$ и во всем этом параграфе мы будем ее обозначать через

$$T(r) = \int_0^r \frac{S(r)}{r}\, dr. \tag{59}$$

---

[1]) Для простоты мы обозначили переменную интегрирования также через r.

[2]) Shimizu T., On the Theory of meromorphic Functions, *Jap. Journ. Math.*, 6 (1929), 119—171 и Ahlfors L., Beiträge zur Theorie der meromorphen Funktionen, 7 Congr. Math. Scand., Oslo, 1929, 84—88.

[3]) Интеграл $\int_0^r \frac{S(r)}{r}\, dr$ всегда имеет смысл, так как предел $\lim_{r \to 0} \frac{S(r)}{r^2}$ конечен.

37. Если ко второму соотношению (56) применить неравенство Шварца (гл. IV, п. 7), то получим

$$[L(r)]^2 \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{|f'(z)|^2\, d\varphi}{[1+|f(z)|^2]^2} \int_0^{2\pi} r^2\, d\varphi = 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} \frac{|f'(z)|^2}{[1+|f(z)|^2]^2}\, d\varphi. \qquad (60)$$

Дифференцируя выражение (56) для $S(r)$, получаем

$$\frac{dS(r)}{dr} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f'(z)|^2}{[1+|f(z)|^2]^2}\, r\, d\varphi = \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f'(z)|^2}{[1+|f(z)|^2]^2}\, d\varphi.$$

Подставляя это соотношение в неравенство (60), мы приходим к неравенству

$$[L(r)]^2 \leqslant 2\pi^2 r \frac{dS(r)}{dr} = 2\pi^2 r S'(r). \qquad (61)$$

Введем еще выражение

$$\lambda(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{L(r)}{r}\, dr$$

при фиксированном $r_0 > 0$. Из неравенства (61) вытекает, что

$$\frac{[L(r)]^2}{r^2} \leqslant 2\pi^2 \frac{S'(r)}{r},$$

а следовательно,

$$\frac{L(r)}{r} \leqslant \pi \sqrt{2} \sqrt{\frac{S'(r)}{r}}.$$

Интегрируя это неравенство от r_0 до r, получаем

$$\lambda(r) \leqslant \pi \sqrt{2} \int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{S'(r)}{r}}\, dr$$

и, применяя еще раз неравенство Шварца, находим

$$[\lambda(r)]^2 \leqslant 2\pi^2 \int_{r_0}^{r} S'(r)\, dr \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r}.$$

Однако из определения $T(r)$ путем двух последовательных дифференцирований получаем, что

$$S'(r) = \frac{d}{dr}[rT'(r)] = [rT'(r)]',$$

а следовательно,

$$[\lambda(r)]^2 \leqslant 2\pi^2 \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \int_{r_0}^{r} [rT'(r)]'\, dr,$$

откуда

$$[\lambda(r)]^2 \leqslant 2\pi^2 [rT'(r)\log r - rT'(r)\log r_0 - r_0 T'(r_0)\log r + r_0 T'(r_0)\log r_0].$$

При достаточно большом r все члены, заключенные в скобки, по абсолютной величине меньше первого члена, т. е. меньше $rT'(r)\log r$, так как $rT'(r) = S(r)$ возрастает одновременно с r.

Следовательно, вышеприведенное неравенство заменяется неравенством

$$[\lambda(r)]^2 \leqslant krT'(r)\log r \tag{62}$$

с *фиксированным* надлежащим образом выбранным k.

Пусть теперь H_r — те промежутки на положительной полуоси значений r, в которых неравенство

$$\lambda(r) \geqslant \sqrt{T(r)}\log T(r) \tag{63}$$

удовлетворяется, начиная с *достаточно большого* $r = r_1$, такого, что $\log r_1$ и $\log T(r_1)$ больше нуля. Объединяя соотношения (62) и (63), получаем на H_r

$$T(r)\log^2 T(r) \leqslant krT'(r)\log r$$

и, следовательно (так как $\log r$ и $\log T(r)$ больше нуля),

$$\frac{1}{r\log r} \leqslant \frac{kT'(r)}{T(r)\log^2 T(r)},$$

откуда интегрированием *по всем промежуткам* H_r находим, что

$$\int_{H_r} \frac{dr}{r\log r} \leqslant k \int_{H_r} \frac{T'(r)\, dr}{T(r)\log^2 T(r)}. \tag{64}$$

Последний интеграл меньше интеграла

$$k \int_{r_1}^{\infty} \frac{T'(r)\, dr}{T(r)\log^2 T(r)} = \frac{k}{\log T(r_1)}.$$

Подстановкой в (64) мы убеждаемся, что *интеграл*

$$\int_{H_r} \frac{dr}{r\log r} = \operatorname*{Var}_{(H_r)} [\log\log r]$$

конечен; иными словами, можно сказать, что промежутки H_r занимают пренебрежимо малую длину *на всей положительной полуоси* значений r, на которой вариация $\log\log r$, очевидно, бесконечна.

Пусть G — множество, дополнительное к совокупности промежутков H_r относительно положительной полуоси r. Тогда, начиная с $r = r_1$, *имеем на* G

$$\lambda(r) < \sqrt{T(r)}\log T(r).$$

Умножим теперь обе части соотношения (B_1) на $1/r$ и проинтегрируем от r_0 до r; мы получим, что

$$\sum_{h=1}^{q}[N(r, a_h) - N_1(r, a_h)] \geqslant (q-2)\,T(r) - O[\lambda(r)],$$

а *на множестве* G имеем неравенство

$$\sum_{h=1}^{q}[N(r, a_h) - N_1(r, a_h)] \geqslant (q-2)\,T(r) - O\left[\sqrt{T(r)}\log T(r)\right]. \qquad (65)$$

Это неравенство и выражает для мероморфных на всей плоскости функций $f(z)$ основную (вторую) теорему Неванлинны. В формулировке Неванлинны неравенство (65) является несколько более точным:

1°. $N_1(r, a)$ можно заменить на $N_1(r)$, т. е. на число всех точек ветвления из $|z| < r$ с учетом соответствующих порядков;

2°. $\sqrt{T(r)}\log T(r)$ можно заменить на $\log rT(r)$.

Однако неравенство (65) достаточно для вывода важнейших следствий из теоремы Неванлинны.

38. Исключительные значения (в смысле Неванлинны) и дефект. *Теорема о дефектных значениях.* Кроме выражений $N(r, a)$, $N_1(r, a)$ и $T(r)$, Неванлинна вводит (гл. I, § 5, п. 19) также выражение

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(z)-a|}\,d\varphi,$$

где интеграл взят по окружности $|z| = r$, а $\log^+\alpha$ означает $\log\alpha$, если $\alpha \geqslant 1$, и нуль, если $\alpha < 1$. При $a = \infty$ следует положить

$$m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(z)|\,d\varphi.$$

Первая основная теорема Неванлинны (теорема о равновесии)[1]), которую мы здесь не рассматриваем, но которая является „инте-

[1]) Теорема выражает то, что при любом a функции $N(r, a)$ и $m(r, a)$ *как бы взаимно уравновешиваются.*

гральной формой" первой теоремы Альфорса в „точечном" случае, выражается, как мы видели [соотношение (53) гл. I], следующим образом:

$$N(r, a)+m(r, a)=T(r)+O(1), \tag{66}$$

где $O(1)$ обозначает функцию от r, *ограниченную* по абсолютной величине выражением, зависящим только от a, при $r\to\infty$. Так как $m(r, a)\geqslant 0$, то из (66) вытекает соотношение

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r, a)}{T(r)}\leqslant 1. \tag{67}$$

Дефектом (в смысле Неванлинны) значения a функции $f(z)$ называется величина

$$\delta_N(a)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r, a)}{T(r)}. \tag{68}$$

Значения a, для которых $\overline{\lim}$ из (67) максимален, т. е. равен единице, называются *обыкновенными* значениями $f(z)$, для них дефект $\delta_N(a)=0$. Значения a, дефект которых $\delta_N(a)>0$, называются *исключительными значениями в смысле Неванлинны, или дефектными значениями.*

Для оправдания этих названий достаточно показать, что дефектные значения действительно составляют исключение и что, *вообще говоря*, (конечное или бесконечное) значение a имеет дефект, равный нулю. Для этого мы покажем, что *дефектные значения образуют счетное множество*. Этот факт является следствием теоремы Неванлинны о дефекте, которая формулируется вполне аналогично теореме Альфорса о дефекте (для случая областей).

Определим и здесь *показатель ветвления* $\theta_N(a)$ значения a при помощи соотношения

$$\theta_N(a)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N_1(r, a)}{T(r)}. \tag{69}$$

Ясно, что *всегда* $\theta_N(a)\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, так как $N_1(r, a)\leqslant N(r, a)$.

Вторая основная теорема Неванлинны, выражающаяся неравенством (65), дает на *множестве* G

$$2T(r)+O\left[\sqrt{T(r)}\log T(r)\right]\geqslant\sum_{h=1}^{q}[T(r)-N(r, a_h)]+\sum_{h=1}^{q}N_1(r, a_h)$$

при помощи простого переноса членов из одной части в другую и их группировки под знаком $\sum$. Разделив на $T(r)$, получаем (также *на* G)

$$2+\overline{\lim_{r\to\infty}}\left\{\frac{O\left[\sqrt{T(r)}\log T(r)\right]}{T(r)}\right\}\geqslant\sum_{h=1}^{q}\delta_N(a_h)+\sum_{h=1}^{q}\theta_N(a_h). \tag{70}$$

Заметим теперь, что из определения $T(r)$, данного выше, вытекает, что *эта функция стремится к бесконечности одновременно с* r, *какова бы ни была мероморфная на всей плоскости функция* $f(z)$, и устремим r к бесконечности на G в (70). Это возможно, так как G *простирается до бесконечности на оси значений* r. Мы получаем, таким образом, неравенство

$$\sum_{h=1}^{q} \delta_N(a_h) + \sum_{h=1}^{q} \theta_N(a_h) \leqslant 2, \tag{71}$$

справедливое для любого числа q *значений* a.

Соотношение (71) выражает теорему Неванлинны о дефекте: *сумма дефектов и показателей ветвления произвольных* q *различных значений* a_h *мероморфной на всей плоскости функции* $f(z)$ *не превосходит* 2 [1]).

39. Отсюда непосредственно следует, что может существовать не более, чем *конечное* число различных значений a с дефектом $> \varepsilon > 0$. Действительно, так как $\theta_N(a) \geqslant 0$ для любого a, то из (71) вытекает, что

$$\sum_{h=1}^{q} \delta_N(a_h) \leqslant 2. \tag{72}$$

Число таких значений меньше $2/\varepsilon$. Если будем придавать ε последовательно значения $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, то увидим, что при любом n имеется только конечное число значений, дефект которых не меньше $1/n$. С другой стороны, при $n \to \infty$ мы получаем, таким образом, *все дефектные значения*; поэтому *дефектные значения образуют не более, чем счетное множество* [2]).

Из (72) немедленно вытекает, что могут существовать *самое большее* два значения с максимальным дефектом, т. е. равным единице. Если заметить, что значение a, для которого уравнение

$$f(z) = a \tag{73}$$

не имеет корней (т. е. значение a выпускается), обязательно имеет равный единице дефект, то из вышеприведенного резуль-

[1]) Из неравенства $N(r, a) - N_1(r, a) \geqslant 0$ вытекает, что *для каждого* a *в отдельности*

$$\delta_N(a) + \theta_N(a) \leqslant 1.$$

[2]) Пример мероморфной функции со счетным числом дефектных значений был дан Гольдбергом А., О дефектах, мероморфных функций, *Докл. АН СССР*, XCVIII, № 6 (1954), 893—895.

тата снова получим теорему Пикара. Теория Неванлинны учитывает, кроме исключительных значений Пикара, еще и другие исключительные значения, дефект которых не превосходит единицы, но положителен. При этом (71) и (72) показывают роль, которую играет в этих вопросах число 2[1]).

Собственно говоря, классическая теорема Пикара дает нам нечто большее: функция может иметь самое большее *два* значения, для которых (73) имеет лишь *конечное число корней*. Утверждение касается только *трансцендентных* (т. е. *нерациональных*) *мероморфных функций*, и для доказательства достаточно сделать дополнительное замечание о поведении $T(r)$ в этом случае.

Трансцендентную функцию $f(z)$ среди всех мероморфных на всей плоскости функций характеризует то, что *некоторое значение* a_0 она принимает *бесконечное число раз*. Тогда из определения $N(r, a_0)$ следует, что порядок величины этого выражения при $r \to \infty$ больше чем $\log r$, т. е.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r, a_0)}{\log r} = \infty.$$

Из первой основной теоремы Неванлинны (выражаемой соотношением (66)) вытекает, что *для любой мероморфной на всей плоскости трансцендентной функции имеем*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r)}{\log r} = \infty.$$

С другой стороны, если a — значение, принимаемое функцией $f(z)$ только в конечном числе точек плоскости z, то из определения $N(r, a)$ вытекает, что это выражение имеет тот же порядок что и $\log r$.

Следовательно,

$$\delta_N(a) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, a)}{T(r)} = 1,$$

т. е. дефект такого значения также равен единице. Отсюда и вытекает теорема Пикара в ее полном виде.

40. *Теорема о вполне разветвленных значениях*, доказанная нами в п. 31 при помощи теорем Альфорса, также выводится из (65). Для этого заметим, что если аналогично величинам $N(r, a)$

[1]) Относительно исключительных значений см. Calugaréano Gh., Sur les valeurs exceptionnelles au sens de M. Picard et de M. Nevanlinna des fonctions méromorphes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 195 (1932), 22—23.

и $N_1(r, a)$ (п. 36) ввести также величину

$$\overline{N}(r, a) = \int_0^r \frac{\overline{n}(r, a)}{r}\, dr$$

(с тем же изменением в определении, что и выше, при $\overline{n}(r, 0) \neq 0$), то получим

$$N(r, a) - N_1(r, a) = \overline{N}(r, a),$$

и поэтому из (65) вытекает, что *на множестве* G

$$\sum_{h=1}^{q} \overline{N}(r, a_h) \geqslant (q-2)\, T(r) - O\left[\sqrt{T(r)} \log T(r)\right],$$

откуда

$$2T(r) \geqslant \sum_{h=1}^{q} [T(r) - \overline{N}(r, a_h)] - O\left[\sqrt{T(r)} \log T(r)\right].$$

Разделив на $T(r)$ и устремив r к ∞ (на G), получаем

$$\sum_{h=1}^{q} \left[1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\overline{N}(r, a_h)}{T(r)}\right] \leqslant 2. \tag{74}$$

Однако $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{N(r, a)}{T(r)} \leqslant 1$, и поэтому имеем тем более

$$\sum_{h=1}^{q} \left[1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\overline{N}(r, a_h)}{N(r, a_h)}\right] \leqslant 2. \tag{75}$$

Вспомним, что $n_1(r, a)$ — это число *кратных* корней уравнения $f(z) = a$ (лежащих в $|z| < r$), причем для каждого корня учитывается его кратность. При этом разность

$$\overline{n}(r, a) = n(r, a) - n_1(r, a)$$

равна числу корней вышеприведенного уравнения, если каждое решение считается *один раз* независимо от его кратности. Так как $N_1(r, a)$ и $\overline{N}(r, a)$ связаны по определению с $n_1(r, a)$ и $\overline{n}(r, a)$, то очевидно, что для значения a, для которого каждый корень уравнения $f(z) = a$ имеет порядок не менее μ, справедливо неравенство

$$\frac{\overline{N}(r, a)}{N(r, a)} \leqslant \frac{1}{\mu}.$$

Если подставим его в (75), то получим неравенство

$$\sum_{h=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_h}\right)\leqslant 2, \tag{76}$$

где μ_h — коэффициент, аналогичный μ для $a=a_h$. Поэтому *могут существовать самое большее четыре вполне разветвленных значения.*

Это максимальное число четыре достигается, например, для эллиптической функции $\wp(z)$ Вейерштрасса: полюс и три нуля производной (расположенные в одном и том же параллелограмме периодов).

41. Пусть $f(z)$ является *целой функцией*, т. е. выпускает значение $a=\infty$, дефект которого равен единице. Если a_h ($h=1, 2, \ldots, q$) — *конечные* значения и $a_{q+1}=\infty$, то, согласно (74), имеем

$$\sum_{h=1}^{q+1}\left[1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\overline{N}(r, a_h)}{T(r)}\right]\leqslant 2.$$

Так как

$$\overline{N}(r, a_{q+1})=0,$$

то для q произвольных *конечных* значений имеем

$$\sum_{h=1}^{q}\left[1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\overline{N}(r, a_h)}{T(r)}\right]\leqslant 1$$

и (76) принимает вид

$$\sum_{h=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_h}\right)\leqslant 1.$$

Следовательно, в случае *целой функции могут существовать самое большее два вполне разветвленных значения.* Это число действительно достигается, например, в случае функции $\cos z$, для которой $+1$ и -1 являются вполне разветвленными значениями (производная обращается в нуль каждый раз, когда $\cos z=\pm 1$).

42. Из этих рассмотрений видно, как для мероморфных на всей плоскости функций на основании теорем Альфорса можно получить важнейшие результаты, касающиеся „точечных" значений и вытекающие из теории Неванлинны. Однако теория Неванлинны идет дальше и дает также возможность (более косвенным образом и при помощи методов, не имеющих такой геометрической

и топологической общности, как метод Альфорса) подойти к изучению нерегулярно исчерпываемых римановых поверхностей, для которых теоремы, соответствующие, например, теореме Пикара или теореме о дефекте, представляются в ином виде.

§ 3. НОРМАЛЬНО ИСЧЕРПЫВАЕМЫЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

43. В отличие от изученных в предыдущих разделах регулярно исчерпываемых поверхностей, которые определяются при помощи метрического условия на области, образующие исчерпание, нормально исчерпываемые римановы поверхности характеризуются топологическими свойствами этих областей. Они были введены в 1938 г. автором этой книги [1]).

Пусть

$$R = (w)_T^V$$

— риманова поверхность и Π — полиэдрическая область на V, проекция которой $T(\Pi)$ является локально связным множеством в каждой своей граничной точке. При этих условиях можно непосредственно убедиться в эквивалентности следующих предложений:

1°. Отображение T, рассматриваемое как отображение Π на $T(\Pi)$, вполне непрерывно [2]).

2°. Отображение T, рассматриваемое как отображение Π на $T(\Pi)$, является внутренним.

3°. Область Π нормальна относительно отображения T [3]) (гл. VII, § 4, п. 12).

---

[1]) Stoïlow S., Sur une classe de surfaces de Riemann régulièrement exhaustibles et sur le théorème des disques de Ahlfors M., *C. R. Acad. Sci. Paris.*, 207 (1938), 517—519; Sur les surfaces de Riemann normalement exhaustibles et sur le théorème des disques pour ces surfaces, *Compositio Math.*, 7, 3 (1940), 428—435 и Sur la théorie topologique des recouvrements riemanniens, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, A, I, *Math.* 250/35 (1958).

[2]) Отображение T называется вполне непрерывным, если для любой последовательности точек w_n из (w), стремящейся к точке w_0, $T^{-1}(w_n)$ стремится к точке из $T^{-1}(w_0)$ и если каждая точка из $T^{-1}(w_0)$ является предельной для точек из $T^{-1}(w_n)$. Внутренние отображения замкнутых поверхностей вполне непрерывны; они совпадают с топологическими инволюциями Брауэра.

[3]) Если Π — полиэдрическая область на V, то предложение 1° эквивалентно 2° и влечет за собой 3° и наше предположение относительно границы $T(\Pi)$. Последнее предположение необходимо лишь для установления того, что из предложения 3° вытекают 1° и 2°. Оно исключает, например, следующую возможность:

$$V = (z),\ T: w = z^2 \text{ и } D: (|z| \geqslant a) \cap [|z - b| \leqslant (|a|^2 + |b|^2)^{1/2}]$$

при a и $b \neq 0$.

Нормальные области Π с указанными свойствами определяют полные накрытия их проекций $T(\Pi)$ (гл. VII, § 5, 30). Риманова поверхность R называется *нормально исчерпываемой*, если она допускает исчерпание при помощи полиэдрических областей Π_n, удовлетворяющих равносильным условиям 1°, 2°, 3°.

В силу свойств накрывающих областей Π_n, нормально исчерпываемые поверхности можно рассматривать как топологическое обобщение замкнутых римановых поверхностей [1]).

Легко установить следующее предложение:

Для того чтобы риманова поверхность R была нормально исчерпываемой, необходимо и достаточно, чтобы максимальные области любой замкнутой и компактной области из $T(R)$ были компактными на V, т. е. были нормальными областями (гл. VII, § 4, п. 12).

44. Пример нормально исчерпываемой римановой поверхности (односвязной параболического типа) можно получить, рассматривая целые функции порядка меньше $1/2$. Действительно, согласно одной теореме А. Вимана [2]), если $w = g(z)$ — целая функция порядка меньшего $1/2$, то существует возрастающая последовательность положительных чисел r_i, стремящихся к бесконечности и таких, что при $|z| = r_i$

$$|g(z)| > [M(r_i)]^{\alpha}, \tag{77}$$

где

$$M(r) = \max_{|z|=r} |g(z)|,$$

а α — надлежащим образом заданное положительное число.

Рассмотрим на плоскости (w) замкнутый круг Γ_i: $|w - g(0)| \leqslant \frac{1}{2}[M(r_i)]^{\alpha}$ и на плоскости (z) максимальную область $\Pi_i = (\Gamma_i, 0)$, которая, согласно (77), содержится в $|z| < r_i$.

Применяя предложение 1° гл. VII, § 4, п. 12, мы убеждаемся в том, что Π_i являются нормальными областями. С другой стороны, они образуют исчерпание поверхности

$$R = (w)_{w=g(z)}^{(z)-\infty},$$

и поэтому эта поверхность нормально исчерпываема [3]).

---

[1]) Топологическое исследование открытых или внутренних отображений, при котором рассмотрены также и различные свойства нормального исчерпания, можно найти в работе Whyburn G. T., Open mappings of locally compact spaces, Memoires of the Amer. Math, Soc., № 1 (1950).

[2]) Том I, гл. IX, § 2, п. 10—12, стр. 265—269.

[3]) Другие примеры, также основанные на том свойстве, что $g(z)$ является целой функцией, модуль которой стремится к бесконечности на последовательности окружностей r_i, дают функции С. М. Шаха произвольных конечных порядков (Shah S. M., A note on the minimum modu-

45. Функция

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n!a^{2n}}, \tag{78}$$

где a — натуральное число, $a\geqslant 5$, рассмотренная Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым [1]), голоморфна в $|z|<1$ и обладает окружностью $|z|=1$ в качестве особой линии. Эта функция также порождает нормально исчерпываемую риманову поверхность (односвязную гиперболического типа)

$$(w)_{w=\varphi(z)}^{|z|<1}.$$

Действительно, Лузин и Привалов доказали, что в круговых кольцах

$$1-\frac{1}{n!\,a^{2n}}<|z|<1-\frac{1}{2n!\,a^{2n}},$$

$|\varphi(z)|\to\infty$ равномерно одновременно с n.

46. Пусть D_z — область на плоскости (z), ограниченная простой замкнутой кривой, не аналитической ни на каком участке, и пусть $\zeta=h(z)$ — конформное отображение D_z на область D_ζ плоскости (ζ). Предположим, что D_ζ является нормальной областью относительно отображения $w=P(\zeta)$, где $P(\zeta)$ — многочлен, а $D_w=P(D_\zeta)$ — жорданова область, ограниченная простой

---

ius of a class of integral functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 524—529. Можно исходить также из целых функций $g(z)$ конечного или бесконечного порядка, для которых существует последовательность жордановых кривых C_i со следующими свойствами:

1° $\min\limits_{z\in C_i}|z|\to\infty$ при $i\to\infty$.

2° Кривая C_{i+1} охватывает кривую C_i, причем $|g(z)|>k>0$ на C_i.

Риманова поверхность R, порождаемая функцией $P(z)\,g(z)$, где $P(z)$ — многочлен, нормально исчерпываема. Например, нормально исчерпываемыми являются поверхности

$$(w)_{w=z\sin z^n}^{(z)-\infty} \quad \text{или} \quad (w)_{w=z\left(e^{e^z}+1\right)}^{(z)-\infty}$$

(n — натуральное число). См. Andreian Cabiria, Suprafețe riemanniene normal exhaustibile, диссертация, Бухарест, 1955.

[1]) Lusin N., Privaloff I. I., Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analitiques, *Ann. Ec. Norm.* (3), 42 (1925), 143—191, 150. Другие аналогичные примеры могут быть получены при помощи обобщения функции (78), данного Н. А. Давыдовым в кандидатской диссертации, „Некоторые вопросы теории граничных значений аналитических функций" 1949. См. также Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, гл. II, п. 13, стр. 167—170.

аналитической кривой. Тогда риманова поверхность, порождаемая функцией $f(z)=P[h(z)]$, является нормально исчерпываемой.

47. Приведем теперь два способа получения нормально исчерпываемых римановых поверхностей.

1°. Заметим, что определение нормально исчерпываемых поверхностей применимо также и к накрытиям произвольной ориентируемой поверхности, определяемым внутренними отображениями (гл. VII, § 4, п. 23).

Если

$$R_1=(V_2)^{V_1}_{p_2=T_1(p_1)} \quad \text{и} \quad R_2=(V_3)^{T_1(V_1)}_{p_3=T_2(p_2)}$$

нормально исчерпываемые поверхности в этом обобщенном смысле, то поверхность

$$R_3=(V_3)^{V_1}_{p_3=T_2[T_1(p_1)]},$$

определяемая произведением этих отображений, также является нормально исчерпываемой.

2°. Удаляя некоторые точки из топологической модели нормально исчерпываемой поверхности, мы опять получаем такую же поверхность. В самом деле, справедлива следующая теорема:

Пусть $R=(w)^V_{w=T(p)}$ — нормально исчерпываемая риманова поверхность, A—точка области $T(V)$ и $T^{-1}(A)$ — ее полный прообраз на V. Если через V^* обозначить многообразие $V-T^{-1}(A)$, то риманова поверхность $R^*=(w)^{V^*}_{w=T(p)}(p\in V^*)$ также нормально исчерпываема.

Пусть a_l — точки не более чем счетного множества $T^{-1}(A)$. Обозначим через Π область исчерпания R, для которой A принадлежит $\operatorname{int}\Pi$, и через n — степень T в Π. Область Π содержит n (различных или совпадающих) точек a_l из $T^{-1}(A)$.

Выберем в $\operatorname{int}T(\Pi)$ замкнутую область Δ без внутренней границы таким образом, чтобы точка A принадлежала $\operatorname{int}\Delta$, а максимальные области $\delta_l=(\Delta, a_l)$ были односвязными. Это возможно согласно теореме об обращении внутренних отображений (гл. VII, § 4, п. 16). Действительно, для каждой точки $a_l\in T^{-1}(A)$ существует такое положительное число ρ_l, что максимальная область (C_l, a_l) для круга C_l радиуса ρ_l с центром в A односвязна. Предположим, что ρ_l взято столь малым, что C_l содержится в $\operatorname{int}T(\Pi)$, а следовательно, $(C_l, a_l)\subset\operatorname{int}\Pi$, если a_l принадлежит Π. Так как в Π существует только конечное число точек a_l, то можно взять $\rho(\Pi)=\min\limits_{a_l\in\Pi}\rho_l$ и в качестве Δ выбрать круг радиуса ρ с центром в A. По построению области δ_l

односвязны и попарно не пересекаются. Они нормальны, и если обозначить через n_i степень T в δ_i, то $\sum n_i = n$.

Покажем, что замкнутая и, очевидно, компактная область $\Pi^* = \Pi - \sum_{a_i \in \Pi} \operatorname{int} \delta_i$ является нормальной относительно отображения T. С этой целью установим сначала соотношение

$$T(\Pi^*) = T(\Pi) - \operatorname{int} \Delta. \tag{79}$$

Если бы для $p \in \Pi^*$ точка $P = T(p)$ содержалась в $\operatorname{int} \Delta$, то, так как в $\sum \operatorname{int} \delta_i$ существует n точек из $T^{-1}(P)$, можно было бы добавить к ним точку p и в Π существовало бы $n+1$ точек с образом P, что невозможно. Следовательно, P принадлежит области $T(\Pi) - \operatorname{int} \Delta$, или

$$T(\Pi^*) \subset T(\Pi) - \operatorname{int} \Delta.$$

Обратное включение очевидно.

Так как

$$\partial \Pi^* = \partial \Pi + \sum \partial \delta_i$$

(∂ обозначает границу) и

$$T(\partial \Pi) = \partial T(\Pi), \quad T(\partial \delta_i) = \partial \Delta,$$

то имеем

$$T(\partial \Pi^*) = \partial T(\Pi) + \partial \Delta = \partial T(\Pi^*).$$

Следовательно, Π^* является нормальной областью относительно отображения T [1]).

Построим теперь нормальное исчерпание для $(w)_T^{V^*}$. Пусть Π_k — области некоторого нормального исчерпания поверхности R и N — первый номер k, при котором $T(\Pi_k)$ содержит внутри себя точку A. Выберем внутри $T(\Pi_N)$ подходящую последовательность замкнутых областей Δ_k $(k \geqslant N)$ со следующими свойствами:

1) $\Delta_{k+1} \subset \operatorname{int} \Delta_k$;

2) $A \in \operatorname{int} \Delta_k$;

3) A — единственная общая точка областей Δ_k, причем область $\Pi_k^* = \overline{\Pi_k - T^{-1}(\Delta_k)}$ нормальна. Области Π_k^* образуют искомое исчерпание R [2]).

---

[1]) Эта часть доказательства показывает, что теорема об удалении точек может быть сформулирована в более общем виде с заменой A жордановой областью $\Delta \subset T(V)$ и V — областью $V - T^{-1}(\Delta)$.

[2]) Andreian C., Teorema discurilor pentru suprafețe riemanniene normal exhaustibile, *Bul. ştiinț Acad. R. P. R., secț mat.-fiz.*, IV,2 (1952), 263—272.

Теорема 2°, очевидно, справедлива также и в случае, когда сфера (w) заменяется произвольной ориентируемой поверхностью V_0.

48. *Выпускаемое множество* поверхности R, т. е. множество точек основной сферы (w), не накрытых ни одним листом из R, содержит по крайней мере одну точку и всегда замкнуто.

Действительно, так как R открыта, то число областей Π_n бесконечно, а так как включения

$$T(\Pi_n) \subset T(\Pi_{n+1})$$

являются строгими, то ни одно из замкнутых множеств $T(\Pi_n)$ не покрывает сферы полностью. Выпускаемое множество $(w) - T(R)$ замкнуто, так как оно является пересечением замкнутых множеств $(w) - T(\Pi_n)$.

В упомянутых выше мемуарах 1940 года автор специально изучил свойства *односвязных* нормально исчерпываемых римановых поверхностей, которые он классифицировал по отношению к их выпускаемым множествам.

Так как V односвязна, то можно предположить, что и области Π_n выбраны односвязными, заменив, если нужно, каждую область исходного нормального исчерпания областью, получаемой добавлением компактных связных компонент ее дополнения относительно V. Тогда формула Гурвица (гл. VII, § 5, п. 32) показывает, что области $T(\Pi_n)$ односвязны, а следовательно, выпускаемое множество является континуумом или точкой.

Односвязная нормально исчерпываемая поверхность называется поверхностью *первого рода*, если выпускаемое множество состоит из одной точки, и поверхностью *второго рода*, если это множество является континуумом. Примеры из п. 44 и 45 представляют собой поверхности первого рода, а пример из п. 46 — поверхность второго рода.

Можно показать, что если отобразить конформно односвязную риманову поверхность на круг или на евклидову плоскость (в зависимости от ее типа), то характеристическая функция Неванлинны (гл. I, § 5, п. 19) будет неограниченной или ограниченной, смотря по тому, является ли R поверхностью первого или второго рода[1]).

49. Установим теперь соотношение между классом регулярно исчерпываемых римановых поверхностей и классом нормально исчерпываемых поверхностей. Нормально исчерпываемые римановы поверхности второго рода не являются регулярно исчерпываемыми, так как они обладают бесконечным множеством выпускаемых значений, тогда как регулярная исчерпываемость предполагает существование не более двух выпускаемых значений (п. 30).

[1]) Stoïlow S., Sur les surfaces de Riemann normalement exhaustibles et sur le théorème des disques pour ces surfaces, цит. раб., p. 432, 433.

Однако поверхности первого рода регулярно исчерпываемы. Действительно, рассмотрим на сфере (w) последовательность кругов C_i с центром в единственной выпускаемой точке R и с радиусами, монотонно стремящимися к нулю. Обозначим через Γ_i круги на сфере, дополнительные к C_i, и через Π_i — максимальные области (Γ_i, p_0) относительно некоторой точки $p_0 \in V$, проекция которой $T(p_0)$ лежит внутри Γ_0. Пусть n_i — степень отображения T в Π_i. Тогда каждая точка из $\Gamma_i = T(\Pi_i)$ будет образом n_i точек из Π_i (различных или нет). Если считать, что радиус сферы равен единице, и обозначить площадь круга C_i той же буквой C_i, то для площади, соответствующей Π_i, получаем $n_i(4\pi - C_i)$, а для среднего числа листов — $S_i = n_i\left(1 - \frac{C_i}{4\pi}\right)$. Аналогично, если обозначить через L_i длину окружности круга C_i, то для полной длины границы области Π_i получаем $n_i L_i$ (п. 6).

Следовательно, отношение

$$\frac{n_i L_i}{S_i} = \frac{L_i}{1 - \frac{C_i}{4\pi}}$$

стремится к нулю при $i \to \infty$, что и доказывает регулярную исчерпываемость R.

Таким образом, класс нормально исчерпываемых поверхностей не содержит класса регулярно исчерпываемых поверхностей, но и не содержится в нем.

50. Теорема о дисках. В п. 29 мы доказали теорему о дисках для регулярно исчерпываемых поверхностей. Связь между порядком связности нормально исчерпываемой римановой поверхности и максимальным числом вполне разветвленных областей [1]) дается следующей теоремой [2]).

Пусть R — нормально исчерпываемая риманова поверхность и h — максимальное число вполне разветвленных попарно непересекающихся замкнутых жордановых областей на R. Тогда:

1) *для поверхности R рода $g = 0$ имеем $h \leqslant 3$;*

2) *если род g поверхности R конечен и число ее листов n также конечно, то существуют*

$$h \leqslant 4 + \frac{4(g-1)}{n}$$

вполне разветвленных областей;

---

[1]) Замкнутая область из $T(V)$ называется вполне разветвленной, если все ее компактные максимальные области (или все накрывающие ее острова) имеют больше чем один лист.

[2]) См. Cazacu C. Andreian, Über die normal ausschöpfbaren Riemannschen Flächen, *Math. Nachr.*, 15 (1956), Heft 2, S. 77—86.

2*) *если порядок связности c поверхности R также конечен, то*

$$h \leqslant 2 + \frac{2(c-2)}{n};$$

если число листов R бесконечно, то

3) $h \leqslant 4$, *соответственно* 3*) $h \leqslant 2$, *смотря по тому, является ли конечным род R или ее порядок связности;*

4) *для того чтобы существовало бесконечное число вполне разветвленных областей, необходимо, чтобы род был бесконечным* [1]).

Предположим, что попарно непересекающиеся замкнутые жордановы области $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_h$ из $T(V)$ вполне разветвлены. Начиная с некоторого номера N полиэдрические области Π_l нормального исчерпания для R обладают на сфере (w) проекциями $T(\Pi_l)$, содержащими внутри себя замкнутые области $\Delta_l (l = 1, 2, \ldots, h)$.

Пусть Π — одна из областей $\Pi_i (i \geqslant N)$, n — число листов Π над $T(\Pi)$, $c = 2g + \mu$, соответственно $c' = \mu'$ — порядок связности областей Π и $T(\Pi)$ (g — род Π, а μ и μ' — число граничных элементов соответственно Π и $T(\Pi)$) и r — число точек ветвления из Π, считаемых каждая со своей кратностью.

Максимальные области δ_k областей Δ_l, содержащиеся в Π, являются связными компонентами множества $\sum_{l=1}^{n} \Pi \cap T^{-1}(\Delta_l)$. Так как области δ_k содержатся в компактной области Π, то они нормальны. Обозначим через ν число областей δ_k, через c_k — порядок связности, m_k — число листов и r_k — число точек ветвления области δ_k.

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k = nh. \tag{80}$$

Применяя формулу Гурвица (гл. VII, § 5, п. 32), получаем

$$r = n(2 - c') + c - 2$$

и

$$r_k = m_k + c_k - 2.$$

Однако число точек ветвления из Π по крайней мере равно числу точек ветвления из $\sum_{k=1}^{\nu} \delta_k$:

$$r \geqslant \sum_{k=1}^{\nu} r_k.$$

[1]) Вышеприведенные результаты остаются в силе, если вместо вполне разветвленных областей рассматривать такие же точки.

Следовательно, из вышеприведенных соотношений вытекает, что

$$n(2-c')+c-2\geqslant\sum_{k=1}^{\nu}m_k+\sum_{k=1}^{\nu}(c_k-2)=$$

$$=nh-\nu+\sum_{k=1}^{\nu}(c_k-1),$$

или

$$\nu\geqslant nh+n(c'-2)+2-c+\sum_{k=1}^{\nu}(c_k-1). \tag{81}$$

Так как Δ_l предполагаются вполне разветвленными, то каждая область δ_k определяет многолистное накрытие соответствующей области Δ_l. Следовательно, $m_k\geqslant 2\,(k=1,\ldots,\nu)$ и из (80) вытекает, что

$$nh\geqslant 2\nu. \tag{82}$$

Учитывая (82) и неравенства $c_k\geqslant 1$, из (81) получаем

$$nh+2n(c'-2)+2(2-c)\leqslant 0. \tag{83}$$

Неравенство (83) является необходимым условием для существования h областей Δ_l, не накрытых ни одним простым листом из Π.

Если R односвязна, то можно взять $c=c'=1$, и из (83) вытекает: $h\leqslant 1$ [1]). Это неравенство уточняет в случае нормально исчерпываемых поверхностей первого рода неравенство $h\leqslant 2$, доказанное Альфорсом для односвязных регулярно исчерпываемых поверхностей. Более того, оно справедливо также и для нормально исчерпываемых поверхностей второго рода (которые нерегулярно исчерпываемы, п. 46).

Так как T определяет полное накрытие степени n открытой области $\operatorname{int}T(\Pi)$ открытой областью $\operatorname{int}\Pi$ и эти области соответственно гомеоморфны сфере с μ' выколотыми точками и тору рода g с μ выколотыми точками, то из гл. VII, § 5, п. 31 вытекает, что

$$n\mu'\geqslant\mu. \tag{84}$$

Однако неравенство (83) может быть представлено также в виде

$$n(h-4)+4(1-g)+2(n\mu'-\mu)\leqslant 0,$$

откуда, пользуясь (84), получаем неравенство

$$h\leqslant 4+\frac{4(g-1)}{n}. \tag{85}$$

[1]) Stoïlow S., Sur les surfaces de Riemann normalement exhaustibles et sur le théorème des disques pour ces surfaces, цит. раб. § 7—8, p. 433—435.

Если Π является одной из областей исчерпания Π_i $(i \geqslant N)$, то при $i \to \infty$ числа n, c, g соответственно стремятся к числу листов, порядку связности и роду поверхности R. Следовательно, из (85) получаются результаты 1), 2), 3) и 4).

С другой стороны, так как $c' \geqslant 1$, то из (83) вытекает неравенство

$$h \leqslant 2 + \frac{2(c-2)}{n}, \tag{86}$$

из которого следуют утверждения 2*) и 3*).

Сравнение оценок сверху (85) и (86) показывает, что (85) точнее (86), если $\frac{\mu}{n} > 1$.

51. Следующие примеры показывают, что установленные выше оценки являются точными.

1°. Пусть $w = f(z)$ — рациональная функция степени n.

Порядок связности римановой поверхности $R = (w)_{w=f(z)}^{(z)-f^{-1}(A)}$ $(A \in (w))$ удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant c = \mu \leqslant n$. Согласно теореме 2° п. 47, R нормально исчерпываема, а из (86) вытекает, что

$$h \leqslant 4\frac{n-1}{n}.$$

Если $c = 2$ или 3, то $h \leqslant 2$, а если $c \geqslant 4$, то $h \leqslant 3$. Эти значения соответственно достигаются, например, в случае функций

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1} \quad \text{и} \quad f(z) = \frac{z^3+z}{z^4+3z^2+1}$$

при $A = \infty$.

2°. Пусть $u = g(z)$ — целая функция порядка $< 1/2$ и $w = f(u)$ — такая рациональная функция, что $f(\infty) = \infty$ и для римановой поверхности

$$(w)_{w=f(u)}^{(u)-f^{-1}(\infty)}$$

имеем $h = 3$. Тогда нормально исчерпываемая риманова поверхность

$$(w)_{w=F(z)}^{(z)-\infty-F^{-1}(\infty)}, \quad \text{где} \quad F(z) = f[g(z)],$$

является поверхностью нулевого рода, но ее порядок связности и число листов бесконечны. Для этой поверхности $h = 3$.

3°. Для построения примеров, в которых род $g \neq 0$, мы воспользуемся алгебраическими функциями. Например, если $w = f(z)$ — функция, определенная соотношением

$$z^2 = \prod_{i=1}^{2k} (w - a_i),$$

где a_i — попарно различны, то для римановой поверхности $(w)_{w=f(z)}^{(z)-\infty}$ число h принимает значение $2k$, равное верхней границе, определяемой (85).

4°. Пусть снова $w=g(u)$ — целая функция порядка $<1/2$ и $w_i\,(i=1, 2, \ldots)$ — последовательность чисел, стремящихся к бесконечности. Счетное множество точек u_{ij}, для которых $g(u_{ij})=w_i$, не имеет предельных точек в конечной части плоскости.

Обозначим через $G(u)$ целую функцию, для которой u_{ij} являются простыми нулями, и через $u=H(z)$ — функцию, обратную к $z=\sqrt[n]{G(u)}$. Риманова поверхность, порождаемая функцией $f(z)=g[H(z)]$, нормально исчерпываема. Она имеет бесконечное число листов и вполне разветвленных областей, которые содержат вполне разветвленные точки w_i [1]).

---

[1]) Другие свойства нормально исчерпываемых римановых поверхностей содержатся в уже упомянутой работе Cazacu C. Andreian, Über die normal ausschöpfbaren Riemannschen Flächen или в работах Cazacu C. Andreian, Legături între suprafețele normal exhaustibile și suprafețele A_∞, *Bul. ştiinţ. Acad. R. P. R., sect. mat.-fiz.*, **VII**, 3 (1955), 529—542 и Teorema lui Iversen pentru suprafețe normal exhaustibile, *Comunicările Acad. R. P. R.*, **V**, 8 (1955), 1145—1150. В связи с обобщением нормально исчерпываемых поверхностей см. Kuroda T., Remarks on some covering surfaces, *Rev. de math. pures et appl.*, **II** (1957), 239—244 и Cazacu C. Andreian, Suprafețe riemanniene parțial regulat exhaustibile, *Studii şi cerc., Iaşi*, 1958.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Альтернирующий метод Шварца 67, 259, 260, 294, 324
Аналитическая дуга 10
— кривая 10
— функция на абстрактной римановой поверхности 252
— — — — — — первого рода 273
— — — — — — элементарная второго рода 276
— — — — — — — третьего рода 278
— — — римановой накрывающей 252
— — — топологической поверхности 206
Аппроксимирующая последовательность областей 103

Вполне разветвленное значение функции 384
Выпускаемое множество римановой поверхности 405
Вычет аналитического дифференциала 258
— аналитической ковариаиты 258

Гармоническая мера 149
— — абсолютная 170, 171
— — аддитивность 150
— — геометрическая интерпретация 153, 154, 155
— — граничного элемента 308
— — идеальной границы римановой поверхности 293
— — конформная инвариантность 150
— — непрерывность 150
— функция 7
— — на абстрактной римановой поверхности 252
— — — накрывающей поверхности 124
— — первого рода 272
Гармоническая функция, расширенное определение 54
— — элементарная второго рода 275
— — — третьего рода 277
— — сопряженная 8
Гиперболическая метрика 132
Гомотопные пути 122
Граничный элемент поверхности 243
— — второго рода 247
— — первого рода 247
— — гиперболического типа 308
— — параболического типа 308

Дефект 395
— области 382
Дефектные значения 395
Дисперсия замкнутого множества 147
— системы трех точек 147
Дифференциал на абстрактной римановой поверхности 254
— — — — — абелев первого рода 326
— — — — — аналитический 254

Емкость граничного элемента 310
— множества 116

Жорданова дуга 10
— кривая 10
— — двубережная 214
— — однобережная 214
— область 10

Задача Дирихле 16
— — для многосвязных областей 71, 72
— — — полиэдрических областей на римановой поверхности 258

Задача Дирихле обобщенная 46, 151
— Дирихле—Неймана смешанная 17
— Неймана 17
— Робена 110
Значения исключительные в смысле Неванлинны 395
— обыкновенные 395

Идеальная граница поверхности 246
Интеграл абелев 286
— Дирихле 73
— — аналитической функции 80
— — на римановой поверхности 256
— Пуассона 42, 43
— — предельные значения 43, 44
— — ядро 24
Исчерпание области 103

Каноническое представление открытых поверхностей 248
— разбиение тора 269
Ковариантa 253
— аналитическая 253
Конформная метрика на абстрактной римановой поверхности 207
Кратность острова 370
— — простая 370
Круг однолистный 228
— многолистный 228

Лемма Альфорса вторая 346, 347
— — первая 344, 347
— Карлемана 159
— — обобщение 160
— Лёвнера 168, 169
— Шварца 97
Логарифмический потенциал 109, 110
Локальная униформизирующая 205
Локальный гомеоморфизм 121
— максимум в строгом смысле 18
— — — широком смысле 18
— параметр 205

Меры Хаусдорфа 192
Минимизирующая последовательность 334
Множества Пенлеве 188
— предельных значений функции 163
Модуль граничного элемента 302

Накрывающее пространство 215
Непрерывная дуга 10
Неравенство (B) Альфорса 372, 386
— Каратеодори 98
Нормальная форма замкнутой римановой поверхности 237

Область D 10
— Ω 10
— максимальная 217
— нормальная 217
Определяющая последовательность граничного элемента 243
— — — — нормальная 246
Особенность логарифмическая (логарифмический полюс) 59
— устранимая 57, 64
Остров 369
Отмеченная окрестность 205
Отмеченное отображение 205
Относительная граница накрытия 348
Отображение внутреннее 215, 341
— квазиконформное 376

Параметрическая окрестность 205
Параметрический круг 205
Параметрическое отображение 205
Период гармонической функции 261
— дифференциала по кривой 327
Показатель ветвления 395
— — области 382
Полиэдрическая область 232
— — подобная однолистной 235
— — порядок связности 237
— — род 234
— — характеристика 237
Полное накрытие 94, 238, 239
Полуостров 369
Постоянная Робена 109
Принцип гармонической меры 164
— гиперболической метрики 133
— Дирихле 73, 74, 75, 332
— Линделёфа 90, 93, 108
— максимума и минимума (принцип экстремума) гармонических функций 18
— — — — — — — — обобщение 181
— — — — — — — — обобщенный 48, 318

Принцип расширения области (принцип Карлемана) 167
Продолжение гармонических функций 51, 52, 53

Равенство (А) Альфорса 370, 386
Разложение гармонической функции в окрестности изолированной особенности 65
Регулярная кривая на сфере 345
Риманова поверхность абстрактная 206, 207, 208
— — — аналитической функции 208
— — исчерпываемая нормально 401
— — — — второго рода 405
— — — — первого рода 405
— — — регулярно 373
— — с нулевой границей 293

Скачок гармонической функции 260
Соотношение инвариантности 252
— Римана 278
— соседства 207
Сопряженные кривые на торе 268
Степень накрытия 239

Тензор 255
Теорема Абеля 281, 288, 289
— Адамара о трех кругах 163
— аддитивности характеристик 355
— Альфорса вторая 357
— — первая (о накрытии) 352
— Берманта 146
— Валирона и Блоха 385
— Гарнака 41
— Керекьярто 247, 248, 250
— Коши — Римана обобщение 183
— Ландау 137, 147
— Лиувилля для гармонических функций 41
— — обобщение 184, 189
— Р. Неванлинны вторая основная 395
— — о дефекте 396
— — первая основная 32, 33, 394
— о вполне разветвленных значениях 384, 397
— — дефекте 382
— — дисках 382, 406
— — конформном отображении универсальной накрывающей 127
— — локальном обращении внутренних отображений 223
Теорема о непрерывном продолжении внутренних отображений 240
— — равномерно сходящихся рядах гармонических функций 37
— Пенлеве, Помпейю, Безиковича 185
— Пикара 384
— — большая 100, 397
— Фату 45
— Фрагмена — Линделёфа, уточнение 160
— Шоттки 138
— Эйлера 237
Топологическая модель накрывающего пространства 215
— — римановой области существования аналитической функции 204
— поверхность 120, 204, 212
— — накрывающая (поверхность наложения) 120, 215
— — — риманова 120, 215, 216, 227, 228
— — — — аналитической функции 216
— — — — неразветвленная 121
— — — — обыкновенные точки 225
— — — — точки ветвления 225
— — — — универсальная 123
— — ориентируемая 213
— — со счетной базой 123
Топологический треугольник 211
— — ориентированный 213
Топологическое многообразие 204
— — двумерное 120
— — замкнутое (компактное) 212
— — открытое 212
— — Прюфера 212
— — триангулируемое 211
— — пространство 204
— — локально евклидово 204
— — связное 204
Трансверсаль 71, 347
Триангуляция 211

Формула Грина вторая 12, 13
— — предварительная 12, 332
— Гурвица 241
— Иенсена 29
— Неванлинны 29
— — (Иенсена — Пуассона) 29
— — равновесия 32
— Пуассона 24
— Римана 241

Формула среднего значения (формула Гаусса) 17
Фундаментальная группа поверхности 122
Функция Грина области D 21, 83, 125
— — — — линии уровня 86
— — — — свойство симметрии 86, 106
— — — Ω 104, 125
— — конформная инвариантность 23, 106
— — минимальное свойство 105
— — поведение вблизи границы 108
Функция Грина полиэдрической области на римановой поверхности 296
— — римановой поверхности 297, 311

Характеристическая функция мероморфной функции 33
Характеристический эллипс 375

Цепочка областей 219
Цепь треугольников 214
Цикл треугольников 214
Циклическое сечение тора 268

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава I. Предварительные формулы. Задача Дирихле 7

§ 1. Определение гармонических функций 7

§ 2. Формулы Грина. Задача Дирихле 10

§ 3. Формула среднего значения. Приложения 17

§ 4. Функция Грина. Формула Пуассона 21

§ 5. Формула Р. Неванлинны (Иенсена — Пуассона) 25

Глава II. Локальные свойства гармонических функций 34

§ 1. Разложения гармонических функций в ряды 34

§ 2. Интеграл Пуассона 42

§ 3. Обобщение задачи Дирихле и принципа максимума и минимума 45

§ 4. Продолжение гармонических функций 51

§ 5. Расширенное определение гармоничности 54

§ 6. Изолированные особенности гармонических функций . . . 56

Глава III. Задача Дирихле для многосвязных областей 67

§ 1. Альтернирующий метод Шварца 67

§ 2. Задача Дирихле для многосвязных областей D 71

Глава IV. Интеграл Дирихле и принцип минимума 73

Глава V. Функция Грина. Принцип Линделёфа и принцип гиперболической метрики 83

§ 1. Функция Грина для областей D, ограниченных конечным числом жордановых кривых 83

§ 2. Принцип Линделёфа 90

§ 3. Приложения принципа Линделёфа 98

§ 4. Функция Грина для произвольных областей Ω 103

§ 5. Постоянная Робена. Емкость замкнутого и ограниченного множества 109

§ 6. Универсальная накрывающая поверхность 120

§ 7. Гиперболическая метрика. Принцип гиперболической метрики 130

§ 8. Приложения принципа гиперболической метрики 135

Глава VI. Гармоническая мера 149

§ 1. Относительная гармоническая мера 149

§ 2. Теорема о двух константах. Приложения 156

§ 3. Принцип Р. Неванлинны, или принцип гармонической меры. Приложения 163
§ 4. Абсолютная гармоническая мера 170
§ 5. Поведение гармонических и аналитических функций в окрестности множеств нулевой гармонической меры . . 181
§ 6. Метрические свойства множеств нулевой гармонической меры 192
Глава VII. Римановы поверхности 203
§ 1. Предварительные топологические рассмотрения 203
§ 2. Абстрактные римановы поверхности 205
§ 3. Триангулируемые и ориентируемые поверхности 210
§ 4. Накрывающие римановы поверхности. Внутренние отображения 214
§ 5. Топологическая классификация замкнутых римановых поверхностей. Полиэдрические области 232
§ 6. Топологическая классификация открытых римановых поверхностей. Граничные элементы. Полиэдрические аппроксимирующие области 242
§ 7. Аналитические и гармонические функции на римановых поверхностях 251
Глава VIII. Аналитические функции на замкнутых римановых поверхностях 260
§ 1. Предварительные предложения 260
§ 2. Гармонические и аналитические функции на замкнутых абстрактных римановых поверхностях 266
§ 3. Алгебраические функции и абелевы интегралы 284
Глава IX. Аналитические функции на открытых римановых поверхностях 290
§ 1. Гармоническая мера идеальной границы. Функция Грина римановой поверхности 292
§ 2. Свойства аналитических и гармонических функций и дифференциалов на римановой поверхности с нулевой границей 311
§ 3. Гармонические функции с заданными особенностями на римановых поверхностях с нулевой границей 322
§ 4. Абелевы дифференциалы и интегралы на римановых поверхностях с нулевой границей 325
§ 5. Аналитическая функция, соответствующая заданной римановой поверхности 331
Глава X. Регулярно исчерпываемые и нормально исчерпываемые римановы поверхности 343
§ 1. Теория накрывающих поверхностей по Л. Альфорсу . . . 343
§ 2. Регулярно исчерпываемые римановы поверхности 373
§ 3. Нормально исчерпываемые римановы поверхности 400
Предметный указатель 411