МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.П. НОВИКОВ

6

КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР" МОСКВА

МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.П. НОВИКОВ

6

КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Сборник статей

Перевод с английского
И. В. ВОЛОВИЧА и
Ю. М. ЗИНОВЬЕВА

Под редакцией
В. Н. СУШКО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1977

УДК 530.145

Конструктивная теория поля оформилась как самостоятельное направление в 60-е годы, а в последнее десятилетие в ней получены значительные результаты. В основу предлагаемого сборника положены лекции, прочитанные в Международной школе по математической физике. Среди авторов статей известные специалисты, активно работающие в данной области, — Дж. Глимм, А. Джаффе, Э. Нельсон и др.

Сборник рассчитан на физиков-теоретиков и математиков, интересующихся проблемами физики.

Редакция литературы по математическим наукам

К $\frac{20203\text{-}017}{041(01)\text{-}77}$ 17-77

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемый вниманию читателя сборник содержит лекции, посвященные тому интенсивно развивающемуся в последние годы направлению теории квантованных полей, за которым уже успело закрепиться специальное название — конструктивная квантовая теория поля (ККТП). И если какой-либо определенный момент зарождения нового направления указать невозможно, то дату его оформления в самостоятельный раздел квантовой теории поля (КТП) можно связать (конечно, условно) со временем появления (июль 1964 г.) каргезских лекций Вайтмана [Wig 3], где достаточно подробно обсуждались как основиые задачи ККТП, так и возможные принципы отыскания их решений. В качестве Главной Проблемы теории Вайтман выдвинул задачу строго математического обоснования результатов, получаемых в эвристической квантовой теории поля, где уже в течение многих лет «известны многочисленные примеры нетривиальных моделей, для которых можно доказать существование решеиий в том смысле, что можно выписать формальные (преимущественно расходящиеся) ряды по константе связи, удовлетворяющие уравнениям движения» [Wig 3; стр. 9]. Иначе говоря, задача ККТП в отличие от аксиоматической теории поля, изучающей общие свойства релятивистских квантовых систем, состоит в том, чтобы для той или иной конкретной квантовополевой модели 1) доказать существование квантованного поля как ясно определенного математического объекта, удовлетворяющего ряду физических требований; 2) провести реальное построение такого поля или величин, тесно с ним связанных; 3) исследовать математические свойства построенных величин и, наконец, 4) выявить физическое содержание изучаемой конкретной модели. В неформальной постановке такая задача, конечно, не нова для КТП, а скорее традиционна. Новым здесь прежде всего являются требования к математической обоснованности результатов: методы, которыми эти результаты получаются, должны быть логически последовательными и удовлетворять всем современным критериям математической строгости. В итоге можно сказать, что ККТП стремится сочетать строгость аксиоматической КТП с конкретностью эвристической КТП, в частности теории перенормировок, откуда она черпает многие из своих руководящих идей.

Подобно аксиоматической теории в ККТП, в качестве математического образа релятивистских квантованных полей принято выбирать операторные обобщенные функции (ООФ), удовлетворяющие аксиомам Вайтмана. Эти аксиомы, в сущности, выражают на языке ООФ такие общие физические требования, как пуанкаре-инвариантность, положительность энергии, микропричинность и т. п. (подробнее см. [BLT, Str, Wig, Jo]). Как показывает теорема реконструкции, доказанная Вайтманом еще в 1956 г., существование полей, понимаемых описанным выше образом, эквивалентно существованию цепочки $\{W_n(x_1, \ldots, x_n)\}$ функций Вайтмана W_n, являющихся граничными значениями функций F_n, голоморфных в так называемых симметризованных трубчатых областях $\mathfrak{T}_n^s$. По этой причине задачу построения нетривиальных квантованных полей можно переформулировать как задачу построения нетривиальных (отличных от свободных) функций Вайтмана $W_n(x_1, \ldots, x_n)$.

Наиболее прямой способ решения этой задачи мог бы состоять в прямом вычислении функций Вайтмана

$$W_n(x_1; \ldots; x_n) \equiv W_n(t_1, \underline{x}_1; \ldots; t_n, \underline{x}_n) = \\ = (\varphi(t_1, \underline{x}_1) \ldots \varphi(t_n, \underline{x}_n)\Omega_0, \Omega_0), \qquad (*)$$

определяемых с помощью гайзенберговых полей, которые задаются (в простейшем случае одного скалярного поля) соотношением

$$\varphi(t, \underline{x}) = \exp\{itH[\pi, \varphi]\}\varphi(\underline{x})\exp\{-itH[\pi, \varphi]\},$$

где $\varphi(\underline{x})$ — начальное «значение» поля, $H[\pi, \varphi] = H_0[\pi, \varphi] + H_I[\pi, \varphi]$ — гамильтониан системы, π — канонически сопряженный к φ импульс, Ω_0 — основное состояние гамильтониана.

Однако непосредственная реализация такой программы наталкивается на ряд серьезных препятствий, порожденных прежде всего весьма сингулярной природой основного объекта исследований — квантованного поля $\varphi(x)$. Наиболее яркое свидетельство этого — появление объемных, ультрафиолетовых (УФ) и многочастичных расходимостей в рядах теории возмущений, применяемой в практических расчетах. Существенно, что, хотя смысл и характер таких расходимостей наиболее отчетливо может быть продемонстрирован на языке теории возмущений, физические причины объемных и УФ-расходимостей значительно глубже. Фактически они обусловлены тем, что релятивистские поля — это физические системы с бесконечным числом степеней свободы (бесконечные системы), удовлетворяющие требованиям пуанкаре-инвариантности и локальности. Точнее говоря, требование трансляционной инвариантности при условии существования эффекта поляризации вакуума, неизбежно возникающего при любом нетривиальном взаимодействии $H_I[\pi, \varphi]$, совместимом с требованием релятивистской инвариантности, неотвратимо ведет к объемным расходимостям (подробнее см. [Wig 2; § 6] и [He 2; гл. 0, гл. V]). УФ-расходимости обусловлены тем, что при современном понимании микропричинности (равнозначной локальности) теория не может исключить взаимодействия частиц с как угодно большими импульсами и энергиями (подробнее см. [Wig 3; § 7], [He 2; гл. 0, гл. III, гл. IV, гл. VI]).

По этой причине доказательство существования полей или функций Вайтмана в ККТП обычно начинается с исследования вспомогательных систем, получаемых путем введения тех или иных обрезаний. Обычно используют объемное обрезание Λ и УФ-обрезание σ. Объемное обрезание делает конечной пространственную область взаимодействия частиц, описываемых полями, что нарушает трансляционную инвариантность теории, а УФ-обрезание ограничивает величины импульсов и энергий, участвующих во взаимодействии частиц, что нарушает локальность. В результате, обрезания совместно приводят к тому, что функции Вайтмана вспомогательных систем $W_n(t_1, \underline{x}_1; \ldots; t_n, \underline{x}_n | \Lambda, \sigma)$ оказываются свободными от объемных и УФ-расходимостей. Вопрос, таким образом, сводится к вопросу о существовании предела у последовательности $\{W_n(\cdot | \Lambda, \sigma)\}$ при снятии обрезаний ($\Lambda \to \infty$, $\sigma \to \infty$). Правда, сами по себе функции $W_n(\cdot | \Lambda, \sigma)$ предела иметь не могут, поскольку при $\Lambda \to \infty$, $\sigma \to \infty$ в них возникают расходимости, присущие исходным необрезанным величинам. Выход из этого тупика подсказывается теорией перенормировок: для ликвидации расходимостей в предельных функциях Вайтмана в исходное формальное выражение для гамильтониана (или лагранжиана) надо ввести не только обрезания Λ и σ, но и добавочные члены специальной структуры — контрчлены перенормировки, — которые в пределе $\Lambda \to \infty$, $\sigma \to \infty$ компенсируют возможные расходимости. Изучение последовательности перенормированных, т. е. построенных с учетом контрчленов, обрезанных функций Вайтмана $W_n^R(\cdot | \Lambda, \sigma)$ и главным образом ее поведения при снятии обрезаний и составляет основной предмет ККТП.

Структура контрчленов весьма существенным образом зависит от конкретной природы рассматриваемых квантовополевых моделей. Наиболее простые контрчлены возникают в так называемых суперперенормируемых моделях, описывающих взаимодействия полей в пространстве-времени размерности s, меньшей 4. Именно с изучения таких взаимодействий и началась история развития ККТП.

Первый этап ее развития, а точнее этап ее становления, нашел свое достаточно полное отражение в уже цитированных выше лекциях Вайтмана [Wig 3], к которым мы настоятельно рекомендуем обратиться каждому, кто хочет познакомиться с предметом и методами ККТП.

Второй этап, связанный в основном с именами Глимма и Джаффе, состоял в изучении простейших суперперенормируемых взаимодействий вида $(\varphi^4)_2$, $P^n(\varphi)_2$, $(\bar{\Psi}\Psi\varphi)_2$, где верхний индекс — степень взаимодействия, а нижний — размерность пространства-времени. Именно на этом этапе анализа был построен первый нетривиальный пример релятивистского локального квантованного поля. С математической точки зрения работы этого времени интересны использованием весьма изощренной техники операторных оценок, развитых специально для исследования изучаемых моделей. Достаточно полное представление о результатах и использованной в этот период технике дает книга Хеппа [He 2] и статья Глимма и Джаффе «Бозонные квантовополевые модели», помещенная в настоящем сборнике, где дано мастерски написанное изложение результатов, полученных при исследовании $P^n(\varphi)_2$-взаимодействия.

Наконец, несколько лет назад начался новый период развития теории, характеризуемый интенсивным использованием методов евклидовой теории поля. Суть этого метода состоит в следующем. Как уже отмечалось выше, функции $W_n(t_1\underline{x}_1; \ldots; t_n, \underline{x}_n)$, удовлетворяющие аксиомам Вайтмана, являются граничными значениями функций $F_n(z_1^0, \underline{z}_1, \ldots$ $\ldots, z_n^0, \underline{z}_n)$, голоморфных в $\mathfrak{T}_n^s$. В область $\mathfrak{T}_n^s$ попадают так называемые евклидовы точки z_i, для которых $\operatorname{Re} z_i^0 = 0$, $\operatorname{Im} \underline{z}_i = 0$. Сужения F_n на множество евклидовых точек $\mathscr{E}$ приводят к функциям Швингера

$$S_n(t_1, \underline{x}_1; \ldots; t_n, \underline{x}_n) = F_n(it_1, \underline{x}_1, \ldots, it_n, \underline{x}_n),$$

объектам более удобным с математической точки зрения, чем функции Вайтмана. Соотношение между S_n и W_n, грубо говоря, аналогично соотношению между функциями Грина уравнения Шредингера и уравнения диффузии. Хорошо известно, что в то время как представление функции Грина уравнения Шредингера в виде фейнмановского континуального интеграла по путям не имеет достаточно ясного обоснования в рамках теории меры, представление функции Грина уравнения диффузии, получаемое с помощью перехода к «мнимому» времени it, имеет четкий математический смысл в терминах интеграла по мере Винера. Подобным же образом переход к «мнимому» времени в функциях Вайтмана приводит к функциям Швингера S_n, для которых могут быть написаны интегральные представления, которым очень часто можно придать точное значение в терминах вероятностных мер, ассоциируемых с теми или иными случайными процессами, чего до сих пор не удалось сделать для континуального интеграла Фейнмана. По этой причине удобство перехода от $\mathfrak{W}_n$ к S_n сомнения не вызывает, да никогда и не вызывало: фактически такой переход делался на самых ранних этапах развития КТП. Главный вопрос состоял в том, насколько знание функций Швингера позволяет однозначно восстановить функции Вайтмана. Или, иначе говоря, каким условиям должны удовлетворять функции S_n, для того чтобы с помощью их аналитического продолжения можно было получить функции $\mathfrak{W}_n$, удовлетворяющие аксиомам Вайтмана.

Исчерпывающий ответ на этот вопрос получили Остервальдер и Шрадер, которые нашли условия, необходимые и достаточные для эквивалентности теорий, основанных на функциях $\mathfrak{W}_n$ и S_n соответственно. Изложению этого фундаментального результата посвящены лекции Остервальдера, помещенные в настоящем сборнике[1]). Основываясь на этом результате, проблему построения релятивистской квантовой теории теперь можно переформулировать как проблему построения функций Швингера, удовлетворяющих условиям Остервальдера — Шрадера (О. Ш.). С общей точки зрения преимущества такой переформулировки связаны с двумя обстоятельствами.

Во-первых, переход к функциям Швингера позволяет привлечь к решению проблем теории поля мощные и хорошо развитые теоретико-вероятностные методы. Дело в том, что, подобно тому как функции Вайтмана можно задать в виде

---

[1]) Первоначальная формулировка этих условий, данная в работе [Os Sch 3], была неточной из-за ошибки, содержащейся в доказательстве одной технической леммы. Исправленная формулировка с соответствующими доказательствами дана в [Os Sch 4]. В лекциях Остервальдера, включенных в настоящий сборник, содержится предварительная версия этой формулировки и доказательства.

средних от «произведения» релятивистских квантованных полей (см. *), функции Швингера можно отождествить со средними от произведения специальных обобщенных случайных процессов (евклидовых полей):

$$S_n(t_1, \underline{x}_1, \ldots, t_n, \underline{x}_n) = E[\Phi(t_1, \underline{x}_1) \ldots \Phi(t_n, \underline{x}_n)],$$

где $E[\alpha]$ — среднее от случайной величины α, заданной на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ), лежащем в основе определения процесса $\Phi(\cdot)$. Сразу же возникает вопрос о том, каким требованиям нужно подчинить случайный процесс $\Phi(\cdot)$ для того, чтобы получаемые с его помощью функции $S_n(\cdot)$ удовлетворяли условиям О. Ш. Ответ на этот вопрос содержится в лекциях Э. Нельсона «Теория вероятностей и евклидова теория поля», где дано общее определение евклидова поля как евклидово-ковариантного марковского случайного поля, удовлетворяющего определенным дополнительным условиям, и показано (теорема 2), что эти условия гарантируют выполнение условий О. Ш. Вместе с краткими, но очень содержательными лекциями М. Рида лекции Э. Нельсона могут служить превосходным введением в круг вопросов, связанных с теоретико-вероятностными методами евклидовой теории поля.

Во-вторых, как уже упоминалось выше, переход от функций W_n к функциям Швингера позволяет при изучении вопросов, связанных со снятием обрезаний, использовать вполне корректные интегральные представления для $S_n(\cdot\,|\,\Lambda, \sigma)$ и разнообразные результаты классической статистической физики, поскольку с помощью интегральных представлений многие вопросы евклидовой теории поля превращаются в проблемы классической статистической физики.

Важнейшие интегральные представления для $S_n^R(\cdot\,|\,\Lambda, \sigma)$ вытекают из формулы Фейнмана — Каца — Нельсона. Они выражают $S_n^R(\cdot\,|\,\Lambda, \sigma)$ через моменты определенных вероятностных мер. В простейших случаях это представление имеет следующий вид:

$$S_n^R(t_1, \underline{x}_1; \ldots; t_n, \underline{x}_n \,|\, \Lambda, \sigma) = W_n^R(it_1, \underline{x}_1; \ldots; it_n, \underline{x}_n \,|\, \Lambda, \sigma) =$$

$$= \langle \varphi(\underline{x}_1) \exp\{-(t_1 - t_2) H^R(\Lambda, \sigma)\} \varphi(x_2) \ldots$$

$$\ldots \exp\{-(t_n - t_{n-1}) H^R(\Lambda, \sigma)\} \Omega_0, \Omega_0\rangle =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left(E\left[\exp\left\{-\int_{-t}^{t} V^R(\tau\,|\,\Lambda, \sigma)\, d\tau\right\}\right]\right)^{-1} E\left[\Phi_0(t_1, \underline{x}_1) \ldots\right.$$

$$\ldots \Phi_0(t_n, \underline{x}_n) \exp\left\{-\int_{-t}^{t} V^R(\tau \mid \Lambda, \sigma)\right\}\Bigg] =$$

$$= \int \Phi_0(t_1, \underline{x}_1) \ldots \Phi_0(t_n, \underline{x}_n)\, d\mu_{\Lambda, \sigma},$$

где $H^R(\Lambda, \sigma)$ — обрезанный перенормированный гамильтониан, задающий рассматриваемую модель; $V^R(\Lambda, \sigma)$ — обрезанный перенормированный евклидов «потенциал» взаимодействия; $\Phi_0(t, \underline{x})$ — гауссов обобщенный случайный процесс (свободное евклидово поле), отвечающий свободному релятивистскому полю $\varphi_0(t, \underline{x}) = \exp\{+itH_0[\pi, \varphi]\}\varphi(\underline{x}) \times \times \exp\{-itH_0[\pi, \varphi]\}$; $E[\cdot]$ — среднее на вероятностном пространстве, где определено евклидово поле $\Phi_0(t, \underline{x})$, $d\mu_{\Lambda, \sigma} = \left(\int e^{-V^R(\Lambda, \sigma)}\, d\mu\right)^{-1} \exp\{-V^R(\Lambda, \sigma)\}\, d\mu_0$; $d\mu_0$ — гауссова мера, отвечающая гауссовому обобщенному случайному процессу $\Phi_0(\cdot)$. Представления, подобные только что выписанному (а сейчас уже получены представления для функций Швингера в теориях не только с бозонными, но и с фермионными полями), открывают возможность для следующей процедуры построения перенормированных функций Вайтмана без обрезаний: изучаем обрезанные перенормированные функции Вайтмана при «мнимом» времени $W_n^R(i\tau_1, \underline{x}_1; \ldots; i\tau_n, \underline{x}_n \mid \Lambda, \sigma) \equiv \equiv S_n^R(\tau_1, \underline{x}_1; \ldots; \tau_n, \underline{x}_n \mid \Lambda, \sigma)$, с помощью интегрального представления доказываем существование предельной меры $d\mu_{\infty,\infty}$, по мере $d\mu_{\infty,\infty}$ строим функции $S_n^R(\cdot \mid \infty, \infty)$, для которых проверяем условия О. Ш. Именно таким способом было существенно упрощено доказательство существования функций Вайтмана в $P(\varphi)_2$-модели и впервые было доказано их существование в значительно более сложной $(\varphi^4)_3$-модели[1]).

Конечно, не следует думать, что описанный метод построения W_n применим ко всем квантовополевым моделям. Скорее наоборот — существуют сильные сомнения в возможности непосредственного доказательства существования пре-

---

[1]) Существование функций Вайтмана в $(\varphi^4)_3$-модели было доказано в [FeOs, MaSe], где кроме того было доказано существование щели в спектре масс. Обсуждение этих результатов и описание методов их получения можно найти в лекциях Я. Парка «Construction of $(\lambda\varphi^4 - \sigma\varphi^2 - \mu\varphi)_3$ quantum field models» в *Acta Physica Austriaca*, Suppl., XV, 271—321 (1976). Применение методов евклидовой теории поля для анализа $P(\varphi)_2$-модели подробно описано в недавно изданных на русском языке лекциях Б. Саймона [Si 3].

дельной меры $d\mu_{\infty,\infty}$ для взаимодействий, отличных от суперперенормируемых. Но по сравнению с методами, применявшимися на первых этапах развития ККТП, евклидовы методы без сомнения эффективнее и позволяют решать целый ряд более глубоких и интересных для приложений физических проблем, чем проблемы существования поля. К их числу относятся и проблема существования связанных состояний, и вопрос о фазовых переходах в КТП, и проблема нарушения симметрий и т. п. То как все эти проблемы формулируются и решаются в ККТП, излагается в большой программной работе Глимма, Джаффе, Спенсера. Ее изучение, с одной стороны, познакомит читателя с наиболее актуальными задачами ККТП, а с другой — снабдит его рядом конкретных технических идей решения этих задач.

Хочется надеяться, что этот сборник найдет своего читателя как среди математиков, интересующихся КТП, так и физиков, тяготеющих к строгим математическим методам анализа физических проблем, и займет место рядом с уже переведенными на русский язык работами по конструктивной теории поля.

В. Н. Сушко

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ [1])

Майкл Рид

Принстонский университет

Уже много лет в квантовой механике и квантовой теории поля применяются стандартные методы функционального анализа. В самом деле, основные понятия функционального анализа — гильбертово и банахово пространства, ограниченные и неограниченные операторы — являются теми математическими объектами, из которых строятся квантовые модели. Под «стандартными методами» я подразумеваю спектральную теорему, теорему Стоуна и различные методы доказательства самосопряженности и исследования свойств конкретных операторов. Я не вижу необходимости в чтении лекций по этим вопросам, так как многие из вас уже знакомы с ними или же могут обратиться к учебникам по функциональному анализу, а также к отдельным вводным курсам, предназначенным специально для физиков (см., например, [MCP] или [StM]).

Большинство из вас уже хорошо знакомо с квантовой теорией поля и знает, что попытки понять и решить трудные математические проблемы, возникающие в этой области физики, привели к использованию таких разделов математики, как представления групп, теория обобщенных функций, теория функций многих комплексных переменных и теория банаховых алгебр. Вероятно, поэтому вы не были слишком удивлены, узнав, что в квантовой теории поля теперь стала применяться еще одна область анализа: теория вероятностей и случайные процессы. Привлечение этих методов объясняется двумя фактами. Во-первых, замечено, что некоторые задачи теории поля аналогичны задачам статистической механики; во-вторых, как это часто подчеркивали Ирвинг Сигал и Эдвард Нельсон, методы теории вероятностей не только являются средством решения наших задач, они отвечают самой сути изучаемой проблемы, т. е. задачи теории поля в определенной степени являются задачами теории вероятностей.

[1]) M. C. Reed, Functional analysis and probability theory, Constructive Quantum Field Theory, Lecture Notes in Physics, 25, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

Поэтому я собираюсь в этих лекциях рассказать об основных методах и понятиях теории вероятностей, которые будут использоваться далее. Мы начнем с азов, и вы не должны сердиться, если я буду рассказывать известные вам вещи (хотя я допускаю, что некоторые из вас, быть может, и проявят нетерпение).

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Начнем с основных определений. *Вероятностное пространство* — это тройка $\langle \Omega, \Sigma, \mu \rangle$, где Ω — множество, Σ — заданная σ-алгебра подмножеств множества Ω и μ — положительная мера единичной массы на $\langle \Omega, \Sigma \rangle$. Вещественная *случайная величина* — это измеримая вещественная функция на Ω. Если x — случайная величина на Ω, то распределение величины x — это вероятностная мера μ_x на вещественной оси, которая на борелевых множествах A в $\mathbb{R}$ принимает следующие значения:

$$\mu_x\{A\} = \mu\{x^{-1}[A]\} = \mu\{\omega \in \Omega \mid x(\omega) \in A\}.$$

Мы определяем *среднее* $E(x)$ и *дисперсию* $\mathrm{Var}(x)$ величины x как интегралы следующего вида (при условии, что последние существуют):

$$E(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_x(\lambda)$$

и

$$\mathrm{Var}(x) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - E(x))^2 \, d\mu_x(\lambda).$$

Если f — измеримая функция на $\mathbb{R}$, то $f(x)$ — также случайная величина на $\langle \Omega, \Sigma, \mu \rangle$ и

$$E(f(x)) = \int_{\Omega} f(x(\omega)) \, d\mu(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d\mu_x(\lambda).$$

Заметим, что для функции $x \in L^2(\Omega, d\mu)$

$$E(x) = (x, \mathbb{1})_{L^2(\Omega, d\mu)} = \int_{\Omega} x \, d\mu(\omega)$$

и

$$\mathrm{Var}(x) = (x - E(x), x - E(x))_{L^2(\Omega, d\mu)} = \int_{\Omega} (x - E(x)) \, d\mu(\omega).$$

Пример 1а. Рассмотрим эксперимент, который состоит в N-кратном бросании монеты. Обозначим результат бросания через 0, если выпадет герб, и через 1, если выпадет решетка; тогда множество Ω всех исходов может быть записано следующим образом: $\Omega = \{\omega = \langle n_i \rangle_{i=1}^{N} \mid n_i = 0 \text{ или } 1\}$.

Каждая точка ω представляет возможный исход последовательности N бросаний и имеет меру $1/2^N$. Пусть x_i — случайная величина на Ω, заданная следующим образом:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n_i = 1, \\ 0, & \text{если} \quad n_i = 0. \end{cases}$$

Тогда распределение величины x_i равно $\mu_{x_i} = \frac{1}{2}\delta(\lambda) + \frac{1}{2}\delta(\lambda - 1)$, ее среднее $E(x_i) = \frac{1}{2}$, дисперсия $\operatorname{Var}(x_i) = \frac{1}{4}$.

Вернемся теперь к нашим общим определениям.

Пусть x_i, $i = 1, \ldots, k$, — случайные величины на вероятностном пространстве $\langle \Omega, \Sigma, \mu \rangle$. Тогда векторнозначная функция $x(\omega) = \langle x_1(\omega), \ldots, x_k(\omega) \rangle$ определяет меру μ_x на $\mathbb{R}^k$, которая на борелевых множествах A в $\mathbb{R}^k$ принимает значения

$$\mu_x\{A\} = \mu\{x^{-1}[A]\} = \mu\{\omega \mid \langle x_1(\omega), \ldots, x_k(\omega) \rangle \in A\}.$$

Мера μ_x называется ***совместным распределением*** величин x_1, $x_2, \ldots, x_k$.

Обычно независимость случайных величин определяется в терминах совместных распределений, но мы будем пользоваться определением в терминах σ-алгебр. Пусть T — множество индексов. Семейство измеримых множеств $\{A_t\}_{t \in T}$, $A_t \subset \Omega$, называется ***независимым***, если

$$\mu\left\{\bigcap_{i=1}^{k} A_{t_i}\right\} = \prod_{i=1}^{k} \mu\{A_{t_i}\}$$

для любого конечного подсемейства $\{t_i\} \subset T$. Говорят, что семейство σ-алгебр $\{\Sigma_t\}_{t \in T}$ с $\Sigma_t \subset \Sigma$ независимо, если каждое семейство $\{A_t\}$ множеств $A_t \in \Sigma_t$ независимо. Наконец, семейство случайных величин $\{x_t\}_{t \in T}$ ***независимо***, если семейство σ-алгебр $\{\Sigma_t\}_{t \in T}$ независимо; здесь Σ_t — это σ-алгебра, порожденная случайной величиной x_t (т. е. наименьшая σ-алгебра на Ω, относительно которой функция x_t измерима). Из этого определения следует, что если случайные величины $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_k$ независимы, то их совместное распределение μ_x есть в точности прямое произведение мер $\mu_x = \bigotimes_{i=1}^{k} \mu_{x_i}$ в $\mathbb{R}^k$, а это совпадает с обычным определением независимости.

Если $A, B \in \Sigma$ и $\mu(B) \neq 0$, мы вводим

$$P(A \mid B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$$

и называем $P(A|B)$ *условной вероятностью* события A при заданном B. Если A и B — измеримые множества в $\mathbb{R}$ и x, y — случайные величины с $\mu\{x^{-1}[B]\} \neq 0$, мы полагаем

$$P(y \in A \,|\, x \in B) = P(y^{-1}[A] \,|\, x^{-1}[B])$$

и называем $P(y \in A | x \in B)$ *условной вероятностью* того, что y лежит в A, если x лежит в B.

Пример 1b. Вернемся к примеру 1a и рассмотрим множества $S_i^j = \{\omega \in \Omega \,|\, n_j = i\}$ при $i = 0, 1$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. Пусть Σ_j является σ-алгеброй, порожденной S_1^j и S_0^j (т. е. она состоит в точности из четырех множеств $\varnothing$, Ω, S_1^j и S_0^j). Легко проверить, что σ-алгебры Σ_j независимы (это, конечно, является следствием нашего выбора меры); таким образом, и случайные величины x_i независимы. Если $c(\omega)$ — случайная величина, которая каждому ω ставит в соответствие целое число, равное номеру бросания, при котором решетка появляется впервые, или число $N+1$, если решетка не появляется ни при каком бросании, то распределение этой случайной величины равно

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} \delta(\lambda - j) + \frac{1}{2^N} \delta(\lambda - (N+1))$$

и c не зависит ни от одного из x_i. На этом примере можно проверить, что введенные выше понятия условной вероятности соответствуют обычному интуитивному представлению об этих величинах.

Прежде чем закончить рассмотрение этого элементарного примера, давайте несколько изменим точку зрения и зададим вопрос, в каком смысле распределения случайных величин x_i определяют μ. Пусть $\Sigma^{(j)}$ является σ-алгеброй, порожденной множествами $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_j$. Тогда распределение величины x_1 определяет μ на $\Sigma^{(1)}$, совместное распределение величин x_1 и x_2 определяет μ на $\Sigma^{(2)}$ и т. д. Совместное распределение величин $x_1, \ldots, x_N$ определяет μ полностью, так как $\Sigma^{(N)}$ — это и есть алгебра всех подмножеств множества Ω. Заметим, что в этом частном случае вследствие независимости x_i мы можем вычислить любое совместное распределение, используя индивидуальные распределения. Таким образом, мы имеем семейство расширяющихся σ-алгебр $\Sigma^{(1)} \subset \Sigma^{(2)} \subset \ldots$ $\ldots \subset \Sigma^{(N)}$, порождаемых все большими и большими семействами случайных величин. Сужение μ на отдельную алгебру из указанного выше семейства определяется совместными распределениями случайных величин, которые порождают всю алгебру. Такая переформулировка этого тривиального примера будет способствовать интуитивному пониманию последующих более сложных построений.

Переходя к обсуждению другого примера, дадим еще одно определение. Если x_i, $i = 1, \ldots, N$, — случайные величины, то матрица

$$\{\Gamma_{ij}\} = E((x_i - Ex_i)(x_j - Ex_j))$$

называется *корреляционной матрицей* величин x_i. Заметим, что

$$\sum_{i, j=1}^{N} \Gamma_{ij}\bar{\alpha}_i\alpha_j = E\left[\left|\sum \alpha_i (x_i - Ex_i)\right|^2\right],$$

и потому корреляционная матрица положительно определена. Кроме того, если x_i и x_j имеют нулевые средние значения, то $\Gamma_{ij} = (x_i, x_j)_{L^2(\Omega, d\mu)}$.

Пример 2 (гауссовы случайные величины). Случайная величина x называется *гауссовой*, если ее распределение μ_x задано следующим образом:

$$d\mu_x(\lambda) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\lambda - m)^2/(2\sigma^2)} d\lambda$$

для некоторых $\sigma > 0$ и $m \in \mathbb{R}$. Легко проверить, что σ и m являются соответственно дисперсией и средним значением величины x. Конечный набор случайных величин $x_1, \ldots, x_N$ называется гауссовым, если существуют симметричная положительно определенная матрица Q на $\mathbb{R}^N$ и такие вещественные числа $m_1, \ldots, m_N$, что совместное распределение величин $x_1, \ldots, x_N$ равно

$$\frac{(\operatorname{Det}(Q))^{1/2}}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2}(Q(\vec{\lambda}-\vec{m}), (\vec{\lambda}-\vec{m}))} d\vec{\lambda}. \tag{1.1}$$

С помощью интегрирования по «лишним» переменным можно доказать, что совместное распределение любого подмножества или любой линейной комбинации x_i опять является гауссовым; в частности, сами x_i являются гауссовыми случайными величинами. Далее, простые факты из линейной алгебры и прямое вычисление показывают, что $E(x_i) = m_i$ и что корреляционная матрица величин $x_1, \ldots, x_N$ равна Q^{-1}. Следовательно, если $x_1, \ldots, x_N$ — гауссово семейство, то их совместное распределение полностью определяется их средними значениями и корреляционной матрицей. В частности, если корреляционная матрица диагональна (т. е. если $x_1 - m_1, \ldots,$

..., $x_N - m_N$ взаимно ортогональны в $L^2(\Omega, d\mu)$), то совместное распределение является произведением одномерных распределений. Иначе говоря, для гауссова семейства случайных величин с нулевыми средними значениями $(x_i, x_j)_{L^2(\Omega, d\mu)} = 0$ тогда и только тогда, когда x_i и x_j независимы. Таким образом, поскольку конечная линейная комбинация x_i снова является гауссовой случайной величиной с нулевым средним значением, мы можем (при помощи процесса ортогонализации Грама — Шмидта) найти такое множество $\xi_1, \ldots, \xi_N$ независимых гауссовых случайных величин с нулевыми средними значениями и единичными дисперсиями (а это означает, что $\|\xi_i\|^2_{L^2(\Omega, d\mu)} = 1$), что каждая величина x_i будет линейной комбинацией ξ_i.

Наконец, если $x_1, \ldots, x_N$ — случайные величины, то функция

$$C(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = \int_\Omega e^{i \sum \alpha_i x_i(\omega)}\, d\mu(\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i \sum \alpha_i \lambda_i}\, d\mu_{\vec{x}}(\vec{\lambda})$$

называется *характеристической функцией* переменных $x_1, \ldots, x_N$. Заметим, что если $d\mu_{\vec{x}}(\vec{\lambda})$ задано формулой (1.1) (т. е. $x_1, \ldots, x_N$ — гауссово семейство), то

$$C(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = e^{i \sum_i \alpha_i m_i - \sum_{i,j} \Gamma_{ij} \alpha_i \alpha_j}, \tag{1.2}$$

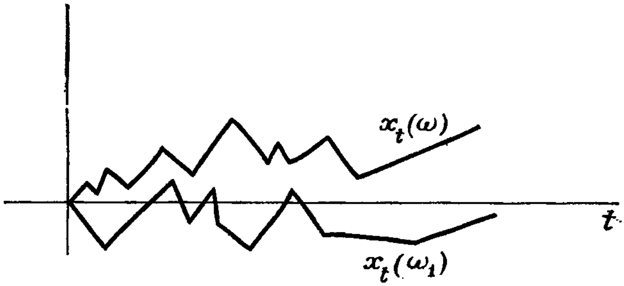
где $\Gamma = Q^{-1}$ есть корреляционная матрица. Обратно, если C задано в виде (1.2), то из единственности преобразования Фурье следует, что совместное распределение величин $x_1, \ldots, x_N$ задается соотношением (1.1), где $Q = \Gamma^{-1}$, так что $x_1, \ldots, x_N$ образуют гауссову систему.

Отметим, что мы рассматривали вещественные случайные величины. Иногда мы будем использовать комплексные случайные величины; в этом случае распределения случайных величин являются мерами на $\mathbb{C}$. В общей ситуации случайная величина является измеримым отображением из $\langle \Omega, \Sigma \rangle$ в другое измеримое пространство $\langle \Omega_1, \Sigma_1 \rangle$.

На этом я заканчиваю обещанное элементарное введение. Чтобы оценить огромное богатство приложений этих элементарных понятий, следует прочитать книги Феллера [Fel].

§ 2. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайный процесс — это семейство $\{x_t\}_{t \in T}$ занумерованных множеством T случайных величин на вероятностном пространстве $\langle \Omega, \Sigma, \mu \rangle$. Пусть вначале T — интервал $(0, \infty)$, так что случайный процесс — это отображение $x_{(\cdot)}(\cdot)$ произведения $(0, \infty) \times \Omega$ в $\mathbb{R}$, обладающее тем свойством, что для каждого $t \in (0, \infty)$ функция $x_t(\cdot)$ измерима на Ω. Заметим, что для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ отображение $t \to x_t(\omega)$ — вещественная функция на $(0, \infty)$. О числах $x_t(\omega)$ следует думать как о значениях некоторой наблюдаемой величины в момент времени t: например, как о скорости частиц, влетающих в счетчик или как о положении частицы при броуновском движении на оси x. Иначе говоря, каждое фиксированное ω соответствует возможной истории изменения определенного параметра t от нуля до бесконечности. Другое $\omega_1 \in \Omega$ будет соответствовать другой траектории, так как, вообще говоря, функции $x_{(\cdot)}(\omega)$ и $x_{(\cdot)}(\omega_1)$ различны.



В сущности мера μ на Ω показывает, какое множество траекторий более, а какое менее вероятно. Например,

$$\mu\{\omega \mid \alpha \leqslant x_{t_0}(\omega) \leqslant \beta\} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\mu_{x_{t_0}}$$

есть вероятность того, что при наблюдении в момент времени t_0 значение определенного параметра будет не меньше α и не больше β. Аналогично, вероятность того, что $\alpha_0 \leqslant x_{t_0} \leqslant \beta_0$ и $\alpha_1 \leqslant x_{t_1} \leqslant \beta_1$, равна

$$\mu\{\omega \mid \alpha_0 \leqslant x_{t_0}(\omega) \leqslant \beta_0;\ \alpha_1 \leqslant x_{t_1}(\omega) \leqslant \beta_1\} = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} d\mu_{t_0,\, t_1},$$

где $\mu_{t_0,\, t_1}$ — совместное распределение величин $x_{t_0}(\cdot)$ и $x_{t_1}(\cdot)$. Мы получим другой пример, положив $M_T(\omega) = \sup\limits_{t \in (0,\, T)} x_t(\omega)$. Предположим, что функция $M_T(\cdot)$ измерима (см. ниже). Тогда $\mu\{\omega \mid M_T(\omega) \leqslant \beta\}$ дает нам вероятность того, что до момента времени T длина пути не превышает β. Основное здесь то, что динамика, лежащая в основе явления, отражена в свойствах меры μ, которая позволяет нам приписывать вероятности некоторым особенно нас интересующим подмножествам множества всех путей. Конечно, для любой заданной динамики мера μ априори неизвестна и должна быть построена некоторым способом на основе физических соображений, отвечающих изучаемой проблеме. Другими словами, динамика, лежащая в основе задачи, должна подсказать нам, каким образом явно построить меру μ на множестве траекторий, ибо именно такая мера дает ответы на вероятностные вопросы о динамике. Мы попытаемся сейчас провести такое построение для случая броуновского движения частицы на вещественной оси.

Сделаем три предположения:

1. Частица начинает движение в начале координат в момент $t=0$.

2. Вероятность того, что во время $t>s$ частица находится в множестве $B\subset\mathbb{R}$, если в момент времени s она находилась в точке λ, равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi|t-s|}}\int_B e^{-(\xi-\lambda)^2/(2|t-s|)}\,d\xi.$$

Для удобства мы полагаем $P(\lambda, \xi, t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(\xi-\lambda)^2/(2t)}$.

3 (условие Маркова). Для частицы, находящейся в момент времени s в множестве A, будущая история зависит от A и не зависит от истории, предшествующей моменту s.

Первое условие говорит о том, что мы интересуемся лишь теми путями, которые начинаются в начале координат, и потому мы считаем, что наше пространство $\Omega=\{$все такие вещественные функции f на $[0, \infty]$, что $f(0)=0\}$. Фиксируем значение нашего случайного процесса в момент времени t условием $x_t(f)=f(t)$, где каждая f рассматривается (априори) как возможная траектория, а $f(t)$ — как положение в момент t. Так как мы хотим, чтобы функция $x_t(\cdot)$ для каждого t была измеримой на Ω, будем считать измеримыми все множества вида $\{f|x_t(f)\in A\}$ для любого t и любого борелева множества A в $\mathbb{R}$. Любая σ-алгебра, содержащая эти множества, содержит также все множества вида

$$\{f\,|\langle x_{t_1}(f), x_{t_2}(f), \ldots, x_{t_n}(f)\rangle\in A\},$$

где $t_1<t_2<\ldots<t_n$ и $A\subset\mathbb{R}^n$. Эти множества называются *цилиндрическими множествами*. Обозначим множество цилиндрических множеств через Σ_0. Посмотрим, как условия 2 и 3 определяют меру, которую мы хотим построить на Σ_0.

Если в условии 2 положить $s=0$, то мы увидим, что распределение x_t задается следующим способом:

$$d\mu_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\lambda^2/(2t)}\, d\lambda = P(0,\ \lambda,\ t)\, d\lambda.$$

Пусть $\mu_{t_1 t_2}$ обозначает совместное распределение величин x_{t_1} и x_{t_2}, $t_1 < t_2$, и пусть A и B будут борелевыми множествами в $\mathbb{R}$. Вероятность того, что x_{t_1} лежит в маленьком интервале $\Delta\lambda_1$, равна $P(0,\ \lambda_1,\ t_1)\,\Delta\lambda_1$, а если дано, что $x_{t_1}=\lambda_1$, то вероятность того, что x_{t_2} лежит в маленьком интервале $\Delta\lambda_2$, равна $P(\lambda_1,\ \lambda_2,\ |t_2-t_1|)\,\Delta\lambda_2$. Таким образом, вероятность того, что x_{t_1} лежит в $\Delta\lambda_1$ и x_{t_2} лежит в $\Delta\lambda_2$, равна произведению

$$P(0,\ \lambda_1,\ t_1)\, P(\lambda_1,\ \lambda_2,\ |t_2-t_1|)\,\Delta\lambda_1\,\Delta\lambda_2. \tag{2.1}$$

Следовательно,

$$\mu_{t_1 t_2}(A\times B) = \int\limits_{\lambda_1\in A}\int\limits_{\lambda_2\in B} P(0,\ \lambda_1,\ t_1)\, P(\lambda_1,\ \lambda_2,\ |t_2-t_1|)\, d\lambda_1\, d\lambda_2. \tag{2.2}$$

Итак, условие 2 определяет совместные распределения любой пары x_{t_1} и x_{t_2}.

Для того чтобы определить совместное распределение трех или более x_t, нам необходимо условие 3. Пусть $t_1 < t_2 < t_3$. Тогда вероятность того, что x_{t_1} принимает значение в $\Delta\lambda_1$, x_{t_2} — в $\Delta\lambda_2$ и x_{t_3} лежит в $\Delta\lambda_3$, есть величина (2.1), умноженная на условную вероятность того, что $x_{t_3}\in\Delta\lambda_3$ при заданных $x_{t_1}\in\Delta\lambda_1$ и $x_{t_2}\in\Delta\lambda_2$. Но, согласно условию 3, эта условная вероятность равна условной вероятности того, что $x_{t_3}\in\Delta\lambda_3$ при заданном $x_{t_2}\in\Delta\lambda_2$. Таким образом, вероятность того, что $x_{t_1}\in\Delta\lambda_1$, $x_{t_2}\in\Delta\lambda_2$ и $x_{t_3}\in\Delta\lambda_3$, равна

$$P(0,\ \lambda_1,\ t_1)\, P(\lambda_1,\ \lambda_2,\ |t_2-t_1|)\, P(\lambda_2,\ \lambda_3,\ |t_3-t_2|)\,\Delta\lambda_1\,\Delta\lambda_2\,\Delta\lambda_3. \tag{2.3}$$

Используя (2.3), мы можем теперь без труда написать интегральное выражение, аналогичное (2.2), для $\mu_{t_1 t_2 t_3}(A\times B\times C)$, совместного распределения величин x_{t_1}, x_{t_2} и x_{t_3}. Другие совместные распределения строятся точно таким же способом, и мы видим, что условия 1 — 3 определяют меру μ на Σ_0. Такая мера по очевидным соображениям называется *мерой цилиндрических множеств.*

Это приводит нас к первой серьезной математической задаче: Σ_0 является алгеброй множеств, но не σ-алгеброй, а для того чтобы рассматривать различные случайные величины (скажем, $y(\omega)$), являющиеся пределами комбинаций x_{t_i}, важно расширить μ на наименьшую σ-алгебру Σ, содержащую Σ_0, поскольку для таких функций множества вида $\{\omega \mid \alpha \leqslant y(\omega) \leqslant \beta\}$ будут лежать в Σ, но, вообще говоря, не будут лежать в Σ_0. Задача состоит в продолжении μ таким способом, чтобы оно было счетно аддитивным. Существует общая теорема (см. [Roy]), в которой утверждается, что это можно сделать, и притом единственным способом, если оказалось, что μ счетно аддитивна уже на Σ_0. Точнее говоря, если $\{A_n\}$ — последовательность непересекающихся множеств в Σ_0 и $A = \bigcup A_n \in \Sigma_0$, то

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Это равносильно тому, что если $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$ лежат в Σ_0 и $\bigcap E_n = \varnothing$, то $\mu(E_n) \to 0$. Используя соображения, связанные с компактностью, это условие можно проверить в нашем случае (доказательство см., например, в [Lo] или [Va]).

Теорема (А. Н. Колмогоров). *Конечно-согласованная мера цилиндрических множеств на* $\prod\limits_{[0,\infty)} \mathbb{R}$ *может быть продолжена до единственной счетно аддитивной меры на минимальной σ-алгебре, содержащей цилиндрические множества.*

Слово «согласованная» означает, что мера цилиндрических множеств обладает тем свойством, что $\mu_{t_1 \ldots t_n}$ получается из $\mu_{s_1 \ldots s_m}$ интегрированием по лишним переменным, каковы бы ни были $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset \{s_1, \ldots, s_m\}$.

Теперь возникает вторая математическая проблема, которая формулируется так: где сосредоточен носитель меры μ? По построению μ является мерой на множестве всех вещественных функций на $[0, \infty)$, подчиненных условию $f(0) = 0$. Однако если наша модель действительно отражает реальные черты броуновского движения, то носителем меры должен быть гораздо более узкий класс функций, как, например, класс непрерывных функций, поскольку интуитивно мы представляем себе броуновские траектории непрерывными. Итак, рассмотрение аналитических свойств броуновских траекторий является первой причиной, побуждающей нас исследовать свойства носителя меры. Другая причина, хотя и носит технический характер, но также является очень важной. Предположим, что $M_T(\omega) = \sup\limits_{t \in (0, T)} \{x_t(\omega)\}$. Ранее мы объясняли, почему $M_T(\cdot)$ может интересовать нас как случайная величина. Однако у нас нет оснований считать функцию $M_T(\cdot)$ измеримой, поскольку она является верхней гранью *несчетного* множества случайных величин, а элементарная теория меры гарантирует измеримость верхней грани лишь счетного множества измеримых функций. С другой стороны, пусть $\widetilde{M}_T(\omega) = \sup_{t_n} \{x_{t_n}(\omega)\}$, где $\{t_n\}$ — счетное плотное в $(0, \infty)$ множество. Тогда функция $\widetilde{M}_T(\cdot)$ измерима и совпадает с M_T на непрерывных функциях. Следовательно, если $C_0(0, \infty) = \{f \mid f$ непрерывна и $f(0) = 0\}$ является множеством полной меры, то его можно взять в качестве пространства траекторий, а тогда верхняя грань по всем траекториям совпадает с $\widetilde{M}_T$ и будет измеримой.

Каково же условие, обеспечивающее непрерывность траекторий? Грубо говоря, такое условие должно гарантировать сосредоточенность распределения величины $x_t - x_s$ вблизи нуля при малых значениях $|t - s|$. Примером такого достаточного условия является неравенство

$$E(|x_t - x_s|^\beta) \leqslant M |t - s|^\alpha \tag{2.4}$$

с некоторыми α, $\beta > 0$. (Подробное доказательство см. в [Va].) В нашем случае совместное распределение величин x_t и x_s равно

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi s}\sqrt{2\pi |t-s|}} e^{-\lambda_1^2/(2s)} e^{-(\lambda_2-\lambda_1)^2/(2|t-s|)} \, d\lambda_1 \, d\lambda_2.$$

Вводя новые переменные $\xi = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ и $\eta = \lambda_2 - \lambda_1$ и интегрируя по ξ, получаем распределение $x_t - x_s$, равное

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi |t-s|}} e^{-\eta^2/(2|t-s|)} \, d\eta.$$

Таким образом,

$$E(|x_t - x_s|^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi |t-s|}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^4 e^{-\eta^2/(2|t-s|)} \, d\eta = 3|t-s|^2,$$

следовательно, условие (2.4) выполнено и почти все траектории непрерывны. В действительности о броуновских траекториях известно гораздо больше. Например, почти все они нигде недифференцируемы. Доказательство этого и других фактов о степени непрерывности траекторий можно найти в [It Mck] или [Va].

Случайный процесс, который мы использовали в качестве примера, носит весьма специальный характер по многим причинам. Прежде всего это *гауссов процесс*, т. е. все совместные распределения конечного множества величин $x_{t_1}, \ldots, x_{t_m}$ *гауссовы*. Во-вторых, это марковский процесс, так как выполнено условие 3. (Более точная аналитическая формулировка этого условия будет дана в § 3.) Наконец, мы рассматривали броуновскую частицу, начинающую движение в начале координат. В более общей ситуации можно рассматривать либо частицу, выходящую из точки λ_0, и в этом случае распределение величины x_t равно $P(\lambda_0, \lambda, t)\,d\lambda$, либо частицу, относительно которой известно лишь начальное распределение $d\mu_0(\lambda)$ координаты x_0, и тогда распределение x_t равно

$$\left(\int_{\mathbb{R}} P(\xi, \lambda, t)\,d\mu_0(\xi)\right)d\lambda.$$

Построение мер цилиндрических множеств в этих случаях аналогично приведенному выше, а продолжить их можно, как и раньше, с помощью теоремы Колмогорова. Конечно, полученные меры μ на множестве траекторий будут различными при различных начальных распределениях.

На этом простом примере мы убедились, что при рассмотрении случайных процессов сразу же возникают две нетривиальные математические задачи: 1) построения мер на множествах траекторий и 2) изучения свойств носителей этих мер.

§ 3. УСЛОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ

Броуновское движение, рассмотренное в предыдущем параграфе, было некоторой разновидностью случайного процесса, точнее марковским процессом. Марковский характер процесса обусловливался специальным предположением 3, которое мы использовали при вычислении меры цилиндрических множеств. Для того чтобы дать точное определение марковского процесса, необходимо ввести понятие условного математического ожидания и изучить некоторые его свойства.

Пусть $\langle \Omega, \Sigma, \mu \rangle$ — вероятностное пространство, и пусть σ-подалгебра $\Sigma_0 \subset \Sigma$. Пусть $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Для каждого $B \in \Sigma_0$ определим

$$S(B) = \int f(\omega)\,\chi_B(\omega)\,d\mu(\omega).$$

Тогда $S(B)$ — ограниченная неположительная мера на Σ_0, абсолютно непрерывная по отношению к ограничению μ на Σ_0 (мы обозначим это ограничение снова через μ). Из теоремы Радона — Никодима следует, что существует единственная функция (точнее класс функций, отличающихся на множествах меры нуль) $E(f|\Sigma_0)$, принадлежащая $L^1(\Omega, \Sigma_0, \mu)$, такая, что

$$S(B) = \int_B E(f|\Sigma_0)(\omega)\, d\mu(\omega)$$

для всех $B \in \Sigma_0$, т. е.

$$\int_B f(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_B E(f|\Sigma_0)(\omega)\, d\mu(\omega).$$

Существенно здесь то, что $E(f|\Sigma_0)(\omega)$ измерима относительно Σ_0, в то время как $f(\omega)$ может и не быть измеримой, поскольку Σ_0 — это подалгебра Σ. Величина $E(f|\Sigma_0)(\omega)$ называется *условным математическим ожиданием f относительно Σ_0*.

Пример 1. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^2$, Σ — борелевы множества в $\mathbb{R}^2$. Предположим (для простоты), что $d\mu = u(x, y)dxdy$, где $u(x, y) > 0$ для всех $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2$. Пусть Σ_0 состоит из всех множеств вида $B \times \mathbb{R}$, где B — борелево множество в $\mathbb{R}$. Тогда ограничение $u(x, y)dxdy$ на Σ_0 совпадает с мерой на $\mathbb{R}$, определенной следующим образом:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} u(x, y)\, dy\right) dx,$$

а условное математическое ожидание функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2, \Sigma, \mu)$ равно

$$E(f|\Sigma_0)(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, u(x, y)\, dy}{\int_{\mathbb{R}} u(x, y)\, dy}.$$

Пример 2. Пусть $\Omega = \mathbb{R}$ и Σ — совокупность всех борелевых множеств. Предположим, что μ — это какая-либо вероятностная мера на $\mathbb{R}$. Пусть Σ_t состоит из всех борелевых подмножеств отрезка $[-t, t]$, а также дополнения к отрезку $[-t, t]$ и самого $\mathbb{R}$. Ограничение μ на Σ_t каждому борелеву подмножеству $B \subset [-t, t]$ ставит в соответствие число $\mu(B)$, а дополнению $[-t, t]$ — число $\int_{|x|>t} d\mu(x)$. Если функция $f \in L^1(\mathbb{R}, \Sigma, d\mu)$, то

$$E(f|\Sigma_t)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |x| \leqslant t, \\ \dfrac{\int_{|x|>t} f(x)\, d\mu(x)}{\int_{|x|>t} d\mu(x)}, & \text{если } |x| > t. \end{cases}$$

Заметим, что функция $E(f|\Sigma_t)(x)$ постоянна при $|x|>t$, как это и должно быть, если функция $E(f|\Sigma_t)$ измерима относительно Σ_t.

Условные математические ожидания обладают следующими элементарными свойствами:

Предложение. 1. *Если* $f\geqslant 0$, *то* $E(f|\Sigma_0)\geqslant 0$.

2. *Если* Σ_{00} *является* σ-*подалгеброй* Σ_0, *то*

$$E(E(f|\Sigma_0)|\Sigma_{00})=E(f|\Sigma_{00}).$$

3. *Если* $g\in L^\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu)$, *то*

$$E(fg|\Sigma_0)=gE(f|\Sigma_0).$$

4. *Если* Σ' — *такая* σ-*подалгебра* Σ, *что* σ-*алгебры* Σ_0 *и* Σ' *независимы, то для* $f\in L^1(\Omega, \Sigma', \mu)$

$$E(f|\Sigma_0)=E(f),$$

т. е. функция $E(f|\Sigma_0)$ *постоянна.*

Доказательство. Свойство 1 очевидно, а свойство 2 следует из определения условного математического ожидания, так как

$$\int\limits_B E(f|\Sigma_0)\,d\mu=\int\limits_B f\,d\mu=\int\limits_B E(f|\Sigma_{00})\,d\mu$$

для всех $B\in\Sigma_{00}$. Предположим, что $B\in\Sigma_0$; тогда по определению

$$\int f\chi_B\,d\mu=\int E(f|\Sigma_0)\chi_B\,d\mu.$$

Аналогично, если $B_i\in\Sigma_0$, $i=1, \ldots, N$, то

$$\int f\sum_1^N c_i\chi_{B_i}\,d\mu=\int E(f|\Sigma_0)\sum_1^N c_i\chi_{B_i}\,d\mu.$$

Согласно теореме о мажорированной сходимости, имеем

$$\int fg\,d\mu=\int E(f|\Sigma_0)\,g\,d\mu \tag{3.1}$$

для любой функции $g\in L^\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu)$. В частности, если $B\in\Sigma_0$, то

$$\int\limits_B fg\,d\mu=\int\limits_B E(f|\Sigma_0)\,g\,d\mu.$$

Поэтому $E(fg|\Sigma_0)=gE(f|\Sigma_0)$ в силу утверждения о единственности теоремы Радона — Никодима. Тем самым доказано свойство 3. Наконец, предположим, что σ-алгебры Σ' и Σ_0 независимы и $A \in \Sigma'$, а $B \in \Sigma_0$. Тогда $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$: следовательно,

$$\int_B \chi_A \, d\mu = \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Таким образом, если $A_i \in \Sigma'$, $i = 1, \ldots, N$, то

$$\int_B \sum c_i \chi_{A_i} \, d\mu = \left(\sum c_i \mu(A_i)\right) \mu(B).$$

Следовательно, опять используя теорему о мажорированной сходимости, получаем

$$\int_B f \, d\mu = \left(\int_\Omega f \, d\mu\right) \mu(B)$$

для любой функции $f \in L^1(\Omega, \Sigma', \mu)$, откуда следует свойство 4.

При заданной σ-подалгебре $\Sigma_0 \subset \Sigma$ условное математическое ожидание является отображением

$$f \xrightarrow{E_{\Sigma_0}} E(f \mid \Sigma_0)$$

пространства Σ-измеримых функций в пространство Σ_0-измеримых функций. Ясно, что E_{Σ_0} линейно и обладает следующими важными дополнительными свойствами:

Предложение. 5. *Для любого* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *отображение* E_{Σ_0} *является сжимающим отображением пространства* $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ *в пространство* $L^p(\Omega, \Sigma_0, \mu)$.

6. *Отображение* E_{Σ_0} *является ортогональным проектированием* $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ *на* $L^2(\Omega, \Sigma_0, \mu)$.

Доказательство. Если $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $f \geqslant 0$, то

$$\| E_{\Sigma_0} f \|_1 = \int E_{\Sigma_0} f \, d\mu = \int f \, d\mu = \| f \|_1.$$

Для произвольной функции f мы имеем $f = f_+ - f_-$, где f_+, $f_- \geqslant 0$, и носители f_+ и f_- не пересекаются. Тогда

$$\| F_{\Sigma_0} f \|_1 \leqslant \| E_{\Sigma_0} f_+ \|_1 + \| E_{\Sigma_0} f_- \|_1 = \| f_+ \|_1 + \| f_- \|_1 = \| f \|_1,$$

и, следовательно, E_{Σ_0} является сжимающим отображением на L^1. Если $f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, то для любого $B \in \Sigma_0$

$$-\| f \|_\infty \mu(B) \leqslant \int_B f \, d\mu \leqslant \| f \|_\infty \mu(B),$$

а потому

$$-\|f\|_\infty \mu(B) \leqslant \int_B E_{\Sigma_0} f \, d\mu \leqslant \|f\|_\infty \mu(B),$$

вследствие чего $\|E_{\Sigma_0} f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Значит, E_{Σ_0} — сжимающее отображение и на L^∞. Теперь свойство 5 вытекает из теоремы М. Рисса о выпуклости.

Для доказательства свойства 6 заметим, что $L^2(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ — замкнутое подпространство в $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, $E_{\Sigma_0}^2 = E_{\Sigma_0}$ и $\operatorname{Ran} E_{\Sigma_0} = L^2(\Omega, \Sigma_0, \mu)$. Таким образом, E_{Σ_0} — это проектирование на $L^2(\Omega, \Sigma_0, \mu)$. Если $f_1, f_2 \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, то

$$(E_{\Sigma_0} f_1, f_2) = (E_{\Sigma_0} f_1, E_{\Sigma_0} f_2) = (f_1, E_{\Sigma_0} f_2);$$

следовательно, $E_{\Sigma_0}^* = E_{\Sigma_0}$ и E_{Σ_0} — ортогональное проектирование.

Обычно условные математические ожидания возникают при рассмотрении σ-алгебры Σ_0, порожденной набором $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ случайных величин, где I — некоторое множество индексов. В такой ситуации $E(x|\Sigma_0)$ часто обозначают через $E(x|\{x_\alpha\}_{\alpha \in I})$. Рассмотрим подробнее случай $I = \{1, 2, \ldots, N\}$, когда мы должны иметь дело с алгеброй Σ_0, порожденной конечным семейством случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Если x — случайная величина, то $E(x|\{x_i\}_{i=1}^N)$ — измеримая относительно Σ_0 функция на Ω. Следовательно, существует такая борелева функция φ на $\mathbb{R}^N$, что $E(x|\{x_i\}_{i=1}^N)(\omega) = \varphi(x_1(\omega), \ldots, x_N(\omega))$. Поэтому, если $B \in \mathbb{R}^N$, то

$$\int_{x^{-1}(B)} E(x|\{x_i\}_{i=1}^N)(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_B \varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)\, d\mu_{x_1, \ldots, x_N}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N),$$

где $\mu_{x_1, \ldots, x_N}$ — совместное распределение величин $x_1, \ldots, x_N$. Условное математическое ожидание имеет особенно простой вид, когда $x, x_1, \ldots, x_N$ — гауссово семейство.

Предложение. *Пусть $x, x_1, \ldots, x_N$ — гауссово семейство случайных величин со средними значениями, равными нулю, и пусть $x_1, \ldots, x_N$ ортонормированы. Тогда*

$$E(x|\{x_i\}_{i=1}^N) = \sum_{i=1}^N (x, x_i)\, x_i.$$

Доказательство. Поскольку величиины $x, x_1, \ldots, x_N$ гауссовы, все онн принадлежат $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$. Далее, функция $x - \sum_{i=1}^{N} (x, x_i) x_i$ ортогоиальна каждой x_i, а потому случайная величина $x - \sum_{i=1}^{N} (x, x_i) x_i$ не зависит от x_i, поскольку все эти случайные величины гауссовы (см. § 1). Используя свойство 4, получаем

$$E\left(x - \sum_{i=1}^{N} (x, x_i) x_i \mid \{x_i\}_{i=1}^{N}\right) = E\left(x - \sum_{i=1}^{N} (x, x_i) x_i\right) =$$
$$= E(x) - \sum_{i=1}^{N} (x, x_i) E(x_i) = 0.$$

Следовательио,

$$E\left(x \mid \{x_i\}_{i=1}^{N}\right) = E\left(\sum_{i=1}^{N} (x, x_i) x_i \mid \{x_i\}_{i=1}^{N}\right) = \sum_{i=1}^{N} (x, x_i) x_i.$$

Введем теперь условные вероятности. Пусть y — случайная велнчина, а A — борелево множество в $\mathbb{R}$. Положим $x = \chi_{y^{-1}(A)}$, где χ_S всегда обозначает характеристическую функцию множества S ($\chi_S(\omega) = 1$ для $\omega \in S$, $\chi_S(\omega) = 0$, если $\omega \notin S$). Обозначим величину $E\left(\chi_{y^{-1}(A)} \mid \{x_i\}_{i=1}^{N}\right)(\omega)$ через $P\left(y \in A \mid \{x_i\}_{i=1}^{N}\right)$ и назовем ее *условной вероятностью того, что y лежит в A при заданных $x_1, \ldots, x_N$*. Соответствующую величину $\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ (см. выше) обозначим через $P(y \in A \mid x_1 = \lambda_1, \ldots, x_N = \lambda_N)$ и назовем *условной вероятностью того, что $y \in A$, если $x_1 = \lambda_1, \ldots, x_N = \lambda_N$*.

Теперь мы можем дать точиое определение марковского процесса. Пусть $\{x_t\}$ — случайный процесс, причем $0 \leqslant t < \infty$. Обозиачим через $\Sigma_{t_1, \ldots, t_n}$ σ-алгебру, порожденную величииами $x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}$, а через $\Sigma_{(a, b)}$ обозиачим σ-алгебру, порожденную величинами x_t, $a < t < b$. Обозиачим соответствующие условные математические ожидаиия через $E_{t_1, \ldots, t_n}$ и $E_{(a, b)}$. Семейство $\{x_t\}_{t \in [0, \infty)}$ называется ***марковским процессом***, если для любого $s > 0$ и любой случайной величины $y \in L^1(\Omega, \Sigma_{(s, \infty)}, \mu)$

$$E_{[0, s]} y = E_s y, \tag{3.2}$$

т. е. $E_{[0, s]} y$ измерима относительио Σ_s. Для задаиного момента времени s алгебра $\Sigma_{(s, \infty)}$ отвечает будущим событням, и, таким образом, в интуитивиом смысле марковское условие можио понимать как условие того, что математическое ожидание иекоторого события в будущем, вычислениое иа осиове информации о настоящем и прошлом, совпадает с математическим ожиданием этого события, вычисленным на основе данных, относящихся к настоящему моменту времени. Покажем, что приведенное ранее сложное определение является лишь строгой формулировкой этой интуитивной идеи. Для этого вернемся к броуновскому движению, рассмотренному в § 2. Пусть $r < s < t$ и A, B, C — борелевы множества в $\mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\operatorname{Prob}\{x_t \in A,\ x_s \in B,\ x_r \in C\} &= \\
&= E\left(\chi_{x_t^{-1}(A)}\chi_{x_s^{-1}(B)}\chi_{x_r^{-1}(C)}\right) = \\
&= E\left(\left(E_{r,s}\chi_{x_t^{-1}(A)}\right)\chi_{x_s^{-1}(B)}\chi_{x_r^{-1}(C)}\right) = \\
&= \int\limits_{x_r^{-1}(C)}\ \int\limits_{x_s^{-1}(B)} \left(E_{r,s}\chi_{x_t^{-1}(A)}\right)(\omega)\,d\mu(\omega) = \\
&= \int\limits_C \int\limits_B \varphi(\xi, \eta)\,d\mu_{r,s}(\xi, \eta),
\end{aligned}$$

где $\varphi(\xi, \eta)$ — это функция $E_{r,s}\chi_{x_t^{-1}(A)}$, записанная в координатах x_r и x_s; $\mu_{r,s}$ — совместное распределение величин x_r и x_s. С другой стороны, в § 2 мы получили, что

$$\begin{aligned}
\operatorname{Prob}\{x_t \in A,\ x_s \in B,\ x_r \in C\} &= \\
&= \int\limits_C \int\limits_B \left(\int\limits_A e^{-(\eta-\lambda)^2/2(t-s)}\,d\lambda\right) d\mu_{r,s}(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

Значит, функция $\varphi(\xi, \eta) = \int\limits_A e^{-(\eta-\lambda)^2/2(t-s)}\,d\lambda$ зависит лишь от η, и потому $E_{r,s}\chi_{x_t^{-1}(A)}$ измерима относительно Σ_s, т. е.

$$E_{r,s}\chi_{x_t^{-1}(A)} = E_s\chi_{x_t^{-1}(A)}.$$

Такие же рассуждения показывают, что

$$E_{r_1, r_2, \ldots, r_n, s} \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{x_{t_i}^{-1}(A_i)} = E_s \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{x_{t_i}^{-1}(A_i)}$$

при $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < s < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ и $A_i \subset \mathbb{R}$. Теперь, используя теорему о мажорированной сходимости и обычные для теории меры рассуждения, получаем, что условие (3.2) выполнено.

Обратимся теперь к общему случаю и определим для марковского процесса $\{x_t\}$ *переходную функцию* $P(s, t, \lambda, A)$, полагая

$$P(s, t, \lambda, A) = \operatorname{Prob}(x_t \in A \mid x_s = \lambda)$$

или, иначе,

$$P(s, t, x_t(\omega), A) = E_s \chi_{x_t^{-1}(A)}.$$

Для любых s, t и λ величина $P(s, t, \lambda, \cdot)$ является вероятностной мерой на $\mathbb{R}$, а для любых s, t и A отображение $\lambda \to P(s, t, \lambda, A)$ — положительная борелева функция на $\mathbb{R}$. Так же как в случае броуновского движения, мы можем записать совместные распределения в терминах переходных функций и начального распределения; например,

$$\mu\{x_t \in A, x_s \in B\} = \int_B \int_{\mathbb{R}} P(s, t, \eta, A) P(0, s, \xi, d\eta)\, d\mu_s(\xi).$$

Пусть $r < s < t$, тогда

$$\mu\{x_t \in A, x_s \in \mathbb{R}, x_r \in B\} = \tag{3.3}$$

$$= \int_B \int_{\mathbb{R}} P(s, t, \eta, A) P(r, s, \xi, d\eta)\, d\mu_r(\xi).$$

Однако

$$(3.3) = \mu\{x_t \in A, x_r \in B\} = \int_B P(r, t, \xi, A)\, d\mu_r(\xi),$$

а потому, используя единственность условного математического ожидания, мы получаем

$$P(r, t, \xi, A) = \int_{\mathbb{R}} P(s, t, \eta, A) P(r, s, \xi, d\eta) \tag{3.4}$$

почти всюду относительно μ_r. Уравнение (3.4) называется уравнением Чепмена — Колмогорова. Оно справедливо, поскольку при заданной мере μ на $\langle \Omega, \Sigma \rangle$ семейство совместных распределений должно удовлетворять условию согласованности. Обратно, пусть заданы переходные функции, тождественно удовлетворяющие (3.4); тогда, используя конструкцию Колмогорова точно так же, как это было сделано в случае броуновского движения, можно построить марковский процесс с заданными переходными функциями.

§ 4. ПОЛУГРУППЫ

В предыдущем параграфе мы видели, что изучение марковских процессов может быть в определенном смысле сведено к изучению переходных функций, удовлетворяющих уравнениям Чепмена — Колмогорова. Система переходных функций называется *стационарной*, а соответствующий марковский процесс — однородным, если $P(s, t, \lambda, A)$ зависит лишь от $|t-s|$. Иначе говоря, для каждого t мы имеем функцию $P(t, \lambda, A)$, которая для фиксированного λ является вероятностной мерой по A, а для фиксированного A является борелевой функцией от λ, так что переходные функции определяются следующим образом:

$$P(s, t, \lambda, A) = P(t-s, \lambda, A).$$

В этом случае уравнения Чепмена — Колмогорова имеют вид

$$P(t+s, \lambda, A) = \int_{\mathbb{R}} P(t, \eta, A)\, P(s, \lambda, d\eta). \tag{4.1}$$

Положим, по определению,

$$(T_t f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} P(t, \lambda, d\xi)\, f(\xi). \tag{4.2}$$

Тогда T_t: $L^\infty \to L^\infty$, $\|T_t f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$, а из уравнения (4.1) следует полугрупповое свойство:

$$T_{t+s} f = T_s T_t f = T_t T_s f.$$

Таким образом, изучение марковских процессов со стационарными переходными функциями естественно приводит нас к исследованию ассоциативной полугруппы сжимающих операторов.

В следующих далее лекциях Нельсона полугруппы на пространстве $L^\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ возникают непосредственно из условных математических ожиданий. Поэтому мы здесь проведем аналогичное построение. Любую функцию $u \in L^\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ можно однозначно представить в виде $u(\omega) = f(x_0(\omega))$, где f — ограниченная борелева функция на $\operatorname{supp} \mu_0 \subset \mathbb{R}$. В действительности отображение $u \to f$ изометрически отображает пространство $L^\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ в $L^\infty(\operatorname{supp} \mu_0, \mu_0)$. Для любой функции $u \in L^\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ мы определим $\tilde{T}_t$ следующим образом:

$$\begin{tikzcd} u = f(x_0(\omega)) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\tilde{T}_t"'] & f(x_t(\omega)) \arrow[r, "E_0"] & E(f(x_t(\omega))|\Sigma_0) \end{tikzcd}$$

Очевидно, что $\tilde{T}_t$ является линейным сжимающим отображением на $L^\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu)$. Докажем полугрупповое свойство.

Пусть A — борелево подмножество $\operatorname{supp}\mu_0$, тогда

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_{t+s}\chi_A(x_0(\omega)) &= E_0\chi_A(x_{t+s}(\omega)) = \\ &= E_0\chi_{x_{t+s}^{-1}(A)} = E_0E_{[0,\,s]}\chi_{x_{t+s}^{-1}(A)} = \\ &= E_0E_s\chi_{x_{t+s}^{-1}(A)} \quad \text{(марковское свойство)} \\ &= E_0P(s,\ t+s,\ x_s(\omega),\ A) = \\ = E_0P(t,\ x_s(\omega),\ A) &\quad \text{(стационарность переходных функций)} \\ &= \widetilde{T}_sP\big(t,\ x_0(\omega),\ A\big) = \widetilde{T}_sE_0\chi_{x_t^{-1}(A)} = \\ &= \widetilde{T}_sE_0\chi_A(x_t(\omega)) = \widetilde{T}_s\widetilde{T}_t\chi_A(x_0(\omega)).\end{aligned}$$

Поскольку линейные комбинации функций $\chi_A(x_0(\omega))$ плотны в $L^\infty(\Omega,\ \Sigma_0,\ \mu)$, а операторы $\widetilde{T}_t$ ограничены, полугрупповое свойство доказано. Ясно, что, используя изоморфизм между пространствами $L^\infty(\operatorname{supp}\mu_0, \mu_0)$ и $L^\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu)$, можно установить изоморфизм между нашей полугруппой на $L^\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ и полугруппой

$$(T_tf)(\lambda) = \int f(\xi)\, P(t,\ \lambda,\ d\xi)$$

на $L^\infty(\operatorname{supp}\mu_0,\ \mu_0)$. Проведенные вычисления показывают, что, используя марковское свойство и предположение о стационарности переходных функций, можно получить полугруппу сжимающих отображений на $L^\infty(\Omega,\ \Sigma_0,\ \mu)$.

Теперь кратко о некоторых необходимых фактах из теории полугрупп. *Сжимающая полугруппа* на банаховом пространстве B — это однопараметрическое семейство $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ сжимающих операторов, обладающих следующим свойством: $T_{s+t} = T_sT_t = T_tT_s$ для всех $s,\ t \geqslant 0$, причем $T_0 = I$. Полугруппа $\{T_t\}$ называется *сильно непрерывной*, если $T_tu - u \to 0$ при $t \to 0$ для любого $u \in B$. Убедиться в нетривиальности условия сильной непрерывности можно на примере броуновского движения, когда полугруппа, заданная уравнениями (4.2), сильно непрерывна на пространстве ограниченных непрерывных функций, но не является сильно непрерывной на пространстве ограниченных измеримых функций. Это связано с тем, что функция $(T_tf)(\lambda)$ должна быть непрерывной для всех $t > 0$, даже если функция f лишь ограничена и измерима.

Особенно важен для нас частный случай $B = L^p(X,\ \mu)$, где L^p — пространство вещественных или комплексных функций; при этом мы будем предполагать, что T_t обладает дополнительными свойствами: $(T_t f)(x) \geqslant 0$, если $f(x) \geqslant 0$, и $T_t \mathbb{1} = \mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ — функция, тождественно равная единице. Любую такую сжимающую полугруппу, заданную на вещественном пространстве $L^p(X, \mu)$, можно еднственным образом продолжить до сжимающей полугруппы на комплексном пространстве $L^p(X, \mu)$; поэтому отныне мы всегда будем рассматривать комплексные банаховы пространства.

Пусть T_t — сильно непрерывная полугруппа. Положим $A_t = t^{-1}(I - T_t)$ и $D(A) = \{u \in B \mid \lim\limits_{t\to 0} A_t u$ существует$\}$. Определим оператор $Au = \lim\limits_{t\to 0} A_t u$ для $u \in D(A)$. Если мы введем $u_s = \int\limits_0^s T_t u\, dt$, то

$$T_r u_s = \int\limits_0^s T_{t+r} u\, dt$$

и

$$A_r u_s = \frac{1}{r} \int\limits_0^s (T_t u - T_{t+r} u)\, dt =$$

$$= \frac{1}{r} \int\limits_0^r T_t u\, dt - \frac{1}{r} \int\limits_s^{s+r} T_t u\, dt \xrightarrow{r\to 0} u - T_s u.$$

Следовательно, $u_s \in D(A)$ для всех $u \in B$. Поскольку $u_s \to u$ при $s \to 0$, то $D(A)$ плотно в B. Кроме того, если $u \in D(A)$, то $A_t T_t u = T_t A_t u$, а потому T_t: $D(A) \to D(A)$ и

$$\frac{d}{dt} T_t u = -AT_t u = -T_t A u.$$

Прн помощи рассуждений такого же типа можно показать замкнутость оператора A. Оператор A называется *инфинитезимальным генератором полугруппы* $\{T_t\}$, и мы будем писать $T_t = e^{-tA}$. Общее описание генераторов сжимающих полугрупп на банаховых пространствах дает теорема Хилле — Иосиды [Hi Ph], но нам потребуется лишь простой частный случай этой теоремы.

Предложение. *Замкнутый оператор A на гильбертовом пространстве H является генератором некоторой сильно непрерывной полугруппы самосопряженных сжимающих операторов в том и только в том случае, если A самосопряжен и $A \geqslant 0$.*

Доказательство. Достаточность немедленно следует из спектральной теоремы. В самом деле, определим

$$e^{-tA}u = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dE_\lambda u.$$

Тогда, используя функциональное исчисление и теорему о мажорированной сходимости, мы докажем полугрупповое свойство и сильную непрерывность. Самосопряженность e^{-tA} является следствием того, что функция $e^{-\lambda t}$ вещественна.

Обратно, предположим, что $\{T_t\}$ — сильно непрерывная, самосопряженная, сжимающая полугруппа на H. Пусть A — генератор $\{T_t\}$. Если $u, v \in D(A)$, то

$$(Au, v) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}(I - T_t)u, v\right) = \lim_{t\to 0}\left(u, \frac{1}{t}(I - T_t)v\right) = (u, Av),$$

и, следовательно, A симметричен. Поскольку T_t — самосопряженный сжимающий оператор, то величина $(T_t u, u)$ вещественна и

$$(T_t u, u) \leqslant \|T_t u\|\,\|u\| \leqslant (u, u).$$

Значит, $\frac{1}{t}((I - T_t)u, u) \geqslant 0$ для любого t, а тогда $(Au, u) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}((I - T_t)u, u) \geqslant 0$. Пусть $\lambda > 0$. Для доказательства самосопряженности A нам достаточно показать, что $\operatorname{Ran}(A + \lambda) = H$ или $\operatorname{Ker}(A^* + \lambda) = \{0\}$. Предположим, что $(A^* + \lambda)v = 0$. Тогда для $u \in D(A)$

$$\frac{d}{dt}(T_t u, v) = -(AT_t u, v) = -(T_t u, A^* v) = \lambda(T_t u, v)$$

и, следовательно, $(T_t u, v) = (u, v)e^{\lambda t}$. Поскольку $\lambda > 0$ и $\{T_t\}$ — сжимающие отображения, то при $(u, v) \neq 0$ мы приходим к противоречию. Однако равенство $(u, v) = 0$ для всех $u \in D(A)$ означает, что $v = 0$, так как $D(A)$ плотно в H. Таким образом, $\operatorname{Ker}(A^* + \lambda) = \{0\}$ и A самосопряжен.

Как и в первой части доказательства, обозначим через e^{-tA} сильно непрерывную полугруппу самосопряженных операторов, порожденную A. Положим $w(t) = T_t u - e^{-tA}u$. Поскольку $w(0) = 0$, $\|w(t)\|^2 \geqslant 0$ и

$$\frac{d}{dt}(w(t), w(t)) = -2(Aw(t), w(t)) \leqslant 0,$$

мы видим, что $w(t) = 0$ для любого t, т. е. $T_t = e^{-tA}$.

Обратимся теперь к изучению следующей проблемы. Предположим, что $\langle\Omega, \mu\rangle$ — вероятностное пространство и

$A \geqslant 0$ — самосопряженный оператор на $L^2(\Omega, \mu)$. При каких условиях e^{-tA} является сжимающей полугруппой на $L^p(\Omega, \mu)$ для $p \neq 2$?

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству (частичному) соответствующей теоремы, дадим несколько определений.

Сильно непрерывная полугруппа ограниченных операторов T_t на банаховом пространстве B называется *ограниченной голоморфной полугруппой в секторе* S_θ, $0 < \theta < \pi/2$, если:

(1) T_t является ограничением на положительную полуось семейства операторов T_z, $z \in S_\theta = \{z \mid |\arg z| < \theta\}$, причем $T_z u$ — голоморфная векторнозначная функция для любых $u \in B$, $z \in S_\theta$ и $T_{z+z'} = T_z T_{z'}$ для z, $z' \in S_\theta$.

(2) Для любого $\theta_1 < \theta$ операторы T_z равномерно ограничены в секторе S_{θ_1} и $T_z u \to u$ при $z \to 0$ в S_{θ_1}.

Заметим, что на $L^2(\Omega, \mu)$ мы можем определить

$$e^{-zA}u = \int_0^\infty e^{-z\lambda}\, dE_\lambda u, \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

Используя свойства экспоненциальных функций и теорему о мажорированной сходимости, без труда можно убедиться в том, что условия (1) и (2) выполнены, и, следовательно, e^{-tA} — ограниченная голоморфная полугруппа в секторе $S_{\pi/2}$, действующая на $L^2(\Omega, \mu)$.

Назовем e^{-tA} *L^p-сжимающей полугруппой, если* $\|e^{-tA}u\|_p \leqslant \|u\|_p$ для любой $u \in L^2 \cap L^p$ и для *любого* $p \in [1, \infty]$. Если отображение $t \to e^{-tA}$ сильно непрерывно для любого $p < \infty$, то e^{-tA} мы будем называть *непрерывной L^p-сжимающей полугруппой.*

Теорема (Стейн). *Пусть $\langle \Omega, \mu \rangle$ — пространство с конечной мерой ($\mu(\Omega) = 1$) и A — положительный самосопряженный оператор на $L^2(\Omega, \mu)$. Тогда:*

(a) *Если отображение e^{-tA} сохраняет свойство положительности (т. е. $(e^{-tA}f)(x) \geqslant 0$ при $f(x) \geqslant 0$) и $e^{-tA}\mathbb{1} = \mathbb{1}$, то e^{-tA} является L^p-сжимающей полугруппой.*

(b) *Любая L^p-сжимающая полугруппа заведомо непрерывна. Кроме того,* $\operatorname{Ker}(e^{-tA}|_{L^p}) = \{0\}$ *для любого* $p > 1$, *и* $\operatorname{Ran}(e^{-tA}|_{L^q})$ *плотен в L^q для любого $q < \infty$.*

(c) *Семейство $\{e^{-tA}\}$ — ограниченная голоморфная полугруппа в секторе*

$$S^{(p)} = \left\{ z \,\Big|\, |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - \left|\frac{2}{p} - 1\right|\right)\right\},$$

где $1 < p < \infty$.

Доказательство. Покажем сначала, что e^{-tA} является сжимающим отображением на любом пространстве L^p. Предположим, что $f \in L^2$ и $f \geqslant 0$. Тогда

$$\| e^{-tA} f \|_1 = (\mathbb{1}, e^{-tA} f) = (e^{-tA}\mathbb{1}, f) = (\mathbb{1}, f) = \| f \|_1.$$

Вещественную функцию $f \in L^2$ мы можем представить в виде $f = f_+ - f_-$, где $f_+, f_- \geqslant 0$ и $(f_+, f_-) = 0$. Следовательно,

$$\| e^{-tA} f \|_1 \leqslant \| e^{-tA} f_+ \|_1 + \| e^{-tA} f_- \|_1 = \| f_+ \|_1 + \| f_- \|_1 = \| f \|_1.$$

Наконец, предположим, что комплексная функция $f \in L^2$. Тогда

$$\begin{aligned} |(e^{-tA} f)(x)| &= \sup_{\text{рациональные } \eta} \{\operatorname{Re}[e^{-i\eta}(e^{-tA} f(x))]\} = \\ &= \sup_{\text{рациональные } \eta} \{\operatorname{Re}[(e^{-tA}(e^{-i\eta} f))(x)]\} = \\ &= \sup_{\text{рациональные } \eta} \{(e^{-tA}(\operatorname{Re} e^{-i\eta} f))(x)\} \end{aligned}$$

для почти всех x. Здесь мы воспользовались тем, что e^{-tA} переводит вещественные функции в вещественные, поскольку e^{-tA} сохраняет свойство положительности. Для любой вещественной функции $g \in L^2$

$$(e^{-tA} g)(x) = e^{-tA} g_+ - e^{-tA}(g_-) \leqslant e^{-tA} g_+ + e^{-tA} g_- = e^{-tA} | g(x) |$$

почти всюду. Следовательно,

$$|(e^{-tA} f)(x)| \leqslant e^{-tA} | f(x) |$$

почти всюду. Значит, $\| e^{-tA} f \|_1 \leqslant \| e^{-tA} | f(x) | \|_1 = \| f \|_1$. Таким образом, для любой функции $f \in L^2$ справедливо неравенство $\| e^{-tA} f \|_1 \leqslant \| f \|_1$.

Если $f \in L^\infty \subset L^2$, то

$$\| e^{-tA} f \|_\infty = \sup_{\substack{\| g \|_1 = 1 \\ g \in L^2}} (e^{-tA} f, g) = \sup_{\substack{\| g \|_1 = 1 \\ g \in L^2}} (f, e^{-tA} g) \leqslant \| f \|_\infty.$$

Следовательно, e^{-tA} — сжимающее отображение также и на L^∞. Тогда по теореме М. Рисса о выпуклости e^{-tA} является сжимающим отображением на всех пространствах L^p.

Для доказательства того, что отображение e^{-zA} на $L^p(\Omega, \mu)$, $1 < p < \infty$, голоморфно в секторе $S^{(p)}$ и ограничено в более узких секторах, нужно воспользоваться обобщением теоремы М. Рисса о выпуклости, которое предложил Стейн. Детали доказательства читатель может найти в [Ste]. Мы же ограничимся проверкой свойства сильной непрерывности. Если $1 \leqslant p \leqslant 2$, то

$$\| e^{-tA} f - f \|_p \leqslant \| e^{-tA} f - f \|_2$$

для $f \in L^2$. Тогда из плотности L^2 в L^p следует свойство сильной непрерывности, поскольку полугруппа $\{e^{-tA}\}$ равномерно ограничена на L^p и сильно непрерывна на L^2. Предположим теперь, что $2 < p < \infty$, и пусть q удовлетворяет условию $1/p + 1/q = 1$. Предположим также, что $e^{-t_0 A}\psi = 0$ для некоторого $\psi \in L^q$. Тогда $e^{-sA}\psi = 0$ для всех $s \geqslant t_0$, и, вследствие аналитичности, $e^{-tA}\psi = 0$ для всех $t > 0$. Поскольку $\{e^{-tA}\}$ сильно непрерывна на L^q, то $\psi = 0$. Таким образом, на L^q равенство $\operatorname{Ker}(e^{-tA}) = \{0\}$ справедливо для любого $t > 0$. Читатель быстро проверит, что сопряженным к оператору e^{-tA}, заданному на L^q, является оператор e^{-tA} на L^p. Отсюда мы заключаем, что $\operatorname{Ran}(e^{-tA})$ плотен в L^p. Пусть $\psi = e^{-t_0 A}\varphi$, $\varphi \in L^p$. Тогда в силу голоморфности внутри сектора $S^{(q)}$, упоминавшейся выше,

$$\| e^{-tA}\psi - \psi \|_p \leqslant \| e^{-(t+t_0)A}\varphi - e^{-t_0 A}\varphi \|_p \to 0$$

при $t \to 0$. Поскольку $\operatorname{Ran}(e^{-t_0 A})$ плотен в L^p, а $\{e^{-tA}\}$ равномерно ограничена, мы получаем сильную непрерывность $\{e^{-tA}\}$ на L^p.

П р е д о с т е р е ж е н и е. Полугруппа $\tilde{T}_t$, которую мы построили ранее (4.2) на $L^\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu_0)$, не является L^p-сжимающей. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что

$$\| \chi_A(x_0(\omega)) \|_{L^1(\Omega, \Sigma_0, \mu_0)} = \mu_0(A),$$

но

$$\| \tilde{T}_t \chi_A(x_0(\omega)) \|_{L^1(\Omega, \Sigma_0, \mu_0)} = \| P(t, x_0(\omega), A) \|_{L^1} = \mu_t(A)$$

и $\mu_t(A) > \mu_0(A)$ для подходящего A. Если бы стационарным был сам построенный нами марковский процесс (т. е. $\mu_t(A) = \mu_0(A)$ для всех t и A), а не переходные функции, то мы имели бы свойство L^p-сжимаемости. По этой причине процессы, которые будет строить Э. Нельсон, являются обобщениями так называемого процесса Орнштейна — Уленбека, а последний процесс стационарен.

§ 5. ОБОБЩЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Пусть x_t, $t > 0$, — случайный процесс рассмотренного ранее типа, т. е. для любого t функция x_t является случайной величиной на некотором вероятностном пространстве. Положим

$$\psi(f) = \int_0^\infty f(t)\, x_t\, dt, \tag{5.1}$$

где f принадлежит некоторому классу E достаточно «хороших» функций. Тогда $f \to \psi(f)$ — линейное отображение пространства E в пространство случайных величин. Это рассуждение подсказывает следующее определение:

Определение. Пусть E — локально выпуклое топологическое пространство и $\langle \Omega, \Sigma, \mu \rangle$ — вероятностное пространство. *Линейное отображение пространства E в пространство случайных величин называется* ***обобщенным случайным процессом на*** $\langle \Omega, \Sigma, \mu \rangle$, ***заданным над*** E.

Часто в качестве E будет выступать некоторое пространство гладких функций, подобное простраиству $S(0, \infty)$ или $S(\mathbb{R}^n)$. По заданному случайиому процессу при помощи соотношения (5.1) всегда можно построить обобщенный случайный процесс, но обратное утверждение верно не всегда. Обобщенные случайные процессы являются «обобщенными функциями со значениями в пространстве случайных величин», в то время как случайиые процессы являются «функциями со зиачеииями в пространстве случайных величин». Имеино это более общее понятие случайного процесса и возникает в квантовой теории поля.

Мы показали в § 2, каким образом случайный процесс можно «реализовать» на множестве всех функций на $[0, \infty)$. Точнее, мы сумели построить вероятностную меру на множестве всех функций и определить значения случайного процесса $\tilde{x}_t$ в точке t таким образом, чтобы конечномерные распределения этого процесса и процесса x_t совпадали.

В начале этого параграфа мы проведем аналогичное построение для $\psi(f)$. Обозначим через E^* пространство, сопряженное к E, а через E^*_{alg} — алгебраическое сопряженное пространство, т. е. множество всех линейных всюду определенных фуикционалов. Сначала определим σ-алгебру на E^*_{alg}. Пусть F — конечномерное подпространство пространства E; положим

$$F_a = \{T \in E^*_{\mathrm{alg}} \mid T(f) = 0 \text{ для всех } f \in F\}.$$

Пусть ρ_F — каноническая проекция E^*_{alg} на E^*_{alg}/F_a. Поскольку E^*_{alg}/F_a изоморфно F^* и F^* конечномерно, то в E^*_{alg}/F_a существует естественное понятие (из $\mathbb{R}^n$) борелева множества. Множество $A \subset E^*_{\mathrm{alg}}$ называется *цилиндрическим множеством, связанным с* F, если A имеет вид $A = \rho_F^{-1}(B)$, где B — борелево множество в E^*_{alg}/F_a. Семейство цилиндрических множеств, связанных с F, мы обозначим через Σ_F. Наименьшую σ-алгебру, содержащую все Σ_F для всевозможных конечномерных подпространств F пространства E, обозначим через Σ_E. Теперь для $f \in E$ и $T \subset E^*_{\text{alg}}$ определим

$$\varphi(f)(T) = \langle f, T\rangle \equiv T(f).$$

Для любого f функция $\varphi(f)$, определенная на E^*_{alg}, измерима относительно Σ_E. Таким образом, если μ^* — вероятностная мера на $\langle E^*_{\text{alg}}, \Sigma_E\rangle$, то $f \to \varphi(f)$ — обобщенный случайный процесс на $\langle E^*_{\text{alg}}, \Sigma_E, \mu^*\rangle$, заданный над E.

Пусть теперь ψ является обобщенным случайным процессом на $\langle \Omega, \Sigma, \mu\rangle$, заданным над E, и пусть $\{f_i\}_{i=1}^n$ — базис конечномерного подпространства F пространства E. Пусть μ_F является совместным распределением случайных величин $\{\psi(f_i)\}_{i=1}^n$, т. е.

$$\mu_F(B) = \mu\{\omega \in \Omega \mid \langle \psi(f_1)(\omega), \ldots, \psi(f_n)(\omega)\rangle \in B\}.$$

Тогда μ_F порождает на E^*_{alg}/F_a меру $\hat{\mu}_F$, определяемую соотношением $\hat{\mu}_F(B) = \mu_F(B)$, где

$$\hat{B} = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \hat{f}_i \mid \langle c_1, \ldots, c_n\rangle \in B \right\}$$

и $\{\hat{f}_i\}_{i=1}^n$ — базис, сопряженный к $\{f_i\}_{i=1}^n$. Определим теперь

$$\mu_F^*(A) = \hat{\mu}_F(\rho_F(A))$$

для цилиндрического множества A в E^*_{alg}, связанного с F. Можно проверить, что μ_F^* не зависит от выбора базиса $\{f_i\}_{i=1}^n$ и меры μ_F^* согласованы. Это означает, что если $F_1 \subset F_2$, то $\mu^*_{F_2}\big|_{\Sigma_{F_1}} = \mu^*_{F_1}$. Следовательно, полагая

$$\mu^*(A) = \mu_F^*(A),$$

где A — цилиндрическое множество, связанное с F, мы получаем меру на семействе цилиндрических множеств в E^*_{alg}. Совместное распределение величин $\{\varphi(f_i)\}_{i=1}^n$ равно

$$\begin{aligned}
\nu(B) &= \mu_F^*\{T \mid \langle \varphi(f_1)(T), \ldots, \varphi(f_n)(T)\rangle \in B\} = \\
&= \mu_F^*\{T \mid \langle\langle f_1, T\rangle, \langle f_2, T\rangle, \ldots, \langle f_n, T\rangle\rangle \in B\} = \\
&= \hat{\mu}_F\left\{ \sum c_i \hat{f}_i \mid \langle c_1, \ldots, c_n\rangle \in B\right\} = \mu_F(B),
\end{aligned}$$

а потому $\{\varphi(f_i)\}_{i=1}^n$ и $\{\psi(f_i)\}_{i=1}^n$ имеют одинаковые совместные распределения. Единственное, что нам осталось доказать для того, чтобы процесс $\psi(\cdot)$ был реализован функцией $\varphi(\cdot)$ на $\langle E^*_{\text{alg}}, \Sigma_E\rangle$, это то, что меру μ^*, определенную пока только на цилиндрических множествах, можно продолжить до вероятностной меры на Σ_E. Эта проблема аналогична проблеме продолжения, с которой мы столкнулись в § 2 и которую разрешили с помощью теоремы Колмогорова.

Теорема (Ленард). *Любая мера цилиндрических множеств на E^*_{alg} продолжается до счетно аддитивной меры на $\langle E^*_{\text{alg}}, \Sigma_E\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\mu^* = \{\mu^*_F\}$ — мера цилиндрических множеств на E^*_{alg}. В силу стандартной леммы из теории меры [Roy] μ^* можно однозначно продолжить в том и только в том случае, если для любой убывающей последовательности $\ldots A_n \supset A_{n+1} \ldots$ цилиндрических множеств A_n из условия «$\mu(A_n) > \delta$ при любом n» вытекает условие $\bigcap_n A_n \neq \varnothing$. Любое A_n имеет следующий вид:

$$A_n = \{T \in E^*_{\text{alg}} \mid \langle T(f_1^{(n)}), \ldots, T(f_{k(n)}^{(n)})\rangle \in B_n \subset \mathbb{R}^{k(n)}\}$$

для некоторых $f_i^{(n)} \in E$, $i = 1, \ldots, k(n)$. Мы можем считать, что все $f_i^{(n)}$ взяты из линейно независимого множества $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, поскольку мы всегда можем изменить B_n, представляя зависимые элементы f как конечные линейные комбинации независимых. Рассмотрим теперь отображение

$$\theta\colon E^*_{\text{alg}} \to \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R},$$

заданное соотношением

$$\theta(T) = \langle T(g_1), T(g_2), \ldots\rangle.$$

Отображение θ является отображением «на», поскольку, если задана точка $\langle w_i\rangle$, мы можем определить T равенством $T(g_i) = w_i$, затем продолжить его по линейности на конечные линейные комбинации g_i, а на оставшемся подпространстве положить T равным нулю. (Заметим, что в общем случае θ не является взаимно однозначным отображением, а его сужение на E^* не является отображением «на».) Для цилиндрического множества S в $\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{R}$ положим $\tilde{\mu}(S) = \mu^*(\theta^{-1}(S))$. Значит, $\tilde{\mu}$ — согласованная мера цилиндрических множеств на $\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{R}$, и, согласно теореме Колмогорова, она имеет счетно аддитивное продолжение на Σ, наименьшую σ-алгебру, содержащую все такие S. Поскольку $\tilde{\mu}(\theta(A_n)) > \delta$ для любого n и $\theta(A_n) \supset \theta(A_{n+1})$, найдется точка $\langle w_i \rangle$, лежащая в $\bigcap_{n=1}^{\infty} \theta(A_n)$, а так как θ является отображением «на», то существует $T \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Таким образом, μ^* можно продолжить.

Следствие 1. *Любой обобщенный случайный процесс ψ над E можно реализовать как канонический процесс φ на $\langle E^*_{\text{alg}}, \Sigma_E, \mu^* \rangle$, где μ^* — построенная выше вероятностная мера.*

В дальнейшем μ^* на $\langle E^*_{\text{alg}}, \Sigma_E \rangle$ будем обозначать просто через μ.

Следствие 2. *Пусть $C(\cdot)$ — такой комплекснозначный положительно определенный функционал на E, что $C(tf)$ является непрерывной функцией от t для любого $f \in E$ и $C(0) = 1$. Тогда существует такая вероятностная мера μ на $\langle E^*_{\text{alg}}, \Sigma_E \rangle$, что*

$$C(f) = \int_{E^*_{\text{alg}}} e^{i\langle f, T \rangle} d\mu(T). \tag{5.2}$$

Функционал C называется *характеристическим функционалом меры* μ.

Доказательство. Положительная определенность C означает, что для любого конечного набора $\{f_i\}_{i=1}^n$ векторов из E матрица $\{C(f_i - f_j)\}$ положительна на $\mathbb{C}^n$. Пусть F — конечномерное подпространство в E. Тогда сужение C на F является непрерывной положительной функцией, причем $C(0) = 1$. По классической теореме Бохнера существует такая единственная вероятностная мера $\hat{\mu}_F$ на F^*, что

$$C(f) = \int_{F^*} e^{i\langle f, T \rangle} d\hat{\mu}_F(T)$$

для любой $f \in F$. Точно так же, как и ранее, сопоставим этой мере меру μ_F на Σ_F. Семейство $\{\mu_F\}$ удовлетворяет условию согласования (вследствие единственности, гарантируемой теоремой Бохнера), и, следовательно, оно определяет меру цилиндрических множеств μ на E^*_{alg}. По теореме Ленарда μ продолжается до вероятностной меры на $\langle E^*_{\text{alg}}, \Sigma_E \rangle$.

Поскольку иметь дело с пространством E^*_{alg} неудобно, важно знать, когда носители мер на $\langle E^*_{\mathrm{alg}}, \Sigma_E\rangle$ лежат в меньших пространствах, в частности в E^*. Достаточное условие дает следующая теорема Минлоса (см. [Ge Vi], [Hid], [Mi]):

Теорема. *Пусть μ — вероятностная мера на $\langle E^*_{\mathrm{alg}}, \Sigma_E\rangle$. Если пространство E ядерно и характеристический функционал μ непрерывен на E, то μ сосредоточена на E^*.*

Следствие. *Пусть ψ — обобщенный случайный процесс на $\langle \Omega, \Sigma, \mu\rangle$, заданный над ядерным пространством E. Предположим, что ψ непрерывен в том смысле, что из $f_\gamma \xrightarrow{E} f$ следует сходимость $\psi(f_\gamma) = \psi(f)$ по мере на $\langle \Omega, \Sigma, \mu\rangle$. Тогда ψ может быть реализован как канонический процесс φ на $\langle E^*, \Sigma_E, \mu^*\rangle$, где μ^* — вероятностная мера на $\langle E^*, \Sigma_E\rangle$.*

Доказательство. Мы уже знаем, что ψ может быть реализован на $\langle E^*_{\mathrm{alg}}, \Sigma_E, \mu^*\rangle$. Однако из условия непрерывности следует непрерывность характеристического функционала μ^* на E, и, таким образом, иоситель μ^* лежит в E^*.

Заметим, что в случае метризуемого пространства E (например, $S(\mathbb{R}^n)$) условие непрерывности может быть заменено требованием того, чтобы из $f_n \xrightarrow{E} f$ следовала сходимость $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$ поточечно почти всюду.

Пример (Канонические коммутациоиные соотношения). Пусть E — вещественное ядерное пространство с непрерывным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Представление соотношений Вейля над E — это пара таких отображений $f \to U(f)$, $g \to V(g)$ пространства E в множество унитарных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве H, что

$$\text{(1)} \quad U(f+g) = U(f)U(g), \quad V(f+g) = V(f)V(g);$$

$$\text{(5.3)} \qquad \text{(2)} \quad V(g)U(f) = e^{i(f,g)}U(f)V(g);$$

(3) из $f_\gamma \xrightarrow{E} f$ следует сильная сходимость $U(f_\gamma) \to$ $\to U(f)$ и $V(f_\gamma) \to V(f)$.

Гельфанд и Виленкин показали [Ge Vi], каким образом любое представление, обладающее циклическим относительно $\{U(f)\}_{f \in E}$ вектором Ω_0, может быть реализовано на $L^2(E^*, \Sigma_E, \mu)$ с подходящей мерой μ. Сейчас мы вкратце изложим этот результат, чтобы продемонстрировать, как используется теорема Минлоса; подробное изложение можно найти в [Ge Vi]. Положим

$$L(f) = (U(f)\Omega_0, \Omega_0)_H.$$

Тогда L — комплекснозначный, непрерывный, положительно определенный функционал на E, удовлетворяющий условию $L(0)=1$. Согласно теореме Минлоса,

$$L(f)=\int\limits_{E^*} e^{i\langle f, T\rangle}\,d\mu(T)$$

для некоторой вероятностной меры μ на $\langle E^*, \Sigma_E\rangle$. Определим

$$S\colon \sum_{i=1}^{n}\alpha_i U(f_i)\Omega_0 \to \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{i\langle f, \cdot\rangle}.$$

Легко проверить, что S продолжается до изометрического оператора, отображающего H на $L^2(E^*, \Sigma_E, \mu)$. Положим

$$\tilde{U}(f)=SU(f)S^{-1},$$
$$\tilde{V}(f)=SV(f)S^{-1}.$$

Тогда действие $\tilde{U}(f)$ и $\tilde{V}(f)$ на $h\in L^2(E^*, \Sigma_E, \mu)$ задается следующими соотношениями:

$$(5.4)\qquad \begin{aligned}(\tilde{U}(f)h)(T)&=e^{i\langle f, T\rangle}h(T),\\ (\tilde{V}(f)h)(T)&=(\tilde{V}(f)\mathbb{1})(T)\,h(T+f).\end{aligned}$$

Обратно, задавая любую вероятностную меру μ на $\langle E^*, \Sigma_E\rangle$, мы с помощью соотношений (5.4) определяем на $L^2(E^*, \Sigma_E, \mu)$ представление соотношений Вейля над E. Оказывается, что два таких представления эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие меры $d\mu_1$ и $d\mu_2$ (т. е. каждая мера абсолютно непрерывна относительно другой).

Замечание. Возникает естественный вопрос, почему соотношения (5.3) являются разумным обобщением соотношений Вейля, заданных над конечномерным пространством E. Действительно, ведь мы могли бы определить представление соотношений Вейля как пару таких семейств $\{U_k(t)\}$, $\{V_l(t)\}$ сильно непрерывных унитарных групп на гильбертовом пространстве H, что

$$(5.5)\qquad \begin{aligned}&(1)\quad [U_k(t), U_l(s)]=0=[V_k(t), V_l(s)],\\ &(2)\quad V_k(t)U_l(s)=e^{ist\delta_{kl}}U_l(s)V_k(t).\end{aligned}$$

Конечно, если задано представление в форме (5.3), то всегда можно построить представление в форме (5.5), выбирая в E ортонормированный относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ базис $\{f_k\}$ и полагая $U_k(t)=U(tf_k)$, $V_k(t)=V(tf_k)$. Однако, чтобы перейти от (5.5) к (5.3), нужно показать, что имеют смысл некоторые бесконечные произведения $\prod_k U_k(t_k)$ и $\prod_k V_k(s_k)$. Поскольку это действительно так, любое представление в виде (5.5) можно непрерывно продолжить до представления в виде (5.3) (см. [Re]).

Часто обобщенные случайные процессы появляются в следующей ситуации. Пусть $(\cdot, \cdot)$ — непрерывное скалярное произведение на ядерном пространстве E. Тогда $e^{-\frac{1}{2}(f, f)}$ является непрерывным характеристическим функционалом, и по теореме Минлоса существует такая вероятностная мера μ на $\langle E^*, \Sigma_E \rangle$, что

$$e^{-\frac{1}{2}(f, f)} = \int_{E^*} e^{i\langle f, T \rangle} d\mu(T).$$

Пусть теперь $f_1, \ldots, f_n$ — независимые векторы из E. Тогда

$$e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j} \alpha_i \alpha_j (f_i, f_j)} = e^{-\frac{1}{2}\left(\sum \alpha_i f_i, \sum \alpha_i f_i\right)} =$$

$$= \int_{E^*} e^{i\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(f_i)(T)} d\mu(T) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum \alpha_i \lambda_i} d\mu_{\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)}(\lambda).$$

Используя замечания, сделанные в § 1, получаем, что $\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)$ — гауссова система (т. е. $d\mu_{\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)}$ — многомерное гауссово распределение) с нулевыми средними значениями и корреляционной матрицей $\Gamma_{ij} = (f_i, f_j)$. По этой причине μ называется *гауссовой мерой на* E^*, а $\varphi(\cdot)$ — гауссовым процессом с нулевым средним и корреляционным функционалом, равным (f, g).

Следующая теорема в сущности является следствием из доказательства теоремы Минлоса.

Теорема. *Пусть E — ядерное пространство, μ — мера на E^*, а C — ее характеристический функционал. Пусть также $(\cdot, \cdot)_0$ — непрерывное скалярное произведение на E, а H_0 — пополнение E относительно $(\cdot, \cdot)_0$. Предположим, что C непрерывен на H_0. Пусть T — оператор типа Гильберта — Шмидта на H_0, удовлетворяющий следующим условиям:*

(a) *T — взаимно однозначный оператор;*

(b) *$E \subset \operatorname{Ran} T$ и $T^{-1}(E)$ плотно в H_0;*

(c) *отображение* $E \xrightarrow{T^{-1}} H_0$ *непрерывно. Тогда носитель* μ *лежит в* $(T^{-1})^* H_0^* \subset E^*$.

В этом утверждении символы $(T^{-1})^*$ и H_0^* обозначают «сопряженный оператор» и «сопряженное пространство» в смысле двойственности между E^* и E, а не относительно топологии скалярного произведения на H_0. Доказательство теоремы можно найти в [Hid], [Um]. В заключение приведем пример, иллюстрирующий применение этой теоремы.

Пример. Пусть μ — мера на $S'(\mathbb{R}^n)$, соответствующая гауссову процессу с нулевым средним и корреляционным функционалом $(f, (-\Delta+1)^{-1}g)$. Положим $P=-\Delta+1$ и обозначим через H_{-1} замыкание $S(\mathbb{R}^n)$ по норме $\|P^{-1/2}f\|_2$. Роль пространства H_0 из теоремы будет играть пространство H_{-1}. Положим $H=L^2(\mathbb{R}^n)$. Поскольку $P^{1/2}$ — изометрический оператор, отображающий H в H_{-1}, то оператор $T\colon H_0 \to H_0$ будет оператором типа Гильберта — Шмидта в том и только в том случае, если $T_0 = P^{-1/2}TP^{1/2}$ будет оператором типа Гильберта — Шмидта на H. Вследствие того что $T = P^{1/2}T_0P^{-1/2}$, мы имеем $T^{-1} = P^{1/2}T_0^{-1}P^{-1/2}$ и $(T^{-1})^* = P^{-1/2}(T_0^{-1})^* P^{1/2}$. Таким образом, если T_0 является оператором типа Гильберта — Шмидта на H, а T удовлетворяет условиям (a), (b) и (c), то носитель μ будет лежать в

$$(T^{-1})^* H_{-1}^* = P^{-1/2}(T_0^{-1})^* P^{1/2}(P^{-1/2}H) = P^{-1/2}(T_0^{-1})^* H.$$

Положим $T_0 = P^{-n/4}P_1^{-\alpha}Q^{-\beta}$, где $P_1 = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+1\right)$ и $Q=(x^2+1)$.

Предположим, что

$$\beta > \frac{n}{4}, \quad \alpha > 0. \tag{5.6}$$

Тогда T_0 будет оператором типа Гильберта — Шмидта, так как он является интегральным оператором с ядром

$$[\widehat{((p^2+1)^{-\frac{n}{4}}(p_1^{\,2}+1)^{-\alpha})}(x-y)](y^2+1)^{-\beta}$$

а это ядро принадлежит $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, если выполнены условия (5.6). Это следует из оценки

$$\int \frac{d^n p}{(p^2+1)^{n/2}(p_1^2+1)^{\alpha}} < \infty$$

для любого $\alpha > 0$. Кроме того, легко проверить, что оператор $T = P^{-1/2} T_0 P^{1/2}$ удовлетворяет условиям (a), (b) и (c) теоремы. Таким образом, носитель μ лежит в

$$\{P^{n/4 - 1/2} P_1^{\alpha} Q^{\beta} f \mid f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

для любых α и β, удовлетворяющих условиям (5.6). При $n = 2$ носитель μ лежит в множестве

$$\{P_1^{\alpha} Q^{\beta} f \mid f \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$$

для любого $\alpha > 0$. В частности, для почти всех (относительно μ) $g \in S'(\mathbb{R}^n)$ функция $\left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + 1\right)^{-\alpha} g$ локально квадратично интегрируема. Доказательство того, что μ сосредоточена на траекториях, которые локально принадлежат $P^{n/4 - 1/2} P_1^{\alpha} L^2$, содержится в работе Дж. Кэннона [Ca]. Дополнительные свойства носителя μ можно найти в работе М. Рида и Л. Розена [Re Ro].

ЕВКЛИДОВЫ ФУНКЦИИ ГРИНА И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ ВАЙТМАНА[1])

Конрад Остервальдер

Гарвардский университет, Кембридж, Массачусетс

I. ВВЕДЕНИЕ

Евклидовы методы в релятивистской квантовой теории поля используются очень давно. Впервые идея перехода к мнимым временам или энергиям (с целью замены индефинитной метрики Минковского положительно определенной евклидовой метрикой) появилась в работе Дайсона по перенормировке [Dy]. Затем предложение рассматривать продолжения функций Грина теории поля в область мнимых времен выдвинули Фрадкин [Fr], Накано [Na], Вик [Wi] и, особенно настойчиво, Швингер [Schw 1]. При таком подходе свойства функций Грина можно изучать, исследуя свойства решений некоторых дифференциальных уравнений или n-точечных функций от операторов евклидова поля. На возможность чисто евклидова подхода к квантовой теории поля впервые указал Симанзик [Sy 3,8]. Он понял, что построение функций Грина для мнимых времен (они называются евклидовыми функциями Грина или функциями Швингера) по заданной формальным образом плотности функции Лагранжа, возможно, проще, чем прямое построение обобщенных функций Вайтмана. Например, строгий математический смысл знаменитому интегралу Фейнмана [Fey 1,2] можно придать лишь в рамках евклидовой теории (для теорий, описывающих одни бозоны, это сделано в [Nel 5], а для теорий, описывающих бозоны и фермионы, — в [Os Sch 1, 2] и [Oz]). Принципы и идеи, развитые в работе Симанзика, стали сегодня основой евклидового подхода к теории поля. Следующий решающий шаг связан с именем Нельсона, который дал математически строгую формулировку евклидовой теории бозе-поля, использовав для этого понятие марковского поля [Nel 2—5]. Доказанная им теорема реконструкции и работа Гуэрры, в которой впервые использовалась схема Нельсона [Gu], проложили широкую дорогу евклидовым методам в конструктивной теории поля.

В работах Нельсона и Симанзика, а также в большинстве других работ по евклидовой теории поля существенную роль играют евклидовы полевые операторы. Однако все, что мы

---

[1]) K. Osterwalder, Euclidian Green's functions and Wightman distributions, Constructive Quantum Field Theory, Lecture Notes in Physics, **25**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

до сих пор знали или предполагали о релятивистских теориях, не гарантирует существования таких операторов. Правда, их существование следует из так называемого условия положительности Нельсона — Симанзика для функций Швингера, но есть основания думать, что оно выполняется лишь для теорий, описывающих скалярные бозоны, и необязательно справедливо для теорий, описывающих фермионы.

Поэтому естественно попытаться работать лишь с функциями Швингера и изучать их связь с релятивистской теорией. Поскольку функции Швингера необязательно являются вакуумными ожиданиями евклидова поля, мы получаем вовсе не «евклидову теорию поля», а лишь «евклидову формулировку (релятивистской!) теории поля».

В этих лекциях мы собираемся определить, а также исследовать функции Швингера в рамках аксиом Вайтмана. Основная задача состоит в отыскании условий, при которых функции Швингера в самом деле являются евклидовыми функциями Грина хорошо определенной вайтмановской теории.

План этих лекций таков. Во-первых, мы дадим краткий обзор основных определений и результатов аксиоматической квантовой теории поля и приведем точное определение функций Швингера. Во-вторых, мы исследуем, какие свойства функций Швингера вытекают из аксиом Вайтмана. И наконец, покажем, как обобщенные функции Вайтмана можно восстановить по функциям Швингера $\mathfrak{S}_n$, удовлетворяющим следующим условиям:

(E0) принадлежность к определенному классу обобщенных функций;

(E1) евклидова ковариантность;

(E2) положительная определенность;

(E3) симметричность;

(E4) свойство распадения на пучки.

Условия (E0) — (E4) *необходимы и достаточны* для существования обобщенных функций Вайтмана, удовлетворяющих всем аксиомам Вайтмана. Точнее, имеет место следующее соответствие:

Евклидова теория		*Релятивистская теория*
E0 Принадлежность к определенному классу обобщенных функций	$\longleftrightarrow$	W0 Принадлежность к определенному классу обобщенных функций
E1 Ковариантность		W1 Ковариантность
E2 Положительная определенность		W2 Положительная определенность
		W5 Спектральное условие

$$\begin{bmatrix}\text{E0, E1}\\ \text{E2}\end{bmatrix} + [\text{симметричность}] \longleftrightarrow \begin{bmatrix}\text{W0, W1}\\ \text{W2, W5}\end{bmatrix} + [\text{локальность}],$$

$$\begin{bmatrix}\text{E0, E1}\\ \text{E2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{свойство распа-}\\ \text{дения на пучки}\end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix}\text{W0, W1}\\ \text{W2, W5}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{свойство распа-}\\ \text{дения на пучки}\end{bmatrix}.$$

Для приложеиий в конструктивной теории поля свойство принадлежности к определенному классу обобщенных функций (E0), по-видимому, мало пригодно. Поэтому мы потребуем, чтобы функции Швингера принадлежали к другому классу обобщенных функций [условие (E0′)], и покажем, что условий (E0′), (E1)—(E4) достаточно для восстановления вайтмановской теории. Приведенная выше схема будет снова справедливой, если все стрелки в ней направить только вправо. Условие (E0′) заключается в том, что евклидовы функции Грина $\mathfrak{S}_n$ должны быть обобщениыми функциями умеренного роста; кроме того, оно содержит ограничение на порядок сингулярности $\mathfrak{S}_n$ при больших n. Я думаю, что именно второй результат будет полезен для коиструктивной теории поля; теорема об эквивалентности, хотя и носит более общий характер, представляет, вероятно, чисто эстетический интерес.

Замечание. Шрадер и Саймон обнаружили ошибку в доказательстве одной вспомогательной леммы в работе, посвященной аксиомам евклидовых функций Грина ([Os Sch 3, лемма 8.8]). Следовательно, требование умеренности роста, приведенное в работе [Os Sch 3], возможно, является слишком слабым и не позволяет восстановить вайтмановскую теорию.

В этих лекциях мы ограничимся рассмотрением теорий, содержащих лишь одно нейтральное скалярное поле; для обобщения на случай конечного или счетного числа полей с различными трансформационными свойствами требуются лишь незначительные и совершенно очевидные изменения (см. [Os Sch 3, 4]). Бо́льшая часть материала этих лекций заимствована из работ [Os Sch 3, 4].

Мне приятно поблагодарить доктора Дж. Фрёлиха, внимательно прочитавшего рукопись и сделавшего много критических замечаний. Я также выражаю свою признательность проф. Б. Саймону, приславшему мне еще до публикации копию гл. II своих цюрихских лекций [Si 3]. В период подготовки этих заметок они были для меня очень полезными.

II. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ ВАЙТМАНА, ФУНКЦИИ ВАЙТМАНА, ЕВКЛИДОВЫ ФУНКЦИИ ГРИНА

В этом разделе мы приведем аксиомы Вайтмана, сформулировав их на языке обобщенных функций Вайтмана, и дадим краткое описание некоторых классических результатов аксиоматической теории поля. Подробное изложение можно найти в монографиях Йоста [Jo], Стритера и Вайтмана [Str Wig], Боголюбова, Логунова, Тодорова [BLT*], а также в приведенной там литературе.

Пусть $\varphi(x)$ — нейтральное скалярное поле, для которого справедливы все аксиомы Вайтмана. Тогда его вакуумные ожидания, или обобщенные функции Вайтмана,

$$\mathscr{W}_n(\underline{x}) = \mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) = (\Omega, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)\Omega)$$

обладают следующими свойствами:

Принадлежность к определенному классу обобщенных функций. Для любого n функция $\mathscr{W}_n$ является обобщенной функцией умеренного роста:

(W0) $$\mathscr{W}_n(\underline{x}) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n}); \quad \mathscr{W}_0 = \mathbb{1}.$$

Здесь и всюду ниже $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{4n}$, $x_i = (x_i^0, \mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^4$.

Релятивистская ковариантность. Для любого n функция $\mathscr{W}_n$ пуанкаре-инвариантна:

(W1) $$\mathscr{W}_n(\underline{x}) = \mathscr{W}_n(\underline{\Lambda x} + a)$$

для любого $(a, \Lambda) \in P_+^\uparrow$, где $\underline{\Lambda x} + a = (\Lambda x_1 + a, \ldots, \Lambda x_n + a)$.

Положительная определенность. Для любой конечной последовательности основных функций $f_0, f_1, \ldots, f_N$, где $f_0 \in \mathbb{C}$, $f_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$, $n = 1, \ldots, N$,

(W2) $$\sum_{n, m} \mathscr{W}_{n+m}(f_n^* \times f_m) \geqslant 0,$$

причем функция $f_n^* \times f_m$ определяется соотношениями

$$(f_n^* \times f_m)(\underline{x}, \underline{y}) = f_n^*(\underline{x}) f_m(\underline{y})$$

и

$$f_n^*(\underline{x}) = f_n^*(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}_n(x_n, \ldots, x_1) = \bar{f}_n(\overleftarrow{\underline{x}}),$$

где $\bar{f}$ — функция, комплексно сопряженная функции f.

Локальность. Для любых n и $k = 1, \ldots, n-1$

(W3) $$\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_{k+1}, x_k, \ldots, x_n),$$

если $(x_k - x_{k+1})^2 < 0$.

Свойство распадения на пучки. Для любого пространственно подобного a и любых $k = 1, \ldots, n-1$; $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_k)$; $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_{n-k})$

(W4) $$\lim_{\lambda \to \infty} \mathscr{W}_n(\underline{x}, \underline{y} + \lambda a) = \mathscr{W}_k(\underline{x}) \mathscr{W}_{n-k}(\underline{y}).$$

Спектральное условие. Вследствие трансляционной инвариантности функций $\mathscr{W}_n$ существует такая обобщенная функция $W_{n-1} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4(n-1)})$, что $\mathscr{W}_n(\underline{x}) = W_{n-1}(\underline{\xi})$, где $\underline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ и $\xi_k = x_{k+1} - x_k$. Тогда

$$\text{(W5)} \quad \operatorname{supp} \widetilde{W}_{n-1} \subset \overline{V}_+^{n-1} = \{\underline{q} \mid q_i \in \overline{V}_+, \ i = 1, \ \ldots, \ n-1\},$$

где

$$\widetilde{W}_{n-1}(\underline{q}) = (2\pi)^{-4(n-1)} \int \exp\left[-i \sum q_k \xi_k\right] W_{n-1}(\underline{\xi}) \, d^{4(n-1)}\xi$$

— преобразование Фурье от W_{n-1}, а $\overline{V}_+$ — замкнутый верхний световой конус и $q_k \xi_k = q_k^0 \xi_k^0 - \mathbf{q}_k \xi_k$.

Замечание. Соотношения (W1)—(W5) нужно понимать в смысле теории обобщенных функций.

По заданной последовательности обобщенных функций Вайтмана, удовлетворяющих условиям (W0)—(W5), можно восстановить гильбертово пространство $\mathscr{H}$ физических состояний, вакуумный вектор $\Omega \in \mathscr{H}$, полевые операторы $\varphi(x)$ и унитарное представление группы $P_+^\uparrow$ в $\mathscr{H}$. Это утверждение называется теоремой реконструкции Вайтмана (см. [Wig 1]).

Введем векторнозначные обобщенные функции, определив их формально соотношениями

$$\Psi_n(x_1, \underline{\xi}) = \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \Omega,$$

где $\underline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ и $\xi_k = x_{k+1} - x_k$ для $k = 1, \ldots, n-1$; Ψ_n является обобщенной функцией умеренного роста со значениями в $\mathscr{H}$. Если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4m})$, то скалярное произведение двух векторов

$$\Psi_n(f) = \int f(x, \underline{\xi}) \Psi_n(x, \underline{\xi}) \, dx \, d\underline{\xi}, \quad \Psi_m'(g) = \int g(x, \underline{\xi}) \Psi_m(x, \underline{\xi}) \, dx \, d_{\underline{\xi}}$$

равно

$$(\Psi_n(f), \Psi_m(g)) =$$
$$= \int \bar{f}(x, \underline{\xi}) g(x', \underline{\xi}') W_{n+m-1}(-\overleftarrow{\underline{\xi}}, -x + x', \underline{\xi}'') \, dx \, dx' \, d\underline{\xi} \, d\underline{\xi}'.$$

Преобразование Фурье от Ψ_n, как обычно, определяется при помощи соотношения $\widetilde{\Psi}_n(\tilde{f}) = \Psi_n(f)$, где $\tilde{f}$ — преобразование Фурье от $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$.

Теорема 1. *Носитель $\widetilde{\Psi}_n(\underline{g})$ содержится в $\overline{V}_+^n$ (здесь $n = 1, 2, \ldots$).*

Рассмотрим такую основную функцию $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$, что $\tilde{f}(\underline{q}) = 0$, если $\underline{q} \in \overline{V}_+^n$. Перепишем норму $\|\Psi_n(f)\|$ в терминах обобщенной функции $\tilde{W}_{2n-1}$; тогда, используя спектральное условие, получаем, что эта норма равна нулю.

Изучим теперь преобразование Лапласа $\Psi_n(z, \underline{\zeta})$ от $\hat{\Psi}_n(\underline{q})$. Преобразование Лапласа обобщенных функций умеренного роста изучено подробно (см., например, [Sz, Li, Vl, Str Wig]). Следующая теорема, которую мы будем использовать далее, принадлежит Бросу, Эпштейну и Глазеру [Bro E G].

Теорема 2. *Пусть $\tilde{F}(\underline{q})$ — обобщенная функция из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n})$ с носителем в $\bar{V}^n_+$. Тогда существует такая функция $G(\underline{z})$, голоморфная в трубчатой области вида $\mathcal{T}^n_+ = \{\underline{z} \mid \underline{z} = \underline{x} + i\underline{y} \in \mathbb{C}^{4n}, \underline{y} \in V^n_+\}$, что:*

(a) *преобразование Фурье F от $\tilde{F}$ является граничным значением функции G:*

$$\lim_{\lambda \to 0} \int G(\underline{x} + i\lambda\underline{y}) f(\underline{x})\, d^{4n}x = F(f)$$

для любых $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$, $\underline{y} \in V^n_+$;

(b) *найдутся такие положительные константы C, α, β, что*

(1) $$|G(\underline{z})| \leqslant C(1 + |\underline{z}|)^{\alpha}\left[1 + \left(\min_{1 \leqslant j \leqslant n}(y^0_j - |\mathbf{y}_j|)\right)^{-\beta}\right]$$

для всех $z \in \mathcal{T}^n_+$.

Функция $G(\underline{z})$ называется преобразованием Лапласа от $\tilde{F}$ и может быть определена (эвристически) как

$$G(\underline{z}) = \int \exp\left(i \sum z_l q_l\right) \tilde{F}(\underline{q})\, d^{4n}q.$$

Теорема 2 сразу же обобщается на случай обобщенных функций $\tilde{F}$ со значениями в некотором банаховом пространстве. Применяя эту теорему к нашим векторнозначным обобщенным функциям $\tilde{\Psi}_n$, можно показать, что преобразование Лапласа

$$\Psi_n(z, \underline{\zeta}) = \int \exp\left[izq_0 + i \sum \zeta_l q_l\right] \tilde{\Psi}_n(q_0, \ldots, q_{n-1})\, d^{4n}q$$

является векторнозначной функцией, голоморфной в $\mathcal{T}^n_+$, с граничным значением $\Psi_n(x, \underline{\zeta})$.

Применяя теорему 2 к обобщенным функциям $\tilde{W}_n(\underline{q})$, получаем функции Вайтмана $W_n(\underline{\zeta})$, которые голоморфны в $\mathcal{T}^n_+$. Очевидно,

(2) $$W_{n-1}(\underline{\zeta}) = (\Omega, \Psi_n(z, \underline{\zeta})).$$

Из трансляционной инвариантности вектора Ω следует, что правая часть соотношения (2) не зависит от z. Нетрудно доказать также следующую лемму:

Лемма 3 ([Jo, стр. 109]). *Пусть* $(z, \underline{\zeta}) \in \mathscr{T}^n_+$, $(z', \underline{\zeta}') \in \mathscr{T}^m_+$. *Тогда*

$$(\Psi_n(z, \underline{\zeta}), \ \Psi_m(z', \underline{\zeta}')) = W_{n+m-1}(-\overset{\leftarrow}{\bar{\underline{\zeta}}}, \ -\bar{z} + z', \ \underline{\zeta}').$$

Используя свойство релятивистской инвариантности (W1) и теорему Баргмана — Холла — Вайтмана, можно показать, что функции Вайтмана $W_n(\underline{\zeta})$ (но не векторы $\Psi_n(\underline{\zeta})$) имеют однозначное аналитическое продолжение в расширенную трубчатую область $\mathscr{T}^n_{+,\,\mathrm{ext}} = \{\underline{\zeta} \mid \Lambda\underline{\zeta} \in \mathscr{T}^n_+$ для некоторого $\Lambda \in L_+(\mathbb{C})\}$, где $L_+(\mathbb{C})$ — группа комплексных преобразований Лоренца с определителем 1. Функции $\mathscr{W}_n(\underline{z})$, определяемые соотношениями $\mathscr{W}_n(\underline{z}) = W_{n-1}(\underline{\zeta})$; где $\zeta_k = z_{k+1} - z_k$, голоморфны в области $\mathfrak{S}^n_{\mathrm{ext}} = \{\underline{z} \mid \underline{\zeta} \in \mathscr{T}^{n-1}_{+,\,\mathrm{ext}}\}$, и их граничные значения совпадают с обобщенными функциями $\mathscr{W}_n(\underline{x})$. Наконец, используя свойство локальности (W3), можно показать, что функция $\mathscr{W}_n(\underline{z})$ допускает однозначное аналитическое продолжение в область $\mathfrak{S}^n_{\mathrm{ext,\,perm}} = \{\underline{z} \mid (z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}) \in \mathfrak{S}^n_{\mathrm{ext}}$ для некоторой перестановки $\pi\}$. Это продолжение мы обозначим опять через $\mathscr{W}_n(\underline{z})$. Полученная функция инвариантна относительно преобразований из неоднородной комплексной группы Лоренца $IL_+(\mathbb{C})$, а также относительно перестановок аргументов $z_1, \ldots, z_n$.

Область $\mathfrak{S}^n_{\mathrm{ext.\,perm}}$ содержит множество $\mathscr{E}^n = \{\underline{z} \mid \underline{z} \in \mathbb{C}^n$, $\mathrm{Re}\, z^0_k = 0$, $\mathrm{Im}\, \mathbf{z}_k = 0$, $z_k \neq z_l$ для любых $1 \leqslant k < l \leqslant n\}$. Точки, лежащие в $\mathscr{E}^n$, называются *евклидовыми точками* (несовпадающих аргументов).

Определеиие. Сужение функции Вайтмаиа $\mathscr{W}_n(\underline{z})$ на $\mathscr{E}^n$ называется n-точечной *евклидовой функцией Грина* или *функцией Швингера.*

Положим $\mathfrak{S}_0 = \mathscr{W}_0 = \mathbb{1}$ и

$$\mathfrak{S}_n(\underline{x}) = \mathfrak{S}_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{W}_n((ix^0_1, \mathbf{x}_1), \ldots, (ix^0_n, \mathbf{x}_n))$$

для $\underline{x} \in \Omega^n = \{\underline{x} \mid x_i \neq x_j, \ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$.

Используя свойство инвариантности функций Вайтмана, мы сразу же получаем следующую лемму:

Лемма 4. *Функции Швингера $\mathfrak{S}_n(\underline{x})$ инвариантны относительно действия собственной неоднородной группы враще-*

ний ISO_4, а также относительно перестановок аргументов $x_1, \ldots, x_n$.

Введем функции Швингера $S_{n-1}(\underline{\xi})$, зависящие от разностей аргументов $\xi_k = x_{k+1} - x_k$:

(3) $$S_{n-1}(\underline{\xi}) = W_{n-1}((i\xi_1^0, \xi_1), \ldots, (i\xi_{n-1}^0, \xi_{n-1})) = \mathfrak{S}_n(\underline{x}),$$

где $\underline{x} \in \Omega^n$. Определим также векторнозначные вещественно-аналитические функции $\Psi_n^E(\underline{\xi})$:

$$\Psi_n^E(x, \underline{\xi}) = \Psi_n((ix^0, \mathrm{x}), (i\xi_1^0, \xi_1), \ldots, (i\xi_{n-1}^0, \xi_{n-1})),$$

где $x^0 > 0$, $\xi_k^0 > 0$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Положим $\underline{\vartheta\xi} = ((-\xi_1^0, \xi_1), \ldots$ $\ldots, (-\xi_n^0, \xi_n))$. Из леммы 3 и приведенного выше определения вытекает следующая лемма:

Лемма 5. *Пусть все* x^0, ξ_k^0, x'^0, $\xi_k'^0$ *положительны. Тогда*

(4) $$(\Psi_n^E(x, \underline{\zeta}), \Psi_m^E(x', \underline{\xi}')) = S_{n+m-1}(-\underline{\overleftarrow{\vartheta\xi}}, -\vartheta x + x', \underline{\xi}').$$

Из леммы 5, конечно, вытекает свойство положительной определенности функций Швингера (см. свойство (E2) ниже).

Из свойства распадения на пучки (W4) следует, что

(5) $$\lim_{\lambda \to \infty} (\Phi, U(\lambda a, \mathbb{1}) \Phi') = (\Phi, \Omega)(\Omega, \Phi')$$

для любых двух векторов Φ и Φ' из $\mathscr{H}$ и пространственно подобного a.

Лемма 6. *Если* $0 < x_1^0 < \ldots < x_n^0$, $0 < y_1^0 < \ldots < y_m^0$ *и* $a = (0, \mathbf{a})$, *то*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathfrak{S}_{n+m}(\vartheta x_n, \ldots, \vartheta x_1, y_1 + \lambda a, \ldots, y_m + \lambda a) =$$
$$= \mathfrak{S}_n(\vartheta x_n, \ldots, \vartheta x_1)\, \mathfrak{S}_m(y_1, \ldots, y_m).$$

Лемму можно доказать с помощью подстановки $\Phi = \Psi_n^E(\underline{\xi})$, $\Phi' = \Psi_m^E(\underline{\xi}')$, $\xi_k = x_{k+1} - x_k$, $\xi_k' = y_{k+1} - y_k$ в уравнение (5).

Функции Швингера — это вещественно-аналитические функции, но они также порождают обобщенные функции. Прежде чем исследовать этот вопрос, сделаем математическое отступление. Мы приведем без доказательства несколько простых лемм, связанных с обобщенными функциями и преобразованием Лапласа. Они содержатся в работах [Str Wid, VI, Os Sch 3]; впрочем, их легко получить и из приведенных нами результатов.

Обобщенные функции и преобразование Лапласа

Обозначим через $\mathbb{R}_\pm$ открытые полуинтервалы $(0, \pm\infty)$, а через $\overline{\mathbb{R}}_\pm$ — их замыкания. Пространство функций $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_\pm$, с индуцированной топологией обозначим через $\mathscr{S}(\mathbb{R}_\pm)$. Пространство $\mathscr{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ — это пространство всех определенных на $\overline{\mathbb{R}}_+$ функций, принадлежащих классу C^∞ на $\mathbb{R}_+$, все производные которых непрерывно продолжаются на $\overline{\mathbb{R}}_+$ и быстро убывают на бесконечности. Топология на $\mathscr{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ задается системой полунорм

$$|g|_{m,+} = \sup_{\substack{x > 0 \\ k \leqslant m}} (1 + x)^m |g^{(k)}(x)|.$$

Лемма 7. *Топологическое пространство $\mathscr{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ изоморфно факторпространству $\mathscr{S}(\mathbb{R})/\mathscr{S}(\mathbb{R}_-)$.*

Главное в этой лемме то, что любая функция из $\mathscr{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ является сужением на $\overline{\mathbb{R}}_+$ некоторой функции из $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Сопряженное к $\mathscr{S}(\mathbb{R})/\mathscr{S}(\mathbb{R}_-)$ пространство является полярой пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}_-)$, т. е. множеством обобщенных функций $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} T \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. Следовательно, по лемме 7 обобщенную функцию из $\mathscr{S}'(\overline{\mathbb{R}}_+)$ можно отождествить с обобщенной функцией из $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, носитель которой лежит в $\overline{\mathbb{R}}_+$. Функции $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_+)$ поставим в соответствие функцию $\check{f}$:

$$\check{f}(p) = \int e^{-px} f(x)\, dx \,|_{\overline{\mathbb{R}}_+}.$$

Лемма 8. *Отображение $f \to \check{f}$ пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}_+)$ в $\mathscr{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ непрерывно, образ его плотен в $\mathscr{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, а ядро равно нулю.*

Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp} T \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. Тогда по лемме 7 обобщенной функции T соответствует обобщенная функция из $\mathscr{S}'(\overline{\mathbb{R}}_+)$ (которую мы снова обозначим через T), и, следовательно, существуют такие константы C и m, что для любой функции $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_+)$.

$$|T(\check{f})| \leqslant C |\check{f}|_{m,+} \equiv c |f|'_m. \tag{6)}$$

С другой стороны, с помощью преобразования Лапласа S обобщенной функции T можно определить обобщенную функцию из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}_+)$. Пусть для $x > 0$

$$S(x) = \int e^{-xp} T(p)\, dp;$$

тогда для $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_+)$ мы положим

$$S(f) = \int f(x) S(x)\, dx. \tag{7}$$

(Точнее, определим сначала $S(f)$ на функциях из $\mathscr{S}(\mathbb{R}_+)$, имеющих компактный носитель, затем докажем непрерывность S, используя аналогичную (1) оценку для $S(x)$, и, наконец, продолжим S на все функции из $\mathscr{S}(\mathbb{R}_+)$.)

Основной результат нашего математического отступления содержится в следующей теореме:

Теорема 9. *Пусть T — обобщенная функция из $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, причем* $\operatorname{supp} T \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. *Определим S с помощью соотношения* (7). *Тогда для любой функции $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_+)$*

$$S(f) = T(\check{f}), \tag{8}$$

$$|S(f)| \leqslant C |f|'_m, \tag{9}$$

где константы C, m зависят только от T. Обратно, если S — обобщенная функция из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющая неравенству (9) *для некоторых C и m, то существует такая единственная обобщенная функция $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ с носителем в $\overline{\mathbb{R}}_+$, что для нее справедливо соотношение* (8).

В дальнейшем нам потребуется обобщение теоремы 9 на случай нескольких переменных, которое нетрудно показать, используя теорему о ядре. Введем необходимые для этого понятия и определения.

Обозначим через $\mathbb{R}^{4n}_+$ множество $\{\underline{\xi} \mid \xi^0_k > 0,\ k = 1, \ldots, n\}$, а через $\overline{\mathbb{R}}^{4n}_+$ — его замыкание. Функции $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n}_+)$ поставим в соответствие функцию $\check{f}$:

$$\check{f}(q) = \int \exp\left[-\sum_{k=1}^{n} (q^0_k \xi^0_k + i\mathbf{q}_k \boldsymbol{\xi}_k)\right] f(\underline{\xi})\, d^{4n}\xi \,|_{\overline{\mathbb{R}}^{4n}_+}.$$

На пространстве $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n}_+)$ введем следующее семейство норм:

$$|f|'_m = |\check{f}|_{m,+} = \sup_{\substack{\underline{q} \in \mathbb{R}^{4n}_+ \\ |\alpha| \leqslant m}} (1 + |\underline{q}|)^m |\check{f}^{(\alpha)}(\underline{q})|. \tag{10}$$

Обобщенной функции $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n})$, $\operatorname{supp} T \subset \overline{\mathbb{R}}^{4n}_+$, мы опять сопоставляем (определенную формально) функцию S:

$$S(\underline{\xi}) = \int \exp\left[-\sum_{k=1}^{n} (\xi^0_k q^0_k + i\boldsymbol{\xi}_k \mathbf{q}_k)\right] T(\underline{q})\, d^{4n}q \,|_{\mathbb{R}^{4n}_+}$$

(преобразование Лапласа по переменным q_k^0 и преобразование Фурье обобщенной функции по переменным $\mathbf{q}_k$).

Для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^{4n})$ соотношение

$$S(f) = \int f(\underline{\xi}) S(\underline{\xi})\, d^{4n}\xi$$

снова задает обобщенную функцию из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+^{4n})$. Используя определенные выше S и T, можно сформулировать теорему 9 для случая нескольких переменных. Мы предоставляем это в качестве упражнения читателю.

В дальнейшем нам потребуются еще два подпространства пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$:

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{4n}) = \{f \mid f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n}),\ f^{(\alpha)}(\underline{x}) = 0,$$
$$\text{если } x_i = x_k \text{ для некоторых } i \neq k \text{ и любых } \alpha\}$$

и

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}_<^{4n}) = \{f \mid f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n}),\ \operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_<^{4n}\},$$

где $\mathbb{R}_<^{4n} = \{\underline{x} \mid 0 < x_1^0 < \ldots < x_n^0\}$.

Теперь мы можем приступить к изучеиию обобщенных функций, порождаемых функциями Швингера. Для $\xi_k^0 > 0$ функция $S_n(\underline{\xi})$ является преобразованием Фурье — Лапласа обобщенной функции $\tilde{W}_n(\underline{q})$ (см. уравнение (3)), и, следовательно, можно использовать теорему 9 (обобщенную на случай нескольких переменных). Таким образом, мы получаем следующую лемму:

Лемма 10. (a) *Функции Швингера $S_n(\underline{\xi})$, зависящие от разностей аргументов, определяют обобщенные функции из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+^{4n})$, которые задаются соотношениями*

$$S_n'(f) = \int f(\underline{\xi}) S_n(\underline{\xi})\, d^{4n}\xi,$$

где $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^{4n})$. Кроме того, $S_n(f) = \tilde{W}_n(\check{f})$, и для некоторых C и m

$$|S_n(f)| \leqslant C |f|_m'.$$

(b) *Функции Швингера $\mathfrak{S}_n(\underline{x})$ определяют обобщенные функции из $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{4n})$.*

Заметим, что из п. (a) следует, что $\mathfrak{S}_n(\underline{x})$ определяет обобщенную функцию из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_<^{4n})$. Для доказательства пункта (b) нужно воспользоваться дополнительными геометрическими соображениями (см. [Os Sch 3, Si 3]).

В следующем предложении мы собрали все ранее полученные свойства функций Швингера, а также сформулировали основной результат об эквивалентности двух подходов к релятивистской квантовой теории поля.

Предложение I. *Функции Швингера, отвечающие теории Вайтмана, обладают следующими свойствами:*

Принадлежность к определенному классу обобщенных функций. *Для любого* $n \geqslant 1$

(E0) $$\mathfrak{S}_n(\underline{x}) \in \mathscr{S}'_0(\mathbb{R}^{4n}); \qquad \mathfrak{S}_0 = \mathbb{1}.$$

Функция S_n *определяет некоторую обобщенную функцию из* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n}_{+})$ *и непрерывна относительно некоторой* $|\cdot|'_m$*-нормы.*

Евклидова ковариантность. *Для любого* $n \geqslant 1$ *и любого* $(a, R) \in iSO_4$.

(E1) $$\mathfrak{S}_n(\underline{x}) = \mathfrak{S}_n(\underline{Rx} + a).$$

Положительная определенность. *Для любого конечного набора* $f_0, f_1, \ldots, f_N$ *основных функций* $f_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n}_{<})$

(E2) $$\sum_{n,\, m} \mathfrak{S}_{n+m}(\theta f_n^* \times f_m) \geqslant 0,$$

где $\theta f_n(\underline{x}) = f_n(\underline{\vartheta x})$.

Симметричность. *Для любой перестановки* π

(E3) $$\mathfrak{S}_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{S}_n(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}).$$

Свойство распадения на пучки. *Для любых* $n, m, f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n}_{<})$, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4m}_{<})$ *и любого* $a = (0, \mathrm{a}) \in \mathbb{R}^4$

(E4) $$\lim_{\lambda \to \infty} \mathfrak{S}_{n+m}(\theta f^* \times g_{\lambda a}) = \mathfrak{S}_n(\theta f^*)\, \mathfrak{S}_m(g),$$

где $g_{\lambda a}(\underline{x}) = g(\underline{x} + \lambda a)$.

Обратно, обобщенные функции, удовлетворяющие условиям (E0)—(E4), *являются функциями Швингера, отвечающими однозначно определенной теории Вайтмана.*

Доказательство. Свойства (E0)—(E4) можно вывести из аксиом Вайтмана с помощью лемм 4, 5, 6 и 10. Поскольку для $f \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^{4n})$ функционал $\int \mathfrak{S}_n(\underline{x}) f(\underline{x})\, d\underline{x}$ может быть определен как обычный интеграл, свойства ковариантности, положительной определенности, симметричности и распадения на пучки справедливы в смысле обобщенных функций, если они выполнены поточечно.

Для доказательства обратного утверждения достаточно вместо условия (E0) предположить, что S_n принадлежит пространству, алгебраически сопряженному к $\mathscr{S}(\mathbb{R}_+^{4n})$, и непрерывна относительно некоторой $|\cdot|'_m$-нормы. Тогда свойство (E0) является следствием леммы 8 и свойств (E1), (E3). По теореме 9 из свойства (E0) следует существование таких обобщенных функций $\tilde{W}(q)\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n})$, носители которых содержатся в $\overline{\mathbb{R}}_+^{4n}$, что для $\underline{\xi}\in\mathbb{R}_+^{4n}$

$$S_n(\underline{\xi})=\int\exp\left[-\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^0q_k^0+i\xi_k\mathbf{q}_k)\right]\tilde{W}_n(\underline{q})\,d^{4n}q \tag{11}$$

(в смысле равенства обобщенных функций). Будем считать, что $\tilde{W}_n(\underline{q})$ — это преобразования Фурье зависящих от разностей аргументов обобщенных функций Вайтмана нашей теории. Из свойства (E1) следует лоренц-инвариантность обобщенных функций $\tilde{W}_n(\underline{q})$ (см. [Nel 3]), а потому их носители лежат в $\bar{V}_+^n$. Свойства положительной определенности (W2) и распадения на пучки (W4) сразу же вытекают из соответствующих свойств (E2) и (E4). Наконец, свойство локальности (W3) является следствием условия симметрии (E3) и всех уже установленных аксиом (см. [JO, стр. 120]). В следующем разделе мы более подробно обсудим это доказательство.

Нормы $|\cdot|'_m$ (они определяются соотношением (6)), фигурирующие в условии (E0), мало удобны для применений в конструктивной теории поля. Поэтому мы рассмотрим другой класс обобщенных функций, предположив, что

существуют такая норма Шварца $|\cdot|_S$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R}_+^4)$ и такое $L>0$, что для любых n и $f_k\in\mathscr{S}(\mathbb{R}_+^4)$, $k=1,\ldots,n$,

$$|S_n(f_1\times f_2\times\ldots\times f_n)|\leqslant(n!)^L\prod_{k=1}^{n}|f_k|_S. \tag{E0$'$}$$

Наш основной результат содержится в следующем предложении:

Предложение II. *Обобщенные функции, удовлетворяющие условиям* (E0′), (E1)—(E4), *определяют единственную теорию Вайтмана, для которой они являются функциями Швингера.*

III. РЕКОНСТРУКЦИЯ ТЕОРИИ ВАЙТМАНА

В этом разделе мы, исходя из последовательности функций Швингера $\mathfrak{S}_n$, удовлетворяющих условиям (E0′), (E1)—(E4), построим теорию Вайтмана, которой эти функции соответствуют. Тем самым мы докажем предложение II. Кроме того, это построение сделает более прозрачным доказательство предложения I.

Пусть $\underline{\mathcal{S}}_<$ — векторное пространство последовательностей $\underline{f}=(f_0, f_1, \ldots)$, где $f_0 \in \mathbb{C}$, $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n}_<)$ и для n, бо́льших некоторого конечного N, $f_n=0$. Для $\underline{f}$, $\underline{g} \in \underline{\mathcal{S}}_<$ положим

$$\langle \underline{f}, \underline{g}\rangle = \sum_{n, m} \mathfrak{S}_{n+m}(\theta f_n^* \times g_m).$$

Согласно (E2), $\langle\ ,\ \rangle$ — неположительно определенное скалярное произведение. Пусть $\mathcal{N}=\{\underline{f} \mid \underline{f} \in \underline{\mathcal{S}}_<,\ \|\underline{f}\|^2=\langle \underline{f}, \underline{f}\rangle=0\}$. Пополнение пространства $\underline{\mathcal{S}}_</\mathcal{N}$ является гильбертовым пространством $\mathcal{H}$, которое в дальнейшем будет играть роль пространства физических состояний. Обозначая через Φ естественное вложение $\underline{\mathcal{S}}_<$ в $\mathcal{H}$, получаем для $\underline{f}$, $\underline{g} \in \underline{\mathcal{S}}_<$ соотношение $(\Phi(\underline{f}), \Phi(\underline{g}))=\langle \underline{f}, \underline{g}\rangle$. Положим $\Omega=\Phi((1, 0, 0, \ldots))$. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n}_<)$ для некоторого n. Введем $\Phi_n(f)=\int \Phi_n(\underline{x}) f(\underline{x}) d^{4n}x = \Phi(\underline{f})$, где $\underline{f}$ имеет компоненты $f_n=f$ и $f_k=0$ для $k \neq n$. Определим также $\Psi_n^E(x, \underline{\xi})=\Phi_n(\underline{x})$, где $\xi_k=x_{k+1}-x_k$; Ψ_n^E является векторнозначной обобщенной функцией из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n}_+)$. Согласно свойству положительной определенности (E2), скалярное произведение двух таких векторов опять задается уравнением (4) (см. лемму 5).

Теперь покажем, что «функции» $\Psi_n^E(x_1, \underline{\xi})$ после сглаживания по пространственным переменным допускают аналитическое продолжение по переменным $x_1^0, \xi_1^0, \ldots, \xi_{n-1}^0$. Положим

(12) $$\Psi_n^E(x_1^0, \underline{\xi}^0 \mid g) = \int \Psi_n^E(x_1, \underline{\xi})\, g(\mathbf{x}_1, \underline{\boldsymbol{\xi}})\, d\mathbf{x}_1\, d\underline{\boldsymbol{\xi}}$$

и

(13) $$S_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{\xi}^0}, x^0+x'^0, \underline{\xi}'^0 \mid gh) = \\ = (\Psi_n^E(x^0, \underline{\xi}^0 \mid g),\ \Psi_m^E(x'^0, \underline{\xi}'^0 \mid h)),$$

где $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n})$, $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3m})$. Пусть $\mathbb{C}_+=\{z \mid \operatorname{Re} z>0\}$ и $\mathbb{C}_+^k=(\mathbb{C}_+)^k$.

Теорема 11. *Для заданной функции gh обобщенные функции $S_{n+m-1}(\underline{\xi}^0 \mid gh)$ являются сужениями на произведение положительных полуосей голоморфных в C_+^{n+m-1} функций $S_{n+m-1}(\underline{\zeta}^0 \mid gh \mid)$. Существуют векторнозначные функции*

$\Psi_n^E(z^0, \underline{\zeta}^0 | g)$, *аналитические в* $\mathbb{C}_+^{n+m-1}$, *такие, что*

(14) $S_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{\zeta}^0}, \bar{z}^0 + z'^0, \underline{\zeta}'^0 | gh) =$

$$= (\Psi_n^E(z^0, \underline{\zeta}^0 | g), \ \Psi_m^E(z'^0, \underline{\zeta}'^0 | h)).$$

Кроме того, в области $\underline{\zeta}^0 \in \mathbb{C}_+^{n+m-1}$ *для* $S_{n+m-1}(\underline{\zeta}^0 | gh)$ *справедлива оценка*

(15) $|S_{n+m-1}(\underline{\zeta}^0 | gh)| \leqslant$

$$\leqslant C |g|_s |h|_s (1 + |\underline{\zeta}^0|)^a \left(1 + [\min_k \operatorname{Re} \zeta_k^0]^{-1}\right)^b,$$

где норма Шварца $|\cdot|_S$ *и постоянные* a, b, C *зависят от* S_{n+m-1}.

Замечания. (1) Из оценки (15) с помощью стандартных рассуждений можно вывести, что $S_{n+m-1}(\underline{\zeta}^0 | gh)$ является преобразованием Лапласа некоторой обобщенной функции из $\mathcal{S}'$ с носителем в $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+m-1}$. Следовательно $S_{n+m-1}(\underline{\xi})$ представима в виде (11), где $\tilde{W}_n(\underline{q})$ — преобразование Фурье обобщенной функции Вайтмана, зависящей от разностей аргументов. Отметим, что в доказательстве предложения I этот факт был следствием предположения о $|\cdot|'_m$-непрерывности обобщенных функций S_n. Свойство положительной определенности (W2) следует из (13).

(2) Приведенное ниже доказательство теоремы 11 принадлежит Остервальдеру и Шрадеру [Os Sch 4]. Построение аналитического продолжения функции S_n была независимо и одновременно найдено также Глазером [Gl 1, 2].

Доказательство теоремы 11. А. Построение гамильтониана. Пусть $t \geqslant 0$. Определим $\hat{T}_t$: $\underline{\mathcal{S}}_< \to \underline{\mathcal{S}}_<$ с помощью соотношений

$$(\hat{T}_t \underline{f})_n (\underline{x}) = f_n(x_1^0 - t, \mathbf{x}_1, \ldots, x_n^0 - t, \mathbf{x}_n).$$

Если $\underline{f}$, $\underline{g} \in \underline{\mathcal{S}}_<$, то, согласно свойству (E0′), отображение $t \to \langle \underline{f}, \hat{T}_t \underline{g} \rangle$ непрерывно и существуют такие зависящие от $\underline{f}$ постоянные C и m, что

(16) $$|\langle \underline{f}, \hat{T}_t \underline{f} \rangle| \leqslant C(1 + t^m).$$

Кроме того, для $t \geqslant 0$, $s \geqslant 0$ мы имеем $\hat{T}_t \hat{T}_s = \hat{T}_{t+s}$ и $\langle \underline{f}, \hat{T}_t \underline{g} \rangle = \langle \hat{T}_t \underline{f}, \underline{g} \rangle$. Согласно неравенству Шварца, для любой $\underline{f} \in \underline{\mathcal{S}}_<$ с $\|\underline{f}\| = 1$

(17) $$|\langle \underline{f}, \hat{T}_t \underline{f} \rangle| \leqslant \|\underline{f}\| \|\hat{T}_t \underline{f}\| = \langle \underline{f}, \hat{T}_{2t} \underline{f} \rangle^{1/2}.$$

Итерируя (17) и используя неравенство (16), получаем

$$|\langle \underline{f}, \hat{T}_t \underline{f}\rangle| \leqslant \langle \underline{f}, \hat{T}_{2^n t} \underline{f}\rangle^{2^{-n}} \leqslant [C(1+(2^n t)^m]^{2^{-n}} \to 1$$

при $n \to \infty$. Поскольку $\hat{T}_t$ оставляет инвариантным множество $\mathcal{N}$ векторов с нулевой нормой, можно с помощью соотношения $T_t \Phi(\underline{f}) = \Phi(\hat{T}_t \underline{f})$ определить на $\underline{\mathcal{S}}_< / \mathcal{N}$ полугруппу T_t и непрерывным образом продолжить ее на все $\mathcal{H}$. Для любых Φ, $\Phi' \in \mathcal{H}$ справедливо неравенство $\|T_t \Phi\| \leqslant \|\Phi\|$ и $(T_t \Phi, \Phi') = (\Phi, T_t \Phi')$, и мы заключаем, что при $t \geqslant 0$ полугруппа T_t является слабо непрерывной однопараметрической полугруппой самосопряженных сжимающих операторов на $\mathcal{H}$, причем $T_t = e^{-tH}$, где гамильтониан H — самосопряженный положительный оператор.

В. Аналитическое продолжение. Для построенния аналитнческого продолжения функций Швингера по временным переменным мы используем аналитическую полугруппу $e^{-\tau H}$, $\operatorname{Re} \tau > 0$. Поскольку в последующих рассуждениях пространственные переменные не используются, мы будем их опускать и писать соответственно $S_{n-1}(\underline{\xi})$ и $\Psi_n^E(x, \underline{\xi})$ вместо $S_{n-1}(\underline{\xi}^0 | gh)$ и $\Psi_n^E(x^0, \underline{\xi}^0 | h)$, где $\underline{\xi}$ теперь обозначает $n-1$ временных переменных $\xi_1^0, \ldots, \xi_{n-1}^0$.

Для $\tau = t + is$, $t > 0$, матричный элемент оператора $e^{-\tau H}$ на векторах Ψ_n^E и Ψ_m^E равен

$$(\Psi_n^E(x, \underline{\xi}), e^{-\tau H} \Psi_m^E(x', \underline{\xi}')) = S_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{\xi}}, x + x' + t, \underline{\xi}' | s)$$

и является обобщенной функцией от переменных $\underline{\xi}$, $x + x' + t$, $\underline{\xi}'$ и s, удовлетворяющей уравненням Коши — Римана относительно t и s. Следовательно (см., например, [V1, стр. 44]),

$$S_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{\xi}}, x + x' + t, \underline{\xi}' | s) = S_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{\xi}}, x + x' + \tau, \underline{\xi}')$$

— обобщенная функция от переменных $\underline{\xi}$, $\underline{\xi}'$, которая после сглаживания по этим переменным становится голоморфной в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z | \operatorname{Re} z > 0\}$ функцией от $z = x + x' + \tau$. Если $n + m - 1 = k$ фиксировано и $m = 0, 1, \ldots, k$, то все «функции» $S_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{\xi}}, z, \underline{\xi}')$ являются аналнтическими продолжениями обобщенной функции S_k, а в этом случае применима теорема об острне клина. Точнее, если мы введем $\hat{S}_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{u}}, w, \underline{u}') = S_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{\xi}}, z, \underline{\xi}')$, где $\xi_k = e^{u_k}$, $z = e^w = e^{u+iv}$, то $\hat{S}_{n+m-1}$ — голоморфные в области $|\operatorname{Im} w| < \pi/2$ функции от w и обобщенные функции от переменных u, причем все они совпадают при $\operatorname{Im} w \to 0$. По теореме Мальгранжа—Цернера (см. [Ер]) существует голоморфная в области $\left\{\underline{w} \,\middle|\, \sum_{l=1}^{k} \left|\operatorname{Im} w_l\right| < \pi/2\right\}$ функция $\hat{S}_k(w_1, \ldots, w_k)$, продолжающая все функции $S_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{u}}, w, \underline{u}')$. Это равносильно тому, что все функции $S_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{\xi}}, z, \underline{\xi}')$ являются сужениями функции $S_k(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = S_k(\underline{\zeta})$, $k = n + m - 1$, голоморфной в

$$\mathscr{C}_k^{(1)} = \left\{\underline{\zeta} \,|\, \zeta_l \in \mathbb{C}_+,\ \sum_{l=1}^{k} |\arg \zeta_l| < \pi/2\right\}.$$

Функции $S_k(\underline{\zeta})$ можно рассматривать как скалярные произведения двух векторов из $\mathscr{H}$. Введем $\mathscr{D}_n^{(1)} \subset \mathbb{C}_+^n$:

$$\mathscr{D}_n^{(1)} = \{(x, \zeta) \,|\, x > 0,\ (\overleftarrow{\underline{\zeta}}, 2x, \underline{\zeta}) \in \mathscr{C}_{2n-1}^{(1)}\}. \tag{18}$$

Лемма 12. *Существуют такие векторнозначные голоморфные по $\underline{\zeta}$ функции $\Psi_n^E(x, \underline{\zeta})$: $\mathscr{D}_n^{(1)} \to \mathscr{H}$, что*

$$(\Psi_n^E(x, \underline{\zeta}),\ \Psi_m^E(x', \underline{\zeta}')) = S_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{\zeta}}, x + x', \underline{\zeta}'). \tag{19}$$

Доказательство. Для $(\overset{\circ}{x}, \underline{\zeta}) \in \mathscr{D}_n^{(1)}$ выберем содержащий эту точку полидиск $P = \{(\overset{\circ}{x}, \underline{\zeta}) \,|\, |\zeta_k - \overset{\circ}{\xi}_k| < r_k,\ k = 1, \ldots, n-1\}$ с центром в некоторой вещественной точке $(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{\underline{\xi}})$ и с достаточно малыми r_k для того, чтобы $P \subset \mathscr{D}_n^{(1)}$. (Заметим, что первая переменная $\overset{\circ}{x}$ вещественна и всегда фиксирована.) Тогда ряд Тейлора функции $S_{2n-1}(\overleftarrow{\underline{\zeta}}, \overset{\circ}{x} + \overset{\circ}{x}', \underline{\zeta}')$ сходится в окрестности $\{(\overset{\circ}{x}, \underline{\zeta}) \in P,\ (\overset{\circ}{x}, \underline{\zeta}') \in P'\}$ точки $(\overleftarrow{\overset{\circ}{\underline{\xi}}}, \overset{\circ}{x} + \overset{\circ}{x}', \overset{\circ}{\underline{\xi}}')$. Пусть теперь $\chi_\nu(x, \underline{\xi}) \in C_0^\infty$ — такая сходящаяся к $\delta(x - \overset{\circ}{x}) \times \prod_{l=1}^{n-1} \delta(\xi_k - \overset{\circ}{\xi}_k)$ последовательность, что $\operatorname{supp} \chi_\nu \subset \mathbb{R}_+^n$, $\chi_\nu \geqslant 0$ и $\int \chi_\nu \, dx \, d\underline{\xi} = 1$. Кроме того, определим

$$f_{\nu\mu}(x, \underline{\xi}) = \sum_{|k| \leqslant \mu} \frac{(\overset{\circ}{\underline{\xi}} - \underline{\xi})^{\underline{k}}}{\underline{k}!} \frac{\partial^{|k|}}{\partial \underline{\xi}^{\underline{k}}} \chi_\nu(x, \underline{\xi}),$$

где $\underline{k}=(k_1, \ldots, k_{n-1})$, $\underline{k}! = \prod_i k_i!$, $|k| = \sum_i k_i$, $\underline{x}^{\underline{k}} = \prod_i x_i^{k_i}$,

$$\frac{\partial^{|k|}}{\partial \underline{\xi}^{\underline{k}}} = \prod_i \frac{\partial^{k_i}}{\partial \xi_i^{k_i}}.$$

Тогда векторы из $\mathscr{H}$

$$\Psi^E_{n,\,\nu\mu}(\overset{\circ}{x}, \underline{\zeta}) = \int \Psi^E_n(\bar{x}, \underline{\xi}) f_{\nu\mu}(x, \underline{\xi})\, dx\, d^{n-1}\xi$$

при фиксированных ν, μ аналитически зависят от $\underline{\zeta}$. Используя уравнение (13) и тот факт, что $S_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{\xi}}, x+x', \underline{\xi}')$ — вещественно-аналитическая функция, легко доказать, что вектор $\Psi^E_n(\overset{\circ}{x}, \underline{\zeta}) = \lim_{\mu\to\infty} \lim_{\nu\to\infty} \Psi^E_{n,\,\nu\mu}(\overset{\circ}{x}, \underline{\zeta})$ существует и удовлетворяет уравнению (19).

Лемма 12 позволяет построить аналитическое продолжение функции $S_k(\underline{\zeta})$ в бо́льшую область $\mathscr{C}^{(2)}_k$. Если $(x, \underline{\zeta}) \in \mathscr{D}^{(1)}_n$ и $(x', \underline{\zeta}') \in \mathscr{D}^{(1)}_m$, то для $\tau \in \mathbb{C}_+$ мы полагаем

$$(20)\qquad S_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{\zeta}}, x+x'+\tau, \underline{\zeta}') = \left(\Psi^E_n(x, \underline{\zeta}),\ e^{-\tau H}\Psi^E_m(x', \underline{\zeta}')\right).$$

Если $n+m-1=k$ фиксировано и $n=0, \ldots, k$, то уравнение (20) дает нам аналитическое продолжение функции S_k в область

$$(21)\qquad \hat{\mathscr{C}}^{(2)}_k = \bigcup_n \{(\overleftarrow{\underline{\zeta}}, x+x'+\tau, \underline{\zeta}') \mid (x, \underline{\zeta}) \in \mathscr{D}^{(1)}_n,\ (x', \underline{\zeta}') \in \mathscr{D}^{(1)}_m,\ \tau \in \mathbb{C}_+,\ n+m-1=k\}.$$

Область $\hat{\mathscr{C}}^{(2)}_k$, записанная в переменных $w_k = u_k + iv_k = \ln \zeta_k$, является трубчатой областью. Согласно теореме об оболочке голоморфности трубчатой области (см., например, [VI, стр. 214]), $S_k(\underline{\zeta})$ можно аналитически продолжить в оболочку голоморфности $\mathscr{C}^{(2)}_k$ области $\hat{\mathscr{C}}^{(2)}_k$; будучи записанной в переменных w_k, область $\mathscr{C}^{(2)}_k$ совпадает с выпуклой оболочкой области $\hat{\mathscr{C}}^{(2)}_k$. Аналогично (18), введем

$$(22)\qquad \mathscr{D}^{(2)}_k = \{(x, \underline{\zeta}) \mid x > 0,\ (\overleftarrow{\underline{\zeta}}, 2x, \underline{\zeta}) \in \mathscr{C}^{(2)}_{2k-1}\}$$

и повторим доказательство леммы 12, заменяя всюду $\mathscr{D}^{(1)}_k$ на $\mathscr{D}^{(2)}_k$.

Повторяя эту процедуру N раз, мы получим аналитическое продолжение $S_k(\underline{\zeta})$ в область $\mathscr{C}^{(N)}_k$ и определенную на области $\mathscr{D}_k^{(N)}$ векторнозначную функцию $\Psi_n^E(x, \zeta)$, для которой справедливо уравнение (19). Первая часть теоремы 11 будет доказана, если мы сумеем показать, что $\bigcup\limits_N \mathscr{C}_k^{(N)} = \mathbb{C}_+^k$, а это равносильно равенству $\bigcup\limits_N \mathscr{D}_n^{(N)} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}_+^{n-1}$. Мы докажем более сильное утверждение.

Лемма 13. *Для любых* $N = 3, 4, \ldots; n = 1, 2, \ldots$
(A) $\mathscr{D}_n^{(N)}$ *содержит множество*

$$\left\{(x, \underline{\zeta}) \,|\, x \in \mathbb{R}_+,\ |\arg \zeta_r| < \frac{\pi}{2}\left(1 - 2^{-N}\sum_{t=0}^{r-1}\binom{N}{t}\right),\ 1 \leqslant r \leqslant n\right\};$$

(B) $\mathscr{C}_n^{(N)}$ *содержит множества*

$$\left\{\underline{\zeta} \,|\ \ |\arg \zeta_r| < \frac{\pi}{2}\left(1 - 2^{-N}\sum_{t=0}^{r-1}\binom{N}{t}\right),\ \ 1 \leqslant r \leqslant n\right\}$$

и

$$\left\{\underline{\zeta} \,|\ \ |\arg \zeta_r| < \max\left\{0, \frac{\pi}{2}(1 - 2^{-N/2}\gamma_r)\right\},\ \ 1 \leqslant r \leqslant n\right\},$$

где $\gamma_r = \max\limits_{N>1} 2^{-N/2}\sum\limits_{t=0}^{r-1}\binom{N}{t}$ *и* $\sum\limits_{t=0}^{r-1}\binom{N}{t} = 2^N$ *для* $r > N$.

Доказательство. По построению области $\mathscr{C}_k^{(N)}$ и $\mathscr{D}_k^{(N}$ при преобразовании $\zeta_i = e^{w_i}$ переходят в трубчатые области. Пусть $c_k^{(N)}$ и $d_k^{(N)}$ — основания этих трубчатых областей:

$$c_k^{(N)} = \{\underline{v} \,|\, v_i = \operatorname{Im} w_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k,\ \ (e^{w_1}, \ldots, e^{w_k}) \in \mathscr{C}_k^{(N)}\},$$

$$d_k^{(N)} = \{(0, \underline{v}) \,|\, v_i = \operatorname{Im} w_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k - 1,$$
$$(e^{u_0}, e^{w_1}, \ldots, e^{w_k}) \in \mathscr{D}_k^{(N)}\}.$$

Заметим, что $c_k^{(N)}$ и $d_k^{(N)}$ — это подмножества в $[-\pi/2, \pi/2]_u$. Из определений $\mathscr{C}_k^{(N)}$ и $\mathscr{D}_k^{(N)}$ следует (см. (21), (22)), что

(23) $c_k^{(N+1)} =$ выпуклая оболочка $\{\underline{v} \,|\, \underline{v} = (-\overleftarrow{\underline{v}}', v, \underline{v}'')$, где $(0, \underline{v}') \in d_n^{(N)}$, $(0, \underline{v}'') \in d_m^{(N)}$, $v \in (-\pi/2, \pi/2)$, $n + m - 1 = k\}$,

(24) $$d_k^{(N)} = \{(0, \underline{v}) \,|\, (-\overleftarrow{\underline{v}}, 0, \underline{v}) \in c_{2k-1}^{(N)}\}.$$

Множества $c_k^{(N)}$, $d_k^{(N)}$ для любых k и N определяются по индукции с помощью уравнений (23), (24) и условия $c_k^{(0)} = (0, \ldots, 0)$. Отметим, что все множества $c_k^{(N)}$ и $d_k^{(N)}$ выпуклы. Более того, если $(v_1, \ldots, v_k) \in c_k^{(N)}$ (или $d_k^{(N)}$), то целый прямоугольный параллелепипед с вершинами $(\pm v_1, \ldots, \pm v_k)$ также лежит в $c_k^{(N)}$ (в $d_k^{(N)}$).

Для доказательства леммы 13 построим сначала такую функцию $h(r, N)$ от $r = 1, 2, \ldots$ и $N = 1, 2, \ldots$, что для любых $t \geqslant 1$ и $s \geqslant 0$

$$(25)\qquad \tilde{w}(t, s, N) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{t}, h(1, N), \ldots, h(s, N)) \in d_{t+s}^{(N)}.$$

Положим $h(r, 0) = 0$ для $r = 1, 2, \ldots$. Очевидно, $w(t, s, 0) \in d_{t+s}^{(0)}$. Предположим теперь, что для любых $r \geqslant 1$ и $N = 0, 1, \ldots, L$ мы уже построили функцию $h(r, N)$, удовлетворяющую условию (25). Согласно (23), при любом $|\alpha| < \pi/2$ точки

$$(-h(s, L), -h(s-1, L), \ldots, -h(2, L), -h(1, L),$$
$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{2t-1}\ \alpha, h(1, L), \ldots, h(s-1, L))$$

и

$$(-h(s-1, L), \ldots, -h(1, L), -\alpha, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2t-1}, h(1, L),$$
$$h(2, L), \ldots, h(s, L))$$

принадлежат $c_{2(s+t)-1}^{(L+1)}$.

Поскольку область $c_{2(s+t)-1}^{(L+1)}$ выпукла, она содержит также точку

$$\Big(-\frac{1}{2}[h(s, L) + h(s-1, L)], \ldots, -\frac{1}{2}[h(2, L) + h(1, L)],$$
$$-\frac{1}{2}[h(1, L) + \alpha], \underbrace{0, \ldots, 0}_{2t-1}, \frac{1}{2}[h(1, L) + \alpha], \ldots$$
$$\ldots, \frac{1}{2}[h(s, L) + h(s-1, L)]\Big).$$

Значит, если положить

$$h(r, 0) = 0, \quad r = 1, 2, \ldots,$$
$$(26)\qquad h(1, L+1) = \frac{1}{2}[h(1, L) + \alpha],$$
$$h(r, L+1) = \frac{1}{2}[h(r, L) + h(r-1, L)], \quad r = 2, 3, \ldots,$$

то точки $w(t, s, L+1)$, определенные с помощью (25), опять будут принадлежать $d_{t+s}^{(L+1)}$. Примем соотношения (26) за индуктивное определение функции $h(r, N)$.

С помощью простых вычислений соотношения (26) нетрудно разрешить:

$$h(r,\ N) = \alpha\left[1 - 2^{-N}\sum_{t=0}^{r-1}\binom{N}{t}\right],$$

где для $s \geqslant N$ мы полагаем $\sum_{t=0}^{s}\binom{N}{t} = 2^N$. Поскольку число α можно выбрать сколь угодно близким к $\pi/2$, точки $w_0(1,\ n-1,\ N) = (0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{n-1})$, где $|v_r| < \pi/2 \times \times\left[1 - 2^{-N}\sum_{t=0}^{r-1}\binom{N}{t}\right]$, лежат в $d_k^{(N)}$. Тем самым часть (A) леммы 13 доказана. Для доказательства части (B) достаточно воспользоваться частью (A) и уравнением $S_n(\underline{\zeta}) = (\Omega,\ \Psi_{n+1}^E(x,\ \underline{\zeta}))$.

C. Оценки для $S_k(\underline{\zeta})$. Мы приведем лишь беглое изложение основных идей, приводящих к оценке (15). Подробное изложение можно найти в [Os Sch 4]. В частности, мы продолжаем игнорировать пространственные переменные, а это, конечно, недопустимо при полном выводе неравенства (15).

Сначала воспользуемся (E0′) и покажем, что для любых n и $\xi_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$|S_n(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)| \leqslant (\alpha n)^{\beta n}\prod_{i=1}^{n}[(1+\xi_i)(1+\xi_i^{-1})]^{\gamma}, \tag{27}$$

где α, β и γ — целые. Пусть теперь $\varepsilon > 0$; определим

$$S_{n,\varepsilon}(\underline{\zeta}) = \prod_{i=1}^{n}[(1+\zeta_i+\varepsilon)(1+\varepsilon^{-1})]^{-\gamma}S_n(\underline{\zeta}+\underline{\varepsilon}) \tag{28}$$

и

$$\Psi_{n,\varepsilon}^{\prime E}(x,\ \underline{\zeta}) = [(1+2x+\varepsilon)(1+\varepsilon^{-1})]^{-\gamma/2}\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{n-1}[(1+\zeta_i+\varepsilon)(1+\varepsilon^{-1})]^{-\gamma}\Psi_n^E(x+\varepsilon/2,\ \underline{\zeta}+\underline{\varepsilon}),$$

где $\underline{\zeta}+\underline{\varepsilon}$ определяется соотношениями $(\underline{\zeta}+\underline{\varepsilon})_k = \zeta_k + \varepsilon$. Функции $S_{n,\varepsilon}(\underline{\zeta})$ и $\Psi_{n+1,\varepsilon}^E(x,\ \underline{\zeta})$ определены и голоморфны при

$x \in \mathbb{R}_+$, $\underline{\zeta} \in \mathbb{C}_+^n$. Согласно (28), при $z = x + iy$ мы имеем

$$S_{n+m-1,\varepsilon}(\overleftarrow{\underline{\zeta}}, 2z, \underline{\zeta}') = \left(\frac{1+2x+\varepsilon}{1+2z+\varepsilon}\right)^{\gamma} \left(\Psi^E_{n,\varepsilon}(x, \underline{\zeta}), e^{-2iyH}\Psi^E_{m,\varepsilon}(x, \underline{\zeta}')\right). \tag{29}$$

Докажем, что при $\underline{\zeta} \in \mathscr{C}_n^{(N)}$

$$|S_{n,\varepsilon}(\underline{\zeta})| \leqslant (\alpha n)^{\beta n} 2^{\beta n N}. \tag{30}$$

Доказательство неравенства (30) проведем по индукции. Заметим сначала, что при $N = 0$ неравенство (30) совпадает с неравенством (27). Предположим, что неравенство (30) справедливо для $N = 1, 2, \ldots, L$ и для любых n. Тогда, согласно (29), для $(x, \underline{\zeta}) \in \mathscr{D}_n^{(L)}$, $(x, \underline{\zeta}') \in \mathscr{D}_m^{(L)}$

$$\begin{aligned} |S_{n+m-1,\varepsilon}(\overleftarrow{\underline{\zeta}}, 2(x+iy), \underline{\zeta}')| &\leqslant \\ \leqslant \|\Psi^E_{n,\varepsilon}(x, \underline{\zeta})\| \cdot \|\Psi^E_{m,\varepsilon}(x, \underline{\zeta}')\| &= \\ = [S_{2n-1,\varepsilon}(\overleftarrow{\underline{\zeta}}, 2x, \underline{\zeta}) S_{2m-1,\varepsilon}(\overleftarrow{\underline{\zeta}}', 2x, \underline{\zeta}')]^{1/2} &\leqslant \\ \leqslant [\alpha(2n-1)]^{\beta(n-1/2)} [\alpha(2m-1)]^{\beta(m-1/2)} 2^{\beta k L} &\leqslant (\alpha k)^{\beta k} 2^{\beta k(L+1)}. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathscr{C}_k^{(L+1)}$ является оболочкой голоморфности области

$$\bigcup_{n+m-1=k} \{(\overleftarrow{\underline{\zeta}}, 2(x+iy), \underline{\zeta}') \mid (x, \underline{\zeta}) \in \mathscr{D}_n^{(L)}, (x, \underline{\zeta}') \in \mathscr{D}_m^{(L)}\},$$

неравенство (30) для $N = L + 1$ следует из принципа максимума (см., например, [VI, стр. 211]). Следовательно, неравенство (30) доказано для любых n и N.

Теперь попытаемся исключить N из правой части неравенства (30). Для этого выберем определенную точку $\underline{\zeta} \in \mathbb{C}_+^n$ и определим $N = N(\underline{\zeta})$ таким образом, что $\underline{\zeta} \in \mathscr{C}_n^{(N)}$. Пусть N_n — такое число, что $2^{-N_n/2}\gamma_n < 1/2$. Тогда по лемме 13 (B) $\underline{\zeta} \in \mathscr{C}_n^{(N_n)}$, если $|\arg \zeta_r| < \pi/4$ для $r = 1, \ldots, n$; следовательно, для таких $\underline{\zeta}$ мы можем положить $N(\underline{\zeta}) = N_n$. Зависимость N_n от n для нас несущественна.

Рассмотрим теперь $\underline{\zeta} \in \mathbb{C}_+^n$ с $\max\limits_{1 \leqslant r \leqslant n} |\arg \zeta_r| = |\arg \zeta_s| \geqslant \pi/4$ для некоторого $1 \leqslant s \leqslant n$. Тогда, полагая $\xi = \operatorname{Re} \zeta_s$, $\eta = |\operatorname{Im} \zeta_s|$, получаем

$$|\arg \zeta_s| = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\eta} < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\xi}{2\eta}\right)$$

(мы воспользовались тем, что $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{4} x$ при $x < 1$).

Положим $N(\underline{\zeta}) = [M]$, где

$$2^{-M/2}\gamma_n = \frac{\xi}{2\eta}, \quad \text{или} \quad M = c_n + \frac{2}{\ln 2}\ln \eta\xi^{-1},$$

и постоянные c_n зависят только от n. В дальнейшем значения постоянной c_n будут меняться, однако мы всегда будем считать их зависящими лишь от n. Выбирая указанным образом $N(\underline{\zeta})$, мы для $1 \leqslant r \leqslant n$ получаем

$$|\arg \zeta_r| \leqslant |\arg \zeta_s| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 - 2^{-N(\underline{\zeta})/2}\gamma_n\right),$$

и, следовательно, согласно лемме 13(B), $\underline{\zeta} \in C_n^{(N(\underline{\zeta}))}$. Подставляя теперь $N(\underline{\zeta})$ в неравенство (30), приходим к следующим неравенствам:

$$|S_{n,\varepsilon}(\underline{\zeta})| \leqslant (\alpha n)^{\beta n} 2^{\beta n N_n} = c_n \tag{31}$$

для $\max_r |\arg \zeta_r| < \pi/4$ и

$$|S_{n,\varepsilon}(\underline{\zeta})| \leqslant c_n e^{2\beta n \ln \eta\xi^{-1}} = c_n \left(\eta\xi^{-1}\right)^{2\beta n} \tag{32}$$

для $\max_r |\arg \zeta_r| = \arg(\xi + i\eta) \geqslant \pi/4$. Объединяя (31) и (32), мы при некотором значении c_n получаем неравенство

$$|S_{n,\varepsilon}(\underline{\zeta})| \leqslant c_n \left[(1 + |\max_k \operatorname{Im} \zeta_k|)(1 + (\min_k \operatorname{Re} \zeta_k)^{-1}\right]^{2\beta n}. \tag{33}$$

Если теперь мы объединим (33) и (28), то, полагая $\varepsilon = \frac{1}{2}\min_k \operatorname{Re} \zeta_k$, получаем

$$|S_n(\underline{\zeta})| = \left|\prod_{i=1}^{n} [(1 + \zeta_i)(1 + \varepsilon^{-1})]^{\gamma} S_{n,\varepsilon}(\underline{\zeta} - \underline{\varepsilon})\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_n \left|\prod_{i=1}^{n} [(1 + \zeta_i)(1 + \varepsilon^{-1})]^{\gamma}\right| [(1 + |\max_k \operatorname{Im} \zeta_k|)(1 + \varepsilon^{-1})]^{2\beta n} \leqslant$$

$$\leqslant c(1 + |\underline{\zeta}|)^a \left(1 + (\min_k \operatorname{Re} \zeta_k)^{-1}\right)^b,$$

где постоянные a, b и c зависят от n. Следовательно, оценка (15) без учета пространственных переменных получена.

С помощью стандартных рассуждений из теоремы 11 можно вывести существование таких обобщенных функций $\tilde{W}_n(\underline{q})$ из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n})$ с носителями в $\overline{\mathbb{R}}_+^{4n}$, что

$$S_n(\underline{\xi}) = \int \exp\left[-\sum_{k=1}^{n} (\xi_k^0 q_k^0 + i\boldsymbol{\xi}_k \mathbf{q}_k)\right] \tilde{W}_n(\underline{q})\, d^{4n}q.$$

Определим обобщенные функции Вайтмана следующим образом:

(34) $$\mathscr{W}_{n+1}(\underline{x}) = \int \exp\left[i \sum_k q_k (x_{k+1} - x_k)\right] \tilde{W}_n(\underline{q})\, d^{4n}q.$$

Теперь мы должны проверить условия (W0)—(W5).

Проверка аксиом Вайтмана

(W0) Это свойство следует из определения (34).

(W1) Инвариантность $\mathscr{W}_n$ относительно группы трансляций и группы вращений следует непосредственно из определения (34) и соответствующих свойств функций S_n. Для доказательства инвариантности $\mathscr{W}_n$ относительно чисто лоренцевых преобразований достаточно показать, что $X_{0j}\tilde{W}(\underline{q}) = 0$, где $j = 1, 2, 3$, $X_{0j} = \sum_{k=1}^{n} \left(q_k^0 \frac{\partial}{\partial q_k^j} + q_k^j \frac{\partial}{\partial q_k^0}\right)$ — инфинитезимальные генераторы чисто лоренцевых преобразований (см. [Nel 3]). Пусть $Y_{0j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k^0 \frac{\partial}{\partial \xi_k^j} - \xi_k^j \frac{\partial}{\partial \xi_k^0}\right)$ — инфинитезимальные генераторы вращений в евклидовом пространстве, тогда из условия (E1) следует, что

$$0 = Y_{0j} S_n(\underline{\zeta}) = i \int \exp\left[-\sum (\xi_k^0 q_k^0 + i \boldsymbol{\xi}_k \mathbf{q}_k)\right] X_{0j} \tilde{W}_n(\underline{q})\, d^{4n}q.$$

Значит, $X_{0j}\tilde{W}_n(\underline{q}) = 0$, $j = 1, 2, 3$, так как преобразование Фурье — Лапласа имеет нулевое ядро.

(W2) Свойство положительной определенности легко проверить, используя лемму 12 и тот факт, что обобщенную функцию $W_n(\underline{\xi})$ можно рассматривать как граничное значение аналитического продолжения функций Швингера S_n.

(W5) Поскольку $\operatorname{supp} \tilde{W}_n \subset \mathbb{R}_+^{4n}$ и $\tilde{W}_n(\underline{q})$ — лоренц-инвариантна, то $\operatorname{supp} \tilde{W}_n \subset \bar{V}_+^n$.

(W4) Из свойства распадения на пучки (E4) следует, что для любого $a = (0, \mathbf{a})$ и для произвольных векторов $\Phi, \Phi' \in \mathscr{H}$

$$\lim_{\lambda \to 0} (\Phi, U(a, \mathbb{1})\Phi') = (\Phi, \Omega)(\Omega, \Phi').$$

Отсюда сразу получаем свойство (W4) распадения обобщенных функций Вайтмана на пучки.

(W3) Свойство локальности является следствием симметричности функций Швингера и теоремы из книги Р. Йоста ([Jo, стр. 120]).

На этом доказательство предложения II заканчивается.

Замечания. 1) Из хода нашего доказательства видно, что условие (E0′) было выбрано в некотором смысле случайно; столь же эффективными могут оказаться и другие подобные условия. Дальнейший прогресс в этом направлении, вероятно, связан с заменой (E0′) похожим условием, налагаемым иа функции Швингера $\mathfrak{S}_n$, а не на S_n (см. [Os Sch 4]). Такое условие было бы, вероятно, наиболее удобным в приложениях.

2) Для моделей $P(\varphi)_2$ с малой константой связи все свойства (E0′), (E1)—(E4) функций Швингера могут быть без труда получены из оценок Глимма, Джаффе и Спенсера [Gli Ja Sp 1]. В частиости, (E0′) вытекает из следствия 1.1.9 цитированной работы. Согласно этому следствию, для функций f, носитель которых лежит в произведении единичных квадратов решетки $\Delta_{\underline{i}}=\Delta_{i_1}\times\ldots\times\Delta_{i_n}$, справедливо неравенство

$$|\mathfrak{S}_n(f)|<c^n n!\,\|f\|_2. \tag{35}$$

(Мы пользуемся обозначениями работы [Gli Ja Sp 1].) Пусть $h\in\mathscr{S}(\mathbb{R}_+^{2(n-1)})$, а $\chi_{\underline{j}}(\underline{\xi})$ — характеристическая функция $\Delta_{j_1}\times\ldots\times\Delta_{j_{n-1}}$; тогда

$$|S_{n-1}(h)|\leqslant\sum_{\underline{j}}|S_{n-1}(h\chi_{\underline{j}})|.$$

Кроме того, для любой $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$, такой, что $\operatorname{supp} g\subset\Delta_0$ и $\int g(x)\,d^2x=1$,

$$S_{n-1}(h\chi_{\underline{j}})=\int\mathfrak{S}_n(\underline{x})\,g(x_1)\,h(\underline{\xi})\,\chi_{\underline{j}}(\underline{\xi})\,d^{2n}x= \tag{36}$$

$$=\sum_{\underline{i}}\int\mathfrak{S}_n(\underline{x})\,g(x_1)\,h(\underline{\xi})\,\chi_{\underline{j}}(\underline{\xi})\,\chi_{\underline{i}}(\underline{x})\,d^{2n}x,$$

где $\xi_k=x_{k+1}-x_k$. Заметим, что $g(x_1)\chi_{\underline{j}}(\underline{\xi})\chi_{\underline{i}}(\underline{x})$ отлична от нуля лишь при $x_1\in\Delta_0\cap\Delta_{i_1}$, $x_2-x_1\in\Delta_{j_1}$, $x_2\in\Delta_{i_2}$, ..., $x_n-x_{n-1}\in\Delta_{j_{n-1}}$, $x_n\in\Delta_{i_n}$. Следовательно, при фиксированном $\underline{j}$ ненулевой вклад в правую часть уравнения (36) дадут не более 4^n значений $\underline{i}$. Тогда, используя (35), мы получаем

$$|S_{n-1}(h\chi_{\underline{l}})| \leqslant 4^n \max_{\underline{i}} \left| \int \mathfrak{S}_n(\underline{x})\, g(x_1)\, h(\underline{\xi})\, \chi_{\underline{l}}(\underline{\xi})\, \chi_{\underline{i}}(\underline{x})\, d^{2n}x \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_1^n n! \max_{\underline{i}} \left(\int |g(x_1)\, h(\underline{\xi})\, \chi_{\underline{l}}(\underline{\xi})\, \chi_{\underline{i}}(\underline{x})|^2\, d^{2n}x \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_1^n n! \, \|g\|_2 \, \|h\chi_{\underline{l}}\|_2.$$

Наконец, воспользуемся тем, что преобразование $\underline{x} \to (x_1, \underline{\xi})$ имеет единичный якобиан. Отсюда для $h = h_1 \times h_2 \times \ldots \times h_{n-1}$ получаем

$$|S_{n-1}(h) \leqslant c_2^n n! \sum_{\underline{l}} \|h\chi_{\underline{l}}\|_2 = c_2^n n! \prod_k \left(\sum_l \|h_k\chi_l\|_2 \right),$$

и, следовательно, условие (E0′).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕВКЛИДОВА ТЕОРИЯ ПОЛЯ [1])

Эдвард Нельсон

Математический факультет Приистонского университета

I. ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ

Пусть $\mathscr{H}$ — вещественное гильбертово пространство, а φ — единичный гауссов процесс, заданный на $\mathscr{H}$, т. е. φ — это единственный (с точностью до эквивалентности) вещественный заиндексированный элементами $\mathscr{H}$ гауссов процесс, у которого среднее равно нулю, а корреляционный функционал совпадает со скалярным произведением в $\mathscr{H}$. Таким образом, существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$, обладающее следующими свойствами: для любой f из $\mathscr{H}$ функция $\varphi(f)$ — случайная величина на $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$; функции $\varphi(f)$, где $f \in \mathscr{H}$, порождают σ-алгебру $\mathscr{S}$; для ортонормированных $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{H}$ и ограниченной бэровой функции F на $\mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\int_\Omega F(\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n))\, d\mu = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\, e^{-x^2/2}\, dx.$$

Конкретный вид $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ для нас несуществен. Вероятно, наиболее простой способ построения этой тройки состоит в следующем: в $\mathscr{H}$ выбирается ортонормированный базис $\{e_n\}$, каждому n сопоставляется пространство

$$\left(\mathbb{R},\ \mathscr{B},\ (2\pi)^{-1/2}\, e^{-x^2/2}\, dx\right),$$

где $\mathscr{B}$ есть σ-алгебра борелевых множеств, и в качестве $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ берется декартово произведение этих пространств.

Пусть α — суммируемая случайная величина на $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$; обозначим через $E\alpha$ ее среднее, так что

$$E\alpha = \int_\Omega \alpha\, d\mu.$$

Для единичного гауссова процесса φ докажем следующие соотношения:

(1) $$E\varphi(f_1) \ldots \varphi(f_{2n+1}) = 0,$$

(2) $$E\varphi(f_1) \ldots \varphi(f_{2n}) = \sum \langle f_{i_1}, f_{j_1}\rangle \ldots \langle f_{i_n}, f_{j_n}\rangle,$$

[1]) E. Nelson, Probability Theory and Euclidian field theory, Constructive Quantum Field Theory, 25, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

где суммирование идет по всем спариваниям индексов из $1, \ldots, 2n$, т. е. по перестановкам $(i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n)$ индексов $1, \ldots, 2n$, причем

$$i_1 < \ldots < i_n, \ i_1 < j_1, \ \ldots, \ i_n < j_n.$$

Соотношение (1) является следствием инвариантности средних относительно преобразования $\varphi(f) \to \varphi(-f) = -\varphi(f)$. Соотношение (2) достаточно доказать для случая $f_1 = \ldots = f_{2n} = f$, поскольку для любых коммутирующих величин z_i справедливо поляризационное тождество

$$\prod_{i=1}^{m} z_i = \frac{1}{m!} \sum_{r=1}^{m} (-1)^{m-r} \sum_{i_1 < \ldots < i_r} (z_{i_1} + \ldots + z_{i_r})^m. \tag{3}$$

Предположим, что f — вектор единичной длины. В таком случае (2) принимает вид

$$E\varphi(f)^{2n} = (2n-1)(2n-3) \ldots 3 \cdot 1, \tag{4}$$

где правая часть уравнения (4) — это просто число всевозможных спариваний индексов $1, \ldots, 2n$. Однако левая часть уравнения (4) совпадает с интегралом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/2} \, dx = (2n-1)(2n-3) \ldots 3 \cdot 1. \tag{5}$$

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$; обозначим $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ просто через $\mathscr{L}^p(\mathscr{H})$, а вместо обозначения $\mathscr{L}^2(\mathscr{H})$ будем также использовать $\Gamma(\mathscr{H})$. Замыкание в $\Gamma(\mathscr{H})$ линейной оболочки всевозможных элементов вида $\varphi(f_1) \ldots \varphi(f_m)$, где $m \leqslant n$, обозначим через $\Gamma(\mathscr{H})_{\leqslant n}$. Пусть $\Gamma(\mathscr{H})_n$ — ортогональное дополнение подпространства $\Gamma(\mathscr{H})_{\leqslant n-1}$ в $\Gamma(\mathscr{H})_{\leqslant n}$. Для $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{H}$ определим

$$:\varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n):$$

как ортогональную проекцию элемента $\varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n)$ на $\Gamma(\mathscr{H})_n$. (Если $\mathscr{H}$ одномерно, то $\Gamma(\mathscr{H}) = L^2(\mathbb{R}, \mathscr{B}, (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} dx)$, а $\Gamma(\mathscr{H})_n$ — одномерное пространство, порожденное полиномом Эрмита с индексом n, и $:x^n:$ есть нормированный полином Эрмита с единичным старшим коэффициентом.) Докажем следующую формулу:

$$\langle :\varphi(g_1) \ldots \varphi(g_n):, :\varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n): \rangle = \sum_{\pi} \langle g_{\pi(1)}, f_1 \rangle \ldots \langle g_{\pi(n)}, f_n \rangle, \tag{6}$$

где суммирование проводится по всем перестановкам π индексов $1, \ldots, n$. Вследствие симметрии левой части соотношения (6) его достаточно доказать для $g_1 = f_1, \ldots, g_n = f_n$. В силу тождества (3) достаточно рассмотреть только случай $f_1 = \ldots = f_n = f$. Можно считать, что f — вектор единичной длины. Тогда соотношение (6) принимает такой вид:

$$\langle :\varphi(f)^n:, :\varphi(f)^n: \rangle = n!, \tag{7}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (:x^n:)^2 e^{-x^2/2}\, dx = n!, \tag{8}$$

а это хорошо известная формула нормировки полиномов Эрмита.

Пусть $\mathscr{H}_1$ — комплексификация пространства $\mathscr{H}$, а $\mathscr{H}_n$ — это n-кратное симметризованное тензорное произведение пространства $\mathscr{H}_1$. На пространстве $\mathscr{H}_n$ введем скалярное произведение

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Sym}\, g_1 \otimes \ldots \otimes g_n, \mathrm{Sym}\, f_1 \otimes \ldots \otimes f_n \rangle = \\ = \sum_{\pi} \langle g_{\pi(1)}, f_1 \rangle \ldots \langle g_{\pi(n)}, f_n \rangle, \end{aligned} \tag{9}$$

где Sym — это оператор симметризации:

$$\mathrm{Sym}\, f_1 \otimes \ldots \otimes f_n = \frac{1}{n!} \sum_{n} f_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes f_{\pi(n)}.$$

Используя формулы (6) и (9), можно однозначно продолжить отображение

$$:\varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n): \longmapsto \mathrm{Sym}\, f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$$

до изометрического оператора, отображающего $\Gamma(\mathscr{H})_n$ на $\mathscr{H}_n$. Это отображение мы будем использовать для отождествления пространств $\Gamma(\mathscr{H})_n$ и $\mathscr{H}_n$. Известно, что полиномы Эрмита образуют полную систему в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mathscr{B}, (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}\, dx)$. Сигал [Se 1] обобщил этот результат на произвольное вещественное гильбертово пространство и показал, что линейная оболочка пространств $\Gamma(\mathscr{H})_n$ совпадает с $\Gamma(\mathscr{H})$. Следовательно,

$$\Gamma(\mathscr{H}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n.$$

Значит, $\Gamma(\mathscr{H})$ — это фоковское пространство.

Структура пространства $\Gamma(\mathscr{H})$ тесно связана со структурой вещественного гильбертова пространства $\mathscr{H}$. Например, отображение $U\colon \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ одного вещественного гильбертова пространства на другое порождает изометрическое отображение $\Gamma(U)$ пространства $\Gamma(\mathscr{H})$ на $\Gamma(\mathscr{K})$. На $\mathscr{H}_n$ отображение $\Gamma(U)$ совпадает с $U \otimes \ldots \otimes U$ (n-кратное произведение). Изометрическое вложение I: $\mathcal{H} \to \mathcal{K}$ одного вещественного гильбертова пространства в другое индуцирует изометрическое вложение $\Gamma(I)$: $\Gamma(\mathcal{H}) \to \Gamma(\mathcal{K})$, а на $\mathcal{H}_n$ отображение $\Gamma(I)$ совпадает с $I \otimes \ldots \otimes I$ (n сомножителей). Ортогональная проекция E: $\mathcal{H} \to \mathcal{K}$ вещественного гильбертова пространства на замкнутое линейное подпространство индуцирует ортогональное проектирование $\Gamma(E)$: $\Gamma(\mathcal{H}) \to \Gamma(\mathcal{K})$, а на $\mathcal{H}_n$ отображение $\Gamma(E)$ совпадает с $E \otimes \ldots \otimes E$. Для любого сжимающего отображения (т. е. линейного отображения с нормой, не превосходящей единицы) A: $\mathcal{H} \to \mathcal{K}$, переводящего одно вещественное гильбертово пространство в другое, определим $\Gamma(A)$ как прямую сумму операторов $\Gamma(A)_n$, где $\Gamma(A)_n$: $\mathcal{H}_n \to \mathcal{K}_n$ совпадает с $A \otimes \ldots \otimes A$ (n-кратное произведение). Халмош [Hal] показал, что любое сжимающее отображение A: $\mathcal{H} \to \mathcal{K}$ можно представить в виде $A = EUI$, где E, U и I — отображения, описанные выше (в самом деле, отображение I: $\mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$, очевидно, является вложением; E: $\mathcal{K} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ — ортогональное проектирование, а оператор U: $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K} \to \mathcal{K} \oplus \mathcal{H}$ определяется из соотношения $A = EUI$, причем доказательство его изометричности нетривиально). Таким образом, $\Gamma(A) = \Gamma(E)\Gamma(U)\Gamma(I)$. Следовательно, $\Gamma(A)$ — *марковский* оператор, т. е.

$$\begin{gathered} \alpha \geqslant 0 \Rightarrow \Gamma(A)\alpha \geqslant 0, \\ \Gamma(A)\mathbb{1} = \mathbb{1}, \\ E\Gamma(A)\alpha = E\alpha, \end{gathered} \tag{10}$$

поскольку операторы $\Gamma(E)$, $\Gamma(U)$ и $\Gamma(I)$ марковские.

Ясно, что любой марковский оператор Γ является сжимающим отображением пространства $\mathcal{L}^\infty$ в $\mathcal{L}^\infty$ и пространства $\mathcal{L}^1$ в $\mathcal{L}^1$. Пользуясь теоремой М. Рисса о выпуклости или просто неравенством Гёльдера, можно показать, что для любых $1 \leqslant p \leqslant \infty$ оператор Γ является сжимающим отображением пространства $\mathcal{L}^p$ в $\mathcal{L}^p$.

Теорема 1 (гиперсжимаемость). *Пусть* A: $\mathcal{H} \to \mathcal{K}$ — *сжимающее отображение одного вещественного гильбертова пространства в другое. Тогда для* $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, *удовлетворяющих условию*

$$\|A\| \leqslant \sqrt{\frac{q-1}{p-1}}, \tag{11}$$

$\Gamma(A)$ — *сжимающее отображение из* $\mathcal{L}^q(\mathcal{H})$ *в* $\mathcal{L}^p(\mathcal{K})$. *Если условие* (11) *не выполнено, то* $\Gamma(A)$: $\mathcal{L}^q(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}^p(\mathcal{K})$ — *неограниченный оператор.*

Мы приведем здесь лишь набросок доказательства; оно отличается от не совсем четкого доказательства, приведенного в работе [№ 4]. Если $A = 0$, то $\Gamma(A)$ каждой случайной величине ставит в соответствие ее среднее и, следовательно, является сжимающим отображением. Если $A \neq 0$, то, переписывая A в виде $(c^{-1}A)c$, где $c = \|A\|$, получаем $\Gamma(A) = \Gamma(c^{-1}A)\Gamma(c)$. Но $c^{-1}A$ — сжимающее отображение, так что $\Gamma(c^{-1}A)$ — сжимающее отображение из $\mathscr{L}^p(\mathscr{H})$ в $\mathscr{L}^p(\mathscr{K})$. Таким образом, для доказательства первой части теоремы требуется показать, что если условие (11) выполнено, то $\Gamma(c)$ — сжимающее отображение из $\mathscr{L}^q(\mathscr{H})$ в $\mathscr{L}^p(\mathscr{H})$. Для этого достаточно показать, что для любого $\alpha \geqslant 0$

$$(E(\Gamma(c)\alpha)^p)^{1/p} \leqslant (E\alpha^q)^{1/q}, \tag{12}$$

поскольку для любого сохраняющего положительность оператора Γ справедливо неравенство $|\Gamma\alpha| \leqslant \Gamma|\alpha|$. (В этом легко убедиться, аппроксимируя Γ интегральными операторами с положительными ядрами.)

Предположим, что $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{(1)} \oplus \mathscr{H}_{(2)}$. В качестве вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{L}, \mu)$ единичного гауссова процесса, заданного на $\mathscr{H}$, можно взять прямое произведение вероятностных пространств $(\Omega_1, \mathscr{S}_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \mathscr{S}_2, \mu_2)$ единичных гауссовых процессов, заданных на $\mathscr{H}_{(1)}$ и $\mathscr{H}_{(2)}$. Для операций взятия среднего от случайных величин на этих вероятностных пространствах введем обозначения E_1 и E_2 и точно так же сжимающие отображения будем обозначать через $\Gamma_1(c)$ и $\Gamma_2(c)$. Покажем, что для положительной случайной величины α на $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$

$$\|\Gamma(c)\alpha\|_p = (E(\Gamma(c)\alpha)^p)^{1/p} \leqslant \left(E_1(\Gamma_1(c)(E_2(\Gamma_2(c)\alpha)^p)^{1/p})^p\right)^{1/p}. \tag{13}$$

Мы можем представить $\Gamma_1(c)$ в виде интегрального оператора с ядром $\Gamma_1(\cdot, \cdot)$; аналогично представляется и $\Gamma_2(c)$. Пусть β — положительная случайная величина и $1/p + 1/p' = 1$; тогда, дважды используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}
E\beta\Gamma(c)\alpha = \iiiint \beta(\omega_1, \omega_2)\Gamma_1(\omega_1, \eta_1)\Gamma_2(\omega_2, \eta_2)\alpha(\eta_1, \eta_2) \times \\
\times d\mu_1(\eta_1)\,d\mu_2(\eta_2)\,d\mu_1(\omega_1)\,d\mu_2(\omega_2) \leqslant \\
\leqslant \iint \left(\int \beta(\omega_1, \omega_2)^{p'} d\mu_2(\omega_2)\right)^{1/p'} \Gamma_1(\omega_1, \eta_1) \times \\
\times \left(\int \left(\int \Gamma_2(\omega_2, \eta_2)\alpha(\eta_1, \eta_2)\,d\mu_2(\eta_2)\right)^p d\mu_2(\omega_2)\right)^{1/p} d\mu_1(\eta_1)\,d\mu_1(\omega_1) \leqslant \\
\leqslant \left(\iint \beta(\omega_1, \omega_2)^{p'} d\mu_2(\omega_2)\,d\mu_1(\omega_1)\right)^{1/p'} \times \\
\times \left(\int \Gamma_1(\omega_1, \eta_1)\left(\int \left(\int \Gamma_2(\omega_2, \eta_2)\alpha(\eta_1, \eta_2)\,d\mu_2(\eta_2)\right)^p \times \right.\right. \\
\left.\left. \times d\mu_2(\omega_2)\right)^{1/p} d\mu_1(\eta_1)\right)^p d\mu_1(\omega_1)\Bigg)^{1/p};
\end{aligned}$$

последнее выражение совпадает с правой частью неравенства (13), умноженной на $\|\beta\|_{p'}$. Следовательно, неравенство (13) доказано.

Если первая часть теоремы справедлива для пространств $\mathscr{H}_{(1)}$ и $\mathscr{H}_{(2)}$, то из (13) сразу же следует, что она справедлива и для $\mathscr{H}_{(1)} \oplus \mathscr{H}_{(2)}$. Итак, нам достаточно доказать первую часть теоремы лишь для случая одномерного вещественного гильбертова пространства, поскольку с помощью индукции ее можно тогда установить для любого конечномерного вещественного гильбертова пространства, а с помощью аппроксимации — и для вещественного гильбертова пространства любой размерности.

Пусть F — ограниченная вместе со своими производными вплоть до третьего порядка функция на $\mathbb{R}$. Кроме того, предположим, что она ограничена снизу некоторой положительной константой. Неравенство (12) достаточно доказать для $\alpha = F(\varphi)$, где φ — гауссова случайная величина с нулевым средним, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega_1, \mathscr{S}_1, \mu_1)$. Пусть φ_h — определенная на вероятностном пространстве $(\Omega_2, \mathscr{S}_2, \mu_2)$ гауссова случайная величина с нулевым средним и дисперсией h; следовательно, φ и φ_h — независимые случайные величины на пространстве $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$. Отметим, что $\varphi + \varphi_h$ — гауссова случайная величина с нулевым средним, ее дисперсия равна сумме h и дисперсии величины φ. Будем использовать прежние обозначения E_1, E_2, $\Gamma_1(c)$ и $\Gamma_2(c)$. Тогда получим

$$(14)\qquad (E_2(\Gamma_2\ c)\, F(\varphi+\varphi_h))^p)^{1/p} =$$

$$= \left(E_2\left(\Gamma_2(c)\left(F(\varphi) + F'(\varphi)\varphi_h + \frac{1}{2}F''(\varphi)h + o(h)\right)\right)^p\right)^{1/p} =$$

$$= \left(E_2\left(F(\varphi) + cF'(\varphi)\,\varphi_h + \frac{1}{2}F''(\varphi)h + o(h)\right)^p\right)^{1/p} =$$

$$= \left(E_2\left(F(\varphi)^p + F(\varphi)^{p-1}\left(pcF'(\varphi)\,\varphi_h + p\frac{1}{2}F''(\varphi)\,h\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + F(\varphi)^{p-2}\frac{p(p-1)}{2}c^2F'(\varphi)^2 h + o(h)\right)\right)^{1/p} =$$

$$= \left(F(\varphi)^p + F(\varphi)^{p-1}\, p\,\frac{1}{2}F''(\varphi)\,h + \right.$$

$$\left. + F(\varphi)^{p-2}\frac{p(p-1)}{2}c^2F'(\varphi)^2 h + o(h)\right)^{1/p} =$$

$$= F(\varphi) + \left(\frac{1}{2}F''(\varphi) + \frac{p-1}{2}c^2\frac{F'(\varphi)^2}{F(\varphi)}\right)h + o(h).$$

Полагая $c = 1$ и $p = q$, получаем

(15) $$(E_2 F(\varphi + \varphi_h)^q)^{1/q} = \\ = F(\varphi) + \left(\frac{1}{2} F''(\varphi) + \frac{q-1}{2} \frac{F'(\varphi)^2}{F(\varphi)}\right) h + o(h).$$

Если пренебречь членами порядка $o(h)$, то, согласно (11), эта норма больше нормы (14).

Тогда из неравенства (13) следует, что

(16) $$\| \Gamma(c) F(\varphi + \varphi_h) \|_p \leqslant \| F(\varphi + \varphi_h) \|_q + o(h),$$

если считать уже доказанным неравенство

(17) $$\| \Gamma(c) G(\varphi) \|_p \leqslant \| G(\varphi) \|_q,$$

где

$$G(x) = F(x) + \frac{1}{2} F''(x) + \frac{q-1}{2} \frac{F'(x)^2}{F(x)}.$$

Пусть $H(x, t)$ — решение нелинейного уравнения

(18) $$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{q-1}{2} \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2}{H}$$

с начальным условием $H(x, 0) = F(x)$. Заметим, что уравнение (18) эквивалентно уравнению теплопроводности для H^q:

$$\frac{\partial H^q}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^q}{\partial x^2}.$$

Следовательно, уравнение (18) имеет единственное решение, которое при любом t как функция переменной x обладает теми же свойствами, какие предполагались выше для начального значения F. Тогда с помощью приведенных ранее рассуждений для гауссовой случайной величины φ с нулевым средним и дисперсией t получаем

(19) $$\| \Gamma(c) F(\varphi) \|_p \leqslant H(0, t) = \| F(\varphi) \|_q.$$

Тем самым неравенство (12) доказано.

Предположим теперь, что условие (11) не выполнено, т. е. $A\colon \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ — сжимающее отображение с нормой

(20) $$\| A \| > \sqrt{\frac{q-1}{p-1}}.$$

Достаточно рассмотреть случай, когда ядро A состоит из одного нуля. (В противном случае A можно сузить на ортогональное дополнение к его ядру.) Тогда A обладает полярным разложением $A = UP$, где оператор $U\colon \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ изометричен, а $P\colon \mathscr{H}\to\mathscr{H}$ положителен. Поскольку $\Gamma(U)^{-1}$ — сжимающее отображение, достаточно рассмотреть случай, когда оператор $A=P\colon \mathscr{H}\to\mathscr{H}$ положителен. По спектральной теореме существуют такое ненулевое подпространство пространства $\mathscr{H}$ и постоянная $c>\sqrt{(q-1)/(p-1)}$, что на этом подпространстве $A>c$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда A совпадает со скалярным оператором c. Однако для гауссовой случайной величины φ с нулевым средним и единичной дисперсией справедливы следующие соотношения [Ne 4]:

$$\Gamma(c)e^{\alpha\varphi}=e^{c\alpha\varphi}e^{\frac{1}{2}(1-c^2)\alpha^2},$$

$$\|\Gamma(c)e^{\alpha\varphi}\|_p=e^{\frac{1}{2}[(p-1)c^2+1]\alpha^2},$$

$$\|e^{\alpha\varphi}\|_q=e^{\frac{1}{2}q\alpha^2}.$$

Следовательно, величина $\|\Gamma(c)e^{\alpha\varphi}\|_p/\|e^{\alpha\varphi}\|_q$ сколь угодно велика при достаточно большом α.

II. ЕВКЛИДОВЫ ПОЛЯ

Пусть $\mathbb{E}^d$ — это d-мерное евклидово пространство, т. е. пространство $\mathbb{R}^d$ со скалярным произведением $x\cdot y=x^1y^1+\ldots+x^dy^d$. Обозначим через $\mathscr{S}(\mathbb{E}^d)$ пространство Шварца. Пусть $\mathscr{X}$ — топологическое векторное пространство. *Линейным процессом*, заданным над $\mathscr{X}$, назовем обобщенный случайный процесс φ, который как функционал на $\mathscr{X}$ линеен и непрерывен, т. е. из сходимости $f_\alpha\to f$ в $\mathscr{X}$ следует сходимость $\varphi(f_\alpha)\to\varphi(f)$ по мере. Для векторов f из $\mathscr{X}$ функции $\varphi(f)$ являются случайными величинами на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{S},\mu)$; для удобства мы предполагаем, что σ-алгебра $\mathscr{S}$ порождена всевозможными $\varphi(f)$, где $f\in\mathscr{X}$.

Пусть φ — линейный процесс, заданный на $\mathscr{S}(\mathbb{E}^d)$. Для открытого множества $\Lambda\subset\mathbb{E}^d$ введем σ-алгебру $\mathcal{O}(\Lambda)$, порожденную величинами $\varphi(f)$, где $\operatorname{supp} f\subseteq\Lambda$. Если же Λ — произвольное подмножество из $\mathbb{E}^d$, то мы полагаем

$$\mathcal{O}(\Lambda)=\bigcap_{\Lambda'\supset\Lambda}\mathcal{O}(\Lambda'), \tag{1}$$

где Λ' — всевозможные открытые множества, содержащие Λ. Множество всех случайных величин, измеримых относительно σ-алгебры $\mathcal{O}(\Lambda)$, мы будем также обозначать через $\mathcal{O}(\Lambda)$. Условные математические ожидания относительно $\mathcal{O}(\Lambda)$ обозначаются через $E\{\cdot\,|\,\mathcal{O}(\Lambda)\}$. Пусть Λ^c и $\partial\Lambda$ — это дополнение и граница множества Λ. *Марковским полем* на $\mathbb{E}^d$ называется линейный процесс φ, заданный на $\mathcal{S}(\mathbb{E}^d)$ и удовлетворяющий дополнительному условию: если Λ — открытое множество в $\mathbb{E}^d$, то для любой положительной суммируемой случайной величины α из $\mathcal{O}(\Lambda)$

$$E\{\alpha \mid \mathcal{O}(\Lambda^c)\} = E\{\alpha \mid \mathcal{O}(\partial\Lambda)\}. \tag{2}$$

Это условие называется *марковским свойством.*

Неоднородную ортогональную группу $IO(d)$ назовем евклидовой группой пространства $\mathbb{E}^d$. Она состоит из всех аффинных ортогональных преобразований $\mathbb{E}^d$. *Представлением* T группы $IO(d)$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ называется гомоморфизм $\eta \longmapsto T(\eta)$ группы $IO(d)$ в группу преобразований, сохраняющих меру. Заметим, что любому сохраняющему меру преобразованию S естественным образом сопоставляется преобразование S на пространстве случайных величин. *Евклидовым полем* назовем пару, состоящую из марковского поля φ, заданного на $\mathcal{S}(\mathbb{E}^d)$, и представления T группы $IO(d)$ на соответствующем φ вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$; при этом должны быть выполнены следующие условия: для любых $f \in \mathcal{S}(\mathbb{E}^d)$ и $\eta \in IO(d)$

$$T(\eta)\varphi(f) = \varphi(f \circ \eta^{-1}); \tag{3}$$

если ρ — отражение относительно гиперплоскости $\mathbb{E}^{d-1}$, то

$$T(\rho)\alpha = \alpha, \quad \alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{E}^{d-1}). \tag{4}$$

Соотношение (3) называется *евклидовой ковариантностью,* а соотношение (4) — *свойством отражения.* Заметим, что, согласно свойству евклидовой ковариантности, свойство отражения справедливо для любой гиперплоскости, если оно справедливо для какой-либо одной из них, поэтому нет необходимости в специальном выборе гиперплоскости.

Нам необходимо предположение, гарантирующее существование некоторых средних от произведений полей. Для этого удобно сделать следующее предположение:

(B) *Для любого* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{E}^d)$ *функция* $\varphi(f)$ *принадлежит* $\mathcal{L}^p$, *где* $1 \leqslant p < \infty$. *Отображение* $\mathcal{S}(\mathbb{E}^d)^n \to \mathbb{C}$, *определяемое соотношением*

$$S_n(f_1, \ldots, f_n) = E\varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n),$$

непрерывно.

По теореме Шварца о ядре существует такая обобщенная функция умеренного роста S_n на $\mathbb{E}^{dn}$, что

$$S_n(f_1, \ldots, f_n) = S_n(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n).$$

Теорема 2. *Пусть φ — евклидово поле, удовлетворяющее условию* (B). *Тогда последовательность обобщенных функций S_n удовлетворяет аксиомам Остервальдера — Шрадера* E0, E1, E2 *и* E3 [Os Sch 3].

Доказательство. Мы будем использовать обозначения работы [Os Sch 3]. В соответствии с аксиомой E0 обобщенная функция $S_0 = 1$ (пустое произведение полей мы считаем равным $\mathbb{1}$; тогда $E\mathbb{1} = 1$) и $S_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{E}^{dn})$.

Аксиома E1 является требованием евклидовой инвариантности:

$$S_n(f) = S_n\left(f_{(a, R)}\right), \quad R \in SO(d), \quad a \in \mathbb{E}^d, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{E}^{dn}).$$

Это свойство достаточно проверить лишь для $f = f_1 \otimes \ldots \ldots \otimes f_n$; в этом случае евклидова инвариантность превращается в следующее требование: для любого $\eta = (a, R)$

$$E\varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n) = ET(\eta)(\varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n)),$$

а оно является следствием евклидовой ковариантности.

Аксиому E2 мы предпочитаем называть свойством положительной определенности, желая отличить ее от свойства положительности Симанзика [Sy 3], которое следует из того факта, что среднее от положительной случайной величины положительно. Положительная определенность означает следующее:

$$\sum_{n, m} S_{n+m}(\Theta f_n^* \times f_m) \geqslant 0, \quad \underline{f} \in \underline{\mathcal{S}}_+. \tag{5}$$

Неравенство (5) достаточно доказать для случая, когда функция f_n равна $f_{n1} \otimes \ldots \otimes f_{nn}$. Условие $\underline{f} \in \underline{\mathcal{S}}_+$ означает, что

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = f_{n1}(x_1) \ldots f_{nn}(x_n) = 0,$$

если не выполнено требование

$$0 < x_1^d < \ldots < x_n^d.$$

Рассмотрим конечную линейную комбинацию

$$\alpha = \sum_n \varphi(f_{n1}) \ldots \varphi(f_{nn}).$$

Используя наши обозначения, перепишем неравенство (5):

$$E\{(T(\rho)\bar{\alpha})\alpha\} \geqslant 0. \tag{6}$$

Пусть Λ — полупространство $x^d > 0$; тогда $\partial\Lambda$ совпадает с гиперплоскостью $\mathbb{E}^{d-1}$, а Λ^c — с полупространством $x^d \leqslant 0$.

Значит, $\alpha \in \mathcal{O}(\Lambda)$ и $T(\rho)\bar{\alpha} \in \mathcal{O}(\Lambda^c)$. Мы получаем неравенство

$$E\{(T(\rho)\bar{\alpha})\alpha\} =$$
$$= E\{(T(\rho)\bar{\alpha}) E\{\alpha \mid \mathcal{O}(\Lambda^c)\}\} =$$
$$= E\{(T(\rho)\bar{\alpha}) E\{\alpha \mid \mathcal{O}(\mathbb{E}^{d-1})\}\} =$$

(в силу марковского свойства)

$$= E\{E\{T(\rho)\bar{\alpha} \mid \mathcal{O}(\mathbb{E}^{d-1})\} E\{\alpha \mid \mathcal{O}(\mathbb{E}^{d-1})\}\} =$$
$$= E\{(T(\rho) E\{\bar{\alpha} \mid \mathcal{O}(\mathbb{E}^{d-1})\}) E\{\alpha \mid \mathcal{O}(\mathbb{E}^{d-1})\}\} =$$

(в силу евклидовой ковариантности)

$$= E\{E\{\bar{\alpha} \mid \mathcal{O}(\mathbb{E}^{d-1})\} E\{\alpha \mid \mathcal{O}(\mathbb{E}^{d-1})\}\} =$$

(в силу свойства отражения)

$$= E\,|E\{\alpha \mid \mathcal{O}(\mathbb{E}^{d-1})\}|^2 \geqslant 0.$$

Аксиома E3, т. е. свойство симметричности, следует из коммутативности случайных величин: для любой перестановки π

$$S_n(f_1, \ldots, f_n) = E\varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n) = S_n(f_{\pi(1)}, \ldots, f_{\pi(n)}).$$

Теорема доказана.

В теореме Остервальдера — Шрадера [Os, Sch 3] утверждается существование последовательности обобщенных функций умеренного роста $\mathscr{W}_n$ на $(n \times d)$-мерном пространстве Минковского $\mathbb{M}^{dn}$; эти обобщенные функции являются вакуумными ожиданиями квантованного поля, удовлетворяющего всем аксиомам Вайтмана, за исключением аксиомы единственности вакуума (свойство распадения $\mathscr{W}_n$ на пучки). Кроме того, $\mathscr{W}_n$ — это граничные значения голоморфных функций, совпадающих с $S_n(x_1, \ldots, x_n)$, когда все x_j различны. Во время написания этих лекций стало известно, что в доказательстве теоремы имеется один недочет, но можно надеяться, что он скоро будет исправлен [1]. С другим способом построения квантованных полей на пространстве Минковского из евклидовых полей можно познакомиться в работе [Nel 3]. В этом подходе теорема Остервальдера — Шрадера не используется. Аксиома E4 Остервальдера — Шрадера, из которой следует единственность вакуума, является следствием дополнительных предположений для евклидова поля. В действительности представляет большой интерес вопрос о том, выполняется ли эта аксиома для моделей $P(\varphi)_2$.

[1]) См. примечание на стр. 9. — *Прим. ред.*

III. СВОБОДНОЕ ЕВКЛИДОВО ПОЛЕ

Пусть $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{E}^d)$ — вещественное пространство Шварца на $\mathbb{E}^d$. Пусть m — положительная постоянная (в случае $d \geqslant 3$ постоянная m считается неотрицательной). Обозначим через $\mathscr{H}$ вещественное гильбертово пространство, получающееся с помощью пополнения $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{E}^d)$ относительно скалярного произведения

$$\langle g, (-\Delta + m^2)^{-1} f\rangle,$$

где Δ — лапласиан. Пусть φ — единичный гауссов процесс на $\mathscr{H}$; продолжим его по линейности на комплексификацию $\mathscr{H}$. Сужение φ на пространство Шварца будет линейным процессом, заданным на $\mathscr{S}(\mathbb{E}^d)$.

Теорема 3. *Пусть φ — описанный выше линейный процесс. Тогда φ — евклидово поле, удовлетворяющее условию* (B).

Доказательство. Пусть Λ — открытое множество в $\mathbb{E}^d$, и пусть

$$\begin{aligned}
\mathscr{U} &= \{f \in \mathscr{H} \mid \operatorname{supp} f \subset \Lambda\},\\
\mathscr{M} &= \{f \in \mathscr{H} \mid \operatorname{supp} f \subset \Lambda^c\},\\
\mathscr{N} &= \{f \in \mathscr{H} \mid \operatorname{supp} f \subset \partial\Lambda\},\\
\mathscr{L} &= \mathscr{M} \cap \mathscr{N}^{\perp}.
\end{aligned}$$

Пусть $f \in \mathscr{U}$ и h — ортогональная проекция f на $\mathscr{M}$. Докажем, что $h \in \mathscr{N}$. Для этого заметим, что

$$\langle g, (-\Delta + m^2)^{-1} h\rangle = \langle g, (-\Delta + m^2)^{-1} f\rangle$$

для любых $g \in \mathscr{M}$ и, в частности, для бесконечно дифференцируемых функций g с компактным носителем, лежащим во внутренности Λ^{co} дополнения множества Λ. Значит, $(-\Delta + m^2)^{-1} h = (-\Delta + m^2)^{-1} f$ в смысле равенства обобщенных функций на Λ^{co}. Поскольку $-\Delta + m^2$ является локальным оператором, $h = f$ на Λ^{co}, причем $f = 0$ на Λ^{co}. Следовательно, $\operatorname{supp} h \subset \Lambda^c - \Lambda^{co} = \partial\Lambda$, т. е. $h \in \mathscr{N}$.

Пусть $\mathscr{K}$ — замкнутое линейное подпространство пространства $\mathscr{H}$. Через $\widetilde{\mathscr{K}}$ обозначим σ-алгебру, порожденную величинами $\varphi(f)$, где $f \in \mathscr{K}$. Если убывающая последовательность подпространств $\mathscr{K}_n$ сходится к $\mathscr{K}$, то ясно, что убывающая последовательность алгебр $\widetilde{\mathscr{K}}_n$ сходится к $\widetilde{\mathscr{K}}$. Пусть Λ_n — убывающая последовательность открытых множеств, сходящаяся к Λ^c, и $\mathscr{K}_n = \{f \in \mathscr{H} \mid \operatorname{supp} f \subset \Lambda_n\}$. Убывающая последовательность $\mathscr{K}_n$ сходится к $\mathscr{M}$, а убывающая последовательность $\mathcal{O}(\Lambda_n) = \tilde{\mathcal{H}}_n$ — к $\tilde{\mathcal{M}}$. Следовательно, $\mathcal{O}(\Lambda^c) = \tilde{\mathcal{M}}$. Аналогично, $\mathcal{O}(\partial\Lambda) = \tilde{\mathcal{N}}$ и $\mathcal{O}(\Lambda) = \tilde{\mathcal{U}}$.

Выше мы доказали, что $\mathcal{U} \perp \mathcal{L}$ и, следовательно, σ-алгебры $\tilde{\mathcal{U}}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$ независимы. Далее, $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{L}$, так что $\tilde{\mathcal{M}}$ есть σ-алгебра, порожденная $\tilde{\mathcal{N}}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$. Следовательно, для положительной или суммируемой случайной величины α, измеримой относительно $\tilde{\mathcal{U}}$, справедливо соотношение $E\{\alpha | \tilde{\mathcal{M}}\} = E\{\alpha | \tilde{\mathcal{N}}\}$. Таким образом, φ — марковское поле.

Определим для $\eta \in IO(d)$ ортогональный оператор $U(\eta)$ на $\mathcal{H}$:

$$U(\eta) f = f \circ \eta^{-1}.$$

Тогда $\eta \mapsto U(\eta)$ — унитарное представление группы $IO(d)$ на $\mathcal{H}$ и, следовательно, $\eta \mapsto T(\eta) = \Gamma(U(\eta))$ — представление группы $IO(d)$ на определяющем φ вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$. Очевидно,

$$T(\eta) \varphi(f) = \varphi(f \circ \eta^{-1}),$$

и, следовательно, выполняется условие евклидовой ковариантности.

Пусть

$$\mathcal{H}_0 = \{f \in \mathcal{H} \mid \operatorname{supp} f \subset \mathbb{E}^{d-1}\}$$

и $f \in \mathcal{H}_0$. Поскольку f принадлежит $\mathcal{H}$, ее преобразование Фурье $\tilde{f}$ квадратично интегрируемо по мере

$$\frac{dk}{k^2 + m^2}. \tag{1}$$

Кроме того, $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{E}^{d-1}$, и потому мы получаем

$$\tilde{f}(k) = \sum_i f_{0i}(\mathbf{k})\, p_i(k^d),$$

где f_{0i} — функции лишь от $\mathbf{k} = (k^1, \ldots, k^{d-1})$, а p_i — полиномы. Поскольку $\tilde{f}$ квадратично интегрируема по мере (1), то полиномы p_i — это просто константы. Следовательно, если ρ — отражение относительно гиперплоскости $\mathbb{E}^{d-1}$, то

$$U(\rho) f = f.$$

Значит,

$$T(\rho) \varphi(f) = \varphi(f).$$

Но, поскольку $\mathcal{O}(\mathbb{E}^{d-1}) = \tilde{\mathcal{H}}_0$, если $\alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{E}^{d-1})$, мы получаем

$$T(\rho) \alpha = \alpha.$$

Тем самым свойство отражения доказано. Следовательно, φ — евклидово поле.

Ясно, что условие (В) для гауссова процесса φ выполнено. Процесс φ называется свободным евклидовым полем массы m, заданным на $\mathbb{E}^d$.

IV. МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Пусть φ — заданное над $\mathscr{S}(\mathbb{E}^d)$ марковское поле на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$. Случайная величина α называется *аддитивной*, если для любого конечного открытого покрытия $\{\Lambda_i\}$ пространства $\mathbb{E}^d$ найдутся вещественные величины α_i из $\mathcal{O}(\Lambda_i)$, удовлетворяющие условию $\alpha = \sum \alpha_i$ Аналогично, случайная величина β называется *мультипликативной*, если для любого конечного открытого покрытия $\{\Lambda_i\}$ пространства $\mathbb{E}^d$ найдутся строго положительные величины β_i из $\mathcal{O}(\Lambda_i)$, удовлетворяющие условию $\beta = \prod \beta_i$. Таким образом, величина α аддитивна в том и только в том случае, если величина $\beta = e^\alpha$ мультипликативна.

Теорема 4. *Пусть* φ — *заданное над* $\mathscr{S}(\mathbb{E}^d)$ *марковское поле на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$, *и пусть* β — *мультипликативная случайная величина с единичным средним. Тогда* φ — *заданное над* $\mathscr{S}(\mathbb{E}^d)$ *марковское поле на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathscr{S}, \beta d\mu)$.

Для доказательства теоремы нам потребуются две леммы. Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ суть σ-алгебры измеримых множеств на вероятностном пространстве. Через $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ обозначим наименьшую σ-алгебру, содержащую $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$.

Лемма 1. *Пусть* $\mathscr{A}$ *и* $\mathscr{B}_n$ *суть* σ-*алгебры измеримых множеств на вероятностном пространстве, причем* $\mathscr{B}_n$ — *убывающая последовательность. Тогда*

$$\bigcap_n (\mathscr{A} \cup \mathscr{B}_n) = \mathscr{A} \cup \bigcap_n \mathscr{B}_n.$$

Доказательство. Для любой σ-алгебры $\mathscr{A}$ измеримых множеств на вероятностном пространстве введем алгебру фон Неймана $\bar{\mathscr{A}}$, состоящую из действующих на L^2 операторов умножения на ограниченные случайные величины, измеримые относительно $\mathscr{A}$. Тогда достаточно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\bigcap_n (\bar{\mathscr{A}} \cup \bar{\mathscr{B}}_n) = \bar{\mathscr{A}} \cup \bigcap_n \bar{\mathscr{B}}_n. \tag{1}$$

Обозначая через $\bar{\mathscr{A}}'$ коммутант алгебры $\bar{\mathscr{A}}$, нетрудно убедиться в том, что

$$\Big(\bigcap_n (\bar{\mathscr{A}} \cup \bar{\mathscr{B}}_n)\Big)' = \bigcup_n (\bar{\mathscr{A}} \cup \bar{\mathscr{B}}_n)' = \bigcup_n (\bar{\mathscr{A}}' \cap \bar{\mathscr{B}}_n') =$$

$$= \bar{\mathscr{A}}' \cap \bigcup_n \bar{\mathscr{B}}_n' = \bar{\mathscr{A}}' \cap \Big(\bigcap_n \bar{\mathscr{B}}_n\Big)' = \Big(\bar{\mathscr{A}} \cup \bigcap_n \bar{\mathscr{B}}_n\Big)'.$$

Поскольку бикоммутант алгебры фон Неймана совпадает с ней самой, то, рассматривая коммутанты первого и последнего членов этого равенства, получаем соотношение (1).

Лемма 2. *Пусть φ — марковское поле, заданное над $\mathscr{S}(\mathbb{E}^d)$ и Λ — открытое множество в $\mathbb{E}^d$. Пусть Λ' — замкнутое подмножество из Λ^c, содержащее $\partial\Lambda$. Тогда*

$$E\{\mathscr{O}(\Lambda \cup \Lambda') \mid \mathscr{O}(\Lambda^c)\} = \mathscr{O}(\Lambda').$$

Доказательство. Заметим, что множество $\Lambda \cup \Lambda'$ замкнуто, так как $\Lambda' \supset \partial\Lambda$. Пусть Λ_n — убывающая последовательность открытых множеств, сходящаяся к Λ'. Тогда убывающая последовательность открытых множеств $\Lambda \cup \Lambda_n$ сходится к $\Lambda \cup \Lambda'$. Используя разложение единицы в пространстве $\mathscr{S}(\mathbb{E}^d)$, получаем $\mathscr{O}(\Lambda \cup \Lambda_n) = \mathscr{O}(\Lambda) \cup \mathscr{O}(\Lambda_n)$. Следовательно, согласно лемме 1,

$$\mathscr{O}(\Lambda \cup \Lambda') = \bigcap_n \mathscr{O}(\Lambda \cup \Lambda_n) = \bigcap_n (\mathscr{O}(\Lambda) \cup \mathscr{O}(\Lambda_n)) =$$

$$= \mathscr{O}(\Lambda) \cup \bigcap_n \mathscr{O}(\Lambda_n) = \mathscr{O}(\Lambda) \cup \mathscr{O}(\Lambda').$$

Согласно марковскому свойству и условию $\Lambda' \subset \Lambda^c$, получаем для ограниченных случайных величин α_i и β_i из $\mathscr{O}(\Lambda)$ и $\mathscr{O}(\Lambda')$ соответственно

$$E\{\textstyle\sum \alpha_i\beta_i \mid \mathscr{O}(\Lambda^c)\} = \sum E\{\alpha_i \mid \mathscr{O}(\Lambda^c)\}\beta_i = \sum E\{\alpha_i \mid \mathscr{O}(\partial\Lambda)\}\beta_i.$$

Значит,

$$E\{\mathscr{O}(\Lambda \cup \Lambda') \mid \mathscr{O}(\Lambda^c)\} \subset \mathscr{O}(\Lambda').$$

Обратное включение очевидно.

Докажем теперь теорему 4. Средние по мере μ и условные математические ожидания обозначим через E и $E\{\cdot \mid \cdot\}$, а средние по мере $\beta d\mu$ и условные математические ожидания — через E_β и $E_\beta\{\cdot \mid \cdot\}$.

Пусть Λ открыто в $\mathbb{E}^d$ и α — положительная случайная величина из $\mathscr{O}(\Lambda)$. Нужно доказать, что

$$E_\beta\{\alpha \mid \mathscr{O}(\Lambda^c)\} = E_\beta\{\alpha \mid \mathscr{O}(\partial\Lambda)\}.$$

По теореме Радона — Никодима существует такая единственная положительная случайная величина $\tilde{\alpha} = E_\beta\{\alpha | \mathcal{O}(\Lambda^c)\}$ из $\mathcal{O}(\Lambda^c)$, что для любой положительной случайной величины γ из $\mathcal{O}(\Lambda^c)$

$$E_\beta \alpha\gamma = E_\beta \tilde{\alpha}\gamma,$$

или

$$E\alpha\gamma\beta = E\tilde{\alpha}\gamma\beta. \tag{2}$$

Мы должны доказать, что $\tilde{\alpha}$ принадлежит $\mathcal{O}(\partial\Lambda)$. Пусть Λ_o — какое-либо открытое множество, содержащее $\partial\Lambda$, и Λ^{co} — внутренность множества Λ^c. Тогда $\{\Lambda, \Lambda_o, \Lambda^{co}\}$ — открытое покрытие пространства $\mathbb{E}^d$. Следовательно, найдутся строго положительные случайные величины β_1, β_2 и β_3, принадлежащие соответственно алгебрам $\mathcal{O}(\Lambda)$, $\mathcal{O}(\Lambda_o)$ и $\mathcal{O}(\Lambda^{co})$ и удовлетворяющие условию $\beta = \beta_1\beta_2\beta_3$. Подставляя β в уравнение (2), получаем

$$E\alpha\gamma\beta_1\beta_2\beta_3 = E\tilde{\alpha}\gamma\beta_1\beta_2\beta_3$$

для любой положительной случайной величины γ из $\mathcal{O}(\Lambda^c)$. Однако положительная случайная величина β_3^{-1} также принадлежит $\mathcal{O}(\Lambda^c)$, а потому

$$E\alpha\gamma\beta_1\beta_2 = E\tilde{\alpha}\gamma\beta_1\beta_2 \tag{3}$$

для любой положительной случайной величины γ из $\mathcal{O}(\Lambda^c)$. Заметим, что правая часть уравнения (3) совпадает с

$$E[\tilde{\alpha}\gamma E\{\beta_1\beta_2 | \mathcal{O}(\Lambda^c)\}].$$

В силу того что γ произвольна, мы имеем

$$E\{\alpha\beta_1\beta_2 | \mathcal{O}(\Lambda^c)\} = \tilde{\alpha} E\{\beta_1\beta_2 | \mathcal{O}(\Lambda^c)\}.$$

Поскольку величина $\beta_1\beta_2$ строго положительна, последнее соотношение можно переписать в виде

$$\frac{E\{\alpha\beta_1\beta_2 | \mathcal{O}(\Lambda^c)\}}{E\{\beta_1\beta_2 | \mathcal{O}(\Lambda^c)\}} = \tilde{\alpha}. \tag{4}$$

Применяя лемму 2 к областям Λ и $\Lambda' = \bar{\Lambda}_o \cap \Lambda^c$, получаем, что как числитель, так и знаменатель левой части соотношения (4) принадлежат алгебре $\mathcal{O}(\Lambda')$, содержащейся в $\mathcal{O}(\bar{\Lambda}_o)$. Следовательно, $\tilde{\alpha}$ принадлежит $\mathcal{O}(\bar{\Lambda}_o)$, а поскольку Λ_o — произвольное открытое множество, содержащее $\partial\Lambda$, величина $\tilde{\alpha}$ принадлежит $\mathcal{O}(\partial\Lambda)$. Теорема доказана.

В ходе доказательства теоремы мы для любой положительной случайной величины α из $\mathcal{O}(\Lambda)$ получили соотношение

$$E_\beta\{\alpha | \mathcal{O}(\Lambda^c)\} = \frac{E\{\alpha\beta | \mathcal{O}(\Lambda^c)\}}{E\{\beta | \mathcal{O}(\Lambda^c)\}} \tag{5}$$

(величину β_3 можно включить в условные математические ожидания как числителя, так и знаменателя уравнения (4)).

Если φ — свободное евклидово поле, то для $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{E}^d)$ величина $\varphi(f)$ — аддитивна. Для случая $d=2$ мы построим более интересный пример.

Пусть φ — свободное евклидово поле массы $m>0$ на $\mathbb{E}^2$. Преобразование Фурье $\tilde{\varphi}$ определим с помощью соотношения

$$\tilde{\varphi}(\tilde{f}) = \varphi(f),$$

где

$$\tilde{f}(k) = \int e^{-ix\cdot k} f(x)\, d^2x$$

— преобразование Фурье от f, и используем обозначение

$$\tilde{\varphi}(\tilde{f}) = \int \tilde{f}(k)\, \tilde{\varphi}(k)\, dk.$$

Пусть

$$\varphi_\varkappa(x) = \int\limits_{|k| \leqslant \varkappa} e^{ixk} \tilde{\varphi}(k)\, dk.$$

При $x \in \mathbb{E}^2$ функция $\varphi_\varkappa(x)$ — корректно определенная гауссова случайная величина с нулевым средним и дисперсией $c_\varkappa^2$, где

$$(6) \qquad c_\varkappa^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{|k| \leqslant \varkappa} \frac{dk}{k^2+m^2} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\varkappa^2+m^2}{m^2} = O(\ln \varkappa).$$

Таким образом, определена величина $:\varphi_\varkappa(x)^n:$. Для $g \in \mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbb{E}^2)$ полагаем

$$:\varphi_\varkappa^n:(g) = \int :\varphi_\varkappa(x)^n: g(x)\, d^2x.$$

Из соотношения (6, I) следует, что при $\lambda \geqslant \varkappa$

$$(7) \qquad (n!)^{-1} \left\| :\varphi_\lambda^n:(g) - :\varphi_\varkappa^n:(g) \right\|_2^2 = \langle g, G_\lambda^n * g \rangle - \langle g, G_\varkappa^n * g \rangle,$$

где

$$G_\varkappa(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{|k| \leqslant \varkappa} e^{ix\cdot k} \frac{dk}{k^2+m^2}.$$

Следовательно, последовательность $:\varphi_\varkappa^n:(g)$ при $\varkappa \to \infty$ сходится в $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$. Ее предел обозначим через $:\varphi^n:(g) = \int :\varphi(x)^n: g(x)\, d^2x$.

Пусть Λ открыто в $\mathbb{E}^2$ и g принадлежит $\mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbb{E}^2)$, причем $\operatorname{supp} g \subset \Lambda$. Покажем, что

$$(8) \qquad :\varphi^n:(g) \in \mathcal{O}(\Lambda).$$

Обозначим через $\mathcal{M}_{\varkappa}(\Lambda)$ замкнутое линейное подпространство в $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$, натянутое на $\varphi_\lambda(x)$, где $x \in \Lambda$ и $\lambda \geqslant \varkappa$. Это подпространство совпадает с замкнутым линейным подпространством, натянутым на $\varphi_\lambda(f)$, где $\operatorname{supp} f \subset \Lambda$, функции $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{E}^2)$ и $\lambda \geqslant \varkappa$. Пусть $\mathcal{O}_{\varkappa}(\Lambda)$ есть σ-алгебра, порожденная $\mathcal{M}_{\varkappa}(\Lambda)$. Тогда $:\varphi_{\varkappa}^n:(g)$ принадлежит $\mathcal{O}_{\varkappa}(\Lambda)$. Пусть $\mathcal{M}(\Lambda)$ — замкнутое линейное подпространство, натянутое на $\varphi(f)$, где $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{E}^2)$ и $\operatorname{supp} f \subset \Lambda$. Тогда

$$\bigcap_{\varkappa} \mathcal{M}_{\varkappa}(\Lambda) = \mathcal{M}(\Lambda),$$

и, следовательно,

$$\bigcap_{\varkappa} \mathcal{O}_{\varkappa}(\Lambda) = \mathcal{O}(\Lambda).$$

Из сходимости $:\varphi_{\varkappa}^n:(g) \to\ :\varphi^n:(g)$ мы получаем

$$:\varphi^n:(g) \in \bigcap_{\varkappa} \mathcal{O}_{\varkappa}(\Lambda) = \mathcal{O}(\Lambda),$$

т. е. условие (8).

Поскольку в пространстве $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{E}^2)$ возможно разбиение единицы, из условия (8) следует аддитивность величины $:\varphi^n:(g)$. В действительности справедливо более сильное утверждение: для любого конечного разбиения $\{\Lambda_i\}$ пространства $\mathbb{E}^2$ на измеримые множества найдутся случайные величины α_i из $\mathcal{O}(\Lambda_i)$, удовлетворяющие условию $:\varphi^n:(g) = \sum \alpha_i$ (в качестве α_i можно взять $:\varphi^n:(g\chi_{\Lambda_i})$). С помощью этого более сильного свойства легко доказать аналог теоремы 4, не используя лемм 1 и 2. Неясно, есть ли вообще необходимость в теореме 4.

Из равенства (7) вытекает следующее соотношение:

$$(n!)^{-1} \left\| :\varphi^n:(g) - :\varphi_{\varkappa}^n:(g) \right\|_2^2 = \langle g, G^n * g \rangle - \langle g, G_{\varkappa}^n * g \rangle, \tag{9}$$

где

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{ix \cdot k} \frac{d^2k}{k^2 + m^2}.$$

Докажем, что при некотором $\varepsilon > 0$ норма (9) — величина порядка $O(\varkappa^{-\varepsilon})$. Для этого достаточно убедиться в том, что

$$\left\| G^n - G_{\varkappa}^n \right\|_r = O\left(\varkappa^{-\varepsilon}\right) \tag{10}$$

для некоторого r, удовлетворяющего условию типа $2 \leqslant r < \infty$. В силу неравенства Хаусдорфа — Юнга для доказательства последней оценки достаточно показать, что

$$\left\| \widetilde{G}^{*n} - \widetilde{G}_{\varkappa}^{*n} \right\|_s = O\left(\varkappa^{-\varepsilon}\right) \tag{11}$$

при некотором s, удовлетворяющем условию $1 < s \leqslant 2$. Однако

$$\tilde{G}^{*n} - \tilde{G}_{\varkappa}^{*n} = (\tilde{G} - \tilde{G}_{\varkappa}) * \tilde{G}_{\varkappa} * \ldots * \tilde{G}_{\varkappa} +$$
$$+ \tilde{G} * (\tilde{G} - \tilde{G}_{\varkappa}) * \tilde{G}_{\varkappa} * \ldots * \tilde{G}_{\varkappa} + \ldots + \tilde{G} * \ldots * \tilde{G} * (\tilde{G} - \tilde{G}_{\varkappa}).$$

Для $q > 1$ норма $\|\tilde{G}_{\varkappa}\|_q$ равномерно ограничена по $\varkappa$, и при $q - 1 < 1/n$ из неравенства Юнга получаем, что норма (11) меньше некоторой константы, умноженной на $\|\tilde{G} - \tilde{G}_{\varkappa}\|_q$. Таким образом, нужно доказать лишь оценку

$$(12) \qquad \|\tilde{G} - \tilde{G}_{\varkappa}\|_q = O(\varkappa^{-\varepsilon}),$$

однако к ней приводят простые вычисления.

По теореме 1

$$(13) \qquad \left\|\Gamma\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right)(:\varphi^n:(g) - :\varphi_{\varkappa}^n:(g))\right\|_p \leqslant$$
$$\leqslant \|:\varphi^n:(g) - :\varphi_{\varkappa}^n:(g)\|_2,$$

и, следовательно, это величина порядка $O(\varkappa^{-\varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$. По определению оператора Γ левая часть неравенства (13) равна

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right)^n \|:\varphi^n:(g) - :\varphi_{\varkappa}^n:(g)\|_p.$$

Значит, найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $C < \infty$, что для любых $\varkappa$ и p

$$(14) \qquad \|:\varphi^n:(g) - :\varphi_{\varkappa}^n:(g)\|_p \leqslant (p-1)^{n/2} C\varkappa^{-\varepsilon}.$$

Пусть $g \in \mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^{\infty}(\mathbb{E}^2)$. Для любого полинома

$$(15) \qquad P(\xi) = a_n\xi^n + \ldots + a_1\xi + a_0$$

определим $:P(\varphi):(g) = \int g(x):P(\varphi(x)):d^2x$ как

$$a_n:\varphi^n:(g) + \ldots + a_1\varphi(g) + a_0.$$

Аналогично определяется $:P(\varphi_{\varkappa}):(g)$. Снова можно найти такие $\varepsilon > 0$ и $C < \infty$, что для любых $\varkappa$ и p

$$(16) \qquad \|:P(\varphi):(g) - :P(\varphi_{\varkappa}):(g)\|_p \leqslant (p-1)^{n/2} C\varkappa^{-\varepsilon}.$$

Предположим теперь, что P ограничен снизу, т. е. P веществен, n четно и $a_n > 0$. Если ψ — гауссова случайная величина с нулевым средним и дисперсией 1, то величина $:P(\psi):$ ограничена снизу, поскольку $:P(\psi): = Q(\psi)$, где старший коэффициент полинома Q совпадает со старшим коэффициентом полинома P. Таким образом, для любой гауссовой случайной величины ψ с нулевым средним величина $:P(\psi):$ ограничена снизу некоторой постоянной, умноженной на дисперсию ψ в степени $n/2$. Тогда, согласно соотношению (6), для функции $g \geqslant 0$, принадлежащей $\mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbb{E}^2)$, найдется такая постоянная $a > 0$, что

(17) $$:P(\varphi_\varkappa):(g) \geqslant -a(\ln\varkappa)^n + 1$$

для любых $\varkappa$ (например, больших 2). Для удобства мы в правой части неравенства (17) выделили 1. Из оценки (16) получаем

$$\mu\{\omega \mid \ |:P(\varphi):(g) - P(\varphi_\varkappa):(g)| \geqslant 1\} \leqslant$$
$$\leqslant \| :P(\varphi):(g) - :P(\varphi_\varkappa):(g)\|_p^p \leqslant (p-1)^{(n/2)\cdot p} C^p \varkappa^{-\varepsilon p}.$$

Таким образом, $:P(\varphi):(g) \geqslant -a(\ln\varkappa)^n$ всюду, за исключением множества, мера которого не превосходит

(18) $$(p^{n/2}C\varkappa^{-\varepsilon})^p.$$

Выбирая значение p, соответствующее минимуму функции (18), получаем, что мера этого множества меньше

(19) $$e^{-b\varkappa^\varepsilon}$$

при некоторых $b > 0$ и $\varepsilon > 0$.

Следовательно,

$$\mu\left\{\omega \mid e^{-:P(\varphi):(g)} \geqslant e^{a(\ln\varkappa)^n}\right\} = \mu\{\omega \mid :P(\varphi):(g) \leqslant -a(\ln\varkappa)^n\} \leqslant e^{-b\varkappa^\varepsilon}.$$

Пусть $\lambda = e^{a(\ln\varkappa)^n}$; тогда $\varkappa = e^{[(\ln\lambda)/a]^{1/n}}$. Значит,

(20) $$\mu\{\omega \mid e^{-:P(\varphi):(g)} \geqslant \lambda\} \leqslant e^{-be^{[(\ln\lambda)/a]^{\varepsilon/n}}}.$$

Из оценки (20) следует, что величина $\gamma = e^{-:P(\varphi):(g)}$ принадлежит $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ а потому $\beta = \gamma/E\gamma$ — мультипликативная случайная величина.

Подведем итоги. Пусть $d = 2$, функция $g \geqslant 0$ принадлежит $\mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbb{E}^2)$ и P — ограниченный снизу полином. Тогда φ — марковское поле на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{S}, \beta d\mu)$, где

(21) $$\beta = \frac{e^{-\int g(x):P(\varphi(x)):d^2x}}{Ee^{-\int g(x):P(\varphi(x)):d^2x}}.$$

V. ПОЛЯ НА РЕШЕТКЕ

Пусть Λ — подмножество целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$. Если f — функция на Λ, положим

(1) $$\Delta_\Lambda f(x) = -2df(x) + \sum_{\substack{|y-x|=1 \\ y\in\Lambda}} f(y), \quad x \in \Lambda.$$

Определим функцию

(2) $$A_\Lambda(x, y) = \begin{cases} 2d + m^2, & x = y, \\ 1, & |x - y| = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $x, y \in \Lambda$. Тогда

(3) $$(-\Delta_\Lambda + m^2) f(x) = \sum_{y \in \Lambda} A_\Lambda(x, y) f(y), \quad x \in \Lambda.$$

При $m > 0$ (или при $d \geqslant 3$ и $m \geqslant 0$, а также в случае конечного множества Λ и $m \geqslant 0$) оператор $(-\Delta_\Lambda + m^2)$ на пространстве $l^2(\Lambda)$ обратим. Функцию G_Λ на $\Lambda \times \Lambda$ зададим с помощью соотношения

(4) $$(-\Delta_\Lambda + m^2)^{-1} f(x) = \sum_{y \in \Lambda} G_\Lambda(x, y) f(y), \quad x \in \Lambda.$$

Из положительности оператора $(-\Delta_\Lambda + m^2)^{-1}$ следует положительная определенность функции G_Λ на $\Lambda \times \Delta$. Пусть φ_Λ — заданный на Λ гауссов случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией G_Λ. Этот процесс называется *свободным решеточным полем массы m на* Λ.

Если множество Λ конечно, процесс $\varphi_\Lambda(x)$ задается обычными координатными функциями u_x на пространстве $\mathbb{R}^{\#\Lambda}$ (здесь $\#\Lambda$ — число точек множества Λ), снабженном гауссовой мерой

(5) $$(\det 2\pi G_\Lambda)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Lambda} u_x A_\Lambda(x, y) u_y} \prod_{x \in \Lambda} du_x.$$

Два свойства этой меры очевидны. Во-первых, зависимы лишь *соседние точки*. Во-вторых, эта мера описывает *ферромагнетик*, поскольку все недиагональные члены в экспоненте положительны.

VI. СЛУЧАЙ БЕСКОНЕЧНОГО ОБЪЕМА

Пусть P — ограниченный снизу четный полином с вещественными коэффициентами, т. е.

$$P(\xi) = a_n \xi^n + a_{n-2} \xi^{n-2} + \ldots + a_2 \xi^2 + a_0,$$

где n четно и $a_n > 0$. Заметим, что если φ — свободное поле массы m, заданное на решетке $\mathbb{Z}^d$, то $:P(\varphi(x)): = Q(\varphi(x))$, где Q — также четный ограниченный снизу полином. Таким образом, в общих рассуждениях можно игнорировать упорядочение по Вику.

Пусть Λ — конечное подмножество решетки $\mathbb{Z}^d$. Рассмотрим меру

$$(1)\qquad N_\Lambda e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{x,\,y\in\Lambda} u_x A_\Lambda(x,\,y)\,u_y-\sum\limits_{x\in\Lambda} P(u_x)}\prod_{x\in\Lambda} du_x,$$

где функция A_Λ определяется соотношением (2, V) а N_Λ — нормировочная константа этой меры.

Мы попали в ситуацию, которую Жинибр (см. [Gi 1, модель 2]) уже рассматривал при изучении неравенств Гриффитса. В каждой точке $x\in\Lambda$ мы имеем четную меру

$$(2)\qquad e^{-\frac{1}{2}\left(2d+m^2\right)u_x^2-P(u_x)}\,du_x.$$

Пусть σ — прямое произведение этих мер на $\mathbb{R}^{\#\Lambda}$.

Определим S_x как множество функций вида $f(|u_x|)$ или $\operatorname{sgn} u_x f(|u_x|)$, где f — положительная, непрерывная, возрастающая функция на $[0,\infty)$. Обозначим через S совокупность всевозможных произведений таких функций для различных точек $x\in\Lambda$, а через $Q(S)$ — совокупность пределов полиномов с положительными коэффициентами от таких функций. Заметим, что алгебра $Q(S)$ содержит $-h$, где

$$(3)\qquad -h=\frac{1}{2}\sum_{\substack{|x-y|=1\\ x,\,y\in\Lambda}} u_x u_y.$$

Положим

$$(4)\qquad Z_h=\int e^{-h}\,d\sigma;$$

тогда $N_\Lambda=Z_h^{-1}$. Обозначим через Ef или $\langle f\rangle_h$ среднее от функции f на Λ по мере (1), т. е.

$$(5)\qquad Ef=\langle f\rangle_h=\frac{\int fe^{-h}\,d\sigma}{\int e^{-h}\,d\sigma}.$$

Жинибр [Gi 1] показал, что для функций f и g из $Q(S)$ справедливо второе неравенство Гриффитса

$$(6)\qquad Efg\geqslant EfEg.$$

В действительности Жинибр рассмотрел лишь случай ограниченных функций из S_x, непрерывно продолжаемых на $[0,\infty]$ (в обозначениях Жинибра это интервал $[0,1]$). Однако сделанное выше общее утверждение нетрудно вывести из этого частного случая.

При переходе к бесконечному объему существование предела обычно следует из второго неравенства Гриффитса. В самом деле, из неравенства (6) для $x_1, \ldots, x_n \in \Lambda \subset \Lambda'$ легко получить неравенство

$$E\varphi_\Lambda(x_1) \ldots \varphi_\Lambda(x_n) \leqslant E\varphi_{\Lambda'}(x_1) \ldots \varphi_{\Lambda'}(x_n). \tag{7}$$

Следовательно, если Λ монотонно стремится к $\mathbb{Z}^d$, то левая часть (7) монотонно стремится к пределу

$$S(x_1, \ldots, x_n). \tag{8}$$

Тот же самый результат получается при замене решетки $\mathbb{Z}^d$ решеткой $\varepsilon\mathbb{Z}^d$ с расстоянием ε между соседними точками; в этом случае функцию Δ_Λ, определенную соотношением (1, V), необходимо умножить на ε^{-2}. На гладких функциях f на $\mathbb{R}^d$ оператор (1, V) при $\varepsilon \to 0$ совпадает с лапласианом Δ. Для размерности $d = 2$ можно доказать (см. [Gu Ro Si 3]) существование предела среднего $E\varphi_r(x_1) \ldots \varphi_r(x_n)$ при $\varepsilon \to 0$. Этот предел совпадает со средним в теории, которую Гуэрра, Розен и Саймон назвали обобщенной теорией Дирихле. Существование предела при переходе к бесконечному объему следует из неравенства (7), которое справедливо и в этом случае. Гуэрра, Розен и Саймон [Gu Ro Si 3] указали, каким образом можно доказать ограниченность последнего предела. Таким образом, пределы этих средних являются функциями Швингера теории, удовлетворяющей всем аксиомам Вайтмана, за исключением, быть может, аксиомы о единственности вакуума.

В заключение покажем, что для случая решетки аксиома о единственности вакуума не всегда справедлива. Мы рассмотрим частный случай $d = 2$ и

$$P(\xi) = \xi^4 + a\xi^2. \tag{9}$$

Тогда в каждой точке $x \in \Lambda$ мера (2) равна

$$e^{E(u_x)}\, du_x, \tag{10}$$

где

$$E(u_x) = -u_x^4 - \left(2 + \frac{1}{2}m^2 - a\right)u_x^2. \tag{11}$$

На отрезке $[0, b]$, где

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}a - 1 - \frac{m^2}{4}}, \tag{12}$$

функция E возрастает. Число b можно сделать сколь угодно большим, выбирая достаточно большое a. Пусть

$$R(u_x)=\begin{cases} E(u_x), & |u_x|\leqslant b, \\ \infty, & |u_x|>b. \end{cases}$$

Функция R является пределом функций из S_x. Тогда, согласно неравенству (6), при замене меры (10) мерой

$$e^{E(u_x)-R(u_x)}\,du_x \tag{13}$$

средние от произведений операторов поля уменьшаются. Однако мера (13) совпадает с мерой

$$\chi_{[-b,\,b]}(u_x)\,du_x, \tag{14}$$

и мы попадаем в ситуацию модели Изинга с непрерывным спином. Гриффитс [Gr 2] показал, что для достаточно большого b область упорядочения в этой модели велика и свойство распадения на пучки нарушено.

Замечания

Благодаря работам Глимма и Джаффе конструктивная квантовая теория поля стала обширной и быстро развивающейся отраслью науки. Мы не будем сейчас говорить об основных приложениях методов, обсуждавшихся в этих лекциях, а лишь остановимся на некоторых вопросах.

Лекция I. Относительно разложений Эрмита см. [Sze]. Результат о том, что $\Gamma(A)$ может быть оператором сжатия на $\mathcal{L}^p$, принадлежит Глимму [Gli 1]. Этот результат является существенным моментом при переходе от квантования в ограниченном объеме к обычному квантованию. После написания этих лекций появилась работа Гросса [Gro 3], содержащая изящное и простое доказательство теоремы 1. Гросс путем дифференцирования по p установил эквивалентность логарифмического неравенства Соболева наилучшей оценке для гиперсжимаемости. Кроме того, он получил теорему для случая бозонов, доказав ее сначала для случая фермионов с одной степенью свободы и применив центральную предельную теорему.

Лекция II. В работе [Gu Ro Si 3] впервые замечено, что из марковского свойства и свойства отражения следуют аксиомы Остервальдера — Шрадера. Я выражаю свою благодарность Дж. Розену за приведенное здесь доказательство. Р. Л. Добрушин и Р. А. Минлос [Dob Mi] анонсировали

БОЗОННЫЕ КВАНТОВОПОЛЕВЫЕ МОДЕЛИ [1])

Дж. Глимм, А. Джаффе

Содержание

Часть 1. Общие результаты

1. Введение
2. Операторы Эрмита
3. Гауссовы меры и шредингеровское представление
4. Эрмитово разложение и фоковское пространство

Часть 2. Двумерные бозонные модели

5. Гамильтониан взаимодействия
6. Гамильтониан свободного поля
7. Самосопряженность $H(g)$
8. Локальные алгебры и автоморфизмы, представляющие группу Лоренца

Часть 3. Дальнейшее развитие теории

9. Локально нормальные представления наблюдаемых
10. Построение физического вакуума
11. Формальная теория возмущений и модели в трехмерном пространстве-времени

Часть I

ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Введение

С математической точки зрения квантованные поля — это объекты весьма сингулярной природы. Однако считается, что они описывают взаимодействия элементарных частиц. Например, описание с помощью квантованных полей взаимодействия электронов со светом (фотонами) оказывается точным в пределах существующих экспериментальных ошибок (5 значащих цифр). Оба эти обстоятельства — и математическая нетривиальность задачи, и ее физическая важность — привели к тому, что уже в течение нескольких десятилетий проблема математического обоснования квантовой теории поля привлекает внимание как математиков, так и физиков. Наиболее значительным физическим достижением за этот период было вычисление в конце 40-х — начале 50-х годов лэмбовского

---

[1]) J. Glimm, A. Jaffe, Boson quantum field models, «Mathematics of contemporary physics», ed. by R. Sheater, Academic Press, New York, 1972.

результат о нарушении аксиомы единственности вакуума в некоторых $P(\varphi)_2$-моделях.

Лекция IV. Результаты, касающиеся алгебры фон Неймана и теоремы о том, что бикоммутант такой алгебры совпадает с ней самой, можно найти в [Sa 1]. Относительно неравенства Хаусдорфа — Юнга и неравенства Юнга см. в [Ste W]. Локальность величины $:\varphi^n:$ (формула (8)) можно было бы доказать проще, если не использовать обрезания с помощью предельного импульса.

Лекция VI. Эта лекция служит комментарием к работе Гуэрры, Розена и Саймона [Gu Ro Si 3]. Относительно применения неравенств Гриффитса, например при доказательстве монотонности, см. [Gr 1]. Приведенное здесь доказательство нарушения свойства распадения на пучки тесно связано с тем, что длина промежутка решетки фиксирована. Интересно, можно ли путем модификации подобных рассуждений получить результат Добрушина — Минлоса [Dob Mi].

сдвига и аномального магнитного момента электрона с одновременным созданием методов теории перенормировок, на которых эти вычисления основывались. С математической точки зрения существенным было осознание того факта, что для корректной формулировки квантовой теории поля потребуются новые математические теории. Среди математиков первым, кто это понял, был Дж. фон Нейман, и это послужило для него одним из мотивов создания теории операторных алгебр.

Упомянутые выше вычисления основываются на теории возмущений, и потому для них существенна малость ($\sim 137^{-1}$) коэффициента при членах полевых уравнений, описывающих взаимодействие. В случае сильных взаимодействий (протоны, нейтроны, мезоны и т. д.) числовой коэффициент имеет величину порядка 15, и вычисления по теории возмущений до сих пор приводили лишь к ограниченному успеху. Для более глубокого понимания возникающих здесь проблем Вайтман, Хааг, Кастлер и другие точно сформулировали основополагающие принципы (аксиомы) квантовой теории поля и попытались корректно вывести следствия из этих аксиом. Высшие достижения этой программы составляют PCT-теорема, теорема о связи спина со статистикой и теория рассеяния Хаага — Рюэля и Лемана — Симанзика — Циммермана.

Однако аксиоматические исследования оставляют открытым важнейший вопрос: удовлетворяют ли квантованные поля с обычными взаимодействиями основным аксиомам? Или, иначе говоря, существуют ли в каком-нибудь разумном смысле нетривиальные поля? За последние пять лет произошел заметный сдвиг в решении проблемы существования. В этот период исследованиям подверглись различные модели в двух- и трехмерном пространстве-времени. Уменьшение размерности изучаемого пространства-времени приводит к упрощениям, которые значительно ослабляют, но не исключают полностью основные сингулярности квантовой теории поля. Результаты, полученные в случае двух измерений, можно резюмировать следующим образом:

Теорема. *В двумерном пространстве-времени существуют квантованные поля. Эти поля удовлетворяют всем или почти всем аксиомам Хаага — Кастлера и почти всем аксиомам Вайтмана.*

Взаимодействие полей, упомянутых в этой теореме, носит характер либо взаимодействия Юкавы, либо полиномиального бозонного самодействия. В трехмерном пространстве-времени справедливы аналогичные утверждения, хотя полученные к настоящему времени результаты носят предварительный, технический характер и применены только к бозонному взаимодействию типа φ^4. Что же касается пространства-времени четырех измерений, то, по-видимому, существующие методы в их теперешней форме здесь не применимы.

В этих лекциях мы рассмотрим только полиномиальные бозонные взаимодействия, поскольку они проще взаимодействия Юкавы, при этом мы думаем, что минимальные требования к физическим познаниям читателя можно ограничить условием знакомства с обычной квантовой механикой.

В квантовой механике эволюция во времени вектора состояния

$$\psi(q, t) = (e^{-itH}\psi)(q, 0) \tag{1.1}$$

управляется уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial\psi(q, t)}{\partial t} = (H\psi)(q, t), \tag{1.2}$$

где H — гамильтониан (или иначе оператор энергии) физической системы. Простейший пример — это гамильтониан

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} m_l^{-1}\frac{\partial^2}{\partial q_l^2} + V(q), \tag{1.3}$$

действующий в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Квантованное поле отличается от системы, описываемой гамильтонианом (1.3), тем, что оно имеет бесконечное число степеней свободы, т. е. для него $n = \infty$. Все сингулярности квантовой теории поля могут быть в конце концов сведены к бесконечности n.

В случае $n = \infty$ у нас нет удовлетворительного аналога лебеговой меры. Однако оказывается, что гауссова мера, которая обобщается на бесконечномерный случай, вполне подходит для наших целей. Мы используем гауссову меру d_Bq, определяемую квадратичной формой B на бесконечномерном пространстве $Q = S'(\mathbb{R})$ конфигураций классического поля[1]. Формально d_Bq имеет плотность вида $\exp(-B(q, q))dq$, и пространство $L_2(Q, d_Bq)$ заменяет $L_2(\mathbb{R}^n)$. Второй[2] наиважнейший оператор квантовой теории — гамильтониан H. Для изучения H мы привлечем и теорию самосопряженных операторов, и теорию операторных алгебр. H самосопряжен, и потому использование теории самосопряженных операторов едва ли удивительно. Большей частью мы будем иметь дело с резольвентами $R(\zeta) = (H - \zeta)^{-1}$ и полугруппами $\exp(-tH)$,

---

[1]) S' — пространство обобщенных функций умеренного роста. — *Прим. ред.*

[2]) После поля. — *Прим. ред.*

точнее говоря, мы используем критерии самосопряженности предела $H = \lim\limits_{\varkappa} H_\varkappa$ последовательности самосопряженных операторов $H_\varkappa$, выраженные на языке сходимости соответствующих резольвент и полугрупп.

Использование техники операторных алгебр при изучении самосопряженности оператора H менее привычно и вызвано тем, что n бесконечно. Гауссовы меры $d_B q$ на бесконечномерном пространстве весьма чувствительны к изменению квадратичной формы B. Если якобиан $\det B_1^{1/2} B_2^{-1/2}$ не существует (например, если $\det B_1^{1/2} B_2^{-1/2}$ равен нулю или бесконечности), то меры $d_{B_1} q$ и $d_{B_2} q$ взаимно сингулярны. В силу этого полевые операторы, естественным образом реализующиеся в $L_2(Q, d_{B_i} q)$, $i = 1, 2$, задают унитарно неэквивалентные представления квантованных полей. В результате, делая естественное приближение или используя удобный предельный переход, мы сталкиваемся с операторами, реализующими некоторое представление в заданном гильбертовом пространстве, но сходящимися при этом к операторам, действующим в другом гильбертовом пространстве и реализующим там представление, унитарно неэквивалентное исходному. Ясно, что в таких ситуациях об операторах лучше думать независимо от гильбертова пространства, где они действуют, а это как раз то, что достигается с помощью операторных алгебр. Похоже, что негауссовы меры столь же чувствительны к изменению параметров физической задачи, как и гауссовы. В типичных случаях унитарная неэквивалентность представлений проявляется в расходимости некоторых интегралов или бесконечных рядов.

В дополнение к общим теориям гауссовых мер, самосопряженных операторов и операторных алгебр нам потребуются некоторые специальные сведения о взаимодействиях, которые мы рассматриваем. В случае полиномиального бозонного взаимодействия в одномерном пространстве мы изучаем аппроксимированные (пространственно обрезанные) гамильтонианы

$$H(g) = H_0 + H_I(g), \tag{1.4}$$

где

$$0 \leqslant g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}), \tag{1.5}$$

и снимаем обрезание, устремляя g к 1. Мы покажем, что $H(g)$ в существенном самосопряжен на области

$$D(H_0) \cap D(H_I(g)), \tag{1.6}$$

а $H_I(g)$ является оператором умножения в $L_2(Q, d_B q)$ и как таковой принадлежит $L_p(Q, d_B q)$ при всех $p < \infty$. Свободный гамильтониан H_0 действует в $L_2(Q, d_Bq)$ как оператор Эрмита, и его удобно изучать, используя разложение по функциям Эрмита в $L_2(Q, d_Bq)$. Такое разложение естественно приводит к фоковскому пространству.

Мы требуем, чтобы полином P, описывающий взаимодействие, был положителен. Пусть p — его степень, т. е. $p = \deg P$. Тогда $H_I(g)$ «почти ограничен снизу» в том смысле, что для любого положительного числа $\varkappa$ можно написать

(1.7) $$H_I(g) = H_I(g, \varkappa) + H_I'(g, \varkappa),$$

где

(1.8) $$H_I(g, \varkappa) \geqslant -O(\ln \varkappa)^{p/2},$$

а $H_I'(g, \varkappa)$ — малый неограниченный оператор, величина которого имеет следующую оценку:

(1.9) $$|H_I'(g, \varkappa)| \sim O(\varkappa^{-1/2+\varepsilon}).$$

В общем случае оценки типа (1.8), использующие положительность, делаются в $L_2(Q, d_Bq)$-пространстве Шредингера, тогда как оценки малых, ио не положительно определенных остатков типа (1.9) удобно делать в пространстве Фока.

2. Операторы Эрмита

Перед тем как переходить к $n = \infty$, мы изучим оператор Эрмита с конечным числом степеней свободы. Начнем с одной степени свободы, когда оператор Эрмита

(2.1) $$H_0(\mu) = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{d}{dq}\right)^2 + \mu^2 q^2 - \mu\right],$$

действующий в $L_2(\mathbb{R})$, представляет собой гамильтониан квантованного гармонического осциллятора. Здесь μ — произвольный положительный нормировочный параметр.

Введем операторы рождения и уничтожения

(2.2) $$b = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mu}\, q + \frac{i}{\sqrt{\mu}}\, p\right),$$
$$b^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mu}\, q - \frac{i}{\sqrt{\mu}}\, p\right),$$

где $p = -i d/dq$. Важность этих операторов вытекает из следующего получаемого с их помощью представления:

(2.3) $$H_0(\mu) = \mu b^* b.$$

В качестве удобной области определения b и b^* возьмем множество

(2.4) $$D = \{P(q)\, e^{-\mu q^2/2} \mid P \text{ — полином}\}.$$

Тогда

$$bD \subset D, \quad b^*D \subset D \tag{2.5}$$

и D — область, инвариантная относительно действия как b, b^*, так и p, q. Кроме того, на D справедливы коммутационные соотношения

$$[b, b^*] \equiv bb^* - b^*b = I, \tag{2.6a}$$

$$[q, p] \equiv qp - pq = iI. \tag{2.6b}$$

Положим далее $e_0(q) \equiv (\mu/\pi)^{1/4}\exp(-\mu q^2/2)$. Тогда $\| e_0 \| = 1$ и

$$be_0 = 0. \tag{2.7}$$

Пусть

$$e_j = \| (b^*)^j e_0 \|_2^{-1} (b^*)^j e_0.$$

Корректность этого определения вытекает из следующего простого вычисления:

$$\begin{aligned} \langle (b^*)^j e_0, (b^*)^l e_0 \rangle &= \langle b (b^*)^j e_0, (b^*)^{l-1} e_0 \rangle = \\ &= \langle [b, (b^*)^j] e_0, (b^*)^{l-1} e_0 \rangle = \\ &= j \langle (b^*)^{j-1} e_0, (b^*)^{l-1} e_0 \rangle = \\ &= j! \delta_{j, l}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

которое показывает, что $\| (b^*)^j e_0 \|_0 \neq 0$. Кроме того, из него же следует ортонормируемость семейства функций e_j. Легко понять, что e_j — это j-я функция Эрмита. Далее из (2.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} b^* e_j &= \sqrt{j+1}\, e_{j+1}, \\ b e_j &= \sqrt{j}\, e_{j-1}, \quad j > 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Наконец, из (2.3) и (2.9) легко получить, что

$$H_0(\mu) e_j = j\mu e_j.$$

Таким образом, $H_0(\mu)$ имеет собственные значения, равные 0, μ, 2μ, ..., а соответствующие собственные функции равны e_0, e_1, ... Поскольку $e_j \in D$, существует полином P_j, для которого

$$e_j(q) = P_j(q) e_0(q).$$

Ясно, что P_j — это j-й многочлен Эрмита. Формулы (2.2) и (2.9) показывают, что степень полинома P_j равна j, а коэффициент при q^j положителен.

Для завершения анализа $H_0(\mu)$ нам следует показать, что собственные функции e_j образуют семейство, полное в $L_2(\mathbb{R})$. Понятно, что линейная оболочка собственных функций e_j совпадает с D. Далее, замыкание D^- множества D содержит функции $e^{i\lambda q}e^{-\mu q^2/2}$, поскольку ряды Тейлора таких функций по λ сходятся в L_2. Действительно, обращая соотношения (2.2), получим

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{1}{\sqrt{2\mu}}(b^* + b), \\
p &= i\sqrt{\frac{\mu}{2}}\,(b^* - b).
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Тогда

$$\sqrt{\frac{\mu}{\pi}}\int q^j e^{-\mu q^2}\,dq = \frac{1}{\sqrt{(2\mu)^j}}\langle (b^* + b)^j e_0,\ e_0\rangle = (\mathrm{const})^j\, O\,(j!)^{1/2},$$

откуда следует желаемая сходимость ряда Тейлора в L_2. Теперь, учитывая, что $\exp(i\lambda q)\exp(-\mu q^2/2) \in D^-$ для всех λ, получаем, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \tilde{f}(\lambda)\, e^{i\lambda q} e^{-\mu q^2/2}\, d\lambda = f(q)\, e^{-\mu q^2/2}$$

лежит в D^- при всех $f \in S$ и потому $D^- = L_2$.

Операторы b и b^* однозначно характеризуются соотношениями (2.5), (2.6а) и (2.7). Это утверждение о единственности справедливо без всяких ограничений на число степеней свободы. Существует еще и другое утверждение о единственности — теорема единственности фон Неймана, относящаяся к коммутационным соотношениям (2.6) в экспоненциальной форме:

$$e^{isq}e^{itp} = e^{itp}e^{isq}e^{-ist} \tag{2.11}$$

(см., например, лекции Саймона в [MCP]).

В случае конечного числа степеней свободы соотношения (2.11) определяют действие p и q в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ единственным образом с точностью до кратности и унитарной эквивалентности. Однако в случае бесконечного числа степеней свободы соотношения (2.11) не гарантируют единственности представления для p_l и q_l. Нарушение теоремы фон Неймана в случае бесконечного числа степеней свободы еще раз указывает на то, что в квантовой теории поля операторные алгебры будут играть большую роль, чем в обычной квантовой механике.

Определение 2.1. Пусть E — вещественное предгильбертово пространство (т. е. не обязательно полное гильбертово пространство). Представление канонических коммутационных соотношений (ККС) над E — это пара линейных отображений

$$f \to b(f), \quad g \to b^*(g)$$

из E в множество операторов $\{b(f),\ b^*(g)\}$, определенных на плотной в (комплексном) гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ области D и таких, что

$$b(f)D \subset D, \quad b^*(g)D \subset D,$$
$$[b(f),\ b^*(g)]\theta = \langle f, g\rangle\theta,$$
$$[b(f),\ b(g)]\theta = [b^*(f),\ b^*(g)]\theta = 0$$

и

$$\langle \theta_1, b(f)\theta_2\rangle = \langle b^*(f)\theta_1, \theta_2\rangle$$

для всех θ, θ_1, θ_2 в D и всех f, g в E.

Определение 2.2. Представление ККС называется фоковским, если в D существует такой единственный вектор Ω, что

$$b(f)\Omega = 0$$

для всех $f \in E$ и D алгебраически порождается векторами вида

$$\{b^*(g_1) \ldots b^*(g_m)\Omega \mid g_e \in E;\ m = 0, 1, \ldots\}.$$

Такой вектор Ω называется фоковским вакуумным вектором (фоковским вакуумом).

Пример. Пусть $\mathscr{H} = L_2(\mathbb{R})$, $E = \mathbb{R}$ и D, как в (2.4), $\Omega = e_0$. Тогда $b(\lambda) = \lambda b$ и $b^*(\lambda) = \lambda b^*$ определяют фоковское представление ККС.

Теорема 2.3. *Фоковское представление ККС над E единственно с точностью до унитарной эквивалентности. Если $\{b_i,\ b_i^*\}$, $i = 1, 2$, реализуют два фоковских представления над E с вакуумами Ω_i, то оператор U, реализующий унитарную эквивалентность этих представлений, однозначно фиксируется требованием*

$$U\Omega_1 = \Omega_2.$$

Доказательство. Пусть

$$\theta_i = b_i^*(f_1) \ldots b_i^*(f_n)\Omega_i,$$
$$\psi_i = b_i^*(g_1) \ldots b_i^*(g_m)\Omega_i.$$

Вычислим $\langle\psi_i, \theta_i\rangle$. Из коммутационных соотношений и равенства $b_i\Omega_i = 0$ вытекает, что

$$\langle\psi_i, \theta_i\rangle = \sum_{l=1}^{m} \langle f_1, g_l\rangle \langle b_i^*(g_1) \dots b_i^*(g_{l-1}) b_i^*(g_{l+1}) \dots \\ \dots b_i^*(g_m)\Omega_i, \ b_i^*(f_2) \dots b_i^*(f_n)\Omega_i\rangle.$$

Продолжая это вычисление по индукции, получаем

$$\langle\psi_i, \theta_i\rangle = \delta_{m,n} \sum_{\sigma} \prod_{l=1}^{n} \langle f_l, g_{\sigma(l)}\rangle,$$

где сумма берется по всем перестановкам σ множества из n элементов. Следовательно, величина $\langle\psi_i, \theta_i\rangle$ не зависит от i. В таком случае оператор U, определенный равенством $U\theta_1 = \theta_2$, продолжается по линейности до унитарного оператора из $\mathscr{H}_1$ в $\mathscr{H}_2$ и дает нужную унитарную эквивалентность. Далее, если U' — любой унитарный оператор из $\mathscr{H}_1$ в $\mathscr{H}_2$ и если

$$U'\Omega_1 = \Omega_2,$$
$$U'b_1^*(f)U'^* = b_2^*(f)$$

для всех $f \in E$, то $U'\theta_1 = \theta_2$, так что U определен однозначно.

В случае n степеней свободы осцилляторный гамильтониан H_0 есть сумма

$$H_0 = \sum_{l=1}^{n} H_0(\mu_l) \tag{2.12}$$

n одномерных операторов Эрмита, каждый из которых действует на одну из n переменных q_l пространства $Q = \mathbb{R}^n$. Собственные функции H_0 являются тензорными произведениями

$$e(q) = \prod_{l=1}^{n} e_{j(l)}(q_l)$$

одномерных функций Эрмита. Оператор H_0 действует в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = L_2(Q)$, которое является тензорным произведением вида

$$\mathscr{H} = L_2(Q) = L_2(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_{l=1}^{n} L_2(Q_l), \tag{2.13}$$

где Q_l — копии множества вещественных чисел $\mathbb{R}$.

В следующем разделе мы будем изучать переход к пределу $n \to \infty$. Для построения меры на бесконечном тензорном произведении пространств $L_2(Q_l)$, получающемся в результате такого предельного перехода, существенно, чтобы мера, определенная на каждом из сомножителей, имела единичную полную массу. Более того, желательно, чтобы H_0 был положительным самосопряженным оператором на $\mathscr{H}$ и в пределе $n = \infty$, а потому естественно требовать, чтобы основное состояние e_0 гамильтониана H_0 лежало в $\mathscr{H}$. Для этого, перед тем как устремить n к бесконечности, мы заменим p_l, q_l и H_0 унитарно эквивалентными операторами. Обозначим наше исходное пространство через $L_2(Q, dq)$, подчеркнув использование лебеговой меры. Оператор умножения

$$U\colon f \to e_0 f$$

будет унитарным оператором из $L_2(Q, e_0^2\,dq)$ на $L_2(Q, dq)$ и $U^* g = e_0^{-1} g$. Тогда

$$U^* q_l U = q_l, \tag{2.14}$$

$$U^* p_l U = -i\frac{\partial}{\partial q_l} + i\mu_l q_l \tag{2.15}$$

и $U^* H_0 U$ действует в $L_2(Q, e_0^2\,dq)$. Собственные функции оператора $U^* H_0 U$ суть тензорные произведения

$$\prod_{l=1}^{n} P_{j(l)}(q_l)$$

одномерных многочленов Эрмита, а основное состояние $U^* H_0 U$ равно

$$\prod_{l=1}^{n} P_0(q_l) \equiv 1.$$

Конечно, $1 \in L_2(Q, d\nu(q))$ в случае любой меры с единичной полной массой. Отметим еще (для удобства сравнений с формулами последующих глав), что

$$e_0^2\,dq = \mathrm{const}\, e^{-B(q,q)}\,dq,$$

где

$$B(q, q) = \sum_{l=1}^{n} \mu_l q_l^2.$$

Конечная постоянная μ, которая вычитается из $H_0(\mu)$ (в формуле (2.1)), является перенормировкой. При такой перенормировке спектры H_0, $H_0(\mu)$ и $U^* H_0 U$ начинаются с нуля. При конечных n такая перенормировка не обязательна, но она существенна, если, как это обычно бывает, $\sum_{l=1}^{\infty} \mu_l = \infty$, а мы хотим перейти к $n = \infty$.

Теорема 2.4. *Ядро* $\exp(-tU^*H_0U)$ *положительно.*

Доказательство. Поскольку H_0 есть сумма членов, каждый из которых действует в своем множителе в произведении (2.13), интересующее нас ядро также факторизуется, и потому достаточно рассмотреть случай одной степени свободы. Покажем, что в этом случае интересующее нас ядро относительно меры $e_0^2\,dq$ на Q равно

$$k(q, q') = [2(1-e^{-2\mu t})]^{-1/2} \exp\left[-\frac{\mu(q'-e^{-\mu t}q)^2}{2(1-e^{-\mu t})} + \mu q'^2\right]. \tag{2.16}$$

Ясно, что утверждение теоремы будет следовать из (2.16). Пусть

$$Kf(q) = \int k(q, q') f(q') e_0(q')^2\,dq'.$$

Мы покажем, что

$$Ke^{i\lambda q} = U^* e^{-tH_0(\mu)} U e^{i\lambda q}.$$

Поскольку векторы $e^{i\lambda q}$ плотны в $L_2(Q, e_0^2\,dq)$, этого будет достаточно для доказательства всей теоремы. Элементарное вычисление дает

$$Ke^{i\lambda q} = e^{-\lambda^2(1-e^{-2t\mu})/2\mu} e^{i\lambda e^{-t\mu}q}.$$

Вместе с тем

$$e^{i\lambda q} e_0 = e^{-\lambda^2/2\mu} e^{i\lambda(2\mu)^{-1/2}b^*} e_0 = e^{-\lambda^2/2\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\lambda}{\sqrt{2\mu}}\right)^n (n!)^{-1/2} e_n,$$

и потому

$$\begin{aligned} e^{-tH_0} e^{i\lambda q} e_0 &= e^{-\lambda^2/2\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\lambda}{\sqrt{2\mu}}\right)^n (n!)^{-1/2} e^{-tn\mu} e_0 = \\ &= \exp[-\lambda^2/2\mu] \exp\left[i\lambda(2\mu)^{-1/2} e^{-t\mu} b^*\right] e_0 = \\ &= \exp[-\lambda^2(1-e^{-2t\mu})/2\mu] \exp[i\lambda e^{-t\mu} q]\, e_0. \end{aligned}$$

В итоге

$$U^* e^{-tH_0} U e^{i\lambda q} = \exp[-\lambda^2(1-e^{-2t\mu})/2\mu] \exp[i\lambda e^{-t\mu} q],$$

что и завершает доказательство.

3. Гауссовы меры и шредингеровское представление

В этом разделе мы введем квантовополевые операторы φ и π. По сути дела, это аналоги операторов q_l и p_l разд. 2 и мы, несколько отклонившись от нашей основной темы, сделаем эту аналогию очевидной, с тем чтобы вводимые далее определения выглядели естественно для математиков, знакомых с обычной квантовой механикой. Для простоты сосредоточим свое внимание на квантовании уравнения Клейна — Гордона

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + m^2\varphi = 0, \tag{3.1}$$

хотя методы этого раздела применимы и к более общим линейным уравнениям. Пусть $\pi = \varphi_t \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial t}$. Энергия решения уравнения (3.1) равна

$$H_0(\varphi, \pi) = \frac{1}{2}\int [\pi(x, t)^2 + (\nabla\varphi(x, t))^2 + m^2\varphi(x, t)^2]\, dx, \tag{3.2}$$

и благодаря (3.1) она не зависит от времени t. Отметим, что (3.1) описывает гамильтонову систему, т. е.

$$\dot{\varphi}(x, t) = \delta H_0/\delta\pi(x, t),$$
$$\dot{\pi}(x, t) = -\delta H_0/\delta\varphi(x, t)$$

и что $\pi(x, t)$ — это переменная, канонически сопряженная $\varphi(x, t)$. Конфигурационное пространство Q — это линейное пространство функций $\varphi(x) = \varphi(x, 0)$, а фазовое пространство — это линейное пространство пар функций $\langle\varphi(x,)\ \pi(x) \equiv \pi(x, 0)\rangle$. Удобно в качестве Q выбрать вещественное[1]) пространство Шварца $S'_r(\mathbb{R})$, т. е. положить $Q = S'_r(\mathbb{R})$. В таком случае H_0 — вещественная функция на фазовом пространстве, которая конечна на некоторой плотной в этом пространстве области. Более того, $H_0(\varphi, \pi)$ — квадратичная форма. Диагонализуем ее, сделав преобразование Фурье. Это позволит нам установить соответствие с результатами разд. 2. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-ikx}\tilde{\varphi}(k)\, dk, \\ \pi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-ikx}\tilde{\pi}(k)\, dk, \end{aligned} \tag{3.3}$$

тогда

$$\begin{aligned} H_0(\varphi, \pi) = \frac{1}{2}\int [(\operatorname{Re}\tilde{\pi}(k))^2 + (\operatorname{Im}\tilde{\pi}(k))^2]\, dk + \\ + \frac{1}{2}\int \mu(k)^2 [(\operatorname{Re}\tilde{\varphi}(k))^2 + (\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(k))^2]\, dk, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\mu(k) = \sqrt{k^2 + m^2}.$$

---

[1]) Вообще мы используем вещественные функции, когда имеем дело с координатными переменными x, и комплексные функции, когда имеем дело с фурье-образами или импульсными переменными. Однако гильбертово пространство, где реализуются ККС, всегда комплексно.

Пусть

$$\mu_X = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + m^2\right]^{1/2}.$$

Мы хотим проквантовать гамильтониан H_0, имеющий вид (3.2) или (3.4), в соответствии с предписаниями разд. 2 и ищем для этого гауссову меру $d_B q$ на Q, которая формально имеет плотность, пропорциональную $\exp(-B(q, q))$, где

$$B(f, g) = \int \mu(k)\,[\operatorname{Re}\tilde{f}(k)\operatorname{Re}\tilde{g}(k) + \operatorname{Im}\tilde{f}(k)\operatorname{Im}\tilde{g}(k)]\,dk = \langle f, \mu_X g\rangle. \tag{3.5}$$

Сначала определим конечномерную гауссову меру для каждого конечномерного множества F линейных координатных функций на Q. Все эти меры удовлетворяют условию согласованности при $F_1 \subset F_2$ и определят меру $d_B q$, которая счетно аддитивна на Q. Свойство счетной аддитивности не очевидно и зависит от выбора $Q = \mathcal{S}'_r(\mathbb{R})$. Можно было бы взять меньшее, чем $\mathcal{S}'_r(\mathbb{R})$ пространство, но кажется, что никакое пространство гладких функций на роль Q не годится. Минлос [Mi] доказал[1]), что гауссова мера счетно аддитивна, если она задана на пространстве, сопряженном ядерному пространству, и определена билинейной формой, которая знакоопределенна и непрерывна на ядерном пространстве. Далее в своем изложении мы будем следовать работе Гельфанда и Виленкина [Ge Vi 6, 1]. Отметим еще, что в соответствии с формальными рассуждениями шредингеровское представление, диагонализующее операторы поля, взятые в нулевой момент времени, в случае обычных нелинейных взаимодействий существует лишь в пространстве-времени двух и трех измерений. В случае свободных полей или линейных взаимодействий такого ограничения нет. Шредингеровское представление неявно фигурировало во многих работах, посвященных свободным полям (см., например, [Neu 1]). Детально соответствующую конструкцию описал Фридрихс [Fri § 12] (см. также [Mil]). Он использовал гауссову меру и разложение по функциям Эрмита, с помощью которых определил внутреннее произведение в $L_2(d_B q)$; коммутационные соотношения были выведены им в форме, отвечающей определению 2.1. Унитарная эквивалентность его построения фоковскому представлению легко усматривается из формул, приведенных в [Fri]. Исследование связи с теоремой Колмогорова и построение измеримого пространства со счетно аддитивной мерой Фридрихс обещал провести в последующих публикациях (см. [Fri Sh]). В 1956 г. замкнутое

---

[1]) См. также лекцию Рида в настоящем сборнике. — *Прим. ред.*

и математически полное описание шредингеровского представления с абстрактной точки зрения дал Сигал. Он же проверил ККС в экспоненциированной (иначе вейлевской) форме. Координатные функции на Q — элементы из $Q' = S_r(\mathbb{R})$. Если $f \in Q'$, то соответствующая координатная функция задается отображением

$$Q \ni q \mapsto q(f) = \int q(x) f(x)\, dx. \tag{3.6}$$

Полином на Q — полином от координатных функций на Q. Если $f_1, \ldots, f_n \in Q'$ и если P — полином от n переменных, то

$$\Phi(q) = P(q(f_1), \ldots, q(f_n)) \tag{3.7}$$

— полином на Q. Если $f_1, \ldots, f_n$ — элементы замкнутого подпространства $F \subset Q'$, то мы говорим, что Φ из (3.7) имеет образующие в F. Если Φ имеет образующие в F, то функция $\Phi(\mu_X^{-1/2}(\cdot))$ имеет образующие в $\mu_X^{-1/2}F$. Мы используем соответствующую замену переменных $\Phi(q) \to \Phi(\mu_X^{-1/2}q)$ при определенном d_Bq. Формально такая замена превращает плотность, пропорциональную $\exp(-B(q, q))$, в плотность, пропорциональную $\exp(-\|q\|_2^2)$, поскольку формально мы имеем равенство

$$\int \Phi(q) e^{-B(q,q)}\, dq = \text{const} \int \Phi(\mu_X^{-1/2}q) e^{-\|q\|_2^2}\, dq.$$

Пусть F — конечномерное подпространство в Q' и $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — базис в F, выбранный так, что $\{\mu_X^{-1/2}f_1, \ldots, \mu_X^{-1/2}f_n\}$ — ортонормированный базис в $\mu_X^{-1/2}F$. Если Φ и P связаны соотношением (3.7), определим d_Bq равенством

$$\int \Phi(q)\, d_Bq = \pi^{-n/2} \int P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, e^{-\sum_{l=1}^{n} \lambda_l}\, d^n\lambda. \tag{3.8}$$

Лемма 3.1. *Интеграл (3.8) не зависит от конечномерного пространства F, содержащего образующие отображения Φ.*

Доказательство. Если Φ имеет образующие в F и в G, то Φ имеет образующие и в $F + G$; по этой причине предположим, что $F \subset G$. Выберем в G такой базис $\{g_1, \ldots, g_n\}$, чтобы семейство $\{g_1, \ldots, g_m\}$ было базисом в F и семейство $\{\mu_X^{-1/2}g_l, \ldots, \mu_X^{-1/2}g_n\}$ было ортонормированным. Существуют полиномы P_F и P_G, для которых

$$\Phi(q) = P_F(q(g_1), \ldots, q(g_m)) = P_G(q(g_1), \ldots, q(g_n)).$$

Таким образом, P_G не зависит от последних $n-m$ переменных, а как функция первых m переменных равен P_F. Следовательно, интегрируя по последним $n-m$ переменным, мы получим

$$\pi^{-n/2}\int P_G(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\exp\left(-\sum_{l=1}^{n}\lambda_l^2\right)d\lambda =$$

$$=\pi^{-m/2}\int P_F(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\exp\left(-\sum_{l=1}^{m}\lambda_l^2\right)d\lambda,$$

что и доказывает лемму.

Теорема 3.2. *Интеграл* (3.8), *определенный на полиномах, задает счетно аддитивную меру на* Q.

Пусть $\mathscr{H} \doteq L_2(Q, d_Bq)$. Назовем $\mathscr{H}$ пространством Шредингера, поскольку в этом пространстве полевые операторы, определяемые чуть ниже, действуют как операторы умножения, подобно тому как это делают обычные квантовомеханические операторы координат, действующие в обычном шредингеровском представлении. Рассмотрим в $\mathscr{H}$ множество D комплексных полиномиальных функций на Q. Из доказательства теоремы 3.2 при учете полноты многочленов Эрмита в случае конечного числа степеней свободы (разд. 2) легко вывести плотность D в $\mathscr{H}$.

Определим теперь полевые операторы $\varphi(f)$ как операторы умножения

(3.9) $$\varphi(f)\colon\ \Phi(q)\to q(f)\,\Phi(q).$$

В область определения $\varphi(f)$ входит D и $\varphi(f)D\subset D$. Величина $\varphi(f)$ интерпретируется как оператор полевой координаты, причем координата характеризует не положение точки x в физическом пространстве $\mathbb{R}$, а скорее расположение классического, взятого в нулевой момент времени поля $\varphi(x)$ в конфигурационном пространстве $Q=S_r'(\mathbb{R})$. Действительно, ведь $\varphi(f)$ — оператор, который измеряет расстояние от «начала координат» в Q вдоль координатного направления f. Нетрудно увидеть, что $\varphi(f)\in L_p(Q, d_Bq)$ при всех $p<\infty$ и, таким образом, $\varphi(f)$ определяет самосопряженный оператор на $L_2(Q, d_Bq)$.

Определим на области D новый оператор

(3.10) $$\pi(f)=-i\frac{\partial}{\partial\varphi(f)}+i\varphi(\mu_X f).$$

Второй член в (3.10) нужен для того, чтобы сделать $\pi(f)$ симметричным, и возникает из-за того, что мы пользуемся не евклидовой мерой, а гауссовой (ср. с (2.15)). Пусть $\Omega_0 \in D$ — функция, тождественно равная единице. На векторе

(3.11) $$\theta = \varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n)\Omega_0 \in D$$

справедливо равенство

(3.12) $$\pi(f)\theta = -i \sum_{l=1}^{n} \langle f, f_l\rangle \varphi(f_1) \ldots \varphi(f_{l-1})\varphi(f_{l+1}) \ldots \ldots \varphi(f_n)\Omega_0 + i\varphi(\mu_X f)\theta,$$

где $\langle \cdot, \cdot\rangle$ — обычное «евклидово» внутреннее произведение

$$\langle f, f_l\rangle = \int f(x) f_l(x)\, dx.$$

Основываясь на (3.9) и (3.11), легко проверить, что на D справедливы следующие коммутационные соотношения:

(3.13) $$[\varphi(f), \pi(g)] = i\langle f, g\rangle I,$$

(3.14) $$[\varphi(f), \varphi(g)] = [\pi(f), \pi(g)] = 0.$$

По аналогии с (2.2) введем операторы

(3.15) $$b(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi\left(\mu_X^{1/2} f\right) + i\pi\left(\mu_X^{-1/2} f\right)\right],$$

(3.16) $$b^*(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi\left(\mu_X^{1/2} f\right) - i\pi\left(\mu_X^{-1/2} f\right)\right].$$

Теорема 3.3. *Операторы b и b^*, задаваемые равенствами* (3.15), (3.16), *реализуют в $L_2(Q, d_B q)$ фоковское представление ККС над Q'.*

Доказательство. Коммутационные соотношения для b и b^* следуют из (3.14), (3.15). Поскольку φ и π определены на D и отображают D на D, этим же свойством обладают b и b^*, а так как $\Omega_0 \equiv 1$,

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi(f)} \Omega_0 = 0,$$

$$i\pi\left(\mu_X^{-1/2} f\right)\Omega_0 = -\varphi\left(\mu_X^{1/2} f\right)\Omega_0,$$

то

$$b(f)\Omega_0 = 0.$$

Далее, поскольку D порождается полиномами по φ, действующими на Ω_0, оно порождается и полиномами по b^*, действующими на Ω_0. То, что $b^*(f)$ есть сужение оператора, сопряженного к $b(f)$, следует из (3.15), (3.16) и симметричности $\pi(f)$, которая доказывается чуть ниже, Лемма 3.4. *Оператор $\pi(f)$ симметричен на D.*

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\langle \pi(f)\theta_1, \theta_2\rangle = \langle \theta_1, \pi(f)\theta_2\rangle,$$

где θ_1 и θ_2 — векторы вида (3.11). Применим индукцию по числу n_1 множителей $\varphi(f_l)$, входящих в θ_1. Предположим справедливость нужного равенства для некоторого n_1, тогда

$$\begin{aligned}\langle \pi(f)\varphi(g)\theta_1, \theta_2\rangle &= i\langle f, g\rangle\langle\theta_1, \theta_2\rangle + \langle\varphi(g)\pi(f)\theta_1, \theta_2\rangle = \\ &= i\langle f, g\rangle\langle\theta_1, \theta_2\rangle + \langle\theta_1, \pi(f)\varphi(g)\theta_2\rangle = \\ &= \langle\theta_1, \varphi(g)\pi(f)\theta_2\rangle = \langle\varphi(g)\theta_1, \pi(f)\theta_2\rangle.\end{aligned}$$

Следовательно, искомое равенство справедливо для n_1+1. Таким образом, достаточно, положив $n_1 = 0$, установить, что

$$\langle \pi(f)\Omega_0, \theta\rangle = \langle\Omega_0, \pi(f)\theta\rangle.$$

Но это эквивалентно равенству

$$\begin{aligned}(3.17)\qquad &\langle\Omega_0, \varphi(f)\varphi(f_1)\ldots\varphi(f_n)\Omega_0\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\langle\mu_X^{-1}f, f_l\rangle\langle\Omega_0, \varphi(f_1)\ldots\varphi(f_{l-1})\varphi(f_{l+1})\ldots\varphi(f_n)\Omega_0\rangle.\end{aligned}$$

Для доказательства (3.17) выберем в Q' конечномерное подпространство F, содержащее все f и базис $\{g_1, \ldots, g_m\}$ в F, такой, чтобы множество $\{\mu_X^{-1/2}g_1, \ldots, \mu_X^{-1/2}g_m\}$ было ортонормированным. Поскольку (3.17) линейно по каждой f, можно предположить, что каждая функция f есть элемент выбраиного базиса, и положить $f = g_1$. Тогда (3.17) эквивалентно равенству

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^m}\lambda_1\lambda_{l_1}\ldots\lambda_{l_n}\exp\left(-\sum_{l=1}^{m}\lambda_l^2\right)d\lambda = \\ &\qquad = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\delta_{1,l_i}\int\lambda_{l_1}\ldots\lambda_{l_{i-1}}\lambda_{l_{i+1}}\ldots\lambda_{l_n}\exp\left(-\sum_{l=1}^{m}\lambda_l^2\right)d\lambda.\end{aligned}$$

Интегралы по $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ дают одинаковый вклад в обе части этого равенства, и потому остается проверить тождество

$$\int_{\mathbb{R}}\lambda^j\exp(-\lambda^2)\,d\lambda = \frac{j-1}{2}\int_{\mathbb{R}}\lambda^{j-2}\exp(-\lambda^2)\,d\lambda,$$

которое можно доказать интегрированием по частям. Это завершает доказательство леммы и теоремы.

Обращая соотношение между b, b^* и π, φ, получаем формулы

$$\varphi(f)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[b^*\left(\mu_X^{-1/2}f\right)+b\left(\mu_X^{-1/2}f\right)\right],$$

$$\pi(f)=\frac{i}{\sqrt{2}}\left[b^*\left(\mu_X^{1/2}f\right)-b\left(\mu_X^{1/2}f\right)\right],$$

обобщающие (2.10).

4. Эрмитово разложение и фоковское пространство

В фоковском пространстве свободный гамильтониан H_0 диагонален. Это одно из достоинств фоковского пространства, другое состоит в том, что некоторые оценки легче проводить в фоковском пространстве, чем в шредингеровском. Для того чтобы диагонализовать H_0, фоковское пространство надо строить на основе импульсного (а не конфигурационного) пространства. Мы сначала определим фоковское простраиство непосредственно и только потом с помощью теоремы 2.3 отождествим его с эрмитовым разложением шредингеровского пространства.

Пусть F_n — пространство симметричных определеиных на $\mathbb{R}^n$ L_2-функций; F_0 — множество комплексных чисел. Пусть

$$F=\sum_{n=0}^{\infty}F_n, \tag{4.1}$$

$$\Omega_0=1\in F_0\subset F. \tag{4.2}$$

Пространство F называется фоковским, а F_n — его n-частичным подпространством. Если $\theta=\{\theta_0,\theta_1,\ldots\}\in F$, то θ_n — n-частичная компонента вектора θ. Оператор числа частиц N определяется формулой

$$N\theta=\{0,\ \theta_1,\ 2\theta_2,\ \ldots,\ n\theta_n,\ \ldots\}, \tag{4.3}$$

Ω_0 — вакуум или состояние без частиц. Все эти определения (и названия) относятся к частицам, динамическое поведение которых управляется свободным гамильтонианом H_0 (ср. со следствием 4.5). Эти частицы играют в нашем рассмотрении вспомогательную роль и отличаются от физических частиц, которые описываются полями при $|t|\to\infty$.

Пусть S_n — проектор пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$ на F_n и D — плотная в F область, алгебраически порожденная вектором Ω_0 и векторами вида

$$S_nf_1(k_1)\ldots f_n(k_n), \tag{4.4}$$

где $f_l\in S_c(\mathbb{R})$ и $n=1,\ 2,\ \ldots$.

Определим на D оператор уничтожения $a(k)$, положив для всех $k \in \mathbb{R}$

$$(a(k)\theta)_n(k_1, \ldots, k_n) = \sqrt{n+1}\,\theta_{n+1}(k, k_1, \ldots, k_n).$$

Тогда $a(k)D \subset D$, и потому для $k \equiv \langle k_1, \ldots, k_n \rangle \in \mathbb{R}^n$ можно определить произведение

$$a(k) = a(k_1) \ldots a(k_n), \tag{4.5}$$

также отображающее D в D. Оператор $a(k)$ не имеет замыкания, и область определения оператора, ему сопряженного, состоит лишь из нуля. Тем не менее $a^*(k)$ — билинейная форма на $D \times D$. Аналогично и $a^*(k)a(k')$ — билинейная форма на $D \times D$.

Для $\theta_1, \theta_2 \in D$, $k \in \mathbb{R}^m$, $k' \in \mathbb{R}^n$ функция $\langle \theta_1, a^*(k)a(k')\theta_2 \rangle$ лежит в $S_c(\mathbb{R}^{m+n})$, и потому для любой обобщенной функции $w \in S_c'(\mathbb{R}^{m+n})$ слабый интеграл

$$W = \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} a^*(k)w(k, k')a(k)\,dk\,dk' = a^{\#}(w), \tag{4.6}$$

также определяет билинейную форму на $D \times D$. Форма W называется мономом Вика степени m, n, а любая линейная комбинация виковых мономов называется полиномом Вика. Пусть $W(S')$ — класс всех виковых полиномов, а для любого подпространства $X \subset S'$ пусть $W(X)$ — класс виковых полиномов, ядра которых w лежат в X. $W(S')$ — общий класс форм, используемых в квантовой теории поля. Многие важные операторы квантовой теории поля естественно выражаются через виковы мономы. Более того, если A — ограниченный оператор на F, то можно утверждать, что он наверняка представим в виде разложения по виковым мономам, и это разложение в смысле билинейных форм сходится на $D \times D$.

Введем более узкий класс $V(S')$ билинейных форм на $D \times D$. В $V(S')$ входят все линейные комбинации форм вида

$$V = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(k)a^*(k_1) \ldots a^*(k_j)a(-k_{j+1}) \ldots a(-k_n)\,dk, \tag{4.7}$$

где ядра $v \in S'$ симметричны относительно перестановок аргументов и имеют вещественные фурье-образы. Как и выше, $V(X)$ — подкласс в $V(S')$, получаемый из $V(S')$, если потребовать, чтобы ядра v принадлежали X. Как будет видно дальше, $V(S')$ — максимальный абелев класс форм и наиболее общий класс форм, выражаемых в виде функции от φ.

Определим теперь, используя преобразование Фурье (3.3), операторы рождения и уничтожения, относящиеся к конфигурационному пространству. Для вещественной функции $f \in S_r(\mathbb{R})$ положим

$$b^*(f) = \int a^*(-k)\tilde{f}(k)\,dk, \tag{4.8}$$
$$b(f) = \int a(k)\tilde{f}(k)\,dk.$$

Коммутационные соотношения

$$[b(f), b^*(g)] = \int f(x)\,g(x)\,dx = \int \tilde{f}(k)\,\tilde{g}(-k)\,dk$$

вытекают из соответствующих коммутационных соотношений для a и a^*:

$$[a(k_1), a^*(k_2)] = \delta(k_1 - k_2), \tag{4.9}$$

а (4.9) можно проверить непосредственно.

Теорема 4.1. *Определенные выше операторы b и b^* реализуют фоковское представление ККС над $Q' = S'_r(\mathbb{R})$.*

Доказательство стандартно, и мы его опустим. Теорема 2.3 позволяет отождествить F и $\mathscr{H} = L_2(Q, d_B q)$. Определим теперь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int e^{-ikx}[a^*(k) + a(-k)]\frac{dk}{\sqrt{\mu(k)}}, \tag{4.10}$$
$$\pi(x) = \frac{i}{\sqrt{4\pi}} \int e^{-ikx}[a^*(k) - a(-k)]\sqrt{\mu(k)}\,dk.$$

Поскольку ядра из (4.10) лежат в S'_c, поля $\varphi(x)$ и $\pi(x)$ — билинейные формы на $D \times D$. Комбинируя (3.18), (4.8) и (4.10), получаем

$$\varphi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \tilde{f}(k)[a^*(-k) + a(k)]\frac{dk}{\sqrt{\mu(k)}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \iint e^{-ikx}[a^*(k) + a(-k)]\frac{dk}{\sqrt{\mu(k)}} f(x)\,dx =$$
$$= \int \varphi(x) f(x)\,dx$$

и аналогично

$$\pi(f) = \int \pi(x) f(x)\,dx.$$

Это вычисление оправдывает определения (4.10). (По поводу замены порядков интегрирования по k и x см. приводимое ниже доказательство теоремы 4.4.)

Опишем свойства мономов Вика вида (4.6).

Теорема 4.2. *Пусть w — ядро ограниченного оператора из $S_nL_2(\mathbb{R}^n)$ в $S_mL_2(\mathbb{R}^m)$ с нормой $\|w\|$. Тогда*

$$(N+I)^{-m/2}\,W\,(N+1)^{-n/2} \tag{4.11}$$

— тоже ограниченный оператор с нормой, не превосходящей $\|w\|$.

Доказательство. Пусть A — оператор (4.11). Тогда $A\colon F_{r+n}\to F_{r+m}$ и

$$\|A\| = \sup_r \|A \upharpoonright F_{r+n}\|.$$

Для векторов $\theta_1 \in F_{r+m}\cap D$ и $\theta_2\in F_{r+n}\cap D$ имеем

$$\langle\theta_1,\ A\theta_2\rangle = (r+m+1)^{-m/2}(r+n+1)^{-n/2}\langle\theta_1,\ W\theta_2\rangle,$$

где

$$\langle\theta_1,\ W\theta_2\rangle =$$
$$=\left[\frac{(r+m)!}{r!}\,\frac{(r+n)!}{r!}\right]^{1/2}\int \theta_1(k,\ p)^-\,w(k,\ k')\,\theta_2(k',\ p)\,dk\,dk'\,dp,$$

причем $p\in\mathbb{R}^r$. Таким образом,

$$|\langle\theta_1,\ A\theta_2\rangle| \leqslant \|w\|\int\|\theta_1(\cdot,\ p)\|_2\,\|\theta_2(\cdot,\ p)\|_2\,dp \leqslant$$
$$\leqslant \|w\|\left[\int\|\theta_1(\cdot,\ p)\|_2^2\,dp\right]^{1/2}\left[\int\|\theta_2(\cdot,\ p)\|_2^2\,dp\right]^{1/2} =$$
$$= \|w\|\cdot\|\theta_1\|\cdot\|\theta_2\|,$$

и доказательство закончено.

Следствие 4.3. *Пусть $a+b\geqslant m+n$. Тогда*

$$\left\|(N+I)^{-a/2}\,W\,(N+I)^{-b/2}\right\| \leqslant (1+|m-n|)^{|a-m|/2}\,\|w\|.$$

Доказательство. Переставим $|a-m|$ множителей $(N+I)^{-1/2}$ с одной стороны W на другую, используя тождество

$$(N+(\alpha+1)I)^{-1/2}\,W = W\,(N+(\alpha+m-n+1)I)^{-1/2}$$

с $\alpha=0$ при $m>n$ и $\alpha=n-m$ при $m\leqslant n$, и учтем неравенство

$$\left\|(N+(\alpha+1)I)^{1/2}(N+I)^{-1/2}\right\| \leqslant (1+\alpha)^{1/2}$$

для $\alpha=|m-n|$.

Замечание. Легко видеть, что билинейная форма однозначно определяет оператор, заданный на $D(N^{(m+n)/2})$.

Пусть теперь W_1 и W_2 — два монома Вика степеней i, j и m, n соответственно. Предположим, что ядра w_1 и w_2 достаточно регулярны (например, лежат в S), тогда можно определить произведение W_1W_2. Произведение W_1W_2 не будет мономом Вика, так как операторы уничтожения в W_1 предшествуют операторам рождения в W_2. Однако с помощью коммутационных соотношений (4.9) операторы a и a^* можно расположить в таком же порядке, как и в (4.6) [1]. Из-за δ-функции в правой части (4.9) повторное применение (4.9) приводит W_1W_2 к сумме членов. Обозначая через U_r вклад в эту сумму от членов, содержащих r δ-функций (r спариваний), можно написать, что

$$W_1W_2 = \sum_{r=0}^{\min\{j,\, m\}} U_r \tag{4.12}$$

и

$$U_r = \int a^*(k_1) \ldots a^*(k_{i+m-r}) u_r(k, k') a(k'_1) \ldots \ldots a(k'_{j+n-r})\, dk\, dk'. \tag{4.13}$$

Если ядра w_1 и w_2 симметричны отдельно по своим переменным, относящимся к операторам рождения ($k_1, \ldots, k_i$ и $k_1, \ldots, k_m$), и по переменным, относящимся к операторам уничтожения, то

$$u_r = u_r(k, k'; k'', k''') = \tag{4.14}$$
$$= r! \binom{j}{r} \binom{m}{r} \int w_1(k, p, k'_{r+1}, \ldots, k'_j)\, w_2(p, k''_{r+1}, \ldots, k''_m, k''')\, dp,$$

где $k \in \mathbb{R}^i$, $p \in \mathbb{R}^r$ и $k''' \in \mathbb{R}^n$. Член U_0 называется виковым произведением и обозначается через $:W_1W_2:$. Ядром $:W_1W_2:$ является $w_1 \otimes w_2$, т. е. произведение ядер w_1 и w_2, рассматриваемых как функции от различных переменных. Для любых обобщенных функций умеренного роста w_1 и w_2 произведение $w_1 \otimes w_2$ — снова обобщенная функция умеренного роста и потому $:W_1W_2:$ определено даже тогда, когда W_1W_2 не имеет смысла. Аналогично мы определим виково произведение $:U \ldots VW:$ произвольного числа виковых мономов. Если P — полином от l некоммутативных переменных и $W_1, \ldots$ $\ldots, W_l$ — виковы мономы, то $P(W_1, \ldots, W_l)$ называется формальным выражением по $a^\#$. Определим $:P(W_1, \ldots, W_l):$, используя линейность. В смысле билинейных форм справедливо равенство

$$W_1W_2 = :W_1W_2: + :U_1: + :U_2: + \ldots .$$

---

[1] В физической литературе эту операцию называют операцией приведения к нормальной форме. — *Прим. ред.*

Поскольку в общем случае U_l не равно нулю, виково произведение формальных выражений нельзя рассматривать как произведение билинейных форм.

В качестве частного случая, иллюстрирующего сделанные замечания, можно привести виков полином $:\varphi^n(x): \in V(S')$ с ядром

$$v(k, x) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-ix\sum_{l=1}^{n} k_l} \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\mu(k_l)}}. \tag{4.15}$$

Как функция k это ядро лежит в $S'_c(\mathbb{R}^n)$, а x в нем является параметром. При $n=2$ легко проверить, что

$$\varphi^2(x) - :\varphi^2(x): = \frac{1}{4\pi}\int \frac{dk}{\mu(k)}. \tag{4.16}$$

Интеграл в правой части логарифмически расходится, и, поскольку $:\varphi^2(x):$ существует, мы заключаем, что $\varphi^2(x)$ не существует. Перечисленные факты, а именно то, что $\varphi^2(x)$ не существует, что $\varphi(x)$ — билинейная форма, но не оператор, что гауссова мера $d_B q$ сосредоточена на обобщенных функциях, а не на гладких функциях, — все это различные стороны одного и того же явления.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы дать определение свободного гамильтониана H_0. Согласно принципу соответствия, H_0 можно получить, подставив квантовые поля φ и π в классический гамильтониан свободного поля (3.2), взятый при $t=0$. Мы уже видели, что $\varphi^2(x)$ тождественно равно ∞. То же самое справедливо и по отношению к π^2 и $(\nabla\varphi^2)$. Однако мы можем вычесть константу, подобно тому как в случае одной степени свободы это было сделано в (2.1). Основываясь на этом, определим H_0 формулой

$$H_0 = \frac{1}{2}\int :\pi^2(x) + (\nabla\varphi^2(x)) + m^2\varphi^2(x): dx. \tag{4.17}$$

Это грозно выглядящее выражение на самом деле благодаря сделанному выбору билинейной формы B очень просто. В полной аналогии с (2.3) справедлива

Теорема 4.4.

$$H_0 = \int \mu(k)\, a^*(k)\, a(k)\, dk.$$

Доказательство. Доказательство состоит из длинных вычислений, поэтому мы опустим некоторые детали. Чисто рождающая часть H_0 равна

$$\frac{1}{2\cdot 4\pi}\int a^*(k_1)\,a^*(k_2)\,e^{-ix(k_1+k_2)}\,[-\mu(k_1)\,\mu(k_2)+ +(-k_1k_2+m^2)]\,\frac{dk_1\,dk_2}{\sqrt{\mu(k_1)\,\mu(k_2)}}\,dx,$$

и дело сводится к оправданию перестановки порядков интегрирования по k и x. Пусть для $\theta_1,\ \theta_2\in D$

$$f(k_1,\ k_2)=\langle\theta_1,\ a^*(k_1)\,a^*(k_2)\,\theta_2\rangle.$$

Тогда $f\in S_c(\mathbb{R}^2)$, и вышеприведенный член дает следующий вклад в $\langle\theta_1, H_0\theta_2\rangle$:

$$\frac{1}{2\cdot 4\pi}\int f(k_1,\ k_2)\,e^{-ix(k_1+k_2)}\,dx\,[-\mu(k_1)\,\mu(k_2)- -k_1k_2+m^2]\,\frac{dk_1\,dk_2}{\sqrt{\mu(k_1)\,\mu(k_2)}}=$$

$$=\frac{1}{4}\int f(k_1,k_2)\,\delta(k_1+k_2)[-\mu(k_1)\,\mu(k_2)-k_1k_2+m^2]\,\frac{dk_1\,dk_2}{\sqrt{\mu(k_1)\,\mu(k_2)}}=0.$$

Аналогично доказывается, что чисто уничтожающая часть H_0 равна нулю. Остающаяся часть H_0 имеет вид

$$\frac{1}{4\pi}\int a^*(k_1)\,a(-k_2)\,e^{-ix(k_1+k_2)}\,[\mu(k_1)\,\mu(k_2)-k_1k_2+m^2]\times \times\frac{dk_1\,dk_2}{\sqrt{\mu(k_1)\,\mu(k_2)}}\,dx.$$

Меняя, как и выше, порядок интегрирования по x и k, получаем в смысле билинейных форм на $D\times D$

$$\frac{1}{2}\int a^*(k_1)\,a(-k_2)\,\delta(k_1+k_2)\,[\mu(k_1)\,\mu(k_2)-k_1k_2+m^2]\times \times\frac{dk_1\,dk_2}{\sqrt{\mu(k_1)\,\mu(k_2)}}\,dx=\int\mu(k)\,a^*(k)\,a(k)\,dk.$$

Следствие 4.5. *Свободный гамильтониан H_0 оставляет инвариантным каждое подпространство F_n, и на F_n его сужение действует как оператор умножения на функцию вида*

$$\sum_{l=1}^{n}\mu(k_l).$$

Следствие 4.6. *Гамильтониан H_0 задает на области D самосопряженный в существенном оператор.*

Доказательства элементарны. Начиная с этого места, мы будем обозначать через H_0 самосопряженный оператор, область определения которого равна

$$(4.18)\qquad D(H_0)=\left\{\theta\in F\;\middle|\;\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sum_{l=1}^{n}\mu(k_l)\theta_n\right\|_2^2<\infty\right\}.$$

Часть II

ДВУМЕРНЫЕ БОЗОННЫЕ МОДЕЛИ

5. Гамильтониан взаимодействия

При изучении операторов Гамильтона двумерных бозонных моделей используются обрезания трех типов. Эти обрезания приводят к приближенным, более простым гамильтонианам. После выяснения свойств обрезанных гамильтонианов обрезания снимаются с помощью того или иного предельного перехода, что позволяет получать свойства полного гамильтониана. Первое обрезание — это пространственное обрезание, сделанное с помощью неотрицательной функции $g\in L_\infty(\mathbb{R})$, имеющей компактный носитель в x-пространстве. Функция g ограничивает радиус взаимодействия частиц областью, в которой $g\neq 0$. Второе обрезание — это ультрафиолетовое обрезание $\varkappa$ в импульсном пространстве. Параметр обрезания $\varkappa$, грубо говоря, указывает наибольшую величину импульсов, входящих в гамильтониан взаимодействия. Наконец, мы применим еще одно (вспомогательное) обрезание, которое приведет к тому, что сумма свободного гамильтониана и обрезанного взаимодействия станет явно самосопряженным в существенном оператором.

Зафиксируем степень p положительного полинома P. Гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$(5.1)\qquad H_I=\int :P(\varphi(x)):dx\in V(S').$$

Ядро члена из H_I, имеющего степень n, пропорционально функции

$$(5.2)\qquad \delta\left(\sum_{l=1}^{n}k_l\right)\prod_{l=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\mu(k_l)}},$$

в чем можно убедиться с помощью замены порядков интегрирования по x и k, подобной той, что делалась в теореме 4.4. Из-за δ-функции это ядро не принадлежит L_2, хотя и лежит в $S_c'(\mathbb{R}^n)$. Сама δ-функция возникает как следствие закона сохранения импульса, или, что то же самое, как следствие трансляционной инвариантности H_I. Из-за этой δ-функции сумма $H_0 + H_I$ в высшей степени сингулярна. Только после добавления к $H_0 + H_I$ (расходящейся константы) мы сможем реализовать новый перенормированный гамильтониан как самосопряженный оператор в новом гильбертовом пространстве, связанном с (возможно)[1]) не фоковским представлением ККС. Пространственно обрезанный гамильтониан $H_I(g)$ менее сингулярен. Он определяется равенством

$$H_I(g) = \int :P(\varphi(x)): g(x)\,dx, \tag{5.3}$$

и здесь ядро, аналогичное (5.2), пропорционально

$$v = \tilde{g}\left(-\sum_{l=1}^{n} k_l\right) \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\mu(k_l)}}. \tag{5.4}$$

Ультрафиолетовообрезанное поле $\varphi_\varkappa(x)$ определяется формулой

$$\varphi_\varkappa(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \xi(k\varkappa^{-1})\, e^{-ixk} \left[a^*(k) + a(-k)\right] \frac{dk}{\sqrt{\mu(k)}}, \tag{5.5}$$

где ξ — некоторый фиксированный элемент $S_c(\mathbb{R})$, удовлетворяющий условиям $\xi(0) = 1$ и $\xi(k) = \xi(-k)^*$, так что ξ есть преобразование Фурье вещественной функции. Введем

$$H_I(g, \varkappa) = \int :P(\varphi_\varkappa(x)): g(x)\,dx \tag{5.6}$$

и

$$H(g, \varkappa) = H_0 + H_I(g, \varkappa). \tag{5.7}$$

Ядро гамильтониана $H_I(g, \varkappa)$ пропорционально

$$v_\varkappa = \tilde{g}\left(-\sum_{l=1}^{n} k_l\right) \prod_{l=1}^{n} \frac{\xi(\varkappa^{-1}k_l)}{\sqrt{\mu(k_l)}}. \tag{5.8}$$

Обрезание $\varkappa$ введено для того, чтобы ядро v попало в L_2. Хотя после введения $\varkappa$ ядро $v_\varkappa$ попадает в S, а $H_I(g, \varkappa) \in V(S)$, но смысл такой дополнительной регуляризации не в этом. Важность обрезания $\varkappa$ в том, что оператор $H_I(g, x)$ полуограничен, тогда как $H_I(g)$ — нет. Для доказательства этого утверждения нам нужна теорема Вика.

Пусть A_j — некоторое множество неупорядоченных пар с полностью различными компонентами, выбранными из множества $\{1, \ldots, n\}$ (назовем такие пары дизъюнктными),

[1]) В настоящее время эта оговорка излишняя.

пусть $|A_j|$ — подмножество в $\{1, \ldots, n\}$, образованное компонентами пар из A_j, и пусть $\mathscr{A}_j$ — множество всех A_j.

Теорема 5.1. *После умножения на гладкую функцию и интегрирования по k в $W(S)$ справедливы соотношения*

$$\prod_{l=1}^{n} [a^*(k_l) + a(-k_l)] = \tag{5.9}$$

$$= \sum_{j=0}^{[n/2]} \sum_{A_j \in \mathscr{A}_j} \prod_{(\alpha, \beta) \in A_j} \delta(k_\alpha + k_\beta) : \prod_{l \notin |A_j|} [a^*(k_l) + a(-k_l)] :$$

и

$$:\prod_{l=1}^{n} [a^*(k_l) + a(-k_l)] : = \tag{5.10}$$

$$= \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j \sum_{A_j \in \mathscr{A}_j} \prod_{(\alpha, \beta) \in A_j} \delta(k_\alpha + k_\beta) \times \prod_{l \notin |A_j|} [a^*(k_l) + a(-k_l)].$$

При этом получающиеся равенства — операторные тождества на D.

Доказательство. Переставим с помощью (4.9) операторы a^* и a в левой части. Для каждой пары переменных k_α, k_β возможна всего одна перестановка между соответствующими a^* и a. Поэтому после перестановки возникают два члена: один с $\delta(k_\alpha + k_\beta)$, а другой с переставленными a^* и a. В итоге разложение левой части содержит по одному члену, отвечающему каждому выбору дизъюнктных пар из $\{1, \ldots, n\}$. Каждый такой член содержит δ-функции, отвечающие выбранным парам индексов и переставленные a^* и a для остальных индексов. Знак минус в (5.10) возникает из-за изменения направления перестановок, т. е. из-за того, что $a^*a = aa^* - \delta$. Это завершает доказательство.

Пусть

$$c_\varkappa = \frac{1}{4\pi} \int \xi(\varkappa^{-1}k) \frac{dk}{\mu(k)}. \tag{5.11}$$

Следствие 5.2. *Соотношение*

$$:\varphi_\varkappa^n(x): = \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j c_\varkappa^j \frac{n!}{(n-2j)!\, j!\, 2^j} \varphi_\varkappa^{n-2j}(x)$$

выполняется на D как операторное тождество.

Доказательство. Число элементов в A_j в точности равно $n!/(n-2j)!j!2^j$.

Следствие 5.3. *Пусть $g \in L_1$. На области $D \times D$ справедливо следующее операторное неравенство:*

$$-O(\ln \varkappa)^{p/2} \leqslant H_l(g, \varkappa).$$

Доказательство. В (5.11) $c_\varkappa = O(\ln \varkappa)$. Поскольку P — положительный полином, требуемое неравенство вытекает из следствия 5.2.

Неравенство в следствии 5.3 с помощью процедуры замыкания распространяется на самосопряженные операторы (см. теорему 5.6).

Лемма 5.4. *Пусть $f_1, f_2 \in S_r(\mathbb{R})$. Тогда оператор $\varphi(f_1) + \pi(f_2)$ самосопряжен в существенном на области D.*

Доказательство. Если установить для каждого вектора $\theta \in D$ неравенство

$$\|[\varphi(f_1) + \pi(f_2)]^n \theta\| \leqslant O(n!)^{1/2} [\|\mu_x^{-1/2} f_1\|_2 + \|\mu_x^{1/2} f_2\|_2]^n, \tag{5.12}$$

то в силу инвариантности D относительно действия φ и π вектор θ будет аналитическим для сужения $[\varphi(f_1) + \pi(f_2)] \upharpoonright D$, и утверждение леммы будет следовать из теоремы Нельсона (см. [R. S]).

Для доказательства 5.12 разложим член n-й степени в левой части в сумму 4^n членов вида

$$\|a^\#(h_1) \ldots a^\#(h_j)\theta\|, \tag{5.13}$$

где $a^\# = a$ или a^* и h_i пропорционально $\mu_x^{\pm 1/2} f_i$. Если M — максимальное число частиц (т. е. операторов рождения) в θ, то норма (5.13), так же как и при доказательстве следствия 4.3, оценивается следующим образом:

$$\prod_{i=1}^n \|a^\#(h_i)(N+I)^{-1/2}\| \left\| \prod_{i=1}^n [N + (i+1)I]^{1/2} \theta \right\| \leqslant$$
$$\leqslant (M+1)^n \sqrt{(n!)} \prod_{i=1}^n \|h_i\|_2 \|\theta\|.$$

Это и завершает доказательство.

Пусть теперь $\varphi(f)$ всегда означает самосопряженное замыкание $\varphi(f) \upharpoonright D$, т. е. $\varphi(f) = (\varphi(f) \upharpoonright D)^-$, и пусть $\mathscr{M}$ — алгебра фон Неймана, порождаемая операторами $\{e^{i\varphi(f)}\}$ при $f \in S$.

Предложение 5.5. $\mathscr{M} = L_\infty(Q)$.

Доказательство. По построению $\mathcal{M} \subset L_\infty(Q)$. С другой стороны, $L_\infty(Q)$ — абелева подалгебра в $B(\mathcal{H})$, поэтому, показав, что $\mathcal{M}$ — максимально абелева подалгебра в $B(\mathcal{H})$, мы докажем предложение. Мы установим свойство, эквивалентное максимальной абелевости $\mathcal{M}$, а именно мы покажем, что множество векторов $\mathfrak{M} = \{M\Omega_0 \mid M \in \mathcal{M}\}$ плотно в $\mathcal{H}$. Но ведь векторы

$$\exp\left(i \sum_{j=1}^{n} s_j \varphi(f_j)\right) \Omega_0$$

сильно n-кратно дифференцируемы для всех n и любых $f_1, \ldots$ $\ldots, f_n \in S_r(\mathbb{R})$. Таким образом, производные этой экспоненты при $s_j = 0$, т. е. векторы $\varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n)\Omega_0$ принадлежат замыканию множества $\mathfrak{M}$. Следовательно, $D \subset \overline{\mathfrak{M}}$ и поскольку D плотно в $\mathcal{H}$, замыкание $\overline{\mathfrak{M}}$ совпадает с $\mathcal{H}$.

Теорема 5.6. *Пусть $V \in V(L_2)$. Тогда виков полином V задает на области D оператор, самосопряженный в существенном.*

Доказательство. Пусть V — оператор, определенный на D. Мы утверждаем, что $\mathcal{M}\Omega_0 \subset D(V^-)$ и что $\mathcal{M}$ коммутирует с V^-. Тогда из того, что $V\Omega_0 = \theta \in \mathcal{H} = L_2(Q)$ будет вытекать, что сужение $V^- \restriction \mathcal{M}\Omega_0$ является оператором умножения на функцию из L_2. А поскольку такой оператор самосопряжен в существенном на $L_\infty(Q) = \mathcal{M}\Omega_0$, сужение $V^- \restriction \mathcal{M}\Omega_0$ также самосопряжено в существенном, а замыкание V^- самосопряжено. Для доказательства нашего утверждения вычислим следующий предел:

$$\lim_n \sum_{j \leqslant n} V(i\varphi(f))^j \Omega_0/j! = \lim_n \sum_{j \leqslant n} (i\varphi(f))^j V\Omega_0/j! = \exp(i\varphi(f)) V\Omega_0,$$

где в силу (5.12) сходимость ряда вытекает из условия $V\Omega_0 \in D$. Таким образом,

$$V^- \exp(i\varphi(f))\Omega_0 = \exp(i\varphi(f)) V^-\Omega_0.$$

Аналогичное доказательство применимо как в случае линейных комбинаций экспонент, так и в случае полиномов от экспонент (поскольку их можно представить в виде линейных комбинаций подходящих экспонент). Произвольный элемент $M \in \mathcal{M}$ является сильным пределом таких полиномов M_j. Поэтому $M\Omega_0 = \lim_j M_j\Omega_0$ и равенства

$$\lim_j V^- M_j \Omega_0 = \lim_j M_j V^- \Omega_0 = M V^- \Omega_0$$

доказывают нужное нам утверждение.

Теорема 5.7. *Для всех $r < \infty$ полином V принадлежит $L_r(Q, d_Bq)$, и если v — его ядро, то*

$$\| V \|_r \leqslant \text{const} \cdot \| v \|_2.$$

Доказательство. Для $r = 2j$ при j целом в силу следствия 4.3 справедливо неравенство

$$\| V \|_r^r = \int_Q V^{2j} d_B q = \langle \Omega_0, V^{2j} \Omega_0 \rangle =$$

$$= \| V^j \Omega_0 \|^2 \leqslant \prod_{l=1}^{j} \| (N + I)^{n(l-1)/2} V (N + I)^{-nl/2} \|^2 \leqslant \text{const} \cdot \| v \|_2^{2j}.$$

Это доказывает теорему для всех $r = 2j$, а, поскольку полная мера Q конечна, теорема справедлива и для меньших значений, и, следовательно, для всех $r < \infty$.

Предложение 5.8. *Если v и $v_\varkappa$ принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L_2$, то*

$$\| v - v_\varkappa \| \leqslant O(\varkappa^{\varepsilon - 1/2}).$$

Если $g_1, g_2 \in L_2$, то соответствующие ядра v_1, v_2, определенные соотношением (5.4), *удовлетворяют неравенству*

$$\| v_1 - v_2 \| \leqslant O(\| g_1 - g_2 \|).$$

Доказательство. Пусть Σ — сектор $\mu(k_1) \leqslant \ldots \leqslant \mu(k_n)$. Поскольку v и $v_\varkappa$ — симметричные функции, справедливы равенства

$$\| v - v_\varkappa \|_2^2 = n! \int_\Sigma | v - v_\varkappa |^2 dk =$$

$$= \text{const} \int_\Sigma \left| 1 - \prod_l \xi(\varkappa^{-1} k_l) \right|^2 \prod_l \frac{\left| \tilde{g}\left(-\sum_l k_l \right) \right|^2}{\mu(k_l)} dk.$$

Далее,

$$\left| 1 - \prod_l \xi(\varkappa^{-1} k_l) \right|^2 \leqslant \text{const} \cdot \sup_l | 1 - \xi(\varkappa^{-1} k_l) |,$$

и так как функция $| 1 - \xi(\varkappa^{-1} k_l) | \mu(k_n)^{-1}$ ограничена снизу функцией $\varkappa^{-1}$, а в секторе Σ — функцией $\text{const} \cdot \mu(k_n)^{-1}$, то

$$| 1 - \xi(\varkappa^{-1} k_l) | \mu(k_n)^{-1} \leqslant \text{const}\, \varkappa^{-1+\varepsilon} \mu(k_n)^{-\varepsilon}$$

на Σ. Отсюда

$$\|v-v_\varkappa\|_2^2 \leqslant \mathrm{const}\cdot \varkappa^{-1+\varepsilon}\int\limits_\Sigma \prod_{l<n}\mu(k_l)^{-1}\mu(k_n)^{-\varepsilon}\left|\tilde g\left(-\sum_i k_i\right)\right|^2 dk \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\cdot \varkappa^{-1+\varepsilon}\int\limits_\Sigma \prod_{l<n}\mu(k_l)^{-1-\varepsilon/(n-1)}\left|\tilde g\left(-\sum_i k_i\right)\right|^2 dk \leqslant$$

$$\leqslant O(\varkappa^{-1+\varepsilon})\, O(\|g\|_2^2),$$

где сначала интегрирование производилось по переменной k_n. Это сразу доказывает первое неравенство, а поскольку $v_1 - v_2$ есть ядро, отвечающее обрезающей функции $g_1 - g_2$, то это же неравенство дает и вторую оценку. Отметим, что положительность функции g не требовалась.

Замечание. Мы видим, что гамильтониан $H_I(g) \in V(L_2)$ и потому задает самосопряженный оператор. Следствие 5.3 и предложение 5.8 выражают тот факт, что $H_I(g)$ состоит из полуограниченной части и малого остатка.

Пусть B — ограниченная открытая область пространства $\mathbb{R}$ и $\mathscr{M}(B)$ — алгебра фон Неймана, порождаемая операторами $\exp(i\varphi(f))$, где $f \in S_r(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp} f \subset B$.

Теорема 5.9. *Пусть* $g(x) \equiv 0$ *на* B' — *дополнении* B. *Тогда* $\exp(itH_I(g)) \in \mathscr{M}(B)$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Операторы умножения $V \in V(L_2)$ на плотной области L_∞ суть самосопряженные в существенном операторы. Если последовательность V_j сходится (в смысле сходимости квадратично суммируемых функций) к пределу V, то она же сходится на области L_∞ в сильном операторном смысле, а в таком случае сильно сходится и последовательность унитарных групп $\exp(it V_j)$. В силу теоремы 5.7 сходимость ядер v_j в L_2 влечет сходимость V_j в $L_2(Q, d_Bq)$, и, поскольку алгебра $\mathscr{M}(B)$ замкнута в сильной топологии, теорему достаточно доказать применительно к ядрам v_j, приближающим в L_2-смысле ядра v гамильтониана $H_I(g)$.

В качестве первого приближения выберем последовательность функций g_j следующего вида:

$$g_j(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если расстояние } d \text{ от границы } B \text{ больше } j^{-1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $g_j \to g$ в L_2 и ядра v_j сходятся в силу предложения 5.8. Затем мы аппроксимируем $H_I(g_j)$ последовательностью $H_I(g_j, \varkappa_l)$, в которой $\varkappa_l \to \infty$. Опять в силу предложения 5.8 ядра сходятся в L_2. Далее выберем в качестве импульсного обрезания функцию ξ, являющуюся фурье-преобразованием функции с компактным носителем. Тогда

$$\varphi_\varkappa(x)=\frac{2\pi}{\varkappa}\int\eta(\varkappa(x-y))\,\varphi(y)\,dy$$

и для $x\in\operatorname{supp} g$ и достаточно больших l

$$\operatorname{supp}\eta(\varkappa_l(x-y))\subset B.$$

Тогда $\exp(it\varphi_\varkappa(x))\in\mathscr{M}(B)$ по определению и, следовательно, спектральные проекторы $\varphi_\varkappa(x)$ тоже принадлежат $\mathscr{M}(B)$. Это же справедливо для $:P(\varphi_\varkappa(x)):$, так как P — полином от $\varphi_\varkappa(x)$ (следствие 5.2) и, следовательно, для $H_I(g,\varkappa)$, поскольку интегрирование по x — сильно сходящаяся операция на существенной области (коре) $L_\infty(Q)$ оператора $H_I(g,\varkappa)$ (теорема 5.7).

6. Гамильтониан свободного поля

В этом разделе мы исследуем свойства оператора H_0, определенного в разд. 4. Основным свойством H_0, используемым при доказательстве самосопряженности в существенном гамильтониана $H(g)$, будет положительность ядра оператора $\exp(-tH_0)$. Ясно, что этот факт следует из того, что H_0 — эллиптический оператор второго порядка и что из него вытекает существованне положительной меры на соответствующем пространстве траекторий. При снятии обрезания g основным будет то, что H_0 приводит к конечной скорости распространения возмущения, что вытекает из аналогичного свойства классического поля и в сущности является отражением гиперболического характера уравнения (3.1).

Определение 6.1. Пусть X — пространство с мерой dx. Пусть A — ограниченный оператор на $L_2(X,dx)$. Тогда ядро A неотрицательно, если для любых двух неотрицательных функций θ и ψ из $L_2(X,dx)$

$$0\leqslant\langle\theta,\ A\psi\rangle. \tag{6.1}$$

Если B — другой ограниченный оператор на $L_2(X,dx)$ и если ядро $B-A$ неотрицательно, то говорят, что ядро B больше ядра A.

Теорема 6.2. *Ядро* $\exp(-tH_0)$ *неотрицательно.*

Доказательство. Мы проделаем три редукции и затем воспользуемся теоремой 2.4, относящейся к конечномерному случаю. Первая редукция состоит в замене $\exp(-tH_0)$ последовательностью операторов, сильно сходящейся к исходному оператору. Выберем в качестве такой последовательности операторы $\exp(-t\hat{H}_n)$, где

$$H_n = \sum_l \mu_{l,n} a^*(e_{l,n}) a(e_{l,n}),$$

$$0 \leqslant \mu_{l,n}, \qquad e_{l,n} \in S(\mathbb{R}),$$

причем будем считать, что при фиксированном n семейство $\{e_{l,n}\}$ ортонормировано. Более того, поскольку $\mu(k) = \mu(-k)$ и $\delta(k-l)$ — вещественная обобщенная функция, множество индексов можно выбрать так, чтобы

$$l = \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots, \ \pm j(n).$$

Будем считать также, что $\mu_{l,n} = \mu_{-l,n}$ и $e_{l,n}(k) = e_{l,n}(k)^* = e_{-l,n}(-k)$.

При таких условиях $\hat{H}_n$ можно диагонализовать с помощью операторов b^*, b. В самом деле, если $\tilde{f}_l = e_{l,n}$, то

$$\operatorname{Re} \tilde{f}_l = \frac{1}{2} [e_{l,n} + e_{-l,n}] = (\operatorname{Re} \tilde{f}_l)^*,$$

$$\operatorname{Im} \tilde{f}_l = \frac{1}{2i} [e_{l,n} - e_{-l,n}] = -(\operatorname{Im} \tilde{f}_l)^*$$

и с помощью (4.8) можно проверить, что

$$\hat{H}_n = 2 \sum_{l=1}^{j(n)} \mu_{l,n} \{b^*(\operatorname{Re} f_l)\, b(\operatorname{Re} f_l) + b^*(\operatorname{Im} f_l)\, b(\operatorname{Im} f_l)\} =$$

$$= \sum_{l=1}^{2j(n)} \mu_{l,n} b^*(g_l)\, b(g_l),$$

причем g_l образуют ортогональное в $S_r(\mathbb{R})$ семейство.

Вторая редукция состоит в замене θ и ψ сильно сходящимися последовательностями $\{\theta_\nu\}$, $\{\psi_\nu\}$ векторов, обладающих свойствами $|\theta_\nu| \geqslant 0$ и $|\psi_\nu| \geqslant 0$. Причем мы хотим, чтобы θ_ν и ψ_ν зависели только от конечного числа степеней свободы, и мы достигнем этого, потребовав, чтобы θ_ν и ψ_ν принадлежали D. Множество D плотно в $L_2(Q)$, а поскольку в силу неравенства треугольника

$$-|\theta - \theta_\nu| \leqslant |\theta| - |\theta_\nu| \leqslant |\theta - \theta_\nu|,$$

мы видим, что «абсолютные значения» элементов из D образуют множество, плотное во множестве положительных элементов из $L_2(Q)$.

Пусть G — конечномерное подпространство в $S_r(\mathbb{R})$, такое, что $g_l \in G$ и θ_ν, ψ_ν — полиномы, имеющие образующие в $K = \mu_x^{1/2} G$. Поскольку значение μ_l, равное нулю, допускается, можно предположить, что множество $\{g_l\}$ — базис в G.

Третья редукция основывается на теореме 2.3 об унитарной эквивалентности. Пусть D_G — линейное подпространство в D, алгебраически порожденное полиномами, имеющими образующие в $\mu_x^{1/2}G$, и пусть $\mathcal{H}_G = D_G^- \subset L_2(Q)$. Тогда $\mathcal{H}_G$ — циклическое подпространство, порождаемое операторами $b^*(g_l)$, действующими на Ω_0, и легко проверить, что

$$G \ni g \to b^*(g),\ b(g)$$

— фоковское представление ККС над G. Поскольку

$$e^{-tH_n} b^*(g_l) = b^*\left(e^{-t\mu_{l,n}} g_l\right) e^{-tH_n},$$

$\mathcal{H}_G$ инвариантно относительно действия $\exp(-tH_n)$, и потому оператор U, осуществляющий унитарную эквивалентность между $\mathcal{H}_G$ и $L_2(\mathbb{R}^{2j(n)})$, существующую в силу теоремы 2.3, сохраняет внутреннее произведение (6.1). Пусть $\mathcal{M}(K)$ — алгебра фон Неймана, порождаемая множеством $\{\exp(i\varphi(f)) \mid f \in \in F\}$. Тогда $\mathcal{H}_G$ инвариантно относительно действия $\mathcal{M}(K)$, и можно проверить, что $\mathcal{M}(K)\Omega_0)^- = \mathcal{H}_G$. Далее, если $M \in \in \mathcal{M}(K)$, то $UM \cdot 1 = M' \in L_\infty(\mathbb{R}^{2j(n)})$. Отображение $M \to M'$ сохраняет произведения, а следовательно и квадратные корни, и абсолютные значения. В итоге U сохраняет абсолютные значения на $\mathcal{H}_G$, и доказываемое утверждение вытекает из теоремы 2.4. ■

Следствие 6.3. *Пусть* $V(q) \in L_r(Q, d_Bq)$ *для некоторого* $r \geqslant 1$. *Предположим, что оператор* $H_0 + V$ *самосопряжен в существенном на области*

$$D(H_0) + D(V)$$

и для некоторой константы M

$$-M \leqslant V.$$

Тогда

$$\operatorname{Ker}\{\exp[-t(H_0+V)]\} \leqslant \operatorname{Ker}\{\exp(tM)\exp(-tH_0)\}.$$

Доказательство. Аппроксимируем $\exp(-t(H_0+V))$ с помощью теоремы Троттера[1]). Пусть θ и ψ как элементы $L_2(Q, d_Bq)$ неотрицательны, и пусть

$$\theta_j = \exp\left(-\frac{jt}{n} H_0\right)\theta,$$

$$\psi_j = \left[\exp\left(-\frac{t}{n} H_0\right)\exp\left(-\frac{t}{n} V\right)\right]^{n-j}\psi.$$

[1]) См., например [R. S. I]. — *Прим. ред.*

Тогда в силу теоремы 6.2 θ_j и ψ_j тоже неотрицательны и

$$\left\langle\theta, \left[\exp\left(-\frac{t}{n} H_0\right)\exp\left(-\frac{t}{n} V\right)\right]^n \psi\right\rangle = \langle\theta_0, \psi\rangle =$$
$$= \left\langle\theta_1, \exp\left(-\frac{t}{n} V\right)\psi_1\right\rangle \leqslant \exp\left(\frac{t}{n} M\right)\langle\theta_1\psi_1\rangle \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \exp(tM)\langle\theta_n, \psi_n\rangle = \langle\theta, \exp(tM)\exp(-tH_0)\psi\rangle.$$

В таком случае доказательство завершается переходом к $n = \infty$.

Пусть

$$\varphi_0(x, t) = \exp(itH_0)\varphi(x)\exp(-itH_0),$$
$$\pi_0(x, t) = \exp(itH_0)\pi(x)\exp(-itH_0), \tag{6.2}$$

$$\varphi_0(f, t) = \int \varphi_0(x, t) f(x)\,dx,$$
$$\pi_0(f, t) = \int \pi_0(x, t) f(x)\,dx. \tag{6.3}$$

В силу коммутационных соотношений

$$\exp(itH_0)a^*(f) = a^*(e^{it\mu(\cdot)}f)\exp(itH_0),$$
$$[H_0, a^*(f)] = a^*(\mu(\cdot)f), \tag{6.4}$$
$$[H_0, a(f)] = -a(\mu(\cdot)f)$$

операторы H_0 и $\exp(itH_0)$ отображают D в D. Следовательно, $\varphi_0(x, t)$ и $\pi_0(x, t)$ — билинейные формы, определенные на $D\times D$.

Теорема 6.4. *Пусть θ и ψ лежат в D. Тогда*

$$F(x, t) = \langle\theta, \varphi_0(x, t)\psi\rangle$$

— решение уравнения Клейна — Гордона (3.1) *со следующими начальными данными:*

$$F(x, 0) = \langle\theta, \varphi(x)\psi\rangle,$$
$$\frac{d}{dt}F(x, 0) = \langle\theta, \pi(x)\psi\rangle.$$

Доказательство. Формальное вычисление

$$\frac{d}{dt}F(x, t) = \frac{1}{4\pi}\int e^{-ikx}\frac{1}{\sqrt{\mu(k)}}\langle\exp(-itH_0)\theta, [iH_0, a^*(k) +$$
$$+ a(-k)]\exp(-itH_0)\psi\rangle\,dk$$

имеет смысл на $D\times D$, поскольку H_0 и $\exp(itH_0)$ отображают D в D. В силу (6.4) имеем

$$\frac{d}{dt}F(x, t) = \frac{i}{4\pi}\int e^{-ikx}\sqrt{\mu(k)}\langle\exp(-itH_0)\theta, (a^*(k) -$$
$$- a(-k))\exp(-itH_0)\psi\rangle\,dk = \langle\theta, \pi_0(x, t)\psi\rangle.$$

Аналогично

$$\frac{d^2}{dt^2} F(x, t) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-ikx} \sqrt{\mu(k)^3} \langle \exp(-itH_0)\theta, (a^*(k) + a(-k)) \exp(-itH_0)\Psi\rangle\, dk,$$

и доказательство завершается, если заметить, что

$$\mu(k)^{3/2} = \mu(k)^2 \mu(k)^{-1/2} = (k^2 + m^2)\mu(k)^{-1/2}.$$

Носитель фундаментального решения $E = \Delta(x, t)$ уравнения Клейна — Гордона, удовлетворяющего начальным данным вида

$$\Delta(x, 0) = 0, \qquad \Delta_t(x, 0) = \delta(x),$$

лежит внутри светового конуса, поэтому справедливо

Следствие 6.5. *В смысле билинейных форм на $D \times D$ выполняются равенства*

$$\varphi_0(x, t) = \int \Delta(x - y, t)\pi(y)\,dy + \int \Delta_t(x - y, t)\varphi(y)\,dy,$$

$$\pi_0(x, t) = \int \Delta_t(x - y, t)\pi(y)\,dy + \int \Delta_{tt}(x - y, t)\varphi(y)\,dy.$$

Теорема 6.6. *Пусть $f_1, f_2 \in S_r(\mathbb{R})$. На области D оператор*

$$\varphi_0(f_1, t) + \pi_0(f_2, t)$$

самосопряжен в существенном.

Доказательство. Оператор $\exp(itH_0)$ унитарен, оставляет D неизменной и преобразует $\varphi_0(f_1, t) + \pi_0(f_2, t)$ в оператор $\varphi(f_1) + \pi(f_2)$, который самосопряжен в силу леммы 5.4.

Пусть B — открытая ограниченная область пространства $\mathbb{R}$, и пусть $\mathfrak{A}(B)$ — алгебра фон Неймана, порождаемая операторами

$$\exp(i\varphi(f_1) + i\pi(f_2))$$

с фуикциями $f_1, f_2 \in S_r(\mathbb{R})$, имеющими иосители в B. Пусть для любого вещественного числа t область B_t есть миожество точек, расстояние которых от B меньше $|t|$.

Теорема 6.7. $\exp(itH_0)\mathfrak{A}(B)\exp(-itH_0) \subset \mathfrak{A}(B_t)$.

Замечание. Теорему можно переформулировать, сказав, что H_0 приводит к распространению сигналов со скоростью, меньшей 1.

Доказательство. В силу следствия 6.5

$$\varphi_0(f_1, t)+\pi_0(f_2, t)=\int\limits_{y\in B_t}[h_1(y)\varphi(y)+h_2(y)\pi(y)]\,dy,$$

где[1]) $h_1=f_1*\Delta_t+f_2*\Delta_{tt}$ и $h_2=f_1*\Delta+f_2*\Delta_t$. Это равенство справедливо для билинейных форм на $D\times D$, и потому в силу теоремы 6.6 оно продолжается до равенства между самосопряженными в существенном операторами. Поскольку унитарная группа, порождаемая правой частью равенства, по определению принадлежит $\mathfrak{A}(B_t)$, унитарная группа, порождаемая левой частью равенства, также принадлежит $\mathfrak{A}(B_t)$, что и завершает доказательство.

Теорема 6.8. *Если B и C — непересекающиеся открытые ограниченные области пространства* $\mathbb{R}$, *то операторы из $\mathfrak{A}(B)$ коммутируют с операторами из $\mathfrak{A}(C)$.*

Доказательство. Пусть при $i=1, 2$ носители $f_{i,B}\in S_r(\mathbb{R})$ лежат в B, а носители $f_{i,C}\in S_r(\mathbb{R})$ — в C, и пусть

$$B=\exp(i\varphi(f_{1,B})+i\pi(f_{2,B})),\qquad C=\exp(i\varphi(f_{1,C})+i\pi(f_{2,C})).$$

Из коммутационных соотношений (3.13), справедливых на D, и того факта, что векторы из D являются аналитическими для операторов вида $\varphi(f_1)+\pi(f_2)$, следует, что B и C коммутируют. А поскольку такие операторы порождают $\mathfrak{A}(B)$ и $\mathfrak{A}(C)$ соответственно, мы получаем доказательство теоремы.

Следствие 6.9. *Пусть $g\in L_2$, и пусть $g(x)\equiv 0$ на B. Тогда* $\exp(itH_I(g))\in\mathfrak{A}(B)$ *для всех* $t\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Так же как в доказательстве теоремы 5.9, аппроксимируем $H_I(g)$ полиномами по полю $\varphi(x)$, в котором x локализован в открытых ограниченных областях $C_j\subset B'$.

7. Самосопряженность $H(g)$

Предложение 7.1. *Пусть H_j — последовательность самосопряженных операторов. При выполнении следующих трех условий:*

(1) *операторы H_j ограничены снизу равномерно по j,*

(2) *операторы H_j сильно сходятся на некоторой плотной области D,*

(3) *операторы* $\exp(-tH_j)$ *сильно сходятся равномерно по t для всех t, отличных от нуля и ∞, резольвенты $R_j(\zeta)=(H_j-\zeta)^{-1}$ сильно сходятся к резольвенте самосопряженного оператора H.*

[1]) Здесь $*$ — знак свертки. — *Прим. ред.*

Доказательство. В силу (1) и (3) резольвенты

$$R_j(\zeta)=\int_0^\infty \exp(-t(H_j-\zeta))\,dt$$

сходятся для достаточно малых отрицательных ζ. По теореме Като ([Kat, стр. 428, теоремы 1.3]) $R(\zeta)=\lim_j R_j(\zeta)$ будет резольвентой замкнутого оператора H, если доказать, что нулевое подпространство $R(\zeta)$ состоит лишь из нуля. Более того, предел $R(\zeta)$ самосопряжен для отрицательных ζ и потому таков же и H. Пусть $R(\zeta)\theta=0$. Тогда для $\psi\in D$ с помощью (2) выводим, что

$$\langle\psi,\ \theta\rangle=\langle(H_j-\zeta)\psi,\ R_j(\zeta)\theta\rangle\to\langle(H-\zeta)\psi,\ R(\zeta)\theta\rangle=0,$$

т. е. что $\theta=0$.

Замечание. Вывод предложения 7.1 не изменится, если заменить условия (1), (3) требованиями сильной сходимости $R_j(\zeta)$ и $R_j(\zeta)^*$ для некоторого ζ.

Предложение 7.2. *Пусть $H_j=(H_0+V_j)^-$, где H_0 и V_j — самосопряженные операторы. Предположим, что, кроме условий теоремы 7.1, выполнены еще и следующие условия:*

(4) *последовательность V_j сходится к самосопряженному пределу на существенной для V области D_0,*

(5) *область значений $\exp(-tH_j)$ содержится в $D(H_0)\cap D(V_j)$,*

(6) *последовательность $V_t\exp(-tH_j)$ сильно сходится при $t>0$.*

Тогда $H=(H_0+V)^-$ самосопряжен в существенном на области $D(H_0)\cap D(V)$ и для $t>0$

$$\operatorname{Rang}\exp(-tH)\subset D(H_0)\cap D(V).$$

Замечание. H_0+V берется с областью $D(H_0)\cap D(V)$.

Доказательство. В соответствии с функциональным исчислением и предложением 7.1 последовательность $H_j\exp(-tH_j)$ сходится к $H\exp(-tH)$ при $t>0$. В силу (6)

$$H_0\exp(-tH_j)\theta=H_j\exp(-tH_j)\theta-V_j\exp(-tH_j)\theta$$

сходится для любого вектора θ. Так как H_0 — замкнутый оператор, $\exp(-tH)\theta\in D(H_0)$ и

$$H_0\exp(-tH)\theta=H\exp(-tH)\theta-\lim V_j\exp(-tH_j)\theta.$$

Пусть $\psi\in D_0$. В силу (4) $V_j\psi\to V\psi$ так, что

$$\langle\psi,\ \lim_j V_j\exp(-tH_j)\theta\rangle=\lim_j\langle V_j\psi,\ \exp(-tH_j)\theta\rangle=$$
$$=\langle V\psi,\ \exp(-tH)\theta\rangle=\langle\psi,\ (V\restriction D_0)^*\exp(-tH)\theta\rangle.$$

Поскольку D_0 — существенная область для V и поскольку V — самосопряженный оператор, $(V \restriction D_0)^* = V$, и потому $\operatorname{Rang} \exp(-tH) \subset D(V)$. Следовательно,

$$H \restriction (\operatorname{Rang} \exp(-tH)) = (H_0 + V) \restriction (\operatorname{Rang} \exp(-tH)).$$

Далее, поскольку H самосопряжен в существенном на области значений $\exp(-tH)$, можно утверждать, что

$$H = [(H_0 + V) \restriction \operatorname{Rang} \exp(-tH)]^- \subset (H_0 + V)^-.$$

По этой причине $(H_0 + V)^-$ — симметрическое расширение самосопряженного оператора H, и потому $H = (H_0 + V)^-$.

Теорема 7.3. *Пусть $V \in V(L_2)$ ограничен снизу. Тогда $H = (H_0 + V)^-$ самосопряжен в существенном на $D(H_0) \cap \cap D(V)$ и для $t > 0$ и $V' \in V(L_2)$*

$$\operatorname{Rang} \exp(-tH) \subset D(H_0) \cap D(V').$$

Доказательство. Пусть

$$F_j(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \text{для } |\lambda| \leqslant j, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и пусть $V_j = F_j(V)$. Тогда $H_j = H_0 + V_j$ — самосопряженные операторы, ограниченные снизу равномерно по j. В силу теоремы Лебега об ограниченной сходимости последовательность V_j сходится в $L_r(Q)$ к V. Поскольку $D \subset L_r(Q)$ для всех $r < \infty$, и V_j, и H_j сходятся на D. Это доказывает условия (1) и (2) предложения 7.1. Для проверки (4) достаточно взять $D_0 = L_\infty(Q)$, тогда как (5) следует из включения

$$\operatorname{Rang} \exp(-tH_j) \subset D(H_0) = D(H_0) \cap D(V_j).$$

Лемма 7.4. *Последовательность $F_j(V') \exp(-tH_j)$ сходится по норме для $t > 0$ и $V' \in V(L_2)$.*

Эта лемма дает условия (3) и (6), и, более того, для любого $\Psi \in L_\infty(Q)$ из нее следует, что

$$\begin{aligned}\langle \Psi, \lim_j F_j(V') \exp(-tH_j)\,\theta\rangle &= \langle \Psi, (V' \restriction D_0)^* \exp(-tH)\,\theta\rangle = \\ &= \langle \Psi, V' \exp(-tH)\,\theta\rangle.\end{aligned}$$

А это означает, что $\operatorname{Rang} \exp(-tH)$ содержится в $D(V')$ и доказывает теорему.

Доказательство леммы 7.4. Формула Дюамеля утверждает, что

$$\exp(-tH_j) - \exp(-tH_l) = -\int_0^t \exp(-sH_j)\,\delta V \exp[-(t-s)H_l]\,ds, \tag{7.1}$$

где
$$\delta V = H_j - H_l = V_j - V_l.$$

Пусть $j \leqslant l$. Для неотрицательных векторов θ и Ψ
$$|\langle\theta, [\exp(-tH_j) - \exp(-tH_l)]\Psi\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant t \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \langle\exp(-sH_j)\theta, |\delta V| \exp[-(t-s)H_l]\Psi\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \text{const} \sup_s \langle\exp(-sH_0)\theta, |\delta V| \exp[-(t-s)H_0]\Psi\rangle \leqslant$$
$$\leqslant j^{-1} \text{const} \sup_s \langle\theta, \exp(-sH_0)V^2 \exp[-(t-s)H]\Psi\rangle \leqslant$$
$$\leqslant j^{-1} \text{const} \sup_s \|\theta\| \|\Psi\| \|\exp(-sH_0)V^2 \exp[-(t-s)H_0]\|,$$

где использовались следствие 6.3 и неравенство $|\delta V| \leqslant j^{-1}V^2$. Поскольку любой вектор x есть линейная комбинация четырех неотрицательных векторов x_i, $\|x_i\| \leqslant \|x\|$,
$$\|e^{-tH_j} - e^{-tH_l}\| \leqslant j^{-1} \text{const} \sup_s \|e^{-sH_0}V^2 e^{-(t-s)H_0}\|.$$

Аналогично
$$\|F_j(V')e^{-tH_j} - F_l(V')e^{-tH_l}\| \leqslant$$
$$\leqslant j^{-1} \text{const} \sup_s \|(1+V'^2)e^{-sH_0}V^2 e^{-(t-s)H_0}\| +$$
$$+ j^{-1} \text{const} \|(V')^2 e^{-tH_0}\|.$$

Самосопряженные операторы N и H_0 коммутируют, и $N \leqslant m^{-1}H_0$, где m — масса из (3.1). Эти свойства с учетом теоремы 4.2 ведут к тому, что
$$\|(V')^2 e^{-tH_0}\| \leqslant \|(V')^2 (N+I)^{-n}\| \|(N+I)^n e^{-tH_0}\| < \infty$$
при условии, что $\deg V$, $\deg V' \leqslant n$. Если $t - s > t/2$, то
$$\|(1+V'^2)e^{-sH_0}V^2 e^{-(t-s)H_0}\| \leqslant (1+V'^2)(N+I)^{-n}\| \times$$
$$\times \|e^{-sH_0}\| \|(N+I)^n V^2 (N+I)^{-2n}\| \|(N+I)^{2n} e^{-tH_0/2}\| < \infty$$
в силу следствия 4.3. Если $s > t/2$, можно использовать множитель $\exp(-sH_0)$ для компенсации степеней $N+I$ и таким образом завершить доказательство.

Теорема 7.5. *Оператор $H(g) = (H_0 + H_I(g))^-$ самосопряжен в существенном на $D(H_0) \cap D(H_I(g))$, ограничен снизу и для $t > 0$ и $V' \in V(L_2)$*
$$\text{Rang}\, e^{-tH} \subset D(H_0) \cap D(V').$$

Доказательство. Пусть $j = \varkappa$, $H_j = H(g, \varkappa)$. Проверим условия (1)—(6) предложений 7.1 и 7.2. Проверка условий (2), (4), (5) тривиальна. Докажем (1). Модификация этого доказательства для проверки (3) и (6) проводится стандартным образом и похожа на доказательство сходимости $V' \exp(-tH_j)$.

Наше доказательство (1) будет представлять собой вариант доказательства, развитого применительно к φ_3^4-модели, приспособленный к случаю двумерного пространства-времени. Мы исследуем n-й порядок разложения Дюамеля и для упрощения выкладок используем хронологические произведеиия. Например, подынтегральное выражеиие из (7.1) представляется в виде

$$\left(\exp\left(-\int_0^t H(\sigma, s)\,d\sigma\right)\delta V(s)\right)_+,$$

где

$$H(\sigma, s) = \begin{cases} H_j & \text{при} \quad \sigma \leqslant s, \\ H_l & \text{при} \quad \sigma \geqslant s \end{cases}$$

и $\delta V(s)$ означает δV в момент времени s. Индекс $+$ обозиачает антихронологическое упорядочивание (сомножители, отвечающие более ранним времеиам, стоят левее сомножителей, отвечающих более поздним временам).

Пусть $\varkappa_\nu = \exp(\nu^{2/p})$, где p — степень полинома P в H_l. Пусть

$$h_\nu = \begin{cases} H(g, \varkappa_\nu), & \text{если} \quad \varkappa_\nu \leqslant \varkappa, \\ H(g, \varkappa), & \text{если} \quad \varkappa_\nu \geqslant \varkappa, \end{cases}$$

и $\delta h_\nu = H(g, \varkappa) - H(g, \varkappa_\nu)$. Интегрируя (7.1), получаем

(7.2) $$\exp(-tH(g, \varkappa)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int \left[\exp\left(-\int_0^t H(\sigma, s)\,d\sigma\right) \prod_{\nu=1}^{n} \delta h_\nu(s_\nu)\right]_+ ds,$$

где интегрирование по ds идет по области

$$0 \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant t,$$

и $H(\sigma, s) = h_\nu$, если $s_{\nu-1} \leqslant \sigma \leqslant s_\nu$. Ряд обрывается для $\varkappa_\nu \geqslant \varkappa$.

Далее, используем оценку

(7.3) $$|\delta h_\nu| \leqslant \varkappa_\nu^{-1/4} + \varkappa_\nu^{1/4}(\delta h_\nu)^2 \equiv f_\nu.$$

Тогда для неотрицательных векторов θ, Ψ в силу следствия 6.3 будем иметь, что

$$(7.4)\qquad \left|\left\langle \theta, \left[\exp\left(-\int_0^t H(\sigma, s)\, d\sigma\right)\prod_{\nu=1}^n \delta h_\nu(s_\nu)\right]_+ \Psi\right\rangle\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|\theta\|\,\|\Psi\|\, e^{tO(n)} \left\|\left[\exp\left(-\int_0^t H_0\, d\sigma\right)\prod_{\nu=1}^n f_\nu(s_\nu)\right]_+\right\|,$$

поскольку $-O(n) \leqslant H_I(g, \varkappa_\nu)$ при $\nu \leqslant n$.

Каждое f_ν есть сумма ограниченного числа виковых мономов: $f_\nu = \sum_{l=1}^{L} d_{\nu, l}$. Учитывая определение (7.3) и используя неравенство Шварца, L_2-норму ядра $d_{\nu, l}$ можно оценить посредством L_2-норм ядер δh_ν. Поскольку L_2-норма ядра $(\delta h_\nu)^2$, входящего в (7.3), ограничена величиной $O\left(\varkappa_\nu^{-1+\varepsilon}\right) \leqslant O\left(\varkappa_\nu^{-1/2}\right)$, ядро $d_{\nu, l}$ в силу предложения 5.8 ограничено величиной $O\left(\varkappa_\nu^{-1/4}\right)$. Поэтому в силу следствия 4.3

$$(7.5)\qquad \left\|d_{\nu, l}(N+I)^{-p}\right\| \leqslant O\left(\varkappa_\nu^{-1/4}\right) = \exp\left(-\frac{1}{4}\nu^{2/p}\right).$$

Максимальная длина временных интервалов $s_j - s_{j-1}$ в хронологическом произведении равна по крайней мере $t/(n+1)$, поскольку общее число таких интервалов равно $n+1$, а общая длина их суммы равна t. Подставим в (7.4) оценку

$$(N+I)^p (N+(1+2p)I)^p \ldots (N+(1+(n-1)2p)I^p \leqslant$$
$$\leqslant (2p)^{np}(n-1)!\,(N+I)^{np}$$

и обратную ей. Использовав соотношение $(N+\alpha I)^{-p}W = W \times (N+(\alpha+m-n)I)^{-p}$, уберем обратные степени, получив в каждом временном интервале множитель $(N + (1+\alpha)I)^{-p}$, $\alpha \geqslant 0$. Это дает оценку

$$\left\|\left[\exp\left(-\int_0^T H\, d\sigma\right)\prod_{\nu=1}^n f_\nu(s_\nu)\right]_+\right\| \leqslant$$

$$\leqslant (4Lp)^{np}(n!)^p \prod_{\nu=1}^n \varkappa_\nu^{-1/4} \left\|N^{pn}\exp(-tH_0/(n+1))\right\| \leqslant M^n (n!)^{3p} \prod_{\nu=1}^n \varkappa_\nu^{-1/4}$$

с некоторой константой M. Произведение

$$\prod_{\nu=1}^n \varkappa_\nu^{-1/4} = \exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^n \nu^{2/p}\right) = \exp\left(-O\left(n^{1+2/p}\right)\right)$$

быстро сходится к нулю и доминирует среди других множителей. Подставляя эти соотношения в (7.4) и (7.2), мы получим окончательную равномерную по $\varkappa$ оценку

$$\| e^{-tH(g,\varkappa)} \| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{O(tn)} e^{-O(n^{1+2/p})}.$$

8. Локальные алгебры и автоморфизмы, представляющие группу Лоренца

Хааг и Кастлер сформулировали следующие аксиомы квантовой теории поля. Эти аксиомы не зависят от используемого представления полевых операторов, и потому их можно проверить уже сейчас, используя поля, действующие в пространстве $F = L_2(Q, d_Bq)$ — фоковском пространстве голых частиц, — и не строя полей, действующих в гильбертовом пространстве физических состояний (т. е. в фоковском пространстве физических, или, иначе говоря, in/out-частиц, см. разд. 10).

Аксиомы Хаага — Кастлера таковы:

(a) Каждой ограниченной открытой области $\mathcal{O}$ пространства-времени $\mathbb{R}^2$ отвечает C^*-алгебра $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, содержащая единицу.

(b) Если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, то $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$ (изотония).

(c) Если $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ пространственно подобны (т. е. $(x-y)^2 < 0$ для всех $x \in \mathcal{O}_1$ и $y \in \mathcal{O}_2$), то $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$ и $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$ коммутируют (локальность).

(d) Алгебра $\mathfrak{A}$ всех локальных наблюдаемых, определенная как равномерное замыкание объединения $\bigcup_{\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2} \mathfrak{A}(\mathcal{O})$, *примитивна*, т. е. имеет точное неприводимое представление.

(e) Существует представление $\sigma_{\{a, \Lambda\}}$ неоднородной группы Лоренца $\mathscr{P}^{\uparrow}$ $*$-автоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$, такое, что

$$\sigma_{\{a, \Lambda\}}(\mathfrak{A}(\mathcal{O})) = \mathfrak{A}(\{a, \Lambda\}\mathcal{O}), \tag{8.1}$$

где $\{a, \Lambda\}$ — произвольный элемент группы $\mathscr{P}^{\uparrow}$.

В рассматриваемых нами двумерных бозонных моделях единственными нетривиальными аксиомами являются аксиомы, касающиеся сдвигов по времени (т. е. динамика), и лоренцевы вращения. Использование автоморфизмов эквивалентно употреблению гайзенберговой картины, в котором наблюдаемые представлены операторами, зависящими от времени, а состояния — векторами гильбертова пространства, не изменяющимися с течением времени. В случае квантовой системы с гамильтонианом H гайзенбергова динамика задается формулой

$$A(t) = e^{itH} A(0) e^{-itH},$$

где $A(t)$ — это наблюдаемая, отнесенная к моменту времени t и соответствующая наблюдаемой $A(0)$, отнесенной к нулевому моменту времени. В нашей модели у нас есть локально корректный гамильтониан $H(g)$ и нет глобального гамильтониана, но тем не менее гайзенбергову динамику мы построим. Мы сделаем это, ограничившись рассмотрением наблюдаемых, лежащих только в локальных алгебрах $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, и используя факт конечности скорости распространения возмущения.

Теорема 8.1. *Пусть B — ограниченная открытая область пространства $\mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}$, и пусть g — неотрицательная функция из $L_1 \cap L_2$, равная единице на B_t (определение см. перед теоремой 6.7). Тогда при любом $A \in \mathfrak{A}(B)$*

$$\sigma_t(A) \equiv e^{itH(g)} A e^{-itH(g)}$$

не зависит от g *и* $\sigma_t(A) \in \mathfrak{A}(B_t)$.

Доказательство. Пусть

$$\sigma_t^0(A) = e^{itH_0} A e^{-itH_0},$$

$$\sigma_t^I(A) = e^{itH_I} A e^{-itH_I}.$$

Формула Троттера справедлива для унитарной группы $\exp[it(H_0 + H_I(g))]$. Этот факт приводит к следующему соотношению для соответствующей группы автоморфизмов:

$$\sigma_t(A) = \lim_{n \to \infty} \left(\sigma_{t/n}^{(0)} \sigma_{t/n}^I\right)(A), \tag{8.2}$$

где каждый автоморфизм σ^I отображает алгебру $\mathfrak{A}(B_s)$ в себя и не зависит от g при действии на $\mathfrak{A}(B_s)$, для которой $|s| \leqslant |t|$. Действительно, пусть $\chi(B_s)$ — характеристическая функция B_s. Мы утверждаем, что

$$\sigma_{t/n}^I(C) = \exp\left[i \frac{t}{n} H_I(\chi(B_s))\right] C \exp\left[-i \frac{t}{n} H_I(\chi(B_s))\right] \tag{8.3}$$

для $C \in \mathfrak{A}(B_s)$ и что, кроме того, $\sigma_{t/n}^I(C) \in \mathfrak{A}(B_s)$. Другими словами, автоморфизму σ^I отвечает нулевая скорость распространения возмущения и на $\mathfrak{A}(B_s)$ при $|s| \leqslant |t|$, и он не зависит от g. Поэтому если доказать (8.3), то утверждение теоремы 8.1 будет следовать из (8.2) и (8.3) и теоремы 6.7. Для доказательства (8.3) представим $H_I(g)$ в виде следующей суммы двух коммутирующих самосопряженных операторов:

$$H_I(g) = H_I(\chi(B_s)) + H_I(g[1 - \chi(B_s)]).$$

В силу теоремы 5.6 $\exp(itH_I(\chi(B_s)))\in\mathfrak{A}(B_s)$, и потому этой же алгебре принадлежит правая часть (8.3). С другой стороны, согласно следствию 6.9,

$$\exp(itH_I(g[1-\chi(B_s)]))\in\mathfrak{A}(B_s)',$$

что и доказывает (8.3).

Определение 8.2. Пусть $\mathcal{O}$ — ограниченная открытая область пространства-времени, и для любого момента времени t пусть $\mathcal{O}(t)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x,t\in\mathcal{O}\}$ — временной слой, отвечающий моменту t. В качестве локальной алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ возьмем алгебру фон Неймана, порождаемую множеством

$$\bigcup_s \sigma_s(\mathfrak{A}(\mathcal{O}(s))). \tag{8.4}$$

Теорема 8.3. *Для только что введенных локальных алгебр $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ справедливы все аксиомы Хаага — Кастлера.*

Доказательство. (За исключением аксиомы о лоренцевых поворотах.) Выполнение аксиом (a) и (b) очевидно. Справедливость аксиомы (c) легко установить, используя конечность скорости распространения сигнала, теорему 8.1, локальность при $t=0$ и теорему 6.8. Аксиома (d) формулирует хорошо известное свойство свободного поля (которое мы здесь не будем проверять). Это свойство свободного поля легко переносится в нашу модель с $H_I\neq 0$. Для этого достаточно учесть, что 1) взаимодействующее поле, взятое в нулевой момент времени, совпадает по свободным, 2) поля, взятые в нулевой момент времени, согласно теореме 8.1, порождают $\mathfrak{A}$, 3) определение $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$.

В аксиоме лоренцевой ковариантности (e) сдвиги по времени задаются автоморфизмами σ_t. Пусть $\mathcal{O}+t$ — сдвиг по времени пространственно-временной области $\mathcal{O}$. Тогда $(\mathcal{O}+t)(s)=\mathcal{O}(s-t)$, и потому

$$\sigma_t\Big(\bigcup_s \sigma_s(\mathfrak{A}(\mathcal{O}(s)))\Big)=\bigcup_s \sigma_{s+t}(\mathfrak{A}(\mathcal{O}(s)))=$$
$$=\bigcup_s \sigma_s(\mathfrak{A}(\mathcal{O}(s-t)))=\bigcup_s \sigma_s(\mathfrak{A}((\mathcal{O}+t)(s))).$$

Таким образом, $\sigma_t(\mathfrak{A}(\mathcal{O}))=\mathfrak{A}(\mathcal{O}+t)$, и закон преобразования (8.1) проверен для сдвигов по времени. Поскольку локальные алгебры образуют множество, плотное по норме в алгебре $\mathfrak{A}$, и поскольку автоморфизмы C^*-алгебр сохраняют норму, σ_t подолжается до автоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$.

Для определения автоморфизма σ_x, отвечающего пространственному сдвигу x, рассмотрим

$$P = \int ka^*(k)\,a(k)\,dk$$

и зададим действие σ_x соотношением

$$\sigma_x(A) = e^{-ixP}Ae^{ixP}. \tag{8.5}$$

Тогда

$$e^{-ixP}\varphi(y)\,e^{ixP} = \varphi(x+y),$$
$$e^{-ixP}\pi(y)\,e^{ixP} = \pi(x+y).$$

В таком случае, используя нижеследующую лемму, доказательство которой мы оставляем читателю в качестве простого упражнения, можно завершить проверку всех аксиом, кроме аксиомы о лоренцевых поворотах.

Лемма 8.4. *Справедливо равенство* $\sigma_x(\mathfrak{A}(\mathcal{O})) = \mathfrak{A}(\mathcal{O}+x)$. *Автоморфизм* σ_x *продолжается до* $*$*-автоморфизма алгебры* $\mathfrak{A}$, *и отображение* $\langle x, t\rangle \to \sigma_x\sigma_t$ *определяет двухпараметрическую абелеву группу автоморфизмов алгебры* $\mathfrak{A}$.

Построение автоморфизмов, представляющих полную группу Лоренца, мы проведем в четыре этапа. Первый состоит в построении методом теоремы 7.5 самосопряженного локально корректиого генератора лоренцевых поворотов. Такой генератор определяет локально корректную унитарную группу и отвечающую ей группу автоморфизмов. Второй этап будет состоять в проверке того, что поле $\varphi(x, t)$, рассматриваемое как билинейная форма на подходящей области определения, преобразуется построенной унитарной группой локально корректным образом. Третий этап состоит в демонстрации того, что преобразование алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ также корректно. Наконец, последний этап — построение полной группы лоренцевых автоморфизмов из локально корректных кусков, построенных на первых трех этапах. Этот последний шаг не труден.

Наметим прежде всего ход рассуждений первого этапа. Пусть $H_0(x)$ — это подынтегральное выражение из (4.17), так что $H_0 = \int H_0(x)\,dx$. Формальное выражение для генератора лоренцевых поворотов имеет следующий вид:

$$M = M_0 + M_I = \int xH_0(x)\,dx + \int x : P(\varphi(x)) : dx.$$

Мы будем иметь дело с локальным аналогом этого выражения

$$M(g_1, g_2) = \varepsilon H_0 + H_0(g_1) + H_I(g_2),$$

где $H_0(g_1)=\int H_0(x)g_1(x)\,dx$, $\varepsilon>0$, g_1 и g_2 — неотрицательные функции из C_0^∞. На втором этапе мы потребуем большего, например чтобы $\varepsilon+g_1(x)=x$ и $g_2(x)=x$ в некоторой локальной области пространства. Эта область будет содержаться в интервале $[\varepsilon,\infty)$. Общие пространственно-временные области мы будем рассматривать только на четвертом этапе.

Хотя каждый из генераторов M, M_0 и M_I неограничен снизу, $M(g_1,g_2)$, как мы сейчас увидим, полуограничен, и потому для его изучения можно использовать метод гл. 7. Так же как и при доказательстве теоремы 4.4, начнем с разложения $H_0(g_1)$ в сумму диагональной и недиагональной частей:

$$H_0(g_1)=\int v_D(k,\,l)\,a^*(k)\,a(l)\,dk\,dl+\\+\int v_{0D}(k,\,l)\,[a^*(k)\,a^*(l)+a(-k)\,a(-l)]\,dk\,dl=\\=H_0^D(g_1)+H_0^{0D}(g_1),$$

где

$$v_D(k,\,l)=\frac{1}{2\cdot 2\pi}\,[\mu(k)\,\mu(l)+kl+m^2]\,\frac{\tilde g_1(-k+l)}{\sqrt{\mu(k)\,\mu(l)}},$$
$$v_{0D}(k,\,l)=\frac{1}{4\cdot 2\pi}\,[-\mu(k)\,\mu(l)-kl+m^2]\,\frac{\tilde g_1(-k-l)}{\sqrt{\mu(k)\,\mu(l)}}.$$

Воспользуемся следующими свойствами этого разложения:

Лемма 8.5. (a) $V_{0D}\in L_2(\mathbb{R}^2)$.

(b) *v_D — ядро неотрицательного оператора, а $\varepsilon\mu(k)\,\delta(k-l)+\beta v_D$ — ядро положительного самосопряженного оператора при всех $\beta\geqslant 0$.*

Доказательство. (a) Доказывается с помощью стандартных вычислений, основанных на том, что $|\tilde g_1(k+l)|\leqslant\leqslant\mathrm{const}\,\mu(k+l)^{-n}$ при любом n и $\mu(k)-|k|=O(|k|^{-1})$ при $k\to\infty$.

(b) Доказывается с помощью последовательного применения критерия Като. Пусть $v_\beta=\varepsilon\mu(k)\,\delta(k-l)+\beta v_D$ и V_β и V_D — операторы, имеющие в качестве ядер v_β и v_D соответственно. V_D — сумма трех членов вида $A^*M_{g_1}A$, причем в конфигурационном пространстве M_{g_1} — оператор умножения на $g_1\geqslant 0$. По этой причине $V_D\geqslant 0$. Более того, для достаточно малых и не зависимых от β чисел γ

$$\gamma V_D\leqslant\frac{1}{2}V_0\leqslant\frac{1}{2}(V_0+\beta V_D)=\frac{1}{2}V_\beta,$$

так что

$$V_{\beta+\gamma} = V_\beta + \gamma V_D$$

в смысле билинейных форм удовлетворяет критерию Като. Следовательно, если V_β самосопряжен, то таков же и $V_{\beta+\gamma}$ и $D(V_{\beta+\gamma}^{1/2}) = D(V_\beta^{1/2})$. В таком случае с помощью конечной индукции, начинающейся с равенства $V_0 = V_0^*$, легко доказать самосопряженность V_β для всех $\beta \geqslant 0$.

Лемма 8.6. *$H_0^D(g_1)$ — неотрицательный оператор, а $\varepsilon H_0 + \beta H_0^D(g_1)$ — самосопряженный оператор при всех $\beta > 0$.*

Доказательство. Будем понимать сумму в смысле билинейных форм (это позволит избежать несколько более сложных оценок, необходимых для определения суммы рассматриваемых операторов). Можно использовать лемму 8.5 и свойства операции вторичного квантования, переводящей, например, V_D в $H_0^D(g_1)$, или повторить ход рассуждений, использованных при доказательстве леммы 8.5.

Пусть

$$M(\beta) = \varepsilon H_0 + H_0^D(g_1) + \beta H_0^{OD}(g_1) + H_I(g_1).$$

Тогда аргументы, аналогичные тем, что использовались в разд. 7 при изучении $H(g)$, показывают, что $M(0)$ — самосопряженный, полуограниченный оператор. Далее опять можно перейти от $M(0)$ к $M(1) = M(g_1, g_2)$, последовательно используя критерий Като для билинейных форм. В силу леммы 8.5 и следствия 4.3

$$\pm \gamma H_0^{OD}(g_1) \leqslant (\varepsilon m_0/2) N + I \leqslant (\varepsilon/2) H_0 + I$$

для достаточно малых γ. Мы утверждаем, что

$$(\varepsilon/2) H_0 \leqslant \frac{3}{4} M(\beta) + c(\beta),$$

где $c(\beta)$ — зависящая от β константа, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. С помощью этого утверждения мы доказываем по индукции, что $M(\gamma)$, $M(2\gamma)$, ... и $M(1) = M(g_1, g_2)$ самосопряжены. Более того,

$$D(M(g_1, g_2)^{1/2}) = D(M(0)^{1/2}) = D(H_D^{1/2}).$$

Сделанное утверждение эквивалентно утверждению об ограниченности снизу суммы

$$\frac{\varepsilon}{3} H_0 + H_0^D(g_1) + \beta H_0^{OD}(g_1) + H_I(g_2).$$

С помощью методов разд. 7 легко убедиться, что сумма

$$\frac{\varepsilon}{6} H_0 + (1-\beta) H_0^D(g_1) + H_I(g_2)$$

полуограничена и потому достаточно рассмотреть остаток

$$\frac{\varepsilon}{6} H_0 + \beta H_0(g_1).$$

Для доказательства полуограниченности этого оператора введем в $H_0(g_1)$ импульсное обрезание. Вклад от области малых импульсов полуограничен (ср. с разд. 5). Вклад от больших импульсов разбивается на сумму диагональной части, которая неотрицательна (ср. с леммой 8.5), и недиагональной части, ядро которой лежит в L_2. При достаточно большом обрезающем импульсе это ядро имеет малую норму, и в таком случае недиагональная часть в силу следствия 4.3 мажорируется величиной $(\varepsilon/6) H_0$. Это завершает построение локально корректного самосопряженного генератора лоренцевых вращений (см. также [Ca Ja], [Ro 3], [Kl]).

Второй шаг значительно труднее и состоит в проверке уравнения

$$(tD_x + xD_t)\varphi = [M, \varphi]. \tag{8.6}$$

Здесь поле $\varphi(x, t) = \exp(itH(g))\varphi(x)\exp(-itH(g))$ берется в ненулевой момент времени и перед вычислением коммутатора надо прокоммутировать M с $\exp(itH(g))$. Коммутатор $[M, \exp(itH(g))]$ нельзя выразить явно через мономы Вика. Однако часть $[M, \exp(itH(g))]$, которую нельзя вычислить явно, благодаря локализации не дает вклада в $[M, \varphi]$. Вместе с тем последовательные вычисления, необходимые для проверки (8.6), весьма громоздки, и за подробностями мы отсылаем читателя к работам [Ca Ja 70] и [Ro 3].

Основа третьего этапа — ковариантное определение локальных алгебр $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Пусть $f \in D(\mathcal{O})$ — класс вещественных бесконечно дифференцируемых функций с носителями в $\mathcal{O}$. и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — вещественные числа. Рассмотрим

$$\varphi(f) = \int \varphi(x, t) f(x, t)\, dx\, dt, \tag{8.7}$$

$$\varphi(f, t) = \int \varphi(x, t) f(x, t)\, dx, \tag{8.8}$$

$$\alpha_1\varphi(f, t_1) + \ldots + \alpha_n\varphi(f, t_n), \tag{8.9}$$

$$\pi(f, t) = \int \pi(x, t) f(x, t)\, dx. \tag{8.10}$$

Для функции g, совпадающей с единицей на достаточно большом множестве (в области влияния множества $\mathcal{O}$), интегрирование по времени в (8.7) является сильно сходящейся операцией, и все четыре вышеприведенных оператора определены на $D(H(g))$ и симметричны на этой области.

Теорема 8.7. *Операторы* (8.7)—(8.10) *самосопряжены в существенном на любой области, существенной для оператора* $H(g)^{1/2}$.

Эта теорема открывает возможность для ковариантного определения алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Действительно, если последовательность $\{A_n\}$ самосопряженных операторов сильно сходится к самосопряженному оператору A на существенной для A области, то унитарные операторы $\exp(itA_n)$ сильно сходятся к $\exp(itA)$ [Ка 66]. Используя этот факт, можно показать, что операторы (8.7) и (8.9) порождают одну и ту же алгебру фон Неймана $\mathfrak{A}_1(\mathcal{O})$ и что $\mathfrak{A}_1(\mathcal{O})\supset\mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Для доказательства обратного включения $\mathfrak{A}(\mathcal{O})\supset\mathfrak{A}_1(\mathcal{O})$ напомним, что самосопряженный оператор A коммутирует с ограниченным оператором C, если $CD\subset D(A)$ для некоторой существенной для A области D и $CA=AC$ на D. Эти требования эквивалентны коммутативности C со всеми ограниченными функциями от A Выберем $D=D(H(g))$. Если C коммутирует со всеми операторами вида (8.8), он коммутирует на $D(H(g))$ и со всеми операторами вида (8.9). Следовательно, $\mathfrak{A}(\mathcal{O})'\subset\subset\mathfrak{A}_1(\mathcal{O})'$, и потому

$$\mathfrak{A}_1(\mathcal{O})=\mathfrak{A}_1(\mathcal{O})''\subset\mathfrak{A}(\mathcal{O})''=\mathfrak{A}(\mathcal{O}).$$

Это доказывает следующее утверждение, позволяющее дать ковариантное определение алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$.

Теорема 8.8. *Алгебра* $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ — *алгебра фон Неймана, порождаемая ограниченными функциями от операторов вида* (8.8).

Доказательство теоремы 8.7. Рассмотрим сначала взятые в фиксированный момент операторы (8.8) и (8.10). Используя унитарность $V(t)=\exp(itH(g))$, преобразуем $\varphi(f,t)$ и $\pi(f,t)$ в операторы $\varphi(f,0)$ и $\pi(f,0)$. Поскольку $V(t)$ преобразует одну существенную для $H(g)^{1/2}$ область в другую, можно рассматривать только случай $t=0$. Для $A=\varphi(f,0)$ или $\pi(f,0)$ имеем, что

$$(8.11)\qquad \|A[H(g)-\zeta]^{1/2}\|\leqslant$$
$$\leqslant\|A(N+I)^{-1/2}\|\|(N+I)^{1/2}(H_0+I)^{-1/2}\|\|(H_0+I)^{1/2}[H(g)-\zeta]^{-1/2}\|.$$

Первый множитель в правой части (8.11) ограничен в силу следствия 4.3, второй — в силу того, что $N\leqslant m^{-1}H_0$, и того, что N и H_0 коммутируют. Для оценки третьего множителя воспользуемся полуограниченностью, доказанной в теореме 7.5. Пусть

$$D_1 = D(H_0) \cap D(H_I(g)),$$
$$D_{1/2} = [H(g) - \zeta]^{1/2} D_1.$$

Поскольку D_1 — существенная область для $H(g)$ (теорема 7.5), D_1 — существенная область и для $H(g)^{1/2}$, и потому $D_{1/2}$ плотна в F. Заменяя g на $2g$ и пользуясь теоремой 7.5, получаем, что на $D_1 \times D_1$

$$0 \leqslant \frac{1}{2}(H_0 + H_I(2g) + \text{const}).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} H_0 \leqslant H_0 + H_I(g) + \text{const},$$

и потому на $D_{1/2} \times D_{1/2}$

$$0 \leqslant [H(g) - \zeta]^{1/2} H_0 [H(g) - \zeta]^{1/2} \leqslant \text{const}$$

для всех вещественных и достаточно отрицательных ζ. В силу плотности $D_{1/2}$ заключаем, что третий множитель в (8.11) ограничен.

Пусть теперь D_0 — любая область, существенная над $H(g)^{1/2}$. Из (8.11) вытекает, что

$$(A \restriction D_0)^- = \left(A \restriction D\left(H(g)^{1/2}\right)\right)^- \supset (A \restriction D)^-,$$

где D — область, введенная в разд. 3. В силу леммы 5.4 оператор A самосопряжен в существенном на D, а потому и на D_0.

Рассмотрим теперь усредненные по времени операторы (8.7) и (8.9), которые мы опять обозначим через A. Интегрируя (8.11) по t, можно получить оценку вида

$$\|A[H(g) - \zeta]^{-1/2}\| + \|\dot{A}[H(g) - \zeta]^{-1/2}\| \leqslant \text{const}, \tag{8.12}$$

где $\dot{A} = i[H(g), A]$ определяется как билинейная форма, действующая на $D(H(g)) \times D(H(g))$. Теорема 8.7 теперь вытекает из следующего общего утверждения:

Теорема 8.9. *Пусть H — положительный самосопряженный оператор, а A — определенный на $D(H^{1/2})$ симметрический оператор. Предположим*, что

$$\|AR^{1/2}\| + \|\dot{A}R^{1/2}\| \leqslant \text{const}, \tag{8.13}$$

где $R = H + I$ и $\dot{A} = i[H, A]$. Тогда A самосопряжен в существенном на любой области, существенной для $H^{1/2}$.

Доказательство. Сначала с помощью замечания, сделанного после доказательства предложения 7.1, построим самосопряженное расширение C оператора $A_0=A \restriction D(H)$. Пусть $H=\int \lambda \, dE_\lambda$ — спектральное разложение H, и пусть $C_n = E_n A_0 E_n$. Оператор C_n в силу (8.13) ограничен и симметричен, а потому и самосопряжен. Мы утверждаем, что $\|(C_n - A)R\| \to 0$. Тогда, убедившись в справедливости условия (2) предложения 7.1, можно будет заключить, что на плотной области $D(H)$ последовательность $C_n \to A_0$ в сильной топологии. Для доказательства сделанного утверждения воспользуемся тождеством

$$RA_0 = AR + iR \cdot \dot{A}R,$$

справедливым на $D(H)$. Имеем

$$\begin{aligned} \|(C_n - A)R\| &\leqslant \|E_n A(1-E_n)R\| + \|(I-E_n)AR\| \leqslant \\ &\leqslant \|AR^{1/2}\| \|(I-E_n)R^{1/2}\| + \|RA(I-E_n)AR^{1/2}\| \leqslant \\ &\leqslant O(n^{-1/2}) + [\|RA(I-E_n)RA\| + \|RA(I-E_n)R\dot{A}R\|]^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant O(n^{-1/2}) + O(n^{-1/4}) \to 0. \end{aligned}$$

Пусть $K_n = (C_n \pm iy)^{-1}$. Покажем, что $\|(H+I)K_nR\| \leqslant 1$ для достаточно больших y. Операторы C_n и K_n оставляют область определения H инвариантной, и потому для любого вектора $\theta \in F$ вектор $K_nR\theta = \Psi \in D(H)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \Psi, (C_n \mp iy)(H+I)^2(C_n \pm iy)\Psi\rangle &\geqslant \\ \geqslant y^2 \langle \Psi, (H+I)^2\Psi\rangle - y|\langle \Psi, (H+I)\dot{C} + \dot{C}(H+I)\Psi\rangle| &\geqslant \\ \geqslant (y^2 - \mathrm{const})\langle \Psi, (H+I)^2\Psi\rangle. \end{aligned}$$

Для y^2 достаточно больших $y^2 - \mathrm{const} \geqslant 1$, и

$$\langle \theta, RK_n^* (H+I)^2 K_n R\theta\rangle \leqslant \|\theta\|^2,$$

как и утверждалось.

Следующий шаг — это доказательство сходимости резольвент K_n. Для $\Psi \in D(H)$ имеем

$$\begin{aligned} \|(K_n - K_m)\Psi\| &= \|K_n(C_m - C_n)K_n\Psi\| \leqslant \\ &\leqslant \|K_n\| \|(C_n - C_m)R\| \|(H+I)K_mR\| \|(H+I)\Psi\|. \end{aligned}$$

Второй множитель стремится к нулю при $n \to \infty$, а остальные при этом ограничены. Следовательно, резольвенты сходятся сильно. В силу предложения 7.1 и замечания после него $K = \lim_{n\to\infty} K_n$ — резольвента некоторого самосопряженного оператора C. Легко увидеть, что $C \supset A_0$, поскольку для $\theta \in D(H)$ и $\Psi \in F$

$$\langle K\Psi, (C \pm iy)\theta\rangle = \langle \Psi, \theta\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle K_n\Psi, (C_n \pm iy)\theta\rangle = \\ = \langle K\Psi, (A_0 \pm iy)\theta\rangle.$$

И так как область значений K плотна, то $(C \pm iy)\theta = (A_0 \pm iy)\theta$.

Пусть $\theta \in D(C)$. Покажем, что $\theta \in D(A_0^-)$ и что $C\theta = A_0'(\theta)$. Это будет означать, что A самосопряжен в существенном на $D(H)$, а, поскольку $AR^{1/2}$ — ограниченный оператор, это означает самосопряженность в существенном на любой области, существенной для $H^{1/2}$.

Пусть $\chi = (C_n - iy)\theta$ и $P_j = (1 + H/j)^{-1}$. Тогда $\theta_j = P_j\theta \in D(H) = D(A_0)$ и $\theta_j \to \theta$. Более того,

$$(A_0 - iy)\theta_j = \lim_{n\to\infty} (C_n - iy) P_j K_n \chi,$$

поскольку $K_n\chi \to K\chi = \theta$, если учесть, что $\|(C_n - iy)R\| \to 0$ и что $(H + I)P_j$ — ограниченный оператор. Однако

$$\|(C_n - iy)P_jK_n\chi - P_j\chi\| = \|(C_n - iy)[P_j, K_n]\chi\| = \\ = j^{-1}\|(C_n - iy)K_nP_j\dot{C}_nP_jK_n\chi\| \leqslant j^{-1}\|C_nP_j\|\|K_n\chi\| = \\ = O(j^{-1})\|\dot{C}_nR^{1/2}\|\|(H+I)^{1/2}P_j\| = O(j^{-1})\,O(j^{1/2}) = O(j^{-1/2}).$$

Следовательно,

$$\|(A_0 - iy)\theta_j - \chi\| \leqslant \limsup_n \|(C_n - iy)\theta_jK_n\chi - \chi\| \leqslant \\ \leqslant \|(P_j - I)\chi\| + O(j^{-1/2}).$$

Таким образом, $\theta \in D(A_0^-)$ и

$$A_0^-\theta = \chi + iy\theta = C\theta.$$

Часть III

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ

9. Локально нормальные представления наблюдаемых

Локальные алгебры, построенные в разд. 8, не действуют в гильбертовом пространстве физических частиц. Состояния из физического гильбертова пространства, как и состояния в реальных лабораторных условиях, имеют простое асимптотическое описание при $|t| \to \infty$. В таких условиях реально наблюдаются изолированные частицы или группы, представляющие собой связанные состояния нескольких элементарных частиц. В силу того что эти образования отделены друг от друга большими расстояниями, ни элементарные частицы, ни связанные состояния не взаимодействуют друг с другом и потому асимптотически ведут себя как свободные частицы. В настоящем разделе мы изложим весь подготовительный материал, необходимый для построения физического гильбертова пространства F_{ren}, проводимого в разд. 10. Для векторов из пространства F_{ren} будет справедливо описанное выше асимптотическое поведение состояний.

Начнем с формулировки (без доказательств) трех общих утверждений.

Теорема 9.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — C^*-алгебра и ω — состояние на ней. Существует гильбертово пространство $\mathcal{H}_\omega$, представление π_ω алгебры $\mathfrak{A}$ операторами на $\mathcal{H}_\omega$ и вектор $\Omega \in \mathcal{H}_\omega$, такие, что*

$$\omega(A) = \langle \Omega, \pi_\omega(A)\,\Omega\rangle.$$

Множество векторов $\pi_\omega(\mathfrak{A})\,\Omega$ плотно в $\mathcal{H}_\omega$.

Теорема 9.2. *Пусть $\mathfrak{A}$ и ω — те же, что и выше, и пусть $\{\sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — группа автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$. Предположим, что $\omega(\sigma_\lambda(A)) = \omega(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$ и всех $\lambda \in \Lambda$. Тогда для каждого λ существует единственный унитарный оператор U_λ, такой, что $U_\lambda\Omega = \Omega$ и*

$$U_\lambda \pi_\omega(A)\,U_\lambda^* = \pi_\omega(\sigma_\lambda(A)).$$

Более того, соответствие $\lambda \to U_\lambda$ является представлением группы Λ.

Теорема 9.3. *Пусть ω — состояние на алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$. Следующие четыре условия эквивалентны:*

(i) *Существует такой ядерный оператор T, что $\omega(A) = \operatorname{Tr}(TA)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$.*

(ii) *Состояние ω — выпуклая (возможно, бесконечная) комбинация векторных состояний вида $\omega_\theta(A) = \langle \theta, A\theta\rangle$.*

(iii) *Состояние ω ультраслабо непрерывное.*

(iv) *Если $\{A_a\}$ — монотонно возрастающая ограниченная сверху направленность операторов, то $\sup\limits_a \omega(A_a) = \omega(\sup\limits_a A_a)$.*

Определение. Состояние ω, о котором идет речь в теореме 9.3, называется нормальным.

Замечание. Оператор T из условия (i) теоремы 9.3 называется матрицей плотности состояний ω.

Следствие 9.4. *Пусть $\{\omega_n\}$ — равномерно сходящаяся направленность нормальных состояний на алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$. Предел этих состояний — также нормальное состояние.*

Доказательство. Пусть ω — предельное состояние, $\{A_\alpha\}$ — монотонная направленность операторов, такая же, как в условии (iv) теоремы 9.3, и $A = \sup\limits_\alpha A_\alpha$. Тогда

$$\omega(A - A_\alpha) = (\omega - \omega_n)(A) + \omega_n(A - A_\alpha) + (\omega_n - \omega)(A_\alpha).$$

Поскольку мы знаем оценку величин $\|A\|$ и $\sup\limits_\alpha \|A_\alpha\|$, можно утверждать, что если n достаточно велико, то первый и третий члены меньше $\varepsilon/3$. Второй член при фиксированных n и больших α также может быть сделан меньше $\varepsilon/3$.

Теорема 9.5. *Если ω — нормальное состояние на $\mathfrak{A}$, то π_ω — нормальное (т. е. сохраняющее ультраслабую топологию) представление.*

Доказательство. Пусть θ_n — последовательность векторов из $\mathscr{H}_\omega$. Если $\theta_n = \pi_\omega(C_n)\Omega$, $C_n \in \mathfrak{A}$, то ультраслабая непрерывность функционала

$$\mathfrak{A} \ni A \to \langle \theta_n, \pi_\omega(A)\theta_n \rangle = \omega(C_n^* A C_n)$$

следует из аналогичного свойства $\omega \restriction \mathfrak{A}$. Но, поскольку векторы $\pi_\omega(C_n)\Omega$ образуют множество, плотное в $\mathscr{H}_\omega$, нормальность рассматриваемого функционала для произвольного θ_n вытекает из следствия 9.4. Таким образом, функционал

$$A \to \sum_{n=1}^{j} \langle \theta_n, \pi_\omega(A)\theta_n \rangle$$

нормален, и при условии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\theta_n\|^2 < \infty$ этот же вывод справедлив и в случае бесконечных сумм. Отсюда следует нормальность π_ω.

Обратимся теперь к C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ квазилокальных наблюдаемых. Состояние ω на $\mathfrak{A}$ называется локально нормальным, если сужение $\omega \restriction \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ нормально для каждой локальной подалгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Аналогично и представление π_ω алгебры $\mathfrak{A}$ называется локально нормальным, если нормально каждое представление $\pi_\omega \restriction \mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Последовательность (или направленность) $\{\omega_n\}$ состояний называется локально нормально сходящейся, если для каждой области $\mathcal{O}$ равномерно сходится последовательность (направленность) $\{\omega_n \restriction \mathfrak{A}(\mathcal{O})\}$. В этом случае $\{\omega_n\}$ сходится в w^*-топологии к состоянию ω на $\mathfrak{A}$. Это следует из того факта, что $\|\omega_n\| = 1$, и того, что $\{\omega_n\}$ сходится в w^*-топологии на плотном в равномерной топологии подмножестве $\bigcup_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}(\mathcal{O})$.

Замечание. Локально нормальный предел локально нормальных состояний — локально нормальное состояние. Локально нормальное состояние ω дает локально нормальное представление π_ω. Первое из этих утверждений вытекает из следствия 9.4. Второе — следствие теоремы 9.5.

Отметим, что алгебра $\mathfrak{A}$ обладает следующими двумя свойствами.

(P1) $\mathfrak{A}$ — замыкание по норме возрастающей последовательности сепарабельных факторов $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$.

(P2) В случае $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1$ пересечение $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \cap \mathfrak{A}(\mathcal{O})'$ содержит фактор типа I_∞.

C^*-алгебры с аналогичными свойствами изучены Хааг, Кадисон и Кастлер [Ha K K]. По их терминологии C^*-алгебра называется секвенциальной воронкой, если она является равномерным замыканием возрастающей последовательности факторов.

Мы будем рассматривать алгебры $\mathfrak{A}(B)$, взятые в нулевой момент времени (разд. 6), и для областей пространства $B_n = (-n, n)$. Араки [Ar] доказал свойство (P1).

Теорема 9.6. *Пусть B — интервал. Алгебра $\mathfrak{A}(B)$ — фактор.*

Доказательство. Дальше мы докажем, что

$$(\mathfrak{A}(B) \cup \mathfrak{A}(B'))'' = B(F). \tag{9.1}$$

В таком случае $\mathfrak{A}(B)' \cap \mathfrak{A}(B')' = \{\lambda I\}$. Однако $\mathfrak{A}(B) \subset \mathfrak{A}(B')'$ и, следовательно,

$$\mathfrak{A}(B)' \cap \mathfrak{A}(B) = \{\lambda I\},$$

т. е. $\mathfrak{A}(B)$ — фактор.

Доказательство (9.1) содержится в следующих двух предложениях.

Предложение 9.7. $(\mathfrak{A}(B) \cup \mathfrak{A}(B'))'' = \mathfrak{A}''$.

Доказательство. Пусть χ_B — характеристическая функция интервала B. Для любой пробной функции f имеем

$$f = \chi_B f + (1 - \chi_B) f,$$

где каждое слагаемое можно аппроксимировать в смысле нормы пространства L_2 последовательностью локализованных пробных функций:

$$g_n \to \chi_B f, \qquad \operatorname{supp} g_n \subset B,$$
$$h_n \to (1-\chi_B), \qquad \operatorname{supp} h_n \subset \operatorname{Int} B'.$$

Тогда

$$\exp(i\varphi(g_n))\exp(i\varphi(h_n)) \to \exp(i\varphi(f)),$$

и потому

$$\exp(i\varphi(f)) \in (\mathfrak{A}(B) \cup \mathfrak{A}(B'))''.$$

Ввиду того что ядро π более сингулярно, эти аргументы в общем случае неприменимы к $\exp(i\pi(f))$, но их можно использовать, если ограничиться рассмотрением функций f, обращающихся в нуль в граничных точках a и b интервала $B=(a, b)$. Пусть

$$g_{a,n}(x) = g(n(x-a))f(a),$$

где $g \in C_0^\infty$ и $g(0)=1$. Аналогично определим $g_{b,n}$. Тогда

$$\|\mu_x^{1/2} g_{a,n}\|^2 = |f(a)|^2 \int \mu(k) n^{-2} |\tilde{g}(k/n)|^2 dk =$$
$$= |f(a)|^2 n^{-1} \int \mu(nk) |\tilde{g}(k)|^2 dk \to |f(a)|^2 \int k |\tilde{g}(k)|^2 dk.$$

Пусть L_a обозначает предел в последнем соотношении. Последовательность $\|\mu_x^{1/2}, g_{a,n}\|$ слабо сходится к нулю. На основе всех этих фактов можно утверждать, что

$$\exp(i\pi(g_{a,n})) \to \exp(-L_a/2) \neq 0$$

в слабой операторной топологии. Следовательно, на основе аргументации, высказанной применительно к $\varphi(f)$,

$$\exp(i\pi(f-g_{a,n}-g_{b,n})) \in (\mathfrak{A}(B) \cup \mathfrak{A}(B'))'', \tag{9.2}$$

и потому

$$\exp(i\pi(f)) \in (\mathfrak{A}(B) \cap \mathfrak{A}(B'))''.$$

Предложение 9.8. $\mathfrak{A}'' = B(F)$.

Доказательство. Используем факт цикличности Ω_0 относительно $\mathfrak{A}$ и покажем, что $\mathfrak{A}' = \{\lambda I\}$.

Если $\{e_i\}$ — ортонормированный базис в пространстве пробных функций, то можно доказать, что

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} a^*(e_i^*)\, a(e_i).$$

Пусть

$$N(n) = \sum_{i=1}^{n} a^*(e_i^*)\, a(e_i).$$

Тогда $N(n) \to N$ в сильном смысле на области, существенной для N, и потому $\exp(itN(n)) \to \exp(itN)$ тоже в сильном смысле. Можно показать, что $\exp(itN(n)) \in \mathfrak{A}''$, а тогда и $\exp(itN) \in \mathfrak{A}''$. Воспользуемся далее тем, что Ω_0 отвечает невырожденному нулевому собственному значению оператора N. Поскольку $\mathfrak{A}'$ — алгебра фон Неймана, она порождается своими ортогональными проекторами. Пусть E — проектор в $\mathfrak{A}'$. Если $E\Omega_0 = 0$, то $E\mathfrak{A}\Omega_0 = 0$, а так как $\mathfrak{A}\Omega_0$ плотно в F, то $E = 0$. Если $E\Omega_0 \neq 0$, то $E\Omega_0$ — собственный вектор оператора N с нулевым собственным значением, поскольку для всех $t \in \mathbb{R}$

$$e^{itN} E\Omega_0 = E e^{itN} \Omega_0 = E\Omega_0.$$

Но так как нуль — простое собственное значение, $E\Omega_0$ пропорционально Ω_0. Следовательно, Ω_0 лежит в области значений E, и потому $E\Omega_0 = \Omega_0$. Таким образом, $EA\Omega_0 = AE\Omega_0 = A\Omega_0$ для всех $A \in \mathfrak{A}$, и, поскольку Ω_0 — циклический вектор, $E = I$. Следовательно, $\mathfrak{A}' = \{\lambda I\}$ и $\mathfrak{A}'' = B(F)$.

Для проверки свойства (P2) возьмем из $S_r(\mathbb{R})$ ненулевую функцию f с носителем в $C \subset B'$. Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра фон Неймана, порождаемая операторами вида $\exp(it\varphi(f) + is\pi(f))$. В силу теоремы фон Неймана о единственности представления ККС в случае одной степени свободы $\mathfrak{M}$ — фактор типа I_∞.

Теорема 9.9. *Локально нормальные представления алгебры $\mathfrak{A}$ точны.*

Доказательство. Пусть π — локально нормальное представление. Тогда $(\operatorname{Ker} \pi) \cap \mathfrak{A}(B)$ — ультраслабо замкнутый двухсторонний идеал в $\mathfrak{A}(B)$. Поскольку никакой фактор не может содержать ультраслабо замкнутых двухсторонних идеалов [Di 57, стр. 43, след. 3], сужение $\pi \restriction \mathfrak{A}(B)$ задает взаимно однозначное отображение. Такое представление является изометрией, и это справедливо для каждой области B. В силу свойства (P1) получаем, что π является изометрией на плотной в $\mathfrak{A}$ подалгебре и, следовательно, изометрией на $\mathfrak{A}$.

Замечание. С помощью (P1) и (P2) нетрудно показать, что алгебра $\mathfrak{A}$ проста. Действительно, из (P2) вытекает, что любой ненулевой проектор $E \in \mathfrak{A}(B)$ бесконечен в $\mathfrak{A}(C)$ и потому не может лежать в ядре произвольного представления алгебры $\mathfrak{A}$.

Лемма 9.10. *Гильбертово пространство $\mathscr{H}_\omega$, построенное с помощью локально нормального состояния ω на $\mathfrak{A}$, сепарабельно.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{A}(B)$ сепарабельно в ультраслабой топологии и $\pi_\omega \upharpoonright \mathfrak{A}(B)$ нормально, множество $\pi_\omega(\mathfrak{A}(B))\Omega$ — сепарабельное подпространство в $\mathscr{H}_\omega$. Остается заметить, что в силу (Р1) счетное семейство таких подпространств образует $\mathscr{H}_\omega$.

Теорема 9.11. *Пусть ω — локально нормальное состояние на $\mathfrak{A}$. Тогда $\pi_\omega \upharpoonright \mathfrak{A}(B)$ унитарно порождаемо при любой ограниченной области B.*

Доказательство. Мы используем только свойства (Р1) и (Р2). По теореме 9.8 $\mathfrak{A}(B)$ и $\pi_\omega(\mathfrak{A}(B))$ — две изоморфные алгебры фон Неймана, а в силу свойства (Р2) алгебры $\mathfrak{A}(B)'$ и $\pi_\omega(\mathfrak{A}(B))'$ содержат бесконечные семейства ортогональных эквивалентных проекторов, лежащих в $\mathfrak{A}(C)$ и $\pi_\omega(\mathfrak{A}(C))$ соответственно. Поскольку $\mathscr{H}_\omega$ сепарабельно, $\mathfrak{A}(B)'$ и $\pi_\omega(\mathfrak{A}(B))'$ — алгебры счетного типа, и утверждение теоремы следует из общего результата теории алгебр фон Неймана [Di 57; р. 301].

Следствие 9.12. *Пусть ω — локально порождаемое состояние на $\mathfrak{A}$ и Λ — подгруппа группы Лоренца, оставляющая ω неизменным, т. е. $\omega \circ \sigma_\lambda = \omega$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда унитарное представление U_λ из теоремы 9.2 сильно непрерывно на Λ.*

Доказательство. Метод доказательства теоремы 8.1 показывает, что σ_λ локально порождается непрерывной унитарной группой. В силу теоремы 9.10 то же самое справедливо и в отношении $\pi_\omega \circ \sigma_\lambda$. Следовательно, векторы $U_\lambda \pi_\omega(A) U_\lambda^* \Omega = U_\lambda \pi_\omega(A)\Omega$ непрерывно зависят от λ при любом A из некоторой локальной алгебры. Остается заметить, что множество $U_\lambda \pi_\omega(\mathfrak{A}(B))\Omega$ плотно в $\mathscr{H}_\omega$.

10. Построение физического вакуума

Применим теорию разд. 9 к физическому вакуумному состоянию ω. Вакуумное состояние ω, которое мы строим, локально нормально и трансляционно инвариантно. Мы думаем, что оно инвариантно и относительно полной группы Лоренца. В перенормированном пространстве Гильберта $F_{\text{ren}} = \mathscr{H}_\omega$ пространственно-временные автоморфизмы $\sigma_{t,x}$ унитарно порождаемы группой $U(t, x) = \exp(itH - ixP)$, где $H = \lim\limits_{g \to 1} H_{\text{ren}}(g)$. Для полевых операторов, действующих в

F_{ren}, проверены все аксиомы Вайтмана, кроме двух [Gli Ja 4]. Аксиомы, остающиеся непроверенными, — это единственность и лоренцева инвариантность вакуума[1]).

Построение ω начнем с изучения вакуумного состояния $\Omega_g \in F$ гамильтониана $H(g)$. Пусть

$$E(g) = \inf \operatorname{spectrum}(H_0 + H_I(g)), \tag{10.1}$$

$E(g)$ — вакуумная энергия. Мы сделаем перенормировку, вычтя эту энергию из $H(g)$:

$$H_{\mathrm{ren}}(g) = H_0 + H_I(g) - E(g). \tag{10.2}$$

Теперь спектр оператора энергии $H_{\mathrm{ren}}(g)$ начинается с нуля.

Теорема 10.1. *Нуль есть простое собственное значение $H_{\mathrm{ren}}(g)$.*

Доказательство этой теоремы нетрудно, но требует анализа последовательности вспомогательных операторов $H(g, V)$, приближающих $H_{\mathrm{ren}}(g)$, а, поскольку мы не ввели соответствующих обозначений и определений, отошлем читателя за подробностями к работе [Gli Ja 11].

Пусть Ω_g — собственный вектор $H_{\mathrm{ren}}(g)$, отвечающий нулевому собственному значению. Назовем Ω_g вакуумным состоянием гамильтониана $H_{\mathrm{ren}}(g)$. В соответствии с формальной теорией возмущений при $g \to 1$ последовательность Ω_g слабо сходится к нулю, и, для того чтобы получить вакуумное состояние ω, мы будем переходить к пределу, рассматривая не последовательности векторов в гильбертовом пространстве, а последовательности состояний на C^*-алгебре наблюдаемых. Пусть

$$\omega_g(A) = \langle \Omega_g, A\Omega_g \rangle. \tag{10.3}$$

Выберем последовательность $g_n(\cdot) \to 1$ и усредним ω_{g_n} по пространственным сдвигам на расстояния, зависящие от n и неограниченно возрастающие при $n \to \infty$ [Gli Ja 3]. (При периодическом пространственном обрезании такое усреднение вакуумных состояний не нужно, см. [Gli Ja 5].) Пусть ω_n — последовательность усредненных состояний. Тогда ω_n нормально и, следовательно, локально нормально по построению. Наиболее трудный шаг в построении ω — доказательство следующей теоремы.

Теорема 10.2. *Пусть B — ограниченная область. Последовательность $\{\omega_n \restriction \mathfrak{A}(B)\}$ состояний на $\mathfrak{A}(B)$ лежит во множестве, компактном в равномерной топологии.*

---

[1]) По поводу проверки этих аксиом см. следующую статью настоящего сборника. — *Прим. ред.*

Доказав эту теорему, мы можем выбрать подпоследовательность $\omega_{n(j)}$, сходящуюся по норме на каждой локальной подалгебре $\mathfrak{A}(B)$. Пусть ω — соответствующий предел. Тогда в силу замечания к теореме 9.5 ω локально нормально. Используя трансляционную инвариантность ω_n, заложенную в ω_n процедурой пространственного усреднения, легко показать трансляционную инвариантность ω. Еще проще доказать инвариантность ω относительно сдвигов по времени, поскольку таким свойством обладает каждое состояние ω_g:

$$\omega_g(A) = \omega_g\left(e^{itH_{\mathrm{ren}}(g)} A e^{-itH_{\mathrm{ren}}(g)}\right).$$

В результате применимы теоремы 9.1, 9.2, 9.9, 9.11 и следствие 9.12.

Назовем $\mathscr{H}_\omega$ физическим гильбертовым пространством F_{ren}, а вектор $\Omega \in F_{\mathrm{ren}}$ — физическим вакуумом. Пусть H и P — генераторы группы сдвигов по времени и пространству. H — гамильтониан без обрезаний, а P — оператор импульса. Так как унитарные операторы группы сдвигов оставляют Ω неизменным (ср. с теоремой 9.2), то

$$H\Omega = 0 = P\Omega.$$

Далее нетрудно связать спектр H со спектром $H_{\mathrm{ren}}(g)$:

$$\sigma(H) \subset \limsup_{g \to 1} \sigma(H_{\mathrm{ren}}(g)),$$

и потому

$$0 \leqslant H.$$

Используя вакуум, получаемый с помощью обрезаний, удовлетворяющих периодическим граничным условиям, можно доказать и больше, именно что $H^2 - P^2 \geqslant 0$, т. е. что спектр энергии-импульса лежит в переднем световом конусе (см. [GlJa70a, 71b]). Мы думаем, что обе конструкции приводят к одному и тому же вакууму ω.

Кроме проверки двух еще не проверенных аксиом Вайтмана, главной нерешенной задачей теории $P(\varphi)_2$-модели является задача исследования спектра массового оператора $(H^2 - P^2)^{1/2}$ и построения состояний рассеяния[1]).

Изложим теперь идеи доказательства теоремы 10.2. Первый шаг — это оценка $E(g)$ из (10.1).

Теорема 10.3. *Пусть $0 \leqslant g \leqslant 1$ и носитель g — компактное множество. Тогда существует такая не зависящая от g постоянная M, что*

$$-M \times (\operatorname{diam} \operatorname{supp} g + 1) \leqslant E(g).$$

[1]) См. примечание на стр. 158.

Доказательство. Пусть $b(x)$ — оператор уничтожения в x-пространстве, так что $b(f)=\int b(x)f(x)\,dx$. Пусть

$$N_t=\int\limits_{t-1/2}^{t+1/2} b^*(x)\,b(x)\,dx,$$

$$N^{\text{loc}}=\sum_{t=-\infty}^{\infty} N_t e^{-m|t|/2}.$$

Если носитель g лежит в фиксированном интервале и $d_{\nu,t}$ определены, как при доказательстве теоремы 7.4, то можно утверждать, что

$$\left\| d_{\nu,t}(N^{\text{loc}}+I)^{-p}\right\| \leqslant O\left(x_\nu^{-1/4}\right). \tag{10.4}$$

Доказательство теоремы 7.4 остается справедливым при замене H_0 на $\varepsilon N^{\text{loc}}$ из (7.5) на (10.4). В итоге можно получить, что

$$0\leqslant \varepsilon N^{\text{loc}}+H_I(g)+O(1).$$

Суммируя это неравенство по всем сдвигам и учитывая оценку $N\leqslant m^{-1}H_0$, получим теорему 10.3. Доказательство (10.4) нетрудно (см. [Gli Ja, 71b]).

Следующий шаг в доказательстве теоремы 10.2 состоит в переходе от оценки $E(g)$ к оценке локально свободного оператора $H_{0,\zeta}$. Пусть ζ — неотрицательная C_0^∞-функция, и пусть

$$H_{0,\zeta}=\int b^*(x)\,\zeta(x)\,k(x-y)\,b(y)\,\zeta(y)\,dx\,dy,$$

где k — ядро оператора μ_x.

Теорема 10.4. *Существует не зависящая от n постоянная $M=M(\zeta)$, такая, что*

$$\omega_n(H_{0,\zeta})\leqslant M(\zeta), \tag{10.5}$$

причем $M(\zeta)$ инвариантна относительно пространственных сдвигов.

Доказательство (формальное). Учтем, что $\operatorname{diam}\operatorname{supp} g_h=O(n)$. Тогда $E(g_n)=O(n)$ и $E(2g_n)=O(n)$. Следовательно,

$$0\leqslant H_0+2H_I(g_n)+O(n),$$

и потому

$$0 \leqslant \frac{1}{2} H_0 + H_I(g_n) + O(n),$$

$$\frac{1}{2} H_0 \leqslant H(g_n) + O(n)$$

и

$$\omega_{g_n}(H_0) = \langle \Omega_{g_n}, H_0 \Omega_{g_n} \rangle \leqslant 2 \langle \Omega_{g_n}, (H(g_n) + O(n)) \Omega_{g_n} \rangle \leqslant O(n)$$

Пусть $\zeta_j(x) = \zeta(x - j)$ сдвиг ζ и

$$H_0' = \sum' H_{0, \zeta_j},$$

где суммирование идет по некоторому (выбираемому ниже) подмножеству целых чисел. Тогда $H_0' \leqslant \text{const}\, H_0$, и потому $\omega_{g_n}(H_0') \leqslant O(n)$. Напомним, что ω_n были получены из ω_{g_n} путем усреднения по пространственным сдвигам на расстояние $O(n)$. Будем считать, что $\sum'$ распространяется на все целые числа, лежащие во множестве таких пространственных сдвигов. Тогда легко видеть, что

$$\omega_n(H_{0,\zeta}) = O(n^{-1}) \int_0^1 \omega_{g_n}(\sigma_a(H_0'))\, da,$$

где σ_a — пространственный автоморфизм. Вышеприведенные оценки применимы не только к $\omega_{g_n}(H_0')$, но и к $\omega_{g_n}(\sigma_a(H_0'))$, и потому $\omega_n(H_{0,\zeta})$ ограничены.

Неравенство (10.5) определяет множество состояний, о которых идет речь в теореме 10.2. Наиболее трудное место в доказательстве теоремы 10.2 — это демонстрация того, что множество сужений на $\mathfrak{A}(B)$ состояний, удовлетворяющих неравенствам вида (10.5), замкнуто по норме. Мы объясним здесь важнейшую часть этого доказательства — теорему Реллиха. Эта теорема утверждает, что множество функций, имеющих носитель в ограниченной области C и обладающих квадратично суммируемыми производными с нормами, не большими 1, компактно в L_2. Теорема Реллиха справедлива и в случае L_2-производных дробного порядка. Заметим теперь, что неравенство в теореме 10.4 означает, что волновые функции состояний ω_n обладают L_2-производными порядка $^1/_2$, которые локально ограничены. Поэтому можно найти такую подпоследовательность ω_{n_j}, что соответствующая последовательность волновых функций после сужения на любую локальную область будет сходиться в смысле нормы пространства Фока.

Однако это еще не завершает доказательства. До сих пор мы говорили о локализации состояний, которой в соответствии с теорией Ньютона — Вигнера отвечает описание в терминах операторов $b^*(x)$, тогда как локализация операторов формулируется в терминах полевых операторов:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\mu_x}} [b^*(x) + b(x)].$$

Если $k^{\pm}(x, y)$ — ядро оператора $\mu_x^{\pm 1/2}$, то при $|x-y| \to \infty$

$$k^{\pm}(x, y) = O(\exp[-(m-\varepsilon)|x-y|]). \tag{10.6}$$

Поэтому различие между релятивистской локализацией операторов $\varphi(x)$ и $\pi(x)$ и локализацией состояний в смысле Ньютона — Вигнера мало.

Пусть $\mathfrak{A}_{NW}(B)$ — алгебра фон Неймана, порождаемая операторами

$$\exp[i\varphi(\mu_x^{1/2}f) + i\pi(\mu_x^{-1/2}g)],$$

где f и g пробегают множество пробных функций с носителями в B. Локализация операторов $A \in \mathfrak{A}_{NW}(B)$ согласуется с локализацией состояний, и потому теперь с помощью теоремы Реллиха можно доказать существование равномерно сходящейся подпоследовательности в последовательности $\{\omega_n \restriction \mathfrak{A}_{NW}(B)\}$ при каждом B.

Любой ограниченный оператор на пространстве Фока можно представить в виде суммы бесконечного ряда мономов вида

$$\int :\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_m)\pi(y_1) \ldots \pi(y_n): w(x, y)\,dx\,dy.$$

Взяв область B и $\delta > 0$, выберем большую область $B_1 = B_1(\delta, B) \supset B$ и, пользуясь таким $\varphi - \pi$ разложением, представим $A \in \mathfrak{A}(B)$ в виде суммы

$$A = A_1 + A_2, \tag{10.7}$$

где

$$A_1 \in \mathfrak{A}_{NW}(B_1), \quad |\omega_n(A_2)| \leqslant \delta \|A\|. \tag{10.8}$$

Малый остаток A_2 в (10.7) обязан своим происхождением малому остатку в (10.6). Теперь теорема 10.2 без труда выводится из разложений (10.7), (10.8) и свойства равномерной компактности локализованных в смысле Ньютона — Вигнера последовательностей $\{\omega_n \restriction \mathfrak{A}(B_1)\}$ (подробности можно найти в [Gli Ja 2]).

11. Формальная теория возмущений и модели в трехмерном пространстве-времени

Степень ультрафиолетовых расходимостей в пространстве-времени размерности 3 или более зависит от степени полинома P. По этой причине мы оставим общие полиномы взаимодействия и ограничимся рассмотрением суперперенормируемого взаимодействия φ_3^4. Модель с взаимодействием φ_3^6 более трудна: хотя она и перенормируема, но свойство суперперенормируемости у нее отсутствует и потому трудности в ее изучении примерно одного порядка с трудностями в изучении φ_4^4-взаимодействия. Свойство суперперенормируемости означает, что ультрафиолетовые бесконечности, порождаемые данным взаимодействием, можно представить в виде полинома по константе связи с расходящимися (при больших k) интегралами в качестве коэффициентов полинома. Константа связи — это параметр, входящий в H_I. Проблемы гл. 9 и 10, где обсуждался переход к пределу $g \to 1$, связаны с расходимостями, пропорциональными $\operatorname{diam}\operatorname{supp} g$ в каждом порядке по константе связи и потому в пределе бесконечного объема проявляющими черты, свойственные несуперперенормируемым взаимодействиям.

$P(\varphi)_2$-взаимодействие суперперенормируемо. Для того чтобы увидеть это, положим $H(g) = H_0 + \lambda H_I(g)$, $0 < \lambda$. Единственными бесконечностями в $H(g)$ являются бесконечности из H_I, убираемые переходом к нормальной форме и имеющие вид

$$\lambda c^j = \lambda \left[\frac{1}{4\pi} \int \frac{dk}{\mu(k)} \right]^j, \quad j \leqslant \frac{1}{2} \deg P, \tag{11.1}$$

как в (5.11). $P(\varphi)_2$-модель — единственная модель, для которой ультрафиолетовые расходимости имеют такую простую структуру. Следующая по трудности двумерная модель — это модель юкавского взаимодействия бозонов и фермионов. В этой модели ультрафиолетово расходятся сдвиги вакуумной энергии и бозонной массы. Тем не менее понимание этой модели сейчас находится на таком же уровне ясности, как и $P(\varphi)_2$-модели (см. [Gli Ja 11]). Значительно сложнее φ_3^4-взаимодействие, о котором сейчас известны лишь предварительные факты технического характера [1]).

В этом разделе мы опишем картину перенормировок φ_3^4-модели на формальном уровне. Это формальное рассмотрение оправдывается строгим математическим анализом. Глимм [Gli 4] установил, что $H(g)$ — плотно определенный симметри-

---

[1]) См. примечание на стр. 158. — *Прим. ред.*

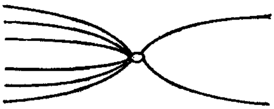
ческий оператор. Хепп [He 1] и Фабри [Fa] построили алгебру $\mathfrak{A}$ полей в нулевой момент времени и ее локальные подалгебры $\mathfrak{A}(B)$. Хотя эти шаги могут показаться легкими (и в действительности тривиальны в $P(\varphi)_2$-модели), в φ_3^4-модели они весьма трудны из-за необходимости делать перенормировки. В конце концов наша программа состоит в построении φ_3^4-модели путем доказательства фактов, известных для $P(\varphi)_2$-модели. Главные шаги, которые еще предстоит сделать, таковы:

(a) доказательство положительности $H(g)$: $0 \leqslant H(g)$,

(b) доказательство самосопряженности $H(g)$: $H(g)^* = H(g)$,

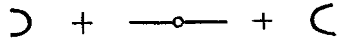
(c) доказательство того, что $H(g)$ локально порождает $*$-автоморфизм σ_t алгебры $\mathfrak{A}$, обладающий свойством конечности скорости распространения возмущения.

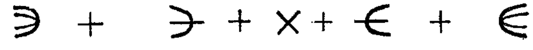
Наш способ рассмотрения φ_3^4-взаимодействия навеян теорией возмущений, которая заключает в себе уже упоминавшиеся формальные вычисления. Для описания виковых мономов, фигурирующих в этих вычислениях, удобно пользоваться графиками Фридрихса. График Фридрихса, отвечающий моному Вика типа (4.6), имеет одну вершину и $m+n$ линий, m из которых отвечают операторам рождения и идут налево, а n отвечают операторам уничтожения и идут направо:

(11.2) $W =$ 

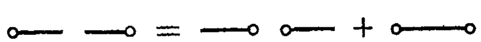
Таким образом, на языке графиков Фридрихса

(11.3) $\varphi(x) =$ 

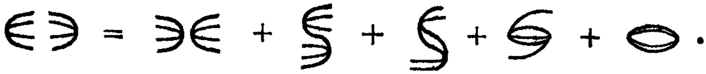
(11.4) $\varphi^2(x) =$ 

(11.5) $\varphi^4(x) =$ 

Коммутатор $[a, a^*] = \delta I$ также можно изобразить с помощью графиков

$a^*a =$  $= aa^* + \delta I$

Здесь член, отвечающий спариванию δI, изображается двумя вершинами и линией, их соединяющей. Более обще, для изображения викова разложения (4.12) мы рисуем график для U_r, соединяя r линий рождения, выходящих из вершины W_1, с r линиями уничтожения, выходящими из вершины W_2. Заметим, что множитель $r!\binom{j}{r}\binom{m}{r}$ в (4.14) есть в точности число различных способов, которыми такое соединение можно проделать. В частности, в случае (4.12) мы имеем следующую картииу:

(11.6) 

Здесь первый график изображает виково упорядочеиный члеи, имеющий наименее сингулярное ядро. Последний график изображает полностью спарениый член. Он кратен единичному оператору, и его ядро наиболее сингулярно среди всех ядер в (11.6).

График Фридрихса, например (11.2), вместе с ядром w однозначно определяет сответствующий оператор[1]). В случае графиков с несколькими вершинами, как, например, в (11.6), каждой вершине отвечает свое ядро. В реальной ситуации выбор ядра диктуется смыслом рассматриваемой проблемы, и в таком случае график уже сам по себе однозначно характеризует операторы. В нашем обсуждении теории возмущений структура ядер диктуется H_I и задается формулами (5.2), (5.4) или (5.8) в зависимости от того, какое обрезание используется в H_I.

Поставим в соответствие ядру w степени m, n ядро

$$\gamma w(k, k') = \frac{w(k, k')}{\sum_{i=1}^{m} \mu(k_i) - \sum_{j=1}^{n} \mu(k'_j)}, \tag{11.7}$$

и пусть ΓW — моном Вика степени m, n с ядром γw. Уточнение характера сингулярности в знаменателе (11.7) очень важно для определенных аспектов теории возмущений, например для различения сходящихся и расходящихся волн, но оно не важно при изучении ультрафиолетовых расходимостей, и потому мы примем простейшее условие: будем понимать (11.7) в смысле главного значения. Смысл операции Γ в соотношении,

$$[H_0, \Gamma W] = W; \tag{11.8}$$

иначе, говоря, Γ — операция, обратная $\operatorname{ad} H_0$:

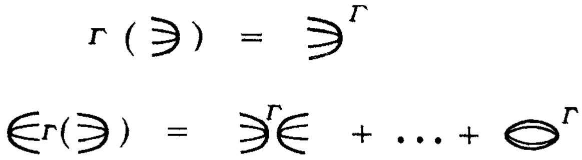
$$\operatorname{ad} H_0\colon\ X \to [H_0, X], \tag{11.9}$$

$$\operatorname{ad} H_0 \circ \Gamma\colon\ X \to X. \tag{11.10}$$

[1]) Точнее билинейную форму. — *Прим. ред.*

На языке графиков операцию Г мы будем изображать буквой Г, выписываемой около вершины, например:

(11.11)



Вспоминая волновые операторы, отвечающие потенциальному рассеянию, мы ищем оператор T, переплетающий H и H_0:

(11.12) $$HT = TH_0.$$

Но для существования T спектры H и H_0 должны совпадать. Мы подгоним спектры, добавляя контрчлены, допускаемые физической интерпретацией H. Взяв H в виде

(11.13) $$H = H_0 + \lambda H_I(g) - \frac{1}{2}\delta m^2 \int :\varphi^2(x): g^2(x)\,dx - E(g),$$

мы ищем константы перенормировок $E(g)$ и δm^2 вместе с T. Проделаем формальное разложение:

$$T = I + \lambda T_1 + O(\lambda^2),$$
$$E(g) = \lambda E_1 + \lambda^2 E_2 + O(\lambda^3),$$
$$\delta m^2 = \lambda\,\delta m_1^2 + \lambda^2\,\delta m_2^2 + O(\lambda^3),$$

так что

$$E(g) = \inf \operatorname{spectr}\left(H_0 + \lambda H_I(g) - \frac{1}{2}\delta m^2 :\varphi^2(g^2):\right).$$

Пусть

$$\Omega(g) + \Omega_0 + \lambda\Omega_1 + O(\lambda^2).$$

Покажем, что $E_1 = 0$. Действительно, так как $\langle\Omega(g), \Omega_0\rangle \neq 0$, то

(11.14) $$E(g) = \langle\Omega(g), \Omega_0\rangle^{-1}\langle\Omega_0, [H_0 + \lambda H_I(g) - \\ - \frac{1}{2}\delta m^2 :\varphi^2(g^2):]\,\Omega(g)\rangle = \lambda[1 + O(\lambda)]^{-1}\left\{\left\langle\Omega_0, \left[H_I(g) - \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. - \frac{1}{2}\delta m^2 :\varphi^2(g^2):\right]\Omega_0\right\rangle + O(\lambda)\right\},$$

и поскольку H_I и $:\varphi^2:$ упорядочены на Вику, то

$$E_1 = \left\langle\Omega_0, \left[H_I(g) - \frac{1}{2}\delta m\ :\varphi^2(g^2):\right]\Omega_0\right\rangle = 0.$$

Аналогичное рассмотрение дает $\delta m_1^2=0$ при условии, что член вида $:\varphi^2:$ не входит в H_I. Подставляя эти величины в (11.12), получаем

$$(H_0+\lambda H_I(g))(I+\lambda T_1)=(I+\lambda T_1)H_0+O(\lambda^2),$$

или

$$\lambda H_I(g)=-\lambda[T_1,\ H_0].$$

Таким образом, полагая

$$T=I-\lambda\Gamma H_I(g)+O(\lambda^2),$$

получим

$$\Omega_g=T\Omega_0/\|T\Omega_0\|=$$

$$=\|\Omega_0-\lambda\Gamma H_I(g)\Omega_0+O(\lambda^2)\|^{-1}\{\Omega_0-\lambda\Gamma H_I(g)\Omega_0+O(\lambda^2)\}=$$

$=(1+\lambda^{2\Gamma}$  $^{\Gamma}+O(\lambda^2))^{-1/2}\{\Omega_0-\lambda\Gamma H_I(g)(\Omega_0+O(\lambda^2)\}=$

$=\Omega_0-\lambda$  $^{\Gamma}\ \Omega_0+O(\lambda^2).$

Подставляя в (11.14), получим

$E(g)=(1+O(\lambda^2))^{-1}\Big\{-\frac{1}{2}\delta m^2\lambda^2\langle\Omega_0,\ :\varphi^2(g^2):\Omega_0\rangle-$

$-\lambda^2\langle\Omega_0,\ H_I(g)$  $^{\Gamma}\ \Omega_0\rangle+O(\lambda^3)\Big\}=$

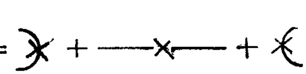
$=-\lambda^2\langle\Omega_0,\ H_I(g)$  $^{\Gamma}\ \Omega_0+O(\lambda^3)=$

$=-\lambda^2,$  $^{\Gamma}+O(\lambda^3),$

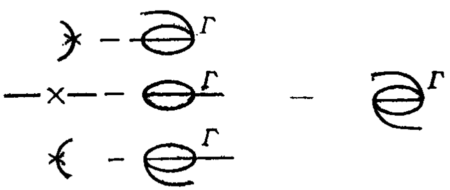
и потому

$E_2=-$  $^{\Gamma}$

Пусть

$-\frac{1}{2}\delta m^2:\varphi^2(g^2):\ =$ 

Аналогично предыдущим выкладкам можно показать, что δm_2^2 возможно выбрать так, чтобы ядра вторых слагаемых в следующих трех операторах



были равны нулю при нулевом импульсе. При таком выборе δm_2^2 все эти операторы в пределе $\varkappa = \infty$ имеют конечные ядра. Определим теперь T с точностью до второго порядка:

$$H(g)T - TH_0 = -\lambda^2\left(H_I\Gamma H_I + E_2 + \frac{1}{2}\delta m_2^2 : \varphi^2(g^2):\right) + [H_0, T_2].$$

В итоге

$$T_2 = \Gamma\left(H_I\Gamma H_I + E_2 + \frac{1}{2}\delta m^2 : \varphi^2(g^2):\right). \tag{11.15}$$

$H_I\Gamma H_I$ не определен, ибо содержит члены с тремя и четырьмя спариваниями, обладающие ядрами, представляющими собой расходящиеся интегралы. Однако в (11.15) эти бесконечности компенсируются. Таким образом, E_2 компенсирует полностью спаренный член, а $\frac{1}{2}\delta m^2 : \varphi^2(g^2)$ — бесконечную часть членов с тремя спариваниями. Вычисление E и δm^2 в следующих порядках указывает на необходимость прибавления еще одного бесконечного контрчлена

$E_3 = \Gamma$  Γ

Кроме бесконечностей E и δm^2, в φ_3^4-модели присутствует бесконечная перенормировка волновой функции Λ. Из (11.15) и нашего выбора E_2 вытекает, что

$$\langle T_2\Omega_0, \Omega_0\rangle = \lambda^2\langle\Omega_2, \Omega_0\rangle = 0.$$

Следовательно,

$\|T\Omega(g)\|^2 = 1 + \lambda^2\,\Gamma$  $\Gamma + O(\lambda^3) = 1 + \lambda^2\Lambda_2 + O(\lambda^3)$

и Λ_2 содержит логарифмическую бесконечность. Продолжая вычисления до более высоких порядков, мы получим, что

$$\|T\Omega(g)\|^2 = e^{(\lambda^2\Lambda_2 + \cdots)},$$

где $\Lambda_3, \ldots$ конечны. Бесконечность Λ_2 означает, что T выводит состояния из пространства Фока. Область значений T лежит в перенормированном пространстве Фока F_{ren}. Изменение гильбертова пространства математически можно описать как переход к неэквивалентному представлению ККС.

КОРПУСКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА $(P\varphi)_2$-МОДЕЛИ СО СЛАБЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ[1])

Джеймс Глимм,
Курантовский институт, Нью-Йорк

Артур Джаффе,
Гарвардский университет, Кембридж, Массачусетс

Томас Спенсер,
Курантовский институт, Нью-Йорк

Часть I
ФИЗИКА КВАНТОВОПОЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

1. Развитие теории полевых моделей за последние пять лет
1.1. Введение
1.2. Обзор результатов
1.3. Картина Голдстоуна $P(\varphi)_2$-взаимодействия
1.4. Теория поля и статистическая механика
1.5. Некоторые задачи

2. От оценок к физике
2.1. Функциональный анализ
2.2. Физические применения

3. Связанные состояния и резонансы
3.1. Введение
3.2. Формальная теория возмущений
3.3. Об отсутствии связанных состояний
3.4. О наличии связанных состояний

4. Локализация в фазовом пространстве и перенормировка
4.1. Результаты, полученные для φ_3^4-модели
4.2. Разложение на элементарные шаги
4.3. Синтез элементарных шагов

1. Развитие теории полевых моделей за последние пять лет[2])

1.1. Введение

В последние годы конструктивная квантовая теория поля развивалась быстрыми темпами. Ясно, что продолжение такого развития требует новых идей, методов и (или) точек зрения. В этих лекциях мы дадим обзор последних достижений,

---

[1]) J. Glimm, A. Jaffe, T. Spenser, The particle structure of the weakly coupled $P(\varphi)_2$-model and other applications of high temperature expansions, part I, II, Constructive quantum field theory, Lecture Notes in Physics, 25, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973, 132—198; 199—242.
[2]) С 1968 по 1973 г. — *Прим. ред.*

приведем некоторые новые результаты и укажем возможные направления будущей работы. В этой части мы сосредоточим свое внимание на обсуждении основных идей и понятий, а в части II изложим во всех деталях некоторые существенные результаты нашей программы. В частности, мы рассмотрим вакуумное кластерное разложение и оценки, нужные для того, чтобы установить его сходимость.

К настоящему времени проведено детальное изучение структуры двумерной $P(\varphi)$-модели и показано, что эта структура находится в качественном согласии с основными физическими представлениями. Из аксиом Хаага — Рюэля (справедливых, например, в случае $P(\varphi)_2$-модели при слабой связи) мы знаем, что квантованным полям соответствуют частицы дискретной массы, а взаимодействие между этими частицами описывает изометрический оператор рассеяния. Известно также, что для некоторых констант связи вакуумное состояние единственно (например, это так в случае слабой связи или при наличии большого, а иногда просто ненулевого внешнего поля). С другой стороны, Добрушин и Минлос анонсировали, что в четных $(\lambda P(\varphi)+m_0^2\varphi^2)$-моделях с $\lambda \gg m_0^2$ существуют решения со многими фазами[1]. Далее, мы знаем, что нарушение симметрии играет ключевую роль в современных теориях слабого взаимодействия, что объясняет интерес к этому явлению. Действительно, прямые экспериментальные указания в пользу или против возникновения нарушенных симметрий в физике элементарных частиц отсутствуют, так как на эксперименте невозможно изменять константы взаимодействия между частицами (в отличие от того, что бывает в экспериментах со статистическими системами, где можно, например, выключать магнитное поле). Это означает, что решающие аргументы в пользу нарушенных симметрий может дать именно конструктивная квантовая теория поля.

Y_2-модель Юкавы и φ_3^4-модель разработаны менее полно. Но все же многие из методов, развитых для $P(\varphi)_2$-моделей, по-видимому, применимы ко всем вообще суперперенормируемым взаимодействиям. Нужно только усовершенствовать эти методы настолько, чтобы сделать их применимыми к Y_2-, φ_3^4- и Y_3-моделям.

Задачи, которые мы ставим, можно разбить на 4 группы:

1. Физические свойства. Важное направление будущей работы заключается в том, чтобы полнее раскрыть физическое содержание существующих моделей квантовой теории поля.

---

[1]) Доказательство существования фазового перехода в $\lambda\varphi_2^4$-модели см. в [Gl Ja Sp 3]. — *Прим. перев.*

К интересным задачам такого рода приводит изучение корпускулярной структуры, явлений рассеяния, связанных состояний и резонансов. Весьма интересно также поведение полевых моделей на больших расстояниях и в инфракрасной области. Общая программа изучения корпускулярной структуры слагается из ответов на следующие вопросы: какие полиномы взаимодействия и константы связи соответствуют определенным частицам, связанным состояниям и резонансам? Как массы и периоды полураспада зависят от констант связи? Каково асимптотическое поведение сечений? Мы обсудим эти проблемы ниже в п. 1.5 и разд. 3.

Поведение наших моделей на больших расстояниях связано с существованием многих фаз, с наличием критической точки и характером поведения в окрестности этой точки различных физических величин при масштабных преобразованиях. Возникают вопросы: есть ли в φ_2^4-модели критическая точка? Обладает ли эта модель свойством масштабной инвариантности с аномальными размерностями? Какие параметры описывают критическую точку? Мы обсудим это ниже в п. 1.5.

II. Четырехмерное пространство-время (перенормируемые модели). Второе важное направление возникает при попытках ответить на вопрос о том, как быть в случае четырехмерного пространства-времени, т. е. как обращаться с перенормируемыми взаимодействиями, поскольку в четырехмерном пространстве-времени не существует суперперенормируемых взаимодействий. Очевидно, что наиболее заманчивая цель — доказать существование, например, φ_4^4-модели[1]. Наши современные методы ограничены требованием суперперенормируемости (т. е. размерностью $4-\varepsilon$), и для $\varepsilon=0$ требуются новые идеи. Мы спрашиваем: могут ли методы ренормгруппы помочь снять ультрафиолетовое обрезание при $\varepsilon\to 0$? Дают ли возможность идеи, пропагандируемые Симанзиком, глубже понять перенормировку заряда? Мы обсудим эти вопросы ниже в п. 1.5.

III. Упрощение. Кроме этих двух главных направлений, существует проблема упрощения существующих методов. Ясно, что основная потребность в упрощении связана с наличием ультрафиолетовых расходимостей в моделях, отличных от $P(\varphi)_2$, и первейшая цель соответствующей программы могла бы состоять в том, чтобы улучшить технику доказательств, выделить ее важнейшие элементы для того, чтобы

[1]) Некоторые предварительные результаты по этому вопросу см. в [Gli, Ja 14, 15, Bak, Sch 3] — *Прим. перев.*

сделать более доступными такие сложные суперперенормируемые модели, как Y_2 или даже Y_3.

IV. Эстетические вопросы. Кроме того, имеется ряд вопросов, которые носят эстетический характер или относятся к области обоснования теории. Например, существует ли шредингеровское представление $\mathscr{H} = L_2(dq)$ для $P(\varphi)_2$-моделей; каков фермионный аналог такой негауссовской бозонной меры на $\mathscr{S}'$? Каковы свойства меры на пространстве траекторий в моделях со взаимодействием? С этими вопросами связаны и другие интересные чисто математические вопросы, порождаемые теорией поля, но мы не будем их здесь обсуждать.

Отметим в этой связи, что стремление к простоте и элегантности важно и, как показывает пример $P(\varphi)_2$-модели, плодотворно. Однако мы здесь уделяем особое внимание тем методам, которые допускают (или, по-видимому, допускают) обобщение на другие более сингулярные взаимодействия. Причина этого внимания двояка. Во-первых, мы считаем, что в конце концов именно от того, насколько умело мы сможем обращаться с более сингулярными взаимодействиями, зависит успешность выполнения изложенной программы. Во-вторых, мы полагаем, что преждевременное чрезмерное внимание к вопросам простоты и элегантности деталей может отвлечь силы от решения главных задач и тем самым приостановить прогресс и даже воспрепятствовать ему.

1.2. Обзор результатов

Начнем с описания положения дел в φ_2^4-, Y_2- и φ_3^4-моделях [1]. На рис. 1 мы даем хронологическую сводку результатов, отмечая по вертикали результаты все более возрастающей сложности; по горизонтали возрастает сложность моделей. Цифры означают даты соответствующих публикаций.

Более подробное описание результатов, полученных для различных φ_2^4-моделей, приводится на рис. 2; здесь же указаны их авторы. Результаты, цитированные для $\lambda\varphi_2^4$-взаимодействия при $\lambda/m_0^2 \ll 1$, справедливы и для $\lambda P(\varphi)_2$-моделей с $\lambda/m_0^2 \ll 1$. Добавим к этому еще несколько общих замечаний. Аксиомы Вайтмана требуют существования единственного основного состояния (вакуума), т. е. существования единственного вектора, инвариантного относительно неоднородных преобразований Лоренца. Точнее говоря, следует рассматривать вакуумное состояние на C^*-алгебре наблюдаемых, относящихся к конечному объему, и пределы последователь-

[1]) Таблицы, изображенные на рис. 1—3, дополнены указаниями на важнейшие результаты, полученные к началу 1976 г. — *Прим. перев.*

ностей таких состояний при стремлении объема к бесконечности. Каждое предельное состояние задает некоторое представление алгебры наблюдаемых и вакуумный вектор в гильбертовом пространстве. Требование единственности вакуума, налагаемое аксиомами Вайтмана, относится к векторам в этом гильбертовом пространстве и эквивалентно требованию неприводимости представления.

	$P(\varphi)_2$	Y_2	φ_3^4	φ_4^3	Y_3
Критическая точка	5				
Полнота асимптотических состояний					
Резонансы					
Связанные состояния	3				
Нарушение симметрии	3		5		
Аналитичность по константе связи	3				
Асимптотический характер теории возмущений	3		5		
Одночастичные состояния	3				
Массовая щель	2		5		
Аксиомы Вайтмана, сходимость при $V \to \infty$	2	5	5		
Евклидова формулировка	1	2			
Функции Вайтмана	1				
Физическое представление	9	1			
Аксиомы Хаага — Кастлера	9				
Уравнения движения	9	1			
Релятивистская инвариантность	8	0			
$H_V = H_V^*$ (самосопряженность гамильтониана)	8	9			
$0 \leqslant H_V$ (положительность энергии)	4	8	2		
Локальные наблюдаемые	4	7	1		
H_V (существование гамильтониана в конечном объеме)	4	7	8	0	

$4 \leqslant 1964$
$8 = 1968$
$9 = 1969$
$0 = 1970$
$3 = 1973$
$5 \geqslant 1975$

Рис. 1. Основные результаты и годы, когда они были установлены.

Таким образом, вакуумное состояние, соответствующее бесконечному объему, определяется как предел состояний в конечном объеме, а они в свою очередь определяются параметрами, задающими вид плотности энергии $\mathscr{H}(x)$ и граничными условиями. Если для выделения единственного вакуума, не зависящего от граничных условий, достаточно одних только параметров из $\mathscr{H}(x)$, то говорят о единственной фазе, в противном случае имеется несколько фаз. Сходящиеся кластерные разложения [Gli, Ja Sp 1, 2] дают для некоторых констант связи и единственный вакуум, и одну фазу.

В $P(\varphi)_2$-теории, удовлетворяющей всем аксиомам Вайтмана, за исключением условия единственности вакуума, теорема о разложении Брателли [Bra 1] позволяет разложить

Перенормировка заряда Аномальные размерности Ренормализационная группа	Gli Ja 15	→		
Критические точки	Gli Ja 16	→		
Унитарность S-матрицы (полнота асимптотических состояний)	Sp Zi	→		
Связанные состояния Резонансы		Разд. 3		
Фазовый переход (нарушение симметрии)	Нет: Gli Ja Sp 1	Есть: $\lambda \gg m_J^2$ Dob Mi Gli Ja Sp 3	Нет: Gr Si, Si 2	→
Аналитичность функций Швингера	$\mathrm{Re}\lambda > 0$, $0 < \lvert\lambda\rvert < \lambda_0$ $\lvert\mu\rvert < \mu_0$ Gli Ja Sp 2		$\mathrm{Re}\lambda > 0$ Sp 2	→
Одночастичные состояния и S-матрица	Gli Ja Sp 1 Os Se			
Мера dq	New 1, Fr 2	Fr 2	→	→
Шредингеровское представление	Fr 2			Fr 2
Асимптотический характер теории возмущений	Di 3 Ec Ma Se	→		Di 3
m (физическая масса)	$m > 0$ Gli Ja Sp 1	Монотонность по m_0 Gu Ro Si 3, Si 1	Монотонность по $\lvert\mu\rvert$ Gr Si	$m > 0$ Sp 2
Аксиомы Вайтмана	Gli Ja Sp 1	Nel 5, Gu Ro Si 3 Gli Ja 4, Os Sch 3 Br 1, St	→ Gr Si, Si 2	→ → Sp 2
Евклидовы аксиомы	Sy 2, Nel 3 Os Sch 3	→	→	→
Аксиомы Хаага — Кастлера	Gli Ja 1, 2, Ca Ja Ro 1—3	→	→	→
Предварительные результаты	Ja 1, 2, Nel 1, Gl 1 Se 1	→	→	→
	$\lambda/m_J^2 \ll 1$, $\dfrac{\lvert\mu\rvert}{m_J^2} \ll 1$, а также $\lambda P(\varphi)_2$	$\mu = 0$	$\mu \neq 0$	Большое $\lvert\mu\rvert$

Рис. 2. Результаты, полученные для $\left(\lambda\varphi^4 + \frac{1}{2} m_0^2\varphi^2 - \mu\varphi\right)_2$-модели.

представление алгебры наблюдаемых на неприводимые представления и выделить единственный вакуум. В таком случае оценка локального возмущения, приведенная в [Gli Ja 4], и результат Стритера [Str] обеспечивают выполнение условия спектральности в редуцированной теории. Таким образом, мы получаем теорию Вайтмана для произвольного $\left(\lambda\varphi^4 + \frac{1}{2} m_0^2\varphi^2 - \mu\varphi\right)$ взаимодействия. В случае $\mu \neq 0$ теорема Ли — Янга показывает, что упомянутое выше разложение не нужно, поскольку неприводимо уже исходное представление [Gr Si, Si 2].

На рис. 3 мы приводим результаты, полученные в модели Y_2, и соответствующие ссылки на литературу; ясно, что требуется еще много работы, чтобы поднять эту модель до уровня φ_2^4.

Связанные состояния	
Корпускулярная структура	
Шредингеровское представление	
Аксиомы Вайтмана	Ma Se 2
Евклидовы поля и формула Фейнмана — Каца	Os Sch 4
Свойства токов	Mc B 1
Уравнения движения	Di 1
Существование физического представления	Sch 1
Релятивистская инвариантность	Gli Ja 10
$0 \leqslant H_V = H_V^*$	Gli 2, 3, Gli Ja 9, 11

Рис. 3. Результаты, полученные для Y_2-модели.

Мы выдвигаем предположение, что евклидовы поля, построенные Остервальдером и Шрадером [Os Sch 5] для спина $s = 0$, $^1/_2$ и Озкайнаком [Oz] для высших спинов, можно принять в качестве отправной точки для вывода кластерного разложения, позволяющего в случае слабой связи доказать существование предела при $V \to \infty$ и справедливость аксиом Вайтмана, установить единственность вакуума и наличие одночастичных состояний. Мы надеемся также, что евклидовы калибровочные поля приведут к пониманию функциональных интегралов для высшего спина. Отметим, в частности, еще и задачу строгого обоснования различных методов факторизации интегрирования по (калибровочной) группе симметрий и схемы перенормировок Фаддеева и Попова [Fad Po, Sal St].

Теория φ_3^4-взаимодействия находится на еще более примитивной стадии развития. Для этого взаимодействия доказаны лишь ограниченность снизу перенормированного гамильтониана и существование предела при $\varkappa \to \infty$ у функций Швингера, вычисленных в конечном объеме. Но мы надеемся, что скоро для φ_3^4-модели будут проверены аксиомы Вайтмана[1]).

Следует сказать, что имеется ряд полученных недавно результатов, которые не были описаны выше. Отметим, в частности, работу Федербуша по обобщенной модели Юкавы $P(\varphi)+\bar{\psi}\psi Q(\varphi)$ (см. [Fed]), работу Албеверио и Хое-Крона по ограниченным неполиномиальным взаимодействиям [Al H K 1—4] и недавние работы по модели полярона Гросса [Gro 1] и Фрёлиха [Frö 2]. Упомянем еще недавнюю работу Фрёлиха по $P(\varphi)_2$-моделям [Frö 2a, b], где доказано свойство марковости полей, выведено уравнение Добрушина — Ланфорда — Рюэля и проверена цикличность вакуума (для полей в нулевой момент времени) при $\lambda \ll m_0^2$ или $|\mu| \gg m_0^2, \lambda^2$.[2])

Большинство упомянутых выше результатов получено в рамках *евклидовой теории поля.*

Применение метода мнимого времени в конструктивной квантовой теории восходит к евклидовой формулировке теории поля Симанзика и к нельсоновскому доказательству положительности гамильтониана $\varphi_{2,V}^4$-модели.

На ранних этапах развития конструктивной теории поля этот подход основывался на нерелятивистской формуле Фейнмана — Каца и применялся при доказательстве большинства ключевых технических оценок в $P(\varphi)_2$- и φ_3^4-бозонных моделях и конечности скорости распространения взаимодействия в Y_2-модели. Важным достижением следует считать *ковариантную* формулировку теории в терминах евклидовых полей или функций Грина, позволившую сформулировать евклидовы аксиомы, вывести релятивистскую формулу Фейнмана — Каца и доказать свойство марковости [Nel 4, Os Sch 3, 4, Sy 1, Nel 3, Fe 1]. Ковариантная формулировка используется также при доказательстве и упрощении оценок [Gu 1, Gli Ja 8, Gu Ro Si 1, Si 1, 2, 3], нужных для построения теории Вайтмана — Хаага — Рюэля [Nel 3, Os Sch 2]. Кроме того, евклидов метод проясняет связь теории поля со статистической механикой, лежащую в основе эвристического подхода Фишера и Вильсона и работы Гуэрры, Розена, Саймона. В этом подходе становится естественным решеточное приближение, с помощью которого бозонное взаимодействие сводится к модели Изинга с непрерывным спином и со взаимодействием ближайших соседей [Ko Wi, Gu Ro Si 3].

---

[1]) См. примечание на стр. 11. — *Прим. ред.*

[2]) Доказательство цикличности вакуума в препринте [Frö 2b] ошибочно. — *Прим. перев.*

Сходимость решеточного приближения и существование термодинамического предела позволяют перенести *корреляционные неравенства* [Gu Ro Si 3, Nel 5, Gr Si, Si 2] и теоремы Ли — Янга из статистической механики в квантовую теорию поля. Эти методы, по-видимому, особенно удобны в случае бозонных взаимодействий; они обсуждаются в лекциях Гуэрры, Розена, Саймона, Нельсона и в разд. 3 наших лекций.

Другим методом исследования в КТП являются *кластерные разложения* [Gli Ja Sp 1, 2]. Эти высокотемпературные разложения дают (внутри их области сходимости, см. рис. 6) наиболее детальную информацию о $P(\varphi)_2$-моделях. Вместе с низкотемпературными разложениями (которые, как мы надеемся, существуют) эти разложения должны сходиться для всех взаимодействий достаточно далеко от критической точки. Фактически индуктивные разложения для $P(\varphi)_2$ дают возможность анализировать произвольный интервал $[0, a]$ спектра гамильтониана H. Имеются связанные с этим индуктивные оценки для $P(\varphi)_2$- и φ_3^4-взаимодействий. И хотя применительно к φ_3^4-взаимодействию они еще не улучшены настолько, чтобы дать такие же детальные результаты, какие известны для $P(\varphi)_2$-взаимодействия, но в отличие от высокотемпературных разложений эти оценки справедливы без ограничений на величину констант связи.

1.3. *Картина Голдстоуна для $P(\varphi)_2$-взаимодействия*

Теперь мы вернемся к $P(\varphi)_2$-модели и обсудим ее более подробно. Существует очень простая картина, отчасти принадлежащая Голдстоуну и в настоящее время вошедшая в физический фольклор, которая объясняет, почему одни полиномы взаимодействия приводят к вырожденному вакууму, а другие нет (см. [Go, Go Sa We, Jo L] или более позднюю работу [Co We]). В классической теории поля (евклидово) основное состояние $P(\varphi)_2$-модели — это такая функция $\Phi \in \mathcal{S}'(R^2)$, которая минимизирует классическую (евклидову) энергию

$$\int [(\nabla \Phi(x))^2 + P(\Phi)]\, dx.$$

Эта функция Φ является константой, равной значению ξ, при котором минимален $P(\xi)$. В квантовой теории (евклидово) основное состояние — распределение вероятностей на $\mathcal{S}'(R^2)$, сосредоточенное (в некотором смысле) около классического минимума. Кроме того, квантовомеханическая картина требует поправок, включающих виково упорядочивание и контрчлены перенормировки массы в высших порядках (см. Колман и Вайнберг [Co We]). В явном виде связь между квантовой и классической теориями для $P(\varphi)_2$-модели установил Хепп [He 4].

Согласно голдстоуновской картине 1) физическая масса m — это кривизна P в точке ее минимума и 2) наличие двух (или нескольких) минимумов ведет к существованию нескольких фаз. В нашем обсуждении мы включаем в P массовый член из свободного гамильтониана H_0, но в силу пренебреже-

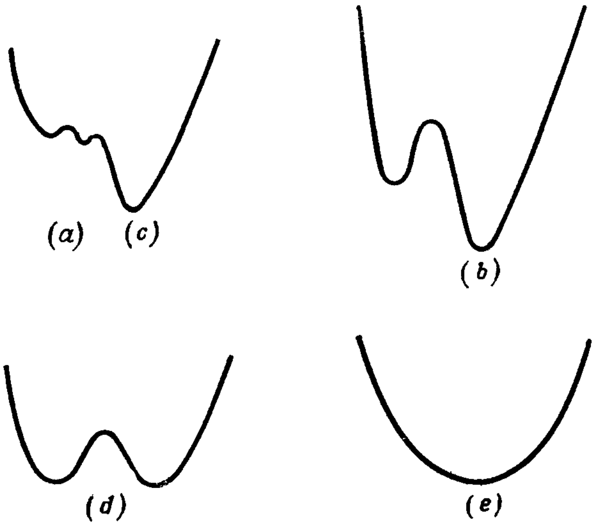


Рис. 4. Различные полиномы взаимодействия $P(\xi)$.

ния всеми квантовыми поправками кроме тех, что возникают от викова упорядочивания, наше обсуждение носит приближенный характер.

Пусть $\frac{1}{2}m_0^2$ — коэффициент при Φ^2 в полиноме P. Мы рассмотрим следующие полиномы (рис. 4):

(a) $$P(\xi)=\sum_{j=1}^{2n} c_j\xi^j,\quad c_{2n}>0,\ \frac{1}{2}m_0^2=c_2\gg c_j,\quad j\neq 2.$$

(b) $$P(\xi)=\lambda\xi^4+\frac{1}{2}m_0^2\xi^2-\mu\xi,\quad \lambda>0,\quad \mu\neq 0.$$

(c) $P(\xi)=P_0(\xi)-\mu\xi$; P_0 ограничен снизу, $\mu\gg 1$.

(d) $P(\xi)=\lambda P_0(\xi)+\frac{1}{2}m_0^2\xi^2$; $\lambda>0$, $m_0^2<0$, P_0 четный.

(e) $$P(\xi)=\lambda\xi^4;\quad \lambda>0,$$

В случае (b) с помощью тривиального преобразования $\xi \to \xi + \mathrm{const}$ к полиному может быть добавлен кубический член. В случае (с) ξ можно заменить на любую нечетную степень ξ^{2j+1}, $2j+1 < \deg P_0$. В случае (d) полином степени выше шестой может иметь больше, чем два минимума.

В случаях (a)—(c) полином $P(\xi)$ имеет единственный минимум с положительной кривизной. Поэтому здесь ожидается существование одной фазы с массивными частицами. В случае (d) в соответствии с симметрией $\varphi \to -\varphi$ имеются два минимума с положительной кривизной в каждом минимуме. Мы ожидаем здесь наличие двух чистых фаз с частицами положительной массы в каждой чистой фазе. Оба вакуумных состояния для этих фаз сосредоточены в окрестности минимума $\xi = \pm a$. Поэтому ожидается, что среднее значение поля $\langle\varphi\rangle$ по вакуумным состояниям для каждой из этих фаз приближенно равно $+a$ или $-a$ соответственно. Случай (e) является предельным для (d) и (a). Здесь $P(\xi)$ имеет единственный минимум при $\xi = 0$ с кривизной, равной нулю. Соображения Голдстоуна предсказывают здесь наличие частиц с нулевой массой и приводят к голдстоуновской картине критической точки.

К описанным представлениям приводит приближение самосогласованного поля, которое, по нашему мнению, дает правильные качественные, но не количественные предсказания. Таким образом, из существования предельного случая (e) следует возможность существования критического значения константы взаимодействия, для которого масса частиц $m = 0$. Картина Голдстоуна, предполагаемая для $\lambda P_0(\Phi) + \frac{1}{2} m_0^2\Phi^2$-модели с четным полиномом P_0, изображена на рис. 5. Р. Баумель [Ba] заметил, что возможность изменения определения викова упорядочивания (например, виково упорядочивание относительно голого вакуума с новой голой массой) позволяет считать, что одному и тому же гамильтониану H соответствуют различные голые параметры m_0, P. Таким образом, положение критической точки, выраженное через эти параметры, может меняться, так что знак m_0^2 в критической точке не имеет значения.

Результаты. Перечислим строгие результаты, доказанные для случаев (a)—(e). В случае (a) с помощью сходящегося кластерного разложения доказано, что оператор массы $M = (H^2 - P^2)^{1/2}$ имеет изолированные собственные значения $M = 0$ и $M = m > 0$ [Gli Ja Sp 1]. Эти результаты были обобщены на случай (c) [Sp 2]. Кроме того, доказано существование одной фазы, единственность вакуума и невырожденность собственного значения $M = m$ в смысле неприводимости действия группы Лоренца на одночастичном пространстве. Наконец, найдено, что возможный в интервале $(m, 2m)$ спектр оператора массы обязан быть дискретным и может описывать связанные состояния.

В случае (b) Гриффитс и Саймон [Gr Si] обобщили теорему Ли — Янга на случай φ_2^4- взаимодействия и применили этот результат для доказательства единственности основного состояния. Для больших λ и малых μ строение спектра массового оператора выше нуля не известно.

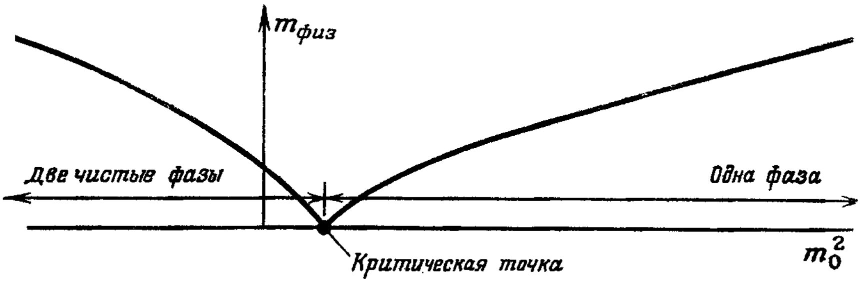


Рис. 5. Предполагаемая картина нарушения симметрии в $\lambda P_0(\varphi) + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2$-модели с четным взаимодействием.

В случае (d) Добрушин и Минлос [Dob Min] анонсировали существование по меньшей мере двух фаз [1]).

Нарушение непрерывной симметрии. Выше мы обсудили классическую картину теории поля с дискретной группой симметрий $\varphi \to -\varphi$, но имеется и другой фрагмент этой картины, относящийся к непрерывной группе симметрии [Go Sa We]. В непрерывном случае $P(\xi)$ имеет минимум на многообразии ненулевой размерности, и трансляции вдоль этого многообразия оставляют $P(\xi)$ постоянным. Согласно картине Голдстоуна, в случае нарушенной симметрии ($\delta \neq 0$, см. определение ниже) возникают частицы нулевой массы. Таким образом, эти частицы имеют массу, равную минимальной кривизне $P(\xi)$ на многообразии, на котором $P(\xi)$ имеет минимум.

В физической литературе нарушенная симметрия определяется с помощью сохраняющегося тока $\partial_\mu j^\mu = 0$, соответствующего группе симметрии. Существование такого сохраняющегося тока для классических теорий поля устанавливается с помощью стандартных методов вариационного

[1]) См. примечание на стр. 170.

исчисления. Генератор группы симметрии Q равен $\int j_0 d\mathbf{x}$, и в картине Голдстоуна рассматривается вакуумное среднее

$$\delta = \langle [iQ, \varphi] \rangle.$$

Если $\delta \neq 0$, то считается, что должны существовать частицы с нулевой массой. И действительно, в случае, когда автоморфное представление группы симметрии не является унитарно представимым, Кастлер, Робинсон и Свиека показали, что массовый спектр простирается до нуля [Ka Ro Sw], а Свиека [Sw] показал, что существуют частицы нулевой массы.

Рассмотрим два простых примера таких сохраняющихся токов: 1) свободное поле нулевой массы с плотностью энергии $\pi^2 + (\nabla\varphi)^2$, инвариантное относительно сдвигов $\varphi \to \varphi + \mathrm{const}$; 2) многокомпонентное поле, инвариантное относительно ортогональных преобразований в пространстве компонент.

В примере 1 $j_\mu = \partial_\mu \varphi$, параметр $\delta = 1$ и голдстоуновские бозоны — это сами исходные частицы нулевой массы. (Отметим, что эти соображения не применимы в двумерном пространстве-времени, где не существует свободных скалярных полей нулевой массы.)

Пример 2 соответствует рис. 4 (d) с симметрией относительно вращений вокруг оси $\xi = 0$. Если наше поле имеет две компоненты φ_i, то вакуумное среднее компонент поля $\langle \varphi_i \rangle = \pm \delta_i$. Голдстоуновские бозоны возникают при условии, если вектор $\boldsymbol{\delta}$, образованный компонентами δ_i, не равен нулю ($\boldsymbol{\delta} \neq 0$), т. е. $\langle \varphi \rangle \neq 0$. Предположим, что $\langle \varphi \rangle \neq 0$, и пусть n — единичный вектор в направлении $\langle \varphi \rangle$. Разложим φ на продольную и поперечную части $\varphi = \varphi_L + \varphi_T$, где

$$\varphi_L = (\varphi \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}, \quad \varphi_T \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Согласно обычной картине, $P(\cdot)$ имеет нулевую кривизну вдоль дна долины и поэтому должны появиться возбужденные состояния с нулевой массой. В ортогональном направлении кривизна $P(\cdot)$ положительна, и потому возможно появление массивных частиц. Таким образом, мы ожидаем экспоненциальное убывание у φ_L:

$$\langle \varphi_L(x)\, \varphi_L(y) \rangle \leqslant O(e^{-md}),$$

где

$$m > 0, \quad d = \sqrt{(x-y)^2},$$

но полиномиальное убывание у φ_T.

Как уже отмечалось, теория поля в двумерном пространстве-времени проявляет особенно сингулярное поведение в инфракрасной области. И действительно, Колман [Co 2] доказал, что в двумерном пространстве-времени наличие непрерывной симметрии, подобной описанной выше, всегда приводит к тому, что $\delta = 0$. Таким образом, обычная картина Голдстоуна не гарантирует существования частиц нулевой массы. Центральный момент в доказательстве Колмана — это использование ограничений на вид двухточечной функции Вайтмана, вытекающих из ее принадлежности классу обобщенных функций умеренного роста. Отсюда следует, что частицы нулевой массы не могут давать вклад в двухточечную функцию Вайтмана скалярного поля, что и приводит к $\delta = 0$. Его аргументация, однако, не запрещает массовому спектру простираться до нуля. Поэтому интересно было бы выяснить, имеет ли массовую щель модель $\lambda(\varphi^2)^2$ с $\lambda \gg m_0^2$. Мы выдвигаем гипотезу, состоящую в том, что массовая щель, которая имеется при малых λ, уменьшается пропорционально $(\lambda - \lambda_c)$ при подходе λ к критической точке λ_c и что щель отсутствует при $\lambda \geqslant \lambda_c$. Другими словами, мы думаем, что для $\lambda \gg \lambda_c$ не будет ни голдстоуновских бозонов, ни массовой щели.

1.4. Теория поля и статистическая механика

Вопрос об эквивалентности релятивистской квантовой теории поля и статистической механики имеет долгую историю. Среди старых работ следует упомянуть теорию Гинзбурга — Ландау и программу построеиия евклидовых моделей теории поля, выдвинутую Симанзиком. В список авторов новых работ входят Фишер, Вильсон, Гриффитс и ряд докладчиков на этой конференции. Мы опишем здесь некоторые аспекты связи, существующей между статистической механикой и квантовой теорией бозонных полевых моделей. Однако в моделях с фермионами пока еще не доказана полезность аналогичных идей.

Фуикция распределения. Пусть dq обозначает евклидову меру для бозонной модели квантовой теории поля. Функция распределения

$$Z\{J\} = \int e^{\Phi(J)}\, dq$$

является порождающим функционалом для функций Швингера; в $P(\varphi)_2$-моделях она была изучена Фрёлихом [Fr 2].

Как было отмечено выше, евклидова теория поля естественно аппроксимируется ферромагнитной моделью Изинга с непрерывным спином, рассматриваемой на решетке, с взаимодействием ближайших соседей (см., например, [Ko Wi]).

Доказательство сходимости решеточного приближения [Gu Ro Si] и аппроксимация теории поля с взаимодействием φ^4 моделью Изинга со спином $^1/_2$ придают обсуждаемому соответствию строгий смысл (см. также [New 2]).

Одноточечная функция Швингера $\int \Phi(x)\, dq$, которая параметризует нарушение симметрии в картине Голдстоуна, описанной выше, соответствует спонтанной намагниченности в теории Гинзбурга — Ландау. Константа взаимодействия λ/m_0^2, которая измеряет степень отклонения от свободной теории, соответствует обратной температуре $\beta = (kT)^{-1}$. Таким образом, картина Голдстоуна в теории поля аналогична картине фазовых переходов в системе многих тел. Существование щели в спектре H и экспоненциальное убывание средних значений соответствуют конечности параметра порядка $\xi = m^{-1}$ в системе многих тел.

Одночастичная структура. Определим $G\{J\}$ следующим образом:

$$G\{J\} = \ln Z\{J\} - \int \Phi(J)\, dq.$$

Тогда $G\{J\}$ будет порождающим функционалом для связных (усеченных) евклидовых функций Грина, одночастичная структура которых может быть выявлена с помощью преобразования Лежандра:

$$\Gamma\{A\} = \inf_J [-JA + G\{J\}],$$

или в дифференциальной форме

$$\Gamma\{A\} = -JA + G\{J\},$$

где J определяется из уравнения

$$A(x) = \frac{\delta G\{J\}}{\delta J(x)}.$$

Это преобразование было введено в статистической механике Де Доминисисом и Мартином [Do Ma], в квантовой теории поля его рассматривал Йона-Лазино [Jo L] и исследовал Симанзик [Sy 4]. Анализ $\Gamma\{A\}$ в конструктивной квантовой теории поля [Gli Ja 13] может дополнить наше изучение спектра гамильтониана с помощью описанных ниже разложений. Функционал $\Gamma\{A\}$ генерирует (ампутированные, одночастично неприводимые) вершинные функции.

Эти функции связаны с величиной сил, действующих между частицами, т. е. с физическим зарядом

Связанные состояния. В разд. 3 мы рассмотрим вопрос о связанных состояниях в некоторых квантовополевых моделях. Наш вывод (п. 3.3) об отсутствии связанных состояний в модели φ_2^4 основан на методах как теории поля, так и статистической механики. Мы будем применять высокотемпературные разложения из теории поля (см. ниже) и воспользуемся идеей Лебовича из статистической механики при получении двухчастичной факторизации для четырехточечной вершинной функции.

С другой стороны, в п. 3.4 мы наметим доказательство того, что в модели φ_2^4 связанные состояния возникают при наличии достаточно сильного внешнего поля. Заметим, что в статистической механике возбуждения, соответствующие связанным состояниям, появляются в трансфер-матрице при больших значениях химического потенциала μ.

Высокотемпературные разложения. С помощью высокотемпературных разложений в статистической механике доказывают существование термодинамического предела и аналитичность предельных величин при достаточно высоких температурах, т. е. отсутствие фазовых переходов. Ряды, отвечающие этим разложениям (называемые рядами Кирквуда — Зальцбурга или Майера — Монтролла), сходятся для достаточно больших T/T_c, где T_c — критическая температура. Связанное с ними вириальное разложение сходится при больших значениях химического потенциала μ; оно также приводит к аналитичности (отсутствию фазовых переходов), см. [Ru]. Аналогичную роль в теории поля играют кластерные разложения. Они сходятся для достаточно малых констант взаимодействия λ/m_0^2 [Gli Ja Sp 1, 2] (большие T) и для достаточно большого внешнего поля (большое μ). С их помощью можно доказывать существование квантованных полей в бесконечном объеме и существование одной фазы с единственным вакуумным вектором. Эти высокотемпературные разложения не связаны, вообще говоря, с уравнениями Кирквуда — Зальцбурга или с другими интегральными уравнениями, а имеют более широкую область применимости. Однако мы вывели уравнения Кирквуда — Зальцбурга для функции распределения Z (см. разд. 6 ч. II). Эти уравнения будут весьма полезны при доказательстве аналитичности функций Швингера.

С помощью высокотемпературных разложений можно изучать не только свойства вакуума в теории поля, но и получить подробную информацию о спектре гамильтониана H, например о корпускулярной структуре и о наличии или отсутствии связанных состояний (см. разд. 2, 3 этих лекций). Отметим, что эта более изощренная техника, используемая в теории поля, может оказаться полезной в статистической механике.

Низкотемпературные разложения. Доказательство существования фазовых переходов при низких температурах основано на идее Пайерлса [Pe].

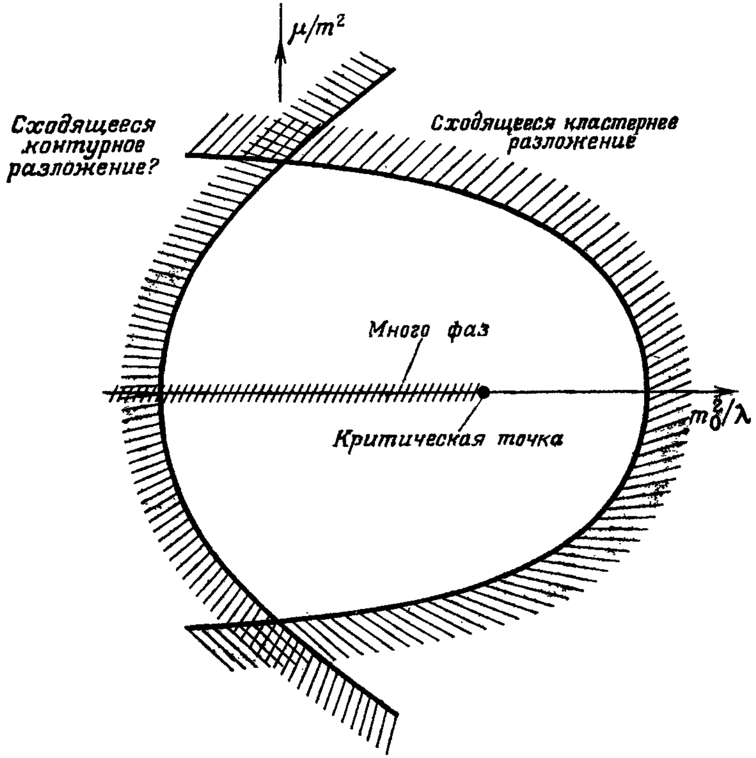


Рис. 6. Предполагаемые области сходимости кластерного и контурного разложений.

При доказательстве рассматривается энергия, сопоставленная границам (контурам), отделяющим спины, направленные вверх, от спинов, направленных вниз. Для температур T, много меньших T_c, энергетически выгодно, чтобы все спины были одновременно направлены вверх или вниз (обобщение метода Пайерлса было проведено Гриффитсом, Добрушиным и др., см., например, [Dob 1—3, Gi 2, Gr 1, ML, Mi Sin 1, 2]). В частности, метод контуров дает экспоненциальную факторизацию в чистых фазах для спиновых систем при низких температурах.

В работе [Bo Gr] были рассмотрены некоторые непрерывные спиновые системы.

Мы будем называть эти методы сходящимися низкотемпературными разложениями. Мы надеемся, что такие низкотемпературные контурные разложения существуют и в квантовой теории поля. Они должны сходиться достаточно далеко от критической точки. (Такое разложение можно было бы применить для доказательства утверждений, анонсированных Добрушиным и Минлосом [Dob Mi].) Мы надеемся, что низкотемпературные разложения существуют независимо от того, имеется одна или несколько фаз[1]).

Ожидается, что в чистой фазе эти разложения дадут возможность доказать экспоненциальную факторизацию и, таким образом, окажутся полезными для изучения корпускулярной структуры теории.

На рис. 6 показана предполагаемая область сходимости высокотемпературного (кластерного) и низкотемпературного (контурного) разложений в модели φ^4. Для таких моделей, как $\lambda\varphi^4 - \mu\varphi$, $\mu \gg \lambda$, в которых нарушение симметрии не возникает, области сходимости высоко- и низкотемпературных разложений могут пересекаться.

Корреляционные неравенства и теорема Ли — Янга. Эти методы позволяют доказать сходимость функций Швингера при переходе к бесконечному объему для четных $P(\varphi)_2$-моделей [Gu Ro Si 3, Nel 5] и наличие одной фазы для $(\varphi^4 + m_0^2\varphi^2 - \mu\varphi)_2$-моделей, $\mu \neq 0$, [Gr Si, Si 2]. Эти и связанные с ними вопросы обсуждаются в лекциях Гуэрры, Нельсона, Розена и Саймона, к которым мы и отсылаем читателя.

1.5. *Некоторые задачи*

Мы обсудим здесь некоторые открытые вопросы для модели $P(\varphi)_2$. Другие задачи, тесно связанные с материалом следующих разделов этих лекций, будут упомянуты в дальнейшем.

Асимптотическая полнота. Представляют интерес ответы на следующие вопросы: является ли S-матрица унитарной в модели φ^4 с малой константой связи[2]) и как это можно доказать (см. разд. 3)? Обеспечит ли асимптотическую полноту в моделях со связанными состояниями учет in- и out-полей,

---

[1]) Такие разложения получены в [Gli Ja Sp 4]. — *Прим. перев.*

[2]) Унитарность S-матрицы для $P(\varphi)_2$-модели со слабым взаимодействием для состояний с энергией, меньшей $4m$ (m — физическая масса), доказана в [Sp Zi]. — *Прим. перев.*

отвечающих связанным состояниям в спектре масс ниже $2m$? С этим связан вопрос о возможности построения кластерного разложения по асимптотическим полям, подобного формальному разложению Лемана — Симанзика — Циммермана матрицы рассеяния и подсказываемого уравнениями Янга — Фельдмана.

Асимптотическая теория возмущений. Известно, что ряд теории возмущений для евклидовых функций Грина является асимптотическим в области сходимости кластерного разложения [Di 3][1]. Мы думаем, что фейнмановский ряд теории возмущений для S-матрицы $S = I + \lambda S_1 + \ldots$ тоже является асимптотическим, а так как $S_1 \neq 0$, то это означает нетривиальность S-матрицы, т. е. что $S \neq I$[2]. Мы предполагаем, что разложение физической массы m по константе связи λ

$$m = m_0 + \lambda^2 m_2 + \lambda^3 m_3 + \ldots + \lambda^n m_n + O(\lambda^{n+1})$$

тоже является асимптотическим.

Кластерные разложения. Высокотемпературные разложения, обсуждаемые в ч. II, основаны на представлении гиббсовского множителя e^{-V_0} в гауссовой мере $d\Phi$ в виде $e^{-V_0} = 1 + (e^{-V_0} - 1)$. Это дает уравнения Кирквуда — Зальцбурга для Z и связанные с ними разложения произведений Z на функции Швингера $S(x_1, \ldots, x_n)$. Допускают ли эти разложения естественное обобщение, такое, чтобы с его помощью можно было изучать корпускулярную структуру теории? Какова оптимальная область сходимости для таких разложений?

Контурные разложения. Мы надеемся, что низкотемпературные разложения существуют и сходятся независимо от того, рассматривается ли $P(\varphi)_2$-модель с внутренней симметрией или нет. Что из себя представляют эти разложения? Можно ли с их помощью доказать существование предела в бесконечном объеме, исследовать вопрос о существовании частиц и изучить другие свойства спектра масс?

Аналитичность. Мы покажем в ч. II, что функции Швингера для модели $\lambda P(\varphi)_2$ аналитичны по λ в полукруге $0 < |\lambda| < \lambda_0$. $\mathrm{Re}\lambda > 0$. В какую область на комплексной

[1] В работе [Ec Ma Se] доказано, что этот ряд суммируем по Борелю. — *Прим. перев.*

[2] Нетривиальность S-матрицы для $P(\varphi)_2$-модели доказана в работе [Os Se]. — *Прим. перев.*

плоскости их можно аналитически продолжать? В статистической механике, для того чтобы расширить область аналитичности высокотемпературных (малые λ/m_0^2, т. е. большие m_0^2/λ) и вириальных (большие μ) разложений, применяется теорема Ли — Янга. Являются ли функции Швингера для $(\lambda\varphi^4 - \mu\varphi)$-взаимодействия вещественно-аналитическими по λ и μ везде, за исключением разреза от λ_{crit} до ∞? Другими словами, являются ли функции Швингера вещественно-аналитическими везде, кроме разреза вдоль линии многих фаз (см. рис. 6)? Какова область комплексной аналитичности? Заметим, что для $\lambda > 0$ и $\operatorname{Re}\mu \neq 0$ давление есть аналитическая функция [Sp 2].

Аксиомы Хаага — Доплихера — Робертса (ХДР). Справедлива ли для $P(\varphi)_2$-моделей аксиома дуальности, единственная пока еще не доказанная для этих моделей аксиома ХДР? Анализ суперотборных секторов, проведенный Хаагом, Доплихером и Робертсом, применим только для трех- и четырехмерного пространства-времени, но свойство дуальности, по-видимому, выполняется в $P(\varphi)_2$-моделях.

Критические точки. Если критическая точка существует, то как ведут себя в ее окрестности m, $\langle\varphi\rangle$, т. п.[1]? Действительно ли масса, спонтанная намагниченность и пр. изменяются по степенным законам (задаваемым критическими индексами)? Для $\lambda < \lambda_{\text{crit}}$ физическая масса m является монотонной функцией от m_0^2 [Gu Ro Si 3]. Остается ли эта зависимость монотонной выше критической точки? Колман показал, что $\delta = 0$ для $\lambda((\varphi)^2)^2$-моделей; действительно ли для этой модели имеется несколько фаз? Одну или несколько фаз имеет в критической точке модель $\lambda\varphi_2^4$? Появляются ли в этой модели в критической точке частицы нулевой массы? (Отметим, что частицы нулевой массы не могут появиться в двухточечной функции Вайтмана, поскольку она является обобщенной функцией умеренного роста [Gli Ja 4].) Существуют ли многофазные состояния в φ^6 и φ^8-моделях? Существуют ли для этих моделей критические многообразия?

Структурный анализ. С нашими знаниями о спектре частиц мы имеем все необходимое для того, чтобы выполнить анализ многочастичной структуры функций Грина в духе идей Симанзика [Sy 1]. Было бы также интересно выполнить структурный анализ моделей статистической механики. Как первый шаг в этом направлении мы доказали существование и ана-

[1]) См. по этому поводу [Gli Ja 15, 16]. — *Прим. перев.*

литичность порождающего функционала для одночастично неприводимых (1 P I) функций Грина [Gli Ja 13][1]. Эти вершинные функции играют важную роль при изучении нарушений симметрии и в методе ренормализационной группы. В рамках исследования нарушенных симметрий Иона-Лазинио дал определение эффективного потенциала, который, как ожидается, позволяет уточнить основанную на методе самосогласованного поля картину Голдстоуна (п. 1.3). Эвристически такие потенциалы изучались в [Co We]. Спрашивается: в каком смысле теория самосогласованного поля или модель эффективного потенциала является пределом квантовой теории поля?

Аномальные размерности. Исключительно интересный круг проблем связан с более тонкими деталями поведения $P(\varphi)_2$-моделей в критической точке. Эти идеи тесно связаны с идеями теоретиков, занимающихся физикой высоких энергий. Поведение на малых расстояниях $P(\varphi)_2$-и φ_3^4-моделей является каноническим; строгое доказательство этого должно следовать из оценок локального возмущения [Gli Ja 4, Fe 2]. Так как эти оценки справедливы для всех λ, они справедливы, в частности, в критической точке для $P(\varphi)_2$-модели и при этом дают логарифмическую сингулярность. С другой стороны, поведение на больших расстояниях в критической точке для $P(\varphi)_2$-моделей не является каноническим, так как $\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle \to \mathrm{const}$ при $|x-y|\to\infty$. Следовательно, мы не должны надеяться, что любая $P(\varphi)_2$-теория, которую мы построим, будет масштабно-инвариантной. В действительности масштабная инвариантность вакуума привела бы к тому, что масштабные преобразования были бы унитарно представимы. Отсюда в свою очередь следовало бы, что поведение при масштабных преобразованиях на больших и малых расстояниях было бы одинаковым.

Предположим, что критическая точка существует. Тогда мы приходим к заключению, что теория поля при значениях параметров, соответствующих критической точке, должна содержать фундаментальную длину. Эта длина характеризует расстояние, на котором асимптотическое поведение, типичное для малых расстояний, заменяется на асимптотическое поведение, типичное для больших расстояний. Масштабные преобразования изменяют эту длину, так что если критическая точка существует, то имеется континуальное множество теорий с частицами нулевой массы, связанных одна с другой масштабными преобразованиями. Можно было бы попытаться построить масштабно-инвариантную теорию, выполнив беско-

[1] Дальнейшее развитие этих исследований см. в [Gli Ja 17]. — *Прим. перев.*

нечное масштабное преобразование. Но будут ли существовать соответствующие пределы? [1]) Некоторые из задач, поставленных здесь, не решены уже для трехмерной модели Изинга, и серьезные попытки разобраться в этих вопросах могли бы начинаться с изучения этой модели.

Ренормализационная группа. Выше мы параметризовали $P(\varphi)_2$-теории с нулевой массой с помощью фундаментальной длины. Другое возможное описание основано на методе ренормализационной группы, которая представляет интерес и сама по себе. Спрашивается: можно ли уравнения Каллана — Симанзика применить для рассмотрения поведения на больших расстояниях в $P(\varphi)_2$-моделях? [2])

2. От оценок к физике

Как можно получить физические свойства частиц из оценок и разложений, о которых мы все время говорим? В этом разделе мы покажем, как свойства одночастичных состояний следуют из известных кластерных разложений. Основные оценки для полевых моделей показывают, что эффективное взаимодействие непересекающихся областей в евклидовом пространстве убывает как $\exp(-d/\xi)$. В ч. II описаны соответствующие результаты для двумерного пространства-времени. Для трехмерного пространства-времени аналогичные оценки дают убывание эффективного взаимодействия областей в фазовом пространстве и положительность гамильтониана для φ_3^4-взаимодействия.

Напомним, что в теории, описывающей частицы одного типа массы m, спектр операторов энергии-импульса состоит из трех непересекающихся частей: вакуума $\mathbf{P}=0$, $H=0$, одночастичного гиперболоида $H^2-\mathbf{P}^2=m^2$ и континуума $H^2-\mathbf{P}^2\geqslant(2m)^2$ (рис. 7). Двухчастичные состояния с импульсами $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ удобно параметризовать относительным импульсом $\mathbf{p}_R=\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2$ и полным импульсом $\mathbf{p}_T=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2$. Инвариантная масса для двухчастичных состояний имеет вид [3]). $2^{1/2}(\mu_1\mu_2-\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2+m^2)^{1/2}$, что в случае $\mathbf{p}_R=0$ равно $2m$.

Спектр оператора массы $M=(H^2-\mathbf{P}^2)^{1/2}$ показан на рис. 8. Собственное подпространство, соответствующее собственному значению $M=0$, называется *вакуумом*, а собственное подпространство, соответствующее собственному значению m, — *одночастичным подпространством*.

---

[1]) Анализ этих вопросов см. в [Gli Ja 15, 16]. — *Прим. перев.*

[2]) Возможность этого была показана в работе [Gli Ja 16]. — *Прим. перев.*

[3]) Здесь $\mu_i=(\mathbf{p}_i^2+m^2)^{1/2}$, $i=1, 2$. — *Прим. перев.*

Для исследования спектральных свойств H и M мы применим оценки, найденные с помощью кластерных разложений, и докажем, что:

1) равномерные вакуумные кластерные оценки обеспечивают сходимость теории, когда объем $\Lambda \to R^2$, и сохраняются в пределе бесконечного объема;

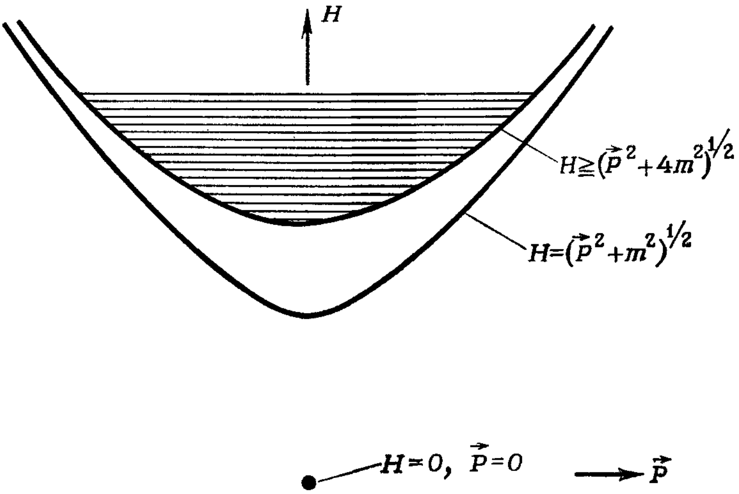


Рис. 7.

2) предельные функции Швингера (для вещественных констант связи) удовлетворяют аксиомам Остервальдера — Шрадера и поэтому дают теорию Вайтмана. Кластерное свойство

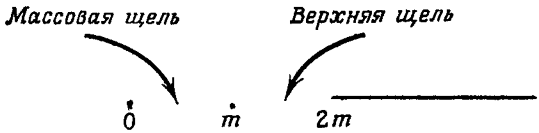


Рис. 8

вакуума (асимптотическая факторизация) приводит к единственности вакуумного вектора;

3) вакуумное кластерное разложение дает оценку скорости экспоненциальной факторизации, что приводит к единственности вакуума и существованию массовой щели. С помощью одночастичного кластерного разложения мы получаем оценку на величину массовой щели сверху и доказываем, что собственное значение $M = m$ изолировано.

В п. 2.1 мы докажем некоторые простые предложения из функционального анализа, которые в п. 2.2 будут применяться для доказательства утверждений 1—3.

2.1. *Функциональный анализ*

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ задан самосопряженный оператор $H \geqslant 0$, и пусть E_a — его спектральный проектор на $[0, a]$. Пусть $\mathscr{D}$ — плотное в $\mathscr{H}$ подпространство и $\mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}$.

Предложение 2.1.1. *Предположим, что для любого $\theta \in \mathscr{D}$ найдутся такие $\chi \in \mathscr{D}_0$ и $\varepsilon > 0$, что*

$$\langle \theta - \chi, \ e^{-tH} (\theta - \chi) \rangle \leqslant M_\theta e^{-(a+\varepsilon) t}. \tag{2.1.1}$$

Тогда $E_a \mathscr{D}_0$ плотно в $E_a \mathscr{H}$ и

$$\langle \theta - \chi, e^{-tH} (\theta - \chi) \rangle \leqslant \| \theta - \chi \|^2 e^{-(a+\varepsilon) t}. \tag{2.1.2}$$

Доказательство. Для $\theta \in \mathscr{D}$

$$\begin{aligned} \| E_a (\theta - \chi) \| &= \| E_a e^{tH} e^{-tH} (\theta - \chi) \| \leqslant \\ &\leqslant e^{at} \langle \theta - \chi, \ e^{-2tH} (\theta - \chi) \rangle^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant M_\theta^{1/2} e^{-\varepsilon t} \to 0. \end{aligned}$$

Поскольку t произвольно, $\|E_a (\theta - \chi)\| = 0$, и мы видим, что $E_a \mathscr{D}_0 = E_a \mathscr{D}$ и поэтому плотно в $E_a \mathscr{H}$. Применяя n раз неравенство Шварца

$$\begin{aligned} \langle \theta - \chi, \ e^{-tH} (\theta - \chi) \rangle &\leqslant \| \theta - \chi \| \cdot \| e^{-tH} (\theta - \chi) \| \leqslant \\ &\leqslant \| \theta - \chi \|^{2-2^{-n}} e^{-(a+\varepsilon) t} M_\theta^{2^{-n}} \to \\ &\to \| \theta - \chi \|^2 e^{-(a+\varepsilon) t}, \end{aligned}$$

получаем требуемую оценку (2.1.2).

Пусть теперь в гильбертовом пространстве $\mathscr{K}$ задано унитарное представление $U(a, \Lambda)$ неоднородной группы Лоренца. Пусть $\mathscr{K}_0 \subset \mathscr{K}$ — подпространство ограниченной энергии и импульса, $P_0 \leqslant c_0$, $|\mathbf{P}| \leqslant c_1$. Пусть $U(a) \mathscr{K}_0 \subset \mathscr{K}_0$ и $\left(\bigcup_{a, \Lambda} U(a, \Lambda) \mathscr{K}_0 \right)^- = \mathscr{K}$.

Предложение 2.1.2. *Если $\mathscr{K}_0 \neq \{0\}$ содержит циклический вектор для подгруппы пространственных трансляций $U(\mathbf{a})$, то спектр $M \upharpoonright \mathscr{K}$ состоит из одной точки и $U(a, \Lambda)$ неприводимо в $\mathscr{K}$.*

Доказательство. Семейство $U(\mathbf{a})$ максимально абелево на $\mathscr{K}_0$, поэтому любой оператор, коммутирующий с $U(\mathbf{a})$, есть функция от $\mathbf{P}$. В частности, оператор энергии есть функция от $\mathbf{P}: H = H(\mathbf{P})$, а тогда из лоренц-инвариантности следует, что $H = (\mathbf{P}^2 + \bar{m}^2)^{1/2}$ для некоторого $\bar{m}$. (Здесь используется нетривиальность $\mathscr{H}_0$.) Таким образом, $M = \bar{m}$ на $\mathscr{H}_0$ и из лоренц-инвариантности следует, что $M = \bar{m}$ на $\mathscr{H}$. Так как приводимость означала бы, в частности, кратность массового спектра, представление $U(a, \Lambda)$ неприводимо.

2.2. Физические применения

Функции Швингера с пространственно-временным обрезанием h даются выражением

(2.2.1) $$S_h(x_1, \ldots, x_n) = \int \Phi(x_1) \ldots \Phi(x_n)\, dq_h,$$

где dq_h — мера вида

(2.2.2) $$dq_h = e^{-V(h)}\, d\Phi \Big/ \int e^{-V(h)}\, d\Phi,$$

$d\Phi$ — гауссова мера со средним, равным нулю, и ковариацией $\left(-\Delta + m_0^2\right)^{-1} = C$ и

$$V(h) = \lambda \int :P(\Phi(x)):\, h(x)\, dx$$

— евклидово действие, отвечающее $P(\varphi)_2$-модели. Если $h(x)$ — характеристическая функция множества $\Lambda \subset R^2$ объема $|\Lambda|$, то $V(h)$ называется действием для Λ. Соответствующие функции Швингера будем обозначать S_Λ.

Рассмотрим вакуумное кластерное разложение, которое дает оценку скорости асимптотической факторизации вакуумного состояния. Пусть A — функция от евклидовых полей,

(2.2.3) $$A = \prod_{i=1}^{n} \int :\Phi(x)^{n_i}:\, f_i(x)\, dx,$$

где $f_i(x)$ принадлежит $L_2(R^2)$ или имеет вид $\delta_s(t) f_i(\mathbf{x})$, где $f_i(\mathbf{x}) \in L_2(R)$. Пусть $\{\Delta\}$ — покрытие R^2 единичными квадратами (решетка), и определим $\operatorname{supp} A$ как наименьшее объединение квадратов Δ, содержащее $\operatorname{supp} f_1 \cup \ldots \cup \operatorname{supp} f_n$. В дальнейшем через A и B будут обозначаться функции вида (2.2.3).

Теорема 2.2.1 (вакуумное кластерное разложение [Gli Ja Sp 1, 2]). *Пусть* $\gamma = m_0 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим $\lambda P(\varphi)_2$-*модель с* $\lambda < \lambda(\varepsilon, P, m_0)$.

Пусть $d = \operatorname{dist}\{\operatorname{supp} A, \operatorname{supp} B\}$. *Тогда существует константа* $M_{A,B}$, *такая, что*

(2.2.4) $$\left| \int AB\, dq_h - \int A\, dq_h \int B\, dq_h \right| \leqslant M_{A,B}\, e^{-\gamma d}$$

равномерно по h.

[Можно получить точную оценку константы $M_{A,B}$ через функции f_i. Предположим, что носитель каждой из f_i сосредоточен в некотором Δ_i (произвольная функция A есть сумма таких *локализованных* A). Пусть $N(\Delta)$ — сумма тех n_i, для которых $\operatorname{supp} f_i \in \Delta$. Пусть задано некоторое положительное число K_1, и положим

$$\mathcal{N} = \prod_{\Delta} (K_1 N(\Delta)!).$$

Для локализованной функции A пусть

$$\|A\| = \mathcal{N} \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|. \tag{2.2.5}$$

Здесь $\|f\| = \|f\|_{L_2(R^2)}$, если $f \in L_2(R^2)$, и $\|f\| = \|f(\mathbf{x})\|_{L_2(R)}$, если $f(x) = \delta_s(t) f(\mathbf{x})$. Предположим еще, что $n_i \leqslant \bar{n}$. Тогда для достаточно большого K_1

$$M_{A,B} \leqslant \|A\| \cdot \|B\|. \tag{2.2.6}$$

Если не выполняется условие $n_i \leqslant \bar{n}$, то (2.2.6) все равно имеет место, только в определении $\|\cdot\|$ (см. 2.2.5) нужно заменить $\mathcal{N}$ на $\mathcal{N}^3$.

Справедлива также следующая равномерная по h оценка:

$$\int A\, dq_h \leqslant \|A\|.] \tag{2.2.7}$$

Теорема 2.2.2. *Функции Швингера $S_\Lambda(x_1, \ldots, x_n)$ имеют в $\mathcal{S}'(R^{2n})$ предел $S(x_1, \ldots, x_n)$ при $\Lambda \to R^2$, удовлетворяющий аксиомам Остервальдера — Шрадера.*

Доказательство. Как объясняется в лекциях Остервальдера и Нельсона, достаточно доказать сходимость S_Λ при $h \to 1$ и получить простые φ-оценки, следующие в нашем случае из вакуумного кластерного разложения. Здесь мы докажем сходимость. Пусть $0 \leqslant h_0 \leqslant h_1 \leqslant 1$ — два пространственно-временных обрезания и носитель $h_1 - h_0$ сосредоточен в ограниченном множестве Γ. Пусть $A = \Phi(f_1) \ldots \Phi(f_n)$, $\operatorname{supp} A \subset \operatorname{supp} h_0$, $d = \operatorname{dist}(\Gamma, \operatorname{supp} A)$ и $\bar{\Gamma}$ — множество квадратов, пересекающихся с Γ.

Определим функцию

$$F(\alpha) = \int A\, dq_\alpha,$$

где $dq_\alpha = dq_{h_\alpha}$ и $h_\alpha = \alpha h_1 + (1-\alpha) h_0$. Тогда, дифференцируя (2.2.2), получим

$$\int A\,dq_1 - \int A\,dq_0 \Big| = \Big| \int_0^1 F'(\alpha)\,d\alpha \Big| =$$

$$= \int_0^1 d\alpha \sum_{\Delta\subset\overline{\Gamma}} \Big[\int AV(\Delta)\,dq_\alpha - \int A\,dq_\alpha \int V(\Delta)\,dq_\alpha \Big].$$

По теореме 2.2.1 и (2.2.6) эта сумма оценивается с помощью неравенства

$$\sup_\Delta M_{A,\,V(\Delta)} e^{-\gamma' d} \leqslant O(1)\, e^{-\gamma' d}$$

для $\gamma' = m_0 - 2\varepsilon$. Пусть теперь h_0, h_1 будут характеристическими функциями множеств Λ_0, $\Lambda_1 \subset R^2$. Тогда $d \to \infty$ при Λ_0, $\Lambda_1 \to R^2$, и мы получаем требуемую сходимость.

Характер зависимости кластерных разложений от λ показывает, что $S(f_1, \ldots, f_n)$ суть непрерывные функции от λ. Более того, в ч. II с помощью кластерного разложения будет доказана аналитичность по λ в полукруге $0 < |\lambda| < \lambda_0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Теорема 2.2.3 (массовая щель). *В $\lambda P(\varphi)_2$-моделях с достаточно малой λ вакуум Ω образует подпространство с энергией, меньшей $\gamma = m_0(1-\varepsilon)$.*

Доказательство. Пусть $A = \Phi(f_1) \ldots \Phi(f_n)$, $\operatorname{supp} A$ — компактное множество, θ_A — вектор в релятивистском гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, соответствующий евклидовой функции A. Идея доказательства состоит в том, чтобы применить предложение 2.1.1, выбрав в качестве $\mathscr{D}$ линейную оболочку векторов вида θ_A и в качестве $\mathscr{D}_0$ подпространство, натянутое на вакуум Ω.

Так как кластерные оценки равномерны по h, они справедливы и в пределе бесконечного объема, когда $h = 1$. Пусть A_d — сдвиг A в (евклидовом) временном направлении. Тогда по теореме 2.2.1 при $\gamma = m_0 - \varepsilon$

$$\langle \theta_A, e^{-dH}\theta_A \rangle = \int A^* A_d\,dq = \int A^*\,dq \int A\,dq + O\left(M_A e^{-\gamma d}\right) =$$

$$= \langle \theta_A, \Omega \rangle^2 + O\left(M_A e^{-\gamma d}\right).$$

Другими словами, если $\theta_A^\perp = \theta_A - \langle \Omega, \theta_A \rangle \Omega$ — компонента θ_A, ортогональная к Ω, то

$$\langle \theta_A^\perp, e^{-dH}\theta_A^\perp \rangle \leqslant O\left(M_A e^{-\gamma d}\right).$$

Теперь утверждение теоремы следует из предложения 2.1.1. Перейдем далее к рассмотрению более сильных результатов о факторизации, с помощью которых можно изучать произвольный интервал энергетического спектра [Gli Ja Sp 1]. Эти разложения будут определяться по индукции, а не в замкнутой форме или в виде уравнений Кирквуда — Зальцбурга. Приведем формулировку разложения для $n=1$, т. е. одночастичного кластерного разложения. Пусть $\gamma = 2(m_0 - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Теорема 2.2.4 (одночастичное кластерное разложение). *Пусть дано* $\varepsilon > 0$ *и рассмотрим* $\lambda P(\varphi)_2$*-модель с* $\lambda < \lambda(\varepsilon, m_0, P)$. *Тогда для* θ_A, *определенного выше, существует функция* h *из* $L_2(R)$, *такая, что для* $\chi = \langle \Omega, \theta_A \rangle \Omega + \varphi(h)\Omega$ *имеем оценку*

$$\langle \theta_A - \chi, e^{-tH}(\theta_A - \chi) \rangle \leqslant M_A e^{-\gamma t}.$$

Здесь $\varphi(h)$ *— релятивистское квантованное поле* $\lambda P(\varphi)_2$*-теории, взятое в нулевой момент времени.*

Для доказательства снова применим предложение 2.1.1, выбрав $\mathscr{D}$, как в предыдущей теореме, и образовав $\mathscr{D}_0$ из векторов $\{\Omega, \varphi(h)\Omega\}$, $h \in L_2(R)$.

Следствие 2.2.5. *Векторы из* $E_{2m_0-\varepsilon}\mathscr{D}_0$ *являются состояниями с энергией, меньшей чем* $2m_0 - \varepsilon$.

Теорема 2.2.6 (оценка величины массовой щели сверху). *В* $\lambda P(\varphi)_2$*-моделях с достаточно малой константой связи* λ *оператор массы* M *имеет собственные значения* 0, m *и не имеет другого спектра в интервале* $[0, 2m_0 - \varepsilon]$.

Доказательство. Пусть $E = E_{2m_0-\varepsilon}(I - E_0)$, пусть $\mathscr{K}_0 = E\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ — объединение лоренцевых сдвигов пространства $\mathscr{K}_0$. Мы хотим построить циклический вектор χ для подгруппы пространственных сдвигов на $\mathscr{K}_0$. Согласно предложению 2.1.2, спектр M на $\mathscr{K}$ состоит только из одной точки (кроме случая, когда $\mathscr{K}_0 = \{0\}$). Покажем сперва, что $\mathscr{K}_0 \neq \{0\}$. Действительно, нетрудно показать, применяя известную зависимость кластерных оценок от λ, что двухточечная функция сходится в $\mathscr{S}'$ к свободной двухточечной функции при $\lambda \to 0$. Поскольку свободная теория имеет одночастичное состояние с массой m_0, то теория со взаимодействием при достаточно малых λ должна иметь по крайней мере некоторые точки спектра в окрестности m_0. Таким образом, $\mathscr{K}_0 \neq \{0\}$. M имеет собственные значения 0 и $m \in [m_0 - \varepsilon, m_0 + \varepsilon]$ и не имеет других точек спектра в интервале $[0, 2m_0 - \varepsilon]$.

Для того чтобы завершить доказательство, построим теперь χ. Пусть $h_1 \in \mathcal{S}(R)$, $\tilde{h}_1 > 0$. Покажем, что $E\varphi(h_1)\Omega$ — циклический вектор в $\mathcal{H}_0$. Положим $h_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}-\mathbf{a})$. Тогда

$$U(\mathbf{a})\,\varphi(h)\,\Omega = \varphi(h_{\mathbf{a}})\,\Omega$$

и $\varphi(h_1 * h_2)\Omega = \varphi\left(\int h_1(\cdot - \mathbf{a})\,h_2(\mathbf{a})\,d\mathbf{a}\right)\Omega = \int d\mathbf{a}\,h_2(\mathbf{a})\varphi(h_{1a})\Omega = \int d\mathbf{a}\,h_2(\mathbf{a})\,U(\mathbf{a})\,\varphi(h_1)\,\Omega$. Так как E и $U(\mathbf{a})$ коммутируют, вектор

$$E\varphi(h_1 * h_2)\,\Omega = \int d\mathbf{a}\,h_2(\mathbf{a})\,e^{-i\mathbf{P}\mathbf{a}}E\varphi(h_1)\,\Omega$$

лежит в пространстве, образованном сдвигами $E\varphi(h_1)\Omega$. Пространство, образованное $E\varphi(h)\Omega$, можно, согласно следствию 2.2.5, отождествить с $\mathcal{H}_0$. И, поскольку множество функций $(h_1 * h_2)^{\sim} = \tilde{h}_1\tilde{h}_2$ плотно в C_0^∞, когда h_2 пробегает C_0^∞, мы получаем, что $\chi = E\varphi(h_1)\Omega$ — циклический вектор для $U(\mathbf{a})$ в пространстве $\mathcal{H}_0$.

3. Связанные состояния и резонансы

3.1. Введение

Одна из важных физических проблем — это вопрос о том, как составные частицы, т. е. связанные состояния и резонансы, образуются из элементарных. В атомной физике, используя шредингеровский гамильтониан и кулоновское взаимодействие, можно доказать существование атомов и молекул и изучить их рассеяние. Спектральные свойства гамильтонианов атомной и молекулярной физики являются предметом интенсивного математического изучения.

Подобные идеи имеют хождение и в ядерной физике, и в физике элементарных частиц, но здесь отсутствует их строгое математическое обоснование. Таким образом, важнейший физический вопрос заключается в том, имеет ли данная модель квантовой теории поля связанные состояния. Можно поставить, например, следующие вопросы: достаточно ли сильно взаимодействуют между собой мезоны и нуклоны для того, чтобы образовать стабильные ядра? Являются ли ρ и η-мезоны π-мезонными резонансами?

Относительно этих важных вопросов в квантовой теории поля известно очень мало. Фактически нет ни одной квантово-полевой модели, в которой было бы доказано существование связанных состояний; эвристические вычисления, основанные на теории возмущений и уравнении Бете — Солпитера, не позволяют прийти к определенным заключениям.

В этой лекции будут описаны физические представления, позволяющие делать выводы о том, когда следует, а когда не следует ожидать наличия связанных состояний в $P(\varphi)_2$-моделях со слабым взаимодействием или в сильном внешнем поле. Мы докажем отсутствие двухчастичных связанных состояний в φ^4-модели. Будет намечено доказательство существования связанных состояний в присутствии сильного внешнего поля и в некоторых других моделях.

Связанные состояния соответствуют собственным значениям оператора массы M, введенного в разд. 2. Точки спектра, соответствующие связанным состояниям, должны лежать ниже двухчастичного континуума; в противном случае не было бы энергетического запрета для их распада на свободные частицы. (Распад связанных состояний может быть, кроме того, запрещен дополнительными правилами отбора, зависящими от вида взаимодействия.) С другой стороны, физическая интерпретация непрерывного спектра оператора массы в интервале $[0, 2m)$ отсутствует. Поэтому считается, что непрерывного спектра действительно нет в этом интервале, а двухчастичные связанные состояния могут возникать в «интервале связанных состояний» $(m, 2m)$ массового спектра, как это показано на рис. 9.

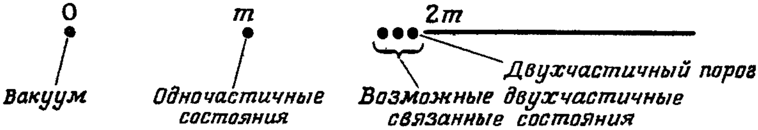


Рис. 9. Спектр оператора массы M.

В теории четного взаимодействия, например φ^4, можно разложить гильбертово пространство в соответствии с четностью состояний относительно симметрии $\varphi \to -\varphi$. Состояния с четным числом частиц будут лежать в четном подпространстве. Ограничение M на нечетное пбдпространство имеет спектр, показанный на рис. 10.

Рис. 10. Массовый спектр иа иечетиом подпространстве четной теории.

Резольвента $R(z) = (M - z)^{-1}$ оператора массы — аналитическая функция z, $\operatorname{Im} z \neq 0$. Она имеет полюса в каждом собственном значении M (соответствующие частицам и связанным состояниям) и, по-видимому, должна иметь разрезы, начинающиеся с каждого n-частичного порога. Вопрос о существовании резонансов — это вопрос об аналитических свойствах $R(z)$ (или соответствующих матричных элементов) после продолжения через эти разрезы. Полюс в комплексной плоскости, расположенный достаточно близко к разрезу, называется резонансом. Такой полюс проявляется при рассеянии частиц как пик в сечении рассеяния. Другая интерпретация резонанса — это нестабильная частица.

Вещественная часть положения полюса определяет массу резонанса, а мнимая часть определяет его время жизни. Чрезвычайно важно провести детальное рассмотрение резонансов и ответить на вопрос: существуют ли такие константы связи, для которых $P(\varphi)_2$-модели имеют резонансы?

Наличие или отсутствие составных частиц зависит от того, являются межчастичные силы притягивающими или отталкивающими. Мы поставим связанный с этим вопрос: увеличивает или уменьшает взаимодействие между парой частиц их энергию по сравнению с состоянием, в котором они асимптотически удалены друг от друга? Если энергия увеличивается, связанные состояния не возникают. Если энергия уменьшается ниже двухчастичного континуума, ожидается появление связанного состояния. В п. 3.2 мы мотивируем нашу точку зрения на этот вопрос, обратившись к теории возмущений. В п. 3.3 для рассмотрения этого же вопроса применяются кластерные оценки и корреляционные неравенства. В п. 3.4 будет показано, как возникают связанные состояния.

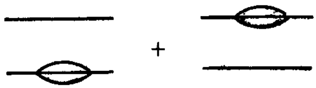
Предлагаемую картину двухчастичного связанного состояния лучше всего можно описать в терминах относительного импульса $\mathbf{p}_R$. Существует три вида сил: *притягивающие*, *отталкивающие* и *дисперсионные*. Смысл терминов «притягивающая сила» и «отталкивающая сила» понятен без объяснений. Дисперсионный эффект возникает из-за наличия кривизны у массового гиперболоида. Состояние, описывающее две свободные частицы с $\mathbf{p}_T = 0$, имеет полную энергию $(4m^2 + \mathbf{p}_R^2)^{1/2}$, а в общем случае для малых импульсов двухчастичное состояние имеет энергию $2m + O(\mathbf{p}_R^2 + \mathbf{p}_T^2)$. Это увеличение энергии по сравнению с состоянием с нулевым импульсом и есть то, что мы назвали эффектом дисперсии. Для того чтобы могли возникнуть связанные состояния, силы притяжения должны превышать дисперсионные и отталкивающие силы.

Введем параметр δ, характеризующий протяженность волнового пакета связанного состояния. Если в импульсном пространстве пакет сосредоточен в области $|\mathbf{p}_R| \leqslant \delta$, то в конфигурационном пространстве он характеризуется параметром порядка δ^{-1}. Естественно ожидать, что при уменьшении взаимодействия протяженность пакета в конфигурационном пространстве должна увеличиваться, так как связанное состояние простирается во все большем объеме и его энергия постепенно переходит в непрерывный спектр. Поэтому мы ожидаем, что $\delta \to 0$ при $\lambda \to 0$. Притягивающие силы имеют характерную зависимость от δ и λ: эффект дисперсии имеет порядок $O(\delta^2)$. В $P(\varphi)_2$-моделях мы покажем, что в теории возмущений притягивающие и отталкивающие силы дают вклад порядка $O(\delta)$, умноженный на соответствующую безразмерную константу связи λ_j/m_0^2. Баланс этих сил мы обсудим в п. 4.

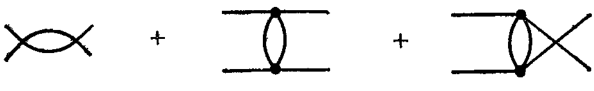
3.2. *Формальная теория возмущений*

Для взаимодействия $\lambda\varphi^4$ вклад первого порядка в двухчастичную энергию дается фейнмановской диаграммой

и положителен при $\lambda > 0$. Во втором порядке мы находим, что такой вклад состоит из двух слагаемых — добавки к массе от несвязных диаграмм Фейнмана



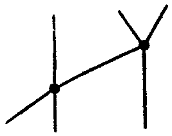
и положительной (отталкивающей) добавки вида



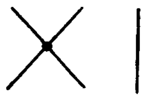
При малых λ доминирует отталкивающий эффект, отвечающий диаграмме первого порядка. Таким образом, нельзя ожидать возникновения двухчастичных связанных состояний в φ_2^4-модели со слабым взаимодействием, и это действительно будет доказано в п. 3.3.

Отметим, что диаграммы, дающие добавку к массе, указанные выше, производят перенормировку массы одночастичного состояния во втором порядке, т. е. сдвиг от m_0 к m_2. Разумеется, с точностью до второго порядка, мы измеряем n-частичные силы (сдвиги энергии) относительно nm_2. Мы не включаем сюда сдвиги энергии вакуума, так как они исключаются, если производить разложения относительно точного (зависящего от константы λ) основного состояния.

Если рассматривается взаимодействие между тремя частицами, то в низшем порядке диаграммы

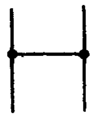


дают трехчастичные силы притяжения. Однако диаграммы

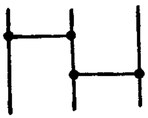


приводят к отталкиванию в двухчастичных подсистемах. Так как эти двухчастичные силы — первого порядка, а трехчастичная сила — второго, мы ожидаем, что силы отталкивания будут доминировать при малых константах связи. Но появление трехчастичного нестабильного состояния (резонанса) возможно.

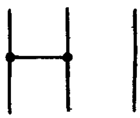
Для взаимодействия φ^3 двухчастичные силы в низшем порядке являются притягивающими:



Аналогично, взаимодействие n частиц в низшем порядке тоже притягивающее. Например, в третьем порядке имеем диаграммы вида



Эти притягивающие силы дополняют притяжение, существующее в двухчастичной подсистеме. Например, для случая трех частиц



Таким образом, мы предполагаем наличие двухчастичных связанных состояний, а также связанных состояний трех или более частиц, если правила отбора запрещают их распад. В противном случае притягивающие многочастичные силы должны давать многочастичные резонансы.

Разумеется, чистая φ^3-теория не существует, поскольку энергия в ней не ограничена снизу. Однако, если член φ^3 в более сложном взаимодействии имеет коэффициент, много больший, чем другие константы связи, мы ожидаем, что эффекты взаимодействия φ^3 будут преобладать. Таким образом, предыдущее качественное обсуждение применимо к $(\lambda_1\varphi^3 + \lambda_2 P(\varphi)_2)$-модели, если $\lambda_1 \gg \lambda_2$. В этом случае предполагается наличие связанных состояний, и в частности двухчастичных связанных состояний.

В связи со сказанным интересна $P(\varphi)_2$-модель во внешнем поле, т. е. модель с $(P(\varphi)_2 - \mu\varphi)$-взаимодействием. Внешнее поле можно исключить преобразованием $\varphi \to \varphi + \mathrm{const}$ (локально это преобразование генерируется $\exp\left(i\int \pi(x)\,dx\right)$). Например, модель со взаимодействием $\lambda\varphi^4 - \mu\varphi$ преобразуется в $(\lambda\varphi^4 + a\varphi^3 + b\varphi^2)$-модель, где $4\lambda a^3 + am^2 = \mu$. Коэффициент b у массового члена тоже зависит от μ, но масштабным преобразованием его можно сделать равным 1. Мы выдвигаем *гипотезу*: в φ^4-модели в сильном внешнем поле, $\mu \gg \lambda$, существуют связанные состояния.

Подобный анализ применим к произвольной $(\lambda P(\varphi)_2 - \mu\varphi)$-модели. Убирая внешнее поле, мы добавляем к P полином низшей степени. Для больших μ наибольшие коэффициенты имеют степени 2 и 3. Квадратичный член дает сдвиг массы, а кубический — потенциал притяжения в низшем порядке. Таким образом, мы выдвигаем *гипотезу*: в $\lambda P(\varphi)_2$-моделях в сильном внешнем поле, $\mu \gg \lambda$, существуют связанные состояния.

Вопрос: существуют ли связанные состояния в Y_2-моделях? Мы предполагаем, что это действительно так.

3.3. Об отсутствии связанных состояний

Рассмотрим модель $\lambda\varphi_2^4$ со слабым взаимодействием и докажем, что двухчастичные связанные состояния в ней отсутствуют.

Теорема 3.3.1. *Пусть в $\lambda\varphi_2^4$-модели λ/m_0^2 достаточно мало. Тогда спектр оператора массы $M = (H^2 - P^2)^{1/2}$ лежит вне интервала двухчастичных связанных состояний $(m, 2m)$.*

Поскольку вакуум единствен, мы приходим к заключению, что симметрия $\varphi \to -\varphi$ может быть представлена унитарным оператором и что гильбертово пространство $\mathscr{H}$ разлагается на четное и нечетное подпространства $\mathscr{H}_e$, $\mathscr{H}_o$, каждое из которых инвариантно относительно $U(a, \Lambda)$ и φ. Доказательство нашей теоремы разбивается на три этапа. Во-первых, с помощью кластерных разложеиий [Gli Ja Sp 1] мы сводим задачу к рассмотрению двухточечной функции для $\mathscr{H}_o$ и четырехточечной функции для $\mathscr{H}_e$. Во-вторых, неравенство Лебовича [Leb 2], доказанное для модели Изинга, исключает возможность того, чтобы массовый спектр в интервале $(0, 2m)$ возникал в четырехточечной функции. И наконец, кластерные оценки исключают возможность появления массового спектра в интервале $(m, 2m)$ в двухчастичной функции.

Условие малости взаимодействия в теореме 3.3.1 связано со скоростью γ экспоненциального убывания $e^{-\gamma d}$ в оценке двухчастичного кластерного разложения. Мы показали в [Gli Ja Sp 1], что $\gamma \to 3m_0$ и $m \to m_0$ при $\lambda/m_0^2 \to 0$. В теореме 3.3.1 требуется, чтобы λ/m_0^2 было достаточно мало, чтобы обеспечить неравенство $\gamma \geqslant 2m$.

Для четных $P(\varphi)_2$-моделей мы получаем бóльшую массовую щель на нечетном подпространстве в соответствии с рис. 10.

Теорема 3.3.2. *Рассмотрим четную $\lambda P(\varphi)_2$-модель. Для данного $\varepsilon > 0$ пусть λ/m_0^2 настолько мало, что обеспечивается неравенство $\gamma \geqslant 3m_0 - \varepsilon$, где γ — скорость экспоненциального убывания в оценке двухчастичного кластерного разложения. Тогда спектр $M \restriction \mathscr{H}_o$ лежит вне интервала* $(m, 3m_0 - \varepsilon)$.

Пусть dq — евклидова мера для $\lambda\varphi_2^4$-модели, и пусть для любой функции A от евклидова поля Φ

$$\langle A \rangle \equiv \int A\, dq.$$

Предложение 3.3.3. *Для $\lambda\varphi_2^4$-модели*

$$\begin{aligned}(3.3.1)\quad &\langle \Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4)\rangle - \langle \Phi(x_1)\Phi(x_2)\rangle\langle \Phi(x_3)\Phi(x_4)\rangle \leqslant \\ &\leqslant \langle \Phi(x_1)\Phi(x_3)\rangle\langle \Phi(x_2)\Phi(x_4)\rangle + \langle \Phi(x_1)\Phi(x_4)\rangle\langle \Phi(x_2)\Phi(x_3)\rangle.\end{aligned}$$

Замечание. Так как $\langle \Phi(x)\rangle = 0$, это неравенство означает, что связная (усеченная) четырехточечная функция Швингера отрицательна. Эта оценка специфична для φ^4-модели. Действительно, например, для взаимодействия вида $\varphi^6 - \varphi^4$ философия разд. 3.2 предсказывает существование двухчастичных связанных состояний.

В основе доказательства предложения 3.3.3 лежит неравенство Лебовича, относящееся к независимым спиновым переменным $\sigma_i = \pm 1$ ферромагнитной модели Изинга. Энергия конфигурации спинов $\underset{\sim}{\sigma} = \{\sigma_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, равна

$$H(\underset{\sim}{\sigma}) = -\sum_{i<j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j,$$

где $J_{ij} \geqslant 0$. Для функции $f(\underset{\sim}{\sigma})$ положим

$$\langle f\rangle = Z^{-1}\sum_{\underset{\sim}{\sigma}} f(\underset{\sim}{\sigma})\,e^{-H(\underset{\sim}{\sigma})},$$

где

$$Z = \sum_{\underset{\sim}{\sigma}} e^{-H(\underset{\sim}{\sigma})}.$$

Лебович доказал [Leb 2], что

$$\langle\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l\rangle - \langle\sigma_i\sigma_j\rangle\langle\sigma_k\sigma_l\rangle \leqslant \langle\sigma_i\sigma_k\rangle\langle\sigma_j\sigma_l\rangle + \langle\sigma_i\sigma_l\rangle\langle\sigma_j\sigma_k\rangle.$$

Неравенство (3.3.1) следует отсюда немедленно, так как Гриффитс и Саймон [Gr Si] показали, что евклидова φ_2^4-модель является пределом модели Изинга указанного выше вида, причем $\Phi(x)$ можно представить как предел суммы спиновых переменных σ_i.

Напомним, что релятивистское поле в нулевой момент времени $\varphi(f)$ равно евклидову полю $\Phi(f,\ t=0)$ в нулевой момент времени. Для $f_i \in \mathscr{S}(R)$ определим

$$\theta(f_1, f_2) = \varphi(f_1)\varphi(f_2)\Omega - \langle\Omega, \varphi(f_1)\varphi(f_2)\Omega\rangle\cdot\Omega, \tag{3.3.2}$$

где Ω — вакуумный вектор.

Следствие 3.3.4. *Векторы $\theta(f_1, f_2)$ имеют энергию $\geqslant 2m$.*

Доказательство. Без ограничения общности выберем f_i вещественными и положительными. По формуле Фейнмана — Каца

$$\begin{aligned}\langle\theta, e^{-tH}\theta\rangle &= \langle\varphi(f_1)\varphi(f_2)\Omega, e^{-tH}\varphi(f_1)\varphi(f_2)\Omega\rangle - \\ &- |\langle\Omega, \varphi(f_1)\varphi(f_2)\Omega\rangle|^2 = \langle\Phi(g_1)\Phi(g_2)\Phi(g_3)\Phi(g_4)\rangle - \\ &- \langle\Phi(g_1)\Phi(g_2)\rangle\langle\Phi(g_3)\Phi(g_4)\rangle,\end{aligned}$$

где

$$g_1(x) = f_1(x_1)\,\delta(x_0), \qquad g_2(x) = f_2(x_1)\,\delta(x_0),$$
$$g_3(x) = f_1(x_1)\,\delta_t(x_0), \qquad g_4(x) = f_2(x_1)\,\delta_t(x_0)$$

и $x = (x_1, x_0)$.

Применяя (3.3.1) и формулу Фейнмана — Каца, получим

$$\langle\theta, e^{-tH}\theta\rangle \leqslant \prod_{i=1}^{2}\langle\varphi(f_i)\Omega, e^{-tH}\varphi(f_i)\Omega\rangle + \\ + |\langle\varphi(f_1)\Omega, e^{-tH}\varphi(f_2)\Omega\rangle|^2.$$

Поскольку $\langle\Omega, \varphi\Omega\rangle = 0$, условие спектральности дает $|\langle\varphi(f_i)\Omega, e^{-tH}\varphi(f_j)\Omega\rangle| \leqslant O(1)e^{-tm}$, и поэтому

$$\langle\theta, e^{-tH}\theta\rangle \leqslant O(1)\,e^{-2tm},$$

что завершает доказательство. Заметим, что для доказательства этого утверждения понадобилось только вакуумное кластерное разложение.

Теперь мы приведем результат [Gli Ja Sp 1], который следует из двухчастичного кластерного разложения. Пусть дано $\varepsilon > 0$, и пусть E — спектральный проектор на энергетический интервал $[0, 3m_0 - \varepsilon]$ в четной $\lambda P(\varphi)_2$-модели. Предположим, что λ/m_0^2 достаточно мало, чтобы обеспечить скорость распада $\gamma = 3m_0 - \varepsilon$ в двухчастичном кластерном разложении.

Предложение 3.3.5. *При вышеуказанных предположениях подпространство, образованное линейными комбинациями векторов Ω и $e^{itH}E\theta(f_1, f_2)$, плотно в $E\mathscr{H}_o$. Векторы вида $E\varphi(t)\Omega$ образуют плотное в $E\mathscr{H}_e$ множество.*

Отметим, что в работе [Gli Ja Sp 1] для $E\mathscr{H}_o$ доказан более слабый результат — плотное в $E\mathscr{H}_o$ множество образуют векторы вида $e^{itH}E\varphi(f)\Omega$.

Доказательство предложения 3.3.5 следует из простой модификации теоремы 4.2 [Gli Ja Sp 1], которая позволяет показать, что в полиномах первой степени по полю в n-частичном кластерном разложении можно брать поле в нулевой момент времени.

Доказательство теорем. Предположим, что $M\restriction\mathscr{H}_e$ имеет спектр в интервале $(m, 2m)$. Из лоренц-инвариантности следует, что существует ненулевой вектор $\psi \in \mathscr{H}_e$, соответствующий этому спектральному интервалу и имеющий энергию $< 2m$.

В силу предложения 3.3.5 ψ является пределом суммы векторов вида $e^{itH}E\theta(f_1, f_2)$, а тогда следствие 3.3.4 означает, что $\psi = 0$. Это доказывает теорему 3.3.1 для $\mathscr{H}_e$.

Наконец, мы покажем, что спектр $M\restriction E\mathscr{H}_o$ состоит из одной точки, а именно m. Из предложения 3.3.5 следует, что подпространство $\mathscr{K}_0 = \{E\varphi(t)\Omega\}$ плотно в $E\mathscr{H}_o$. Пусть $\mathscr{K}$ будет замыканием объединения лоренцевых сдвигов пространства $\mathcal{H}_0$. Наше утверждеиие тогда следует из предложения 2.1.2. Теоремы 3.3.2 и 3.3.1 получаются отсюда в силу лоренц-инвариантности.

3.4. О наличии связанных состояний

В п. 3.2 было объяснено, что некоторые $P(\varphi)_2$-модели могут описывать связанные состояния. Мы приведем здесь два метода, позволяющих установить существование массового спектра в двухчастичном интервале связанных состояний $(m, 2m)$. Как отмечалось выше, физическая интерпретация непрерывного спектра в этом интервале отсутствует, поэтому существование спектра, по-видимому, означает наличие собственных значений, т. е. связанных состояний.

Вариационный метод. Первый метод заключается в том, чтобы выбрать приближенную волновую функцию связанного состояния θ со свойствами: a) $\|\theta\| \geqslant 1$; b) θ ортогональна к вакуумному и одночастичному состояниям; c) $\langle\theta, M\theta\rangle < 2m$. Так как $M \leqslant H$, мы можем заменить оценку $\langle\theta, M\theta\rangle$ на неравенство вида

$$\langle\theta, H\theta\rangle < 2m \tag{3.4.1}$$

и свести дело к оценке $\langle\theta, H\theta\rangle$. Но в таком случае для теории со слабым взаимодействием кластерное разложение показывает, что подпространство, отвечающее части спектрального интервала $(m, 2m)$, соответствующей малым импульсам, порождается векторами следующего вида:

$$\theta = \alpha\Omega + a^*(f)\Omega + e^{tH} a^*(f_1)\, a^*(f_2)\,\Omega \tag{3.4.2}$$

(см. [Gli Ja Sp 1] и п. 3.3). Здесь a^* — оператор рождения в нулевой момент времени. Если к тому же $P(\varphi)$ — четный полином, то мы можем выбрать $f = 0$ и $\alpha = \langle\Omega, a^*(f_1)a^*(f_2)\Omega\rangle$. С другой стороны, можно заменить a^* в (3.4.2) на поле φ в нулевой момент времени.

Используя такой вектор, мы исключим H из $\langle\theta, H\theta\rangle$, примеияя равенство $H\Omega = 0$ и канонические коммутационные соотношения. Например, поскольку

$$[H, a^*(f)] = a^*(\mu f) + [H_I, a^*(f)],$$

где $\mu = (\mathrm{p}^2 + m_0^2)^{1/2}$, в случае $\chi = a^*(f)\Omega$ мы имеем

$$\langle\chi, H\chi\rangle = \langle f, \mu f\rangle_{L_2} + \langle\Omega, a^*(\mu f)\, a(\bar{f})\,\Omega\rangle + \\ + \langle a^*(f)\,\Omega, [H_I, a^*(f)]\,\Omega\rangle. \tag{3.4.3}$$

Останется оценить вакуумные средние упорядоченных по Вику мономов:

$$W = \int a^*(x_1) \ldots a^*(x_n)\, w(x)\, dx.$$

Мы сделаем это с помощью кластерного разложения [Gli Ja Sp 1]. В действительности, прежде чем производить оценку, мы разложим $\langle \Omega, W\Omega \rangle$, применяя интегрирование по частям[1]), для того чтобы выделить зависимость от константы связи λ в низших порядках (см. разд. 4). Например, таким способом во втором порядке мы получим массовую поправку к $\langle f, \mu f \rangle_{L_2}$.

Действуя таким образом, мы не сумеем вычислить физическую массу m точно, но сможем вычислить в низших порядках необходимые поправки к m_0. (Здесь мы предполагаем, что m разлагается в асимптотический ряд по λ, начинающийся с m_0.)

Предположим далее, что f подвергнуто масштабному преобразованию, приводящему к локализации в области импульсного пространства порядка $O(\delta)$, именно $f(\mathbf{p}) = \delta^{-1/2} h(\mathbf{p}/\delta)$. (В п. 3.1 мы объяснили, что $\delta \to 0$ при $\lambda \to 0$.) Тогда

$$\langle f, \mu f \rangle = m_0 \| f \|^2 + O(\delta^2),$$

что указывает на дисперсию импульсов одночастичного состояния около $\mathbf{p} = 0$. Аналогично поправка второго порядка к массе будет равна $m_2 \lambda^2 \|f\|^2 + O(\lambda^2 \delta^2)$.

Проведем описанные рассуждения чуть подробнее для $\lambda(\varphi^6 - \varphi^4)$-взаимодействия. Возьмем вектор

$$\theta = a^*(f)^2 \Omega - \langle \Omega, a^*(f)^2 \Omega \rangle \Omega$$

с $\| f \|_{L_2} = 2^{-1/4}$, удовлетворяющий условиям a, b, указанным выше. Рассмотрим

$$\langle \theta, H\theta \rangle = \langle \theta, \{ a^*(\mu f)\, a^*(f) + a^*(f)\, a^*(\mu f) \}\, \Omega \rangle +$$
$$+ \left\langle \theta, \left[\lambda \int \varphi^6 - \lambda \int \varphi^4,\ a^*(f)^2 \right] \Omega \right\rangle$$

и выполним интегрирование по частям. Выделим в замкнутой форме все члены порядка 0, 1 и 2 по λ. Массовые члеиы имеют вид

$$2 \{ m_0 + \lambda^2 m_2 + O(\delta^2 + \lambda^3 + \delta^2 \lambda^2) \}.$$

Вклад, соответствующий притяжению от диаграммы вида

---

[1]) Имеется в виду интегрирование по частям в континуальном интеграле, соответствующем $\langle \Omega, W\Omega \rangle$ по формуле Фейнмана — Каца. — *Прим. перев.*

уменьшает энергию на величину порядка $-O(\delta\lambda)$. Все другие вклады имеют порядок $O(\lambda^2\delta)$ или выше. Положим $\delta = \lambda^{1+\varepsilon}$. Тогда для малых λ проигрыш в энергии имеет величину порядка $-O(\delta\lambda) = -O(\lambda^{2+\varepsilon})$ и превышает как дисперсионный эффект $O(\delta^2) = O(\lambda^{2+2\varepsilon})$, так и эффект отталкивания $(\lambda^2\delta + \lambda^3) \leqslant O(\lambda^3)$. Оценки операторных выражений, входящих в $\langle\theta, H\theta\rangle$, можно получить с помощью кластерного разложения. На этом завершается набросок доказательства существования связанных состояний в $\lambda(\varphi^6 - \varphi^4)$-модели.

Подобные же аргументы должны быть справедливы и для $\lambda\varphi^6$-взаимодействия. Однако в этом случае притяжение имеет порядок $O(\lambda^2\delta)$. Поэтому мы должны выделить поправку четвертого порядка к массе и взять $\delta = \lambda^{2+\varepsilon}$. Для взаимодействия $\lambda\varphi^3 + \lambda^6\varphi^4$ нужно сделать так, чтобы θ стало ортогональным к одночастичному состоянию (по крайней мере с точностью до третьего порядка по λ). Тогда мы смогли бы далее выделить перенормировку массы в четвертом порядке и положить $\delta = \lambda^{2+\varepsilon}$.

Мы благодарны Б. Саймону, указавшему нам на то, что четные теории технически проще остальных.

Кластерный метод. В четной $P(\varphi)_2$-модели для θ вида (3.3.2) имеем

$$\langle\theta, e^{-tH}\theta\rangle = \langle\Phi(g_1)\Phi(g_2)\Phi(g_3)\Phi(g_4)\rangle_C + \langle\Phi(g_1)\Phi(g_3)\rangle \times \\ \times \langle\Phi(g_2)\Phi(g_4)\rangle + \langle\Phi(g_1)\Phi(g_4)\rangle\langle\Phi(g_2)\Phi(g_3)\rangle,$$

где $\langle\cdot\rangle_C$ означает связную усеченную часть. Убывание среднего $\langle\theta, e^{-tH}\theta\rangle$ по времени имеет двухчастичный характер, т. е. имеет порядок $O(e^{-2mt})$, если только не выполняется неравенство

$$\langle\Phi(g_1)\ldots\Phi(g_4)\rangle_C \geqslant O(e^{-2(m-\varepsilon)t}). \tag{3.4.4}$$

В $\lambda(\varphi^6 - \varphi^4)$-модели медленно убывающую часть в $\langle\Phi(g_1)\ldots\Phi(g_4)\rangle_C$, происходящую от (положительного) вклада φ^4, можно выделить, применяя уравнение Бете — Солпитера. Мы намереваемся оценить с помощью кластерных разложений возникающие при этом погрешности. Неравенство (3.4.4) тогда означало бы существование массового спектра в $\mathscr{H}_e$ в интервале $(0, 2m - \varepsilon]$. Этот путь представляется нам интересным. Однако в отличие от вариационного метода, описанного выше, сейчас у нас еще нет оценок погрешности, основанных на таком методе. С другой стороны, отметим, что существование двухчастичных связанных состояний в четной $P(\varphi)_2$-модели со слабым взаимодействием (как это было установлено вариационным методом) приводит к неравенству (3.4.4).

4. Локализация в фазовом пространстве и перенормировка

4.1. Результаты, полученные для φ_3^4-модели

В серии связанных между собой статей мы разработали метод сходящихся разложений [Gli Ja Sp 1, 2] и сходящихся оценок сверху [Gli Ja 4, 8] для квантовополевых моделей. Эти разложения и оценки нужны для решения проблемы снятия обрезаний $\varkappa$, Λ, т. е. для перехода к бесконечному объему в фазовом пространстве. В большей части докладов на этой конференции обсуждается предельный переход $\Lambda \to R^2$. Однако существование предела при $\varkappa \to \infty$ (снятие ультрафиолетового обрезания) в Y_2 и в моделях более высоких размерностей представляет собой наиболее важную проблему и для физики, и для математики; мы надеемся, что эти «ультрафиолетовые проблемы» будут привлекать все более пристальное внимание в конструктивной теории поля. В этом разделе мы опишем результаты, полученные для φ_3^4-модели.

Пусть $d\Phi_C$ — гауссова мера с ковариацией C, и пусть $d\Phi$ обозначает, что выбрана $C = \left(-\Delta + m_0^2\right)^{-1}$. Обозначим через $V(\Lambda, \varkappa)$ евклидово действие, равное сумме части V_I, отвечающей φ^4-взаимодействию, и части V_C, содержащей контрчлены. Тогда[1])

$$V_I = \lambda \int\limits_{\Lambda \subset R^3} : \Phi_\varkappa^4 : dx,$$

а V_C — контрчлены, вычисленные для функций Грина во втором и третьем порядках теории возмущений. Вакуумный функционал для действия $V = V_I + V_C$

$$Z(\Lambda, \varkappa) = \int e^{-V(\lambda, \varkappa)}\, d\Phi$$

содержит ультрафиолетово расходящиеся контрчлены.

Теорема 4.1.1. [Gli Ja 8]. *Для* $0 \leqslant \lambda$

(4.1.1) $$Z(\Lambda, \varkappa) \leqslant e^{O(|\Lambda|)}$$

равномерно по $\varkappa$. *Для* λ *в любом конечном интервале* (4.1.1) *также выполняется равномерно по* λ.

Обозначим через $H(v)$ перенормированный гамильтониан φ_3^4- модели, определенный формально равенством

$$H(v) = H_0 + \lambda \int\limits_{v \subset R^2} : \varphi^4 : d\mathbf{x} - \frac{1}{2}\delta m_2^2 \int\limits_{v \subset R^2} : \varphi^2 : d\mathbf{x} - E_2 - E_3.$$

---

[1]) Здесь $\Phi_\varkappa = \Phi_\varkappa(x) = \Phi(h_\varkappa(\cdot - x))$, где $h_\varkappa \in \mathscr{S}(R^3)$ при $0 < \varkappa < \infty$ и $h_\varkappa(x - y) \to \delta(x - y)$ при $\varkappa \to \infty$. — *Прим. перев.*

Здесь δm_2^2, E_2 и E_3 — гамильтоновы контрчлены во втором и третьем порядках теории возмущений. (Эти контрчлены отличаются на бесконечную константу и конечную перенормировку (transient) от контрчленов для функций Грина (см. [Gli Ja 8]).)

Следствие 4.1.2. *Гамильтониан $H(v)$ ограничен снизу константой, пропорциональной объему $|v|$:*

$$0 \leqslant H(v) + O(|v|). \tag{4.1.2}$$

Это следствие вытекает из теоремы и того факта, что $\langle \Omega(v, \varkappa), \Omega_0 \rangle \neq 0$, где $\Omega(v, \varkappa)$ — основное состояние $H(v, \varkappa)$. В действительности

$$\langle \Omega_0, e^{-tH(v, \varkappa)}\Omega_0 \rangle = \exp[-tE(v, \varkappa) - A(v, \varkappa) + T(v, \varkappa, t)],$$

где $E(v, \varkappa)$ — частично перенормированная энергия вакуума, равная нулю во втором и третьем порядках и сходящаяся при $\varkappa \to \infty$ в конечном объеме. Константа A — логарифмически расходящаяся[1]) не зависящая от t констант перенормировки волновой функции. $T(v, \varkappa, t)$ — несущественная величина (transient), которая ограничена при $\varkappa \to \infty$ и имеет порядок $o(1)$ при $t \to \infty$.

Когда $|v| \to \infty$, константы $E(v, \varkappa)$, $A(v, \varkappa)$ и $T(v, \varkappa, t)$ расходятся. Вклад второго порядка в $A(v, \varkappa)$, т. е. ультрафиолетово расходящаяся ее часть, сокращается в $Z(\Lambda, \varkappa)$.

Эти результаты обобщил Фельдман [Fe 2], который доказал следующую теорему:

Теорема 4.1.3. *Вакуумный функционал в конечном объеме $Z(\Lambda, \varkappa)$ и (ненормированные) функции Швингера*

$$Z(\Lambda, \varkappa) S(\Lambda, \varkappa; f_1, \ldots, f_n) = \int \Phi(f_1) \ldots \Phi(f_n) e^{-V(\Lambda, \varkappa)} d\Phi \tag{4.1.3}$$

сходятся при $\varkappa \to \infty$. Пределы непрерывны по λ и удовлетворяют оценке

$$|Z(\Lambda) Z(\Lambda; f_1, \ldots, f_n)| \leqslant n! \left(\prod_i \|f_i\| e^{O(|\Lambda|)}\right), \tag{4.1.4}$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая норма на пространстве Шварца.

Из непрерывности по λ и условия $Z(\Lambda) = 1$ при $\lambda = 0$ следует, что для фиксированного Λ и достаточно малого λ $Z(\Lambda) > 1/2$. Таким образом, для фиксированного Λ и малого λ приближенные функции Швингера $S(\Lambda; f_1, \ldots, f_n)$ не равны тождественно нулю и

$$|Z(\Lambda; f_1, \ldots, f_n)| \leqslant n! \prod_i \|f_i\| \tag{4.1.5}$$

[1]) При $\varkappa \to \infty$. — *Прим. перев.*

Следствие 4.1.4 [Fe 2]. *Для достаточно малых λ функции Швингера в конечном объеме Λ являются моментами некоторой единственной меры dq на $\mathcal{S}'(R^3)$, причем*

$$dq = \lim_{\varkappa \to \infty} Z(\Lambda, \varkappa)^{-1} e^{-v(\Lambda, \varkappa)} d\Phi = \lim_{\varkappa \to \infty} dq_{\Lambda, \varkappa}.$$

Доказательство этого следствия основано на изучении отклика Z на внешнее евклидово поле, а именно на изучении

$$Z(h) = \int e^{\Phi(h)} dq_\Lambda$$

— производящего функционала для (несвязных) функций Швингера. Этот функционал для $P(\varphi)_2$-моделей изучал Фрёлих (см. также [Gli Ja 13]).

Конечно, чтобы получить полностью релятивистскую теорию, следует рассмотреть предел при $\Lambda \to R^3$ функций Швингера $S(\Lambda; \cdot)$ и мер dq_Λ. Нам кажется, что уравнения Кирквуда — Зальцбурга ч. II можно будет обобщить на φ_3^4-модель и доказать существование таких пределов. Фактически локальные оценки теоремы 4.1.3 и следствия 4.1.4 имеют в точности вид локальных оценок, которые применялись при доказательстве кластерного разложения в $P(\varphi)_2$-модели. Мы предполагаем, что $Z(\Lambda) \geqslant \exp(-O|\Lambda|)$ для малых λ. Мы надеемся, что подобные оценки приведут к доказательству аксиом Вайтмана для φ_3^4-модели[1]).

4.2. Разложение на элементарные шаги

Доказательство основных оценок для $P(\varphi)_2$- и φ_3^4- моделей основано на применении четырех элементарных равенств и оценок, относящихся к негауссовой мере

$$e^{-V(\Lambda, \varkappa)} d\Phi_C. \tag{4.2.1}$$

Эти четыре шага суть:

I. Преобразование ковариации C.

II. Преобразование $\exp V$.

III. Оценка викова упорядочивания.

IV. Интегрирование по частям.

Различные комбинации из этих четырех шагов приводят к нужным разложениям и оценкам. Наиболее трудная часть конструкции заключается, вообще говоря, в том, как скомбинировать эти шаги так, чтобы выделить желаемые свойства модели и в то же время сохранить сходимость. Мы применяем три способа разложения в ряды:

---

[1]) См. примечание на стр. 11. — *Прим. ред.*

a) Простые разложения. Мы опишем определенную последовательность элементарных шагов, которая позволяет получить такое разложение, как, например, разложение для ZS в ч. II.

b) Ряд Неймана. В ряд Неймана $(I-\mathcal{K})^{-1}=\sum_n \mathcal{K}^n$ раскладываются решения уравнения Кирквуда — Зальцбурга ч. II, полученные с помощью простого разложения Z.

c) Индуктивные разложения. Мы опишем, как каждый возможный член (интеграл) выбранного разложения разложить на сумму подобных же членов.

В определении наших разложений и оценок имеется значительный произвол. Наибольший простор остается при индуктивно определенных разложениях, так как здесь нет попытки записать такое разложение в замкнутой форме или получить его как обращение некоего оператора. Отметим еще, что именно индуктивные разложения и оценки дают наиболее детальную информацию о наших моделях, включая положительность гамильтониана в φ_3^4-модели [Gli Ja 8] и φ-оценке для произвольных констант связи [Gli Ja 4]. В этих разложениях и оценках не используются какие-либо частные граничные условия для ковариации C, так что они имеют более широкую область применимости.

Опишем теперь наши элементарные шаги; первые два шага — это просто некоторые фундаментальные теоремы из анализа.

I. **Преобразование ковариации C.** Пусть $C_\alpha = \alpha C_1 + (1-\alpha) C_0$ — семейство интерполирующих ковариаций, и положим

$$d\Phi_{C_1} = d\Phi_{C_0} + \int_0^1 d\alpha \frac{d}{d\alpha} d\Phi_{C_\alpha} =$$

$$= d\Phi_{C_\alpha} + \frac{1}{2}(C_1 - C_0)\,\Delta_\Phi \int_0^1 d\alpha\, d\Phi_{C_\alpha}.$$

Эта формула применяется при переходе к бесконечному объему (см. ч. II). Она доказывается интегрированием по частям в функциональном пространстве [Di Gli] (см. также доказательство IV ниже). В настоящей части эта процедура не используется.

II. **Преобразование** exp V. Пусть V_α, $\alpha \in [0, 1]$ — дифференцируемое семейство интерполирующих евклидовых действий. Тогда

$$(4.2.2)\quad e^{-V_1}=e^{-V_0}+\int_0^1 \frac{d}{d\alpha}e^{-V_\alpha}\,d\alpha=e^{-V_0}-\int_0^1 \frac{dV_\alpha}{d\alpha}e^{-V_\alpha}\,d\alpha.$$

Мы применяем это тождество для того, чтобы уменьшить величину верхнего обрезающего импульса (ультрафиолетового обрезания) в действии V при доказательстве положительности гамильтониана для $P(\varphi)_2$- и φ_3^4-моделей (см. [Gli Ja 7, 4] и [Gli Ja 8] соответственно). Мы будем называть это равенство формулой Дюамеля.

Интегрирование (4.2.2) приводит к неперенормированному ряду теории возмущений. При наличии ультрафиолетового обрезания этот ряд расходится, потому что в n-м порядке возникает $O(n!^2)$ диаграмм. Например, для одной степени свободы

$$\int e^{-q^2-\lambda q^4}\,dq \neq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\int e^{-q^2}q^{4n}\,dq,$$

так как ряд в правой части расходится. Поэтому необходимо модифицировать теорию возмущений; для этого мы будем применять шаг III.

III. **Викова оценка.** Для $:\Phi_\varkappa^4:$ имеем

$$(4.2.3)\qquad e^{-V(\Lambda,\varkappa)}\leqslant\begin{cases} e^{O(\ln^2\varkappa)\,|\Lambda|}, & d=2,\\ e^{O(\varkappa^2)\,|\Lambda|}, & d=3.\end{cases}$$

Эта оценка получается интегрированием неравенства

$$:\Phi_\varkappa^4:=(\Phi_\varkappa^2-3c_\varkappa)^2-6c_\varkappa^2\geqslant-6c_\varkappa^2$$

по пространственно-временному объему Λ. Здесь

$$c_\varkappa=\int\Phi_\varkappa(x)^2\,d\Phi=C_\varkappa(x,\ x)\leqslant\begin{cases} O(\ln\varkappa), & d=2,\\ O(\varkappa), & d=3.\end{cases}$$

Эта викова оценка применяется для того, чтобы увеличить значение нижнего обрезающего импульса (инфракрасного обрезания) ρ в $\exp\{-V(\Lambda,\varkappa,\rho)\}$. Наши разложения обрываются, если $\varkappa=\rho$.

IV. Интегрирование по частям:

$$(4.2.4)\qquad \int\Phi(x)F(\Phi)\,d\Phi_C=\int dy\int C(x,\ y)\frac{\partial F}{\partial\Phi(y)}\,d\Phi_C.$$

Мы применяем эту формулу интегрирования по частям для того, чтобы получить вычитание расходящихся контрчленов в $V_1 - V_0$ из (4.2.2). В [Gli Ja 4, 8] мы использовали другие формы (4.2.4), названные там формулой *переноса* и формулой *сжатий*.

Формулу (4.2.4) легко доказать, рассмотрев конечномерные аппроксимации континуального интеграла. Выберем гауссову меру $d\Phi_N$, сходящуюся к $d\Phi_C$:

$$d\Phi_N = N \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j} q_i C_{ij}^{-1} q_j\right)\left(\prod_k dq_k\right)$$

где C_{ij} — матрица ковариации, а N — нормировочная константа. Обычное интегрирование по частям тогда дает

$$\int \sum_j C_{ij}^{-1} q_j F(q)\, d\Phi_N = \int \frac{\partial F(q)}{\partial q_i}\, d\Phi_N.$$

Обращая C, получим равенство

$$\int q_j F(q)\, d\Phi_N = \int \sum_i C_{ji} \frac{\partial F}{\partial q_i}\, d\Phi_N,$$

которое сходится к (4.2.4) при $d\Phi_N \to d\Phi_C$.

Для упорядоченных по Вику мономов аналогично получим

$$\int :\Phi(x_1) \ldots \Phi(x_n): F(\Phi)\, d\Phi_C =$$
$$= \int :\Phi(x_2) \ldots \Phi(x_n): \int dx_1' C(x_1, x_1') \frac{\partial F}{\partial \Phi(x_1')}\, d\Phi_C.$$

В качестве примера проинтегрируем по частям один множитель в простом выражении

$$\int :\Phi^4(x): e^{-\int :\Phi^4: dz}\, d\Phi_C =$$
$$= -4 \int dy \int :\Phi^3(x): C(x-y) :\Phi^3(y): e^{-\int :\Phi^4: dz}\, d\Phi_C.$$

Дальнейшее интегрирование по частям дает

$$\int :\Phi^4(x): e^{-\int :\Phi^4: dz}\, d\Phi_C = \tag{4.2.5}$$
$$= 4! \int dy C(x-y)^4 \int e^{-\int :\Phi^4: dz}\, d\Phi_C$$

плюс другие слагаемые.

4.3. Синтез элементарных шагов

При комбинировании элементарных шагов мы преследуем две основные цели. Во-первых, мы хотим получить сходящиеся разложения в данном объеме пространства — времени или фазового пространства. Во-вторых, добиться полиномиального убывания взаимодействия между различными областями локализаций. В ч. II вакуумное кластерное разложение для $P(\varphi)_2$-моделей будет описано более подробно. В этом случае локализация в импульсном пространстве не является необходимой (нет ультрафиолетовых расходимостей) и наши области локализации представляют собой объединение единичных квадратов решетки в пространстве — времени. После снятия обрезания эффективное взаимодействие далеко отстоящих друг от друга областей убывает экспоненциально, а скорость убывания определяет физическую массу. В этом разделе мы опишем основные идеи локализации в фазовом пространстве, которая будет использована при работе с ультрафиолетово расходящейся φ_3^4-моделью и с помощью которой получаются результаты, суммированные в п. 4.1. Для гладкого обрезания в импульсном пространстве будет получено полиномиальное убывание эффективного взаимодействия.

Для простоты мы будем обсуждать только вакуумный функционал Z. Фиксируем конечный объем Λ и посмотрим, как Z зависит от ультрафиолетового обрезания $\varkappa$. Модификацию ряда теории возмущений произведем с помощью инфракрасного обрезания ρ в действии V. Для того чтобы обеспечить ограниченность $V(\varkappa, \rho)$ снизу, введем импульсные обрезания симметричным образом: интегрирование по каждой компоненте импульса в фурье-представлении для $V(\varkappa, \rho)$ ограничим одним и тем же интервалом $[\rho, \varkappa]$.

Выполним наши разложения для интегралов вида

$$\int R(\Phi)\, e^{-V(\varkappa, \rho)}\, d\Phi, \tag{4.3.1}$$

где R — полиномиальная функция от Φ.

На каждом шаге разложения интеграл (4.3.1) заменяется на сумму подобных членов. Производится такое преобразование ряда теории возмущений при больших импульсах, чтобы уменьшить $\varkappa$, и такая модификация этого ряда при малых импульсах, чтобы увеличить ρ. В начале разложения $\rho = 0$ и $\varkappa = \varkappa_0$. Разложение обрывается, когда $\rho = \varkappa$, т. е. когда $V(\varkappa, \rho) = 0$, а (4.3.1) сводится к сумме гауссовых интегралов $\int R\, d\Phi$. Эту сумму мы и оцениваем равномерно по $\varkappa_0$.

Правила, по которым чередуются шаги разложений, довольно сложны. Основная идея заключается в том, чтобы получить малый вклад от каждой высокоэнергетической вершины в R, выполнив явно перенормировочные вычитания. Мы избегаем появления $(n!)^r$ членов, возникающих при итерациях (4.2.2), с помощью модификации ряда теории возмущений.

Разложение в области больших импульсов. Применим шаг II для того, чтобы уменьшить $\varkappa$, взяв $V_1 = V(\bar{\varkappa}, \rho)$, $V_0 = V(\underline{\varkappa}, \rho)$. Первый член в (4.2.2) имеет желаемую форму. Второй член имеет такое же ультрафиолетовое обрезание и новую вершину $\delta V = dV_\alpha/d\alpha$ в R. Так как δV имеет инфракрасное обрезание $\underline{\varkappa}$, мы хотим, чтобы δV вносило в наши окончательные оценки улучшающий сходимость множитель $\underline{\varkappa}^{-\varepsilon}$. Доказательство этого утверждения получается только после того, как произведено перенормировочное вычитание расходящихся контрчленов δV_C в δV. Применяя далее шаг IV, проинтегрируем по частям δV_1, а именно Φ^4 — член в δV. Проинтегрируем также любое новое V_1, которое появилось в R в результате дифференцирования экспоненты. Таким образом, мы получили в замкнутой форме (и произвели вычитание) ультрафиолетово расходящиеся части δV. Например, в (4.2.5) мы выделили вклад второго порядка в энергию вакуума. Вакуумные и массовые контрчлены третьего порядка содержатся среди «других слагаемых» в (4.2.5). Вклады в энергию вакуума в точности сокращаются с соответствующим контрчленом в δV_C. Диаграмма перенормировки массы после сокращения дает остаток порядка $O(\underline{\varkappa}^{-\varepsilon})$. Остающиеся после этой процедуры «другие слагаемые» сходятся и поэтому тоже дают вклад порядка $\underline{\varkappa}^{-\varepsilon}$ в окончательную оценку.

Таким образом, шаги II и IV чередуются таким образом, чтобы дать вклад одного порядка (т. е. одну δV) в разложении перенормированной теории возмущений. Ввиду присутствия большого числа членов необходимо модифицировать это разложение после введения $\bar{\varkappa}^\delta$ вершин δV.

Разложение в области малых импульсов. Модификацию рядов теории возмущений произведем, увеличивая инфракрасное обрезание в показателе экспоненты. Применим сначала шаг III для того, чтобы увеличить ρ от $\underline{\rho}$ до $\bar{\rho}$. Викова оценка — это L_∞-оценка в пространстве траекторий, поэтому мы собираемся применить ее к такому кубу Δ в пространстве-времени, в котором (4.2.3) остается ограниченным, т. е.

к кубу, для которого $\bar{\rho}^2|\Delta| \leqslant O(1)$. Это ограничение означает, что величина $L = |\Delta|^{1/3}$ удовлетворяет условию

$$L \leqslant O(\bar{\rho}^{-2/3}) \tag{4.3.2}$$

и определяет нашу локализацию в фазовом пространстве. С другой стороны, для того чтобы локализация была реальной, принцип неопределенности требует, чтобы выполнялось условие

$$O(\underline{\rho}^{-1}) \leqslant L, \tag{4.3.3}$$

т. е. чтобы область порядка $O(\rho^{-1})$, на которой размазан волновой пакет (вследствие локализации в импульсном пространстве), была меньше L. Мы видим, что (4.3.2) и (4.3.3) совместимы. Эта совместимость по существу является следствием суперперенормируемости. Для φ_4^4-модели вместо (4.3.2) мы бы получили $L \leqslant O(\bar{\rho}^{-1})$, что лежит на грани наших оценок.

Наш анализ показывает, что мы должны рассматривать по отдельности кубы Δ, принадлежащие покрытию пространства-времени $\mathscr{D}$ (к тому же некоторые Δ стремятся к нулю при $\varkappa_0 \to \infty$). Таким образом, мы фактически имеем дело с ультрафиолетовой и инфракрасной функциями обрезания $\varkappa(\Delta)$, $\rho(\Delta)$, зависящими от Δ.

Заметим далее, что при виковой оценке (4.2.3) приходится иметь дело только с частью δV, равной $V(\varkappa, \underline{\rho}) - V(\varkappa, \bar{\rho})$ и содержащей только малые импульсы. Эта часть равна $V(\bar{\rho}, \underline{\rho})$, т. е. содержит импульсы, меньшие $\bar{\rho}$. Для того чтобы можно было увеличить инфракрасное обрезание в показателе экспоненты, нужно избавиться от перекрестных членов в δV. Мы мажорируем эти перекрестные члены с помощью вкладов от области малых импульсов и функции $V(\varkappa, \bar{\rho})$ — нового показателя экспоненты. Эта процедура довольно сложна, но не вызывает принципиальных затруднений, см. [Gli Ja 8]. Однако в модели φ_4^4 именно эти перекрестные члены приводят к расходимостям, соответствующим перенормировке константы связи, что и составляет основную проблему.

Независимость ячеек в фазовом пространстве. Для локализации в фазовом пространстве следует использовать параметр порядка d:

$$d = \text{евклидово расстояние} \times \text{инфракрасное обрезание}.$$

Если обрезание по импульсам гладкое, стандартные оценки по размерности дают убывание корреляций порядка $O(d^{-n})$ между различными ячейками в фазовом пространстве с правильной локализацией. Любое такое убывание для $n > 3$ достаточно для того, чтобы оценить вклад членов, зависящих от расстояния, в сумме по фазовым ячейкам (диаметр которых стремится к нулю при $\varkappa_0 \to \infty$). Отметим в заключение, что в предельной теории без ультрафиолетового обрезания мы предполагаем наличие экспоненциальной факторизации и массовой щели.

КОРПУСКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА $P(\varphi)$-МОДЕЛИ СО СЛАБЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ [1)][2)]

Часть II
КЛАСТЕРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Содержание

1. Введение
2. Основные результаты
3. Кластериое разложение
4. Факторизация и аналитичиость: доказательство основных результатов
5. Сходимость кластерного разложения: основные идеи
6. Уравнение типа Кирквуда — Зальцбурга
7. Операторы ковариации
8. Производные операторов ковариации
9. Гауссовы интегралы
10. Сходимость кластерного разложения — завершение доказательства.

1. Введение

С точки зрения физики при изучении квантовополевых моделей возникают две основные задачи. Первая заключается в том, чтобы выявить физически интересные явления (например, спектр частиц, связанных состояний и резонансов, существование нарушенных симметрий, асимптотический характер рядов теории возмущений) в двух- и трехмерных моделях [3)]. Эта задача включает описание математической структуры, соответствующей этим явлениям, и качественную характеристику того, при каких взаимодействиях и значениях параметров возникают те или иные явления. Нам кажется, что существующие в настоящее время методы позволяют решить эту задачу; описание первоначальных успехов в этом направлении и составляет предмет настоящей лекции. Вторая задача заключается в том, чтобы доказать существование нетривиальных квантованных полей в четырехмерном пространстве-времени. Но здесь, по-видимому, нужны новые идеи, существенно дополняющие те, что уже были использованы при построении квантованных полей.

[1)] См. примечание к части I этой статьи иа стр. 169.

[2)] Более аккуратное изложение многих результатов этой лекции см. в [Gli Ja Sp 1]. — *Прим. перев.*

[3)] Для трехмерного простраиства-времени необходимо еще закончить доказательство существования квантованных полей. Однако в иастоящее время в этом иаправлении сделано достаточно, так что можно отбросить всякие сомнеиия в их существовании (см. примечание на стр. 11. — *Ред.*).

Эти две задачи интересны также и с математической точки зрения. Кроме того, отметим еще третью задачу, которая состоит в том, чтобы найти более общий подход к уже построенным решениям. В частности, при построении квантованных полей естественно возникают эллиптические уравнения с бесконечным числом независимых переменных, негауссовы континуальные интегралы от функционалов от нескольких переменных и C^*-алгебры.

Результаты в области квантовополевых моделей могут подсказать новые направления дальнейшего развития этих теорий.

В ч. II этих лекций подробно описано высокотемпературное (кластерное) разложение, с помощью которого доказывается свойство экспоненциальной факторизации функций Швингера, а также их аналитичность по константе связи λ для λ в ограниченном секторе

$$0 < |\lambda| < \lambda_0, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg\lambda < \frac{\pi}{2}$$

для $P(\varphi)_2$-моделей. Другие применения этих разложений к изучению квантовополевых моделей были описаны в ч. I этих лекций, см. также [Gli Ja 4, 8, Sp 2].

Наши разложения тесно связаны с вириальными и кластерными разложениями статистической механики [Ru, гл. 4]. Аналогия, существующая между статистической механикой и $P(\Phi)$-квантовой теорией поля, известна уже довольно давно. Обсуждение связи статистической механики с квантовой теорией поля см. в работе Гуэрры, Розена и Саймона [Gu Ro Si 3] и в ч. I настоящих лекций.

Кластерное разложение, описываемое в настоящих лекциях, применимо только для случая слабой связи. Но мы надеемся, что техника аналогичных разложений будет применима при любых значениях параметров, достаточно далеких от критической точки [1]). Отчасти эта наша надежда основана на существовании низкотемпературных разложений, разработанных в статистической механике Пайерлсом и Минлосом и Синаем [Mi Sin 1, 2], а также в работе Добрушина и Минлоса [Dob Mi]. Обнадеживающе выглядит и обобщение описанных здесь разложений на случай большого внешнего поля, сделанное Спенсером [Sp 2].

Внутри своей области сходимости методы кластерных разложений могут дать наиболее подробную информацию об интересующих нас явлениях. Фактически именно с помощью этих методов получена наиболее полная информация относительно энергетического спектра выше уровня энергии $E = 0$

[1]) См. примечание 1 на стр. 186.

вакуума. Корреляционные неравенства, теорема Ли — Янга и другие аналитические методы дополняют эту технику и часто дают результаты вне области сходимости кластерных разложений. См. [Gu Ro Si 3, Le Pe, Sp 2] и другие лекции на этой конференции.

В статистической механике кластерным разложениям соответствует следующее разложение плотности гиббсовского ансамбля:

$$(1.1)\qquad \prod_{i<j} e^{-\beta V(x_i-x_j)} = \prod_{i<j} \int [1+(e^{-\beta V(x_i-x_j)}-1)] = \\ = \sum_{\Gamma} \prod_{(i,j)\in\Gamma} (e^{-\beta V(x_i-x_j)}-1).$$

Здесь Γ — множество различных неупорядоченных пар (i, j), т. е. графов Майера, и суммирование производится по всем таким графам. Эта формула представляет взаимодействие $e^{-\beta V(x_i-x_j)}$ между различными частицами i и j $(i \neq j)$ как сумму члена с нулевым взаимодействием, 1, и взаимодействия $e^{-\beta V(x_i-x_j)}-1$, которое мало при высоких температурах $kT=\beta^{-1}$.

Эвристически роль гиббсовской плотности в $P(\varphi)_2$-модели играет мера

$$(1.2)\qquad \exp\left[-\int [\mathfrak{H}_0(x)+\lambda P(\Phi(x))]\,dx\right] \prod_{x\in R^2} d\Phi(x).$$

Здесь

$$(1.3)\qquad \mathfrak{H}_0(x) = \frac{1}{2}(\nabla\Phi(x))^2 + m_0^2\Phi(x)^2.$$

Формальное выражение

$$(1.4)\qquad \exp\left[-\int \mathfrak{H}_0(x)\,dx\right] \prod_{x\in R^2} d\Phi(x)$$

обозначает гауссову меру на $\mathcal{S}'(R^2)$ со средним, равным нулю, и ковариацией

$$(1.5)\qquad C_{\varnothing} = (-\Delta+m_0^2)^{-1}.$$

Для гауссовой меры с ковариацией C мы будем применять обозначение $d\Phi_C$, так что $(1.4) = d\Phi_{C_\varnothing}$. Можно считать, что (1.2) — это каноническая гиббсовская плотность для поперечных колебаний упругой мембраны под действием нелинейной силы

$$F = -m_0^2\Phi(x) - \lambda P'(\Phi(x)),$$

проинтегрированная по импульсной переменной $\Pi(x)$.

Взаимодействие между различными точками в (1.2) полностью обусловлено членом $(\nabla\Phi)$ в $\mathfrak{H}_0(x)$, так что $\exp\left[-\int(\nabla\Phi)^2\,dx\right]$ в (1.2) играет роль $\exp(-\beta V)$ в (1.1). Наше кластерное разложение сконструировано наподобие (1.1). В теории, в которой полностью отсутствует взаимодействие между различными точками, лапласиан в

$$\int \mathfrak{H}_0(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \Phi(x)\left(-\Delta + m_0^2\right)\Phi(x)\,dx$$

заменяется на нуль. Получающаяся при этом ультралокальная теория поля [Kl, New 3] сильно отличается от теории, определяемой мерой (1.2). Мы хотим оценить различие этих двух теорий. Для этого поступим следующим образом.

Во-первых, введем в R^2 двумерную решетку Z^2 и сделаем решеточное приближение в разложении, обобщающем (1.1). Мы не будем заменять меру (1.2) мерой на решетке и поэтому получим разложение непосредственно для непрерывной $P(\varphi)_2$-теории в бесконечном объеме, а не для решеточного приближения к этой теории. Пусть Γ обозначает множество линий, соединяющих заданные точки решетки с некоторыми из их ближайших соседей[1]), и пусть Δ_Γ — оператор Лапласа с граничными условиями Дирихле[2]) на Γ и положим[3])

$$C_\Gamma = \left(-\Delta_\Gamma + m_0^2\right)^{-1}. \tag{1.6}$$

Тогда $d\Phi_{C_\Gamma}$ играет роль расщепляющейся (decouple) меры, причем расщепление происходит на ребрах Γ[4]). В результате наличие решетки обеспечивает дискретность переменных в сумме и в произведении $\sum\limits_{\Gamma}\prod\limits_{(i,j)\in\Gamma}$ в (1.1) даже в том случае, когда эта формула применяется к непрерывной $P(\varphi)_2$-модели.

Во-вторых, регуляризуем разность, соответствующую $\exp(-\beta V(x_i - x_j)) - 1$ в (1.1). Такую разность между двумя

---

[1]) Такие линии в дальнейшем будем называть ребрами. — *Прим. перев.*

[2]) С точки зрения этого обсуждения были бы более уместны граничные условия Неймана, но мы применяем условия Дирихле, потому что они технически проще.

[3]) Оператор $\left(-\Delta_\Gamma + m_0^2\right)$ — это по определению расширение по Фридрихсу в $L^2(R^2)$ полуограниченного снизу симметрического оператора $\left(-\Delta + m_0^2\right)$, заданного на $C_0^\infty\left(R^2 - \Gamma\right)$ (см. [Gu Ro Si 3]). — *Прим. перев.*

[4]) Для сравнения с (1.1) Γ следовало бы заменить на $(Z^2)^* \setminus \Gamma$, где $(Z^2)^*$ — множество всех ребер решетки Z^2.

гауссовыми мерами можно представить в виде

$$d\Phi_{C_1} - d\Phi_{C_2} = \int_0^1 \frac{d}{ds}\, d\Phi_{C(s)},$$

где $C(s) = sC_1 + (1-s)C_2$. Эта формула применима с тем же успехом к интересующей нас негауссовой мере $\exp\left[-\lambda \int P(x)\,dx\right] d\Phi_C$. Существует простая формула для вычисления $\frac{d}{ds}\, d\Phi_{C(s)}$, а именно [DiGli]:

$$\frac{d}{ds}\int F\, d\Phi_{C(s)} = \frac{1}{2}\int (C'(s)\,\Delta_\Phi)\, F\, d\Phi_{C(s)}, \tag{1.7}$$

где

$$C'(s)\cdot\Delta_\Phi F = \frac{d}{ds}\int C(s,\, x,\, y)\,\frac{\delta^2}{\delta\Phi(x)\,\delta\Phi(y)}\, F\, dx\, dy = \int [C_1(x,\, y) - C_2(x,\, y)]\,\frac{\delta^2}{\delta\Phi(x)\,\delta\Phi(y)}\, F\, dx\, dy \tag{1.8}$$

и $C(s, x, y)$ — ядро $C(s)$.

Доказательство этой формулы сводится к интегрированию по частям в континуальном интеграле. В интересующем нас случае $C_1 = C_{\Gamma_1}$, $C_2 = C_{\Gamma_2}$ и интегрирование по частям дает нужную регуляризацию [1]) $\frac{d}{ds}\, d\Phi_{C(s)}$.

2. Основные результаты

Для достаточно малых значений λ/m_0^2 мы докажем существование экспоненциальной факторизации функций Швингера. Эта факторизация будет установлена для конечного объема, но полученные при этом оценки не будут зависеть от его величины. Отсюда легко вывести, что функции Швингера сходятся при переходе к бесконечному объему и что предельные функции тоже обладают экспоненциальной факторизацией (и не зависят от граничных условий) (см. [Gli Ja Sp 1]). Применяя теорему реконструкции Остервальдера — Шрадера к предельным функциям Швингера, можно

---

[1]) Формально $\frac{d}{ds}\,\Phi_{C(s)} = J(\Phi)\, d\Phi_{C(s)}$, где Якобиан J есть $J(\Phi) = \frac{1}{2}\int :\Phi(x)\,[C(s)^{-1} C'(s)\, C(s)^{-1}](x, y)\cdot\Phi(y):\, dx\, dy = -\frac{1}{2}\int :\Phi(x) \times \left[\frac{d}{ds} C^{-1}(s)\right](x,\, y)\,\Phi(y):\, dx\, dy$. Поскольку C_{Γ_1} и C_{Γ_2} взаимно сингулярны, при $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ следует ожидать наличия сингулярности в $J(\Phi)$.

построить отвечающую бесконечному объему $P(\varphi)_2$-теорию, в которой будут выполнены все аксиомы Вайтмана и физическая масса будет положительна. Мы покажем также, что функции Швингера аналитичны по λ для λ в ограниченном секторе

$$0 < |\lambda| < \varepsilon, \qquad -\pi/2 < \arg \lambda < \pi/2. \tag{2.1}$$

Пусть $\mathscr{C}$ — множество выпуклых линейных комбинаций операторов ковариации (1.6) с граничными условиями Дирихле. Основные свойства мер $d\Phi_C$, $C \in \mathscr{C}$, сформулированы в разд. 9 (с целью их использования при доказательстве оценок разд. 10). Но для того чтобы иметь возможность ввести нужные для дальнейшего элементарные определения, отметим уже здесь, что для ограниченного измеримого множества $\Lambda \subset R^2$ и $C \in \mathscr{C}$

$$V(\Lambda) = \int\limits_{\Lambda} :P(\Phi(x)): dx \in L_p(\mathscr{S}', d\Phi_C) \tag{2.2}$$

и

$$\exp[-\lambda V(\Lambda)] \in L_p(\mathscr{S}', d\Phi_C) \tag{2.3}$$

для всех $p \in [1, \infty)$ и $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0$. (См. предложение 9.3 и теорему 9.5.) В (2.2) полином P произволен, а в (2.3) P полуограничен снизу. Виково упорядочение в (2.2) берется относительно фиксированной меры $d\Phi_{C_\varnothing}$ из (1.4), даже если $C \neq C_\varnothing$. Для того чтобы упростить последующее обсуждение, возьмем Λ равным объединению квадратов решетки, а при рассмотрении предела $\Lambda \to \infty$ будем считать, что Λ — квадрат с центром в начале координат [1]).

Пусть

$$Z(\Lambda) = Z(\Lambda, C) = \int e^{-\lambda V(\Lambda)} d\Phi_C. \tag{2.4}$$

В теореме 6.1 ниже утверждается, что $Z(\Lambda) \neq 0$. Благодаря этому можно ввести меру

$$dq_\Lambda = dq_{\Lambda, C} = Z(\Lambda, C)^{-1} e^{-\lambda V(\Lambda)} d\Phi_C. \tag{2.5}$$

Функции Швингера в конечном объеме — это по определению моменты меры dq_Λ:

$$S_\Lambda(x_1, \ldots, x_n) = \int \Phi(x_1) \ldots \Phi(x_n) dq_\Lambda. \tag{2.6}$$

[1]) Более общее обрезание, которое требуется для доказательства евклидовой ковариаитиости предела $\Lambda \to \infty$, можно получить, вставив неотрицательную L^∞-функцию h в интеграл (2.2). Такое h не влияет иа дальнейшее обсуждение.

S_Λ является обобщенной функцией умеренного роста из $\mathcal{S}'(R^{2n})$. Чтобы в этом убедиться, проинтегрируем (2.6) с основной функцией вида $w(x)=w_1(x_1)\ \ldots\ w_n(x_n)$. Все $n+1$ сомножителей $\Phi(w)=\int\Phi(x_i)\,w_i(x_i)\,dx_i$ и $e^{-\lambda V(\Lambda)}$ в подынтегральном выражении ограничены в силу неравенства Гёльдера (2.3) и следующей оценки, вытекающей из предложения 9.3:

$$\|\Phi(w_i)\|_{L_p(\mathcal{S}')}\leqslant M_p\|w_i\|_{L_2(R^2)}.$$

Полезно уметь интегрировать не только мономы в (2.4), но и произведения упорядоченных по Вику полиномов:

$$A=\int:\Phi(x_1)^{n_1}:\ \ldots\ :\Phi(x_j)^{n_j}:w(x_1,\ \ldots,\ x_j)\,dx. \tag{2.7}$$

Мы предположим, что $w\in\mathcal{S}(R^{2j})$, хотя было бы достаточно более слабого условия. Определим $\operatorname{supp}A$ как пересечение всех таких замкнутых подмножеств $C\subset R^2$, что

$$\operatorname{supp}w\subset C\times\ \ldots\ \times C\ \ (j\text{ раз}). \tag{2.8}$$

Теорема 2.1. *Пусть λ принадлежит замыканию полукруга* (2.1), *и пусть ε/m_0^2 достаточно мало. Пусть A и B — функции на $\mathcal{S}'$ вида* (2.7) *и положим $d=\operatorname{dist}\{\operatorname{supp}A,\operatorname{supp}B\}$. Тогда существует константа $M=M_{A,B}$ и такая константа m, не зависящая от A и B, что*

$$\left|\int AB\,dq_{\Lambda,\,C_\varnothing}-\int A\,dq_{\Lambda,\,C_\varnothing}\int B\,dq_{\Lambda,\,C_\varnothing}\right|\leqslant M_{A,\,B}e^{-md}$$

равномерно по Λ при $\Lambda\to\infty$, причем M не зависит от сдвигов A или B.

Теорема 2.2. *Пусть λ принадлежит замыканию полукруга* (2.1), *и пусть ε/m_0^2 достаточно мало. Для A вида* (2.7) *величина $\left|\int A\,dq_{\Lambda,\,C}\right|$ ограничена при $\Lambda\to\infty$ равномерно по λ и Λ.*

Используя аналитичность функций Швингера в конечном объеме, теорему Витали и сходимость при $\Lambda\to\infty$ для вещественных достаточно малых λ, получаем

Следствие 2.3. *Для достаточно малого ε/m_0^2 предельные функции Швингера аналитичны по λ в области* (2.1).

Кластерное разложение

Доказательство сформулированных теорем основано на кластерном разложении, которое мы сейчас определим. Пусть $\mathcal{B}$ — некоторое множество отрезков в R^2. Нас будут интересовать два случая: $\mathscr{B}=(Z^2)^*$ — множество всех ребер в Z^2 и $\mathscr{B}=(Z^2)^*\setminus\Gamma$, где Γ — конечное подмножество $(Z^2)^*$. Мы идентифицируем подмножество $\Gamma\subset\mathscr{B}$ с подмножеством

$$\Gamma=\bigcup_{b\in\Gamma} b\subset R^2.$$

Подмножества $\Gamma\subset\mathscr{B}$ будут нумеровать члены нашего разложения. Член, соответствующий Γ, имеет разрыв на

$$\Gamma^C=\mathscr{B}\setminus\Gamma \tag{3.1}$$

и получается при выборе гауссовой меры с условиями Дирихле на Γ^C. Линии в Γ^C называются линиями Дирихле. На линиях $b\in\Gamma$ возникает различие между мерой $d\Phi_{C_\varnothing}$ и «мерой без взаимодействия» $d\Phi_{C_\Gamma}$. Разность между ними выражается через производные с помощью основной теоремы анализа (см. ниже).

Операторы ковариации, которые мы рассматриваем, — это выпуклые комбинации операторов C_Γ. Для каждого $b\in\mathscr{B}$ введем параметр $s_b\in[0,1]$, характеризующий силу взаимодействия через b. Значение параметра $s_b=0$ соответствует заданию на b нулевых граничных условий Дирихле, т. е. отсутствию взаимодействия через b, а $s_b=1$ соответствует полному взаимодействию через b. Положив

$$s=(s_b)_{b\in\mathscr{B}}, \tag{3.2}$$

определим многопараметрическое семейство операторов ковариации

$$C(s)=\sum_{\Gamma\subset\mathscr{B}}\prod_{b\in\Gamma}s_b\prod_{b\in\Gamma^c}(1-s_b)\,C_{\Gamma^c}. \tag{3.3}$$

Поскольку коэффициенты в (3.3) удовлетворяют условию

$$1=\prod_{b\in\mathscr{B}}1=\prod_{b\in\mathscr{B}}[s_b+(1-s_b)],$$

(3.3) — выпуклая линейная комбинация, что и требуется. Ковариация, соответствующая свободному полю, теперь обозначается так: $C_\varnothing=C(1,1,\ldots,)=(-\Delta+m_0^2)^{-1}$, а ковариация, соответствующая полному отсутствию взаимодействия между различными областями фазового пространства, есть $C_{\mathscr{B}}=C(0,0,\ldots)=(-\Delta_{\mathscr{B}}+m_0^2)^{-1}$.

Функции Швингера и вакуумный функционал зависят естественным образом от s, и мы будем применять обозначения

$$Z(s)\,S_s(x) = Z(\Lambda,\ s)\,S_{\Lambda,\,s}(x) = \int \prod_{i=1}^{n} \Phi(x_i)\, e^{-\lambda V(\Lambda)}\, d\Phi_s, \tag{3.4}$$
$$Z(s) = Z(\Lambda,\ s) = \int e^{-\lambda V(\Lambda)}\, d\Phi_s,$$

где $d\Phi_s = d\Phi_{C(s)}$.

Назначение кластерного разложения в том, чтобы выразить величины, учитывающие взаимодействие точек фазового пространства ($s_b \equiv 1$) через величины, в которых это взаимодействие не учитывается (и которые относятся поэтому к конечному объему). «Невзаимодействующие» величины имеют $s_b = 0$ для многих $b \in \mathscr{B}$, поэтому для их описания удобно сначала определить $s(\Gamma) = (s(\Gamma)_b)_{b \in \mathscr{B}}$ по формуле

$$s(\Gamma)_b = \begin{cases} s_b, & b \in \Gamma, \\ 0, & b \notin \Gamma. \end{cases} \tag{3.5}$$

Для конечных Γ $s(\Gamma)$ определяет граничные условия Дирихле на больших расстояниях (на Γ^c), а относительно s можно считать, что оно задает общие граничные условия на Γ^c и согласуется с $s(\Gamma)$ на Γ. Таким образом, следующее определение представляет собой способ выразить тот факт, что F не зависит от граничных условий на ∞.

Определение 3.1. Функция $F(s)$ называется *регулярной на бесконечности*, если для каждого s

$$F(s) = \lim_{\{\Gamma \nearrow \mathscr{B}\,:\ \Gamma \text{ конечно}\}} F(s(\Gamma)). \tag{3.6}$$

Предложение 3.1. *Функции* (3.4) *регулярны на бесконечности. Здесь S сходится в $\mathscr{S}'$ и $\mathscr{B} \subseteq (Z^2)^*$.*

Поскольку Λ фиксировано и ограничено, существование предела (3.6) доказывается элементарно. Мы опускаем доказательство, так как его легко получить на основе техники, развиваемой в разд. 7 и 9.

Первый шаг в кластерном разложении заключается в применении основной теоремы анализа к конечному числу ненулевых параметров в $F(s(\Gamma))$. Положим

$$\partial^{\Gamma} = \prod_{b \in \Gamma} \frac{d}{ds_b} \tag{3.7}$$

и для s и σ зададим отношение упорядоченности так, чтобы

$$\sigma \leqslant s \Leftrightarrow \sigma_b \leqslant s_b \quad \text{для всех} \quad b \in \mathscr{B}.$$

Предложение 3.2. *Пусть $F(s)$ — гладкая функция, регулярная на бесконечности. Тогда*

$$F(s)=\sum_{\{\Gamma\subset\mathscr{B}\,:\,\Gamma\ \text{конечно}\}}\ \int\limits_{0\leqslant\sigma\leqslant s(\Gamma)}\partial^{\Gamma}F(\sigma(\Gamma))\,d\sigma. \tag{3.8}$$

Доказательство. Обозначим выражение в правой части равенства (3.8) через $G(s)$. Предположим, что $F(s(B))=G(s(B))$ для любого конечного подмножества B из $\mathscr{B}$. Тогда $G(s(B))$ в точности равно сумме (3.8), ограниченной на подмножества $\Gamma\subset B$. Поскольку $F(s)$ регулярна на бесконечности, сходимость суммы следует из предположения и (3.8) получается переходом к пределу $B\nearrow\mathscr{B}$. Докажем теперь наше предположение. Для функции $f(s_b)$ одного переменного положим

$$(\delta^b f)(s_b)=f(s_b)-f(0)=\int\limits_0^{s_b}\partial^b f(\sigma_b)\,d\sigma_b,$$

$$\left(E_0^b f\right)(s_b)=f(0).$$

Тогда $I=E_0^b+\delta^b$ (основная теорема анализа) и

$$I=\prod_{b\in B}\left(E_0^b+\delta^b\right)=\sum_{\Gamma\subset B}E_0^{B\setminus\Gamma}\,\delta^{\Gamma}, \tag{3.9}$$

где

$$\delta^{\Gamma}=\prod_{b\in\Gamma}\delta^b,\qquad E^{B\setminus\Gamma}=\prod_{b\in B\setminus\Gamma}E_0^b.$$

Легко видеть, что (3.9) приводит к нужному равенству $F(s(B))=G(s(B))$.

Следующий шаг в кластерном разложении заключается в факторизации и частичном пересуммировании (3.8). Пусть

$$R^2\setminus\Gamma^c=X_1\cup X_2\cup\ \dots\ \cup X_r, \tag{3.10}$$

так что каждое X_i есть объединение связных компонент и $X_i\cap X_j=\varnothing$ для $i\neq j$.

Определение 3.2. Функция $F(\Lambda,s)$ называется *факторизующейся* (decouple) *при* $s=0$, если

$$F(\Lambda,\ s(\Gamma))=\prod_{i=1}^{r}F(\Lambda\cap X_i,\ s(\Gamma\cap X_i)) \tag{3.11}$$

при условий, что выполнено (3.10).

Предложение 3.3. *Если выполнено условие* (3.10), *то каждая из мер* $d\Phi_{s(\Gamma)}$ *и* $\exp[-\lambda V(\Lambda)]\,d\Phi_{s(\Gamma)}$ *факторизуется в произведение r мер, и i-я мера в этом произведении опре-*

делена на $\mathscr{S}'(X_i)$. Чтобы избежать вопросов о регулярности, мы предполагаем, что $\mathscr{B} \subseteq (Z^2)^*$.

Набросок доказательства. Поскольку $C(s(\Gamma))$ имеет нулевые данные Дирихле на Γ^c, оператор $C(s(\Gamma))$ представим в виде прямой суммы сужений $C(s(\Gamma)) \restriction L_2(X_i)$. Отсюда следует факторизация $d\Phi_{s(\Gamma)}$; это можно увидеть с помощью стандартной формулы для гауссова интеграла от полинома (теорема 9.1). Поскольку $:P(\Phi(x)):$ — локальная функция, $\exp[-\lambda V(\Lambda)]$ также факторизуется, и то же самое справедливо и для $\exp[-\lambda V(\Lambda)]\, d\Phi_{s(\Gamma)}$.

Следствие 3.4. *Функции ZS и Z из* (3.4) — *факторизующиеся при $s = 0$.*

Кластерное разложение представляет F как сумму произведений вкладов от связных графов. Рассмотрим некоторое интересующее нас множество X_0 (например, $X_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ из (3.4)). Графы, которые не пересекаются с X_0, пересуммируются, давая отдельный множитель в F, отвечающий внешней области.

Опишем процесс этого пересуммирования более подробно. Подставим (3.11) в разложение (3.8). Это дает

$$\Gamma(\Lambda, s) = \sum_{\Gamma} \prod_{i=1}^{r} \int_0^{s(\Gamma_i)} \partial^{\Gamma_i} F(\Lambda \cap X_i, \sigma(\Gamma_i))\, d\sigma, \tag{3.12}$$

где $\Gamma_i = \Gamma \cap X_i$. Если X_i — связные, то суммирование идет по произведениям связных графов. Пусть теперь X_1 в (3.10) — объединение всех компонент, пересекающих X_0, а X_2 — объединение оставшихся компонент. Пересуммирование заключается в том, чтобы фиксировать X_1 и Γ_1 и провести суммирование по всем возможным выборам Γ_2, т. е.

$$F(\Lambda, s) = \sum_{X_1, \Gamma_1} \int_0^{s(\Gamma_1)} \partial^{\Gamma_1} F(\Lambda \cap X_1, \sigma(\Gamma_1))\, d\sigma \times$$
$$\times \sum_{\Gamma_2} \int_0^{s(\Gamma_2)} \partial^{\Gamma_2} F(\Lambda \cap X_2 \sigma(\Gamma_2))\, d\sigma.$$

Суммирование по Γ_2 распространяется на все возможные подмножества Γ_2 ребер в $\mathscr{B} \setminus X_1^-$ [1]). Поэтому с учетом (3.8) сумма по Γ_2 равна $F(\Lambda \cap X_2, s(\mathscr{B} \setminus X_1^-))$.

[1]) X_1^- обозначает замыкание X_1. — *Прим. перев.*

Положив $X = X_1^-$ и $\Gamma = \Gamma_1$, получим разложение вида

$$F(\Lambda, s) = \sum_X K(X_0, X) F(\Lambda \setminus X, s(\mathscr{B} \setminus X)),$$

$$K(X_0, X) = \sum_\Gamma \int_0^{s(\Gamma)} \partial^\Gamma F(\Lambda \cap X, \sigma(\Gamma))\, d\sigma. \tag{3.13}$$

В этих суммах X пробегает множество конечных объединений замкнутых квадратов решетки, а Γ пробегает множество таких конечных подмножеств $\mathscr{B}$, что:

а) каждая компонента $X \setminus \Gamma^c$ пересекает X_0;
б) $\Gamma \subset \operatorname{Int} X$.
Если для данного X таких Γ не существует, то $K(X_0, X) \equiv 0$.

Теорема 3.5. *Пусть X_0 — ограниченное множество, и пусть F — гладкая функция, регулярная на бесконечности и факторизующаяся при $s = 0$. Тогда существует кластерное разложение* (3.13).

Пример 1. Пусть $\mathscr{B} = (Z^2)^*$ — множество всех ребер в Z^2, и пусть $X_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Положим $ZS = F$, см. (3.4). Заметим, что $(s = 1)$

$$F(\Lambda \setminus X, s(\mathscr{B} \setminus X)) = \int e^{-\lambda V(\Lambda \setminus X)}\, d\Phi_{s(\mathscr{B} \setminus X)} = \tag{3.14}$$
$$= Z(\Lambda \setminus X, s(\mathscr{B} \setminus X)) = Z(\Lambda \setminus X, C_{\partial X}) \equiv Z_{\partial X}(\Lambda \setminus X),$$

так как изменение данных внутри X не влияет на интеграл. Таким образом, если мы теперь разделим это равенство на Z, то, используя (3.13), получим

$$S_\Lambda(x) = \sum_{X, \Gamma} \int \partial^\Gamma \int \prod_i \Phi(x_i)\, e^{-\lambda V(\Lambda \cap X)}\, d\Phi_{s(\Gamma)}\, ds(\Gamma) \times \tag{3.15}$$
$$\times Z_{\partial X}(\Lambda \setminus X)/Z(\Lambda).$$

Если мы представим $X \setminus \Gamma^c$ в виде объединения связных компонент, интеграл в (3.15) можно будет факторизовать, как в (3.12).

Пример 2. Пусть $\Gamma_1 \subset (Z^2)^*$ и $\Gamma_2 = \Gamma_1 \setminus b_1$ — конечные множества ребер на решетке, где b_1 — первый элемент Γ_1 при некотором лексикографическом упорядочении $(Z^2)^*$. Мы хотим применить кластерное разложение (по всем ребрам

$b \neq b_1$) для того, чтобы изучить разность $Z_{\Gamma_1} - Z_{\Gamma_2}$, где

$$Z_\Gamma = \int e^{-\lambda V(\Lambda)}\, d\Phi_{C_\Gamma}.$$

Поэтому положим $\mathscr{B} = (Z^2)^* \setminus b_1$, $X_0 = b_1$. Z тогда будет функцией пары (s, s_{b_1}). Определим

$$F(\Lambda, s) = \begin{cases} Z(\Lambda, s(\Gamma^c), 0) - Z(\Lambda, s(\Gamma^c), 1), & b_1 \subset \Lambda; \\ Z(\Lambda, s(\Gamma^c), 0), & b_1 \cap \Lambda = \varnothing. \end{cases}$$

Это определение таково, что $F(s=1) = Z_{\Gamma_1} - Z_{\Gamma_2}$ для $b \subset \Lambda$. Далее, F является гладкой функцией, регулярной на бесконечности и факторизующейся при $s = 0$. (Последнее свойство имеет место потому, что b_1 не входит в $\mathscr{B}$.) Заметим, что F не зависит от переменных s_b для $b \in \Gamma_2$, поэтому $\partial^b F = 0$ при $b \in \Gamma_2$. Таким образом, Γ_2, соответствующее ненулевым членам разложения, состоит из линий Дирихле в кластерном разложении для F, и в (3.13) мы можем наложить дальнейшие ограничения на Σ_Γ:

в) $\Gamma \cap \Gamma_2 = \varnothing$.

Из (3.13) имеем

$$F(\Lambda, s=1) = Z_{\Gamma_1}(\Lambda) - Z_{\Gamma_2}(\Lambda) = \\ = \sum_X K(b_1, \Gamma_1, X)\, \Gamma(\Lambda \setminus X, s(\mathscr{B} \setminus X)) = \\ = \sum_X K(b_1, \Gamma_1, X)\, Z_{\Gamma_1 \cup X^*}(\Lambda \setminus X)$$

Здесь X^* — множество ребер на решетке, принадлежащих X, а последиее равенство имеет место потому, что второй из сомножителей в этом выражении не зависит от s_b, $b \in \operatorname{Int} X$ Умножим и разделим это равенство на $Z_{\partial\Delta}(\Delta)^{|\Lambda \cap X|}$, где Δ — некоторый квадрат на решетке. Поскольку

$$Z_{\partial\Delta}(\Delta)^{|\Lambda \cap X|} Z_{\Gamma_1 \cup X^*}(\Lambda \setminus X) = Z_{\Gamma_1 \cup X^*}(\Lambda),$$

мы получим (с новым K)

$$Z_{\Gamma_1} = Z_{\Gamma_1 \setminus b_1} + \sum_X K(b_1, \Gamma_1, X)\, Z_{\Gamma_1 \cup X^*}(\Lambda) \tag{3.16}$$

и

$$K(b_1, \Gamma_1, X) = Z_{\partial\Lambda}(\Delta)^{-|\Lambda \cap X|} \times \\ \times \int \sum_\Gamma \partial^{\Gamma \cup b_1} Z(\Lambda \cap X, s(\Gamma \cup b_1))\, ds(\Gamma \cup b_1). \tag{3.17}$$

Эти уравнения имеют структуру, промежуточную между уравнениями Кирквуда — Зальцбурга и Майера — Монтролла. Они будут изучены в § 6 с тем, чтобы получить оценку Z_Γ / Z, т. е. второго сомножителя в (3.15).

4. Факторизация и аналитичность: доказательство основных результатов

В этом разделе мы докажем свойства факторизации и аналитичности — основные результаты этих лекций, прииияв в качестве гипотезы сходимость кластерного разложения (3.15). Пусть $T(x, \Lambda, X, \Gamma)$ обозиачает $X-\Gamma$ член в (3.15), так что

$$S_\Lambda(x)=\sum_{X, \Gamma} T(x, \Lambda, X, \Gamma). \tag{4.1}$$

Для произвольной основной функции $w \in \mathcal{S}(R^{2n})$ ряд

$$\int S_\Lambda(x)\, w(x)\, dx=\sum_{X, \Gamma}\langle w, T\rangle \tag{4.2}$$

сходится абсолютно. Скорость сходимости определяется $|X|$, объемом X. Для любого $K>0$ мы докажем, что

$$\sum_{\{X, \Gamma:\, |X| \geqslant D\}}|\langle w, T\rangle| \leqslant|w| e^{-K(D-n)}, \tag{4.3}$$

где $|w|$ — некоторая (зависящая от n) $\mathcal{S}$-иорма w.

Теорема 4.1. *Пусть дано $K>0$. Пусть m_0 достаточно велико, а ε достаточно мало (в зависимости от K), и пусть λ принадлежит замыканию* (2.1). *Тогда существует $\mathcal{S}$-норма $|\cdot|$, такая, что* (4.3) *справедливо равномерно по λ, по Λ и D, а $|w|$ инвариантно относительно сдвигов по любой переменной.*

Из доказательства этой теоремы следует, что подынтегральные выражения A вида (2.7) можно подставлять в (3.15). Таким образом, теорема 2.2 и следствие 2.3 вытекают из (4.3) при $K=1, D=1$.

Теорема 2.1 также следует из сходимости кластерного разложения. Проще всего провести доказательство для двухточечиой функции при четном взаимодействии, и, поскольку оио хорошо иллюстрирует основиые идеи, мы рассмотрим сиачала этот случай.

Доказательство теоремы 2.1 (для $n=2$, P четного) в предположении справедливости теоремы 4.1.

Поскольку P — полином взаимодействия в (1.2) — четиый, преобразование $\Phi(x) \rightarrow-\Phi(x)$ является симметрией теории. Для гауссовых интегралов, получающихся при факторизации меры $\exp[-\lambda V] d\Phi_{C(s(\Gamma))}$ (ср. предложение 3.3), справедливо более сильное утверждение: симметрией является преобразование

(4.4) $$\Phi(x) \to \sigma(x)\Phi(x),$$

где $\sigma(x) = \pm 1$, $\sigma(x) = \text{const}$ на каждом X_i.

Ввиду симметрии $\Phi \to -\Phi$, $S_\Lambda(x_1, \ldots, x_n) = 0$ при нечетных n. Аналогично,

$$\int \prod_i \Phi(x_i)\, e^{-\lambda V(\Lambda \cap X)}\, d\Phi_{C(s(\Gamma))} = 0,$$

за исключением случая, когда каждая из связных компонент $X_1, \ldots, X_r$ содержит четное число точек x_i. Поскольку $\partial^\Gamma 0 = 0$, такое же равенство $T(x, \Lambda, X, \Gamma) = 0$ имеет место всегда, за исключением случая, когда каждое из X_j содержит четное число точек x_i. Так как каждое из X_j содержит по меньшей мере одну точку x_i в силу условия а) разд. 3, то каждое X_j должно содержать по меньшей мере две точки x_j. Таким образом, для $n = 2$ имеется только одно X_j. Другими словами, $X \setminus \Gamma^c$ связно. Пусть d определено, как в теореме 2.1. Положим $w = w_1 \otimes w_2$. Поскольку X связно и $\operatorname{supp} w_i \cap \cap X \neq \varnothing$, имеем $d \leqslant |x| + 1$. Тогда в силу (4.2), (4.3)

$$\left| \int S_\Lambda(x_1, x_2)\, w_1(x_1)\, w_2(x_2)\, dx \right| \leqslant |w|\, e^{-K(D-2)} \leqslant M_w e^{-Kd}.$$

Так как одноточечная функция Швингера $S_\Lambda(x_1)$ для четного P равна нулю, то этой оценкой завершается доказательство теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.1 (общий случай) в предположении справедливости теоремы 4.1.

Идея доказательства, как и раньше, заключается в том, чтобы свести кластерное разложение к членам, включающим только одну связную компоненту $X_1 = X$. Члены, которые содержат две или более связные компоненты, равны нулю ввиду наличия некоторой симметрии. Поскольку в общем случае (P не обязательно четное) такой симметрии не имеется, мы, следуя Жинибру [Gi 1], рассмотрим новую теорию, имеющую искусственную симметрию.

Пусть $d\overset{*}{\Phi}_{C^*}$ обозначает изоморфную копию меры $d\Phi_C$ ($C^* \cong C$), определенную на $\mathscr{S}'^*$ — изоморфной копии $\mathscr{S}'$. Новая теория по определению имеет свободную меру $d\Phi_C \times d\overset{*}{\Phi}_{C^*}$, ковариацию $C \otimes I + I \otimes C^* = \tilde{C}$, нормированную физическую меру

$$d\tilde{q} = \tilde{Z}^{-1} e^{-V(\Lambda)} e^{-V(\Lambda)^*}\, d\Phi_C \times d\overset{*}{\Phi}_{C^*}$$

и поле $\tilde{\Phi} = \Phi \otimes I + I \otimes \Phi^*$.

Эта теория инвариантна (четна) относительно симметрии $\Phi \longleftrightarrow \Phi^*$, которая переставляет сомножители.

Применим теперь кластерное разложение к выражению

$$\tilde{Z} \int (A - A^*)(B - B^*)\, d\tilde{q}.$$

Операторы ковариации, которые возникают в этом разложении, имеют вид

$$\tilde{C}(s) = C(s) \otimes I + I \otimes C(s)^*,$$

так что симметрия $\Phi \longleftrightarrow \Phi^*$ сохраняется в гауссовых мерах каждого члена разложения. (Однако это разложение изменится, если выбрать $\mathscr{B} = (Z^2)^* \setminus \Gamma$, где Γ — множество ребер в двух связных множествах, содержащем $\operatorname{supp} A = \operatorname{supp} A - A^*$ и содержащем $\operatorname{supp} B$. Таким образом, для каждой компоненты X_i либо $X_i \supset \operatorname{supp} A$, либо $X_i \cap \operatorname{supp} A = \varnothing$, и то же самое справедливо для $\operatorname{supp} B$.

Благодаря этому ограничению имеется не более двух компонент. Так как n в (4.3) ограничивает число компонент, можно проверить, что в (4.3) $n = 2$.) Рассмотрим теперь член в (3.15) с компонентами $X_1, X_2, \ldots,$ удовлетворяющими условиям:

$$\operatorname{supp} A \subset X_i, \quad \operatorname{supp} B \subset X_j, \quad i \neq j. \tag{4.5}$$

Для этого члена можно применить симметрию $\Phi \longleftrightarrow \Phi^*$ отдельно по каждому X_i. Однако разность $A - A^*$ по отношению к симметрии X_i нечетна, так что слагаемые, удовлетворяющие (4.5), должны равняться нулю. Неисчезающие члены, которые не удовлетворяют условию (4.5), содержат компоненту $X_1 = X$ с $d \leqslant O(|X|)$, и поэтому для $d \geqslant 4$

$$\left| \int (A - A^*)(B - B^*)\, d\tilde{q} \right| \leqslant M_{AB} e^{-md}.$$

Подынтегральное выражение в левой части неравенства состоит из четырех слагаемых, и в каждом из слагаемых интеграл по dq факторизуется. Вычислив это выражение, получим

$$2 \left| \int AB\, dq_{\Lambda,\, C} - \int A\, dq_{\Lambda,\, C} \int B\, dq_{\Lambda,\, C} \right|,$$

откуда и следует теорема 2.1.

5. Сходимость кластерного разложения: основные идеи

В части II этих лекций содержатся две основные идеи. Первая — это формула (3.15), дающая кластерное разложение для функций Швингера. Вторая — это оценки, которые обеспечивают сходимость этого разложения, равномерные при $\Lambda \to \infty$.

В данном разделе мы сформулируем эти оценки в виде трех предложений и, применяя их, докажем теорему 4.1. Затем мы докажем наиболее простые из этих оценок, а доказательства более сложных оставим до следующих разделов. Наиболее трудная из этих оценок содержится в предложении 5.3. Так как она составляет в некотором смысле ядро нашей статьи, в конце этого раздела мы обсудим идеи, используемые при ее доказательстве.

Доказательство сходимости основано на оценках следующих типов:

a) Комбинаторные оценки, необходимые для подсчета числа членов в разложении и в особенности для подсчета или оценки числа членов некоторого специального типа.

b) Одночастичные оценки ядер операторов ковариации и их производных, $\partial^{\Gamma} C(s)$.

c) Оценки континуальных интегралов. В типичных случаях оценки типа a и b входят составной частью в оценки типа «c».

Возвращаясь к нашей задаче, отметим, что (4.2) или (3.15) — это суммы, в которых каждое из слагаемых является произведением двух сомножителей — отношение функций распределения, умноженное на континуальный интеграл. Первое предложение будет чисто комбинаторным — типа a — и касается подсчета числа членов с фиксированным $|X|$, объемом множества X. Второе и третье предложения касаются оценки сомножителей, составляющих отдельное слагаемое в сумме в (3.15). Эти последние два предложения носят смешанный характер, поскольку в их доказательстве применяются оценки типов a, b и c.

Предложение 5.1. *Число членов в* (3.15)—(3.16) *с фиксированным значением* $|X|$ *ограничено величиной* $e^{K_1 |X|} \equiv O(1) e^{19 |X|}$.

Предложение 5.2. *Существует константа* K_2, *не зависящая от* λ, *лежащего в замыкании* (2.1), *и от* Λ *и* m_0, *такая, что для достаточно малых* ε *и достаточно больших* m_0

$$|Z_{\partial X}(\Lambda \setminus X)/Z(\Lambda)| \leqslant e^{K_2 |X|}.$$

Предложение 5.3. *Существуют константа* K_3 *и норма* $|w|$ *на пространстве основных функций* $\mathcal{S}$, *такие, что для любого* $K > 0$, *для любого* Λ *и для* λ *в замыкании* (2.1) *с достаточно большим* m_0 (m_0 *зависит от* K) *справедлива* *следующая оценка*:

$$\left| \left\langle \int \partial^{\Gamma} \int \prod_{i=1}^{n} \Phi(x_i) e^{-\lambda V(\Lambda)} d\Phi_{C(s(\Gamma))} ds(\Gamma), w \right\rangle \right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{-K|\Gamma| + K_3|\Lambda|\} |w|,$$

причем $|w|$ *инвариантно относительно сдвигов по любой из переменных, от которых зависит* w.

Замечание. Виковы полиномы, такие, как в (2.7), также допустимы в этом подынтегральном выражении.

Доказательство теоремы 4.1. Заменим в предложении 5.3 область Λ на $\Lambda \cap X$. Для X в (3.15) имеем $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i^-$ с $r \leqslant n$ и связными X_i.

Кроме того, $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Int} X_i^-$, так что „большинство" ребер из X_i^- принадлежит Γ. В действительности, так как $X_i^- \setminus \Gamma^c = X_i$ — связное множество, то

$$(5.1) \qquad |X_i| - 1 \leqslant 2 |\Gamma \cap \operatorname{Int} X_i^-| \quad \text{и} \quad |X| - n \leqslant 2 |\Gamma|.$$

Поэтому мы можем заменить оценку сверху в предложении 5.3 на $\exp[-K(|X|-n)] \cdot |w|$ с новыми K и $|w|$. Теорема 4.1 непосредственно следует из этой оценки и предложений 5.1 и 5.2.

Доказательство предложения 5.1. Рассмотрим выражение (3.15). Начнем с того, что оценим число способов, которыми можно выбрать компоненту X_i, содержащую некоторую заданную точку x_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Отождествим каждый квадрат (ячейку) Δ на решетке с точкой решетки, расположенной в его центре и отождествим каждое ребро $b \in \mathscr{B}$, проходящее между двумя квадратами Δ и Δ' с линией, соединяющей центр Δ с центром Δ'. Поэтому нам только остается подсчитать число способов, которыми можно нарисовать связный граф, состоящий из ребер решетки. Мы утверждаем, что каждый такой граф можно построить, если начать с точки x_j и двигаться по ориентированному пути, образованному ребрами, причем этот путь пересекает каждое ребро не более чем дважды. В действительности, если мы будем считать узлы решетки островами, а ребра мостами, это утверждение просто следует из решения задачи о кенигсбергских мостах [1]). Число связанных путей длиной l, образованных из сегментов решетки и начинающихся в x_j, не превосходит 4^l. Так как $l \leqslant 8|X_i|$, число способов выбора X_i не более $O(1)2^{16|X_i|}$. Так как число выборов для Γ не более чем $4^{|X|}$, число выборов пар X, Γ не превосходит

$$O(1)\,2^{|X|}4^{|X|}\prod_i 2^{16|X_i|} = O(1)\,2^{19|X|},$$

поскольку $2^{|X|}$ дает оценку числа выборов $|X_i|$ с заданным $|X|$.

На этом доказательство заканчивается. Случай (3.16) рассматривается аналогично.

Предложение 5.2 будет доказано в разд. 6 с помощью уравнений, связанных с уравнениями Кирквуда — Зальцбурга. Отметим здесь только, что преобразование вакуумного функционала включает в себя и преобразование области интегрирования, и преобразование ковариации ($\Lambda \setminus X \Rightarrow \Lambda$ и $C_{\partial X} \Rightarrow C$).

Обсуждение предложения 5.3. Каждая производная d/ds_b в ∂^Γ дифференцирует либо меру, либо подынтегральное выражение. Производная от меры вычислена в (1.7) и приводит к появлению зависящих от s ядер $C'(s)$ в подынтегральном выражении. Повторное дифференцирование дает:

a) Сумму членов, возникающих от итерированных функциональных производных $\partial^2/\partial\Phi^2$ в (1.7).

b) Сумму членов, возиикающих от возможного повториого диффереицирования $\partial^{\Gamma_i}C(s)$ от каждого $C'(s)$, вводимого соотношением (1.7).

Каждая производная также улучшает сходимость одним из следующих двух способов. Во-первых, диффереицироваиие меры дает ядро C', а

c) C' и C малы в том смысле, что

$$(\mathrm{c}_1)\qquad \|C'(x, y)\|_{L_p} \leqslant O(m_0^{-\varepsilon}),$$

$$(\mathrm{c}_2)\qquad 0 \leqslant C'(x, y) = \partial^b C(x, y) \leqslant e^{-m_0(\mathrm{dist}(x, b)+\mathrm{dist}(y, b))},$$

$$(\mathrm{c}_3)\qquad 0 \leqslant C(x, y) \leqslant e^{-m_0|x-y|}, \quad |x-y| \geqslant 1.$$

---

[1]) Мы благодарим О. Брателли за это наблюдение. Решение задачи о кеиигсберских мостах см. в D. W. Blackett — Elementary Topology, Academic Press, New York, 1967, p. 159 [см. также: Оре О., Графы и их применение, «Мир», М., 1965. — *Прим. перев.*].

И, во-вторых, повторное дифференцирование $C(s)$ также улучшает сходимость, поскольку

(d) $\partial^{\Gamma} C$ мало в том смысле, что

(d_1) $\|\partial^{\Gamma} C(x, y)\|_{L_p} \leqslant O\left(m_0^{-\varepsilon|\Gamma|}\right)$,

(d_2) $0 \leqslant \partial^{\Gamma} C(x, y) \leqslant e^{-m_0 d}$,

где d — длина кратчайшего пути, соединяющего x и y, проходящего через каждое ребро $b \in \Gamma$. В действительности из винеровского интегрального представления для $\left(-\Delta+m_0^2\right)^{-1}$ следует, что $\partial^{\Gamma} C(s)$ — это интеграл по винеровским траекториям от x до y, проходящим через каждое $b \in \Gamma$, см. разд. 7—8.

Далее будем действовать следующим образом. Применим неравенство (c_2) для того, чтобы получить оценку типа a). Действительно, в силу (c_2) вклад в лапласиан $C'(s)\Delta_{\Phi}$ из (1.7) дают только x и y, расположенные вблизи от (b). По самому определению нашего разложения на каждую линию $b \in \mathscr{B}$ приходится не более одного лапласиана Δ_{Φ}, поэтому локально получаем конечную степень Δ_{Φ}^{n}. Вычисление Δ_{Φ}^{n} дает $K(n) < \infty$ членов, а это вычисление, повторенное в непересекающихся локальных областях, дает $\exp\{O(\mathrm{vol})\}$ членов. Затем, чтобы получить оценку типа (b), применим (d_2). Основной для доказательства сходимости фактор $m_0^{-\varepsilon|\Gamma|}$ появляется из (d_1).

После того как это проделано, остался континуальный интеграл вида $\int R e^{-\lambda V} d\Phi$.

Имеем тогда

$$\left|\int R e^{-\lambda V(\Lambda)} d\Phi\right| \leqslant\left(\int R^2 d\Phi\right)^{1/2}\left(\int e^{-2 \operatorname{Re} \lambda V(\Lambda)} d\Phi\right)^{1/2},$$

и каждый сомножитель справа порядка $e^{O(\mathrm{vol})}$. Наконец, с помощью (c_3) получаем требуемое убывание взаимодействия с увеличением расстояния между локальными областями в R^2.

После приобретения некоторого навыка оценки, такие, как в предложении 5.3, могут производиться «методом пристального вглядывания». В разд. 7—9 будет развит общий метод, который позволит делать такие оценки более стандартными способами.

6. Уравнение типа Кирквуда — Зальцбурга

Уравнения (3.16), (3.17) можно переписать как уравнение в банаховом пространстве

(6.1) $$\rho=Z(\Lambda) \cdot I+\mathscr{K} \rho$$

с единственным решением $\rho=(I-\mathscr{K})^{-1}Z(\Lambda)\cdot I$, удовлетворяющим оценке

$$\|\rho\|\leqslant\left\|(I-\mathscr{K})^{-1}\right\||Z(\Lambda)|\leqslant 4|Z(\Lambda)|. \tag{6.2}$$

Как мы вскоре увидим, эта оценка по существу эквивалентна предложению 5.2.

Пусть $\mathscr{X}$ — банахово пространство функций f, определенных на конечных подмножествах $\Gamma\subset(Z^2)^*$. Если $f\in\mathscr{X}$, то пусть $(f_n)_{n\geqslant 0}$ обозначает ограничения f на подмножества, состоящие из n элементов. Норма на $\mathscr{X}$ определяется следующим образом:

$$\|f\|=\sup_{\substack{n,\,\Gamma\\ |\Gamma|=n}} 2^{-n}|f_n(\Gamma)|.$$

Определим $\rho_\Lambda\equiv(\rho_{\Lambda,\,n})_{n\geqslant 0}$ как отображение $\Gamma\to Z_\Gamma(\Lambda)$.

Теорема 6.1. *Пусть* $|\lambda|\leqslant\varepsilon$, $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, *и пусть* $\varepsilon>0$ *достаточно мало, а* m_0 *достаточно велико. Тогда* $Z(\lambda)\neq 0$ *и* ρ_Λ, *определенное выше, является единственным решением в* $\mathscr{X}$ *уравнения* (6.1). *Более того,* ρ_Λ *удовлетворяет оценке* (6.2).

По теореме о мажорированной сходимости $Z_{\partial\Delta}(\Delta)\to 1$ при $\varepsilon\to 0$. Таким образом, $1/2\leqslant|Z_{\partial\Delta}(\Delta)|\leqslant 2$; отсюда и вытекает для достаточно малых ε ограничение, фиксирующее ε в формулировке теоремы 6.1. Оно является по существу единственным ограничением на ε, используемым в этих лекциях.

Доказательство предложения 5.2 в предположении справедливости теоремы 6.1:

$$|Z_{\partial X}(\Lambda\setminus X)/Z(\Lambda)|=|Z_{X^*}(\Lambda)/Z(\Lambda)||Z_{\partial\Delta}(\Delta)|^{-|\Delta\cap X|}\leqslant$$
$$\leqslant 2^{|X^*|}\left\|(1-\mathscr{K})^{-1}\right\||Z_{\partial\Delta}(\Delta)|^{-|\Lambda\cap X|}\leqslant e^{K_2|X|}.$$

Доказательство теоремы 6.1. Пусть $1=(1,0,0\ldots)\in\mathscr{X}$, и определим $\mathscr{K}$ с помощью уравнений,

$$(\mathscr{K}f)_n(\Gamma)=f_{n-1}(\Gamma\setminus b_1)+ \tag{6.4}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{X,\,|X|=n}K(b_1,\,\Gamma,\,X)f_{|X^*\cup\Gamma|}(X^*\cup\Gamma)$$

при $n\geqslant 2$, где суммирование по X (как в (3.13) и (3.17)) распространяется на все связные объединения квадратов решетки, такие, что $b_1\in X$. При $n=1$ мы опустим первый член в правой части уравнения (6.4), а при $n=0$ положим $(\mathscr{K}f)_0\equiv 0$. Для того чтобы получить оценку (6.2), покажем теперь, что $\mathscr{K}$ — сжимающий оператор, $\|\mathscr{K}\| \leqslant 3/4$. Достаточно показать, что

$$(6.5)\quad \frac{1}{2} + \sup_{\Gamma \subset \mathscr{B}} 2^{-|\Gamma|} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{X, |X|=m} |K(b_1, \Gamma, x)| 2^{|\Gamma \cup X|} \leqslant 3/4.$$

Доказательство (6.5) аналогично доказательству теоремы 4.1, данному в разд. 5. В частности, оно опирается на предложения 5.1 и 5.3. В силу предложения 5.1 имеется не более $e^{K_1|X|}$ слагаемых для каждого фиксированного значения $|X|$. Учитывая (3.17), видим, что каждое слагаемое имеет по крайней мере одну производную ∂^{b_1}. Применяя предложения 5.1 и 5.3, получим оценку

$$|K(b_1, \Gamma, X) \leqslant e^{-K(|X|+1)} e^{K_2|X|}.$$

Для достаточно больших K отсюда следует (6.5). Чтобы завершить доказательство, осталось только показать, что $Z(\Lambda) \neq 0$. Но при нашем выборе ε $Z_{\Lambda^*} = |Z_{\partial\Lambda}(\Delta)|^{|\Lambda|} \neq 0$. Поэтому $\rho_\Lambda \neq 0$ и $Z(\Lambda) \neq 0$ (см. (6.2)).

7. Операторы ковариации

Ядро $C_\varnothing(x, y)$ оператора $C_\varnothing = (-\Delta + m_0^2)^{-1}$ обладает следующими основными свойствами:

a) $C_\varnothing(x, y)$ — функция разности $|x-y|$;
b) $0 < C_\varnothing(x, y)$;
c) при $|x-y| \geqslant 1$ $C_\varnothing \leqslant e^{-m_0(1-\delta)|x-y|}$;
d) при $|x-y| \to 0$ $C_\varnothing \sim \ln|x-y|$;
e) $C_\varnothing \in \mathscr{B}^{\mathrm{loc}}_{r,\delta}(R^4)$ при $r > 2/(2-\delta)$, $\delta > 0$.

Напомним, что по определению пространство $\mathscr{B}^{\mathrm{loc}}_{r,\delta}(R^4)$ состоит из обобщенных функций $\psi \in \mathscr{S}'$, которые удовлетворяют условию

$$\|\zeta\psi\|_{\mathscr{B}_{r,\delta}} = \left\|(1+k^2)^{\delta/2}(\zeta\psi)^{\sim}\right\|_{L_r} < \infty$$

для любой $\zeta \in C_0^\infty$. Если r, r' — пара сопряженных индексов $\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1\right)$ и $1 \leqslant r' \leqslant 2$, то $\mathscr{B}^{\mathrm{loc}}_{r,\delta}$ представляет собой пространство функций с дробными L_r — производными в силу неравенства Хаусдорфа — Юнга. Относительно общей теории таких пространств см. [Hö]. Свойство (e) следует из того, что как функция $x-y$, $C_\varnothing$ имеет фурье-образ, равный $(k^2+m^2)^{-1}$.

Свойство (a), которое основано на трансляционной инвариантности лапласиана, не выполняется для всех операторов $C \in \mathscr{C}$. Напомним, что $\mathscr{C}$ — это множество всех выпуклых линейных комбинаций операторов ковариации (1.6) с граничными условиями Дирихле, или, другими словами, операторов вида $C(s)$.

Свойства (b) и (c) выполняются для всех $C \in \mathscr{C}$, а свойство (d) справедливо как верхняя оценка для всех $C \in \mathscr{C}$.

Предложение 7.1. *Ядро $C(x, y)$ любого $C \in \mathscr{C}$ удовлетворяет условию*

$$0 \leqslant C(x, y) \leqslant C_{\varnothing}(x, y).$$

Доказательство. Пусть $dz^T_{x, y}$ обозначает плотность условной меры Винера на пространстве траекторий $z(\tau)$, начинающихся в точке x при $\tau = 0$ и заканчивающихся в точке y при $\tau = T$. Пусть J^T_b — функция

$$J^T_b(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z(\tau) \in b,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T; \\ 1 & \text{— в остальных случаях,} \end{cases} \tag{7.1}$$

определенная на винеровских траекториях.

Тогда ядра операторов C_Γ и $C(s)$ имеют следующие представления:

$$C_\Gamma(x, y) = \int_0^\infty e^{-m_0^2 T} \int \prod_{b \in \Gamma} J^T_b(z)\, dz^T_{x, y}\, dT, \tag{7.2}$$

$$C(s)(x, y) = \int_0^\infty e^{-m_0^2 T} \int \prod_{b \in \mathscr{B}} \left(s_b + (1 - s_b) J^T_b\right) dz^T_{x, y}\, dT. \tag{7.3}$$

См. [Ci, § 5.3, 6.1 и 6.3].

Неравенство в предложении 7.1 следует из оценки $0 \leqslant \left(s_b + (1 - s_b) J^T_b\right) \leqslant 1$ в формуле для $C(s)$.

В следующем предложении оценка экспоненциального убывания типа (c) комбинируется с оценкой локального поведения (d). Занумеруем каждый квадрат решетки $\Delta = \Delta_j \subset R^2$ точкой на решетке $j \in z^2$ в нижнем правом углу Δ. Всякий квадрат на решетке (и всякое измеримое множество $X \subset R^2$) отождествим с оператором умножения в $L_2(R^2)$ на соответствующую характеристическую функцию. Пусть далее $j = (j_1, j_2) \in Z^4$ — пара точек на решетке.

Определим локализованный оператор ковариации

$$C(j) = \Delta_{j_1} C \Delta_{j_2} \tag{7.4}$$

и параметр

$$d(j) = \operatorname{dist}(\Delta_{j_1}, \Delta_{j_2}), \tag{7.5}$$

характеризующий нелокальность $C(j)$.

Предложение 7.2. *Для любых* $1 \leqslant q < \infty$ *и* $\delta > 0$ *существует константа* $K_4(q, \delta)$, *не зависящая от* $m_0 \geqslant 1$ *и* $C \in \mathscr{C}$ *такая, что*

$$\| C(j) \|_{L_q(\Delta_{j_1} \times \Delta_{j_2})} \leqslant K_4 m_0^{-2/q} \exp\left(-m_0(1-\delta)\, d(j)\right).$$

Доказательство. Учитывая предложение 7.1, мы можем положить $C = C_\varnothing$. Если $d(j) > 0$, то с необходимостью $d(j) \geqslant 1$ и нужная оценка следует из свойства (c). Множитель $m_0^{-2/q}$ возникает из-за того, что параметр δ в (c) меньше, чем δ в формулировке предложения. Рассмотрим теперь случай $d(j) = 0$. (т. е. совпадающие или соседние квадраты).

Имеем

$$\| C(x, y) \|_{L_q(\Delta_{j_1} \times \Delta_{j_2})} \leqslant K_3 \| C(\cdot, 0) \|_{L_q(R^2)} \leqslant K_4(q)\, m_0^{-2/q}.$$

Последнее неравенство следует из того, что $(-\Delta + 1)^{-1}(x, 0) \in L_q$ для $q \in [1, \infty)$ и из тождества $\left(-\Delta + m_0^2\right)^{-1}(x, 0) = (-\Delta + 1)^{-1}(m_0 x, 0)$.

Замечание. Продифференцированная ковариация $\partial^\Gamma C$ также удовлетворяет оценке предложения 7.1, как это можно видеть из (7.3) и неравенства

$$0 \leqslant \frac{d}{ds_b}(s_b + (1 - s_b) J_b) = 1 - J_b \leqslant 1.$$

Поэтому $\partial^\Gamma C$ тоже удовлетворяет оценке предложения 7.2.

Локальная регулярность ковариации $C \in \mathscr{C}$ применяется для того, чтобы оправдать определение и основные формальные свойства (например, возможность интегрирования по частям) гауссовых интегралов, и используется при доказательстве неравенства $|Z| \leqslant e^{0|\Lambda|}$. В следующем предложении для ядра оператора $C \in \mathscr{C}$ доказано свойство, несколько более слабое, чем (e).

Предложение 7.3. $C \in \mathscr{B}_{2,\delta}^{\mathrm{loc}}$ *для* $0 \leqslant \delta < 1/2$ *с оценкой, не зависящей от* C.

Доказательство. Отметим прежде всего, что $0 \leqslant -\Delta \leqslant -\Delta_\Gamma$. Следовательно, $C_\varnothing^{-1/2} C_\Gamma C_\varnothing^{-1/2}$ — ограниченный оператор, норма которого не превосходит 1. Далее в силу свойства выпуклости множества $\mathscr{C}$ норма оператора $B = C_\varnothing^{-1/2} C C_\varnothing^{-1/2}$ тоже не превосходит 1.

Положим

$$A = C_\varnothing^{-(1/4)+\varepsilon} \zeta C_\varnothing^{1/2}.$$

Для $\zeta \in C_0^\infty(R^2)$ A — оператор Гильберта — Шмидта, поэтому для нормы Гильберта — Шмидта получим

$$(7.6)\qquad \left\|(-\Delta+m_0^2)^{-\varepsilon+\frac{1}{4}}\zeta C\zeta(-\Delta+m_0^2)^{-\varepsilon+\frac{1}{4}}\right\|_{\mathrm{HS}}^2 = \\ = \operatorname{Tr} ABA^*ABA^* = \operatorname{Tr} BA^*ABA^*A \leqslant \\ \leqslant \operatorname{Tr}(BA^*A)^* BA^*A = \operatorname{Tr} A^*AB^2A^*A \leqslant \\ \leqslant \|B\|^2 \operatorname{Tr}(A^*A)^2 \leqslant \|A^*A\|_{\mathrm{HS}}^2.$$

Это неравенство доказывает наше предложение (и даже несколько больше).

Читатель может пропустить следующее предложение, так как оно не применяется в дальнейшем.

Предложение 7.4. *Для любого $q \in \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$ и любого $C \in \mathscr{C}$ найдется такое $\delta = \delta(q) > 0$, что $C \in \mathscr{B}_{q,\delta}^{\mathrm{loc}}$ с оценкой, не зависящей от $C \in \mathscr{C}$.*

Доказательство. Пусть $k = (k_1, k_2) \in R^4$, и положим

$$f(k) = 1 + k^2, \quad g(k) = (1 + k_1^2)(1 + k_2^2),$$
$$h(k) = (\zeta C\zeta)^{\sim}(k).$$

Тогда $g^{-\varepsilon-1} \in L_1$, $f/g \in L_\infty$. Учитывая предложение 7.1 и тот факт, что $\zeta C_\varnothing\zeta \in L_1$, получим, что $h \in L_\infty$ и в силу (7.6) $g^{-\varepsilon+\frac{1}{4}}h \in L_2$ и $h \in L_2$.

Применим эти оценки к интегралу

$$(7.7)\qquad \int |f^{\delta/2}h|^q = \int \left|g^{-\varepsilon+\frac{1}{4}}h\right| \cdot |f/g|^{\delta q/2} |g|^{(\delta q/2)+\varepsilon-\frac{1}{4}} |h|^{q-1}.$$

Выберем некоторое $\delta > 0$ и предположим, что $h \in L_{q_1}$, $q_1 > q > 4/3$. Сомножители в (7.7) принадлежат L_2, $L_{4+\varepsilon}$ и $L_{q_1/q-1} \cap L_\infty$. Для достаточно малых ε и q из малой окрестности q_1 отсюда следует также, что $h \in L_q$. Поскольку $h \in L_q$ для q, лежащего в некотором интервале, $h \in L_q$ при $q \in (4/3, \infty]$. Далее, если $h \in L_q$, $q > 4/3$, то (7.7) показывает, что и $f^{\delta/2}h \in L_q$ для малых δ, что завершает доказательство.

Предложение 7.5. *При $1 \leqslant q < \infty$*

$$c(x) = \lim_{y\to x}(C(x, y) - C_\varnothing(x, y)) \in L_q^{\mathrm{loc}}.$$

Существует константа $K_5(q)$, не зависящая от $m_0 \geqslant 1$ и $C \in \mathscr{C}$, такая, что для любого квадрата решетки Δ

$$\|c\|_{L_q(\Delta)} \leqslant K_5 m_0^{-1/q}.$$

Доказательство. Применяя масштабное преобразование, можно выбрать $m_0 = 1$, как в предложении 7.2. Пусть $\Gamma = \mathscr{B}$ будет множеством всех ребер. Для $x \notin \Gamma$ имеем

$$0 \leqslant -c(x) \leqslant C_\varnothing(x, x) - C_\Gamma(x, x) \leqslant O(1 + |\log \operatorname{dist}(x, \Gamma)|).$$

Это неравенство по существу завершает доказательство, в чем можно убедиться следующим образом [Gu Ro Si 3]. Для $x \notin \Gamma$, $y \notin \Gamma$ имеем

$$(-\Delta_y + m_0^2)\left[C_\varnothing(x, y) - C_\Gamma(x, y)\right] = 0.$$

Поэтому из принципа максимума и того факта, что $C_\Gamma(x, y) = 0$ для $y \in \Gamma$, получаем

$$0 \leqslant C_\varnothing(x, y) - C_\Gamma(x, y) \leqslant \sup_{y \in \Gamma} C_\varnothing(x, y) \leqslant O(1 + |\log \operatorname{dist}(x, \Gamma)|),$$

что и требовалось доказать.

8. Производные операторов ковариации

Продифференцированный оператор ковариации $\partial^\gamma C$ обладает свойством быстрого убывания порядка $e^{-m_0 d}$, d — длина кратчайшего пути в R^2, соединяющего x и y, проходящего через каждое ребро решетки $b \in \gamma$. Это можно увидеть из винеровского интегрального представления

$$(8.1) \qquad (\partial^\gamma C(s))(x, y) = \int_0^\infty e^{-m_0^2 T} \int \prod_{b \in \gamma} (1 - J_b^T) \times \\ \times \prod_{b \in \mathscr{B} \setminus \gamma} [s_b + (1 - s_b) J_b^T]\, dz_{x, y}^T\, dT.$$

Нам понадобятся более точные оценки $\partial^\gamma C$ по двум причинам. Во-первых, требуется локализовать x и y, если задано γ. Для этой цели в качестве грубой оценки d снизу достаточно взять величину

$$(8.2) \qquad d(j, \gamma) = \sup_{b \in \gamma} \{\operatorname{dist}(\Delta_{j_1}, b) + \operatorname{dist}(\Delta_{j_2}, b)\}.$$

Поясним теперь вторую причину, по которой нужны оценки $\partial^\gamma C$. Пусть $\mathscr{P}(\Gamma)$ будет множество всех разбиений π множества Γ сегментов на решетке. При доказательстве предложения 5.3 нам понадобилось дать оценку выражения $\partial^\Gamma \int F d\Phi_s$, которое по правилу Лейбница и в силу (1.7) имеет вид

$$\partial^{\Gamma} \int F\, d\Phi_s = \sum_{\pi \in \mathscr{P}(\Gamma)} \int \Big(\prod_{\gamma \in \pi} \frac{1}{2} \partial^{\gamma} C \cdot \Delta_{\Phi} \Big) F\, d\Phi_s. \tag{8.3}$$

Вторая причина, по которой нам нужны оценки на $\partial^{\gamma}C$, и состоит в том, что требуется дать оценку $\sum_{\pi \in \mathscr{P}(\Gamma)}$. Как и в разд. 7, здесь также появится множитель $m_0^{-O|\gamma|}$, который обеспечивает сходимость разложения.

Предложение 8.1. *Пусть* $1 \leqslant q < \infty$, *и пусть* m_0 *достаточно велико. Существуют константы* $K_6(q, \gamma)$ *и* $K_7(q)$, *не зависящие от* m_0, *такие, что*

$$\| \partial^{\gamma} C \|_{L_q(\Delta_{j_1} \times \Delta_{j_2})} \leqslant K_6(q, \gamma)\, m_0^{-|\gamma|/2q} \exp(-m_0 d(j, \gamma)/2), \tag{8.4}$$

$$\sum_{\pi \in \mathscr{P}(\Gamma)} \prod_{\gamma \in \pi} K_6(q, \gamma) \leqslant e^{K_7(q)\, |\Gamma|}. \tag{8.5}$$

Доказательство. Применим винеровское интегральное представление (8.1) для $\partial^{\gamma}C$. Доказательство заключается в оценке меры Винера траекторий $z(\tau)$, пересекающих ребра $b \in \gamma$ в некотором определенном порядке, и в комбинаторном подсчете числа способов, которыми эти ребра $b \in \gamma$ могут быть упорядочены.

Пусть $L(\gamma)$ — множество всех возможных линейных упорядочений ребер $b \in \gamma$, и для $l \in L(\gamma)$ пусть $\mathscr{W}(l)$ — множество винеровских траекторий, проходящих через все ребра $b \in \gamma$, причем порядок, в котором впервые пересекается каждое ребро, есть l. Тогда

$$0 \leqslant \partial^{\gamma} C(s) \leqslant \int_0^{\infty} e^{-m_0^2 T} \int \prod_{b \in \gamma} \left(1 - J_b^T(z)\right) dz_{x,y}^T\, dT = \partial^{\gamma} C_{\varnothing} \tag{8.6}$$

и

$$\partial^{\gamma} C_{\varnothing}(x, y) = \sum_{l \in L(\gamma)} \int_0^{\infty} e^{-m_0^2 T} \int_{\mathscr{W}(l)} dz_{x,y}^T\, dT. \tag{8.7}$$

Пусть $b_1, b_2, \ldots$ — элементы γ, расположенные в том порядке, как их упорядочивает l. Пусть b_2' будет первое ребро из всех b, не касающихся $b_1 = b_1'$, пусть b_3' — первое из b после b_2', не касающихся b_2', и т. д. Положим $a_j = \operatorname{dist}(b_{j+1}', b_j')$, $1 \leqslant j \leqslant m$, и пусть $|l| = \sum_{i=1}^{m} a_i$. Если нет таких b_2', будем считать, что $|l| = 0$.

С этими определениями мы имеем следующую оценку $l \in L(\gamma)$ члена в (8.7) для $|l| \geqslant 1$:

$$\int e^{-m_0^2 T} \int\limits_{\Sigma t_i = T} \prod_i (2\pi t_i)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i^2}{t_i}\right) dt\, dT \leqslant$$

$$\leqslant K_8^m \sup_{T,\, \Sigma t_i = T} e^{-\left(m_0^2 - 2\right) T} e^{-\frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^2 / t_i},$$

поскольку $\int\limits_{\Sigma t_i = T} dt \leqslant e^T$, $\int e^{-T}\, dT \leqslant 1$, и для всех $a_i \geqslant 1$

$$(2\pi t_i)^{-1} e^{-a_i^2/6t_i} \leqslant K_8 < \infty;$$

последнее неравенство определяет K_8.

Применив для вычисления максимума метод лагранжевых множителей, мы получим оценку члена $l \in L(\gamma)$ выражением

$$K_8^m \exp\left(\left(m_0^2 - 2\right)^{1/2} |l|\right)$$

для $|l| \geqslant 1$. Если $|l| = 0$, применим замечание, следующее за предложением 7.2.

Можно получить полностью аналогичные оценки, используя величину $d(j, \gamma)$ из (8.2). Геометрическое среднее этих двух оценок дает

$$\|\partial^\gamma C\|_{L_q(\Delta_1 \times \Delta_2)} \leqslant \sum_{l \in L(\gamma)} K_8^{|\gamma|} e^{-m_0 |l|/(2+\delta)} e^{-m_0 d(j,\gamma)/(2+\delta)} \tag{8.8}$$

для больших m_0. Если $|l| \geqslant 1$ для всех $l \in L(\gamma)$, то в правую часть (8.8) можно включить множитель $m_0^{-|\gamma|}$ за счет увеличения δ. Если $|l| < 1$ для некоторых l, то $|l| = 0$ и в этом случае $|\gamma| \leqslant 4$. При $|\gamma| \leqslant 4$ и $d(j, \gamma) \geqslant 1$ мы еще можем включить в (8.8) множитель $m_0^{-|\gamma|}$ за счет увеличения δ. Наконец, если $|\gamma| \leqslant 4$ и $d(j, \gamma) = 0$, множитель $m_0^{-|\gamma|/2q} \leqslant m_0^{-2/q}$ в (8.4) можно получить с помощью масштабного преобразования, как в предложении 7.2.

Положим

$$K_6(q, \gamma) = K_4 \sum_{l \in L(\gamma)} K_8^{|\gamma|} e^{-m_0 |l|/(2+\delta)}. \tag{8.9}$$

С таким определением выполняется (8.4); если $d(j, \gamma) = 0$ и $|l| = 0$ для некоторого l, то $K_6 \geqslant K_4$ и для доказательства (8.4) применяем оценку из предложения 7.2.

Мы закончим доказательство, доказав (8.5) как отдельное предложение.

Предложение 8.2. *Для достаточно большого* m_0

$$\sum_{\pi \in \mathscr{P}(\Gamma)} \prod_{\gamma \in \pi} \sum_{l \in L(\gamma)} e^{-m_0 |l|/3} \leqslant e^{K_9 |\Gamma|}. \tag{8.10}$$

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}(\Gamma)$ — множество линейных упорядочений, определенных на подмножествах Г. Тогда $L(\Gamma) \subsetneqq \mathscr{L}(\Gamma)$. Определим $|l|$ для $l \in \mathscr{L}(\Gamma)$ тем же способом, что и раньше. Мы утверждаем, что число $l \in \mathscr{L}(\Gamma)$ с $|l| \leqslant r$ ограничено величиной

$$|\Gamma| e^{K_{10}(r+1)}. \tag{8.11}$$

Если это так, то, применяя (8.11), можно легко закончить доказательство предложения. Пусть $A_l = \exp(-m_0|l|/3)$. Раскладывая $\Sigma\Pi\Sigma A_l$ в (8.10), получим сумму членов вида $A_{l_1} A_{l_2} \ldots A_{l_j}$, где l_j — различные элементы $\mathscr{L}(\Gamma)$. Собирая все члены такого вида, получим оценку интересующей нас величины:

$$\sum \prod \sum A_l \leqslant \sum A_{l_1} \ldots A_{l_j} = \prod_{l \in \mathscr{L}(\Gamma)} (1 + A_l) \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{l \in \mathscr{L}(\Gamma)} \exp A_l = \exp \sum_{l \in \mathscr{L}(\Gamma)} A_l \leqslant \exp(O(1)|\Gamma|),$$

где в последнем выражении мы применили оценку (8.11) для того, чтобы оценить $\sum_{l \in \mathscr{L}(\Gamma)} A_l$, и выбрали m_0 достаточно большим.

Перейдем к доказательству (8.11). Пусть задана $[a_i]$ — целая часть координаты a_i. Мы можем выбрать линию $b_1 = b_1'$ $|\Gamma|$ способами и выбирать пути «b» между b_1' и b_2' $O(1)$ способами, так как все они обязаны пересекать b_1. Далее, b_2' можно выбрать $O(1)[a_1]$ способами, а именно из ребер решетки «b» с

$$[a_1] \leqslant \operatorname{dist}(b, b_1') < [a_1] + 1.$$

Продолжая дальше тем же способом, видим, что всего существует

$$|\Gamma| \prod_i O(1)[a_i] \leqslant |\Gamma| e^{O(1) \Sigma [a_i]} \leqslant |\Gamma| e^{O(1) r}$$

способов выбора. Подсчитаем теперь число способов выбора $[a_i]$. Оно равно числу способов выбора целых чисел $r_i \geqslant 1$ с $\sum r_i \leqslant r$, т. е. 2^r. Действительно, предположим, что $\sum r_i = r$ и распределим r единиц в $\sum r_i$ следующим образом: первая единица пусть совпадает с a_1 (нет выбора), вторая единица пусть попадает или в a_1, или в a_2 (один бинарный выбор). Если j-я единица попадала в a_l, то $j+1$-я — или в a_l, или в a_{l+1} (один бинарный выбор).

Таким образом, существует $r-1$ бинарных выборов, или 2^{r-1} способов выбрать r_i с $\sum r_i = r \geqslant 1$. Суммирование по $j=\sum r_i$ дает $\sum\limits_{j=1}^{r} 2^{j-1} = 2^j - 1$. И наконец, имеется еще одна выборка от $|l| = 0$ (нет a_i).

9. Гауссовы интегралы

Интеграл от полинома по гауссовой мере можно вычислить явно. Это явное выражение есть некоторая сумма, и каждое слагаемое в сумме представляется неким графом. Мы будем иметь дело со сложными полиномами высоких степеней, и соответствующие графы тоже будут достаточно

$$G\left(\int :\Phi(x_1)^4: \ :\Phi(x_2)^4: w(x)\, dx \right).$$

Рис. 11.

сложными. Однако мы получим для этих полиномов очень простые оценки; структуру этих оценок легко можно усмотреть из соответствующих графов.

Полиномы вида

$$R = \int \prod_{i=1}^{r} :\Phi(x_i)^{n_i}: w(x)\, dx, \tag{9.1}$$

где носитель $w(x)$ сосредоточен в произведении $\Delta_{j_1} \times \ldots \times \times \Delta_{j_r}$ квадратов решетки, будем называть локализованными мономами. Потребуем также, чтобы $w \in L_{1+\varepsilon}$, и удобно, но не обязательно предположить существование оценки

$$n_i \leqslant \bar{n}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r. \tag{9.2}$$

Условие (9.2) не накладывает ограничения ни на r, ни на полную степень R.

Обычно полиномы, естественно возникающие в теории, не имеют такого вида из-за того, что их ядра w не локализованы. Однако любой полином можно записать как сумму локализованных мономов.

Сопоставим моному R из (9.1) граф $G(R)$, состоящий из r вершин, причем к i-й вершине сходится n_i линий (хвостов) (см. рис. 11).

Обсудим теперь процедуру вычисления гауссовых интегралов $\int R\, d\Phi_C$ [1]). Очевидно, достаточно научиться вычислять интегралы от мономов вида $:\Phi^n(x):R$. Разберем сначала случай $n=1$. Интегрируя по частям, получим

$$\int \Phi(x) R\, d\Phi_C = \int C(x, y) \frac{\delta R}{\delta \Phi(y)}\, d\Phi_C\, dy.$$

Эту формулу можно доказать, используя представление меры $d\Phi_C$ в фоковском пространстве [см. теор. 3.5 в Gl Ja 12], представив Φ как сумму операторов рождения и уничтожения и применяя канонические коммутационные соотношения (см. также теорему 9.1 ниже). Интегрирование по частям производится для того, чтобы понизить степень монома R в подынтегральном выражении. После $\left(\sum_{i=1}^{r} n_i\right)/2$ интегрирований по частям моном заменяется на сумму констант, и, поскольку $\int d\Phi_C = 1$, интеграл при этом оказывается вычисленным явно.

При $n \neq 1$ мы применяем формулу

$$\int :\Phi(x)^n: R\, d\Phi_C = (n-1)\, c(x) \int :\Phi(x)^{n-2}: R\, d\Phi_C + \\ + \int :\Phi(x)^{n-1}: C(x, y) \frac{\delta R}{\delta \Phi(y)}\, d\Phi_C\, dy$$

с функцией $c(x) = C(x, x) - C_\varnothing(x, x)$, определенной в предложении 7.5. Первый член возникает из-за различия между ковариацией $C_\varnothing$ в $::$ и ковариацией в $\int \ldots d\Phi_C$. Второй член — аналогично случаю $k=1$.

Формула интегрирования по частям (9.3) имеет простое выражение в терминах графов. В случае когда $\Phi(x)$ входит в подынтегральное выражение только в виде $:\Phi(x_i)^{n_i}:$, графическое изображение членов, стоящих в правой части (9.3), получается следующим образом. Нужно провести линию, соединяющую один из хвостов вершины x_i с хвостом от той же или другой вершины. Граф с линией, соединяющей вершины x_i и x_j, ставится в соответствие каждому из n_j членов:

$$\text{(9.4)} \qquad \int C(x_i, x_j) :\Phi(x_i)^{n_i-1}: \prod_{l \neq i, j} :\Phi(x_l)^{n_l}: {}'w(x)\, dx,$$

[1]) Здесь в текст внесены некоторые уточнения. — *Прим. перев.*

возникающих после интегрирования по частям в (9.1) (см. рис. 12).

Рис. 12. Интегрирование по частям

Например, вычислим интеграл, изображенный на рис. 12. После четырехкратного интегрирования по частям получим

$$\iint :\Phi(x_1)^4::\Phi(x_2)^4:w\,dx\,d\Phi_C = 4!\int C(x_1, x_2)^4 w\,dx +$$
$$+ 2!\binom{4}{2}^2\int c(x_1)\,c(x_2)\,C(x_1, x_2)^2 w\,dx + \binom{4}{2}^2\int c(x_1)^2 c(x_2)^2 w\,dx.$$

Модуль первого члена оценивается следующим образом:

$$4!\left|\int C(x_1, x_2)^4 w(x_1, x_2)\,dx\right| \leqslant 4!\,\|C\|^4_{L_8(\Delta_{j_1}\times\Delta_{j_2})}\|w\|_{L_2} \leqslant$$
$$\leqslant 4!\,K_4 m_0^{-1} e^{-m_0(1-\delta)\,4d(J)}\|w\|_{L_2},$$

если $\operatorname{supp} w \subset \Delta_{j_1}\times\Delta_{j_2}$. В последнем неравенстве для того, чтобы оценить $\|c\|_{L_q(\Delta_{j_1}\times\Delta_{j_2})}$, мы применили предложение 7.2 (см. рис. 13).

Рис. 13. Вычисление гауссовского интеграла.

Для того чтобы вычислить $\int R\,d\Phi_C$ в общем случае, введем множество $\mathscr{V}(R)$ всех вакуумных графов. Граф называется вакуумным, если он получается из $G(R)$ попарным соединением различных хвостов между собой, причем не должно оставаться свободных хвостов. Если общее число хвостов нечетно, то $\mathscr{V}(R)=\varnothing$ $\left(\text{и} \int R\,d\Phi_C = 0\right)$. Для каждого $G\in\mathscr{V}(R)$ определим

$$(9.5)\qquad I(G, w, C) = \int w(x)\prod_{l'} c\left(x_{i(l')}\right)\prod_{l} C\left(x_{i_1(l)}, x_{i_2(l)}\right)dx.$$

Первое произведение $\prod\limits_{l}$ распространено на все линии l' графа G, которые соединяют для хвоста одной и той же вершины, обозначаемой $i(l')$. Второе произведение распространяется на все линии l, соединяющие пары $(i_1(l), i_2(l))$ различных вершин, Выпишем теперь формулу для вычисления гауссовых интегралов. Предыдущее обсуждение интегрирования по частям и его графическое представление дают ее формальный вывод.

Теорема 9.1. *Пусть w — локализованная функция, и пусть $w \in L_q$ для некоторого $q > 1$. Тогда $R \in L_r(\mathcal{S}', d\Phi_C)$, $r \in [1, \infty)$ и*

$$\int R \, d\Phi_C = \sum_{G \in \mathcal{V}(R)} I(G, w, C). \tag{9.6}$$

Доказательство содержит комбинаторную часть (намеченную выше) и аналитическую. Для того чтобы провести аналитическую часть доказательства, выражение (9.6) модифицируют, вводя обрезание по импульсам, а затем доказывают, что имеется сходимость, когда обрезание снимается. Поэтому перед тем как наметить доказательство теоремы 9.1, мы дадим оценки для интегралов $I(G, w, C)$.

Рассмотрим функцию вида

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_l F_l(x_{i_1(l)}, x_{i_2(l)}) \prod_i \Delta_i(x_i),$$

где $\Delta_i(x)$ — характеристическая функция некоторого множества объема 1, и предположим, что для каждого индекса l $1 \leqslant i_1(l) < i_2(l) \leqslant n$.

Лемма 9.2. *При введенных обозначениях*

$$\| F \|_{L_q} \leqslant \prod_l \| F_l \|_{L_{q_l}(\Delta_{i_1(l)}, \Delta_{i_2(l)})}$$

при условии, что для каждого i

$$q^{-1} \geqslant \sum \{q_l^{-1};\ i_1(l) = i \text{ или } i_2(l) = i\}.$$

Доказательство. Ввиду возможности подстановки $F \to F^q$ достаточно рассмотреть случай $q = 1$. Будем применять неравенство Гёльдера последовательно по каждой из n переменных (вершин) F и, для того чтобы сделать этот процесс более обозримым, используем язык графов. Каждый множитель F_l соответствует линии соединяющей вершины $i_1(l)$ и $i_2(l)$. Положим

$$\mathcal{L}_i = (l : i_1(l) < i = i_2(l)\}, \quad \mathcal{L}'_i = \{l : i_1(l) = i < i_2(l)\}.$$

Относительно q_l предполагается, что

$$\sum_{l \in \mathcal{L}_i \cup \mathcal{L}'_i} q_l^{-1} \geqslant 1$$

(очевидно, $\mathscr{L}_i = \varnothing = \mathscr{L}_i'$ тоже допустимы). Таким образом,

$$\int\limits_{\Delta_i} \prod_{l \in \mathscr{L}_i} \left| F_l\left(x_{i_1(l)}, x_i\right)\right| \prod_{l \in \mathscr{L}_i'} \left\| F_l(x_i, \cdot)\right\|_{L_{q_l}(\Delta_{i_2}(l))} dx \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{l \in \mathscr{L}_i} \left\| F_l\left(x_{i_1(l)}, \cdot\right)\right\|_{L_{q_l}(\Delta_i)} \prod_{l \in \mathscr{L}_i'} \| F_l \|_{L_{q(l)}(\Delta_{i_1}(l)\, \Delta_{i_2}(l))}$$

в силу неравенства Гёльдера. И, чтобы завершить доказательство, проводим конечную индукцию по i (начиная с $i = n$ до $i = 1$).

Замечание. После очевидной модифнкации доказательства можно считать, что некоторые из факторов F_l зависят от одной переменной, т. е. $F_l = F_l(x_{i(l)})$.

Набросок доказательства теоремы 9.1. Введем импульсное обрезание, сделав замену $\Phi(x_i) \to \int \Phi(y) j_k(y - x_i)\, dy$, и опустим интегрирование по x. При этом R заменяется на полиномиальную цилиндрическую функцию $R_k(x)$, сосредоточенную на конечномерном подпространстве $\mathscr{S}$. $R_k(x)$ интегрируема по определению меры $d\Phi_C$, и для $R_k(x)$ формулы (9.3) и (9.6) по-прежнему справедливы в силу приведенных выше комбинаторных соображений. Таким образом, формула (9.6) имеет место для $R_k = \int R_k(x)\, w(x)\, dx$, и эту формулу можно использовать для вычисления правой части неравенства

$$\int | R_k - R_{k'} |\, d\Phi_C \leqslant \left(\int (R_k - R_{k'})^2\, d\Phi_C \right)^{1/2}.$$

Для того чтобы снять импульсное обрезание, достаточно применить оценки из предложений 7.2 и 7.3. Подробности см. в [Di Gl].

Отметим, что более сильное предположение о принадлежности C множеству $\mathscr{B}^{\mathrm{loc}}_{q,\delta(q)}$, для всех $q > 1$ (которое прнменялось в [Di Gl] для того, чтобы проследить за C-виковским упорядочиванием) нам не потребовалось, поскольку мы применяем виковское упорядочивание только по отношению к мере с ковариацией $C_\varnothing = (-\Delta + m_0^2)^{-1}$ (см. также предложение 7.5).

Предложение 9.3. *Пусть w — локализованная функция. Тогда*

$$\left|\int R\,d\Phi_C\right| \leqslant \|w\|_{L_p} \sum_{G\in\mathscr{V}(R)} \prod_{l'} \|c\|_{L_q(\Delta_{j(l')})}\times \tag{9.7}$$
$$\times \prod_{l} \|C\|_{L_q(\Delta_{j_1(l)},\, \Delta_{j_2(l)})},$$

где $q \geqslant p'\bar{n}$, $\bar{n}$ определено в (9.2) *и $j(l) = j_{i(l)}$ — положение i-й вершины.*

Доказательство. По теореме 9.1 достаточно получить оценку каждого интеграла $I(G, w, C)$. Применим неравенство Гёльдера для того, чтобы отделить w от множителей c и C. Интеграл от c и C имеет нужную оценку в силу леммы 9.2 и следующего за ней замечания. Что и требовалось доказать.

$\mathscr{V}(R)$ содержит $O\left(\sum n_i/2\right)!$ графов. Но ввиду экспоненциального убывания C при $|x-y|\to\infty$ большая часть этих графов дает очень малый вклад. Этот факт следует принимать во внимание, если мы хотим получить достаточно полезные оценки. Для каждого квадрата решетки Δ положим

$$N(\Delta) = \sum \{n_i : \Delta_{j_i} = \Delta\}$$

— число хвостов (линейных факторов $\Phi(x_i)$) R, локализованных[1]) в Δ.

Теорема 9.4. *Пусть w — локализованная функция. Тогда существует константа K_{11}, такая, что*

$$\left|\int R\,d\Phi_C\right| \leqslant \|w\|_{L_p} \left[\prod_{\Delta} N(\Delta)!\,\left(K_{11} m_0^{-1/2q}\right)^{N(\Delta)}\right]$$

для $q = p'\bar{n}$, где $\bar{n}$ определено в (9.2).

Доказательство. Оценим L_q-норму в (9.7), используя предложения 7.2 и 7.5. После того как это сделано, достаточно показать, что

$$\sum_{G\in\mathscr{V}(R)} \prod_{l} e^{-m_0(1-\delta)d(j(l))} \leqslant \prod_{\Delta} \left(\mathrm{const}^{N(\Delta)} N(\Delta)!\right).$$

Пусть ν — некоторый хвост R. Пусть далее Δ_ν — квадрат, в котором локализован ν, и для данного $G\in\mathscr{V}(R)$ пусть Δ'_ν обозначает квадрат, в котором локализован хвост ν', соединенный с ν в графе G. Положим также $d(\nu) = \mathrm{dist}(\Delta_\nu, \Delta'_\nu)$.

---

[1]) Имеется в виду локализация вершины, из которой выходит данный хвост. — *Прим. перев.*

Тогда сумму по всем $G \in \mathscr{V}(R)$ можно представить как сумму по всем возможным выборам Δ'_ν для каждого ν и сумму по всем $N(\Delta'_\nu)$ хвостам, локализованным в Δ'_ν для каждого ν. Суммируемое выражение не зависит от выбора хвостов внутри каждого квадрата Δ (соответствие между ν и Δ'_ν предполагается фиксированным). Для того чтобы оценить эту сумму, нам остается только подсчитать число слагаемых. Так как произвольный член может быть получен (вообще говоря, не единственным образом) из заданного перестановкой хвостов в каждом квадрате Δ, то число слагаемых в сумме не превосходит $\prod_\Delta N(\Delta)!$. Поэтому остается показать, что

$$\sum_{\{\Delta'_\nu\}} \prod_\nu e^{-m_0(1-\delta)d(\nu)/2} \leqslant \prod_\nu (\text{const}),$$

потому что каждое $d(j(l))$ появляется в качестве $d(\nu)$ в точности для двух ν. Символ $\{\Delta'_\nu\}$ под знаком суммы обозначает просто множество всех возможных соответствий между хвостами и квадратами решетки. Левая часть только увеличилась, когда мы распространили суммирование на все это множество. Мы можем переставить знак суммы и произведения и получим окончательно

$$\sum_{\{\Delta'_\nu\}} \prod_\nu e^{-cd(\nu)} \leqslant \prod_\nu \sum_{\{\Delta'_\nu\,:\,\nu\ \text{фиксирован}\}} e^{-cd(\nu)} = \prod_\nu (\text{const}).$$

Отметим, что K_{11} не зависит от s и m_0, для m_0, ограниченного снизу положительным числом.

Теорема 9.5. *Пусть Λ — объединение квадратов решетки, и пусть* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$. *Тогда* $\exp[-V(\Lambda)] \in L_p(\mathscr{S}', d\Phi_C)$ *для всех $p \in [1, \infty]$. Кроме того, существует константа K_{12}, не зависящая от C, такая, что*

$$|Z| \equiv \left| \int e^{-\lambda V}\, d\Phi_C \right| \leqslant e^{K_{12}|\Lambda|}. \tag{9.8}$$

Для ограниченного $\operatorname{Re}\lambda$ и m_0, ограниченного снизу положительным числом, K_{10} также может быть выбрана не зависящей от λ и m_0.

Замечание. Простое доказательство в [Di Gli] вполне замкнуто в себе. В действительности, используя незначительное обобщение теоремы 9.4 (включающее предложение 7.4), можно провести доказательство (9.8) почти идентично (стандартному) доказательству того, что $\exp[-V(\Lambda)] \in$

$\in L_1(\mathscr{S}', d\Phi_C)$. Это доказательство близко по структуре к тому, которое содержится в [Gli Ja 3].

Следствие 9.6. *Для* $p > 1$ *и* $q \geqslant \bar{n}p'$

$$\left|\int Re^{-V(\Lambda)}\, d\Phi_C\right| \leqslant e^{K_{12}|\Lambda|}\|w\|_{L_p}\left[\prod_{\Delta} N(\Delta)!\,\left(2K_{11}m_9^{-1/2q}\right)^{N(\Delta)}\right].$$

Доказательство. По неравенству Шварца

$$\left|\int Re^{-V(\Lambda)}\, d\Phi_C\right| \leqslant \left(\int R^2\, d\Phi_C\right)^{1/2}\left(\int e^{-2V(\Lambda)}\, d\Phi_C\right)^{1/2}.$$

Множители в правой части оцениваются при помощи теорем 9.4 и 9.5.

Теорема 9.7. *Пусть* w — *локализованное ядро из* L_p, $p > 1$, *пусть* Λ *представляет собой объединение квадратов на решетке и* $F = R\exp\{-V(\Lambda)\}$ (см. 1.7). *Тогда справедливо* (1.7).

Набросок доказательства. Для того чтобы описать формальные идеи, предположим сначала, что F — полином. Тогда интеграл $\int F\, d\Phi_{C(s)}$ вычисляется в явном виде в терминах графов (9.5)—(9.6). Дифференцирование по s_b в этих формулах дает

$$\frac{d}{ds_b}\int F\, d\Phi_{C(s)} = \sum_{G\in\mathscr{V}(R)}\int\sum_{l}\left(\frac{d}{ds_b}C_l\right)\prod_{l'\neq l} C_{l'}w\, dx, \tag{9.9}$$

где C_l обозначает $C(x_{i_1}(l), x_{i_2}(l))$.

В произведении $\prod\limits_{l'\neq l}$ фактически отсутствует одна линия из вакуумного графа $G\in\mathscr{V}(F)$. Или, эквивалентно, мы могли бы убрать из F два хвоста, соединенных линией l. Однако удаление хвостов из F — то же самое, что удаление линейных множителей из F, и дает тот же эффект, что и дифференцирование F по этим линейиым множителям. Таким образом, мы видим, что $\sum\limits_{l}$ (суммирование по линиям, удаленным из $G\in\mathscr{V}(F)$) эквивалентна суммированию по смешанным вторым производным F по парам линейных множителей. Такая сумма — это в точности $\frac{1}{2}\Delta_\Phi F$, так что мы показали, что правая часть (9.9) равна

$$\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{d}{ds_b}C\right)\cdot\Delta_\Phi\right]F\, d\Phi_{C(s)}.$$

Доказательство для общего случая, $FR\,e^{-V}$, основано на аппроксимациях, начинающихся с полиномиального F. Оценка таких аппроксимаций дана в следствии 9.6. Подробности см. в [Di Gli].

10. Сходимость кластерного разложения — завершение доказательства

Доказательство предложения 5.3. Без ограничения общности предположим, что w — локализованное ядро, и положим $\|w\| = \|w\|_2$. Мы хотим оценить следующее выражение:

$$\left\langle \int \partial^{\Gamma} \int \prod_{i=1}^{n} \Phi(x_i)\, e^{-\lambda V(\Lambda)}\, d\Phi_{s(\Gamma)}\, ds(\Gamma),\ w \right\rangle. \tag{10.1}$$

Пусть $\mathscr{P}(\Gamma)$ — множество всех разбиений π множества Γ. Применяя правило Лейбница и (1.7), получим, что (10.1) равно

$$\left\langle \int \sum_{\pi \in \mathscr{P}(\Gamma)} \left(\prod_{\gamma \in \pi} \frac{1}{2} \partial^{\gamma} C \cdot \Delta_{\Phi} \right) \prod \Phi(x_i) e^{-\lambda V(\Lambda)}\, d\Phi_{s(\Gamma)}\, ds(\Gamma), w \right\rangle, \tag{10.2}$$

где $C = C(s(\Gamma))$.

Как и в (7.3), определим

$$\partial^{\gamma} C(j_{\gamma}) = \Delta_{j_{1,\gamma}} \partial^{\gamma} C \Delta_{j_{2,\gamma}},$$

где $j = (j_{1,\gamma}, j_{2,\gamma}) \in Z^4$, так что две производные в $\partial^{\gamma} C(j_{\gamma}) \cdot \Delta_{\Phi}$ локализованы в Δ_{j_1} и Δ_{j_2} соответственно, и $\partial^{\gamma} C = \sum_{j_{\gamma}} \partial^{\gamma} C(j_{\gamma})$.

Подставим это равенство в (10.2) и разложим в ряд. Полученная сумма индексируется координатами $\{j_{\gamma}\}$ и разбиениями $\pi \in \mathscr{P}(\Gamma)$. Для заданного члена этой суммы пусть $M = M(\pi, \{j_{\gamma}\})$ — число членов, возникающих при дифференцировании Δ_{Φ} в (10.2). В силу следствия 9.6 при $m_0 \geqslant 1$ каждый из полученных членов не превосходит

$$\|w'\|_{L_p} e^{K_{12}|\Lambda|} \prod_{\Delta} N(\Delta)!\,(2K_{11})^{N(\Delta)}.$$

Здесь w' равно функции w из (10.1), умноженной на ядра $\partial^{\gamma} C$, возникающие в (10.2).

Из предложения 8.1 и леммы 9.2 следует (для $p > 2$ и достаточно больших q)

$$\|w'\|_{L_p} < \|w\|_{L_2} \Big\| \prod_{\gamma \in \pi} \partial^{\gamma} C(j_{\gamma}) \Big\|_{L_q} \leqslant$$

$$\leqslant \|w\|_{L_2} m_0^{-|\Gamma|/2q} \prod_{\gamma \in \pi} K_6(q, \gamma)\, e^{-m_0 d(j_{\gamma}, \gamma)/2}.$$

Применяя (8.5) для оценки суммы по $\pi \in \mathscr{P}(\Gamma)$, видим, что (10.2) не превосходит

$$\|w\|_{L_2} e^{K_7|\Gamma|} m_0^{-|\Gamma|/2q} \sum_{\{j_\gamma\}} \max_{\pi \in \mathscr{P}(\Gamma)} M \prod_{\gamma \in \pi} e^{-m_0 d(j_\gamma, \gamma)/2} \prod_{\Delta} N(\Delta)!$$

Доказательство предложения 5.3 следует теперь из двух лемм, которые дают оценку M и суммы по $\{j_\gamma\}$ соответственно. Пусть $M(\Delta)$ — число элементов в множестве $\{j_{i,\gamma}\colon \Delta_{j_{i,\gamma}} = \Delta;\ i = 1, 2;\ \gamma \in \pi\}$.

Лемма 10.1. *Существует константа K_{13}, не зависящая от m_0, такая, что*

$$M \leqslant e^{K_{13}|\Gamma|} \prod_{\Delta} (M(\Delta)!)^p,$$

и

$$\prod_{\Delta} N(\Delta)! \leqslant e^{K_{13}|\Gamma|} \prod_{\Delta} (M(\Delta)!)^p,$$

где p — степень полинома взаимодействия P.

Лемма 10.2. *Для любых заданных $\pi \in \mathscr{P}(\Gamma)$ и $r > 0$ существует константа K_{14}, не зависящая от m_0, такая, что*

$$\sum_{\{j_\gamma\}} \prod_{\gamma \in \pi} e^{-m_0 d(j_\gamma, \gamma)/2} \prod_{\Delta} M(\Delta)!^r \leqslant e^{K_{14}|\Gamma|}.$$

Доказательство леммы 10.1. Пусть $N_0(\Delta)$ — число точек x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, которые содержатся в Δ. Число членов, возникающих от $M(\Delta)$ дифференцирований в Δ, ограничено величиной

$$(N_0(\Delta) + 1)(N_0(\Delta) + p + 1) \ldots (N_0(\Delta) + p(M(\Delta) - 1) + 1).$$

Поскольку $N_0(\Delta) \leqslant \sum_{\Delta} N_0(\Delta) = n$, то полное число членов M, возникающих при всех $\partial/\partial\Phi^{(y)}$ дифференцированиях, не превосходит величины

$$\prod_{\Delta} p^{pM(\Delta)} (N_0(\Delta) + 1 + pM(\Delta))^{N_0(\Delta)+1} M(\Delta)!^p,$$

при выводе которой достаточно использовать неравенства

$$(a+b)! \leqslant (a+b)^a (b!), \quad (ab)! \leqslant a^{ab} (b!)^a.$$

Кроме того, имеем

$$N(\Delta) \leqslant N_0(\Delta) + (p-1) M(\Delta),$$

где $N(\Delta)$ — это число хвостов в Δ после дифференцирования (см. определение в разд. 9). Отсюда получаем оценку для $\prod N(\Delta)!$, требуемую в условии леммы.

Доказательство леммы 10.2. Сумма $\sum_{\{j_\gamma\}}$ контролируется экспоненциально убывающим множителем, зависящим от расстояния, поэтому достаточно показать, что

$$\prod_{\Delta} M(\Delta)!^r \leqslant \prod_{\gamma} e^{\text{const}\,|\gamma|} e^{\text{const}\cdot\sum_{\gamma} d(j,\gamma)}$$

с константами, не зависящими от m_0, λ, $\{j_\gamma\}$ и π. Напомним, что $d(j,\gamma)$ (см. определение (8.2)) зависит от расстояния от $j_{1,\gamma}$ и $j_{2,\gamma}$ до некоторого ребра $b \in \gamma$. Поэтому для фиксированного Δ имеется не более $O(1)r^2$ значений γ с фиксированным разбиением π, таким, что

$$\Delta_{j_\nu,\gamma} = \Delta, \quad \nu = 1 \quad \text{или} \quad 2 \tag{10.4}$$

и $d(j,\gamma) \leqslant r$. По определению существуют $M(\Delta)$ множеств γ, которые удовлетворяют (10.4). Наиболее удаленная половина ($= M(\Delta)/2$) этих γ должна удовлетворять также неравенству

$$M(\Delta)^{1/2} \leqslant \text{const}\cdot d(j,\gamma) + \text{const},$$

поскольку γ не пересекаются между собой. Поэтому

$$M(\Delta)^{3/2} \leqslant \text{const}\cdot \sum_{\gamma} \{d(j,\gamma) : \Delta_{j_\nu,\gamma} = \Delta\} + \text{const},$$

и мы получаем

$$\prod M(\Delta)!^r \leqslant \exp\Bigl(r\sum_{\Delta} M(\Delta)\ln M(\Delta)\Bigr) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\Bigl(O\sum_{\Delta}\{M(\Delta)^{1+\delta} : M(\Delta) > 0\} \leqslant \exp\Bigl(O\sum_{\gamma} d(j,\gamma)\Bigr)\exp(O\,|\Gamma|),$$

что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[Al HK 1] Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Uniqueness of physical vacuum and the Wightman functions in the infinite volume limit for some non-polynomial interactions, *Commun. Math. Phys.*, **30,** 171—200 (1973).

[Al HK 2] Albeverio S., Hoegh-Krohn R., The scattering matrix for some non-polynomial interactions, I and II, *Helv. Phys. Acta.*

[Al HK 3] Albeverio S., Hoegh-Krohn R., The Wightman axioms and the mass gap for strong interactions of exponential type in two dimensional space-time, *J. Funct. Analysis*, **16,** 39—83 (1974).

[Al HK 4] Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Asymptotic series for the scattering operator and asymptotic unitarity of the space cut-off interactions, preprint.

[Ar] Araki H., A lattice of von Neumann algebras associated with the quantum theory of free Bose field, *J. Math. Phys.*, **4,** 1343—1362 (1963).

[Ba] Baumel R., Частное сообщенне, см. также [Gu Ro Si 3].

*[Bak] Baker G., Self-interacting boson quantum field theory and the thermodynamic limit in *d* dimensions, *J. Math. Phys.*, **16,** 1324—1346 (1975).

*[B L T] Боголюбов Н. Н. Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматнческого подхода в квантовой теории поля, Наука, 1969.

[Bo Gr] Bortz A., Griffiths R., Phase transitions in anisotropic classical Heisenberg ferromagnets, *Commun, Math. Phys.*, **26,** 106—108 (1972).

[Bra 1] Bratelli O., Conservation of estimates in quantum field theory, *Commun. on Pure and Appl. Mathematics*, XXV, 759—779 (1972).

[Bra 2] Bratelli O., Local norm convergence of states on the zero time boson field, preprint.

[Bre] Breiman L., Probability, Addison — Wesley, 1968.

[Bro E G] Bros J., Epstein H., Glaser V., *Comm. Math. Phys.*, **6,** 77 (1967).

[Ca] Cannon J., Continuous sample paths in quantum field theory, *Comm. Math. Phys.*, **35,** 215—235 (1974).

[Ca Ja] Cannon J., Jaffe A., Lorentz covariance of the quantum field theory, *Commun. Math. Phys.*, **17,** 261—321 (1970).

[Ci] Ciesielski Z., Lectures on Brownian motion, heat conduction and potential theory, Aaarhus Universitet, 1965.

[Co 1] Coleman S., Dilitations, Lectures given at the 1971 International Summer School of Physics «Ettore Majorana».

[Co 2] Coleman S., There are no Goldstone bosons in two dimensions, *Commun. Math. Phys.*, **31,** 259—264 (1973).

[Co We] Coleman S., Weinberg E., Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking, *Phys. Rev.* D7, 1888—1910 (1973).

[Con Th] Constantinescu F., Thalheimer W., Euclidean Green's functions for Jaffe fields, *Commun. Math. Phys.*, **38**, 299—317 (1974).

[Di 1] Dimock J., Estimates, renormalized currents and field equations for the Yukawa_2 field theory, *Ann. Phys.*, 72, 177—242 (1972).

[Di 2] Dimock J., Spectrum of local Hamiltonians in the Yukawa_2 field theory, *J. Math. Phys.*, **13**, 477—481 (1972).

[Di 3] Dimock J., Asymptotic perturbation expansion in the $P(\varphi)_2$ quantum field theory, *Commun. Math. Phys.*, **35**, 347—356 (1974).

[Di Gli] Dimock J., Glimm J., Measures on the Schwartz distribution space and application to $P(\varphi)_2$ field theories, *Adv. Math.*, **12**, 58—83 (1974).

[Do Ma] Dominicis C. De., Martin P., Stationary entropy principle and renormalization in normal and superfluid systems, I,II, *J. Math. Phys.*, **5**, 14—30, 31—59 (1964).

[Dob 1] Добрушин Р. Л., Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием, *Функц. анализ и его прилож.*, **4**, 31—43 (1968).

[Dob 2] Добрушин Р. Л., Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов, *Функц. анализ и его прилож.*, **4**, 44—57 (1968).

[Dob 3] Добрушин Р. Л., Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности, *Теория вероятн. и ее применен.*, **2**, 201—229 (1968).

[Dob Mi] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., Построение одномерного квантового поля с помощью непрерывного марковского поля, *Функц. анализ и прилож.*, 7, 89—90 (1973).

[Dy] Dyson F. J., *Phys. Rev.*, 75, 1736 (1949).

[D H R] Doplicher S., Haag R., Roberts J., Fields, observables and gauge transformation II, *Comm. Math. Phys.*, **15**, 173—200 (1969).

[Ec] Eckmann J.-P., Representations of the CCR in the φ_3^4 model: independence of space cutoff, *Comm. Math. Phys.*, **25**, 1—61 (1972).

[Ec Os] Eckmann J.-P., Osterwalder K., On the uniqueness of the Hamiltonian and of the representation of the CCR for the quartic boson interaction in three dimensions, *Helv. Phys. Acta*, **44**, 884—909 (1971).

*[Ec Ma Se] Eckmann J.-P., Magnen J., Seneor R., Decay properties and Borel summability for Schwinger functions in $P(\varphi)_2$-theories, *Comm. Math. Phys.*, **39**, 251—272 (1975).

[Ep] Эпштейн А., в книге Хепп К., Эпштейн А., Аналитические свойства амплитуд рассеяния в локальной квантовой теории поля, Атомиздат, М., 1971.

[Fa] Fabrey J., Exponential Representations of the Canonical Commutation Relations, *Commun. Math. Phys.*, **19**, 1—30 (1971).

[Fad Po] Faddeev L. and Popov V., Feynman diagrams for the Yang-Mills field, Phys. Letters 258, 29—30 (1967).

[Fed] Federbush P., Positivity for some generalized Yukawa models in one space dimension, preprint.

[Fe 1] Feldman J., A relativistic Feynman — Kac formula, Nuclear Physics, B52, 608—614 (1973).

[Fe 2] Feldman J., The $\lambda\varphi_3^4$ field theory in finite volume, *Commun. Math. Phys.*, **37**, 93—120 (1974).

*[Fe Os] Feldman J., Osterwalder K., The Wightman axioms and the mass gap for weakly coupled φ_3^4 quantum fields theories, *Ann. of Phys.*, **97**, 80—135 (1976).

[Fel] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. I, т. II, «Мир», М., 1967.

[Fey 1] Feynman R. P., *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 367 (1948).

[Fey 2] Feynman R. P., *Phys. Rev.*, **76**, 749 (1949).

[Fi Wi] Fischer M., Wilson K., Critical exponents in 3.99 dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 240—243 (1972).

[Fo Ka Gi] Fortuin C., Kastelyn P., Ginibre J., Correlation inequalities on some partially ordered sets, *Commun. Math. Phys.*, **22**, 89—103 (1971).

[Fr] Фрадкин Е. С., ДАН СССР, **125**, 311 (1959).

[Fri] Friedrichs K., Mathematical aspects of the quantum theory of feilds, Interscience, New York, 1953.

[Fri Sh] Friedrichs K., Shapiro H., Integration of functionals, Courant Institute, New York University, New York (1957).

[Frö 1] Fröhlich J., On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless, scalar bosons, Annales de l'Institut Henri Poincaré.

[Frö 2] Fröhlich J., Existence of dressed one electron states in a class of persistent models, Fortschritte der Physik.

[Frö 2a] Fröhlich J., Schwinger functions and their generating functionals, I, *Helv. Phys. Acta*, **47**, 265—281 (1974).

[Frö 2b] Fröhlich J., Schwinger functions and their generating functionals, II, Harvard Preprint, 1973.

*[Frö Si Sp] Fröhlich J., Simon B., Spencer T., Infrared bounds, phase transactions and continuous symmetry breaking, Comm. Math. Phys., **50**, 79 (1976).

[Ge Vi] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Обобщенные функции, т. IV, Физматгиз, 1961.

[Gi 1] Ginibre J., General formulation of Griffith's inequalities, *Commun. Math. Phys.*, **16**, 310—328 (1970).

[Gi 2] Ginibre J., On some recent work of Dobrushin, «Systèmes à un nombre infini de degrés de liberté», ed by L. Michel and D. Ruelle, CNRS, Paris, 1970.

[Gl 1] Glaser V., On the equivalence of the Euclidean and Wightmann formulation of field theory, *Commun. Math. Phys.*, **37**, 257—273, 1974.

[Gl 2] Glaser V., The positivity condition in momentum space, Проблемы теоретической физики, «Наука», 1969 (сб., посвященный Н. Н. Боголюбову).

[Gli 1] Glimm J., Boson fields with nonlinear self-interaction in two dimensions, *Commun. Math. Phys.*, **8**, 12—25 (1968).

[Gli 2] Glimm J., Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions, I. *Commun. Math. Phys.*, **5**, 343—386 (1967).

[Gli 3] Glimm J., Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions, II, *Commun. Math. Phys.*, **6**, 120—127 (1967).

[Gli 4] Glimm J., Boson fields with $:\varphi^4:$ interaction in three dimensions, *Commun. Math. Phys.*, **10**, 1—47 (1968).

[Gli Ja 1] Glimm J., Jaffe A., A $\lambda(\varphi^4)_2$ boson field theory without cutoffs I, *Phys. Rev.*, **176**, 1945—1951 (1968).

[Gli Ja 2] Glimm J., Jaffe A., The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs II, The fields operators and the approximate vacuum, *Ann. Math.*, **91**, 362—401 (1970).

[Gli Ja 3] Glimm J., Jaffe A., The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs III, The physical vacuum, *Acta Math.*, **125**, 203—261 (1970).

[Gli Ja 4] Glimm J., Jaffe A., The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs IV, Perturbations of the Hamiltonian, *J. Math. Phys.*, **13**, 1558—1584 (1972).

[Gli Ja 5] Glimm J., Jaffe A., The energy momentum spectrum and vacuum expectaction values in quantum field theory II, *Commun. Math. Phys.*, **22**, 1—22 (1971).

[Gli Ja 6] Glimm J., Jaffe A., What is renormalization? in Symposium on Partial Differential Equations, Barkeley 1971, American Mathematical Society, Providence, 1973.

[Gli Ja 7] Glimm J., Jaffe A., Positivity and self-adjointness of the $P(\varphi)_2$ Hamiltonian, *Commun. Math. Phys.*, **22**, 253—258 (1971).

[Gli Ja 8] Glimm J., Jaffe A., Positivity of the φ_3^4 Hamiltonian, *Forschritte der Physik*, **21**, 327—376 (1973).

[Gli Ja 9] Glimm J., Jaffe A., Self-adjointness of the Yukawa$_2$ Hamiltonian, *Ann. of Phys.*, **60**, 321—383 (1970).

[Gli Ja 10] Glimm J., Jaffe A., The Yukawa$_2$ quantum field theory without cuttoffs, *J. Funct. Analysis*, **7**, 323 357 (1971).

[Gli Ja 11] Glimm J., Jaffe A., Quantum field models, «Statistical mechanics and quantum field theory», ed. by C. de Witt and R. Stora, Gordon and Breach, New York, 1971.

[Gli Ja 12] Glimm J., Jaffe A., Boson quantum field models, «Mathematics of contemporary physics», ed. by R. Steater, Academic Press, New York, 1972. (Перевод см. настоящий сборник, стр. 99.)

[Gli Ja 13] Glimm J., Jaffe A., Entropy principle for vertex functions in quantum field models, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, A21, 1—26 (1974).

*[Gli Ja 14] Glimm J., Jaffe A., A remark on the existence of φ_4^4, *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 440—442 (1974).

*[Gli Ja 15] Glimm J., Jaffe A., Three particle structure of φ^4 interactions and the scaling limit, *Phys. Rev.*, **D11**, 2816—2827 (1975).

*[Gli Ja 16] Glimm J., Jaffe A., On the approach to the critical point, *Ann. Inst. Henri Poincare*, **A22**, 13—26 (1975).

*[Gli Ja 17] Glimm J., Jaffe A., Two and three body equations in quantum field models, *Commun. Math. Phys.*, 44, 293—320 (1975).

[Gli Ja Sp 1] Glimm J., Jaffe A., Spencer T., The Wightman axioms and particle structure in $P(\varphi)_2$ quantum field model, *Ann. Math.*, **100**, 585—632 (1974).

[Gli Ja Sp 2] Glimm J., Jaffe A., Spencer T., The particle structure of the weakly coupled $P(\varphi)_2$ models and other applications of high temperature expansions, Part II. The cluster expansion (перевод см. настоящий сборник, стр. 219).

*[Gli Ja Sp 3] Glimm J., Jaffe A., Spencer T., Phase transitions for φ_2^4 quantum fields, *Commun. Math. Phys.*, **45**, 203—217 (1975).

*[Gli Ja Sp 4] Glimm J., Jaffe A., Spencer T., A convergent expansion about mean field theory, *Ann. Phys.*, **101**, 610—669 (1976).

[Go] Goldstone J., Field theories with «superconductor» solutions, *Nuovo Cimento*, **19**, 154—164 (1961).

[Go Sa We] Goldstone J., Salam A., Weinberg S., Broken symmetries, *Phys. Rev.*, **127**, 965—970 (1962).

[Gr 1] Griffiths R., Phase transitions, В сб. «Statistica mechanics and quantum field theory», ed. by C. De Witt and R. Stora, Gordon and Breach, New York, 1971.

[Gr 2] Griffiths R., Rigorous results for Ising ferromagnets for arbitrary spin, *J. Math. Phys.*, **10**, 1559—1565 (1969).

[Gr Hu Sh] Griffiths R., Hurst C., Sherman S., Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field, *J. Math. Phys.*, **11**, 790—795 (1970).

[Gr Si] Griffiths R., Simon B., The $(\varphi^4)_2$ field theory as a classical Ising model, *Commun. Math. Phys.*, **33**, 145—165 (1973).

[Gro 1] Gross L., The relativistic polaron without cutoffs, *Commun. Math. Phys.*, **31**, 25—74 (1973).

[Gro 2] Gross L., Existence and uniqueness of physical ground states, *J. Funct. Anal.*, **20**, 52—109 (1972).

[Gro 3] Gross L., Logarithmic Sobolev inequalities, Cornell preprint (1973).

[Gro 4] Gross L., Analytic vectors for representations of canonical commutation relations and non-degeneracy of ground states, *J. Funct Anal.*, **17**, 104—112 (1974).

[Gu 1] Guerra F., Uniqueness of the vacuum energy density and Van Hove phenomenon in the infinite volume limit for two dimensional self-coupled Bose fields, *Phys. Rev. Letts.*, **28**, 1213 (1972).

[Gu Ro Si 1] Guerra F., Rosen L., Simon B., Nelson's symmetry and the infinite volume behaviour of the vacuum in $P(\varphi)_2$, *Commun. Math, Phys.*, **27**, 10—22 (1972).

[Gu Ro Si 2] Guerra F., Rosen L., Simon B., The vacuum energy for $P(\varphi)_2$ infinite volume limit and coupling constant dependence, *Commun. Math. Phys.*, **29**, 233—247 (1973).

[Gu Ro Si 3] Guerra F., Rosen L., Simon B., The $P(\varphi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics, *Ann. Math.*, **101**, 111—259 (1975).

[Ha K K] Haag R., Kadison R., Kastler D., Nets of Subalgebras and Classification of States, *Commun. Math. Phys.*, **16**, 81—104 (1970).

[Hal] Halmos P. R., Normal dilations and extensions of operators, *Summa Brasiliensis Math.*, **2**, 125—134 (1950).

[Hei P] Heisenberg W., Pauli W., *Zeitschr. Phys.*, **59**, 168 (1930).

[He 1] Hepp R., Renormalized Hamiltonian dynamics and representations of the canonical (anti) — commutation relations, В сб. «Systèmes à un nombre infini de degrés de liberté», ed. by L. Michel and D. Ruelle, Editions du CNRS, Paris.

[He 2] Хепп К., Теория перенормировок, «Наука», 1974.

[He 3] Hepp K., Renormalization theory, «Statistical mechanics and quantum field theory», ed. by C. De Witt and R. Stora, Gordon and Breach, New York, 1971.

[He 4] Hepp K., Erice lectures, 1973; The classical limit for quantum mechanical correlation functions, *Comm. Math. Phys.*, **35**, 265—279 (1974).

[Hid] Hida T., Stationary Stochastic Processes, Math. lectures notes, Princeton Univ. Press, 1970.

[Hi Ph] Хилле. Е., Филлипс Р. С., Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962.

[HK Si] Hoegh-Krohn R., Simon B., Hypercontractive semigroups and two dimensional self-coupled Bose fields, *J. Funct. Anal.*, **9**, 121—180 (1972).

[Hö] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», М., 1965.

[It McK] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, «Мир», М., 1968.

[Ja 1] Jaffe A., The dynamics of a cutoff $\lambda\varphi^4$ field theory, Princeton Univ. Thesis.

[Ja 2] Jaffe A., Existence theorems for a cutoff $\lambda\varphi^4$ field theory, в сб.

«Mathematical theory of elementary particles», ed by G. Goodman and J: Segal, M. I. T. Press, 1966.

[Ja McB] Jaffe A., McBryan O., What constructive quantum field theory has to say about currents, «Proceedings of conference on currents», Princeton, 1971.

[JoL] Jona-Lasinio G., Relativistic field theories with symmetry breaking solutions, *Nuovo Cimento Letters*, **34**, 1790—1795 (1964).

[Jo] Йост Р., Общая теория квантованных полей, «Мир», М., 1967.

[Kat] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, «Мир», М., 1972.

[Ka Ro Sw] Kastler D., Robinson D., Swieca S., Conserved currents and associated symmetries; Goldstone's theorem, *Commun. Math. Phys.*, **2**, 108—120 (1966).

[Kl] Klauder J., Ultralocal scalar field models, *Commun. Math. Phys.*, **18**, 307—318 (1970).

[Ko Wi] Вильсон К., Когут Дж., Ренормализационная группа и ε-разложение, «Мир», М., 1975.

[Leb 1] Lebowitz J., Bounds on the correlations and analyticity properties of ferromagnetic Ising spin systems, *Commun. Math. Phys.*, **28**, 313—321 (1972).

[Leb 2] Lebowitz J., GHS and other inequalities, *Comm. Math. Phys.*, **35**, 87—92 (1974).

[Leb Pe] Lebowitz J., Penrose O., Decay of correlations, Yeshiva preprint.

[Li] Lions J. L., *J. Analyse Math.*, **2**, 369 (1952).

]Lo] Лоэв М., Теория вероятностей, М. ИЛ, 1962.

[ML] Martin-Löf A., Mixing properties, differentiability of the free energy and the central limit theorem for pure phase in the Ising model at low temperature, *Commun. Math. Phys.*, **32**, 75—92 (1973).

*[Ma Se 1] Magnen J., Seneor R., The infinite volume limit of the φ_3^4 model, *Ann. Inst Henri Poincaré*, XXIV, № 2, 95—519 (1976).

*[Ma Se 2] Magnen J., Seneor R., The Wightman axioms for the Weakey coupled Yukawa model in two dimensions, *Comm. Math. Phys.*, **51**, 297—318 (1976).

[McB 1] McBryan O., The vector currents in the Yukawa_2 quantum field theory with SU_3 symmetry, Harvard thesis.

[McB 2] McBryan O., Generators for the Lorentz group in the $P(\varphi)_2$ theory, Toronto preprint.

[Mil] Milkman J., Hermite polynomials, Hermite functionals and their integrals in real Hilbert space, New York Univ., Thesis (1951).

[Mi] Минлос Р. А., Обобщенные случайные процессы и их продолжения до меры, *Труды Моск. матем. общ-ва*, **8**, 411—497 (1959).

[Mi Sin 1] Минлос Р. А., Синай Я. Г., Явление «разделения фаз» при низких температурах в некоторых решетчатых моделях газа 1, *Матем. сб.*, т. **73**, 3, 375—448 (1967).

[Mi Sin 2] Минлос Р. А., Синай Я. Г., II, Труды Моск. матем. общ-ва, **19**, 113—178 (1968).

[MCP] Mathematics of Contemporary Physics, ed. by R. F. Steater, Academic Press, New York, 1972.

[Na] Nakano T., *Progr. Theor. Phys.*, **21**, 241 (1959).

[Nel 1] Nelson E., A quartic interaction in two dimensions, в сб. «Mathematical theory of elementary particles», ed. by R. Goodman and J. Segal, M. J. T. Press, 1966.

[Nel 2] Nelson E., Quantum fields and Markoff fields, Proceedings of Summer Institute of Partial Differential Equations, Berkeley 1971, Amer. Math. Soc., Providence, 1973.

[Nel 3] Nelson E., Construction of quantum fields from Markoff fields, *J. Funct. Anal.*, **12**, 97—112 (1973).

[Nel 4] Nelson E., The free Markoff field, *J. Funct. Anal.*, **12**, 211—227 (1973).

[Nel 5] Nelson E., Erice Lecture Notes (1973).

[New 1] Newman C., The construction of stationary two-dimensional Markoff fields with applications to quantum field theory, *J. Funct. Anal.*, **14**, 44—62 (1973).

[New 2] Newman C., Zeroes of the partition function for generalized Ising systems, *Comm. Pure Appl. Math.*, 27, 413—159 (1974).

[New 3] Newman C., Ultralocal quantum filed theory in terms of currents, *Commun. Math. Phys.*, **26**, 169—204 (1972).

[Neu 1] Фон Нейман Дж., Математические осиовы квантовой механики, «Наука», 1964.

[Neu 2] von Neumann J., Measure in function space, J. von Neumann «Collected Works», v. IV, 435, ed. by A. Taub, Pergamon Press, Oxford, 1961.

[Os] Osterwalder K., Duality for free Bose fields, *Commun. Math Phys.*, **29**, 1—14 (1973).

[Os Sch 1] Osterwalder K., Schrader R., On the uniqueness of the energy density in the infinite volume limit for quantum field models, *Helv. Phys. Acta*, **45**, 746—754 (1972).

[Os Sch 2] Osterwalder K., Schrader R., Feynman — Kac formula for Euclidian Fermi and Bose fields, *Phys. Rev. Letts.*, **29**, 1423—1425 (1972).

[Os Sch 3] Osterwalder K., Schrader R., Axioms for Euclidian Green's functions, *Commun. Math. Phys.*, **31**, 83—112 (1973).

[Os Sch 4] Osterwalder K., Schrader R., Axioms for Euclidian Green's functions, II, *Commun. Phys.*, **42**, 281—305 (1975).

[Os Sch 5] Osterwalder K., Schrader R., Euclidian Fermi fields and Feynman — Kac formula for boson-fermion models, *Helv. Phys. Acta*, **46**, 177—189 (1973).

*[Os Se] Osterwalder K., Seneor R., The scattering matrix is non-trivial for weakly coupled $P(\varphi)_2$ models, preprint 1975.

[Oz] Ozkaynak H., Euclidean fields for particles of arbitrary spin, Harvard preprint, 1974.

[Pa] Park J., Local Lorentz transformations of the model, Indiana preprint.

[Pe] Peierls R., On Ising's model of ferromagnetism, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **32**, 477—481 (1936).

[Re] Reed M., A Gording domain for quantum fields, *Comm. Math. Phys.*, **14**, 336—346 (1969).

[Re Ro] Reed M., Rosen L., Support properties of the free measure for boson fields, *Comm. Math. Phys.*, **36**, 123 (1974).

[Ro 1] Rosen L., A $\lambda\varphi^{2n}$ field theory without cutoffs, *Commun. Math. Phys.*, **16**, 157—183 (1970).

[Ro 2] Rosen L., The $(\varphi^{2n})_2$ quantum field theory: higher order estimates, *Comm. Pure Appl. Math.*, 24, 417—457 (1971).

[Ro 3] Rosen L., The $(\varphi^{2n})_2$ quantum field theory: Lorentz covariance, *J. Math. Anal. and Appl.*, 38, 276—311 (1972).

[Ro 4] Rosen L., Renormalization of the Hilbert space in the mass shift model, *J. Math. Phys.*, **13**, 918—927 (1972).

[Roy] Royden H., Real Analysis, Macmillan, 1963.

[Ru] Рюэль Д., Статистическая механика, Строгие результаты, «Мир», М., 1971.

[Sa] Sakai S., C^*-algebras and W^*-algebras, Ergebniss der Math. und ihrer Grenzgebiete, Band 60, Springer-Verlag, New York, 1971.

[Sal St] Salam A., Strathdee J., A renormalizable gauge model of lepton interaction, *Nuovo Cimento*, **11A**, 397—435 (1972).

[Sch 1] Schrader R., Yukawa quantum field theory in two spacetime dimensios without curoff, *Annals of Physics*, **70**, 412—457 (1972).

[Sch 2] Schrader R., A remark on Yukawa plus boson selfinteractions in two space-time dimensions, *Comm. Math. Phys.*, **21**, 164—170 (1971).

*[Sch 3] Schrader R., A possible constructive approach to φ_4^4, *Comm. Math. Phys.*, **50**, 97—112 (1976).

[Schw] Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.

[Schwi 1] Schwinger J, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S.*, **44**, 956 (1958).

[Schwi 2] Schwinger J., *Phys. Rev.*, **115**, 721 (1959).

[Se 1] Segal J., Tensor algebras over Hilbert spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81**, 106—134 (1956).

[Se 2] Segal J., Notes toward the construction of the nonlinear relativistic quantum field I; the Hamiltonian in two space-time dimensions as the generator of C automorphism group, *P. N. A. S.*, **57**, 1178—1183 (1967).

[Se 3] Segal J., Construction of nonlinear local quantum processes I, *Ann. Math.*, **92**, 462—481 (1970).

*[Sei] Seiler E., Schwinger functions for the Yukawa model in two dimensions with space-time cutoff, *Comm. Math. Phys.*, **42**, 163—182 (1975).

[Si 1] Simon B., Correlation inequalities and the mass gap in $P(\varphi)_2$ I, Domination by the two point function, *Commun. Math. Phys.*, **31**, 127—136 (1973).

[Si 2] Simon B., Correlation inequalities and the mass gap in $P(\varphi)_2$ II. Uniqueness of the vacuum for a class of strongly coupled theories, *Ann. Math.*, **101**, 260—268 (1975).

[Si 3] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, «Мир», М., 1976.

[Sl] Sloan A., The relativistic polaron without cutoffs in two space dimensions, Cornell thesis.

[Sp 1] Spencer T., Perturbation of the $P(\varphi)_2$ quantum field Hamiltonian, *J. Math. Phys.*, **14**, 823—828 (1973).

[Sp 2] Spencer T., The mass gap for the $P(\varphi)_2$ quantum field model with a strong external field, *Comm. Math. Phys.*, **39**, 63—77 (1974).

*[Sp Zi] Spencer T., Zirilli F., Scattering states and bound states in $\lambda P(\varphi)_2$, *Comm. Math. Phys.*, **49**, 1—19 (1976).

[St M] Statistical Mechanics and Quantum Field theory, ed. by C. De Witt and R. Stora, Gordon and Breach, 1971.

[Ste] Stein E., Topics in harmonic analysis, Annals of Math. Studies, 63, Princeton, 1970.

[Ste W] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, «Мир», М., 1974.

[Str] Streater R. F., Connection between the spectrum condition and the Lorentz invariance of $P(\varphi)_2$, *Commun. Math. Phys.*, **26**, 109—120 (1972).

[Str Wig] Стритер Р., Вайтман А. С., PCT, спин, статистика и все такое, М., «Наука», 1966.

[Sw] Swieca J., Range of forces and broken symmetries in many-body systems, *Commun. Math. Phys.*, **4**, 1—7 (1967).

[Sy 1] Symanzik K., On the many-particle structure of Green's functions in quantum field theory I, *J. Math. Phys.*, **1**, 249—273 (1960).

[Sy 2] Symanzik K., A modified model of Euclidean quantum field theory, N. Y. U. preprint, 1964.

[Sy 3] Symanzik K., Euclidean quantum field theory, «Local quantum theory», proceeding of the International School of Physics «Enrico Fermi», Course 45, ed. by R. Jost, Academic Press, New York, 1969.

[Sy 4] Symanzik K., Renormalizable models with simple symmetry breaking I, Symmetry breaking by a source terme, *Commun. Math. Phys.*, **16**, 48—80 (1970).

[Sy 5] Symanzik K., Small distance behaviour in field theory and power counting, *Commun. Math. Phys.*, **18**, 227—246 (1970).

[Sy 6] Symanzik K., Small distance behaviour, analysis and Wilson expansions, *Commun. Math. Phys.*, **23**, 49—86 (1971).

[Sy 7] Symanzik K., Small Distance behaviour in field theory в сб. «Strong interaction physics, Springer tracts in modern physics, v. 57, Springer-Verlag, New York, 1971.

[Sy 8] Symanzik K., *J. Math. Phys.*, **7**, 510 (1966).

[Sz] Schwartz L., Medd. Lunds. Univ. Math. Semin. (Supplementband) 196 (1952).

[Sze] Сеге Г., Ортогональные многочлены, Физматгиз, М., 1962.

[Um] Umemura Y., Measures on infinite dimensional vector spaces and Carriers of continuous measures in Hilbertian norm, Pub. of Research institute of Kyoto Univ. A. I, 1—54 (1965).

[Va] Varadhan S. R. S., Stochastic processes, lectures notes from the Courant Institute, New York, 1968.

[Vl] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., «Наука», 1964.

[Wi] Wick G. C., *Phys. Rev.*, **96**, 1124 (1954).

[Wig 1] Wightmann A. S., *Phys. Rev.*, **101**, 860 (1956).

[Wig 2] Wightmann A. S., Lectures at 1972 Coral Gables Conference.

[Wig 3] Вайтман А., Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей, «Наука», М., 1968.

СОДЕРЖАНИЕ

1. **М. Рид,** ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (*Перевод Зиновьева Ю. М.*) 13

2. **К. Остервальдер,** ЕВКЛИДОВЫ ФУНКЦИИ ГРИНА И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ ВАЙТМАНА (*Перевод Зиновьева Ю. М.*) 48

3. **Э. Нельсон,** ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕВКЛИДОВА ТЕОРИЯ ПОЛЯ (*Перевод Зиновьева Ю. М.*) 74

4. **Дж. Глимм, А. Джаффе,** БОЗОННЫЕ КВАНТОВОПОЛЕВЫЕ МОДЕЛИ (*Перевод Сушко В. Н.*) 99

5. **Дж. Глимм, А. Джаффе, Т. Спенсер,** КОРПУСКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА $P(\varphi)_2$- МОДЕЛИ СО СЛАБЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, ЧАСТЬ I (*Перевод Воловича И. В.*) 109

6. **Дж. Глимм, А. Джаффе, Т. Спенсер,** КОРПУСКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА $P(\varphi_2)$-МОДЕЛИ СО СЛАБЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, ЧАСТЬ II (*Перевод Воловича И. В.*) 119

Список литературы 259

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир»

ИБ № 178

КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Редакторы Д. Ф. Борисова, А. И Бряндинская
Художник А. В. Шипов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Л. П Бирюкова
Корректор В. С. Соколов

Сдано в набор 21/IX 1976 г. Подписано к печати 11/V 1977 г. Бумага тип. № 3 $60\times90^1/_{16}$=8,50 бум. л. 17 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 14,76. Изд. № 1/8642.
Цена 1 р. 50 к. Заказ № 351.

Издательство «Мир»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский
проспект, 29.

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «МИР» ГОТОВИТСЯ К ВЫПУСКУ

Гиббсовские состояния в статистической физике. Сб. ст. *Пер. с англ., 12 л.,* 1 р. 10 к.

Гиббсовские состояния, точнее гиббсовские случайные поля в классическом случае и гиббсовские состояиия иа C^*-алгебре квазилокальных наблюдаемых в кваитовом случае являются наиболее адекватиой математической моделью для описания равновесных явлений в статистической физике. Эта область теоретической физики развивается в последнее десятилетие очень интенсивно, и число публикаций в ней быстро растет. В настоящем сборнике представлены переводы наиболее интересных работ зарубежных ученых по разнообразным вопросам этой тематики: это фазовые переходы в классических структурах, фазовые переходы в квантовых системах, новое определение гиббсовских состояний в квантовом случае, проблема необратимости. Среди авторов статей известные специалисты, активно работающие в данной области, — Г. Араки, Ф. Дайсон, Б. Саймон, Т. Спенсер, Дж. Фрёлих.

Книга представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов, специализирующихся в области математической физики, теории вероятностей и функционального анализа.

Уважаемый читатель!

Заблаговременно оформляйте заказы на интересующие Вас кииги. Заказы принимаются в магазинах, торгующих научио-технической литературой.