

W. M. ...

И.Е. ТАММ

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ
В ДВУХ ТОМАХ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» · МОСКВА · 1975

И.Е. ТАММ

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ

I

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА
И ТЕОРИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ
И АТОМНОГО ЯДРА

ПРИКЛАДНЫЕ РАБОТЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» · МОСКВА · 1975

Собрание научных трудов в двух томах. Т а м И. Е. Электродинамика. Квантовая механика и теория твердого тела. Теория ядерных сил и атомного ядра. Том I. М., «Наука», 1975, стр. 443.

Собрание трудов академика И. Е. Тамма содержит практически все его научные работы, опубликованные за период с 1924 по 1972 г. в отечественных и зарубежных изданиях, а также часть написанных им обзоров, научно-популярных статей и т. п. Научные интересы И. Е. Тамма весьма обширны и охватывают такие разделы, как электродинамика, квантовая механика и теория твердого тела, теория ядерных сил и атомного ядра, теория элементарных частиц и взаимодействий при высоких энергиях. Велик вклад И. Е. Тамма в разработку фундаментальных проблем теории поля. Им было выполнено также немало прикладных работ. Широко известна научно-публицистическая деятельность И. Е. Тамма.

В I том вошли статьи по электродинамике, квантовой механике и теории твердого тела, теории ядерных сил и атомного ядра, а также некоторые прикладные работы.

Издание представляет значительный интерес для научных работников в области физики, инженеров-физиков, а также преподавателей, студентов и аспирантов физических специальностей вузов.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
академик В. Л. ГИНСБУРГ

РЕДАКТОРЫ-СОСТАВИТЕЛИ
доктора физ.-матем. наук:
Б. М. БОЛОТОВСКИЙ, И. М. ДРЕМИН

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание содержит практически все научные работы Игоря Евгеньевича Тамма, а также часть его выступлений и написанных им обзоров, научно-популярных статей и т. п.

Помещенная в I томе биографическая статья является лишь кратким очерком жизненного пути И. Е. Тамма.

Все работы распределены по тематическому признаку: I том содержит работы по электродинамике, квантовой механике и теории твердого тела, теории ядерных сил и атомного ядра, а также ряд прикладных работ. Во II том вошли работы по теории элементарных частиц и взаимодействий при высоких энергиях, по фундаментальным проблемам теории поля и часть написанных И. Е. Таммом обзоров, научно-популярных и биографических статей и т. п.

Собрание трудов не является, однако, полным: не публикуются некоторые статьи, близкие по результатам к включенным в Собрание, ряд научно-популярных статей и т. д. Полный список трудов И. Е. Тамма опубликован в Материалах к библиографии ученых СССР, серия физики, вып. 16 («Игорь Евгеньевич Тамм», М., «Наука», 1974).

В Собрание трудов не вошли книги, написанные И. Е. Таммом: «Основы теории электричества», переиздававшиеся 8 раз (с 1929 по 1966 г.), и «Рентгеновские лучи» (М.—Л., Госиздат, 1927), а также написанные им главы в книге «Физика» (М.—Л., Госиздат, 1928).

Оба тома разбиты на тематические разделы, внутри каждого из которых работы следуют в хронологическом порядке. Каждая статья снабжена ссылкой на журнал или книгу, в которых она опубликована. Статьи, опубликованные на русском и иностранном языках, печатаются по русскому тексту со ссылкой на оба издания. Статьи, опубликованные только на иностранном языке, печатаются в переводе. Часть статей снабжена примечаниями, которые мы старались сделать возможно более лаконичными.

Мы надеемся, что издание Собрания трудов И. Е. Тамма явится не только данью памяти замечательного физика и человека, но и окажется ценным вкладом в физическую литературу.

Редакционная коллегия

ИГОРЬ ЕВГЕНЬЕВИЧ ТАММ

(Краткий биографический очерк)

Игорь Евгеньевич Тамм родился 8 июля 1895 г. во Владивостоке, но уже в 1899 г. его семья переехала в Елисаветград (ныне Кировоград) на Украине, где отец Игоря Евгеньевича многие годы был городским инженером и по этой должности, в частности, руководил строительством первой в городе электростанции, трамвая и водопровода. Окончив здесь гимназию, Игорь Евгеньевич год учился в Эдинбургском университете (Шотландия), а когда началась первая мировая война перешел на физико-математический факультет Московского университета. Общественный темперамент Игоря Евгеньевича был таков, что занятия неоднократно прерывались далекими от науки событиями. Сначала он отправился добровольцем на фронт в качестве медицинского работника низшей квалификации («брат милосердия»), а затем активно занимался общественно-политической деятельностью, в частности был делегатом I Съезда Советов от Елисаветграда.

После окончания университета (1918) И. Е. Тамм преподавал физику сначала в Крымском университете в Симферополе (1919—1920), а затем в Одесском политехническом институте (1921—1922). В то время в этом институте преподавал Л. И. Мандельштам. Он оказал глубокое влияние на все дальнейшее развитие Игоря Евгеньевича, который сохранил тесную дружбу с ним вплоть до кончины Л. И. Мандельштама в 1944 г.

С 1922 г., с двумя краткими перерывами, научная деятельность И. Е. Тамма до конца жизни протекает в Москве. Многие годы он руководил кафедрой теоретической физики на Физическом факультете МГУ. После переезда Академии наук СССР в Москву (1934) И. Е. Тамм по приглашению директора Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР С. И. Вавилова организовал в этом институте Теоретический отдел и до конца жизни оставался его заведующим. Здесь и сосредоточилась в дальнейшем его научная деятельность.

Работы И. Е. Тамма охватили необычайно широкий круг проблем теоретической, а отчасти и прикладной физики. Они посвящены классической электродинамике и электронной теории, квантовой теории взаимодействия света с веществом, квантовой теории твердых тел, теории элементарных частиц, ядерной физике, термоядерному синтезу и другим разделам физики.

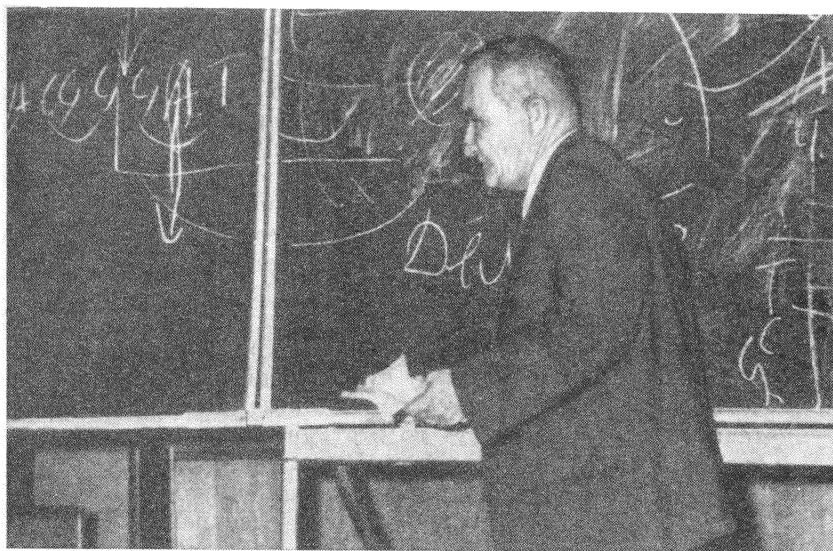
Свои первые научные исследования Игорь Евгеньевич начал под руководством Л. И. Мандельштама в начале 20-х годов. Эти исследования были связаны с макроскопической электродинамикой. Именно, речь шла об электродинамике анизотропной среды и кристаллооптике в теории относительности. Затем им был выполнен ряд работ в области боровской квантовой теории и зародившейся в то время нерелятивистской квантовой механики.

Хотя научная деятельность Игоря Евгеньевича началась сравнительно поздно (первая работа была опубликована, когда ему было 29 лет), она развивалась необычайно бурно и плодотворно. Блестящим, в частности, был период 30-х годов.

В 1930 г. была опубликована большая работа И. Е. Тамма, в которой содержалась весьма полная квантовая теория рассеяния света в кристаллах. Исследование этой проблемы стало необходимым еще и потому, что незадолго перед тем в том же Московском университете, где работал Игорь Евгеньевич, его близкие друзья Г. С. Ландсберг и Л. И. Мандельштам открыли комбинационное рассеяние света в кристаллах (одновременно в газах его обнаружил Раман в Индии, и само явление часто называют эффектом Рамана). В основе открытия лежали глубокие теоретические соображения Л. И. Мандельштама, безусловно верные, но имевшие квазиклассический характер. В своей работе Игорь Евгеньевич развил полную квантовую теорию явления, для чего он осуществил последовательное квантование не только световых, но и упругих волн в твердом теле, причем использовал понятие звуковых квантов (фононов, как их впоследствии назвал Я. И. Френкель). В рамках общей теории здесь было выявлено и рассмотрено не только комбинационное рассеяние света в кристаллах, но и рэлеевское рассеяние. С квантовой точки зрения в процессе комбинационного рассеяния света фотон либо увеличивает свою энергию, поглощая оптический фонон—квант энергии оптических колебаний решетки (оптическая ветвь), либо уменьшает ее, порождая такой квант в решетке. Появление же дублета Мандельштама—Бриллюэна в спектре рэлеевского рассеяния света в кристаллах связано с излучением или поглощением одного фонона «акустической ветви» (аналогичное явление имеет место и в жидкости).

Систематическое введение в теорию «квантов упругих колебаний» (квантов звука) можно считать зарождением концепции «квазичастиц» в системе многих тел. Это имело принципиальное значение.

В том же 1930 г. появился цикл работ И. Е. Тамма, посвященных только что созданной дираковской релятивистской квантовой механике электрона. Как известно, эта теория дала объяснение спиновых свойств электрона и привела к естественному объяснению тонкой структуры в спектре атома водорода. Однако некоторые необычные черты теории Дирака, прежде всего на-



На семинаре

личие в спектре также и уровней отрицательной энергии (или положительно заряженных дырок при заполнении этих уровней фоном электронов), казались в то время парадоксальными. Требовалось тщательное изучение всех следствий теории, допускавших сравнение с экспериментом. В связи с этим Игорь Евгеньевич обратился к рассмотрению, в рамках теории Дирака, рассеяния света на свободных электронах.

В отличие от принятого тогда метода рассмотрения конкретных квантовых процессов взаимодействия электромагнитного поля с частицами — метода соответствия, И. Е. Тамм исследовал это явление последовательно квантовомеханически — методом квантовой теории излучения. Полученная им формула для сечения совпала с той, которую несколько ранее нашли, используя метод соответствия, Клейн и Нишина. Но значение работы И. Е. Тамма отнюдь не сводилось к более строгому выводу известного уже результата. Во-первых, это был вообще первый последовательный квантовоэлектродинамический расчет конкретного релятивистского эффекта, что было очень существенно, в частности, в методическом отношении. Так, например, здесь впервые был предложен новый метод вычислений в теории возмущений в случае дираковской частицы, сильно облегчающий расчеты (впоследствии этот метод был использован также Казимиром и известен под его именем). Во-вторых, это исследование привело к выяснению некоторых принципиальных обстоятельств. Так, Игорь

Евгеньевич показал, что рассеяние даже самых «мягких», низко-частотных квантов света на свободных электронах в теории Дирака происходит через промежуточные состояния с отрицательной энергией электрона. Поэтому даже предельная классическая формула Томсона для рассеяния света большой длины волны на свободном электро-не не может быть получена из теории Дирака без учета состояний с отрицательной энергией. Вследствие этого стали бесперспективными все многочисленные предпринимавшиеся до того попытки изгнать из теории отрицательные уровни, с трудом поддававшиеся (до открытия позитрона) физической интерпретации.

Не ограничиваясь указанием на неустранимость уровней отрицательной энергии, Игорь Евгеньевич одновременно с Дираком и Оппенгеймером показал, что свободный электрон неизбежно должен, в случае существования незаполненного уровня отрицательной энергии, упасть на этот уровень, интерпретируемый в теории Дирака как позитрон. Вычислив вероятность этого процесса, И. Е. Тамм определил время жизни «дырки» (позитрона) в земных условиях в присутствии многих электронов. Оно оказалось очень малым. Поэтому тот факт, что позитронов тогда никто не замечал, получил естественное объяснение (позитрон, как известно, был обнаружен через два года после этой работы).

К этому времени относится поездка Игоря Евгеньевича в Голландию, Германию и Англию. Он впервые ехал за границу уже зрелым ученым. Знакомство со многими выдающимися западными теоретиками того времени — Эренфестом, Борном и другими, знакомство, перешедшее в прочную дружбу, с Дираком, а впоследствии с Бором, недолгая работа в Кембридже над развитием теории магнитного монополя — все это было плодотворно для И. Е. Тамма, и в то же время западные теоретики узнали и высоко оценили его. Так, например, Эренфест указал на него, как на наиболее желательного своего преемника по кафедре в Лейдене, которую основал и до Эренфеста занимал Лоренц.

В последующие несколько лет внимание Игоря Евгеньевича было обращено на одну из наиболее актуальных в то время областей приложения квантовой механики — на квантовую теорию металлов. Здесь он выполнил исследования, прочно вошедшие в современное учение о металлах. Мы отметим, во-первых, совместную с его учеником С. П. Шубиным работу «К теории фотоэффекта на металлах» (1931), заложившую основы квантовой механической теории явления. В ней было дано объяснение как процесса внешнего фотоэффекта, состоящего в выбивании электронов из поверхностного слоя, так и объемного поглощения света во внутренней области металла. В исследованиях различных авторов теория этого эффекта подверглась дальнейшему развитию и уточнению.

Во-вторых, была опубликована работа Игоря Евгеньевича «О возможной связи электронов на поверхности кристалла»

(1932), едва ли не самая важная из его работ по теории твердого тела. В ней теоретически было открыто существование уровней особого типа. Находящийся на таком уровне электрон, связанный на поверхности кристалла, не может ни выйти наружу, ни войти внутрь. Эти «уровни Тамма» сыграли впоследствии, почти через четверть века, большую роль в период бурного развития теории поверхностных и контактных свойств твердых тел, в частности теории сопротивления переходного слоя, столь важной для понимания работы транзисторов. Однако сам Игорь Евгеньевич перестал заниматься квантовой теорией твердых тел. Это был период, когда на первый план в физике вышла проблема ядерных сил, и в 1932—1947 гг. главное внимание И. Е. Тамма было обращено именно на нее.

Но прежде чем переходить к характеристике соответствующих исследований, мы остановимся на одной из самых важных работ И. Е. Тамма, относящейся к несколько более позднему периоду (1937—1939), именно на создании совместно с И. М. Франком теории излучения электрона, движущегося в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в этой среде. В ней была вскрыта физическая природа и дана полная количественная теория явления, обнаруженного в Физическом институте им. П. Н. Лебедева и носящего по именам авторов открытия название излучения Вавилова—Черенкова. В то время нужна была большая свобода и непредвзятость научного мышления, чтобы догадаться, что электрон, равномерно движущийся с достаточно большой скоростью в среде, способен испускать свет, в отличие от случая движения в пустоте, когда, как было всем известно со школьной скамьи, равномерно движущийся электрон не излучает. Преодолев инерцию мышления, И. Е. Тамм и И. М. Франк создали теорию, породившую целое направление в теоретической физике. Его предмет — взаимодействие с излучением быстрых частиц, движущихся в среде (в кристалле, в плазме и т. п.). Ему посвящены сотни теоретических и экспериментальных работ. На этом пути были теоретически предсказаны многочисленные новые эффекты. Многие из них приобрели прикладное значение. За открытие и объяснение эффекта его авторам были присуждены Государственная (1946) и Нобелевская (1958) премии. Характерно, однако, что сам Игорь Евгеньевич сосредоточил свое внимание на других областях физики — на проблемах ядерных сил и элементарных частиц. Они захватили его на долгие годы, по существу, с небольшими перерывами, на всю жизнь.

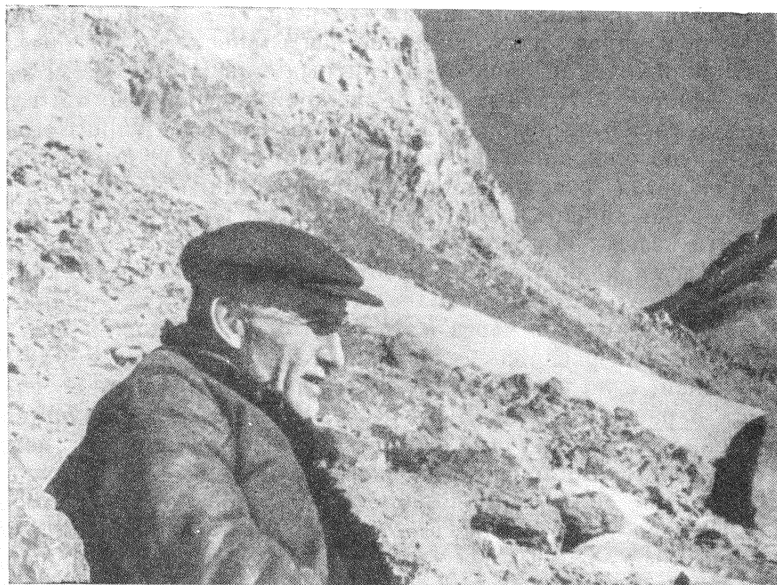
Наибольшее значение здесь имела работа, в которой была развита теория β -сил между нуклонами (1934, 1936). Опираясь на теорию β -распада Ферми, И. Е. Тамм выдвинул идею, что ядерные силы возникают в результате обмена парами частиц — электроном и нейтрино. Сама мысль о том, что обмен квантами поля может вести к возникновению сил между частицами, не была нова. Ее, как объяснение кулоновских сил с помощью обмена

фотонами, высказал и реализовал (совместно с В. А. Фоком и Б. Подольским) Дирак. Однако, во-первых, оригинальной была мысль о поле сил, образованном парами частиц, и притом частиц, обладающих массой. Во-вторых, что особенно важно, эта мысль была воплощена в довольно сложную по тем временам и полную теорию, учитывающую и возможные различные тензорные свойства оператора взаимодействия.

Уже в первом сообщении (1934) И. Е. Тамм привел полученную им формулу для потенциала взаимодействия, возникающего между нуклонами, и показал, что это взаимодействие очень мало по сравнению с реально существующими ядерными силами. Следовательно, хотя эти β -силы, конечно, существуют, не они обеспечивают устойчивость ядер. Однако, отпрявляясь от этой работы, Юкава вскоре показал, что ядерные силы могут обуславливаться обменом частицами, если эти частицы гораздо тяжелее электрона. Так были предсказаны, а затем обнаружены «ядерные» сильно взаимодействующие мезоны. Работа И. Е. Тамма послужила прообразом и основой как этой мезонной теории ядерных сил, так и других подобных исследований, которые все строились в общем по той же теоретической схеме, что и теория β -сил, созданная Игорем Евгеньевичем. Эта работа принадлежит к его лучшим достижениям, и он ценил ее больше всех своих работ.

Интерес Игоря Евгеньевича к проблеме ядерных сил этим не ограничился. В тот же период, анализируя имевшийся уже экспериментальный материал по магнитным моментам ядер, он пришел (совместно с С. А. Альшулером) к выводу (совпавшему с выводами экспериментаторов Р. Бечера и Г. Шюлера), что магнитные свойства ядер можно понять, лишь допустив, что нейтрон имеет магнитный момент. Более того, И. Е. Тамм правильно оценил знак и порядок величины этого момента. Существование магнитного момента у нейтральной частицы казалось в то время парадоксальным. Выводы Игоря Евгеньевича встретили резкую оппозицию со стороны многих крупнейших теоретиков, однако впоследствии они полностью подтвердились.

Вторая половина 30-х годов была в физике заполнена мучительными попытками выяснить природу ядерных сил и свойств мезонов. Так, длительное время развивалась теория, в которой мезоны, переносящие взаимодействие между нуклонами, считались имеющими спин, равный единице. Поэтому, когда И. Е. Тамм показал, что такая частица не обладает стационарными уровнями в поле кулоновского центра, то это представило большой интерес для теории мезонов. Одновременно возник вопрос о существовании частиц с высшими спинами и о свойствах таких частиц. В этой связи была сделана попытка построить теорию частицы, способной находиться в состояниях с разными спинами. Эта работа была выполнена (совместно с В. Л. Гинзбургом) во время войны, закончена в 1945 г. и опубликована в 1947 г. В ней впервые были построены релятивистски-инвариантные волновые уравнения для



В горах

частицы с внутренними степенями свободы, описываемыми непрерывными переменными.

Обзор творческой деятельности и научных интересов И. Е. Тамма в предвоенный период будет неполным, если не упомянуть об его интересе к принципиальным проблемам физики. Он проявлялся в отстаивании квантовой механики и теории относительности от все еще влиятельных в то время рутинеров, в популяризаторской деятельности, обсуждении гносеологических проблем и т. п. Отражением этого интереса явилась и совместная с Л. И. Мандельштамом работа о смысле соотношения неопределенности для энергии и времени в квантовой механике (она была опубликована в 1945 г., уже после смерти Леонида Исааковича). В ней было показано, что в тех случаях, когда рассматривается развитие квантовой системы, энергия которой E неопределенна в меру ΔE , соотношение $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ проявляется совершенно определенным образом. Именно, в этой ситуации Δt есть время, за которое существенно (на величину порядка ее среднего значения) изменяется математическое ожидание любой динамической переменной, не коммутирующей с гамильтонианом.

Два первых военных года И. Е. Тамм провел вместе со всем Физическим институтом в Казани. В этот нелегкий период, продолжая заниматься и фундаментальными вопросами теории, Игорь Евгеньевич очень много сил уделял актуальным приклад-

ным проблемам. Так, он оказал помощь И. В. Курчатову и А. П. Александрову в их обширной деятельности по обеспечению защиты морских кораблей от магнитных мин (И. Е. Тамм занимался расчетом магнитных полей сложной конфигурации и т. п.).

Новую серию исследований по ядерным силам Игорь Евгеньевич начал по окончании войны. В работе 1945 г. был сформулирован метод рассмотрения взаимодействия частиц, отличный от метода теории возмущений, которым пользовались до тех пор почти всегда, когда речь шла об изучении конкретных процессов. Предложенный в этой работе «метод Тамма», или, как его часто называют, «метод Тамма—Данкова» (поскольку американский теоретик Данков через пять лет также предложил этот метод), основан на разложении волновых функций в ряд не по константе связи, а по числу виртуальных частиц, эффективно участвующих в рассматриваемом процессе. Этот метод нашел широкое применение в тех случаях, когда теорией возмущений нельзя пользоваться, например, когда взаимодействие не является слабым (ядерные силы) или имеет место резонансное рассеяние. Основная идея этого метода, по существу, была воплощена в ряде теоретических схем, в частности в развившейся через десятилетие практике учета только некоторых «простейших» фейнмановских диаграмм и их итераций (хотя с точки зрения фундаментальных принципов обрывание цепочки уравнений, необходимое при использовании метода, нельзя считать строго обоснованным). Как выяснилось впоследствии, этот метод представляет собой один из вариантов метода функционалов, предложенного В. А. Фоком в 1934 г., но оставшегося неиспользованным.

Сам Игорь Евгеньевич применил метод разложения по числу частиц к проблеме устойчивости дейтрона, а затем в 1953—1955 гг. совместно со своими сотрудниками использовал его в цикле работ по фоторождению и рассеянию пионов на нуклонах в той области энергий, в которой нуклоны являются нерелятивистскими и участием нуклонных пар можно пренебречь (т. е. при лабораторной энергии пионов до нескольких сотен мегаэлектронвольт). Успешно развитая здесь полуфеноменологическая теория последовательно использовала возможность появления нуклонных резонансов (с механическим и изотопическим спинами, равными $3/2$) в промежуточных состояниях на равных основаниях с нуклонами. Это было смелым шагом, поскольку большинство теоретиков в то время не считало возможным рассматривать как полноправную частицу резонансное состояние с шириной порядка массы мезона. Однако, как известно, впоследствии барионные (а также мезонные) резонансы со столь малым временем жизни приобрели все права гражданства.

Метод Тамма—Данкова получил очень большое распространение и в дальнейшем был развит Ф. Дайсоном, предложившим его релятивистское (по нуклонам) обобщение («новый метод Тамма—Данкова»). Однако здесь возникли очень большие трудности

(что, впрочем, не остановило В. Гейзенберга, использовавшего этот метод в своих работах по единой теории материи).

В течение длительного периода работы над проблемой ядерных взаимодействий И. Е. Тамм занимался также и другими исследованиями, которые хотя и относятся к ядерной физике, но имеют более «макроскопический» характер и не затрагивают проблему ядерных сил. До войны это были исследования по каскадной теории ливней в космических лучах, выполненные совместно с С. З. Беленьким. В этих работах впервые были последовательно учтены ионизационные потери энергии частицами в космических лучах, что позволило получать характеристики ливней вплоть до самых малых энергий электронов и позитронов, составляющих ливень.

К тому же типу исследований по «макроскопической» ядерной физике можно отнести послевоенные работы, выполненные И. Е. Таммом совместно с А. Д. Сахаровым и имевшие очень большое прикладное значение. Речь идет о работах по термоядерному синтезу и теории магнитного термоядерного реактора, идея которого и была предложена в этих работах, послуживших в СССР основой дальнейших исследований управляемых термоядерных реакций. В своих исследованиях по этой тематике Игорь Евгеньевич разработал различные вопросы теории высокотемпературной плазмы, находящейся в сильном магнитном поле, вопрос о ширине фронта ударной волны и др.

В последующем, если не говорить о некоторых эпизодических работах, Игорь Евгеньевич все более углублялся в рассмотрение фундаментальных проблем физики элементарных частиц. В начале 60-х годов в центре его интересов оказалась проблема построения теории элементарных частиц, включающей элементарную длину. Такую теорию он пытался получить, модифицировав идею Г. Снайдера о квантовании пространства-времени, а именно, взяв за основу импульсное пространство переменной кривизны. Основные идеи и первые результаты он изложил в докладах на Международной конференции по физике высоких энергий в Дубне (1964) и на Конференции по физике элементарных частиц в Киото (1965). Работа в этом направлении оказалась чрезвычайно сложной и трудоемкой. И. Е. Тамм с необычайной настойчивостью, изобретательностью, вкладывая огромный труд, вел ее и в последующие годы, даже когда на него в 1967 г. обрушилась тяжелая болезнь (боковой амиотрофический склероз), через четыре года приведшая его к смерти. В течение последних трех лет жизни, начиная с февраля 1968 г., из-за паралича диафрагмы он был прикован к дыхательной машине. Но и в таком состоянии, проявляя поразительное мужество, достойное спокойствие и ясность духа, он продолжал интенсивно работать, пока приблизительно за полгода до смерти, наступившей 12 апреля 1971 г., силы его не стали катастрофически убывать.

Общее число работ, опубликованных И. Е. Таммом, сравни-

тельно невелико. Огромный, непрестанный труд, вложенный им в науку, отражается в их значимости. Таков далеко не полный итог интенсивной научной работы И. Е. Тамма.

Но уже на основании сказанного выше можно составить представление о наиболее характерных чертах Игоря Евгеньевича как исследователя. Это прежде всего стремление изучать наиболее актуальные, наиболее важные проблемы физики на каждом этапе ее развития. Движимый этим стремлением, И. Е. Тамм, как правило, не занимался многолетней дальнейшей разработкой заложенных им самим плодотворных направлений, предоставляя ее другим. Это, далее, превосходное владение техникой научной работы, тем, что принято называть аппаратом теоретической физики, владение, которое ставится на службу основной цели, а не доминирует над нею. Это тонкое понимание физической сущности изучаемого явления, умение исходить прежде всего из качественных особенностей явления. Это, наконец, независимость мышления, смелость в выдвигании и отстаивании новых идей.

Настоящий очерк не может, однако, дать сколько-нибудь полного представления о всем значении деятельности И. Е. Тамма также и потому, что эта деятельность не исчерпывается научными исследованиями. Ведя большую научно-исследовательскую работу, Игорь Евгеньевич уделял также значительное внимание и педагогической деятельности, решению практических и научно-организационных вопросов.

Будучи с 1924 г. доцентом, а с 1930 по 1941 г. профессором МГУ и заведующим кафедрой теоретической физики, И. Е. Тамм в содружестве с Л. И. Мандельштамом пересмотрел характер и содержание курсов теоретической физики, читавшихся на Физическом факультете университета. В этот период им написан выдержавший много изданий курс «Основы теории электричества». Когда в 1945 г. был образован Московский инженерно-физический институт, И. Е. Тамм организовал там кафедру теоретической физики и руководил ею ряд лет. Затем он вновь несколько лет был профессором Московского университета.

Блестящий, эмоциональный лектор, он умел внести в преподавание даже традиционных курсов дух поиска и современности. Игорь Евгеньевич оказал огромное влияние на широкие круги студенческой и научной молодежи. Если сказать, что его лекции были увлекательными, то понимать это слово нужно в буквальном, первоначальном смысле: он действительно увлекал за собой студента на путь пытливого научного исследования, и жизнь многих из его слушателей сложилась под влиянием Игоря Евгеньевича. Разумеется, влияние И. Е. Тамма на окружающих в немалой степени определялось и его качествами, не имеющими непосредственного отношения к науке. Мы имеем в виду широту его общечеловеческих интересов (политика, литература и спорт, в особенности альпинизм и туристские походы).

Мы уже говорили, что с 1934 г. до конца жизни основная научная деятельность И. Е. Тамма сосредоточилась в созданном им Теоретическом отделе Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР. За эти годы отдел из группы в четыре-пять человек вырос в коллектив, насчитывающий несколько десятков физиков-теоретиков высшей квалификации. Почти все они были воспитаны в этом же отделе. Многие первоначальные участники группы и более молодые сотрудники и бывшие аспиранты стали известными физиками и работают в различных городах и республиках Советского Союза. Некоторые из них возглавляют целые коллективы. После смерти Игоря Евгеньевича отдел стал называться Отделом теоретической физики имени И. Е. Тамма.

Плодотворность воспитательной и педагогической деятельности И. Е. Тамма в значительной мере объясняется характерным для него стилем отношений с молодежью. Его руководство никогда не было нравоучением, детальным инструктированием. Игорь Евгеньевич учил прежде всего примером и критикой, примером своего поразительного трудолюбия, примером честного отношения к науке, к своим достижениям и ошибкам, уважения к мнению коллеги, будь это мировой ученый или молодой дипломник. Его критика всегда была бескомпромиссной. Однако она никогда не оскорбляла, не ранила пришедшего к нему молодого человека. Эта критика была прямой, но доброжелательной, если речь шла о недостатках честных научных попыток. Научная инициатива, самостоятельность мышления горячо поощрялись, хотя требовательность критики при этом не снижалась. Вероятно, этим можно объяснить удивительное разнообразие научных интересов и даже научных стилей его учеников.

Не меньшее значение для воспитания молодежи — и студенческой, и научной — имела честность и принципиальность, которые И. Е. Тамм проявлял в борьбе с лженаукой. В своих выступлениях он никогда не прибегал к ораторским приемам, не искал внешних эффектов. Разъясняя ошибочность и вредность какой-либо очередной сенсации, не подкрепленной необходимой научной аргументацией, но получившей, как иногда случается, поддержку какой-либо газеты или влиятельных лиц, Игорь Евгеньевич был неизменно последователен, принципиален в лучшем смысле этого слова и строг к своим собственным доводам. Личный момент при этом всегда был исключен.

Еще в 30-х годах, выступая устно и в печати по философским проблемам физики, И. Е. Тамм терпеливо разъяснял существо новой физики и призывал молодых философов к серьезному изучению ее проблем. В самых жарких спорах он никогда не опускался до хлестких словечек и только разводил руками, когда слышал их по своему адресу. Когда в конце 20-х годов ему пришлось принять участие в споре с рутинерами по вопросу о реальности силовых линий, он не ограничился общими словами, хотя мог бы просто отмахнуться от доводов невежд, а рассчитал конкретный пример

магнитного поля, в котором силовые линии плотно заполняют тороидальную поверхность, но при ничтожном изменении силы тока могут превратиться в одну короткую замкнутую линию. Этим демонстрировалась условность понятия «число силовых линий». Отметим, что включенный в его учебник «Основы теории электричества» этот пример через три-четыре десятилетия оказался практически актуальным в теории стелларатора (одно из направлений исследований по управляемому термоядерному синтезу), где такие тороидальные магнитные поверхности играют большую роль.

Широкое признание получила деятельность И. Е. Тамма против лженауки в биологии. Сам посвятив свою жизнь физике, Игорь Евгеньевич считал, что на следующем этапе развития естествознания главную роль будет играть биология. Он занимался, в частности, проблемой генетического кода, поощрял биологов к сближению с физикой и к развитию подлинно научной молекулярной биологии.

Но и этим не исчерпывается общественная деятельность И. Е. Тамма. Его страстное участие в Пагуошском движении, в сближении ученых различных стран дополнительно способствовало созданию международного личного авторитета Игоря Евгеньевича, который был необычайно высок. Он распространился далеко за пределы круга физиков. Впрочем, личное обаяние Игоря Евгеньевича, привлекавшее к нему сердца столь многих — от начинающего студента до корифеев науки XX в., — не может быть разложено на элементы и рационально объяснено.

За заслуги перед отечественной наукой И. Е. Тамм был награжден орденами Ленина и Трудового Красного Знамени. Как уже говорилось, Игорю Евгеньевичу были присуждены Государственные премии первой степени и Нобелевская премия. Он был удостоен звания Героя Социалистического Труда, а также Золотой медали им. М. В. Ломоносова, присуждаемой Академией наук СССР. В 1933 г. он был избран членом-корреспондентом, а в 1953 г. — действительным членом АН СССР. И. Е. Тамм был также членом ряда иностранных академий.

В жизни Игоря Евгеньевича было немало тяжелых периодов, когда сложные события эпохи и личные несчастья — вспомним хотя бы последнюю многолетнюю болезнь — требовали от него незаурядного мужества и душевной стойкости. Он прошел через эти испытания, не растеряв ни жизнерадостности, ни доброжелательности к людям. Многочисленные почести, выпавшие на его долю в последние два десятилетия его жизни, свидетельства уважения и коллег, и широких кругов общественности как в нашей стране, так и во всем мире ни в чем не изменили его характера. Его личность оставалась неповторимой и цельной на протяжении всей жизни.

В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ
В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ¹

Обозначения

$E (E_1, E_2, E_3)$ — напряжение электрического поля.	F_{ij} — ковариантный электромагнитный тензор: $(F_{14}, F_{24}, F_{34}) = E$, $(F_{23}, F_{31}, F_{12}) = B$.
$H (H_1, H_2, H_3)$ — напряжение магнитного поля.	f^{ij} — контравариантный электромагнитный тензор: $(f^{14}, f^{24}, f^{34}) = -D$, $(f^{23}, f^{31}, f^{12}) = H$.
$D (D_1, D_2, D_3)$ — электрическая поляризация.	
$B (B_1, B_2, B_3)$ — магнитная индукция.	

Хотя все современное развитие физики происходит под знаком электронной теории, однако не потерял своего значения также и способ суммарного, макроскопического описания электромагнитных явлений в материальных телах — способ, при котором электромагнитные свойства тел характеризуются величинами диэлектрической постоянной ϵ и магнитной проницаемости μ . Между тем макроскопические уравнения электродинамики, насколько нам известно, еще не были распространены на случай движущейся *анизотропной* среды. В дальнейшем мы попытаемся обосновать соответствующее обобщение известных уравнений Минковского, следуя пути, который был указан автору этой статьи проф. Л. И. Мандельштамом. Автор хотел бы еще раз выразить проф. Л. И. Мандельштаму чувство глубокой признательности как за постановку самой проблемы, так и за постоянную помощь и внимание при выполнении этой работы.

В классической теории анизотропной среды величины ϵ_{ij} и μ_{ij} рассматриваются как компоненты двух симметричных

¹ ЖРФХО, физ. отд., 1924, 56, вып. 2-3, 248.

трехмерных тензоров:

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix},$$

и аналогично для μ_{ij} . При выводе уравнений для движущейся анизотропной среды оказывается необходимым слить эти два трехмерных тензора II ранга в один четырехмерный тензор IV ранга. Это находится в полном соответствии с тем фактом, что в релятивистской электродинамике два трехмерных тензора I ранга (два вектора: один электрический, другой магнитный, например \mathbf{E} и \mathbf{B}) сливаются в один четырехмерный электромагнитный тензор II ранга F_{ij} . При таком толковании величин ϵ_{ij} и μ_{ij} в соотношения между F_{ij} (\mathbf{E} и \mathbf{B}) и f^{ij} (\mathbf{D} и \mathbf{H}) уже не будет явно входить тензор скорости u^i , — роль компонент скорости сведется к подчиненной роли параметров лоренцова преобразования. Очевидно, что единство изложения требует последовательного проведения этой точки зрения и в электродинамике изотропной среды. Соответствующему толкованию уравнений Минковского, при котором величины ϵ и μ рассматриваются не как числа, а как компоненты четырехмерного тензора, посвящен § 4.

В этой статье мы ограничиваемся рамками специальной теории относительности. Однако тензоральная форма полученных уравнений позволяет перенести их и в общую теорию. В ближайшем будущем мы рассчитываем изложить следствия, вытекающие из такого обобщения уравнений, и, в частности, приложить их к рассмотрению оптики анизотропной среды.

§ 1. Прежде всего рассмотрим электродинамические уравнения для изотропной среды и дадим им толкование, несколько отличающееся от общепринятого, но необходимое для решения основной нашей задачи — вывода уравнений для анизотропной среды.

В этом параграфе для упрощения предположим, что имеем дело с диэлектриком, в котором отсутствуют свободные электрические заряды.

Дифференциальные уравнения поля $\operatorname{div} f=0$, $\operatorname{rot} F=0$ остаются справедливыми и для анизотропной среды, так что нам не придется к ним возвращаться. Основной интерес представляют для нас уравнения, устанавливающие зависимость между компонентами электромагнитных тензоров f^{ij} и F_{ij} , а именно уравнения Минковского

$$\mathbf{D}' + [\mathbf{v}\mathbf{H}'] = \epsilon(\mathbf{E}' + [\mathbf{v}\mathbf{B}']), \quad \mathbf{B}' - [\mathbf{v}\mathbf{E}'] = \mu(\mathbf{H}' - [\mathbf{v}\mathbf{D}']). \quad (1)$$

Как и во всем последующем, акцентами отмечены величины, измеряемые в системе движущейся (по отношению к рассматриваемому телу).

Вывод формул (1) основывается на двух допущениях, или постулатах. Во-первых, постулируется, что в системе покоящейся (по отношению к движущемуся телу) справедливы обычные соотношения

$$B_i = \mu H_i, \quad E_i = \frac{1}{\varepsilon} D_i. \quad (2)$$

С помощью компонент тензоров F_{ij} и f^{ij} уравнения эти могут быть записаны следующим образом:

$$F_{12} = \mu f^{12}, \quad F_{14} = -\frac{1}{\varepsilon} f^{14} \quad (3)$$

и аналогичные выражения для F_{21} , F_{13} , F_{24} и т. д.

Во-вторых, необходимо, конечно, постулировать, что F_{ij} и f^{ij} суть компоненты тензоров, чем определяется характер их преобразования. Суть рассуждений, основывающихся на этих допущениях и приводящих к формуле (1), сводится к следующему.

Предположим, что движущаяся система S' приводится к покою (относительно тела) некоторым лоренцовым преобразованием A ; тогда компоненты рассматриваемых тензоров в системе S выразятся через компоненты тензоров в системе S' некоторыми функциями φ и ψ :

$$F_{ij} = \varphi_{ij}(F'_{pq}, A), \quad f^{ij} = \psi^{ij}(f'^{pq}, A), \quad (4)$$

в число аргументов которых будут входить параметры преобразования A . Исключая теперь из уравнений (3) и (4) компоненты F_{ij} и f^{ij} , мы получим искомые соотношения между компонентами тензоров F'_{ij} и f'^{ij} в движущейся системе; в эти соотношения будут входить как величины ε и μ , так и параметры преобразования A . Но эти параметры суть не что иное, как компоненты скорости тела по отношению к системе S' . Приняв это во внимание, уже легко будет простым вычислением получить формулы (1).

Как известно, формулы эти могут быть записаны и в тензориальной форме:

$$f'_{ik} u^k = \varepsilon F'_{ik} u^k, \\ F'_{ik} u_l + F'_{kl} u_i + F'_{li} u_k = \mu (f'_{ik} u_l + f'_{kl} u_i + f'_{li} u_k),$$

где u^k есть четырехмерный тензор скорости (Γ ранга)²

$$u^\alpha = \frac{v^\alpha}{\sqrt{1-v^2}} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad u^4 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

В этих формулах связь между тензорами f^{ij} и F_{ij} устанавливается с помощью *третьего* тензора — тензора скорости. Это и понятно: ведь всякая *линейная тензориальная* зависимость между двумя тензорами (за исключением простой пропорциональности их компонент) может быть установлена только при помощи *треть-*

² Скорость света в вакууме принята за единицу.

его тензора; в качестве такого «вспомогательного» тензора и выбирается обычно тензор скорости. Однако такой выбор вовсе не обязателен. Действительно, во всем предыдущем молчаливо предполагалось, что ε и μ суть числа, или *скаляры*. Между тем в теории анизотропных сред соответствующие величины ε_{ij} и μ_{ij} рассматриваются как компоненты двух трехмерных тензоров. Очевидно, можно сделать и дальнейший шаг и толковать ε и μ — коэффициенты формул (3) — как компоненты некоторого *четырёхмерного* тензора, который и послужит нам для установления связи между F и f ; компоненты же скорости v^i или u^i вернутся к своей прежней скромной роли параметров лоренцова преобразования.

С этой целью запишем уравнение (3) в следующей форме:

$$F_{ij} = s_{ij\alpha\beta} f^{\alpha\beta}, \quad (5)$$

где, очевидно, $s_{ij\alpha\beta}$ имеют следующие значения:

$$s_{1212} = \mu, \quad \text{все остальные} \quad s_{12\alpha\beta} = 0, \quad (6)$$

$$s_{1414} = -\frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{все же остальные} \quad s_{14\alpha\beta} = 0 \text{ и т. д.}$$

Эти равенства справедливы лишь в покоящейся системе, но если при переходе к другим системам мы будем преобразовывать коэффициенты $s_{ij\alpha\beta}$ по правилам преобразования ковариантного тензора IV ранга, то получаемые таким путем уравнения

$$F'_{ij} = s'_{ij\alpha\beta} f'^{\alpha\beta} \quad (5a)$$

будут правильно выражать связь между F'_{ij} и f'^{ij} в любой системе координат. Действительно, ввиду тензорности F и f

$$F'_{ij} = \frac{\partial x^h}{\partial x'^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} F_{hk}, \quad f'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} f^{\lambda\mu};$$

вставляя это в (5), получим

$$F'_{ij} = \left(s_{hk\alpha\beta} \frac{\partial x^h}{\partial x'^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \right) f^{\lambda\mu},$$

что, очевидно, равносильно уравнению (5a).

Итак, связь между F_{ij} и f^{ij} может быть установлена с помощью тензора $s_{ij\alpha\beta}$, компоненты которого в покоящейся системе определяются условиями (6); в (5) тензор скорости явно не входит. Допущения, лежащие в основе нашего вывода, всецело совпадают с общепринятыми допущениями, перечисленными в начале параграфа.

Надо сказать, что уравнение (3) не является единственно возможным способом записи уравнения (2) с помощью компонент тензоров F и f . Так, например, можно было бы выбрать и следующую форму записи: $F_{12} = \frac{\mu}{2} (f^{12} - f^{21})$, $F_{14} = \frac{1}{2\varepsilon} (f^{14} - f^{41})$ и т. д., что изменило бы вид тензора $s_{ij\alpha\beta}$. Мы остановимся, однако, на уравнениях

(3) потому, что они обладают следующим преимуществом: при этой и только при этой форме записи тензор IV ранга $s_{ij\alpha\beta}$ будет сводиться к развертке тензора II ранга; другими словами, будет существовать такой тензор $s_{i\alpha}$, что

$$s_{ij\alpha\beta} = s_{i\alpha} s_{j\beta}. \quad (7)$$

Доказательство единственности тензора $s_{i\alpha}$ дано в Приложении; что же касается формы его компонент, то для покоящейся системы она легко определяется из (6) и (7), а именно:

$$s_{ij} = \begin{vmatrix} \sqrt{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon \sqrt{\mu}} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

С помощью этого тензора уравнение (5) записывается следующим образом:

$$F_{ij} = s_{i\alpha} s_{j\beta} f^{\alpha\beta}. \quad (9)$$

Разрешая эти уравнения относительно f^{ij} , получим

$$f^{ij} = s^{i\alpha} s^{j\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (10)$$

где для покоящейся системы коэффициенты s^{ij} имеют следующие значения:

$$s^{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \sqrt{\mu} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

При переходе к другим системам координат величины s^{ij} будут преобразовываться по правилу преобразования компонент контравариантного тензора II ранга; это вытекает хотя бы из того обстоятельства, что s^{ij} суть приведенные миноры определителя, составленного из s_{ij} ; другими словами, связь между s^{ij} и s_{ij} вполне аналогична связи между g^{ij} и g_{ij} в общей теории относительности:

$$s^{ij} s_{ik} = \delta_k^j \quad (\delta_k^j = 0 \quad \text{при } j \neq k \text{ и } \delta_k^j = 1 \quad \text{при } j = k).$$

В виде примера воспользуемся предыдущим для определения зависимости между векторами \mathbf{B}, \mathbf{E} и \mathbf{H}, \mathbf{D} в равномерно движущейся системе. Пусть скорость координатной системы по отношению к материальной среде равна q и направлена по оси x .

Применяя лоренцово преобразование

$$\alpha_j^i = \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & -q\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -q\beta & 0 & 0 & -\beta \end{vmatrix}, \quad \left(\beta = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \right) \quad (12)$$

к тензору s^{ij} , получим $s'^{ij} = \alpha_a^i \alpha_b^j s^{a\beta}$. Выполнив вычисления, получим

$$s'^{ij} = \begin{vmatrix} \frac{+\zeta^2}{\sqrt{\mu}}(1-q^2\varepsilon_{\mu}) & 0 & 0 & \frac{q\zeta^2}{\sqrt{\mu}}(1-\varepsilon_{\mu}) \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 \\ \frac{q\zeta^2}{\sqrt{\mu}}(1-\varepsilon_{\mu}) & 0 & 0 & \beta^2\varepsilon\sqrt{\mu}\left(1-\frac{q^2}{\varepsilon_{\mu}}\right) \end{vmatrix}.$$

Подставляя полученные значения s'^{ij} , например, в выражение для D'_2

$$D'_2 = f'^{42} = s'^{4i} s'^{2j} F'_{ij} = s'^{22} (s'^{41} F'_{12} + s'^{44} F'_{42}),$$

получим

$$\frac{1}{\beta^2} D'_2 = \varepsilon \left(1 - \frac{q^2}{\varepsilon_{\mu}} \right) E'_2 - \frac{q}{\mu} (1 - \varepsilon_{\mu}) B'_3,$$

что представляет собой одно из уравнений Минковского в разрешенной относительно D'_2 форме.

§ 2. Если мы перейдем теперь к более общему случаю произвольной материальной среды с проводимостью σ , в которой имеются свободные заряды ρ , то перед нами станет задача выразить в тензориальной форме зависимость между тензором тока I^i , электрическим напряжением E , проводимостью σ и плотностью заряда ρ . Соображения, вполне аналогичные изложенным в предыдущем параграфе, приводят к следующей тензориальной форме этой зависимости:

$$I^i = \sigma^{i\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \rho^i, \quad (13)$$

в которую скорость явно не входит. Здесь через ρ^i обозначены компоненты тензора, которые в покоящейся системе имеют следующие значения:

$$(\rho^i) = 0, 0, 0, \rho; \quad (14)$$

в той же системе для компоненты тензора III ранга $\sigma^{i\alpha\beta}$ может быть выбрано одно из следующих выражений: либо

$$\sigma^{114} = \sigma^{224} = \varepsilon^{334} = \sigma, \quad \text{остальные } \sigma^{i\alpha\beta} = 0, \quad (15)$$

либо

$$\begin{aligned} \sigma^{114} = \sigma^{224} = \sigma^{334} = -\sigma^{141} = -\sigma^{242} = -\sigma^{343} = \\ = \frac{1}{2} \sigma, \quad \text{остальные} \quad \sigma^{i\alpha\beta} = 0. \end{aligned} \quad (15a)$$

Легко показать, что такая тензориальная интерпретация величин σ и ρ приводит к уравнениям Минковского. Действительно, в движущейся системе координат уравнение (13) заменится следующим:

$$I'^i = \sigma'^{i\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} + \rho'^i. \quad (13a)$$

Выразим $\sigma'^{i\alpha\beta}$ и ρ'^i через σ и ρ , пользуясь для этого соотношениями (14) и (15) и формулами преобразования

$$\sigma'^{i\alpha\beta} = a_j^i a_\alpha^\beta a_\mu^\sigma a^\nu{}^\mu \quad \text{и} \quad \rho'^i = a_j^i \rho^j$$

(где a_j^i суть коэффициенты преобразования (12)), и вставим найденные значения в (13a); в результате получим

$$\begin{aligned} I'^1 &= \beta \sigma E'_1 - q \beta \rho, & I'^2 &= \beta \sigma (E'_2 + q B'_3), \\ I'^4 &= -\beta q \sigma E'_1 + \beta \rho, & I'^3 &= \beta \sigma (E'_3 - q B'_2). \end{aligned}$$

Здесь I'^4 есть не что иное, как плотность заряда, измеренная в движущейся системе, т. е. в обычных обозначениях $I'^4 = \rho'$. Исключая ρ из двух левых уравнений и заменяя I'^4 через ρ' , получим

$$\sigma E'_1 = \beta (I'^1 + q \rho'),$$

а из уравнения для I'^4

$$\rho' = \beta (\rho - q \sigma E'_1).$$

Легко убедиться, что эти уравнения вместе с двумя правыми из написанных выше соотношений совпадают с соответствующей системой уравнений Минковского.

§ 3. Изложенная интерпретация уравнений Минковского весьма облегчает задачу обобщения этих уравнений на случай *анизотропной* среды; собственно говоря, остается только повторить предшествующие рассуждения в незначительно измененной форме.

Для упрощения будем сначала предполагать, что оси трехмерных тензоров ϵ и μ совпадают между собой (т. е. что совпадают оси соответствующих им эллипсоидов). Выберем покоящуюся систему координат, пространственные оси которой совпадают с осями этих тензоров. Тогда соотношения между компонентами тензоров F_{ij} и f^{ij} запишутся, очевидно, следующим образом:

$$F_{12} = \mu_3 f^{12}, \quad F_{14} = -\frac{1}{\epsilon_1} f^{14} \quad (16)$$

и т. д.³ По-прежнему запишем эту систему уравнений в тензо-

³ Возможны были бы и другие формы записи, например $F_{12} = (\mu_3/2) (f^{12} - f^{21})$ и т. д.; мы остановились, однако, на уравнении (16), потому что именно эта система уравнений при переходе к случаю изотропии сведется к системе уравнений (3).

риальной форме

$$F'_{ij} = s_{ij\alpha\beta} f^{\alpha\beta}. \quad (17)$$

Компоненты тензора $s_{ij\alpha\beta}$ будут, очевидно, иметь следующее значение в выбранной нами координатной системе:

$$\begin{aligned} s_{1212} = s_{2121} = \mu_3, & \quad s_{2323} = s_{3232} = \mu_1, & \quad s_{1313} = s_{3131} = \mu_2, \\ s_{1414} = s_{4141} = \frac{-1}{\varepsilon_1}, & \quad s_{2424} = s_{4242} = \frac{-1}{\varepsilon_2}, & \quad s_{3434} = s_{4343} = \frac{-1}{\varepsilon_3}; \end{aligned} \quad (18)$$

остальные же компоненты, за исключением членов главной диагонали, равны нулю. Что же касается членов главной диагонали, то их значение не может быть определено из соотношений (16) и (17), ибо ввиду антисимметричности тензоров F'_{ij} и f^{ij} члены эти в любой системе координат⁴ выпадут из зависимостей (17).

Существенное отличие рассматриваемых уравнений анизотропной среды от уравнений среды изотропной заключается в том, что основной электромагнитный тензор вещества s является в этом случае тензором IV ранга, который, как легко убедиться, не может быть сведен к развертке тензоров низшего ранга. В частности, очевидно, что тензор этот не может быть сведен к развертке симметричного тензора II ранга, как это имело место в случае изотропии; действительно, 12 независимых величин ε_{ij} и μ_{ij} не могут быть приведены в соответствие с 10 компонентами симметричного тензора II ранга. Вообще говоря, тензоры IV ранга должны играть существенную роль в релятивистской теории анизотропных сред. В следующей статье будет показано, что явления двойного лучепреломления в этих средах приводят к заключению, что и некоторые другие тензоры, характеризующие свойства анизотропной среды, суть тоже тензоры IV ранга.

Вернемся к вопросу о значении компонент тензора $s_{ij\alpha\beta}$ в покоящейся системе координат (оси которой совпадают с главными осями анизотропии). Как явствует из (18), тензор $s_{ij\alpha\beta}$ симметричен по отношению к перестановкам индексов в группах $(i\alpha)$ и $(j\beta)$ и к перестановкам этих групп друг на место друга. Ввиду того что отличны от нуля лишь те компоненты $s_{ij\alpha\beta}$, для которых одновременно $i = \alpha$ и $j = \beta$, мы можем символически записать тензор

⁴ Покажем, например, что в любой системе координат члены вида s_{pppp} выпадут из соотношений между F'_{ij} и H'_3 :

$$\frac{\partial F'_{ij}}{\partial H'_3} = s'_{ij12} - s'_{ij21}$$

(ибо $H'_3 = f'^{12} = -f'^{21}$),

$$\frac{\partial (s'_{ij12} - s'_{ij21})}{\partial s_{pppp}} = a_i^p a_j^p a_1^p a_2^p - a_i^p a_j^p a_2^p a_1^p = 0.$$

$s_{ij\alpha\beta}$ в форме квадратной матрицы

$$s_{ij\alpha\beta} = \begin{pmatrix} [\mu] & \mu_3 & \mu_2 & -\frac{1}{\varepsilon_1} \\ \mu_3 & [\mu] & \mu_1 & -\frac{1}{\varepsilon_2} \\ \mu_2 & \mu_1 & [\mu] & -\frac{1}{\varepsilon_3} \\ -\frac{1}{\varepsilon_1} & -\frac{1}{\varepsilon_2} & -\frac{1}{\varepsilon_3} & \left[\frac{1}{\varepsilon^2 \mu} \right] \end{pmatrix}, \quad (19)$$

в которой члены, стоящие на местах (1,1), (1,2), (1,3) . . . , соответствуют компонентам s_{1111} , s_{1212} , s_{1313} . . . Форма членов главной диагонали, как было уже сказано, остается неопределенной, и на соответствующих им местах матрицы указана лишь размерность этих членов, определяемая из следующего условия: при переходе от среды анизотропной к случаю изотропии тензор $s_{ij\alpha\beta}$ (формула (18)) должен переходить в развертку тензора $s_{i\alpha}$ (формула (8)).

Аналогичным образом можно найти и соответствующий контравариантный тензор, удовлетворяющий соотношению

$$f^{ij} = s^{ij\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (20)$$

а именно:

$$s^{ij\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{\mu} \right] & \frac{1}{\mu_3} & \frac{1}{\mu_2} & -\varepsilon_1 \\ \frac{1}{\mu_3} & \left[\frac{1}{\mu} \right] & \frac{1}{\mu_1} & -\varepsilon_2 \\ \frac{1}{\mu_2} & \frac{1}{\mu_1} & \left[\frac{1}{\mu} \right] & -\varepsilon_3 \\ -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_3 & [\varepsilon^2 \mu] \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Очевидно, что уравнения (17) и (20) эквивалентны друг другу и что тензор $s^{ij\alpha\beta}$ обладает теми же свойствами симметрии, что и тензор $s_{ij\alpha\beta}$. Легко также убедиться в справедливости следующего тензорального соотношения:

$$s^{ij\alpha\beta} s_{hk\alpha\beta} = \delta_h^i \delta_k^j, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \delta_h^i = 0 & \text{при } i \neq n, \\ \delta_h^i = 1 & \text{при } i = n. \end{cases}$$

Поясним на конкретном примере способ применения выведенных нами формул и с этой целью воспользуемся ими для определения зависимостей между трехмерными векторами \mathbf{V}' , \mathbf{E}' и \mathbf{H}' , \mathbf{D}' в движущейся системе координат, скорость которой q параллельна одной из главных осей анизотропии (например, оси x).

Для упрощения вычислений введем обозначения

$$s'^{ij\alpha\beta} - s'^{ij\beta\alpha} = s''^{ij\alpha\beta}.$$

Тогда зависимость компоненты $f'^{14} (= -D'_1)$ от компонент B' и E' выразится, очевидно, следующей формулой:

$$f'^{i4} = \sum_{\beta}^{\beta > \alpha} \sum_{\alpha} s''^{14\alpha\beta} F'_{\alpha\beta}.$$

С другой стороны, приняв во внимание, что лишь те s^{pqrs} не равны нулю, для которых одновременно $p=r$ и $q=s$, получим

$$s''^{14\alpha\beta} = \sum_p \sum_q a_p^1 a_q^4 (a_p^\alpha a_q^\beta - a_p^\beta a_q^\alpha) s^{pqpq},$$

где a'_j суть коэффициенты лоренцова преобразования (12). Рассматривая значения этих коэффициентов, убедимся, что единственной не равной нулю компонентой $s''^{14\alpha\beta}$ при $\beta \neq \alpha$ будет компонента s''^{1414} :

$$s''^{1414} = a_1^1 a_4^4 (a_1^1 a_4^4 - a_4^1 a_1^4) s^{1414} + a_4^1 a_1^4 (a_1^1 a_4^4 - a_4^1 a_1^4) s^{4141}.$$

Так как $s^{1414} = s^{4141} = -\varepsilon_1$, а $a_1^1 a_4^4 - a_4^1 a_1^4 =$ равный единице детерминант лоренцова преобразования, то

$$s''^{1414} = -\varepsilon_1$$

и, следовательно,

$$f'^{14} = \sum_{\beta}^{\beta > \alpha} \sum_{\alpha} s''^{14\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} = -\varepsilon_1 F'_{14}$$

или

$$D'_1 = \varepsilon_1 E'_1. \quad (22)$$

Аналогично получим

$$H'_1 = \frac{1}{\mu_1} B'_1, \quad (23)$$

а несколько более длинные вычисления того же рода приведут нас к формулам

$$D'_2 = \beta^2 \left(\varepsilon_2 - \frac{q^2}{\mu_3} \right) E'_2 - q\beta^2 \left(\frac{1}{\mu_3} - \varepsilon_2 \right) B'_3, \quad (24)$$

$$H'_3 = \beta^2 \left(\frac{1}{\mu_3} - q^2 \varepsilon_2 \right) B'_3 + q\beta^2 \left(\frac{1}{\mu_3} - \varepsilon_2 \right) E'_2. \quad (25)$$

Исключая отсюда E'_2 , получим

$$B'_3 = \beta^2 \left(\mu_3 - \frac{q^2}{\varepsilon_2} \right) H'_3 + q\beta^2 \left(\mu_3 - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) D'_2. \quad (26)$$

Последнее уравнение можно получить и непосредственно, воспользовавшись соотношениями (17) вместо уравнения (20). Действительно, (26) получается из (25) заменой F_{ij} на f^{ij} и обратно; заменой $s^{ij\alpha\beta}$ на $s_{ij\alpha\beta}$ и переменной знака q (эта перемена знака соответствует переходу от прямого лоренцова преобразования

к обратному, которое и должно применяться при преобразовании ковариантных тензоров).

Присоединив к предыдущим трем уравнениям еще одно уравнение для E'_2 :

$$E'_2 = \beta^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - q^2 \mu_3 \right) D'_2 - q \beta^2 \left(\mu_3 - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) H'_3, \quad (27)$$

легко привести их к следующему виду:

$$B'_3 + qE'_2 = \mu_3 (H'_3 + qD'_2), \quad D'_2 + qH'_3 = \varepsilon_2 (E'_2 + qB'_3).$$

Подобным же образом получим два аналогичных уравнения для B'_2 , H'_2 , D'_3 и E'_3 . Легко убедиться, что найденные нами формулы могут быть сведены к следующим двум векториальным уравнениям, по внешнему виду вполне аналогичным формулам Минковского:

$$\mathbf{D}' + [\mathbf{vH}'] = \varepsilon (\mathbf{E}' + [\mathbf{vB}']), \quad \mathbf{B}' - [\mathbf{vE}'] = \mu (\mathbf{H}' - [\mathbf{vD}']). \quad (28)$$

Здесь через v обозначена скорость материальной среды по отношению к рассматриваемой системе координат $v = -q$, а через ε и μ обозначены *трехмерные тензоры*

$$\left\| \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{array} \right\|,$$

причем, как обычно,

$$(\varepsilon E) = i \sum_{\alpha} \varepsilon_{1\alpha} E_{\alpha} + j \sum_{\alpha} \varepsilon_{2\alpha} E_{\alpha} + k \sum_{\alpha} \varepsilon_{3\alpha} E_{\alpha} \text{ и т. д.}$$

Очевидно, что формулы (28) останутся справедливыми при любом вращении координатных осей, при том, однако, условии, что движение происходит параллельно главным осям анизотропии; при рассмотрении же общего случая произвольно направленной скорости необходимо вернуться к основным уравнениям (17) и (20).

§ 4. В предыдущем параграфе предполагалось, что оси трехмерных эллипсоидов ε и μ совпадают между собой (для кристаллов это осуществляется во всех системах, кроме моно- и триклинных). Чтобы освободиться от этого допущения, рассмотрим несколько подробнее случай чисто пространственного вращения наших исходных координатных осей (т. е. осей, покоящихся относительно кристалла и параллельных его главным осям). Как известно, при таком ограничении характера преобразований всякий четырехмерный тензор распадается на ряд независимых трехмерных или пространственных тензоров⁵. В частности, тензор $s_{ij\alpha\beta}$

⁵ См., например, *H. Weyl. Raum—Zeit—Materie. 5 Aufl. Berlin, J. Springer, 1923, S. 183* или *M. Laue. Relativitätstheorie. 1 Aufl. Bd. II. Braunschweig, F. Vieweg und Sohn, 1924, S. 63.*

распадается: 1) на пространственный тензор IV ранга, образованный из «внутренних» компонент тензора $s_{ij\alpha\beta}$, т. е. из тех компонент, в число индексов которых не входит ни одной четверки; 2) на два пространственных тензора II ранга:

$$\left. \begin{array}{l} s_{i4\alpha 4} \\ s_{4j4\beta} \end{array} \right\} i, \alpha, j, \beta = 1, 2, 3,$$

соответствующие компоненты которых имеют тождественные значения, и, наконец, 3) на пространственный тензор нулевого ранга (скаляр), соответствующий члену⁶ s_{4444} . Обратим внимание на то, что компоненты первого тензора зависят только от чисел μ_1 , μ_2 и μ_3 , а компоненты тензоров II ранга — только от чисел ε_1 , ε_2 и ε_3 .

Другими словами, можно сказать, что в покоящихся (по отношению к рассматриваемому телу) координатных системах электромагнитный тензор вещества $s_{ij\alpha\beta}$ распадается на один магнитный и два тождественных электрических пространственных тензора, преобразующихся независимо друг от друга (инвариантный член s_{4444} оставляем в стороне). При этом магнитный тензор вещества оказывается IV, а электрический II ранга, что находится в полном соответствии с хорошо известным различием между магнитными векторами \mathbf{H} и \mathbf{B} и электрическими \mathbf{E} и \mathbf{D} (ведь первые являются, в сущности, тензорами II ранга). Путем простых вычислений, которые мы здесь приводить не будем, можно показать, что характер преобразования компонент магнитного тензора вещества IV ранга вполне соответствует преобразованию соответствующих компонент обычного тензора II ранга

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{array} \right\|.$$

(Доказательство основывается на известной теореме, гласящей, что всякий минор ортогонального определителя равен соответствующей ему адьюнкте (алгебраическому дополнению).)

Все изложенное дает нам право высказать следующее предположение. В том случае, если оси эллипсоидов ε и μ не совпадают между собой, значение компонент тензора $s_{ij\alpha\beta}$ (или $s^{ij\alpha\beta}$) может быть найдено следующим образом. Пусть пространственное преобразование A соответствует такому вращению координатных

⁶ Вообще говоря, четырехмерный тензор IV ранга распадается на 16 пространственных тензоров, но в рассматриваемом нами частном случае тензора $s_{ij\alpha\beta}$ все эти тензоры, за исключением перечисленных в тексте, тождественно равны нулю.

осей, которое приводит оси эллипсоида μ к совпадению с осями эллипсоида ϵ . Составляем матрицу IV ранга по тем же правилам, что и тензор (19), и затем применяем преобразование A к *одним лишь внутренним* ее членам (т. е. к членам, зависящим от μ), оставляя при этом остальные члены без изменения. Члены полученной таким образом матрицы и будут соответствовать компонентам тензора $s_{ij\alpha\beta}$ в той координатной системе, оси которой совпадают с осями эллипсоида ϵ .

Приложение (к стр. 23)

Докажем единственность тензора s_{ij} ; другими словами, докажем, что значения компонент этого тензора (в покоящейся системе) однозначно определяются из уравнения (9): $F_{ij} = s_{i\alpha} s_{j\beta} g^{\alpha\beta}$.

Из сравнения этих уравнений с соотношениями $B_1 = \mu H_1$, $B_2 = \mu H_2$ и $B_3 = \mu H_3$ вытекают следующие равенства:

$$s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} = \mu, \quad (a)$$

$$s_{11}s_{33} - s_{13}s_{31} = \mu, \quad (b)$$

$$s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32} = \mu. \quad (c)$$

Кроме того, так как F_{12} не зависит от H_2 , т. е. $\partial F_{12}/\partial H_2 = 0$, и, далее, так как $\partial F_{12}/\partial H_1 = 0$, $\partial F_{13}/\partial H_1 = 0$, $\partial F_{13}/\partial H_3 = 0$, $\partial F_{23}/\partial H_3 = 0$ и $\partial F_{23}/\partial H_2 = 0$, то

$$s_{11}s_{23} - s_{13}s_{21} = 0, \quad (d) \quad s_{11}s_{32} - s_{12}s_{31} = 0, \quad (g)$$

$$s_{12}s_{23} - s_{13}s_{22} = 0, \quad (e) \quad s_{21}s_{32} - s_{22}s_{31} = 0, \quad (h)$$

$$s_{12}s_{33} - s_{13}s_{32} = 0, \quad (f) \quad s_{21}s_{33} - s_{23}s_{31} = 0. \quad (i)$$

Если ни один из членов, входящих в уравнения (d) и (e), не равен нулю, то из этих уравнений следует $s_{11}s_{22} = s_{12}s_{21}$, что противоречит уравнению (a). Следовательно, по крайней мере одна из компонент s_{ij} равна нулю. Предположим, что равен нулю один из членов диагонали, например s_{11} . Тогда из (a) и (b) получим $s_{12}s_{21} = s_{13}s_{31} = -\mu$, а из уравнения (d) $s_{12}s_{21} = 0$, что противоречит друг другу. Стало быть, равная нулю компонента s_{ij} не принадлежит главной диагонали. Из рассмотрения же уравнений (d)–(i) явствует, что при не равных нулю членах главной диагонали равенство нулю любого бокового члена влечет за собой равенство нулю *всех* боковых членов.

Оставшиеся члены s_{11} , s_{22} и s_{33} однозначно определяются из равенств (a), (b) и (c) (произвольным остается лишь знак этих членов). Вполне аналогичное рассуждение применимо и к членам, содержащим одну или две четверки в индексе.

Примечание. В статьях 1—3, посвященных электродинамике движущихся сред, подход И. Е. Тамма отличается от известной формулировки Г. Минковского. И. Е. Тамм рассматривает более общий случай (анизотропные движущиеся среды) и более общую форму записи материальных уравнений. Кроме того, уравнения поля сводятся к уравнениям для потенциалов, так же как и в случае покоящейся среды. Это в ряде случаев упрощает рассмотрение.

В этих статьях, как и в ряде последующих, сохранена терминология, использовавшаяся И. Е. Таммом. Заметим, что в настоящее время термины «напряжение электрического поля», «напряжение магнитного поля» обычно заменяются на «напряженность электрического (магнитного) поля» или просто на «электрическое (магнитное) поле»; величина, называемая в работе электрической поляризацией, теперь называется электрической индукцией, и т. д.

Развитие некоторых из идей, высказанных в статьях 1—3, отражено в обзоре Б. М. Болотовского и С. Н. Столярова: «Современное состояние электродинамики движущихся сред», УФН, 1974, 114, 569.

КРИСТАЛЛООПТИКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В СВЯЗИ С ГЕОМЕТРИЕЙ БИКВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ¹

§ 1. Введение и краткое резюме. § 2. Основные уравнения электродинамики анизотропной среды. § 3. Электромагнитное поле световой волны. § 4. Уравнения Френеля. § 5. Общее уравнение распространения световых волн. § 6. Двойное лучепреломление и биквадратичная геометрия. § 7. Волна и луч. § 8. Оптика гравитационного поля. § 9. Третий основной тензор биквадратичной геометрии. Приложение.

§ 1. Введение и краткое резюме

В совместной работе с проф. Л. И. Мандельштамом мною был дан вывод инвариантных уравнений электродинамики анизотропной среды ². В настоящей статье уравнения эти используются для определения законов распространения света в кристаллах. Полученные формулы вполне аналогичны известным уравнениям, определяющим распространение света в гравитационном поле в вакууме. Эта аналогия позволяет дать законам кристаллооптики геометрическое истолкование, сводящееся к утверждению, что свет в материальных средах, как и в вакууме, распространяется по нулевым линиям ($ds=0$). При этом оказывается необходимым определить элемент длины следующей формулой:

$$ds^4 = h^{ijkl} dx_i dx_j dx_k dx_l = h_{ijkl} dx^i dx^j dx^k dx^l \dots, \quad (1)$$

где h^{ijkl} (h_{ijkl}) есть тензор *IV ранга*, компоненты которого являются некоторыми функциями магнитной проницаемости $\mu_{\alpha\beta}$ и диэлектрической постоянной $\epsilon_{\alpha\beta}$. Другими словами, необходимо предположить, что в анизотропных средах элемент длины определяется *биквадратичной* формой в дифференциалах координат, тогда как в вакууме и в изотропных средах имеет место квадратичная форма.

Биквадратичности элемента длины физически соответствует наличие двойного лучепреломления.

Таким образом, в анизотропных телах справедлива не риманова геометрия квадратичной формы, а более общая геометрия биквадратичной формы. Дальнейшее развитие излагаемой теории кристаллооптики позволяют выяснить некоторые особенности этой геометрии. Так, например, та роль, которую в римановой геометрии

¹ ЖРФХО, 1925, вып. 3-4, 1.

² ЖРФХО, 1924, 56, 248 (см. наст. том, работу 1.— *Прим. ред.*).

играет основной (метрический) тензор g_{ij} , распределяется в биквадратичной геометрии между тремя различными тензорами: h_{ijhk} , k_{ij} и s_{ijhk} . Первый из них играет роль метрического тензора, определяющего собой элемент длины, тензор k_{ij} является «передвижателем индексов», устанавливающим связь между ко- и контравариантными компонентами одного и того же тензора; наконец, тензор s_{ijhk} устанавливает связь между основными тензорами электромагнитного поля F_{ij} и f^{ij} (см. § 2). В изотропных средах биквадратичная геометрия переходит в квадратичную и все три упомянутых тензора становятся тождественными друг другу.

В анизотропных средах существует различие между распространением световой волны и распространением светового луча. В кажущемся противоречии с этим обстоятельством стоит тот факт, что в «натуральной» биквадратичной геометрии анизотропной среды оба эти явления описываются одним и тем же уравнением $ds=0$. Разъяснение этого противоречия состоит в том, что различие между скоростью волны и скоростью луча может возникнуть лишь при декартовом истолковании произвольных римановых (не декартовых) координат, аналогично тому, как лишь при подобном же истолковании римановых координат имеет место искривление светового луча в гравитационном поле. В целях более подробного выяснения этого вопроса § 8 посвящается рассмотрению оптической анизотропии гравитационного поля в вакууме.

Излагаемая теория носит макроскопический характер. Обсуждение вопроса о связи ее с имеющей более глубокий физический смысл микроскопической (электронной) теорией материальной среды отодвигается до следующей статьи.

Настоящая статья представляет собой попытку наметить путь к построению общей теории геометрической оптики, которая позволила бы с единой точки зрения изложить законы распространения света в различных средах (гравитационное поле в вакууме; материальная среда — изотропная и анизотропная, однородная и неоднородная).

§ 2. Основные уравнения электродинамики анизотропной среды

В этой статье мы ограничимся рассмотрением диэлектрической среды и, кроме того, предположим, что среда эта обладает тремя взаимно перпендикулярными главными осями анизотропии (это имеет место во всех кристаллических системах, кроме моно- и триклиномерных)³.

³ Предположение это введено исключительно с целью упрощения вычислений. Основные результаты настоящей статьи, в частности все содержание § 6, остаются справедливыми и для самого общего случая (относительно значений компоненты тензора s для этого случая см. цитированную выше статью).

Электромагнитное поле в диэлектрике определяется двумя антисимметричными тензорами F_{ij} и f^{ij} , компоненты которых имеют следующее физическое значение:

$$(F_{14}, F_{24}, F_{34}) = (E_1, E_2, E_3), (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = (B_1, B_2, B_3),$$

$$(f^{14}, f^{24}, f^{34}) = (-D_1, -D_2, -D_3), (f^{23}, f^{31}, f^{12}) = (H_1, H_2, H_3). \quad (2)$$

Здесь E_α , H_α , D_α и B_α суть компоненты обычных трехмерных электромагнитных векторов (напряжение электрического и магнитного поля, электрического смещения и магнитной индукции).

Тензоры F_{ij} и f^{ij} должны удовлетворять трем основным уравнениям. Первое из них устанавливает связь между F_{ij} и f^{ij} . Уравнение это, выведенное мною в цитированной выше статье, имеет следующий вид:

$$f^{ij} = s^{ijpq} F_{pq} \quad (3)$$

либо в разрешенной относительно F_{ij} форме

$$F_{ij} = s_{ijpq} f^{pq}. \quad (3a)$$

Здесь s^{ijpq} и s_{ijpq} суть два тензора IV ранга, или, вернее, две различные формы (ко- и контравариантные) одного и того же тензора «диэлектрической и магнитной проницаемости». Между ними существуют следующие соотношения:

$$s^{ijpq} s_{hkpq} = \delta_h^i \delta_k^j, \quad (4)$$

где $\delta_h^i = 1$ при $i=h$ и $\delta_h^i = 0$ при $i \neq h$.

В дальнейшем нам часто придется пользоваться декартовой системой координат, которая покоится относительно рассматриваемого участка диэлектрика и оси которой совпадают с его главными осями анизотропии. Такую систему координат мы будем для краткости называть системой A .

Можно показать (l. c.), что в системе A отличны от нуля лишь те компоненты тензора s^{ijpq} (или s_{ijpq}), для которых одновременно $i=p$ и $j=q$. Ввиду этого в системе A значения компонент тензора s^{ijpq} могут быть символически записаны в форме квадратной матрицы:

$$s^{ijpq} = \begin{vmatrix} \left[\frac{1}{\mu} \right] & \frac{1}{\mu_3} & \frac{1}{\mu_2} & -\varepsilon_1 \\ \frac{1}{\mu_3} & \left[\frac{1}{\mu} \right] & \frac{1}{\mu_1} & -\varepsilon_2 \\ \frac{1}{\mu_2} & \frac{1}{\mu_1} & \left[\frac{1}{\mu} \right] & -\varepsilon_3 \\ -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_3 & [\varepsilon^2 \mu] \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Члены этой матрицы, стоящие на местах (1,1), (1,2), (1,3) . . . , равны соответственно компонентам s^{1111} , s^{1212} , s^{1313} . . . Значений

членов главной диагонали мне не удалось определить ⁴, и на соответствующих им местах матрицы указана лишь размерность этих членов. Как уже указывалось, все не вошедшие в матрицу компоненты s^{ijpq} равны нулю.

С помощью уравнения (4) легко убедиться, что в системе А для всех не равных нулю компонент справедливо соотношение

$$s_{ijpq} = 1/s^{ijpq}. \quad (6)$$

В *изотропных* средах тензор IV ранга s^{ijpq} (s_{ijpq}) сводится к развертке тензора II ранга s^{ip} (s_{ip}). Другими словами,

$$s^{ijpq} = s^{ip}s^{jq}, \quad s_{ijpq} = s_{ip}s_{jq}, \quad (7)$$

причем в покоящейся декартовой системе координат компоненты s^{ip} имеют следующие значения:

$$s^{ip} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon\sqrt{\mu} \end{vmatrix}. \quad (5a)$$

Уравнения (4) и (6) сводятся в изотропных средах к аналогичным формулам

$$s^{ip}s_{iq} = \delta_q^p \quad (4a)$$

и (в покоящейся декартовой системе)

$$s_{ij} = 1/s^{ij}. \quad (6a)$$

Перейдем теперь к остальным двум уравнениям электромагнитного поля. В специальной теории относительности они имеют следующий вид:

$$\text{rot } F_{ij} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} = 0, \quad (8)$$

$$\text{div } f^{ij} = \frac{\partial f^{ij}}{\partial x^j} = 0. \quad (9)$$

Первое из этих уравнений инвариантно по отношению к любому преобразованию координат. Наоборот, уравнение (9) инвариантно лишь по отношению к линейным преобразованиям. Поэтому в общей теории относительности его заменяют следующим тензо-

⁴ Члены эти выпадают из всех тех уравнений, которыми нам придется пользоваться в дальнейшем.

риальным уравнением:

$$\frac{\partial \sqrt{-g} f^{ij}}{\partial x^j} = 0. \quad (10)$$

Мы, однако, не имеем права вводить в развиваемую нами макроскопическую теорию «микроскопический» тензор g_{ij} , а можем иметь дело лишь со средними, суммарными значениями физических величин. Можно придать уравнению (9) инвариантную форму, не прибегая вовсе к помощи гравитационных потенциалов g_{ij} . Действительно, $\sqrt{-g}$ преобразуется по формуле

$$\sqrt{-g} = J \sqrt{-g'},$$

где J — якобиан преобразования

$$J = \frac{\partial (x^1 x^2 x^3 x^4)}{\partial (x^1 x^2 x^3 x^4)}. \quad (11)$$

С другой стороны, в декартовой системе координат $\sqrt{-g'} = 1$. Стало быть, если мы под J условимся понимать якобиан преобразования, переводящего данную систему координат x^1, x^2, x^3, x^4 в декартову (штрихованную) систему, то получим $\sqrt{-g} = J$, и инвариантное уравнение (10) примет вид

$$\partial J f^{ij} / \partial x^j = 0. \quad (10a)$$

В этой форме мы можем непосредственно перенести его в нашу макроскопическую теорию⁵. В дальнейшем мы придадим этой формуле несколько более удобный вид.

Совокупность уравнений (3) (или (3a)), (8) и (10a) представляет собой полную систему уравнений электромагнитного поля в диэлектрике. Ее можно упростить, введя в рассмотрение тензор потенциала Φ_i и положив

$$F_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x^i}. \quad (12)$$

Тогда уравнение (8) окажется тождественно удовлетворенным, а f^{ij} определится из уравнения (3):

$$f^{ij} = s^{ijpq} \left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial x^q} - \frac{\partial \Phi_q}{\partial x^p} \right). \quad (13)$$

⁵ По терминологии Г. Вейля, величина $J f^{ij} = \tilde{f}^{ij}$ называется тензориальной плотностью. Приведенные рассуждения сводятся к тому, что инвариантную дивергенцию тензориальной плотности \tilde{f}^{ij} мы полагаем равной нулю; величину \tilde{f}^{ij} мы определяем из того условия, что в декартовой системе координат ее компоненты должны равняться компонентам тензора f^{ij} .

§ 3. Электромагнитное поле световой волны

Электромагнитное поле световой волны характеризуется тем, что тензор-потенциал его есть периодическая функция координат (пространственных и времени), т. е. что

$$\Phi_i = A_i e^{\sqrt{-1}\varrho}, \quad (14)$$

где Q есть скалярная функция координат.

Строго говоря, функция Φ_i может быть названа периодической лишь при условии, что компоненты тензора A_i имеют постоянное значение (по времени и пространству). Однако условие это не инвариантно по отношению к преобразованию координат и должно быть заменено требованием, чтобы производные от A_i были малы по сравнению с производными от Q .

В данной статье мы ограничиваемся геометрической оптикой. Это значит, что нами исключаются из рассмотрения, во-первых, *дисперсия*, во-вторых, *дифракция* света. Первое достигается тем, что световой пучок предполагается монохроматичным (при заданной частоте ϵ_α и μ_α суть определенные функции координат). Влиянием же дифракции можно пренебречь лишь в том случае, если среда не мутна, т. е. если на расстояниях, сравнимых с длиной волны (и за промежутки времени, сравнимые с периодом колебаний), свойства среды не изменяются сколько-нибудь заметно. Другими словами, необходимо, чтобы производные от s^{ijpq} были малы по сравнению с производными от Q .

Наконец, необходимо наложить подобные же ограничения и на производные от якобиана J , что сводится, очевидно, к исключению из рассмотрения таких координатных систем, в которых $\sqrt{-g}$ заметно изменяется на расстояниях, сравнимых с длиной световой волны. Ограничение это коренится в самом существовании всякой *макроскопической* теории.

Согласно изложенному выше, при дифференцировании потенциала Φ , членом, содержащим производную от A_i , можно пренебречь по сравнению с членом, содержащим производную от Q . Стало быть, уравнение (12) примет вид

$$F_{i,j} = \sqrt{-1} (A_i Q_j - A_j Q_i) e^{\sqrt{-1}\varrho}, \quad (15)$$

где введено обозначение $Q_i = \partial Q / \partial x^i$. Далее из уравнения (13) получим

$$f^{ij} = s^{ijkl} \sqrt{-1} (A_p Q_q - A_q Q_p) e^{\sqrt{-1}\varrho}. \quad (16)$$

Обращаясь теперь к уравнению (10а) и дифференцируя выражение Jf^{ij} , мы опять-таки должны ограничиться членами, содержащими Q_i в старшей (в данном случае второй) степени⁶. Оче-

⁶ При дифференцировании предполагается, что в первом приближении Q_i постоянны, т. е. что Q есть линейная функция координат. Этому предпо-

видно, что благодаря на ичию множите я $e^{\sqrt{-1}\varphi}$ дифференци] ование по x^j сведется при этом к умножению на $\sqrt{-1} Q_j$. Стало быть,

$$\frac{\partial J f^{ij}}{\partial x^j} = \sqrt{-1} J f^{ij} Q_j = 0,$$

или

$$f^{ij} Q_j = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) можно рассматривать как совокупность четырех однородных уравнений, линейных относительно четырех неизвестных Q_j . Чтобы уравнения эти имели решения, отличные от нуля, необходимо, чтобы детерминант коэффициентов равнялся нулю ⁷:

$$|f^{ij}| = 0$$

Известно, что детерминант $|f^{ij}|$, составленный из компонент антисимметричного тензора Π ранга, выражается следующим образом: $|f^{ij}| = |f^{12}f^{34} + f^{13}f^{42} + f^{14}f^{23}|^2$. Стало быть, $f^{12}f^{34} + f^{13}f^{42} + f^{14}f^{23} = 0$. Выражая f^{ij} через слагающие векторов \mathbf{H} и \mathbf{D} (см. уравнение (2)), получим

$$H_1 D_1 + H_2 D_2 + H_3 D_3 = 0. \quad (18)$$

Отсюда т е о р е м а. В какой бы координатной системе мы не измерили электромагнитное поле световой волны, между слагающими вектора магнитного поля \mathbf{H} и вектора электрической индукции \mathbf{D} всегда будет существовать соотношение (18), равносильное условию перпендикулярности этих векторов в декартовой системе координат. При этом предполагается, что значения слагающих векторов \mathbf{H} и \mathbf{D} определяются через тензор f^{ij} с помощью формул (2).

Возвратимся к уравнению (17). Легко показать, что лишь три из четырех этих уравнений независимы друг от друга. Покажем, например, что уравнение $f^{4i} Q_i = 0$ является следствием уравнений $f^{1i} Q_i = 0$, $f^{2i} Q_i = 0$ и $f^{3i} Q_i = 0$. Для краткости будем во всем дальнейшем обозначать греческими буквами индексы, могущие принимать лишь одно из трех значений 1, 2, 3. В отличие от них, индексы, могущие принимать все четыре значения 1, 2, 3, 4, будем обозначать латинскими буквами. Чтобы доказать, что уравнение $f^{4i} Q_i = 0$ есть следствие уравнений $f^{ai} Q_i = 0$, помножим их соответственно

ложению всегда можно удовлетворить, если ограничиться рассмотрением достаточно малой области изменения координат. Законы геометрической оптики применимы лишь внутри этой области; вне ее период колебаний изменяется по мере распространения волны.

⁷ Теорема эта взята из теории линейных уравнений. Она остается справедливой и для рассматриваемого случая, в котором коэффициенты f^{ij} при неизвестных Q_j суть функции самих неизвестных (см. уравнение (16)).

на Q_α и сложим. В результате получим

$$f^{\alpha i} Q_i Q_\alpha = f^{\alpha\beta} Q_\beta Q_\alpha + f^{\alpha 4} Q_4 Q_\alpha = 0.$$

Первая сумма равна нулю, ибо $f^{\alpha\beta} = -f^{\beta\alpha}$, в то время как $Q_\alpha Q_\beta = Q_\beta Q_\alpha$. Стало быть, $f^{\alpha 4} Q_4 Q_\alpha = 0$. Сокращая на Q_4 и переставляя индексы у $f^{\alpha 4}$, получим $f^{4\alpha} Q_\alpha = 0$. Но $f^{4i} Q_i = f^{4\alpha} Q_\alpha + f^{44} Q_4 = f^{4\alpha} Q_\alpha$, ибо $f^{44} = 0$. Итак, $f^{4i} Q_i = 0$, что и требовалось доказать⁸.

Таким образом, все ограничения, налагаемые уравнениями электродинамики на значение потенциала в поле световой волны, сводятся к трем уравнениям⁹:

$$f^{\alpha i} Q_i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (19)$$

Вставляя сюда значения $f^{\alpha i}$ из уравнения (16) и сокращая на $e^{\sqrt{-1}}\varrho$, получим

$$s^{\alpha i p q} (A_p Q_q - A_q Q_p) Q_i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (20)$$

§ 4. Уравнения Френеля

В этом и следующем параграфах мы ограничимся рассмотрением системы A (покоящейся декартовой системы координат, оси которой параллельны главным осям анизотропии). Ввиду того что в системе A отличны от нуля лишь те компоненты тензора s^{ijpq} , для которых одновременно $i=p$ и $j=q$ (см. § 2), уравнения (20) принимают в них следующий простой вид:

$$\sum_i s^{i\alpha i} (A_\alpha Q_i - A_i Q_\alpha) Q_i = 0. \quad (21)$$

В этом уравнении суммирования по индексу α , очевидно, производить не нужно.

В дальнейшем мы будем выписывать знак суммы с указанием индекса, по которому производится суммирование, в тех и только в тех случаях, когда в отступление от общего правила суммирование распространяется не на все одинаковые пары индексов.

Для упрощения вычислений введем вместо амплитуд потенциала A_i новые неизвестные B_i , определяемые уравнениями

$$A_i = \frac{A_4}{Q_4} Q_i + B_i. \quad (22)$$

Очевидно, что при этом $B_4 = 0$. С другой стороны, все B_i не могут одновременно равняться нулю, ибо в противном случае A_i были бы пропорциональны Q_i и согласно уравнению (15) все F_{ij} равнялись бы нулю: электромагнитного поля не существовало бы. Та-

⁸ $Q_4 = \partial Q / \partial x^4$ не может равняться нулю, ибо мы рассматриваем электромагнитное поле световой волны, и, стало быть, множитель $e^{\sqrt{-1}}\varrho$ не может не зависеть от времени.

⁹ Можно было бы, конечно, выбрать и какие-либо три других уравнения из четырех уравнений (17).

ким образом, хотя бы для одного значения индекса α справедливо неравенство

$$B_\alpha \neq 0. \quad (22a)$$

Из уравнения (22) следует, что

$$A_\alpha Q_i - A_i Q_\alpha = B_\alpha Q_i - B_i Q_\alpha.$$

Подставляя это выражение в уравнение (21), получим

$$\sum_i s^{\alpha i \alpha i} (B_\alpha Q_i - B_i Q_\alpha) Q_i = 0,$$

или, ввиду того что $B_4 = 0$,

$$\sum_\beta s^{\alpha \beta \alpha \beta} (B_\alpha Q_\beta - B_\beta Q_\alpha) Q_\beta + s^{4\alpha 4} B_\alpha Q_4^2 = 0. \quad (23)$$

Легко выяснить физическое значение величин B_α . Из (22) следует $Q_4 B_\alpha = A_\alpha Q_4 - A_4 Q_\alpha$. Сравнивая эти выражения с уравнением (15), получим на основании уравнения (2)

$$B_1 : B_2 : B_3 = F_{14} : F_{24} : F_{34} = E_1 : E_2 : E_3. \quad (24)$$

Таким образом, B_α пропорциональны направляющим косинусам вектора электрического напряжения E .

Столь же легко выяснить также и физическое значение величин Q . В декартовых системах координат, рассмотрением которых мы ограничиваемся в этом параграфе, множитель $e^{\sqrt{-1}\varphi}$ имеет вид

$$\exp\left[\sqrt{-1} \frac{2\pi}{\lambda} (wt - m_\alpha x^z + \varphi)\right],$$

где w — скорость света, λ — длина волны, а m_α — направляющие косинусы в оптической нормали, связанные соотношением $\sum_\alpha m_\alpha^2 = 1$.

Стало быть,

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 : Q_4 = m_1 : m_2 : m_3 : -w. \quad (25)$$

Здесь, как и во всем дальнейшем, за единицу скорости принята скорость света в вакууме, так что

$$Q_4 = \frac{\partial Q}{\partial x^4} = \frac{\partial Q}{\partial t} \left(\text{а не } \frac{1}{c} \frac{\partial Q}{\partial t} \right).$$

Прежде чем приступить к решению более общей задачи, покажем, что известные уравнения Френеля, определяющие скорость распространения световой волны в кристаллах, представляют собой частный случай уравнений (23) для $\mu=1$. Действительно, в этом случае все $s^{\alpha\beta\alpha\beta}=1$, а $s^{4\alpha 4}=-\varepsilon_\alpha$ (см. уравнение (5)). Подставляя эти значения в уравнение (23), и, кроме того, заменяя Q_i через m_α и w , согласно (25) получим

$$B_\alpha \sum_\beta m_\beta^2 - m_\alpha \sum_\beta B_\beta m_\beta - \varepsilon_\alpha B_\alpha w^2 = 0. \quad (26)$$

Умножая эти уравнения соответственно на m_α и суммируя по α , убедимся, что первые две суммы взаимно сокращаются и, следовательно,

$$\sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} B_{\alpha} m_{\alpha} = 0. \quad (27)$$

С помощью уравнения (24) легко убедиться, что эта формула выражает перпендикулярность вектора смещения \mathbf{D} к направлению волновой нормали. С другой стороны, из (26) ввиду $\sum_{\beta} m_{\beta}^2 = 1$ получим

$$B_{\alpha} = \frac{m_{\alpha} \sum_{\beta} B_{\beta} m_{\beta}}{1 - \varepsilon_{\alpha} u^2}.$$

Умножая на $m_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}$ и суммируя по α , получаем далее с учетом уравнения (27)

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} B_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}^2 \varepsilon_{\alpha} \sum_{\beta} B_{\beta} m_{\beta}}{1 - \varepsilon_{\alpha} u^2} = 0$$

или, сокращая на $\sum_{\beta} B_{\beta} m_{\beta}$,

$$\sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}^2}{\frac{1}{\varepsilon_{\alpha}} - u^2} = 0. \quad (28)$$

Это выражение представляет собой не что иное, как известное уравнение Френеля.

§ 5. Общее уравнение распространения световых волн

Уравнения Френеля имеют место только в координатной системе A , да и то лишь в случае немагнитных кристаллов ($\mu=1$). Чтобы найти общее уравнение распространения световых волн, разберем случай $\mu \neq 1$, пользуясь сначала системой A , а затем уже покажем, что полученное уравнение инвариантно по отношению к любому преобразованию координат.

Возвращаемся к уравнениям (23). Уравнения эти могут быть записаны в следующей форме:

$$B_{\alpha} \left(\sum_{\beta} s^{\alpha\beta\alpha\beta} Q_{\beta}^2 + s^{\alpha 4 \alpha 4} Q_4^2 \right) - \sum_{\beta} B_{\beta} s^{\alpha\beta\alpha\beta} Q_{\alpha} Q_{\beta} = 0$$

или

$$\sum_{\beta} B_{\beta} p^{\alpha\beta} = 0, \quad (29)$$

где, как легко убедиться, коэффициенты $p^{\alpha\beta}$ имеют следующие значения: $p^{\alpha\beta} = -s^{\alpha\beta\alpha\beta} Q_{\alpha} Q_{\beta}$ для $\alpha \neq \beta$ (суммирование по α и β

производить не нужно) и

$$p^{\alpha\alpha} = \sum_{\beta} s^{\alpha\beta\alpha\beta} Q_{\beta}^2 + s^{\alpha 4 \alpha 4} Q_4^2 - s^{\alpha \alpha \alpha \alpha} Q_{\alpha}^2.$$

Уравнения (29) представляют собой три однородных линейных уравнения относительно трех неизвестных B_{β} . Так как все три величины B_{β} не могут одновременно равняться нулю (уравнение (22а)), то определитель, составленный из коэффициентов $p^{\alpha\beta}$, должен быть равен нулю: $|p^{\alpha\beta}| = 0$.

Чтобы упростить вычисления, представим члены определителя $p^{\alpha\beta}$ в виде суммы членов двух других определителей $u^{\alpha\beta}$ и $v^{\alpha\beta}$, а именно:

$$u^{\alpha\beta} = -s^{\alpha\beta\alpha\beta} Q_{\alpha} Q_{\beta} + \delta_{\alpha}^{\beta} \sum_{\gamma} s^{\alpha\gamma\alpha\gamma} Q_{\gamma}^2, \quad v^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} s^{\alpha 4 \alpha 4} Q_4^2.$$

Тогда $|u^{\alpha\beta} + v^{\alpha\beta}| = |p^{\alpha\beta}| = 0$.

Вычисление определителя $|u^{\alpha\beta} + v^{\alpha\beta}|$ не представит трудностей, если принять во внимание, что в определителе $|u^{\alpha\beta}|$ отличны от нуля только члены главной диагонали и что, с другой стороны, определитель $|u^{\alpha\beta}|$ равен нулю. Последнее явствует из того обстоятельства, что если столбцы определителя $|u^{\alpha\beta}|$ помножить соответственно на Q_{β} и затем сложить, то в результате во всех строчках получим нуль. Действительно,

$$\sum_{\beta} u^{\alpha\beta} Q_{\beta} = - \sum_{\beta} s^{\alpha\beta\alpha\beta} Q_{\alpha} Q_{\beta}^2 + \sum_{\beta} \delta_{\alpha}^{\beta} Q_{\beta} \sum_{\gamma} s^{\alpha\gamma\alpha\gamma} Q_{\gamma}^2,$$

или

$$\sum_{\beta} u^{\alpha\beta} Q_{\beta} = - \sum_{\gamma} s^{\alpha\gamma\alpha\gamma} Q_{\alpha} Q_{\gamma}^2 + Q_{\alpha} \sum_{\gamma} s^{\alpha\gamma\alpha\gamma} Q_{\gamma}^2 = 0.$$

Воспользовавшись этими свойствами определителей $|u^{\alpha\beta}|$ и $|v^{\alpha\beta}|$ и разлагая по известным правилам определитель $|u^{\alpha\beta} + v^{\alpha\beta}|$ на сумму восьми определителей, составленных из членов $u^{\alpha\beta}$ и $v^{\alpha\beta}$, получим

$$|p^{\alpha\beta}| = |u^{\alpha\beta} + v^{\alpha\beta}| = v^{11} (u^{22} u^{33} - u^{23} u^{32}) + v^{22} (u^{33} u^{11} - u^{31} u^{13}) + + v^{33} (u^{11} u^{22} - u^{12} u^{21}) + v^{11} v^{22} u^{33} + v^{11} u^{22} v^{33} + u^{11} v^{22} v^{33} + v^{11} v^{22} v^{33} = 0.$$

Вставим сюда значения величин $u^{\alpha\beta}$ и $v^{\alpha\beta}$, выразим затем с помощью уравнения (5) величины $s^{\alpha i \alpha i}$ через μ_{α} и ε_{α} и, наконец, сократим уравнение на не равный нулю общий множитель Q_4^2 . В результате получим следующее уравнение:

$$S Q_1^4 \frac{\varepsilon_1}{\mu_2 \mu_3} + S Q_2^2 Q_3^2 \frac{1}{\mu_3} \left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} + \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \right) - - Q_4^2 S Q_1^2 \varepsilon_1 \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \right) + Q_4^4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 0, \quad (30)$$

где знак S означает сумму членов, получаемых круговой перестановкой индексов 1, 2, 3. Уравнение это представляет собой обоб-

нение формулы Френеля (28) для случая магнитных кристаллов ($\mu \neq 1$). Действительно, выражая с помощью уравнения (25) Q_i через m_α и w , мы получим уравнение, определяющее скорость световой волны w в зависимости от ее направления (m_α). Уравнение это совпадает с соответствующей формулой, выведенной Хевисайдом путем рассуждений совершенно иного характера¹⁰. При $\mu=1$ уравнение (30) сводится к уравнению Френеля (28).

Уравнение (30) можно записать в следующей форме, более удобной для дальнейших рассуждений:

$$\sum_{i, j, h, k} h^{ijhk} Q_i Q_j Q_h Q_k = 0. \quad (30a)$$

Сравнивая уравнение (30) с уравнением (30a), убедимся, что из числа 256 коэффициентов h^{ijhk} отличны от нуля лишь те 16 коэффициентов, для которых одновременно $i=h$ и $j=k$. Значения их удобнее всего записать в виде символической квадратной матрицы, подобной матрице (5):

$$h^{ijhk} = \begin{vmatrix} \frac{\epsilon_1}{\mu_2 \mu_3} & \frac{1}{2\mu_3} \left(\frac{\epsilon_1}{\mu_1} + \frac{\epsilon_2}{\mu_2} \right) & \frac{1}{2\mu_2} \left(\frac{\epsilon_3}{\mu_3} + \frac{\epsilon_1}{\mu_1} \right) & -\frac{\epsilon_1}{2} \left(\frac{\epsilon_2}{\mu_2} + \frac{\epsilon_3}{\mu_3} \right) \\ \frac{1}{2\mu_3} \left(\frac{\epsilon_1}{\mu_1} + \frac{\epsilon_2}{\mu_2} \right) & \frac{\epsilon_2}{\mu_3 \mu_1} & \frac{1}{2\mu_1} \left(\frac{\epsilon_2}{\mu_2} + \frac{\epsilon_3}{\mu_3} \right) & -\frac{\epsilon_2}{2} \left(\frac{\epsilon_3}{\mu_3} + \frac{\epsilon_1}{\mu_1} \right) \\ \frac{1}{2\mu_2} \left(\frac{\epsilon_3}{\mu_3} + \frac{\epsilon_1}{\mu_1} \right) & \frac{1}{2\mu_1} \left(\frac{\epsilon_2}{\mu_2} + \frac{\epsilon_3}{\mu_3} \right) & \frac{\epsilon_3}{\mu_1 \mu_2} & -\frac{\epsilon_3}{2} \left(\frac{\epsilon_1}{\mu_1} + \frac{\epsilon_2}{\mu_2} \right) \\ -\frac{\epsilon_1}{2} \left(\frac{\epsilon_2}{\mu_2} + \frac{\epsilon_3}{\mu_3} \right) & -\frac{\epsilon_2}{2} \left(\frac{\epsilon_3}{\mu_3} + \frac{\epsilon_1}{\mu_1} \right) & -\frac{\epsilon_3}{2} \left(\frac{\epsilon_1}{\mu_1} + \frac{\epsilon_2}{\mu_2} \right) & \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \end{vmatrix}. \quad (31)$$

Члены этой матрицы, стоящие на местах (1, 1), (1, 2), (1, 3) ..., равны соответственно коэффициентам h^{1111} , h^{1212} , h^{1313} ... Все не вошедшие в матрицу коэффициенты h^{ijhk} равны нулю.

При выводе уравнения (30a) мы пользовались координатной системой A . Очевидно, однако, что уравнение это сохранит свою форму также и при переходах к любой другой координатной системе, если только одновременно с координатами мы будем преобразовывать также и коэффициенты h^{ijhk} по правилам преобразования компонент контравариантного тензора IV ранга¹¹ (само собой ра-

¹⁰ O. Heaviside. Electromagnetic Theory, v. II. London, Benn, 1922, p. 522, уравнение (6).

¹¹ Отмечая акцентами величины, измеренные в преобразованной системе координат (x'^i), имеем $Q_i = \frac{\partial x'^p}{\partial x^i} Q'_p$.

Вставляя это в уравнение (30a), получим

$$h^{ijhk} \frac{\partial x'^p}{\partial x^i} \frac{\partial x'^q}{\partial x^j} \frac{\partial x'^r}{\partial x^h} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} Q'_p Q'_q Q'_r Q'_s = 0,$$

или

$$h^{pqrs} Q'_p Q'_q Q'_r Q'_s = 0, \quad (30б)$$

зумеется, что компоненты ковариантного тензора $Q_i = \partial Q / \partial x^i$ тоже должны преобразовываться при этом по правилам тензорного исчисления). Другими словами, уравнение (30а) в любой системе координат приведет к правильной зависимости между компонентами тензора Q_i , если под h^{ijk} мы будем понимать компоненты тензора IV ранга, значения которых в системе A определяются формулой (31). Таким образом, для определения тензора h^{ijk} мы пользуемся системой A в качестве исходной, «натуральной» системы координат.

Можно, однако, определить значение тензора h^{ijk} с помощью основного тензора s^{ijpq} , вовсе не ссылаясь при этом на исходную систему A . С этой целью введем в рассмотрение единичный антисимметричный тензор IV ранга e_{ijkl} . Из компонент этого тензора отличны от нуля лишь те, у которых четыре индекса различны. Компоненты эти равны либо $+1$, либо -1 в зависимости от того, приводится ли порядок индексов i, j, k, l к нормальному порядку 1, 2, 3, 4 четным или нечетным числом транспозиций.

С помощью тензора e_{ijkl} зависимость между тензорами h^{ijk} и s^{ijpq} выражается следующей формулой:

$$h^{qrst} = -\frac{1}{6} (s^{qtsj} s^{rhkl} - s^{qsij} s^{rhkl} + s^{qr ik} s^{shjl}) s^{tmnp} e_{ihkm} e_{jinp}. \quad (32)$$

В справедливости этой формулы для системы A можно убедиться непосредственной подстановкой значений компонент h^{ijk} и s^{ijpq} из уравнений¹² (5) и (31). Так как с обеих сторон уравнения (32) стоят тензоры, то формула (32) останется справедливой при любом преобразовании координат. Таким образом, значение тензора h^{ijk} в любой системе координат вполне определяется заданием тензора s^{ijpq} .

Собственно говоря, последнее утверждение станет справедливым только в том случае, если мы несколько видоизменим уравнение (32). Дело в том, что значения компонент тензора e_{ijkl} не инвариантны: при преобразовании координат численные значения их уменьшаются в J раз, где J — якобиан преобразования (11)

$$e'_{ijkl} = \frac{1}{J} e_{ijkl}. \quad (33)$$

Таким образом, в формуле (32) неявно содержится ссылка на исходную систему A : предполагается, что в этой именно системе

где

$$h^{pqrs} = h^{ijk} \frac{\partial x^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^q}{\partial x^j} \frac{\partial x^r}{\partial x^k} \frac{\partial x^s}{\partial x^l}$$

¹² В уравнении (5) остались не определенными значения членов главной диагонали s_{iii} , однако в уравнении (32) все члены этого типа взаимно уничтожаются.

отличные от нуля компоненты e_{ijk} равны ± 1 . Чтобы избежать этой ссылки на исходную систему, в общей теории относительности принято давать компонентам e_{ijk} инвариантное определение, сводящееся к тому, что отличные от нуля компоненты основного антисимметричного тензора e_{ijk} приравниваются $\pm\sqrt{-g}$, где g — определитель, составленный из ковариантных компонент метрического тензора g_{ij} .

Допустимость такого определения компонент e_{ijk} вытекает из того обстоятельства, что значения $\sqrt{-g}$ преобразуются по тому же правилу, что и численные значения компонент e_{ijk} , а именно

$$\sqrt{-g'} = \frac{1}{J} \sqrt{-g}.$$

Как уже указывалось, мы не имеем права вводить в развиваемую нами макроскопическую теорию «микроскопический» тензор g_{ij} . Мы сможем, однако, дать тензору e_{ijk} инвариантное определение, если введем в рассмотрение определитель *четвертого* измерения \underline{s} , составленный из компонент макроскопического ковариантного тензора *IV ранга* s_{ijpq} . В теории многомерных определителей доказывается, что значение определителя четвертого измерения преобразуется по следующему правилу¹³:

$$\underline{s}' = \frac{1}{J^4} \underline{s}. \quad (33a)$$

Стало быть,

$$\sqrt[4]{\underline{s}'} = \frac{1}{J} \sqrt[4]{\underline{s}}. \quad (33б)$$

Сравнивая формулы (33) и (33б), убедимся, что отличным от нуля компонентам e_{ijk} можно дать инвариантное определение, приравняв их $\pm\sqrt[4]{\underline{s}}$. Мы, однако, приравняем e_{ijk} не $\pm\sqrt[4]{\underline{s}}$, а $\pm\sqrt[4]{\underline{s}/24}$. Мотивы этого выяснятся в дальнейшем¹⁴.

¹³ См., например, *L. Gegenbauer*. Wien. Akad. Denkschr., 1882, 43 (Abth. 2), S. 17; 1883, 46, (Abth. 2), S. 291. Так как измерение рассматриваемого нами определителя четное, то он в противоположность определителям нечетного измерения (например, кубическим) имеет лишь *одно* определенное значение.

Заметим также, что с помощью уравнения (33) третье основное уравнение электродинамики (10а) может быть представлено в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt[4]{\underline{s}/\underline{s}'} f^{ij}) = 0, \quad (10б)$$

где через \underline{s}' обозначено значение определителя \underline{s} в A -системе координат.
¹⁴ Приведем пока лишь чисто формальный довод в пользу такого выбора. В изотропных средах тензор s_{ijpq} является разверткой тензора Π ранга $s_{ijpq} = s_{ip} s_{jq}$ (см. уравнение (7)). В этом случае естественно приравнять e_{ijk} корню из обычного двумерного определителя $\underline{s} = |s_{ip}|$ (по аналогии

Как явствует из уравнения (32), замена прежнего значения $e_{ijhk} = \pm 1$ значением $e_{ijhk} = \pm \sqrt[4]{s/24}$ равносильна помножению компонент тензора h^{ijhk} на $\sqrt[2]{s/24}$. Стало быть, значение h^{ijhk} в системе A уже не будет определяться схемой (31): каждый член этой схемы должен быть помножен на $\sqrt{s/24}$.

Новое определение тензора h^{ijhk} не изменяет наших предшествующих рассуждений, ибо основное наше уравнение (30а) однородно относительно компонент h^{ijhk} , и помножение всех этих компонент на один и тот же множитель $\sqrt{s/24}$ не нарушает его справедливости. С другой стороны, можно показать, что лишь при новом определении тензора h^{ijhk} он приобретает следующее замечательное свойство: *в изотропных средах тензор h^{ijhk} тождественно равен тензору¹⁵ s^{ijhk} .*

Резюмирую результаты этого параграфа. Распространение света в анизотропной среде определяется инвариантным уравнением (30а), где h^{ijhk} суть компоненты тензора IV ранга. Тензор этот является функцией тензора s^{ijhk} и определяется уравнением (32), в котором под e_{ijhk} следует понимать полный антисимметричный тензор, отличные от нуля компоненты которого равны $\pm \sqrt[4]{s/24}$. В системе A компоненты тензора h^{ijhk} равны помноженным на $\sqrt{s/24}$ членам схемы (31).

§ 6. Двойное лучепреломление и биквадратичная геометрия

Уравнение $Q = \text{const}$ определяет собой волновые поверхности (поверхности равной фазы). Распространение световых волн происходит по мировым линиям, перпендикулярным этим поверхностям, т. е. по линиям, определяемым уравнением

$$dx_i = \lambda \text{grad}_i Q = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x^i}, \quad (34)$$

где λ — фактор пропорциональности. Вставляя это в уравнение (30а), получим уравнение световых линий

$$h^{ijpq} dx_i dx_j dx_p dx_q = 0. \quad (35)$$

Как известно, в вакууме свет распространяется по нулевым линиям¹⁶, уравнение которых имеет вид

$$ds^2 = g^{ij} dx_i dx_j = 0, \quad (35а)$$

где g^{ij} суть компоненты метрического тензора.

$c \sqrt{-g}$). Но в изотропных телах $s = 24 (-s)^2 = 4! (-s)^2$; стало быть, $\sqrt{-s} = \sqrt[4]{s/24}$.

¹⁵ См. Приложение.

¹⁶ Вопрос о геодезичности световых линий оставляем пока в стороне.

Полная аналогия последних двух уравнений позволяет дать уравнениям (35) следующее формальное истолкование.

В материальной среде, как и в вакууме, свет распространяется по нулевым линиям. Уравнение (35) равносильно уравнению $ds=0$. Стало быть, метрическим тензором материальной среды является тензор IV ранга h^{ijhk} . Иными словами, в материальной среде элемент длины определяется следующим выражением:

$$ds^4 = h^{ijhk} dx_i dx_j dx_k dx_h = h_{ijhk} dx^i dx^j dx^k dx^h. \quad (36)$$

Положения эти носят, конечно, формальный характер и по существу являются определениями. В защиту их можно, однако, привести ряд доводов.

Значения компонент метрического тензора g^{ij} в вакууме могут быть найдены из тройного рода измерений: оптических (основывающихся на уравнении (35а)), механических (движение свободной материальной точки) и непосредственных метрических (поведение масштабов и часов). В материальной среде оба последних способа не применимы. «Геометризовать» макроскопическую теорию материальной среды можно только «оптическим» способом. Другими словами, единственный путь для перенесения методов общей теории относительности в теорию материальной среды заключается в том, чтобы определить метрический тензор из условия нулевой длины световых линий. Между тем перенесение в кристаллооптику, а затем и в общую электродинамику хорошо разработанных геометрических методов чрезвычайно облегчает дальнейшее развитие теории.

Наконец, как мы убедимся в дальнейшем, наше предположение об эквивалентности уравнения (35) уравнению $ds=0$ непосредственно приводит к ряду физически интересных следствий, правильность которых может быть подтверждена совершенно независимо от только что высказанной гипотезы.

Итак, мы будем считать, что элемент длины определяется в материальной среде формулой (36). Основное отличие этой формулы от обычной

$$ds^2 = g^{ij} dx_i dx_j = g_{ij} dx^i dx^j \quad (36a)$$

заключается в том, что элемент длины определяется не квадратичной, а *биквадратичной* формой в дифференциалах координат. Это обстоятельство можно было бы предвидеть а priori, ибо физически оно соответствует наличию в кристаллах *двойного лучепреломления*; каждому пространственному направлению (dx^1, dx^2, dx^3) соответствуют не два ($\pm w$), а четыре ($\pm w_1, \pm w_2$) возможных значения скорости света, удовлетворяющих уравнению четвертой степени $ds=0$ ¹⁷.

¹⁷ В общем случае различные значения скорости света отличаются не только знаками, но и по абсолютной величине.

Очевидно, что в случае отсутствия двойного лучепреломления, т. е. в случае изотропии, элемент длины по-прежнему должен определяться не биквадратичной, а квадратичной формой в дифференциалах координат. Действительно, в предыдущем параграфе уже упоминалось, что в изотропных средах $h^{ijhk} \equiv s^{ijhk}$; с другой стороны, в этом случае тензор IV ранга s^{ijpq} сводится к развертке тензора II ранга s^{ip} (см. уравнение (7)). Стало быть, уравнение (35) принимает следующий вид:

$$ds^4 = s^{ih}s^{jk} dx_i dx_h dx_j dx_k = (s^{ih} dx_i dx_h)^2,$$

или

$$ds^2 = s^{ih} dx_i dx_h, \tag{36б}$$

что и требовалось доказать.

Итак, «натуральная» геометрия анизотропной среды есть геометрия биквадратичной формы, представляющая собой непосредственное обобщение римановой геометрии квадратичной формы. Легко понять, что необходимость в таком обобщении может возникнуть лишь в теории анизотропной среды. Действительно, еще Гельмгольц показал, что квадратичная геометрия есть единственная геометрия, в которой твердое тело сохраняет три степени свободы вращения вокруг неподвижной точки. Поскольку общая теория относительности ограничивается, по существу, рассмотрением физических процессов в вакууме, постольку она исходит из постулата свободы вращения твердого тела (бесконечно малых размеров). Очевидно, однако, что постулат этот основывается, в сущности, на более общем предположении об изотропии пространства. Нет никакого основания предполагать, что свобода вращения твердого тела сохраняется и в анизотропном пространстве; скорее, наоборот, мы должны отвергнуть такую возможность. Наличие двойного лучепреломления однозначно решает вопрос в пользу биквадратичной геометрии.

§ 7. Волна и луч

Уравнение нулевой линии $ds=0$ может быть записано либо в контра-, либо в ковариантных координатах. В предыдущем мы убедились, что в первом случае оно определяет линии распространения световых волн. Каков же физический смысл уравнения

$$ds^4 = h_{ijhk} dx^i dx^j dx^h dx^k = 0, \tag{37}$$

записанного в контравариантных координатах dx^i ?

Если основные положения предыдущего параграфа правильны, то это уравнение тоже должно определять линии распространения света. Чтобы разобраться в этом вопросе, выразим дифференциалы контравариантных координат через скорость световых лучей и

направляющие косинусы l^α :

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dx^4}\right)^2},$$

или

$$\frac{dx^\alpha}{dx^4} = l^\alpha v, \quad \sum_\alpha (l^\alpha)^2 = 1, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (38)$$

Допустимость и правильность такой интерпретации дифференциалов координат будет обоснована в следующем параграфе; пока же я ограничусь ссылкой на Эйнштейна, который пользуется уравнениями (38) в своей статье об «Основах общей теории относительности»¹⁸.

Чтобы раскрыть физический смысл уравнения (37), нам нужно еще определить значения *ковариантных* компонент тензора h_{ijk} . Контравариантные компоненты h^{ijk} этого тензора определяются посредством тензоров s^{ijpq} и e_{ijkl} с помощью уравнения (32). Чтобы получить ковариантные компоненты h_{ijk} , нужно, очевидно, заменить с обеих сторон этого уравнения верхние индексы на нижние и обратно. Если мы воспользуемся координатной системой A , то ввиду уравнений (6) и (5) замена s^{ijpq} на s_{ijpq} сведется к замене в окончательном результате величин μ_α и ε_α на обратные им величины $1/\mu_\alpha$ и $1/\varepsilon_\alpha$.

Производя эту замену в схеме (31), получим

$$h_{ijk} = \begin{vmatrix} \frac{\mu_2 \mu_3}{\varepsilon_1} & \frac{\mu_3}{2} \left(\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \right) & \frac{\mu_2}{2} \left(\frac{\mu_3}{\varepsilon_3} + \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right) & -\frac{1}{2\varepsilon_1} \left(\frac{\mu_2}{\varepsilon_2} + \frac{\mu_3}{\varepsilon_3} \right) \\ \frac{\mu_3}{2} \left(\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \right) & \frac{\mu_3 \mu_1}{\varepsilon_2} & \frac{\mu_1}{2} \left(\frac{\mu_2}{\varepsilon_2} + \frac{\mu_3}{\varepsilon_3} \right) & -\frac{1}{2\varepsilon_2} \left(\frac{\mu_3}{\varepsilon_3} + \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right) \\ \frac{\mu_2}{2} \left(\frac{\mu_3}{\varepsilon_3} + \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right) & \frac{\mu_1}{2} \left(\frac{\mu_2}{\varepsilon_2} + \frac{\mu_3}{\varepsilon_3} \right) & \frac{\mu_1 \mu_2}{\varepsilon_3} & -\frac{1}{2\varepsilon_3} \left(\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \right) \\ -\frac{1}{2\varepsilon_1} \left(\frac{\mu_2}{\varepsilon_2} + \frac{\mu_3}{\varepsilon_3} \right) & -\frac{1}{2\varepsilon_2} \left(\frac{\mu_3}{\varepsilon_3} + \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right) & -\frac{1}{2\varepsilon_3} \left(\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \right) & \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} \end{vmatrix}. \quad (39)$$

Схема эта, подобно схеме (31), дает значения компонент h_{ijk} в координатной системе A вплоть до общего множителя, который для h^{ijk} равен $\sqrt{\bar{s}/24}$, а для h_{ijk} соответственно равняется $\sqrt{\bar{s}/24}$. Здесь \bar{s} обозначает четырехмерный определитель, составленный из контравариантных компонент s^{ijpq} .

Вставляя значения h_{ijk} и dx^α/dx^4 из (38) и (39) в уравнение

¹⁸ Ann. Phys., 1916, 49, 821 (см. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов, т. 1. М., «Наука», 1965, стр. 452.— Прим. ред.).

нулевой линии (37), мы приходим к следующему уравнению:

$$v^4 S (l^1)^4 \frac{\mu_1 \mu_3}{\epsilon_1} + v^4 S (l^1 l^2)^2 \mu_3 \left(\frac{\mu_1}{\epsilon_1} + \frac{\mu_2}{\epsilon_2} \right) - v^2 S (l^1)^2 \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{\mu_2}{\epsilon_2} + \frac{\mu_3}{\epsilon_3} \right) + \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3} = 0, \quad (40)$$

где знак S означает сумму членов, получаемых круговой перестановкой индексов 1, 2, 3.

Формула (40) вполне совпадает с формулой, определяющей скорость распространения светового луча в магнитных кристаллах¹⁹ и представляет собой обобщение известной формулы элементарной кристаллооптики для случая $\mu \neq 1$.

В этом обстоятельстве заключается первое подтверждение основных предположений предыдущего параграфа. Если не считать тензор h метрическим тензором материальной среды, то нет никаких оснований предполагать, что между (35) и (37) существует столь тесная физическая связь, особенно если принять во внимание тот способ, с помощью которого нами были определены значения ковариантных компонент тензора h .

Итак, уравнение нулевой линии (37) в контравариантных координатах определяет собой распространение светового луча, тогда как уравнение нулевой линии (35) в ковариантных координатах описывает распространение световой волны. Существенное значение имеет при этом то обстоятельство, что ко- и контравариантные дифференциалы координат интерпретируются нами совершенно различным образом: для ковариантных координат мы пользовались уравнениями (25) и (34), которые могут быть записаны в следующей форме:

$$\frac{dx_\alpha}{dx_4} = \frac{Q_\alpha}{Q_4} = -\frac{m_\alpha}{w}, \quad \sum_\alpha (m^\alpha)^2 = 1, \quad (41)$$

где w есть скорость волны, а m_α — ее направляющие косинусы. С другой стороны, уравнения (38) имеют вид

$$\frac{dx^\alpha}{dx^4} = l^\alpha v, \quad \sum_\alpha (l^\alpha)^2 = 1, \quad (41 \text{ а})$$

где v есть скорость луча, а l^α — его направляющие косинусы.

Естественно возникает вопрос: насколько совместимы и обоснованны столь различные интерпретации величин dx^i и dx_i ? Ведь уравнения (41) были выведены только для координатной системы A , да и то в том предположении, что она является декартовой системой. Но теперь, когда мы определили элемент длины формулой (36), мы уже не имеем права считать систему A декартовой. Далее,

¹⁹ См. *E. Cohn*. Das Elektromagnetische Feld. Leipzig, S. Hirzel, 1900, S. 570 (уравнение (37b)). Термин Кона «Wellenfläche» соответствует нашему термину «лучевая поверхность» (см. дальше).

уравнения (38) несомненно справедливы для декартовой системы. Но применимы ли они и в любой координатной системе? Наконец, уравнения (35) и (37) представляют собой, в сущности, лишь различные формы записи *одного и того же* уравнения $ds=0$. Каким же образом может *одно и то же* уравнение определять собой столь различные вещи, как распространение волны и распространение луча?

Чтобы разобраться в этих вопросах, припомним, в каких именно случаях возникает отличие между скоростью луча v и скоростью волны w .

Величины v и w могут быть определены двумя различными способами. С одной стороны, можно исходить из уравнения волны (уравнение (14)). Положим, что поверхность волны $Q=\text{const}$ в два последовательных момента времени t_1 и t_2 совпадает с поверхностями P_1 и P_2 . Если промежуток времени t_2-t_1 равен 1 *сек*, то скорость волны будет численно равняться длине отрезка нормали к поверхностям P_1 и P_2 , заключенного между этими поверхностями. С другой стороны, скорость луча численно равняется длине заключенного между этими поверхностями отрезка прямой, направление которой совпадает с направлением потока энергии. Различие между скоростью луча и скоростью волны возникает в том и только в том случае, если направление потока энергии не перпендикулярно поверхностям волны.

Искомые скорости v и w могут быть также определены путем исследования так называемой *лучевой* поверхности, т. е. геометрического места точек, освещенных в момент t световым импульсом, посланным из начала координат в момент t_0 . Пусть в два последовательных момента времени t_1 и t_2 лучевая поверхность совпадает соответственно с поверхностями P_1 и P_2 . Если промежуток времени t_2-t_1 равен 1 *сек*, то скорость луча будет численно равняться длине отрезка радиус-вектора, заключенного между поверхностями P_1 и P_2 . Кроме того, скорость волны численно равняется длине отрезка нормали, заключенного между касательными плоскостями к поверхностям P_1 и P_2 . Скорость волны отличается от скорости луча в том и только в том случае, если направление нормали к лучевой поверхности не совпадает с направлением радиус-вектора этой поверхности.

Таким образом, задача определения скоростей v и w сводится к задаче построения нормали к заданной поверхности P . Понятие же нормали имеет смысл только при задании определенного мероопределения, определенной геометрии.

Исходя из этих положений, можно дать следующий ответ на поставленные выше вопросы.

1. В натуральной геометрии, пользующейся инвариантным определением элемента длины, нормаль к лучевой поверхности всегда совпадает с направлением радиус-вектора этой поверхности, а нормаль к поверхности волны — с направлением потока энергии. Поэтому $v=w$, разницы между законами распространения световых

волн и законами распространения световых лучей нет, и оба явления описываются одним и тем же уравнением $ds=0$.

2. Разница между волной и лучом возникает лишь в том случае, если в недекартовой системе координат пользоваться декартовым (или каким-либо другим неинвариантным) мероопределением.

Естественно, что при этом контравариантные римановы координаты непосредственно отождествляются с декартовыми координатами (согласно уравнению (41а)). Что же касается ковариантных координат, то в декартовой геометрии они не имеют непосредственного геометрического значения. Нетрудно, однако, убедиться, что при рассмотрении законов распространения света дифференциалы ковариантных координат должны интерпретироваться согласно нашим уравнениям (41). Действительно, внутри бесконечно малой области волновой множитель $e^{\sqrt{-1}Q}$ всегда может быть представлен в следующем виде:

$$e^{\sqrt{-1}Q} = e^{\sqrt{-1}(Q)_0} e^{\sqrt{-1}Q_i dx^i},$$

где $(Q)_0 = \text{const}$.

Отождествляя множитель $e^{\sqrt{-1}Q_i dx^i}$ с волновым множителем плоской волны в декартовом пространстве $e^{\sqrt{-1} \frac{2\pi}{\lambda} (xt - m_a x^a)}$, мы сможем повторить все те рассуждения, которые привели нас в § 4 и 5 к уравнениям (25) и (41).

3. Мы утверждаем, что если из инвариантного уравнения $ds=0$, записанного в контравариантных (либо в ковариантных) координатах, исключить эти координаты с помощью соотношений (41а) (либо (41)), то полученное таким образом уравнение будет равносильно декартову уравнению лучевой либо, во втором случае, волновой²⁰ поверхности. Чтобы доказать правильность этого утверждения, нам остается еще показать, что между определенными таким образом поверхностями существует надлежащее геометрическое соотношение, сводящееся к тому, что волновая поверхность есть геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра лучевой поверхности на касательные плоскости к последней.

Чтобы доказать правильность перечисленных утверждений, я обращусь к оптике гравитационного поля в вакууме, в котором ведь также с декартовой точки зрения существует анизотропия пространства, а стало быть, и разница между световым лучом и световой волной. Все результаты, к которым приведет нас рассмотрение этого более простого случая, могут быть непосредственно перенесены и в оптику материальной среды.

²⁰ По определению, длина радиус-вектора волновой поверхности в заданном направлении равна скорости плоской волны, распространяющейся в том же направлении.

§ 8. Оптика гравитационного поля

Хотя уравнение световых линий в вакууме и общеизвестно, я все же приведу здесь вкратце вывод этого уравнения, придерживаясь способа, изложенного в § 3.

В вакууме связь между тензорами F_{ij} и f^{ij} устанавливается с помощью метрического тензора g_{ij}^{21}

$$f^{jq} = g^{ip} g^{jq} F_{pq}.$$

Уравнения (14) и (15) остаются в силе, уравнение (16) принимает вид

$$f^{ij} = \sqrt{-1} g^{ip} g^{jq} (A_p Q_q - A_q Q_p) e^{\sqrt{-1} \varrho}, \quad (16a)$$

а уравнение (17) в раскрытой форме запишется (по сокращении на $\sqrt{-1} e^{\sqrt{-1} \varrho}$) следующим образом:

$$g^{ip} g^{jq} (A_p Q_q - A_q Q_p) Q_j = 0. \quad (17a)$$

Помножая эти уравнения соответственно на g_{ik} и суммируя по i , получим (ввиду $g^{ip} g_{ik} = \delta_k^p$)

$$A_k (g^{jq} Q_q Q_j) - Q_k (g^{jq} A_q Q_j) = 0.$$

Эти четыре уравнения могут одновременно удовлетворяться лишь в одном из следующих двух случаев: либо A_k должны быть пропорциональны Q_k , либо одновременно должны удовлетворяться равенства

$$g^{jq} Q_q Q_j = 0, \quad g^{jq} A_q Q_j = 0. \quad (42)$$

Первое невозможно (см. (23a)); стало быть, справедливы уравнения (42).

Изложенный вывод уравнений (42) отличается от известных мне выводов (например, Лауэ, Эддингтона и т. д.) тем, что указанные авторы не доказывают, а *постулируют* справедливость второго из уравнений (42), или, вернее, эквивалентного ему уравнения $\text{div } \Phi_i = 0$, где Φ_i — тензор потенциала.

Вводя в уравнение (42) вместо Q_j дифференциалы координат световой линии (см. уравнение (34)), получим окончательно

$$g^{jk} dx_j dx_k = 0. \quad (43)$$

То же уравнение в контравариантных координатах запишется следующим образом:

$$g_{jk} dx^j dx^k = 0. \quad (43a)$$

С точки зрения римановой геометрии уравнения (43) и (43a) тождественны. Об анизотропии пространства не может быть и речи хотя бы потому, что надлежащим преобразованием координат

²¹ Таким образом, в вакууме (в отличие от материальной среды) величины F_{ij} и f^{ij} являются компонентами *одного и того же* тензора.

выражение элемента длины всегда может быть сведено к сумме квадратов дифференциалов ²².

Напротив, в экспериментальной физике всегда пользуются декартовой геометрией, и всякое отступление от декартовых соотношений объясняется воздействием внешних (гравитационных) сил. Так, например, в гравитационном поле *координатная* скорость света зависит от направления распространения. Экспериментальная физика ищет объяснения этому факту в создаваемой гравитационными силами анизотропии пространства. Наличие анизотропии, в свою очередь, обуславливает возникновение различия между скоростью волны и скоростью луча.

Перейдем теперь к доказательству положений, изложенных в конце предыдущего параграфа. Для упрощения предположим, что в избранной нами системе координат время перпендикулярно пространству, т. е. что $g_{14}=g_{24}=g_{34}=0$. Условие это влечет за собой, как известно, справедливость следующего равенства:

$$g^{44} = 1/g_{44}. \quad (44)$$

Кроме того, для упрощения записи мы опустим в уравнениях (43) и (43а) знаки дифференциалов перед координатами x^i и x_i , ограничиваясь, однако, при этом бесконечно малой областью изменения координат, т. е. областью, внутри которой значения компонент g_{ij} можно считать постоянными.

Уравнение лучевой поверхности $G(x^\alpha)$ получится из уравнения (43а) при условии $t=x^4=\text{const}$:

$$G(x^\alpha) = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + g_{44} t^2 = 0, \quad t = \text{const}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (45)$$

Из произвольной точки (x^α) поверхности $G(x^\alpha)$ проведем пространственный отрезок, слагающие которого обозначим через ξ^α . Отрезок этот будет лежать в касательной плоскости к рассматриваемой поверхности в том случае, если $(\partial G/\partial x^\alpha)\xi^\alpha=0$, т. е. если $g_\alpha x^\beta \xi^\alpha=0$. Равенство это показывает, что радиус-вектор (x^α) лучевой поверхности G с точки зрения римановой геометрии всегда перпендикулярен этой поверхности ²³, что совпадает с первой частью утверждения 1, высказанного нами в прошлом параграфе.

Далее, направление потока энергии определяется слагающими T^k_α тензора энергии и импульса T^k_i . В электромагнитном поле тензор T^k_i определяется равенством

$$T^k_i = F_{,r} f^{kr} - \frac{1}{4} \delta^k_i F_{,rs} f^{rs}.$$

²² Напротив, если элемент длины определяется биквадратичной формой в дифференциалах координат, то анизотропия пространства носит существенный характер, и не может быть устранена путем преобразования координат.

²³ Ибо он перпендикулярен любой из касательных к этой поверхности.

Выражая F_{rs} и f^{rs} через A_i и Q_i с помощью уравнений (15) и (16а) и принимая во внимание уравнения (42), убедимся, что в поле световой волны второй член и три слагающие первого члена правой части этого равенства равны нулю. Опуская несущественный для нас волновой множитель $e^{v^{-1}Q}$, получим $T_i^k = g^{kp} Q_p g^{rs} A_r A_s Q_i$. Таким образом, $T_\alpha^1 = \lambda Q_\alpha$, где λ — множитель пропорциональности.

С другой стороны, направление нормали к поверхности волны определяется соотношением $dx_\alpha = \lambda \text{grad}_\alpha Q = \lambda Q_\alpha$. Стало быть, направление потока энергии в поле световой волны совпадает с направлением нормали к поверхности волны. Таким образом, нами доказана и вторая часть нашего утверждения 1.

Перейдем теперь к доказательству утверждения 3. С этой целью станем на точку зрения декартовой геометрии, отождествим контравариантные римановы координаты x^i с декартовыми и найдем геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра лучевой поверхности (45) на касательные плоскости к этой поверхности.

Касательная плоскость к лучевой поверхности $G(x^\alpha) = 0$ определяется уравнением

$$\frac{\partial G}{\partial x^\alpha} (X^\alpha - x^\alpha) = 0,$$

где X^α суть текущие координаты касательной плоскости, а x^α — координаты точки касания.

Из (45) получаем

$$\frac{\partial G}{\partial x^\alpha} = 2g_{\alpha\beta} x^\beta.$$

Подставляя в предыдущее уравнение, найдем

$$g_{\alpha\gamma} X^\alpha x^\beta - g_{\alpha\gamma} x^\alpha x^\beta = 0$$

или на основании уравнения (45)

$$g_{\alpha\beta} X^\alpha x^\beta + g_{44} t^2 = 0.$$

Для упрощения записи введем обозначения²⁴

$$x_\alpha = g_{\alpha\gamma} x^\gamma, \quad a = g_{44} t^2, \quad (46)$$

с помощью которых уравнение касательной плоскости приводится к виду $X^\alpha x_\alpha + a = 0$.

Координаты ξ^α основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, определяются, как известно,

²⁴ Так как мы пользуемся декартовой геометрией, то величины x_α не могут, конечно, считаться ковариантными координатами. Введенные нами обозначения несут чисто формальный характер.

уравнением

$$\xi^\alpha = -\frac{ax_\alpha}{\sum_\beta x_\beta^2}.$$

Чтобы найти уравнение, связывающее между собой величины ξ^α и t , образуем выражение

$$\sum_{\sigma\beta} g^{\alpha\beta} \xi^\sigma \xi^\beta = \frac{a^2 g^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{\left(\sum_\beta x_\beta^2\right)^2}.$$

На основании уравнений (45) и (46) легко получим

$$g^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = -a.$$

Стало быть,

$$\sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta = \frac{-a^3}{\left(\sum_\beta x_\beta^2\right)^2}.$$

С другой стороны, длина искомого перпендикуляра определяется формулой

$$r^2 = \sum_\alpha (\xi^\alpha)^2 = \frac{a^2 \sum_\alpha x_\alpha^2}{\left(\sum_\beta x_\beta^2\right)^2} = \frac{a^2}{\sum_\beta x_\beta^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta = -r^4/a,$$

или

$$\sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta + \frac{r^4}{g_{44} t^2} = 0.$$

Разделяя обе части этого уравнения на r^2 , вводя обозначения для скорости волны $w=r/t$ и для направляющих косинусов $m_\alpha = \xi^\alpha/r$ и, наконец, выражая с помощью уравнения (44) g_{44} через g^{44} , получим уравнение искомой (волновой) поверхности в следующей форме:

$$g^{\alpha\beta} m_\alpha m_\beta + g^{44} w^2 = 0. \quad (47)$$

Легко убедиться, что к такому же самому уравнению приведет нас и уравнение нулевой линии (43), если мы исключим из него дифференциалы ковариантных координат с помощью соотношений (41).

Таким образом, уравнения лучевой и волновой поверхности, получаемые из уравнения $ds=0$ указанным в предыдущем параграфе способом, действительно находятся между собой в надлежащем геометрическом соотношении ²⁵.

²⁵ Внутри области, достаточно малой для того, чтобы значения компонент g_{ij} можно было считать постоянными, римановы координаты сводятся к косо-

Итак, все утверждения, высказанные нами в конце прошлого параграфа, доказаны нами для случая распространения света в гравитационном поле в вакууме. В настоящей статье мы не станем останавливаться на доказательствах этих утверждений для более сложного случая распространения света в анизотропной материальной среде и ограничимся предположением, что упомянутые утверждения, справедливые в квадратичной геометрии, остаются справедливыми также и в геометрии биквадратичной.

§ 9. Третий основной тензор биквадратичной геометрии

В квадратичной геометрии между ко- и контравариантными компонентами одного и того же тензора, по определению, существуют хорошо известные соотношения, устанавливаемые с помощью метрического тензора.

В частности, как известно, $dx_i = g_{ij} dx^j$ и $dx^i = g^{ij} dx_j$. Подобного же рода соотношения должны существовать и в биквадратичной геометрии. Однако соотношения эти не могут быть установлены ни с помощью метрического тензора h , ни с помощью тензора s , ибо тензор, выполняющий роль «передвиателя индексов», должен удовлетворять следующим двум условиям:

1) он должен быть тензором II ранга, так как в противном случае переход от контравариантных компонент произвольного тензора T к ковариантным (и обратно) сопровождался бы изменением ранга тензора T (в частности, это относилось бы к дифференциалам координат dx^i и dx_i);

2) компоненты тензора — «передвиателя индексов» (обозначим их через k_{ij} и k^{ij}) — должны удовлетворять соотношениям

$$k_{jk} k^{ij} = \delta_k^i, \quad (48)$$

что следует хотя бы из того, что равенства $dx^i = k^{ij} dx_j = k^{ij} k_{jk} dx^k$ должны удовлетворяться тождественно при произвольных значениях дифференциалов dx^i .

Может показаться, что роль «передвиателя индексов» чисто условная и что ее может выполнять любой тензор II ранга, удовлетворяющий условиям (48). Однако это не совсем так. Необходимо, чтобы замена контравариантных дифференциалов dx^i на ковариантные (и обратно) переводила выражение элемента длины

угольным декартовым координатам (с различными масштабами длины вдоль каждой из координатных осей). В косоугольных системах координат ковариантные координаты равны проекциям радиус-вектора на координатные оси. С другой стороны, скорость волны равна проекции скорости луча на нормаль к плоскости волны. Аналогия очевидна и может служить подтверждением наших уравнений (41).

$ds^4 = h_{ijkl} dx^i dx^j dx^k dx^l = h^{ijkl} dx_i dx_j dx_k dx_l$, из первой формы во вторую (и обратно). Стало быть, необходимо, чтобы ²⁶

$$h_{ijkl} = k_{ip} k_{jq} k_{kr} k_{ls} h^{pqrs}. \quad (49)$$

Ввиду того что значения ко- и контравариантных компонент метрического тензора h нам известны из предыдущего, мы можем с помощью уравнения (49) определить значения компонент тензора k . Ряд несложных выкладок приводит к следующим значениям этих компонент в координатной системе A ²⁷:

$$k_{ij} \sqrt{\frac{\bar{s}}{s}} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{\mu_2 \mu_3}{\varepsilon_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\mu_3 \mu_1}{\varepsilon_2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{\varepsilon_3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}} \end{vmatrix}. \quad (50)$$

Путем аналогичных рассуждений нетрудно убедиться, что значения контравариантных компонент тензора k^{ij} получаются из схемы (50) заменой величин ε_α и μ_α на обратные им величины $1/\varepsilon_\alpha$ и $1/\mu_\alpha$ и заменой \bar{s} на s и обратно. Легко также убедиться, что тензор k удовлетворяет условию (48).

Итак, в биквадратичной геометрии нужно различать три основных тензора: s , h и k . Тензор IV ранга s устанавливает зависимость между электромагнитными тензорами F_{ij} и f^{ij} . Тензор IV ранга h определяет собой элемент длины. Тензор II ранга k выполняет роль «передвигателя индексов» по отношению ко всем тензорам, кроме тензора s . В квадратичной же геометрии все различные функции эти выполняются одним и тем же тензором g .

Очевидно, что в изотропных средах, в которых господствует квадратичная геометрия, все три тензора s , h и k должны сводиться к одному и тому же тензору II ранга, аналогичному тензору g . Действительно, еще в § 2 было отмечено, что в изотропных средах тензор IV ранга $s_{ijkl}(s^{ijkl})$ сводится к развертке тензора II ранга $s_{ij}(s^{ij})$ (см. уравнение (7)).

²⁶ В отличие от тензора h , компоненты тензора s связаны аналогичным уравнению (48) соотношением (4). Соотношению типа (49) компоненты s^{ijkl} и s_{ijkl} не удовлетворяют.

²⁷ Уравнения (49) недостаточны для определения знаков при компонентах k_{ij} . Знаки при k_{ij} были выбраны нами по аналогии со знаками при компонентах g_{ij} и s_{ij} .

С другой стороны, в § 6 указывалось, что в изотропной среде $h_{ijhk} = s_{ijhk} = s_{ih} s_{jk}$ и что, таким образом, в этом случае элемент длины определяется уравнением (36 б): $ds^2 = s_{ij} dx^i dx^j$.

Наконец, в изотропной среде, как будет доказано в Приложении, имеют место следующие соотношения:

$$\bar{s} = 24s^2 = 24 \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} \quad \text{и} \quad \underline{s} = 24s^2 = 24 \frac{\mu^2}{\varepsilon^2},$$

ввиду чего, как легко убедиться, компоненты тензора k_{ij} в изотропной среде равны компонентам тензора s_{ij} . Таким образом, в изотропной среде тензор s_{ij} выполняет все три перечисленные выше функции метрического тензора g_{ij} . Очевидно, что при постепенном разрежении среды и переходе к вакууму тензор s_{ij} становится тождественным тензору g_{ij} .

Упомянем еще, что заданием тензора s однозначно определяются значения остальных основных тензоров биквадратичной геометрии. Так, например, если заданы значения компонент s_{ijhk} , то с помощью уравнения (4) можно определить компоненты s^{ijhk} , а с помощью уравнений (32) — компоненты h_{ijhk} и h^{ijhk} . Наконец, с помощью уравнений (48) и (49) можно вычислить значения компонент тензора k . К сожалению, мне не удалось найти соотношения, устанавливающего непосредственную связь между тензорами s и k .

Дальнейшее развитие теории связано с разрешением ряда интересных физических и математических задач. Так, например, надо думать, что последовательное развитие теории позволит однозначно определить форму электромагнитного тензора энергии и импульса в материальной среде и тем устранит существующие по этому вопросу разногласия²⁸. Распространение теории на *неоднородные* анизотропные среды связано с нахождением уравнений геодезических линий в биквадратичной геометрии. Быть может, изложенные выше физические соображения смогут также облегчить разрешение чисто математической задачи — разыскания законов биквадратичной геометрии. Так, например, соображения, изложенные в конце § 7, заставляют предположить, что выражение, определяющее собой косинус угла между двумя заданными направлениями, должно быть таково, что поверхность, определяемая уравнением $ds=0$ при $x^i = \text{const}$, всегда оказывается перпендикулярной своему радиус-вектору.

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю признательность проф. Л. И. Мандельштаму за ряд ценных указаний и советов, помогших мне при выполнении настоящей работы.

²⁸ См. *W. Pauli. Relativitätstheorie. Leipzig, 1921, § 35* (имеется перевод: *В. Паули. Теория относительности. М.—Л., ГИТТЛ, 1947.— Прим. ред.*).

Приложение

Докажем, что в изотропной среде метрический тензор h_{ijkl} тождественно равняется развертке тензора Π ранга s_{ij} .

Как известно, четырехмерный определитель \mathfrak{s} может быть представлен в следующем виде:

$$\mathfrak{s} = (s_{ijkl}) = \varepsilon^{i_1 i_2 i_3 i_4} \varepsilon_{j_1 j_2 j_3 j_4} h_1 h_2 h_3 h_4 s_{1 i_1 j_1 h_1} s_{2 i_2 j_2 h_2} s_{3 i_3 j_3 h_3} s_{4 i_4 j_4 h_4},$$

где через ε^{ijkl} обозначен антисимметричный тензор IV ранга, отличные от нуля компоненты которого равны ± 1 . В изотропной среде ввиду равенства (7) $s_{ijkl} = s_{ih} s_{jk}$ получим

$$\mathfrak{s} = (\varepsilon^{j_1 j_2 j_3 j_4} s_{1 j_1} s_{2 j_2} s_{3 j_3} s_{4 j_4}) (\varepsilon^{i_1 i_2 i_3 i_4} h_1 h_2 h_3 h_4 s_{i_1 h_1} s_{i_2 h_2} s_{i_3 h_3} s_{i_4 h_4})$$

или $\mathfrak{s} = (s) (4! \mathfrak{s}) = 24 \mathfrak{s}^2$, где $\mathfrak{s} = |s_{ij}|$.

Согласно § 5 компоненты тензора ε_{ijkl} , входящего в формулу (32), имеют следующие значения:

$$e_{ijkl} = \sqrt{\frac{4\mathfrak{s}}{24}} \varepsilon_{ijkl}.$$

В изотропной среде равенство это принимает следующий вид:

$$e_{ijkl} = \sqrt{4\mathfrak{s}^2} \varepsilon_{ijkl} = \sqrt{(-\mathfrak{s})} \varepsilon_{ijkl}$$

(под знак корня введен знак «минус», ибо $\mathfrak{s} < 0$).

Таким образом, в изотропной среде уравнение (32) принимает следующий вид:

$$h^{qrst} = -\frac{1}{6} (\sqrt{-\mathfrak{s}})^2 \{s^{qs} s^{ij} s^{rk} s^{hl} - s^{qi} s^s j s^{rk} s^{hl} + s^{qi} s^{rk} s^s j s^{hl}\} s^{tn} s^{mp} \varepsilon_{ihkm} \varepsilon_{jlnp}.$$

Последние два члена стоящей в скобках суммы взаимно сокращаются, ввиду чего равенство это может быть записано следующим образом:

$$h^{qrst} = \frac{1}{6} \mathfrak{s} s^{qs} s^{rk} s^{tn} \{ \varepsilon_{ihkm} \varepsilon_{jlnp} s^{ij} s^{hl} s^{mp} \}.$$

Легко убедиться, что выражение в скобках представляет собой помноженный на $3!$ ($=6$) адьюнкт определителя $\bar{s} = |s^{ij}|$, соответствующий члену²⁹ s^{kn} . Адьюнкт этот, как известно, равен помноженной на определитель \bar{s} ковариантной компоненте тензора s_{kn} . Таким образом,

$$h^{qrst} = \frac{1}{6} \mathfrak{s} s^{qs} s^{rk} s^{tn} 6 s_{kn} \bar{s}.$$

Так как $\bar{s} \mathfrak{s} = 1$ и $s^{rk} s^{tn} s_{kn} = s^{rt}$ (в виду уравнения (4а)), то окончательно получаем

$$h^{qrst} = s^q s^s r^t,$$

что и требовалось доказать.

²⁹ Появление множителя $3!$ обуславливается тем, что суммирование внутри скобок производится не только по индексам j, l, p , но также и по индексам i, h, m .

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ¹

Совместно с Л. И. Мандельштамом

Ниже будет изложено обобщение уравнений Минковского для случая анизотропных сред. С этой целью мы прежде всего даем в § 1 новое написание уравнений Минковского. Обычно тензорная зависимость между тензорами поля F_{ik} и f^{ik}

$$(F_{14}, F_{24}, F_{34}) = (E_1, E_2, E_3), (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = (B_1, B_2, B_3), \\ (f^{41}, f^{42}, f^{43}) = (D_1, D_2, D_3), (f^{23}, f^{31}, f^{12}) = (H_1, H_2, H_3)$$

устанавливается с помощью тензора скорости u^i (уравнения (1) и (2)); диэлектрическая постоянная ϵ и магнитная проницаемость μ рассматриваются при этом как скалярные величины. Можно, однако, рассматривать также и ϵ и μ как компоненты четырехмерного тензора диэлектрической и магнитной проницаемости s_{ij} или s^{ij} (3) или (6)) (в последующем коротко называемого Д.—М.—тензором); уравнения Минковского (1) и (2) могут быть тогда приведены к очень простому виду. В эти уравнения тензор скорости явно уже не входит.

В § 2 даны уравнения для анизотропных тел. Д.—М.—тензор оказывается здесь уже не II ранга, как в случае изотропных тел, а IV ранга. Мы обозначаем его через $s_{ij\alpha\beta}$ или $s^{ij\alpha\beta}$ ((11) и (13)).

Тензорная форма полученных нами уравнений позволяет перенести эти уравнения и в область общей теории относительности.

Мы надеемся в следующей публикации сообщить о применении полученных результатов к некоторым вопросам, касающимся оптики и определения метрики в движущихся средах.

§ 1. Если первоначально мы ограничим наше рассмотрение непроводящими средами, то будем иметь дело только с уравнениями

$$f_{ij}u^j = \epsilon F_{ik}u^k, \quad (1)$$

$$F_{kl}u_i + F_{li}u_k + F_{ik}u_l = \mu (f_{kl}u_i + f_{li}u_k + f_{ik}u_l), \quad (2)$$

ибо два других основных уравнения

$$\operatorname{div} f^{ij} = 0, \quad \operatorname{rot} F_{ij} = 0$$

¹ Math. Ann., 1925, 95, 154. Перевод М. Е. Жаботинского. Подробнее рассматриваемый здесь вопрос будет освещен одним из нас в другом месте («Журн. Русск. физ.-хим. общества») (см. работу 1.—Прим. ред.).

После того как это сообщение уже было закончено, мы узнали, что проф. Фредерикс (Ленинград) независимо от нас провел аналогичное рассмотрение.

сохраняют в этих средах свою обычную, справедливую и для вакуума форму. Кроме тензоров поля F_{ik} и f^{ik} и материальных констант ϵ и μ , в уравнения (1) и (2) входит еще тензор скорости u^i . Если величины ϵ и μ рассматриваются как скаляры, то привлечение подобного вспомогательного тензора неизбежно, ибо линейная тензорная связь двух тензоров (в данном случае F_{ij} и f^{ij}) может быть установлена только с помощью третьего тензора (в данном случае u^i) (исключая тривиальный случай прямой пропорциональности).

Если же рассматривать величины ϵ и μ не как скаляры, а как компоненты четырехмерного тензора, то привлечение тензора скорости становится излишним. Подобное рассмотрение представляется вполне естественным, если вспомнить обычные трехмерные тензоры ϵ_{ij} и μ_{ij} кристаллофизики.

Мы определяем «тензор диэлектрической и магнитной проницаемости» s_{ij} , приписывая его компонентам в покоящейся системе следующие значения:

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon \sqrt{\mu}} \end{pmatrix}. \quad (')$$

С помощью этого тензора можно объединить оба уравнения (1) и (2) в одно уравнение (4)

$$F_{ij} = s_{i\alpha} s_{j\beta} f^{\alpha\beta}, \quad (4)$$

так как в покоящейся системе это уравнение (4) дает правильную связь между F_{ij} и f^{ij} , в чем можно легко убедиться простой подстановкой. Вследствие своего тензорного характера уравнение сохраняет силу в любой произвольной системе координат².

В уравнение (4) компоненты скорости u^i явно не входят, но они содержатся в нем неявно, так как коэффициенты лорентцова преобразования зависят от скорости среды.

Разрешая уравнение (4) относительно f^{ij} , мы приходим к уравнению следующего вида:

$$f^{ij} = s^{i\alpha} s^{j\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (5)$$

где $s^{i\alpha}$ — контравариантные компоненты тензора, имеющие в по-

² В случае необходимости можно убедиться в справедливости последнего утверждения действительным проведением преобразования координат.

коящейся системе следующие значения:

$$s^{ij} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon\sqrt{\mu} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Тензоры s_{ij} и s^{ij} находятся между собой в таком же соотношении, как и гравитационные потенциалы g_{ij} и g^{ij} в общей теории относительности, а именно:

$$s^{i\alpha}s_{k\alpha} = \delta_k^i \begin{cases} \delta_k^i = 0, & \text{если } i \neq k, \\ \delta_k^i = 1, & \text{если } i = k. \end{cases} \quad (7)$$

Иными словами, s^{ij} равны соответствующим минорам, образованным из s_{ij} , деленным на детерминант $|s_{ij}|$.

Заметим, что в (3) и (6) электрические и магнитные величины ε и μ оказываются компонентами одного-единственного тензора, что полностью отвечает известному слиянию векторов электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{B} (или \mathbf{D} и \mathbf{H}) в один четырехмерный тензор F_{ij} (соответственно f^{ij}).

Далее следует заметить, что приведенное выше рассмотрение может быть распространено и на случай проводящих сред. Зависимость четырехмерного тока J^i от плотности заряда и напряженности поля может быть выражена в следующей форме:

$$J^i = \lambda^{i\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \rho^i. \quad (8)$$

Тензорные компоненты $\lambda^{i\alpha\beta}$ и ρ^i в покоящейся системе имеют, согласно определению, следующие значения: $\rho^1 = \rho^2 = \rho^3 = 0$, $\rho^4 = \rho$ и $\lambda^{i\alpha\beta} = 0$, за исключением ³ $\lambda^{114} = \lambda^{224} = \lambda^{334} = \lambda$. Через ρ и λ здесь обозначены плотность заряда и проводимость, измеренные в покоящейся системе.

Легко можно показать, что уравнения (4), (5) и (8) совпадают с соответствующими уравнениями Минковского.

§ 2. Легко обобщить теперь предыдущие выкладки для случая анизотропии. Мы попробуем вновь привести уравнения, связывающие F_{ij} и f^{ij} , к форме, аналогичной уравнению (4). Однако теперь для этой цели недостаточно Д.—М.—тензора II ранга, а необходимо воспользоваться тензором IV ранга $s_{ij\alpha\beta}$ ⁴.

³ Мы оставляем неопределенным, не будет ли $\lambda^{i\alpha\beta} = 0$, за исключением $\lambda^{114} = \lambda^{224} = \lambda^{334} = -\lambda^{141} = -\lambda^{242} = -\lambda^{343} = \lambda/2$.

⁴ Если потребовать симметрии Д.—М.—тензора, то непосредственно видно, что 10 компонент симметричного тензора II ранга недостаточно для того,

Мы полагаем

$$F_{ij} = s_{ij\alpha\beta} f^{\alpha\beta}. \quad (9)$$

Значения тензорных компонент $s_{ij\alpha\beta}$ в покоящейся системе определяются из требования, чтобы в этой системе уравнение (9) было эквивалентно обычным уравнениям $D_i = \epsilon_{ij} E_j$, $B_i = \mu_{ij} H_j$. Правда, для однозначного определения необходимых величин этого требования недостаточно, но вполне естественно потребовать еще следующее: при непрерывном переходе к изотропии уравнение (9) должно переходить в соответствующее уравнение (4), т. е. $s_{ij\alpha\beta}$ в $s_{i\alpha} s_{j\beta}$. Вычисление приводит к следующим значениям компонент (в покоящейся системе, координатные оси которой совпадают с главными направлениями анизотропии, в последующем такая координатная система коротко обозначается как A -система):

$$s_{1212} = s_{2121} = \mu_3, \quad s_{1313} = s_{3131} = \mu_2, \quad s_{2323} = s_{3232} = \mu_1, \\ s_{1414} = s_{4141} = -1/\epsilon_1, \quad s_{2424} = s_{4242} = -\frac{1}{\epsilon_2}, \quad s_{3434} = s_{4343} = -1/\epsilon_3; \quad (10)$$

все остальные $s_{ij\alpha\beta}$, за исключением членов главной диагонали, в A -системе исчезают. Что же касается этих диагональных членов, то наших требований хватает только для определения их размерности, но не их значений. Однако эти члены для нас не имеют значения, так как в любой системе отсчета они выпадают из уравнений (9) ⁵.

Как легко видеть из (10), тензор $s_{ij\alpha\beta}$ симметричен относительно перестановки индексов (i, α) , (j, β) и $(i\alpha, j\beta)$. В A -системе его отличные от нуля компоненты могут быть расположены в виде квадратной матрицы

$$s_{ij\alpha\beta} = \begin{vmatrix} [\mu] & \mu_3 & \mu_2 & -\frac{1}{\epsilon_1} \\ \mu_3 & [\mu] & \mu_1 & -\frac{1}{\epsilon_2} \\ \mu_2 & \mu_1 & [\mu] & -\frac{1}{\epsilon_3} \\ -\frac{1}{\epsilon_1} & -\frac{1}{\epsilon_2} & -\frac{1}{\epsilon_3} & \left[\frac{1}{\epsilon^2 \mu} \right] \end{vmatrix}. \quad (11)$$

чтобы однозначно представить 12 независимых величин ϵ_{ij} и μ_{ij} . В следующей публикации мы надеемся показать, что это обстоятельство (т. е. то, что в анизотропных средах Д.—М.-тензор есть тензор IV ранга) может быть приведено в тесную зависимость с двойным лучепреломлением в этих средах.

⁵ Пример: $\partial F'_{ij} / \partial H'_3 = s'_{ij12} - s'_{ij21}$, так как $H'_3 = f'^{12} = -f'^{21}$;

$$\frac{\partial (s'_{ij12} - s'_{ij21})}{ds_{pppp}} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \left(\frac{\partial x^p}{\partial x'^1} \frac{\partial x^p}{\partial x'^2} - \frac{\partial x^p}{\partial x'^2} \frac{\partial x^p}{\partial x'^1} \right) = 0.$$

Члены (1, 1), (1, 2), (1, 3) и т. д. этой матрицы соответствуют компонентам s_{1111} , s_{1212} , s_{1313} и т. д.; для диагональных членов приведены только их размерности.

Совершенно аналогично может быть найден соответствующий контравариантный тензор $s^{ij\alpha\beta}$, который определяется уравнением

$$f^{ij} = s^{ij\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (12)$$

а именно, в A -системе

$$s^{ij\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{\mu} \right] & \frac{1}{\mu_3} & \frac{1}{\mu_2} & -\varepsilon_1 \\ \frac{1}{\mu_3} & \left[\frac{1}{\mu} \right] & \frac{1}{\mu_1} & -\varepsilon_2 \\ \frac{1}{\mu_2} & \frac{1}{\mu_1} & \left[\frac{1}{\mu} \right] & -\varepsilon_3 \\ -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_3 & [\varepsilon^2 \mu] \end{pmatrix}. \quad (13)$$

При этом справедливо соотношение, аналогичное (7),

$$s^{ij\alpha\beta} s_{\alpha\beta hk} = \delta_h^i \delta_k^j.$$

Уравнения (9) и (11) и соответственно (12) и (13) решают поставленную задачу и позволяют определить зависимость между F_{ij} и f^{ij} в произвольной системе отсчета. Например, в системе отсчета, которая движется относительно рассматриваемой среды со скоростью \mathbf{v} , причем так, что скорость \mathbf{v} параллельна одной из главных осей анизотропии, основные уравнения (9) и (12) могут быть приведены к следующей форме⁶:

$$\mathbf{D} + [\mathbf{vH}] = \varepsilon (\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]), \quad \mathbf{B} - [\mathbf{vE}] = \mu (\mathbf{H} - [\mathbf{vD}]). \quad (14)$$

Эти уравнения совершенно аналогичны уравнениям Минковского для изотропных сред; единственное отличие заключается в том, что здесь буквами ε и μ обозначены не скаляры, а трехмерные тензоры

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix}.$$

Поэтому, например, произведение $\varepsilon \mathbf{E}$ имеет следующее значение:

$$\varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{i} \varepsilon_{1\alpha} E_\alpha + \mathbf{j} \varepsilon_{2\alpha} E_\alpha + \mathbf{k} \varepsilon_{3\alpha} E_\alpha,$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — единичные координатные векторы.

В заключение заметим, что выше мы неявно сделали предположение, что главные оси обоих пространственных тензоров ε_{ij} и μ_{ij} совпадают друг с другом, что не обязательно имеет место в кристаллах низших классов симметрии. Можно, однако, снять

⁶ Промежуточные вычисления здесь опущены.

это ограничение, если принять во внимание, что при ограничении чисто пространственными преобразованиями координат каждый четырехмерный тензор может быть разложен в ряд пространственных тензоров⁷. Вообще говоря, тензор IV ранга распадается на 16 пространственных тензоров. Для специального тензора $s_{ij\alpha\beta}$ (или $s^{ij\alpha\beta}$) только четыре из этих пространственных тензоров отличны от нуля, а именно: один «внутренний» тензор IV ранга, два идентичных «внешних» тензора II ранга и, наконец, один тензор нулевого ранга (скаляр) s_{4444} . При этом оказывается, что компоненты «внутреннего» тензора зависят исключительно от μ_{ij} , компоненты же «внешнего» — только от ϵ_{ij} ⁸. Это делает правдоподобным следующее предположение.

Если главные оси эллипсоидов ϵ_{ij} и μ_{ij} не совпадают, то можно образовать матрицу (11) и подвергнуть ее внутренние (соответственно и внешние) члены чисто пространственному преобразованию координат, при котором, однако, ее внешние (соответственно и внутренние) члены остаются неизменными. Если выбрать это преобразование так, что оно приводит оси эллипсоидов ϵ_{ij} и μ_{ij} , предположенные при образовании матрицы (11) совпадающими, в правильное взаимное положение, то получатся правильные значения тензорных компонент.

Поступила
6 февраля 1925 г.

⁷ Ср., например, *H. Weyl. Raum—Zeit—Materie*, 5 Aufl. Berlin, J. Springer, 1923, S. 183.

⁸ Это разбиение подробно рассмотрено в работе 1, § 4 (см. наст. том, стр. 29.— *Прим. ред.*).

КОГЕРЕНТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ БЫСТРОГО ЭЛЕКТРОНА В СРЕДЕ ¹

Совместно с И. М. Франком

В 1934 г. П. А. Черенковым было установлено и в дальнейшем детально исследовано новое явление, состоящее в следующем. Все без исключения жидкости и твердые тела при прохождении через них быстрых электронов (например, β -электронов или комптон-электронов от γ -лучей), помимо флуоресценции, имеющейся в некоторых случаях, всегда испускают слабое видимое свечение. Это свечение существенно отлично от обычной флуоресценции: оно частично поляризовано, причем электрический вектор колебаний параллелен движению электрона, и оно не может быть потушено ни температурным воздействием, ни прибавлением к светящейся среде тушащих веществ.

Эти особенности явления были детально рассмотрены С. И. Вавиловым [2], предположившим, что свечение вызывается торможением быстрых электронов.

В дальнейших опытах Черенков [3] обнаружил резкую асимметрию в распределении интенсивности этого свечения, являющуюся, пожалуй, наиболее характерным его свойством. Оказалось, что в направлении движения электрона света излучается много больше, чем в противоположном направлении.

Отсюда непосредственно вытекает, что бомбардируемое электронами вещество излучает когерентно по крайней мере на протяжении, сравнимом по своим размерам с длиной волны видимого света. Таким образом, это излучение не может быть вызвано ни рассеянием электронов на атомных ядрах ², ни взаимодействием с отдельными атомами.

Это явление может быть, однако, объяснено как качественно, так и количественно, если принять во внимание, что электрон, движущийся в среде, излучает свет даже при равномерном движении, если только его скорость превышает скорость света в этой среде.

Рассмотрим электрон, движущийся в среде, характеризуемой показателем преломления n , с постоянной скоростью v , направленной по оси z . Поле электрона можно рассматривать как результат суперпозиции волн запаздывающего потенциала, непрерывно излучаемых электроном и распространяющихся со скоростью

¹ Докл. АН СССР, 1937, 14, 107; УФН, 1967, 93, вып. 2, 388.

² Интенсивность видимого света, излучаемого при этом процессе, должна быть примерно в 10^4 раз меньше наблюдаемой.

c/n . Легко видеть, что в направлении, образующем некоторый угол θ с осью z , вся эта последовательность испускаемых волн будет иметь одинаковые фазы, если только v , n и θ удовлетворяют условию

$$c/n = v \cos \theta, \quad \cos \theta = 1/\beta n, \quad (1)$$

где $\beta = v/c$. Эти распространяющиеся в фазе волны обуславливают излучение в направлении θ , в то время как для всех других направлений радиация уничтожается интерференцией волн.

Условие (1) может быть выполнено, если только $\beta n > 1$, т. е. только в случае быстрых электронов и только в среде, в которой показатель преломления для рассматриваемых частот заметно больше единицы. Например, если $n = 1,33$ (вода, $\lambda = 5900 \text{ \AA}$), то энергия электрона не может быть меньше 260 кэВ . Если же $\beta n > 1$, то равномерно движущийся электрон всегда излучает свет в направлении θ^3 .

Перейдем к рассмотрению более детальной теории. Так как в данном случае мы интересуемся только видимой радиацией, то среду можно рассматривать макроскопически, применяя для этого обычные уравнения электромагнитной теории света. Пользуясь динамическим соотношением между поляризацией \mathbf{P} и электрической силой \mathbf{E}

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \sum_s \omega_s^2 \mathbf{P}_s = \alpha \mathbf{E}$$

(где ω_s — собственные частоты молекулярных осцилляторов среды) и разлагая все переменные, характеризующие поле, в интегралы Фурье

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega e^{i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}_\omega e^{i\omega t} d\omega, \quad (2)$$

для соотношения между \mathbf{P}_ω и \mathbf{E}_ω имеем

$$\mathbf{P}_\omega = \frac{1}{4\pi} (n^2 - 1) \mathbf{E}_\omega; \quad (3)$$

здесь n означает показатель преломления среды для частоты ω .

С помощью (2) и (3) уравнения Максвелла приводятся к следующему виду:

$$\mathbf{H}_\omega = \text{rot } \mathbf{A}_\omega, \quad \mathbf{E}_\omega = -\text{grad } \varphi_\omega - \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}_\omega = -\frac{ic}{\omega n^2} \nabla \text{div } \mathbf{A}_\omega - \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}_\omega, \quad (4)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}_\omega + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \mathbf{A}_\omega = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\omega), \quad (5)$$

причем исключение φ_ω из уравнения для \mathbf{E}_ω производится на

³ Рентгеновские лучи излучаются не могут, так как для них $n \leq 1$.

основании соотношения между скалярным и векторным потенциалами

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_\omega + \frac{i\omega}{c} n^2 \varphi_\omega = 0.$$

Электрону, движущемуся в среде по оси z с постоянной скоростью v , соответствует плотность тока \mathbf{j} , равная

$$j_x = j_y = 0, \quad j_z = ev \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt),$$

где буквой δ обозначены дираковские функции.

Разлагая j_z на фурье-компоненты, для частоты ω имеем

$$j_z(\omega) = \frac{e}{2\pi} e^{-\frac{i\omega z}{v}} \delta(x) \delta(y),$$

или, введя цилиндрические координаты ρ, φ, z ,

$$j_z(\omega) = \frac{e}{4\pi^2 \rho} e^{-\frac{i\omega z}{v}} \delta(\rho).$$

Подставляя это выражение в (5) и полагая

$$A_\rho = A_\varphi = 0, \quad A_z(\omega) = u(\rho) e^{-\frac{i\omega z}{v}}, \quad (6)$$

получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + s^2 u = -\frac{e}{\pi c \rho} \delta(\rho), \quad (7)$$

где

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (\beta^2 n^2 - 1) = -\sigma^2. \quad (8)$$

Таким образом, u должна быть цилиндрической функцией, удовлетворяющей уравнению Бесселя

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + s^2 u = 0 \quad (9)$$

всюду, за исключением полюса $\rho = 0$.

Для получения условия, которому удовлетворяло бы u при $\rho = 0$, заменим правую часть уравнения (7) величиной f , причем

$$f = -\frac{2e}{\pi c \rho_0^2}, \quad \text{если } \rho < \rho_0, \quad \text{и } f = 0, \quad \text{если } \rho > \rho_0,$$

и проинтегрируем по площади круга радиуса ρ_0 , а затем приведем к пределу для $\rho_0 \rightarrow 0$. В результате получим

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{e}{\pi c}. \quad (10)$$

Необходимо различать два возможных случая.

Первый из них относится к малым скоростям электрона, для которых $\beta n < 1$, $s^2 < 0$ и, значит, $\sigma^2 = -s^2 > 0$, т. е. σ — ве-

личина действительная. Для этого случая решением (9), удовлетворяющим (10) и обращающимся в нуль для бесконечности, будет

$$u = \frac{ie}{2c} H_0^{(1)}(i\sigma\rho), \quad (11)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода.

Для $\sigma\rho \gg 1$ можно воспользоваться асимптотическим значением $H_0^{(1)}$. Тогда, учитывая (6) и (11), имеем

$$A_z = \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sigma\rho+i\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)}}{\sqrt{2\pi\sigma\rho}} d\omega, \quad \sigma\rho \gg 1.$$

Таким образом, в случае малых скоростей электрона мы имеем экспоненциальное затухание поля с расстоянием. Излучения, следовательно, в этом случае не имеется.

Однако если скорость электрона настолько велика, что для некоторых частот величина $\beta n = \frac{v}{c} n(\omega)$ становится больше единицы и поэтому величина s (уравнение (8)) становится действительной, то общее решение уравнений (7) и (9) для бесконечности дает цилиндрическую волну. Выбирая случай, представляющий уходящую волну, а не волну, идущую к оси z , получим следующее решение (9), удовлетворяющее условию (10):

$$\begin{aligned} u &= -\frac{ie}{2c} H_0^{(2)}(s\rho), & \text{если } \omega > 0, \\ u &= \frac{ie}{2c} H_0^{(1)}(s\rho), & \text{если } \omega < 0, \end{aligned} \quad (12)$$

причем величина s предполагается положительной. Пользуясь асимптотическим значением $H_0^{(2)}$ и принимая во внимание (6) и (12), для $s\rho \gg 1$ получаем

$$A_z(\omega) = -\frac{e}{c\sqrt{2\pi s\rho}} e^{i\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)-i\left(s\rho-\frac{3\pi}{4}\right)},$$

если $\omega > 0$ и комплексно-сопряженное этому выражение для $\omega < 0$.

Величину, стоящую в степени, пользуясь значением s из (8), можно преобразовать. Тогда получим

$$\omega > 0, \quad A_z(\omega) = -\frac{e}{c\sqrt{2\pi s\rho}} e^{i\omega\left(t-\frac{z\cos\theta+\rho\sin\theta}{w}\right)+\frac{3}{4}\pi i}, \quad (13)$$

где угол θ определяется (1) и $w = c/n$. Таким образом, если $\beta n > 1$, мы получаем волну, идущую в направлении θ . Электрический вектор этой волны лежит в меридиональной плоскости (z, ρ).

Вычисляя с помощью (4) интенсивность поля в волновой зоне, имеем

$$\begin{aligned} H_{\varphi} &= -\frac{a}{\sqrt{\rho}} \int \sqrt{s} d\omega \cos \chi, \\ E_{\rho} &= -\frac{a}{c\sqrt{\rho}} \int \frac{\sqrt{s^2 n^2 - 1} \omega d\omega}{\beta^2 n^2 \sqrt{s}} \cos \chi, \\ E_z &= \frac{a}{c\sqrt{\rho}} \int \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \frac{\omega d\omega}{\sqrt{s}} \cos \chi, \end{aligned} \quad (14)$$

где $a = \frac{e}{c} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\chi = \omega \left(t - \frac{z \cos \theta + \rho \sin \theta}{w} \right) + \frac{\pi}{4}$; остальные компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} равны нулю.

В отличие от (2), интегрирование здесь распространяется только на положительные значения ω и ограничивается интервалом частот, в котором $\beta n(\omega) \geq 1$.

Общая энергия, излучаемая электроном через поверхность цилиндра длины l (с осью, совпадающей с линией движения электрона), равна

$$W = 2\pi\rho l \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]_{\rho} dt.$$

Если принять во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos[\omega t + \alpha(\omega)] \cos[\omega' t + \alpha(\omega')] dt = \pi \delta(\omega - \omega'), \quad \omega > 0, \quad \omega' > 0,$$

то для излучения энергии находим

$$W = \frac{e^2 l}{c^2} \int_{(\beta n > 1)} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right). \quad (15)$$

Точно такой же результат получается при расчете общей энергии излучения электрона, который первоначально покоился, затем внезапно получил скорость v и, пройдя путь l , внезапно же остановился. В этом случае применимость (15) ограничена только условием, чтобы путь электрона l был велик по сравнению с длиной волны излучаемого света. Если электрон постепенно теряет свою скорость, то уравнение (15) может быть применено к отдельным участкам его пути; существенно только, чтобы величина этих участков была велика по сравнению с длиной волны. В этом случае угол θ между v и направлением радиации по мере потери скорости постепенно уменьшается.

Порядок величины для общей потери энергии на излучение можно определить, если заменить n^2 в (15) его приближенным значением из уравнений

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad n_0^2(0) = \varepsilon = 1 + \frac{A}{\omega_0^2}$$

и произвести интеграцию от $\omega=0$ до $\omega=\omega_0$, где ε — диэлектрическая постоянная, а ω_0 — некоторая средняя собственная частота среды. Таким образом, мы получим следующее приближенное выражение для потери энергии на радиацию, отнесенное к единице пути электрона:

$$\frac{dW}{dl} = \frac{e^2 \omega_0^2}{2c^2} (\varepsilon - 1) \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}. \quad (16)$$

Полагая $\omega_0 \sim 6 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$, для dW/dl получаем величину порядка нескольких киловольт на сантиметр, т. е. величину, исчезающе малую по сравнению с потерей энергии, вызванной иными причинами.

В то время, когда эти вычисления были уже в значительной мере закончены, акад. А. Ф. Иоффе любезно указал нам на работы Зоммерфельда [4], вычислившего силу, действующую на электрон, движущийся в вакууме с постоянной скоростью $v > c$. Силы эти также вызваны радиацией рассмотренного рода. Как известно, однако, из теории относительности, условие $v > c$ в действительности неосуществимо.

Уравнение (15) дает для общего числа фотонов, испускаемых электроном в спектральной области, ограниченной длинами волн λ_1 и λ_2 , следующую величину:

$$N = 2\pi\alpha \left(\frac{l}{\lambda_2} - \frac{l}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right), \quad (17)$$

где α — постоянная тонкой структуры, $\alpha = e^2/\hbar c$, n — среднее значение показателя преломления в этой области.

Полагая $n=1,33$, $\beta^2=3/4$ (электрон с энергией 500 кэв) и $l=0,1 \text{ см}$, находим, что в видимой области между $\lambda=4 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ и $\lambda=6 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ излучается примерно 10 фотонов на электрон. Этот результат совпадает по порядку величины с экспериментально наблюдаемым Черенковым (не опубликовано).

Опыты Черенкова устанавливают также существование пропорциональности между интенсивностью радиации и пробегом электрона в различных средах (см. [1]). Вопрос о зависимости от показателя преломления дискутируется им в этой же статье; его выводы благоприятны для теории.

Если примем во внимание, что большая часть измерений Черенкова выполнена с сильно расходящимся пучком комптоновских электронов, получаемых от γ -лучей и характеризующихся размытым спектром скоростей, то относительно всей совокупности экспериментального материала, включая сюда и вопросы о поляризации, угловой асимметрии и абсолютной интенсивности свечения, можно утверждать, что она находится в полном согласии с изложенной здесь теорией.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. П. А. Черенков. Докл. АН СССР, 1934, 2, 451.
 2. С. И. Вавилов. Докл. АН СССР, 1934, 2, 457.
 3. П. А. Черенков. Докл. АН СССР, 1936, 3, 414.
 4. А. Sommerfeld. Götting. Nachricht., 1904, 99, 363; 1905, 201.
-

Примечание. В этой работе дано теоретическое объяснение свечения Вавилова—Черенкова.

История теоретической интерпретации эффекта Вавилова—Черенкова освещена в статье И. М. Франка «О когерентном излучении быстрого электрона в среде» (Сб. «Проблемы теоретической физики. Памяти И. Е. Тамма». М., «Наука», 1972, стр. 350).

Теории эффекта Вавилова—Черенкова посвящено большое число работ. Современное состояние проблемы дается в обзорах Б. М. Болотовского (УФН, 1957, 62, 204; 1961, 75, 295), в книгах Дж. Джелли (Черенковское излучение. М., ИЛ, 1960) и В. П. Зрелова (Излучение Вавилова—Черенкова и его применение в физике высоких энергий. М., Атомиздат, 1968).

СВЕЧЕНИЕ ЧИСТЫХ ЖИДКОСТЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ ¹

Совместно с И. М. Франком и П. А. Черенковым

При прохождении быстрых электронов через жидкости в последних возникает слабое видимое свечение, существенно отличное от каких-либо ранее известных видов люминесценции [3, 5—10]. Это свечение имеется и у твердых тел, однако здесь обнаружение его в большинстве случаев затрудняется наличием довольно яркой обычной фосфоресценции.

Вследствие незначительной яркости свечения для количественных измерений в большинстве случаев применялся метод фотометрии по порогу зрения, предложенный С. И. Вавиловым [1, 2]. В качестве быстрых электронов были использованы комптон-электроны от γ -лучей или, в некоторых случаях, β -частицы радиоактивных элементов.

Детальным исследованием установлены следующие основные свойства нового явления. При использовании в качестве первичного пучка γ -лучей яркость свечения жидкостей остается постоянной независимо от их физико-химических свойств; в случае возбуждения свечения непосредственно электронами (β -лучи) наблюдаемая яркость обратно пропорциональна плотностям жидкостей. Из этих результатов следует, что яркость свечения пропорциональна длине пробега электрона в среде.

Свечение не тушится ни изменением вязкости жидкостей (посредством нагревания), ни растворением в них активных тушителей флуоресценции (KJ, AgNO₃).

Свет частично поляризован. Степень поляризации не меняется с изменением вязкости. Направление преимущественных колебаний электрического вектора во всех случаях совпадает с направлением оси первичного пучка.

Спектр свечения непрерывный. Снимки, полученные с помощью светосильного кварц-флуоритового спектрографа, позволяют проследить его для воды до 2200 Å (границы поглощения желатины). Предварительными визуальными измерениями через различные светофильтры найдено, что излучаемая энергия возрастает с уменьшением длины волны.

Опыты с профильтрованными γ -лучами радия и опыты с лучами Рентгена позволяют заключить, что свечение вызывается наиболее быстрыми электронами.

¹ Изв. АН СССР, 1938, № 1-2, 29. Доложено И. М. Франком.

Возникающее в жидкости свечение излучается главным образом вперед, в сторону движения электронов. Однако максимум излучения направлен не точно по направлению движения электрона, а образует с ним острый угол (для воды, например, этот угол равен 28°). Для различных жидкостей угол, под которым наблюдается максимум излучения, возрастает с увеличением показателя преломления.

Необычная поляризация, неспособность свечения к тушению, а также универсальность явления исключают предположение, что исследуемое свечение является флуоресценцией.

Из асимметрии в угловом распределении непосредственно вытекает, что электрон должен излучать когерентно, по крайней мере на протяжении, сравнимом с длиной волны видимого света. Таким образом, это излучение не может быть вызвано ни рассеянием электрона на атомных ядрах, ни взаимодействием его с отдельным атомом. Явление может быть объяснено [4] во всех деталях как качественно, так и количественно, если принять во внимание, что электрон, движущийся в среде, излучает свет даже при равномерном движении, если его скорость превышает скорость света в этой среде. Полученные на основе этой теории выводы вполне согласуются с имеющимся экспериментальным материалом.

*Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Е. М. Брумберг, С. И. Вавилов.* Изв. АН СССР, ОМЭН, серия 7, 1933, 7, 919.
2. *Е. М. Брумберг, С. И. Вавилов.* Докл. АН СССР, 1934, 3, 405.
3. *С. И. Вавилов.* Докл. АН СССР, 1934, 2, 457.
4. *И. Е. Тамм, И. М. Франк.* Докл. АН СССР, 1937, 14, 107.²
5. *П. А. Черенков.* Докл. АН СССР, 1934, 2, 451.
6. *П. А. Черенков.* Докл. АН СССР, 1936, 3; 9, 413.
7. *П. А. Черенков.* Докл. АН СССР, 1937, 14, 99.
8. *П. А. Черенков.* Докл. АН СССР, 1937, 14, 103.
9. *П. А. Черенков.* Изв. АН СССР, ОМЭН, серия физ., 1937, 4-5.
10. *Р. А. Сегенков.* Phys. Rev., 1937, 52, 378.

² См. наст. том, работу 4 (*Прим. ред.*).

ИЗЛУЧЕНИЕ, ВЫЗЫВАЕМОЕ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩИМИСЯ ЭЛЕКТРОНАМИ ¹

Если скорость электрона, проходящего через преломляющую среду, превышает скорость света в среде, электрон становится источником когерентного излучения даже в том случае, когда он движется с постоянной скоростью. И. Е. Тамм и И. М. Франк показали в 1937 г., что именно такую природу имеет характерное видимое излучение, возникающее в жидкостях и твердых телах под действием быстрых электронов. Это излучение было открыто П. А. Черенковым в 1934 г.

Настоящая статья представляет собой развитие работы Франка и Тамма, здесь более подробно рассмотрено излучение равномерно движущегося заряда. В ней также обсуждаются условия, при которых теория может быть применена к видимому излучению электронов с учетом того, что при прохождении через среду они отклоняются в результате соударений, постепенно теряют энергию на ионизацию и т. д.

§ 1. Общеизвестно, что равномерно движущийся электрический заряд не излучает. Гораздо менее широко известно, что из этого правила имеются исключения. Именно, заряд излучает свет (и вообще электромагнитные волны) даже в том случае, когда он движется равномерно, если при этом скорость заряда превышает (фазовую) скорость света.

Конечно, в пустоте это условие никогда не может быть выполнено, но, если электрон движется в преломляющей среде, его скорость вполне может превысить скорость света в этой среде.

Теория возникающего при этом излучения была некоторое время назад развита И. М. Франком и автором настоящей статьи [1] для того, чтобы объяснить необычное явление, открытое П. А. Черенковым [2] в 1934 г. Все жидкости и твердые тела под действием γ -лучей дают необычное видимое излучение, совершенно не похожее на возникающую иногда в таких случаях обычную флуоресценцию. Это излучение частично поляризовано, причем электрический вектор *параллелен* направлению γ -лучей. Интенсивность излучения не уменьшается с температурой, а также при добавлении к исследуемой жидкости тушащих составов. С. И. Вавилов [3] предположил, что это излучение связано с «торможением» комптоновских электронов, созданных γ -лучами. Дальнейшие исследования Черенкова показали, что источником излучения действительно являются быстрые электроны, так что во многих

¹ J. Phys. USSR, 1939, 1, N 5-6, 439. Перевод Б. М. Болотовского.

отношениях оказывается удобнее возбуждать это свечение не γ -лучами, а β -лучами — электронами. Ключ к пониманию этого явления был найден, когда Черенков обнаружил ярко выраженную асимметрию излучения: свет излучается практически только в направлениях, составляющих острый угол с направлением движения электронов, и не излучается назад. Эта асимметрия является важным указанием на когерентность излучения, возбуждаемого электроном на всем протяжении пути или по меньшей мере на пути, составляющем полволны видимого света.

Следовательно, рассматриваемое явление практически не зависит от атомного строения бомбардируемого вещества и может быть рассмотрено с помощью макроскопической электромагнитной теории. Франк и Тамм [1] показали ², что макроскопическая теория действительно объясняет черенковское излучение и что оно возбуждается электронами со скоростями, превышающими скорость света в той среде, через которую они движутся.

Существует тесная аналогия между черенковским излучением и некоторыми хорошо известными акустическими и гидродинамическими явлениями. Например, если скорость судна превышает минимальную скорость волн на поверхности воды ($23 \text{ см/сек} = 0,83 \text{ км/час}$), судно непрерывно генерирует волновые цуги даже в том случае, когда его скорость остается постоянной. В этом заключается причина волнового сопротивления движению судов. Волновое сопротивление той же природы возникает при движении тел в воздухе со скоростями, большими, чем скорость звука. Эти явления, однако, являются более сложными, чем то, которое исследуется в настоящей работе, из-за нелинейности гидродинамических уравнений.

Многочисленные тщательные эксперименты Черенкова ³ подтвердили все выводы из теории Франка и Тамма (интенсивность, поляризация, угловое распределение излучения, а также зависимость излучения от показателя преломления и плотности бомбардируемых веществ и от скорости электронов). Недавно Г. Коллинз и В. Рилинг [5] также провели исследование черенковского излучения, используя электроны с энергией 2 Мэв , полученные на электростатическом генераторе. Их результаты также находятся в полном согласии с теорией Франка и Тамма ⁴.

Для удобства читателя основное содержание работы Франка и Тамма воспроизводится в § 2. В § 3 мы даем новое и более строгое

² См. наст. том, работу 4.— *Прим. ред.*

³ См. [4], где имеются дальнейшие ссылки.

⁴ Следует отметить, что Г. Коллинз и В. Рилинг совершенно неправильно интерпретировали физические основы этой теории. Излагая теорию И. М. Франка и И. Е. Тамма, они пишут: «Электрон, проходя через среду, постепенно теряет энергию на ионизацию и возбуждение, и возникающее вследствие этого ускорение приводит к излучению Черенкова». Это утверждение в точности противоречит основному положению теории, по которому ускорение электрона оказывает только вторичное влияние на излучение Черенкова (см., например, уравнение (7.12)).

доказательство основной формулы, определяющей интенсивность и спектральное распределение излучения. В § 4 получены в пренебрежении дисперсией простые выражения для поля электрона. Поле в среде с дисперсией обсуждается в § 5. В § 6 явление рассматривается с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с электроном (электрон покоится, а среда движется). Обсуждается обобщенное выражение для релятивистского электромагнитного тензора энергии-импульса; с помощью этого выражения определяются силы, действующие на электрон в его системе покоя.

Наконец, в § 7 отброшено представление о равномерном движении электрона в течение неограниченного времени и предполагается, что электрон движется с постоянной скоростью в течение конечного промежутка времени. Исследование этого случая позволяет определить условия, при которых можно пренебречь влиянием ускорения на когерентное излучение электрона.

С точки зрения микроскопической теории рассматриваемое излучение не испускается непосредственно электроном, а имеет своей причиной когерентные колебания молекул среды, возбуждаемые электроном. Мы, однако, не входим здесь в микроскопическое рассмотрение проблемы.

§ 2. Рассмотрим электрон, движущийся с постоянной скоростью v вдоль оси z через среду, свойства которой задаются ее показателем преломления n . Условия, при которых такой электрон будет излучать, могут быть определены с помощью очень простых соображений.

Поле электрона можно рассматривать как суперпозицию сферических волн запаздывающего потенциала. Эти волны непрерывно излучаются движущимся электроном и распространяются со скоростью c/n . Все эти последовательно излучаемые волны будут складываться в фазе в направлении, составляющем угол θ с линией движения (осью z), в том и только в том случае, если v , n и θ удовлетворяют условию

$$c/n = v \cos \theta, \quad \cos \theta = 1/\beta n, \quad (2.1)$$

где $\beta = v/c$. При выполнении этого условия будет генерироваться излучение в направлении θ . Интерференция волн погасит излучение в любом другом направлении.

Условие (2.1) может быть выполнено только в том случае, когда $\beta n > 1$, т. е. только для быстрых электронов в среде с показателем преломления n , большим единицы (для рассматриваемых частот). Если, например, $n=1,33$ (вода, $\lambda=5900 \text{ \AA}$), энергия электронов должна быть не меньше, чем 260 кэВ .

Перейдем к более подробному рассмотрению. Поскольку мы интересуемся видимым излучением (или излучением еще больших длин волн), мы можем рассматривать среду макроскопически, применяя к ней обычные уравнения электромагнитной теории света. Совершенно необходимо учитывать дисперсию света в среде, ибо в противном случае электрон со скоростью $v > c/n$ будет излучать

волны всех частот до $\omega = \infty$ и полная энергия излучения окажется бесконечно большой. Однако очень короткие волны, например рентгеновские лучи, не могут излучаться равномерно движущимися электронами, поскольку для них $n \leq 1$.

Чтобы получить связь между напряженностью электрического поля \mathbf{E} и электрической индукцией \mathbf{D} в среде с дисперсией, нужно разложить \mathbf{E} и \mathbf{D} в интегралы Фурье.

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega e^{i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{D} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{D}_\omega e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.2)$$

Тогда интересующая нас связь имеет вид

$$\mathbf{D}_\omega = n^2(\omega) \mathbf{E}_\omega, \quad (2.3)$$

где $n(\omega)$ — показатель преломления среды на частоте ω . Пренебрегая поглощением света в среде, мы будем считать n действительной величиной, а проводимость среды (так же как и магнитную восприимчивость) равной нулю.

Разлагая все величины поля в интегралы Фурье вида (2.2), можно легко свести уравнения Максвелла к следующей системе:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\omega &= \text{rot } \mathbf{A}_\omega, \quad \mathbf{E}_\omega = -\nabla\varphi_\omega - \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}_\omega, \\ \nabla^2\varphi_\omega + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \varphi_\omega &= -\frac{4\pi}{n^2} \rho_\omega; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}_\omega + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \mathbf{A}_\omega = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\omega; \quad (2.5)$$

$$\text{div } \mathbf{A}_\omega + \frac{i\omega}{c} n^2 \varphi_\omega = 0. \quad (2.6)$$

Если не интересоваться статической частью φ и \mathbf{E} , можно выразить φ_ω через \mathbf{A}_ω с помощью соотношения (2.6) между скалярным и векторным потенциалами. Тогда выражение для \mathbf{E}_ω принимает вид

$$\mathbf{E}_\omega = -\frac{ic}{\omega n^2} \nabla \text{div } \mathbf{A}_\omega - \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}_\omega. \quad (2.7)$$

Если электрон с зарядом e движется по оси z с постоянной скоростью v , соответствующая плотность тока записывается в виде

$$j_x = j_y = 0, \quad j_z = ev \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt), \quad (2.8)$$

где δ обозначает функцию Дирака. Разлагая j_z , получаем

$$j_z(\omega) = \frac{e}{2\pi} e^{-\frac{i\omega z}{v}} \delta(x) \delta(y),$$

или, вводя цилиндрические координаты ρ, φ, z ,

$$j_z(\omega) = \frac{e}{2\pi^2\rho} e^{-\frac{i\omega z}{v}} \delta(\rho)^5.$$

Подставляя это выражение в (2.5) и полагая

$$A_\rho = A_\varphi = 0, \quad A_z(\omega) = \frac{e}{2c} a(\rho) e^{-\frac{i\omega z}{v}}, \quad (2.9)$$

получаем

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a}{\partial \rho} + s^2 a = -\frac{4}{\pi\rho} \delta(\rho), \quad (2.10)$$

где

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (\beta^2 n^2 - 1) = -\sigma^2. \quad (2.11)$$

Таким образом, a есть цилиндрическая функция, удовлетворяющая уравнению Бесселя

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a}{\partial \rho} + s^2 a = 0 \quad (2.12)$$

всюду, за исключением точки $\rho=0$ (полюса). Для того чтобы найти условия, которым должна удовлетворять функция a в точке $\rho=0$, мы сначала заменим правую часть уравнения (2.10) на функцию f , определив ее следующим образом:

$$f = -4/\pi\rho_0^2, \text{ если } \rho < \rho_0; \quad f = 0, \text{ если } \rho > \rho_0,$$

затем проинтегрируем уравнение (2.10) по площади круга радиусом ρ_0 и после этого перейдем к пределу при $\rho_0 \rightarrow 0$. Действуя таким образом, мы получим

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\rho \frac{\partial a}{\partial \rho} \right) = -\frac{2}{\pi}. \quad (2.13)$$

Общее решение уравнения (2.12) может быть записано так:

$$a = c_1 H_0^{(1)}(s\rho) + c_2 H_0^{(2)}(s\rho) = c_1 H_0^{(1)}(i\sigma\rho) + c_2 H_0^{(2)}(i\sigma\rho), \quad (2.14)$$

где c_1 и c_2 — постоянные, а $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$ — функции Ганкеля первого и второго рода.

В случае малых скоростей $\beta n < 1$, $s^2 < 0$ и величина σ действительна. Мы будем считать, что σ положительна

$$(\sigma = (|\omega|/v) \sqrt{1 - \beta^2 n^2}).$$

⁵ Соответствующее соотношение в работе И. М. Франка и И. Е. Тамма отличается от приведенного здесь выражения множителем 1/2 в правой части.

поскольку Франк и Тамм предполагали, что $\int_0^{\rho_0} \delta(\rho) d\rho = 1$. Однако, по-

скольку точка сингулярности функции $\delta(\rho)$ совпадает с одним из пределов интегрирования, представляется более корректным определить функцию $\delta(\rho)$ таким образом, чтобы этот интеграл равнялся $1/2$. Все окончательные формулы (начиная с формулы (2.13)) совершенно не зависят от этого различия в определении $\delta(\rho)$.

Поскольку функция $H_0^{(2)}(i\sigma\rho)$ стремится к бесконечности с ростом $\sigma\rho$, мы должны положить $c_2=0$. Определение постоянной c_1 из условия (2. 13) дает действительное решение

$$a = iH_0^{(1)}(i\sigma\rho). \quad (2. 15)$$

Асимптотическое выражение для a при $\sigma\rho \gg 1$ имеет вид

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma\rho}} e^{-\sigma\rho}.$$

Таким образом, в случае малых скоростей ($\beta n < 1$) коэффициенты Фурье в разложении поля экспоненциально убывают с радиусом, и, следовательно, нет никакого излучения.

Если, однако, скорость электрона настолько велика, что в некотором интервале частот выполняется неравенство $\beta n > 1$, то в этом интервале частот параметр s есть действительная величина и функции $H_0^{(1)}(s\rho)$ и $H_0^{(2)}(s\rho)$ дают цилиндрические волны на бесконечности. Одна из этих волн расходящаяся (т. е. распространяющаяся от оси $\rho=0$ в направлении $\rho=\infty$), другая — сходящаяся. Очевидно, в выражении (2. 14) следует сохранить только расходящуюся волну. Это требование вместе с условием (2. 13) полностью определяет решение, и мы получаем

$$\begin{aligned} a &= -iH_0^{(2)}(s\rho), & \text{если } \omega > 0, \\ a &= iH_0^{(1)}(s\rho), & \text{если } \omega < 0, \end{aligned} \quad (2. 16)$$

где величина s считается положительной:

$$s = \frac{|\omega|}{v} \sqrt{\beta^2 n^2 - 1}. \quad (2. 17)$$

Если $s\rho \gg 1$, можно воспользоваться асимптотической формулой для H_0 . С учетом (2. 16) и (2. 9) это дает

$$A_z(\omega) e^{i\omega t} = \frac{-ie}{c\sqrt{2\pi s\rho}} e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - is\rho + i\frac{\pi}{4}}, \quad \omega > 0, \quad (2. 18)$$

и комплексно-сопряженное выражение при $\omega < 0$. Преобразовав показатель экспоненты с помощью (2. 17), получим

$$A_z(\omega) e^{i\omega t} = -\frac{ie}{c\sqrt{2\pi s\rho}} e^{i\omega\left(t - \frac{z\cos\theta + \rho\sin\theta}{u}\right) + i\frac{\pi}{4}}, \quad (2. 19)$$

где угол θ определяется соотношением (2. 1), а $u=c/n$. Таким образом, в случае $\beta n > 1$ на бесконечности имеется волна, распространяющаяся под углом θ к оси z .

Зная функцию $a(\rho, \omega)$, можно с помощью соотношений (2. 9), (2. 4) и (2. 6) записать выражение для векторов поля:

$$A_z = \frac{e}{2c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)} a(\rho, \omega) d\omega, \quad (2. 20)$$

$$H_{\varphi} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}, \quad E_{\rho} = -\frac{e}{2\beta c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)} \frac{1}{n^2} \frac{\partial a}{\partial \rho} d\omega,$$

$$E_z = \frac{ie}{2c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)} \left(\frac{1}{\beta^2 n^2} - 1\right) \omega a d\omega. \quad (2.21)$$

Все остальные компоненты векторов \mathbf{A} , \mathbf{H} и \mathbf{E} равны нулю.

§ 3. При вычислении энергии, излучаемой электроном на единицу пути, Франк и Тамм использовали асимптотические выражения функций Ганкеля для больших значений аргумента. Однако при сколь угодно большом значении ρ аргументы $\sigma\rho$ и $\sigma\rho'$ стремятся к нулю, если ω стремится к нулю. Поэтому представляется желательным дать другое доказательство формулы, выведенной Франком и Таммом, не используя асимптотических разложений.

Радиальная компонента вектора Пойнтинга \mathbf{S} равна

$$S_{\rho} = -\frac{c}{4\pi} E_z H_{\varphi} =$$

$$= \frac{ie^2}{16\pi c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)} \left(\frac{1}{\beta^2 n^2} - 1\right) \omega a(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega'\left(t-\frac{z}{v}\right)} \frac{\partial a(\omega')}{\partial \rho} d\omega'.$$

Полная энергия, излучаемая электроном через поверхность цилиндра длины dl , ось которого совпадает с линией движения электрона, равна

$$dW = 2\pi\rho dl \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\rho} dt. \quad (3.1)$$

С помощью формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega+\omega')t} dt = 2\pi\delta(\omega + \omega') \quad (3.2)$$

получаем

$$\frac{dW}{dt} = \frac{i\pi e^2 \rho}{4c^2} K, \quad (3.3)$$

где

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\beta^2 n^2} - 1\right) a(\omega) \frac{\partial a(-\omega)}{\partial \rho} \omega d\omega =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\beta^2 n^2} - 1\right) \left[a(\omega) \frac{\partial a(-\omega)}{\partial \rho} - a(-\omega) \frac{\partial a(\omega)}{\partial \rho} \right] \omega d\omega. \quad (3.4)$$

Если $\beta n < 1$, то в согласии с (2.15) $a(-\omega) = a(\omega)$ и подынтегральное выражение обращается в нуль. Поэтому интегрирование

в формуле (3. 4) следует ограничить областью частот, удовлетворяющей неравенству $\beta n(\omega) > 1$. В этой области функция a определяется формулами (2. 16) и (2.17), и мы получаем

$$X = a(\omega) \frac{\partial a(-\omega)}{\partial \rho} - a(-\omega) \frac{\partial a(\omega)}{\partial \rho} = H_0^{(2)}(s\rho) \frac{\partial H_0^{(1)}(s\rho)}{\partial \rho} - H_0^{(1)}(s\rho) \frac{\partial H_0^{(2)}(s\rho)}{\partial \rho}.$$

Поскольку

$$H_0^{(1)} = J_0 + iN_0, \quad H_0^{(2)} = J_0 - iN_0, \quad (3.5)$$

это выражение равно

$$\begin{aligned} X &= 2i \left\{ J_0(s\rho) \frac{\partial N_0(s\rho)}{\partial \rho} - N_0(s\rho) \frac{\partial J_0(s\rho)}{\partial \rho} \right\} = \\ &= -2is \{ J_0(s\rho) N_1(s\rho) - N_0(s\rho) J_1(s\rho) \}. \end{aligned}$$

Выражение в скобках равно $(-2/\pi s\rho)$ [6], и, следовательно, $X = 4i/\pi\rho$. Подставляя эту величину в выражения (3. 4) и (3. 3), получаем основную формулу теории:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{c^2} \int_{\beta n > 1} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right), \quad (3.6)$$

которая совпадает с формулой (15) работы Франка и Тамма. Это выражение определяет не только полную энергию, излученную электроном на единице пути, но очевидным образом дает также спектральное распределение излучения.

По оценке Франка и Тамма, полная потеря энергии электрона на черенковское излучение в жидкостях и твердых телах имеет порядок величины несколько киловольт на сантиметр пути. Таким образом, эта величина пренебрежимо мала в сравнении с потерями энергии по другим причинам.

§ 4. В этом разделе мы пренебрежем дисперсией света и примем, что n не зависит от ω . Это позволит нам получить очень простые выражения для поля электрона.

Сначала положим $\beta n < 1$. Вводя обозначения

$$\tau = t - \frac{z}{v}, \quad r = \frac{\rho}{v} \sqrt{1 - \beta^2 n^2}, \quad (4.1)$$

получим из (2. 20) и (2. 15)

$$A_z = \frac{ie}{2c} \int_0^\infty d\omega (e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}) H_0^{(1)}(i\omega r).$$

Выражая $H_0^{(1)}$ с помощью интеграла Гейне

$$H_0^{(1)}(i\omega r) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega r \operatorname{ch} u} du$$

и меняя порядок интегрирования, получаем

$$A_z = \frac{e}{2\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{\infty} d\omega (e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}) e^{-\omega r \operatorname{ch} u} = \frac{e}{\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \operatorname{ch} u du}{\tau^2 + r^2 \operatorname{ch}^2 u}.$$

Подстановка $r \operatorname{sh} u = \xi$ дает

$$A_z = \frac{e}{\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\tau^2 + r^2 + \xi^2} = \frac{e}{c \sqrt{\tau^2 + r^2}},$$

или в согласии с (4.1)

$$A_z = \frac{ev}{c \sqrt{(z-vt)^2 + \rho^2 (1-\beta^2 n^2)}}. \quad (4.2)$$

Это совпадает с хорошо известным выражением потенциала Льенара—Вихерта для движущегося точечного заряда:

$$A_z = \frac{ev}{c \left[R \left(1 - \frac{nvR}{c} \right) \right]}, \quad (4.3)$$

где вместо скорости света стоит величина c/n .

Рассмотрим теперь случай $\beta n > 1$. Вводя на этот раз обозначения

$$\tau = t - \frac{z}{v}, \quad r = \frac{\rho}{v} \sqrt{\beta^2 n^2 - 1}, \quad (4.4)$$

получаем из (2.20), (2.16) и (2.17)

$$A_z = -\frac{ie}{2c} \int_0^{\infty} d\omega \{ e^{i\omega\tau} H_0^{(2)}(\omega r) - e^{-i\omega\tau} H_0^{(1)}(\omega r) \}.$$

Это выражение может быть преобразовано с помощью (3.5) к виду

$$A_z = \frac{e}{c} \int_0^{\infty} d\omega \{ J_0(\omega r) \sin \omega\tau - N_0(\omega r) \cos \omega\tau \},$$

или после введения обозначений $\xi = |\tau|/r$, $\eta = \omega r$, к виду

$$A_z = \frac{e}{cr} \int_0^{\infty} d\eta \{ \pm J_0(\eta) \sin(\xi\eta) - N_0(\eta) \cos(\xi\eta) \},$$

где знак первого члена в скобках положителен при $\tau > 0$ и отрицателен при $\tau < 0$. Используя формулы

$$\int_0^{\infty} J_0(\eta) \sin(\xi\eta) d\eta = -\int_0^{\infty} N_0(\eta) \cos(\xi\eta) d\eta = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < \xi < 1, \\ \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, & \xi > 1, \end{cases}$$

известные из теории бесселевых функций [7], получаем окончательно

$$A_z = \frac{2e}{cr \sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{2ev}{c \sqrt{(z - vt)^2 - \rho^2 (\beta^2 n^2 - 1)}},$$

если $vt - z > \rho \sqrt{\beta^2 n^2 - 1}$,

$$A_z = 0, \text{ если } vt - z < \rho \sqrt{\beta^2 n^2 - 1}.$$
(4. 5)

Таким образом, поле является стационарным по отношению к движущемуся электрону. Оно разрывно и ограничено конусом

$$z = vt - \rho \sqrt{\beta^2 n^2 - 1}, \quad (4. 6)$$

вершина которого $\rho = 0$, $z = vt$ совпадает с мгновенным положением электрона. Перед конусом поле исчезает. На поверхности конуса вектор-потенциал \mathbf{A} и поля \mathbf{E} и \mathbf{H} обращаются в бесконечность и постепенно спадают по мере удаления назад от поверхности конуса. Таким образом, коническая волна разрыва распространяется вдоль оси z со скоростью электрона. Нормаль к этой волне составляет с осью z угол $\theta = \arccos(1/\beta n)$.

Замечая, что в согласии с (2. 4) и (2. 5)

$$\varphi = \frac{c}{vn^2} A_z, \quad (4. 7)$$

легко можно показать, что позади конуса (4. 6)

$$H_\varphi = -\frac{q\beta\rho}{R^3}, \quad E_\rho = -\frac{q\rho}{n^2 R^3}, \quad E_z = \frac{q(vt - z)}{n^2 R^3}, \quad (4. 8)$$

где

$$R = \sqrt{(z - vt)^2 - \rho^2 (\beta^2 n^2 - 1)}, \quad q = 2e (\beta^2 n^2 - 1); \quad (4. 9)$$

все остальные компоненты \mathbf{H} и \mathbf{E} исчезают. Таким образом, магнитные силовые линии представляют собой окружности с центрами на оси z . Электрические силовые линии в любой момент времени являются прямыми, выходящими из точки $\rho = 0$, $z = vt$, где в данный момент времени находится электрон. Линии вектора Пойнтинга лежат в меридиональных плоскостях и представляют собой дуги концентрических окружностей, причем общий центр всех этих окружностей совпадает с положением электрона; эти векторные линии направлены от оси z к поверхности конуса (4. 6).

Разрывные волны такого рода хорошо известны в баллистике. Если скорость снаряда превышает скорость звука в воздухе, снаряд возбуждает довольно узкую коническую звуковую волну, стационарную по отношению к снаряду (волну Маха). Нормаль к этой волне наклонена к линии движения снаряда под углом $\theta = \arccos(c'/v)$, где c' обозначает скорость звука. Эта волна Маха может быть сфотографирована с помощью «Schlierenmethode»; несколько прекрасных фотографий воспроизведены в «Handbuch der Physik» (Geiger und Scheel, Bd. 7, S. 337—339). На одной из этих

фотографий можно видеть отражение волны от поверхности стены, вдоль которой летит снаряд.

Очень быстрый рост сопротивления, которое испытывает тело, когда его скорость становится больше скорости звука, объясняется образованием этой волны (волновое сопротивление). В целом это явление, однако, более сложно, чем соответствующая оптическая аналогия (граничные условия на поверхности тела, нелинейность уравнений аэродинамики и т. д.).

Конечно, на самом деле ни оптическая, ни акустическая волны не являются разрывными и их интенсивность ни в коем случае не обращается в бесконечность. Поскольку дисперсию звука можно не учитывать вплоть до длин волн, много меньших, чем размеры снаряда, крутизна и интенсивность звуковой волны определяются размерами и формой снаряда. В противоположность этому характеристики оптической волны определяются дисперсией света в среде, поскольку показатель преломления n падает до единицы и даже становится меньше единицы (и, следовательно, излучение обрезается) на длине волны, много большей, чем размеры электрона. Влияние дисперсии будет рассмотрено в следующем разделе, а здесь мы в заключение приведем некоторые добавочные соображения относительно гипотетического случая $n = \text{const}$, $\beta n > 1$.

В этом случае энергия, излучаемая точечным зарядом на единице пути, становится бесконечной (см. формулу (3. 6)). Можно, однако, приближенно учесть конечные размеры электрона, предположив, что излучение ограничено такими волнами, длина которых превышает диаметр электрона d . В соответствии с этим предположением, проводя в формуле (3. 6) интегрирование в пределах от $\omega = 0$ до $\omega = c/nd$ (т. е. от $\lambda = \infty$ до $\lambda/2\pi = d$), получаем

$$\frac{dW}{dl} = \frac{e^2}{2n^2d^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right). \quad (4. 10)$$

Это соотношение почти полностью совпадает с результатом, полученным Зоммерфельдом [8] почти 35 лет назад. Зоммерфельд непосредственно вычислил векторную сумму \mathbf{F} сил электромагнитного взаимодействия между всеми элементами объема жесткого сферического электрона. В частности, он исследовал случай равномерного движения электрона в вакууме и нашел, что результирующая сила \mathbf{F} исчезает только в том случае, если $v < c$. Если же $v > c$, то

$$F = \frac{9e^2}{4\pi d^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right). \quad (4. 11)$$

Эта сила противоположна направлению v . Таким образом, для поддержания равномерного движения электрона со скоростью $v > c$ необходимо приложить к электрону внешнюю силу, равную по величине F и противоположно направленную. Зоммерфельд пришел к заключению, что работа, совершаемая этой внешней силой, расходуется на излучение, так что в наших обозначениях $F =$

$=dW/dl$. Действительно, в случае $n=1$, который и рассматривал Зоммерфельд, наше приближенное выражение (4. 10) отличается от его выражения (4. 11) для F только множителем $2\pi/9 \approx 0,7$.

Отметим, что работа Зоммерфельда была написана до появления теории относительности, когда скорости, большие, чем c , считались возможными.

Несколько лет спустя Зоммерфельд и Клейн [9] опубликовали очень поучительное рассмотрение волнового сопротивления, которое испытывают снаряды, движущиеся со скоростями v , большими, чем скорость звука. Было показано, что зависимость этого сопротивления от скорости v очень близка к той, которая определяется формулой (4. 11).

§ 5. Дисперсия света существенно изменяет результаты, полученные в § 4. Показатель преломления n на очень высоких частотах никогда не превышает единицы, так что условие излучения $\beta n > 1$ может быть выполнено только в конечном интервале частот. Предположим, что для данного значения β этот интервал заключен между частотами $\omega = \omega_1, \omega = \omega_2$.

В этом разделе мы рассмотрим только излучение электрона, т. е. поле на больших расстояниях от электрона, и пренебрежем той частью поля, которая отвечает частотам, лежащим вне интервала ω_1, ω_2 . Подставляя в формулу (2. 7) асимптотическое выражение (2. 18) для A_z , получим

$$E_\rho = \frac{e}{c\sqrt{2\pi\rho}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \frac{\sqrt{s}}{n} \frac{1}{\beta n} e^{i\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)-i\rho\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)} + \text{C.C.}, \quad (5. 1)$$

$$E_z = -\frac{e}{c\sqrt{2\pi\rho}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \frac{\sqrt{s}}{n} \sqrt{1-\frac{1}{\beta^2 n^2}} e^{i\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)-i\rho\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)} + \text{C.C.}$$

и подобное же выражение для H_φ .

Эти интегралы могут быть приближенно вычислены с помощью хорошо известной приближенной формулы

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \Phi(\omega) e^{if(\omega)} = \frac{\sqrt{2\pi} \Phi(\omega_0)}{\sqrt{|f''(\omega_0)|}} e^{if(\omega_0) \pm \frac{i\pi}{4}}, \quad (5. 2)$$

где ω_0 определяет тот корень уравнения

$$f'(\omega_0) = \left(\frac{df}{d\omega}\right)_{\omega_0} = 0, \quad (5. 3)$$

который лежит в области интегрирования ($\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$). Знак «плюс» или «минус» выбирается в зависимости от того, положительна или отрицательна величина $f''(\omega_0)$.

⁶ Может существовать несколько таких интервалов, разделенных промежутками, в которых $\beta n < 1$.

Если уравнение (5. 3) не имеет корней в промежутке интегрирования, интеграл (5. 2) в первом приближении исчезает. Формула (5. 2) справедлива при условии, что функция $e^{if(\omega)}$ в промежутке интегрирования проходит через много периодов, в то время как $\Phi(\omega)$ меняется сравнительно медленно. Кроме того, величина $f'''(\omega_0) \{f''(\omega_0)\}^{-3/2}$ должна быть малой. Мы предположим, что в нашем случае (интегралы (5. 1)) все эти условия выполнены.

Уравнение (5. 3) в нашем случае записывается в виде

$$t - \frac{z}{v} - \rho \frac{ds}{d\omega} = 0. \quad (5. 4)$$

Предположим, что в промежутке интегрирования ω_1, ω_2 (т. е. в той области частот, для которой величина s действительна) значения функции g

$$g = v \frac{ds}{d\omega} \quad (5. 5)$$

заклучены в пределах между g_{\min} и g_{\max} . Тогда в любой заданный момент времени t поле излучения будет отлично от нуля только в пространстве между конусами

$$z \pm g_{\min} \rho = vt, \quad z \pm g_{\max} \rho = vt, \quad (5. 6)$$

поскольку для значений ρ и z , соответствующих точкам вне этого пространства, уравнение (5. 4) не имеет действительных корней. Таким образом, поле в любой фиксированной точке ρ, z будет отлично от нуля только в течение конечного промежутка времени $\Delta t = \frac{g_{\max} - g_{\min}}{v} \rho$.

Длительность Δt импульса излучения возрастает вместе с расстоянием ρ от оси z : дисперсия приводит к тому, что волновые пакеты расплываются все больше по мере того, как они уходят от излучающего электрона.

Вершины конусов (5. 6) совпадают с мгновенным положением электрона. Конусы расположены перед электроном, если величина g отрицательна, и позади электрона, если величина g положительна. Из (5. 5) и (2. 17) следует, что

$$g = \frac{1}{\sqrt{c^2 n^2 - 1}} \left(\beta^2 n^2 - 1 \pm \beta^2 n \omega \frac{dn}{d\omega} \right).$$

Примем во внимание, что фазовая скорость света $c/n = u$, а групповая скорость света определяется соотношением

$$\frac{1}{w} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{u} \right) = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right).$$

Поэтому выражение для g может быть переписано следующим образом:

$$g = \frac{v^2 - uw}{w \sqrt{v^2 - u^2}}. \quad (5. 7)$$

За пределами области аномальной дисперсии групповая скорость света w меньше фазовой скорости u . Поскольку, кроме того, скорость электрона v должна быть больше, чем u (чтобы было возможно излучение), величина g положительна. Поэтому конусы (5. 6), между которыми заключено излучение, лежат позади электрона.

Если, однако, групповая скорость w в среде оказывается больше фазовой скорости u , излучение может обогнать излучающее тело, движущееся со скоростью $v > u$, поскольку скорость, с которой распространяется излучение, равна не u , а w . Например, групповая скорость капиллярной ряби на поверхности воды превышает фазовую. Поэтому, если небольшое тело, например рыболовная леска, движется в тихой воде, поверхность воды *перед* телом покрывается капиллярной рябью. В то же время позади тела образуются более длинные гравитационные волны, для которых $w < u$. Волны, образуемые движущимся судном, относятся к последнему виду и лежат позади судна.

Вернемся к уравнениям (5. 1) и предположим для определенности, что $s''(\omega) = \frac{d^2s}{d\omega^2} > 0$. Используя (5. 2), находим

$$E_p = \frac{2l}{\rho v n_0^2} \sqrt{\frac{s_0}{s''(\omega_0)}} \cos \left\{ \omega_0 \left(t - \frac{z}{v} \right) - s_0 \rho \right\}, \quad (5. 8)$$

где величины ω_0 , ρ и $t - z/v$ связаны соотношением (см. формулы (5. 4) и (5. 5))

$$z + g(\omega_0)\rho = vt. \quad (5. 9)$$

Выражение для E_p отличается от (5. 8) множителем $-\sqrt{\beta^2 n_0^2 - 1}$, а выражение для \dot{H}_φ — множителем βn_0^2 , где $n_0 \equiv n(\omega_0)$.

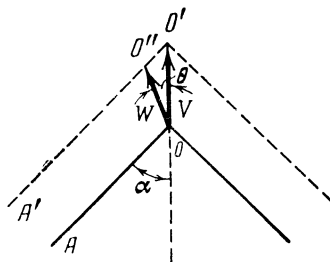
В заданный момент времени t интенсивность поля будет иметь максимальные значения в тех точках пространства, где фаза волны равна целому кратному от π :

$$\omega_0 \left(t - \frac{z}{v} \right) - s_0 \rho = m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots \quad (5. 10)$$

Исключая параметр ω_0 из уравнений (5. 9) и (5. 10), получим уравнение, связывающее ρ и $t - z/v$. Это уравнение определяет положение «гребней» электромагнитной волны. Результат зависит от закона дисперсии. Применяя этот метод к гидродинамике, можно получить весьма удовлетворительное представление для картины волн, возбуждаемых судном.

В заключение покажем, что уравнение (5. 9) имеет простой физический смысл. Рассмотрим парциальную цилиндрическую волну частоты ω_0 . Волновой вектор этой волны составляет с осью z угол $\theta_0 = \arccos(1/\beta n_0)$ (см. уравнение (2. 18)). Волновой пакет, образованный суперпозицией волн в бесконечно малом интервале частот ω_0 , $\omega_0 + d\omega_0$, также будет распространяться в направлении θ_0 . Скорость пакета будет равна групповой скорости ω_0 . Учтем те-

перь, что поле электрона, очевидным образом, стационарно по отношению к электрону. Это должно быть верно и для той части поля, которая образована волнами в частотном интервале $\omega_0, \omega_0 + d\omega_0$. Свойство стационарности достаточно для того, чтобы определить эту часть поля. Действительно, поле, образованное суперпозицией волн $\omega_0, \omega_0 + d\omega_0$, может быть стационарно по отношению к электрону только на конической поверхности, обладающей следующим свойством: параллельное перемещение любой из образующих конуса (т. е. линии пересечения конуса с меридиональной плоскостью) в направлении θ_0 со скоростью w_0 эквивалентно параллельному переносу этой образующей в направлении z со скоростью v . Это условие может быть выражено соотношением (см. рисунок)



$$\frac{w_0}{\sin \alpha} = \frac{v}{\sin (\pi - \alpha - \theta_0)},$$

где α обозначает угол между образующей конуса и осью z . Принимая во внимание, что $\cos \theta_0 = 1/\beta n_0 = u_0/v$, легко получим

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{v - w_0 \cos \theta_0}{w_0 \sin \theta_0} = \frac{v^2 - u_0 w_0}{w_0 \sqrt{v^2 - u_0^2}} = g(\omega_0).$$

Поскольку $\operatorname{ctg} \alpha = (vt - z)/\rho$, это соотношение эквивалентно уравнению (5. 9)

§ 6. Представляет некоторый интерес рассмотреть нашу задачу также с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с электронами.

Обозначим через E', B', D', H' векторы поля, измеренные в системе $S' (x', y', z', t')$, где электрон покоится. Пусть, далее, E, B, D, H — векторы поля, измеренные в системе $S (x, y, z, t)$, которую мы до этого момента использовали и которая связана с преломляющей средой. Компоненты векторов E и H определяются формулами (2. 21); компоненты D отличаются от компонент E множителем

⁷ Строго говоря, эти переносы не являются вполне эквивалентными, поскольку первый из них переводит образующую OA не в положение $O'A'$, а в положение $O''A'$. Однако это различие, относящееся к полю на отрезке $O'O''$, снимается за счет излучения, испущенного электроном на пути OO' .

$n^2(\omega)$ под знаком интеграла; наконец, $\mathbf{V} = \mathbf{H}$ (поскольку мы предположили, что $\mu = 1$).

Выражая с помощью преобразования Лоренца E' , V' и т. д. через E , V и т. д., получаем

$$\begin{aligned}
 E'_\rho &= \frac{e\beta}{2c\sqrt{1-\beta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\xi} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \frac{\partial a}{\partial \rho} d\omega, \\
 E'_z &= \frac{ie}{2c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\xi} \left(\frac{1}{\beta^2 n^2} - 1\right) \omega a d\omega, \\
 D'_\rho &= \frac{e\beta}{2c\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\xi} \frac{\partial a}{\partial \rho} d\omega, \\
 D'_z &= \frac{ie}{2c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\xi} \left(\frac{1}{\beta^2} - n^2\right) \omega a d\omega, \\
 B'_\varphi &= \frac{e\beta}{2c\sqrt{1-\beta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\xi} \left(\frac{1}{n^2} - 1\right) \frac{\partial a}{\partial \rho} d\omega,
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

где

$$\xi = -\frac{z'\sqrt{1-\beta^2}}{v}.$$

Все остальные компоненты векторов поля в системе S' обращаются в нуль.

Таким образом, поле в системе покоя электрона является стационарным, как это и должно быть, напряженность магнитного поля \mathbf{H} исчезает, но магнитная индукция \mathbf{B} отлична от нуля, если $n \neq 1$. Это объясняется изменением поляризации среды при движении через неоднородное электрическое поле электрона. Магнитные поля такого рода были экспериментально исследованы Рентгеном и Эйхенвальдом.

Согласно (6.1) постоянное поле статических зарядов (так же как и стационарных токов) определяется дисперсионными свойствами среды, если среда движется. Это объясняется необычной связью между векторами \mathbf{D}' , \mathbf{E}' , \mathbf{V}' , \mathbf{H}' , которая имеет место в движущейся среде с дисперсией. Указанная связь может быть выведена из обычных соотношений типа (2.3) с помощью преобразования Лоренца. В случае стационарного поля связь соответствует некоторым определенным соотношениям между коэффициентами разложения векторов \mathbf{D}' , \mathbf{E}' , \mathbf{V}' , \mathbf{H}' по системе периодических функций $e^{-2\pi i \frac{z'}{\lambda}}$, зависящих от пространственной координаты z . В соотношениях между векторами поля входит значение показателя преломления $n(\omega)$ для $\omega = 2\pi v/\lambda \sqrt{1-\beta^2}$.

Предположим, что в некоторой области частот $\beta n(\omega) > 1$. Рассматривая эту задачу в системе координат, связанной со средой, мы нашли, что в этом случае электрон непрерывно излучает энергию. Реакция излучения на электрон эквивалентна силе сопротивления (см. формулу (3.6))

$$F = \frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{c^2} \int_{\beta n > 1} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right),$$

которая стремится замедлить электрон до скорости $\beta = 1/n_{\max}$. Очевидно, соответствующая сила F' должна действовать на электрон также и в его системе покоя S' . Эта сила будет увлекать электрон в направлении движения среды. С помощью релятивистских формул для преобразования силы получаем (поскольку сила F антипараллельна скорости электрона)

$$F' = F = \frac{e^2}{c^2} \int_{\beta n > 1} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right). \quad (6.2)$$

Представляет некоторый интерес вычислить силу F' в системе S' без всякого обращения к системе S . Поскольку в точке, где расположен электрон, поля E' и H' обращаются в бесконечность, следует при вычислении воспользоваться выражением для тензора энергии-импульса.

Релятивистское выражение для тензора энергии-импульса было впервые дано Минковским и обобщено Делленбахом⁸ на случай сред, в которых отсутствует линейная связь с постоянными коэффициентами между E , D , H и B (т. е. случай сред с дисперсией и сред с гистерезисом). По Делленбаху,

$$\begin{aligned} 4\pi T_i^k &= E_i D_k + H_i B_k - \delta_{ik} \left\{ \int D dE + \int B dH \right\}, \\ 4\pi T_4^k &= [E, H]_k, \quad 4\pi T_k^4 = -[D, B]_k, \\ 4\pi T_4^4 &= \int E dD + \int H dB, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $i, k = 1, 2, 3$ и интегрирование в выражениях вида $\int D dE$ и т. п. следует проводить в пределах от момента времени t_0 , в который все векторы поля были равны нулю, до момента времени t , в который нужно определить величину T_{α}^{β} .

Следует отметить, что Абрагам выдвинул возражения против тензора Минковского (эти возражения относятся также и к обобщению, проведенному Делленбахом). Возражения были вызваны тем, что тензор Минковского несимметричен ($T_{\alpha\beta} \neq T_{\beta\alpha}$). Абрагам

⁸ Ссылки на работы Г. Минковского, Делленбаха и М. Абрагама можно найти в книге: *W. Pauli. Relativitätstheorie. Leipzig, 1921, § 35* (имеется перевод: *В. Паули. Теория относительности. М.—Л., ГИТТЛ, 1947.— Прим. ред.*). Паули явно согласен с аргументами Абрагама.

предложил для тензора энергии-импульса другое выражение $T'_{\alpha\beta}$. Это выражение отличается от (6. 3) некоторыми добавочными членами $t_{\alpha\beta}$, которые сложным образом зависят от скорости среды и добавление которых делает тензор $T'_{\alpha\beta}$ симметричным:

$$T'_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}, \quad T'_{\alpha 3} = T'_{\beta\alpha} \quad (6. 4)$$

Мы надеемся показать в другом месте, что возражения Абрагама несущественны и что следует принять для $T'_{\alpha\beta}$ выражение Минковского — Делленбаха. Однако здесь нам нет нужды входить в подробности, поскольку силы, действующие на электрический заряд, помещенный в однородную среду, несомненно определяются тензором (6. 3) совершенно безотносительно к тому, имеются или нет члены $t_{\alpha\beta}$ в общем выражении для тензора энергии-импульса. Действительно, подставим компоненты (6. 3) в уравнения

$$f_i = \frac{\partial T'_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}, \quad -A = c \frac{\partial T'_{i3}}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad (6. 5)$$

которые определяют плотность f электромагнитных пондеромоторных сил и работу A , совершаемую этими силами над единицей объема в единицу времени.

Если среда однородна, так что соотношения между векторами поля \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} не содержат явно пространственных и временных координат, легко получить с помощью уравнений поля

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (6. 6)$$

следующий результат:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{B}], \quad A = \mathbf{jE}. \quad (6. 7)$$

Отметим, что формулы (6. 7) вытекают из (6. 3), (6. 5) и (6. 6) совершенно независимо от частного вида соотношений между \mathbf{E} , \mathbf{H} , с одной стороны, и \mathbf{D} , \mathbf{B} — с другой.

Нет сомнений в том, что (6. 7) определяет силы, действующие на электрический заряд. Любые добавочные члены $t_{\alpha\beta}$ в выражении для $T'_{\alpha\beta}$ соответствуют, очевидно, добавочным силам, действующим на среду, а не на электрический заряд⁹. Поскольку мы хотим определить силы, действующие на электрический заряд, а

⁹ Если пользоваться выражением (6.4) для тензора Абрагама, то, например, для случая однородной покоящейся среды, помещенной в электрическое поле, получается $f = \rho\mathbf{E} + 1/2 \text{rot} [\mathbf{P}, \mathbf{E}]$, где $\mathbf{P} = (\mathbf{D} - \mathbf{E})/4\pi$ — вектор поляризации. Таким образом, в анизотропных средах, где векторное произведение $[\mathbf{P}, \mathbf{E}]$ может быть отлично от нуля, в добавление к силе $\rho\mathbf{E}$, действующей на электрический заряд, появляется слагаемое $(1/2) \text{rot} [\mathbf{D}, \mathbf{E}]$, представляющее собой силу, действующую на среду.

не на среду, мы должны использовать выражение (6. 3) для $T_{\alpha\beta}$ совершенно безотносительно к расхождению между Абрагамом и Минковским.

После этого долгого, но необходимого отступления мы можем, наконец, определить силу F' , действующую на электрон в равномерно движущейся среде. Поскольку поле стационарно, $\partial T_{\alpha\beta}^i/\partial t=0$, и $F'_k = \oint T_{kn} dS$, где \mathbf{n} — нормаль к элементу поверхности dS , и интегрирование может быть распространено на любую замкнутую поверхность, окружающую электрон. Пусть это будет поверхность цилиндра бесконечно малого радиуса ρ и бесконечной длины, ось которого совпадает с осью z . Очевидно, $F'_x = F'_y = 0$, и, поскольку $\mathbf{H}' = 0$, получаем

$$F'_z = \int_{-\infty}^{+\infty} T'_{z\rho} 2\pi\rho dz' = \frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^{+\infty} E'_z D'_\rho dz'.$$

Подставляя значения E'_z и D'_ρ из (6. 1) и используя соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz' e^{-\frac{z z'}{v}} (\omega + \omega') \sqrt{1 - \beta^2} = 2\pi\delta\left(\frac{\omega + \omega'}{v} \sqrt{1 - \beta^2}\right) = \frac{2\pi v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \delta(\omega + \omega')$$

(ср. формулу (3. 2)), получаем

$$F'_z = -\frac{i\pi\rho e^2}{4c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\beta^2 n^2} - 1\right) \omega a(\omega) \frac{\partial a(-\omega)}{\partial \rho} d\omega.$$

С учетом (3. 3) и (3. 4) это соотношение эквивалентно формуле (6. 2), где F' обозначает абсолютную величину F'_z .

Следует отметить, что $E'_z D'_\rho \neq E'_\rho D'_z$, так что симметричное выражение для $T_{\alpha\beta}$ привело бы к совершенно иному результату в противоречии с (6. 2).

§ 7. До сих пор мы предполагали, что электрон движется в бесконечной однородной среде с постоянной скоростью, которая не менялась с момента времени $t = -\infty$. Очевидно, что если скорость электрона только приблизительно оставалась постоянной в течение конечного промежутка времени, то при определенных условиях поле электрона будет близко к тому, которое мы рассмотрели. Для того чтобы сделать более определенное утверждение, мы рассмотрим подробнее один особенно простой частный случай. Мы рассмотрим закон движения электрона, который в некоторых отношениях является более близким к действительному движению, чем принятый нами выше.

Предположим, что электрон находился в покое от $t = -\infty$ до момента времени $t = -t_0$, затем внезапно приобрел конечную скорость v и эта скорость v оставалась неизменной вплоть до момента времени $t = t_0$, а в этот момент электрон снова мгновенно оста-

новился. Выбрав подходящим образом оси координат, найдем, что соответствующая плотность тока определяется равенствами

$$\begin{aligned} j_z &= ev \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt), & \text{если } -vt_0 < z < vt_0; \\ j_z &= 0, & \text{если } |z| > vt_0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Разлагая j_z в интеграл Фурье, получаем

$$\left. \begin{aligned} j_z(\omega) &= \frac{e}{2\pi} \delta(x) \delta(y) e^{-\frac{i\omega z}{v}}, & \text{если } |z| < vt_0, \\ j_z(\omega) &= 0, & \text{если } |z| > vt_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Поле электрона можно определить методом, использованным в § 2, но в настоящем случае удобнее использовать хорошо известное выражение для решения уравнения (2.5):

$$A_\omega(x, y, z) = \frac{1}{c} \int \frac{j_\omega(x', y', z')}{R} e^{\frac{\pm i\omega n R}{c}} dx' dy' dz', \quad (7.3)$$

где

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

и под A_ω и j_ω подразумеваются проекции соответствующих векторов на ось z . Два знака в показателе экспоненты отвечают запаздывающему и опережающему вектор-потенциалам; отбрасывая опережающий потенциал, мы оставляем знак «минус».

Подставляя (7.2) в (7.3), находим

$$A_\omega(\rho, z) = \frac{e}{2\pi c} \int_{-vt_0}^{+vt_0} \frac{dz'}{R} e^{-\frac{i\omega}{v}(z' + \beta n R)}, \quad (7.4)$$

где

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

На больших расстояниях от электрона ($R \gg vt_0$) $R \approx R_0 - zz'/R_0 = R_0 - z' \cos \theta$, где $R_0 = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ и $\cos \theta = z/R_0$. Пренебрегая разностью между R и R_0 в знаменателе подынтегрального выражения, получаем

$$A_\omega = \frac{e}{2\pi c R_0} e^{-\frac{i\omega n}{c} R_0} \int_{-vt_0}^{+vt_0} dz' e^{-\frac{i\omega z'}{v}(1 - \beta n \cos \theta)} = \frac{e \beta q(\omega)}{\pi R_0 \omega} e^{-\frac{i\omega n R_0}{c}}, \quad (7.5)$$

где

$$q(\omega) = \frac{\sin \{\omega t_0 (1 - \beta n \cos \theta)\}}{1 - \beta n \cos \theta}. \quad (7.6)$$

Наконец с помощью формул (2.4) и (2.7) находим, что в волновой зоне, где $R_0 \gg c/n\omega$, поля записываются в виде

$$H_\varphi = -\frac{2e\beta^2}{\pi c R_0} \sin \theta \int_0^\infty n q(\omega) \sin \omega \left(t - \frac{n R_0}{c} \right) d\omega,$$

$$E_r = -\frac{2e\beta}{\pi c R_0} \sin \theta \cos \theta \int_0^{\infty} q(\omega) \sin \omega \left(t - \frac{nR_0}{c} \right) d\omega, \quad (7.7)$$

$$E_z = \frac{2e\beta}{\pi c R_0} \sin^2 \theta \int_0^{\infty} q(\omega) \sin \omega \left(t - \frac{nR_0}{c} \right) d\omega;$$

все остальные компоненты \mathbf{H} и \mathbf{E} равны нулю.

Таким образом, на больших расстояниях от электрона ($R_0 \gg \gg vt_0$, $R_0 \gg c/n\omega$) поле представляет собой суперпозицию сферических волн, имеющих общее начало в точке, где находится электрон. Поляризация этих волн такая же, как в случае диполя, колеблющегося вдоль оси z . Однако зависимость амплитуды от полярного угла θ определяется не только обычными множителями, стоящими в формулах (7.7) перед интегралом, но также и множителем $q(\omega)$ под знаком интеграла.

Если $\omega t_0 \gg 1$, этот множитель имеет острый максимум при $\beta n \cos \theta = 1$ и, таким образом, усиливает волны в интервале частот $\beta n(\omega) > 1$, излучаемые под острым углом $\theta = \arccos(1/\beta n)$ к направлению движения электрона. Излучение вне этой области частот обусловлено главным образом ускорением электрона в моменты $t = \pm t_0$ и имеет, вообще говоря, такую же зависимость от угла θ , как обычное излучение.

Используя формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega [t + \alpha(\omega)] \sin \omega' [t + \alpha(\omega')] dt = \pi \delta(\omega - \omega'); (\omega > 0, \omega' > 0),$$

можно показать, что интеграл по времени от вектора Пойнтинга определяется следующим выражением:

$$\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{E}\mathbf{H}] dt = \frac{e^2 \beta^2}{c \pi^2 R_0^2} \sin^2 \theta \frac{R_0}{R_0} \int_0^{\infty} n q^2(\omega) d\omega.$$

Полная энергия, излучаемая электроном, определяется выражением

$$W = \frac{2e^2 \beta^2}{\pi c} \int_0^{\infty} n J(\omega) d\omega, \quad (7.8)$$

где

$$J(\omega) = \int_0^{\pi} q^2(\omega) \sin^3 \theta d\theta. \quad (7.9)$$

Этот интеграл может быть выражен через элементарные функции и функции Si и Si . Для наших целей достаточно привести значение J для случая $\omega t_0 \gg 1$. Пренебрегая быстро осциллирующими

членами типа $\sin 2\omega t_0$, получаем

$$J = J_1 = \frac{1}{\beta^2 n^2} \left(\ln \frac{1 + \beta n}{|1 - \beta n|} - 2\beta n \right), \quad \text{если } \beta n < 1, \\ J = J_1 + \frac{\pi \omega t_0}{\beta n} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right), \quad \text{если } \beta n > 1. \quad (7.10)$$

Эти выражения справедливы при условии, что $\omega t_0 |1 - \beta n| \gg 1$. Величина J всегда конечна и для $\beta n = 1$ принимает значение

$$J = \ln(4\gamma \omega t_0) - 1,$$

где $\gamma = 1,781 \dots$

Согласно результату (7.10) излучение электрона можно разбить на две части. Одна из них соответствует $J = J_1$ и обязана своим происхождением ускорению электрона в моменты времени $t = \pm t_0$. Подставляя вместо J в формуле (7.8) значение J_1 , мы получаем расходящийся результат. Этого и следовало ожидать, поскольку мы предположили, что ускорение электрона бесконечно.

Однако вряд ли это предположение существенно влияет на вторую часть излучения, которая отвечает добавочному слагаемому в (7.10) в случае $\beta n > 1$. Подставляя вместо J в формулу (7.8) разность $J - J_1$ получаем

$$\Delta W = \frac{2e^2 \beta t_0}{c} \int_{\beta n > 1} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right).$$

Разделив ΔW на длину пути электрона $2vt_0$, мы снова приходим к нашей предыдущей формуле (3.6).

Новый вывод этой формулы имеет, однако, то преимущество, что он позволяет установить условие, при котором этот вывод справедлив, а именно:

$$\omega t_0 \gg 1. \quad (7.11)$$

Несколько экстраполируя результаты этого раздела, мы можем определить t_0 как такой промежуток времени, в течение которого скорость электрона можно считать постоянной. Для нашей цели скорость v может считаться постоянной в течение времени t_0 , если разность между vt_0 и тем путем, который в действительности пройдет электрон, окажется много меньше, чем длина волны рассматриваемого излучения:

$$\frac{t_0^2}{2} \frac{dv}{dt} \ll \lambda = \frac{2\pi c}{n\omega},$$

или

$$\omega^2 t_0^2 \frac{1}{2\pi\omega} \frac{dv}{dt} \ll \frac{2c}{n}.$$

Это условие и условие (7.11) могут быть одновременно удов-

летворены подходящим выбором t_0 только в том случае, если

$$\frac{1}{2\pi\omega} \frac{dv}{dt} = T \frac{dv}{dt} \ll \frac{c}{n}, \quad (7.12)$$

т. е. если изменение величины βn за период рассматриваемой волны много меньше единицы. Только при этом условии формула (3. 6) может быть использована для вычисления интенсивности излучения на частоте $\omega = 2\pi/T$.

Для быстрого электрона, движущегося в прозрачной среде, величина потерь на ионизацию оказывается настолько малой, что условие (7. 12) выполняется для всех частот, соответствующих видимому излучению. Используя формулу (3. 6), следует, конечно, учитывать постепенное замедление электрона и рассматривать величину β как функцию пути, пройденного электроном. Условие (7. 12) нарушается только для сравнительно больших интервалов времени, когда электрон резко меняет свою скорость — при столкновениях с атомными ядрами или атомными электронами.

В действительности полная интенсивность когерентного излучения электронов при любой их скорости и в любой преломляющей среде пренебрежимо мала в сравнении с обычным тормозным излучением. Экспериментальное исследование излучения Вавилова—Черенкова стало возможным только из-за различия в спектрах обоих видов излучений, а также потому, что в видимой области интенсивность когерентного излучения много больше, чем тормозного.

Значительная часть настоящей статьи представляет собой разработку и развитие многочисленных замечаний, высказанных автору Л. И. Мандельштамом.

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила
20 июня 1939 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. М. Франк, И. Е. Тамм. Докл. АН СССР, 1937, 14, 107.
2. П. А. Черенков. Докл. АН СССР, 1934, 2, 451.
3. С. И. Вавилов. Докл. АН СССР, 1934, 2, 457.
4. П. А. Черенков. Докл. АН СССР, 1938, 20, 651; 1938, 21, 116 и 319; Phys. Rev., 1937, 52, 378.
5. G. B. Collins, V. G. Reiling. Phys. Rev., 1938, 54, 499.
6. Е. Янке, Ф. Эмде. Таблицы функций с формулами и кривыми. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
7. N. Nielsen. Handbuch der Cylinderfunktionen. Leipzig, 1904, S. 195.
8. A. Sommerfeld. Götting. Nachricht, 1904, 99, 363; 1905, 201.
9. F. Klein, A. Sommerfeld. Theorie des Kreisels, Bd. IV. Leipzig, 1910, S. 925.

О ТОКАХ В ИОНОСФЕРЕ, ОБУСЛОВЛИВАЮЩИХ ВАРИАЦИИ ЗЕМНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ¹

§ 1. Мы будем рассматривать только так называемые солнечные вариации земного магнитного поля, основной период которых равен одним суткам. Анализ этих суточных вариаций показывает, что источники их магнитного поля почти полностью лежат выше земной поверхности. В настоящее время считается бесспорным [1], что источниками этого магнитного поля являются электрические токи в ионосфере, необходимое для возбуждения экспериментально измеренного магнитного поля суточных вариаций. В дальнейшем мы будем для краткости называть это распределение токов «наблюдаемым».

При обсуждении вопроса о причинах, обуславливающих циркуляцию токов в ионосфере, необходимо иметь в виду два обстоятельства. Во-первых, благодаря магнитному полю Земли H свободные пути ионов и электронов между последовательными соударениями представляют собой не отрезки прямых, а отрезки винтовых линий, оси которых направлены по магнитному полю, а радиус равен

$$r = \frac{m v_{\perp}}{e H}.$$

Здесь e и m означают заряд и массу иона (электрона), v_{\perp} — составляющую его скорости, перпендикулярную полю H , и c — скорость света. Среднее значение r равно

$$r = \frac{c}{e H} \sqrt{\frac{m k T}{2}}, \quad (1)$$

где T — абсолютная температура, а k — постоянная Больцмана. При $T_{\text{абс}} = 300^{\circ}$ и $H = 0,3$ гс значение r равно для электронов 0,6 см, для наиболее тяжелых, имеющих в атмосфере ионов O_2 — 150 см.

Надо различать две области ионосферы: в нижней r больше длины свободного пробега l ионов (электронов), в верхней же $r < l$. Граница между этими областями проходит примерно на высоте 100 км для электронов и 150 км для ионов O_2 , т. е., вообще говоря, между слоями E и F . Свойства нижней ионосферы аналогичны свойствам ионизированных газов, изучаемых в лабораторных условиях; свойства же верхней ионосферы во многих отношениях аномальны и будут рассмотрены в дальнейшем.

¹ Изв. АН СССР, серия физ., 1944, 8, № 2, 30; J. Phys. USSR, 1944, 8, 383.

Единственные прямые методы определения ионизации верхних слоев атмосферы, основанные на радиотехнических измерениях, позволяют определить не истинную плотность электронов и ионов, а так называемую эффективную электронную плотность $N_{эфф}$:

$$N_{эфф}/m_e = \sum N_i/m_i, \quad (2)$$

где N_i — число заряженных частиц массы m_i в единице объема, а m_e — масса электрона. Так как масса ионов в атмосфере в 25 000 — 60 000 раз больше m_e , то при заданном $N_{эфф}$ полная ионизация $\sum N_i$ может варьировать в десятки тысяч раз и может быть в настоящее время оценена лишь весьма приближенно².

В литературе дискутировались три различные гипотезы о происхождении ионосферных токов суточной периодичности: 1) так называемая динамотеория Стьюарта и Шустера; 2) диамагнитная теория Ганна и 3) теория гравитационного дрейфа Чепмена³.

Динамотеория объясняет эти токи ветрами в ионосфере — при движении ионизированного газа поперек магнитного поля Земли H в газе должны индуцироваться электрические токи в направлении, перпендикулярном как магнитному полю H , так и направлению ветра. Эти токи могут быть значительными только в нижней ионосфере, так как в перпендикулярных H направлениях электропроводность верхней ионосферы (при $r \ll l$) весьма мала. Так как прямых сведений о периодических ветрах в ионосфере у нас нет, то проверка этой гипотезы весьма затруднительна. Основной трудностью для нее является фаза ионосферных токов (т. е. зависимость их от времени дня). Правда, производившиеся рядом авторов вычисления ветров в ионосфере, основанные на экстраполяции в ионосферу колебаний атмосферного давления на земной поверхности и приведшие к неправильной фазе ионосферных токов, совершенно неубедительны, так как указанная экстраполяция совершенно необоснованна. Однако Бартельс и Чепмен [1] указывают, что и прямые вычисления фазы ионосферных ветров, основанные на простейших допущениях, приводят к расхождению между вычисленной фазой токов и наблюдаемой на 6 час⁴.

Гипотеза Ганна основана на предположении, что верхняя ионосфера благодаря наличию в ней свободных электронов и ионов является диамагнитной и намагничивается земным полем. Изменения плотности ионизации в течение суток обуславливают соответствующие изменения диамагнитной восприимчивости ионосферы, а стало быть, и ее магнитного поля. Эта много обсуждав-

² Здесь указывается на возможность того, что в ионосфере имеется большое количество отрицательных ионов, которые слабо влияют на распространение радиоволн. Впоследствии выяснилось, что количество отрицательных ионов значительно только в самых нижних слоях атмосферы. — *Прим. ред.*

³ Современное состояние вопроса см. в статье: *R. S. Lindzen, S. Chapman. Space Sci. Rev., 1969, 10, 3.* — *Прим. ред.*

⁴ К этой монографии, к которой приложена полная библиография геомагнитной литературы, мы отсылаем читателя за всеми справками.

шаяся в литературе гипотеза основана, однако, на прямом недоразумении: хорошо известно, что если отвлечься от незначительной квантовой поправки, то свободные заряды никакого диамагнетизма не обуславливают. Действительно, изотропное распределение скоростей свободных зарядов не может нарушиться под воздействием магнитного поля: в магнитном поле вектор скорости каждого заряда начинает прецессировать вокруг направления поля, но распределение скоростей остается изотропным, так что средняя плотность электронных токов (т. е. намагниченность среды) остается равной нулю. Строгое доказательство этого положения хорошо известно. Мы приведем его здесь потому, что оно непонятным образом игнорировалось в геофизической литературе не только при обсуждении гипотезы Ганна, но и при обсуждении чепменовского гравитационного дрейфа.

Рассмотрим газ, частицы которого частью заряжены, частью не заряжены и взаимодействие которых любым образом зависит от их относительных координат, причем газ может находиться как в магнитном поле H , так и в любом потенциальном силовом поле (к такому полю сводится, в частности, действие стенок содержащего газ сосуда). Согласно основным положениям статистической механики, распределение атомов газа в фазовом пространстве координат и импульсов \mathbf{r}_k и \mathbf{p}_k будет в состоянии равновесия каноническим распределением Гиббса, т. е. будет определяться

большмановским множителем $e^{-\frac{E(\mathbf{r}_k, \mathbf{p}_k)}{kT}}$. Перейдем от пространства координат и импульсов атомов \mathbf{r}_k и \mathbf{p}_k к пространству координат и скоростей \mathbf{r}_k и \mathbf{v}_k . В магнитном поле, как известно,

$$\mathbf{v}_k = \frac{1}{m_k} \left(\mathbf{p}_k - \frac{e_k}{c} \mathbf{A}(r_k) \right),$$

где m_k и e_k — масса и заряд k -го атома, а $\mathbf{A}(r_k)$ — векторный потенциал поля H в месте нахождения этого атома. Якобиан преобразования переменных $\mathbf{r}_k, \mathbf{p}_k$ к переменным $\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k$, как легко убедиться, равен постоянной m_k^3 . Поэтому распределение скоростей атомов будет определяться тем же большмановским фактором $e^{-\frac{E(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)}{kT}}$, как и распределение импульсов. Так как при наличии магнитного поля энергия E газа также зависит от координат и скоростей его атомов, как и в отсутствие магнитного поля

$$E(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k) = \sum_k \frac{m_k v_k^2}{2} + V(r_k)$$

(где $V(r_k)$ — потенциальная энергия газа), то теорема доказана: магнитное поле не оказывает влияния на равновесное распределение атомов по скоростям и координатам.

Критика гипотезы Ганна была дана Каулингом [2] в работах, с которыми я не имел возможности ознакомиться; по-видимому,

Каулинг исходил не из общих положений статистики, а из рассмотрения специальных моделей. Во всяком случае еще в 1937 г. Халбарт [3] пытался возражать Каулингу и утверждал, что ответ на вопрос о диамагнетизме свободных зарядов зависит от предположений о механизме их соударений.

Переходим к третьей гипотезе о происхождении ионосферных токов — гипотезе гравитационного дрейфа Чепмена.

Чепмен исходит из рассмотрения движения свободного заряда под совокупным воздействием магнитного поля H и силы тяжести mg (где g — ускорение свободного падения). Допустим для простоты, что мы находимся на земном экваторе, где магнитное поле направлено горизонтально к северу. Легко убедиться, что положительный свободный заряд (помимо возможного движения по инерции по направлению меридиана) описывает в плоскости экватора циклоиду, т. е. описывает окружность, центр которой перемещается к востоку со скоростью

$$v = cmg/eH. \quad (3)$$

Отрицательные заряды будут «дрейфовать» к западу. В результате получается текущий с запада на восток электрический ток, плотность которого равна

$$j_B = \frac{cg}{H} \sum N_i m_i, \quad (4)$$

где N_i — плотность зарядов массы m_i . Вне экваториальной зоны гравитационный дрейф выражается формулой

$$j_B = \frac{cg \cos \lambda}{H_s} \sum N_i m_i, \quad (5)$$

где λ — географическая широта, H_s — напряженность магнитного поля на экваторе.

Исходя из убеждения, что формулы (4) и (5) применимы к движению зарядов в верхних слоях ионосферы, в которых длина свободного пробега зарядов l больше среднего радиуса r круговой орбиты зарядов в магнитном поле, определяемого формулой (4), Чепмен высказал в 1929 г. гипотезу, что ионосферные токи объясняются гравитационным дрейфом зарядов в этой области ионосферы. Правда, используя тогдашние данные радиоизмерений ионизации атмосферы, Чепмен получил для силы токов, обусловленных гравитационным дрейфом, слишком малое значение (раз в 100 меньше наблюдаемого); однако уточнение радиоизмерений уменьшило к 1940 г. расхождение между вычисленной и наблюдаемой силой тока до фактора, лежащего в пределах от 3 до 10 [1]. Этот результат получен в предположении, что число ионов в верхней атмосфере равно числу электронов; вполне возможно, однако, что значительная часть отрицательных зарядов в верхней ионосфере является отрицательными ионами, а не электронами. В этом случае измеренному значению $N_{эфф}$ (см. уравнение (2)) соответ-

стует значительно большая плотность ионизации ΣN_i , так что наблюдаемая сила ионосферных токов, по-видимому, может быть согласована с формулами гравитационного дрейфа. Это ясно понимал Чемпен и в 1929 г., так что основное затруднение для своей гипотезы он усматривал в фазе ионосферных токов. Дело в том, что суточный максимум ионизации, а стало быть, согласно уравнению (4) и максимальный дрейф не могут, очевидно, предшествовать полудню. Между тем максимум ионосферных токов наблюдается на экваторе в 11 час утра.

Мы изложили чепменовскую теорию гравитационного дрейфа сравнительно подробно потому, что, как мы увидим, правильная теория приводит к результатам, близким к результатам Чемпена, хотя его теория столь же ошибочна и по тем же причинам, как и теория Ганна.

Действительно, из изложенной выше общей статистической теории следует, что магнитное поле столь же мало может повлиять на равновесное распределение свободных зарядов по скоростям при наличии сил тяготения, как и в отсутствие этих сил. Ошибка Чемпена состоит в том, что он заменяет в своих рассуждениях ионизированный газ совокупностью совершенно свободных и независимых в своем движении ионов. Достаточно отметить, что в отсутствие магнитного поля каждый такой ион падал бы вниз с ускорением, тогда как газ в равновесном состоянии отнюдь не падает, а распределяется по высоте согласно барометрической формуле. Имеющиеся в статье Чемпена 1929 г. попытки доказать, что учет столкновений ионов друг с другом и с неионизированными молекулами не видоизменяет полученного им результата, очевидным образом несостоятельны. На несостоятельность этих попыток впервые указал тот же Каулинг [2], который подверг критике диамагнитную теорию и который в этом случае также, по-видимому, исходил не из общих положений статистической механики, а из менее убедительного рассмотрения специальных моделей. Во всяком случае, Халбарт [3] в своем обзоре 1937 г. подробно излагает теорию гравитационного дрейфа, но вовсе не упоминает опубликованных за несколько лет до этого возражений Каулинга. Чемпен и Бартельс в монографии 1940 г. излагают эти возражения довольно невнятно, и, по-видимому, без полной убежденности в их справедливости, и заканчивают обсуждение теории гравитационного дрейфа замечанием, что против нее говорят как возражения Каулинга, так и несогласие ее результатов с наблюдениями.

Однако как Чемпеном, так и Каулингом было упущено из виду одно весьма существенное обстоятельство: реальная ионосфера отнюдь не находится в равновесном состоянии, в частности, плотность ионов меняется в ней с высотой отнюдь не по барометрической формуле. В последующем мы покажем, что благодаря этому в ионосфере должны возникать токи типа чепменовского гравитационного дрейфа, максимум которых, однако, может наступать до полудня, как то требуется для согласия с наблюдениями. Вкратце

дело обстоит следующим образом. Чепменовский дрейф ионов и электронов имел бы место, если бы заряды ионосферы в отсутствие магнитного поля свободно падали под влиянием своего веса. В равновесной атмосфере вес ионов точно уравновешивается *парциальным* давлением ионного газа $p' = kT \Sigma N_i$, и никакого дрейфа нет (см. формулу (33)). В реальной атмосфере дрейф ионов соответствует разнице между весом ионов, находящихся в единице объема, и градиентом *парциального* давления p' ионного газа ⁵. Этот имеющий место в действительности дрейф по порядку величины не отличается от вычисленного Чепменом, максимум же его может предшествовать полудню, как то требуется для согласия с наблюдениями.

§ 2. Движение зарядов в ионосфере может быть точно определено путем решения соответствующего кинетического уравнения Больцмана. В общей своей форме уравнение это очень сложно, однако для наших целей его можно значительно упростить. Предположим, во-первых, что распределение ионов и электронов по скоростям в каждом элементе объема ионосферы мало отличается от максвелловского распределения, соответствующего местной температуре T . Это предположение означает, что интересующее нас упорядоченное движение ионов (перераспределение их по высоте, диффузия, дрейф и т. п.) происходит медленно по сравнению с временем установления в каждом участке атмосферы местного максвелловского распределения скоростей ионов, образующихся под воздействием солнечной радиации, а также путем присоединения электронов к нейтральным атомам и т. д. Во-вторых, допустим, что упорядоченное движение ионов в атмосфере является квазистационарным, т. е. что оно в каждый данный момент определяется мгновенным распределением плотности ионов и температуры и что поэтому можно пренебречь производными плотности ионов и температуры по времени по сравнению с производными этих величин по координатам. Это означает, что мы отказываемся от теоретического вычисления плотности ионов и температуры и считаем эти величины заданными функциями координат.

При сделанных нами допущениях для ионов каждого сорта (в том числе и для электронов) можно написать обычное кинетическое уравнение стационарного движения

$$v \operatorname{grad} f + \left\{ g + \frac{e}{m} \left(E + \frac{[vH]}{c} \right) \right\} \operatorname{grad}_v f = Of, \quad (6)$$

где функция f распределения ионов предполагается мало отличающейся от максвелловой и где член Of учитывает соударения ионов друг с другом и с нейтральными молекулами газа. E означает напряженность электрического поля.

⁵ С. Чепмен и Дж. Бартельс, обсуждая работы Т. Каулинга, не проводят различия между полным давлением газа в ионосфере и парциальным давлением ионов.

Решение кинетического уравнения (6) для обычно осуществляющегося случая $l \ll r$ хорошо известно, так что мы могли бы ограничиться рассмотрением непосредственно интересующего нас случая $l \gg r$. Мы, однако, рассмотрим параллельно оба случая для того, чтобы облегчить сравнение их друг с другом.

Рассмотрим сначала случай, когда газ в целом покоится; возможное упорядоченное движение газа в целом (ветер) мы учтем впоследствии путем преобразования системы отсчета. Соответственно этому положим

$$f = f_0(1 + \psi), \quad f_0 = N\beta^3/\pi^{3/2}e^{-\beta^2v^2}, \quad (7)$$

где

$$\beta^2 = m/2kT \quad (8)$$

и где N означает плотность ионов ⁶.

В отношении соударений мы, как обычно, предположим, что Of пропорционально отклонению функции распределения f от равновесного значения f_0 :

$$Of = -(v/l)(f - f_0) = -(v/l)f_0\psi, \quad (9)$$

где величина l носит название длины свободного пути и может быть функцией скорости.

Внося уравнения (7) и (9) в уравнение (6), пренебрегаем, как обычно, малой величиной ψ во всех тех членах, которые не обращаются тождественно в нуль при $\psi=0$, т. е. во всех членах, кроме члена Of и члена, пропорционального магнитному полю H . По сокращении полученного уравнения на f_0 получаем

$$\frac{e}{mc} [\mathbf{vH}] \text{grad}_v \psi + (v/l)\psi = \mathbf{vq}, \quad (10)$$

где нами введено обозначение

$$\mathbf{q} = \beta^2(2\mathbf{a} - \beta^2v^2\mathbf{b}), \quad (11)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + \frac{e}{m} \mathbf{E} - \frac{1}{2\beta^2} \text{grad} \ln \left(\frac{N}{T^{3/2}} \right), \quad \mathbf{b} = \frac{\text{grad} T}{\beta^2 T}.$$

Обозначим еще через s отношение длины свободного пробега частицы l к среднему диаметру круговой орбиты этой частицы в магнитном поле $2r$ (см. уравнение (1)):

$$s = l/2r = \frac{eH}{c\sqrt{2mkT}}. \quad (12)$$

В соответствии с уравнением (12) будет считать знак величины s совпадающим со знаком заряда частицы e . Разложим, наконец, вектор \mathbf{q} на два составляющих вектора \mathbf{q}_\perp и \mathbf{q}_\parallel , из которых первый перпендикулярен, а второй параллелен магнитному полю H .

⁶ В нашем приближении ψ является нечетной функцией вектора скорости (см. уравнение (13)), и поэтому $\int f dv_x dv_y dv_z = \int f_0 dv_x dv_y dv_z = N$.

Тогда решение дифференциального уравнения (10) для ψ можно представить в следующем виде ⁷:

$$\psi = \frac{l\beta}{s^2 + \beta^2 v^2} \left\{ \beta v (\mathbf{v} \mathbf{q}_{\perp}) + \frac{s}{H} \mathbf{v} [\mathbf{q} \mathbf{H}] \right\} + \frac{l}{v} (\mathbf{v} \mathbf{q}_{\parallel}). \quad (13)$$

Плотность электрического тока \mathbf{j} , создаваемого движением зарядов рассматриваемого сорта, определяется формулой

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f_0 (1 + \psi) dv_x dv_y dv_z. \quad (14)$$

При интегрировании нужно сделать определенное предположение о зависимости длины свободного пробега l от скорости v . Предполагая, что l от v не зависит, получаем следующие выражения для слагающих \mathbf{j}_{\parallel} и \mathbf{j}_{\perp} плотности тока по направлению поля H и перпендикулярно к этому направлению:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\parallel} &= \frac{4eN\beta l}{3\sqrt{\pi}} (a_{\parallel} - b_{\parallel}), \\ \mathbf{j}_{\perp} &= \frac{4eN\beta l}{3\sqrt{\pi}} \left\{ 2a_{\perp} K_5 - b_{\perp} K_7 + \frac{s}{H} (2[\mathbf{a} \mathbf{H}] K_4 - [\mathbf{b} \mathbf{H}] K_6) \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где нами введено обозначение

$$K_n = \int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-x^2} dx}{x^2 + s^2}. \quad (16)$$

Ограничимся рассмотрением двух предельных случаев, когда отношение $s = l/2r$ свободного пробега частицы к среднему диаметру ее орбиты в магнитном поле либо много меньше, либо много больше единицы. При $s \ll 1$ (нижняя ионосфера) и при $n \geq 2$ с точностью до членов порядка s^2

$$K_n = \int_0^{\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx, \quad K_5 = 1/2, \quad K_7 = 1,$$

и поэтому с точностью до членов порядка s

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{4eN\beta l}{3\sqrt{\pi}} (\mathbf{a}_{\perp} - \mathbf{b}_{\perp}), \quad l \ll 2r.$$

Таким образом, при $s \ll 1$ слагающие \mathbf{j}_{\perp} и \mathbf{j}_{\parallel} одинаковым образом зависят от соответствующих слагающих векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Внося значения этих векторов из уравнения (11) в значение β из уравнения (8), получаем окончательно

$$\mathbf{j} = \frac{4eNl\sqrt{m}}{3\sqrt{2\pi}kT} \left(\mathbf{g} + \frac{e}{m} \mathbf{E} - \frac{kT}{m} \frac{\nabla N}{N} - \frac{k}{2m} \nabla T \right). \quad (17)$$

⁷ К решению уравнения (13) нельзя прибавить решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (10), поэтому все решения этого однородного уравнения являются многозначными функциями вектора скорости \mathbf{v} .

С другой стороны, при $s \gg 1$ (верхняя ионосфера) с точностью до членов порядка $1/s^4$

$$K_n = \frac{1}{s^2} \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx, \quad K_4 = \frac{3\sqrt{\pi}}{8s^2}, \quad K_6 = \frac{15\sqrt{\pi}}{16s^2},$$

и поэтому с точностью до членов порядка $1/s^2$

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{eNl\beta}{sH} \left([\mathbf{aH}] - \frac{5}{4} [\mathbf{bH}] \right).$$

Внося сюда значения величин \mathbf{a} , \mathbf{b} , β и s , получаем окончательно

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{c}{H^2} [(Nmg + Ne\mathbf{E} - \text{grad}(kTN)) \mathbf{H}]_\perp, \quad (18)$$

тогда как \mathbf{j}_\parallel и при $l \gg 2r$ выражается соответствующей слагающей уравнения (17).

Таким образом, токи в нижней и верхней ионосфере носят совершенно различный характер. В нижней ионосфере j_\perp (а также \mathbf{j}_\parallel во всей ионосфере) в первом приближении пропорционально длине свободного пути l и не зависит от магнитного поля H ; в верхней же ионосфере \mathbf{j}_\perp не зависит от l и обратно пропорционально H . При заданных силах mg и $e\mathbf{E}$ и градиентах $\text{grad } N$ и $\text{grad } T$ направления \mathbf{j}_\perp в нижней и верхней ионосферах отличаются на 90° , причем (за исключением члена, пропорционального E) в нижней ионосфере $j_\perp \propto e$ и меняет знак при изменении знака заряда ионов, тогда как в верхней ионосфере j_\perp ни от знака, ни от абсолютной величины заряда вообще не зависит (конечно, при условии $l \gg 2r$, равносильном условию $eH \gg c/l\sqrt{2mkT}$). Вообще, j_\perp в верхней ионосфере соответствует чепменовскому дрейфу, но наряду с гравитационным дрейфом Чепмена, пропорциональным g , ток j_\perp включает в себя также дрейф концентрационный (пропорциональный $\text{grad } N$), температурный (пропорциональный $\text{grad } T$) и т. д.

Нам остается еще обобщить формулы (17) и (18) на случай наличия в ионосфере ветра. Для этого достаточно, очевидно, к значению \mathbf{j} в отсутствие ветра прибавить конвекционный ток $eN\mathbf{w}$, где \mathbf{w} означает скорость ветра, и, кроме того, заменить в формулах (17) и (18) $e\mathbf{E}$ лоренцовой силой $e(\mathbf{E} + [\mathbf{wH}]/c)$. В результате получаем

$$\mathbf{j} = eN \left\{ \mathbf{w} + \frac{4l\sqrt{m}}{3\sqrt{2\pi kT}} \left[\mathbf{g} + \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{[\mathbf{wH}]}{c} \right) - \frac{kT}{m} \frac{\nabla N}{N} - \frac{k}{2m} \nabla T \right] \right\}, \quad l \ll 2r, \quad (19)$$

$$\mathbf{j}_\perp = eN\mathbf{w}_\perp + \frac{c}{H^2} \left[\left\{ Nmg + Ne \left(\mathbf{E} + \frac{[\mathbf{wH}]}{c} \right) - \text{grad}(kTN) \right\} \mathbf{H} \right], \quad l \gg 2r, \quad (20)$$

причем j_\parallel при $l \gg 2r$ выражается так же, как и при $l \ll 2r$.

§ 3. До сих пор мы рассматривали движение зарядов одного определенного сорта, тогда как реальная ионосфера в хорошем приближении может считаться электрически нейтральной. Допустим для простоты, что в ионосфере имеется только один сорт положительных, один сорт отрицательных ионов (могущих, в частности, быть электронами), причем плотности N_+ и N_- этих ионов мало отличаются друг от друга:

$$N_+ = N/2 + n/2, \quad N_- = N/2 - n/2, \quad n \ll N. \quad (21)$$

Рассмотрим для проверки полученных формул равновесное состояние атмосферы, соответствующее отсутствию ветра ($w=0$) и постоянству температуры ($\text{grad } T=0$). Из формул (19) и (20) следует, что средняя скорость как положительных, так и отрицательных ионов будет равна нулю, если

$$m_+g + eE = kT \text{ grad } \ln N_+, \quad m_-g - eE = kT \text{ grad } \ln N_-. \quad (22)$$

Складывая, получаем

$$(m_+ + m_-)g = kT \text{ grad } \ln (N_+N_-),$$

или, пренебрегая разницей n между N_+ и N_- ,

$$(m_+ + m_-)g = kT \text{ grad } \ln N^2,$$

откуда

$$N = \text{const } e^{-\frac{\bar{m}gz}{kT}}, \quad (23)$$

где

$$\bar{m} = (m_+ + m_-)/2 \quad (24)$$

означает среднюю массу ионов. Таким образом, условием равновесия ионов (при отсутствии ветра и постоянстве температуры) является распределение ионов по барометрической формуле (24) в соответствии с их средней массой \bar{m} ; при этом в ионосфере устанавливается такое электрическое поле

$$E = \frac{kT \text{ grad } \ln N_+ - gm_+}{e} \approx g \frac{(m_- - m_+)}{2e}, \quad (25)$$

которое как бы выравнивает вес обоих сортов ионов:

$$m_+g + eE = m_-g - eE = \bar{m}g.$$

Формулы (23) и (25) были впервые получены Росселандом и хорошо известны. Ввиду малости величины $n=N_+-N_-$ ее нужно сохранять только в уравнении Пуассона

$$\text{div } E = 4\pi en, \quad (26)$$

определяющем электрическое поле в ионосфере; в выражениях же (19) и (20) для плотности тока можно положить $N_+=N_-=N/2$. Складывая плотности токов положительных и отрицательных ионов, получаем полную плотность тока

$$j = j_+ + j_-. \quad (27)$$

Если концентрация N и температура T меняются только по верти-

кали, то для горизонтальной слагающей полного тока в нижней ионосфере получаем обычную формулу

$$\mathbf{j}_{\text{гор}} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{[\mathbf{wH}]}{c} \right)_{\text{гор}}, \quad l \ll 2r, \quad (28)$$

где

$$\sigma = \frac{2e^2 N}{3\sqrt{2\pi} kT} \left(\frac{l_+}{\sqrt{m_+}} + \frac{l_-}{\sqrt{m_-}} \right)$$

есть хорошо известное выражение электропроводности ионизированного газа. Формула (28) лежит в основе динамотеории Стюарта и Шустера⁸.

Что же касается верхней ионосферы, то из формул (27), (20) получаем для перпендикулярной магнитному полю слагающей полного тока \mathbf{j}_{\perp} :

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{e}{H^2} [(N\bar{m}g - \text{grad}(kTN)) \mathbf{H}], \quad l \gg 2r, \quad (29)$$

где \bar{m} согласно (24) означает среднюю массу зарядов. Легко убедиться, что формула (29) остается справедливой и для ионосферы, в которой имеются заряды не двух, а большего количества сортов, если только ионосфера электрически нейтральна ($\sum_i e_i N_i = 0$); при этом средняя масса зарядов будет определяться формулой

$$\bar{m} = \frac{\sum m_i \Lambda_i}{N}, \quad N = \sum N_i. \quad (30)$$

Заметим, что

$$p' = kTN \quad (31)$$

равно давлению идеального газа молекулярной плотности N , т. е. равно *парциальному* давлению ионов в атмосфере. Поэтому формулу (29) можно записать в следующей краткой форме:

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{e}{H^2} [(N\bar{m}g - \text{grad } p') \mathbf{H}], \quad l \gg 2r. \quad (32)$$

Легко убедиться, что если в формуле (32) отбросить член $\text{grad } p'$, то мы получим чепменовскую формулу (5) гравитационного дрейфа. Напротив, если ионосфера находится в механическом равновесии, то вес ионов в единице ее объема $N\bar{m}g$ уравновешивается вертикальным градиентом давления $\partial p' / \partial z$ и $j_{\perp} = 0$.

Однако распределение ионов в реальной ионосфере настолько отлично от равновесного, что разность $N\bar{m}g - \text{grad } p'$ вряд ли может отличаться по порядку величины от своего первого члена $N\bar{m}g$. Поэтому вопреки пессимистическому заключению Чепмена и Бартельса [1], сделанную Чепменом первоначальную оценку плотности тока j_{\perp} можно считать правильной по порядку величины. Это становится особенно ясным, если проинтегрировать формулу

⁸ Собственно, даже в слое E свободный путь электронов превышает диаметр $2r$ их орбиты в магнитном поле, так что проводимость слоя E перпендикулярно магнитному полю H обуславливается только ионами.

(32) по всей толще верхней ионосферы, т. е. проинтегрировать ее по высоте от $z=z_0$ до $z=\infty$, где z_0 есть та высота, на которой для ионов $l=2r$ ⁹. Приняв во внимание зависимость магнитного поля Земли от географической (точнее, геомагнитной) широты λ , но пренебрегая зависимостью H и g от высоты, получаем¹⁰

$$I_B = \frac{c \cos \lambda}{H} \left(g \int_{z_0}^{\infty} N m dz - \bar{p}'(z_0) \right). \quad (33)$$

Этой силой тока, протекающего с запада на восток через лежащую в плоскости меридиана вертикальную полоску шириной 1 см, простирающуюся от $z=z_0$ до $z=\infty$, и определяется напряженность магнитного поля токов верхней ионосферы в точках земной поверхности. Выражение в скобках равно разности между приходящимся на 1 см² горизонтального сечения общим весом ионов верхней ионосферы и парциальным давлением $p'(z_0)$ ионов на нижней границе этой ионосферы $z=z_0$.

Так как z_0 равно примерно 150 км и лежит ниже сильно ионизированного слоя F , то поправка $-p'(z_0)$ к формуле Чепмена (5) вряд ли изменит порядок величины тока I_B . Как мы уже указывали в § 1, величина этого тока I_B , по-видимому, может достигать значений, необходимых для объяснений суточных вариаций магнитного поля Земли.

Однако поправка $-p'(z_0)$ существенна для объяснения фазы ионосферных токов, максимум которых наблюдается за час до полудня. Хотя максимум числа и веса ионов должен наступать после полудня, однако максимум тока I_B может предвдывать полдень, если максимум парциального давления ионов на границе верхней ионосферы $p'(z_0)$ наступает после максимума полной ионизации этой части ионосферы. Это запаздывание фазы давления ионов $p'(z_0) = k(TN)_{z_0}$ может обуславливаться, во-первых, запаздыванием максимума температуры $T(z_0)$ и, во-вторых, запаздыванием ионизации $N(z_0)$, которое должно наблюдаться, в частности, в том случае, если ионизация слоя ионосферы, находящегося на высоте $z=z_0$, определяется в основном диффузией¹¹ ионов из

⁹ Для электронов $l \gg 2r$ и в более низких областях ионосферы, однако благодаря малой массе электронов их гравитационный дрейф незначителен.

¹⁰ Предполагая, что p' изменяется только по высоте, но не в горизонтальных направлениях.

¹¹ При $z=z_0$, т. е. при $l_{\text{ион}} = 2\bar{r}_{\text{ион}}$ коэффициент диффузии ионов D равен $D \approx 2/3 l_{\text{ион}} v_{\text{ион}} \approx 6 \cdot 10^4 T(z_0) \text{ см}^2/\text{сек}$. Если в слое $z=z_1$ концентрация ионов в течение суток меняется синусоидально около некоторого среднего значения $N = N_0 + A \sin \omega t$ ($\omega = 2\pi/\text{сутки}$), то благодаря диффузии ионизация в слое z будет равна

$$N = N_0 + A e^{-k|z-z_1|} \sin \omega(t - \mu|z - z_1|),$$

где $k \approx 1/7,5 \text{ км}^{-1}$, $\mu \approx 1/2 \text{ час/км}$, если $T=300^\circ$; $k \approx 1/15 \text{ км}^{-1}$, $\mu \approx 1/4 \text{ час/км}$, если $T=1200^\circ$.

При концентрациях ионов, не превышающих $N \approx 10^5 \text{ ион/см}^3$, можно в приведенных оценках не учитывать их рекомбинации.

смежных слоев ионосферы (а не прямым воздействием солнечной радиации).

Мы совершенно не затрагивали в этой статье вопроса о зависимости силы и направления токов в верхней ионосфере от географической широты, требующего учета электрических полей, которые возникают в ионосфере благодаря обусловленному гравитационным дрейфом перераспределению ее зарядов. Этот вопрос, частично рассмотренный Чепменом (который пришел к благоприятным для теории выводам), как и весь вообще вопрос о распределении токов в верхней ионосфере, требует специального количественного исследования. Результаты настоящего краткого сообщения позволяют надеяться, что вопреки пессимистическим выводам Бартельса и Чепмена такое исследование может привести к построению удовлетворительной теории токов в ионосфере, обуславливающих суточные вариации магнитного поля Земли.

Резюме. Обсуждаются три теории, предложенные для объяснения механизма возникновения ионосферных токов, обуславливающих суточные вариации земного магнитного поля. Ошибочность двух из этих теорий (Ганна и Чепмена), на которую впервые указал Каулинг, доказывается в общем виде. Однако до сих пор при обсуждении теории гравитационного дрейфа Чепмена не учитывалось, что распределение ионов в ионосфере не является равновесным. Учет этого обстоятельства приводит к видоизмененной форме теории Чепмена. Предварительные оценки позволяют надеяться, что эта теория сможет объяснить как силу, так и фазу ионосферных токов.

*Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *S. Chapman, J. Bartels.* Geomagnetism, v. 1, 2. Oxford, 1940.
2. *T. Cowling.* Monthly Notices. Roy. Astron. Soc.; 1929, 90, 140; 1932, 92, 407.
3. *E. Hulburt.* Rev. Mod. Phys., 1937, 9, 44.

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА ПРИ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ В ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ СРЕДЕ ¹

Совместно с И. М. Франком

В 1934 г. П. А. Черепков [1], исследуя люминесценцию ураниловых солей, обнаружил, что под действием γ -лучей все без исключения прозрачные жидкости дают слабое видимое свечение. Самый факт такого свечения не является чем-либо исключительным. Известно, например, что и под действием ультрафиолетового излучения большинство жидкостей дают слабую люминесценцию [2]. Эта так называемая синяя люминесценция обусловлена ничтожными примесями, обычно содержащимися в жидкостях, и является обычной флуоресценцией. Люминесценция некоторых жидкостей под действием γ -лучей наблюдалась и раньше. Так, например, Малле [3] были получены даже снимки спектра такой люминесценции. Однако свойства этого явления до 1934 г. оставались совершенно не исследованными, и среди огромного числа известных случаев люминесценции это свечение не казалось заслуживающим особого внимания. Впервые работа Черенкова показала, что это свечение обладает совершенно особыми, лишь для него характерными свойствами.

Уже в первой работе 1934 г. Черенков, используя так называемый метод гашения, предложенный С. И. Вавиловым [4], получил первые количественные данные о яркости и поляризации свечения. Анализ выясненных при этом особенностей явления привел Вавилова [5] к утверждению, что это свечение — вообще не люминесценция, т. е. оно не вызывается излучением возбужденных атомов и молекул. Действительно, оказалось, что ни увеличение степени чистоты жидкостей, ни изменение температуры и вязкости, ни добавление химических тушителей совершенно не меняют яркости излучения. Все эти свойства не могут быть согласованы с предположением о конечной длительности возбужденного состояния, и поэтому «наблюдаемый эффект вообще не может быть каким-либо видом люминесценции, для которой конечная длительность возбуждения является необходимым характерным признаком» [5].

Поскольку это свечение — не люминесценция жидкости или примесей, в ней содержащихся, Вавилов [5] предположил, что источником излучения являются комптоновские электроны, возникающие под действием γ -лучей, и что это излучение обусловлено их торможением. Это заключение качественно подтверждалось

¹ Труды ФИАН СССР, 1944, 2, вып. 4, 63.

также обнаруженной Черенковым особенностью поляризации свечения, а именно преимущественным направлением электрического вектора колебаний, совпадающим с направлением пучка γ -лучей (а следовательно, и комптоновских электронов) и распределением интенсивности в спектре, возрастающей к фиолетовому концу. То, что источником излучения является быстрый электрон, в дальнейшем было доказано Черенковым прямыми опытами, но при этом выяснился и ряд других особенностей явления, противоречащих гипотезе о тормозном излучении.

Тем не менее, предполагая, что излучает электрон, казалось неизбежным допустить также, что излучение возникает при его торможении. Действительно, общеизвестен факт, что равномерно движущийся электрон вообще не может излучать. Это правило, однако, имеет и исключение: равномерно движущийся электрон должен излучать свет, если только его скорость превышает фазовую скорость света.

Еще в 1904—1905 гг. Зоммерфельд [6] показал, что если бы каким-либо образом возник электрон со скоростью, превышающей скорость света в пустоте, то он должен был бы терять энергию, тормозясь собственным полем, т. е. давать электромагнитное излучение. В дальнейшем стало очевидным, что невозможно не только движение, но и возникновение электрона со скоростью, большей скорости света в пустоте. Теория Зоммерфельда была забыта.

Между тем рассмотренный Зоммерфельдом случай вполне реален, если принять во внимание, что для возникновения излучения существенно, чтобы скорость электрона v превышала фазовую скорость света. Таким образом, электрон, движущийся в среде, будет излучать свет, если для него $v > c/n$ (где n — показатель преломления), т. е.

$$\beta n > 1, \quad (1)$$

где $\beta = v/c$. Таким образом, для электрона, движущегося в воде, полагая $n = 1,33$ ($\lambda = 5900 \text{ \AA}$), из условия (1) получим, что энергия электрона должна превышать 250 кэв. Следовательно, условие (1) выполнено уже для значительной части β -частиц от радиоактивных веществ при движении их как в жидких, так и в твердых телах.

Макроскопическая теория такого излучения, предложенная для объяснения явления Черенкова авторами этой статьи [7]², оказалась в полном согласии с экспериментальными данными.

Наиболее характерным свойством излучения Черенкова является резкая асимметрия в угловом распределении интенсивности свечения. Электрон излучает свет только под вполне определенным острым углом θ к направлению своего движения. Само наличие такой направленности показывает, что когерентность излучения сохраняется на пути электрона по крайней мере порядка длины полуволны излучаемого света ($\sim 10^{-5} \text{ см}$). Эта длина во много

² См. наст. том, работу 4.— *Прим. ред.*

раз превышает атомные расстояния в жидкости и в твердом теле ($\sim 10^{-8}$ см), что вполне оправдывает возможность рассмотрения явления в рамках макроскопической электромагнитной теории.

Характерная направленность излучения Черенкова легко может быть понята. Пусть электрон, имеющий заряд e , равномерно движется вдоль оси z со скоростью v , так что его координата z в момент t равна $z=vt$. Выясним возможность излучения электроном света частоты ω и будем поэтому рассматривать компоненты поля электрона E_ω и H_ω , имеющие частоту ω .

Можно показать, что во всем внешнем пространстве такое же поле E_ω и H_ω , как и для движущегося электрона, должна дать непрерывная совокупность неподвижных гармонических осцилляторов, если расположить их на траектории электрона. Для этого достаточно лишь приписать осцилляторам, находящимся на любом отрезке от z до $z+dz$, электрический момент [8]

$$p = \frac{e}{\pi\omega} \sin \omega \left(t - \frac{z}{v} \right) dz, \quad (2)$$

ориентированный по направлению движения электрона.

Если такая совокупность осцилляторов будет давать поле с амплитудой тем большей, чем большую длину l мы считаем ею заполненной, то в силу тождества полей можно утверждать, что в излучении электрона обязательно будет частота ω . При этом энергия излучения должна нарастать с увеличением пути l , пройденного электроном, т. е. электрон будет излучать непрерывно.

Так как рассматриваемые осцилляторы между собой когерентны, то для того, чтобы в результате интерференции их поле не оказалось скомпенсированным, необходимо, чтобы в точку наблюдения испускаемые ими волны приходили в одинаковой фазе.

Разность фаз волн для двух осцилляторов, расположенных на расстоянии z_1 друг от друга, определяется собственной разностью фаз этих осцилляторов (см. формулу (2)), равной $\omega(z_1/v)$, и разностью их расстояний $\Delta R = z_1 \cos \theta$ до точки наблюдения (точку наблюдения считаем удаленной на расстояние $R \gg z_1$). Результирующая разность фаз равна, следовательно,

$$\varphi = \omega \left(\frac{z_1 \cos \theta}{c_1} - \frac{z_1}{v} \right), \quad (3)$$

где c_1 — скорость света. Если скорость электрона $v < c_1$, то при любом θ разность фаз φ не равна нулю и пробегает при увеличении z_1 все возможные значения. Таким образом, сложения волн не происходит, и, следовательно, электрон, равномерно движущийся со скоростью, меньшей скорости света, излучать не может. Однако и в этом случае при любом конечном l может остаться не скомпенсированной некоторая небольшая часть поля, которая при возрастании l стремится к некоторому постоянному значению.

Этот остаток определяется резкой ограниченностью длины l , соответствующей в нашей модели скачку скорости электрона в начальной и конечной точках своего пути. Определяемое этим скачком излучение рассмотрено ранее одним из нас [9]³.

Принципиально иной результат получим, если электрон движется в среде со скоростью v_1 , большей скорости света $c_1 = c/n$. Очевидно, что в этом случае, если выбрать θ так, чтобы

$$\cos \theta = c/vn, \quad (4)$$

разность фаз φ в формуле (3) тождественно обращается в нуль при любом z_1 . Таким образом, волны, идущие от всех осцилляторов в направлении θ , будут складываться независимо от длины, на которой расположены эти осцилляторы. Это значит, что движущийся электрон должен излучать свет в направлении θ . То же самое, очевидно, будет иметь место и для любой другой частоты, если только для нее $\beta n > 1$.

Энергия излучения электрона, проходящая через единицу площади на расстоянии R от электрона, равна [9]⁴

$$W_\theta = \frac{\varepsilon^2 v^2}{\pi^2 c^3 R^2} \sin^2 \theta \int_{\beta n > 1} n(\omega) \frac{\sin^2 [\omega T (1 - \beta n(\omega) \cos \theta)]}{(1 - \beta n(\omega) \cos \theta)^2} d\omega, \quad (5)$$

где T — половина продолжительности движения электрона со скоростью v , т. е. $T = \frac{1}{2} \frac{l}{v}$, и интегрирование распространяется на все излучаемые частоты.

Как видно из формулы (5), спектр излучения под заданным углом θ тем больше приближается к монохроматичному, чем больше T , причем частота ω_θ этого излучения определяется из соотношения $n(\omega_\theta) = 1/\beta \cos \theta$. При $\omega_\theta T \gg 1$ формула (5) принимает вид

$$W_\theta = \frac{\varepsilon^2 v}{2\pi c^3 R^2} l \sin^2 \theta \frac{\omega n^2}{(\partial n / \partial \omega)}, \quad (6)$$

где значения величин ω , n^2 и $\partial n / \partial \omega$ должны быть взяты для $\omega = \omega_\theta$.

Производя интегрирование формулы (5) по углам и выделяя только ту часть энергии излучения, которая возрастает пропорционально l , окончательно получим [7, 9]

$$W = \frac{\varepsilon^2 l}{c^2} \int_{\beta n > 1} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right). \quad (7)$$

Совершенно те же результаты получаются также и при квантовом рассмотрении вопроса [10]. Особенно наглядно, как показал Гинзбург [10], из квантовой точки зрения вытекают условия для возможности излучения свободно движущегося электрона.

³ См. наст. том, работу 6. — *Прим. ред.*

⁴ Там же — *Прим. ред.*

Для простоты рассмотрим лишь фактически интересующий нас случай, когда импульс излучаемого фотона очень мал по сравнению с импульсом электрона.

Пользуясь известными из теории относительности выражениями полной энергии w и импульса p через скорость

$$w = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

получим, что для малого изменения энергии электрона должно выполняться соотношение

$$\Delta w = v \Delta p_v. \quad (8)$$

Здесь Δp_v — изменение абсолютной величины импульса, совпадающее в данном случае с проекцией изменения импульса на направление движения v .

Если эти изменения энергии и импульса вызваны излучением, то Δw должно равняться энергии фотона, а Δp_v — проекции импульса фотона на направление движения электрона. Таким образом, для излучения электрона в вакууме

$$\Delta w = h\nu, \quad \Delta p_v = \frac{h\nu}{c} \cos \theta.$$

Очевидно, с помощью этих величин невозможно удовлетворить (8), так как всегда

$$\frac{v}{c} \cos \theta < 1.$$

Отсюда следует, что излучение свободно движущегося электрона в вакууме обязательно привело бы к нарушению законов сохранения.

Иной результат получим, если электрон движется в среде с показателем преломления n . Энергия фотона в этом случае равна по-прежнему $h\nu$, а импульс следует положить равным $h\nu n/c$ [10] и, следовательно,

$$\Delta w = h\nu, \quad \Delta p_v = \frac{h\nu n}{c} \cos \theta.$$

Подставляя в (8), получим, что законы сохранения будут выполнены, если

$$\cos \theta = c/vn.$$

Таким образом, снова приходим к соотношению (4).

Отметим попутно, что в случае $v < c$ законы сохранения в равной мере запрещают как испускание отдельного фотона, так и одновременно группы фотонов. Однако для сверхсветовой скорости такие процессы высшего порядка возможны, причем для них, очевидно, условие (4) не обязательно.

Предложенная теория не только объяснила все исследованные в момент ее возникновения свойства свечения Черенкова, но и была подтверждена дальнейшими опытами.

Специальной проверке подверглось условие (4). В своих опытах Черенков произвел измерение угла θ для жидкостей с различными показателями преломления. При этом получилось совпадение величины θ с ожидаемой по формуле (4) и правильная ее зависимость от n . К тому же результату пришли позже Коллинс и Рейлинг [11]. В отличие от Черенкова, эти авторы пользовались для получения свечения не комптоновскими электронами, а монохроматическим пучком электронов, ускоренных с помощью электростатического генератора до энергии 2 Мэв . Подтвердив правильность данных Черенкова и полученных нами формул, эти авторы не поняли, однако, самых основ теории явления. Действительно, они пишут: «Электроны при прохождении через среду постепенно теряют энергию на ионизацию и процессы возбуждения. Получающееся в результате ускорение и ответственно за возникновение радиации Черенкова» [11].

Между тем это ускорение оказывает на излучение Черенкова лишь второстепенное влияние, и в нашей теории оно вообще не учитывается. Рассмотрение условий, при которых возможно пренебречь этим ускорением, показывает, что они действительно выполнены [9].

Направленность излучения, характеризующая условием (4), является, пожалуй, наиболее специфическим свойством явления. Действительно, такая направленность возникает лишь при сверхсветовой скорости и при условии, что излучатель при движении производит в среде возмущение постоянной величины, т. е. именно в тех случаях, когда излучение при скоростях, меньших скорости света, вообще отсутствует. Наоборот, обычные источники света, вызывающие в среде возмущение, периодически колеблющееся вокруг нулевого значения (например, движущийся осциллятор), вообще не будут давать излучения для угла, удовлетворяющего условию (4) [8].

Сравнению с опытом подвергалась также и основная формула теории (7). Полученное экспериментально (см. диссертацию Черенкова) ⁵ распределение энергии в спектре и абсолютная яркость свечения хорошо согласуются с теорией.

Указанные выше свойства явления, вообще говоря, не исчерпывают всех свойств, которыми характеризуется элементарная природа излучателя. Как показал С. И. Вавилов [12], даже при изотропном распределении отдельных излучателей, когда, следовательно, распределение интенсивности по углам равномерно и поляризация равна нулю, природа излучателя непосредственно проявляется при изучении свойств интерференции. Для излучения Черенкова можно ожидать, например, что, так как излучение

⁵ Труды ФИАН СССР, 1944, 2, вып. 4.

сосредоточено практически по образующим конуса, определяемого уравнением (4), наблюдение интерференции для лучей, расходящихся под углом большим 2θ , вообще невозможно [12].

Это заключение, однако, неправильно [13]. Как указывалось выше, поле излучения полностью имитируется совокупностью гармонических осцилляторов. Из формул (2) и (6) видно, что поле осцилляторов, расположенных на длине, малой по сравнению с длиной волны, должно совпадать с полем обычного дипольного излучателя. Отличие интерференционных свойств излучения Черенкова от обычного дипольного излучения сводится, очевидно, к различию между самосветящимися и несамосветящимися источниками света. Действительно, излучение Черенкова аналогично излучению тонкой щели, освещенной косо падающим параллельным пучком света [8].

Интересно, что весьма простое обобщение теории эффекта Черенкова позволяет существенно исправить теорию так называемых ионизационных потерь энергии, испытываемых электроном при прохождении через среду. При вычислении этих потерь соударения электрона с атомами среды могут быть разбиты на «близкие» и «далекие». При близких соударениях движущийся электрон передает электронам среды столь большую энергию, что эти электроны можно считать свободными. При далеких же соударениях, сопровождающихся малыми передачами энергии, существенную роль играет энергетический и оптический спектр атомов среды. При рассмотрении далеких соударений до последнего времени не учитывалось, что действующее на далекие (по сравнению с межуатомными расстояниями) атомы среды электрическое поле движущегося электрона отнюдь не совпадает с полем этого электрона в вакууме, а видоизменяется благодаря наличию среды. На это обстоятельство недавно указал Ферми [14], развивший новую теорию ионизационных потерь, которая свободна от этого недостатка и результаты которой имеют существенное значение для теории космических лучей. Учет влияния среды на поле движущегося электрона проведен Ферми методом, вполне аналогичным примененному в теории эффекта Черенкова авторами настоящей статьи, на первую заметку которых [7] Ферми и ссылается в этой связи.

Результаты Ферми могут быть получены в более общем виде и более простым путем, если воспользоваться более подробной теорией эффекта Черенкова, изложенной в одной из последующих наших статей [9], и внести в нее единственное изменение — учесть поглощение света в среде, т. е. считать показатель преломления света величиной комплексной, а не действительной. Большинство вычислений, относящихся к потере энергии электроном, не нуждается при этом в каких-либо изменениях; комплексность n сказывается лишь при переходе от формулы (3.4) к окончательной формуле (3.6) этой статьи [9]. Подробнее этот вопрос рассмотрен в подготавливаемой к печати статье.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. П. А. Черенков. Докл. АН СССР, 1934, 2, 451.
2. S. I. Wawilow, L. A. Timmermann. Z. Phys., 1929, 54, 270.
3. M. L. Mallet. C. r. Acad. sci. Paris, 1926, 183, 274; 1928, 187, 222; 1929, 198, 445.
4. Е. М. Брумберг, С. И. Вавилов. Изв. АН СССР, ОМЭН, 1933, серия 7, 919.
5. С. И. Вавилов. Докл. АН СССР, 1934, 2, 457.
6. A. Sommerfeld. Götting. Nachricht., 1904, 99, 363; 1905, 201.
7. И. Е. Тамм, И. М. Франк. Докл. АН СССР, 1937, 14, 107.
8. И. М. Франк. Изв. АН СССР, серия физ., 1942, 6, 3.
9. Ig. Tamt. J. Phys., 1939, 1, 439.
10. В. Л. Гинзбург. ЖЭТФ, 1940, 10, 589.
11. G. B. Collins, V. G. Reiling. Phys. Rev., 1938, 54, 499.
12. С. И. Вавилов. Докл. АН СССР, 1937, 17, 459.
13. И. М. Франк. Докл. АН СССР, 1944, 42, 354.
14. E. Fermi. Phys. Rev., 1940, 57, 485.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ИЗЛУЧЕНИЯ, ИСПУСКАЕМОГО СИСТЕМАМИ, ДВИЖУЩИМИСЯ СО СВЕРХСВЕТОВЫМИ СКОРОСТЯМИ, И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ¹

Механизм излучения света системой, движущейся со сверхсветовой скоростью, весьма прост; он одинаков для излучения при соответствующих условиях всех видов волн — как электромагнитных, так и звуковых волн на поверхности воды и т. д.

Рассмотрим какую-либо систему, которая в принципе может испускать интересующее нас излучение, например электрически заряженную частицу в случае света, снаряд или самолет в случае звука и т. д. До тех пор, пока скорость этой системы как целого меньше, чем скорость распространения соответствующих волн в окружающей среде, излучение может быть вызвано только колебательным движением системы как целого или какой-либо ее части, например периодическим движением электрона в атоме или вращением пропеллера в самолете. Частота испускаемого излучения, очевидно, определяется частотой возбуждающего периодического движения. Точнее говоря, для возможности излучения не обязательно периодическое движение; существенно лишь, чтобы движение было не равномерным² (другими словами, скорость его должна изменяться во времени).

Однако, когда скорость системы становится больше, чем скорость рассматриваемых волн, тогда вступает в игру совершенно новый механизм излучения, благодаря которому начинает излучать даже система, движущаяся с постоянной скоростью. Обозначим через $c'(\omega)$ скорость распространения волн частоты ω в окружающей систему среде. Тогда, как правило, излучение системы, движущейся в среде с постоянной скоростью v , содержит в себе все частоты, удовлетворяющие основному условию:

$$v > c'(\omega). \quad (1)$$

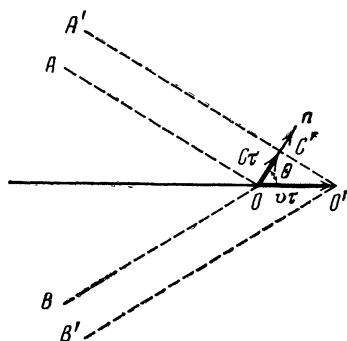
Это излучение отличается резко выраженной направленностью — волны данной частоты ω испускаются только под определенным углом ϑ относительно направления движения системы; этот угол определяется соотношением

$$\cos \vartheta = c'(\omega)/v. \quad (2)$$

¹ УФН, 1959, 18, вып. 3, 387. Лекция, прочитанная при вручении Нобелевской премии 11 декабря 1958 г. в Стокгольме.

² По поводу исключения из этого правила, так называемого переходного излучения, см. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк. ЖЭТФ, 1946, 16, 15, а также J. Phys., 1945, 9, 353.

Для доказательства фундаментальных соотношений (1) и (2) достаточно учесть только то обстоятельство, что при всех скоростях, больших и малых, поле равномерно движущейся системы должно быть стационарным относительно этой системы. Если система излучает, это означает, что ее поле содержит по крайней мере одну свободную волну (свободная волна частоты ω , по определению, распространяется в среде с характерной фазовой скоростью c' (ω) на сколь угодно большое расстояние от источника).



Пусть O и O' (см. рисунок) — положения равномерно движущейся системы в два последовательных момента времени $t=0$ и $t=\tau$. Фаза волны, испускаемой системой, должна быть стационарной относительно этой системы. Это означает, что если AO изображает фронт волны³, который в момент времени $t=0$ проходит через систему, находящуюся в O , то этот фронт, распространяясь в среде со скоростью $c'(\omega)$, будет постоянно сопровождать систему и, в частности, в момент времени $t=\tau$ будет занимать такое положение $A'O'$, при котором он проходит через O' . Поскольку направление распространения свободной волны n перпендикулярно фронту волны, угол OCO' — прямой, откуда сразу вытекает фундаментальное соотношение (2). Так как значение косинуса всегда меньше единицы, то условие (1) непосредственно вытекает из соотношения (2).

Все указанные общие свойства рассматриваемого излучения уже давно были известны в аэродинамике. Ударные волны, излучаемые при сверхзвуковых скоростях, называются волнами Маха; излучение этих волн начинается тогда, когда скорость снаряда или самолета начинает превышать скорость звука в воздухе. Излучение волн означает потерю энергии движущимся телом, и эти потери оказываются столь значительными, что обуславливают основную долю сопротивления движению самолета, обладающего сверхзвуковой скоростью. Это обстоятельство и является той причиной, по которой для преодоления звукового барьера,

³ Фронт волны благодаря цилиндрической симметрии задачи представляет собой конус, AOB — сечение такого конуса плоскостью чертежа.

т. е. для достижения сверхзвуковых скоростей в авиации, необходимо весьма значительное увеличение мощности моторов.

Мы воспринимаем излучение волн Маха летящим снарядом в виде хорошо известного свиста или воя, возникающего при его движении. Именно поэтому, выяснив совершенно аналогичный механизм излучения Вавилова—Черенкова, т. е. излучения света при движении быстрых электронов, мы стали называть это явление «поющими электронами».

Здесь я должен пояснить, что мы в Советском Союзе называем это излучение «излучением Вавилова—Черенкова», а не просто «черенковским излучением», чтобы подчеркнуть определяющую роль покойного С. И. Вавилова в открытии этого излучения.

Вы видите, что механизм этого излучения чрезвычайно прост. Само это явление могло быть легко предсказано на основе классической электродинамики за много десятилетий до того, как оно было фактически обнаружено. Почему же это открытие столь запоздало? Мне кажется, что мы имеем здесь дело с поучительным примером отнюдь не редкой в развитии науки ситуации, когда научный прогресс тормозится некритическим применением правильных физических принципов к явлениям, выходящим за пределы применимости этих принципов. В течение многих десятков лет всех молодых физиков учили, что свет (и электромагнитные волны вообще) может излучаться только при неравномерном движении электрических зарядов. При доказательстве этой теоремы явно или неявно используется тот факт, что теория относительности не допускает движений со сверхсветовой скоростью; согласно этой теории, никакое материальное тело не в состоянии даже достичь скорости света. Тем не менее в течение долгого времени эта теорема считалась справедливой без всяких оговорок.

Более того, когда И. М. Франк и я уже разработали математически правильную теорию излучения Вавилова—Черенкова, мы все еще пытались разными способами, которые для нас самих сегодня уже непостижимы, примирить наши результаты с утверждением, что для излучения необходимо ускорение. И лишь на следующий день после первого нашего доклада об этой теории на коллоквиуме Физического института мы внезапно узрели простую истину: предельной скоростью для материальных тел является скорость света в вакууме (обозначаемая нами через c), тогда как заряд, движущийся в среде с постоянной скоростью v , начинает излучать при условии $v > c'(\omega)$, причем значение $c'(\omega)$ определяется свойствами среды. Если $c'(\omega) < c$, то это условие вполне может быть выполнено без нарушения требований теории относительности ($c' < v < c$).

Когда наша работа была уже в основном закончена [1, 2], акад. А. Ф. Иоффе указал нам на работу А. Зоммерфельда [3], опубликованную в 1904 г., в которой рассматривалось поле электрона, движущегося с постоянной скоростью, большей, чем скорость света, и была вычислена сила сопротивления такому

движении, вызванная испускаемым электроном излучением. Однако Зоммерфельд рассматривал движение электрона только в вакууме. Годом позже возникла теория относительности; движение, рассмотренное Зоммерфельдом, оказалось, согласно этой теории, невозможным, и работа Зоммерфельда была совершенно забыта. Впервые за много лет после ее опубликования она была процитирована в нашей работе 1937 г.

Позвольте мне теперь вернуться к общим свойствам излучения, испускаемого при сверхсветовых скоростях. В дополнение к уже указанным свойствам новые и весьма характерные особенности этого излучения были выявлены в работах И. М. Франка [4] и В. Л. Гинзбурга и И. М. Франка [5].

Пусть система A , движущаяся с постоянной скоростью v , излучает некоторую порцию энергии ε в направлении, определяемом единичным вектором \mathbf{n} . Закон сохранения энергии выражается уравнением

$$\varepsilon + \Delta T + \Delta U = 0, \quad (3)$$

где ΔT и ΔU обозначают соответственно обусловленное излучением приращение кинетической энергии T поступательного движения системы A и приращение энергии U ее внутренних степеней свободы. С другой стороны, если излученная энергия ε распространяется в среде со скоростью c' в определенном направлении \mathbf{n} , то она обладает импульсом ε/c' , направленным по \mathbf{n} ⁴. Следовательно, закон сохранения импульса приводит к векторному уравнению

$$\frac{\varepsilon}{c'} \mathbf{n} + \Delta \mathbf{p} = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{p} — импульс системы A . Если изменение импульса $\Delta \mathbf{p}$ мало по сравнению с самим импульсом \mathbf{p} , то тогда согласно общему правилу

$$v \Delta \mathbf{p} = \Delta T. \quad (5)$$

Из этих трех простых и весьма общих соотношений следует, что

$$\Delta U = -\varepsilon \left(1 - \frac{v \cos \vartheta}{c'} \right), \quad (6)$$

где ϑ — угол между направлениями \mathbf{v} и \mathbf{n} .

Если система A не имеет внутренних степеней свободы (это, например, имеет место для точечного заряда), тогда $\Delta U = 0$ и уравнение (6) сводится к уже рассмотренному соотношению (2).

⁴ Для электромагнитного излучения было непосредственно показано как путем квантовомеханического рассмотрения (В. Л. Гинзбург, 1940), так впоследствии и на основе классической электродинамики (Г. Маркс и Г. Джорджи [6]), что величина ε/c' (где c' — скорость) действительно равна полному излученному импульсу, включающему в себя как импульс собственно излучения, так и импульс, приобретаемый средой.

Тем самым мы еще раз получили это фундаментальное соотношение, однако путем совершенно иных рассуждений. С другой стороны, если система обладает внутренними степенями свободы (скажем, колебательными) и если ее скорость мала ($v \ll c'$), тогда, как обычно, ее внутренняя энергия U уменьшается на величину, равную величине ϵ излученной энергии.

Однако при сверхсветовых скоростях ($v > c'$) величина, стоящая в скобках выражения (6), может стать отрицательной и излучение энергии системой может сопровождаться положительным приращением ($\Delta U > 0$) ее внутренней энергии U . Так, например, атом, находившийся первоначально в невозбужденном состоянии, испускает свет и в то же самое время переходит в возбужденное состояние. В подобных случаях как энергия излучения, так и энергия возбуждения, очевидно, заимствуются из кинетической энергии поступательного движения T , так что самовозбуждение системы сопровождается соответствующим замедлением движения системы как целого.

Соотношение (6), выявившееся при обсуждении оптических проблем, но имеющее совершенно общий характер, может оказаться полезным в аэродинамике (подобно тому как соотношения (1) и (2), полученные в аэродинамике, оказались полезными в оптике).

Конечно, строгий расчет сверхзвукового движения автоматически учитывает все, в том числе и возможное самовозбуждение некоторых видов колебаний в сверхзвуковом самолете. Однако такой строгий расчет неизбежно чрезвычайно сложен. Поэтому соотношение (6) может оказаться полезным тем, что оно дает представление о сущности механизма некоторых из тех явлений, которые становятся возможными при сверхзвуковых скоростях.

Нужно, однако, отметить, что соотношение (6) учитывает только затухание колебаний, связанное с излучением, тогда как в случае механических колебаний частей самолета этот вид затухания пренебрежимо мал по сравнению с затуханием, вызванным внутренним трением вибрирующих материалов. Имеются и другие отличия акустического излучения от оптического. Поэтому вопрос о том, имеют ли упомянутые явления какое-либо значение в сложнейшей проблеме сверхзвукового полета, следует считать открытым.

Теперь я хочу рассмотреть в качестве примера приложение общей теории к одной определенной области явлений, а именно к физике плазмы. В качестве введения мы начнем с нескольких замечаний относительно механизма энергетических потерь, испытываемых быстрыми заряженными частицами при прохождении через вещество. Излучение Вавилова—Черенкова составляет только часть (и обычно весьма незначительную часть) этих потерь, которые в основном обусловлены ионизацией и возбуждением атомов среды, через которую проходят частицы. Однако математическая трактовка, использованная И. М. Франком и мною при подсчете потерь на излучение, оказалась удобной и для рас-

смотрения проблемы в целом; она была в 1940 г. применена Э. Ферми к подсчету полных энергетических потерь движущейся заряженной частицы. Исключение составляют только потери, связанные с лобовыми соударениями частиц с атомами среды, которые должны подсчитываться отдельно. Главное отличие работы Ферми от нашей работы состоит в том, что мы считали среду, в которой движется частица, прозрачной, тогда как Ферми учитывал не только поляризацию среды, вызываемую электрическим полем частицы, подобно тому как это делали мы, но принимал также во внимание поглощение электромагнитных волн в среде. Ферми показал, что обусловленное поляризацией среды экранирование поля частицы, которое не учитывалось в предшествующих работах по этому вопросу, существенно уменьшает потери энергии очень быстрых частиц.

Мы не можем здесь дать обзор многочисленных работ по этому вопросу, в которых теория Ферми была значительно углублена и расширена. Но для того, чтобы получить некоторое представление о механизме явления, мы рассмотрим более подробно процессы, происходящие в плазме (т. е. в высокой степени ионизованном газе), которая в интересующих нас отношениях является простейшей из всех сред. У меня нет собственных работ по этому вопросу, так что я буду излагать работы других авторов, давая ссылки лишь на работы последнего времени и не ссылаясь явно на работы, ставшие классическими, как, например, работы Н. Бора.

Потери энергии заряженных частиц, проходящих через плазму, могут быть разделены на две части. Представим себе цилиндр, ось которого совпадает с траекторией частицы, а радиус равен дебаевскому радиусу D :

$$D = \sqrt{\frac{zT}{4\pi N e^2}}.$$

Взаимодействие пролетающей частицы с частицами плазмы, находящимися внутри этого цилиндра, должно рассматриваться микроскопически; возникающие при этом потери энергии обусловлены так называемыми близкими соударениями. Взаимодействие же быстрой частицы с плазмой, расположенной вне цилиндра, может рассматриваться макроскопически; результирующие потери энергии называются когерентными. В обычных условиях оба вида потерь играют примерно одинаковую роль; но в очень горячей и разреженной плазме, имеющей столь важное значение в термоядерных исследованиях, сечение прямого кулоновского взаимодействия заряженных частиц оказывается малым и когерентные потери становятся преобладающими.

Показатель преломления плазмы n для всех частот меньше единицы, так что скорость света в плазме $c' = c/n$ всегда больше скорости света в вакууме c . Поэтому может показаться, что эффект Вавилова—Черенкова вообще не может иметь места в плазме. Однако это не так. Во-первых, только скорость поперечных

электромагнитных волн в плазме $c'(\omega)$ превосходит скорость c при всех частотах, тогда как это не имеет места для скорости плазменных волн в собственном смысле этого слова. Плазменными волнами называются продольные волны, в которых разноименно заряженные частицы плазмы совершают колебания в противоположных направлениях; восстанавливающая равновесие сила обеспечивается возникающим при этом электрическим полем, играющим роль квазиупругой силы. Во-вторых, в магнитной плазме, т. е. в плазме, помещенной во внешнее магнитное поле, волны обоого вида, световые и плазменные, оказываются взаимосвязанными, так что между поперечными и продольными волнами невозможно провести четкое различие. В результате показатель преломления света делается зависимым от направления его распространения и поляризации и в некоторой области значений этих параметров становится большим единицы, так что эффект Вавилова—Черенкова становится возможным.

Начнем с рассмотрения когерентных потерь энергии заряженной частицы, движущейся в плазме без внешнего магнитного поля. Эти когерентные потери почти нацело обусловлены возбуждением продольных плазменных волн; механизм этого возбуждения вполне эквивалентен механизму излучения света в эффекте Вавилова—Черенкова. Фазовая скорость плазменных волн равна

$$c' = \sqrt{3v_T^2 + (\omega_0^2/k^2)},$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновой вектор, $\omega_0 = \sqrt{4\pi Ne^2/m}$ — так называемая плазменная частота и v_T — средняя тепловая скорость плазменных электронов. Пока скорость v рассматриваемых частиц меньше, чем $\sqrt{3}v_T$, необходимое условие излучения плазменных волн $v > c'$ не может быть выполнено; при этих скоростях практически все потери энергии, испытываемые частицей, обязаны близким соударениям. Но когда скорость частицы v превышает $\sqrt{3}v_T$, тогда в некоторой области длин волн $\lambda = 2\pi/k$ условие $v > c'$ выполняется и возникают когерентные потери⁵.

Разрешите мне теперь сделать небольшое отступление и переключить ваше внимание от плазмы к твердому телу. При достаточно высоких частотах валентные электроны в металлах могут рассматриваться как свободные и, следовательно, можно считать, что они вместе с металлическими ионами образуют своего рода плазму. Плазменная частота ω_0 пропорциональна квадратному корню из плотности плазменных электронов. Так как плотность электронов в металлах значительно больше, чем в обычной плазме,

⁵ То обстоятельство, что короткие плазменные волны очень сильно поглощаются самой плазмой, не оказывает влияния на явление, поскольку условие излучения $c'(\omega) < v$ удовлетворяется лишь для достаточно длинных плазменных волн ($\lambda > D$), коэффициент затухания которых достаточно мал по сравнению с их частотой.

то частота плазменных волн в металлах значительно выше, чем в обычной плазме и по порядку величины соответствует $\hbar\omega \sim 10 \text{ эв}$.

По аналогии с явлениями в обычной плазме мы можем ожидать, что при прохождении быстрых электронов через металлическую пленку должны возникать наряду со всеми остальными видами потерь энергии также и потери, связанные с возбуждением плазменных волн только что описанным механизмом. Это и имеет место в действительности. Хорошо известно, что быстрые электроны, проходящие через тонкую металлическую пленку, часто испытывают в ней большие дискретные потери энергии порядка 10 эв . Я отошлю вас за подробностями к статье Д. Пайнса [7], в которой показано, что элементарная теория возбуждения плазмы в металле быстрыми заряженными частицами, весьма аналогичная упомянутой выше теории возбуждения обычной плазмы, настолько хорошо согласуется с опытными фактами, относящимися к дискретным энергетическим потерям в металлах, что, по словам автора, «проблемой скорее является вопрос, почему наблюдается столь хорошее согласие, а не объяснение некоторых несоответствий».

Вновь возвращаясь к обычной плазме, я хотел бы отметить, что поглощение плазменных волн в самой плазме обусловлено своего рода обратным эффектом Вавилова—Черенкова.

Обычно необходимым условием заметного поглощения волн является наличие резонанса между частотой волны и одной из собственных частот поглощающей системы, например атома. Так, например, свободный электрон, который, в отличие от связанного электрона, не обладает собственной частотой, совершает в поле волны периодические колебания, попеременно приобретая и вновь теряя кинетическую энергию, что не может привести к заметному поглощению энергии волны.

Однако существует еще и другой, не резонансный механизм поглощения волн. В том случае, если скорость v свободного электрона больше, чем скорость волны ($v > c'$), проекция скорости электрона на направление распространения волны $v \cos \vartheta$ может стать равной скорости волны:

$$v \cos \vartheta = c'. \quad (7)$$

В этом случае электрон как бы едет верхом на гребне волны, поэтому направление действующей на него силы не изменяется с течением времени. Таким образом, электрон непрерывно поглощает энергию волны до тех пор, пока его скорость не возрастет настолько, что он выпадет из фазы с волной.

Таков механизм поглощения плазменных волн ⁶; условие (7),

⁶ В принципе этот механизм поглощения был указан в 1949 г. Д. Бомом и Е. Гроссом. Работа этих авторов тесно связана с более ранней работой А. Власова. Детальное и очень поучительное математическое рассмотрение вопроса было приведено Р. Сагдеевым и В. Шафрановым на Женевской конференции по мирному использованию атомной энергии в сентябре 1958 г.

отбирающее те электроны плазмы, которые участвуют в процессе поглощения, совпадает с фундаментальным соотношением (2) для излучения ⁷.

Коэффициент затухания плазмы γ впервые был вычислен в 1946 г. Л. Ландау [8]. Изменив обозначения, принятые Ландау, можно представить экспоненциальный член полученной им формулы в следующем виде:

$$\gamma \sim \exp\left(-\frac{mu^2}{2\alpha T}\right), \quad (8)$$

где $u = \omega_0/k$. В области применимости формулы Ландау отношение ω_0/k равно скорости рассматриваемой волны c' . Таким образом, согласно (8) затухание плазменной волны пропорционально плотности плазменных электронов, обладающих по закону Максвелла скоростью u , равной скорости волны. Таким образом, формула (8) полностью соответствует только что рассмотренному механизму поглощения.

В недавно появившейся работе, касающейся механизма спорадического солнечного радиоизлучения, В. Л. Гинзбург и В. В. Железняков [9] применили и развили изложенную выше теорию к новой и очень интересной области физики, начало которой было заложено здесь, в Швеции, профессором Альфеном. Они, в частности, показали, что хорошо известная неустойчивость пучка заряженных частиц, проходящих через плазму, с квантово-теоретической точки зрения обязана отрицательному поглощению плазменных волн проходящим пучком частиц (индуцированное излучение волн частицами пучка преобладает над истинным поглощением).

Заканчивая свое выступление, я хотел бы упомянуть одну проблему, которая имеет довольно существенное значение для увлекательной и повсеместно усиленно разрабатываемой задачи регулирования термоядерных реакций и использования их в мирных целях; это проблема нагрева плазмы. Первые стадии нагрева легко осуществляются путем возбуждения в плазме электрического тока. Однако сечение кулоновского соударения заряженных частиц убывает обратно пропорционально четвертой степени их относительной скорости; поэтому в горячей и очень разреженной плазме эти столкновения становятся пренебрежимо редкими. Очевидно, нагревание током становится в этих условиях практически непригодным; лишь очень малая часть энергии упорядоченного движения плазменных электронов, вызванного приложенным к плазме внешним полем, переходит при этих условиях в джоулево тепло.

⁷ Излучение имеет место, если скоростью v обладает, скажем, один электрон или сгусток таких электронов, причем размеры этого сгустка малы по сравнению с длиной испускаемого излучения. Если, однако, электроны данной скорости v равномерно распределены в пространстве, то они не излучают, так как их волновые поля взаимно компенсируются в результате интерференции. Однако они могут поглощать энергию.

В настоящее время обсуждаются многочисленные предложения, касающиеся возможных способов дальнейшего нагрева плазмы. В качестве примера можно указать так называемое магнитное накачивание (magnetic pumping). Я ограничусь здесь кратким описанием двух таких предложений, тесно связанных с проблемами, которым посвящен мой доклад.

Во-первых, нагревание плазмы с помощью пучка быстрых заряженных частиц, инжектированных в плазму извне, в принципе возможно даже в том случае, если плазма сильно разрежена и очень разрежена. Хотя в такой плазме энергетические потери быстрых частиц, связанные с близкими соударениями, становятся пренебрежимо малыми, когерентные потери энергии, о которых речь шла выше, не зависят от сечения соударений и становятся преобладающими.

В этой связи необходимо подчеркнуть два обстоятельства. Во-первых, в принципе нагревание может быть осуществлено пучком быстрых заряженных частиц, движущихся не в самой плазме, а вне ее, параллельно ее граничной поверхности. Действительно, как мы видели, когерентные потери энергии связаны с возбуждением быстрыми частицами плазменных волн. Те из этих волн, длина которых велика по сравнению с расстоянием от пучка до границы плазмы, будут возбуждаться внешним пучком ничем не хуже, чем пучком, проходящим внутри плазмы. На это обстоятельство впервые указал Л. И. Мандельштам в связи с обычным излучением Вавилова—Черенкова. Впоследствии В. Л. Гинзбург [10] предложил метод генерации микрорадиоволн с помощью быстрых частиц, движущихся вдоль поверхности диэлектрика или в полости, проходящей через диэлектрик, обладающий надлежущими характеристиками.

Вторым обстоятельством, заслуживающим внимания, является то, что если пучок состоит из последовательности отдельных сгустков заряженных частиц, то все частицы каждого отдельного сгустка будут когерентно генерировать те плазменные волны, длина которых велика по сравнению с размером сгустков. Следовательно, интенсивность этих волн будет пропорциональна не числу частиц в сгустке, а квадрату этого числа. Очевидно, что это обстоятельство позволяет весьма значительно усилить разогревающее действие пучка.

Рассмотрим теперь другой возможный метод нагрева плазмы. В 1958 г. Морозов рассчитал возбуждение так называемых магнитоакустических волн в магнитной плазме (напомню, что так называют плазму, на которую наложено внешнее магнитное поле), обусловленное круговым электрическим током, движущимся с достаточной скоростью в направлении, перпендикулярном плоскости тока. Круговой ток может перемещаться внутри плазмы, — можно себе представить плазменное кольцо, несущее ток, которое инжектируется извне внутрь той плазмы, которую хотят нагреть. Однако интересующий нас круговой ток может перемещаться

и вне плазмы, вдоль поверхности сосуда, содержащего плазму; такой внешний ток вполне аналогичен внешнему пучку частиц, о котором я уже упоминал.

Генерация волн движущимся током является частным случаем излучения Вавилова—Черенкова. Морозов [11] показал, что при определенных условиях поглощение плазмой магнитоакустических волн, генерируемых указанным способом, в принципе может привести к очень сильному разогреванию плазмы. Разумеется, скорость перемещения тока должна превышать скорость распространения генерируемых волн. Одной из причин большой эффективности нагревания плазмы током является когерентность волн, испускаемых отдельными его элементами. В этом отношении имеется определенная аналогия между током и сгустками заряженных частиц, и мощность излучения тока пропорциональна квадрату силы тока.

Имеется еще другая возможность использования излучения Вавилова—Черенкова, создаваемого током. Хорошо известно, что токи, возбуждаемые в плазме, обычно концентрируются благодаря пинч-эффекту в тонкий пнур, отличающийся чрезвычайной неустойчивостью. Поэтому в практических приложениях обеспечение стабильности плазменного шнура часто имеет решающее значение. Если стенки сосуда, содержащего плазму, изготовлены из проводника, то при приближении плазменного тока к стенке в ней будут индуцироваться токи Фуко, что приведет к отталкиванию тока обратно от стенки. Методы стабилизации тока, основанные на этом явлении, были независимо предложены учеными в различных странах и были применены в многочисленных термоядерных экспериментах, однако оказались не очень удовлетворительными. Морозов и Соловьев недавно [12] предложили изготовлять стенки сосудов, содержащих плазму, не из проводящих материалов, а из материалов, в которых скорость распространения электромагнитных волн в соответствующем диапазоне частот была бы возможно малой. Если ток, текущий в плазме параллельно поверхности такой стенки, смещается по направлению к этой поверхности со скоростью, превышающей скорость распространения волн определенной частоты в материале стенки, тогда ток должен излучать волны этой частоты внутрь стенки. Сила отдачи, действующая на излучающий ток, приведет к отталкиванию тока от стенки и тем самым к стабилизации тока.

Я хочу подчеркнуть, что у меня нет какого-либо определенного мнения о возможных преимуществах или недостатках упомянутых методов нагревания и стабилизации плазмы, а также о возможностях их технического осуществления. Эти методы были выбраны мною лишь в качестве иллюстрации применения той общей теории, которую я изложил в начале доклада.

Те приложения теории, о которых я смог здесь упомянуть, по необходимости относились к весьма ограниченной области физики. Я могу лишь надеяться на то, что мне удалось в известной

степени создать у вас впечатление, что имеются дальнейшие возможности применения этой теории к новым и интересным физическим проблемам и что работа в этом направлении может оказаться полезной для решения этих проблем или по крайней мере для лучшего понимания общего физического механизма явлений, играющих роль в этих проблемах.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *И. Е. Тамм*. J. Phys. USSR, 1939, **1**, 139.
2. *И. Е. Тамм, И. М. Франк*. Докл. АН СССР, 1957, **14**, 107.
3. *A. Sommerfeld*. Götting. Nachricht., 1904, **99**, 363.
4. *И. М. Франк*. Phys. Rev., 1943, **75**, 1864.
5. *В. Л. Гинзбург, И. М. Франк*. Докл. АН СССР, 1947, **56**, 583.
6. *G. Marx, G. Gyorgyi*. Ann. Phys., 1955, **16**, 241.
7. *D. Pines*. Rev. Mod. Phys., 1956, **28**, 184.
8. *Л. Д. Ландау*. ЖЭТФ, 1946, **16**, 574.
9. *В. Л. Гинзбург, В. В. Желзняков*. Астрон. ж., 1958, **35**, 694.
10. *В. Л. Гинзбург*. Докл. АН СССР, 1947, **56**, 145.
11. *А. И. Морозов*. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 331.
12. *А. И. Морозов, Л. С. Соловьев*. Там же, стр. 391.

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПАРАМАГНЕТИЗМА ¹

При теоретическом объяснении экспериментальных данных о магнетонных числах рассматривается возможность, при которой нормальное состояние атома (иона), как доказано спектроскопически и в соответствии с боровской теорией, может быть многоквантовым ($k > 1$). Сделана также попытка теоретически объяснить зависимость магнитного момента атома от концентрации раствора.

§ 1. Введение

В последние годы квантовая теория парамагнетизма получила большое развитие. Почти одновременно П. Эпстайн и В. Герлах ² указали, что восприимчивость парамагнитных солей независимо от того, в растворе они или твердые, удовлетворяет требованиям теории, выдвинутой В. Паули в 1920 г. Тем самым было доказано, что ионы в растворе или в кристаллической решетке ведут себя по отношению к внешнему магнитному полю в согласии с законами квантовой механики. Далее А. Зоммерфельд ³ модифицировал и расширил первоначальную теорию Паули, при этом он привлек к построению теории закономерности, найденные спектроскопически. Как известно, исследование аномального эффекта Зеемана привело к выводу, что известная классическая формула

$$M = \frac{e}{2\mu} J,$$

дающая связь между магнитным моментом и моментом импульса

¹ Z. Phys., 1925, 32, 582. Перевод Р. Э. Каллош. Доложено в основном на заседании Русского физического общества (сентябрь 1924 г.).

² P. Epstein. Science, May, 1923, 57; W. Gerlach. Phys. Z., 1923, 24, 275.

³ Phys. Z., 1923, 24, 360. Z. Phys., 1923, 19, 224; Ann. Phys., 1929, 73, 209.

атома, должна включить «множитель расщепления» g :

$$M = g \frac{e}{2m} J.$$

При этом, как показал Ланде, значение g зависит известным образом от квантовых чисел, определяющих состояние атома. С помощью своей теории Зоммерфельду удалось установить далеко идущую связь между структурой спектра и магнитными свойствами атома. Хотя теория Паули—Зоммерфельда в общем правильно передает магнитные свойства элементов четвертого периода, в некоторых случаях несоответствие между теорией и экспериментом остается. В дальнейшем будет показано, что при последовательном применении теории Зоммерфельда может быть достигнуто лучшее согласие теории с опытом.

При вычислении квантовомеханически дозволенных магнетонных чисел Зоммерфельд ограничивается только s -состояниями атома ($k=1$). Теперь, однако, является установленным фактом, что нормальное состояние многих атомов и ионов (по крайней мере в газообразном состоянии) соответствует более высоким значениям азимутального квантового числа k . Поэтому нужно учесть, что и в растворенных и в твердых солях нормальное состояние ионов может быть многоквантовым ⁴. Тем самым число квантовомеханически дозволенных магнетонных чисел заметно увеличивается. Произвол, возникающий из-за этого при теоретическом объяснении магнетонных чисел, может быть устранен путем учета спектроскопических законов (закон сдвига, закон обмена и т. д.).

§ 2. Паули-зоммерфельдовская теория парамагнетизма

Мы начинаем с короткого изложения результатов паули-зоммерфельдовской теории.

Ланжевеновская теория парамагнетизма, как известно, приводит к формуле

$$M = V \sqrt{\frac{CR}{\cos^2 \vartheta}}, \quad (1)$$

где M — магнитный момент моля или грамм-атома, C — константа Кюри, ϑ означает угол между магнитной осью молекулы и направлением магнитного поля, черта — усреднение по всем возможным значениям угла.

В классической теории угол ϑ непрерывно меняется и все положения магнитной оси равновероятны. Таким образом, мы получаем

$$\overline{\cos^2 \vartheta} = 1/3$$

⁴ Многоквантовыми мы будем в дальнейшем называть также квантовые состояния, азимутальное квантовое число которых больше единицы.

$$M_{kl} = \sqrt{3CR}. \quad (2)$$

В экспериментальной физике и теперь еще принято определять значение магнитного момента атома с помощью формулы (2) и выражать эту величину в единицах так называемого магнетона Вейсса (=1123,5 *гс·см/моль*). Если обозначить число магнетонов Вейсса в атоме через p , то

$$p = \frac{M_{kl}}{1123,5} = \frac{\sqrt{3CR}}{1123,5}. \quad (3)$$

С квантовой точки зрения число p не имеет никакого физического смысла. В дальнейшем мы будем это число обозначать как значение «кажущегося» магнитного момента. С другой стороны, с помощью квантовой теории можно теоретически получить значение магнитного момента атома, если известны квантовые числа k , j и r , определяющие состояние атома. А именно, имеет место соотношение

$$M_{qu} = gJM_0. \quad (4)$$

Здесь g означает «множитель расщепления» Ланде, т. е. известную функцию квантовых чисел; j — внутреннее квантовое число и M_0 — отнесенное к грамм-атому значение борковского магнетона (=5584 *гс·см/моль*). Обозначим через n магнитный момент атома, отнесенный к борковскому магнетону (число боровских магнетонов в атоме), тогда

$$n = gj. \quad (5)$$

В общем случае g , а следовательно, и n будут нецелыми числами.

Формула (1) остается справедливой и в квантовой теории, однако значение $\cos^2 \vartheta$ уже не имеет постоянного значения $1/3$, но зависит согласно законам пространственного квантования от внутреннего квантового числа j .

Как известно, имеется два способа пространственного квантования: один, принадлежащий Ланде, и другой — Зоммерфельду. Мы будем придерживаться зоммерфельдовской теории и положим

$$\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{3} \frac{j+1}{j}. \quad (6)$$

Это уравнение следует из уравнения (10) работы Зоммерфельда⁵ после подстановки в него значения M из его уравнения (3). Хотя формула (10) из работы Зоммерфельда справедлива только при $g=2$, в форме, данной здесь, она, как показывает простой расчет, справедлива при любых значениях g .

Из (1), (4)–(6) получаем

$$M_{qu} = nM_0 = \sqrt{3RC} \sqrt{\frac{j}{j+1}},$$

⁵ Z. Phys., 1923, 19, 225.

или после подстановки в (3)

$$p = \frac{nM_0}{1123,5} \sqrt{\frac{j+1}{j}} = \frac{5584}{1123,5} n \sqrt{\frac{j+1}{j}},$$

или, наконец, в достаточном приближении

$$p = 5n \sqrt{\frac{j+1}{j}} = 5gj \sqrt{\frac{j+1}{j}}. \quad (7)$$

Эта формула позволяет для произвольного квантового состояния атома определить значение его кажущегося магнитного момента. Чтобы перейти к применению формулы, нужно еще установить соглашение о нормировке квантовых чисел.

Поскольку теоретически обоснованная рациональная нормировка квантовых чисел пока отсутствует, выберем простейшую. Азимутальное квантовое число k пусть будет целым и принимает значения 1, 2, 3. . . для s -, p -, d -термов. Квантовое число r будем просто считать равным мультиплетности (максимальной) спектральных термов, т. е. для синглета, дублета, триплета и т. д. принимающим значения 1, 2, 3 и т. д. Что касается внутреннего квантового числа j , то, поскольку при выводе уравнения (6) мы исходили из зоммерфельдовского способа пространственного квантования, нужно сохранить зоммерфельдовскую нормировку этих чисел. Тем самым j имеет значение нуль для s -термов простых линий и вообще является целым числом для нечетных термов и полуцелым для четных ⁶.

В дальнейшем мы будем обозначать квантовые состояния атома обычными символами s , p , d и т. д. и при этом приписывать еще два индекса, причем верхний будет мультиплетностью r , а нижний — внутренним квантовым числом.

§ 3. Сравнение с опытом

Для s -состояний атомов ($k=1$) по предшествующим формулам вычисляются следующие значения истинного и кажущегося магнитного момента n и p :

r	1	2	3	4	5	6
Символ	s_0^1	$s_{1/2}^2$	s_1^3	$s_{3/2}^4$	s_2^5	$s_{5/2}^6$
n	0	1	2	3	4	5
p	0	8,67	14,15	19,35	24,5	29,6

Только эти представленные в таблице магнитные числа привлекались до сих пор для теоретического объяснения эксперименталь-

⁶ При данной нормировке квантовых чисел множитель расщепления определяется следующим уравнением:

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - k(k-1) + \frac{(r+1)(r-1)}{4}}{2j(j+1)}.$$

ных результатов, потому что, как уже было упомянуто, предполагалось, что нормальные состояния ионов в растворе и твердых солях одноквантовые ($k=1$). Насколько эта гипотеза справедлива, видно из табл. 1, где для ионов четвертой горизонтали периодической системы представлены наблюдаемые и вычисленные магнетонные числа. Экспериментальные данные взяты из сообщений П. Вейсса и В. Герлаха ⁷. Наименее надежные значения заключены в скобки, основные округлены. Так как s -термы простые, мы могли опустить у соответствующих символов нижние индексы, не внося при этом неоднозначности.

При сравнении наблюдаемых магнетонных чисел с вычисленными нужно ожидать, что первые будут несколько меньше последних, потому что наложение внутриатомных полей на внешнее магнитное поле должно нарушить равномерность ориентации атомных осей и обеспечить возможность нового положения. Поэтому среднее значение $\overline{\cos^2 \vartheta}$ будет отличаться от вычисленного по формуле (6) и приближаться к значению $1/3$, соответствующему равной вероятности всех ориентаций, что согласно (6) и (7) проявится в уменьшении кажущегося магнитного момента p .

Уменьшение кажущегося магнитного момента, вызываемое наличием внутриатомных полей, зависит существенным образом от скорости движения атомной оси и от теплового движения атома. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим граничный случай бесконечно большой скорости движения атомной оси в квантовомеханически дозволенные положения относительного мгновенного направления обменного поля. В этом случае внутриатомное поле без ограничения общности рассмотрения можно считать стационарным. Введем далее упрощающее, хотя и не реализующееся в действительности предположение, что внутриатомное поле эквивалентно магнитному полю \mathfrak{S}_i . Пусть \mathfrak{S}_a — внешнее, $\mathfrak{S}_r = \mathfrak{S}_i + \mathfrak{S}_a^-$ полное магнитное поле; \mathfrak{S}_a пусть будет постоянным по величине и направлению.

Чтобы вычислить намагничение, рассмотрим вначале те атомы, в непосредственной окрестности которых \mathfrak{S}_r имеет заданную величину и направление. Как показывает простой расчет, вклад этих атомов в результирующее намагничение парамагнетика, происходящее в направлении внешнего поля \mathfrak{S}_a , пропорционален

$$\frac{M^2}{RT} H_r (\cos \mathfrak{S}_r, \mathfrak{S}_a) \overline{\cos^2 \vartheta},$$

где ϑ означает угол между осью атома и направлением результирующего поля, $\overline{\cos^2 \vartheta}$ определяется уравнением (6).

Теперь еще нужно учесть различные величины и направления результирующего поля \mathfrak{S}_r . Легко убедиться, что $H_r \cos(\mathfrak{S}_r, \mathfrak{S}_a) = H_a$.

⁷ P. Weiss. J. Phys., 1924, 5, 129; W. Gerlach. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, 1923, Bd. 2, S. 124.

Таблица 1

Вертикальный ряд периодической си- стемы*	I					II		III		IV		V		VI**	VII	VIII
	Ti+++	V++++	V++	Cr+++	Mn++++	V++	Cr+++	Mn+++	Cr+++	Mn+++	Cr+++	Mn+++	Fe+++	Fe++	Co++	Ni++
$R_{\text{вал}}$	(9)	(9)	(9,2)	19	(19)	24	(25)	29— 29, 35 (очень негочно)	26— 26,5	24,5— 25	46,06					
Объяснение	s^2	s^2	s^4	s^5	s^6											
$R_{\text{выч}}$	8,67	19,35	24,5	29,6	24,5	24,5	24,5	24,5	24,5	24,5	24,5	24,5	24,5	24,5	24,5	14,15

* Положение иона в периодической системе, конечно, отличается от положения нейтрального порождающего атома и определяется по числу имеющихся в ионе электронов.

** По-видимому, и для Co^{++} , который гомологичен Fe^{++} , p равно 26 (ср. W. Cserfisch, Phys. Z., 1923, 24, 275).

Намагничение парамагнетика, таким образом, равно

$$\frac{M^2}{RT} H_a \overline{\cos^2 \psi},$$

т. е. совпадает с намагничением в отсутствие внутриатомного поля.

Выясняется, что влияние внутриатомного поля на кажущийся магнитный момент атома есть эффект вторичной природы (тепловое движение, конечная скорость движения атомной оси, неэквивалентность внутриатомного поля магнитному полю и т. д.), и поэтому можно ожидать, что оно относительно невелико.

Вернемся теперь к табл. 1. Что касается ионов первых пяти вертикальных рядов периодической системы, то согласие вычисленных значений p с наблюдаемыми удовлетворительно. Следует также отметить, что все точно измеренные магнетонные числа в действительности отличаются от вычисленных в сторону уменьшения. Совсем иначе обстоит дело с ионами из последнего столбца периодической системы. Магнетонные числа, наблюдаемые для Fe^{++} и Ni^{++} , отличаются от вычисленных так сильно, что данные в таблице, по зоммерфельдовской теории, следует рассматривать как неудовлетворительные. Магнитный момент Fe^{++} чрезвычайно переменен. Наконец, что касается Co^{++} , то его момент совпадает с вычисленным для s^5 -состояния; согласие, однако, только случайное и не имеет физического значения, так как недопустимо идентифицировать состояние иона Co^{++} с s^5 -состоянием.

Ион Co^{++} принадлежит к восьмой вертикали периодической системы, и поэтому согласно обменному закону может находиться только в таких состояниях, спектральные линии которых соответствуют четной мультиплетности (r — четное). Поскольку, однако, магнитные числа, вычисленные для четных s -состояний, очень заметно отличаются от наблюдаемых для Co^{++} , то не остается другой возможности, кроме как приписать иону Co^{++} многоквантовое ($k > 1$) нормальное состояние⁸.

Таким образом, станет понятным отклонение Co^{++} от зоммерфельдовского правила, которое утверждает, что число боровских магнетонов в атоме или ионе либо равно номеру вертикального ряда в периодической системе, к которой этот атом принадлежит, либо меньше его на четное число. Это правило также может рассматриваться как простое следствие хорошо известных спектроскопических законов, утверждающих, что (максимальная) мультиплетность спектральной линии атома или больше соответствующего номера вертикального ряда периодической системы на один, или меньше его на нечетное число. Как можно усмотреть, руководствуясь табл. 1, отсюда непосредственно вытекает справедливость зоммерфельдовского правила для всех атомов, находящихся в s -состоянии. Для многоквантовых состояний ($k > 1$), т. е., например, для невозмущенного иона Co^{++} , это правило, однако,

⁸ На эту возможность указывал также А. Зоммерфельд. *Sr. Ann. Phys.*, 1924, 73, 209.

уже неприменимо (уже из-за того, что для $k \wedge 1$ (истинные) магнетонные числа, вообще говоря, не целые).

Так как для Co^{++} мы таким образом должны предположить многоквантовое состояние, то кажется естественным распространить это предположение также и на Fe^{++} и Ni^{++} и попробовать таким способом устранить указанное несоответствие между теорией и экспериментом. С результатами экспериментальных исследований, так же как с квантовомеханическими представлениями, это предположение находится в наилучшем соответствии. Потому что, во-первых, спектроскопически, особенно измерениями по поглощению, В. Грогрианом и Г. Гизелером было доказано, что невозбужденные состояния атомов многих элементов (например, Sc, Ti, V, Fe) многоквантовые ($k > 1$). Во-вторых, Н. Бор пришел к мнению, что при построении интересующей нас группы элементов (от A до Co) внутренняя электронная оболочка Z_3 развивается и оболочки Z_1 и Z_2 дополняются, так что добавляемые электроны оказываются связанными в двух- и трехквантовые орбиты.

Чтобы проверить наше предположение, мы сравним⁹ наблюдаемые магнетонные числа для Fe^{++} , Co^{++} и Ni^{++} с вычисленными для p - и d -состояний ($k=2$ и $k=3$) по формуле (7). Разумеется, мы будем учитывать упомянутые выше спектроскопические законы, ограничивающие значения числа мультиплетности r атома.

Рассмотрим вопрос, является ли применение формулы (7), которая была выведена на основе спектроскопических данных и учитывает тонкие особенности спектров, оправданным для растворенных или находящихся в кристаллической решетке ионов. Представим себе (адиабатический) переход иона из газового состояния в раствор или в кристаллическую решетку. При этом его энергия заметно изменится, электронные орбиты будут деформированы, но квантовые числа, характеризующие состояние иона, останутся неизменными. Потому что даже при добавлении электрона в атом, согласно боровскому постулату об инвариантности и постоянстве квантовых чисел, могут изменяться только те квантовые числа, которые соответствуют относительной ориентации электронной орбиты. Если остается неизменным состояние ионизации атома, то и квантовые числа не меняются. Но магнитный момент атома зависит не от энергии, а от квантовых чисел, которые определяют значение его момента импульса.

Так как нормальные состояния ионов в газообразном состоянии и в растворенных или твердых солях должны быть идентичны (при одном упоминающемся ниже ограничении, касающемся значения внутреннего квантового числа), то магнитометрические данные могут привести к выводам относительно строения спектров свободных ионов.

⁹ Мы не касаемся вопроса, не будут ли также и некоторые из ионов, принадлежащих первым вертикалям периодической системы, находиться в многоквантовом нормальном состоянии.

§ 4. Ионы Fe⁺⁺ и Co⁺⁺

В табл. 2 даны значения p , вычисленные по формуле (7), лежащие наиболее близко к измеренным значениям кажущегося магнетонного числа для Fe⁺⁺, Co⁺⁺ и Ni⁺⁺. При составлении таблицы мы учли спектроскопические законы, так что, например, для сравнения с Fe⁺⁺ привлекли только такие квантовые состояния, мультиплетность которых r — нечетная и не превосходит значение $r=7$. Далее мы ограничились только s -, p - и d -термами.

Т а б л и ц а 2

	Fe ⁺⁺	Co ⁺⁺	Ni ⁺⁺
$p_{\text{наб}}$	26—26,5	24,5—25	1), (1)
$p_{\text{выч}}$	$s_{3/2}^5, d_{3/2}^7 = 24,5$ $d_{5/2}^7 = 26,0$ $p_{5/2}^7 = 28,6$	$p_{3/2}^4 = 23,7$ $d_{5/2}^6 = 24,5$ $p_{5/2}^6 = 26,2$	$d_{3/2}^5 = 14,3$ — $p_{3/2}^5 = 17,7$

Обратим внимание вначале на ионы Fe⁺⁺ и Co⁺⁺. Данные, представленные в табл. 2, делают вероятным, что нормальное состояние этих ионов следует идентифицировать с $d_{3/2}^5$ (соответственно $d_{5/2}^6$). Тогда согласие вычисленных магнетонных чисел с наблюдаемыми становится таким же хорошим, как согласие последних друг с другом. Это положение не меняется, если привлечь более высокие квантовые состояния, например $k=4$ и $k=5$; ни одно из вычисленных магнетонных чисел не приближается к измеренным ближе, чем $d_{3/2}^5$ (соответственно $d_{5/2}^6$).

Это состояние кажется и теоретически оправданным, так как по боровской теории у элементов группы железа должно происходить образование электронной оболочки Z_3 , т. е. действительно должны быть трехквантовые d -состояния ($k=3$). Исходя из этого, на основе магнитометрических данных возможно проследить в деталях последовательные ступени в строении атомов.

Но на первый взгляд может показаться сомнительным, действительно ли именно состояния $d_{3/2}^5$ (соответственно $d_{5/2}^6$) могут быть нормальными состояниями ионов Fe⁺⁺ (соответственно Co⁺⁺), так как они отвечают средним термам рассматриваемого мультиплета, другими словами, так как для тех же значений k и r имеются еще другие значения j , которые частично больше, частично меньше, чем 3 (соответственно $5/2$). Действительно, спектроскопически установлено, что меньшую энергию имеет, т. е. соответствует нормальному состоянию, терм мультиплета с наименьшим (соответственно в обращенном мультиплете с наибольшим) значением внутреннего квантового числа. Нужно, однако, иметь в виду, что энергетические отношения между членами мультиплета растворенных или

внедренных в кристаллическую решетку ионов могут быть совсем другими, чем в газообразном состоянии. Конфигурации орбит атомных электронов нарушаются из-за влияния внутриатомных сил (например, возникающих от гидратации ионов). Так как возмущение будет различным в зависимости от состояния атома и так как разница энергий между членами мультиплета даже для дважды ионизированных атомов может быть малой, то можно себе легко представить, что в растворах или в твердых солях ионное состояние с меньшей энергией может соответствовать среднему, а не (как в газообразном состоянии) наименьшему или наибольшему значению внутреннего квантового числа ¹⁰.

В однородном поле, вероятно, такое перераспределение статистических весов между различными состояниями мультиплета было бы невозможно. Но поскольку внутриатомное поле неоднородно и заметно меняется уже на расстояниях одного порядка величины с электронными орбитами, то его влияние может существенно зависеть от расширения и от кажущегося объема атома и тем самым и от значения внутренних квантовых чисел.

Следует еще упомянуть, что кажущийся магнитный момент ионов Fe^{++} и Co^{++} значительно сильнее зависит от концентрации раствора и от вида анионов, чем это имеет место для других ионов ¹¹ (за исключением Fe^{+++} , см. ниже). Может быть, этот факт можно объяснить таким образом, что изменение состава раствора имеет следствием сдвиг статистических весов между находящимися в растворе одновременно, только мало отличающимися в энергетическом отношении различными состояниями мультиплета ионов. Так как магнетонные числа, отвечающие членам мультиплета, сильно друг от друга отличаются ¹², то уже относительно малый сдвиг весов проявится в заметном изменении результирующего магнитного момента. Напротив, *s*-состояния простые и разность энергий между таким квантовым состоянием и ближайшим к нему будет относительно очень велика. Поэтому становится понятным, что магнитные моменты ионов, находящихся в *s*-состояниях, в первом приближении не зависят от концентрации раствора.

Вейсс (I. с.) также высказал гипотезу, что, например, ионы Co^{++} могут находиться в двух различных состояниях, магнитные моменты которых составляют 24 и 25 вейссовских магнетонов. Уже не говоря о том, что это предположение не имеет никакого физического обоснования, значения, данные Вейссом, так мало отличаются друг от друга, что только очень существенный сдвиг в соотношении статистических весов этих двух типов ионов может проявиться в заметном изменении результирующего момента.

Далее нужно отметить, что в противоположность ионам, находящимся в *s*-состоянии, у Fe^{++} и Co^{++} наблюдались также значения *p*,

¹⁰ Ср. замечание на стр. 144.

¹¹ См. данные П. Вейсса (I. с.) и особенно *P. Cabrera. J. Phys., 1922, 3, 443.*

¹² Например, различным членам мультиплета d^5 соответствуют следующие магнетонные числа: 0; 10,5; 18,4; 26,0; 33,6.

которые больше теоретически вычисленных (для $d_{3/2}^5$ и $d_{5/2}^5$). Поскольку, как замечено выше, влияние внутреннего поля должно проявляться в уменьшении значений p , то этот факт можно объяснить тем, что в растворах (и твердых солях) Fe^{++} и Co^{++} , кроме ионов, находящихся в «нормальном состоянии» $d_{3/2}^5$ (соответственно $d_{5/2}^5$), действительно имеется заметное количество таких ионов, состояние которых отвечает более высоким значениям внутреннего квантового числа и также бóльшим магнитным моментам.

§ 5. Ионы Fe^{+++} и Ni^{++}

Для ионов Fe^{+++} в зависимости от состава раствора наблюдаются очень различные магнитные моменты (примерно от $p=26$ до $p=29,5$). Можно было бы попытаться поэтому идентифицировать нормальное состояние этих ионов с одним из термов мультиплетта (сдвиг веса). Сравнение наблюдаемых магнетонных чисел с вычисленными по формуле (7) показывает, однако, что это предположение не проходит.

Наверное, нужно, как обычно, приписать варьированность ионов Fe^{+++} их чрезмерно большой гидролизной способности и идентифицировать их нормальное состояние с s^5 . Кабрера указывает, что при отсутствии гидролиза магнитный момент иона Fe^{+++} не зависит от концентрации раствора и от вида анионов и равен 29. Измерения на твердых солях также дали значения $p=28,7$ до 29,15 (для s^5 теоретически $p=29,6$).

К сожалению, предположение, что гидролиз (т. е. образование нейтральной гидроксидмолекулы) имеет решающее влияние на кажущийся магнитный момент ионов, трудно привести в соответствие с указанной П. Кабрерой независимостью атомных моментов от степени диссоциации раствора.

На трудности другого рода мы наталкиваемся в случае ионов Ni^{++} . Как видно из табл. 2, нет s -, p - или d -состояния ($k \leq 3$) четной мультиплетности (обменный закон!), которое бы отвечало ¹³ измеренному значению магнитного момента Ni^{++} хотя бы приближенно. Если мы сделаем еще сравнение с четырех- и пятиквантовыми термами f и g , то оказывается, что только квинтетный терм g_3^5 соответствует магнетонному числу, лежащему очень близко к наблюдаемому (наблюдаемое значение 16,06, вычисленное 15,92).

Если мы будем считать состояние g_3^5 нормальным состоянием иона Ni^{++} , то придем к явному противоречию с боровской теорией строения атома. А именно, согласно Бору, у невозбужденных атомов четвертого периода могут встретиться самое большое трехквантовые электронные орбиты. Однако спектроскопически доказано ¹⁴,

¹³ Это имеет место также для магнетонных чисел, которые отвечают четным мультиплетам.

¹⁴ W. Grotrian, H. Gieseler. Z. Phys., 1924, 25, 342.

что невозбужденные атомы Ti и V, хотя и принадлежат к четвертому периоду, находятся в четырехквантовом состоянии ($k=4$). Используя частные сообщения о новых представлениях Бора, касающихся таких аномалий, упомянутые исследователи предполагают, что при таких четырехквантовых состояниях имеют место орбиты, которые не лежат целиком снаружи вокруг остального атома, но проходят внутри других электронных орбит.

Тот факт, что магнитный момент Ni^{++} совпадает с вычисленным для g_3^2 -состояния, возможно, объясняется тем, что слабо связанный электрон Ni^{++} находится на пятиквантовой орбите ($k=5$), лежащей совсем внутри иона, и имеет меньшую энергию, чем электроны на предположенных Бором «внешних» орбитах с азимутальным квантовым числом $k \leq 3$. Если это так, то стало бы понятным и то, что кажущийся магнитный момент Ni^{++} гораздо меньше зависит от свойств окружения, чем это имеет место для всех остальных ионов¹⁵, поскольку внешнее воздействие не может оказать заметного влияния на электронную орбиту, находящуюся внутри атома.

Выводы

1. При теоретическом объяснении экспериментальных данных о магнетонных числах рассматривается возможность, что нормальные состояния атома являются многоквантовыми ($k > 1$).

2. Оказывается вероятным, что невозбужденные ионы Fe^{++} и Co^{++} находятся в трехквантовом ($k=3$) состоянии.

3. Обсуждается влияние возмущения от внутриатомного поля на пространственное квантование.

4. Сделана попытка теоретически объяснить зависимость магнетонных чисел от концентрации раствора.

5. Излагаются трудности при объяснении магнитных свойств ионов Fe^{+++} и Ni^{++} .

Соответствуют ли развитые представления действительности, покажут исследования спектров соответствующих ионов.

З а м е ч а н и е. После того как данное сообщение уже давно было закончено, я узнал о новой работе А. Зоммерфельда¹⁶. Содержащиеся там выводы делают вероятным, что у некоторых атомов могут быть не только обращенные, но и частично обращенные термы, т. е. такие мультиплеты, наименьший член которых соответствует среднему (не наименьшему и не наибольшему) зна-

¹⁵ П. Вейсс указывает, что в растворах $NiSO_4$, $NiCl_2$ и $Ni(NO_3)_2$ два различных экспериментатора наблюдали следующие значения магнетонных чисел: 16,02; 16,03; 16,05; 16,06; 16,07, которые оказались не зависимыми от концентрации. В твердых солях $p=16,03$, $p=16,18$ и — единственное исключение — $p=16,9$ ($i^\circ > 150^\circ$). Но измерения, проведенные даже на комплексных соединениях никеля, привели к тому же результату, за исключением ненасыщенных связей, где наблюдалось $p=13,0$. Это число совпадает с вычисленным для g_3^2 -состояния ($p=13,05$).

¹⁶ Phys. Z., 1925, 26, 70.

чению внутреннего квантового числа. Зоммерфельд при этом сообщает, что такой частично обращенный терм действительно наблюдался у Fe и нечто подобное, по-видимому, часто встречается у Pb, Ne и т. д.

Тот факт, что нормальному состоянию ионов Fe^{++} и Co^{++} в растворенных и твердых солях соответствует частично обращенный терм d_3^5 (соответственно $d_{3/2}^6$), мы объясняли выше (§ 4) как следствие влияния внутриатомных полей. Упомянутые выводы Зоммерфельда, по-видимому, делают это предположение излишним, и, наверное, можно ожидать частично обращенных основных термов и для свободных ионов Fe^{++} и Co^{++} .

Следует сделать еще одно замечание. Согласно Зоммерфельду (l. c.), построение стонеровской O_{32} -оболочки, содержащей четыре электрона, должно начинаться с La^{++} , невозбужденное состояние которого поэтому должно соответствовать терму $d_{3/2}$ (в зоммерфельдовских обозначениях d_2). Нам кажется, однако, гораздо более вероятным, что в группе редких земель (14 элементов) построение O_{43} - и O_{44} -оболочек проходит с $6+8=14$ электронами; предположение, которое, по-видимому, находится в соответствии с первоначальными боровскими представлениями. Если это предположение соответствует действительности, то, согласно стонер-зоммерфельдовской теории, для La^{++} и гомологичных ему ионов Ce^{+++} и Pr^{++++} нужно ожидать, что основным термом будет терм $f_{3/2}^2$. Этому состоянию по формуле (7) соответствует магнетонное число $p=12,7$. В самом деле, измерения П. Кабрера на Ce^{+++} дали $p=11,4$ и С. Мейера¹⁷ на Pr^{++++} привели к значению $p=13,8$, что близко к вычисленному значению.

Поступила 2 апреля 1925 г.

Примечание. В работе, по-видимому, впервые рассмотрен вклад орбитального момента количества движения в величину магнитного момента атома или иона. Получены выражения для магнитного момента атома в состоянии с произвольными значениями квантовых чисел j (полный момент количества движения), l (орбитальный момент в статье выражен через число $k=2l+1$) и s (спин; введенная в статье мультиплетность $r=2s+1$).

Если принять во внимание эти обозначения, то формула (7) и выражение для g -фактора (см. споску на стр. 136) в точности совпадают с теми, которые теперь приводятся во всех учебниках по квантовой механике.

Что касается сравнения с опытными данными, то следует иметь в виду, что, как теперь установлено, термы изолированных ионов и тех же ионов в кристалле, вообще говоря, различны.

¹⁷ St. Meyer. Phys. Z., 1925, 26, 51. Данные С. Мейера о более ранних результатах позволяют допустить, что для ионов Pr^{++++} значение магнетонного числа 13,8 могло быть завышенным и было вызвано присутствием ионов Pr^{+++} .

ПОПЫТКА КОЛИЧЕСТВЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИНЦИПА СООТВЕТСТВИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ. I ¹

Предпринимается попытка, следуя идеям Крамерса и Борна, придать количественный смысл принципу соответствия. Это достигается тем, что истинным (квантовомеханическим) величинам сопоставляются (классически вычисляемые) величины, усредняемые по прямолинейным путям в J_k -пространстве между начальными и конечными состояниями (при этом не обязательно, чтобы эти величины были представимы в виде (7)). На основе модифицированного принципа соответствия количественно оцениваются относительные интенсивности зеемановских компонент. Наблюдаемые на опыте закономерности, в том числе правило сумм Орнштайна—Бургера, получаются как простые следствия модифицированного принципа соответствия. Полученные соотношения позволяют для всякой спектральной линии определить относительные интенсивности зеемановских компонент.

§ 1. Модифицированная формулировка принципа соответствия

В основе квантовой теории лежат три главных постулата: постулат стационарного состояния, условие частот Бора и принцип соответствия. В отличие от двух первых постулатов, для принципа соответствия характерна сугубо качественная формулировка. Несмотря на его чрезвычайную плодотворность, принцип соответствия рассматривается в целом всего лишь как промежуточный этап на пути к установлению истинного квантового закона. С полным основанием можно сказать, что одна из важнейших задач квантовой теории связана с необходимостью заменить качественное выражение принципа соответствия строго формулируемым квантовым законом. На пути к решению этой задачи за последнее время сделаны важные шаги.

Уже в 1919 г. Крамерс в своей диссертации обратил внимание на наличие важной связи между квантовыми и классически вычисляемыми частотами излучения атома, которая может быть сформулирована следующим образом. Рассмотрим условно-периодическую систему, и пусть ее квантовые состояния характеризуются квантовыми числами n_k ; поэтому значения переменных действия определяются как $J_k = hn_k$. Определенному квантовому переходу $n_k \rightarrow n_k + \tau_k$ соответствует квантовое излучение частоты

$$\nu_{qu} = \Delta E/h. \quad (1)$$

¹ Z. Phys., 1925, 34, 59. Перевод А. Е. Шабада.

Это квантовое излучение соответствует классически вычисленным гармоникам

$$\nu_{kl} = \sum_k \tau_k \nu_k = \sum_k \tau_k \frac{\partial H}{\partial J_k}, \quad (2)$$

где через $\nu_k = \partial H / \partial J_k$ обозначены основные частоты системы. Если рассмотреть теперь соответствие между квантовыми и классическими частотами несколько ближе, то, как известно, мы наталкиваемся на следующую характерную для принципа соответствия трудность: не ясно, следует ли описывать движение системы классически в начальном, либо конечном состояниях, либо в подходящим образом осредненном промежуточном состоянии⁹ Крамерс показал, что на этот вопрос надо отвечать следующим образом. Будем представлять себе, что переход $n_l \rightarrow n_k + \tau_k$ из начального в конечное состояние происходит прямолинейно в «фазовом пространстве J_k », т. е. для переменных действия положим

$$J_k = h(n_k + \mu \tau_k) \quad (3)$$

и позволим параметру μ нарастать от 0 до 1. Тогда для всякой произвольной функции $\Phi(J_k)$ от переменных действия получится

$$\frac{1}{h} \frac{d\Phi}{d\mu} = \sum_k \tau_k \frac{\partial \Phi}{\partial J_k}. \quad (4)$$

Из сопоставления (4) с (2) заключаем, что

$$\nu_{kl} = \frac{1}{h} \frac{dH}{d\mu}. \quad (5)$$

Поскольку, с другой стороны, значения параметра μ в начальном и конечном состояниях отличаются на единицу, боровское условие частот (1) можно записать следующим образом:

$$\nu_{qu} = \frac{1}{h} \frac{\Delta E}{\Delta \mu},$$

или, поскольку гамильтонова функция H равна полной энергии системы, еще и как

$$\nu_{qu} = \frac{1}{h} \frac{\Delta H}{\Delta \mu}. \quad (1a)$$

Отсюда видно, что ν_{qu} и ν_{kl} соотносятся между собой как разностные и дифференциальные частные.

Эта количественная взаимосвязь может быть также сформулирована следующим образом: истинная (квантотеоретическая) частота ν_{qu} равна усредненному «по прямолинейному пути» в J_k -пространстве значению соответствующей (классической) частоты ν_{kl} . Действительно,

$$\int_0^1 \nu_{kl} d\mu = \int_0^1 \sum_k \tau_k \frac{\partial H}{\partial J_k} d\mu = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{dH}{d\mu} d\mu = \frac{\Delta H}{h} = \nu_{qu}. \quad (6)$$

М. Борн недавно предпринял попытку совершенно аналогичным образом видоизменить классические законы для возмущения условно-периодической системы, вызываемого наложением взаимодействия или внешним полем ². Точнее, Борн развил только что описанный метод вычислений Крамерса и довел его до следующего общего правила: повсюду, где классически вычисляемая величина имеет вид

$$A_{kl} = \sum_k \tau_l \frac{d\Phi(J_k)}{dJ_k} = \frac{1}{h} \frac{d\Phi}{d\mu}, \quad (7)$$

ее следует заменять прямолинейным средним значением или разностным частным

$$A_{qm} = \int_0^1 A_{kl} d\mu = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d\Phi}{d\mu} d\mu = \frac{\Delta\Phi}{h}. \quad (8)$$

Это правило особенно оправдало себя в применении к явлениям дисперсии, где оно привело к известным дисперсионным соотношениям Крамерса.

Замечательные успехи, которые уже продемонстрировало правило квантования Борна—Крамерса, побуждают к попытке расширить область его применения и распространить на те случаи, когда классически вычисляемые величины не представимы в виде суммы производных $\sum_k \tau_k \frac{\partial}{\partial J_k}$. Итак, мы возьмем на испытание следующую

рабочую гипотезу (для начала мы ограничиваемся невырожденной системой): если классически вычисленная величина $A_{kl}(J_k)$ представима в виде суммы вкладов $A_\tau(J_k)$ отдельных гармоник ³, то тогда парциальные вклады, соответствующие квантовым скачкам $n_k \rightarrow n_k + \tau_k$, получаются при переходе к квантовой теории по становкой прямолинейных средних в J_k -пространстве между начальным и конечным состояниями:

$$A_{qm}(hn_k \rightarrow hn_k + h\tau_k) = \int_0^1 A_\tau(hn_k + h\mu\tau_k) d\mu. \quad (9)$$

Если эта попытка дать строго количественную формулировку принципу соответствия окажется правильной, то тем самым появится возможность найти большинство величин, ответственных за свойства атома, и сделать точными качественные положения принципа соответствия. В частности, тогда можно будет толковать условие частот Бора как простое следствие модифицированного принципа соответствия (ср. уравнение (6)).

² М. Born. Z. Phys., 1924, 26, 379.

³ Для краткости мы пишем $A_\tau(J_k)$ вместо $A_{\tau_1\tau_2, \dots, \tau_f}(J_1, J_2, \dots, J_f)$, где f равно числу степеней свободы системы.

Принимаемый вариант принципа соответствия можно поставить в более тесную связь с представлениями, введенными Бором, Крамерсом и Слэтером, относительно взаимосвязи излучения и строения атома. Рассмотрим, например, вопросы, касающиеся процессов испускания и поглощения. Согласно Бору, Крамерсу и Слэтеру, во всех этих случаях поведение атома эквивалентно поведению набора эффективных резонаторов, из которых каждый подстроен к одному определенному квантовому скачку. Частота эффективного резонатора, согласно Крамерсу, равна «прямолинейному» усреднению соответствующей частоты эффективной классической модели. Наша рабочая гипотеза утверждает, в частности, что та же самая связь имеет место также между интенсивностями излучения (см. ниже) квантового атома и эффективной классической модели. Когда же интенсивность излучения вычислена, то на основе энергетического принципа, понимаемого в статистическом смысле, можно также вычислить продолжительность жизни возбужденного состояния атома и т. д.

Однако не только закономерности испускания и поглощения излучения, но, по всей вероятности, также взаимодействие атомов в молекуле и электронов в атоме допускают описание с помощью эффективных резонаторов и тем самым оказываются в сфере действия нашей рабочей гипотезы ⁴.

К сожалению, в общем случае нужны еще дополнительные предположения для того, чтобы из данной формулировки принципа соответствия можно было вывести однозначные заключения о свойствах атома. Допустим, имеется задача вычислить интенсивности спектральных линий. Тогда возникает вопрос: следует ли непосредственно усреднять квадраты амплитуд соответствующих гармоник или сначала надо усреднить амплитуды и только потом посредством квадрирования перейти к интенсивностям? Возможны и другие варианты.

Сходные трудности стояли перед Борном в его многократно упоминавшейся работе. Именно, он нашел представление классической энергии возмущения W_2 (вычисленной во втором порядке), в котором она фигурирует в виде суммы вкладов отдельных гармоник:

$$W_2 = - \sum_{\nu_{\tau} > 0} \sum_k \tau_k \frac{\partial}{\partial J_k} \left(\frac{|D_{\tau}|^2}{\nu_{kl}} \right). \quad (10)$$

Здесь $D_{\tau} = D_{\tau_i \tau_j}, \dots, \tau_j$ обозначают коэффициенты разложения Фурье функции возмущения и ν_{kl} равно $\sum_i \nu_i \tau_i$. Тогда, следуя своему правилу квантования (8), Борн подверг величину W_2 «прямолинейному» усреднению и заменил в выражении (10) клас-

⁴ См. цитированную работу М. Борна. Ср. также *J. Frenkel. Z. Phys.*, 1924, 30, 50 (особенно стр. 64); в этой работе автор на основе сходных рассуждений попытался объяснить силы отталкивания между атомами.

сические величины ν_{kl} и $|D_\tau|^2$ на соответствующие квантовые величины ν_{qi} и $\Gamma(n_k + \tau_k, n_k)$. Только таким путем ему удалось прийти к дисперсионным соотношениям Крамерса. Вопрос о том, как должны вычисляться величины Γ , Борн оставил открытым, но все же заметил, что искать соответствующие величины для самих коэффициентов Фурье D_τ представляется бессмысленным, а квантовый смысл очевидным образом имеют только квадратичные образования $|D_\tau|^2$. Согласно нашему основному предположению следует, таким образом, постараться метод вычислений Борна дополнить требованием, чтобы $\Gamma(n_k + \tau_k, n_k)$ были равны прямолинейным средним соответствующих величин $|D_\tau|^2$. Только при наложении такого дополнительного требования вычисление энергии возмущения W_2 может быть действительно проведено.

Пам кажется, что также и при вычислении интенсивностей спектральных линий соответствующим образом усредняться должны не амплитуды гармоник C_τ эффективной модели, а квадратичные образования $|C_\tau|^2$, имеющие непосредственное физическое значение. Связь между коэффициентами Фурье электрического момента C_τ и интенсивностями излучения $i(n_k + \tau_k, n_k)$ должна, во всяком случае, быть той же самой, что и между коэффициентами Фурье энергии возмущения D_τ и величинами $\Gamma(n_k + \tau_k, n_k)$, поскольку в случае возмущения системы падающим светом существует простая пропорциональность между D_τ и C_τ , с одной стороны, и между $\Gamma(n_k + \tau_k, n_k)$ и $i(n_k + \tau_k, n_k)$ — с другой⁵.

§ 2. Рациональные отношения интенсивностей множественных линий и зеемановских компонент

Теперь мы переходим к проверке указанного правила квантования и с этой целью применим его к вычислению интенсивностей спектральных линий. Чтобы исключить возмущающее влияние условий возбуждения, мы ограничим наше рассмотрение относительно интенсивностями таких линий, чьи начальные термы различаются как можно меньше. Соответственно этому под наше рассмотрение подпадают только зеемановские и штарковские компоненты, линии полосатых спектров и т. п.

Вопросы, касающиеся относительных интенсивностей спектральных линий, до настоящего времени еще очень мало прояснены не только в теоретическом, но и в экспериментальном отношении. Только в прошлом году Бургеру и Доргело удалось при исследовании отношений интенсивностей множественных линий найти простую количественную закономерность, обладающую типичным для квантовой теории арифметическим характером⁶. В част-

⁵ Ср. цитированную работу М. Борна, формулы (19a) и (34) и *H. Kramers, W. Heisenberg*. Z. Phys., 1925, 31, 681, формулы (24), (28) и (29). Под $i(n_k + \tau_k, n_k)$ здесь должны пониматься квадраты амплитуд эффективных резонаторов.

⁶ *H. C. Burger, H. B. Dorgelo*. Z. Phys., 1924, 23, 258.

ности, при этом отмечается следующее правило сумм: суммы интенсивностей линий одного мультиплета с общими конечными (начальными) уровнями пропорциональны статистическим весам этих общих уровней. Это правило было установлено посредством многочисленных измерений ⁷.

Орнштайн и Бургер обобщили это правило и применили его к вычислению отношений интенсивностей зеемановских компонент ⁸. Как известно, каждому магнитному уровню приписывается равный статистический вес. Далее следует заметить, что в применении к зеемановским компонентам правило сумм должно устанавливаться не для интенсивностей, которые зависят от местоположения наблюдателя, а для энергии, излучаемой по всем направлениям. Если рассмотреть интенсивности, которыми обладают зеемановские компоненты при наблюдении в поперечном направлении, то в энергетическом правиле сумм интенсивности перпендикулярно поляризованных компонент нужно учесть дважды, поскольку каждая из них излучается также в продольном направлении как циркулярно-поляризованная компонента. Можно также вместо излучаемой энергии ввести «показатели перехода», т. е. относительные частоты квантовых скачков. Тогда излучаемая энергия пропорциональна произведению $h\nu$ на показатель соответствующего перехода, и поскольку частоты разных зеемановских компонент почти равны друг другу, то, переходя от наблюдаемых при поперечном эффекте относительных интенсивностей к показателям переходов, следует для π - и σ -компонент домножить их интенсивности соответственно на 1 и 2. Тогда правило сумм Орнштайна—Бургера допускает следующую формулировку.

1. Правило сумм. Для каждой линии мультиплета сумма показателей всех переходов между произвольным начальным (конечным) уровнем m_0 и всеми допустимыми конечными (начальными) магнитными уровнями не зависит от m_0 ; таким образом, каждое значение m_0 соответствует одной и той же сумме показателей.

При вычислении интенсивности зеемановских компонент Орнштайн и Бургер пользуются далее еще следующими двумя эмпирическими правилами ⁹.

2. Правило симметрии. Компоненты, располагающиеся симметрично по отношению к линии, не чувствительной к магнитному полю, имеют равные интенсивности.

3. Правило поляризаций. Каждая спектральная линия при поперечном наблюдении в магнитном поле должна в целом представляться неполяризованной; поэтому суммарная интенсивность

⁷ Ср. краткое изложение в книге: *A. Sommerfeld. Atombau und Spektrallinien*, 4 Aufl., 1924; далее: *R. Frerichs. Z. Phys.*, 1925, 31, 305; *H. B. Dorgelo. Ibid.*, S. 827.

⁸ *Ornstein, H. C. Burger. Z. Phys.*, 1924, 29, 241.

⁹ Здесь, как и всюду в дальнейшем, предполагается, что магнитное поле является достаточно слабым.

всех σ -компонент должна быть равна суммарной интенсивности π -компонент.

Против справедливости этого последнего правила имеются некоторые соображения, выдвинутые Бором¹⁰. Нужно также принять во внимание наблюдения Егорова и Георгиевского, согласно которым в полном излучении определенных спектральных линий преобладают σ -компоненты. Эти наблюдения были подтверждены многочисленными работами других исследователей¹¹. Также при наблюдениях разделенных зеемановских компонент, согласно оценке Е. Бака, оказывается, что суммарные интенсивности σ -компонент превышают суммарные интенсивности π -компонент.

Указанные три правила делают возможным вычислить относительные интенсивности зеемановских компонент простых дуплетных и триплетных линий (главная серия и резкая побочная серия) и при этом приводят к довольно хорошему совпадению с экспериментом. При переходе, однако, к более сложным системам термов этих правил для вычисления интенсивностей оказывается недостаточно.

§ 3. Вычисление интенсивностей зеемановских компонент на основе модифицированного принципа соответствия

Мы сейчас исследуем вопрос о том, насколько положения модифицированного принципа соответствия совместимы с охарактеризованными эмпирическими данными. При этом в настоящем соображении мы ограничиваемся только эффектом Зеемана¹².

Зоммерфельд и Гейзенберг несколько лет назад вычислили относительные интенсивности зеемановских компонент в рамках классической эффективной модели¹³. Результаты их расчетов могут быть кратко изложены следующим образом. Пусть j — внутреннее квантовое число, m — магнитное, а θ — угол между осью j и направлением магнитного поля. Тогда $\cos \theta = m/j$. Пусть, далее, i_{-} , i_0 , i_{+} суть относительные интенсивности излучения в указанной эффективной модели при поперечном наблюдении, соответствующие квантовым переходам¹⁴ $\Delta m = -1$, $\Delta m = 0$, $\Delta m = +1$.

¹⁰ Göttinger Vorträge, v. III. Доклад 14 июня 1922 г. Эти лекции были для меня недоступны. Цитируется по: *H. Hönl. Z. Phys.*, 1925, **31**, 340.

¹¹ Ср. обзор вопроса в статье: *W. Voigt. Graetz's Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus*, Bd. IV. Leipzig, 1920, S. 624.

¹² Применение нашего метода к вычислению интенсивности множественных линий и энергии возмущения ведет к ряду трудностей, которые, возможно, требуют его модификации. Относящиеся сюда вопросы будут рассмотрены в последующей публикации.

¹³ *A. Sommerfeld, W. Heisenberg. Z. Phys.*, 1922, **11**, 131.

¹⁴ В противоположность Зоммерфельду и Гейзенбергу мы будем под Δ понимать такую разность, когда из конечного значения вычитается начальное значение соответствующего квантового числа. Т. е., например, пере-

Эти величины пропорциональны квадратам амплитуд соответствующих гармоник эффективной модели. Надо, наконец, еще различать три случая, смотря по тому, чему равно изменение внутреннего квантового числа Δj , соответствующее данной спектральной линии. Вычисление дает

$$i_- : i_0 : i_+ = \begin{cases} (j-m)^2 : 4(j^2-m^2) : (j+m)^2, & \Delta j = +1, \\ j^2 - m^2 : 4m^2 : j^2 - m^2, & \Delta j = 0, \\ (j+m)^2 : 4(j^2-m^2) : (j-m)^2, & \Delta j = -1. \end{cases} \quad (11)$$

Теперь, чтобы определить истинные интенсивности зеемановских компонент и, стало быть, квадраты амплитуд эффективных резонаторов, нужно согласно § 1 соответствующие величины i усреднить между начальными и конечными состояниями, т. е. в формулах (11) вместо j и m подставить $j + \mu \Delta j$ и $m + \mu \Delta m$ соответственно и проинтегрировать по μ от $\mu=0$ до $\mu=1$. Обозначая усредненные величины через \bar{i} , в случае $\Delta j=1$, например, имеем

$$\bar{i}_- : \bar{i}_0 : \bar{i}_+ = \int_0^1 (j-m+2\mu)^2 d\mu : \int_0^1 \{(j+\mu)^2 - m^2\} d\mu : \int_0^1 (j+m+2\mu)^2 d\mu, \quad \Delta j = +1.$$

Вычисление дает

$$\bar{i}_- : \bar{i}_0 : \bar{i}_+ = \begin{cases} (j-m)(j-m+2) + \frac{4}{3} : 4 \left\{ j(j+1) - m^2 + \frac{1}{3} \right\} : (j+m)(j+m+2) + \frac{4}{3}, & \Delta j = +1, \\ j^2 - m(m-1) - \frac{1}{3} : 4m^2 : j^2 - m(m+1) - \frac{1}{3}, & \Delta j = 0, \\ (j+m)(j+m-2) + \frac{4}{3} : 4 \left\{ j(j-1) - m^2 + \frac{1}{3} \right\} : (j-m)(j-m-2) + \frac{4}{3}, & \Delta j = -1. \end{cases} \quad (12)$$

Следует заметить, что по самому смыслу модифицированного принципа соответствия усреднять следует не *относительные* интенсивности i , а квадраты амплитуд гармоник $|C_i|^2$, отличающиеся от величин i общим коэффициентом пропорциональности. Поскольку этот коэффициент является функцией от квантовых чисел

ходу $m=1 \rightarrow m=2$ отвечает $\Delta m=+1$. Соответственно в наших формулах (12) и (15) под j и m понимаются начальные значения этих чисел.

и тем самым также от μ , то его введение могло бы существенно повлиять на результат усреднения. К сожалению, мы должны довольствоваться указанным приближенным методом и пренебречь коэффициентом пропорциональности. Дело в том, что истинные пути излучающего электрона, а стало быть, разложение Фурье электрического момента атома сплошь и рядом неизвестны. Но даже когда мы готовы принять простое допущение о прецессирующей релятивистской эллиптической траектории излучающего электрона, то и в этом случае, как известно, амплитуды гармоник являются довольно сложными функциями квантовых чисел и вычисление средних значений оказывается весьма длительным. Поэтому мы ограничиваемся указанным приближенным методом, а оправдание его видим в хорошем совпадении получаемых результатов с опытом.

Возможно, однако, что при дальнейшем развитии теории указанный метод окажется не приближенным, а вполне точным и это будет означать, что всегда перед усреднением нужно подчинить усредняемые величины такой нормировке, которая бы в рассматриваемом случае сводилась к отбрасыванию коэффициента пропорциональности.

Ввиду того, что только отброшенный коэффициент пропорциональности, но не относительные величины i зависят от квантовых чисел n , k и r , получается, что вычисляемые нами относительные интенсивности от этих квантовых чисел не зависят. Ниже будет видно, насколько эта независимость подтверждается опытом. Однако, прежде чем мы приступим к сравнению с опытом, нам еще надо подвергнуть соотношения (12) второму усреднению.

Действительно, В. Гейзенберг¹⁵ показал, что вычисление аномального зеемановского расщепления с помощью эффективной модели приводит к правильным результатам только в том случае, если при вычислении делается допущение о том, что каждое квантовое состояние характеризуется не одним определенным значением внутреннего квантового числа j_0 , а парой таких значений $j_0 - \frac{1}{2}$ и $j_0 + \frac{1}{2}$. Пусть H_{kl} есть обычным образом вычисляемая энергия эффективной модели. Тогда, по Гейзенбергу, истинная квантовомеханическая энергия должна вычисляться так:

$$H_{qu} = \int_{j_0 - \frac{1}{2}}^{j_0 + \frac{1}{2}} H_{kl} dj. \quad (13)$$

Таким образом, квантовомеханическая энергия равна энергии эф-

¹⁵ W. Heisenberg. Z. Phys., 1924, 26, 291.

фактивной модели, усредненной в фазовом пространстве переменных действия вдоль единичного отрезка линии j . Усреднение такого рода мы будем в дальнейшем называть «квантовомеханическим», чтобы отличать его от того, которое связано с принципом соответствия.

Метод Гейзенберга оправдал себя в дальнейшем при вычислении квадратичного эффекта Зеемана¹⁶. Следуя его рассуждениям, мы тоже подвергнем¹⁷ относительные интенсивности зеемановских компонент (12) усреднению, аналогичному (13).

При этом нужно заметить еще следующее. Если мы хотим сравнивать с экспериментом теоретические полученные формулы, содержащие внутренние квантовые числа j , то возникает некоторая двузначность, ибо, как известно, внутреннее квантовое число может сопоставляться наблюдаемым на опыте спектральным термам двумя разными способами. Именно, значение внутреннего квантового числа, нормированное по Ланде, на $1/2$ больше, чем по Зоммерфельду:

$$j_L = j_S + \frac{1}{2}.$$

Если, однако, принимается гейзенбергово усреднение, то эта двузначность отпадает. Действительно, поскольку Гейзенберг при указанном в (13) усреднении (между $j=j_0-1/2$ и $j=j_0+1/2$) использовал принятое Ланде значение внутреннего квантового числа, то при применении зоммерфельдовских чисел приходится, как это легко видеть, усреднять по области $j_0 \rightarrow j_0+1$. Выбор нормировки внутреннего квантового числа зависит, таким образом, только от вида производимого усреднения. Неопределенность толкования теоретических формул тем самым отпадает: коль скоро выбрана нормировка, то подходящим образом производимое усреднение приводит к вполне определенному численному результату для каждого спектрального терма.

В дальнейшем мы будем использовать зоммерфельдовское значение внутреннего квантового числа. Квантовомеханическое среднее \bar{i} от относительных интенсивностей i , даваемых (12), должно поэтому вычисляться так:

$$\bar{i} = \int_j^{j+1} i dj. \quad (14)$$

Таким путем мы приходим после несложных вычислений к нашим

¹⁶ То, что Гейзенберг пользовался эффективной моделью Паули с двойным магнитным атомным остовом, не имеет значения для вычисления интенсивностей.

¹⁷ A. Landé. Z. Phys., 1924, 30, 329.

окончательным формулам

$$\bar{i}_- : \bar{i}_0 : \bar{i}_+ = \begin{cases} (j-m)(j-m+3) + \frac{8}{3} : 4 \left\{ j(j+2) - \right. \\ \left. - m^2 + \frac{7}{6} \right\} : (j+m)(j+m+3) + \frac{8}{3}, & \Delta j = +1, \\ (j+m)(j-m+1) : 4m^2 : (j-m)(j+m+1), & \Delta j = 0, \\ (j+m)(j+m-1) + \frac{2}{3} : 4 \left(j^2 - m^2 + \frac{1}{6} \right) : \\ : (j-m)(j-m-1) + \frac{2}{3}, & \Delta j = -1. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь надо еще заметить, что последовательность обоих усреднений (того, которое связано с принципом соответствия, и квантовомеханического) может быть обращена, при этом окончательные соотношения не меняются.

§ 4. Обсуждение результатов

Мы теперь хотим вывести общие следствия из наших соотношений и сравнить их с опытными фактами.

а) **Зависимость от квантовых чисел сочетаемых термов.** Относительные интенсивности \bar{i} зеемановских компонент зависят только от квантовых чисел j и m , но не от n , k и r (ср. по этому поводу выше). Далее, из-за усреднения (имеется в виду то, которое связано с принципом соответствия) между начальным и конечным состояниями относительные интенсивности \bar{i} остаются неизменными при взаимной перестановке начальных (j_a, m_a) и конечных (j_e, m_e) значений, т. е. зеемановские компоненты двух спектральных линий, из которых одна соответствует переходу $j_0 \rightarrow j_0 + \Delta j$, а другая противоположному переходу $j_0 + \Delta j \rightarrow j_0$, имеют равные относительные интенсивности¹⁸.

Можно считать, что имеющиеся в наличии (весьма, впрочем, скудные) наблюдательные данные подтверждают эти результаты. Независимость относительных интенсивностей от главного квантового числа n может рассматриваться как эмпирически достоверный факт, а независимость от азимутального квантового числа k представляется менее надежной, как это показывает табл. 1. В этой таблице сведены интенсивности (по оценкам Е. Бака¹⁹) зеемановских компонент нескольких линий с общими начальными и конечными значениями внутреннего квантового числа. При этом нужно заметить, что фактическая последовательность компонент

¹⁸ Нетрудно непосредственным вычислением убедиться в том, что наши соотношения (15) действительно удовлетворяют этому требованию.

¹⁹ Цит. по: А. Sommerfeld, W. Heisenberg. Z. Phys., 1922, 11, 131.

в спектральной картине зависит от параметра расщепления g и тем самым также от квантовых чисел k и r . Поэтому для двух линий с общими начальными и конечными значениями внутреннего квантового числа она может оказаться весьма различной. Чтобы облегчить сравнение, в табл. 1 отдельные компоненты расположены не в той последовательности, в какой они присутствуют в спектральной картине, а в порядке возрастания магнитных квантовых чисел их начальных уровней. Параллельно поляризованные компоненты заключены в скобки. При рассмотрении таблицы нужно принимать во внимание весьма приближенный характер численных данных.

Т а б л и ц а 1

Мультиплетность	Сочетаемые значения	Системы гермов	Относительные интенсивности зеемановских компонент
Дублет	$j = \frac{3}{2} \leftrightarrow j = \frac{1}{2}$	(sp_2)	10 : 6 : (10) : (10) : 6 : 10
		(p_1d_-)	10 : 6 : (9) : (9) : 6 : 10
Триплет	$j = 1 \leftrightarrow j = 1$	(sp_1)	6 : (10) : 6 : 6 : (10) : 6
		(p_1d_1)	6 : (10) : 6 : 6 : (10) : 6
Триплет	$j = 1 \leftrightarrow j = 0$	sp_0	5 : (10) : 5
		p_0d_1	8 : (10) : 8
Триплет	$j = 2 \leftrightarrow j = 1$	(sp_2)	10 : 8 : (8) : 2 : (10) : 2 : (8) : : 8 : 10
		(p_1d_2)	10 : 5 : (8) : 1 : (10) : 1 : (8) : : 5 : 10
		(p_2d_1)	10 : 4 : (6) : 1 : (6) : 1 : (6) : : 4 : 10

Наконец, что касается перестановочности начальных и конечных значений внутреннего квантового числа, то она подтверждается тем фактом, что спектральные картины соответствующих линий главной серии и побочной серии II [(sp) и (ps)] идентичны между собой.

б) **Правило симметрии.** Для каждой зеемановской компоненты, сдвинутой относительно магнитоустойчивой линии, которой соответствует квантовый скачок Δm с начального уровня (на конечный уровень) с магнитным числом m_0 , имеется, как известно, симметрично расположенная компонента, которая соответствует скачку $-\Delta m$ с начального уровня (на конечный уровень) $-m_0$. Обе эти компоненты должны, согласно правилу симметрии, иметь одинаковые интенсивности. Видно, что это правило в соотношениях (15) выполняется. Это так потому, что две компоненты, отличающиеся только знаком при m и Δm , имеют равные интенсивности \bar{i} . Если, например, первая компонента определяется значениями $\Delta j = +1$,

$\Delta m = -1$, $m = m_0$, то она имеет согласно (15) относительную интенсивность

$$\bar{i}_-(\Delta j = +1, m = m_0) = (j - m_0)(j - m_0 + 3) + \frac{8}{3},$$

а симметричная ей — ту же самую интенсивность

$$\bar{i}_+(\Delta j = +1, m = -m_0) = (j - m_0)(j - m_0 + 3) + \frac{8}{3}.$$

с) **Дополнительный запрет Ланде.** Этот эмпирически наблюдаемый запрет, представляющий собой дополнение к правилам отбора, исключает, как известно, переход $0 \rightarrow 0$ по магнитному квантовому числу, если одновременно $\Delta j = 0$. Это правило также выполнено в (15), ибо относительная интенсивность компоненты, соответствующей переходу $\Delta j = 0$, $\Delta m = 0$, есть $\bar{i}_0 = 4m^2$ и исчезает при $m = 0$.

д) **Правило сумм.** Чтобы проверить, удовлетворяют ли наши соотношения правилу сумм Орнштайна—Бургера, мы должны будем исследовать случаи $\Delta j = +1$, $\Delta j = 0$, $\Delta j = -1$ по отдельности.

В случае $\Delta j = 1$ из каждого начального уровня m с магнитным числом m_0 возможны три перехода: $\Delta m = \pm 1$ и $\Delta m = 0$. Сумма показателей этих переходов S согласно (15) есть

$$S = 2\bar{i}_-(m_0) + \bar{i}_0(m_0) + 2\bar{i}_+(m_0) = 8j^2 + 20j + \frac{46}{3}, \quad \Delta j = +1,$$

т. е. не зависит от m , как этого и требует правило сумм.

В случае $\Delta j = 0$ возможны три перехода: $\Delta m = \pm 1$ и $\Delta m = 0$ — из каждого начального уровня m_0 , кроме обоих «наружных» уровней $m_0 = j$ и $m_0 = -j$. Поскольку из первого невозможен переход $\Delta m = +1$, а из второго — переход $\Delta m = -1$, то и вообще не может существовать квантовых чисел, больших, чем j , или меньших, чем $-j$. Это обстоятельство, однако, можно не учитывать при вычислении суммы показателей переходов, поскольку в силу (15) интенсивности соответствующих компонент $\Delta j = 0$, $m = j$, $\Delta m = 1$ и $\Delta j = 0$, $m = -j$, $\Delta m = -1$ тождественно равны нулю. Поэтому для каждого произвольного начального уровня m_0 суммы показателей переходов просто равны

$$S = 2\bar{i}_-(m_0) + \bar{i}_0(m_0) + 2\bar{i}_+(m_0) = 4j(j + 1), \quad \Delta j = 0;$$

так что правило сумм оправдывается также и в этом случае. Иначе, однако, обстоит дело в случае $\Delta j = -1$. С начального уровня $m = j$ ($m = -j$) возможен теперь только один скачок $\Delta m = -1$ ($\Delta m = +1$); с начальных уровней $m = -j + 1$ и $m = -(j - 1)$ с добавлением $\Delta m = 0$ — всего по два скачка и, наконец, со всех остальных уровней возможны все три скачка: $\Delta m = \pm 1$ и $\Delta m = 0$. Хотя для всех «средних» уровней $|m| < j - 1$ суммы показателей переходов равны друг другу:

$$S = 2\bar{i}_-(m_0) + \bar{i}_0(m_0) + 2\bar{i}_+(m_0) = 8j^2 - 4j + \frac{10}{3},$$

$$\Delta j = -1, |m_0| < j - 1,$$

для «наружных» уровней мы имеем, однако, меньшее значение

$$S = 8j^2 - 4j + \frac{6}{3}, \quad \text{если } j > 1,$$

и

$$S = 8j - \frac{10}{3} = \frac{14}{3}, \quad \text{если } j = 1, \quad \Delta j = -1, \quad m_0 = \pm(j - 1),$$

$$S = 8j^2 - 4j + \frac{4}{3}, \quad \Delta j = -1, \quad m_0 = \pm j.$$

Правило сумм имеет поэтому в данном случае лишь ограниченную справедливость и выполнено строго только для «средних» уровней. Отклонения от этого правила, однако, слишком незначительны, чтобы их можно было обнаружить на имеющемся сейчас экспериментальном материале. Действительно, в самом благоприятном мыслимом случае (j минимально) суммы показателей, вычисленные для следующих друг за другом начальных уровней, обладают такими значениями:

$$\begin{array}{l} S = 8, 7, 8, \\ S = 20, 21, 21, 20, \\ S = 38, 39, 41, 39, 38, \end{array} \quad \Delta j = -1 \left\{ \begin{array}{l} j = 1, \\ j = \frac{3}{2}, \\ j = 2. \end{array} \right.$$

Согласно сделанному ранее замечанию в (15) следует под j и m понимать начальные значения этих квантовых чисел. Чтобы теперь определить суммы показателей переходов для конечных уровней, достаточно принять во внимание тот факт, что зеемановские компоненты двух линий $j_0 \rightarrow j_0 + \Delta j$ и $j_0 + \Delta j \rightarrow j_0$ идентичны (ср. пункт а) этого параграфа).

Результаты данного пункта можно резюмировать следующим образом. Правило сумм выполняется строго для начальных уровней в случаях $\Delta j = 1$, $\Delta j = 0$ и для конечных уровней в случаях $\Delta j = 0$, $\Delta j = -1$. Однако в случае $\Delta j = -1$ для начальных уровней и $\Delta j = +1$ для конечных его справедливость ограничена «средними» уровнями. В противоположность этому для «наружных» уровней правило сумм в этих случаях выполнено лишь приближенно (соответствующие суммы являются несколько меньшими). При этом нужно иметь в виду, что при излучении эти «наружные» уровни не проявляются полностью, т. е. что с них или на них возможны не все три скачка: $\Delta m = \pm 1$ и $\Delta m = 0$. Такая редакция правил сумм представляется несколько не менее приемлемой, чем первоначально указанная Орнштайном и Бургером.

е) **Правило поляризации.** Обозначим через π общую интенсивность (в поперечном эффекте) всех компонент, колеблющихся

параллельно магнитному полю, а через σ_- , σ_+ — право- ($\Delta m = -1$) и лево- ($\Delta m = 1$) вращательно поляризованные компоненты. Благодаря симметрии картины имеем

$$\sigma_- = \sigma_+ = \sigma/2, \quad (16)$$

где σ означает общую интенсивность (в поперечном эффекте) перпендикулярно поляризованной части излучения. Степень поляризованности всего излучения мы обозначим через γ :

$$\gamma = (\sigma - \pi)/(\sigma + \pi). \quad (17)$$

При вычислении γ нам понадобится различать два случая, смотря по тому, изменяется или нет внутреннее квантовое число при квантовом скачке.

Для случая $\Delta j = 0$ из (15) получаем²⁰

$$\pi = \sum_{m=-j}^{m=+j} \bar{i}_0(m) = 4 \sum_{m=-j}^{m=+j} m^2 = \frac{4}{3} j(j+1)(2j+1), \quad \Delta j = 0$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= \sum_{m=-j}^{m=+j} \bar{i}_+(m) = (2j+1)j(j+1) - \sum_{m=+j}^{m=-j} (m^2 + m) = \\ &= \frac{2}{3} j(j+1)(2j+1), \quad \Delta j = 0. \end{aligned}$$

При вычислении σ_+ мы могли оставить без внимания то обстоятельство, что переход $\Delta m = +1$ с уровня $m = +j$ невозможен, поскольку, как это уже было отмечено, интенсивность этого перехода тождественно равна нулю.

Итак, имеем

$$2\sigma_+ = \sigma = \pi, \quad \Delta j = 0, \quad \text{откуда} \quad \gamma = 0 \quad (18)$$

в согласии с правилом поляризации Орнштайна и Бургера.

По-другому обстоят дела, однако, в случаях $\Delta j = +1$ и $\Delta j = -1$. Поскольку спектральные картины линий в случаях $j_0 \rightarrow j_0 + \Delta j$ и $j_0 + \Delta j \rightarrow j_0$ идентичны, то достаточно рассмотреть только один случай, например $\Delta j = +1$. Из каждого начального уровня с заданным магнитным числом возможны тогда все три перехода: $\Delta m = \pm 1$ и $\Delta m = 0$. Соотношения (15) дают

$$\begin{aligned} \pi &= \sum_{m=-j}^{m=+j} 4 \left\{ j(j+2) - m^2 + \frac{7}{6} \right\} = \frac{2}{3} (2j+1) (4j^2 + \\ &+ 10j + 7), \quad \Delta j = +1, \end{aligned}$$

²⁰ Как легко убедиться, соотношение

$$\sum_{m=-j}^{m=+j} m^2 = \frac{1}{3} j(j+1)(2j+1)$$

выполняется не только для целых, но и для полуцелых значений j и m .

$$\sigma_+ = \sum_{m=-j}^{m=+j} \left\{ (j+m)(j+m+3) + \frac{8}{3} \right\} = \\ = \frac{1}{3} (2j+1)(4j^2+10j+8), \quad \Delta j = +1.$$

Отсюда $2\sigma_+ = \sigma > \pi$, перпендикулярная поляризация преобладает и степень поляризованности всего излучения равна

$$\gamma = \frac{\sigma - \pi}{\sigma + \pi} = \frac{1}{8j^2 + 20j + 15}, \quad \Delta j = +1. \quad (19)$$

Максимальная степень поляризованности составляет, таким образом, $1/15$ (для $j=0$). Она быстро уменьшается с ростом j и обращается в нуль в граничном случае $j=\infty$.

Нам приходится, таким образом, иметь дело с одним отклонением от правила поляризации Орнштайна—Бургера, что, однако, следует рассматривать не как недостаток, а скорее как решающее преимущество наших главных соотношений (15). Ибо мы уже подчеркнули в § 2, что все опытные данные прямо указывают на преобладание перпендикулярно поляризованной составляющей в общем излучении спектральных линий в магнитном поле.

Количественная проверка равенств (18) и (19) на основе имеющегося (весьма, впрочем, скудного) экспериментального материала является, к сожалению, неосуществимой. Измерения степени поляризованности относятся по большей части к более сильному магнитному полю, в то время как справедливость наших формул ограничена слабыми полями (точнее говоря, слабость поля является достаточным условием), а напряженность поля, как об этом можно судить по опыту, значительно влияет на степень поляризованности. Только в двух случаях имеются измерения связанных в общую схему серий полностью упорядоченных линий (Na 5890 и 5896 и Cu 5153 и 5217—5292). В обоих случаях обнаруживается, что те из пар линий, для которых наши формулы дают большие значения степени поляризованности, и на самом деле поляризованы в большей мере, чем другие ²¹.

Теперь мы подытожим результаты обсуждения наших основных формул. Избегая введения всяких дополнительных предположений или гипотез, вводимых ad hoc, мы вычислили относительные интенсивности зеемановских компонент на основе модифицированного принципа соответствия. При этом обнаружилось, что правило симметрии, перестановочность начальных и конечных значений внутреннего квантового числа и дополнительный запрет Ланде в наших формулах выполнены. Также и правило сумм оказалось в общем справедливым с одним естественно возникающим исключением, которое относится к четырем «наружным»

²¹ Гёттингенская (1913) диссертация В. Вихерна, которая должна содержать большой экспериментальный материал, осталась для меня недоступной.

начальным (конечным) уровням при переходах $\Delta j = -1$ ($\Delta j = +1$). За счет этих уровней правило сумм для таких переходов справедливо лишь приближенно. Наконец, правило поляризации выполнено только при переходах $\Delta j = 0$. Напротив, при переходах $\Delta j = \pm 1$ полное излучение должно выглядеть частично перпендикулярно поляризованным, что соответствует также и опыту.

§ 5. Сравнение с опытом

Что касается совпадения качественных следствий принципа соответствия с фактическим ходом интенсивностей в магнитной спектральной картине, то оно известно уже давно. Сейчас мы переходим к количественному сравнению вычисленных нами интенсивностей с наблюдаемыми.

В табл. 2 вычисленные по нашим формулам относительные интенсивности нескольких спектральных линий представлены в обычной схематической форме. Над каждой отдельной схемой отмечены значения внутренних квантовых чисел сочетаемых термов. В левых и верхних рядах отдельных схем даны магнитные квантовые числа m сочетаемых уровней, а в нижних и правых — соответствующие суммы показателей переходов S . Интенсивности π -компонент заключены в скобки. Указаны также степени поляризованности полного излучения γ для каждой картины.

В табл. 3 вычисленные нами интенсивности сравниваются с их наблюдаемыми значениями (по оценкам Е. Бака, цитируется по А. Зоммерфельду и В. Гейзенбергу, см. выше). Представлены также интенсивности, вычисленные согласно правилам Орнштайна—Бургера, если только этих правил достаточно для вычисления. В случаях $\Delta j = 0$ правила Орнштайна—Бургера приводят к тем же результатам, что и наши формулы (15).

Вычисленные интенсивности нормированы обычным образом, т. е. интенсивность самой мощной компоненты положена равной 10. Поскольку фактическая последовательность компонент в спектральной картине зависит от параметра расщепления g и тем самым от квантовых чисел k и r , мы располагаем отдельные компоненты в порядке возрастания начальных значений магнитного квантового числа. Из каждой пары симметрично расположенных компонент представлено всегда по одной. Несмещенные компоненты отмечены чертой сверху. Принято обозначение спектральных термов по Зоммерфельду.

Если заметить, что наблюдаемые интенсивности приведены согласно оценкам (а не измерениям) Е. Бака, что отдельные компоненты частично перекрываются со своими соседями, что закон почернения неизвестен, что даже незначительное отклонение направления наблюдения от строгой поперечности вызывает существенное изменение соотношения интенсивностей π - и σ -компонент и что, наконец, наши формулы претендуют на строгость только в случае достаточно слабого поля, то совпадение вычисленных

Таблица 2

Четная кратность

$$1. j \leftrightarrow j' = \frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}; \gamma = 0$$

m	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	
$-\frac{1}{2}$	(1)	1	3
$+\frac{1}{2}$	1	(1)	3
	3	3	S

$$2. j \leftrightarrow j' = \frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{3}{2}, \gamma = \frac{1}{27}$$

m	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$	
$-\frac{1}{2}$	10	(13)	4	—	41
$+\frac{1}{2}$	—	4	(13)	10	41
	20	21	21	20	S

$$3. j \leftrightarrow j' = \frac{3}{2} \leftrightarrow \frac{3}{2}, \gamma = 0$$

m	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$	
$-\frac{3}{2}$	(9)	3	—	—	15
$-\frac{1}{2}$	3	(1)	4	—	15
$+\frac{1}{2}$	—	4	(1)	3	15
$+\frac{3}{2}$	—	—	3	(9)	15
	15	15	15	15	S

Нечетная кратность

$$1. j \leftrightarrow j' = 0 \leftrightarrow 1; \gamma = \frac{1}{15}$$

m	-1	0	$+1$	
0	4	(7)	4	23
	8	7	8	S

$$2. j \leftrightarrow j' = 1 \leftrightarrow 1, \gamma = 0$$

m	-1	0	$+1$	
-1	(2)	1	—	4
0	1	(0)	1	4
$+1$	—	1	(2)	4
	4	4	4	S

$$3. j \leftrightarrow j' = 1 \leftrightarrow 2, \gamma = \frac{1}{43}$$

m	-2	-1	0	$+1$	$+2$	
-1	19	(19)	4	—	—	65
0	—	10	(25)	10	—	65
$+1$	—	—	4	(19)	19	65
	38	39	41	39	38	S

Таблица 2 (окончание)

$$4. j \leftrightarrow j' = \frac{3}{2} \leftrightarrow \frac{5}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{63}$$

m	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{5}{2}$	
$-\frac{3}{2}$	31	(25)	4	—	—	—	
$-\frac{1}{2}$	—	19	(37)	10	—	—	95
$+\frac{1}{2}$	—	—	10	(37)	19	—	95
$+\frac{3}{2}$	—	—	—	4	(25)	31	95
	62	63	65	65	63	62	S

$$4. j \leftrightarrow j' = 2 \leftrightarrow 2, \quad \gamma = 0$$

m	-2	-1	0	$+1$	$+2$	
-2	(8)	2	—	—	—	12
-1	2	(2)	3	—	—	12
0	—	3	(0)	3	—	12
$+1$	—	—	3	(2)	2	12
$+2$	—	—	—	2	(8)	12
	12	12	12	12	12	S

Таблица 3

Дублетные линии

$$j \leftrightarrow j' = \frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}$$

Наблюдаемые (sp_1)	10	(9)
Вычисленные		
по формуле (15)	10	(10)
по Орнштайну—Бургеру	10	(10)

$$j \leftrightarrow j' = \frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{3}{2}$$

Наблюдаемые				
(sp_2)	10	6	(10)	
(p_1d_2)	10	6	(9)	
Вычисленные				
по формуле (15)	10	4	(13)	
по Орнштайну—Бургеру	10	3,3	(13,3)	

$$j \leftrightarrow j' = \frac{3}{2} \leftrightarrow \frac{3}{2}$$

Наблюдаемые (p_2d_2)	4	(10)	5	4	(1)
Вычисленные					
по формуле (15)	3,3	(10)	4,4	3,3	(1,1)
по Орнштайну—Бургеру	3,3	(10)	4,4	3,3	(1,1)

$$j \leftrightarrow j' = \frac{3}{2} \leftrightarrow \frac{5}{2}$$

Наблюдаемые (p_2d_3)	10	8	(10)	6	(10)	1
Вычисленные по формуле (15)	10	6,1	(8,1)	3,2	(11,9)	1,3

Таблица 3 (окончание)

Триплетные линии

$j \leftrightarrow j' = 0 \leftrightarrow 1$			$j \leftrightarrow j' = 1 \leftrightarrow 1$		
Наблюдаемые			Наблюдаемые		
(sp_0)	5	$(\overline{10})$	(sp_1)	6	(10) 6
(p_0d_1)	8	$(\overline{10})$	(p_1d_1)	6	(10) 6
Среднее	6,5	$(\overline{10})$	Вычисленные по формуле (15)	5	(10) 5
Вычисленные по формуле (15)	5,7	$(\overline{10})$	по Орнштайну—Бургеру	5	(10) 5
по Орнштайну—Бургеру	5	$(\overline{10})$			

Наблюдаемые	$j \leftrightarrow j' = 1 \leftrightarrow 2$				
(sp_2)	10	8	(8)	2	$(\overline{10})$
(p_1d_2)	10	5	(8)	1	$(\overline{10})$
(p_2d_1)	10	4	(6)	1	$(\overline{6})$
Среднее	10	5,7	(7,3)	1,3	$\overline{8,7}$
Вычисленные по формуле (15)	10	5,6	(10)	2,1	$(\overline{13,4})$
по Орнштайну—Бургеру	10	5	(10)	1,7	$(\overline{13,3})$

$j \leftrightarrow j' = 2 \leftrightarrow 2$						
Наблюдаемые (p_2d_2)	8	(10)	8	(4)	2	8
Вычисленные по формуле (15)	2,5	(10)	3,8	(2,5)	2,5	3,8
по Орнштайну—Бургеру *	2,5	(10)	3,8	(2,5)	2,5	3,8

$j \leftrightarrow j' = 2 \leftrightarrow 3$								
Наблюдаемые (p_2d_3)	9	8	(10)	6	(10)	1	4	$(\overline{10})$
Вычисленные по формуле (15)	9,4	6,3	(6,3)	3,9	(10)	0,8	2	$(\overline{11,2})$

* В этом случае вычисление интенсивностей по правилам Орнштайна—Бургера может быть выполнено, только если принять дополнительный запрет Ланде.

интенсивностей с наблюдаемыми вполне можно считать удовлетворительным (за исключением линий p_2d_2 , где отклонения несомненно слишком большие).

Нам все-таки кажется, что при оценке наших формул центр тяжести должен лежать не на непосредственном сравнении с оцененными из опыта интенсивностями, а на тех общих следствиях, о которых шла речь в предыдущем параграфе. Ибо, например, правило сумм представляется надежным в гораздо большей степени, чем данные наблюдений, отраженные в табл. 3, хотя оно и было до сих пор проверено с определенной строгостью только

на мультиплетных линиях, не расщепленных в магнитном поле. Эта таблица важна для нас только в одном отношении: именно, она показывает, что интенсивности, подсчитанные по нашим формулам (15), по меньшей мере столь же хорошо совпадают с до сих пор наблюдавшимися, как и те, что подсчитываются согласно правилам Орнштайна—Бургера.

Следует еще заметить, что П. Зеeman недавно представил фотометрическую кривую масштабного спектрального разложения сильной линии $\lambda=4254$ главного триплета Сг в септетной системе (s_3p_4). Вычисленные согласно (15) интенсивности отдельных компонент этой линии²² удовлетворительным образом совпадают с ходом интенсивности фотометрической кривой.

Резюме

1. Предпринимается попытка, следуя идеям Крамерса—Борна, развить количественную сторону принципа соответствия. Это достигается тем, что истинные (квантовые) величины берутся равными соответствующим (классическим) величинам, усредняемым по прямолинейным путям между начальными и конечными состояниями в пространстве J_k (при этом не обязательно, чтобы эти классические величины были представлены в виде суммы производных (7)).

Боровское условие частот может быть истолковано как следствие модифицированного принципа соответствия.

2. На основе модифицированного принципа соответствия и без всяких посторонних допущений или искусственных гипотез получены количественно относительные интенсивности зеemanовских компонент (правда, усреднению, предписываемому принципом соответствия, подвергаются не абсолютные, а только относительные интенсивности). При вычислении принято также во внимание изменение квантовых правил (квантовомеханическое усреднение), на которое указал Гейзенберг при исследовании проблемы аномального эффекта Зеemана. Наблюдаемые на опыте закономерности, в частности установленное Орнштайном, Бургером и Доргело правило сумм (с одной естественно возникающей оговоркой), получаются при этом как простые следствия модифицированного принципа соответствия. В противоположность правилам Орнштайна—Бургера, но в полном согласии с экспериментом вычисление приводит к частичной поляризованности общего излучения спектральных линий в магнитном поле.

²² Все они на одну единицу больше, чем вычисленные Хенлом (цитировано выше) на основе частично эмпирического, частично основанного на принципе соответствия рассмотрения. Кривая Зеemана воспроизводится в работе Хенла.

Отличие вычисленных нами интенсивностей некоторых зеемановских компонент от тех, которые получаются при использовании предписаний Орнштайна—Бургера, слишком ничтожно, чтобы на основе экспериментального материала можно было сделать выбор.

Полученные формулы дают возможность для каждой произвольной спектральной линии определить относительные интенсивности ее зеемановских компонент.

Поступила 15 июля 1925 г.

Примечание. Статья была написана до появления «новой» квантовой механики Гейзенберга—Шредингера, в которой вопрос об использовании принципа соответствия для вычисления частот и интенсивностей излучения при квантовых переходах оказался по существу снятым.

О КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МОЛЕКУЛЯРНОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ ¹

С помощью квантовой механики по методу Дирака рассмотрено рассеяние света в твердых телах. Обсуждается связь с методом квантования Гейзенберга—Паули. Вычисленная в первом приближении рассеивающая способность отличается от вычисленной по классической теории только зависимостью интенсивности стоксова рассеяния от температуры, причем имеющиеся экспериментальные результаты лучше соответствуют квантовой теории.

§ 1. Введение

Квантовая теория рассеяния света независимыми атомами и молекулами уже достаточно хорошо разработана. Однако отдельные атомы и ионы, составляющие кристаллическую решетку, настолько сильно связаны друг с другом, что во многих случаях мы оказываемся ближе к действительности, рассматривая твердое тело как целое, как единую систему. При этом в классической теории свойства твердого тела описываются в первом приближении феноменологически с помощью диэлектрической постоянной ϵ , упругих констант и т. д. Таким же образом будем действовать и мы при квантовомеханическом рассмотрении молекулярного рассеяния света, при этом мы используем методы квантования волновых полей, развитые П. Дираком [1] и В. Гейзенбергом и В. Паули [2].

Рассеяние света в твердых телах определяется взаимодействием света с упругими (тепловыми) колебаниями тел. Это взаимодействие в случае акустических (низкочастотных) колебаний имеет совсем другую природу, чем в случае инфракрасных (высокочастотных) колебаний. В первом случае можно отвлечься (в первом приближении) от атомного строения тела, рассматривая тело как непрерывную среду. Напротив, в случае инфракрасных колебаний атомная структура тела имеет существенное значение. Мы рассмотрим оба случая.

Как известно ², при рассеянии света его частота ω_1 меняется на величину $\pm \omega_0$, где ω_0 — частота упругого колебания в твер-

¹ Z. Phys., 1930, 60, 345. Перевод Б. М. Болотовского.

² Здесь и в дальнейшем за подробностями относительно классической теории рассеяния, а также за соответствующими ссылками на литературу мы отсылаем читателя к работе Л. И. Мандельштама, Г. С. Ландсберга и М. А. Леонтовича [3].

дом теле, того колебания, которое определяет процесс рассеяния. Если оно попадает в инфракрасную область спектра колебаний твердого тела, наблюдается случай комбинационного рассеяния, открытого Ландсбергом и Манделъштамом, и Раманом. Если же колебания лежат в акустической части спектра, имеет место случай «обычного» рассеяния, для которого изменение частоты оказывается намного меньше (оно еще экспериментально не обнаружено).

Рассеивающая способность тела, вычисленная по квантовой теории в первом приближении, отличается от вычисленной по классической теории только видом зависимости от температуры. По классической теории (но с учетом распределения Планка) интенсивность как стоксова (частота $\omega_i - \omega_\sigma$), так и антистоксова (частота $\omega_i + \omega_\sigma$) рассеяния пропорциональна множителю

$$\frac{1}{e^{\frac{h\omega_\sigma}{kT}} - 1}.$$

По квантовой же теории эта пропорциональность имеет место только для антистоксова рассеяния, а для стоксова рассеяния приведенный множитель заменяется на

$$\frac{1}{e^{\frac{h\omega_\sigma}{kT}} - 1} + 1 = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\omega_\sigma}{kT}}}.$$

Такой вид температурной зависимости был ранее теоретически выведен Г. С. Ландсбергом и Л. И. Манделъштамом [4] с помощью известных квантовомеханических положений. Они также установили эту зависимость экспериментально.

Ниже мы будем разлагать свет и упругие колебания не по стоячим, а по бегущим монохроматическим волнам. Благодаря этому постановка задачи в большей мере отвечает условиям реального эксперимента. Кроме того, становится возможным избежать введения особых граничных условий. Для того чтобы спектр собственных значений был дискретным, мы, следуя М. Борну [5], введем «циклическую решетку», иными словами, представим себе, что пространство, занятое телом, разбито на равные кубические объемы. Длину ребра куба обозначим через L . Мы ограничим наше рассмотрение только такими волнами, фаза которых в соответственных точках двух любых кубических объемов имеет равные значения. Содержащаяся в основном объеме L^3 энергия поля для системы свет + твердое тело квантуется по методу Дирака. Связь с теорией Гейзенберга—Паули будет обсуждена в § 5.

Если по аналогии с понятием световых квантов ввести понятие «упругих квантов», то основные результаты квантовомеханического расчета допускают наглядное объяснение. Предваряя эти результаты, мы приведем в § 2 некоторые простые соображения о рассеянии света, совершенно аналогичные тем, которые

обычно применяются при описании комптон-эффекта. Эти соотношения помогут уяснить используемые нами понятия. По нашему мнению, представление о квантах упругости окажется полезным и при рассмотрении других проблем, например проблемы теплопроводности диэлектрических кристаллов; расчеты, связанные с этой проблемой, в настоящее время выполняются.

§ 2. Изменение частоты рассеянного света по квантовой теории

В соответствии с основными положениями квантовой теории, каждой монохроматической волне независимо от ее природы (это может быть электромагнитная или упругая волна) ставится в соответствие квант, энергия которого $h\omega$ и импульс $h\mathbf{k}$ пропорциональны соответственно круговой частоте ω и волновому вектору $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$ рассматриваемой волны. В этих соотношениях h означает постоянную Планка, деленную на 2π , λ — длину волны, \mathbf{n} — единичный вектор волновой нормали.

Рассеяние света в твердых телах можно описать следующим образом. Элементарный акт рассеяния может осуществляться либо 1) при соударении светового кванта ω_l, \mathbf{k}_l с упругим квантом ω_s, \mathbf{k}_s , распространяющимся в твердом теле, причем из этих двух квантов образуется один световой квант ω_m, \mathbf{k}_m (антистоксово рассеяние), либо 2) при «взрыве» светового кванта ω_l, \mathbf{k}_l ; при этом за счет такого распадающегося кванта образуются световой квант ω_m, \mathbf{k}_m и упругий квант ω_s, \mathbf{k}_s (стоксово рассеяние).

Применение к этим процессам законов сохранения энергии и импульса дает

$$\omega_m = \omega_l \pm \omega_s, \quad \mathbf{k}_m = \mathbf{k}_l \pm \mathbf{k}_s. \quad (1)$$

Обозначим угол рассеяния (т. е. угол между направлениями \mathbf{k}_l и \mathbf{k}_m) через ϑ . Тогда из последнего соотношения получим

$$k_s^2 = k_l^2 + k_m^2 - 2k_l k_m \cos \vartheta. \quad (2)$$

Обычно величины k_l и k_m векторов \mathbf{k}_l и \mathbf{k}_m мало отличаются друг от друга, так что приближенно можно считать

$$k_s^2 = 2k_l^2 (1 - \cos \vartheta) = 4k_l^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad k_s = 2k_l \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (2a)$$

Волновой вектор световой волны пропорционален ее частоте: $k_l = \frac{\omega_l}{c} \sqrt{\varepsilon_0}$ (ε_0 — оптическая диэлектрическая постоянная тела).

В спектре упругих волн следует различать два случая.

а) В акустической части спектра упругих волн (низкие частоты) волновой вектор k_s пропорционален частоте ω_s : $k_s = \omega_s/v$ (v — скорость акустической волны). В этом случае из (2a)

получаем

$$\omega_s = 2\nu k_l \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{2\nu \sqrt{\varepsilon_0}}{c} \omega_l \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Подстановка этого значения в (1) дает

$$\omega_m = \omega_l \left(1 \pm \frac{2\nu \sqrt{\varepsilon_0}}{c} \sin \frac{\vartheta}{2} \right). \quad (3)$$

Эта формула для изменения частоты рассеянного света была выведена ранее на основе чисто классических соображений (см. [3]).

б) В инфракрасной высокочастотной части спектра упругих колебаний оказывается, напротив, что частота волны ω_s очень слабо зависит от волнового числа k_s . Именно инфракрасный спектр распадается на $3s - 3$ ветви (где s — число частиц в элементарной ячейке кристалла), причем каждой из ветвей отвечает вполне определенная предельная частота ω_j ($j = 1, 2, \dots, 3s - 3$), определяемая атомной структурой тела (некоторые из величин ω_j могут совпадать). Для рассматриваемых в связи с рассеянием света длин волн (больших по сравнению с периодом решетки) можно пренебречь зависимостью частоты ω_s от k_s и считать, что частота ω_s равна граничному значению ω_j .

Тогда уравнение (1) дает

$$\omega_m = \omega_l \pm \omega_j. \quad (4)$$

Это соотношение для изменения частоты, не зависящее от угла рассеяния, выполняется для комбинационного рассеяния, упомянутого в § 1.

§ 3. Связь света с акустическими колебаниями

Связь света с упругими колебаниями тела можно найти, определяя изменения диэлектрической постоянной ε тела, вызванные этими колебаниями³. Для простоты мы отвлекаемся здесь от изменений диэлектрической постоянной ε , вызванных поперечными акустическими колебаниями (эти изменения, впрочем, легко учесть), и будем рассматривать только *продольные акустические колебания*. Что же касается инфракрасных колебаний, мы приступим к их рассмотрению в § 7.

Используя известное соотношение $\Delta\rho = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}$, мы полагаем в первом приближении

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \Delta\rho = \varepsilon_0 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (5)$$

где ε_0 и ρ_0 — оптическая диэлектрическая постоянная и плотность тела в недеформированном состоянии, \mathbf{u} — смещение эле-

³ Поглощение остаточных лучей лежит в основе другого механизма взаимодействия. Здесь, однако, не имеет смысла входить в связанные с этим вопросы.

ментов тела из положения покоя. Зависимость ϵ от частоты света в дальнейшем учитывать не следует.

Отвлекаясь от поперечных акустических колебаний и пренебрегая сдвиговой упругостью, мы можем записать плотность кинетической и упругой энергии в виде

$$W_a = \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\mathbf{u}}^2 + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2, \quad (6)$$

где λ и μ — упругие константы Ламэ, характеризующие тело.

Плотность электромагнитной энергии в недеформированном теле имеет вид

$$W_e = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \quad (7)$$

а плотность энергии взаимодействия света с упругими колебаниями в согласии с формулой (5) записывается следующим образом:

$$V = \frac{\lambda\epsilon}{8\pi} \mathbf{E}^2 = - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \rho_0 \mathbf{E}^2 \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (8)$$

Для того чтобы разложить поле по собственным колебаниям, рассмотрим в соответствии со сказанным в § 1 «основной куб» с ребром длины L , расположенный внутри упругого тела. Введем следующие обозначения:

$$f_i^\alpha = \sqrt{\frac{2}{L^3}} \cos(\omega_i t - \mathbf{k}_i \mathbf{r} + \varphi_i^\alpha), \quad \Phi_i^\alpha = \sqrt{\frac{2}{L^3}} \sin(\omega_i t - \mathbf{k}_i \mathbf{r} + \varphi_i^\alpha), \quad (9)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, а \mathbf{k}_i — вектор с компонентами

$$k_{ix} = \frac{2\pi}{L} n_{ix}, \quad k_{iy} = \frac{2\pi}{L} n_{iy}, \quad k_{iz} = \frac{2\pi}{L} n_{iz} \quad (9a)$$

(n_{ix}, n_{iy}, n_{iz} — целые числа, оси координат должны быть параллельны ребрам куба). Величина ω_i должна быть положительной и $k_i \neq 0$. Случай $k_i = 0$ будет рассмотрен в § 5.

Функции f_i^α и Φ_i^α удовлетворяют соотношениям

$$\int f_i^\alpha f_m^\beta d\tau = \delta_{im} \cos(\varphi_i^\alpha - \varphi_m^\beta) + \delta_{i,-m} \cos \frac{1}{h} (\theta_i^\alpha + \theta_m^\beta),$$

$$\int \Phi_i^\alpha \Phi_m^\beta d\tau = \delta_{im} \cos(\varphi_i^\alpha - \varphi_m^\beta) - \delta_{i,-m} \cos \frac{1}{h} (\theta_i^\alpha + \theta_m^\beta),$$

где введено удобное для дальнейшего обозначение

$$\theta_i^\alpha = h(\omega_i t + \varphi_i^\alpha) \quad (10)$$

и

$$\delta_{i,m} = 1, \quad \text{если } \mathbf{k}_i = \mathbf{k}_m, \quad \text{в противном случае } \delta_{i,m} = 0,$$

$$\delta_{i,-m} = 1, \quad \text{если } \mathbf{k}_i = -\mathbf{k}_m, \quad \text{в противном случае } \delta_{i,-m} = 0.$$

Здесь и в дальнейшем интегрирование по объему распространяется на объем основного куба L^3 .

Электромагнитные колебания, удовлетворяющие условию «циклической решетки» (§ 1), могут быть следующим образом разложены по независимым собственным колебаниям:

$$\mathbf{E} = \sum_l \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{e}_l^\alpha E_l^\alpha f_l^\alpha, \quad \mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon_0} \sum_l \sum_{\alpha=1}^2 [\mathbf{k}_l \mathbf{e}_l^\alpha] \frac{1}{k_l} E_l^\alpha f_l^\alpha. \quad (11)$$

Каждому значению \mathbf{k}_l соответствуют две линейно-поляризованные волны с амплитудами E_l^1 и E_l^2 ; ортогональные единичные векторы \mathbf{e}_l^1 и \mathbf{e}_l^2 , определяющие направление колебаний в волне, перпендикулярны волновому вектору \mathbf{k}_l , а в остальном их выбор не ограничен. Частота ω_l волны пропорциональна волновому вектору \mathbf{k}_l :

$$\omega_l = ck_l / \sqrt{\varepsilon_0}. \quad (12)$$

Соответствующее разложение продольных акустических колебаний по собственным колебаниям имеет вид

$$\mathbf{u} = \sum_\sigma \mathbf{k}_\sigma \alpha_\sigma \Phi_\sigma, \quad \dot{\mathbf{u}} = \sum_\sigma \omega_\sigma \mathbf{k}_\sigma \alpha_\sigma f_\sigma \quad (13)$$

(постоянные α_σ определяют амплитуды собственных колебаний). В этом случае вместо (12) имеют место соотношения

$$\omega_\sigma = vk_\sigma, \quad v^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho_0 \quad (14)$$

(v — скорость акустической волны). В формулах (13) нет верхних индексов у величин f_σ и Φ_σ , потому что каждому значению \mathbf{k}_σ отвечает только одно собственное колебание.

Если теперь подставить разложения (11) или (13) в формулы (7) или соответственно (6) и проинтегрировать W_e (соответственно, W_a) по объему L^3 основного куба, то легко получить

$$\bar{W}_e = \int W_e d\tau = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \sum_l \sum_{\alpha=1}^2 (E_l^\alpha)^2, \quad (15)$$

$$\bar{W}_a = \int W_a d\tau = (\lambda + 2\mu) \sum_\sigma k_\sigma^4 \alpha_\sigma^2, \quad (16)$$

где \bar{W}_e (или соответственно \bar{W}_a) означает полную энергию электромагнитного (соответственно акустического) поля в объеме основного куба. Наконец, подставляя разложения (11) и (13) в формулу (8), получаем после интегрирования

$$\bar{V} = \int V d\tau = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho_0 \sum (\mathbf{e}_l^\alpha \mathbf{e}_m^\beta) k_\sigma^2 \alpha_\sigma E_l^\alpha E_m^\beta \int f_\sigma f_l^\alpha f_m^\beta d\tau,$$

где суммирование проводится по всем индексам.

Если преобразовать произведение $f_\sigma f_l^\alpha f_m^\beta$ с помощью известного соотношения $4 \cos a \cos b \cos c = \cos(a + b + c) + \cos(a + b - c) + \cos(a - b + c) + \cos(a - b - c)$, то легко получить

$$\int f_{\sigma} f_l f_m^{\beta} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2L^3}} \sum \delta_{0, \sigma \pm l \pm m} \cos \frac{1}{h} (\theta_{\sigma} \pm \theta_l^{\alpha} \pm \theta_m^{\beta}), \quad (17)$$

где следует провести суммирование по всем комбинациям знаков «плюс» и «минус» и, кроме того,

$$\delta_{0, \sigma+l+m} = 1,$$

если $\mathbf{k}_{\sigma} + \mathbf{k}_l + \mathbf{k}_m = 0$, в противном случае $\delta_{0, \sigma+l+m} = 0$,

$$\delta_{0, \sigma+l-m} = 1,$$

если $\mathbf{k}_{\sigma} + \mathbf{k}_l - \mathbf{k}_m = 0$, в противном случае $\delta_{0, \sigma+l-m} = 0$

и т. д.

Окончательно получаем

$$\bar{V} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \frac{\rho_0}{\sqrt{2L^3}} \sum \delta_{0, \sigma \pm l \pm m} (\mathbf{e}_l^{\alpha} \mathbf{e}_m^{\beta}) k_{\sigma}^2 \alpha_{\sigma} E_l^{\alpha} E_m^{\beta} \cos \frac{1}{h} (\theta_{\sigma} \pm \theta_l^{\alpha} \pm \theta_m^{\beta}). \quad (18)$$

§ 4. Квантование полей

Вместо того чтобы определять световую волну, задавая ее амплитуду E_l^{α} и постоянную фазу φ_l^{α} , мы хотим, следуя подходу Дирака, ввести новые величины N_l^{α} и θ_l^{α} , причем переменная фаза θ_l^{α} определяется соотношением (10), а величина N_l^{α} — соотношением

$$h\omega_l N_l^{\alpha} = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} (E_l^{\alpha})^2. \quad (19)$$

Как известно, эти величины в отсутствие возмущения удовлетворяют каноническим уравнениям

$$\dot{\theta}_l^{\alpha} = h\omega_l = \frac{\partial \bar{H}_e}{\partial N_l^{\alpha}}, \quad \dot{N}_l^{\alpha} = 0 = -\frac{\partial \bar{H}_e}{\partial \theta_l^{\alpha}},$$

где функцию Гамильтона \bar{H}_e для электромагнитного поля следует положить равной энергии поля \bar{W}_e :

$$\bar{H}_e = \bar{W}_e = \sum_l \sum_{\alpha=1}^2 h\omega_l N_l^{\alpha} \quad (20)$$

(см. (15) и (19)). Переменные θ_l^{α} и N_l^{α} являются также канонически сопряженными.

Для того чтобы величина N_l^{α} могла рассматриваться как число световых квантов сорта l , α , следует считать N_l^{α} q -числом, собственными значениями которого могут быть целые положительные числа. При этом, по Дираку, для q -чисел θ_l^{α} и N_l^{α} имеют место следующие перестановочные соотношения:

$$N_l^{\alpha} e^{\pm i\theta_l^{\alpha}/h} - e^{\pm i\theta_l^{\alpha}/h} N_l^{\alpha} = \pm e^{\pm i\theta_l^{\alpha}/h}. \quad (21)$$

Подобным же образом мы можем и акустические колебания описывать с помощью переменных θ_{σ} и M_{σ} , причем переменная M_{σ}

определяется уравнением

$$h\omega_\sigma M_\sigma = (\lambda + 2\mu) h^2 \alpha_\sigma^2. \quad (22)$$

Функция Гамильтона в этом случае записывается в виде

$$\bar{H}_a = \bar{W}_a = \sum_\sigma h\omega_\sigma M_\sigma. \quad (23)$$

Для того чтобы величина M_σ могла обозначать число акустических квантов сорта σ , следует величины θ_σ и M_σ рассматривать как q -числа, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$M_\sigma e^{\pm i\theta_\sigma/h} - e^{\pm i\theta_\sigma/h} M_\sigma = \pm e^{\pm i\theta_\sigma/h}. \quad (24)$$

Если теперь в формуле (18) выразить E_i^α и α_σ через N_i^α и M_σ , мы получим

$$\bar{V} = \sum \delta_{0, \sigma \pm l \pm m} B_{\sigma lm}^{\alpha\beta} \sqrt{M_\sigma N_l^\alpha N_m^\beta} \cos \frac{1}{h} (\theta_\sigma \pm \theta_l^\alpha \pm \theta_m^\beta), \quad (25)$$

где

$$B_{\sigma lm}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{h^3}{2(\lambda + 2\mu)L^3} \right)^{-1/2} \mathbf{e}_l^\alpha \mathbf{e}_m^\beta \sqrt{\omega_\sigma \omega_l \omega_m}. \quad (26)$$

Если рассматривать M , N и θ как q -числа, то в формуле (25) следует действительные c -числа

$$2 \sqrt{M_\sigma N_l^\alpha N_m^\beta} \cos \frac{1}{h} (\theta_\sigma \pm \theta_l^\alpha \pm \theta_m^\beta)$$

заменить на соответствующие действительные q -числа⁴

$$D_{\sigma+l+m}^{\alpha\beta} = \sqrt{M_\sigma N_l^\alpha N_m^\beta} e^{i(\theta_\sigma + \theta_l^\alpha + \theta_m^\beta)/h} + \sqrt{(M_\sigma + 1)(N_l^\alpha + 1)(N_m^\beta + 1)} e^{-i(\theta_\sigma + \theta_l^\alpha + \theta_m^\beta)/h}, \quad (27)$$

$$D_{\sigma+l-m}^{\alpha\beta} = \sqrt{M_\sigma N_l^\alpha (N_m^\beta + 1)} e^{i(\theta_\sigma + \theta_l^\alpha - \theta_m^\beta)/h} + \sqrt{(M_\sigma + 1)(N_l^\alpha + 1)N_m^\beta} e^{-i(\theta_\sigma + \theta_l^\alpha - \theta_m^\beta)/h} \text{ и т. д.}$$

Окончательно получаем

$$\bar{V} = \frac{1}{2} \sum \delta_{0, \sigma \pm l \pm m} B_{\sigma lm}^{\alpha\beta} D_{\sigma \pm l \pm m}^{\alpha\beta}. \quad (28)$$

§ 5. Сравнение с квантованием волновых полей по Гейзенбергу—Паули [6]⁵

По общей теории Гейзенберга—Паули, канонические переменные поля $Q_i(\mathbf{r})$ и $P_i(\mathbf{r})$, которые описывают состояние поля в пространственной точке \mathbf{r} , удовлетворяют перестановочным

⁴ Например, выражение $2\sqrt{M_\sigma} \cos \frac{1}{h} \theta_\sigma$, как известно, следует заменить на $\sqrt{M_\sigma} e^{i\theta_\sigma/h} + \sqrt{M_\sigma + 1} e^{-i\theta_\sigma/h}$.

⁵ Для понимания дальнейшего этот параграф не является необходимым.

$$P_i(\mathbf{r})Q_j(\mathbf{r}') - Q_j(\mathbf{r}')P_i(\mathbf{r}) = -i\hbar\delta_{ij}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (29)$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — дельта-функция Дирака, а импульс поля P_i следующим образом выражается через лагранжеву функцию поля \mathcal{L} :

$$P_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{Q}_i.$$

Однако из-за характерного вырождения уравнений Максвелла эти перестановочные соотношения нельзя применять к электромагнитному полю, если вырождение не снять с помощью введения дополнительных членов (см. работу Гейзенберга и Паули [2]). Поскольку мы ведем вычисления при наличии вырождения, мы не можем предполагать, что для проведенной нами в § 4 процедуры квантования соотношение (29) выполняется. Можно, однако, показать, что это квантование приводит к таким перестановочным соотношениям, которые можно рассматривать как вырожденную форму соотношения (29).

В качестве координат Q_i , описывающих состояние электромагнитного поля, как известно, выбираются компоненты 4-вектор-потенциала φ и \mathbf{A} .

Поскольку мы ведем вычисления в определенной системе координат, связанной с рассеивающим диэлектриком, мы можем нормировать компоненты потенциала таким образом, чтобы было $\varphi = 0$, $Q_i = A_{xi}$. Если несущественно изменить рассмотрение Гейзенберга—Паули, легко найти, что в диэлектрической среде канонический импульс \mathbf{P} равен

$$\mathbf{P} = -\frac{\varepsilon_0}{4\pi c} \mathbf{E}. \quad (30)$$

Если в это выражение подставить разложение (11) и затем с учетом (19) выразить E_i^α через N_i^α , мы получим

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\varepsilon_0 \hbar}{2\pi L^3} \right)^{1/2} \sum_l \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{e}_l^\alpha \omega_l^{1/2} \sqrt{N_l^\alpha} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \theta_l^\alpha - \mathbf{k}_l \mathbf{r}\right).$$

Если теперь N_l^α и θ_l^α считать q -числами, то следует действительное c -число $\sqrt{N_l^\alpha} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \theta_l^\alpha - \mathbf{k}_l \mathbf{r}\right)$ заменить на

$$T_l^\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{N_l^\alpha} e^{i(\theta_l^\alpha/\hbar - \mathbf{k}_l \mathbf{r})} + \frac{1}{2} \sqrt{N_l^\alpha + 1} e^{-i(\theta_l^\alpha/\hbar - \mathbf{k}_l \mathbf{r})} \quad (31)$$

и мы получаем

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\varepsilon_0 \hbar}{2\pi L^3} \right)^{1/2} \sum_l \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{e}_l^\alpha \omega_l^{1/2} T_l^\alpha. \quad (32)$$

Из соотношения $\mathbf{E} = -(1/c) \dot{\mathbf{A}}$ с учетом формул (11), (19) и (9) легко получить

$$\mathbf{A} = -2c \left(\frac{2\pi\hbar}{\varepsilon_0 L^3} \right)^{1/2} \sum_l \sum_{\alpha=1}^2 e_i^\alpha \omega_l^{-1/2} \sqrt{N_l^\alpha} \sin(\theta_l^\alpha / \hbar - \mathbf{k}_l \mathbf{r}),$$

или, заменяя величину $\sqrt{N_l^\alpha} \sin(\theta_l^\alpha / \hbar - \mathbf{k}_l \mathbf{r})$ на соответствующее q -число

$$S_l^\alpha = \frac{1}{2i} \sqrt{N_l^\alpha} e^{i(\theta_l^\alpha / \hbar - \mathbf{k}_l \mathbf{r})} - \frac{1}{2i} \sqrt{N_l^\alpha + 1} e^{-i(\theta_l^\alpha / \hbar - \mathbf{k}_l \mathbf{r})}, \quad (33)$$

находим:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} = -2c \left(\frac{2\pi\hbar}{\varepsilon_0 L^3} \right)^{1/2} \sum_l \sum_{\alpha=1}^2 e_i^\alpha \omega_l^{-1/2} S_l^\alpha; \quad (34)$$

q -числа T_l^α и S_m^β коммутируют, если $l \neq m$ и $\alpha \neq \beta$. Если же $l = m$ и $\alpha = \beta$, легко получить с помощью (21)

$$\begin{aligned} T_l^\alpha(\mathbf{r}) S_l^\alpha(\mathbf{r}') - S_l^\alpha(\mathbf{r}') T_l^\alpha(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4i} (e^{i\mathbf{k}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} + e^{i\mathbf{k}_l(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}) = \\ &= \frac{1}{2i} \cos \mathbf{k}_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (35)$$

Отсюда для разности скалярных произведений \mathbf{PQ} и \mathbf{QP} получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}) \mathbf{Q}(\mathbf{r}') - \mathbf{Q}(\mathbf{r}') \mathbf{P}(\mathbf{r}) &= 2\hbar L^{-3} \sum_l \sum_{\alpha=1}^2 \{ T_l^\alpha(\mathbf{r}) S_l^\alpha(\mathbf{r}') - \\ &- S_l^\alpha(\mathbf{r}') T_l^\alpha(\mathbf{r}) \} = -2i\hbar L^{-3} \sum_l \cos \mathbf{k}_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned}$$

или, если каждые два члена суммы, отвечающие волновым векторам \mathbf{k}_l и $-\mathbf{k}_l$, объединить в один член (штрих, стоящий у знака суммы, означает, что такое объединение проведено),

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \mathbf{Q}(\mathbf{r}') - \mathbf{Q}(\mathbf{r}') \mathbf{P}(\mathbf{r}) = -4i\hbar L^{-3} \sum_l' \cos \mathbf{k}_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (36)$$

В основном кубе L^3 функция Дирака записывается в виде

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = L^{-3} + 2L^{-3} \sum_l' \cos \mathbf{k}_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (37)$$

поскольку для любой функции $F(\mathbf{r})$, определенной в основном кубе, справедливо разложение Фурье

$$F(\mathbf{r}) = L^{-3} \int F(\mathbf{r}') \left\{ 1 + 2 \sum_l' \cos \mathbf{k}_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right\} d\tau.$$

Таким образом, правая часть соотношения (36) отличается от $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ (отвлекаясь от постоянного множителя) только на постоян-

ное слагаемое L^{-3} . Однако отсутствие этого члена объясняется тем, что выше мы не учитывали постоянного электрического поля

Действительно, пусть напряженность поля и вектор-потенциал постоянного поля описываются выражениями

$$\mathbf{E} = (-1/c)\dot{\mathbf{A}} = L^{-3/2}\mathbf{e}_0 E_0, \quad \mathbf{A} = -cL^{-3/2}\mathbf{e}_0 E_0 t$$

Для того чтобы провести квантование этого поля, мы будем рассматривать его как предельный случай поля, постоянного в пространстве, но периодически зависящего от времени:

$$\mathbf{A}' = -cL^{-3}\mathbf{e}_0 E_0 \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0}, \quad \mathbf{E}' = L^{-3/2}\mathbf{e}_0 E_0 \cos \omega_0 t$$

Квантовое число N_0 определим соотношением

$$\bar{W} = \frac{\varepsilon_0}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{8\pi} E_0^2 = h\omega_0 N_0$$

Предельный переход к исчезающей частоте $\omega_0 = 0$ и бесконечно большому числу квантов $N_0 = \infty$ проведем в конце вычислений.

Повторение расчетов, уже проведенных выше для случая пространственного периодического поля, дает на этот раз ($\theta_0 = \omega_0 t$)

$$\mathbf{Q}' = -\frac{c}{i} \left(\frac{2\pi h}{\varepsilon_0 L^3} \right)^{1/2} \mathbf{e}_0 \omega_0^{-1/2} \{ \sqrt{N_0} e^{i\theta_0/h} - \sqrt{N_0 + 1} e^{-i\theta_0/h} \},$$

$$\mathbf{P}' = -\frac{\varepsilon_0}{4\pi c} \mathbf{E}' = -\frac{1}{2c} \left(\frac{\varepsilon_0 h}{2\pi L^3} \right)^{1/2} \mathbf{e}_0 \omega_0^{1/2} \{ \sqrt{N_0} e^{i\theta_0/h} + \sqrt{N_0 + 1} e^{-i\theta_0/h} \},$$

и, таким образом, с учетом (21) имеем

$$\mathbf{P}'(\mathbf{r}) \mathbf{Q}'(\mathbf{r}') - \mathbf{Q}'(\mathbf{r}') \mathbf{P}'(\mathbf{r}) = -ihL^{-3}$$

Поскольку это соотношение не меняется в процессе предельного перехода $\omega_0 \rightarrow 0$, $N_0 \rightarrow \infty$, оно должно быть справедливо и для постоянного поля.

Если к периодическому полю (11) добавить еще постоянный член⁶

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{e}_0^\alpha E_0^\alpha + \sqrt{\frac{2}{L^3}} \sum_l \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{e}_l^\alpha E_l^\alpha \cos(\theta_l^\alpha/h - \mathbf{k}_l \mathbf{r}),$$

то вместо (36) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}) \mathbf{Q}(\mathbf{r}') - \mathbf{Q}(\mathbf{r}') \mathbf{P}(\mathbf{r}) &= -2ihL^{-3} - 4ihL^{-3} \sum_l' \cos \mathbf{k}_l (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \\ &= -2ih\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (38)$$

Это перестановочное соотношение можно рассматривать как вырожденную форму общего соотношения (29), поскольку из по-

⁶ Мы представляем постоянное поле, чисто формально, разложенным на две независимые компоненты, что должно соответствовать разложению монохроматической волны на две линейно-поляризованные составные части

следнего мы получили бы

$$\mathbf{P}(\mathbf{r})\mathbf{Q}(\mathbf{r}') - \mathbf{Q}(\mathbf{r}')\mathbf{P}(\mathbf{r}) = i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sum_{i,j=1} \delta_{i,j} = -3i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Другое значение численного множителя в правой части связано с тем, что имеются две поперечные волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях, и отсутствуют продольные электромагнитные колебания. Соответственно в случае продольных акустических колебаний (13) получаем перестановочные соотношения того же вида, где, однако, в правой части следует заменить множитель 3 на единицу.

Следует еще отметить, что, в отличие от результатов П. Иордана и В. Паули [6], проведенное нами квантование оставляет напряженности электрического и магнитного полей перестановочными. Однако, если бы мы разлагали поле по стоячим волнам, векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} оказались бы непостоянными. Но, если применить наш метод квантования к стоячим волнам, не снимая вырождение уравнений поля (см. стр. 176), мы бы вообще не получили простых перестановочных соотношений; соотношение (38) в этом случае не выполнялось бы.

§ 6. «Обычное» рассеяние

Состояние системы «свет + твердое тело» будем определять, задавая число имеющихся световых квантов и акустических квантов, т. е. задавая значения $N_n^{\gamma'}$ и $M_\tau^{\gamma'}$ переменных N_n^{γ} и M_τ^{γ} . Это состояние обозначим индексом r . В пространстве переменных N и M состоянию r отвечает амплитуда вероятности ⁷

$$\Psi_r = \prod_{n,\gamma} \delta_{N_n^{\gamma'}, N_n^{\gamma'}} \prod_{\tau} \delta_{M_\tau^{\gamma'}, M_\tau^{\gamma'}}. \quad (39)$$

(Π обозначает произведение множителей со всеми значениями n , γ и соответственно τ). Определим другое состояние s , задав квантовые числа $N_n^{\gamma''}$, $M_\tau^{\gamma''}$. Вероятность перехода из состояния r в состояние s зависит от соответствующего матричного элемента v_{rs} энергии взаимодействия \bar{V} :

$$v_{rs} = \sum_{N_n^{\gamma'} M_\tau^{\gamma'}} \Psi_s^+ \bar{V} \Psi_r, \quad (40)$$

где следует провести суммирование от 0 до ∞ по всем возможным значениям всех переменных $N_n^{\gamma'}$ и $M_\tau^{\gamma'}$, а вместо $\theta_n^{\gamma'}$ и $\theta_\tau^{\gamma'}$ подставить соответственно операторы $i\hbar\partial/\partial N_n^{\gamma'}$ и $i\hbar\partial/\partial M_\tau^{\gamma'}$.

В формулу (40) следует подставить значение величины \bar{V} , определяемое соотношением (28). Энергия взаимодействия \bar{V}

⁷ Экспоненциальный множитель, зависящий от времени, мы, как правило, опускаем.

представляет собой линейную функцию операторов $e^{i(\pm\theta_\sigma \pm \theta_l^\alpha \pm \theta_m^\beta)/\hbar}$. С учетом перестановочных соотношений (21) и (24) легко убедиться в том, что сумма

$$\sum_{N_n', M_\tau} \Psi_\sigma^+ e^{i(\pm\theta_\sigma \pm \theta_l^\alpha \pm \theta_m^\beta)/\hbar} \Psi_\tau,$$

только тогда отлична от нуля, когда все N_n'' равны N_n' , а все M_τ'' равны M_τ' . Исключение составляют случаи $M_\sigma'' = M_\sigma' \pm 1$, $N_l^{\alpha''} = N_l^{\alpha'} \pm 1$ и $N_m^{\beta''} = N_m^{\beta'} \pm 1$

Следовательно, возможны только такие (прямые) переходы, при которых число акустических квантов *данного* определенного сорта σ и одновременно число световых квантов двух сортов l, α и m, β меняются на единицу. Далее, для этих переходов *строго выполняется закон сохранения импульса*, поскольку коэффициент при $e^{i(\pm\theta_\sigma \pm \theta_l^\alpha \pm \theta_m^\beta)/\hbar}$ в выражении (28) отличен от нуля лишь при выполнении условия

$$\pm k_\sigma \pm k_l \pm k_m = 0$$

(ср. также § 2).

Наконец, по общей теории Дирака ([1], 1), исключаются все переходы, которые связаны с отличным от нуля изменением энергии. К такого рода переходам относится прежде всего одновременное рождение или одновременное исчезновение трех квантов: $\sigma; l, \alpha$ и m, β ; к ним относятся также такие переходы, в которых два световых кванта рождаются (или соответственно уничтожаются) за счет одного акустического кванта. Действительно, в этом случае требование, вытекающее из закона сохранения энергии

$$\omega_l + \omega_m = \omega_\sigma, \quad (41)$$

оказывается несовместным с соотношением

$$k_l + k_m = \pm k_\sigma, \quad (41')$$

вытекающим из закона сохранения импульса⁸.

Следовательно, возможны только такие (прямые) переходы⁹, при которых световой квант l, α , рассеиваясь, превращается в световой квант m, β и одновременно порождается или уничтожается акустический квант σ . Мы рассмотрим как пример рассеяние с образованием акустического кванта, т. е. стоксово рассеяние.

⁸ Именно, из соотношений (41), (12) и (14) следует $\frac{c}{v\epsilon_0}(k_l + k_m) = vk_\sigma$,

что при $v \ll c$ несовместимо с равенством (41').

⁹ Непрямые процессы рассеяния (т. е. последовательность из двух следующих друг за другом прямых переходов без сохранения «прогресс энергии»), по-видимому, играют заметную роль при рассеянии в твердых телах. Этот вопрос будет рассмотрен особо. — *Примечание при корректуре.*

Для того чтобы вычислить соответствующий матричный элемент v_{rs} , нужно найти коэффициент, стоящий в формуле (28) перед $e^{i(\theta_{\sigma} - \theta_l^{\alpha} + \theta_m^{\beta})/\hbar}$. Этот коэффициент равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{M_{\sigma} (N_l^{\alpha} + 1) N_m^{\beta}} (\delta_{0, \sigma-l+m} B_{\sigma lm}^{\alpha\beta} + \delta_{0, \sigma+m-l} B_{\sigma ml}^{\beta\alpha}) = \\ = \sqrt{M_{\sigma} (N_l^{\alpha} + 1) N_m^{\beta}} \delta_{0, \sigma-l+m} B_{\sigma lm}^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Если выполнено условие

$$\mathbf{k}_m + \mathbf{k}_{\sigma} = \mathbf{k}_l, \quad (42)$$

то из формулы (40) получаем

$$v_{rs} = B_{\sigma lm}^{\alpha\beta} \sqrt{(M_{\sigma} + 1) N_l^{\alpha'} (N_m^{\beta'} + 1)}. \quad (43)$$

Вероятность перехода системы в единицу времени Z_{rs} из состояния r в состояние s (а точнее говоря, в одно из состояний, мало отличающихся от состояния s) равна (см. [1], уравнение (32))

$$Z_{rs} = \frac{2\pi}{\hbar \Delta W} |v_{rs}|^2, \quad (44)$$

где ΔW — средняя разность энергий между двумя соседними конечными состояниями системы.

Поскольку в нашем случае закон сохранения импульса выполняется точно, конечное состояние полностью определяется заданием \mathbf{k}_m и \mathbf{e}_m^{β} (при заданном \mathbf{k}_l). Для заданной поляризации число распространяющихся собственных колебаний в кубе L^3 , частота которых заключена между ω_m и $\omega_m + d\omega_m$, а волновая нормаль лежит в телесном угле $d\Omega$, равно, как известно, $\left(\frac{L\sqrt{\varepsilon_0}}{2\pi c}\right)^3 \omega_m^2 d\omega_m d\Omega$. Интервалу частот $d\omega_m$ отвечает интервал энергий

$$dW = h(d\omega_m + d\omega_{\sigma}) = h\left(1 + \frac{\partial\omega_{\sigma}}{\partial\omega_m}\right) d\omega_m,$$

где величину $\partial\omega_{\sigma}/\partial\omega_m$ следует определять из (42) или (2). Поскольку при этом оказывается, что величина $\partial\omega_{\sigma}/\partial\omega_m$ имеет порядок величины v^2/c^2 , мы можем пренебречь величиной $\partial\omega_{\sigma}/\partial\omega_m$ в сравнении с единицей. Это дает $\frac{1}{\Delta W} = \left(\frac{L\sqrt{\varepsilon_0}}{2\pi c}\right)^3 \frac{\omega_m^2}{h} d\Omega$

Вероятность в единицу времени перехода, при котором световой квант \mathbf{k}_l рассеивается в направлении $d\Omega$ с уменьшением частоты, с учетом формул (44) и (43) имеет вид¹⁰

$$Z_{rs} = \frac{L^3 \varepsilon_0^{3/2} \omega_m^2}{4\pi^2 c^3 \hbar^2} (B_{\sigma lm}^{\alpha\beta})^2 (M'_{\sigma} + 1) N_l^{\alpha'} (N_m^{\beta'} + 1) d\Omega. \quad (45)$$

¹⁰ Если в формулу (45) подставить значение величины $B_{\sigma lm}^{\alpha\beta}$ из (26), то окажется, что число z_{rs} соударений квантов не зависит от величины основного куба, а зависит лишь от полного числа M'_{σ} , $N_l^{\alpha'}$ имеющихся квантов, но не от их плотности в пространстве. Поэтому в рассматриваемом нами случае не имеет смысла говорить о поперечном сечении процесса, поскольку величина поперечного сечения должна была бы зависеть от произвольно выбираемых размеров основного куба.

Поскольку при рассеянии выполняются законы сохранения энергии и импульса, частота рассеянного света определяется формулой (3).

Примем во внимание

$$N_m^{\beta'} = 0, \quad (46)$$

что соответствует обычным условиям эксперимента при измерении рассеяния, и заметим, что на расстояниях $R \gg L$ от ячейки L^3 измеряемая интенсивность $I(\omega_l - \omega_\sigma)$ света, рассеянного в объеме L^3 , следующим образом зависит от числа Z_{rs} рассеянных квантов:

$$I'(\omega_l - \omega_\sigma) = \frac{Z_{rs} h \omega_m}{R^2 d\Omega}. \quad (47)$$

Величину $N_l^{\sigma'}$ можно выразить через интенсивность $I(\omega_l)$ падающего линейно-поляризованного света. Это можно сделать с помощью известного соотношения

$$\frac{h\omega_l N_l^{\sigma'}}{L^3} = I(\omega_l) \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c}. \quad (47')$$

Подставляя также в (45) значение $B_{\sigma_l m}^{\alpha\beta}$ из (26), получаем

$$\frac{I'(\omega_l - \omega_\sigma)}{I(\omega_l)} = \frac{L^3 \omega_m^4}{32\pi^2 c^4 (\lambda + 2\mu)} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho_0 \right)^2 \frac{(e_l^\alpha e_m^\beta)^2}{R^2} h \omega_\sigma (M'_\sigma + 1). \quad (48)$$

Наличие множителя $(e_l^\alpha e_m^\beta)^2$ приводит к тому, что направление колебаний e_m рассеянного света лежит в плоскости, содержащей направление колебаний e_l^α падающей волны и направление распространения k_m рассеянной волны. Действительно, если вектор e_m^β лежит в этой плоскости, величина $(e_l^\alpha e_m^\beta)$ достигает максимального значения

$$(e_l^\alpha e_m^\beta)^2 = \sin^2 \chi, \quad (49)$$

где χ — угол между направлениями векторов e_l^α и k_m . Если же вектор e_m^β перпендикулярен этой плоскости, произведение $e_l^\alpha e_m^\beta$ обращается в нуль.

Для случая антистоксова рассеяния, когда $\omega_m = \omega_l + \omega_\sigma$, получается формула, совершенно аналогичная формуле (48), с той только разницей, что $(M'_\sigma + 1)$ следует заменить на M'_σ . Из сравнения этих формул для стоксова и антистоксова рассеяний имеем

$$\frac{I'(\omega_l + \omega_\sigma)}{I'(\omega_l - \omega_\sigma)} = \left(\frac{\omega_l + \omega_\sigma}{\omega_l - \omega_\sigma} \right)^4 \frac{M'_\sigma}{M'_\sigma + 1}. \quad (50)$$

Если учесть, что при тепловом равновесии число M'_σ акустических квантов равно

$$M'_\sigma = \frac{1}{e^{\frac{h\omega_\sigma}{kT}} - 1}, \quad (51)$$

и сравнить формулы (48) и (50) с результатами вывода по классической теории (но при учете планковского распределения)¹¹, то в случае антистоксова рассеяния будет иметь место полное совпадение. В случае же стоксова рассеяния, для того чтобы добиться согласия с формулой (48), надо в расчете по классической теории заменить M'_s на $M'_s + 1$ (ср. также стр. 185)

§ 7. Комбинационное рассеяние

Для простоты мы ограничимся изотропными кристаллами кубической симметрии. Отдельные элементарные ячейки кристалла определяются заданием вектора \mathbf{l} , причем $\alpha \mathbf{l}$ есть радиус-вектор \mathbf{r}_l ячейки и α — постоянная решетки. Грани основного куба L^3 должны совпадать с плоскостями симметрии кристалла.

Как уже говорилось в § 2, частоты инфракрасных собственных колебаний твердого тела в первом приближении не зависят от длины волны и могут принимать $3s - 3$ предельных значения ω_j (s — число частиц в элементарной ячейке кристалла).

Каждой из этих собственных частот ω_j отвечает система собственных векторов \mathbf{a}_{rj} ($r = 1, 2, \dots, s$), с помощью которых можно описать перемещения частицы сорта r , находящейся в ячейке \mathbf{l} , вызванные инфракрасными колебаниями¹²

$$\mathbf{u}_r^l = \alpha^{3/2} L^{-3/2} \sum_{j,\sigma} p_{j\sigma} \mathbf{a}_{jr} \cos(\omega_j t - \mathbf{k}_\sigma \mathbf{r}_l + \varphi_j^\sigma), \quad (52)$$

причем волновой вектор \mathbf{k}_σ , как и раньше, должен удовлетворять условиям (9а); $p_{j\sigma}$ и φ_j^σ — это амплитуда и постоянная фаза собственных колебаний с частотой ω_j и волновым вектором \mathbf{k}_σ . Полная энергия колебаний равна

$$\bar{W}_B = \sum_{j,\sigma} \omega_j^2 p_{j\sigma}^2. \quad (53)$$

Инфракрасные колебания не приводят к заметным изменениям плотности твердого тела. Изменения диэлектрической постоянной, вызванные инфракрасными колебаниями, в гораздо большей степени обусловлены деформацией кристаллической решетки. Компоненты тензора диэлектрической постоянной ϵ_{xy} в ячейке \mathbf{l} в первом приближении линейно зависят от смещений \mathbf{u}_r^l :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xz} &= \epsilon_0 + \Delta\epsilon_{xz}, & \epsilon_{xy} &= \Delta\epsilon_{xy} \text{ и т. д.}, \\ \Delta\epsilon_{xy} &= \sum_{r=1}^s \mathbf{g}_{xy}^r \mathbf{u}_r^l = L^{-3/2} \sum_{j,\sigma} G_{xy}^j p_{j\sigma} \cos(\omega_j t - \mathbf{k}_\sigma \mathbf{r}_l + \varphi_j^\sigma), \end{aligned} \quad (54)$$

¹¹ Ср., например [7], формулу (21), где, однако, величина ω_m^4 приближенно заменена на ω_l^4 и приведена только полная интенсивность стоксова и антистоксова рассеянных излучений.

¹² См. [5], особенно § 15 и 19.

где коэффициенты g_{xy}^r определяются атомным строением кристалла

$$G_{xy}^j = a^{3/2} \sum_{r=1}^8 g_{xy}^r \mathbf{a}_r^j \quad (55)$$

(см. [3], формула (3) и далее). Если по аналогии с (9) и (10) ввести обозначения

$$\theta_\sigma^j = h(\omega_j t + \varphi_\sigma^j), \quad f_\sigma^j = \sqrt{\frac{2}{L^3}} \cos\left(\frac{1}{h} \theta_\sigma^j - \mathbf{k}_\sigma \mathbf{r}\right),$$

мы получим

$$\Delta \varepsilon_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j, \sigma} G_{xy}^j p_{j\sigma} f_\sigma^j. \quad (54')$$

Плотность энергии взаимодействия света с инфракрасными колебаниями равна

$$V = \frac{1}{8\pi} \sum_{x, x'} \Delta \varepsilon_{xx'} E_x E_{x'} \quad (56)$$

(ср. с уравнением (8)). Если подставить сюда E из (11) и $\Delta \varepsilon$ из (54'), то легко получить с учетом (17)

$$\bar{V} = \int V d\tau = \frac{1}{16\pi L^{3/2}} \sum \delta_{0, \sigma \pm l \pm m} G_{xx'}^j e_{lx}^\alpha e_{mx'}^\beta p_{j\sigma} E_l^\alpha E_m^\beta \cos \frac{1}{h} (\theta_\sigma^j \pm \theta_l^\alpha \pm \theta_m^\beta),$$

где проводится суммирование по всем индексам.

Введем теперь вместо амплитуд E_l^α электромагнитного поля и амплитуд $p_{j\sigma}$ упругих колебаний числа соответствующих квантов N_l^α и M_j^σ . При этом N_l^α определяются соотношением (19), а M_j^σ — соотношением

$$\bar{W}_B = \sum_{j, \sigma} \omega_j^2 p_{j\sigma}^2 = \sum_{j, \sigma} h \omega_j M_j^\sigma.$$

Мы получим

$$\bar{V} = \sum \delta_{0, \sigma \pm l \pm m} C_{\sigma lm}^{j\alpha\beta} \sqrt{M_j^\sigma N_l^\alpha N_m^\beta} \cos \frac{1}{h} (\theta_\sigma^j \pm \theta_l^\alpha \pm \theta_m^\beta), \quad (57)$$

где

$$C_{\sigma lm}^{j\alpha\beta} = \frac{1}{4\varepsilon_0} \left(\frac{h^3 \omega_l \omega_m}{L^3 \omega_j} \right)^{1/2} \sum_{x, x'} G_{xx'}^j e_{lx}^\alpha e_{mx'}^\beta. \quad (58)$$

Поскольку выражение (57) по форме совпадает с ранее полученным выражением (28) для \bar{V} , мы можем перенести полученные в § 6 результаты на интересующий нас теперь случай комбинационного рассеяния. Следует только учесть, что на этот раз величина ω_σ не зависит от \mathbf{k}_σ (а следовательно, и от угла рассеяния) и равна ω_j .

Следовательно, если в формуле (45) заменить $B_{\sigma lm}^{\alpha\beta}$ на $G_{\sigma lm}^{j\alpha\beta}$, то с учетом равенств (46), (47) и (47') мы получим выражение для

стоксова комбинационного рассеяния, аналогичное формуле (48)

$$\frac{I'(\omega_l - \omega_j)}{I(\omega_l)} = \frac{L^3 \omega_m^4}{64\pi^2 c^4 \omega_j^2} \left(\sum_{x, x'} G_{xx'}^j e^{i\alpha_{lx}} e^{i\beta_{mx'}} \right)^2 \frac{h\omega_j (M'_j + 1)}{R^2}. \quad (59)$$

Связь интенсивностей стоксова и антистоксова рассеяния определяется опять формулой (50)¹³.

Связь выведенных формул для рассеяния с теми, которые получаются при классическом выводе, оказывается такой же, как и в случае «обычного» рассеяния, вызванного акустическими волнами (см. конец § 6). Выражение для $I'(\omega_l + \omega_j)$, которое следует из формул (50), (51) и (59), полностью совпадает с вычисленной Мандельштамом, Ландсбергом и Леонтовичем по классической теории [3] интенсивностью антистоксова комбинационного рассеяния. Выражение (59) для $I'(\omega_l - \omega_j)$ отличается от соответствующей классической формулы (10) в работе [3] только зависимостью от температуры. Именно, для того чтобы получить классическую формулу с учетом (51), нужно в формуле (59) заменить $M'_j + 1$ на M'_j . Зависимость от температуры, вытекающая из квантовой теории, недавно была экспериментально подтверждена Г. С. Ландсбергом и Л. И. Мандельштамом [4].

Дальнейшее обсуждение формул для рассеяния содержится в многократно цитированных работах Мандельштама, Ландсберга и Леонтовича [3] и Ландсберга и Мандельштама [4].

Я хотел бы также сердечнейшим образом выразить здесь свою благодарность проф. д-ру Мандельштаму и моему другу Леонтовичу за многие интересные обсуждения.

Москва, Государственный электротехнический
исследовательский институт. Отдел физики.

Поступила
13 декабря 1929 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc. London, 1927, A114, 243, 710.
2. W. Heisenberg, X. Pauli. Z. Phys., 1929, 56, 1.
3. L. Mandelstam, G. Landsberg, M. Leontowitsch. Z. Phys., 1930, 60, 334.
4. G. Landsberg, L. Mandelstam. Z. Phys., 1930, 60, 364.
5. M. Born. Enzykl. Math. Wiss., 25, § 18.
6. P. Jordan, W. Pauli. Z. Phys., 1928, 47, 151.
7. L. Brillouin. Ann. phys., 1922, 17, 88.
8. G. Placzek. Z. Phys., 1929, 58, 585.

Примечание. В этой работе впервые введено понятие акустических квантов (квантов звука) в твердом теле. Впоследствии по предложению Я. И. Френкеля кванты звука были названы фононами.

¹³ Вычисленное недавно Г. Плачком [8] соотношение стоксовой и антистоксовой частей в рассеянии света свободными атомами отличается от нашего результата (50) только множителем $1 + \frac{4\omega_j\omega_l}{\omega_l^2 - \omega_j^2}$. Этот множитель несомненно обязан своим появлением дисперсией света, которой мы пренебрегли с самого начала.— *Примечание при корректуре.*

ОБОБЩЕННЫЕ ШАРОВЫЕ ФУНКЦИИ И ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ПОЛЮСА ¹

В связи с полученным недавно Дираком волновым уравнением для электрона в поле изолированного магнитного полюса исследуются свойства обобщенных шаровых функций (ОШФ), определяемых уравнением (3). В частном случае $n=0$ они переходят в обычные шаровые функции. § 1. Физическая постановка вопроса. § 2. Собственные значения и вид ОШФ. § 3. Различные представления ОШФ. § 4. Сингулярности. § 5. ОШФ являются ротационно-инвариантными с точностью до общей фазы. § 6. Нормировка. § 7. Собственные функции электрона.

В § 1 дается физическая постановка вопроса, которая привела к возникновению настоящей заметки; в остальной части работы мы будем заниматься только чисто математическими вопросами.

§ 1. Физическая постановка вопроса

Недавно Дирак ² показал, что в квантовой механике в противоположность классической электродинамике существование изолированного магнитного полюса допустимо, но при этом заряд, или сила μ , монополя должен быть целым кратным элементарного магнитного заряда μ_0 :

$$\mu = n\mu_0, \quad \mu_0 = \frac{ch}{4\pi e} \quad (1)$$

(e — элементарный электрический заряд, n — целое число).

Волновое уравнение электрона в поле покоящегося магнитного монополя силы $\mu = n\mu_0$ (без учета спина), по Дираку ³, имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta^* \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \Psi = 0, \quad (2)$$

причем

$$\Delta^* \Psi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{i n}{1 + \cos \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{n^2}{4} \frac{(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)} \Psi. \quad (3)$$

¹ Z. Phys., 1931, 71, 141. Перевод А. Е. Шабада.

² P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc. London (в печати). Мне хотелось бы в этом месте выразить сердечную благодарность господину доктору П. А. М. Дираку за предоставление рукописи, а также за возбуждение моего интереса к данной работе.

³ После отщепления неинтегрируемой фазы β ср. цитированную выше работу Дирака.

Центр полярных координат r, θ, φ при этом находится в точке монополя; направление полярной оси остается произвольным.

Представим собственные функции Ψ в виде произведения трех множителей:

$$\Psi = R(r) Y(\theta, \varphi), \quad Y(\theta, \varphi) = P(\theta) e^{im\varphi}, \quad (4)$$

где m , очевидно, должно быть целочисленным; так что после разделения переменных получаем

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right) R = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} + \left[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{nm}{1 + \cos \theta} - \frac{n^2}{4} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}\right] P = 0, \quad (6)$$

причем λ является собственным значением уравнения (6), а через k обозначено

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m E}{h^2}} = \frac{2\pi m v}{h} = \frac{2\pi}{L} \quad (7)$$

(L является дебройлевской длиной волны, которая соответствовала бы энергии E в пространстве без поля; одной и той же буквой m обозначена масса электрона и «магнитное» квантовое число!) Наличие в (3) мнимой единицы i не дает возможности заменить экспоненту $e^{im\varphi}$ в (4) на $\sin m\varphi$ или $\cos m\varphi$, когда $n \neq 0$.

§ 2. Собственные значения и вид ОШФ

В дальнейшем мы будем главным образом заниматься собственными функциями уравнения (3), которое в частном случае $n = 0$ переходит в известное уравнение для обычных шаровых функций. В общем случае (когда n — любое целое число) мы будем называть эти собственные функции обобщенными шаровыми функциями. В дальнейшем мы можем ограничиться случаем $n \geq 0$, поскольку уравнение (6) не меняется при одновременном изменении знаков n и m .

Если вместо θ ввести переменную z

$$z = 1 + \cos \theta, \quad (8)$$

то из (6) получим

$$(2z - z^2) P'' + 2(1 - z) P' + \left(\lambda - \frac{\left[m + \frac{n}{2}(2 - z)\right]^2}{2z - z^2}\right) P = 0, \quad (9)$$

где штрихи означают дифференцирование по z . Это уравнение имеет точки $z = 0$, $z = 2$ и $z = \infty$ своими (регулярными) особыми точ-

⁴ Эта вспомогательная переменная имеет то преимущество перед обычной $x = \cos \theta$, что ее введение приводит для коэффициентов полиномов rV_l^m (см. ниже) к дву- (а не трех-) членным рекуррентным соотношениям не только, когда $n=0$, но и если $n > 0$.

ками. Для точки $z=0$ получается характеристическое уравнение

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = 0, \quad \text{откуда} \quad \alpha = \pm \frac{n+m}{2}.$$

Для точки $z=2$ с помощью подстановки $t=2-z$ приходим к характеристическому уравнению

$$\beta(\beta - 1) + \beta - \frac{m^2}{4} = 0, \quad \beta = \pm \frac{m}{2}.$$

Разложение той ветви решения, которая непрерывна в области $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, т. е. $0 \leq z \leq 2$, должно начинаться в граничных точках $z=0$ и $z=2$ с положительных степеней $\frac{1}{2}|n+m|$ и $\frac{1}{2}|m|$, соответственно. Мы обозначим

$$|n+m| = s, \quad |m| = M \quad (10)$$

и положим

$$P(\theta) = {}^n P_m(z) = 2^{-\frac{s+M}{2}} z^{\frac{s}{2}} (2-z)^{M/2} {}^n V^m(z). \quad (11)$$

Для ${}^n V^m$ подстановкой в (9) получим уравнение

$$(2z - z^2) V'' + [2(1+s) - z(2+s+M)] V' + \left[\lambda - \frac{(s+M)(1+M) + nm}{2} \right] V = 0, \quad (12)$$

в котором мы опустили индексы n и m при V . Это уравнение допускает интегрирование с помощью подстановки

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \quad (13)$$

Для коэффициентов a_k из (12) следует рекуррентное соотношение $2(k+1)(k+s+1)a_{k+1} =$

$$= - \left[\lambda - k(k+s+M+1) - \frac{(s+M)(1+M) + nm}{2} \right] a_k. \quad (14)$$

Потребуем, чтобы ряд (13) обрывался на некотором члене $k=l$; тогда, очевидно,

$$\lambda = l(l+s+M+1) + \frac{(s+M)(1+M) + nm}{2}. \quad (15)$$

Если бы это условие не было выполнено, то ряд (13), как в этом нетрудно убедиться, расходился бы при $z=2$. Поэтому собственные значения уравнения (6) даются выражением (15).

Выражение (15) упрощается, если с помощью равенства

$$p = \sqrt{\lambda + \frac{1+n^2}{4}} - \frac{1+n}{2}$$

вести положительное целое число p ($p \geq 0$):

$$\lambda = \left(p + \frac{1+n}{2}\right)^2 - \frac{1+n^2}{4} = p(p+1+n) + \frac{n}{2}. \quad (16)$$

Будем различать следующие три случая:

$$A) m \geq 0, \quad B) -n \leq m < 0 \quad \text{и} \quad C) m < -n$$

и заметим, что число $s = |n + m|$ в этих случаях выражается соответственно как (всюду предполагается, что $n \geq 0$)

$A) s = n + M, B) s = n - M, C) s = M - n$, так что из (15) после простого вычисления получаем

$$\begin{aligned} A) \quad m \geq 0, \quad \lambda + \frac{1+n^2}{4} &= \left(l + M + \frac{1+n}{2}\right)^2, \quad p = l + M, \\ B) \quad -n \leq m < 0, \quad \lambda + \frac{1+n^2}{4} &= \left(l + \frac{1+n}{2}\right)^2, \quad p = l, \\ C) \quad m < -n, \quad \lambda + \frac{1+n^2}{4} &= \left(l + M + \frac{1-n}{2}\right)^2, \quad p = l + M - n. \end{aligned} \quad (17)$$

В частности, в специальном случае $n = 0$ (17) дает известные собственные значения обычных шаровых функций

$$(n = 0) \quad \lambda = p(p+1), \quad p = l + M = 0, 1, 2, \dots$$

Число различных ОШФ, которые соответствуют одному заданному собственному значению $\lambda = p(p+n+1) + n/2$ (при фиксированном n), равно

$$2p + n + 1. \quad (18)$$

Действительно, согласно (17) в случаях A и C имеются соответственно $(p+1)$ и p различных комбинаций чисел l и m для каждого n , а в случае B — n возможных значений числа m .

Номер p собственного значения λ мы будем часто называть азимутальным квантовым числом, как это принято в квантовой теории.

§ 3. Различные представления ОШФ

Подставляя (15) в (14), получим рекуррентное соотношение для коэффициентов a_k полинома l -й степени ${}^n V_l^m(z)$:

$$a_{k+1} = - \frac{(l-k)(l+s+M+k+1)}{2(k+1)(s+k+1)} a_k,$$

с помощью которого a_k могут быть легко найдены. Выбрав произвольным образом значение a_0 , для полинома степени l определенного равенством (11), получаем окончательно следующее выражение:

$${}^n V_l^m(z) = \sum_{k=0}^{k=l} \frac{(-1)^{l-k} (l+s+M+k)!}{2^k k! (s+k)! (l-k)!} z^k. \quad (19)$$

Это выражение может быть представлено в виде

$${}^n V_l^m(z) = \frac{1}{2^l (l+s)!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{l+s+M} (z-2)^{l+s} z^{l+M}. \quad (20)$$

Действительно, (20) дает

$$\begin{aligned} {}^n V_l^m(z) &= \frac{1}{2^l (l+s)!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{l+s+M} \sum_{t=0}^{l+s} \frac{(l+s)! (-2)^{l+s-t}}{t! (l+s-t)!} z^{l+M+t} = \\ &= \frac{1}{2^l} \sum_{t=s}^{l+s} \frac{(-2)^{l+s-t} (l+M+t)!}{t! (l+s-t)! (t-s)!} z^{t-s}, \end{aligned}$$

что совпадает с (19), если положить $t-s=k$.

Если, наконец, в (11) и (20) подставить переменную

$$x = \cos \theta = z - 1, \quad (21)$$

то получим

$${}^n P_l^m(x) = \left(\frac{1+x}{2} \right)^{s/2} \left(\frac{1-x}{2} \right)^{M/2} {}^n V_l^m(x), \quad (22)$$

$${}^n V_l^m(x) = \frac{1}{2^l (l+s)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{l+s+M} (x-1)^{l+s} (x+1)^{l+M}. \quad (23)$$

В частности, в случае $n=0$, т. е. $s=M$, отсюда получается формула

$${}^0 P_l^m(x) = \frac{(1-x^2)^{M/2}}{2^{l+M} (l+M)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{l+2M} (x^2-1)^{l+M},$$

совпадающая с известным выражением для обычных шаровых функций, если принять во внимание, что у нас нижний индекс в ${}^n P_l^m$ обозначает не номер p соответствующего собственного значения $\lambda=p(p+1)$ ($n=0$), как это принято в теории шаровых функций, а порядок l полинома ${}^n V_l^m$.

§ 4. Сингулярности

ОШФ (4) на основании (11), (21), (22) могут быть записаны в виде

$${}^n Y_l^m(\theta, \varphi) = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^s \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^M e^{im\varphi} {}^n V_l^m(\cos \theta). \quad (24)$$

Поэтому у функции Y на шаровой поверхности имеются, вообще говоря, две изолированные узловые точки $\theta=0$ и $\theta=\pi$, в которых Y исчезает⁵ соответственно, как θ^M и $(\pi-\theta)^s$. Изолированные узловые точки отсутствуют только в случае $n=m=0$.

⁵ Напротив, полином ${}^n V_l^m(\cos \theta)$ в точках $\theta=0$ и $\theta=\pi$ отличен от нуля, как это легко видеть из (23). Поэтому его нули, если они вообще существуют, представляют собой не изолированные точки, а занимают окружности на единичной сфере.

Рассмотрим теперь полную волновую функцию электрона. Согласно Дираку (см. цитированную выше работу), она разлагается в сумму членов вида

$$\Psi' = e^{i\beta_n} \Psi = e^{i\beta_n} R(r)^n Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (25)$$

где β_n — некоторая неинтегрируемая фаза, изменение которой при обходе по замкнутой кривой пропорционально сферическому углу, под которым эта кривая видна из точки $r = 0$. Это изменение должно стремиться к нулю или к $2\pi n$, когда кривая стягивается в точку $\theta = 0$ или соответственно $\theta = \pi$. Таким образом, поведение фазы β_n на луче $\theta = \pi$ является сингулярным. Соответственно этому функция Y_{μ}^m исчезает на этом луче как $(\pi - \theta)^n$, если $m = 0$ ($s = n$), и мы имеем n -кратную узловую линию $\theta = \pi$, которая упирается концом в магнитный полюс $\mu = n\mu_0$ (ср. цитированную выше работу Дирака). Если же $m \neq 0$, то полная фаза $\beta_n + m\varphi$ меняется на $2\pi(m + n)$ при обходе луча $\theta = \pi$ и на $2\pi m$ — при обходе луча $\theta = 0$. Соответственно этому волновая функция Ψ' имеет $s = |n + m|$ -кратную узловую линию $\theta = \pi$ и $M = |m|$ -кратную узловую линию $\theta = 0$.

Этот результат может быть связан с тем обстоятельством, что в общем случае мы имеем суперпозицию двух узловых линий: $|m|$ -кратной, которая простирается вдоль полярной оси от $-\infty$ до $+\infty$ и тем самым замыкается в бесконечности, и $|n + m| - |m| = n$ -кратной узловой линии $\theta = \pi$, которая оканчивается в монополе $n\mu_0$.

§ 5. ОШФ являются ротационно-инвариантными с точностью до общей фазы

Если $n \neq 0$, уравнение (3) не является ротационно-инвариантным, поскольку направление полярной оси выделено. Поэтому известное из теории шаровых функций разложение

$${}^0Y_p^m(\theta, \varphi) = \sum_{u=-p}^p c_u {}^0Y_p^u(\theta', \varphi'), \quad (26)$$

в котором c_u — постоянные коэффициенты, θ' и φ' — преобразованные полярные координаты, не переносится на случай $n \neq 0$. Вместо этого мы сейчас дадим обоснование следующему общему разложению

$${}^nY_p^m(\theta, \varphi) = e^{in\chi} \sum_{u=-(p+n)}^p c_u {}^nY_p^u(\theta', \varphi'), \quad (27)$$

в котором фаза $\chi(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$ не зависит от чисел n, p, m и, в от-

⁶ При этом решающим является то обстоятельство, что при $n \neq 0$ фактор $e^{im\varphi}$ в (24) не может быть заменен на $\sin m\varphi$ или $\cos m\varphi$, потому что экспоненты $e^{im\varphi}$ и $e^{-im\varphi}$, или, точнее, функции ${}^nY_p^m$ и ${}^nY_p^{-m}$, куда эти экспоненты входят, отвечают различным собственным значениям λ .

личие от обозначений, использующихся во всех остальных разделах, нижний индекс у ${}^n Y_p^m$ отвечает не степени l полинома ${}^n V_l^m$, а азимутальному квантовому числу p . Прежде всего из (27) вытекает, что следующее квадратично-эрмитово по ОШФ выражение является «ротационно-инвариантным» в указанном смысле:

$${}^n \tilde{Y}_{p'}^{m'}(\theta, \varphi) {}^n Y_p^m(\theta, \varphi) = \sum_{u, v = -(p+n)}^p \tilde{c}'_v c_u {}^n \tilde{Y}_{p'}^v(\theta', \varphi') {}^n Y_p^u(\theta', \varphi'). \quad (27')$$

Поскольку в квантовой механике умножение всех собственных функций на общий интегрируемый фазовый множитель совершенно несущественно ⁷, то с физической точки зрения реальное значение имеет только такого рода ротационная инвариантность, которая выражается уравнением (27), в то время как инвариантность типа (26) является, так сказать, излишней.

Формула (27) эквивалентна утверждению: если f — собственная функция уравнения (ср. уравнение (3))

$$\Delta^* f = -\lambda f,$$

то функция $f' = e^{-in\chi} f$ удовлетворяет соответствующему уравнению в преобразованных координатах:

$$\Delta^* e^{-in\chi} f = \Delta^* f' = \frac{1}{\sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \left(\sin \theta' \frac{\partial f'}{\partial \theta'} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta'} \frac{\partial^2 f'}{\partial \varphi'^2} + \frac{in}{1 + \cos \theta'} \frac{\partial f'}{\partial \varphi'} - \frac{n^2 (1 - \cos \theta')}{4(1 + \cos \theta')} f' = -\lambda f'.$$

Доказательство этого утверждения. Пусть θ_0 — угол между исходной и преобразованной полярными осями. Примем для простоты, что плоскости меридианов $\varphi = 0$ и $\varphi' = 0$ совпадают ⁸. Тогда, как известно, имеют место формулы

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi, \\ \sin \varphi' \sin \theta' &= \sin \varphi \sin \theta. \end{aligned}$$

Понятно, что вместо общего преобразования координат достаточно рассмотреть бесконечно малое ($\theta_0 \rightarrow 0$). Соответственно этому мы в дальнейшем удерживаем только члены не выше первого порядка по θ_0 . Находим:

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \cos \theta + \theta_0 \sin \theta \cos \varphi, & \sin \theta' &= \sin \theta - \theta_0 \cos \theta \cos \varphi, \\ \sin \varphi' &= \sin \varphi + \theta_0 \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \cos \varphi, & \cos \varphi' &= \cos \varphi - \theta_0 \operatorname{ctg} \theta \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

⁷ Когда градиент неинтегрируемой фазы β (ср. (28)) пропорционален вектор-потенциалу A электромагнитного поля (ср. цитированную работу Дирака), то умножение волновой функции $\Psi' = \Psi e^{i\beta}$ на интегрируемый множитель $e^{in\chi}$ эквивалентно преобразованию

$$A \rightarrow A + n a \operatorname{grad} \chi,$$

где a — некоторая константа. Однако это преобразование, как известно, физически несущественно.

⁸ Само собой разумеется, что поворот системы координат вокруг полярной оси не меняет уравнения (3).

или

$$e^{i\theta'} = e^{i\theta} (1 - i\theta_0 \cos \varphi) = e^{i(\theta - \theta_0 \cos \varphi)},$$

$$e^{i\varphi'} = e^{i\varphi} (1 + i\theta_0 \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi) = e^{i(\varphi + \theta_0 \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi)},$$

откуда

$$\theta' = \theta - \theta_0 \cos \varphi, \quad \varphi' = \varphi + \theta_0 \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi.$$

Теперь простые, хотя и довольно длинные, выкладки приводят к выражению

$$\Delta^{\nu} f = \Delta^{*\nu} f + \frac{i n \theta_0}{1 + \cos \theta'} \left(\frac{\cos \varphi'}{\sin \theta'} \frac{\partial f}{\partial \varphi'} + \sin \varphi' \frac{\partial f}{\partial \theta'} \right) - \frac{n^2 \theta_0 (1 - \cos \theta') \cos \varphi'}{2 \sin \theta' (1 + \cos \theta')} f.$$

С другой стороны, расчетом легко убедиться, что

$$e^{i n \theta_0 \sigma} \Delta^{*\nu} e^{-i n \theta_0 \sigma} f = \Delta^{*\nu} f - i n \theta_0 \left\{ 2 \frac{\partial \sigma}{\partial \theta'} \frac{\partial f}{\partial \theta'} + \frac{2}{\sin^2 \theta'} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi'} \frac{\partial f}{\partial \varphi'} \right\} -$$

$$- i n \theta_0 \left\{ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta'^2} + \operatorname{ctg} \theta' \frac{\partial \sigma}{\partial \theta'} + \frac{1}{\sin^2 \theta'} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi'^2} \right\} f + \frac{n^2 \theta_0}{1 + \cos \theta'} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi'} f.$$

Нетрудно видеть, что правые части этих уравнений совпадают, если положить

$$\sigma = \frac{\sin \theta' \sin \varphi'}{2(1 + \cos \theta')} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} \sin \varphi'. \quad (28)$$

При этом значении σ , таким образом, получается

$$\Delta^{\nu} f = e^{i n \theta_0 \sigma} \Delta^{*\nu} e^{-i n \theta_0 \sigma} f,$$

что эквивалентно доказываемому утверждению (мы положили $\chi = \theta_0 \sigma$).

Если, наконец, мы желаем определить значение функции χ для случая конечного преобразования, то самое простое будет поступить следующим образом. В случае $n = 1$, $p = 0$ согласно (18) имеются две разные ОПФ, именно

$${}^1 Y_0^0 = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad \text{и} \quad {}^1 Y_0^{-1} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} e^{-i\varphi}.$$

Далее имеет место соотношение (ср. теорему сложения обычных шаровых функций)

$${}^1 Y_0^0(\theta) = e^{i\chi} \sum_{m=-1}^0 {}^1 \tilde{Y}_0^m(\theta_0, \varphi_0) {}^1 Y_0^m(\theta', \varphi'),$$

которое легко доказать непосредственным вычислением абсолютной величины правой части. Если, наконец, мнимую часть приравнять нулю, то получим

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\sin \varphi'}{\operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta'}{2} + \cos \varphi'}. \quad (29)$$

В случае бесконечно малого преобразования это значение χ переходит в $\theta_0 \sigma$ (см. (28)), как это и должно быть. Поскольку

согласно доказанному в этом случае фаза $\chi = \theta_0 \sigma$ не зависит от n , p и m , то и для конечного преобразования фаза (29) не будет зависеть от этих чисел.

§ 6. Нормировка

Нормировочный множитель ОШФ, определяемый согласно

$$({}^n N_l^m)^{-2} = \int_{-1}^{+1} ({}^n P_l^m(x))^2 dx, \quad (30)$$

можно легко вычислить с помощью интегрирования по частям. Используя (22), (23), имеем

$$\begin{aligned} ({}^n N_l^m)^{-2} &= \frac{1}{2^{2l+s+M} [(l+s)!]^2} \int_{-1}^{+1} dx (1+x)^s (1-x)^M \times \\ &\times \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{l+M+s} (x-1)^{l+s} (x+1)^{l+M} \right]^2 = \\ &= \frac{(-1)^{l+M+s}}{2^{2l+s+M} [(l+s)!]^2} \int_{-1}^{+1} dx (x-1)^{l+s} (x+1)^{l+M} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{l+M+s} \times \\ &\times \left\{ (1+x)^s (1-x)^M \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{l+M+s} (x-1)^{l+s} (x+1)^{l+M} \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$({}^n N_l^m)^{-2} = \frac{(-1)^{l+s} (2l+s+M)! (l+s+M)!}{2^{2l+s+M} [(l+s)!]^2 l!} \int_{-1}^{+1} dx (x-1)^{l+s} (x+1)^{l+M}. \quad (31)$$

Рассмотрим теперь величину

$$\begin{aligned} b_{\alpha, \beta} &= \int_{-1}^{+1} (x-1)^\beta (x+1)^\alpha dx = \left[\frac{(x-1)^\beta (x+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{x=-1}^{x=+1} - \\ &- \frac{\beta}{\alpha+1} \int_{-1}^{+1} dx (x-1)^{\beta-1} (x+1)^{\alpha+1}. \quad (32) \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$b_{\alpha, \beta} = -\frac{\beta}{\alpha+1} b_{\alpha+1, \beta-1} = \frac{(-1)^\beta \beta!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+\beta)} b_{\alpha+\beta, 0}.$$

Поскольку

$$b_{\alpha+\beta, 0} = \int_{-1}^{+1} (x+1)^{\alpha+\beta} dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1},$$

находим

$$b_{\alpha, \beta} = \frac{(-1)^\beta \beta! \alpha!}{(\alpha + \beta + 1)!} 2^{\alpha + \beta + 1}. \quad (32')$$

С учетом (32), (32') для (31) получается ($\alpha = l + M$, $\beta = l + s$):

$$({}^n N_l^m)^{-2} = \frac{2(l+s+M)! (l+M)!}{(2l+s+M+1)(l+s)! l!}. \quad (33)$$

В частном случае $n=0$ имеем известное выражение

$$({}^0 N_l^m)^{-2} = \frac{2}{2(l+M)+1} \frac{(l+2M)!}{l!} = \frac{2}{2p+1} \frac{(p+M)!}{(p-M)!}.$$

Легко видеть, что ОШФ ${}^n Y_l^m(\theta, \varphi)$ являются взаимно ортогональными (при фиксированном n с учетом комплексного сопряжения).

§ 7. Собственные функции электрона

Решение уравнения (5) для радиальной части волновой функции, остающееся конечным в точке $r=0$, как известно, есть

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{\sqrt{\lambda+1/4}}(kr). \quad (34)$$

Порядок $\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$ функции Бесселя J согласно (16) равен

$$\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(p + \frac{1+n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4}} = \sqrt{\left(p + n + \frac{1}{2}\right)\left(p + \frac{1}{2}\right)},$$

где азимутальное квантовое число p задано как функция от n , l и m соотношениями (17).

Итак, полное решение волнового уравнения (2) в силу (4) есть

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{kr}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{l,m} J_{\sqrt{(p+n+1/2)(p+1/2)}}(kr) {}^n P_l^m(\theta) e^{im\varphi}, \quad (35)$$

где $c_{l,m}$ — произвольные постоянные.

Москва, в настоящее время Кембридж

Поступила 26 июня 1931 г.

К ТЕОРИИ ФОТОЭФФЕКТА В МЕТАЛЛАХ ¹

Совместно с С. П. Шубиным

Как известно, в свободном от поля пространстве фотоэффект на свободных электронах не может иметь места. Фотоэмиссия металлов (как и поглощение ими света вообще) становится возможной из-за скачка потенциала на границе металл—вакуум (поверхностный эффект) и из-за связи электронов проводимости в металле (объемный эффект). Поверхностный эффект, который может быть вычислен на основе простой теории Зоммерфельда, для поглощения света относительно незначителен, и, напротив, для фотоэффекта при не очень высоких частотах света он является решающим. Вычисленные значения коэффициента вторичной эмиссии, так же как положение его максимума и независимость от поляризации света, находятся в удовлетворительном согласии с опытом. Объемный эффект является решающим для поглощения света, а для электронной эмиссии существует только после превышения «второй длинноволновой границы» ν'_g . Переход этой границы, которая может быть оценена по блоховской теории и по величине гораздо большей, чем граничная частота ν_g поверхностного эффекта, проявляется во втором подъеме кривой вторичной эмиссии при $\nu > \nu'_g$. Среди прочих коротко обсуждаются также и такие вопросы, как, например, влияние соударений электронов с решеткой металла, влияние инородных поверхностных слоев, независимость от температуры и т. д.

§ 1. Введение и резюме

Фотоэффект в металлах, в особенности свойства селективного фотоэффекта, часто был предметом теоретических исследований, при которых обычно делали специальные предположения относительно связи электронов в металлах. Вентцель ² впервые указал на возможность понять эти свойства на основе простой зоммерфельдовской теории металла.

Теория Вентцеля, однако, не свободна от возражений. Электроны проводимости в металле, согласно зоммерфельдовской теории, следует рассматривать свободными. Но, как известно, на свободных электронах в свободном пространстве вообще никакие фотопроцессы не имеют места, так как энергия и импульс одновременно не могут сохраняться в таких процессах. Вентцель находит выход из этой трудности в том факте, что свет при прохождении через металл поглощается и что, с другой стороны,

¹ Z. Phys., 1931, 68, 97. Перевод Р. Э. Каллош.

² G. Wentzel. Probleme der modernen Physik. Leipzig. S. Hirzel, 1928, S. 79.

под влиянием *затухающей* световой волны фотоэффект на свободном электроде вполне возможен (в отличие от случая незатухающей волны)³. И хотя Вентцель проводит вычисления с затухающими волнами, ему удается качественно правильно теоретически истолковать экспериментальные данные.

Однако в последовательной *микроскопической* теории при определении вероятности элементарного фотопроцесса, строго говоря, нельзя делать вычисления с *макроскопически* определенными коэффициентами поглощения, значение которых предполагается известным⁴, так как поглощение света в металле по существу именно фотопроцессом и определяется. Поглощение светового кванта на свободном электроде проводимости — это в сущности не что иное, как фотоэффект в широком смысле слова. Хотя при этом фотоэлектрическая эмиссия очень мала по сравнению с поглощенной световой энергией, т. е. при обычных условиях во внешнем пространстве только малая доля электронов проводимости может поглотить кванты, но все фотопроцессы должны рассматриваться *единообразно*, независимо от того, вырывается ли фотоэлектрон из металла или нет⁵.

Тем самым возникает фундаментальный вопрос: почему вообще становится возможным поглощение светового кванта электроном проводимости и, в частности, фотоэффект? Ограничиваясь видимой и ультрафиолетовой частями спектра, мы можем указать следующие причины: 1) *скачок потенциала на границе металл—вакуум* и вызванное этим экспоненциальное затухание на этой границе волновой функции электронов, что Вентцель совершенно не принял во внимание (*поверхностный эффект*), и 2) *связь электрона проводимости*, т. е. отклонение потенциала внутри металла от своего среднего значения (*объемный эффект*). Оба эффекта определяют как поглощение света, так и электронную эмиссию, но для первого определяющим является объемный эффект, а для второго, напротив, поверхностный эффект.

Собственно на поверхности (в слое толщиной порядка 10^{-7} см) поглощается только одна тысячная доля падающих световых квантов, в то время как фотоэлектрон испускается приблизительно на десять поглощенных квантов, так что фотоэлектрическая эмиссия получается правильного порядка величины 10^{-4} электронов на световой квант. Напротив, от подавляющего числа световых квантов, которые поглотились в слое толщиной порядка длины

³ Монохроматическая затухающая волна может быть разложена по фурье-компонентам, соответствующим одной частоте ν , но разным длинам волн λ , так что импульс этих компонент h/λ становится независимым от их энергии $h\nu$. Это делает возможным выполнение обоих законов сохранения при фотоэффекте.

⁴ Хотя этот коэффициент поглощения выпадает из окончательных формул Вентцеля, в принципиальном отношении это не меняет положения вещей.

⁵ Далее при вентцельском предположении в случае очень тонких металлических пластинок следовало бы ожидать уменьшения выхода, чего на самом деле не происходит.

волны света (объемный эффект), не возникают фотоэлектроны, потому что поглощение внутри металла происходит из-за имеющихся там условий дифракции только на относительно медленных электронах проводимости, так что компонента скорости этих электронов, перпендикулярная поверхности, после поглощения кванта $h\nu$ слишком мала, чтобы преодолеть потенциальный порог металл—вакуум. Только при более высоких частотах, а именно при превышении «второй длинноволновой границы» ν'_g , которая лежит много выше «первой границы частот» ν_g , определяющей поверхностный эффект, объемный эффект сказывается на фотоэффекте, что проявляется во втором подъеме кривой коэффициента фотоэлектрической эмиссии.

В дальнейшем мы будем обсуждать отдельно поверхностный и объемный эффекты и сделаем также некоторые замечания о влиянии соударений электронов с решеткой металла и о влиянии иностранных поверхностных слоев.

Когда рукопись нашей работы была уже закончена, мы узнали о недавно вышедшей работе Фрелиха, посвященной фотоэффекту на тонких металлических пластинках⁶. Выводы Фрелиха подобны нашим вычислениям поверхностного эффекта⁷. Поэтому детали наших вычислений мы полностью опускаем⁸ и в дальнейшем при обсуждении поверхностного эффекта в основном займемся теми физическими вопросами, которые недостаточно выяснены Фрелихом или в которых мы не можем присоединиться к его точке зрения.

§ 2. Поверхностный эффект

При обсуждении поверхностного эффекта мы можем использовать простую паули-зоммерфельдовскую теорию металла, т. е. рассматривать электроны проводимости как свободные, и пренебречь периодическим ходом потенциала в глубине металла. В таком приближении внутри металла, как уже было отмечено, никакие явления поглощения не имеют места. Однако на границе металл—вакуум потенциал меняется скачком, поэтому рассмотрение, справедливое для свободного пространства, становится непригодным: световой квант вполне может поглотиться вблизи поверхности электроном, причем выполнение закона сохранения импульса становится возможным из-за участия скачка потенциала (образца металла в целом) в процессе поглощения. Математически это связано с тем фактом, что волновая функция электрона проводимости, энергия которого W меньше скачка потенциала C ,

⁶ *H. Fröhlich. Ann. Phys., 1930, 7, 103.*

⁷ Часть нашей работы, относящаяся к поверхностному эффекту, докладывалась 23 августа 1930 г. на съезде физиков Советского Союза в Одессе; опубликование по внешним причинам затянулось.

⁸ Они появятся в скором времени в подробной форме в «Журнале Физико-химического общества» (на русском языке).

не обрывается на границе, а экспоненциально спадает. Это затухание электронных волн на поверхности металла (так же как введенное Вентцелем феноменологическое затухание световой волны внутри металла) приводит к тому, что вероятность фотозатухания даже при взаимодействии электрона с *незатухающей световой волной* оказывается конечной⁹.

Возникающая таким образом фотозатухание эмиссия электронов не зависит¹⁰ от толщины электрической пластинки и может быть названа поверхностным эффектом. Правда, при обычном способе рассмотрения нельзя решить, испущены ли фотоэлектроны действительно только с поверхности, потому что при заданной скорости электрона проводимости его положение в металле остается неопределенным. Представим себе, однако, волновой пакет обычной формы, размеры которого малы по сравнению с длиной волны света, но велики по сравнению с дебройлевской длиной волны электрона¹¹. С таким волновым пакетом, как легко доказать, никакие процессы поглощения не имеют места, пока он находится в свободном от поля пространстве (внутри металла), но становятся возможными, когда он касается поверхности металла (при этом его форма, конечно, меняется). Соответствующее утверждение справедливо также для возможности поглощения света с одновременным переходом электрона заданной скорости и неопределенного положения в описываемое таким волновым пакетом состояние с большей скоростью. Это означает, что фотоэлектроны действительно испускаются только с поверхности.

§ 3. Фототок

Мы для простоты примем, что на поверхности металла $x = 0$ потенциал, отнесенный к единице электронного заряда, скачком меняется на величину C . Шредингеровская функция свободного электрона внутри металла имеет форму

$$\psi_{K_1, K_2, K_3} = \exp [i(2\pi\nu_{K_1, K_2, K_3} t - K_2 y - K_3 z)] (a_1 e^{-iK_1 x} + a_2 e^{iK_1 x}),$$

$$K^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = \mu\nu_{K_1, K_2, K_3}, \quad \mu = \frac{8\pi^2 m}{h} = 10,9 \text{ сек/см}^2, \quad (1)$$

где a_1 и a_2 — константы.

Во внешнем пространстве ($x > 0$) нужно заменить K_1 на

$$K'_1 = \sqrt{K_1^2 - \mu\nu_a}, \quad h\nu_a = C.$$

Если электрон поглощает световой квант $h\nu$, то нормальные компоненты вектора поступательного движения его в металле и

⁹ Фрелих, как отмечалось, провел аналогичные вычисления, но на значение этих связей не указал (ср. § 6).

¹⁰ До тех пор пока можно пренебречь интерференцией электронных волн, испускаемых с обеих поверхностей пластинки.

¹¹ Эти условия для подавляющего большинства электронов проводимости являются взаимно согласованными.

во внешнем пространстве равны k_1 и соответственно k'_1 :

$$k_1 = \sqrt{K_1^2 + \mu\nu}, \quad k'_1 = \sqrt{k_1^2 - \mu\nu_a}.$$

Если обозначить через \bar{K} максимальную величину вектора поступательного движения электрона проводимости (при температуре $T = 0^\circ$), а соответствующую частоту через $\bar{\nu}$, то справедливо, как известно, равенство

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\mu} \bar{K}^2, \quad K = \pi \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{1/3}, \quad (2)$$

где n означает число электронов проводимости в кубическом сантиметре.

Фрелих в цитированной работе вычислил плотность j полного фототока, испускаемого с *обеих* поверхностей тонкой металлической пластинки, причем он исследовал стационарное состояние, образующееся под влиянием падающего света. Его результат гласит (l. с., формула, предшествующая (11a)):

$$j = \frac{e^3 \nu_a E_x^2}{64\pi^2 m^2 \nu^4} \int_{0, \sqrt{\mu(\nu_a - \nu)}}^{\sqrt{\mu\nu}} \times \\ \times \frac{dK_1 K_1^2 (\bar{K}^2 - K_1^2) \left(K_1^2 + \mu\nu + \frac{3}{4} \mu\nu_a \right) \sqrt{K_1^2 + \mu(\nu - \nu_a)}}{(K_1^2 + \mu\nu)^2}. \quad (3)$$

Нижняя граница интегрирования равна $\sqrt{\mu(\nu_a - \nu)}$ при $\nu < \nu_a$ и нулю при $\nu > \nu_a$; E_x означает нормальную компоненту амплитуды электрического вектора света. Если ввести вместо K_1 переменную интегрирования $\xi = K_1 \mu^{-1/2}$, то получим

$$j = \frac{e^3 \nu_a E_x^2}{\pi h^2 \nu^4} \int_{0, (\nu_a - \nu)^{1/2}}^{\bar{\nu}^{1/2}} \frac{d\xi \xi^2 (\bar{\nu} - \xi^2) \left(\xi^2 + \nu + \frac{3}{4} \nu_a \right) \sqrt{\xi^2 + \nu - \nu_a}}{(\xi^2 + \nu)^2} \quad (3')$$

Мы, однако, вычисляли по методу вариации постоянный фототок, испускаемый на *одной* поверхности металла, заполняющего полупространство (непрерывный спектр собственных значений!), и получили

$$j = \frac{8e^3 \nu_a}{\pi h^2 \nu^4} E_x^2 \int_{0, \sqrt{\nu_a - \nu}}^{\sqrt{\bar{\nu}}} d\xi \frac{\xi^2 (\bar{\nu} - \xi^2) (\xi^2 + \nu) \sqrt{\xi^2 + \nu - \nu_a}}{(\sqrt{\xi^2 + \nu} + \sqrt{\xi^2 + \nu - \nu_a})^4}. \quad (4)$$

Если уменьшить вдвое фототок, полученный Фрелихом, и учесть отражение электронов от металлической поверхности, для чего подынтегральное выражение в (3) нужно умножить на коэффи-

циент пропускания поверхностью электронных волн ¹²

$$D = \frac{4k_1 k_1'}{(k_1 + k_1')^2}, \quad (5)$$

то результат совпадает с точностью до поправочного множителя

$$\frac{1 + \frac{\nu_a}{\xi^2 + \nu} + \dots}{1 + \frac{3}{4} \frac{\nu_a}{\xi^2 + \nu}} = 1 + \frac{1}{4} \frac{\nu_a}{\xi^2 + \nu} + \dots \quad (\nu_a < \xi^2 + \nu)$$

с подынтегральным выражением в нашей формуле (4). Появление этого множителя объясняется предположительно тем, что Фрѐлих при установлении (3) только приближенно провел некоторое усреднение (1. с., стр. 114).

В зависимости от отношения толщины металлической пластинки к длине свободного пробега электрона нужно применять формулу (3') или соответственно (4).

Достопримечательностью этих формул (как подчеркивает и Фрѐлих) является то, что *тангенциальные компоненты E_y и E_z электрического вектора для фотоэффекта не существенны* ¹³. Это соответствует известной зависимости фототока от направления электрического вектора световой волны, которая в области *селективности* особенно выражена. Взаимодействие со светом, распространяющимся тангенциально к поверхности, можно приписать фотоэлектрическому объемному эффекту ¹⁴, так же как и полностью пренебрегаемой нами, обусловленной атомной структурой шероховатости металлической поверхности (ср. § 5 и 7).

¹² В случае полубесконечного куска металла фотоэлектроны, отраженные от поверхности внутрь, остаются в металле; в случае тонкой металлической пластинки, напротив, они в конце концов (случайным образом после некоторого количества дальнейших отражений) выходят из металла. В действительности потенциальный барьер не является резким, но сглаженным, так что $D \sim 1$; для результата это, однако, не очень существенно.

¹³ Это можно усмотреть и непосредственно. Амплитуда вероятности перехода (K_1, K_2, K_3) \rightarrow (k_1, k_2, k_3) пропорциональна

$$\int \psi_{k_1, k_2, k_3}^* \mathbf{E} \text{grad} \psi_{K_1, K_2, K_3} d\tau.$$

Так как длина волны света много больше дебройлевской длины волны большинства электронов проводимости, можно пренебречь зависимостью вектора \mathbf{E} от координат по сравнению с зависимостью ψ от координат. Если далее учесть, что ψ имеет вид $u(x, t) e^{-i(K_2 y + K_2 z)}$, то в случае $E_x = 0$ с учетом условий ортогональности получим

$$\int \psi_k^* \mathbf{E} \text{grad} \psi_K d\tau = -i (E_y K_2 + E_z K_3) \int \psi_k^* \psi_K d\tau = 0.$$

¹⁴ Объемный эффект может стать заметным уже ниже «второй фотоэлектрической границы частот» ν_g' (ср. § 5 и 6).

При использовании формулы (4) знаменатель подынтегрального выражения во всех практически встречающихся случаях можно заменить в подходящем приближении на

$$(\sqrt{\xi^2 + \nu} + \sqrt{\xi^2 + \nu - \nu_a})^4 \approx (4\sqrt{\xi^2 + \nu}\sqrt{\xi^2 + \nu - \nu_a})^2 + (\xi^2 + \nu)\nu_a = (\xi^2 + \nu)[16(\xi^2 + \nu - \nu_a) + \nu_a],$$

что по существу оказывается заменой арифметического среднего от корневых выражений на геометрическое. Разделив далее j на $\frac{c}{8\pi} E^2 \cos \varphi$, где φ — угол падения света, для коэффициента фотоэлектрической эмиссии α , отнесенного к падающей энергии, получаем значение

$$\alpha = \frac{e^2 \nu_a}{2ch^2 \nu^4 \cos \varphi} \left(\frac{E_x}{E}\right)^2 (S_1(\nu) + S_2(\nu)), \quad (6)$$

где

$$S_2 = -\frac{\nu_a}{2} \int_{0, (\nu_a - \nu)^{1/2}}^{\bar{\nu}^{1/2}} \frac{(\bar{\nu} - \xi^2) \xi^2 d\xi}{\left(\xi^2 + \nu - \frac{15}{16} \nu_a\right) \sqrt{\xi^2 + \nu - \nu_a}} \quad (6')$$

оценивается по элементарным формулам, но в большинстве случаев этой величиной можно пренебречь по сравнению с

$$S_1 = 8 \int_{0, (\nu_a - \nu)^{1/2}}^{\bar{\nu}^{1/2}} \frac{(\bar{\nu} - \xi^2) \xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \nu - \nu_a}} = \sqrt{\bar{\nu} \Delta} (3\Delta - \bar{\nu}) - (\Delta - \bar{\nu})(3\Delta + \bar{\nu}) \lg \frac{\sqrt{\bar{\nu}} + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{|\Delta - \bar{\nu}|}}; \quad (6'')$$

при этом Δ означает разность между падающей частотой ν и частотой ν_g длинноволновой фотоэлектрической границы

$$\Delta = \nu - \nu_g, \quad \nu_g = \nu_a - \bar{\nu}. \quad (7)$$

Фрёлых показал, что его формула качественно правильно передает зависимость фототока от частоты ν и, в частности, правильно определяет положение максимума выхода у Li, Na и K. И поскольку у него количественные данные о выходе, как и об остроте максимума, отсутствуют, то здесь эти отношения иллюстрируются на примере (рис. 1). Сплошная кривая взята из измерений Сурманна и Тессинга на массивном, перегнанном в вакууме калии¹⁵, штриховая вычислена по формуле (6) для неполяризованного света и для угла падения 60° .

При этом длины волн, соответствующие частотам $\bar{\nu}$ и ν_g , были взяты $\bar{\lambda} = c/\bar{\nu}$, соответственно $\lambda_g = c/\nu_g$, равными 605 , соот-

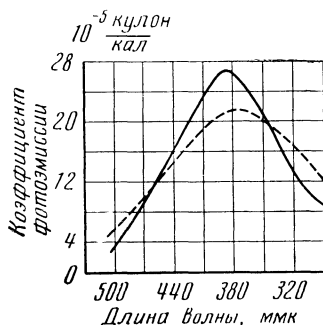
¹⁵ R. Suhrmann, H. Thessing. Z. Phys., 1928, 52, 453. Поляризация и угол падения света, к сожалению, не даны. Использованное нами значение $\varphi = 60^\circ$ соответствует обычному способу измерения.

ветственно 620 мкм; первое значение вычислено по (2), второе значение неизвестно точно и было взято приближенно в соответствии с упомянутыми измерениями Сурманна и Тессинга.

Теоретическая кривая, прежде всего, очень плоская. Как уже отметил Вентцель (1. с.), учет блоховского улучшения зоммерфельдовской теории должен сделать кривую круче. Далее, теоретическая кривая сдвинута вправо по отношению к экспериментальной. Замечая, однако, что теоретическая формула зависит только от двух констант γ и $\bar{\nu}$, из которых первая неизвестна

Рис. 1. Коэффициент фотоэлектрической эмиссии, относенный к падающей энергии в калии

Сплошная линия — наблюдаемая, штриховая — вычисленная



точно, а вторая вообще определяется независимо от фотоэлектрических явлений, нужно рассматривать качественное согласие теории с опытом как удовлетворительное.

Собственно говоря, при вычислениях следовало бы учесть не только действие падающего света, но также и отраженного¹⁶. Так как оказывающий фотоэлектрическое действие поверхностный слой много тоньше длины волны света, это увеличит вычисленное значение коэффициента эмиссии в отношении примерно $\left(\frac{E_x + E'_x}{E_x}\right)^2$ (штрихом отмечен электрический вектор отраженного света), что могло бы ухудшить согласие с опытом. Пока мы не будем обсуждать этот вопрос подробнее.

Фрелих далее показал, что наблюдаемое распределение фотоэлектронов приближается к теоретическому виду с уменьшающейся толщиной металлической пластинки (исключение объемного эффекта!).

§ 4. Поглощение света и фотоэффект

Поглощение света в металле экспоненциально зависит от толщины металлического слоя и тем самым является объемным эффектом. Действительно Крониг¹⁷, руководствуясь блоховской

¹⁶ Отражение света в нашей терминологии является существенно объемным эффектом, так как оно происходит в слое порядка величины световой длины волны. Выводы § 1 и 4 о поглощении света можно перенести также на отражение.

¹⁷ R. de L. Kronig. Proc. Roy. Soc. London, 1929, A124, 409.

теорией металла, показал, что поглощение света существенно определяется периодическим ходом потенциала внутри металла и определяемой этой связью электронов проводимости. Фотоэффект, являющийся частным случаем поглощения света, напротив, существенно определяется экспоненциальным спаданием электронных волн на металлической поверхности. С другой стороны, этот поверхностный эффект для суммарного поглощения света относительно не существен¹⁸. Тем самым возникает уже упомянутая в § 1 задача—объяснить поразительную разницу в фотоэлектрическом действии объемного и поверхностного эффектов.

Эта разница не может быть объяснена даже приблизительно соударениями, которые происходят с испущенными электронами в глубине металла на их пути к поверхности. А именно, пусть интенсивность света в металле $J = J_0 e^{-\gamma x}$, свободная длина пробега электрона l . В слое толщиной dx в единицу времени и на единицу поверхности испускается $-\frac{1}{h\nu} \frac{dJ}{dx} dx$ электронов. Пусть $p(\nu)$ — доля испущенных электронов, имеющих достаточную нормальную скорость, чтобы преодолеть потенциальный барьер C . При случайной ориентации скорости доля $\frac{1}{2} \sin \theta d\theta$ этих электронов должна проделать путь $x/\cos \theta$ до поверхности металла $x = 0$. Плотность тока, таким образом, будет

$$j = -\frac{ep(\nu)}{2h\nu} \bar{D} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} dx e^{-\frac{x}{l \cos \theta}} \frac{dJ}{dx} = \\ = J_0 \frac{ep(\nu)}{2h\nu} \bar{D} \left(1 - \frac{1}{l\eta} \ln(1 + l\eta)\right),$$

где \bar{D} означает средний коэффициент прохождения через поверхность для рассматриваемых электронов, а выход электронов на поглощенный квант будет равен

$$\alpha = \frac{j}{e} : \frac{J_0}{h\nu} = \frac{1}{2} \bar{D} p(\nu) \left(1 - \frac{1}{l\eta} \lg(1 + l\eta)\right). \quad (8)$$

Для чистых металлических поверхностей \bar{D} порядка 1, далее $l \sim 10^{-6}$ см и $\eta \sim 10^5$ см⁻¹; т. е. $l\eta \sim 1/10$; и тем самым приближенно

$$1 - \frac{1}{l\eta} \lg(1 + l\eta) \sim \frac{1}{2} l\eta \sim \frac{1}{20}.$$

Согласно опыту выход составляет приблизительно 10^{-4} электронов на квант, т. е. $p(\nu)$ может быть не более чем 10^{-2} до 10^{-3} . При по-

¹⁸ Приближенный расчет показывает, что доля z поглощаемых на поверхности световых квантов составляет

$$z = \frac{4e^2}{ch} \beta' \left(\frac{\bar{v}}{v}\right)^{5/2} \left(\frac{E_x}{E}\right)^2 \frac{1}{\cos \varphi} = 4,6 \cdot 10^{-33} \beta' \left(\frac{\bar{v}}{v}\right)^{5/2} \left(\frac{E_x}{E}\right)^2 \frac{1}{\cos \varphi},$$

где β' — число порядка единицы.

верхностном эффекте, однако, $p(\nu)$ приблизительно равно 10^{-1} . Следует также объяснить, почему испущенные из глубины металла электроны имеют в среднем меньшую скорость, чем испущенные с поверхности¹⁹.

§ 5. Длинноволновая граница объемного эффекта

Собственные функции электронов в простой кубической решетке, как показал Блох, имеют следующий вид:

$$\psi_{K_1, K_2, K_3} = \exp [i(2\pi\nu_{K_1 K_2 K_3} t - K_1 x - K_2 y - K_3 z)] u_{K_1 K_2 K_3}(x, y, z),$$

где u — периодическая функция координат с периодом, равным постоянной решетки a . Ради простоты примем, что соотношение (1) между ν_{K_1, K_2, K_3} и K_1, K_2, K_3 , справедливое только для свободного электрона, имеет место также для слабосвязанного электрона.

Для возможности электронного перехода с поглощением кванта $h\nu$ из состояния K_1, K_2, K_3 в состояние k_1, k_2, k_3 , как известно, необходимо выполнение закона сохранения энергии

$$\nu_{k_1 k_2 k_3} = \nu_{K_1 K_2 K_3} + \nu \quad (9)$$

и условия дифракции²⁰

$$k_i = K_i \pm \frac{2\pi}{a} m_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9')$$

(m_i — целые числа). Из этих условий и из (1) следует

$$\mu\nu = \sum_{i=1}^3 \left\{ \left(K_i \pm \frac{2\pi}{a} m_i \right)^2 - K_i^2 \right\},$$

или, если ввести обозначения

$$K_0 = \frac{2\pi}{a}, \quad K_0^2 = \mu\nu_0, \quad (10)$$

получим

$$\nu = \nu_0 \sum_{i=1}^3 m_i^2 \left(1 \pm \frac{2K_i}{K_0 m_i} \right). \quad (11)$$

Если положить число электронов проводимости равным числу n атомов металла в единице объема и заметить, что в простой кубической решетке n равно a^{-3} , то из (2) и (10) следует

$$\frac{2\bar{K}}{K_0} := \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} < 1, \quad (12)$$

¹⁹ Численные данные относятся примерно к наблюдаемой части спектра, соответственно к близкому ультрафиолету.

²⁰ Ср., например, *R. de L. Kronig*, л. с., уравнения (32), (33) и (34).

Тем самым при абсолютном нуле ($T = 0^\circ$, $K_i \leq \bar{K}$) самые малые частоты, которые согласно формуле (11) вообще могут поглотиться в металле ²¹, соответствуют случаю $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = 0$ (или также $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 = 1$ и т. д.):

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{2K_1}{K_0}\right). \quad (13)$$

При относительно низких частотах ν (примерно в видимой области) только те электроны смогут поглотить квант $h\nu$, компонента волнового числа которых K_1 (или также K_2 или K_3) равна

$$K_1 = \frac{1}{2} K_0 \left(1 - \frac{\nu}{\nu_0}\right). \quad (14)$$

С другой стороны, испущенный электрон только тогда сможет выйти из металла, если энергия, соответствующая нормальной компоненте его скорости, больше потенциального порога C . Это условие равносильно неравенству

$$h \frac{1}{\mu} k_1^2 = h \left(\frac{1}{\mu} K_1^2 + \nu\right) \geq C$$

или также, если $C = h\nu_a$,

$$K_1^2 + \mu(\nu - \nu_a) \geq 0.$$

Вводя в это неравенство значения (10) и (14), получаем

$$\nu^2 + 2\nu_0\nu + \nu_0^2 - 4\nu_0\nu_a \geq 0;$$

таким образом,

$$\nu \geq 2\sqrt{\nu_0\nu_a} - \nu_0.$$

Фотоэлектрический объемный эффект наступит также только при преодолении «второй» границы частот ν'_g

$$\nu'_g = 2\sqrt{\nu_0\nu_a} - \nu_0, \quad (15)$$

которая, вообще говоря, лежит много выше, чем граница частот ν_g , характерная для поверхностного эффекта $\nu_g = \nu_a - \nu$ (ср. уравнение (7)). Если ввести вместо ν_g , ν и т. д. соответствующие длины волн $\lambda = c/\nu$ в мк, то, например, в случае калия $\bar{\lambda} = 605$, $\lambda_g = 620$ (ср. стр. 203), откуда можно по (7), (15) и (12) вычислить $\lambda_a = 307$, $\lambda_0 = 147$, $\lambda'_g = 385$. Для Na при $\lambda_g = 680$ и $\lambda = 393$ получаем значение $\lambda'_g = 400$, для Ag при $\lambda_g = 300$ и $\bar{\lambda} = 225$ значение $\lambda'_g = 188$ и т. д.

Уравнение (15), хотя и получено с использованием формулы (1), справедливо только в пренебрежении связью электронов проводимости. Этот результат, конечно, не точен, но будет хорошо

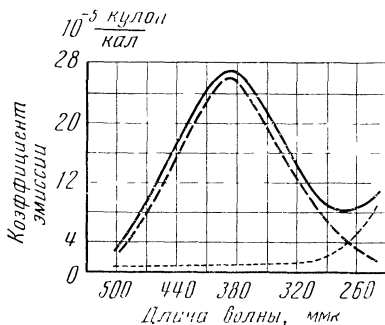
²¹ При меньших частотах соударения электронов становятся определяющими для поглощения света; ср. R. de L. Kronig, l. c.

соответствовать в количественном отношении фактическим данным ²².

Резюмируя, мы можем, таким образом, объяснить то обстоятельство, что при малых частотах поглощение света внутри металла не вызывает электронной эмиссии тем, что по соотношению (14), следующему из закона сохранения энергии (9) и условия дифракции (9'), поглощение света может иметь место только на более медленных электронах проводимости (малые x -компоненты скорости). Фотоэлектрическая граничная частота для объемного эффекта поэтому много выше, чем для поверхностного эффекта,

Рис. 2. Объединение полного фотоэффекта на K из поверхностного эффекта (штриховая линия) и из объемного эффекта (пунктирная линия)

Сплошная кривая по измерениям Сурманна и Тессинга



при котором могут испускаться также и самые быстрые электроны проводимости.

Фактически, как известно, у щелочных и у щелочноземельных металлов после минимума находят второй подъем коэффициента фотоэлектрической эмиссии в далеком ультрафиолете. Этот подъем согласно нашей интерпретации следует приписать преодолению «второй границы частот» ν'_g ; его положение в спектре соответствует приблизительно нашей формуле (15). На рис. 2 указан штриховыми кривыми предположительный результат полного фотоэффекта на K , полученный суммированием поверхностного и объемного эффектов.

Фрёлых также объяснил второй подъем растущим влиянием глубоколежащих металлических слоев и в этой связи указал на важность измерений Сурманна и Тессинга ²³ на пластинках K , лежащих на платиновом зеркале. В относительно толстых пластинках (их рис. 1) они нашли, как и в случае массивного K (наш рис. 2), повторный подъем (примерно при 300 мкм). В более тонких пластинках (рис. 2 и 3 у Сурманна и Тессинга), напротив, этот подъем уже не возникает ²⁴.

²² Ср. Добавления при корректуре.

²³ R. Suhrmann, H. Thessing. Z. Phys., 1929, 55, 701.

²⁴ При почти одноатомном слое подъем опять имеется, а еще более тонкая пленка K вообще не показывает селективного максимума (рис. 4 и 5 у Сурманна и Тессинга), что можно приписать как влиянию лежащей внизу платины ($\lambda_g \sim 300$ мкм), так и неприменимости представления о металлическом слое к одноатомной пленке.

Даже пологость второго подъема вполне понятна. Во-первых, нужно учесть влияние соударений (ср. § 6). Во вторых, мы делали вычисления в предположении $K_i \leq \bar{K}$, т. е. для абсолютного нуля температур. Наличие более быстрых электронов на самом деле делает возможным фотоэлектрический объемный эффект уже при $\nu < \nu'_g$.

Простое вычисление показывает, например, что процесс поглощения, соответствующий триплету чисел $m_1 = m_2 = 1$, $m_3 = 0$, дает возможность для электронной эмиссии, если

$$\nu \geq 2\sqrt{\nu_0\nu_a} - 2K_2 \sqrt{\frac{\nu_0}{\mu}}. \quad (16)$$

При $K_2 \leq \bar{K}$ эта граница частот существенно больше, чем ν'_g ²⁵; напротив, при достаточно больших K_2 она может быть сделана произвольно малой²⁶. Кроме того, в рассматриваемой области оптический коэффициент поглощения η падает с ростом частоты, что должно уменьшать фотоэлектрическую эмиссию от объемного эффекта при $\nu > \nu'_g$ (ср. § 4).

§ 6. Влияние столкновений

До сих пор мы почти полностью не принимали во внимание столкновение электронов с металлической решеткой (и между собой). Эти столкновения проявятся, кроме прочего, в понижении второй границы частот ν'_g , потому что *полная энергия* электрона проводимости, увеличенная на $h\nu$, может стать больше потенциального барьера уже при $\nu < \nu'_g$, так что электрон при благоприятном столкновении, которое его отклоняет в направлении нормали, может выйти из металла. Эти соударения, так же как существование быстрых электронов проводимости ($K > \bar{K}$), приводят к тому, что объемная эмиссия добавляется к поверхностной эмиссии уже при $\nu \sim \nu_g$.

Во всяком случае, мы не можем присоединиться к точке зрения, высказанной Фрелихом (l. с.), что объемный фотоэффект может быть объяснен вообще только при учете столкновений. А именно, Фрелих предлагает считать мысленно металл разделенным на слои толщиной порядка удвоенной длины свободного пробега электрона $2l$, а электронную эмиссию каждого из этих слоев вычислять по формулам, справедливым для тонких металлических слоев. В этой связи имеются следующие возражения.

Во-первых, для фотоэффекта на металлических пластинках, как уже указано в § 2, решающую роль играет экспоненциальный спад волновых функций электронов на границе металл—вакуум, который будет отсутствовать на мысленно ограниченных метал-

²⁵ У двухвалентных металлов эта граница даже ниже, чем ν'_g .

²⁶ Ср. Добавления при корректуре.

лических слоях внутри металла. Во-вторых, как отмечалось, как для поглощения света, так и для объемного эффекта характерна не принятая Фрелихом во внимание связь электронов проводимости. Наконец, влияние столкновений на этот процесс поглощения является несущественным при входящих в рассмотрение частотах.

Последнее утверждение было доказано уже Кронигом (1. с.); мы повторим доказательство в упрощенной форме. Дело, очевидно, в том, чтобы показать, что средний промежуток времени τ между двумя последовательными столкновениями электрона охватывает много колебаний света; другими словами, что величина

$$\gamma = \frac{\tau}{T} = \tau\nu$$

(T — период световых колебаний) много больше, чем единица. Согласно зоммерфельдовской теории, электропроводность σ определяется формулой

$$\sigma = \frac{ne^2}{m} \tau,$$

которая отличается от известной формулы Друде только множителем 2. Получается

$$\tau = \frac{m\sigma}{ne^2} = 4 \cdot 10^{-9} \frac{\sigma}{n} \text{ сек.} \quad (17)$$

Для хороших проводников σ порядка $5 \cdot 10^{17} \text{ сек}^{-1}$, а число электронов проводимости $n \sim 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, и тем самым $\tau \sim 4 \cdot 10^{-14} \text{ сек}$. Крониг с учетом связи электронов проводимости получил значение примерно в 10 раз больше. Таким образом, влиянием соударений на процесс поглощения можно пренебречь примерно, когда $\nu > 10^{14} \text{ сек}^{-1}$.

§ 7. Дополнительные замечания

1. Чрезвычайно большое влияние, которое оказывают на фотоэффект *инородные поверхностные слои*, не может быть отнесено без дальнейшего к обсуждаемому поверхностному эффекту, определяющему при $\nu < \nu'_g$ фотоэлектрическую электронную эмиссию, и требует специального исследования.

А именно, если высота потенциального барьера $C = h\nu_a$ уменьшается инородными слоями до $h\Delta\nu_a$, то кривая $S_1(\nu)$ (уравнение (6')), зависящая от разности $\nu_a - \nu$, сдвигается без изменения в область меньших частот. Замечая, что для плотности фототока j существенно произведение $\frac{\nu_a}{\sqrt{4}} S_1(\nu)$ (уравнение (6)), легко увидеть, что получающиеся таким образом изменения j много меньше наблюдаемых. В этом выводе ничего не изменится существенно не только если влияние инородных слоев свести

к простому уменьшению скачка потенциала C , но и если, как в теории термоэлектронной эмиссии вообще, отнести его к образованию двух потенциальных ступеней. Может быть, объяснение этого влияния состоит в учете сложной структуры поверхности — что-то вроде образования потенциального углубления в поверхностном слое, которое, как показал Фаулер²⁷, может обусловить селективную пропускную способность поверхности для электронов определенной скорости. Это могло бы сделать возможным выход части электронов, испущенных в большом числе в глубине металла, и тем самым сделать понятным чрезмерно большой коэффициент фотоэлектронной эмиссии²⁸.

2. Теоретически между нормальным и селективным эффектом на чистых поверхностях нет принципиальной разницы, как отмечал уже Вентцель. Появление максимума выхода можно ожидать и у *тяжелых металлов* (Ag, Cu, Pt и т. д.), причем этот максимум, соответствуя сдвигу общей кривой выхода к большим частотам, должен лежать в еще не исследованном ультрафиолете. Повторный подъем после селективного максимума у легких металлов (щелочей и щелочных земель), как было показано в § 5, обусловлен объемным эффектом.

3. В предельном случае совершенно гладкой металлической поверхности фотоэлектроны, как подчеркнуто в § 3, будут выбиваться с поверхности только светом, поляризованным перпендикулярно плоскости падения. Электроны, выбитые светом, поляризованным в плоскости падения, выходят, если их происхождение не обязано грубой обработке поверхности, из глубины металла (объемный эффект). Поэтому следует ожидать, что в случае света, поляризованного в плоскости падения, распределение по скоростям фотоэлектронов будет более сглаженным (соударения!), чем при перпендикулярной поляризации. Соответствующие эксперименты представляются нам крайне желательными.

*Москва, Государственный электрохимический
исследовательский институт.
Отдел теоретической физики.*

Поступила
14 января 1931 г.

Добавления при корректуре (19 февраля 1931). 1. Данную в тексте оценку второй фотоэлектрической границы ν'_g (уравнение (15)) нужно, как уже подчеркивалось, рассматривать только как первое грубое приближение. Особенно нужно учесть то обстоятельство, что при поглощении светового кванта поглощающий электрон, первоначально принадлежавший одной из так называемых зон, на которые можно разделить фазовое пространство электронов проводимости²⁹, должен перейти в другую зону, причем боль-

²⁷ R. H. Fowler. Proc. Roy. Soc. London, 1930, A128, 123.

²⁸ Ср. Дополнения при корректуре.

²⁹ Ср. R. Peierls. Ann. Phys., 1930, 4, 121; L. Brillouin. J. Phys., 1930, 1, 377.

шая часть поглощаемой энергии расходуется на преодоление скачка энергии на граничной плоскости этой зоны.

Один из нас (Шубин) надеется обсудить этот вопрос в скором времени в другом месте в связи с некоторыми проблемами металлооптики (полоса пропускания Ag и т. д.).

2. (К стр. 206). На основе формулы (15) можно оценить, что, например, в случае K понижение потенциального барьера на 17% уже достаточно, чтобы сдвинуть границу объемного эффекта с $\lambda'_g = 385$ до 550 м.мк; при этом λ_g меняется от 620 до 955. Эти числа кажутся вполне согласующимися с данными Сурманна и Тессинга о влиянии тлеющего разряда на способность K к эмиссии.

Влияние поляризации света на выход, однако, остается необъясненным при фаулеровском толковании влияния инородных слоев.

3. Поверхностный эффект в первом приближении температурно независим; относительно малый объемный эффект при $\nu < \nu'_g$, напротив, должен сильно зависеть от температуры, поскольку он обусловлен существованием быстрых электронов ($K > \bar{K}$) в металле (ср. стр. 208). При освещении естественным светом этим объемным эффектом можно пренебречь по сравнению с поверхностным эффектом, но не в случае $E_x = 0$. Тем самым в этом случае сам по себе малый выход должен существенно расти с температурой. Соответствующие расчеты, так же как относящиеся сюда вопросы резкости фотоэлектрической границы ν_g , интенсивно исследуются.

Дополнительно мы узнали, что Айвс и Ионсруд³⁰ наблюдали при охлаждении Na—K-сплава от температуры возгонки до комнатной температуры при поляризации E , перпендикулярной плоскости падения, отсутствие изменений в выходе, в то время как при плоскости падения выход уменьшился примерно в 8 раз. Этот факт кажется нам существенным подтверждением нашего общего понимания фотоэффекта.

Москва

Поступила 14 января 1931 г.

Примечание. Работа является классической в теории твердого тела. Впервые сформулированные в ней представления о решающей для фотоэффекта роли скачка потенциала на границе металл—вакуум и периодического потенциала внутри кристалла (поверхностный и объемный фотоэффекты) не только создали качественно правильную физическую картину этого явления, но и явились основой для широкого круга современных исследований электронных спектров и структуры поверхности кристаллов фотоэлектрическими методами.

³⁰ H. E. Ives, A. L. Johnsrud. *Astrophys. J.*, 1924, 60, 231 (рис. 4).

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ТЕОРИИ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА В МЕТАЛЛАХ ¹

В июле 1931 г. в выпуске этого журнала появились работы Френкеля [1], в которых наряду с другими материалами содержалась и критика теории фотоэлектрического эффекта, разработанная Шубиным и мною [2]. Легко убедиться, что эта критика была основана на недоразумении.

Один из двух главных аргументов в критике Френкеля состоит в следующем. Френкель говорит (ссылка 1, стр. 317): «Тамм и Шубин высказали гипотезу, что в металлах, кроме абсолютно свободных электронов, существует другая группа электронов, которые являются в известной мере связанными (блоховские электроны) и которые вступают в игру начиная с пороговой частоты $\nu_{g'} > \nu_g$ ». Далее Френкель критикует эту «гипотезу», которой, надо заметить, мы никогда не высказывали. В действительности же был отмечен хорошо известный факт, что совершенно свободные электроны не могут поглощать фотонов, а также то обстоятельство, что электроны проводимости в металлах не являются свободными, а связаны: 1) потенциальным барьером на поверхности металла и 2) периодическим потенциалом решетки, и мы далее обсуждали в отдельности влияние этих двух различных типов связи на поглощение фотонов электронами. Первая из этих связей может быть учтена даже в простой зоммерфельдовской теории «свободных электронов», что мы и сделали при вычислении соответствующей части полного фотоэлектрического эффекта. Для учета периодического поля решетки необходимо было, конечно, использовать более аккуратное приближение для описания электронов в металле, а именно теорию Блоха. Таким способом оказалось возможным показать, что, хотя все электроны проводимости в металле одинаковы, существуют два различных механизма фотоэлектрического эффекта (поверхностный и объемный) со значительно отличающимися друг от друга характеристиками. Единственная гипотеза, которая была нами действительно принята, заключается в том, что в первом приближении эти два механизма, соответствующие двум отмеченным типам связи, могут рассматриваться независимо друг от друга.

Другой аргумент Френкеля ([1], стр. 316) относится к численным данным, использованным нами. Френкель говорит, что Тамм

¹ Phys. Rev., 1932, 39, № 1, 170. Перевод Е. Г. Максимова.

и Шубин приняли для скачка потенциальной энергии на границе металла C величину около 2 e , в то время как эксперименты по дифракции катодных лучей показывают, что эта величина изменяется между 12 и 20 e для различных металлов. Он полагает также, что теория Ферми—Зоммерфельда, использованная нами, является ошибочной.

Указывая на свою работу [3], Френкель считает, что развитая в ней теория способна предсказать значение величины C «в хорошем согласии с экспериментальными данными» с использованием только данных о пороговой частоте фотопоглощения.

Действительное положение вещей можно увидеть из следующей таблицы величины C в вольтах для металлов К, Na, Ag и Au, 1) полученных Руппом [4] из данных по дифракции катодных лучей (первая строка), 2) выведенных суммированием энергии $h\nu_g$ фотона, обладающего пороговой частотой ν_g с величиной

$$E_0 = \frac{m\hbar^2}{2} \left(\frac{3n}{2\pi} \right)^{2/3},$$

вычисленной в соответствии с теорией свободных электронов Ферми—Зоммерфельда (эти величины были использованы в нашей работе), и 3) вычисленных в соответствии с указанной выше теорией Френкеля (третья строка):

Метод	К	Na	Ag	Au
Рупп C_d	7,3		14	14
Ферми (C_f)	4,02	4,95	9,6	10,3
Френкель	11,9	10,9	24,7	28,9

Из этой таблицы видно, что величины C_d и C_f отличаются на фактор 1,4—1,8, а не в 6 или 10 раз, как это можно было бы заключить из критических замечаний Френкеля. Далее, френкелевские значения C не находятся в лучшем согласии с экспериментальными данными, чем C_f , скорее имеет место обратная ситуация. По-видимому, объяснение этого расхождения лежит в том простом факте, что C_d и C_f являются в действительности двумя различными физическими величинами.

Энергетический спектр электрона в кристаллической решетке состоит из ряда (практически) непрерывных зон разрешенных энергетических уровней, причем каждая зона соответствует энергетическому уровню изолированного атома. Нижайшие зоны полностью заняты электронами внутренних оболочек атома вплоть до некоторой n -й зоны, заполненной, положим, наполовину (при

$T=0$) валентными (т. е. проводящими) электронами (мы ограничимся металлами первой группы, имеющими один валентный электрон).

Использование теории свободных электронов означает, что мы приписываем нижайшему уровню валентной зоны потенциальную энергию C_f и кинетическую энергию, равную нулю, и вычисляем распределение более высоких энергетических уровней в соответствии со статистикой Ферми, не учитывая влияния периодического поля решетки и того факта, что между n -й зоной и $n+1$ -й зоной и вообще между соседними зонами находятся области запрещенных энергий (если зоны не перекрываются). Так как все электроны в металле обладают потенциальной и кинетической энергиями, то «скачок потенциала» C_f в действительности является мерой (приближенно, конечно) полной энергии (потенциальной и кинетической, $W_0 = \tau_0 + V_0$), отсчитанной от дна валентной зоны

$$C_f = -W_0 = -(V_0 + T_0).$$

Так как V_0 и T_0 имеют противоположный знак, то C_f меньше, чем $-V_0$.

Кроме того, я склонен думать, что разница величин C , полученных из измерений дифракции катодных лучей (C_d) и вычисленных в соответствии с теорией свободных электронов (C_f), едва ли может быть полностью объяснена тем фактом, что использованная для вычисления C_f теория является приближенной².

В действительности необходимо отсчитывать C_f не от нижайшей возможной энергии валентных электронов W_0 , а от работы выхода $h\nu_g$, которая может быть измерена экспериментально. Это означает, что мы должны приписывать последнему занятому уровню энергию $-h\nu_g$ и вычислять C_f из соотношения $C_f = E_0 + h\nu_g$. Так как реальное размытие энергетических уровней в разрешенной зоне меньше, чем размытие E_0 , вычисленное по теории свободных электронов, то соответствующее значение C_f будет больше, чем величина W_0 . С другой стороны, величина C_d , полученная из измерений дифракции катодных лучей, определяется как средняя потенциальная энергия электронов в решетке.

При сравнении C_f и C_d мы должны принять во внимание среднюю потенциальную энергию нижайших валентных электронов

$$V_0 = \int V |\psi_0|^2 dv,$$

² Чтобы согласовать измерение дифракции катодных лучей с расчетом, Розенфельд, Витмер, Рупп и др. предположили, что в случае Ag и Au число свободных электронов в решетке не равно числу атомов, а в 2 раза больше. Эта гипотеза кажется очень искусственной, особенно в отношении калия.

где ψ_0 — волновая функция этих электронов, в то время как C_d , определенная как «средняя потенциальная энергия», не зависит от ψ^* :

$$C_d = -\frac{1}{v} \int V dv.$$

Отсюда следует, что если валентные электроны находятся в s -состоянии, то C_d должно быть меньше $-V_0$, так как $|\psi_0|^2$ возрастает при приближении к положительному ядру**.

Таким образом, связь между C_f и C_d достаточно сложная. Более того, так как $C_f \approx -(V_0 + T_0)$ и $C_d \approx -V_0$, теоретически можно ожидать, что C_d будет больше C_f и разница между ними будет по порядку величины равна нескольким вольтам, что и имеет место на самом деле.

Я не буду входить в детали критики теории фотоэлектрического эффекта, предложенной Френкелем, так как он сообщил мне, что он более не защищает ее. Я могу добавить, что профессор Френкель позволил мне сообщить, что он согласен с выводами этой работы и с тем, что его критика была основана на недоразумении.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *J. Frenkel*. Phys. Rev., 1931, 38, 309.
2. *Ig. Tamm, S. Schubin*. Z. Phys., 1931, 68, 97; см. перевод статьи 14 в наст. томе.
3. *J. Frenkel*. Z. Phys., 1928, 49, 31.
4. *E. Rupp*. Elektronen—Interferenz (Leipziger Vorträge). Leipzig, 1930, S. 7.
5. *P. Morse*. Phys. Rev., 1930, 35, 1310.
6. *H. Bethe*. Ann. Phys., 1928, 87, 55.

* В соответствии с более строгой теорией Морза [5] C_d , по-видимому, имеет несколько большее значение. Оба — Бете [6] и Морз — предположили, что поле решетки резко обрывается на границе металла. Это упрощение может быть строго оправдано только для относительно медленных катодных лучей. Именно с этим случаем мы и будем иметь дело.

** Кроме того, при вычислении C_d мы должны учесть поле всех электронов в металле, в то время как при вычислении V_0 мы можем учитывать лишь валентные электроны.

О ВОЗМОЖНЫХ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ ЭЛЕКТРОНОВ НА ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛА ¹

Электрон может оказаться в связанном состоянии на поверхности, ограничивающей периодическую потенциальную решетку (кристалл). Для этого энергия электрона W , во-первых, должна попасть в запрещенную область энергетического спектра для (неограниченно продолженной) потенциальной решетки и, во-вторых, должна быть меньше, чем потенциальная энергия U_0 во внешнем пространстве. Собственная функция Ψ такого поверхностного состояния экспоненциально спадает по обе стороны от граничной плоскости.

Подробно рассмотрен простой одномерный пример (модель решетки Кронига—Пенни) и определен дискретный спектр поверхностных состояний. Затем обсуждается возможная роль этих поверхностных состояний в объяснении природы потенциального барьера на границе кристалла, а также для понимания возникающего в диэлектрических кристаллах противоречия между «свободной» подвижностью фотоэлектронов внутри кристалла и удерживанием влетающих в кристалл извне электронов на поверхности кристалла.

Введение

Связанное состояние электрона в некоторой определенной области пространства обычно объясняется тем, что потенциальная энергия имеет углубление в соответствующей области; при этом высота потенциального барьера по обе стороны от области, где имеется связанное состояние, должна превышать полную энергию связанного электрона (мы ограничиваемся сначала ради простоты одномерным случаем) ². Но связанное состояние электрона можно осуществить и другим способом. Вместо двух потенциальных стенок, расположенных по обе стороны от области, где находится связанный электрон, можно, например, представить себе такой случай, когда правая потенциальная стенка заменена периодическим потенциальным полем $U(x)$. Даже в том случае, если максимальная величина этого поля будет меньше, чем полная энергия W подлежащего удержанию электрона, все же при определенных значениях W электронная волна может полностью отражаться от потенциальной решетки. При этом электрон окажется запертым между потенциальной стенкой слева и потенциальной решеткой справа, волновая функция будет иметь максималь-

¹ Phys. Z. Sowjetunion, 1932, 1, 733. Перевод Б. М. Болотовского. См. также ЖЭТФ, 1933, 3, 34.

² Краткое рассмотрение трехмерного случая мы начнем в § 2.

ное значение на поверхности раздела и экспоненциально спадать по мере удаления в обе стороны от поверхности раздела. Связанное состояние, полученное с помощью потенциальной стенки, отвечает, очевидно, корпускулярной природе электрона, а связь, достигаемая с помощью потенциальной решетки, — волновой природе.

Математически явление может быть описано следующим образом. Пусть потенциальная энергия электрона $U(x)$ в некоторой определенной области является периодической функцией координаты x с периодом d . Тогда в этой области волновое уравнение

$$\Psi'' + \kappa^2 [W - U(x)] \Psi = 0, \quad \kappa^2 = \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \quad (1)$$

согласно общим теоремам теории дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами имеет два линейно-независимых решения определенного вида, так что

$$\Psi = e^{i\alpha_1 x} u_1(x) + e^{i\alpha_2 x} u_2(x), \quad (2)$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — периодические функции с периодом d , а постоянные α_1 и α_2 — определенные функции энергии W .

В *неограниченном* кристалле из «естественных условий» Шредингера следует, что постоянные α_1 и α_2 должны быть действительны. В соответствии с этим энергетический спектр состоит из непрерывных полос, или «зон», $W_n \leq W \leq W'_n$ (n -я зона), внутри которых это требование выполняется. Зоны разделены «запрещенными полосами» $W'_{n-1} < W < W_n$, в которых постоянные α_1 и α_2 принимают мнимые или комплексные значения.

Однако, если речь идет об *ограниченной* решетке, которая, например, расположена от точки $x=0$ в положительном направлении оси x , то допускаются и те значения энергии, которые лежат в «запрещенных» полосах. При этом только следует оставлять те из волновых функций Ψ , у которых показатели экспоненты $i\alpha x$ имеют отрицательную действительную часть. Такие функции затухают экспоненциально по мере удаления вправо от точки $x=0$ ³. В случае ограниченной решетки следует еще учитывать условия непрерывности Ψ и $\partial\Psi/\partial x$ в граничной точке $x=0$. Для случая, когда потенциальная энергия $U(x)$ слева от точки $x=0$ принимает постоянное значение⁴ $U_0 > W$, можно на простом примере показать (ср. § 1), что, «вообще говоря», в каждой «запрещенной» полосе $W'_{n-1} < W < W_n$ может лежать собственное значение, при котором эти граничные условия выполняются. Соответствующие электронные состояния можно, в отличие от обычных, назвать поверхностными состояниями, потому что опи-

³ В прошлом году д-р А. Витт спросил меня, не могут ли эти функции иметь какое-либо значение в теории металлов; в то время я высказался в отрицательном смысле. Только недавно, в другой связи, я снова вернулся к этому вопросу.

⁴ Случай $U_0 < W$ тривиален.

сывающие это состояние нормированные собственные функции заметно отличны от нуля только в непосредственной близости от поверхности. В противоположность этому собственные функции «объемных состояний» (действительные значения α) не затухают во всей решетке и соответствуют, как известно, движению электрона по решетке или переходу электрона от одного из атомов к соседним и т. д.

§ 1. Расчет одного простого случая

Чтобы количественно и на возможно простом примере рассмотреть приведенные соображения, введем одномерную решетку, которая простирается от точки $x=0$ в положительном направлении оси x до бесконечности. Решетка описывается потенциальной кривой с прямоугольными зубцами и с периодом $d=a+b$ (рис. 1).

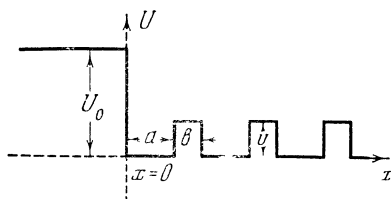


Рис. 1

Если переменная x заключена в пределах

$$d(r-1) \leq x \leq dr,$$

где r — целое число, мы говорим, что x лежит в r -й ячейке решетки. Введем внутри этой ячейки вспомогательную переменную x' :

$$x' = x - d(r-1), \quad 0 \leq x' \leq d. \quad (3)$$

Потенциальную энергию $U(x)$ электрона определим следующим образом:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x' \leq a, \\ U_1 & \text{при } a \leq x' \leq d, \end{cases}$$

где U_1 — постоянная величина.

Введем, далее, обозначения:

$$x = \frac{8\pi^2 m}{h^2}, \quad k = x \sqrt{W}, \quad k' = x \sqrt{W - U_1}; \quad (4)$$

k (и соответственно k') обозначает волновое число $2\pi/\lambda$ электрона с энергией W в области $0 \leq x' \leq a$ (и соответственно в области $a \leq x' \leq d$). Если $W < U_1$, можно ввести вместо k' положительную действительную величину

$$\gamma = -ik' = x \sqrt{U_1 - W}. \quad (4')$$

Общее решение уравнения Шредингера (1) в области $x > 0$, занятой прямоугольной решеткой, записывается в форме (2), причем, как показывает простое вычисление⁵, постоянные α_1 и $\alpha_2 = -\alpha_1$ как функции энергии W определяются из уравнения

$$\cos \alpha d = \cos k a \cos k' b - \frac{k^2 + k'^2}{2kk'} \sin ka \sin k' b. \quad (5)$$

Если $W < U_1$, это уравнение с помощью формулы (4') может быть переписано в таком виде:

$$\cos \alpha d = \cos k a \operatorname{ch} \gamma b - \frac{k^2 - \gamma^2}{2k\gamma} \sin ka \operatorname{sh} \gamma b. \quad (5')$$

Если правая часть уравнения (5) и соответственно уравнения (5') для заданного значения W по абсолютной величине не превышает единицы, эти уравнения имеют два действительных корня: α_1 и $\alpha_2 = -\alpha_1$ (плюс целое кратное величины $2\pi/d$). В этом случае соответствующее значение W лежит в «разрешенной энергетической зоне». Если же абсолютная величина правой части уравнения (5) или соответственно (5') превышает единицу, то величина α является комплексной и соответствующие значения энергии W лежат в запрещенной области энергетического спектра.

Чтобы получить более ясное представление, рассмотрим, следуя Кронигу и Пенни (цит. выше), предельный случай бесконечно узких, но в то же время бесконечно высоких зубцов потенциала:

$$\lim b = 0, \quad \lim d = a, \quad \lim U_1 = \infty,$$

причем при совершении предельного перехода площадь зубца должна оставаться постоянной:

$$\frac{x^2 a}{2} \lim (U_1 b) = \lim \left(\gamma^2 \frac{ab}{2} \right) = p = \text{const}. \quad (6)$$

В этом предельном случае уравнение (5') принимает форму

$$\cos \alpha d = \frac{p \sin ka}{ka} + \cos ka. \quad (7)$$

Если ввести обозначения

$$\xi = ak = ax\sqrt{W}, \quad ad = \lambda, \quad S(\xi) = \frac{p \sin \xi}{\xi} + \cos \xi, \quad (8)$$

уравнение (7) можно переписать в виде

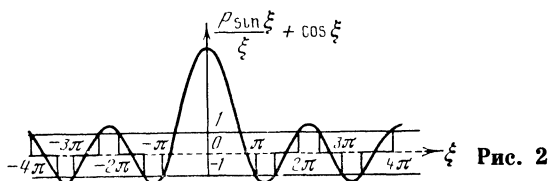
$$\cos \lambda = S(\xi) = \frac{p \sin \xi}{\xi} + \cos \xi. \quad (9)$$

⁵ Случай прямоугольной решетки рассматривался неоднократно; пожалуй, простейшее изложение содержится в работе: R. Kronig, W. Penney. Proc. Roy. Soc., 1931, A130, 499.

Функция $S(\xi)$ изображена на рис. 2, взятом из работы Кронига и Пенни; величина p положена равной $3\pi/2$. Области, соответствующие разрешенным значениям энергии ($|S| \leq 1$), отмечены на оси абсцисс сплошными линиями. Правые граничные точки разрешенных зон отвечают значениям $\xi = n\pi$, поскольку $S(n\pi) = (-1)^n$, а величина

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)_{\xi=n\pi} = (-1)^n \frac{p}{n\pi}$$

имеет тот же знак, что и $S(n\pi)$.



В запрещенных зонах ($|S| > 1$) положим

$$\begin{aligned} \lambda &= i\mu, & \cos \lambda &= \operatorname{ch} \mu & \text{при } S > 1, \\ \lambda &= i\mu + \pi, & \cos \lambda &= -\operatorname{ch} \mu & \text{при } S < -1. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда получим

$$\varepsilon \operatorname{ch} \mu = S(\xi) = \frac{p \sin \xi}{\xi} + \cos \xi, \quad (11)$$

где величина ε равна плюс или минус единице в зависимости от знака $S(\xi)$, или, что то же самое, в зависимости от знака $\sin \xi$:

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon \sin \xi \geq 0. \quad (12)$$

Перейдем теперь к рассмотрению поверхностных состояний. Они соответствуют значениям энергии, запрещенным в глубине кристалла. Волновая функция Ψ во внешнем пространстве ($x < 0$) при $W < U_0$ записывается в виде

$$\Psi = A e^{\varepsilon \sqrt{U_0 - W} x}.$$

Если ввести обозначение

$$q = a x \sqrt{U_0}, \quad (13)$$

получим с учетом равенств (4) и (8)

$$x \sqrt{U_0 - W} = \frac{\sqrt{q^2 - \xi^2}}{a}, \quad \Psi = A e^{\frac{\sqrt{q^2 - \xi^2}}{a} x}. \quad (14)$$

Отрицательный знак в показателе экспоненты, очевидно, должен быть исключен.

Внутри решетки ($x > 0$) волновая функция записывается в виде (1)

$$\Psi = e^{i\alpha x} u(x) = e^{i\lambda \frac{x}{a}} u(x), \quad (15)$$

где снова из двух независимых решений волнового уравнения учитывается только то, которое исчезает на бесконечности ($x = +\infty$). Подставив в (15) найденное Кронигом и Пенни выражение для $u(x)$, получим для первой ячейки решетки ($0 \leq x \leq d$)

$$\Psi = C e^{ikx} + D e^{-ikx},$$

где постоянные C и D связаны соотношением

$$D = -C \frac{1 - e^{-i(\alpha-k)a}}{1 - e^{-i(\alpha+k)a}} = -C \frac{1 - e^{-i(\lambda-\xi)}}{1 - e^{-i(\lambda+\xi)}}.$$

Непрерывность Ψ и $\partial\Psi/\partial x$ в граничной точке $x = 0$ дает

$$A = C + D \quad \text{и} \quad \frac{1}{a} \sqrt{q^2 - \xi^2} A = ik(C - D);$$

следовательно,

$$\sqrt{q^2 - \xi^2} = i\xi \frac{C - D}{C + D} = \xi \frac{1 - e^{-i\lambda} \cos \xi}{e^{-i\lambda} \sin \xi} = \frac{\xi (e^{i\lambda} - \cos \xi)}{\sin \xi}.$$

В согласии с (10)

$$e^{i\lambda} = e^{-\mu} = \varepsilon e^{-\mu} \quad \text{при} \quad S > 1, \quad \varepsilon = +1,$$

$$e^{i\lambda} = -e^{-\mu} = \varepsilon e^{-\mu} \quad \text{при} \quad S < 1, \quad \varepsilon = -1.$$

С учетом этих соотношений последнее уравнение дает

$$\sqrt{q^2 - \xi^2} \frac{\sin \xi}{\xi} + \cos \xi = \varepsilon e^{-\mu}.$$

Вычитая это уравнение из (11), получаем окончательно

$$(p - \sqrt{q^2 - \xi^2}) \frac{\sin \xi}{\xi} = \varepsilon \operatorname{sh} \mu. \quad (16)$$

Из уравнений (12) и (16) нужно теперь определить значения $\mu = \alpha x \sqrt{W}$, соответствующие поверхностным состояниям, при дополнительных условиях

$$\mu > 0, \quad \sqrt{q^2 - \xi^2} > 0. \quad (17)$$

Только в том случае, если волновая функция Ψ удовлетворяет этим условиям, она действительно спадает по экспоненциальному закону в обе стороны от точки $x=0$ (в противном случае она могла бы экспоненциально возрастать).

Если мы условимся рассматривать только положительные значения корня $\sqrt{q^2 - \xi^2}$, то условия (17) равносильны условию

$$p > \sqrt{q^2 - \xi^2}, \quad \xi^2 > q^2 - p^2. \quad (18)$$

В этом легко убедиться с помощью уравнения (16), поскольку ε и $\sin \xi$ имеют одинаковые знаки, равно как и μ и $\operatorname{sh} \mu$. Возводя в квадрат уравнения (11) и (16) и вычитая второе из первого, после коротких вычислений получим с учетом равенства $\operatorname{ch}^2 \mu - \operatorname{sh}^2 \mu = 1$ следующее уравнение для определения собственного значения ξ :

$$\xi \operatorname{ctg} \xi = \frac{q^2}{2p} - \sqrt{q^2 - \xi^2}. \quad (19)$$

Это уравнение, как легко видеть, имеет один и только один корень ξ_n в каждом интервале $n\pi < \xi < (n+1)\pi$, т. е. в каждой запрещенной полосе между двумя соседними разрешенными зонами (само собой разумеется, что сказанное справедливо до тех пор, пока $W < U_0$, т. е. $\xi < q$). Исключение возможно только для первого интервала $0 < \xi < \pi$, если не выполнено условие

$$\frac{q^2}{2p} - q < 1. \quad (20)$$

Интересующие нас поверхностные состояния соответствуют тем из решений ξ_n , которые удовлетворяют условию (18).

§ 2. Трехмерная решетка. Потенциальный барьер на поверхности кристалла

В трехмерном случае решения волнового уравнения внутри решетки имеют вид

$$\Psi = e^{\pm i(\alpha_1 x \pm \alpha_2 y \pm \alpha_3 z)} u(x, y, z), \quad (21)$$

причем функция $u(x, y, z)$ периодична по всем переменным и, вообще говоря, не может быть представлена в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит от одной координаты x , y или z . Далее, следует иметь в виду, что в трехмерном случае разрешенные зоны могут перекрываться (т. е. может случиться, что $W_n < W'_{n-1}$). Однако в остальном картина не очень отличается от той, какую мы установили для одномерной решетки.

Значения величины α_1 для поверхностных состояний комплексны. Если α_1' есть комплексное собственное значение величины α_1 , то в трехмерном случае имеется очень большое, пропорциональное площади поверхности число поверхностных состояний, отвечающих почти такому же значению α_1 и отличающихся друг от друга, вообще говоря, только зависимостью волновой функции Ψ от переменных y и z .

Чтобы оценить число этих состояний по порядку величины, рассмотрим случай, когда потенциал решетки зависит только от координаты x и не зависит от y и z . В этом случае можно разбить функцию Ψ на два множителя:

$$\Psi = e^{\pm i\alpha_1 x} u(x) e^{\pm i(\alpha_2 y \pm \alpha_3 z)}.$$

Приходящееся на единицу площади число различных двумерных волн де Бройля $e^{\pm i(\alpha_x y \pm \alpha_z z)}$, у которых длина волны превышает величину λ , равно π/λ^2 . Длина волны де Бройля $\lambda=4 \cdot 10^{-7}$ см соответствует энергии электрона около 0,1 эв. Отсюда получается, что число поверхностных состояний, лежащих в энергетическом интервале такого порядка величины, составляет примерно 10^{13} на 1 см².

В кристалле при $T=0^\circ$ К все низшие электронные состояния, энергия которых не превосходит энергии Ферми ϵ_0 , полностью заняты электронами. Однако при этом, вообще говоря, можно было бы учитывать и поверхностные уровни, заполнение которых электронами привело бы к появлению поверхностного заряда, равного по нашей оценке примерно 10^{13} электронов на 1 см². Таким образом, наше рассмотрение явно приводит к бессмысленному результату. Следует, однако, учесть, что периодическое поле в кристалле определяется также и электронами. Если считать заданным положение атомных ядер в кристалле, то распределение электронов в основном состоянии соответствует минимуму потенциальной энергии.

Представим себе, например, что кристаллический образец расщеплен на две части вдоль плоскости $x=0$. Внутри кристалла электроны первоначально находились только в разрешенных зонах. Поскольку при расщеплении образовалась поверхность $x=0$, некоторые электроны перейдут из более высоких зон в энергетически более низкие поверхностные состояния. Поскольку кристалл в целом должен быть нейтральным, то при этом на поверхности образуется электрический двойной слой (избыток отрицательного заряда по направлению вовне и избыток положительного заряда по направлению внутрь кристалла)⁶. Но при этом внешний потенциал $U_0=q^2/a^2 x^2$ будет повышаться. По мере повышения U_0 (а соответственно и q) ограничения, налагаемые условием (17)⁸, становятся все более существенными и низшие поверхностные состояния выключаются одно за другим. Связанные на поверхности электроны при этом переходят на более высокие поверхностные уровни. Увеличение заряда на поверхности и соответствующее увеличение U_0 (и соответственно q) будет идти таким путем до тех пор, пока не будут выключены все незаполненные поверхностные состояния, энергия которых меньше,

⁶ При заданном отрицательном заряде поверхности образование такого двойного слоя, очевидно, соответствует меньшей энергии, чем равномерное распределение положительного заряда в объеме тела. Поэтому положительно заряженные «дырки» в электронном распределении, число которых равно числу связанных на поверхности электронов, будут скопляться близко к поверхности.

⁷ Точнее говоря, потенциальная энергия электронов во внешнем пространстве.

⁸ Это условие выведено нами в весьма частных предположениях, однако и в общем случае, по-видимому, условие такого вида играет определяющую роль.

чем энергия Ферми ε_0 . Это произойдет при

$$q^2 \sim a^2 \chi^2 \varepsilon_0 + p^2 \quad (22)$$

(ср. уравнения (8) и (18)). Соотношение (22) связывает работу выхода электронов $U_0 - \varepsilon_0$ с величиной p^2 , которую можно рассматривать как меру удерживающих сил, действующих на электроны со стороны атомов кристалла. Действительно, уравнение (22) с помощью (6) и (13) может быть переписано следующим образом:

$$U_0 - \varepsilon_0 \sim \frac{p^2}{a^2 \chi^2} = \frac{\chi^2}{4} [\lim (U_1 b)]^2. \quad (23)$$

Из сказанного, однако, никоим образом не следует, что образование потенциального барьера на границе кристалла может происходить только указанным образом. Если совершенно отвлечься от поверхностных состояний, то облако отрицательного заряда, созданное электронами кристалла на его поверхности, простирается во внешнее пространство дальше, чем облако положительного заряда, созданное атомными ядрами, так что на поверхности образуется двойной слой, и как раз такой, что отрицательные заряды лежат снаружи⁹. Чтобы оценить порядок величины потенциального барьера, вызываемого этим двойным слоем, можно исходить из предельного случая совершенно свободных электронов проводимости, что, конечно, особенно пригодно для случая металлов¹⁰. Только в случае, если высота этого потенциального барьера имеет меньшее значение, чем то, которое получается из уравнения (22), осуществляется описанный выше механизм заполнения поверхностных состояний.

§ 3. Внутренний фотоэффект и накопление поверхностного заряда у кристаллических диэлектриков

В трехмерной решетке разрешенные зоны могут перекрываться. Диэлектрики отличаются от металлов тем, что при $T=0^\circ$ К все зоны в диэлектрике, от первой до зоны определенного номера m включительно, целиком заполнены электронами, а высшие зоны, напротив, остаются незаполненными и не перекрываются с заполненными¹¹. Поэтому электронная проводимость в диэлектриках может возникнуть только при возбуждении электронов,

⁹ Эксперименты по интерференции электронов в некоторых диэлектриках дают отрицательные значения для среднего потенциала внутри диэлектрика, но, как указал Е. Рупп, отрицательный знак потенциала, по-видимому, объясняется тем, что падающие электроны застревают на поверхности (ср. § 3), и это приводит к образованию поверхностного заряда (ср. *E. Rupp. Leipziger Vorträge*, 1930, S. 9).

¹⁰ Ср. работу И. Тамма и Д. Блохинцева, которая появится в этом журнале позднее (готовится к печати). (См. наст. том, работу 17.— *Прим. ред.*.)

¹¹ Ср., например, *F. Bloch. Phys. Z.*, 1931, 32, S. 881. Доклад на заседании Физического общества, 1931.

например, светом (внутренний фотоэффект). Если электрон переводится в зону с номером $^{12} n > m$, он становится свободным в том смысле, что теперь он уже может перейти в большое число близких по энергии и незаполненных состояний, соответствующих различным скоростям движения электрона.

Если теперь величина потенциального барьера на поверхности такова, что выполняется соотношение (22), то самыми глубокими незаполненными электронными состояниями в кристалле будут поверхностные состояния, лежащие между m -й и $m+1$ -й разрешенными зонами. Или же это могут быть такие электронные состояния, которые соответствуют появлению «положительных дырок», о чем упоминалось в § 2 (см. примечание на стр. 223); эти дырки образуются при переходе электронов из более высоких заполненных зон в более низкие поверхностные состояния. Такие дырки расположены вблизи от поверхности. В обоих рассмотренных случаях мы можем возникающие состояния называть поверхностными.

Пусть теперь на поверхность диэлектрика падают электроны, энергия которых W , разумеется, превышает U_0 . В зависимости от того, какой области энергетического спектра в кристалле соответствует энергия W падающего электрона — запрещенной или разрешенной зоне, электрон будет либо полностью отражен, либо частично отражен, а частично проникнет в кристалл. Однако, если падающие электроны на поверхности испытывают неупругие соударения или некоторое число таких соударений, можно ожидать, что при этом они попадут на самые низкие из еще не занятых уровней энергии, следовательно на поверхностные уровни. Таким образом, в том случае, если падающие электроны испытывают на поверхности неупругие соударения и при этом теряют достаточную энергию, они могут остаться на поверхности.

Насколько можно судить по имеющимся наблюдениям, существуют кристаллические диэлектрики (например, алмаз, каменная соль и т. д.) со следующими свойствами. При облучении видимым или ультрафиолетовым светом 13 кристалл обнаруживает электронную проводимость (внутренний фотоэффект). Это говорит о том, что электроны, возникшие под действием света в толще кристалла, являются в определенном смысле *свободными*. Если же свободные электроны падают на кристалл *извне* 14 , то они (или по крайней мере их заметная часть) застревают на поверхности, и это приводит к образованию на поверхности отрицательного заряда.

По-видимому, о рассматриваемых явлениях еще рано говорить как о надежно установленных на опыте. Тем не менее мы склонны

¹² Одновременно в электронном распределении заполненных зон появляется дырка, которая также дает вклад в проводимость диэлектрика.

¹³ Примером может служить NaCl при условии, что перед экспериментом кристалл подвергается облучению рентгеновскими лучами.

¹⁴ Например, при облучении кристалла катодными лучами (ср. стр. 225) или путем наложения электрического поля, которое вырывало бы электроны из расположенного поблизости металла и направляло бы их на кристалл, и т. д.

предположить, что различие между свободной подвижностью (в определенном смысле) фотоэлектронов в толще кристалла и удержанием на поверхности кристалла электронов, влетающих снаружи¹⁵, может быть объяснено, если принять во внимание поверхностные состояния и их положение в энергетическом спектре диэлектрических кристаллов. Однако для того, чтобы доказать это предположение, нужно сперва вычислить, какой процент падающих извне электронов испытывает на поверхности неупругие соударения и садится на низшие поверхностные уровни, а затем результаты этих вычислений сравнить с экспериментом.

Можно ожидать, что связанные на поверхности электроны остаются подвижными вдоль поверхности. Было бы желательно исследовать экспериментально предполагаемую поверхностную проводимость электрически заряженных диэлектриков.

Напрашивается мысль о том, что электризация трением может быть поставлена в связь с существованием поверхностных уровней. Однако электризация трением имеет место не только для рассмотренных нами кристаллических диэлектриков. В аморфных же диэлектриках картина совсем иная, поскольку наличие энергетических зон с резкими границами есть следствие регулярной структуры тела. Насколько можно судить, внутренний фотоэффект в аморфных диэлектриках не имеет места, так что электроны в аморфных диэлектриках не являются свободно подвижными¹⁶.

Настоящая заметка возникла в основном во время моего пребывания в феврале в Ленинградском физико-техническом институте. В этой связи я хотел бы сердечнейшим образом поблагодарить проф. А. Иоффе и Я. Френкеля за их любезное гостеприимство и многочисленные вдохновляющие обсуждения.

*Москва, Научно-исследовательский институт физики
Московского государственного университета*

Поступила
7 мая 1932 г.

Примечание. Выдвинутая в этой работе идея о существовании поверхностных состояний, названных впоследствии «таммовскими» (говорят также об «уровнях Тамма»), оказалась исключительно важной для физики поверхностных явлений. Обзор современного состояния проблемы таммовских состояний (и поверхностных состояний иной природы) содержится в книге С. Дэвисона и Дж. Левина «Поверхностные (таммовские) состояния». М., «Мир», 1973.

¹⁵ Неоднократно высказывалось такое объяснение этого явления: электроны, падающие на кристалл, захватываются потенциальной ямой, существующей на поверхности диэлектрика. Такое объяснение, однако, явно неверно (ср. § 2, в особенности стр. 223—225).

¹⁶ Тем не менее явления, происходящие в аморфных и кристаллических телах, не так сильно различаются, как это можно было бы думать. В основном речь идет о том, что в этих двух случаях целесообразны различные приближения и упрощения; однако может быть проведен непрерывный переход от поликристаллов к твердым телам. Насколько я могу судить по обсуждениям этого вопроса с проф. Я. Френкелем, он предполагает вскоре подробнее обсудить эти вопросы в отдельной статье.

О РАБОТЕ ВЫХОДА ЭЛЕКТРОНОВ ИЗ МЕТАЛЛА ¹

Совместно с Д. И. Блохинцевым

§ 1. Введение

Вычисление работы выхода χ , основанное на методе «согласованного поля» Хартри—Фока и отвлекающееся от атомистичной структуры металла, ведет в первом приближении к тем же результатам, что и метод Ферми—Томаса, именно: скачок потенциала на границе металла оказывается равным нулевой энергии электронов, и вместе с тем $\chi=0$. Напротив, если вычислять по этому же методу работу сил изображения, которая производится при удалении электрона из металла, то получаются значения χ , находящиеся в удовлетворительном совпадении с опытом.

1. Известно, что работа выхода χ электронов из металла может быть объяснена либо наличием скачка потенциала на границе металла, либо действием сил электрического изображения. В классической физике ни одно из этих представлений не могло привести к количественной теории; так, например, работа выхода, обусловленная силами изображения, существенно зависит от радиуса электрона. Последующее представляет попытку приложения методов квантовой механики к определению работы выхода.

Так как речь идет о понимании общих соотношений, то в последующем мы совсем отвлекаемся от атомистичной структуры металла и принимаем равномерное распределение плотности положительных ионных зарядов; температура принимается равной 0°K . В этом приближении свойства металла характеризуются просто числом n свободных электронов на единицу объема металла.

2. Сперва мы отвлекаемся от силы изображения и ставим своей задачей определение высоты U_a скачка потенциала на поверхности металла. В отсутствие сил изображения имеет место соотношение

$$\chi = U_a - E_0, \quad (1)$$

где через E_0 обозначена нулевая энергия электронов ².

¹ ЖЭТФ, 1933, 3, 77. Статья является переводом с немецкого оригинала. Предварительное сообщение об этой работе появилось в *Z. Phys.*, 1932, 77, 774 (см. также ЖЭТФ, 1933, 3, 31; *Phys. Z. Sowjetunion*, 1933, 3, 170, *Прим. ред.*).

² Под нулевой энергией электронов E_0 в последующем будет всегда пониматься наибольшее значение энергии электрона при $T=0^\circ \text{K}$.

В 1928 г. Френкель³ для отыскания распределения электронов у поверхности металла применил известный способ Томаса — Ферми и получил для U_a значение E_0 и, таким образом, для χ — значение нуль. Этот результат понятен непосредственно, именно: если потенциальная энергия $U(x)$ какого-либо электрона на определенном расстоянии от поверхности металла d равна E_0 , то на основании положенных в основу метода Ферми допущений ни один электрон не может находиться на большем расстоянии от металла. Электрический потенциал φ , а вместе с ним и потенциальная энергия $U(x)$ остаются, таким образом, при $x \geq d$ постоянными (если, конечно, металл электрически нейтрален) и, следовательно, не могут быть больше E_0 .

Можно, однако, думать, что в волновой механике проникновение электронного облака в классически запрещенные области отрицательной кинетической энергии вне металла обусловит положительную работу выхода (образование двойного электрического слоя на поверхности металла). Чтобы испытать справедливость этого предположения, мы предприняли определение распределения заряда электронов на поверхности металла по методу Хартри — Фока и применили к решению соответствующей вариационной проблемы метод Ритца.

Металл рассматривается как заполняющий полупространство $x \leq 0$. Исходным пунктом вычисления является некоторая подходящая функция $U(x, \alpha_p)$, которая зависит от некоторого числа параметров α_p и которая должна в нулевом приближении аппроксимировать действующее на электрон потенциальное поле. В этом поле $U(x, \alpha_p)$ можно определить собственные функции отдельных электронов $\psi(x, \alpha_p)$, а также и плотность электрического заряда $\rho(x, \alpha_p)$, которая отвечает совокупности всех электронов проводимости металла. Затем следует подставить собственные функции $\psi(x, \alpha_p)$ в фоковский интеграл энергии⁴ и определить те значения α_{p0} параметров α_p , которые отвечают минимуму этого интеграла. При этом можно рассматривать энергию не всего бесконечного металла, а бесконечной призмы с поперечным сечением L^2 и распространенной перпендикулярно поверхности металла от $x = -\infty$ до $x = +\infty$. Величина энергии этой «основной призмы» хотя и бесконечна, но может быть разложена на две части (по крайней мере, когда отвлекаются от энергии обмена)⁵, из которых одна конечна, а другая бесконечна, но не зависит от вида потенциальной функции $U(x, \alpha_p)$. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением только первой, конечной части интеграла энергии.

³ J. Frenkel. Z. Phys., 1928, 51, 232.

⁴ V. Fock. Z. Phys., 1930, 61, 126, уравнение (93).

⁵ При вычислении сил изображения мы не будем пренебрегать энергией обмена.

Если значения α_{p0} определены, то электрический потенциал φ на поверхности металла можно найти по уравнению Пуассона из полной плотности электричества $\rho = \rho_+ + \rho_-$, где ρ_+ — плотность положительных зарядов. Если аппроксимировать потенциальную функцию $U(x, \alpha_p)$ прямоугольным скачком потенциала $U=0$ при $x < s$ и $U = U_a = \text{const}$ при $x > s$ ⁶ и отвлечься от энергии обмена, то вычисления (§ 4 и 5) ведут к тому же результату, что и метод Ферми—Томаса; минимум энергии отвечает исчезновению работы выхода ($U_a = E_0$). Электростатическая энергия металла тем меньше, чем выше скачок потенциала U_a , т. е. чем менее проникает электронное облако во внешнее пространство, тем менее отделены друг от друга отрицательные и положительные заряды у поверхности металла. Но для окончательного результата решающим является то обстоятельство, что электроны в области скачка потенциала обладают отрицательной кинетической энергией так, что распространение электронного облака при снижении скачка ведет к снижению полной энергии. Из обсуждения следует, что монотонное падение энергии при уменьшении U_a от ∞ до E_0 есть результат наших вычислений, не зависящий ни от пренебрежения энергией обмена, ни от принятого нами специального предположения о форме потенциальной функции $U(x, \alpha_p)$; только учет атомистичной структуры может привести к уточнению результатов.

3. Теперь вернемся к силе изображения. Понятие силы электрического изображения в квантовой механике, собственно говоря, не может быть точно определено благодаря соотношению неточности⁷ и нелокализваемости электрона.

Образование определенного, обусловленного силой изображения равновесного распределения зарядов, индуцированных электроном на поверхности металла, отвечает некоторому времени, в течение которого электрон, имевший в начальный момент определенную координату, меняет свое положение неконтролируемым образом⁸.

Напротив, понятие произведенной силой изображения при удалении электрона в бесконечность работы имеет полный смысл. Сравним, например, с работой ионизации атома I . Если принять, в смысле хартри-фоковского приближения, что каждому электрону в атоме отвечает определенная «квантовая орбита» ψ_k , то процесс ионизации можно разложить на два шага. Сперва удаляют наи-

⁶ Скачок потенциала ни в коем случае не совпадает точно с поверхностью металла ($x=0$), но находится от нее на некотором расстоянии s порядка атомных расстояний.

⁷ Сейчас используется термин «соотношение неопределенности». — *Прим. ред.*

⁸ Напротив, классическое понятие силы изображения при вычислении работы выхода *ионов* благодаря их большой массе остается применимым. Выяснению этого, так же как и некоторых других вопросов о понятии силы изображения, существенно способствовали некоторые дискуссии с проф. Я. Френкелем.

более слабо связанный электрон атома, в то время как остальные электроны атомного остова предполагаются удерживающимися на их первичных «квантовых орбитах» ψ_k ; соответствующая работа пусть будет I' . Затем освобождают оставшиеся электроны так, что они переходят в новое, соответствующее невозбужденному иону квантовое состояние. При этом освобождается энергия I'' так, что $I = I' + I''$. Часть I' работы ионизации отвечает в случае металла части $U_a - E_0$ работы выхода; I'' , напротив, отвечает работе сил электрического изображения. Полная работа выхода может быть, таким образом, отлична от нуля и в случае $U_a = E_0$ и (в полной аналогии к работе ионизации) будет равна абсолютному значению разности ΔW между энергией незаряженного металла и энергией металла с зарядом $+e$ (если электрический потенциал нормирован таким образом, что исчезает в бесконечности).

Исходя опять из произвольной потенциальной функции $U(x, \alpha)$ и вычисляя те значения параметров α_p , которые отвечают минимуму энергии электрически нейтрального металла и соответственно заряженного металла, можно совершенно общим способом (§ 6) показать, что $\Delta W = e\varphi_0$, где φ_0 — значение электрического потенциала φ на границе металла $x=0$, вычисленного из распределения плотности электрического заряда $\rho = \rho_-(x, \alpha_p) + \rho_+$ для незаряженного металла. Этот результат допускает крайне простое наглядное толкование; чтобы зарядить металл, нужно принести из бесконечности элементарный заряд $+e$ на его поверхность $x=0$; необходимая для этого работа, если отвлечься от важных в действительности сил электрического изображения, равна

$$\Delta W = e\varphi_0. \quad (2)$$

Выбирая опять в качестве исходной приближенной потенциальной функции $U(x, \alpha_p)$ прямоугольный скачок потенциала и вычисляя отсюда φ_0 , получаем согласно (2) для работы выхода электронов χ из различных металлов значения правильного порядка величины. Но чтобы достигнуть несколько лучшего приближения к фактическому виду потенциала φ на поверхности металла, можно для вычисления φ_0 применить метод Ферми—Томаса.

Этим путем из (2) получается, что работа выхода равна средней кинетической энергии электронов (при $T=0^\circ\text{K}$), вычисленной по *зоммерфельдовской* теории:

$$\chi = e\varphi_0 = \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{5} E_0. \quad (3)$$

Выражая E_0 через число Z свободных электронов на атом, атомный объем V металла и универсальные постоянные, получаем

$$\chi(\text{эВ}) = 15,6 \left(\frac{Z}{V} \right)^{2/3}, \quad (4)$$

где V измерено в см^3 .

Вычисленные согласно (4) для различных металлов значения χ сопоставлены графически на рис. 2 и сравнены с экспериментально измеренными.

Порядок величины χ , так же как и ход χ в периодической системе элементов, находится в удовлетворительном совпадении с опытом. Для щелочных металлов различия между вычисленными и измеренными (впрочем, крайне неточными) значениями лежат частью в пределах ошибок измерений, однако при грубости употребляемых нами приближений это нужно приписать скорее случайности. Для других металлов эта разница достигает 30%.

4. При грубости нашей модели металла и при пользовании приближенным методом Ферми вряд ли можно ожидать более близкого совпадения с опытом, нежели то, которое показывает таблица на стр. 255 и рис. 2, так что нам кажется вполне оправданным то заключение, что работа выхода электронов существенно обусловлена силами электрического изображения, а не скачком потенциала на границе металла. Отклонения от формулы (4), обусловленные в основном атомистичной структурой металла, оказываются наиболее важными для металлов с малым атомным объемом.

Вместе с этим возникает задача исследования различных поверхностных явлений (термоионная эмиссия, фотоэффект, контактные потенциалы и т. д.) при том допущении, что работа выхода обусловлена силами изображения, в то время как обычно в квантовой механике принимают, что работа выхода обусловлена сильным скачком потенциала $U_a = \chi + E_0$. Конечно, энергетические соотношения между различными поверхностными явлениями не зависят от природы работы выхода, напротив того, теоретические высказывания о вопросах, связанных с проницаемостью фото- и термоионных токов и т. д., о зависимости этих токов от поверхностных слоев чужих атомов и т. д. могут весьма существенно зависеть от этих допущений.

Мы надеемся, что сможем в ближайшее время ближе и подробнее обсудить эти вопросы.

§ 2. Вариационная проблема

Общее выражение для энергии атомной системы было установлено Фоком. Мы будем рассматривать только тот случай, когда на каждой «квантовой орбите» находятся два электрона, как это фактически имеет место в металлах при низких температурах. Если имеется всего N электронов, то только половина «квантовых орбит» населена электронами. Фоковский интеграл энергии можно теперь написать в следующей форме ⁹:

⁹ Ср. *V. Fock*, 1. с. уравнение (93). Фок употребляет рациональную систему единиц Хартри, мы же, напротив, — обыкновенные единицы СГС.

$$W = 2 \sum_{l=1}^{\frac{1}{2}N} \int \psi_l^*(\mathbf{r}) H \psi_l(\mathbf{r}) d\tau + 2e^2 \iint \sum_{l=1}^{\frac{1}{2}N} |\psi_l(\mathbf{r}_1)|^2 \sum_{m=1}^{\frac{1}{2}N} |\psi_m(\mathbf{r}_2)|^2 \times \\ \times \frac{d\tau_1 d\tau_2}{r_{12}} - e^2 \iint \left| \sum_{l=1}^{\frac{1}{2}N} \psi_l^*(\mathbf{r}_1) \psi_l(\mathbf{r}_2) \right|^2 \frac{d\tau_1 d\tau_2}{r_{12}} \quad (5)$$

($d\tau$ есть $dx dy dz$). При этом оператор H имеет следующее значение:

$$H = -\frac{1}{\mu} \nabla^2 - e\varphi_+(\mathbf{r}), \quad \mu = \frac{2m}{h^2}, \quad (6)$$

где через $\varphi_+(\mathbf{r})$ обозначен предполагающийся данным потенциал положительных ионов (под e понимается значение элементарного заряда $e > 0$). Если соответствующим образом обозначить через $\varphi_-(\mathbf{r})$ потенциал отрицательных электронных зарядов, а через $\rho_-(\mathbf{r})$ — плотность этих зарядов, то имеем

$$\varphi_-(\mathbf{r}_1) = \int \frac{\rho_-(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2, \quad \rho_-(\mathbf{r}) = -2e \sum_{l=1}^{\frac{1}{2}N} |\psi_l(\mathbf{r})|^2. \quad (7)$$

Полная энергия электронов системы W складывается аддитивно из кинетической и потенциальной энергий T и V и из энергии обмена A . Именно, принимая во внимание (6) и (7), получаем из (5)

$$W = T + V + A, \quad (8)$$

$$T = -\frac{2}{\mu} \sum_{l=1}^{\frac{1}{2}N} \int \psi_l^*(\mathbf{r}) \nabla^2 \psi_l(\mathbf{r}) d\tau, \quad (9)$$

$$V = \int \rho_-(\mathbf{r}) \varphi_+(\mathbf{r}) d\tau + \frac{1}{2} \int \rho_-(\mathbf{r}) \varphi_-(\mathbf{r}) d\tau, \quad (10)$$

$$A = -e^2 \iint \left| \sum_{l=1}^{\frac{1}{2}N} \psi_l^*(\mathbf{r}_1) \psi_l(\mathbf{r}_2) \right|^2 \frac{d\tau_1 d\tau_2}{r_{12}}. \quad (11)$$

Мы преобразуем несколько выражение для потенциальной энергии V . При предпринимаемой в последующем вариации энергии W положение ионов, а вместе с тем значения ρ_+ и φ_+ рассматриваются как данные и постоянные (ρ_+ означает плотность ионных зарядов). Поэтому вполне позволительно к выражению (10) присоединить еще постоянный аддитивный член $\frac{1}{2} \int \rho_+ \varphi_+ d\tau$:

$$V = \int \left(\rho_- \varphi_+ + \frac{1}{2} \rho_- \varphi_- \right) d\tau + \frac{1}{2} \int \rho_+ \varphi_+ d\tau.$$

Замечая известное соотношение¹⁰

$$\int \rho_- \varphi_+ d\tau = \int \rho_+ \varphi_- d\tau = \frac{1}{2} \int (\rho_- \varphi_+ + \rho_+ \varphi_-) d\tau,$$

получаем

$$V = \frac{1}{2} \int \rho \varphi d\tau, \quad (10')$$

где положено

$$\rho = \rho_- + \rho_+, \quad \varphi = \varphi_- + \varphi_+. \quad (12)$$

Вместе с тем в последующем под V мы будем понимать не выражение (10), а полную электростатическую энергию (10') всей системы (электронов и ионов). Это имеет то преимущество, что при всех дальнейших применениях выражение (10), также и добавленный член $\frac{1}{2} \int \rho_+ \varphi_+ d\tau$ хотя и оказываются бесконечными, но их сумма (10') остается конечной.

Те функции $\psi_l(\mathbf{r})$, которые удовлетворяют вариационному уравнению

$$\delta W = 0 \quad (13)$$

и условиям ортогональности и нормировки

$$\int \psi_l^*(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}) d\tau = \delta_{lm}, \quad (14)$$

образуют (приближенные) решения квантовой задачи и равны собственным функциям электронов. Применяя приближенный метод Ритца к решению вариационной задачи, мы поступаем следующим образом: мы аппроксимируем действующее на электрон поле подходящей функцией $U(\mathbf{r}, \alpha_p)$, где α_p ($p=1, 2, 3, \dots$) означают некоторое число предварительно неопределенных параметров. Нормированные собственные функции электрона в поле $U(\mathbf{r}, \alpha_p)$ обозначаем через $\psi_l(\mathbf{r}, \alpha_p)$:

$$\{\nabla^2 + \mu [E_l(\alpha_p) - U(\mathbf{r}, \alpha_p)]\} \psi_l(\mathbf{r}, \alpha_p) = 0, \quad (15)$$

и, кроме того, они должны удовлетворять условиям (13). Затем, выбирая первые $N/2$ из этих функций (т. е. те, которые отвечают

¹⁰ Это соотношение, как известно, следует из уравнений Пуассона

$$\nabla^2 \varphi_+ = -4\pi \rho_+ \quad \text{и} \quad \nabla^2 \varphi_- = -4\pi \rho_-$$

и формулы Грина

$$\int (\varphi_+ \nabla^2 \varphi_- - \varphi_- \nabla^2 \varphi_+) d\tau = \int \left(\varphi_+ \frac{\partial \varphi_-}{\partial n} - \varphi_- \frac{\partial \varphi_+}{\partial n} \right) dS$$

при условии, что справа интеграл по поверхности исчезает. В исследуемых впоследствии случаях это условие выполнено, хотя φ_+ и φ_- на бесконечно удаленных частях поверхности интеграции S становятся бесконечными.

наименьшим значениям энергии E_l) и вставляя их в интеграл энергии (5) или (8), определяем те значения α_{p0} параметров α_p , которые отвечают минимуму интеграла (уравнение (13))¹¹. Тогда функции $\psi(\mathbf{r}, \alpha_{p0})$ образуют первое приближение к точным функциям проблемы. Можно продолжать разыскивать дальнейшие приближения, но мы в последующем ограничиваемся этим первым приближением.

Нужно еще заметить, что на основании (15), (16) и (7) кинетическая энергия электронов (9) может быть выражена следующим образом:

$$T = 2 \sum_{l=1}^{\frac{1}{2}N} \int \psi_l(\mathbf{r}) \{E_l(\alpha_p) - U(\mathbf{r}, \alpha_p)\} \psi_l^*(\mathbf{r}) d\tau = \\ = 2 \sum_{l=1}^{\frac{1}{2}N} E_l(\alpha_p) + \frac{1}{e} \int U(\mathbf{r}, \alpha_p) \rho_-(\mathbf{r}, \alpha_p) d\tau. \quad (9')$$

§ 3. Бесконечный металл

Мы будем рассматривать очень упрощенную модель металла. Пусть металл будет бесконечным и заполняющим полупространство $x \leq 0$. Мы отвлекаемся от атомистичной структуры металла. Заряд положительных ионов мы мыслим, таким образом, равномерно распределенным во всем полупространстве $x \leq 0$ с постоянной плотностью $\rho_+ = \rho_0$ (для $x \leq 0$) и $\rho_+ = 0$ (для $x > 0$).

Мы вычисляем энергию W бесконечной призмы (от $x = -\infty$ до $x = +\infty$), расположенной перпендикулярно поверхности металла, с поперечным сечением, представляющим собой квадрат со стороной L . Эта призма в последующем будет коротко называться «основной призмой».

При этом вычислении мы исходим из собственных функций $\psi(\mathbf{r}, \alpha_p)$ уравнения Шредингера (15). Мы требуем при этом, чтобы потенциальная функция $U(\mathbf{r}, \alpha_p)$ соответственно нашей модели удовлетворяла следующим условиям: 1) $U(\mathbf{r}, \alpha_p)$ должна зависеть только от одной координаты x ; 2) $U(\mathbf{r}, \alpha_p)$ должна при $x \rightarrow +\infty$ (соответственно при $x \rightarrow -\infty$) стремиться к постоянным предельным значениям¹². Мы выбираем несущественные аддитивные постоянные таким образом, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x, \alpha_p) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x, \alpha_p) = U_a = \text{const.} \quad (16)$$

¹¹ Мы рассматриваем невозбужденное состояние системы.

¹² Внутри металла, вдали от его поверхности, потенциал становится постоянным, если отвлечься от неравномерностей, вызываемых атомистичной структурой.

Постоянная U_a должна быть положительной и не меньшей, чем нулевая энергия E_0 (чтобы воспрепятствовать выходу электронов из металла при нормальных условиях).

В последующем оказывается целесообразным выделить один из параметров α_p так, чтобы вместо $U(x, \alpha_p)$ можно было написать $U(x-s, \alpha_p)$. При этом s означает сдвиг кривой потенциала относительно $x=0$:

$$U(x', \alpha_p), \quad x' = x - s. \quad (17)$$

Так как $U(\mathbf{r}, \alpha_p)$ зависит только от x , то переменные в уравнении Шредингера (15) могут быть разделены:

$$\psi_l(\mathbf{r}, \alpha_p) = \psi_{km}(\mathbf{r}, \alpha_p) = u_k(x, \alpha_p) v_m(y, z). \quad (18)$$

Функцию ψ в ее зависимости от y и z подчиняем обычным условиям «циклической решетки», т. е. требуем, чтобы при смещении конца вектора \mathbf{r} вдоль оси y или z на целое число основных отрезков L функция ψ оставалась неизменной; тогда

$$v_m(y, z) = \frac{1}{L} e^{i(p_my + q_mz)}, \quad p_m = \frac{2\pi n_{2m}}{L}, \quad q_m = \frac{2\pi n_{3m}}{L},$$

где n_{2m} и n_{3m} — целые числа. При этом функции v нормированы в основном квадрате L^2 :

$$\int_0^L dy \int_0^L dz v_l v_m^* = \delta_{lm}.$$

Если электрон находится в состоянии m , то кинетическая энергия его движения в плоскости yz равна

$$\frac{1}{\mu} (p_m^2 + q_m^2) = \frac{4\pi^2}{\mu L^2} (n_{2m}^2 + n_{3m}^2).$$

Отсюда известным образом следует, что число различных состояний $v_m(y, z)$, энергия которых меньше E , равно

$$\frac{1}{4\pi^2} \mu L^2 E.$$

Если обозначить через E' энергию, отвечающую движению вдоль оси x

$$E = E'_k + \frac{1}{\mu} (p_m^2 + q_m^2),$$

то получаем в целом $\frac{1}{4\pi^2} \mu L^2 (E_0 - E_k)$ состояний, полная энергия которых E не превосходит нулевой энергии E_0 и которые описываются собственными функциями $\psi(\mathbf{r})$, различающимися только зависимостью от y и z , но не от x , т. е. содержащими общий фактор

$u_k(x)$. Так как, наконец, $|v_m(y, z)|^2 = 1/L^2$, то сумму, входящую в (7), можно написать следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_-(\mathbf{r}) &= -2e \sum_l |\psi_l(\mathbf{r})|^2 = -2e \sum_{k, m} |u_k(x)|^2 |v_m(y, z)|^2 = \\ &= -\frac{e\mu}{2\pi} \sum_k (E_0 - E'_k) |u_k(x)|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Электронная плотность $\rho_-(\mathbf{r})$ зависит, таким образом, только от x . Из (15) и (18) для функций $u_k(x)$ следует уравнение

$$\frac{\partial^2 u_k(x')}{\partial x'^2} + \mu(E'_k - U(x', \alpha_p)) u_k(x') = 0, \quad (20)$$

где вместо x введена вспомогательная переменная $x' = x - s$. Так как это уравнение в нашем случае обладает непрерывным спектром, то в (19) следует заменить суммирование по k интеграцией. Если нормировать функции $u_k(x')$ в отношении параметра k (но, например, не по энергии), т. е. подчинить собственные функции $u_k(x')$ вместо условий (14) условиям, которые имеют место в случае непрерывного спектра

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u_k^*(x') dx' \int_{l'-\Delta l}^{l'+\Delta l} u_l(x') dl = \\ = \begin{cases} 1, & \text{когда } l' - \Delta l < k < l' + \Delta l, \\ 0, & \text{когда } k' < l' - \Delta l \text{ или } k' > l' + \Delta l, \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

то вместо (19) получается

$$\rho_-(x) = -\frac{e\mu}{2\pi} \int (E_0 - E') |u_k(x)|^2 dk. \quad (19')$$

Теперь рассмотрим несколько подробнее собственные функции $u_k(x')$ уравнения (20). Так как потенциальная функция $U(x', \alpha_p)$ при $x \rightarrow -\infty$ согласно (16) обращается в нуль, то общее решение этого уравнения в области больших отрицательных x имеет вид

$$u_k(x') = A_k(e^{ikx'} + a_k e^{-ikx'}),$$

где A_k и a_k — постоянные и k действительно. Знак k не имеет значения, и мы будем считать $k > 0$. Каждому значению k отвечают два независимых решения $u_k(x')$. Из условия, что функция $u_k(x')$, будучи аналитически продолжена в область $x \gg 0$, должна обращаться в нуль, выбираются определенные решения из всех возможных. В стационарном состоянии не должно быть тока, перпендикулярного поверхности металла, отсюда легко вывести, что $|a_k|^2 = 1$ и что, следовательно, $u_k(x')$ имеет вид

$$u_k(x') = C_k \cos(kx' + \beta_k), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (22)$$

где β_k действительно. Значение β_k существенно зависит от вида потенциальной функции $U(x', \alpha_p)$ в области поверхности металла.

Из (20), (22) и (16) следует

$$E'_k = \frac{1}{\mu} k^2. \quad (23)$$

Если обозначить значение волнового числа k , соответствующего нулевой энергии E_0 , через k_0

$$E_0 = \frac{1}{\mu} k_0^2, \quad (23')$$

то из (19) получаем

$$\rho_-(x') = -\frac{e}{2\pi} \int_0^{k_0} (k_0^2 - k^2) |u_k(x)|^2 dk. \quad (19'')$$

Что же касается вида собственной функции $u_k(x')$ в области положительной бесконечности ($x \gg 0$), то видно, что согласно (16) и (23) уравнение (20) принимает форму

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x'^2} + (k^2 - k_a^2) u_k = 0,$$

где k_a — волновое число, соответствующее энергии U_a :

$$U_a = \frac{1}{\mu} k_a^2. \quad (23'')$$

Вместе с тем получается исчезающее в положительной бесконечности асимптотическое выражение для $u_k(x')$:

$$u_k(x') = D_k e^{-\eta_k x'}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (24)$$

где положено

$$\eta_k = \sqrt{k_a^2 - k^2} \quad (24')$$

и D_k — некоторая постоянная (заметим, что $U_a \geq E_0$ и, следовательно, $k_a \geq k_0$).

Нормирующий фактор C_k в асимптотическом выражении (22) для $u_k(x')$ при $x \rightarrow -\infty$ определяется поведением потенциальной функции $U(x', \alpha_p)$ в бесконечности, независимо от ее формы у поверхности металла, и равен $\sqrt{2/\pi}$.

Чтобы доказать это утверждение, разделим область изменения переменной x' на три части: 1) от $-\infty$ до $-x_0$, 2) от $-x_0$ до $+x_0$ и 3) от $+x_0$ до $+\infty$, причем x_0 означает некоторое положительное число. Выберем x_0 настолько большим, что вне интервала $-x_0 < x' < x_0$ функция $u_k(x')$ с достаточной точностью может быть за-

менена через ее асимптотическое выражение (22) и (24) ¹³. Условие (21) тогда дает (если еще ограничиться случаем $l - \Delta l < k < l + \Delta l$ и положить $l' = k$, $\Delta l = \Delta k$) ¹⁴

$$\lim_{\Delta k \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-x_0} C_k^* \cos(kx' + \beta_k) \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} C_l \cos(lx' + \beta_l) dx' dl + \int_{-x_0}^{+x_0} u_k^*(x') \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} u_l(x') dx' dl + \int_{+x_0}^{+\infty} D_k^* e^{-\eta_k x'} \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} D_l e^{-\eta_l x'} dx' dl \right\} = 1.$$

Последний член в скобках меньше, чем

$$2\Delta k |D_k|^2 e^{-\eta_k x_0} \int_{+x_0}^{+\infty} e^{-\eta_k x'} dx',$$

и исчезает при $\Delta k = 0$. То же самое имеет место и для второго члена, который по порядку величины равен

$$2\Delta k \int_{-x_0}^{+x_0} |u_k|^2 dx',$$

так что следует принять во внимание только первый член. C_l и β_l — регулярные функции l , так что в этом члене они могут быть заменены через C_k и β_k (так как $\Delta k \rightarrow 0$). Тогда получаем

$$\int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} C_l \cos(lx' + \beta_l) dl = C_k \frac{\sin[(k+\Delta k)x' + \beta_k] - \sin[(k-\Delta k)x' + \beta_k]}{x'} = \frac{2}{x'} \cos(kx' + \beta_k) \sin(\Delta kx')$$

и вместе с тем

$$\lim_{\Delta k \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u_k^*(x') \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} u_l(x') dx' dl = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} |C_k|^2 \int_{-x_0}^{+x_0} \{1 + \cos 2(kx' + \beta_k)\} \frac{\sin(\Delta kx')}{x'} dx'.$$

¹³ Ошибка, которая при этом допускается, может быть сделана как угодно малой потому, что доказательство остается также справедливым и при $x_0 \rightarrow +\infty$, если только выполнено условие

$$\lim_{\substack{x_0 \rightarrow \infty \\ \Delta k \rightarrow 0}} (x_0 \Delta k) = 0.$$

¹⁴ Ортогональность функций $u_k(x')$, получающаяся из (21) при $k < l' - \Delta l$ и $k > l' + \Delta l$, тривиальна.

Нужно выбрать C_k так, чтобы этот интеграл равнялся единице. Можно легко доказать, что¹⁵

$$\lim_{\Delta k \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2(kx' + \beta_k) \frac{\sin(\Delta kx')}{x'} dx' = 0$$

и

$$\lim_{\Delta k \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\Delta kx')}{x'} dx' = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $|C_k| = \sqrt{2/\pi}$, что и требовалось доказать.

Условие нормировки (21) будет, следовательно, выполнено, если собственные функции $u_k(x')$ выбраны таким образом, что при $x' \rightarrow -\infty$ $u_k(x')$ принимают следующий асимптотический вид:

$$u_k(x') = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kx' + \beta_k), \quad x' \rightarrow -\infty. \quad (22')$$

Вводя это в выражение (19''), получаем следующее асимптотическое выражение для электронной плотности:

$$\begin{aligned} \rho_-(x') &= -\frac{e}{\pi^2} \int_0^{k_0} (k_0^2 - k^2) \cos^2(kx' + \beta_k) dk = \\ &= -\frac{ek_0^3}{3\pi^2} - \frac{e}{2\pi^2} \int_0^{k_0} (k_0^2 - k^2) \cos 2(kx' + \beta_k) dk, \quad x' \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Второй член справа является осциллирующей функцией, и легко доказать, что его среднее значение равно нулю. Средняя плотность электронных зарядов в металле en (n означает число «свободных» электронов проводимости в единице объема металла), таким образом, равна

$$en = \frac{ek_0^3}{3\pi^2} = \rho_0. \quad (25)$$

Равенство en и $\rho_+ = \rho_0$ следует из того факта, что внутри металл электрически нейтрален. Вводя (25) в (23'), получаем известное выражение для нулевой энергии свободных электронов:

$$E_0 = \frac{\pi^2}{\mu^2} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{2/3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{2/3}.$$

Хотя внутренность бесконечного однородного металла электрически нейтральна, его поверхность может быть заряженной. Заряд, приходящийся на единицу поверхности металла (т. е. пол-

¹⁵ Ср. В. Фок. Начала квантовой механики. Л., 1932, стр. 157.

ный заряд основной призмы, деленный на L^2), обозначим через q . Тогда, очевидно, имеем

$$q(s, \alpha_p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = \\ = \int_{-\infty}^0 [\rho_0 + \rho_-(x-s, \alpha_p)] dx + \int_0^{+\infty} \rho_-(x-s, \alpha_p) dx \quad (26)$$

(заметим, что $\rho(x') = \rho(x-s)$). Если значение q задано, то (26) означает соотношение между возможными значениями параметров s и α_p , которое должно быть учтено при решении вариационной проблемы. Мы несколько преобразуем это соотношение, вводя вспомогательную переменную $x' = x-s$:

$$q(s, \alpha_p) = \int_{-\infty}^{-s} [\rho_0 + \rho_-(x', \alpha_p)] dx' + \int_{-s}^{+\infty} \rho_-(x', \alpha_p) dx'$$

и дифференцируя по s :

$$\frac{\partial q}{\partial s} = -[\rho_0 + \rho_-(-s, \alpha_p)] + \rho_-(-s, \alpha_p) = -\rho_0,$$

так что получается

$$q(s, \alpha_p) = -s\rho_0 + f(\alpha_p) = -s\rho_0 + q(0, \alpha_p), \quad (26')$$

где $f(\alpha_p) = q(0, \alpha_p)$ не зависит от s . Это соотношение понятно непосредственно. Изменение параметра s на δs означает соответствующее смещение потенциальной кривой $U(x-s, \alpha_p)$ и электронных зарядов $\rho_-(x-s, \alpha_p)$ вдоль оси x . Это смещение эквивалентно смещению поверхности металла $x=0$ на δs в противоположном направлении, которое, в свою очередь, может быть произведено посредством удаления слоя положительных зарядов толщиной δs и плотностью ρ_0 , что непосредственно отвечает уравнению (26'). Заметим, что это уравнение, принимая во внимание (26), может быть написано следующим образом:

$$\rho_0 s = q(0, \alpha_p) - q(s, \alpha_p) = \\ = \int_{-\infty}^0 [\rho_0 + \rho_-(x', \alpha_p)] dx' + \int_0^{+\infty} \rho_-(x', \alpha_p) dx' - q. \quad (26'')$$

В заключение еще одно замечание. Из предыдущего следует тот факт, что распределение плотности в спектре энергии электронов, поскольку выполнены условия (16), совсем не зависит от формы потенциальной функции $U(x-s, \alpha_p)$. Так что первый член в выражении (9') для кинетической энергии электронов T зависит

только от нулевой энергии металла E_0 , но не от s и α_p и в последующем может быть опущен как постоянный аддитивный член. Поэтому вместо (16) для переменной части кинетической энергии основной призмы мы можем написать

$$T' = \frac{1}{e} \int U(\mathbf{r}, \alpha_p) \rho_-(\mathbf{r}, \alpha_p) d\tau = \frac{L^2}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x', \alpha_p) \rho_-(x', \alpha_p) dx' \quad (27)$$

(множитель L^2 в последнем члене возник при выполнении интегрирования по y и z). Электростатическая энергия же, содержащаяся в основной призме, будет равна (ср. (10'))

$$\begin{aligned} V &= \frac{L^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x', \alpha_p) \rho(x', \alpha_p) dx' = \\ &= \frac{L^2}{2} \int_{-\infty}^{-s} \varphi(x', \alpha_p) [\rho_0 + \rho_-(x', \alpha_p)] dx' + \\ &+ \frac{L^2}{2} \int_{-s}^{+\infty} \varphi(x', \alpha_p) \rho_-(x', \alpha_p) dx'. \end{aligned} \quad (27')$$

Так как плотность электричества $\rho(x')$ в нашей модели зависит только от координаты x , а не от y и z , то, как известно, в этом случае решение уравнения Пуассона дается формулой

$$\varphi(x') = -4\pi \int_{x'}^{\infty} (\lambda' - x') \rho(\lambda') d\lambda', \quad (28)$$

причем константы интегрирования выбраны таким образом, что φ и $\partial\varphi/\partial x$ при $x = +\infty$ обращаются в нуль.

§ 4. Вычисление для специального случая

До сих пор наше рассмотрение было достаточно общего характера. Теперь же мы хотим подробно исследовать совсем специальный и наиболее простой случай: потенциальная функция $U(x', \alpha_p)$ вырождается в прямоугольную ступень:

$$\begin{aligned} U(x') &= 0, & \text{когда } x' = x - s < 0, \\ U(x') &= U_a = \frac{k_a^2}{\mu}, & \text{когда } x' = x - s > 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Так как расстояние s этой ступени от поверхности металла согласно (26') однозначно определено через U_a и предписанное значение заряда металла q , то при выполнении вариации (13) варьируются только параметры U_a или соответственно k_a .

Соотношения (22) и (24), которые в общем случае выполняются только асимптотически, теперь точно определяют решение во всем пространстве, а именно: (22) слева, а (24) справа от скачка потенциала. Постоянные β_k и D_k определяются из условий непрерывности u и $\partial u/\partial x$ на скачке потенциала, так что получается известным образом

$$u_k(x') = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kx' + \beta_k), \quad \text{когда } x' < 0,$$

$$u_k(x') = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \beta_k e^{-\eta_k x'}, \quad \text{когда } x' > 0, \quad (30)$$

$$\eta = \sqrt{k_a^2 - k^2}, \quad \cos \beta_k = \frac{k}{k_a}, \quad \sin \beta_k = \frac{\eta}{k_a}.$$

Эти значения нужно подставить в (19''). Вводя новые безразмерные переменные

$$\alpha = \frac{k_0}{k_a} = \sqrt{\frac{E_0}{U_a}} \leq 1, \quad t = \frac{k}{k_0} \leq 1, \quad \sigma = 2k_0 s,$$

$$\xi = 2k_0 x, \quad \xi' = \xi - \sigma, \quad \gamma = \frac{\rho_-}{\rho_0}, \quad (31)$$

получаем после простых вычислений

$$\xi' < 0, \quad \gamma_i(\xi') = -1 - \frac{3}{2} \int_0^1 (1-t^2) \cos(t\xi' + 2\beta_k) dt,$$

$$\xi' > 0, \quad \gamma_a(\xi') = -3\alpha^2 \int_0^1 (1-t^2) e^{-\xi \frac{1}{\alpha} \sqrt{1-\alpha^2 t^2}} dt, \quad (32)$$

где индексами i и a отмечаются области $\xi' < 0$ и $\xi' > 0$.

Если ввести далее переменные (31) в (26''), то для незаряженного металла, т. е. для $q = 0$, получаем

$$\sigma = \int_{-\infty}^0 [1 + \gamma_i(\xi')] d\xi' + \int_0^{\infty} \gamma_a(\xi') d\xi'.$$

Сюда нужно вставить значения $\gamma(\xi')$ из (32).

При вычислении интеграла последовательность интегрирований по ξ' и t может быть переставлена, и тогда для второго интеграла находим

$$\int_0^{\infty} \gamma_a(\xi') d\xi' = -3\alpha^2 \int_0^1 \frac{t^2(1-t^2) dt}{\sqrt{1-\alpha^2 t^2}} = -\tau_a(\alpha),$$

$$\tau_a(\alpha) = \frac{3}{8\alpha^2} \{ \alpha \sqrt{1-\alpha^2} (3-2\alpha^2) + (4\alpha^2-3) \arcsin \alpha \}. \quad (33)$$

Таким образом, после несколько более длинных вычислений ($\cos \beta_k$ и $\sin \beta_k$ берутся из (30)) получается

$$\int_{-\infty}^0 [1 + \gamma_i(\xi')] d\xi' = \frac{3\pi}{4} - 3\alpha \int_0^1 (1-t^2) \sqrt{1-\alpha^2 t^2} dt = \frac{3\pi}{4} - \tau_i(\alpha),$$

причем

$$\tau_i(\alpha) = \frac{3}{8\alpha^2} \left\{ (1 + 2\alpha^2) \alpha \sqrt{1-\alpha^2} + \left(\frac{1}{\alpha^2} + 1 \right) \arcsin \alpha \right\}. \quad (34)$$

Вместе с тем получается

$$\sigma(\alpha) = \frac{3\pi}{4} - \tau_i(\alpha) - \tau_a(\alpha) = \frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2\alpha^2} \left\{ \alpha \sqrt{1-\alpha^2} + (2\alpha^2 - 1) \arcsin \alpha \right\}. \quad (35)$$

Эта функция представлена на рис. 1. В то время как α растет от 0 до 1, $\sigma(\alpha)$, оставаясь положительной, монотонно падает от $3\pi/4$ до 0. Этот характер изменения функций $\sigma(\alpha)$ понятен непосредственно. При $\alpha=0$, т. е. при бесконечно высокой ступени потенциала $U_a = \infty$, ни один электрон не может проникнуть за плоскость $x' = x - s = \frac{1}{2k}(\xi - \sigma) = 0$, совпадающую со скачком потенциала; плотность электронов справа от ступени равна, таким образом, нулю и на известном отрезке слева от нее меньше, чем внутри металла. Но так как полный заряд металла, по нашему предположению, равен нулю, то ступень потенциала должна быть несколько выдвинута наружу относительно поверхности металла: иначе на поверхности металла был бы некоторый некомпенсированный избыток положительного заряда. Максимальное значение этого смещения равно некоторой доле междуатомных расстояний, так как оно составляет

$$s = \frac{\sigma}{2k_0} = \frac{3\pi}{8k_0} = \frac{3}{16} \lambda_0,$$

где $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ означает длину волны де Бройля самого быстрого электрона при $T=0^\circ$ К. Если скачок потенциала становится меньше, т. е. α больше, то электрическая нейтральность металла достигается при меньших смещениях s , пока, наконец, при $U_a = E_0$, $\alpha=1$, s не обращается в нуль, и тогда скачок потенциала совпадает с границей металла. В этом предельном случае электронное облако в наибольшей степени простирается во внешнее пространство по ту сторону скачка потенциала и отрицательный заряд этой части электронного облака как раз компенсируется избытком положительного заряда в поверхностном слое металла.

С помощью (33) получается также весьма простое выражение для кинетической энергии электронов. Именно, из (27), (29) и (31) имеем

$$T' = \frac{L^2}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x') \rho_-(x') dx' = \frac{L^2 U_a \rho_0}{2k_0 e} \int_0^{\infty} \gamma_a(\xi') d\xi' = -\frac{L^2 U_a \rho_0 \tau_a}{2k_0 e}. \quad (36)$$

Что же касается электрического потенциала $\varphi(x)$, то из (28) получается, если сюда ввести безразмерные переменные (31) и положить $2k_0 \lambda' = \eta$,

$$\varphi(\xi') = -\frac{4\pi\rho_0}{(2k_0)^2} \int_{\xi'}^{\infty} (\eta' - \xi') \{\gamma(\eta') + \gamma_+(\eta')\} d\eta',$$

причем

$$\gamma_+(\xi') = \frac{\rho_+(\xi')}{\rho_0} \begin{cases} 1, & \text{когда } \xi' < -\sigma, \text{ т. е. } \xi < 0, \\ 0, & \text{когда } \xi' > -\sigma, \text{ т. е. } \xi > 0. \end{cases}$$

Введя вместо φ новую безразмерную переменную

$$\omega(\xi') = -\frac{k_0^2}{\pi\rho_0} \varphi(\xi') \quad (37)$$

и принимая во внимание (33), после простого вычисления получим

$$\begin{aligned} \omega(\xi') &= \omega_a(\xi') = \int_{\xi'}^{\infty} (\eta' - \xi') \gamma_a(\eta') d\eta', \quad \xi' > 0, \\ \omega(\xi') &= \omega_g(\xi') = \tau_a \xi' + \int_0^{\infty} \eta' \gamma_a(\eta') d\eta' + \\ &+ \int_{\xi'}^0 (\eta' - \xi') \gamma_i(\xi') d\xi', \quad -\sigma < \xi' < 0, \\ \omega(\xi') &= \omega_i(\xi') = \tau_a \xi' + \int_0^{\infty} \eta' \gamma_a(\eta') d\eta' + \sigma \xi' + \frac{\sigma^2}{2} + \\ &+ \int_{\xi'}^0 (\eta' - \xi') [1 + \gamma_i(\xi')] d\xi', \quad \xi' < -\sigma. \end{aligned} \quad (38)$$

Наконец, из (27'), (31) и (37) получается

$$V = -\frac{L^2 \pi \rho_0^2}{4k_0^3} \int_{-\infty}^{+\infty} [\gamma(\xi') + \gamma_+(\xi')] \omega(\xi') d\xi' = BF(\alpha), \quad (39)$$

где введены обозначения:

$$B = \frac{\pi L^2 \rho_0^2}{4k_0^3} \quad (39')$$

и

$$-F(\alpha) = \int_{-\infty}^{-\sigma} [1 + \gamma_i(\xi')] \omega_i(\xi') d\xi' + \\ + \int_{-\tau}^0 \gamma_i(\xi') \omega_g(\xi') d\xi' + \int_0^{+\infty} \gamma_a(\xi') \omega_a(\xi') d\xi'. \quad (39'')$$

Дальнейшие вычисления с точными значениями (32) величины $\gamma(\xi')$ были бы крайне сложны. Поэтому мы аппроксимируем эти функции следующими более простыми функциями: $\gamma'_i(\xi')$ и $\gamma'_a(\xi')$. Подынтегральное выражение в интеграле (32) для $\gamma_a(\xi')$ падает экспоненциально с ξ' , и поэтому $\gamma_a(\xi')$ может быть аппроксимирована следующей простой экспоненциальной функцией:

$$\gamma'_a(\xi') = -C e^{-\lambda \xi'}, \quad (40)$$

причем постоянные C и λ определяются таким образом, что 1) $\gamma'_i(0) = \gamma_a(0)$ и 2) что полный заряд электронного облака, находящегося за скачком потенциала, остается неизменным:

$$\int_0^{\infty} \gamma'_a(\xi') d\xi' = \int_0^{\infty} \gamma_a(\xi') d\xi' = -\tau_a(\alpha).$$

Эти условия дают

$$C = \frac{2}{5} \alpha^2, \quad \lambda = \frac{C}{\tau_a}. \quad (40')$$

Что же касается функции $\gamma'_i(\xi')$, то посредством интеграций по частям ее можно представить в виде ряда

$$\gamma'_i(\xi') + 1 = a \left(\frac{\cos \xi'}{\xi'^2} - \frac{\sin \xi'}{\xi'^3} \right) + b \left(\frac{\sin \xi'}{\xi'^2} + \frac{3 \cos \xi'}{\xi'^3} - \frac{3 \sin \xi'}{\xi'^4} \right) + \dots \quad (41)$$

где a, b, \dots суть определенные функции α . Каждый член этого ряда остается при $\xi' = 0$ конечным и содержит высшие отрицательные степени ξ' , нежели предыдущий. Мы обрываем этот ряд на втором члене и определяем константы a и b тем же путем, что и константы C и λ , т. е. так, что $\gamma'_i(0) = \gamma_i(0)$ и разность между полным зарядом электронного облака, находящегося внутри скачка потенциала, и зарядом, который отвечал бы равномерной плотности электронов $\rho_- = -\rho_0$ (т. е. $\gamma_i = -1$), при этой аппроксимации оставалась бы неизменной:

$$\int_{-\infty}^0 [1 + \gamma'_i(\xi')] d\xi' = \int_{-\infty}^0 [1 + \gamma_i(\xi')] d\xi' = \frac{3\pi}{4} - \tau_i(\alpha).$$

Эти условия дают

$$a = 3(C - 1), \quad b = 3 \left(\frac{3\pi}{4} C - \tau_i(\alpha) \right), \quad (41')$$

причем $1 + \gamma'_i(\xi')$, как сказано, определяется двучленной формулой (41).

Теперь следует с этими значениями $\gamma'(\xi')$ вычислить «приведенный» электрический потенциал $\omega(\xi')$ по формуле (38). Простое вычисление дает

$$\begin{aligned}\omega_a(\xi') &= -\frac{\tau_a}{\lambda} e^{-\lambda \xi'}, \\ \omega_g(\xi') &= a - \frac{\tau_a}{\lambda} + \xi' \left(\tau_a - \frac{b}{3} \right) - \frac{\xi'^2}{2} - \frac{a}{2} \left(\cos \xi + \frac{\sin \xi'}{\xi'} \right) + \\ &\quad + \frac{b}{2} \left(\frac{\cos \xi'}{\xi'} - \frac{\sin \xi'}{\xi'^2} \right) - \frac{1}{2} (a \xi' - b) \text{Si}(\xi'), \\ \omega_i(\xi') &= \omega_g(\xi') + \frac{1}{2} (\sigma + \xi')^2,\end{aligned}\tag{42}$$

где введено обычное обозначение

$$\text{Si}(\xi) = \int_0^\xi \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta.$$

Таким образом, в положительной бесконечности приведенный потенциал ω обращается в нуль, в отрицательной же бесконечности (т. е. внутри металла) получается следующее асимптотическое выражение (с учетом равенства $\text{Si}(-\infty) = -\pi/2$):

$$\omega = a - \frac{\tau}{\lambda} + \frac{\pi b}{4} + \frac{\sigma^2}{2} + \xi' \left(\tau_a - \frac{b}{3} + \frac{\pi a}{4} + \sigma \right) - \frac{a \cos \xi'}{2}, \quad \xi' \rightarrow -\infty.$$

Множитель, стоящий в скобках, тождественно равен нулю (см. (35) и (41')) так, что внутри металла ω стремится к постоянному значению с точностью до одного быстро осциллирующего члена $-\frac{a \cos \xi'}{2}$, как это и следовало ожидать. Пренебрегая этим членом и вспоминая уравнение (37), легко определить разность ΔU потенциальной энергии электрона вне и внутри металла:

$$\begin{aligned}\Delta U &= -e \{ \varphi(+\infty) - \varphi(-\infty) \} = e \varphi(-\infty) = \\ &= \frac{e^2 k_0}{3\pi} \left(\frac{\tau_a}{\lambda} - a - \frac{\pi b}{4} - \frac{b^2}{2} \right).\end{aligned}\tag{43}$$

Вставляя (42) в (39'), получим после элементарного, но весьма кропотливого интегрирования следующий результат:

$$\begin{aligned}F(\alpha) &= \frac{V}{B} = \frac{\tau_a^2}{2\lambda} + a\sigma + \frac{\sigma^3}{3} + \pi \left(\frac{a^2}{6} + \frac{b^2}{4} - \frac{\tau_a a'}{10} + \frac{\sigma^2}{4} \right) - \\ &\quad - \left(\frac{a\sigma}{2} + b \right) \left(\cos \sigma + \frac{\sin \sigma}{\sigma} + \sigma \text{Si}(\sigma) - 2 \right) - a \text{Si}(\sigma).\end{aligned}\tag{44}$$

В этом и следующем параграфе мы будем пренебрегать энергией обмена A и поэтому на основе (36) и (39) для энергии основной призмы получаем

$$W' = V + T' = BF(\alpha) - \frac{L^2 U_{a^2_0}}{2ek_0} \tau_a(\alpha),$$

или

$$W' = B \left[F(\alpha) - p \frac{\tau_a}{\alpha^2} \right],$$

где

$$p = \frac{\alpha^2}{B} \frac{L^2 U_{a^2_0}}{2ek_0} = \frac{2\pi\hbar^2 k_0}{me^2}.$$

Обозначая радиус первой боровской орбиты атома водорода через $a_0 = \hbar^2/me^2$, получим $p = 3\pi a_0 k_0$. Целесообразно выразить k_0 через число свободных электронов проводимости Z на атом и грамм-атомный объем.

Тогда согласно (25) получается

$$k_0 = \pi \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{1/3} = \pi \left(\frac{3ZN_0}{\pi V} \right)^{1/3}, \quad n = \frac{ZN_0}{V},$$

где N_0 означает число Авогадро. Внося это в предыдущее уравнение и вставляя численные значения универсальных постоянных a_0 и N_0 , получим

$$p = 13,2 (Z/V)^{1/3},$$

где V выражено в $см^3$.

§ 5. Форма кривой энергии и определение высоты скачка потенциала

Результат § 4 выражается формулой (45), с помощью которой мы должны определить то значение единственного параметра $\alpha = \frac{k_0}{k_a} = \sqrt{\frac{E_0}{U_a}}$, которое отвечает минимуму полной энергии W' . Так как постоянная B не зависит от α , то мы можем рассматривать вместо W' функцию

$$w(\alpha, p) = \frac{W'}{B} = F(\alpha) - p \frac{\tau_a(\alpha)}{\alpha^2}.$$

Здесь p — единственная величина, которая зависит от свойств исследуемого металла и определяется плотностью электронов; $F(\alpha)$ и $\tau_a(\alpha)$ являются, напротив, универсальными функциями α .

Функции $F(\alpha)$ и $-\frac{\tau_a(\alpha)}{\alpha^2}$ представлены графически на рис. 1. Общий характер изменения этих функций понятен без вычислений. $F(\alpha)$ пропорциональна полной электростатической энергии $V = \frac{1}{2} \int \rho\varphi d\tau$, величина τ_a/α^2 — переменной части F' кинетической энергии электронов. Эта часть отрицательна, так как справа от

скачка потенциала электроны обладают отрицательной кинетической энергией

$$E_0 - U_a = \frac{1}{\mu} k_0^2 - \frac{1}{\mu} k_a^2,$$

и так как только второй член зависит от α , то рассматриваемая часть кинетической энергии пропорциональна произведению $-\frac{1}{\mu} k_a^2 = -U_a$ на число находящихся во внешнем пространстве

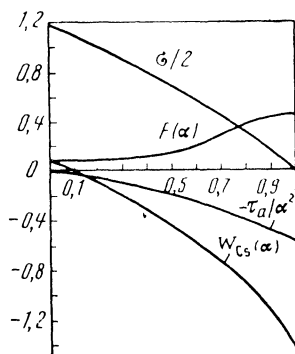


Рис. 1

электронов. Если скачок потенциала U_a бесконечно высок ($\alpha=0$), то число этих электронов равно нулю. Так что кривая $-\tau_a/\alpha^2$ при $\alpha=0$ начинается с нуля, а затем при увеличении α (т. е. при уменьшении U_a) монотонно падает.

Электростатическая энергия $V=BF(\alpha)$, напротив, всегда положительна и монотонно растет вместе с α . Именно, она тем больше, чем более разделены у поверхности металла положительные и отрицательные заряды, т. е. чем более простирается за скачок потенциала электронное облако¹⁶.

Чтобы определить функцию энергии $w(\alpha, p)$, нужно согласно (45') знать значение p для рассматриваемого металла. Для цезия $Z=1$ и $V=70,6 \text{ см}^3$, так что согласно (47) $p=3,2$. Для этого значения p на рис. 1 дана кривая $w(\alpha, p)$. Как видно, при увеличении α (т. е. при уменьшении скачка потенциала U_a) w монотонно падает: прирост отрицательной части кинетической энергии $-p \frac{\tau_a}{\alpha^2}$ перевешивает прирост положительной электростатической энергии $F(\alpha)$. Но Cs одновалентен и из всех металлов имеет наибольший атомный объем V , так что ему отвечает наименьшее возможное значение множителя p . Для всех других металлов характер кривой энергии $w(\alpha)$ еще в большей степени определяется чле-

¹⁶ Уменьшение смещения σ (соответственно s) скачка потенциала относительно поверхности металла оказывает противоположное влияние на V , однако не изменяет положение вещей.

ном $-p \frac{\sqrt{a}}{\alpha^2}$, и, таким образом, мы приходим к общему результату первой части нашей работы.

Минимум энергии металла при переменной высоте скачка потенциала U_a на его поверхности достигается (по крайней мере тогда, когда отвлекаемся от энергии обмена A) при $\alpha=1$, т. е. при $U_a=E_0$. Таким образом, скачок потенциала равен нулевой энергии E_0 электронов и как раз достаточен для того, чтобы удерживать электроны при $T=0^\circ$ К внутри металла, но ничего не прибавляет к работе выхода.

Хотя функция $w(\alpha)$ в точке $\alpha=1$, строго говоря, не обладает, собственно, никаким минимумом, так как производная $\partial w/\partial \alpha$ не обращается в нуль в этой точке, однако было бы физически бессмысленным продолжать функцию $w(\alpha)$ по ту сторону от $\alpha=1$, так как тогда скачок потенциала U_a был бы при $\alpha > 1$ меньше, чем E_0 , и электроны выходили бы из металла. Также и с чисто математической точки зрения область определения употребляемых выше функций ограничивается областью $\alpha < 1$ (при $\alpha > 1$ получается, например, из (45') комплексное значение для $w(\alpha)$). Таким образом, вычисленное нами первое приближение действительно дает для α значение 1.

Нужно заметить следующее. Вычисленная по нашему методу разность ΔU потенциальной энергии электронов вне и внутри металла дается уравнением (43). С другой стороны, эта разность была исходным пунктом вычислений с U_a . Так что строгое вычисление значения ΔU должно бы давать

$$\Delta U = U_a = \frac{k_a^2}{\mu} = \frac{k_0^2}{\mu \alpha^2}. \quad (48)$$

Это уравнение можно бы совсем независимо от вычислений минимума энергии в смысле метода «согласованного поля» Хартри употребить для вычисления приближенного значения α . Внеся в (48) значение ΔU из (43), после простого вычисления легко убедиться, что уравнение (48) не может быть удовлетворено ни при каких значениях α , но что наилучшее приближение достигается при $\alpha=1$.

§ 6. Работа силы электрического изображения

При вычислении работы силы электрического изображения мы будем поступать следующим образом. Поле, действующее на электрон, пусть опять аппроксимируется подходящей функцией $U(x', \alpha_p) = U(x-s, \alpha_p)$. Мы принимаем, что обсужденная в § 2 и 3 вариационная проблема для незаряженного металла, т. е. для $q=0$ (уравнение (26)), уже решена, и обозначим через s_0 и α_{p0} те значения параметров s и α_p , которые отвечают минимуму энергии металла. Пусть теперь удаляют из металла один электрон

из каждых $L^2 \text{ см}^2$ его поверхности, т. е. один электрон из каждой основной призмы. Так что теперь в (26'') q равно e/L^2 . Для этого значения q следует вновь решить вариационную проблему; соответствующие значения s , α_p обозначим через $s_0 + \delta s$ и $\alpha_{p0} + \delta \alpha_{p0}$. Приращение энергии основной призмы при удалении из нее одного электрона будет составлять

$$\Delta W = W(s_0 + \delta s, \alpha_{p0} + \delta \alpha_{p0}) - W(s_0, \alpha_{p0}). \quad (49)$$

Выполняя здесь переход к пределу $L \rightarrow \infty$, получим искомую работу выхода электронов χ , так как, когда поперечное сечение основной призмы становится бесконечным, она охватывает весь металл и рассматриваемый в этом предельном случае процесс отвечает удалению *одного* электрона из всего металла. В конечном состоянии металл, таким образом, будет опять незаряженным, или, точнее говоря, заряд e распределяется по всей бесконечной поверхности металла с плотностью, равной нулю¹⁷.

При вычислении ΔW по уравнению (48) нужно заметить, что параметры s и α_p не независимы, а связаны между собой и с зарядом $q=e/L^2$ соотношением (26''). Соответственно этому мы будем рассматривать величину s как определенную посредством (26'') функцию q и α_p . Мы разлагаем ΔW по степеням $\delta \alpha_p$ и δs :

$$\delta s = \sum_p \frac{\partial s}{\partial \alpha_p} \delta \alpha_p + \frac{\partial s}{\partial q} \delta q.$$

Так как приращение заряда $\delta q=e/L^2$ обратно пропорционально поперечному сечению основной призмы L^2 , а ее энергия W , напротив, пропорциональна L^2 , то при $L \rightarrow \infty$ только первые члены разложения будут оставаться конечными и мы получаем

$$\Delta W = \sum_p \left\{ \frac{\partial W(s, \alpha_p)}{\partial \alpha_p} + \frac{\partial W(s, \alpha_p)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \alpha_p} \right\} \delta \alpha_p + \frac{\partial W(s, \alpha_p)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial q} \delta q,$$

где следует взять значения производных $\partial W/\partial \alpha_p$ и $\partial W/\partial s$ для $\alpha_p = \alpha_{p0}$ и $q=0$. Эти значения α_{p0} являются как раз решениями вариационной проблемы для незаряженного металла и, следовательно, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_p} + \frac{\partial W}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \alpha_p} = 0.$$

¹⁷ Уравнение (49) выполняется только при том условии, что потенциал φ нормирован таким образом, что он исчезает в бесконечности (вне металла) (ср. § 1), в то время как потенциал заряженного металла, напротив, растет неограниченно при удалении от металла по закону $\varphi=2\pi\sigma x$, где σ означает плотность поверхностных зарядов. Но, во-первых, при $L \rightarrow \infty$ φ стремится к нулю и, во-вторых, эта трудность связана с представлением о бесконечном металле и, таким образом, не имеет никакого физического значения.

Таким образом, предыдущее уравнение упрощается:

$$\Delta W = \frac{\partial W}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial q} \delta q.$$

Заемствуя из (26'') соотношение $\frac{\partial s}{\partial q} = -\frac{1}{\rho_0}$ и полагая $\delta q = e/L^2$, получаем

$$\Delta W = -\frac{\partial W}{\partial s} \frac{e}{L^2 \rho_0}. \quad (50)$$

Кинетическая энергия T и энергия обмена A (уравнения (27) и (11)) не зависят от смещения s потенциальной кривой $U(x-s, \alpha_p)$ относительно поверхности металла $x=0$, так как электронное облако $\rho_-(x-s, \alpha_p)$ смещается при этом как целое в направлении оси OX . Таким образом,

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (T + A + V) = \frac{\partial V}{\partial s}.$$

Чтобы теперь определить $\partial V/\partial s$ или $\Delta V = \frac{\partial V}{\partial s} \delta s$, нужно иметь в виду, что смещение электрического облака вдоль оси OX на отрезок δs вполне эквивалентно противоположному смещению поверхности металла на тот же отрезок δs , которое, со своей стороны, может быть произведено удалением с поверхности металла слоя положительного заряда ионов толщиной δs . Это отвечает изменению полного заряда основной призмы на $-L^2 \rho_0 \delta s$. Обозначая вычисленное для случая незаряженного металла значение электрического потенциала на поверхности металла через $\varphi(0)$, для отвечающего смещению δs изменения электрической энергии получим $\delta V = -\varphi(0) L^2 \rho_0 \delta s$, и, следовательно ¹⁸,

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -\varphi(0) L^2 \rho_0.$$

¹⁸ Это уравнение может быть также выведено из формулы (ср. (10'))

$$\delta V = \frac{L^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho + \delta\rho) (\varphi + \delta\varphi) dx',$$

которая, если пренебречь членами второго порядка относительно $\delta\rho$ и $\delta\varphi$ и учесть, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \delta\rho dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\varphi \rho dx',$$

дает

$$\delta V = L^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \delta\rho dx'.$$

Вводя это значение в (50), получим, наконец,

$$\Delta W = e\varphi(0). \quad (51)$$

Таким образом, выходу электрона из металла отвечает в нашей картине определенное смещение всего электронного облака $\rho_-(x-s, \alpha_p)$, которое увеличивает полный заряд металла на величину e . Так что в случае *бесконечного* металла (равным образом и в случае металлического куска макроскопических размеров) не имеет смысла говорить о полном числе электронов и утверждать, что это число по выходе одного электрона уменьшилось на единицу¹⁹.

В формуле (51), которая уже была обсуждена в § 1, выражается результат наших исследований. Она дает затрату работы, необходимую для удаления электрона из металла. Выражая, как обычно, эту работу в эквивалентных электро-вольтах²⁰ и обозначая ее через χ , получим

$$\chi = \frac{\Delta W}{e} = \varphi(0), \quad (52)$$

т. е. χ равно разности потенциалов у поверхности металла ($x=0$) и в положительной бесконечности ($\varphi(+\infty)=0$).

Формула (52) отличается известной общностью в том смысле, что она не зависит от специальной формы потенциальной функции $U(x-s, \alpha_p)$. Чтобы определить значение χ по (52), нужно, конечно, положить в основание расчета некоторую подходящую функцию U , которая в нулевом приближении определяла бы форму потенциала. Мы рассмотрим два специальных случая. Во-первых, уже просчитанный в § 4 и 5 случай простого потенциального скачка (уравнение (29)). При этом мы воспользовались не приближенным значением (42) для приведенного потенциала $\omega(\xi')$, а точными уравнениями (32) и (38). Полагая в этих формулах $\alpha=1$, как это следует из результатов § 5, и замечая, что при этом σ согласно (35) равно нулю и, следовательно, $x'=x$, $\xi'=\xi$, получим

$$\omega(0) = \omega_a(0) = \int_0^{\infty} \eta \gamma_a(\eta) d\eta = -3 \int_0^{\infty} \eta d\eta \int_0^1 (1-t^2) t^2 e^{-\eta\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем²¹

$$\omega(0) = -3 \int_0^1 t^2 dt = -1,$$

¹⁹ В случае отдельного атома, напротив, работа ионизации равна разности энергии нейтрального атома и иона с числом электронов, уменьшенным на единицу (если потенциал в бесконечности равен нулю).

²⁰ Сейчас применяется термин «электронвольт». — *Прим. ред.*

²¹ Из приближенного уравнения (42) вместо $\omega(0) = -1$ получается $\omega(0) = 0,87$.

и, таким образом, по уравнению (37)

$$\varphi(0) = -\frac{\pi\rho_0}{k_0^2} \omega(0) = \frac{\pi\rho_0}{k_0^2}.$$

Вводя сюда значения ρ_0 и k_0 из (25) и (46), получим окончательно

$$\chi = \varphi(0) = \frac{ek_0}{3\pi} = \frac{e}{3} \left(\frac{3N_0}{\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{Z}{V}\right)^{1/3}, \quad (53)$$

или, подставляя сюда численные значения универсальных постоянных,

$$\chi = 4,0 \left(\frac{Z}{V}\right)^{1/3} [\text{эВ}], \quad (53')$$

где V измерено в см^3 .

Прежде чем сравнивать эту формулу с экспериментальными результатами, мы вычислим $\varphi(0)$ еще другим способом. Аппроксимация кривой потенциала $U(x-s, \alpha_p)$ посредством прямоугольной ступени является все же крайне грубым приближением, и следует ожидать, что вычисление электрического потенциала φ по простому методу Ферми—Томаса будет давать лучшее приближение. Этот метод был применен к рассматриваемой нами модели металла (бесконечный металл с плоской поверхностью без учета атомистичной структуры) Френкелем²². Френкель получает следующее выражение для потенциала во внешнем пространстве (т. е. при $x > 0$):

$$\varphi(x) = \frac{b}{(a+x)^4}, \quad (54)$$

где постоянная b имеет следующее значение:

$$b = \left(2 \sqrt{\frac{5}{\mu}}\right)^{1/4}, \quad \mu = \frac{4e}{3\pi h^3} (2me)^{3/2}.$$

Постоянная a определяется из условий непрерывности для $\partial\varphi/\partial x$ на поверхности металла $x=0$.

Именно, в металле (при $x < 0$)

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = \frac{4}{5} \mu \varphi^{5/2}(x) - 2\mu \varphi_1^{3/2} \varphi(x) + \frac{6}{5} \mu \varphi_1^{5/2}, \quad x < 0,$$

где

$$\varphi_1 = \frac{4\pi en^{2/3}}{\mu} = \frac{h^2}{2me} 3\pi^2 n^{2/3}$$

(n означает число свободных электронов в единице объема металла).

²² Я. Френкель, л. с. В работе Френкеля следует исправить некоторые опечатки. В выражениях для a и b нужно заменить $1/8$ на 2 и в формуле (8а) знак «минус» перед интегралом должен быть вычеркнут.

Но согласно (54)

$$\varphi(0) = \frac{b}{a^4}, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{4b}{a^5} = -4b^{1/4}\varphi^{5/4}(0) = -2\sqrt{\frac{\mu}{5}}\varphi^{5/4}(0).$$

Таким образом, упомянутое условие непрерывности дает

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=0}^2 = \frac{4}{5}\mu\varphi^{5/2}(0) - 2\mu\varphi_1^{3/2}\varphi(0) + \frac{6}{5}\mu\varphi_1^{5/2} = \frac{4}{5}\mu\varphi^{5/2}(0),$$

и отсюда получается

$$\varphi(0) = \frac{3}{5}\varphi_1 = \frac{3h^2}{10me}(3\pi^2n)^{2/3}. \quad (55)$$

Величина $e\varphi(0)$, а вместе с тем и работа выхода электронов по этой формуле в точности равны вычисляемой по теории Зоммерфельда средней кинетической энергии электронов (при $T=0^\circ\text{K}$), которая, со своей стороны, составляет $3/5$ от нулевой энергии:

$$e\chi = \frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{5}E_0. \quad (56)$$

Заменяя в (55) n через N_0Z/V (уравнение (46)) и внося численное значение универсальных постоянных, получим

$$\chi = \varphi(0) = 15,6\left(\frac{Z}{V}\right)^{2/3} [\text{эВ}], \quad (55')$$

где V опять выражено в см^3 .

§ 7. Сравнение с опытом

Зависимость вычисленной по формуле (55') работы выхода χ от величины $(1/V)^{1/3}$ представлена на рис. 2 для одно- и двухвалентных металлов пунктирной, соответственно сплошной и штриховой кривыми. Далее, на этом же рисунке нанесены экспериментально измеренные значения χ . Эти значения не очень надежны, и результаты различных наблюдателей весьма широко отличаются друг от друга. Области значений χ , внутри которых укладываются эти данные, представлены на рисунке вертикальными отрезками и заимствованы из сводки Гуддена²³.

Из рисунка видно, что обе формулы, (53') и (55'), правильно передают порядок величины χ . Последняя формула (55') также дает правильный ход χ в периодической системе. Как и ожидалось, эта формула находится в значительно лучшем согласии с опытом, нежели первая. Расхождение между измеренными и вычисленными по формуле (55') значениями χ для щелочных металлов лежит частично в пределах ошибок измерений, однако при неточности наших приближений это скорее следует приписать случайности. Для двухвалентных металлов и металлов с малым атомным

²³ B. Gudden. Lichtelectrische Erscheinungen. Berlin, J. Springer, 1928.

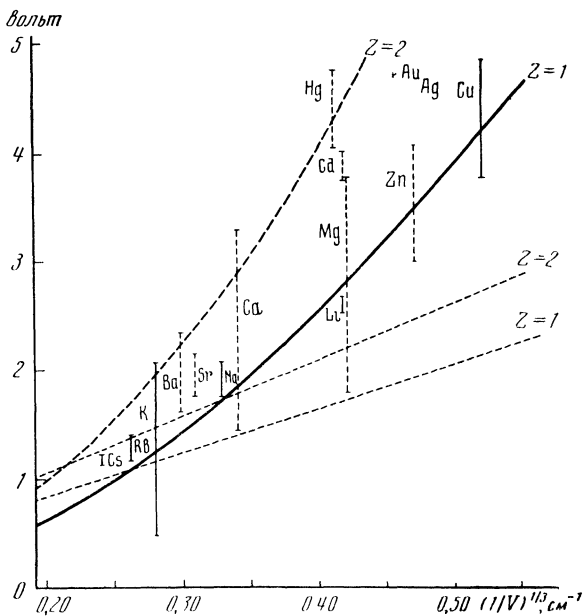


Рис. 2

объемом (Au, Ag и т. д.) совпадение несколько хуже.

Следует особенно отметить те (пока немногие) металлы, для которых имеются действительно надежные значения χ , вычисленные по методу Фаулера²⁴ из фотоэлектрических измерений. Для этих металлов мы вычислили «эффективную валентность» Z^* , внося в формулу (55') измеренные значения χ и V . Эти числа сопоставлены в следующей таблице:

	χ	V	Z^*
Ag	4,69	10	1,65
Au	4,74	10	1,68
Ta	4,06	10,1	1,34
Wo	4,63	9,9	1,60

Числа Z^* оказываются слишком большими. При грубости нашей модели металла и при употреблении приближенного метода Ферми едва ли можно было бы ожидать лучшего совпадения с опытом, чем то, которое дается этой таблицей и на рис. 2. Во всяком случае, нам кажется определенным то заключение, что работа выхода электронов в существенном обусловливается не скачком потенциала на границе металла, а силами электрического изображения.

Москва, Научно-исследовательский институт физики
Московского государственного университета.
Отдел теоретической физики

Поступила
29 ноября 1932 г.

²⁴ R. H. Fowler. Phys. Rev., 1931, 38, 45. Дальнейшее см. также: D. Blochinzew. Phys. Z. Sowjetunion, 1932, 1, 781.

ЭНЕРГИЯ НУЛЕВЫХ КОЛЕБАНИЙ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА H_2O И D_2O ¹

Совместно с Д. Д. Берналом

Заметное отличие физических свойств H_2O и D_2O (и всех полярных соединений Н и D) не может быть обусловлено слишком малыми внутримолекулярными различиями, но может быть связано с отличием в них эффективных межмолекулярных сил. Количественно эти различия могут быть учтены, если принять во внимание разницу в частоте угловых колебаний или либраций молекулы в поле ее соседей. Средняя частота колебаний для льда может быть вычислена с помощью модели воды, развитой к настоящему времени [1]. Полученное значение $\nu_B = 14,3 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$ достаточно велико, и энергия колебаний льда составляет 17% полной энергии. Поскольку для либраций существует только движение атомов водорода, то при замене Н на D энергия нулевых колебаний уменьшается в $\sqrt{2}$ раз. Это изменение частоты (наряду с ним есть менее значительные изменения, связанные с условиями симметрии и различием в ядерных спинах) дает основную часть различия в теплоемкости H_2O и D_2O . Так, различие в теплоте испарения D_2O и H_2O в точке плавления согласно расчетам равно 0,35 ккал, в то время как экспериментально измеренное различие составляет 0,32 ккал [2]. Это совпадение служит хорошим подтверждением правильности теории. Различие теплоемкости льда экспериментально равно 1 кал/моль \cdot °K [3], а вычисленное составляет 0,7 кал/моль \cdot °K.

Для воды величина ν_B должна быть более низкой, чем для льда, откуда следует, что молекулярная скрытая теплота плавления для льда D_2O должна быть больше, чем для льда H_2O . Этот вывод также находится в согласии с экспериментом. Кроме либраций, молекулы воды участвуют в обычных колебаниях, но с более низкой частотой $\nu_A = 5 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$. Эти колебания гораздо менее чувствительны к замене D на H. Используя частоты ν_A и ν_B , можно вычислить теплоемкость льда. В точке плавления она составляет по вычислениям 9,35 кал/моль, а наблюдаемая величина равна 8,85 кал/моль. Сдвиг длины волны, соответствующий $\nu_A = 4,6 - 6,7 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$, $\nu_B = 15 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$, наблюдал в рамановском спектре воды Мага [4]; измерения находятся в удовлетворительном соответствии с величинами, вычисленными из модели.

¹ Nature, 1935, 135, № 3406, 229. Перевод Л. Н. Булаевского.

Соответствующие различия энергий должны наблюдаться в твердых телах и жидкостях всех водородных соединений с полярными свойствами. Разница энергий Н- и D-гидроксила будет зависеть от температуры и колебательных частот и, следовательно, от поля, в которое помещена гидроксильная группа. Чем сильнее связь, тем больше различие. Следовательно, различие будет увеличиваться, если мы идем от амфотерной гидроксильной связи к гидроксильной связи в спиртах и от них — к водородной связи кислот. Аналогично при гидратации ионов различие будет зависеть от относительной энергии гидратации и соответственно будет больше для сильно поляризующихся ионов. Исследование физических свойств дейтериевых соединений позволяет понять структуру соответствующих водородных соединений и дает мощный метод исследования основ структуры молекулярных твердых тел и жидкостей.

*Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР
Кристаллографическая лаборатория, Кембридж*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *J. D. Bernal, R. H. Fowler. J. Chem. Phys., 1933, 1, 515; Proc. Roy. Soc. 1934, A114, 1.*
2. *G. N. Lewis. J. Amer. Chem. Soc., 1933, 55, 3057; V. K. La Mer, W. N. Baker. Ibid., 1934, 56, 2641.*
3. *L. Jacobs (private communication).*
4. *M. Magat. J. phys., 1934, 5, 347.*

СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЭНЕРГИЯ — ВРЕМЯ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ ¹

Совместно с Л. И. Мандельштамом

1. Наряду с соотношением неопределенности, относящимся к координате q и импульсу p , в квантовой механике рассматривается также соотношение неопределенности пары энергия — время.

Первое соотношение в форме неравенства

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (1)$$

где Δq и Δp — соответственные стандарты ², а \hbar — деленная на 2π постоянная Планка, вытекает, как известно, непосредственно из квантовомеханического формализма. Что же касается обычных рассуждений о так называемом микроскопе Гейзенберга, об определении скорости при помощи доплер-эффекта и т. п., то они по существу имеют целью выявить связь между измерениями координат и импульсов и квантовомеханическим формализмом.

Совершенно иначе обстоит дело с соотношением

$$\Delta H \Delta T \sim \hbar, \quad (2)$$

где ΔH — стандарт энергии, ΔT — некоторый промежуток времени, а знак \sim означает, что левая часть по меньшей мере порядка правой.

Для его обоснования обычно ссылаются на тривиальное соотношение $\Delta \nu \Delta T \sim 1$, связывающее «неточность» $\Delta \nu$ измерения частоты монохроматического колебания с промежутком времени ΔT , в течение которого измерение производится, с одной стороны, и на соотношение энергия $= \hbar \nu$ — с другой.

Однако уже неоднократно подчеркивалось то обстоятельство, что в нерелятивистской квантовой механике целесообразно считать энергию «observable», в смысле Дирака, соответствующей оператору Гамильтона данной механической системы. При таком определении нельзя, конечно, отождествлять энергию с умноженной на \hbar частотой монохроматического колебания. Поэтому указанное обоснование теряет силу, а само соотношение (2) перестает быть содержательным.

¹ Изв. АН СССР, серия физ., 1945, 9, № 1-2, 122; J. Phys., 1945, 9, 249.

² Стандартом, как известно, называется корень квадратный из среднего квадратичного отклонения от среднего.

Иногда вместо этого ссылаются на каноническую сопряженность энергии и времени. Но такая расплывчатая ссылка вряд ли может считаться содержательной уже по одному тому, что здесь остается открытым вопрос о том, что нужно понимать под ΔH и ΔT .

По-видимому, общего, вытекающего из основных положений квантовой механики обоснования соотношения (2) или другого аналогичного соотношения неопределенности, относящегося к энергии, до сих пор дано не было. Взамен этого рассматривались специальные случаи, причем для каждого из них давалось свое, отличное от случая к случаю определение величин ΔH и ΔT и показывалось, что определенные таким образом величины удовлетворяют соотношению (2).

2. Цель настоящей заметки — указать одно весьма общее соотношение неопределенности для энергии, которое, как и (1), вытекает из квантового формализма, но с учетом уравнения Шредингера.

В основе его лежит следующее соображение. Как известно, полная энергия замкнутой квантовомеханической системы, вообще говоря, не имеет в противоположность классике одного определенного, постоянного во времени значения. Здесь постоянной остается *вероятность* измерить каждое из возможных значений энергии системы. В этом и состоит закон сохранения энергии в квантовой механике.

Только в частном случае стационарного состояния энергия вполне определена. Но в этом случае, как легко видеть, *все* динамические величины, или, иначе, их функции распределения, остаются постоянными. Иными словами, *определенность* полной энергии системы влечет за собой *постоянство* во времени всех динамических величин. Уже из этого можно сделать заключение, что существует общая зависимость между дисперсией полной энергии системы и изменением координат, импульсов и т. д. во времени.

Соотношение неопределенности, о котором идет речь, дает количественную формулировку этой зависимости.

Пусть R и S обозначают две какие-нибудь величины и одновременно соответствующие им эрмитовы операторы. Как известно, справедливы два следующих соотношения:

$$\Delta S \Delta R \geq \frac{1}{2} |\overline{RS - SR}|, \quad (3)$$

где ΔS и ΔR — стандарты величин S и R , а горизонтальная черта обозначает, как обычно, квантовомеханическое среднее, и

$$h \frac{\partial \bar{R}}{\partial t} = i (\overline{HR - RH}) \quad (4)$$

(H — гамильтониан системы, не содержащий явно времени).

Полагая в (3) $S \equiv H$, мы на основании (3) и (4) получаем иско- мую формулировку соотношения неопределенности для энергии в форме следующего неравенства:

$$\Delta H \Delta R \geq \frac{h}{2} \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial t} \right|. \quad (5)$$

Это соотношение связывает, таким образом, между собой стан- дарт ΔH полной энергии замкнутой системы, стандарт ΔR какой- нибудь динамической величины и изменение среднего значения этой величины.

Соотношению (5) может быть придана несколько иная форма. Оно не нарушится при замене в нем величины $|\partial \bar{R}/\partial t|$ величи- нами $d\bar{R}/dt$ или $-\partial \bar{R}/\partial t$. Проинтегрировав его затем от t до $t + \Delta t$ и приняв во внимание, что ΔH постоянно, получим

$$\Delta H \Delta t \geq \frac{h}{2} \frac{|\bar{R}_{t+\Delta t} - \bar{R}_t|}{\Delta R}, \quad (5a)$$

где справа в знаменателе стоит среднее за время Δt значение стандарта ΔR .

Иногда (особенно в случае непрерывного спектра собственных значений) целесообразно относить изменения среднего значения какой-нибудь величины к ее стандарту. Такое сравнение позво- ляет в ряде случаев судить об эффективности происшедшего изменения. Для иллюстрации можно сослаться на несколько аналогичное положение, с которым мы имеем дело при оценке разрешающей способности оптических инструментов.

В этих случаях удобно ввести специальное обозначение ΔT для минимального времени, за которое среднее значение некоторой величины изменяется на величину ее стандарта, ΔT можно на- звать стандартным временем. С этим обозначением (5a) может быть написано так:

$$\Delta H \Delta T \geq \frac{h}{2}. \quad (5b)$$

Из (5a) следует, что для того, чтобы какая-нибудь величина изменилась, необходимо не только, чтобы $\Delta H \neq 0$, но чтобы был отличен от нуля и средний стандарт самой величины (если $\Delta H \neq \infty$)³. Таким образом, динамическая величина не может изменяться, оставаясь все время лишенной дисперсии; этот результат, оче- видный для случая дискретного спектра, не является таковым

³ Довольно часто приходится рассматривать состояния, стандарт энергии ΔH которых бесконечен (например, в тех случаях, когда энергия распределена по дисперсионной формуле $\frac{\text{const}}{(H - H_0)^2 + \Gamma^2}$); так как применение соотноше- ния (5) к таким случаям становится бессодержательным, то было бы весьма желательно найти более общее соотношение того же типа, как и (5).

для спектра непрерывного. Далее, из (5а) следует, например, что если в какой-нибудь момент времени дисперсия величины R равна нулю, а среднее значение ее не остается постоянным, то вначале, т. е. для малых Δt , стандарт изменяется значительно быстрее, чем R .

Характерной чертой приведенного соотношения неопределенности для энергии является то обстоятельство, что в него входит произвольная величина R и что поэтому его физическое содержание различно в зависимости от выбора этой величины. Неучетом этого обстоятельства и объясняется, по-видимому, что отдельные конкретные задачи, к которым применялось соотношение (2), в ряде случаев оставались без взаимной связи.

3. В качестве иллюстрации рассмотрим три примера. Пусть имеется одномерный волновой пакет. Если положить $R \equiv q$, то \bar{R} есть центр тяжести пакета, ΔR может рассматриваться как его средняя ширина, а ΔT — время прохождения пакета. Соотношение (5б) показывает, что точность локализации во времени прохождения пакета через какую-нибудь точку пространства находится в прямой зависимости от дисперсии полной энергии системы и не может быть большой при малой величине этой последней, причем (5б) дает количественное соотношение между ΔH и ΔT .

Этот пример приводится обычно и в связи с соотношением (2), но обоснование указанного результата дается в предположении, что движение происходит в отсутствие внешних сил. Соотношение (5б) показывает, что результат справедлив для движения в любом потенциальном силовом поле.

Второй и третий примеры, которые сейчас будут приведены, тоже рассматривались нередко в связи с соотношением (2). Но при этом давалось новое определение ΔH и ΔT и весь разбор шел вне всякой связи с первым примером. Здесь же все три примера являются частными случаями соотношения (5).

Пусть нам дана система с двумя степенями свободы, и пусть ее гамильтониан $H(q_1, q_2)$ имеет вид $H(q_1, q_2) = H_1(q_1) + H_2(q_2) + \mu H_{12}(q_1, q_2)$. Если μ мало или если член H_{12} типа энергии взаимодействия при столкновении двух упругих частиц, то принято говорить о двух системах с одной степенью свободы, находящихся во взаимодействии друг с другом.

В этих предположениях $\bar{H}_1 + \bar{H}_2 \cong \bar{H}$; при известных условиях (при резонансе) \bar{H}_1 и \bar{H}_2 существенно изменяются во времени, между тем как их сумма остается приблизительно постоянной. В этом случае говорят о переходе энергии из одной системы в другую, называя \bar{H}_1 энергией первой, а \bar{H}_2 энергией второй системы.

Положим $R \equiv H_2$; тогда (5а) показывает, что чем меньше дисперсия полной энергии всей системы в целом, тем, вообще говоря, медленнее происходит переход энергии, или, точнее: стандартное время перехода энергии из одной системы в другую не меньше, чем $\hbar/2\Delta H$.

Наглядной иллюстрацией этого случая может служить одномерное соударение двух упругих частиц исчезающего размера и одинаковой массы, из которых первая имеет скорость, отличную от нуля, с малой дисперсией, а вторая находится почти в покое.

В плоскости q_1 и q_2 (q_1 и q_2 — координаты частиц) процесс соударения приближенно отображается отражением ограниченного и по длине и по ширине цуга волн от зеркала, помещенного под углом 45° к направлению q_1 , причем волновая «линия» цуга перпендикулярна q_1 , а длина и ширина цуга весьма велики по сравнению с длиной волны; пусть длина цуга значительно больше ширины. До столкновения волновая функция состоит из цуга, распространяющегося вдоль q_1 по направлению к зеркалу. Пока цуг не дошел до зеркала, $H_2 \approx 0$. Затем передняя часть цуга отражением заворачивается на 90° . Пока время Δt , прошедшее от начала отражения, мало, отраженная часть цуга включает малое количество волн. Иными словами, ΔH_2 в этой стадии сравнительно велико, а \bar{H}_2 еще мало.

При дальнейшем продвижении цуга отношение $\bar{H}_2/\Delta H_2$ растет, пока весь цуг волн не перейдет в направление q_2 . Легко видеть также, что при уменьшении дисперсии энергии всей системы, что соответствует, например, большей длине первоначального цуга, все соответственные времена (в частности, стандартное время) увеличиваются, что также находится в качественном согласии с (56).

Совсем другой смысл имеет известное соотношение, вытекающее из теории возмущений:

$$|(H_1 + H_2) - (H_{10} + H_{20})| \sim h/t, \quad (6)$$

где H_{10} и H_{20} означают начальные энергии взаимодействующих систем (или частиц) 1 и 2 в момент $t=0$, а H_1 и H_2 — их энергии в момент t . Величина $H' = H_1 + H_2$, которую мы будем называть собственной энергией частиц, отнюдь не равна полной энергии системы $H = H_1 + H_2 + \mu H_{12}$, так что соотношение (6) не имеет отношения к неопределенности ΔH полной энергии системы, которая для всякой изолированной системы остается постоянной во времени.

Более того, если рассматривать не полную энергию H , а лишь собственную энергию частиц H' , то все же вопреки часто встречающемуся утверждению соотношение (6) отнюдь не означает, что неопределенность собственной энергии частиц уменьшается по мере роста промежутка времени t , в течение которого эти частицы взаимодействуют. Действительно, вероятность того, что под влиянием заданного возмущения μH_{12} система за время t перейдет из начального состояния ψ_0 с собственной энергией $H'_0 = H_{10} + H_{20}$ в состояние с собственной энергией $H' = H_1 + H_2$, пропорциональна осциллирующей во времени величине $\frac{\sin^2 (H' - H'_0) t/h}{(H' - H'_0)^2}$. Поэтому вероятность $w(\varepsilon, t)$ того, что H' будет

в момент t отличаться от H'_0 не меньше чем на заданную величину ϵ не стремится к нулю с ростом t .

Можно, однако, поставить вопрос по-иному. Разобьем результаты измерения состояния системы в момент t на два класса; в класс A отнесем те случаи, когда система в момент t оказалась в исходном состоянии ψ_0 , а в класс B — все остальные случаи. По мере роста t вероятность случаев A падает, причем чем больше t , тем больше преобладают переходы системы в состояния, удовлетворяющие закону сохранения собственной энергии H' (резонанс); именно поэтому определенная выше вероятность $w(\epsilon, t)$ не существенно изменяется во времени, несмотря на уменьшение со временем случаев A , соответствующих точному сохранению собственной энергии частиц. Иными словами, если откинуть случаи класса A и рассматривать относительную вероятность различных результатов измерения внутри класса B (обнимающего измененные по сравнению с начальным состоянием системы), то такая относительная вероятность $w_B(\epsilon, t)$ результатов измерений класса B , в которых величина $|H' - H'_0|$ в момент t не меньше заданной величины ϵ , будет уменьшаться со временем. Формула (6) и устанавливает связь между t и тем значением $\epsilon = |(H_1 + H_2) - (H_{10} + H_{20})|$, при котором определенная таким образом вероятность $w_B(\epsilon, t)$ становится сравнимой с единицей.

Нам не удалось пока установить связь между соотношением (6) и формулированным выше соотношением неопределенности (5) — (5б), хотя мы и склонны считать существование такой связи вполне вероятным.

В качестве третьего примера рассмотрим вопрос о ширине спектральных линий или вообще — о связи между «длительностью жизни» τ данного состояния системы ψ_0 и неопределенностью ΔH энергии этого состояния.

Обозначим через L проекционный оператор, соответствующий состоянию системы ψ_0 и определяемый соотношением

$$L\psi = (\psi_0|\psi)\psi_0,$$

где

$$(\psi_0|\psi) = \int \psi_0^* \psi dx.$$

Одно из собственных значений оператора L равно 1, все остальные равны нулю. Поэтому

$$L^2 = L. \quad (7)$$

Математическое ожидание \bar{L} равно вероятности того, что система находится в состоянии ψ_0 ; очевидно, что $\bar{L} \leq 1$.

На основании (7)

$$\Delta L = \sqrt{\bar{L}^2 - (\bar{L})^2} = \sqrt{\bar{L} - (\bar{L})^2}.$$

Поэтому соотношение (5) принимает для оператора L вид ⁴

$$\Delta H \sqrt{L - (\bar{L})^2} \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} \right|. \quad (8)$$

Пусть при $t=0$ система находится в состоянии ψ_0 , т. е. $\bar{L}(0)=1$. Тогда из (8) следует, что при $t > 0$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{L(t)} \geq \frac{\Delta H t}{\hbar},$$

или

$$L(t) \geq \cos^2 \left(\frac{\Delta H t}{\hbar} \right). \quad (9)$$

Если обозначить через τ время полураспада состояния ψ_0 (т. е. $L(\tau)=1/2$, если $L(0)=1$), то из (9) получается хорошо известное (но уточненное в отношении числового множителя) соотношение между τ и неопределенностью ΔH энергии состояния ψ_0 :

$$\tau \Delta H \geq \frac{\pi}{4} \hbar. \quad (10)$$

Заметим еще, что в ряде вопросов, относящихся к измерениям, соотношение (5) дает часто возможность судить о величине промежутка времени, необходимого для получения достаточной «точности» измерения в тех или иных условиях.

4. Соотношение неопределенности (1) выводится обычно для так называемого чистого случая, т. е. в предположении существования волновой функции. То же самое предположение лежит в основе приведенного выше вывода соотношения (5).

Однако как (1), так и (5) справедливы и для общего случая «смеси». Это легко видеть из следующего.

Известно, что в общем случае смеси

$$\bar{R} = \sum p_i \int \varphi_i^* (R \varphi_i) dv, \quad (11)$$

где φ_i — некоторые функции, которые можно рассматривать как волновые функции тех чистых случаев, из которых смесь «составлена», а p_i — положительные числа, причем $\sum p_i = 1$.

Мы сохраним горизонтальную черту без индекса для обозначения среднего значения какой-нибудь величины F по всей совокупности. Пусть, далее,

$$\bar{F}^i = \int \varphi_i^* (F \varphi_i) dv.$$

⁴ Из (8), в частности, вытекает в соответствии с общим соотношением между скоростью изменения и стандартом произвольной величины, что экспоненциальный закон распада $\bar{L}(t) = e^{-\gamma t}$ может осуществляться лишь начиная с некоторого времени t , большего, чем $t_0 = \frac{1}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{\hbar^2 \gamma^2}{4 \Delta H^2} \right)$.

Тогда согласно (11)

$$\bar{R} = \sum p_i \bar{R}^i \quad \text{и} \quad (\Delta R)^2 = \overline{(R - \bar{R})^2} = \sum p_i \overline{(R - \bar{R})^2}^i. \quad (12)$$

Наконец, обозначим еще

$$(\Delta_i R)^2 = \overline{(R - \bar{R}^i)^2}.$$

Из (12)

$$(\Delta R)^2 = \sum p_i \{ \bar{R}^{2i} - 2\bar{R}\bar{R}^i + (\bar{R})^2 \},$$

но так как i -й член суммы не меньше, чем ⁵ $p_i \overline{(R - \bar{R}^i)^2}^i = p_i (\Delta_i R)^2$, то мы получаем

$$(\Delta R)^2 \geq \sum p_i (\Delta_i R)^2. \quad (13)$$

Пусть мы имеем две величины R и S , и пусть

$$(\Delta_i R)^2 (\Delta_i S)^2 \geq a_i^2; \quad (14)$$

тогда справедливо неравенство

$$(\Delta R)^2 (\Delta S)^2 \geq (\sum p_i a_i)^2. \quad (15)$$

Действительно, ввиду (13) и (14)

$$\begin{aligned} (\Delta R)^2 (\Delta S)^2 &\geq \sum p_i (\Delta_i R)^2 \sum p_k (\Delta_k S)^2 \geq \\ &\geq \sum_{i, k < i} p_i p_k \left\{ \left(\frac{\Delta_i R}{\Delta_k R} \right)^2 a_i^2 + \left(\frac{\Delta_k R}{\Delta_i R} \right)^2 a_k^2 \right\} + \sum_i p_i^2 a_i^2. \end{aligned}$$

Член первой суммы справа со значками i и k не меньше, чем $2p_i p_k a_i a_k$, откуда непосредственно следует справедливость соотношения (15).

Пусть $S \equiv q$, $R \equiv p$. Согласно (1) и (14) $a_i = h/2$. Поэтому из (15) вытекает, что соотношение (1) остается справедливым и для смеси, так как ведь ΔR и ΔS суть стандарты соответственных величин для всей совокупности.

Чтобы применить (15) для обобщения соотношения (5), нужно принять во внимание, что все φ_i суть решения одного и того же уравнения Шредингера. Пусть $S \equiv H$, тогда, сравнивая (5) и (14), мы можем положить

$$a_i^2 = \frac{h^2}{4} \left(\frac{\partial \bar{R}^i}{\partial t} \right)^2. \quad (16)$$

Нетрудно далее показать, что

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial t} = \sum p_i \frac{\partial \bar{R}^i}{\partial t}.$$

Отсюда, принимая во внимание (15) и (16), видим, что соотношение неопределенности (5) справедливо и для общего случая смеси.

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

⁵ Ибо из $(\bar{R}^i - \bar{R})^2 > 0$ следует, что $-2R\bar{R}^i + (\bar{R})^2 \geq -(\bar{R}^i)^2$.

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ. I¹

Излагается (§ 2) вариационный метод нахождения собственных функций непрерывного спектра уравнения Шредингера, аналогичный методу Ритца для дискретного спектра и позволяющий вычислять способом последовательных приближений поперечник соударения частиц.

В § 4 рассеяние частиц центральным полем сил рассматривается в пространстве импульсов. Сингулярное интегральное уравнение (4.5), определяющее рассеяние в этом пространстве, сводится к свободному от сингулярностей интегральному уравнению (4.12).

Оба изложенных метода могут быть легко обобщены на случай более широкого класса уравнений.

§ 1. Введение

Квантовая теория соударения и рассеяния частиц основывается на рассмотрении *непрерывного* спектра некоторых дифференциальных или интегральных уравнений. Собственные значения этих уравнений задаются энергией частицы E_0 , а эффективный поперечник рассеяния определяется асимптотическим поведением соответствующей собственной функции при $r \rightarrow \infty$ или (в пространстве импульсов) при $p \rightarrow p_0$ (в проблеме одного тела $p_0^2 = 2mE_0$). Эта статья посвящена математическим методам решения задач теории соударений.

Вариационный метод Ритца, столь удобный для решения дифференциальных и интегральных уравнений в области их дискретного спектра, не применим в области непрерывного спектра; § 2 посвящен изложению некоторой модификации этого метода, применимой к вычислению собственных функций непрерывного спектра.

Когда первый вариант настоящей статьи был мною закончен, я получил от Л. Хултена отпечаток его статьи «О вариационной проблеме для непрерывного спектра уравнения Шредингера» [1]. Метод Хултена очень схож с предложенным мною; соотношение между обоими методами рассмотрено в § 3.

Вторая часть статьи посвящена решению определенного класса сингулярных интегральных уравнений. Нерелятивистская теория соударений основывается обычно на уравнении Шредингера

¹ ЖЭТФ, 1948, 18, вып. 4, 337. Доложено на сессии физико-математического отделения АН СССР 20 октября 1946 г.



И. Е. ТАММ
(30-е годы)

в координатном пространстве, в котором это уравнение является дифференциальным. Однако, как было показано мною в другой статье ², *релятивистская* теория соударений не может быть сформулирована с помощью дифференциальных уравнений, а приводит к интегральным уравнениям в пространстве импульсов (или к более сложным интегродифференциальным уравнениям в пространстве координат).

Интегральные уравнения теории соударений в пространстве импульсов были впервые исследованы Дираком, который, однако, рассматривал только борновское приближение. Между тем это приближение для многих случаев недостаточно.

Так как интегральные уравнения в теории соударений оказываются сингулярными и так как не существует общих методов решения сингулярных интегральных уравнений, то для их решения необходимо разработать соответствующий метод. Изложению такого метода посвящен § 4. Этот метод применим как в нерелятивистской, так и в релятивистской теориях. В частности, в подготовляемой к печати статье автора будет с помощью этого метода показано, что даже в случае соударения тепловых нейтронов с протонами релятивистская поправка к эффективному перечнику соударения весьма существенна ³.

§ 2. Вариационный метод для непрерывного спектра

Рассмотрим сначала простейший случай рассеяния центральным полем сил частицы, находящейся в *s*-состоянии. Уравнение Шредингера для этого случая гласит:

$$(d^2\varphi(r)/dr^2) + [k^2 - V(r)]\varphi(r) = 0, \quad (2.1)$$

где волновое число *k* является заданным численным параметром задачи $k^2 = 2mE^2/\hbar^2$, а $V(r) = (2m/\hbar^2)U(r)$, причем $U(r)$ есть потенциальная энергия частицы и $0 \leq r \leq \infty$. Мы будем исходить из предположения, что $V(r)$ удовлетворяет следующим условиям ⁴:

$$\lim_{r \rightarrow 0} rV(r) \text{ конечен,} \quad (2.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2V(r) = 0. \quad (2.3)$$

² См. [2]. В недавней работе Н. Ху [3] релятивистское взаимодействие частиц описывается системой дифференциальных уравнений. Однако, как будет показано мною в другом месте, способ Ху ошибочен, а именно, он не учитывает того, что уровни отрицательной энергии дираковских частиц в нормальном состоянии заполнены.

³ Поправка эта обусловливается главным образом тем, что при малых расстояниях двух нуклонов друг от друга существенное влияние на их взаимодействие оказывает «отдача», испытываемая нуклонами при обмене мезонами.

⁴ На $V(r)$ можно наложить и несколько менее жесткие ограничения.

Граничное условие для $\varphi(r)$ гласит:

$$\varphi(0) = 0. \quad (2.4)$$

Волновую функцию $\varphi(r)$ можно нормировать так, чтобы при $r \rightarrow \infty$ она асимптотически стремилась к

$$\varphi_\infty = \sin(kr + \theta)/\cos \theta = \sin kr + \operatorname{tg} \theta \cos kr, \quad (2.5)$$

где θ — постоянная «фаза на бесконечности». Известно, что фазой θ определяется поперечник σ :

$$\sigma = (4\pi/k^2) \sin^2 \theta. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.1) с граничным условием (2.4) не может быть непосредственно сведено к вариационной задаче, так как $\varphi(r)$ не является квадратично интегрируемой функцией. Чтобы преодолеть это затруднение, рассмотрим вместо $\varphi(r)$ функцию $u(r)$, определяемую уравнением

$$\varphi(r) = \sin kr + u(r) \cos kr \quad (2.7)$$

и условием

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = u(\infty) = \operatorname{const}. \quad (2.8)$$

Из (2.4) и (2.5) следует, что

$$u(0) = 0, \quad (2.9)$$

$$u(\infty) = \operatorname{tg} \theta. \quad (2.10)$$

Внося (2.7) в (2.1), получаем для $u(r)$ неоднородное дифференциальное уравнение

$$u'' \cos kr - 2ku' \sin kr - V(r)[u \cos kr + \sin kr] = 0.$$

Помножая его на $\cos kr$, получаем

$$(d/dr)(u' \cos^2 kr) - V(r)[u \cos^2 kr + \sin kr \cos kr] = 0. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) с граничными условиями (2.8) и (2.9) эквивалентно следующему вариационному принципу:

$$\delta S = 0, \quad S = \int_0^\infty dr \{u'^2 \cos^2 kr + Vu^2 \cos^2 kr + 2Vu \cos^2 kr \sin kr\}. \quad (2.12)$$

Действительно, вариация δS интеграла S путем обычного интегрирования по частям может быть приведена к следующему виду:

$$\delta S = -2 \int_0^\infty dr \delta u(r) L(r) + 2[u'(r) \delta u(r) \cos^2 kr]_0^\infty,$$

где $L(r)$ означает левую часть уравнения (2. 11). Второй член в правой части этого выражения обращается в нуль ввиду граничных условий (2. 8) и (2. 9); поэтому уравнение (2. 11) эквивалентно уравнению $\delta S=0$.

Условия (2. 2), (2. 3), (2. 8) и (2. 9) обеспечивают сходимость интеграла S . Подынтегральное выражение в S содержит, в отличие от интеграла, рассматриваемого в методе Ритца для дискретного спектра, наряду с членами, квадратичными в $u(r)$, также и члены, линейные в $u(r)$. Эта особенность тесно связана с тем обстоятельством, что, в отличие от собственных функций дискретного спектра, ни $\varphi(r)$, ни $u(r)$ не интегрируемы квадратично и поэтому не могут быть нормированы обычным для дискретного спектра образом.

Изложенный метод весьма просто обобщается на случай рассеяния частиц, момент импульса которых отличен от нуля; обозначим его через lh . При $l \neq 0$ уравнение (2. 1) заменяется уравнением

$$\varphi''(r) + [k^2 - l(l+1)r^{-2} - V(r)]\varphi(r) = 0 \quad (2. 13)$$

с граничным условием

$$\varphi(r) \rightarrow \text{const } r^{l+1} \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (2. 14)$$

Волновую функцию $\varphi(r)$ можно нормировать так, чтобы при $r \rightarrow \infty$ она стремилась к

$$\varphi_\infty = \sin(kr - \pi l/2) + \text{tg } \theta_l \cos(kr - \pi l/2), \quad (2. 15)$$

где θ_l — постоянная. Поперечное сечение для рассеяния равно

$$\sigma_l = (4\pi/k^2)(2l+1) \sin^2 \theta_l. \quad (2. 16)$$

Вспомогательная функция $u(r)$ определяется уравнением

$$\varphi(r) = (\pi kr/2)^{1/2} \{ J_{(l+1/2)}(kr) + u(r) J_{-(l+1/2)}(kr) \} \quad (2. 17)$$

и граничными условиями

$$u(r) \rightarrow \text{const } r^{l+1} \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (2. 18)$$

$$u(\infty) = \text{const}. \quad (2. 19)$$

Из (2. 15) и (2. 17) следует, что

$$\text{tg } \theta_l = (-1)^l u(\infty). \quad (2. 20)$$

Внося (2. 17) в (2. 13) и помножая получающееся уравнение на $(\pi kr/2)^{1/2} J_{-(l+1/2)}(kr)$, после выполнения некоторых простых преобразований получаем

$$(d/dr) \{ u' r J_{-(l+1/2)}^2(kr) \} - r V J_{-(l+1/2)}(kr) \{ u J_{-(l+1/2)}(kr) + J_{(l+1/2)}(kr) \} = 0 \quad (2. 21)$$

Нетрудно доказать, что это уравнение при граничных условиях (2.18) и (2.19) эквивалентно вариационному принципу

$$\delta S = 0, \quad S = \int_0^{\infty} r dr \{ J_{-(l+1/2)}^2(kr) [u'^2 + uV]_l + 2uV J_{-(l+1/2)}(kr) J_{(l+1/2)}(kr) \}. \quad (2.22)$$

Уравнение (2.12) представляет собой частный случай уравнения (2.22) для $l=0$.

Изложенный метод может быть применен к более общему классу уравнений, чем класс, рассмотренный выше.

Вариационный принцип (2.12) или (2.22) очень удобен для приближенного вычисления фазы на бесконечности θ_l и поперечника рассеяния σ_l . Функцию $u(r)$, как и в обычном методе Ритца, можно аппроксимировать подходящей функцией, зависящей от некоторых параметров c_i ($i=1, 2, \dots, n$). Оптимальное значение этих параметров определяется из системы уравнений

$$\partial S / \partial c_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.23)$$

В качестве иллюстрации метода рассмотрим рассеяние частицы нулевой энергии ($k=0$), момент импульса которой равен нулю, силовым полем

$$V(r) = -(\alpha x/r) e^{-\kappa r}, \quad (2.24)$$

где α и κ — постоянные (эта задача связана с рассеянием тепловых нейтронов протонами). Ввиду того что поперечник рассеяния σ должен оставаться конечным при $k \rightarrow 0$, из (2.6) следует, что θ и $u(\infty)$ обращаются в нуль вместе с k . Поэтому можно положить

$$u(r) = kf(r), \quad (2.25)$$

где $f(r)$ остается конечным при $k=0$. Заменяя $\sin kr$ и $\cos kr$ в (2.12) соответственно на kr и на 1 и разделив S на k^2 , получаем

$$S^* = S/k^2 = \int_0^{\infty} dr \{ f'^2 - \alpha x e^{-\kappa r} (f^2 r^{-1} + 2f) \}. \quad (2.26)$$

В первом приближении можно положить

$$f(r) = (1/\gamma\kappa) (1 - e^{-\alpha\kappa r}), \quad (2.27)$$

где α и γ — произвольные параметры. При таком выборе функции условия (2.8) и (2.9) удовлетворяются автоматически (при $\alpha > 0$). Из (2.6), (2.10), (2.25) и (2.27) следует, что при $k=0$

$$\sigma = 4\pi/(\gamma\kappa)^2. \quad (2.28)$$

Внося (2.27) в (2.26) и выполнив интегрирование, получаем

$$xS^* = \frac{a}{2\gamma^2} - \frac{2a\alpha}{\gamma(1+\alpha)} - \frac{a}{\gamma^2} \ln \left[\frac{(1+\alpha)^2}{1+2\alpha} \right].$$

Уравнения (2.23) в рассматриваемом случае гласят:

$$\begin{aligned} \gamma^2 x \frac{\partial S^*}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} - \frac{2\alpha\gamma}{(1+\alpha)^2} - \frac{2a\alpha}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} = 0, \\ \gamma^3 x \frac{\partial S^*}{\partial \gamma} &= -\alpha + \frac{2\alpha\gamma a}{1+\alpha} + 2a \ln \left[\frac{(1+\alpha)^2}{1+2\alpha} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

При заданном a эти два трансцендентных уравнения определяют оптимальное значение параметра γ , а следовательно, на основании (2.28) и значение поперечника σ . Значения γ , полученные в этом первом приближении для случаев $a=1,4$ и $a=1,5$, приведены в первом столбце таблицы.

	Уравнение (2.29)	Л. Хултен	Г. Бете
$a = 1,4$	0,1441	0,1414	0,1496
$a = 1,5$	0,0880	0,0865	0,0940

Их следует сравнить со значениями последнего столбца, полученными Г. Бете [4] для рассмотренного случая ($k=0$ и $V(r)$, определяемое уравнением (2.24)) путем численного интегрирования уравнения (2.1). Ко второму столбцу таблицы мы вернемся в § 3.

§ 3. О вариационном методе Хултена

Рассмотрим соотношение между методом, изложенным в § 2, и методом Л. Хултена [1]. Ограничимся случаем s -состояний ($l=0$) и обозначим через L оператор, соответствующий правой части уравнения Шредингера (2.1):

$$L = (d^2/dr^2) + k^2 - V(r). \quad (3.1)$$

Рассмотрим интеграл

$$T = \int \varphi(r) L \varphi(r) dr, \quad (3.2)$$

где $\varphi(r)$ — конечная непрерывная функция r , асимптотическое выражение которой при $r \rightarrow \infty$ имеет вид (2.5), причем θ — произвольная постоянная⁵. Будем под $\delta'\varphi$ понимать произвольную

⁵ Л. Хултен выбирает для $\varphi(r)$ несколько иную нормировку [$\varphi(\infty) = \sin(kr + \theta)$], что, однако, не играет никакой роли для последующих выводов. Некоторые обозначения Хултена также отличаются от тех, которыми мы пользуемся.

вариацию функции φ , не изменяющую, однако, ее фазы θ на бесконечности; соответствующую вариацию интеграла T обозначим через $\delta'T$. В этих обозначениях доказанная Хултенем теорема гласит: дифференциальное уравнение (2.1) эквивалентно вариационной задаче

$$\delta'T = 0 \quad (3.3)$$

при дополнительном условии

$$T = 0. \quad (3.4)$$

Аппроксимируем φ подходящей функцией, зависящей от n параметров c_i , к которым должна быть причислена и фаза функции θ ; положим, что

$$c_1 = \theta. \quad (3.5)$$

Оптимальные значения этих n параметров определяются, по Хултену, в соответствии с (3.3) и (3.4) системой n уравнений

$$T = 0, \quad \partial T / \partial c_i = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (3.6)$$

Чтобы установить соотношение между методами Хултена и нашим, представим функцию φ в форме (2.7). Путем интегрирования по частям можно показать, приняв во внимание граничные условия (2.8) и (2.10), что

$$T = -S - k \operatorname{tg} \theta - \int_0^{\infty} V \sin^2 kr dr, \quad (3.7)$$

где S означает введенный нами интеграл (2.12). Следовательно, при $i \neq 1$

$$\partial T / \partial c_i = -\partial S / \partial c_i \quad (i \neq 1). \quad (3.8)$$

Таким образом, $n - 1$ уравнений системы (2.23) совпадают с соответствующими уравнениями Хултена (3.6); наше же уравнение

$$\partial S / \partial c_1 = \partial S / \partial \theta = 0 \quad (3.9)$$

заменяется в методе Хултена уравнением (3.4).

Точное решение дифференциального уравнения (2.1) должно удовлетворять как уравнению (3.9), так и уравнению (3.4); оптимальные же значения параметров c_i в случае приближенной замены $\varphi(r)$ аппроксимирующей функцией окажутся, очевидно, различными в зависимости от применяемого метода.

Известным преимуществом метода Хултена можно считать то обстоятельство, что его удобно применять к аппроксимирующим функциям несколько более общего вида, чем функции типа (2.7), а именно, к функциям вида

$$\varphi(r) = w(r) \sin kr + u(r) \cos kr, \quad (3.10)$$

где $w(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$ и $rw(r)$ конечно при $r=0$. С другой стороны, я склонен усматривать известное преимущество моего метода в том, что интеграл S (уравнение (2.12)) несколько проще интеграла T (уравнение (3.2)), и в том, что доказательство и формулировка вариационного принципа в моей форме представляются мне более естественными.

Более существенным, однако, является вопрос о том, какой из методов дает лучшее приближение (при заданном виде аппроксимирующей функции). Чтобы ориентироваться в этом вопросе, применим метод Хултена к той же задаче, которая была рассмотрена в конце § 2, воспользовавшись для этого той же аппроксимацией (2.27). Полученные таким образом значения параметра γ , определяющего сечение рассеяния при $k=0$, приведены во втором столбце таблицы.

Сравнение значений γ , полученных обоими методами, с результатами численного интегрирования (данные Бете, третий столбец таблицы) показывает, что по крайней мере в рассмотренном случае мой метод дает несколько лучшее приближение, чем метод Хултена.

§ 4. Решение интегрального уравнения, описывающего рассеяние частиц в пространстве импульсов

Хотя метод решения определенного класса сингулярных интегральных уравнений, изложению которого посвящен настоящий параграф, носит вполне общий характер, мы разясним его только на простейшем примере рассеяния центральным полем сил частицы, момент импульса которой равен нулю.

В координатном пространстве этот процесс описывается дифференциальным уравнением (2.1):

$$d^2\varphi(r)/dr^2 + [k_0^2 - V(r)]\varphi(r) = 0; \quad (4.1)$$

в отличие от (2.1), в уравнении (4.1) волновое число обозначено не через k , а через k_0 ($\hbar^2 k_0^2/2m = E_0$ — энергия частицы). Переход к пространству импульсов осуществляется путем преобразования волновой функции по Фурье:

$$w(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} \int \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad \psi(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2} \int w(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (4.2)$$

причем функция $\psi(\mathbf{r})$ связана с входящей в (4.1) функцией $\varphi(r)$ соотношением

$$\psi(\mathbf{r}) = \varphi(r)/r \quad (4.3)$$

и в настоящем случае не зависит от направления радиус-вектора

г. Внося (4.3) в (4.2), получаем

$$u(k) = kw(k) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^{\infty} \varphi(r) \sin kr dr, \quad (4.4)$$

$$\varphi(r) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^{\infty} u(k) \sin kr dk.$$

Из (4.1) и (4.4) вытекает следующее интегральное уравнение для $u(k)$:

$$(k_0^2 - k^2) u(k) = \int_0^{\infty} S(k, l) u(l) dl, \quad (4.5)$$

где

$$S(k, l) = S(l, k) = (2/\pi) \int_0^{\infty} V(r) \sin kr \sin lr dr. \quad (4.6)$$

Интегральное уравнение (4.5) сингулярно, так как коэффициент при искомой функции $u(k)$ в левой части этого уравнения обращается в нуль при $k=k_0$. Соответственно этому собственная функция $u(k)$ данного уравнения также обладает особенностью при $k=k_0$. Если волновую функцию $u(k)$ в пространстве координат нормировать согласно уравнению (2.5), то, как легко показать с помощью (4.4), она будет иметь вид⁶

$$u(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(k - k_0) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\beta k}{k^2 - k_0^2} + f(k) \right), \quad (4.7)$$

где функция $f(k)$ не имеет особенностей при $k=k_0$ и где

$$\beta = \operatorname{tg} \theta. \quad (4.8)$$

⁶ Уравнение (4.7) доказывается с помощью формул

$$\int_0^{\infty} \sin kr \sin k_0 r dr = (\pi/2) \{ \delta(k - k_0) - \delta(k + k_0) \},$$

$$\int_0^{\infty} \sin kr \cos k_0 r dr = \frac{k}{k^2 - k_0^2} - \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\cos(k + k_0)r}{k + k_0} + \frac{\cos(k - k_0)r}{k - k_0} \right\}.$$

Последний член в последней формуле можно опустить, так как для любой достаточно регулярной функции $f(x)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \frac{\cos xr}{x} dx = 0,$$

если $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Внеся (4.7) в (4.5) и разделив полученное уравнение на $(2/\pi)^{1/2}$, получаем

$$(k_0^2 - k^2) f(k) = \beta k + \frac{\pi}{2} S(k, k_0) + \beta \int_0^\infty \frac{S(k, l) l dl}{l^2 - k_0^2} + \int_0^\infty S(k, l) f(l) dl. \quad (4.9)$$

Можно показать, что в этом уравнении под интегралом

$$I(k) = \int_0^\infty \frac{S(k, l) l dl}{l^2 - k_0^2} \quad (4.10)$$

нужно понимать *главное значение* этого интеграла ⁷

⁷ Действительно,

$$\varphi(r) = \sin k_0 r + \beta \cos k_0 r + \chi(r), \quad (a)$$

где

$$\chi(0) = -\beta \quad \text{и} \quad \chi(\infty) = 0. \quad (б)$$

Далее,

$$f(k) = \int_0^\infty \chi(r) \sin kr dr. \quad (в)$$

Внеся (а) в (4.1), помножив полученное уравнение на $\sin kr$ и проинтегрировав его затем по r , получаем

$$(k_0^2 - k^2) f(k) + [\chi'(r) \sin kr - k\chi(r) \cos kr]_0^\infty = (\pi/2) S(k, k_0) + \beta \int_0^\infty V(r) \cos k_0 r \sin kr dr + \int_0^\infty S(k, l) f(l) dl. \quad (г)$$

Второй член слева на основании (б) равен $-\beta k$. Далее, из (4.6) следует

$$\int_0^\infty S(k, l) \sin l r dl = \int_0^\infty V(\rho) \sin k\rho\delta(r - \rho) d\rho = V(r) \sin kr.$$

Таким образом, предпоследний интеграл в уравнении (г) равен

$$\int_0^\infty V(r) \cos k_0 r \sin kr dr = \int_0^\infty dr \cos k_0 r \int_0^\infty S(k, l) \sin l r dl.$$

Этот двойной интеграл сходится на основании условия (2.3). Если, однако, изменить в нем порядок интегрирования, то мы получим интеграл (4.10), подынтегральное выражение которого обладает особенностью при $k = k_0$. Приведенное в тексте утверждение следует из того, что

$$\int_0^\infty V(r) \cos k_0 r \sin kr dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dr \cos k_0 r \left[\int_0^{k_0 - \varepsilon} S(k, l) \sin l r dl + \int_{k_0 + \varepsilon}^\infty S(k, l) \sin l r dl \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{k_0 - \varepsilon} \frac{S(k, l) l dl}{l^2 - k_0^2} + \int_{k_0 + \varepsilon}^\infty \frac{S(k, l) l dl}{l^2 - k_0^2} \right].$$

Чтобы определить значение постоянной $\beta = \operatorname{tg} \theta$, положим в уравнении (4.9) $k = k_0$. Ввиду регулярности функции $f(k)$ получаем

$$0 = \beta k_0 + (\pi/2) S(k_0, k_0) + \beta I(k_0) + \int_0^{\infty} S(k_0, l) f(l) dl,$$

или

$$\beta = - \left\{ (\pi/2) S(k_0, k_0) + \int_0^{\infty} S(k_0, l) f(l) dl \right\} / (k_0 + I(k_0)). \quad (4.11)$$

Наконец, внося (4.11) в (4.9), получаем

$$(k_0^2 - k^2) f(k) = (\pi/2) S(k, k_0) + \int_0^{\infty} S(k, l) f(l) dl - \\ - \left(\frac{k + I(k)}{k_0 + I(k_0)} \right) \left[\frac{\pi}{2} S(k_0, k_0) + \int_0^{\infty} S(k_0, l) f(l) dl \right]. \quad (4.12)$$

Так как правая часть этого уравнения обращается в нуль при $k = k_0$, то это интегральное уравнение для функции $f(k)$ не имеет особенности при $k = k_0$.

Чтобы исследовать поведение функции $f(k)$ при $k \rightarrow \infty$, выполним в (4.6) интегрирование по частям:

$$S(k, l) = -\frac{2}{\pi k} V(r) \cos kr \sin lr \Big|_0^{\infty} + \frac{2l}{\pi k} \int_0^{\infty} dr \cos kr \frac{d}{dr} (V(r) \sin lr).$$

На основании (2.2) и (2.3) первый член справа конечен при $k \neq 0$. Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [kS(k, l)] \text{ конечен.} \quad (4.13)$$

Из этого уравнения и уравнения (4.12) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [kf(k)] \text{ конечен,} \quad (4.14)$$

если только интегралы, входящие в правую часть уравнения (4.12), сходятся. С другой стороны, сходимость этих интегралов обеспечена, если функция удовлетворяет на бесконечности условию (4.14). Следовательно, у интегрального уравнения (4.12) есть решение $f(k)$, регулярное как при $k = k_0$, так и при $k = \infty$.

Найдя регулярное решение $f(k)$ интегрального уравнения (4.12), мы можем вычислить значение постоянной $\beta = \operatorname{tg} \theta$ с помощью уравнения (4.11), а затем эффективный поперечник рассеяния σ с помощью (2.6):

$$\sigma = (4\pi/k_0^2) \sin^2 \theta = 4\pi\beta^2 / (1 + \beta^2) k_0^2. \quad (4.15)$$

Таким образом, задача о решении сингулярного интегрального уравнения (4.5) сведена нами к решению регулярного интегрального уравнения (4.12).

Применение изложенного в этом параграфе метода к теории рассеяния протонов на протонах ⁸ и на нейтронах, учитывающее релятивистские эффекты, будет дано в подготовляемых к печати статьях П. Е. Кунина и автора настоящей статьи.

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила
17 ноября 1947 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *L. Hulthén, K. Fysiograf. Sällsk. Lund Förhänl.*, 1944, 14, N21.
2. *Ig. Tamm. J. Phys.*, 1945, 9, 449, (см. наст. изд. т. II, статью 42 — прим. ред.).
3. *N. Hu. Phys. Rev.*, 1945, 67, 339.
4. *H. Bethe. Phys. Rev.*, 1940, 57, 390 (§ 11).

⁸ В этом случае условие (2.5) не удовлетворяется и метод нуждается в известном обобщении.

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ. II ¹

Указываются недостатки вариационного метода нахождения собственных функций непрерывного спектра, изложенного в первой статье автора, и предлагается несколько видоизмененный вариационный метод, свободный от этих недостатков.

Первая часть предыдущей статьи автора ² была посвящена изложению вариационного метода нахождения собственных функций непрерывного спектра уравнения Шредингера в поле центральных сил. К сожалению, условия применимости этого метода в действительности существенно более жестки, чем указанные в статье. Я весьма признателен В. А. Фоку за то, что он любезно обратил мое внимание на допущенный мною недосмотр.

В настоящей заметке в § 1 излагается несколько видоизмененный вариационный метод, условия применимости которого совпадают с указанными в предыдущей статье (эту статью мы в дальнейшем будем обозначать цифрой I), а в § 2 выясняются действительные условия применимости метода, развитого в I.

§ 1. Ограничимся рассмотрением s -состояний ³. Уравнение Шредингера в этом случае имеет вид I (2.1):

$$(d^2\varphi/dr^2) + [k^2 - V(r)]\varphi(r) = 0, \quad (1)$$

где $V(r)$ пропорционально потенциальной энергии частицы. Как и в I, предположим, что $V(r)$ удовлетворяет условиям I (2.2) и I (2.3):

$$\lim_{r \rightarrow 0} rV(r) \text{ конечен}, \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2V(r) = 0. \quad (3)$$

Граничное условие I (2.4) для $\varphi(r)$ гласит:

$$\varphi(0) = 0. \quad (4)$$

При $r \rightarrow \infty$ волновая функция асимптотически стремится к

$$\varphi_\infty(r) = \text{const} \sin(kr + \theta), \quad (5)$$

¹ ЖЭТФ, 1949, 19, вып. 1, 74.

² ЖЭТФ, 1948, 18, 337 (см. наст. том, работа 20—*прим. ред.*).

³ Обобщение на случай произвольного момента импульса $l\hbar$ не представляет затруднений.

где θ — постоянная «фаза на бесконечности», значением которой определяется поперечник рассеяния частицы в центральном силовом поле $V(r)$.

Рассмотрим вместо $\varphi(r)$ функцию $\chi(r)$, определяемую уравнением

$$\varphi(r) = \text{const} \{e^{ikr} - \chi(r)e^{-ikr}\} \quad (6)$$

и граничным условием

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \chi(r) = \text{const}. \quad (7)$$

В отличие от рассматривавшейся в I функции $u(r)$, функция $\chi(r)$ всюду конечна, если конечна $\varphi(r)$. Из (4) и (6) следует, что

$$\chi(0) = 1. \quad (8)$$

Наконец, из (5) и (6) следует, что ⁴

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \chi(r) = e^{-2i\theta}. \quad (9)$$

Внося (6) в (1), получаем дифференциальное уравнение для χ :

$$\chi'' - 2ik\chi' - V(r)\{\chi - e^{2ikr}\} = 0, \quad (10)$$

где штрих означает дифференцирование по r .

Введем вместо комплексной функции $\chi(r)$ две вещественные функции $f(r)$ и $g(r)$:

$$\chi(r) = f(r) + ig(r). \quad (11)$$

Внося (11) в (10), получим систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f'' + 2kg' - V(r)\{f - \cos 2kr\} &= 0, \\ g'' - 2kf' - V(r)\{g - \sin 2kr\} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

с граничными условиями (см. (7) и (8))

$$f(0) = 1, \quad g(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f' = \lim_{r \rightarrow \infty} g' = 0. \quad (13)$$

Система уравнений (12) с граничными условиями (13) эквивалентна следующему вариационному принципу:

$$\begin{aligned} \delta S = 0, \quad S = \int_0^{\infty} dr \{ & \frac{1}{2} [f'^2 - g'^2 + V[f^2 - g^2]] \sin 2kr - \\ & - [f'g' + fgV] \cos 2kr + gV \}. \end{aligned} \quad (14)$$

⁴ Заметим, что $\chi(\infty)$ представляет собой диагональный элемент введенной В. Гейзенбергом матрицы рассеяния $S(k)$ (или, точнее, матрицы $S^*(k)$).

Действительно, варьируя в S независимо друг от друга $f(r)$ и $g(r)$, производя интегрирование по частям и используя условия (13), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} (f'' + 2kg' - Vf) \sin 2kr - (g'' - 2kf' - Vg) \cos 2kr &= 0, \\ (f'' + 2kg' - Vf) \cos 2kr + (g'' - 2kf' - Vg) \sin 2kr + V &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

которая, как легко видеть, эквивалентна системе (12). Условия (2), (3) и (13) обеспечивают сходимость интеграла S .

Из уравнений (12) можно исключить потенциальную энергию $V(r)$. Помножая первое из этих уравнений на $g - \sin 2kr$, а второе на $-(f - \cos 2kr)$ и складывая результаты, получаем после простых преобразований

$$(d/dr) \{f'g - fg' + k(f^2 + g^2) - (f' \sin 2kr + g' \cos 2kr)\} = 0.$$

Значение постоянной, которой равняется выражение в фигурных скобках, можно определить с помощью граничных условий (13), относящихся к $r=0$:

$$f'g - fg' + k(f^2 + g^2) - (f' \sin 2kr + g' \cos 2kr) = k. \quad (16)$$

Воспользовавшись теперь граничными условиями (13), относящимися к $r=\infty$, находим из (16)

$$f^2(\infty) + g^2(\infty) = |\chi(\infty)|^2 = 1. \quad (17)$$

Следовательно, функция $\chi = f + ig$, определяемая вариационным принципом (14) и граничными условиями (13), действительно может быть при $r=\infty$ выражена в виде (9).

Таким образом, вариационный принцип (14) может быть применен для определения собственных функций непрерывного спектра путем последовательных приближений по способу, аналогичному методу Ритца для дискретного спектра. В заключение заметим, что волновая функция $\varphi(r)$, определенная уравнением (6), путем умножения на *постоянный* множитель всегда может быть приведена к вещественному виду. Покажем, что вещественной является функция

$$\varphi(r) = e^{-2i\theta} \{e^{ikr} - \chi(r)e^{-ikr}\}.$$

Условие вещественности этого выражения на основании (14) гласит:

$$f \cos(kr - \theta) + g \sin(kr - \theta) - \cos(kr + \theta) = 0. \quad (18)$$

Дифференцируя это уравнение по r и исключая из полученного уравнения и из (18) неизвестную фазу θ , мы приходим к некоторому соотношению между функциями f , g и их производными, которое, как оказывается, совпадает с уравнением (16), вытекающим из вариационного принципа (14) и граничных условий (13).

§ 2. В I вариационный принцип был сформулирован не для функций $f(r)$ и $g(r)$, а для функции $u(r)$, которая в случае S -состояния связана с волновой функцией $\varphi(r)$ соотношением I (2.7),

$$\varphi(r) = \sin kr + u(r) \cos kr \quad (19)$$

при условии I (2.8):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = \text{const.} \quad (20)$$

Однако функция

$$u(r) = (\varphi(r) - \sin kr) / \cos kr$$

обращается в бесконечность при $kr = (2n+1)\pi/2$.

Это приводит к тому, что интеграл S (уравнение I (2.12)) расходится, что делает весь метод статьи I, вообще говоря, неприменимым.

Этот метод остается применимым в том случае, если силовое поле обладает конечным радиусом действия r_0 , т. е. обращается в нуль при $r > r_0$. Если к тому же удовлетворяется условие⁵

$$kr_0 < \pi/2, \quad (21)$$

то нули косинуса $kr = (\pi/2) + n\pi$ лежат вне радиуса действия сил в области, где $\varphi(r)$ можно в соответствии с (19) нормировать так, чтобы $\varphi(r) - \sin kr = \text{const} \cos kr$. Таким образом, при условии (21) функция $u(r)$ остается всюду конечной и в соответствии с (20)

обращается в постоянную при $r > r_0$.

В случае состояний, соответствующих моменту импульса $l\hbar$, условие (21) принимает вид

$$kr_0 < x_l, \quad (22)$$

где x_l — первый корень функции $I_{-(l+1/2)}(x)$: $x_0 = \pi/2$, $x_1 = 2,80$, $x_2 = 4,0$ и т. д.

Если принять радиус действия ядерных сил равным $r_0 = e^2/mc^2 = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см, то для случая рассеяния нейтрона на протоне условия (21), (22) оказываются эквивалентными следующим: $E < 13$ Мэв (S -состояние), $E < 40$ Мэв (P -состояние), $E < 80$ Мэв (D -состояние) и т. д., где E означает энергию нейтрона в лабораторной системе координат.

Мы не станем останавливаться на вопросе о том, с какой степенью точности можно применять изложенный в статье I метод в случае, когда силы не обладают конечным радиусом действия или когда радиус действия сил не удовлетворяет условиям (21) и (22), так как применимость метода, изложенного в § 1 настоящей статьи, не ограничена этими условиями.

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила
28 июля 1948 г.

⁵ Это условие применимости метода выполняется в случае частного примера, рассмотренного в статье I.

ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ И АТОМНОГО ЯДРА

МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ НЕЙТРОНА ¹

Совместно с С. Альтшулером

А. Ланде [1] недавно определил магнитный спиновый момент μ_p протона из сверхтонкой структуры спектральных линий и нашел, что μ_p равен 2 ядерным магнетонам. Этот результат примерно совпадает с измерениями О. Штерна ($\mu_p = 2^{1/2}$). Ланде воспользовался обобщенным выражением для фактора пропорциональности g между магнитным и механическим моментами:

$$g = \alpha \frac{J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)}{2J(J+1)} + \beta \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}, \quad (1)$$

где L , S и J суть обычные квантовые числа, α равно отношению магнитного орбитального момента к орбитальному моменту вращения, а β — соответствующему отношению спиновых моментов. Ланде исходит из допущения, что момент вращения и магнитный момент ядер, состоящих из нечетного числа Z протонов и четного числа $N = A - Z$ нейтронов, обуславливается движением и спином одного-единственного протона, так что к ядрам этого класса применима формула (1) при $S = 1/2$ и $J = L \pm 1/2$. Ланде показал, что если учесть, что α должно равняться 1, и если положить $\beta = 4$, то можно теоретически истолковать почти все значения величин J и g , приведенные в сводке Гаудсмита для ядер рассматриваемого класса (Z — нечетное, N — четное).

Попытаемся аналогичным образом определить спиновый магнитный момент нейтрона ² μ_n . Опыт показывает, что все ядра

¹ Докл. АН СССР, 1934, 8, 455 (представлено академиком Л. И. Мандельштамом).

² Б. Венкатасачар и Т. Суббарая [2] пытались применить обычную формулу А. Ланде к определению магнитного момента нейтрона. Однако их рассуждения основаны на ряде недоразумений.

с четным числом протонов и нейтронов (Z и N — четные) не обладают ни моментом вращения, ни магнитным моментом. Таким образом, весьма вероятно, что если, например, Z — четно, а N — нечетно, то нечетное число нейтронов движется в поле остова ядра, обладающем шаровой симметрией. Но в поле шаровой симметрии справедливость формулы (1) может быть доказана (в предположении, что связь моментов относится к рессель-саундерсовскому типу) методами теории групп, вне зависимости от специального вида волнового уравнения нейтрона. При этом, очевидно, α должно равняться нулю, ибо нейтрон магнитным орбитальным моментом не обладает. Значения фактора g , вычисленные по формуле (1) при $\alpha=0$, приведены в табл. 1. Как оказывается, фактор g имеет для различных конфигураций нейтронов различные знаки, тогда как в случае электронов и протонов этот фактор имеет один определенный знак. Этим объясняется тот факт, что для ядер с нечетным числом нейтронов фактор g по данным опыта бывает как положительным, так и отрицательным, тогда как при N четном g всегда положительно.

Т а б л и ц а 1

$S = 1/2$				$S = 1$				$S = 1/3$				
L	J			L	J			L	J			
	$1/2$	$3/2$	$5/2$		0	1	2	3		$1/2$	$3/2$	$5/2$
0	$+\beta$	—	—	0	—	β	—	—	0	—	β	—
1	$-\beta/3$	$+\beta/3$	—	1	0/0	$\beta/2$	$\beta/2$	—	1	$(5/3)\beta$	$(11/15)\beta$	$(3/5)\beta$
2	—	$-\beta/5$	$+\beta/5$	2	—	$-\beta/2$	$\beta/0$	$\beta/3$	2	$-\beta$	$\beta/3$	$(13/35)\beta$
3	—	—	$-\beta/7$	3	—	—	$-\beta/3$	$\beta/12$	3	—	$-(3/5)\beta$	$\beta/35$

Чтобы определить численное значение величины β , мы попытались истолковать на основе табл. 1 экспериментальные значения фактора g для ядер с четным Z и нечетным N . При этом оказалось недостаточным допустить по аналогии с Ланде, что магнитный и вращательный моменты обуславливаются движением и спином одного-единственного нейтрона. Оказывается необходимым допустить, что в некоторых ядрах не компенсирован спин по крайней мере трех нейтронов ($S=3/2$). Впрочем вовсе не очевидно, что дублетные термы ($S=1/2$) нейтронов в ядре будут всегда лежать ниже термов квартетных ($S=3/2$). С другой стороны, в ядрах, по всей вероятности, образуется максимально возможное число

α -частиц, так что при Z четном ни один протон не будет активным в магнитном отношении (и один протон при Z нечетном).

Если, таким образом, предположить, что при N нечетном общий спин нейтрона S может равняться либо $1/2$, либо $3/2$, то все измеренные для таких ядер значения g могут быть весьма просто истолкованы на основе табл. 1, если положить $\beta = -1$, т. е. $\mu_n = \beta S = -1/2$ (табл. 2)³. Экспериментальные значения J и g взяты из новейшей сводки Шюлера и Вестмейера [3]; в случае Sr неясно, равно ли $J = -3/2$ или $J = 1/2$. Так как значение J известно для каждого ядра, а \bar{S} , по предположению, может равняться $1/2$ либо $3/2$, то а priori для каждого ядра возможен выбор между 4 (при $J = 1/2$) или 6 (при $J \geq 3/2$) значениями L (в отличие от двух возможностей у Ланде). Однако то, что значения g частью положительны, а частью отрицательны, существенно сужает произвол, поэтому выбор числа L , а также и выбор значения β оказывается практически однозначным. Заметим, что, за исключением недоверенного случая Sr, все остальные четыре квартетные конфигурации соответствуют противоположному направлению спина и орбитального момента.

Т а б л и ц а 2

	$J_{\text{табл}}$	$g_{\text{табл}}$	$g_{\text{вычисл}}$	Выбор числа
Cd _{111, 113}	1/2	-1,06	-1,00	$L = 0, S = 1/2$
Sn _{117, 119}	1/2	-1,81	-1,67	$L = 1, S = 3/2$
Ba _{135, 137}	3/2	0,60	0,60	$L = 3, S = 3/2$
Hg ₁₉₉	1/2	0,92	1,00	$L = 2, S = 3/2$
Hg ₂₀₁	3/2	-0,34	-0,33	$L = 1, S = 1/2$
Pb ₂₀₇	1/2	1,05	1,00	$L = 2, S = 3/2$
Sr ₈₇	3/2?	-0,65	-0,73	$L = 1, S = 3/2$

Обратимся теперь к рассмотренным Ланде ядрам с четным N и нечетным Z , а именно к изотопам Ga и Sb. Ланде не удалось объяснить значения g для Ga₆₉ и Ga₇₁ на основе сделанного им допущения, что в ядрах этого класса спин нейтронов взаимно компенсирован; для Sb вычисленное им значение $g = 1,6$ плохо согласуется с измеренным $g = 1,1$. Мы допустим, что в Ga₆₉ и Sb₁₂₁, в отличие от Ga₇₁ и Sb₁₂₃, спин двух нейтронов не компенсирован, причем состояние протона одинаково в обоих изотопах Ga, так же как и в изотопах Sb. При современном состоянии теории в отношении связи моментов можно только утверждать, что благодаря обменным силам наиболее сильной будет связь между спинами нейтронов, а также между их орбитальными моментами. Допустим, далее, что мы имеем дело со связью типа $\{j_p, j_n\}$. Тогда мы при-

³ Отрицательный знак означает, что магнитный момент нейтрона направлен противоположно спиновому моменту вращения.

ходим к следующему истолкованию ядерных моментов Ga и Sb (при $\mu_p = 4 \times 1/2$ и $\mu_n = -1 \times 1/2$, см. табл. 3).

Т а б л и ц а 3

	$J_{\text{набл}}$	$g_{\text{набл}}$	$g_{\text{вычисл}}$	Протон	Нейтроны
Ga ₆₉	$3/2$	1,43	1,33	} $l_p = 1$ $J_p = 3/2$	} $S_n = 1, L_n = 1, j_n = 1$ Насыщенные
Ga ₇₁	$3/2$	1,84	2,00		
Sb ₁₂₁	$5/2$	1,08	1,02	} $l_p = 3$ $J_p = 7/2$	} $S_n = 1, L_n = 1, J_n = 1$ Насыщенные
Sb ₁₂₃	$7/2$	0,60	0,57		

В заключение рассмотрим еще $N_{14} = 3\alpha + p + n$, для которого по данным опыта $J = 1$ и $|g| \leq 0,2$ [4]. Предполагая, что связь моментов относится к тому же типу $\{j_p, j_n\}$, получаем, например, следующие возможные конфигурации: а) $l_p = l_n = 1, j_p = j_n = 1/2, g = 1/6$; б) $l_p = 2, l_n = 1, j_p = j_n = 3/2, g = 1/30$. Таким образом, сделанное Бачером допущение, что $\mu_n = -\mu_p$, вовсе не необходимо, чтобы объяснить отсутствие сверхтонкой структуры в спектре N_{14} .

Разумеется, приведенные конфигурации протонов и нейтронов, в особенности для трех последних элементов, ни в коей мере не могут считаться несомненными. Мы привели их только для того, чтобы показать, что наши основные предположения могут быть согласованы с опытом. Более достоверным представляется нам тот результат, что магнитный момент нейтрона равен $-1/2$ ядерного магнетона.

Москва, Научно-исследовательский институт физики
Московского государственного университета.
Отдел теоретической физики

Поступила
22 февраля 1934 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. A. Landé. Phys. Rev., 1933, 44, 1028.
2. B. Venkatasachar, T. Subbaraya. Z. Phys., 1933, 85, 264.
3. H. Schuler, H. Westmeyr. Naturwiss., 1933, 21, 674.
4. R. F. Bacher. Phys. Rev., 1933, 43, 1001.

Примечание. В этой работе предсказано наличие магнитного момента у нейтрона и сделана попытка определить его величину и знак из имевшихся данных по магнитным моментам ядер. Сама мысль о наличии магнитного момента у нейтральной частицы в то время встретила много возражений (и, в частности, со стороны Н. Бора).

Абсолютная величина магнитного момента нейтрона оказалась в несколько раз больше, чем оценка, данная в этой работе. Знак магнитного момента (или, что то же самое, относительное направление магнитного и механического моментов нейтрона) был определен правильно.

ОБМЕННЫЕ СИЛЫ МЕЖДУ НЕЙТРОНАМИ И ПРОТОНАМИ И ТЕОРИЯ ФЕРМИ ¹

Недавно Ферми [1] построил успешную теорию β -распада, основанную на предположении, что возможны превращения нейтрона в протон, сопровождающиеся рождением или исчезновением электрона и нейтрино.

Из этой теории можно вывести обменные силы между нейтронами и протонами, введенные Гейзенбергом более или менее феноменологически. (Эта идея совершенно независимо пришла на ум моему другу Д. Иваненко, и я имел удобную возможность обсудить с ним этот вопрос.) Рассмотрим две тяжелые частицы a и b , причем a находится в нейтронном состоянии, а b — в протонном. Если a становится протоном, а b — нейтроном, то энергия остается неизменной. Пусть теперь эти два вырожденных состояния системы могут быть связаны двухстадийным процессом: испускание электрона и нейтрино нейтроном a , который становится протоном, и последующее поглощение этих частиц протоном b , который превращается в нейтрон. Энергия системы, вообще говоря, не будет сохраняться в промежуточном состоянии (ср. с теорией дисперсии). Излучение и поглощение позитрона и нейтрино также могут иметь место [2]. На этом пути рассматриваемые вырожденные состояния расщепляются на два энергетических состояния, различающихся знаком обменной энергии.

Так как роль легких частиц (ψ -поля), обеспечивающих взаимодействие между тяжелыми частицами, точно соответствует роли фотонов (электромагнитного поля), обеспечивающих взаимодействие между электронами, мы можем принять для наших целей методы, используемые в квантовой электродинамике для получения кулоновских сил.

Возьмем $\psi = \psi_0 + g\psi_1 + g^2\psi_2 + \dots$, где g — фермиевская константа ($\sim 4 \cdot 10^{-50}$ эрг·см³). Используя теорию возмущений и оставляя только ту часть ψ , которая соответствует отсутствию легких частиц в начальном и конечном состояниях, мы получаем

$$\left(H_0 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_2 \sim \left(K \mp \frac{1}{16\pi^3 \hbar c r^5} I(r)\right)\psi_0,$$

где K — бесконечная постоянная, r — расстояние между a и b и $I(r)$ — падающая функция r , равная единице, когда $r \ll \hbar/mc$

¹ Nature, 1934, 133, 981. Перевод Е. И. Волкова.

(m — масса электрона). Пренебрегая K , обычно получают тот же результат, если вводят обменную энергию $A(r)$ прямо в волновое уравнение для тяжелых частиц:

$$A(r) = \pm \frac{g^2}{16\pi^3 \hbar c r^5} I(r),$$

где знак $A(r)$ зависит от симметрии ϕ по отношению к a и b . Подставляя величины \hbar , c и g , получаем

$$|A(r)| \ll 10^{-85} \cdot r^{-5} \text{ эрг.}$$

Таким образом, $A(r)$ слишком мало, чтобы объяснить известное взаимодействие нейтронов и протонов на расстоянии порядка $r \sim 10^{-13}$ см.

Если различие в массах нейтрона и протона больше, чем сумма масс электрона и нейтрино, испускание легких частиц тяжелыми может происходить без нарушения закона сохранения энергии.

Но, как можно показать, и в этом случае соответствующая величина обменной энергии слишком мала:

$$|A(r)| < g \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \sim 10^{-18} \text{ эрг.}$$

Наш отрицательный результат указывает, что либо теория Ферми нуждается в существенных изменениях (по-видимому, не так просто существенно изменить результаты), либо природа сил между нейтронами и протонами не лежит, как могло бы показаться из первоначального предположения Гейзенберга, в тех превращениях, которые детально рассмотрел Ферми.

*Москва, Научно-исследовательский институт физики
Московского государственного университета.
Отдел теоретической физики*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. E. Fermi. Z. Phys., 1934, 88, 161.
2. G. Wick. Atti Reale Accad. Naz. Lincei, 1934, 19, 319.

Примечание. В этой работе сделана первая последовательная попытка создания полевой теории ядерных сил. Хотя найденное в работе взаимодействие оказалось слишком слабым по величине и имело много больший радиус действия, чем ядерные силы, подход И. Е. Тамма к построению теории ядерных сил определил путь, на котором были созданы более успешные теории.

Более подробное изложение теории β -сил содержится в работе [25] (см. наст. том, стр. 290).

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЙТРОНОВ И ПРОТОНОВ ¹

Хорошо известное предположение Гейзенберга, относящее нейтрон-протонное взаимодействие к обмену электрическим зарядом, по-видимому, противоречит теории β -распада Ферми [1]. С другой стороны, естественное обобщение теории Ферми, вероятно, способно объяснить взаимодействие тяжелых частиц.

Согласно Ферми [2], тяжелая частица (нейтрон или протон) может испустить (и поглотить) пару легких частиц — электрон либо позитрон и нейтрино. Естественно предположить, что тяжелая частица может испускать (и поглощать) *пару нейтрино*, так как эмиссия одиночного нейтрино нарушала бы закон сохранения спина. Конечно, в отличие от процессов, рассмотренных Ферми, испускание пары нейтрино не будет влиять на заряд тяжелой частицы.

Кулоновское взаимодействие заряженных частиц может быть выведено из законов, управляющих испусканием и поглощением фотонов заряженной частицей. Точно так же мы можем вычислить взаимодействие частиц, способных испускать и поглощать нейтринные пары. Для потенциальной энергии V такого взаимодействия получаем

$$V = \frac{\eta_1 \eta_2}{r^5} \dots, \quad (1)$$

где r — расстояние между частицами, η_1 , η_2 — «нейтральные заряды» — постоянные, характеризующие свойства рассматриваемых частиц. Можно предположить, что η -заряды нейтронов и протонов численно равны и противоположны по знаку. Если принять во внимание конечный радиус r_0 тяжелой частицы, то найдем, что (1) справедливо только при $r \gg r_0$ и что V остается конечным при $r \rightarrow 0$. Оценивая величину η из дефекта масс дейтрона, находим, что вероятность испускания γ -кванта возбужденным протоном много больше вероятности испускания нейтринной пары, так что рассмотренная возможность не ведет к противоречиям с экспериментальными фактами.

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ig. Tamm. Nature*, 1934, 133, 981, (см. наст. том, статью 23 — прим. ред.).
2. *E. Fermi. Z. Phys.*, 1934, 88, 161.

¹ *Nature*, 1934, 134, 1011. Перевод Е. И. Волкова.

БЕТА-РАДИОАКТИВНОСТЬ И ЯДЕРНЫЕ СИЛЫ ¹

Теория β -распада Ферми систематически развивается в несколько обобщенном виде и применяется к расчету взаимодействия нейтронов с протонами. Показано, что различные модификации теории приводят к широкому классу операторов взаимодействия, включая операторы гейзенберговского и майорановского типов, а также их комбинацию с оператором $J(r) \sigma_{nr} \sigma_{pr} \times \times P(r_p, r_n)$. Изменение взаимодействия в зависимости от расстояния между частицами происходит достаточно быстро, но абсолютная величина взаимодействия, рассчитанная из данных по β -распаду, чрезвычайно мала. Следовательно, ядерные силы можно объяснить на основе современной теории, только если предположить, что гамильтониан, описывающий взаимодействие тяжелой частицы с электронно-нейтринным полем, содержит по крайней мере *два* члена с *двумя* произвольными константами, которые должны быть определены из сравнения теории с экспериментом. Таким образом, в настоящее время естественно считать, что количественная связь ядерных сил с β -распадом невозможна. Далее показано, что модификация теории, предложенная Конопинским и Уленбеком, а также две другие, в некоторых отношениях эквивалентные модификации, не только согласуются с экспериментальными данными о форме β -спектра, но также могут удовлетворительно объяснить корреляцию между временем жизни β -радиоактивных изотопов и максимальной энергией испускаемых ими электронов и позитронов.

§ 1. Введение и основные результаты

Сразу после открытия нейтрона в 1932 г. Гейзенберг высказал мысль, что взаимодействие нейтрона с протоном обязано обмену электрическим зарядом между этими частицами, и впоследствии показал, что эта гипотеза в несколько видоизмененной форме, приданной ей Майораной, удовлетворительно объясняет основные черты структуры и устойчивости ядра.

С другой стороны, Ферми [1] предложил в 1934 г. теорию β -радиоактивности, в которой протон может при определенных условиях превращаться в нейтрон и наоборот; при этом электрический заряд тяжелой частицы изменяется благодаря испусканию или поглощению двух легких частиц — нейтрино и электрона

¹ Phys. Z. Sowjetunion, 1936, 10, вып. 5, 567. Статья опубликована в переводе с английского в УФН, 1967, 93, вып. 3, стр. 417. Перевод И. В. Андреева и И. И. Ройзена. Предварительное сообщение об этой работе было опубликовано в Nature, (Lnd.), 1934, 133, 981 (см. наст. том, работу 23).

или позитрона. Теория Ферми, таким образом, содержит определенный механизм обмена электрическим зарядом между протоном и нейтроном², который рассматривался Гейзенбергом как основа взаимодействия этих частиц, и делает возможным теоретический расчет этого взаимодействия, основанный на данных по β -распаду.

Хорошо известно, что электромагнитное взаимодействие электрических зарядов тесно связано с законами испускания и поглощения фотонов электрическим зарядом, так что кулоновский закон взаимодействия может быть теоретически выведен из законов испускания и поглощения фотонов³. При помощи аналогичных рассуждений можно определить обменное взаимодействие тяжелых частиц из законов β -распада. Другими словами, испускание и поглощение легких частиц (электронов, позитронов, нейтрино) тяжелыми частицами (протонами и нейтронами) должно быть связано с взаимодействием тяжелых частиц (поле Гейзенберга — Ферми) таким же образом, как испускание и поглощение фотонов связано с взаимодействием электрических зарядов (поле Максвелла). Сам Ферми (частное сообщение Гейзенбергу, не опубликовано)⁴, Д. Иваненко [3] и автор [4] пришли к этому выводу независимо и почти одновременно⁵.

Указанный расчет нейтрон-протонного взаимодействия, основанный на теории β -распада Ферми, был выполнен мною около двух лет назад [4]; его результат был очень разочаровывающим: хотя рассчитанное взаимодействие изменялось очень быстро с расстоянием r между частицами (на не слишком малых расстояниях оно изменялось как r^{-5}), его абсолютная величина при $r \sim 10^{-13}$ см оказалась примерно в 10^{16} раз меньше, чем нужно. Это несоответствие побудило меня выдвинуть другую гипотезу о природе внутриядерных сил [6], и я потратил более года на разработку этой гипотезы, прежде чем окончательно пришел к выводу, что она полностью неправильна.

Тем временем Бете и Пайерлс [7] указали, что определенные модификации в математической формулировке теории Ферми (введение производных волновой функции легкой частицы в гамильтониане, описывающем β -распад) могут, вероятно, устранить указанное противоречие и привести к нейтрон-протонному взаимодействию правильного порядка величины. Позднее Конопинский и Уленбек [8] показали, что модификация такого рода необходима для объяснения распределения β -частиц по энергии. Конкретная

² Например, нейтрон может испустить электрон и нейтрино, превратившись при этом в протон, в то время как протон может поглотить легкие частицы, испущенные нейтроном, и превратиться в нейтрон.

³ Мы не касаемся здесь усложнений, возникающих из-за того, что закон Кулона связан с продольными, а не с поперечными световыми волнами; эти усложнения будут обсуждены в § 4.

⁴ См. статью В. Гейзенберга [2].

⁵ См. также [5].

модификация, предложенная этими авторами, не только находится в наилучшем согласии с экспериментальными кривыми распределения ⁶, но, как будет показано в § 6, также удовлетворительно объясняет корреляцию между временем жизни β-радиоактивных изотопов и максимальной энергией β-частиц, испущенных ими. С другой стороны, она не устраняет противоречия между величиной ядерных сил и данными по β-распаду.

Новый шаг был сделан Вико [10], который показал, что аномальная величина магнитного момента протона и существование магнитного момента нейтрона могут быть качественно истолкованы с помощью теории Ферми и что необходимо допустить указанную связь между β-распадом и ядерными силами, чтобы объяснить порядок величины этих моментов.

Гейзенберг в очень интересной работе на эту тему [2] обратил внимание на два важных пункта. Электронно-нейтринное поле приводит не только к взаимодействию тяжелых частиц, но также и к соответствующей собственной энергии этих частиц. Наиболее вероятно, что эта энергия, будучи гораздо большей, чем электромагнитная энергия протона, ответственна за величину и примерное равенство масс нейтрона и протона. Собственная энергия зависит в основном от размера частиц и становится бесконечной в случае точечных частиц. Это хорошо известно из теории электрона, но, в то время как радиус электрона очень мал по сравнению с атомными размерами, радиус тяжелых частиц, вероятно, равен по порядку величины ядерным размерам, так что силы взаимодействия тяжелых частиц на внутриядерных расстояниях очень сильно зависят от способа, которым конечный размер частиц вводится в теорию.

Помимо этого, Гейзенберг указывает в цитированной работе, что теория Ферми приводит к обменным силам гейзенберговского, а не майорановского типа. Согласно первоначальному предположению Гейзенберга, взаимодействие протона и нейтрона может быть описано оператором энергии

$$V_{\text{H}} = -I(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p|) P(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_p) \frac{1 + \sigma_n \sigma_p}{2}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{r}_n и \mathbf{r}_p — координаты и σ_n , σ_p — спиновые матрицы нейтрона и протона, I — положительная функция расстояния $|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p|$ между ними и P — оператор перестановки, обменивающий \mathbf{r}_n и \mathbf{r}_p . Такое предположение, однако, несовместимо с исключительной устойчивостью α-частицы и с другими фактами. Это побудило Майорану ввести вместо V_{H} оператор

$$V_{\text{M}} = -I(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p|) P(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_p), \quad (1.2)$$

Противоречие между теоретическими кривыми распределения для тяжелых элементов и распределением испущенных RaE электронов, полученное экспериментально Сердженгом, устранено позднейшими измерениями А. Алиханова, А. Алиханяна и Б. Джеллепова [9].

отличающийся от (1.1) отсутствием оператора $1/2 (1 + \sigma_n \sigma_p)$, осуществляющего перестановку спинов частиц. V_M , несомненно, является гораздо лучшим приближением к действительности, чем V_H , хотя Ферми [11] недавно показал, что в противоположность предположению Майораны оператор взаимодействия должен каким-то образом содержать спиновые матрицы σ_n и σ_p . Наиболее вероятно, что оператор взаимодействия V соответствует в действительности линейной комбинации V_H и V_M , пожалуй, с некоторыми добавочными членами (ср. § 7).

Однако теория β -распада Ферми в ее первоначальной форме, а также ее модификации, предложенные Бете и Пайерлсом, Конопинским и Уленбеком, приводят к оператору взаимодействия гейзенберговского типа. Это есть следствие предположения, общего для всех этих теорий и состоящего в том, что электронно-нейтринное поле, подобно электромагнитному полю, может быть описано 4-вектором A_λ , компоненты которого содержат волновые функции электрона и нейтрино или их производные. Однако в равной мере возможно, что электронно-нейтринное поле описывается не 4-вектором, а, например, антисимметричным тензором II или III ранга или комбинацией векторов и тензоров. Если это так, то оператор взаимодействия, как оказывается, имеет общий вид ⁷

$$V = - \left[I_1(r) \frac{1 + \sigma_n \sigma_p}{2} + I_2(r) + I_3(r) \frac{(\sigma_n \mathbf{r})(\sigma_p \mathbf{r})}{r^2} \right] P(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_p), \quad (1.3)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p$, т. е. он равен комбинации гейзенберговского и майорановского операторов с оператором, пропорциональным $(\sigma_n \mathbf{r}) \times (\sigma_p \mathbf{r}) / r^2$. Если поле можно описать 4-вектором A_λ , $I_2(r)$ и $I_3(r)$ становятся тождественно равными нулю. Но если майорановский член $I_2(r)$ не исчезает, тогда, как правило, гейзенберговский член $I_1(r)$ и член $I_3(r)$ также отличаются от нуля и только некоторые очень специальные случаи составляют исключение из правила. Таким образом, теория приводит к обобщению принятого в настоящее время предположения, согласно которому V равно сумме V_H и V_M .

Мы исследовали возможное влияние члена, пропорционального $(\sigma_n \mathbf{r})(\sigma_p \mathbf{r}) / r^2$, на рассеяние нейтронов на протонах и обнаружили, что он не изменяет существенно зависимость рассматриваемого сечения от энергии нейтрона.

Представляется, таким образом, что теория очень удовлетворительна с качественной точки зрения, так как она проясняет внутреннюю связь между столь различными явлениями и свойствами, как β -распад, взаимодействие нейтронов и протонов,

⁷ Другие члены, например $I_4(r) \frac{(\sigma_n - \sigma_p) \mathbf{r}}{r} P(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_p)$, также могут присутствовать в некоторых случаях, но мы здесь будем игнорировать эту возможность.

аномалия их магнитных моментов и величина их масс. Но с количественной точки зрения современное состояние теории полностью неудовлетворительно.

Кажется невозможным найти такой вариант теории, который содержал бы только *одну* произвольную константу (типа фермиевской константы g) и удовлетворительно количественно описывал бы как взаимодействие нейтронов с протонами, так и основные черты β -распада. Теорию можно согласовать с известными в настоящее время экспериментальными фактами, выбрав подходящую комбинацию простых гамильтонианов, содержащую *по крайней мере две* произвольные константы таким образом, что первый член гамильтониана ответствен за законы β -распада, но не имеет отношения к ядерным силам, в то время как второй член не имеет отношения к β -распаду и ответствен за ядерные силы (§ 7). Однако такая процедура, будучи совершенно произвольной, уничтожает количественную связь между β -распадом и ядерными силами и, таким образом, лишает теорию ее наиболее привлекательных черт. Только более глубокое проникновение в природу электронно-нейтринного поля может дать возможность для построения последовательной теории без искусственных предположений такого рода.

Вероятно, по крайней мере некоторые из трудностей, с которыми столкнулась теория, происходят из-за недостатков современных теорий электрона и нейтрино. Во-первых, теоретический расчет ядерных сил существенно зависит от предположений, сделанных относительно электронной волновой функции при очень высоких энергиях порядка $2 \cdot 10^8$ эв (ср. стр. 313). За неимением лучшей теории мы в своих расчетах предположили, что волновое уравнение Дирака справедливо вплоть до таких высоких энергий. В настоящее время невозможно оценить ошибку в результатах вычислений, вызываемую этим несомненно неправильным предположением.

Второй очевидный слабый пункт современной теории связан с введенным Ферми предположением, согласно которому волновое уравнение для нейтрино отличается от дираковского волнового уравнения для электрона только величиной констант m и e , которые полагаются равными нулю. Уравнение Дирака приводит к существованию 4-вектора плотности тока $\psi^+ \gamma^2 \psi$ с равной нулю дивергенцией, причем этот вектор имеет в случае электрона хорошо определенный физический смысл. Однако в случае, например, фотонов такого 4-вектора плотности тока, временная компонента которого всегда положительна, не существует вовсе. Следовательно, уравнение Дирака не может быть справедливым для фотонов. Если нейтрино, подобно фотону, не обладает электрическим зарядом или массой покоя, понятие о (положительной) плотности нейтрино также едва ли имеет какой-либо физический смысл. Рассмотрения такого рода были проведены Румером [12], который пришел к выводу, что уравнение Дирака с $m=e=0$ не

может быть справедливым для нейтрино и что нужно искать другие возможности. Однако и теория нейтрино, предложенная Румером, сталкивается со всеми упомянутыми выше трудностями при попытке количественно объяснить явления одновременно при малых и при высоких энергиях (т. е. как β -распад, так и ядерные силы) ⁸.

§ 2. Взаимодействие тяжелой частицы с электронно-нейтринным полем

Теория β -распада Ферми, основанная на аналогии с теорией электрона, легко может быть обобщена. Рассмотрим частицу, которая в отсутствие поля сил подчиняется волновому уравнению Дирака. Можно доказать при очень общих предположениях, что поле, действующее на такую частицу (или, более точно, действие поля сил на такую частицу), может быть описано скаляром a , псевдоскаляром ⁹ b , 4-вектором A_μ и двумя четырехмерными антисимметричными тензорами $F_{\mu\nu}$ и $G_{\mu\nu\sigma}$ II и III рангов и что волновое уравнение частицы при наличии поля должно иметь вид ¹⁰

$$-imc\psi + \gamma^\mu p_\mu \psi = \frac{1}{c} \left(ia + \gamma^\mu A_\mu + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} + \right. \\ \left. + \frac{i}{6} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma G_{\mu\nu\sigma} + \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 b \right) \psi. \quad (2.1)$$

Это сразу следует из трансформационных свойств дираковских матриц γ^μ , если пренебречь возможностью, что оператор взаимодействия между полем и тяжелой частицей содержит импульс p_μ частицы, и если предположить, что поле можно описать четырехмерными тензорными величинами. Но даже если сделать более общее предположение, что действие поля описывается набором спиноров, можно показать, что этот набор спиноров эквивалентен набору тензоров, перечисленных выше ¹¹.

Умножая (2.1) на $ic\gamma^4$ и полагая

$$\gamma^4 = \beta = \rho_3, \quad \gamma^k = -i\beta\alpha_k, \quad \alpha_k = \rho_1\sigma_k,$$

⁸ Путь, свободный от трудностей, указывается в очень важной работе В. Гейзенберга [13]. — *Примечание при корректуре.*

⁹ Псевдоскаляр изменяет знак при зеркальном преобразовании $x = -x$, $y = -y$, $z = -z$, $t = t$.

¹⁰ Мы используем обозначения В. Паули [14].

¹¹ Записывая волновое уравнение Дирака для свободной частицы в спиновой форме и вводя в это уравнение добавочные члены, описывающие действие поля, нетрудно увидеть, что ранг спиноров поля может быть только 0 или 2. Чтобы доказать утверждение, приведенное в тексте, нужно лишь принять во внимание, что волновое уравнение должно быть самосопряженным и инвариантным относительно зеркального преобразования.

где ρ_k и σ_k — обычные дираковские матрицы, получаем

$$\left(mc^2 \rho_3 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + c\rho_1(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}) \right) \psi = - \{ \rho_3 a + A_0 - \rho_1(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{A}) + \\ + \rho_3(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}) + \rho_2(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}) + \rho_1 B_0 + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}) - \rho_2 b \} \psi, \quad (2.2)$$

где A_0, \mathbf{A} — компоненты A_λ ; \mathbf{E} и \mathbf{H} — компоненты $F_{\mu\nu}$; $F_{12} = H_3$, $F_{14} = -E_1$ и т. д.; B_0, \mathbf{V} — компоненты $G_{\lambda\mu\nu}$;

$$B_0 = -G_{123}, \quad B_1 = G_{230}, \quad B_2 = G_{310}, \quad B_3 = G_{120}, \quad (2.3)$$

причем \mathbf{V} — аксиальный трехмерный вектор, а B_0 — трехмерный псевдоскаляр. Полагая A_μ равным умноженному на e четырехмерному потенциалу электромагнитного поля и отбрасывая все другие члены в правой части (2.2), получим уравнение Дирака для электрона; с другой стороны, предполагая, что $F_{\mu\nu}$ пропорционален тензору электромагнитного поля, и отбрасывая все остальные члены, получаем волновое уравнение, обсуждавшееся несколько лет тому назад Паули в его теории нейтрино.

Для волнового уравнения тяжелой частицы также может быть принята форма (2.1) или (2.2) с той разницей, что состояние тяжелой частицы зависит не только от ее пространственных координат r и ее спиновой координаты s , но также и от внутренней «зарядовой координаты» ρ , которая определяет, является ли частица нейтроном ($\rho = +1$) или протоном ($\rho = -1$). Следовательно, волновая функция тяжелой частицы будет иметь не 4, а 8 компонент и величины m, ρ_μ, a, A_μ и т. д. должны рассматриваться как операторы в пространстве зарядовой координаты. Чтобы описать тот факт, что возбуждение электронно-нейтринного поля (испускание или поглощение нейтрино и электрона) связано с изменением заряда тяжелой частицы, мы должны положить в (2.1)

$$a = aQ^+ + a^*Q, \quad A_\mu = A_\mu Q^+ + A_\mu^* Q, \\ F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} Q^+ + F_{\mu\nu}^* Q \text{ и т. д.}, \quad (2.4)$$

где Q и Q^+ — гейзенберговские матрицы:

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad Q^+ = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.5)$$

действующие на зарядовую координату ρ частицы. Q соответствует переходу протона в нейтрон, а Q^+ — обратному переходу. Величины a и a^* , A_μ и A_μ^* и т. д. должны быть комплексно-сопряженными, если волновое уравнение самосопряженно. В волновом уравнении нетрудно учесть действие электромагнитного поля на протон и разницу в массах протона и нейтрона, но мы наверняка можем пренебречь этими эффектами в нашем рассмотрении¹².

¹² Волновые уравнения для тяжелых частиц, исследованные К. Вейцеккером в его недавней работе [15], также содержатся в наших общих формулах

Рассмотрев релятивистское волновое уравнение для тяжелой частицы с тем, чтобы установить трансформационные свойства величин a , A_μ и т. д., описывающих электронно-нейтринное поле, мы с этого момента будем иметь дело только с его нерелятивистским приближением. Подставляя (2.4) в (2.2), переходя к нерелятивистскому приближению и пренебрегая всеми членами, квадратичными по полевым величинам a , A_μ и т. д., а также членами, линейными по полевым величинам, но пропорциональными скорости тяжелой частицы, получим

$$\left(\frac{p^2}{2m} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = -V\psi, \quad (2.6)$$

$$V = Q[a^* + A_0^* + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}^*) + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}^*)] + Q^+[a + A_0 + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}) + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B})], \quad (2.7)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) означает теперь не матрицы Дирака, а матрицы Паули. Мы возвратимся к первоначальному предположению Ферми, если удержим в правой части (2.7) только члены, содержащие A_0 и A_0^* . Заметим, что \mathbf{H} в (2.7) совершенно не зависит от A_0 и \mathbf{A} . Уравнение Паули для электрона содержит также член, пропорциональный $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H})$, где $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ — напряженность магнитного поля. Однако этот член из-за его релятивистского характера опускается в нерелятивистском уравнении Шредингера (2.6). Члены $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H})$ и $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B})$ в (2.7) очень важны, так как, если их опустить, настоящая теория с необходимостью приведет к обменному взаимодействию гейзенберговского (но не майорановского) типа.

Величины, описывающие электронно-нейтринное поле, должны быть однородными линейными формами квантованных волновых функций φ и χ электрона и нейтрино (или их производных). Эти волновые функции могут быть разложены следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{n,l} b_n^l \varphi_n^l, & \varphi^* &= \sum_{n,l} b_n^{l*} \varphi_n^{l*}, \\ \chi &= \sum_{\nu,\lambda} c_\nu^\lambda \chi_\nu^\lambda, & \chi^* &= \sum_{\nu,\lambda} c_\nu^{\lambda*} \chi_\nu^{\lambda*}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Функции φ_n^l и χ_ν^λ являются собственными функциями *свободного* движения электрона и нейтрино (только в теории β -распада *тяжелых* ядер необходимо принимать во внимание влияние кулоновского поля ядер на движение электронов). Мы обозначим

(2.1) и (2.4). Например, его «Ansatz H_0 » соответствует следующему выбору тензоров поля:

$$a = -i\varphi^+\chi, \quad A_\lambda = -\frac{1}{2}\varphi^+\gamma_\lambda\chi, \quad F_{\lambda\mu} = 0,$$

$$G_{\lambda\mu\nu} = \frac{i}{2}\varphi^+\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\chi, \quad b = -\varphi^+\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4\chi.$$

Примечание при корректуре.

импульсы этих частиц через p_n и p_ν . Индексы l и λ служат для того, чтобы различить состояния частиц, характеризующиеся данным импульсом p_n или p_ν , но отличающиеся знаком энергии или направлением спина. Чтобы избежать непрерывности энергетического спектра, мы налагаем на волновые функции обычные условия периодичности.

Так как мы интересуемся испусканием и поглощением электронов и нейтрино, мы должны использовать метод вторичного квантования. Согласно этому методу квантованные амплитуды b_n^{l*} в (2.8) являются операторами, означающими рождение электрона в состоянии (n, l) , в то время как b_n^l — соответствующие операторы уничтожения. Эти операторы можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} b_n^l \Psi(N_1^1, N_1^2, N_2^1, \dots, N_n^l, \dots) &= \\ &= \varepsilon (1 - N_n^l) \Psi(N_1^1, N_1^2, N_2^1, \dots, 1 - N_n^l, \dots), \\ b_n^{l*} \Psi(N_1^1, N_1^2, N_2^1, \dots, N_n^l, \dots) &= \\ &= \varepsilon N_n^l \Psi(N_1^1, N_1^2, N_2^1, \dots, 1 - N_n^l, \dots), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где N_n^l означает число (0 или 1) электронов в состоянии (n, l) и ε — знак, зависящий некоторым (не существенным для нас) образом от числа электронов, находящихся в состояниях, отличающихся от состояния (n, l) .

Из (2.9) следует

$$b_n^{l*} b_n^l = N_n^l, \quad b_n^l b_n^{l*} = 1 - N_n^l. \quad (2.10)$$

Квантованные амплитуды $c_\nu^{\lambda*}$, c_ν^{λ} волновых функций нейтрино определяются точно таким же образом.

Определения (2.9) совпадают с определениями, использованными Ферми [1], в то время как определения, использованные Паули [14], отличаются от (2.9) взаимной заменой b_n^l и b_n^{l*} . В противоположность мнению, выраженному Конопинским и Уленбеком, именно фермиевские, а не паулиевские определения являются правильными, так как паулиевские определения, если их использовать в расчете вероятности излучения, приводят к физически бессмысленным результатам. Кроме того, паулиевские определения b_n^l и b_n^{l*} несовместимы с соотношениями (2.10)¹³, которыми пользовался сам Паули [14].

¹³ Соотношения (2.9) могут быть представлены в следующем виде:

$$(N_n^{l'} | b_n^l | N_n^{l''}) = \varepsilon \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (N_n^{l'} | b_n^{l*} | N_n^{l''}) = \varepsilon \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Так как $\varepsilon^2 = 1$, получаем соотношения

$$b_n^{l*} b_n^l = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad b_n^l b_n^{l*} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

совпадающие с (2.10).

Волновое уравнение для системы, состоящей из тяжелой частицы и электронно-нейтринного поля, может быть записано, например, в виде, избранном Ферми:

$$\left(H_h + H_f + V - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi = 0, \quad (2.11)$$

где H_h и H_f — гамильтонианы тяжелых частиц и поля, а V — оператор взаимодействия. В частности,

$$H_f = \sum_{nl} N_n^l \hbar \omega_n^l + \sum_{\nu\lambda} M_\nu^\lambda \hbar \omega_\nu^\lambda, \quad (2.12)$$

причем $\hbar \omega_n^l$ и $\hbar \omega_\nu^\lambda$ являются энергиями электрона в состоянии (n, l) и нейтрино в состоянии (ν, λ) , M_ν^λ — число (0 или 1) нейтрино в состоянии (ν, λ) .

Однако член H_f может быть исключен из волнового уравнения для системы. Подставляя в (2.11)

$$\Psi = e^{-iH_f t/\hbar} \psi,$$

получаем

$$\left(H_h + e^{iH_f t/\hbar} V e^{-iH_f t/\hbar} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = 0.$$

Далее из (2.9) и (2.12) следует, что

$$\begin{aligned} e^{iH_f t/\hbar} b_n^l e^{-iH_f t/\hbar} &= b_n^l e^{-i\omega_n^l t}, \\ e^{iH_f t/\hbar} b_n^{l*} e^{-iH_f t/\hbar} &= b_n^{l*} e^{i\omega_n^l t}. \end{aligned}$$

Так как V содержит b_n^l и b_n^{l*} только в виде комбинаций $b_n^l \varphi_n^l$ и $b_n^{l*} \varphi_n^{l*}$, можно включить временной множитель $e^{-i\omega_n^l t}$ в волновую функцию электрона, определив ее как

$$\varphi_n^l = e^{-i\omega_n^l t} \Phi_n^l(\mathbf{r}, s) \quad (2.13)$$

(s означает спиновую координату), вместо того чтобы определять φ_n^l только как функцию \mathbf{r} и s (это определение необходимо, если записываем волновое уравнение в виде (2.11)). Используя определение (2.13) для φ_n^l и соответствующее определение для нейтринной волновой функции χ_n^l , приходим к уравнению

$$\left(H_h + V - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = 0. \quad (2.14)$$

Наше предыдущее уравнение (2.6) есть специальный случай (2.14). Заметим, что ψ зависит не только от пространственных, спиновой и зарядовой координат \mathbf{r} , s , ρ тяжелой частицы, но также и от переменных N_n^l и M_ν^λ , описывающих состояние поля, хотя частота ω в функции ψ не зависит от энергии H_f поля.

При конкретизации зависимости V от операторов $b_n^l, b_n^{l*}, c_n^l, c_n^{l*}$ можно предположить, что испускание электрона в β -распаде связано с испусканием нейтрино, а испускание позитрона — с испусканием антинейтрино (т. е. с поглощением нейтрино; предположение Ферми), или же можно поменять ролями нейтрино и антинейтрино (Конопинский и Уленбек). Оба предположения приводят к одинаковым физическим результатам, если считать, что волновое уравнение для нейтрино отличается от волнового уравнения Дирака для электрона только нулевой величиной m и e . Мы выберем второй вариант (испускание электрона сопровождается испусканием антинейтрино), так что оператор V (уравнение (2.6)) будет содержать операторы Q, b_n^l, c_n^l в комбинациях $Qb_n^l c_n^{l*}$ и $Q^+ b_n^{l*} c_n^l$.

§ 3. Величины, описывающие электронно-нейтринное поле

Мы должны теперь сделать некоторые определенные предположения о собственных функциях нейтрино. Как было упомянуто в § 2, нетрудно видеть, что действие электронно-нейтринного поля на тяжелую частицу должно описываться спинорами нулевого или II ранга. Так как электронная волновая функция φ соответствует спинорам I ранга, волновая функция χ нейтрино должна, очевидно, соответствовать спинорам нечетного ранга. Согласно Ферми волновое уравнение для нейтрино является специальным случаем волнового уравнения Дирака для электрона, характеризующимся тем, что $m=e=0$, так что χ соответствует паре спиноров I ранга. С другой стороны, Румер предполагает, что χ есть спинор III ранга. Мы в дальнейшем будем придерживаться первоначального предположения Ферми, с тем чтобы исследовать его возможные следствия.

Мы получаем эквивалент первоначальной теории Ферми, положив в (2.7) все полевые величины, за исключением A_0 , равными нулю и предположив

$$A_\mu = g\varphi^+ \gamma_\mu \chi,$$

что приводит к

$$A_0 = g\varphi^* \chi, \quad (3.1)$$

где g — константа (отметим, что $\varphi^+ = i\varphi^* \gamma^4$ и $A_4 = iA_0$) [14].

Конопинский и Уленбек [16] построили все четыре возможных полярных вектора, содержащих линейно либо волновые функции φ^+ и χ , либо их производные, и показали, что асимметрия β -спектров может быть объяснена только в том случае, если производная нейтринной волновой функции имеет более высокий порядок, чем производная электронной волновой функции. Общее выражение для вектора, удовлетворяющего этому условию, имеет вид

$$A_\mu = ig \frac{\partial^k \varphi^+}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial^s \chi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots},$$

что приводит к

$$A_0 = \frac{g}{c} \frac{\partial^s \varphi^+}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots} \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^s \chi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots}. \quad (3.2)$$

Конопинский и Уленбек предполагают, что $s=0$.

Аналогичным образом нетрудно построить все возможные скаляры a и антисимметричные тензоры $F_{\lambda\mu}$ и $G_{\lambda\mu\nu}$, содержащие линейно либо φ^+ и χ , либо их производные. Например, все возможные выражения для $F_{\lambda\mu}$ могут быть сведены к комбинациям следующих выражений:

$$\begin{aligned} F_{\lambda\mu} &= g \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \chi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\mu} \frac{\partial \chi}{\partial x_\lambda} \right), & F_{\lambda\mu} &= g \left(\varphi^+ \gamma_\lambda \frac{\partial \chi}{\partial x_\mu} - \varphi^+ \gamma_\mu \frac{\partial \chi}{\partial x_\lambda} \right), \\ F_{\lambda\mu} &= g \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\mu} \gamma_\lambda \chi - \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\lambda} \gamma_\mu \chi \right), & F_{\lambda\mu} &= g \varphi^+ (\gamma_\lambda \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\lambda) \chi. \end{aligned}$$

В каждое из этих выражений можно подставить $\frac{\partial^s \varphi^+}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots}$ вместо φ^+ и $\frac{\partial^s \chi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots}$ вместо χ , где s — целое положительное число.

Принимая во внимание асимметрию β -спектров, мы ограничимся (кроме первоначального фермиевского выражения (3.1)) только такими выражениями, которые содержат производные от χ более высокого порядка, чем производные от φ^+ . Существует всего три выражения такого рода, именно (3.2) и еще два следующих:

$$\begin{aligned} F_{\lambda\mu} &= g \frac{\partial^s \varphi^+}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots} \left(\gamma_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \frac{\partial^s \chi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots}, \\ G_{\lambda\mu\nu} &= ig \frac{\partial^s \varphi^+}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots} \left(\gamma_\lambda \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \gamma_\mu \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + \gamma_\nu \gamma_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \frac{\partial^s \chi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots}, \\ &\lambda \neq \mu \neq \nu \dots \end{aligned}$$

Используя соотношения $\varphi^+ = i\varphi^* \gamma^4$, $\gamma^4 = \beta$, $\gamma^k = -i\beta \alpha^k$, находим, что трехмерные аксиальные векторы \mathbf{H} и \mathbf{V} , соответствующие этим тензорам (ср. уравнение (2.3)), равны

$$\mathbf{H} = g \frac{\partial^s \varphi^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots} [\boldsymbol{\alpha} \text{ grad}] \frac{\partial^s \chi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{V} = g \frac{\partial^s \varphi^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots} \beta \left([\boldsymbol{\alpha} \text{ grad}] + \frac{1}{2c} [\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}] \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^s \chi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots}. \quad (3.4)$$

Удобно выразить константу g , которая, конечно, имеет разные значения в различных равенствах вида (3.1), (3.2) и т. д., через безразмерную константу G и универсальные константы \hbar , c , m (m — масса электрона). Так как согласно (2.6) A_0 , \mathbf{H} и \mathbf{V} должны

иметь размерность энергии, мы можем переписать уравнения (3.1)–(3.4) в следующем виде:

$$\text{(случай I)} \quad A_0 = \frac{2\pi^{3/8} G h^3}{m^2 c} \varphi^* \chi, \quad (3.5)$$

$$\text{(случай II)} \quad A_0 = \frac{2\pi^{3/8} G h^3}{m^3 c^3} \left(\frac{h}{mc}\right)^{2s} \frac{\partial^s \varphi^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots} \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^s \chi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots}, \quad (3.6)$$

$$\text{(случай III)} \quad \mathbf{H} = \frac{2\pi^{7/8} G h^3}{m^3 c^2} \left(\frac{h}{mc}\right)^{2s} \frac{\partial^s \varphi^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots} [\boldsymbol{\alpha} \text{ grad} | \frac{\partial^s \gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots}], \quad (3.7)$$

$$\text{(случай IV)} \quad \mathbf{B} = \frac{2\pi^{3/8} G h^3}{m^3 c^2} \left(\frac{h}{mc}\right)^{2s} \frac{\partial^s \varphi^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots} \beta \left([\boldsymbol{\alpha} \text{ grad}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2c} [\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}] \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^s \chi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots}, \quad (3.8)$$

причем предполагается, что φ^* и χ имеют размерность $L^{-3/8}$. Если можно пренебречь влиянием кулоновского поля ядра на волновую функцию электрона, т. е. если мы не рассматриваем β -распад тяжелых ядер, мы можем выбрать в качестве собственных функций φ_n^l и χ_n^λ следующие выражения:

$$\varphi_n^l = L^{-3/8} U_n^l e^{i(\mathbf{k}_n \mathbf{r} - \omega_n^l t)}, \quad \chi_n^\lambda = L^{-3/8} V_n^\lambda e^{i(\mathbf{k}_n \mathbf{r} - \omega_n^\lambda t)}. \quad (3.9)$$

Здесь L — ребро куба, в котором заключена система, $k_{nx} = 2\pi n_x / L$, $k_{ny} = 2\pi n_y / L$ и т. д., $m_x, m_y, m_z, \nu_x, \nu_y, \nu_z$ — целые числа. Коэффициенты U_n^l и V_n^λ являются векторами в пространстве внутренних переменных рассматриваемой частицы с постоянными компонентами $U_{n,\alpha}^l$ и $V_{n,\alpha}^\lambda$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$). Предполагается, что эти компоненты нормированы:

$$\sum_{\alpha} U_{n,\alpha}^l U_{n,\alpha}^{m*} = \delta_{lm}, \quad \sum_{\alpha} V_{n,\alpha}^\lambda V_{n,\alpha}^{\mu*} = \delta_{\lambda\mu} \quad (3.10)$$

и удовлетворяют уравнениям [17]¹⁴

$$H_n U_n^l = \hbar \omega_n^l U_n^l, \quad H_n V_n^\lambda = \hbar \omega_n^\lambda V_n^\lambda, \quad (3.11)$$

где

$$H_n = c(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_n) + mc^2 \beta = \hbar c |(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{k}_n) + \beta k_0|, \quad k_0 = \frac{mc}{\hbar}, \quad (3.12)$$

$$H_n = c(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_n) = \hbar c (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{k}_n).$$

Энергия $\hbar \omega$ связана с волновым вектором \mathbf{k} соотношениями

$$\hbar \omega_n^l = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_n^2} = \pm \hbar c \sqrt{k_0^2 + k_n^2}, \quad \hbar \omega_n^\lambda = \pm \hbar c k_n. \quad (3.13)$$

¹⁴ Будучи записанным в явном виде, первое из уравнений (3.11) принимает, например, вид

$$\sum_{\beta=1}^4 H_{n,\alpha,\beta} U_{n,\beta}^l = \hbar \omega_n^l U_{n,\alpha}^l.$$

Будем считать, что индексы $l=1, 2$ и $\lambda=1, 2$ относятся к состояниям положительной энергии, а индексы $l=3, 4$ и $\lambda=3, 4$ — к состояниям отрицательной энергии.

В дальнейшем при усреднении наших формул по различным направлениям спина частиц мы часто будем приходиться к выражениям вида $\sum_{l=1}^2 U_{n,\alpha}^l U_{n,\beta}^{l*}$. Можно показать (см. [17], уравнения (12) и (12')), что

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 U_{n,\alpha}^l U_{n,\beta}^{l*} &= \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{H_{n,\alpha\beta}}{h\omega_n} \right), \\ \sum_{l=3}^4 U_{n,\alpha}^l U_{n,\beta}^{l*} &= \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{H_{n,\alpha\beta}}{h\omega_n} \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где ω_n означает абсолютную величину ω_n^l . Аналогичные выражения справедливы также для сумм $\sum_{\lambda} V_{\nu,\alpha}^{\lambda} V_{\nu,\beta}^{\lambda*}$.

Если разложить волновые функции φ^* и χ согласно (2.8) и учесть равенства (3.9), для величин A_0 , \mathbf{H} и \mathbf{B} получаются выражения вида

$$\begin{aligned} A_0 &= \sum_{n,\nu,l,\lambda} b_n^{l*} c_{\nu}^{\lambda} A_{n\nu}^{l\lambda} e^{-i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_{\nu}) \cdot \mathbf{r} + i(\omega_n^l - \omega_{\nu}^{\lambda})t}, \\ \mathbf{H} &= \sum_{n,\nu,l,\lambda} b_n^{l*} c_{\nu}^{\lambda} \mathbf{H}_{n\nu}^{l\lambda} e^{-i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_{\nu}) \cdot \mathbf{r} + i(\omega_n^l - \omega_{\nu}^{\lambda})t}, \\ \mathbf{B} &= \sum_{n,\nu,l,\lambda} b_n^{l*} c_{\nu}^{\lambda} \mathbf{B}_{n\nu}^{l\lambda} e^{-i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_{\nu}) \cdot \mathbf{r} + i(\omega_n^l - \omega_{\nu}^{\lambda})t}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Определяя A_0 , \mathbf{H} и \mathbf{B} при помощи соотношений (3.5)–(3.8), получаем следующие значения для коэффициентов $A_{n\nu}^{l\lambda}$, $\mathbf{H}_{n\nu}^{l\lambda}$, $\mathbf{B}_{n\nu}^{l\lambda}$:

$$\text{(случай I)} \quad A_{n\nu}^{l\lambda} = 2\pi^{3/8} GL^{-3} \frac{\hbar^3}{m^2 c} U_n^{l*} V_{\nu}^{\lambda},$$

$$\begin{aligned} \text{(случай II)} \quad A_{n\nu}^{l\lambda} &= 2\pi^{3/8} GL^{-3} \frac{\hbar^4}{m^3 c^2} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^{2s} (-i) \omega_{\nu}^{\lambda} \times \\ &\times \left(\mathbf{k}_n \mathbf{k}_{\nu} - \frac{1}{c^2} \omega_n^l \omega_{\nu}^{\lambda} \right)^s U_n^{l*} \beta V_{\nu}^{\lambda}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(случай III)} \quad \mathbf{H}_{n\nu}^{l\lambda} &= 2\pi^{3/8} GL^{-3} \frac{\hbar^4}{m^3 c^2} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^{2s} \times \\ &\times i \left(\mathbf{k}_n \mathbf{k}_{\nu} - \frac{1}{c^2} \omega_n^l \omega_{\nu}^{\lambda} \right)^s U_n^{l*} [\boldsymbol{\alpha} \mathbf{k}_{\nu}] V_{\nu}^{\lambda}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(случай IV)} \quad \mathbf{B}_{n\nu}^{l\lambda} &= 2\pi^{3/8} GL^{-3} \frac{\hbar^4}{m^3 c^2} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^{2s} i \left(\mathbf{k}_n \mathbf{k}_{\nu} - \frac{1}{c^2} \omega_n^l \omega_{\nu}^{\lambda} \right)^s \times \\ &\times U_n^{l*} \beta \left([\boldsymbol{\alpha} \mathbf{k}_{\nu}] - \frac{\omega_{\nu}^{\lambda}}{2c} [\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}] \right) V_{\nu}^{\lambda}, \end{aligned}$$

где

$$U_n^{I^*} V_\nu^\lambda = \sum_{\alpha=1}^4 U_{n,\alpha}^{I^*} V_{\nu,\alpha}^\lambda, \quad U_n^{I^*} \beta V_\nu^\lambda = \sum_{\alpha,\gamma=1}^4 U_{n,\alpha}^{I^*} \beta_{\alpha\gamma} V_{\nu,\gamma}^\lambda$$

и т. д.

Используя (3.14), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \sum_{\lambda=3}^4 |U_n^{I^*} V_\nu^\lambda|^2 &= \sum_{l=1}^2 \sum_{\lambda=3}^4 \sum_{\sigma=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 U_{n,\alpha}^{I^*} V_{\nu,\alpha}^\lambda U_{n,\beta}^l V_{\nu,\beta}^{\lambda^*} = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{H_n}{\hbar\omega_n}\right)_{\beta\alpha} \left(1 - \frac{H_\nu}{\hbar\omega_\nu}\right)_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \text{Sp} \left(1 + \frac{H_n}{\hbar\omega_n} - \frac{H_\nu}{\hbar\omega_\nu} - \frac{H_n H_\nu}{\hbar^2 \omega_n \omega_\nu}\right), \end{aligned}$$

где Sp означает след матрицы. Так как

$$\text{Sp } \beta = \text{Sp } \alpha_k = \text{Sp } \beta \alpha_k = \text{Sp} (\alpha, \alpha_k - \delta_{ik}) = 0,$$

согласно (3.12) имеем

$$\text{Sp } H_n = \text{Sp } H_\nu = 0,$$

$$\text{Sp } H_n H_\nu = \hbar^2 c^2 \text{Sp} ((\alpha \mathbf{k}_n) + \beta k_0) (\alpha \mathbf{k}_\nu) = \hbar^2 c^2 \text{Sp} (\mathbf{k}_n \mathbf{k}_\nu) = 4c^2 \hbar^2 (\mathbf{k}_n \mathbf{k}_\nu)$$

и, следовательно,

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{\lambda=3}^4 |U_n^{I^*} V_\nu^\lambda|^2 = 1 - \frac{c^2 (\mathbf{k}_n \mathbf{k}_\nu)}{\omega_n \omega_\nu}.$$

Сумма $\sum_{l=3}^4 \sum_{\lambda=1}^2$ имеет такую же величину. Итак, получаем

$$\begin{aligned} (\text{случай I}) |A_{n\nu}|^2 &= \sum_{l=1}^2 \sum_{\lambda=3}^4 |A_{n\nu}^{l\lambda}|^2 = \sum_{l=3}^4 \sum_{\lambda=1}^2 |A_{n\nu}^{l\lambda}|^2 = \\ &= 4\pi^3 G^2 L^{-6} \frac{\hbar^6}{m^4 c^2} \left(1 - \frac{c^2 (\mathbf{k}_n \mathbf{k}_\nu)}{\omega_n \omega_\nu}\right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Подобным же образом

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \sum_{\lambda=3}^4 |U_n^{I^*} \beta V_\nu^\lambda|^2 &= \sum_{l=1}^2 \sum_{\lambda=3}^4 \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^4 U_{n,\alpha}^{I^*} \beta_{\alpha\beta} V_{\nu,\beta}^\lambda U_{n,\gamma}^l \beta_{\gamma\delta}^* V_{\nu,\delta}^{\lambda^*} = \\ &= \frac{1}{4} \text{Sp} \left(1 + \frac{H_n}{\hbar\omega_n}\right) \beta \left(1 - \frac{H_\nu}{\hbar\omega_\nu}\right) \beta = 1 + \frac{c^2 (\mathbf{k}_n \mathbf{k}_\nu)}{\omega_n \omega_\nu}. \end{aligned}$$

Замечая, что $\omega_\nu = ck_\nu$, получаем

$$(\text{случай II}) |A_{n\nu}|^2 = 4\pi^3 G^2 L^{-6} \frac{\hbar^8}{m^6 c^4} k_\nu^2 \left(1 + \frac{c^2 (\mathbf{k}_n \mathbf{k}_\nu)}{\omega_n \omega_\nu}\right) q^{2s}, \quad (3.17)$$

где

$$q = \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \left((\mathbf{k}_n \mathbf{k}_\nu) + \frac{\omega_n \omega_\nu}{c^2} \right). \quad (3.18)$$

Таким же образом получаем после некоторых вычислений

$$\begin{aligned}
 (\text{случай III}) \quad (\mathbf{H}_{n\nu} \mathbf{d}_1) (\mathbf{H}_{n\nu}^* \mathbf{d}_2) &= 4\pi^3 G^2 L^{-6} \frac{\hbar^8}{m^6 c^4} \times \\
 &\times [(\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2) \mathbf{k}_\nu^2 - (\mathbf{d}_1 \mathbf{k}_\nu) (\mathbf{d}_2 \mathbf{k}_\nu)] \left(1 + \frac{c^2 (\mathbf{k}_n \mathbf{k}_\nu)}{\omega_n \omega_\nu}\right) q^{2s}, \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{случай IV}) \quad (\mathbf{B}_{n\nu} \mathbf{d}_1) (\mathbf{B}_{n\nu}^* \mathbf{d}_2) &= 4\pi^3 G^2 L^{-6} \frac{\hbar^8}{m^6 c^4} \times \\
 &\times (\mathbf{d}_1 \mathbf{k}_\nu) (\mathbf{d}_2 \mathbf{k}_\nu) \left(1 + \frac{c^2 (\mathbf{k}_n \mathbf{k}_\nu)}{\omega_n \omega_\nu}\right) q^{2s}, \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{\lambda=3}^4 (\mathbf{H}_{n\nu}^{l\lambda} \mathbf{d}_1) (\mathbf{H}_{n\nu}^{*l\lambda} \mathbf{d}_2) = \sum_{l=3}^4 \sum_{\lambda=1}^2 (\mathbf{H}_{n\nu}^{l\lambda} \mathbf{d}_1) (\mathbf{H}_{n\nu}^{*l\lambda} \mathbf{d}_2) = (\mathbf{H}_{n\nu} \mathbf{d}_1) (\mathbf{H}_{n\nu}^* \mathbf{d}_2), \quad (3.21)$$

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{\lambda=3}^4 (\mathbf{B}_{n\nu}^{l\lambda} \mathbf{d}_1) (\mathbf{B}_{n\nu}^{*l\lambda} \mathbf{d}_2) = \sum_{l=3}^4 \sum_{\lambda=1}^2 (\mathbf{B}_{n\nu}^{l\lambda} \mathbf{d}_1) (\mathbf{B}_{n\nu}^{*l\lambda} \mathbf{d}_2) = (\mathbf{B}_{n\nu} \mathbf{d}_1) (\mathbf{B}_{n\nu}^* \mathbf{d}_2).$$

Здесь \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 — два произвольных вектора. Отметим, что эти выражения симметричны по \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 .

§ 4. Взаимодействие и собственная энергия тяжелых частиц. Основные формулы

Рассмотрим две тяжелые частицы, каждая из которых взаимодействует с электронно-нейтринным полем, чем обусловлено взаимодействие этих частиц между собой. Согласно (2.6) и (2.14) волновое уравнение для полной системы, которая включает тяжелые частицы и поле, может быть записано в виде

$$\left(\frac{p_1^2 + p_2^2}{2M} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = - [V(1) + V(2)] \psi. \quad (4.1)$$

Волновая функция ψ зависит не только от пространственных, спиновых и зарядовых переменных обеих частиц \mathbf{r}_1 , s_1 , ρ_1 и \mathbf{r}_2 , s_2 , ρ_2 , но также и от переменных N_n^i и M_ν^λ , которые описывают состояние электронно-нейтринного поля. Согласно (2.7) оператор $V(i)$ определяется выражением

$$\begin{aligned}
 V(i) &= Q_i \{ A_0^*(\mathbf{r}_i) + (\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{H}^*(\mathbf{r}_i)) + (\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{B}^*(\mathbf{r}_i)) \} + \\
 &+ Q_i^+ \{ A_0(\mathbf{r}_i) + (\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{H}(\mathbf{r}_i)) + (\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)) \}, \quad i = 1, 2, \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

где через $A_0(\mathbf{r}_i)$ обозначена величина A_0 в точке \mathbf{r}_i и т. п. В соответствии с (3.15) можно вместо (4.2) написать

$$\begin{aligned}
 V(i) &= Q_i \sum_{n,l} \sum_{\nu,\lambda} b_n^{*l} c_\nu^\lambda K_{n\nu}^{l\lambda}(i) e^{-i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_\nu) \mathbf{r}_i + i(\omega_n - \omega_\nu^l) t} + \\
 &+ Q_i^+ \sum_{n,l} \sum_{\nu,\lambda} b_n^l c_\nu^{*\lambda} K_{n\nu}^{*l\lambda}(i) e^{i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_\nu) \mathbf{r}_i - i(\omega_n - \omega_\nu^l) t}, \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$K_{n\nu}^{l\lambda}(i) = A_{n\nu}^{l\lambda} + (\sigma_i \mathbf{H}_{n\nu}^{l\lambda}) + (\sigma_i \mathbf{B}_{n\nu}^{l\lambda}). \quad (4.4)$$

Следуя вычислительной процедуре, предложенной Фоком и Подольским [18] для случая кулоновского взаимодействия заряженных частиц, можно использовать для решения уравнения (4.1) метод последовательных приближений. Полагая $\psi = \psi^0 + \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \dots$, где $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$, ... представляют собой поправки к невозмущенной волновой функции ψ^0 , получаем из (4.1) соотношение

$$\left(\frac{p_1^2 + p_2^2}{2M} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi^{(n+1)} = - [V(1) + V(2)] \psi^{(n)}. \quad (4.5)$$

Будем считать, что невозмущенная волновая функция имеет вид

$$\psi^0 = u(s_1, \rho_1, s_2, \rho_2) f(N_n^l, M_\nu^\lambda) e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2) - i\omega_0 t}, \quad (4.6)$$

причем функция $f(N_n^l, M_\nu^\lambda)$ описывает состояние электронно-нейтринного поля и величина ω_0 определяется из соотношения

$$\hbar\omega_0 = \frac{\hbar^2 (k_1^2 + k_2^2)}{2M}. \quad (4.7)$$

Подставив (4.6) в (4.5), приходим к простому дифференциальному уравнению для $\psi^{(1)}$, решая которое получим

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} = & - \sum_{n,l} \sum_{\nu,\lambda} \left\{ \frac{b_n^{*l} c_\nu^\lambda Q_1^* K_{n\nu}^{l\lambda}(1) e^{i(\omega_n^l - \omega_\nu^\lambda) t - i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_\nu) \mathbf{r}_1}}{\frac{\hbar^2}{2M} |(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_\nu)^2 + \mathbf{k}_2^2| - \hbar(\omega_0 - \omega_n^l + \omega_\nu^\lambda)} + \right. \\ & \left. + \frac{b_n^l c_\nu^{*\lambda} Q_1 K_{n\nu}^{*l\lambda}(1) e^{-i(\omega_n^l - \omega_\nu^\lambda) t + i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_\nu) \mathbf{r}_1}}{\frac{\hbar^2}{2M} |(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_n - \mathbf{k}_\nu)^2 + \mathbf{k}_2^2| - \hbar(\omega_0 + \omega_n^l - \omega_\nu^\lambda)} \right\} \psi^0 + \end{aligned} \quad (4.8)$$

+ выражение, полученное перестановкой индексов 1 и 2.

Знаменатели, входящие в (4.8), могут быть существенно упрощены. Используя (4.7), получим

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2M} |(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_\nu)^2 + \mathbf{k}_2^2| - \hbar(\omega_0 - \omega_n^l + \omega_\nu^\lambda) &= \\ = \frac{\hbar^2}{2M} (2\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_\nu - \mathbf{k}_n)(\mathbf{k}_\nu - \mathbf{k}_n) + \hbar(\omega_n^l - \omega_\nu^\lambda). \end{aligned}$$

Теперь видно, что в (4.8) важны только те члены, в которых ω_n^l и ω_ν^λ имеют противоположные знаки, так что

$$|\omega_n^l - \omega_\nu^\lambda| = |\omega_n^l| + |\omega_\nu^\lambda| = c(\sqrt{\mathbf{k}_0^2 + \mathbf{k}_n^2} + k_\nu) > c(k_n + k_\nu).$$

Таким образом,

$$\frac{\hbar^2 (2\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_\nu - \mathbf{k}_n) (\mathbf{k}_\nu - \mathbf{k}_n)}{2M\hbar |\omega_n^l - \omega_\nu^\lambda|} < \frac{\hbar (2k_1 + k_\nu + k_n) (k_n + k_\nu)}{2Mc (k_n + k_\nu)} = \\ = \frac{\hbar (2k_1 + k_\nu + k_n)}{2Mc} < \frac{p_1}{Mc} + \frac{\hbar (\omega_\nu + \omega_n)}{2Mc^2} = \frac{v_1}{c} + \frac{\hbar\omega_n}{Mc^2} + \frac{\hbar\omega_\nu}{Mc^2}.$$

Поэтому до тех пор, пока скорость тяжелой частицы 1 мала по сравнению со скоростью света и энергии электрона и нейтрино малы по сравнению с энергией покоя тяжелой частицы Mc^2 , можно заменить рассматриваемый знаменатель на $\hbar (\omega_n^l - \omega_\nu^\lambda)$. Упростив подобным образом все остальные знаменатели в (4.8) и подставив получившееся выражение в (4.5), получим дифференциальное уравнение для $\psi^{(2)}$. Функция $\psi^{(2)}$ оказывается равной сумме членов, соответствующих невозмущенному состоянию электронно-нейтринного поля (т. е. пропорциональных невозмущенной функции $f(N_n^l, M_\nu^\lambda)$), и членов, описывающих поле в состоянии, которое отличается от невозмущенного тем, что учтено поглощение или испускание двух электронов и двух нейтрино. Интересуясь только статическим взаимодействием двух тяжелых частиц, мы оставим в выражении для $\psi^{(2)}$ лишь члены первого типа, которые включают b_n^l и $b_{n'}^{*l'}$ только в билинейных комбинациях $b_n^l b_{n'}^{*l'}$ и $b_n^{*l} b_{n'}^{l'}$ ($n = n'$, $l = l'$). То же самое относится и к величинам c_ν^λ и $c_\nu^{*\lambda}$.

В этом приближении получим

$$\left(\frac{p_1^2 + p_2^2}{2M} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi^{(2)} = - \{ V_{11} + V_{12}(\mathbf{r}_{12}) + V_{22} \} \psi^{(0)}, \\ V_{11} = \sum_{n,l} \sum_{\nu,\lambda} \frac{|K_{n\nu}^{l\lambda}(1)|^2}{\hbar (\omega_n^l - \omega_\nu^\lambda)} \{ Q_1^+ Q_1 b_n^{*l} b_{n'}^{l'} c_\nu^\lambda c_\nu^{*\lambda} - Q_1 Q_1^+ b_n^l b_{n'}^{*l'} c_\nu^{*\lambda} c_\nu^\lambda \}, \\ V_{12} = \sum_{n,l} \sum_{\nu,\lambda} (b_n^{*l} b_{n'}^{l'} c_\nu^\lambda c_\nu^{*\lambda} - b_n^l b_{n'}^{*l'} c_\nu^{*\lambda} c_\nu^\lambda) \times \\ \times \frac{Q_1^+ Q_2 K_{n\nu}^{l\lambda}(1) K_{n\nu}^{*l\lambda}(2) e^{-i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_\nu) \mathbf{r}_{12}} + Q_1 Q_2^+ K_{n\nu}^{*l\lambda}(1) K_{n\nu}^{l\lambda}(2) e^{i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_\nu) \mathbf{r}_{12}}}{\hbar (\omega_n^l - \omega_\nu^\lambda)}, \\ \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Будем считать, что электронно-нейтринное поле находится в «нормальном» состоянии, т. е. что все уровни с отрицательной энергией заполнены частицами, в то время как все уровни с положительной энергией свободны:

$$N_n^l = 0, \quad \text{если } l = 1, 2; \quad N_n^l = 1, \quad \text{если } l = 3, 4; \\ M_\nu^\lambda = 0, \quad \text{если } \lambda = 1, 2; \quad M_\nu^\lambda = 1, \quad \text{если } \lambda = 3, 4.$$

Используя уравнения (2.10) и аналогичные уравнения для c_ν^λ , легко получим соответствующие значения величин $b_n^{*l} b_{n'}^l$, $b_n^l b_{n'}^{*l}$

и т. д. Принимая, далее, во внимание то обстоятельство, что во всех рассматриваемых нами случаях

$$\begin{aligned} \sum_{l=1,2} \sum_{\lambda=3,4} K_{n\nu}^{*l\lambda}(i) K_{n\nu}^{l\lambda}(k) &= \sum_{l=3,4} \sum_{\lambda=1,2} K_{n\nu}^{*l\lambda}(i) K_{n\nu}^{l\lambda}(k) = \\ &= K_{n\nu}^*(i) K_{n\nu}(k) = K_{n\nu}^*(k) K_{n\nu}(i), \quad i, k = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

(ср. с уравнениями (3.16) и (3.21)), и учитывая, что сумма $Q_1 Q_1^+ + Q_1^+ Q_1$ равна единичной матрице, получим в случае, когда поле находится в нормальном состоянии,

$$V_{11} = - \sum_{n\nu} \frac{|K_{n\nu}(1)|^2}{\hbar(\omega_n + \omega_\nu)}, \quad (4.11)$$

$$V_{12} = -2 \sum_{n\nu} \frac{K_{n\nu}^*(1) K_{n\nu}(2)}{\hbar(\omega_n + \omega_\nu)} \{Q_1^+ Q_2 e^{-i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_\nu) \mathbf{r}_{12}} + Q_1 Q_2^+ e^{i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_\nu) \mathbf{r}_{12}}\}, \quad (4.12)$$

где через ω_n и ω_ν обозначены абсолютные значения ω_n^l и ω_ν^λ .

Из уравнения (4.9) следует, что до тех пор, пока мы интересуемся только статическим взаимодействием тяжелых частиц, описывающее их волновое уравнение в первом приближении можно записать в виде

$$\left(\frac{p_1^2 + p_2^2}{2M} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = - \{V_{11} + V_{12}(r_{12}) + V_{22}\} \psi.$$

Таким образом, в этом приближении величины V_{11} и V_{22} равны собственной энергии частиц 1 и 2, а $V_{12}(r_{22})$ — потенциальной энергии взаимодействия этих частиц.

Согласно (4.11) собственная энергия V_{11} отрицательна¹⁵. Если этот результат является правильным (гравитационное притяжение также приводит к отрицательной собственной энергии), то масса тяжелой частицы не может быть обусловлена взаимодействием частицы с электронно-нейтринным полем. В то же время ясно, что она не может иметь и электромагнитное происхождение. Это означает, что она должна быть обусловлена каким-то другим, пока еще неизвестным и более сильным взаимодействием между тяжелыми частицами. Правда, существует также иная, более привлекательная возможность. Если рассчитать взаимодействие электрических зарядов с электромагнитным полем, учитывая только скалярный потенциал A_0 этого поля и используя для квантованных амплитуд скалярных электрических волн a_s обычные для бозевской статистики правила коммутации

$$a_s a_s^* - a_s^* a_s = 1, \quad a_s^* a_s = N_s, \quad a_s a_s^* = 1 + N_s, \quad (4.13)$$

¹⁵ Чтобы обеспечить сходимость V_{11} , можно обрезать энергетический спектр электронов и нейтрино на некоторой максимальной энергии W_m . Если при вычислении V_{11} учесть также отрицательную энергию промежуточных состояний тяжелой частицы, знак V_{11} остается неизменным при условии, что $W_m \ll Mc^2$.

то мы также получим неправильный знак кулоновских сил взаимодействия между зарядами и неправильный знак их электрической собственной энергии. Однако если вместо формального использования для амплитуд a_s бозевских правил коммутации вывести соответствующие правила из уравнений электромагнитного поля, то окажется, что формулы (4.13) имеют место только для квантованных амплитуд векторного потенциала поля, который описывает излучение и поглощение реальных фотонов, в то время как коммутационные соотношения для амплитуд скалярного потенциала, который описывает кулоновское взаимодействие зарядов, получаются иными (см. [18]):

$$a_s a_s^* - a_s^* a_s = -1, \quad a_s^* a_s = 1 + N_s, \quad a_s a_s^* = N_s. \quad (4.14)$$

Если вместо (4.13) использовать выражения (4.14), то для кулоновских сил и собственной энергии получится правильный знак.

Вполне возможно, что в случае электронно-нейтринного поля мы имеем дело с аналогичной ситуацией. Быть может, неизвестные до сих пор уравнения электронно-нейтринного поля могут привести к различным правилам коммутации операторов поля, которые описывают статическое взаимодействие между тяжелыми частицами (этими операторами являются временная компонента A_0 векторного поля A_λ и пространственные компоненты H и B тензорных полей $F_{\lambda\mu}$ и $G_{\lambda\mu}$), с одной стороны, и операторов поля, описывающих излучение и поглощение реальных легких частиц, — с другой, так что уравнение (2.10) останется справедливым только для последних, а знаки потенциальных энергий V_{11} и V_{12} будут противоположны тем, которые были получены нами:

$$V_{11} = + \sum_{n\nu} \frac{|K_{n\nu}(1)|^2}{\hbar(\omega_n + \omega_\nu)}, \quad (4.15)$$

$$V_{12} = +2 \sum_{n\nu} \frac{K_{n\nu}^*(1) K_{n\nu}(2)}{\hbar(\omega_n + \omega_\nu)} (Q_1^+ Q_2 e^{-i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_\nu) \mathbf{r}_{12}} + Q_1 Q_2^+ e^{i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_\nu) \mathbf{r}_{12}}). \quad (4.16)$$

За неимением лучшей теории мы в дальнейшем будем использовать вместо уравнений (4.11) и (4.12) формулы (4.15) и (4.16). Обозначив

$$S = \sum_{n\nu} \frac{K_{n\nu}^*(1) K_{n\nu}(2)}{\hbar(\omega_n + \omega_\nu)} e^{i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_\nu) \mathbf{r}_{12}} \quad (4.17)$$

и используя (4.10), мы можем переписать выражение (4.16) в следующем виде:

$$V_{12} = 2(Q_1^+ Q_2 S^* + Q_1 Q_2^+ S). \quad (4.18)$$

§ 5. Взаимодействие тяжелых частиц

Взаимодействие между тяжелыми частицами зависит от суммы S (уравнение (4.17)). При заданном расстоянии r_{12} между частицами основной вклад в эту сумму вносит область, в которой

k_n и k_y порядка $1/r_{12}$. Если r_{12} порядка 10^{-13} см, то основной вклад в S вносит область, в которой k_n много больше, чем $k_0 = mc/h = 2.6 \cdot 10^{10}$ см $^{-1}$, так что величиной k_0 по сравнению с k_n можно пренебречь. Так как взаимодействие тяжелых частиц становится существенным именно на расстояниях этого порядка, мы можем пренебречь величиной k_0 во всех расчетах, относящихся к этому взаимодействию, и, следовательно, положить

$$\omega_n = ck_n, \quad \omega_y = ck_y, \quad (5.1)$$

(ср. с (3.13)). Заменяя обычным способом сумму (4.17) соответствующим интегралом, получим

$$S = \frac{L^6}{(2\pi)^6 hc} \int \int \frac{dk_n dk_y}{k_n + k_y} K_{n_y}^k(1) K_{n_y}(2) e^{i(k_n - k_y)r_{12}}, \quad (5.2)$$

где L — длина ребра рассматриваемого объема, имеющего форму куба, и $dk_n = dk_{nx} dk_{ny} dk_{nz}$.

Мы оценим величину S при различных предположениях относительно функции K_{n_y} . Рассмотрим прежде всего предположение Ферми, согласно которому $\mathbf{H} = \mathbf{V} = 0$ и A_0 определяется посредством (3.5).

Согласно (3.16), (4.4) и (4.10) мы в этом случае получим

$$(\text{случай I}) \quad S = \frac{G^2 h^5}{24\pi^3 m^4 c^3} \int \int \frac{dk_n dk_y}{k_n + k_y} [1 - \cos(\mathbf{k}_n \mathbf{k}_y)] e^{i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_y)r_{12}}.$$

Интегрируя по направлениям векторов \mathbf{k}_n и \mathbf{k}_y и вводя обозначения

$$x = k_n r_{12}, \quad y = k_y r_{12},$$

получим

$$S = \frac{G^2}{\pi} mc^2 \left(\frac{h}{mcr_{12}} \right)^5 J,$$

$$J = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \frac{xy \sin x \sin y - (x \cos x - \sin x)(y \cos y - \sin y)}{x + y}. \quad (5.3)$$

Вводя новые переменные $s = x + y$, $t = x - y$, находим, что

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{8} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_{-s}^s dt [(t^2 - s^2 + 2) \cos s - 2 \cos t + 2s \sin s + 2t \sin t] = \\ &= - \int_0^\infty \frac{\sin s}{s} ds + \frac{1}{2} \int_0^\infty ds (2 \cos s + s \sin s - \frac{1}{3} s^2 \cos s). \end{aligned}$$

Первый интеграл равен $-\pi/2$, второй бесконечен, но может быть

доопределен обычным способом:

$$\int_0^{\infty} ds \left(2 \cos s + s \sin s - \frac{1}{3} s^2 \cos s \right) = \\ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} ds e^{-\alpha s} \left(2 \cos s + s \sin s - \frac{1}{3} s^2 \cos s \right).$$

Предел последнего выражения равен нулю, так что $J = -\pi/2$. Подставляя это значение в (3.5) и (4.18), получим

$$(\text{случай I}) \quad V_{12} = -G^2 mc^2 \left(\frac{\hbar}{mcr_{12}} \right)^5 (Q_1^+ Q_2 + Q_1 Q_2^+). \quad (5.4)$$

Легко видеть, что оператор $Q_1^+ Q_2 + Q_1 Q_2^+$, действуя на волновую функцию ψ двух тяжелых частиц 1 и 2, не обращается в нуль, только если одна из этих частиц является нейтроном ($\rho = +1$), а другая — протоном ($\rho = -1$). Таким образом, член V_{12} соответствует энергии взаимодействия между нейтроном и протоном. Взаимодействие между тождественными частицами (двумя нейтронами или двумя протонами) может быть найдено только в следующем приближении. Обозначив координаты и спиновые матрицы нейтрона и протона через r_n, σ_n и r_p, σ_p соответственно, получим [19]

$$Q_1^+ Q_2 + Q_1 Q_2^+ = -P(r_n, r_p) \frac{1 + \sigma_n \sigma_p}{2}, \quad (5.5)$$

где $P(r_n, r_p)$ — оператор перестановки, меняющий местами r_n и r_p . Поэтому уравнение (5.4) эквивалентно уравнению

$$(\text{случай I}) \quad V_{12}^{I,0} = G^2 mc^2 \left(\frac{\hbar}{mcr} \right)^5 P(r_p, r_n) \frac{1 + \sigma_n \sigma_p}{2}, \quad (5.6)$$

где через r обозначено расстояние между нейтроном и протоном.

Аналогичным образом мы получим в случае II ($\mathbf{H} = \mathbf{B} = 0$, A_0 определяется выражением (3.6), $s = 0$), в случае III ($A_0 = \mathbf{B} = 0$, \mathbf{H} определяется выражением (3.7), $s = 0$) и в случае IV ($A_0 = \mathbf{H} = 0$, \mathbf{B} определяется выражением (3.8), $s = 0$):

$$(\text{случай II}, s = 0) \quad V_{12}^{II,0} = \frac{5}{2} G^2 mc^2 \left(\frac{\hbar}{mcr} \right)^7 P(r_n, r_p) \frac{1 + \sigma_n \sigma_p}{2}, \quad (5.7)$$

$$(\text{случай III}, s = 0) \quad V_{12}^{III,0} = \{3(\sigma_p \sigma_n) - 7\sigma_{nr} \sigma_{pr}\} V_{12}^{II,0} = \\ = \frac{5}{2} G^2 mc^2 \left(\frac{\hbar}{mcr} \right)^7 P(r_n, r_p) [1 + 2(\sigma_n \sigma_p) - 7\sigma_{nr} \sigma_{pr}],$$

$$(\text{случай IV}, s = 0) \quad V_{12}^{IV,0} = [7\sigma_{nr} \sigma_{pr} - 2(\sigma_n \sigma_p)] V_{12}^{II,0} = \\ = \frac{5}{4} G^2 mc^2 \left(\frac{\hbar}{mcr} \right)^7 P(r_n, r_p) [1 - 5(\sigma_n \sigma_p) + 14\sigma_{nr} \sigma_{pr}], \quad (5.9)$$

где через σ_{nr} и σ_{pr} обозначены компоненты векторных матриц σ_n и σ_p вдоль вектора \mathbf{r} , соединяющего рассматриваемые частицы:

$$\sigma_{nr} = \frac{(\sigma_n \mathbf{r})}{r}, \quad \sigma_{pr} = \frac{(\sigma_p \mathbf{r})}{r}.$$

Эти формулы показывают прежде всего, что взаимодействие между нейтроном и протоном зависит от расстояния значительно сильнее, чем кулоновское взаимодействие ($V \sim r^{-5}$ в случае I, r^{-7} в случаях II, III, IV, если $s=0$, и $V \sim r^{-11}$, если $s=1$ и т. д.). Это находится в согласии с тем, что нам известно о ядерных силах из эксперимента.

Кроме того, взаимодействие гейзенберговского типа получается только в случаях I и II, а в случаях III и IV взаимодействие зависит от ориентации спинов более сложным образом и принадлежит к более общему классу, определяемому формулой (1.3). Функции $I_1(\mathbf{r})$, $I_2(\mathbf{r})$ и $I_3(\mathbf{r})$ в соответствующих выражениях (1.3) отличаются друг от друга только численным множителем. Линейная комбинация этих случаев (или, более точно, линейная комбинация A_0 , \mathbf{H} и \mathbf{B} в формуле (4.4)) охватывает широкий класс операторов взаимодействия, включающий почти все возможные комбинации гейзенберговского и майорановского операторов и оператора $\sigma_i, \sigma_{pr} P(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_p)$.

Заметим, что в случаях I и II имеет место взаимодействие гейзенберговского типа

$$V_{12} = -I_1(r) P(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_p) \frac{1 + \sigma_n \sigma_p}{2},$$

причем функция $I_1(r)$ отрицательна, в то время как из условия стабильности ядер следует, что она должна быть положительной. Вряд ли расхождение существенно, поскольку вообще взаимодействие между нейтроном и протоном не является чисто гейзенберговским. С другой стороны, как гейзенберговские, так и майорановские члены в случаях III и IV ($s=0$) имеют разные знаки. Кроме того, знак V_{12} очень чувствителен к выбору функций \mathbf{H} и \mathbf{B} . Если, к примеру, пренебречь в (3.16) членом $\frac{c^2 (\mathbf{k}_n \mathbf{k}_p)}{(\omega_n \omega_p)}$ по сравнению с единицей (величина этого члена всегда много меньше единицы), то вместо (5.6) получится выражение, которое численно в 4 раза меньше и имеет противоположный знак. В § 7 будет показано, что в случаях II, III, IV абсолютная величина взаимодействия V_{12} оказывается заведомо слишком малой, если $s=0$, так что для объяснения ядерных сил необходимо рассматривать другие возможные выражения для A_0 , \mathbf{H} и \mathbf{B} . Следовательно, как точный вид выражений (5.7)—(5.9), так и их знак не очень существенны и представляют интерес только как иллюстрация общего состояния современной теории ядерных сил.

§ 6. β -распад

Рассмотрим переход тяжелой частицы (под действием произвольного силового поля) из нейтрона в протон, который сопровождается поглощением нейтрино с отрицательной энергией и излучением электрона с положительной энергией и волновым вектором \mathbf{k}_n в области от \mathbf{k}_n до $\mathbf{k}_n + d\mathbf{k}_n$. Следуя процедуре вычислений, предложенной Ферми, получим для вероятности перехода в единицу времени выражение

$$dP = \frac{L^6}{(2\pi)^5 h^4 c^3} k_n^2 (\Delta W - h\omega_n)^2 dk_n \sum_{\substack{l=3,4 \\ \lambda=1,2}} \int |U_{nv}^{l\lambda}|^2 d\Omega_n d\Omega_\nu, \quad (6.1)$$

где в случаях I и II

$$U_{nv}^{l\lambda} = A_{nv}^{l\lambda} \sum_s \int v^*(\mathbf{r}, s) u(\mathbf{r} - s) d\mathbf{r}, \quad (6.2)$$

а в случаях III и IV

$$U_{nv}^{l\lambda} = \sum_s (\mathbf{H}_{nv}^{l\lambda} + \mathbf{B}_{nv}^{l\lambda}) \int v^*(\mathbf{r}, s) \sigma u(\mathbf{r}, s) d\mathbf{r}. \quad (6.3)$$

Здесь $u(\mathbf{r}, s)$ и $v(\mathbf{r}, s)$ — волновые функции тяжелой частицы в начальном (нейтрон) и конечном (протон) состояниях соответственно, ΔW — разность энергий в этих состояниях, $d\Omega_n$ и $d\Omega_\nu$ — телесные углы, задающие направления волновых векторов \mathbf{k}_n и \mathbf{k}_ν . Абсолютная величина вектора \mathbf{k}_ν в (6.2) и (6.3) определяется из закона сохранения энергии

$$h\omega_\nu = chk_\nu = \Delta W - h\omega_n.$$

Используя уравнение (3.16), определяющее $|A_{nv}|^2$, получим

$$(\text{случай I}) dP = 2G^2 \frac{\hbar^2}{m^4 c^5} k_n^2 (\Delta W - h\omega_n)^2 |v|u|^2 dk_n. \quad (6.4)$$

Можно легко показать, что это выражение совпадает с формулой для P , полученной Ферми [1], если в последней пренебречь влиянием электрического заряда ядер на движение β -электронов, т. е. если положить в формуле Ферми $\gamma = Z/137 = 0$. Чтобы убедиться в этом, нужно вспомнить соотношение между фермиевской константой G и нашей константой g в случае I:

$$g = \frac{2\pi^{3/2} G \hbar^3}{m^2 c^2}, \quad (6.5)$$

которое получается из сравнения уравнений (3.4) и (3.5). Если обозначить энергию β -электрона в единицах mc^2 через ε :

$$\varepsilon = \frac{\hbar\omega_n}{mc^2}, \quad (6.6)$$

а максимум величины ε через ε_0 :

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta W}{mc^2}, \quad (6.7)$$

то можно переписать выражение (6.4) в следующем виде:

$$(\text{случай I}) \quad dP_I = |(v|u)|^2 S d\varepsilon, \quad (6.8)$$

где

$$S = 2G^2 \left(\frac{mc^2}{h} \right) (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \quad (6.9)$$

Аналогичным образом в остальных случаях получим

$$(\text{случай II}, s=0) \quad dP_{II,0} = |(v|u)|^2 (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 S d\varepsilon,$$

$$(\text{случай III}, s=0) \quad dP_{III,0} = \frac{2}{3} |(v|\sigma|u)|^2 (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 S d\varepsilon, \quad (6.10)$$

$$(\text{случай IV}, s=0) \quad dP_{IV,0} = \frac{1}{3} |(v|\sigma|u)|^2 (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 S d\varepsilon,$$

$$(\text{случай II}, s=1) \quad dP_{II,1} = |(v|u)|^2 (\varepsilon_0 - \varepsilon)^4 (2\varepsilon^2 - 1) S d\varepsilon. \quad (6.11)$$

Время жизни τ радиоактивного ядра связано с P соотношением

$$\frac{1}{\tau} = \int_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\varepsilon_0} dP = \frac{1}{2} G^2 \left(\frac{mc^2}{h} \right) M^2 F(\varepsilon_0). \quad (6.12)$$

В случаях I и II

$$M^2 = |(v|u)|^2,$$

в случае III

$$M^2 = \frac{2}{3} |(v|\sigma|u)|^2$$

и в случае IV

$$M^2 = \frac{1}{3} |(v|\sigma|u)|^2.$$

Функции $F(\varepsilon_0)$, полученные после интегрирования, имеют вид

$$F(\varepsilon_0) = \varepsilon_0 \ln(\varepsilon_0 + \sqrt{\varepsilon_0^2 - 1}) + \frac{\sqrt{\varepsilon_0^2 - 1}}{15} (2\varepsilon_0^4 - 9\varepsilon_0^2 - 8) \quad (6.13)$$

в случае I и

$$F(\varepsilon_0) = (1 + 2\varepsilon_0^2) \varepsilon_0 \ln(\varepsilon_0 + \sqrt{\varepsilon_0^2 - 1}) + \frac{4\sqrt{\varepsilon_0^2 - 1}}{105} (\varepsilon_0^6 - 10\varepsilon_0^4 - 61,75\varepsilon_0^2 - 8) \quad (6.14)$$

в случаях II, III, IV, если $s=0$.

До сих пор мы не учитывали влияния кулоновского поля ядер на электронные волновые функции. Сравнивая наши уравнения (6.4) и (6.5) с уравнениями (42) и (43) из работы Ферми, мы

видим, что для тяжелых ядер ($Z \sim 82$) влияние кулоновского поля может быть учтено посредством замены в (6.4) множителя $(k_n/mc)^2$ выражением

$$\left(\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3+2S)}\right)^2 \left(\frac{2mc\rho}{\hbar}\right)^{2S} \left[4,5 \frac{k_n}{mc} + 1,6 \left(\frac{k_n}{mc}\right)^2\right],$$

где $S = -0,2$ и $\rho \sim 9 \cdot 10^{-13}$ см. Легко показать, что в случаях II, III, IV влияние кулоновского поля тяжелых ядер может быть учтено таким же образом, по крайней мере, когда $s=0$. Простые вычисления показывают, что в этих случаях нашу формулу (6.14) нужно заменить выражением

$$F'(\varepsilon_0) = 4(\varepsilon_0^6 - 15\varepsilon_0^4 + 40\varepsilon_0^3 - 45\varepsilon_0^2 + 24\varepsilon_0 - 5) + 10,7F(\varepsilon_0), \quad (6.15)$$

если $Z \sim 82$. Функция $F(\varepsilon_0)$ определяется формулой (6.14). Некоторые значения $F(\varepsilon_0)$ и $F'(\varepsilon_0)$, полученные на основе формул (6.14) и (6.15), приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

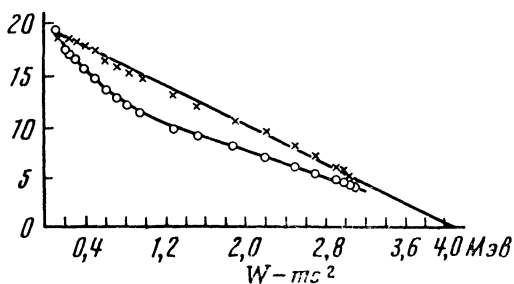
ε_1	2	3	4	5	7
$F(\varepsilon_0)$	0,54	30,7	352	2040	$2,57 \cdot 10^4$
$F'(\varepsilon_0)$	33,8	1352	12500	62900	$6,68 \cdot 10^5$
ε_0	8	10	15	20	25
$F(\varepsilon_0)$	$6,85 \cdot 10^4$	$3,44 \cdot 10^5$	$6,22 \cdot 10^6$	$4,75 \cdot 10^7$	$2,26 \cdot 10^8$

Кажется несомненным, что формулы β -спектров нельзя объяснить в рамках первоначальной теории Ферми (случай I); зато они находятся в хорошем согласии как с модификацией теории, предложенной Конопинским и Уленбеком (случай II, $s=0$) [20], так и с нашим рассмотрением в случаях III и IV ($s=0$), приводящими к одинаковым кривым распределения 16 (уравнение (6.10)). Как было отмечено Конопинским и Уленбеком, эти кривые распределения обладают максимально возможной асимметрией, которая допустима с теоретической точки зрения, так что согласие с экспериментом нарушается, если предположить, что $s \neq 0$ ¹⁷. Это

¹⁶ Случаи II, III, IV различаются только правилами отбора. Согласно Г. Гамову и Е. Теллеру [21], экспериментальные данные свидетельствуют в пользу случаев III и IV или их комбинации со случаем II.

¹⁷ Сравни с [16], где исследован случай II. Полученный там результат справедлив также в случаях III и IV, но формула для случая II ($s=1$) ошибочна: в ней вместо $4W^2-1$ должно стоять $2W^2-1$.

можно видеть из рисунка, на котором приведены графики кривых $(N/\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^{1/4}$ и $[N/\varepsilon (2\varepsilon^2 - 1) \sqrt{\varepsilon^2 - 1}]^{1/6}$ как функции ε , N — относительное число позитронов в спектре P_{15}^{30} в интервале энергий ε , $\varepsilon + d\varepsilon$; экспериментальные данные были мне любезно предоставлены А. Алихановым и А. Алиханяном. Если распределение позитронов определяется формулой (6.10), то первая функция представляет собой прямую линию; если это распределение задается формулой (6.11), то прямая линия соответствует второй функции. Мы видим, что при $s=0$ реализуется первая возможность.



По-видимому, в случаях II, III, IV при $s=0$ не только форма кривых распределения, но также и корреляция между временем жизни радиоактивного вещества и максимальной энергией β -лучей находятся в согласии с теорией. В табл. 2 приведены значения произведения $\tau F(\varepsilon_0)$ для всех элементов, для которых макси-

Таблица 2

Элемент *	τ , сек	ε_0	$10^{-5} \tau F$	
+C11	1260	3,55	1,6	} Группа I
+N13	618	3,84	1,7	
+O15	126	4,92	2,2	
+F17	70	5,70	4,2	
B12	0,02	26,6	71	} Группа II
Si31	9600	5,02	200	
F20	12	12,6	210	
ThC''	273	5,41	290	
+P30	192	8,95	300	
N16	10	13,7	350	
Li8	0,5	23	560	
Na24	$5,6 \cdot 10^4$	4,82	780	} Группа III
RaE	$6,24 \cdot 10^5$	3,64	35600	
P32	$1,23 \cdot 10^6$	5,20	39000	

* Изотопы, распадающиеся с испусканием позитронов, отмечены знаком «плюс».

мальная энергия ε_0 была определена по методу Кюри, Ричардсона и Пакстона, за исключением Cl , Ag^{41} и K^{42} , которые, как было показано этими авторами, имеют сложные β -спектры. Значения ε_0 были взяты из работ Кюри, Ричардсона и Пакстона, а также Фаулера, Дельсассо и Лоритсена [20] и из статьи Чемпиона и Александра [22] и (для P^{30}) из рисунка. Функция $F(\varepsilon_0)$ была рассчитана на основе формулы (6.14) для всех легких элементов и на основе формулы (6.15) для ThC'' и RaE . Теоретическая величина произведения $\tau F(\varepsilon_0)$ обратно пропорциональна $|(v/u)|^2$ или $|(v|\sigma|u)|^2$ (уравнение (6.12)).

Мы видим, что, исключая V^{52} , произведение $\tau F(\varepsilon_0)$ остается приблизительно постоянным внутри каждой группы (изменяясь внутри группы не более чем в 4 раза), в то время как при переходе к соседней группе величина $\tau F(\varepsilon_0)$ изменяется примерно в 100 раз. Эта закономерность вряд ли является случайной: различные группы, вероятно, соответствуют разрешенным и запрещенным квантовым переходам [1].

То обстоятельство, что в первую группу входят только элементы, излучающие позитроны, может быть связано просто с ограниченным числом изученных изотопов.

Если учесть влияние кулоновского поля ядер не только в случае тяжелых элементов, но также и в случае легких, цифры, приведенные в табл. 2, существенным образом не изменяются. Скажем, для ядер P^{32}_{15} и Si^{31}_{14} (легкие элементы, обладающие максимальным ядерным зарядом среди элементов, приведенных в табл. 2) это изменение оказывается порядка 40%.

Таким образом, данные о спектрах β -лучей определенно свидетельствуют в пользу предположения $s=0$ в случаях II, III, IV.

Полагая, что величина $10^{-5} \tau F$ равна единице, когда $M^2=1$ в уравнении (6.12), получаем следующую величину константы G :

$$G = 2 \cdot 10^{-13}. \quad (6.16)$$

С другой стороны, считая, что фермиевская константа g равна $4 \cdot 10^{-50} \text{ см}^3 \cdot \text{эрг}$, и используя формулу (6.5), приходим к значению $G=0,8 \cdot 10^{-13}$, которое того же порядка, что и значение из формулы (6.16).

§ 7. Законы β -распада и абсолютная величина взаимодействия между протонами и нейтронами

Подставив величину G из (6.16) в уравнения (5.6)—(5.9), находим, что абсолютная величина энергии взаимодействия V_{12} протона и нейтрона на расстоянии r порядка 10^{-13} см приблизительно равна:

$$(\text{случай I}) V_{12} \sim 3 \cdot 10^{-26} \left(\frac{\hbar}{mcr}\right)^5 mc^2 \sim 2,5 \cdot 10^{-13} mc^2,$$

$$(\text{случай II, III, IV, } s=0) V_{12} = 3 \cdot 10^{-26} \left(\frac{\hbar}{mcr}\right)^7 mc^2 \sim 4 \cdot 10^{-8} mc^2, \quad (7.1)$$

(случай II, III, IV, $s=1$) $V_{12} = 3 \cdot 10^{-26} \left(\frac{h}{mcr}\right)^{11} mc^2 \sim 8 \cdot 10^2 mc^2$.

Учитывая очень сильную зависимость V_{12} от r , можно ожидать, что $V_{12}/mc^2 \sim 1 \div 10$ при $r \sim 10^{-13}$ см. Следовательно, значения V_{12} , полученные в случае I и в случаях II, III, IV ($s=0$), заведомо слишком малы, а в случаях II, III, IV ($s=1$), наоборот, пожалуй, слишком велики.

Поскольку данные о β -спектрах, как уже отмечалось в § 6, определенно согласуются с предположением $s=0$ (случай II, III, IV), их можно примирить с данными об абсолютной величине V_{12} , только взяв в (4.4) линейную комбинацию по крайней мере двух членов, один из которых соответствует случаю $s=0$.

Рассмотрим для определенности одну конкретную возможность:

$$V = QA_0^* + Q^+A_0, \quad A_0 = A_{01} + \alpha A_{02}, \quad (7.2)$$

где A_{01} определяется уравнением (3.6) с $s=0$ и α — численная константа. Обозначим через n сумму порядков производных электронной волновой функции φ^+ и нейтринной волновой функции χ , входящих в выражение для A_{02} (в наших случаях II, III, IV $n=1+2s$). Легко показать, что энергия взаимодействия, соответствующая вкладу только A_{02} , по порядку величины равна

$$V_{12} \sim G^2 mc^2 \left(\frac{h}{mcr}\right)^{5+2n} \quad (7.3)$$

(ср. с уравнениями (5.6) и (5.7)) и что функция $F(\varepsilon_0)$, определяющая согласно (6.12) время жизни радиоактивного вещества, примерно пропорциональна ε_0^{5+2n} при условии, что $\varepsilon_0 \gg 1$. Это означает, что если V задается формулами (7.2), то должны иметь место следующие соотношения (ср. с уравнениями (6.14) и (6.17)):

$$V_{12} (r \sim 10^{-13} \text{ см}) \sim G^2 mc^2 \left(\frac{h}{mcr}\right)^7 \left[1 + \alpha \left(\frac{h}{mcr}\right)^{n-1}\right]^2 \sim 3 \cdot 10^{-8} mc^2 [1 + \alpha (400)^{n-1}]^2$$

и (при условии $\varepsilon_0 \gg 1$)

$$F(\varepsilon_0) \sim \varepsilon_0^7 (1 + \alpha \varepsilon_0^{n-1})^2.$$

При этом V_{12} будет иметь правильный порядок величины, если

$$\alpha^2 (400)^{2(n-1)} \sim 10^8.$$

С другой стороны, учитывая то обстоятельство, что β -спектры с наибольшей известной в настоящее время величиной максимальной энергии (B^{12} и Li^8) обладают $\varepsilon_0 \sim 25$ и тем не менее, по-видимому, согласуются с теорией в случаях II, III, IV ($s=0$), нужно положить

$$\alpha \varepsilon_0^{n-1} \sim \alpha (25)^{n-1} \ll 1.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{400}{25}\right)^{n-1} = 16^{n-1} \gg 10^4,$$

т. е. $n > 4,3$.

Таким образом, теория может быть приведена в согласие с современными данными по β -распаду и ядерным силам, если выбрать V в виде суммы двух членов, один из которых пропорционален $\varphi^+ \frac{\partial \chi}{\partial x_\lambda}$, а другой $\frac{\partial^l \varphi^+}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots \partial x_\sigma \partial x_\tau \dots} \frac{\partial^m \chi}{\partial x_\sigma \partial x_\tau \dots}$, причем $l + m \geq 5$.

Представляется бессмысленным дальнейшее исследование огромного разнообразия возможностей такого рода без знания каких-то общих принципов, которые пока еще не открыты.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Fermi. Z. Phys., 1934, 88, 161.
2. W. Heisenberg. Zeeman Festschrift. Hague, 1935, S. 108.
3. D. Iwanenko. Nature, 1934, 133, 981.
4. I. Tamm. Nature, 1934, 133, 981. (см. наст. том, статью 23 — прим. ред.).
5. A. Nordsieck. Phys. Rev., 1934, 46, 234.
6. I. Tamm. Nature, 1934, 134, 1010. (см. наст. том, статью 24 — прим. ред.).
7. H. Bethe, R. Peierls. Intern. Conf. on Physics, v. 1. London, 1934, p. 66.
8. E. Konopinski, G. Uhlenbeck. Phys. Rev., 1935, 48, 7.
9. A. Alichanow, A. Alichanian, B. Dzelepov. Nature, 1936, 137, 314.
10. G. Wick. Atti Reale Accad. Naz. Lincei, 1935, 21, 170.
11. E. Fermi. Phys. Rev., 1935, 48, 570.
12. G. Rumer. Compt. rend. Acad. sci. Paris, 1936, 202, 1484.
13. W. Heisenberg. Z. Phys., 1936, 101, 533.
14. W. Pauli. Hand. Phys., Bd. 24, I Teil.
15. C. F. Weizsäcker. Z. Phys., 1936, 102, 572.
16. E. Konopinski, G. Uhlenbeck. Phys. Rev., 1935, 48, 107.
17. I. Tamm. Z. Phys., 1930, 62, 545.
18. V. Fock, B. Podolsky. Phys. Z. Sowjetunion, 1932, 1, 801, 2 Teil.
19. W. Heisenberg. Rapports du VII Conseil Solvay. Paris, 1934, 302.
20. N. D. Kurie, J. R. Richardson, H. C. Paxton. Phys. Rev., 1936, 49, 368; W. A. Fowler, L. A. Delsasso, C. C. Lauritsen. Phys. Rev., 1936, 49, 561.
21. G. Gamov, E. Teller. Phys. Rev., 1936, 49, 896.
22. F. C. Champion, N. S. Alexander. Nature, 1936, 137, 744.
23. H. A. Bethe, R. F. Bacher. Rev. Mod. Phys., 1936, 8, 82.

Приложение. Публикация настоящей статьи была по случайным обстоятельствам задержана. За это время появилась статья Бете и Бечера [23], в которой среди других рассмотрен ряд тех же вопросов, что и в настоящей статье. В их работе содержится ряд результатов, которые, по существу, эквивалентны нашим.

Москва, Физический институт
Академии наук СССР

Получена
17 июля 1936 г.

ИЗОТОПНОЕ СМЕЩЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЙТРОНОВ С ЭЛЕКТРОНАМИ ¹

Изотопное смещение спектральных линий может быть объяснено зависимостью энергетических уровней электронов от массы ядра (т. е. движением ядра и электронов относительно их общего центра тяжести) лишь в случае самых легких элементов (например, H и Li), смещение же некоторых линий Tl, Hg и Pb почти в 10^3 раз превышает этот эффект массы и имеет обратный знак. Даже в случае такого легкого элемента, как Ne, смещение некоторых спектральных термов заметно превышает ожидаемое влияние не только «нормального», но и так называемого специфического эффекта [1] движения ядра.

Сравнение смещения различных термов одного и того же элемента показывает, что величина смещения возрастает с увеличением числа электронов, проникающих в глубь атома, и со степенью их приближения к ядру [2] ². Следовательно, большие изотопные смещения обуславливаются каким-то отличием поля различных изотопов вблизи ядра.

Бартлетт в 1931 г. указал, что, поскольку тяжелые изотопы имеют больший радиус, электрическое поле внутри ядра должно быть слабее и энергия связи электронов должна быть меньше, чем в случае легких изотопов. Вычисления Брейта показали, что в случае тяжелых элементов (Tl, Hg, Pb) этот «эффект радиуса» имеет и правильный порядок величины. Однако в случае легких элементов знак смещения (или, вернее, знак разности между фактическим смещением, смещением и обусловленным «эффектом массы») противоположен знаку «эффекта радиуса». Смещение считается положительным, если термы легких изотопов лежат ниже уровней тяжелых изотопов, в противном же случае — отрицательным. «Эффект радиуса» положителен, тогда как фактическое смещение для легких элементов (примерно до $Z=35$) отрицательно, в середине периодической системы близко к нулю и становится положительным только при сравнительно больших Z .

Таким образом, помимо разницы, обусловленной изменением радиуса, должна существовать еще некая другая разница в полях различных изотопов вблизи ядра. Представляется вероятным,

¹ Докл. АН СССР, 1938, 21, № 3, 106; Изв. АН СССР, серия физ., 1938, 5-6, 764.

² § 49 этой статьи содержит общий обзор проблемы изотопного смещения и библиографию предмета.

что она обусловлена взаимодействием (на близких расстояниях) между электронами и добавочными нейтронами в ядрах. Так как этим взаимодействием должны объясняться отрицательные смещения в спектрах легких элементов, то оно должно сводиться к *притяжению* между электронами и протонами.

Впервые на возможность существования слабого взаимодействия нейтронов с электронами указал Кондон [3]. Основываясь на данных об ионизации газов нейтронами о и рассеянии медленных нейтронов, он определял верхний возможный предел силы этого взаимодействия. Далее он показал, что *отталкивание* между нейтронами и электронами, не превышающее этого предела, могло бы объяснить даже самые большие смещения в спектрах Tl, Hg и Pb. Однако Кондон совершенно не учитывал «эффекта радиуса» и не пытался объяснить зависимости изотопного смещения от атомного номера и изменение его знака в середине периодической системы.

Допустим вместе с Кондоном существование взаимодействия между нейтронами и электронами, принадлежащего к « δ -типу», и предположим, что соответствующий оператор взаимодействия имеет вид

$$\Omega = -fO\Psi^*\Psi\psi'\psi, \quad (1)$$

где Ψ и ψ — волновые функции нейтрона и электрона, O означает какую-либо релятивистски-инвариантную комбинацию этих функций, а f есть универсальная константа. Переходя для нейтрона к нерелятивистскому приближению и усредняя по направлениям его спина, получаем

$$\Omega = -f|\Psi|^2[a\psi^*\psi + (1-a)\psi^*\beta\psi],$$

где β означает одну из дираковских матриц, а a — постоянную, зависящую от выбора оператора O в (1). Так как выбор значения a не влияет существенно на интересующие нас результаты, то мы в дальнейшем положим $a=1$:

$$\Omega = -f|\Psi|^2\psi^*\psi. \quad (2)$$

Допустим далее, что взаимодействия (1) и (2) существуют также между электронами и протонами³.

Предположим, что ядерные частицы равномерно распределены по сфере радиуса $R=A^{1/3}R_0$, где A — атомный вес ядра и $R_0 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{mc^2} = \frac{r_0}{2}$. Тогда изотопное смещение, вызванное прибавлением к ядру ΔA нейтронов и обусловленное как эффектом радиуса, так и взаимодействием (1), может быть вычислено по формуле,

³ В противном случае второй член в скобках в уравнении (3) должен быть помножен на $\left(1 + \frac{3Z}{A(1+2s)}\right)$.

выведенной Розенталь и Брейтом [4] ⁴. Изменение энергии S -состояния электрона оказывается равным:

$$\Delta E = \psi^2(0) \frac{2(1+s)}{\Gamma^2(1+2s)} \left(\frac{2ZA^{1/3}R_0}{a_H} \right)^{2(s-1)} \left\{ \frac{4\pi Ze^2 R_0^3}{A^{1/3}(1+2s)(3+2s)} - f \right\} \Delta A. \quad (3)$$

Здесь $\psi(0)$ — значение прединтегральной волновой функции электрона при $r=0$, $s^2 = 1 - (Ze^2/hc)^2$, а a_H означает радиус водорода \hbar^2/me^2 .

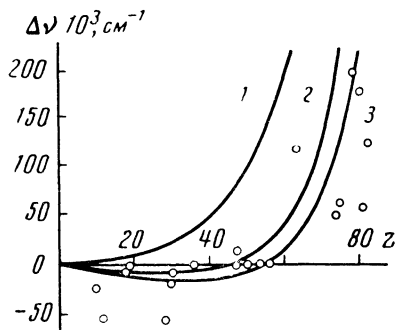
Первый член в скобках соответствует «эффекту радиуса» и возрастает с Z примерно, как $Z^{1/3}$, тогда как второй член, соответствующий взаимодействию (2), не зависит от Z . Благодаря этому оказывается возможным выбрать значение постоянной f так, чтобы объяснить как отрицательные смещения в начале периодической таблицы, так и положительные в ее конце.

Наибольшую неопределенность вносит в (3) фактор $\psi^2(0)$. В случае сложных атомов можно рассчитать теоретически только порядок величины этого фактора, ибо значение $\psi^2(0)$ весьма чувствительно к возмущениям волновой функции, обусловленным взаимодействием электронов. Весьма существенно поэтому, что значение универсальной постоянной f может быть определено своеобразным «нулевым методом». Действительно, равенство смещения нулю в середине периодической системы соответствует обращению в нуль выражения в скобках в уравнении (3), которое от $\psi^2(0)$ не зависит.

Чтобы хотя бы грубо оценить зависимость абсолютной величины смещения от Z , мы воспользовались приближенным выражением

$$\psi^2(0) = \frac{Z(1+z)^2}{\pi n^{*3} a_H^3}, \quad (4)$$

где z означает степень ионизации атома, а n^* — эффективное квантовое число. Мы произвольно приравняли в (4) число n^* единице и положили в (3) $\Delta A = 2$. Кривые 1, 2, 3 на рисунке изображают



результаты вычислений соответственно для $f=0$, $f=2,1 mc^2 r_0^3$ и $f=2,5 mc^2 r_0^3$, где $r_0 = e^2/mc^2$. Кружками на фигуре обозначены

⁴ См. уравнение (12) этой работы, измененное согласно указаниям на стр. 469.

максимальные измеренные значения смещения в спектрах всех элементов ⁵ (начиная с Ne), для которых мы смогли найти данные⁶. Из максимально измеренного смещения было вычтено смещение, соответствующее «нормальному эффекту массы», а остаток разделен на $(1+z)^2$ (ср. уравнение (4)). Учитывались лишь изотопы, обладающие одинаковым механическим моментом вращения.

Из кривой 1 явствует, что одного «эффекта радиуса» недостаточно для объяснения изотопного смещения различных элементов. С другой стороны, принимая во внимание грубость наших приближений (весьма неточная оценка (4) величины $\psi^2(0)$, в которой вдобавок мы произвольно положили $n^*=1$; пренебрежение весьма важным влиянием возмущений и т. п.), можно признать, что общий ход наших кривых 2 и 3 ⁷ удовлетворительно передает зависимость смещения от Z и что истинное значение универсальной постоянной f должно быть примерно равно

$$f = 2,5 mc^2 r_0^3 = 4 \cdot 10^{-44} \text{ эрг/см}^3. \quad (5)$$

Это значение в 13 раз меньше допустимого верхнего предела для f , определенного Е. Кондоном [3] из данных о рассеянии медленных нейтронов.

При выводе уравнения (2) мы усреднили взаимодействие (1) по всем возможным направлениям спина нейтрона. По всей вероятности, взаимодействие (1) зависит от относительного направления спинов нейтрона (или протона) и электрона, так что оно должно сказываться на сверхтонкой структуре спектральных линий. Если зависящая от спина часть этого взаимодействия одного порядка с частью, от спина не зависящей, то вызываемое ею расщепление S -термов должно быть примерно в 20 g раз меньше

⁵ Мы выпустили только Sm потому, что Г. Шюлер и Т. Шмидт (*Z. Phys.*, 1934, 92, 148), измерившие смещение в его спектре, не указывают знака этого смещения. Из рис. 1 их статьи можно заключить, что смещение отрицательно, тогда как ссылка в тексте на «эффект радиуса» и большое положительное смещение в спектре смежного элемента Eu указывают на обратное. Во всяком случае, смещение Sm аномально, ибо в противность общему правилу компоненты спектральных линий, соответствующие четным изотопам, не находятся на одинаковом расстоянии друг от друга. Эта аномалия, вероятно, связана с α -радиоактивностью самария.

⁶ Экспериментальные данные взяты из следующих работ (обозначения типа (B2) означают ссылку на список литературы, приложенной к статье Бете и Бечера): Ne : I. с., ссылка 1 и (B.11); Mg (B.2); Ar: *H. Kopferman, H. Kruger. Z. Phys.*, 1937, 105, 389, 193; *D. Jackson, H. Kuhn. Proc. Roy. Soc.*, 1938, 165, 303; Cu: (R.10); Zn: (S.19); Ga: *H. Schuler, H. Korschung. Z. Phys.*, 1936, 103, 434; Kr: (K.13); Ag: *D. Jackson, H. Kuhn. Proc. Roy. Soc.*, 1937, 158, 372; Cd: (S.20); Sn: (S.18) and (T.5); Xe: (K.9); Ba: *A. Benson, R. Sawyer. Phys. Rev.*, 1937, 52, 1127; Eu: (S.15); *N. Grace, K. More. Phys. Rev.*, 1934, 45, 166, которые, однако, согласно *M. Kiuti, H. Hasunuma* и *T. Kawada. Sci. Abstr.*, 1938, 41, 277, приписали смещению неправильный знак; Re: *H. Schuler, H. Korschung. Z. Phys.*, 1937, 105, 168; Pt: *B. Jaechel, H. Kopfermann. Z. Phys.*, 1936, 99, 492; Hg, Tl and Pb: (B.25).

⁷ Как уже отмечалось, сколько-нибудь надежным является только знак ординат этих кривых, но не их абсолютная величина.

расщепления, обусловленного магнитным моментом ядра (g означает фактор Ланде). Однако спиновое взаимодействие не может сместить центра тяжести спектральной линии. Поэтому излагаемая теория не может объяснить того факта, что компоненты спектральных линий, соответствующие нечетным изотопам, обычно лежат ближе к компонентам более легкого четного изотопа, чем к компонентам более тяжелого изотопа⁸.

Существование взаимодействия (1) приводит к возможности порождения нейтроном или протоном электронно-позитронной пары; это легко доказать, считая волновую функцию электрона ψ квантованной. Поэтому возбужденное ядро может терять энергию не только за счет γ -излучения, но и за счет непосредственного излучения пары. Однако вплоть до весьма высоких энергий возбуждения (порядка 10^8 эв) этот процесс настолько менее вероятен, чем излучение ядром γ -кванта, что число непосредственно излученных пар должно быть совершенно незначительным по сравнению с числом пар, порождаемых внутренней конверсией γ -лучей.

Возможность порождения пар тяжелой частицей приводит к взаимодействию тяжелых частиц, обусловленному обменом парами между ними. Гамов и Теллер [5] и Вентцель [6] впервые высказали мысль о возможности сведения ядерных сил к такому обмену. Однако если принять для f значение (5), то энергия взаимодействия $V(r)$ двух тяжелых частиц, находящихся на расстоянии r друг от друга, оказывается слишком малой:

$$V(r) = -100 \left(\frac{r_0}{r} \right)^5 [\text{эв}]. \quad (6)$$

В недавней заметке [7] я высказал гипотезу о существовании взаимодействия (1) между нейтронами и протонами, с одной стороны, и между легкими и тяжелыми электронами — с другой. Попытка объяснить на основе этого допущения как некоторые свойства проникающих космических лучей, так и ядерные силы привела к значению универсальной постоянной f , превышающей значение (5) примерно в 10 раз. Это расхождение, быть может, означает, что в противность сделанному в упомянутой заметке допущению тяжелые электроны взаимодействуют с нейтронами и протонами сильнее, чем легкие. Во всяком случае, от приложения современной квантовой теории к проблемам, связанным с малыми расстояниями порядка r_0 и с передачей больших энергий, нельзя ожидать больше, чем весьма приближенных оценок.

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила
2 октября 1938 г.

⁸ Указание Р. Бечера и Р. Соiera на исключительно резкую аномалию в положении компонент нечетного изотопа Mg_{25} по отношению к компонентам четных изотопов Mg_{24} и Mg_{26} опровергается новейшими измерениями К. Мейснера (*Phys. Rev.*, 1938, 53, 931).

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Ritschl, H. Schober.* Phys. Z, 1937, 38, 6.
 2. *H. A. Bethe, R. F. Bacher.* Rev. Mod. Phys., 1936, 8, 82.
 3. *E. Condon.* Phys. Rev., 1936, 49, 459.
 4. *T. Rosenthal, G. Breit.* Phys. Rev., 1932, 41, 459.
 5. *G. Gamov, E. Teller.* Phys. Rev., 1937, 51, 289.
 6. *G. Wentzel.* Helv. Phys. Acta, 1937, 10, 107.
 7. *I. Tamm.* C. R. Acad. Sci. URSS, 1938, 19, 475, (см. наст. изд. т. II, статью 39 — прим. ред.).
-

Примечание. В настоящее время указанные в работе особенности спектров объясняются с учетом несферичности ядра и без предположения о взаимодействии нейтронов с электронами.

Интерес к специфическому взаимодействию электрона с нуклоном (так называемые нейтральные токи слабого взаимодействия, см., например, обзор: *А. И. Вайнштейн, И. Б. Хриплович.* УФН, 1974, 112, 685, и лекции: *Л. Б. Окунь.* Элементарные частицы, вып. 1. М., Атомиздат, 1973, стр. 26 и *В. С. Кафтанов.* Там же, стр. 53) возродился в последнее время в связи с попытками построить единую перенормируемую теорию слабого и электромагнитного взаимодействий. Широко обсуждаются, в частности, и возможные спектроскопические проявления нейтральных токов.

О ПРОИСХОЖДЕНИИ ЯДЕРНЫХ СИЛ¹

Совместно с Л. Д. Ландау

Как было показано И. Е. Таммом [1], волновое уравнение для частицы со спином 1 в кулоновом поле обладает существенными отличиями от уравнения для частиц со спином 0 или $1/2$. Именно, решения, соответствующие полным моментам $j \geq 1$ и орбитальным моментам $l = j \pm 1$, обладают в начале координат существенно особой точкой. При этом оказывается, что при малых радиус-векторах r уравнения принимают вид типа

$$\psi'' + f(r)\psi = 0, \quad (1)$$

где $f \sim e^2/\mu c^2 (1/r^3)$ (μ — масса частицы).

В действительности надо иметь в виду, что, как показано Л. Ландау [2], применимость уравнений Прока ограничена расстояниями порядка $r_0 = e^2/\mu c^2$. Если принять во внимание, что (1) имеет вид, аналогичный уравнению Шредингера, то качественная картина получающегося движения может быть формально математически описана как движение фиктивной нерелятивистской частицы с массой 1 в потенциальной яме с радиусом r_0 и глубиной

$$u \sim \hbar^2/r_0^2.$$

Известно, что условием существования уровней, соответствующих движению частицы внутри ямы, является

$$u > \frac{\pi^2 \hbar^2}{8r_0^2}.$$

Поскольку в данном случае u как раз порядка \hbar^2/r_0^2 , то а priori невозможно сказать, существуют ли состояния, соответствующие движению, ограниченному областью порядка r_0 . В частности, они могут оказаться возможными только при определенных значениях момента j .

Если отождествить, как это обычно делается, мезотрон с частицей со спином 1 и считать, что нейтрон состоит из протона и отрицательного мезотрона, то на основе изложенного выше можно предположить, что не существует никакого специфического взаимодействия между протоном и мезотроном, а образование нейтрона является следствием обычного электрического взаимодействия. При такой точке зрения мы должны считать, что в системе

¹ Докл. АН СССР, 1940, 29, № 8-9, 555; С. г. Acad. Sci. URSS, 1940, 29, 556.

протон + отрицательный мезотрон при полном моменте системы, равном $1/2$, и полном моменте мезотрона $j=1$ имеется уровень, соответствующий относительному движению обеих частиц на расстояниях порядка r_0 .

Соответственно этому ядерные силы сводились бы к электрическим силам взаимодействия ядерных частиц посредством мезотронов и объяснялись бы специфическими особенностями уравнений движения мезотронов в электрическом поле.

На первый взгляд могло бы показаться, что такое представление о ядерных силах противоречит в значительной степени подтверждающейся опытом симметрии в свойствах нейтрона и протона. В действительности, однако, из того факта, что система протон + отрицательный мезотрон обладает уровнем с энергией связи примерно μc^2 , ввиду возможности образования и аннигиляции мезотронных пар автоматически следует, что система нейтрон + положительный мезотрон образует протон с выделением примерно той же энергии μc^2 , что можно трактовать как наличие уровня с такой энергией связи.

Благодаря тому что радиус $e^2/\mu c^2$ протона и нейтрона оказывается в этой теории малым по сравнению с размерами ядра, открывается возможность вычислять ряд эффектов (рассеяние мезотронов ядрами, мезотронный фотоэффект и т. п.), не входя в детальное рассмотрение неизвестного взаимодействия внутри самих нейтронов и протонов (подобно тому как это делается в теории дейтрона [3]).

Москва, Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила
19 октября 1940 г.

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *И. Тамм*. Докл. АН СССР, 1940, 29, 551. (см. наст. изд. т. II, статью 41 — прим. ред.).
2. *Л. Ландау*. J. Phys., 1940, 2, 485.
3. *Н. Bethe, R. Peierls*. Proc. Roy. Soc., 1935, A148, 146.

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В СЛОИСТОМ СЕРДЕЧНИКЕ ¹

Созместно с В. Л. Гинзбургом

В статье рассматривается поведение в электромагнитном поле сердечника, состоящего из параллельных друг другу плоских листов металла (железа), разделенных диэлектрическими прослойками. Размеры сердечника считаются малыми по сравнению с длиной волны. Устанавливаются уравнения и пограничные условия для среднего поля в сердечнике и вне его. Вычисляются средняя индукция магнитного поля в эллипсоидальном слоистом сердечнике, самоиндукция и сопротивление катушки с слоистым сердечником, а также выделяющееся в последнем тепло.

Введение

Как известно, электромагнитное поле высокой частоты не проникает в глубь массивных металлических сердечников. Например, в случае плоского проводника поле убывает внутрь по закону $e^{-x/d}$, где x — расстояние от поверхности металла и d — толщина скин-слоя; при этом

$$d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c\lambda}{\sigma\mu}}, \quad (1)$$

где σ — проводимость, μ — магнитная проницаемость, ω — круговая частота поля и $\lambda = 2\pi c/\omega$ — длина волны. Для железа $\sigma \approx 9 \cdot 10^{16} \text{ сек}^{-1}$ и, следовательно,

$$d \approx 10^{-2} \sqrt{\lambda (\text{в м})/\mu} [\text{мм}]. \quad (2)$$

Вследствие скин-эффекта поток индукции через сплошной железный сердечник, помещенный в переменное магнитное поле,

¹ Изв. АН СССР, серия физ., 1943, 7, 30.

может оказаться значительно меньше потока, существовавшего, когда сердечника не было вовсе. Поэтому с целью использования высокой проницаемости железа и других материалов для увеличения индукции в быстро переменных полях нужно делать сердечники из железных опилок или листов, разделенных изолирующими слоями. Если толщина железа не превосходит намного величины d , то при известных условиях применение подобных сердечников окажется выгодным. Могут представлять интерес также сердечники, составленные из листов неферромагнитных материалов.

Для всех применений слоистых сердечников необходимо знать степень проникновения в них поля в зависимости от структуры, формы и ориентации, а также определить величину потерь и т. д.

Рассмотрению всех этих вопросов и посвящена настоящая работа, предпринятая по инициативе акад. Н. Д. Папалекси.

В § 1 проведена общая дискуссия вопроса и среднее поле в области сердечника выражено через значение микрополей. В § 2 получены условия, связывающие средние поля внутри и вне сердечника, и установлены границы применимости теории. Далее (в § 3), рассмотрено поле в шаровом и эллипсоидном сердечниках, находящихся во внешнем магнитном поле. Самоиндукция и сопротивление катушки на слоистом сердечнике, а также потери в последнем вычисляются в § 4. Содержание § 5 составляет расширение теории на случай, когда толщина составляющих сердечник листов металла сравнима или меньше толщины скин-слоя.

§ 1. Исходные положения. Среднее поле в сердечнике

Под слоистым сердечником понимается тело, состоящее из плоских, параллельных друг другу листов металла (для определенности мы будем говорить о железе), разделенных плоскими же прослойками диэлектрика (лака, бумаги). Толщину листов обозначим через a , толщину прослойки — через b . Ось x всегда будем считать направленной перпендикулярно слоям; поверхность слоев параллельна осям y, z , т. е. плоскости yz . Проводимость и магнитную проницаемость железа обозначим через σ и μ ; для диэлектрика $\sigma=0$, $\mu=1$. Диэлектрическую постоянную железа и диэлектрика для простоты положим равной единице. Считая электромагнитное поле периодическим во времени, множитель $e^{i\omega t}$ будем часто опускать.

Если слоистый сердечник помещен в заданное электромагнитное поле, задача заключается в нахождении поля внутри сердечника, а также вблизи него. При этом интерес представляет не точное (квазимикроскопическое) значение поля, а его среднее значение. Однако, прежде чем заняться усреднением, нужно знать, как вычисляется точное поле.

Поскольку металлические листы являются очень хорошими проводниками, в исходном, нулевом приближении можно считать их идеально проводящими. Тогда поле в металле равно нулю, а поле вне его определяется из уравнений Максвелла со следующими граничными условиями:

$$H_n = 0, \quad E_t = 0 \quad (\text{на поверхности металла}), \quad (3)$$

где H_n — нормальная к поверхности слагающая магнитного поля и E_t — тангенциальная слагающая электрического поля.

В первом приближении, учитывающем конечность проводимости металла, поле в металле выражается через значение поля нулевого приближения вне металла. Отсюда далее находятся значения E_t и H_n на поверхности металла, которые нужно принять вместо (3) для нахождения поля вне металла в следующем приближении, и т. д.² Необходимое условие применимости такого метода состоит, вообще говоря, в том, чтобы толщина скин-слоя d была мала по сравнению с толщиной слоя, т. е.

$$d \ll a. \quad (4)$$

Практически ввиду экспоненциальной зависимости поля от x/d достаточно, чтобы толщина a превышала d в несколько раз; условие (4), по-видимому, в большинстве интересных для практики случаев выполняется, так как, например, для железа при $\lambda = 200$ м и $\mu = 200$, $d \approx 10^{-2}$ мм. Обобщение всех соотношений на случай, когда условие (4) не выполняется, будет дано в § 5.

Решая уравнения поля при условии (3), легко видеть, что в плоской прослойке диэлектрика толщины b между двумя идеально проводящими поверхностями, причем $b \ll \lambda = 2\pi c/\omega$, может распространяться только волна

$$\begin{aligned} E_x^e &= E_{x0} e^{-i\varphi}, & H_x^e &= E_y^e = E_z^e = 0, \\ H_y^e &= E_{x0} \sin \alpha e^{-i\varphi}, & H_y^2 + H_z^2 &= E_x^2, \\ H_z^e &= -E_{x0} \cos \alpha e^{-i\varphi}, & \varphi &= k(y \cos \alpha + z \sin \alpha), \quad k = 2\pi/\lambda. \end{aligned} \quad (5)$$

Волны, поляризованные иначе, чем волна (5), чрезвычайно быстро затухают в глубь щели (прослойки диэлектрика); например, минимально затухающая слагающая E_y равна:

$$E_y = E_{y0} \sin \frac{\pi x}{b} e^{-\sqrt{(\pi/b)^2 - k^2} (y \cos \alpha + z \sin \alpha)};$$

поскольку $\pi/b \gg k$, поле E_y уменьшается в e раз на расстоянии b/π от края щели, т. е. внутри щели практически равно нулю.

² За подробностями отсылаем к статьям С. М. Рытова [1] и Я. Л. Альперта [2].

На границе реального проводника и диэлектрика граничные условия, как известно, таковы:

$$H_t^e = H_t^i, \quad E_t^e = E_t^i, \quad (6)$$

где индексы e и i относятся соответственно к диэлектрику и металлу. Значения поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла в металле ³ и с точностью до величин порядка

$$\frac{c}{4\pi\sigma d} = \frac{\mu\sigma d}{2c} \left(\text{для железа } \frac{c}{4\pi\sigma d} \approx 3 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda \text{ (в м)}}} \right),$$

удовлетворяющие условиям (6), равны (см. (5)):

$$\begin{aligned} H_x^i &= 0, \quad H_y^i = H_y^e e^{-x(1+i)/d}, \quad H_z^i = H_z^e e^{-x(1+i)/d}, \\ E_x^i &= \frac{ikc}{4\pi\sigma} E_z^e e^{-x(1+i)/d}, \quad E_y^i = \frac{(1+i)c}{4\pi\sigma d} H_z^e e^{-x(1+i)/d}, \\ E_z^i &= -\frac{(1+i)c}{4\pi\sigma d} H_y^e e^{-x(1+i)/d}, \end{aligned} \quad (7)$$

где x — расстояние от поверхности металла.

Для дальнейшего весьма важно, что магнитное поле, определенное решениями (5) и (7), удовлетворяет граничным условиям (6) точно, т. е. и в первом приближении (а не только в нулевом) магнитное поле в щели определяется выражением (5). Это связано с тем, что поверхность раздела является плоской [1].

Размеры сердечника (кроме, быть может, исключительных случаев) меньше длины электромагнитной волны в окружающей среде $\lambda = 2\pi c/\omega$ (окружающую среду считаем вакуумом). В соответствии с этим будем в дальнейшем считать выполненным неравенство

$$L \ll \lambda, \quad (8)$$

где L — максимальные размеры сердечника.

При этом условии вся картина упрощается; в области $\ll \lambda$ внешнее поле плоской волны можно считать не зависящим от координат, т. е. однородным, но периодическим во времени. При этом существенно, что в нулевом приближении относительно параметра L/λ поля \mathbf{E} и \mathbf{H} независимы, и можно рассматривать случай, когда «на бесконечности» имеется только магнитное или только электрическое поле. Другими словами, в области $L \ll \lambda$ могут иметь место решения уравнений поля, вследствие которых $E \sim L/\lambda \ll H$ или, напротив, $H \sim (L/\lambda) E \ll E$. Например, в поле бегущей волны $E = H$; однако, поставив зеркало, можно создать стоячую волну, вблизи пучности магнитного поля которой $E \sim (L/\lambda) H$, где L — расстояние от пучности; аналогично вблизи пучности электрического поля $H \sim (L/\lambda) E$. В соленоиде, обтекае-

³ Токами смещения по сравнению с токами проводимости в металле пренебрегается, что возможно, пока $\sigma \gg \omega$, т. е. в области радиочастот всегда.

мом током частоты ω , электрическое поле $E \sim (L/\lambda) H$, где L — расстояние от оси соленоида, и т. п. Отсюда видно, что, по существу, связь между полями \mathbf{E} и \mathbf{H} в силу самих уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{i\omega \mathbf{E}}{c}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{H},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

в областях, значительно меньших длины волны, сказывается лишь в первом порядке относительно малого параметра L/λ . Только граничные условия (например, условия на поверхности зеркала) и условия на бесконечности влияют на относительную величину \mathbf{E} и \mathbf{H} в нулевом приближении. Далее, например, вблизи пучности магнитного поля $\operatorname{rot} H \simeq \frac{iE}{\lambda} \sim \frac{iL}{\lambda^2} H$, т. е. весьма мал; в нулевом приближении можно считать, что $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, т. е. поле безвихревое.

Таким образом, задача о сердечнике в поле электромагнитной волны при условии (8) сводится или, точнее, может быть заменена следующей: на бесконечности задано однородное в пространстве и переменное во времени поле $\mathbf{H}_\infty = \mathbf{H}_0 e^{i\omega t}$ и $\mathbf{E}_\infty = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$; поле вне металла с точностью до величин $\sim L/\lambda$ (см. также § 2)⁴ определяется из уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Вводя скалярные потенциалы, эти уравнения можно записывать в виде

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Psi e^{i\omega t}, \quad \Delta \Psi = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi e^{i\omega t}, \quad \Delta \varphi = 0. \quad (9a)$$

На границе идеального проводника должны выполняться условия (см. (3))

$$\partial \Psi / \partial n = 0, \quad (10)$$

$$\partial \varphi / \partial t = 0, \quad (10a)$$

где n и t — направления нормали и касательной к поверхности проводника.

Уравнения (9) и пограничное условие (10) для магнитного поля совпадают (если опустить множитель $e^{i\omega t}$) с уравнениями стационарного обтекания твердого тела потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Уравнения (9a) и условие (10a) совпадают с уравнениями для электростатического поля реальных проводников.

⁴ С вычислениями полей с точностью до величин L/λ включительно, а также поля внутри сердечника при конечной толщине скин-слоя можно ознакомиться, например, по статье М. А. Дивильковского [3].

Решая задачу (9) — (10), мы находим поле вне металла в исходном приближении; поле в металле в первом приближении теперь можно найти сразу же (см. выше и [1]). Из сказанного ясно, что решение (5) при условии (8) не является единственно возможным; уравнениям (9) — (10) в щели удовлетворяет любое поле (\mathbf{E} , \mathbf{H}), не зависящее от координат, и при этом такое, что $E_y = E_z = H_x = 0$. Учитывая (7), мы находим таким образом следующие выражения для полей в щели и листах металла:

$$\begin{aligned} \text{в щели } \mathbf{H}^{\text{микро}} &= \mathbf{H}_0 = \text{const}, \quad H_{0x} = 0, \\ \text{в металле } \mathbf{H}^{\text{микро}} &= \mathbf{H}_0 e^{-\frac{x(1+i)}{d}}, \\ \text{в щели } \mathbf{E}^{\text{микро}} &= \mathbf{E}_0 = \text{const}, \quad E_{0y} = E_{0z} = 0, \\ \text{в металле } \mathbf{E}^{\text{микро}} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение (11) строгое, решение (11а) справедливо с точностью до величин $\sim c/4\pi\sigma d$ (см. выше).

Как уже упомянуто, интерес представляет лишь среднее поле, т. е. поле, усредненное по объемам, содержащим большое число слоев. Такие средние будут обозначаться прямой чертой сверху, например \bar{H}_y . Подобное макроскопическое рассмотрение законно, если можно подобрать физически бесконечно малые размеры l объемов, по которым ведется усреднение, удовлетворяющее двум требованиям: 1) l велико по сравнению с периодом структуры, т. е. $l \gg (a+b)$, и 2) l мало по сравнению с расстояниями, на которых макроскопические средние заметно меняются. При условии (8) это последнее расстояние порядка L . Поэтому развиваемая макроскопическая схема применима лишь, если число слоев в сердечнике велико, т. е. если

$$(a+b) \ll L. \quad (12)$$

Микроскопическое поле в сердечнике определяется уравнениями (11). При условии (4) среднее магнитное поле в сердечнике, очевидно, равно (см. (11))

$$\begin{aligned} \bar{H}_y &= \frac{1}{a+b} \int_{-\frac{a+b}{2}}^{+\frac{a+b}{2}} H_y^{\text{микро}} dx = \frac{1}{a+b} \left\{ \int_{-a/2}^0 H_{0y} e^{x(1+i)/d} dx + \right. \\ &+ \int_0^b H_{0y} dx + \left. \int_0^{a/2} H_{0y} e^{-x(1+i)/d} dx \right\} = \frac{1}{a+b} \left(b + \frac{2d}{1+i} \right) H_{0y} = \\ &= \frac{\beta + \frac{1-i}{2}}{\alpha + \beta} H_{0y}, \quad \bar{H}_{0z} = \frac{\beta + \frac{1-i}{2}}{\alpha + \beta} H_{0z}, \quad \bar{H}_x = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\beta = b/2d, \quad \alpha = a/2d.$$

Средняя индукция магнитного поля равна

$$\begin{aligned} \bar{B}_x = 0, \quad \bar{B}_y &= \frac{1}{a+b} \left(b + \frac{2d\mu}{1+i} \right) H_{0y} = \frac{\beta + \frac{1-i}{2}\mu}{\alpha + \beta} H_{0y}, \\ \bar{B}_z &= \frac{\beta + \frac{1-i}{2}\mu}{\alpha + \beta} H_{0z}. \end{aligned} \quad (13a)$$

Далее,

$$\bar{E}_x = \frac{b}{a+b} E_{0x}, \quad \bar{E}_y = \bar{E}_z = 0. \quad (13b)$$

Средняя индукция $\bar{\mathbf{B}}$ выражается через среднее поле $\bar{\mathbf{H}}$ следующим образом:

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mu} \bar{\mathbf{H}}, \quad \bar{\mu} = \frac{b + \frac{2d}{1+i}\mu}{b + 2d/(1+i)} = \frac{\mu + (1+i)\beta}{1 + (1+i)\beta}. \quad (14)$$

Для получения средних полей (13) усреднение проводилось по периоду структуры $a+b$. При указанных выше условиях (см. (12)) тот же результат получится при усреднении по «физически бесконечно малому» объему размеров l . Среднее поле вне сердечника также может быть получено усреднением по некоторому объему размеров $\sim(a+b)$.

Уравнения для среднего поля такие же, как для микрополя вне металла, т. е. имеют вид (9), где Ψ и φ — потенциалы среднего поля. Для поля вне сердечника потенциал среднего поля в силу линейности уравнений совпадает со средним потенциалом микрополя. Внутри сердечника это так только для идеально проводящего металла; в случае конечной проводимости имеется поле в металле (в скин-слое), которое не потенциально, вследствие чего говорить о потенциале микрополя вообще нельзя. Применяемое усреднение уничтожает, однако, вихревой характер поля; например, усредненное поле (14) однородно (см. (13)).

Кроме того, в силу условий $\bar{H}_x = 0$ и $\bar{E}_y = \bar{E}_z = 0$ уравнения для потенциала среднего поля в сердечнике и связь этого потенциала с напряженностью полей несколько необычны (множитель $e^{i\omega t}$ опускаем):

$$\begin{aligned} \bar{H}_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \bar{H}_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \bar{H}_x = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \\ \bar{E}_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \bar{E}_y = \bar{E}_z = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Например, в случае магнитного поля, если бы мы написали просто $\bar{\mathbf{H}} = -\text{grad } \Psi$, то из $\bar{H}_x = 0$ получили бы, что $\partial \Psi / \partial x = 0$

и $\Psi = \Psi(y, z)$. Последнее, однако, совсем не обязательно, так как, вообще говоря, \bar{H}_y и \bar{H}_z зависят от x . Поэтому нужно, как это и сделано в (15), дифференцировать потенциал магнитного поля только по y и z ; зависимость Ψ от x определится автоматически при решении полной задачи, так как можно показать, что уравнения (15) и обычные уравнения вне сердечника в совокупности с граничными условиями § 2 и обычными условиями на бесконечности определяют поле однозначно. На доказательстве, имеющем место и для электрического поля, мы останавливаться не будем. Однозначность решения ясно видна также при конкретном нахождении поля для отдельных частных случаев (см. § 3).

§ 2. Пограничные условия. Область применимости теории

Для нахождения среднего поля и индукции в слоистом сердечнике, помещенном в заданное электромагнитное поле, необходимо установить условия, связывающие средние поля вне и внутри сердечника на его границе. Для этой цели рассмотрим вначале слоистый сердечник с плоской границей, перпендикулярной слоям (рис. 1). Вне сердечника (при $y > 0$) значение микрополя обозначим через $H^e, \text{микро}$, а в сердечнике (при $y < 0$) — через $H^i, \text{микро}$ и

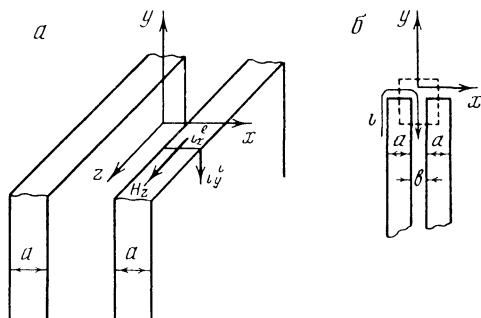


Рис. 1

$B^i, \text{микро}$. Из уравнения $\text{div } \mathbf{B} = 0$ следует, что после усреднения можно иметь место граничное условие⁵

$$\bar{H}_n^e = \bar{B}_n^i, \quad (16)$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности сердечника; в случае рис. 1 $\bar{B}_n = B_y$; очевидно, однако, что условие (16) не зависит от направления нормали. Для того чтобы установить связь тангенциальных

⁵ Для нахождения условия (16) нужно рассмотреть поток индукции через поверхность, сечение которой изображено на рис. 1, б штриховой линией.

Из $\text{div } \mathbf{B} = 0$ следует, что $\oint \mathbf{B}_n ds = 0$. Но $\oint \mathbf{B}_n ds = (\bar{B}_y^e - \bar{B}_y^i)(a + b)$, откуда и получается (16).

составляющих \mathbf{H} , будем сначала считать слои идеально проводящими. Тогда в металле $\mathbf{H}=0$, а у его поверхности в вакууме $H_n=0$ и

$$[\mathbf{n}\mathbf{H}^{\text{микро}}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \quad (17)$$

где \mathbf{i} — поверхностная плотность тока.

Поскольку заданием нормальной составляющей потенциальное поле полностью определяется, условие (17) служит для нахождения \mathbf{i} . Нас будет интересовать лишь составляющая поля H_z . В случае, изображенном на рис. 1,

$$H_z^e = \frac{4\pi i_x^e}{c} \quad \text{и} \quad H_z^i = \pm \frac{4\pi}{c} i_y^i$$

(знак «плюс», если нормаль \mathbf{n} направлена по оси y , и знак «минус» — при противоположном направлении \mathbf{n}). В силу того что ток \mathbf{i} должен сохраняться, очевидно, $i^i = i^e$ и, следовательно, $H_z^e = H_z^i$; это равенство непосредственно связывает поле в щели с полем вне сердечника над торцом железных листов. Однако поле H_z^e над самой щелью имеет то же значение, так как противоположное предположение несовместимо с потенциальным характером \mathbf{H} (если поле в щели и над щелью не одинаково, т. е. $\partial H_z / \partial y \neq 0$, то $(\text{rot } \mathbf{H})_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}$, вообще говоря, не равен нулю, так как, во-первых, вполне возможен случай, когда $H_y = 0$, а, во-вторых, если $H_y \neq 0$, то на расстояниях порядка $a+b$ зависимостью H_y от z можно пренебречь).

Таким образом, $H_z^e, \text{микро} = H_z^i, \text{микро}$ (в щели); в металле $H^i, \text{микро} = 0$. Отсюда сразу получаем, что $\bar{H}_z^e = \frac{a+b}{b} H_z^i$. Если металл не считается идеальным проводником, то внутри щели, как было выяснено в § 1, поле H_z^i остается неизменным; в силу сохранения поверхностного тока то же относится к H_z^e . Однако теперь

$$\bar{H}_z^i = \frac{\beta + \frac{1-i}{2}}{\alpha + \beta} H_z^i \text{ (в щели)} = \frac{\beta + \frac{1-i}{2}}{\alpha + \beta} H^e, \text{микро}.$$

Таким образом, получаем

$$\bar{H}_z^e = \frac{\alpha + \beta}{\beta + \frac{1-i}{2}} \bar{H}_z^i = \delta H_z^i. \quad (18)$$

Условие (18) можно записать в виде

$$[\mathbf{n}\bar{\mathbf{H}}^e] = \delta [\mathbf{n}\bar{\mathbf{H}}^i]_x, \quad (19)$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности сердечника (т. е. в случае рис. 1 единичный вектор по оси y).

В то время как условие (18) справедливо лишь для частного случая, изображенного на рис. 1, это условие в форме (19) сохраняется при любой ориентации нормали к поверхности относительно слоев. В этом легко убедиться, повторяя те же рассуждения, что и выше в применении к рис. 2, плоскость которого есть плоскость (x, \mathbf{n}) . Можно также убедиться, что выбранная на рис. 1 и 2 форма торцов не является обязательной; если торцы имеют неправильную форму (рис. 3), то уравнение (19) все равно остается в силе ⁶. Физически этот результат весьма важен, так как точная форма торцов трудно контролируема.

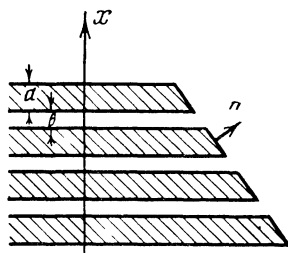


Рис. 2

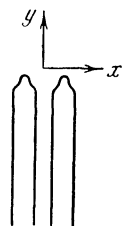


Рис. 3

Соотношения (16) и (19) и представляют собой интересные нас пограничные условия; этих условий достаточно для определения поля (см. § 3). Обычно пограничные условия связывают также в случае, изображенном на рис. 1, \bar{H}_x^e и \bar{H}_x^i (см. (6)). Для слоистого сердечника такой связи наложить нельзя, так как вместо нее задано поле \bar{H}_x^e ($H_x^i=0$). Значение компоненты \bar{H}_x^e определяет согласно (17) плотность поверхностного тока.

Найдем теперь граничные условия для электрического поля. На границе идеального проводника в любом поле и на границе реального проводника в статическом поле имеет место условие $E_z^e = [\mathbf{n}E^e] = 0$ (см. (13) и (10a)). Поэтому, как легко видеть, на границе слоистого сердечника для среднего поля получаем (см. (13б) и рис. 2)

$$[\mathbf{n}\bar{E}^e] = [\mathbf{n}\bar{E}^i], \quad \bar{E}_y^e = \bar{E}_y^i = 0. \quad (20)$$

Условия (20) для нахождения поля недостаточно. Для этого необходимо также указать связь компонент \bar{E}_n^e и \bar{E}_n^i . Подобная связь для микрополя также необходима и, как известно, состоит в том, что в металле поле равно нулю и полный заряд металла

⁶ Изменение формы поверхности по оси z (рис. 3) должно быть мало, чтобы на расстояниях $\sim (a+b)$ им можно было пренебречь. Кроме того, высота различных слоев должна быть примерно одинакова (так как иначе становится несколько неопределенным направление нормали к сердечнику) и угол касательной плоскости с осью x невелик.

$\oint \varepsilon ds = \frac{1}{4\pi} \oint E_n^e, \text{ микро} ds = e$ задан, т. е. заряд каждого листика (слоя), входящего в состав слоистого сердечника, нужно считать заданным (слои изолированы друг от друга). Для определенности будем считать этот заряд равным нулю в соответствии с наиболее вероятной постановкой вопроса (сердечник во внешнем поле). С целью установить условие, накладываемое на \bar{E}_n^e и \bar{E}_n^i в силу этого требования, определим заряд слоя, частично заштрихованного на рис. 4. Заряд слоя складывается из зарядов, расположенных на заштрихованной части, и зарядов в области края слоя.

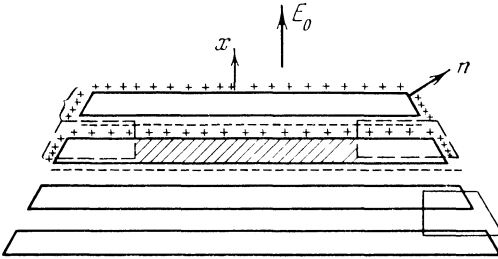


Рис. 4

Эта последняя часть заряда, рассчитанная на единицу длины торца в направлении, перпендикулярном чертежу, может быть найдена в результате применения теоремы Гаусса к поверхности, сечение которой показано штриховыми линиями. Легко видеть, что соответствующий заряд de равен (см. (13б))

$$de = \frac{1}{4\pi} \{ \bar{E}_n^e - E_n^i, \text{ микро} \} dt = \frac{1}{4\pi} \left\{ \bar{E}_n^e - \frac{a+b}{b} \bar{E}^i \right\} dt, \quad (20a)$$

где $dt = \frac{a+b}{\cos(nx)}$. Полный заряд на листе равен результату интегрирования de по поверхности, охватывающей торец листа плюс заряд заштрихованной части листа. В случае эллипсоида поле $\bar{E}^i = \text{const}$, т. е. не меняется от щели, и, следовательно, эта вторая часть заряда равна нулю; вообще же она равна

$$e' = \frac{1}{4\pi} \frac{d\bar{E}^i}{dx} aS,$$

где S — площадь одной поверхности листа. Использование соотношения (20a) для нахождения поля продемонстрировано в § 3. Результат находится в соответствии с тем фактом, что в бесконечном слоистом сердечнике, помещенном в поле E_0 , направленное по оси x , $\bar{E}_{(в щели)}^i, \text{ микро} = E_0$ и, следовательно, $E^i = \frac{b}{a+b} E_0$. Характер поляризации в слоистом сердечнике, имеющем форму стопы, ясен из рис. 4. Из этого рисунка видно, что, даже если заряд каждого слоя равен нулю, имеет смысл говорить о некоторой средней по-

верхностной плотности заряда на слоистом сердечнике $\bar{\sigma}$, понимая под ней плотность зарядов, сконцентрированных на самом торце (на рис. 4 этот заряд ограничен на одном из торцов скобочкой). Плотность $\bar{\sigma}$ находится из условия $\bar{E}_n^e = 4\pi\bar{\sigma}$, которое легко получается, если применить теорему Гаусса к поверхности, сечение которой изображено снизу на рис. 4 сплошной линией.

Условие (20а) выведено при вполне определенной форме торцов; по существу же для вывода важно, чтобы торцы, следующие один за другим, были примерно одинаковы (это не имеет места в случае рис. 3). Подобное условие (идентичность торцов) жестче условий, в которых справедливы уравнения для магнитного поля. Это связано с тем, что электрическое поле в щели более «стеснено», чем поле магнитное (в первом случае $E_y = E_z = 0$, во втором только $H_x = 0$).

Прежде чем перейти к вычислению полей в конкретных случаях, необходимо коснуться области применимости теории. Этот вопрос уже затрагивался, в результате чего были установлены неравенства (4), (8) и (12). Все они, однако, не ограничивают снизу ширину щели b . Между тем физически очевидно, что в очень тонкую щель поле проникать не будет, вернее, будет проникать лишь на небольшую глубину. При этом затухание поля в щели связано с наличием поглощения, т. е. переходом электромагнитной энергии в тепло. Если бы стенки щели были идеально проводящими и, таким образом, потери отсутствовали, то поле распространялось бы в щели беспрепятственно независимо от ее ширины. Это ясно из решения (5), а также из гидродинамической аналогии: идеальная жидкость беспрепятственно и с любой скоростью могла бы протекать по самым узким трубам. Учитывая поглощение поля в щели, легко установить условие, ограничивающее величину b . Если металлическое тело находится в переменном поле и толщина скин-слоя мала, то количество джоулевого тепла, выделяющегося в единицу времени и рассчитанное на единицу поверхности тела, равно [1]

$$q_0 = \frac{c}{16\pi} \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi\sigma}} |H_{0t}|^2 = \frac{\mu\omega d}{16\pi} |H_{0t}|^2 \text{ [эрг/см}^2 \cdot \text{сек]}, \quad (21)$$

где H_{0t} — вещественная амплитуда тангенциальной слагающей магнитного поля у поверхности металла. Количество тепла, которое выделяется в полосе единичных размеров по оси z и шириной dy по оси y (см. рис. 1), равно $2q_0 dy$. Если в щели по оси y распространяется волна (решение (5)), то при стационарном режиме тепловые потери на участке dy должны равняться разности среднего по времени потока энергии в сечении с координатой $y+dy$ и потока в сечении с координатой y . Эта разность равна

$$d\left(\frac{c}{4\pi} b |H_{0t}|^2\right) = -2q_0 dy.$$

Используя (21), легко получаем, что

$$|H_{0t}(y)|^2 = |H_{0t}(0)|^2 e^{-\frac{\mu\omega d y}{2cb}}.$$

Необходимым условием применимости микроскопической теории является требование, чтобы поле мало затухало на расстояниях порядка периода структуры; отсюда получаем условие

$$\frac{\mu\omega d}{2cb}(a+b) \ll 1.$$

Однако использованное выше приближение требует значительно более жесткого условия, заключающегося в слабом затухании поля во всей щели ⁷, т. е. на расстояниях порядка размеров сердечника ⁸ L :

$$\frac{\mu\omega d}{2cb} L = \frac{\tau\mu d}{b} \frac{L}{\lambda} \ll 1. \quad (22)$$

Условие (22) ограничивает допустимые минимальные размеры ширины щели.

В связи с проведенным расчетом может возникнуть такой вопрос: потери определяются через магнитное поле в щели, и следовательно, останутся неизменными, если поле в щели описывается выражением (11), а не (5) (при том же значении H_{0t}); между тем во втором случае (решение (11)) поток энергии, как кажется, отсутствует, так как $E=0$. Дело, однако, в том, что неизбежно присутствующее электрическое поле высшего по сравнению с H порядка малости всегда оказывается достаточным для получения необходимого потока энергии. Проиллюстрируем это для случая, когда в исходном приближении в щели имеется только магнитное поле, направленное по оси z (рис. 5). Применяя к обозначенному на рисунке штриховыми линиями контуру закон индукции $\oint E_s ds =$

$= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int B_n ds$, имеем по порядку величины

$$-\frac{1}{c} \int \frac{dB_n}{dt} ds \approx \frac{L}{\lambda} \left(b + \frac{2d\mu}{1+\mu} \right) H_0 \approx \oint E_s ds \approx 2bE,$$

так как внутри металла $E=0$; отсюда $E \approx \frac{d\mu + b}{2b} \frac{L}{\lambda} H_0$ и, если $d\mu \gg b$, $E \approx \frac{d\mu}{2b} \frac{L}{\lambda} H$. Так как затухание считается малым, потери

⁷ Предположение об отсутствии затухания поля в щели содержится в исходных формулах (5) и (7) (или (11)). Дело здесь не в том, что поле не может меняться вдоль щели (это возможно), а в том, что в щели поле предполагается таким, как если бы стенки были идеально проводящими (потому $\mathbf{H} = -\text{grad } \Psi$).

⁸ Следует иметь, однако, в виду, что для вытянутого сердечника под L можно понимать наименьший из размеров, т. е., например, ширину стержня, а не его длину.

в щели порядка $Q \approx \frac{\mu\omega d}{8\pi} |H_{0z}|^2 L$; поток энергии электромагнитного поля в щель порядка

$$S \approx \frac{c}{4\pi} E H b \approx \frac{d\mu c}{8\pi \lambda} H_0 \approx \frac{\mu\omega d}{4} H_0^2 L,$$

т. е. как раз такой, какой нужно. Из приведенного расчета, между прочим, видно, что электрическое поле, возникающее в однородном переменном во времени магнитном поле, может быть значительно больше $(L/\lambda)H$; в нашем случае $E \sim \frac{\mu d}{b} \frac{L}{\lambda} H_0$, т. е. при $\mu d \gg b$

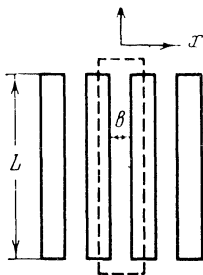


Рис. 5

значительно превосходит поле $(L/\lambda)H_0$ и порядка $(L/\lambda)B_{(в теле)}$. Однако при условии (22) по-прежнему $E \ll H_0$. Последнее неравенство, как указано в § 1, важно для используемых приближений.

§ 3. Шаровой и эллипсоидальный сердечники

Переходя к нахождению полей в слоистых сердечниках, рассмотрим сначала простейший случай — намагничение шарового сердечника радиуса R_0 . Магнитное поле на бесконечности равно H_0 (прямую черту над средними полями в этом параграфе опускаем). Поле вблизи шара и внутри его легко найти и не вводя потенциал. Для этой цели будем искать решение в виде

$$\mathbf{V}^e \equiv \mathbf{H}^e = \mathbf{H}_0 + \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{mR})}{R^5} - \frac{\mathbf{m}}{R^3}, \quad \mathbf{V}^i = \bar{\mu}\mathbf{H}^i = \text{const}, \quad (23)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор, проведенный из центра шара, и \mathbf{m} — магнитный момент шара, подлежащий определению.

Поскольку внешняя нормаль к шару совпадает с \mathbf{R} , граничные условия (16) и (19) приводят к соотношениям (\mathbf{i} — орт x)

$$(\mathbf{nV}^e) = (\mathbf{nV}^i) \rightarrow (\mathbf{R}_0\mathbf{H}_0) + \frac{2(\mathbf{R}_0\mathbf{m})}{R_0^3} = \bar{\mu}(\mathbf{R}_0\mathbf{H}^i), \quad H_x^i = 0,$$

$$[\mathbf{nH}^e]\mathbf{i} = \delta[\mathbf{nH}^i]\mathbf{i} \rightarrow [\mathbf{iR}_0]\mathbf{H}_0 - \frac{[\mathbf{iR}_0]\mathbf{m}}{R_0^3} = \delta[\mathbf{iR}_0]\mathbf{H}^i.$$

Подставляя сюда \mathbf{R}_0 в виде $\mathbf{R}_0 = xi + yj + zk$ и приравнивая в каждом уравнении коэффициенты у координат x, y, z в отдельности (так как условия (16) и (19) должны соблюдаться на всей поверхности), получаем

$$H_{0x} + \frac{2m_x}{R_0^3} = 0, \quad H_{0y} + \frac{2m_y}{R_0^3} = \bar{\mu} H_y^i, \quad H_{0z} + \frac{2m_z}{R_0^3} = \bar{\mu} H_z^i, \\ H_{0y} - \frac{m_y}{R_0^3} = \delta H_y^i, \quad H_{0z} - \frac{m_z}{R_0^3} = \delta H_z^i.$$

Отсюда

$$H_x^i = 0, \quad H_y^i = \frac{3}{2\delta + \bar{\mu}} H_{0y}, \quad H_z^i = \frac{3}{2\delta + \bar{\mu}} H_{0z}, \\ m_x = -\frac{R_0^3}{2} H_{0x}, \quad m_y = \frac{\bar{\mu} - \delta}{2\delta + \bar{\mu}} R_0^3 H_{0y}, \quad m_z = \frac{\bar{\mu} - \delta}{2\delta + \bar{\mu}} R_0^3 H_{0z}, \\ B_x^i = 0, \quad B_y^i = \frac{3\bar{\mu}}{2\delta + \bar{\mu}} H_{0y} = \frac{3\bar{\mu}/\delta}{2 + \bar{\mu}/\delta} H_{0y} = \frac{3\mu'}{2 + \mu'} H_{0y}, \\ B_z^i = \frac{3\mu'}{2 + \mu'} H_{0z}.$$
(24)

Из (24) видно, что в магнитном отношении слоистый шаровой сердечник ведет себя применительно к слагающей H_{0x} как идеальный проводник, а в отношении слагающих H_{0y} и H_{0z} — как сплошной шар с проницаемостью $\bar{\mu}'$:

$$\mu' = \frac{\mu}{\delta} = \frac{b + \frac{2d\mu}{1+i}}{a+b} = \frac{\beta + \frac{1-i}{2}\mu}{\alpha + \beta}, \\ |\mu'| = \frac{\sqrt{\frac{\mu^2}{2} + \mu\beta + \beta^2}}{\alpha + \beta} \approx \frac{\mu}{\sqrt{2}(\alpha + \beta)}, \quad \mu \gg \beta.$$
(25)

Значение μ' совпадает с коэффициентом, связывающим среднюю индукцию в щели с полем внутри щели (см. (13а)), что физически вполне ясно (см. вывод уравнения (19)). Величина β снизу ограничивается условием (22), причем если, например, $\lambda = 200$ м, $L = 0,2$ м и $\mu = 200$, β можно сделать ≥ 1 . Если $\alpha \sim 3$ (см. (4)), то $|\mu'| \cong \mu/6 \cong 33$ (см. также § 5).

В электрическом поле, равном вдали от тела \mathbf{E}_0 , решение для шарового сердечника естественно искать в виде

$$\mathbf{E}^e = \mathbf{E}_0 + \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{pR})}{R^5} - \frac{\mathbf{p}}{R^3}, \quad \mathbf{E}^i = \text{const}, \quad E_y^i = E_z^i = 0.$$

Используя (20), получаем отсюда

$$E_{0y} = \frac{p_y}{R_0^3} = 0, \quad E_{0z} = \frac{p_z}{R_0^3} = 0, \quad E_{0x} = \frac{p_x}{R_0^3} = E_x^i.$$

Из этих уравнений определяются слагающие момента p_y и p_z , которые оказываются такими же, как для сплошного проводящего шара. Для нахождения p_x и E_x^i нужно использовать условие равенства нулю заряда на листах. В случае, когда $E_{0y} = E_{0z} = 0$, из соображений симметрии ясно, что знак заряда на всем торце листа (т. е. на всей окружности, ограничивающей лист) одинаков; поэтому если заряд на каждом листе равен нулю, то в (20а) нужно положить $de = 0$, т. е. для рассматриваемой задачи получаем

$$E_{0x} + \frac{2p_x}{R_0^3} = \frac{a+b}{b} E_x^i;$$

отсюда и из полученного выше уравнения $E_{0x} - \frac{p_x}{R_0^3} = E_x^i$ имеем

$$E_x^i = \frac{3}{2 + \frac{a+b}{b}} E_{0x}, \quad p_x = \frac{a/b}{3 + a/b} R_0^3 E_{0x} = \frac{\frac{a+b}{b} - 1}{2 + \frac{a+b}{b}} R_0^3 E_{0x}.$$

Если поле \mathbf{E}_0 не направлено по оси x , решение несколько сложнее, так как нужно требовать, чтобы равнялся нулю полный заряд листа

$$\int_{(\text{по торцу})} de = 0.$$

Рассмотрим теперь помещенный в магнитном поле \mathbf{H}_0 слоистый эллипсоид вращения с полуосями $A=B$ и $C > A$. Ось z направим по большой оси эллипсоида (ось x по-прежнему перпендикулярна слоям). Используя известное решение задачи о поляризации эллипсоида во внешнем поле [4], будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^e &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}', & \mathbf{H}' &= -\text{grad } \Psi, \\ \Psi &= -(PX_0 + QY_0 + RZ_0), & & (26) \\ \mathbf{H}^i &= \text{const}, & H_x^i &= 0, \end{aligned}$$

где P , Q и R — постоянные и

$$X_0 = Y_0 = \frac{2}{A^2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(1 + s/A^2)\sqrt{1 + s/C^2}}, \quad Z_0 = \frac{2}{C^2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{\left(1 + \frac{s}{C^2}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{s}{A^2}\right)},$$

причем λ — функция координат, определяемая уравнением

$$\frac{x^2 + y^2}{A^2 + \lambda} + \frac{z^2}{C^2 + \lambda} = 1.$$

На поверхности эллипсоида $\lambda = 0$. Значения X_0 , Y_0 и Z_0 при $\lambda = 0$ обозначим через X_{00} , Y_{00} и Z_{00} . Потенциал удовлетворяет вне эллипсоида уравнению Лапласа [4]; на поверхности эллипсоида

$\mathbf{H}' = P \{iX_{00} - 4\mathbf{n}(\mathbf{in})\} + Q \{jY_{00} - 4\mathbf{n}(\mathbf{jn})\} + R \{kZ_{00} - 4\mathbf{n}(\mathbf{kn})\}$,
 где \mathbf{n} — внешняя нормаль.

Условия (16) и (19) дают соответственно

$$\begin{aligned} (\mathbf{nH}_0) + (\mathbf{nH}') &= (\mathbf{nH}_0) + P(\mathbf{ni})(X_{00} - 4) + Q(\mathbf{nj})(Y_{00} - 4) + \\ &+ R(\mathbf{nk})(Z_{00} - 4) = \bar{\mu}(\mathbf{nH}^i), \\ [\mathbf{in}]H_0 - (\mathbf{nk})QX_{00} + (\mathbf{nj})RZ_{00} &= \delta[\mathbf{in}]H. \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку условия (27) должны выполняться на всей поверхности эллипсоида, то, подставляя для \mathbf{n} выражение $\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}$, нужно приравнять коэффициенты при каждой из слагающих n_x, n_y, n_z . В результате получаем

$$\begin{aligned} H_{0x} + P(X_{00} - 4) &= 0, & H_{0y} + Q(X_{00} - 4) &= \bar{\mu}H_y^i, \\ H_{0z} + R(Z_{00} - 4) &= \bar{\mu}H_z^i, & H_{0y} + QX_{00} &= \delta H_y^i, \\ H_{0z} + RZ_{00} &= \delta H_z^i. \end{aligned} \quad (27a)$$

Уравнения (27a) полностью определяют поле \mathbf{H}^i в эллипсоиде (оно оказывается однородным), а также коэффициенты P, Q и R , которых мы выписывать не будем. Индукция в эллипсоиде такова (см. (25)):

$$\begin{aligned} B_x^i &= 0, & B_y^i &= \bar{\mu}H_y^i = \frac{\mu'}{1 + \frac{\mu' - 1}{4}X_{00}} H_{0y}, \\ B_z^i &= \frac{\mu'}{1 + \frac{\mu' - 1}{4}Z_{00}} H_{0z}. \end{aligned} \quad (28)$$

Поток индукции через виток проволоки, охватывающий эллипсоид по экватору, определяется значением B_z^i . «Эффективная проницаемость сердечника» равна⁹

$$\mu_{\text{эфф}} = \frac{B_z}{H_{0z}} = \frac{\mu'}{1 + \frac{\mu' - 1}{q}}, \quad q = \frac{4}{Z_{00}}. \quad (29)$$

Интеграл Z_{00} может быть вычислен, в результате чего получаем (\ln — натуральный логарифм)

$$q = \frac{\eta^2 - 1}{(\eta\sqrt{\eta^2 - 1}) \ln(\eta + \sqrt{\eta^2 - 1}) - 1} \approx \frac{\eta^2}{\ln 2\eta - 1}, \quad \eta = \frac{C}{A} \geq 1, (\eta^2 \gg 1). \quad (30)$$

При $\eta=1$ (шар), $q=3$ и (28)–(29) переходят в (24). Зависимость q от η ясна из приведенных ниже данных:

η	1	3	5	10	20	50	100
q	3	9,3	17,9	50	150	700	2300

⁹ $q = 4\pi/N$, где $N = Z_{00}/4$ — используемый обычно размагничивающий фактор.

Максимальное значение $|\mu_{эфф}|$ равно $|\mu'|$; оно достигается при больших значениях η (стержень). Если, например, $|\mu'| = 50$, то $|\mu_{эфф}| \cong |\mu'|$ при $\eta \geq 20-30$.

Выше был разобран лишь частный случай общей задачи о слоистом эллипсоиде (эллипсоид вращения, слои параллельны большой оси). Другие случаи, значительно менее интересные с точки зрения приложений, могут быть рассмотрены тем же способом.

§ 4. Сопротивление и самоиндукция катушки с слоистым сердечником. Нагревание сердечника

Рассмотрим длинную катушку, намотанную на еще более длинный цилиндрический (или эллипсоидальный) слоистый сердечник. Очевидно, что поле в той части сердечника, которая находится внутри катушки, вдали от ее концов с хорошим приближением равно полю эквивалентного бесконечного соленоида. Поэтому для длинной катушки, когда роль краевых эффектов невелика, вычисление самоиндукции и сопротивления можно проводить, считая ее бесконечным соленоидом. Как известно, поле в соленоиде при отсутствии сердечника направлено по его оси и равно

$$H_0 = \frac{4\pi nI}{c}, \quad (31)$$

где n — число витков на единицу длины, I — сила тока, c — скорость света.

Если в соленоид помещен заполняющий его слоистый сердечник со слоями, параллельными оси катушки, то, как ясно из (19), средние поле и индукция в сердечнике равны:

$$\bar{H}^i = \frac{1}{\bar{\epsilon}} H_0, \quad \bar{B}^i = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\epsilon}} H_0 = \mu' H_0 = \frac{4\pi \mu' nI}{c}. \quad (32)$$

Пусть соленоид будет включен в цепь с переменной э. д. с E_e , самоиндукцией L_e , емкостью C_e и сопротивлением R_e ; при этом под L_e понимается самоиндукция цепи без учета самоиндукции соленоида и R_e равно полному омическому сопротивлению цепи без учета добавочного сопротивления, вносимого сердечником; емкость, вносимую соленоидом как с сердечником, так и без него, будем считать равной нулю. Уравнение для тока в цепи имеет вид

$$IR_e + \frac{L_e}{c^2} \frac{dI}{dt} + \int \frac{Idt}{C_e} = E_e - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi, \quad (33)$$

где Φ — поток индукции B через все витки соленоида. Так как поле однородно, $\Phi = \bar{B}NS$, где N — полное число витков и S — площадь сечения катушки (и сердечника). Индукция складывается из части B^i , созданной током в соленоиде и равной (32), и при наличии внешнего поля из индукции этого поля $B_{вн}$ в сер-

дечнике. Эта последняя часть индукции приводит к появлению в катушке э. д. с. индукции $E_{\text{инд}}$, которая в (33) прибавляется к E_e и может ее заменить. Что касается потока индукции собственного поля, то он равен:

$$\Phi = \bar{B}^i N \pi r_0^2 = \frac{4\pi^2 n N r_0^2}{c} \mu' I.$$

Подставляя для I решение в виде $I = I_0 e^{i\omega t}$ (т. е. предполагая, что $E_e = E_{e0} e^{i\omega t}$ и $E_{\text{инд}} = E_{0, \text{инд}} e^{i\omega t}$), мы видим, что (33) принимает вид

$$\left\{ (R_e + R_c) + \frac{i\omega}{c^2} (L_e + L_c) - \frac{i}{\omega C_e} \right\} I_0 = E_{0e} + E_{0, \text{инд}}, \quad (33a)$$

где сопротивление R_c , вносимое сердечником, и самоиндукция L_c соленоида с сердечником равны (см. (25)):

$$\begin{aligned} R_c &= \frac{4\pi^2 n N r_0^2 \omega}{c^2} \text{Im} \{ \mu' \} = \frac{2\pi^2 \omega N n r_0^2 \mu}{c^2 (\alpha + \beta)}, \\ L_c &= 4\pi^2 n N r_0^2 \text{Re} \{ \mu' \} = \frac{2\pi^2 n N r_0^2}{\alpha + \beta} (\mu + 2\beta). \end{aligned} \quad (34)$$

Напомним, что самоиндукция соленоида без сердечника равна

$$4\pi^2 n N r_0^2 = \frac{4\pi^2 N^2 r_0^2}{l},$$

где l — длина соленоида.

Все величины выше выражены в абсолютной системе единиц; обозначая штрихами те же величины в практической системе, получаем

$$L'_{(в\ эи)} = L \cdot 10^{-9}, \quad R'_{(в\ ом)} = R \cdot 9 \cdot 10^{11} \quad \text{и} \quad E'_{(в\ в)} = E \cdot 300.$$

Логарифмический декремент контура со слоистым сердечником, если положить $R_e = L_e = 0$, равен:

$$\Delta_c = \frac{\pi R_c c^2}{\omega L_e} = \frac{\pi R'_c}{\omega L'_e} = \frac{\pi \mu}{\mu + 2\beta} \cong \pi; \quad (\mu \gg 2\beta). \quad (35)$$

Для магнитных материалов в интересных случаях как раз $\mu \gg \beta$ и, следовательно, декремент весьма велик (см., однако, § 5). Для его уменьшения в этом случае и предполагая, что условие (4) выполнено, можно лишь увеличивать L_l (при условии, что $\frac{dR_e}{dL_e} < \frac{L_c + L_e}{R_c + R_e}$).

Количество тепла, выделяющегося в 1 сек в слоистом сердечнике, равно:

$$Q = R_c |\text{Re} \{ I \}|^2 = \frac{R_l I_0^2}{2} = \frac{\pi L \omega n^2}{c^2 (\alpha + \beta)} V I_0^2, \quad (36)$$

где $V = \pi r_0^2 l$ — объем сердечника.

То же выражение может быть получено при использовании формулы (21), согласно которой тепло, выделяющееся на единице поверхности одной щели, равно

$$q_0 = \frac{\mu\omega d}{16\pi} |H_{0t}|^2,$$

где H_{0t} — амплитуда поля в щели. На единицу длины в направлении, перпендикулярном щелям, приходится $2/(a+b)$ поверхностей соприкосновения металла с диэлектриком (т. е. $1/(a+b)$ щелей). Поэтому тепло, выделяющееся в единице объема сердечника, равно $\frac{\mu\omega}{16\pi(\alpha+\beta)} |H_{0t}|^2$. Далее, как ясно из § 1 и 2 или просто из (32) и (13), в рассматриваемом случае H_{0t} равно внешнему полю H_0 (см. (31)). Таким образом, для Q сразу же получаем формулу (36). В общем же случае мы можем, выражая Q через H_{0t} с помощью (13), написать:

$$Q = \frac{R_c I_0^2}{2}, \quad R_c = \frac{\omega}{8\pi I_0^2} \int \frac{\mu}{\alpha+\beta} |\delta\bar{H}^i|^2 dv, \quad (37)$$

где под \bar{H}^i понимается амплитуда среднего поля в сердечнике.

Самоиндукция сердечника также может быть вычислена из энергетических соображений, так как $L_c \frac{|\operatorname{Re}\{I\}|^2}{2c^2} = \frac{L_c I_0^2}{4c^2} = W$, где W — энергия поля в сердечнике.

Отсюда, подставляя известное выражение для энергии поля, получаем

$$L_c = \frac{c^2}{4\pi I_0^2} \int \operatorname{Re}\{B^i\} \operatorname{Re}\{H^i\} dv = \frac{c^2}{4\pi I_0^2} \int \overline{\operatorname{Re}\{B^i\}} \operatorname{Re}\{H^i\} dv, \quad (38)$$

где усреднение нужно производить над произведением, а не над B^i и H^i в отдельности¹⁰ и под B^i и H^i понимается амплитуда поля.

Легко проверить, что применение формулы (38) к случаю соленоида приводит к формуле (34) для L_c .

Выражения (37) для R_c и (38) для L_c можно привести к виду

$$R_c = \frac{1}{I_0^2} \int f |\bar{H}^i|^2 dv, \quad L_c = \frac{1}{I_0^2} \int g |\bar{H}^i|^2 dv,$$

где f и g — функции α , β , μ , d , ω и универсальных постоянных. Если сердечник однороден, т. е. величины α , β , μ и d для разных его областей одни и те же, то отношения f/g , а следовательно, и R_c/L_c не зависят от формы сердечника и декремент Δ_c равен выражению (35). Единственным условием применимости формулы

¹⁰ В случае слоистого сердечника выражения $(\overline{B\bar{H}})$ и $(\bar{B} \cdot \bar{H})$, конечно, не равны друг другу.

(35) будет в этом случае требование, чтобы все поле было сосредоточено в сердечнике. Точнее, формула (35) остается справедливой и при несоблюдении этого условия, но только если в ней под L_c понимать не полную самоиндукцию катушки, а ту ее часть, которая при энергетической интерпретации самоиндукции локализуется внутри сердечника. Отсюда ясно, что на опыте декремент будет меньше, чем значение (35), относящееся к случаю, когда все поле сосредоточено в сердечнике. Формула (34) для R_c и L_c также строго применима лишь к бесконечному соленоиду, и при этом при условии сплошной намотки, т. е. отсутствия просветов между витками. Сопротивление и самоиндукция катушек на цилиндрических или призматических стержнях конечной длины теоретически надежно вычислены быть не могут, так же как для конечных катушек при отсутствии сердечника. С этой точки зрения ценность формулы (34) состоит в установлении зависимости R_c и L_c от свойств сердечника, т. е. от μ , α и β .

Наводимая внешним магнитным полем э. д. с. $E_{\text{инд}}$ в катушке, плотно намотанной на слоистый сердечник, зависит от индукции $B_{\text{инд}}$, создаваемой этим полем в сердечнике. Если, например, сердечник имеет форму вытянутого эллипсоида вращения, то, как ясно из § 3 и сказанного выше,

$$E_{\text{инд}} = \pi r^2 N \frac{\omega}{c} |\mu_{\text{эфф}}| H_{0z}, \quad (39)$$

где N — число витков катушки, r — ее средний радиус, и предполагается, что плоскость витков перпендикулярна большой оси эллипсоида, направленной по оси z . Далее, если $\mu \gg \beta$ и $|\mu'| \gg 1$, то (см. (25) и (29))

$$|\mu_{\text{эфф}}| \cong \left| \frac{\mu'}{1 + \frac{\mu'}{q}} \right| \approx \frac{|\mu'|}{\sqrt{1 + \sqrt{2} \frac{|\mu'|}{q} + \frac{|\mu'|^2}{q^2}}} \leq |\mu'| = \frac{\mu}{\sqrt{2}(\alpha + \beta)}. \quad (40)$$

Для соленоида $|\mu_{\text{эфф}}| = |\mu'|$; для эллипсоида это значение достигается в пределе при возрастании q . Увеличения $|\mu'|$ можно достигнуть, увеличивая μ и уменьшая α и β , причем уменьшение β выгодно, лишь пока соблюдается условие (22), которое можно записать в виде

$$\beta \gg \frac{\mu L}{\lambda}, \quad (22a)$$

где для соленоида $L = 2r_0$. Из (25) или (40) ясно, далее, что уменьшение α выгодно, лишь пока $\alpha \gtrsim \beta$. Этот вывод сохраняется и в известной мере даже усиливается в области, где условие (4) не выполнено и формула (25) не применима (см. подробнее § 5).

§ 5. Обобщение уравнений на случай, когда $\alpha \leq 1$

В приведенных выше расчетах предполагалось, что толщина листов железа существенно больше толщины скин-слоя, т. е. предполагалось выполненным условие (4):

$$\alpha \gg 1. \quad (4a)$$

Практически, однако, представляет интерес также случай более тонких листов металла, когда α порядка или меньше единицы. Настоящий параграф как раз и посвящен обобщению всех уравнений на этот случай, который приходится рассматривать особо по причинам, указанным в § 1. Дело в том, что при несоблюдении условия (4)—(4a) теряется, строго говоря, возможность рассматривать поле в щели, отправляясь от случая, когда металл является идеальным проводником. Тем не менее и для сердечников с тонкими листами можно довольно убедительно получить формулы, заменяющие, или, вернее, обобщающие, приведенные выше.

Если поле в щели равно H_0 , то для случая, когда толщина металлического листа невелика, поле в нем равно:

$$H_{\text{(в металле)}}^{\text{микро}} = H_0 \frac{\text{ch} \left[\frac{x(1+i)}{d} \right]}{\text{ch} \left[\frac{a}{2d}(1+i) \right]}, \quad (41)$$

причем начало координат выбрано в середине листа; на границах листа, т. е. при $x = \pm a/2$, как это и должно быть, $H_{\text{микро}} = H_0$. При условии (4) решение (41) переходит в (11), если учесть, что в формуле (11a) x отсчитывается от границы металл—диэлектрик. Для получения выражения (41) принято также, что поле в соседних щелях одинаково, что, конечно, примерно соблюдается. В щели по-прежнему считаем поле H_0 не зависящим от x и $H_{0x} = 0$, что в силу плоской границы раздела металла с диэлектриком (вакуумом) может быть обосновано путем обобщения решения (7).

Усреднение микрополя, вполне аналогичное (13)—(13a), приводит теперь к таким результатам:

$$\begin{aligned} \bar{H}^i &= \frac{1}{a+b} \left\{ b + \frac{2d}{1+i} \text{th} \left\{ \frac{1+i}{2d} a \right\} \right\} H_0, \\ \bar{V}^i &= \frac{1}{a+b} \left\{ b + \frac{2d\mu}{1+i} \text{th} \left\{ \frac{1+i}{2d} a \right\} \right\} H_0. \end{aligned} \quad (42)$$

Отсюда ясно, что вместо выражений (14) и (25) для $\bar{\mu}$ и $\bar{\mu}'$ имеем

$$\bar{\mu} = \frac{\mu + \beta \frac{1+i}{\text{th} [(1+i)\alpha]}}{1 + \beta \frac{1+i}{\text{th} [(1+i)\alpha]}}, \quad (43)$$

$$\mu' = \frac{\beta + \frac{\mu(1-i)}{2} \operatorname{th} [(1+i)\alpha]}{\alpha + \beta} = \frac{\beta + \mu/2 \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\operatorname{sh}^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \right)}{\alpha + \beta} +$$

$$+ i \frac{(\mu/2) \left(\frac{\cos \alpha \sin \alpha - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{sh}^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \right)}{\alpha + \beta}, \quad (44)$$

$$|\mu'| \cong \frac{\mu}{\sqrt{2}(\alpha + \beta)} f(\alpha) = \frac{\mu}{\sqrt{2}(\alpha + \beta)} \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \alpha \operatorname{ch}^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}}{\operatorname{ch}^2 \alpha \cos^2 \alpha + \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \alpha}, \quad (\mu \gg 2\beta).$$

При $\alpha \ll 1$ $f(\alpha) = \sqrt{2}\alpha$, а при $\alpha \gg 1$ $f(\alpha) = 1$ (вид функции $f(\alpha)$ ясен из рис. 6).

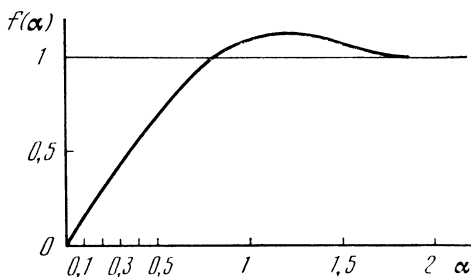


Рис. 6

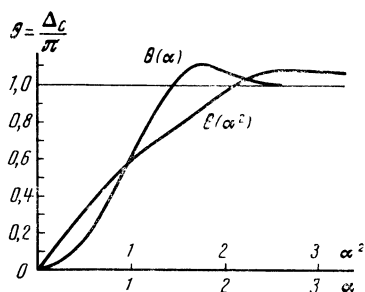


Рис. 7

В предельном случае, когда $\alpha \gg 1$ (практически $\alpha > 2$), все приведенные выражения, так же как следующие ниже, переходят в полученные в предыдущих параграфах, как это и должно быть.

До сих пор речь шла о связи микрополя в сердечнике со средним полем; теперь необходимо посмотреть, как изменяются в рассматриваемом случае граничные условия (16) и (18)—(19)¹¹. Условие (16) при этом заведомо измениться не может и, таким образом, полностью сохраняется. Что касается условия (19), то оно получено в предположении, что поле \mathbf{H}_0 в щели равно полю $\mathbf{H}^e, \text{ микро}$ над щелью; точнее, равенство $\mathbf{H}_0 \equiv \mathbf{H}^i, \text{ микро (в щели)} = \mathbf{H}^e, \text{ микро}$ имеет место только для компонент H_z и H_y (см. § 2). Для достаточно толстых листов (когда $\alpha \gg 1$) упомянутое равенство было обосновано в § 2. Соответствующие аргументы, использующие потенциальный характер поля вне металла, сохраняются, однако, и в случае тонких листов, так как при несоблюдении условия (4) нарушаются граничные условия (10), но не уравнения (9). Из сказанного легко прийти к выводу, что уравнение (19) сохраняется

¹¹ На случае электрического поля мы останавливаться не будем.

и для тонких листов, но с заменой выражения для δ на более общее:

$$\delta = \frac{\alpha + \beta}{\beta + \frac{1-i}{2} \operatorname{th} [(1+i)\alpha]} \quad (45)$$

Все последующие формулы § 2—4 сохраняются, таким образом, в силе, если понимать в них под $\bar{\mu}$, μ' и δ выражения (43)—(45)¹². Это относится, в частности, к выражению (34) для R_c и L_c , куда в качестве $\operatorname{Im} \{\mu'\}$ и $\operatorname{Re} \{\mu'\}$ нужно поставить значения, ясные из (44). При условии (4а) зависимость R_c и L_c от частоты такова:

$$R_c \sim \sqrt{\omega}, \quad L_c \sim \frac{1}{\sqrt{\omega}}, \quad \text{так как } \alpha \text{ и } \beta \sim \sqrt{\omega}.$$

При условии, что $\alpha \gg 1$ и одновременно $\beta \ll \alpha$, имеет место $R_c \sim \omega^2$ и L_c от ω не зависит. Декремент контура в общем случае равен:

$$\Delta_c = \frac{\pi\mu}{\mu+2\beta} \theta \cong \frac{\pi\theta}{(\mu \gg 2\beta)} = \pi \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha - \cos \alpha \sin \alpha}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha + \cos \alpha \sin \alpha} \quad (46)$$

При $\alpha \gg 1$ формула (46) переходит в (35), т. е. декремент от ω не зависит; при $\alpha \ll 1$ $\Delta_c \sim \omega$; зависимость декремента от частоты (т. е. от α^2) ясна также из рис. 7.

В заключение мы хотим поблагодарить за замечания Я. Л. Альперта и проф. С. М. Рытова.

Москва, Физический институт им. П. П. Лебедева
Академии наук СССР

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. М. Рытов. ЖЭТФ, 1940, 10, 176, 180; 1941, 11, 196.
2. Я. Л. Альперт. ЖТФ, 1940, 10, 1358.
3. М. А. Дивильковский. ЖТФ, 1939, 9, 433.
4. Ф. Франк, Р. Мизес. Дифференциальные уравнения математической физики, гл. XVII, § 2, 3. ОНТИ, 1937.

Примечание. Работа была выполнена в связи с предложенным Н. Д. Палепкси в 1942 г. способом создания малогабаритной рамочной коротковолновой антенны. По-видимому, это первое опубликованное исследование по электродинамике тонкослойных сред. Оно стимулировало две работы С. М. Рытова, посвященные соответственно электромагнитным свойствам таких сред в случае чередования слоев двух любых изотропных материалов (ЖЭТФ, 1955, 29, 605) и теории акустических свойств тонкослойных сред (Акуст. ж., 1956, 2, 71).

¹² Лишь формулу (40) нужно при такой замене написать сначала в более общем виде:

$$|\mu_{\text{эфф}}| = \left| \frac{\mu'}{1 + \mu'/q} \right| = \frac{|\mu'|}{\sqrt{1 + 2/q \operatorname{Re} \{\mu'\} + |\mu'|^2/q^2}}.$$

О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ, СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ С ВОДОЙ ¹

Совместно с Л. М. Бреховских

Дается вывод общей формулы для прогиба пластинки, соприкасающейся с водой, под действием силы, имеющей цилиндрическую симметрию и синусоидальным образом зависящей от времени. Подробно дискутируется случай сосредоточенной силы. Наличие воды снижает амплитуды колебаний пластинки, причем иногда очень существенно.

§ 1. Введение

Исследование колебаний соприкасающихся с водой пластинок актуально в целом ряде практических вопросов. Укажем хотя бы на вопрос о вибрациях обшивки корабля, а также на вопрос об излучении звука подводными излучателями-пластинками, возбуждаемыми ударами или синусоидальной силой. Нам известны две работы, существенно продвинувшие наши знания в этой области. В первой из них Лемб [1] рассмотрел влияние воды на несколько первых собственных колебаний пластинки. При этом делалось предположение, что размеры пластинки малы по сравнению с длиной волны звука той частоты, на которой колеблется пластинка. Во второй работе, появившейся совсем недавно, Лакс [2] рассмотрел влияние воды на все собственные колебания пластинки, не делая этого ограничивающего предположения. Рассмотрением собственных колебаний, по существу говоря, решается задача и о вынужденных колебаниях пластинки, для чего нужно только разлагать как вынужденную силу, так и форму колебаний пластинки в ряд по этим собственным колебаниям. Однако конкретное проведение этой программы может оказаться затруднительным из-за возникающих здесь математических осложнений.

Вследствие этого нам кажется целесообразным провести исследование крайнего случая, а именно: поведения бесконечно большой пластинки под действием вынуждающей силы, чему и посвящена настоящая заметка.

§ 2. Вывод основной формулы

Введем обозначения: ρ_0 — плотность жидкости, с которой соприкасается пластинка; c — скорость звука в ней; h — полу-

¹ ЖТФ, 1946, 16, вып. 8, 879.

толщина пластинки; ρ — ее плотность; E , μ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластинки.

Кроме того, нам нужна будет такая комбинация из этих постоянных

$$a^2 = \frac{Eh^2}{3\rho(1-\mu^2)} = v^2 h^2, \quad (2.1)$$

где

$$v = \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}} \quad (2.2)$$

— некоторая величина, имеющая размерность скорости и приблизительно в 1,7 раза меньшая скорости звука в данном материале.

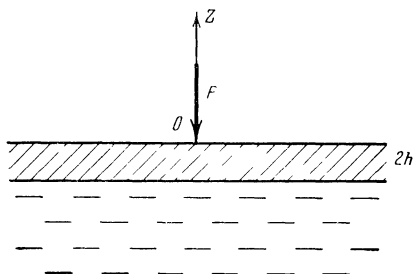


Рис. 1

Введем цилиндрическую систему координат r , φ , z с осью z , направленной перпендикулярно пластинке, и плоскостью $z=0$, совпадающей с плоскостью пластинки (рис. 1).

Обозначим: $\xi(r, t)$ — прогиб пластинки, $p(r, z, t)$ — звуковое давление в жидкости.

Относительно силы мы предполагаем, что она имеет круговую симметрию, относительно точки O , т. е. что она не зависит от угла φ . Вся задача вследствие этого будет иметь цилиндрическую симметрию относительно оси z , т. е. ξ и p тоже не будут зависеть от φ .

Теперь уравнение движения пластинки запишется так:

$$a^2 \Delta^2 \xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{F(r, t)}{2\rho h} + \frac{p}{2\rho h} \Big|_{z=0}, \quad (2.3)$$

где $F(r, t)$ — действующая извне на пластинку сила, отнесенная к единице площади.

Кроме того, мы имеем уравнение для звукового давления

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (2.4)$$

годное для всего полупространства $z < 0$.

В качестве граничного условия при $z=0$ мы имеем непрерывность нормальной составляющей скорости при переходе от пластинки к жидкости, т. е.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v_z \Big|_{z=0}. \quad (2.5)$$

Если мы учтем, что в звуковом поле имеем соотношение между скоростью и давлением

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t},$$

и продифференцируем равенство (2.5) по t , то будем иметь

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z=0}. \quad (2.6)$$

Это и будет граничное условие в окончательном виде.

Будем предполагать, что плотность силы $F(r, t)$ является синусоидальной функцией времени, т. е.

$$F(r, t) = F(r) e^{i\omega t}. \quad (2.7)$$

Если это не имеет места, то можно разложить $F(r, t)$ в интеграл или в ряд Фурье и проводить все следующие ниже рассуждения отдельно для каждой гармоник.

Положив теперь

$$\xi(r, t) = \xi(r) e^{i\omega t}, \quad p(r, z, t) = p(r, z) e^{i\omega t}, \quad (2.8)$$

из (2.3) и (2.4) получаем уравнения для ξ и p , уже не зависящих от времени:

$$a^2 \Delta^2 \xi - \omega^2 \xi - \frac{(p)_{z=0}}{2\rho h} = \frac{F(r)}{2\rho h}, \quad (2.9)$$

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (2.10)$$

Граничное условие (2.6) теперь будет

$$\xi = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z=0}. \quad (2.11)$$

Вследствие цилиндрической симметрии задачи решение этих уравнений естественно искать в виде разложений по цилиндрическим функциям. Для этого запишем

$$\xi(r) = \int_0^{\infty} u(\lambda) J(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (2.12)$$

$$p(r, z) = \int_0^{\infty} s(\lambda) J(\lambda r) e^{z\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda d\lambda, \quad (2.13)$$

где $J(\lambda r)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Знак у корня в экспоненте в (2.13) всегда должен выбираться так, чтобы $\operatorname{Re} \sqrt{\lambda^2 - k^2} > 0$, так как только при этом условии мы будем иметь исчезновение, а не возрастание давления при $z \rightarrow -\infty$.

Легко проверить, что уравнение (2.10) решением (2.13) уже удовлетворяется. Неизвестные пока функции $u(\lambda)$ и $s(\lambda)$ найдем из условия удовлетворения уравнения (2.9) и граничного условия (2.11). Однако для этого правую часть уравнения (2.9) также нужно представить в виде разложения по бесселевым функциям.

Мы имеем основную формулу для разложения по бесселевым функциям

$$F(r) = \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) J(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (2.14)$$

где

$$\Phi(\lambda) = \int_0^{\infty} F(\rho) J(\lambda \rho) \rho d\rho. \quad (2.15)$$

Подставляя теперь решения (2.12) и (2.13), а также (2.14) в уравнения (2.9) и (2.11), учитывая, что $\Delta J(\lambda r) = -\lambda^2 J(\lambda r)$, и приравнявая подынтегральные выражения в полученных соотношениях, получим

$$u(\lambda) = \frac{1}{2\rho h} \frac{\Phi(\lambda)}{a^2 \lambda^4 - \omega^2 - \frac{\rho_0 \omega^2}{2\rho h \sqrt{\lambda^2 - k^2}}}. \quad (2.16)$$

Теперь (2.12) с учетом (2.16) дает решение для прогиба пластинки в общем виде. Также можно бы найти и $s(\lambda)$, а значит, и $p(r, z)$, но эти функции нас здесь не интересуют.

Подставив (2.16) в (2.12), получаем

$$\xi(r) = \frac{1}{2\rho h} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(\lambda) J(\lambda r) \lambda d\lambda}{a^2 \lambda^4 - \omega^2 - \frac{\rho_0 \omega^2}{2\rho h \sqrt{\lambda^2 - k^2}}}. \quad (2.17)$$

В дальнейшем мы будем считать, что сила является сосредоточенной и приложенной в начале координат O ; кроме того, будем интересоваться прогибом пластинки только в этой же точке O .

Обозначим через f полную действующую на пластинку силу. Очевидно,

$$f = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(r) r dr d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} F(r) r dr.$$

Теперь из (2.15) получаем (по условию $F(\rho)$ отлично от нуля только при $\rho=0$, где $J(\lambda\rho)=1$)

$$\Phi(\lambda) = f/2\pi.$$

Для прогиба в точке $r=0$ имеем

$$\xi(0) = \frac{f}{4\pi\rho h} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{a^2\lambda^4 - \omega^2 - \frac{\rho_0\omega^2}{2\rho h \sqrt{\lambda^2 - k^2}}}. \quad (2.18)$$

Введем вместо λ новую переменную

$$\eta = \sqrt{\frac{\lambda^2}{k^2} - 1};$$

тогда получаем

$$\xi(0) = \frac{f}{4\pi\rho h a^2 k^2} I, \quad I = \int_0^\infty \frac{\eta^2 d\eta}{\eta^6 + 5\eta^3 + (1 - \beta^2)\eta - b\beta^3}, \quad (2.19)$$

причем

$$\beta = \frac{\omega}{ak^2}, \quad b = \frac{\rho_0}{2\rho} \frac{v}{c}. \quad (2.20)$$

Здесь β зависит от частоты, а b определяется только параметрами жидкости и пластинки. Для металлических пластинок b — малая величина. Если пластинка соприкасается с водой, то для железа $b=1/7,7$, для алюминия $1/2,6$, для бронзы $1/12,5$.

Интеграл I исследован в Приложении. Там показано, что при не очень больших β можно пользоваться формулой

$$I = -\frac{\pi i}{4\beta} + ib\psi(\beta), \quad (2.21)$$

где $\psi(\beta)$ имеет значения, приведенные в таблице.

β	$\psi(\beta)$	β	$\psi(\beta)$
0	0,395 i	2	0,302 i + 0,099
0,2	0,389 i + 0,022	3	0,270 i + 0,107
0,4	0,379 i + 0,042	4	0,245 i + 0,114
0,6	0,369 i + 0,056	5	0,227 i + 0,115
0,8	0,357 i + 0,069	6	0,214 i + 0,110
1,0	0,347 i + 0,076	7	0,200 i + 0,108
1,5	0,322 i + 0,091	9	0,180 i + 0,106

Формула (2.21) представляет собой разложение I по степеням b . Ограничение членом с первой степенью b возможно, если выполнено условие

$$b^2\beta \ll 1. \quad (2.22)$$

При больших β для I справедливо другое приближенное выражение:

$$I = g[0,204 - 0,628i - (0,171 - 0,125i)s + (0,342 + 0,251i)g], \quad (2.23)$$

где s и g — малые величины:

$$s = \frac{1}{5(b^2\beta)^{2/3}}, \quad g = \frac{1}{(b^2\beta)^{2/3}}. \quad (2.24)$$

соотношение (2.23) справедливо, пока s и g малы по сравнению с единицей.

§ 3. Обсуждение результатов

Амплитуда колебаний пластинки в точке приложения синусоидальной во времени силы выражается согласно (2.19) формулой

$$\xi(0) = \frac{f}{4\pi\rho ha^2k^2} I, \quad (3.1)$$

где I дается формулами (2.21) и (2.23). Сравним эти амплитуды с амплитудой $\xi_0(0)$, которая получается при действии той же силы на пластинку при отсутствии воды. В последнем случае мы имеем согласно (2.21), положив там $b=0$:

$$I = -\pi i/4\beta, \quad (3.2)$$

так что в случае отсутствия воды амплитуда колебаний точки приложения силы будет

$$\xi_0(0) = \frac{-if}{16^3\rho ha^2k^2}. \quad (3.3)$$

Отношение амплитуды при наличии воды к ней же при отсутствии воды будет

$$\frac{\xi}{\xi_0} = \frac{43iI}{\pi}. \quad (3.4)$$

В том случае, когда в формуле (2.21) можно откинуть второй член, получаем $\xi = \xi_0$, т. е. в этом случае наличие воды никак не сказывается. Легко показать, что вторым членом можно пренебрегать, если $0,1\beta \ll 1$ или

$$\frac{\rho_0}{20\rho} \frac{c}{h\omega} \ll 1. \quad (3.5)$$

Это неравенство и является условием, при котором влияние соприкасающейся с пластинкой жидкости не сказывается.

В случае железной пластинки и воды это условие будет

$$\frac{\omega}{2\pi} h \gg 10^3, \quad (3.6)$$

где h выражается в сантиметрах. Это неравенство значительно ограничивает число случаев, когда пластинку можно считать

свободной. Так, при частоте силы $\omega/2\pi=20$ это можно делать только для толщины $h \gg 50$ см, т. е., по существу, никогда.

При достаточно больших β для I можно пользоваться выражением (2. 23), отбрасывая там члены в скобках, содержащие s и g . Так как s и g убывают с увеличением плотности жидкости ρ_0 , то этот случай реализуется при большом влиянии жидкости, ибо последнее возрастает с увеличением ρ_0 . В этом случае получаем

$$\frac{\xi}{\xi_0} = \frac{4i^3 (0,2 - 0,63i)}{\pi (b\beta^3)^{1/5}} \quad (3. 7)$$

или, учитывая (2. 20) и (2. 1),

$$\frac{\xi}{\xi_0} = (1,05 + 0,33i) \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/5} \left(\frac{h\omega}{v}\right)^{1/5}. \quad (3. 8)$$

Эта формула справедлива до тех пор, пока $s \ll 1$, $g \ll 1$. Из первого неравенства следует при учете определения (2. 24) и равенств (2. 20), что $\xi/\xi_0 \ll 1$, т. е. благодаря влиянию жидкости амплитуда колебаний в этом случае значительно уменьшается.

Для железной пластинки толщиной 0,4 см ($h=0,2$ см) и частоте $\omega/2\pi=20$ гц имеем из (3. 8)

$$|\xi|/|\xi_0| = 0,38,$$

т. е. амплитуда колебаний уменьшается почти в три раза.

Из формулы (3. 8) видно, что влияние соприкасающейся с пластинкой жидкости тем больше, чем меньше частота действующей силы ω . Этот эффект вполне аналогичен тому эффекту, который наблюдается при свободных колебаниях конечных пластинок, когда влияние окружающей среды возрастает при увеличении размеров пластинки, т. е. при понижении ее собственной частоты. Это происходит потому, что при увеличении размеров пластинки R собственная масса пластинки растет как R^2 , а присоединенная масса как R^3 .

Влияние жидкости сказывается также и на фазе колебаний пластинки. Для свободной пластинки мы имеем, введя в (3. 3) временной множитель,

$$\begin{aligned} \xi_0(0) e^{i\omega t} &= -\frac{if e^{i\omega t}}{16\gamma^2 \rho h a^2 k^2}, \\ \frac{d}{dt} |\xi_0(0) e^{i\omega t}| &= \dot{\xi}_0(t) = \frac{\omega f e^{i\omega t}}{16\gamma^2 \rho h a^2 k^2}, \end{aligned} \quad (3. 9)$$

т. е. скорость свободной пластинки (в точке приложения силы) синфазна с силой ². При наличии жидкости это уже не имеет места,

² Из формулы (3.9) после умножения на $d\omega$ и интегрирования, а также учета значения β следует важная для свободных пластинок формула

$$\dot{\xi}(t) = \sigma f(t), \quad \text{где } \sigma = 1/16\gamma h a,$$

справедливая для случая любых зависящих от времени сил $f(t)$. Впервые она была получена, по-видимому, К. Зинером [3].

причем расхождение фазы скорости с фазой силы обусловлено наличием у I действительной части. Разность фаз может быть вычислена по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{Re} I / \operatorname{Im} I. \quad (3.10)$$

Заметим далее, что работа, производимая одной и той же силой f , действующей на пластинку, будет меньше, если пластинка соприкасается с жидкостью. В основном это обусловлено тем, что в этом случае скорость точки приложения будет меньше из-за уменьшения амплитуды колебаний. Мощность же, отдаваемая силой, равна произведению силы на скорость. Уменьшение произ-

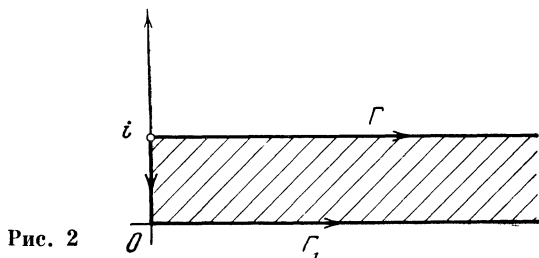


Рис. 2

водимой работы обуславливается частично также и возникающей разностью фаз между скоростью пластинки и силой, вследствие чего появляется множитель $\cos \varphi$.

В заключение укажем на границы применимости изложенной выше теории. Развивая ее, мы считаем, что пластинка работает только на изгиб, и пренебрегаем энергией растяжения и сжатия, которая всегда отлична от нуля в пластинке конечной толщины. В случае статического прогиба ограниченной пластинки, как известно, это можно делать при выполнении таких двух условий: а) толщина пластинки мала по сравнению с ее радиусом, б) прогиб пластинки мал по сравнению с ее толщиной. В случае периодической силы условие б) остается в силе, в то время как вместо условия а) мы должны потребовать малости толщины по сравнению с длиной тех волн изгиба, которые разбегаются по пластинке от точки приложения силы. Так как при наличии соприкасающейся с пластинкой воды эта длина будет больше, чем в случае свободной пластинки, то мы только усилим это условие, если потребуем, чтобы толщина пластинки была мала по сравнению с этими длинами волн в воздухе. Тогда мы получаем такое весьма наглядное условие

$$vT \gg h, \quad (3.11)$$

где $T = 2\pi/\omega$ — период силы. Это налагает верхний предел на частоту внешней силы.

Приложение

Вычисление интеграла (2. 19), где интегрирование производится по пути Γ_1 (рис. 2), лучше всего производить, заменив путь интегрирования Γ_1 на путь Γ , идущий по прямой от i до $i + \infty$. Это можно сделать непосредственно, так как в заштрихованной полосе на рис. 2 не лежит ни одного полюса подынтегральной функции (других особых точек эта функция вообще не имеет). В этом можно убедиться следующим образом. Пусть корнями уравнения

$$F(\eta) = \eta^5 + 2\eta^3 + (1 - \beta^2)\eta - b\beta^3 = 0 \quad (1)$$

будет

$$\eta = u + iv. \quad (2)$$

Подставим (2) в (1) и приравняем там нулю отдельно мнимую и действительную части. Если после этого из действительной части вычтем мнимую, умноженную на u и деленную на v , то получим

$$4u^5 + 4uv^2(1 - v^2) + 4u^3 + b\beta^3 = 0.$$

Последнее же равенство не может быть удовлетворено значениями

$$0 < v \leq 1, \quad u \geq 0.$$

Этот анализ не годен для случая $v=0$, так как нам приходилось делить на v , что возможно только, если $v \neq 0$. Вообще же, так как уравнение (1) нечетной степени и имеет вещественные коэффициенты, то оно должно иметь хотя бы один корень, лежащий на действительной оси.

Тогда возникает вопрос о том, сверху или снизу обходится этот полюс путем Γ_1 . Для его выяснения воспользуемся обычным приемом — припишем колебаниям пластинки очень малое трение, т. е. запишем уравнение колебания пластинки в виде

$$\Delta^2 \xi + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{F}{2\rho h} + \frac{p}{2\rho h} \Big|_{z=0},$$

где α — коэффициент трения ($\alpha > 0$), уравнение же для звукового давления по-прежнему будем писать в виде (2. 4). Предположим теперь, как и раньше, что все величины зависят от времени через посредство множителя $e^{i\omega t}$ (что имеет место, если только сила F так зависит от времени); будем иметь вместо уравнения (2. 9)

$$a^2 \Delta^2 \zeta - (\omega^2 - i\omega\alpha) \zeta = \frac{F}{2\rho h} + \frac{p}{2\rho h} \Big|_{z=0}.$$

Отличие от уравнения (2. 9) состоит только в том, что ω^2 заменено на $\omega^2 - i\omega\alpha$. Соответственно вместо уравнения (1) будем иметь

$$\eta^5 + 2\eta^3 + \left[1 - \beta^2 \left(1 - \frac{i\alpha}{\omega} \right) \right] \eta - b\beta^3 = 0. \quad (3)$$

При $\alpha = 0$ в качестве решения имеем $\eta = \eta_0$, что удовлетворяет уравнению

$$\eta_0^5 + 2\eta_0^3 + (1 - \beta^2)\eta_0 - b\beta^3 = 0. \quad (4)$$

При $\alpha \neq 0$, но сколь угодно малом будем иметь

$$\eta = \eta_0 + \delta, \quad (5)$$

где δ также сколь угодно мало.

Подставляя (5) в (3), учитывая (4) и отбрасывая степени δ выше первой, получим

$$\delta = -i \frac{\alpha\beta^2\eta_0^2}{\omega(4\eta_0^5 + 4\eta_0^3 + b^3\beta^3)}.$$

Отсюда видно, что при $\eta_0 > 0$ имеем $\text{Im } \delta < 0$, т. е. путь Γ_1 проходит над полюсами. Таким образом, доказано, что путь Γ_1 беспрепятственно может быть заменен путем Γ . Значит, мы должны исследовать интеграл

$$I = \int_{\zeta}^{+\infty} \frac{\eta^2 d\eta}{\eta^5 + 2\eta^3 + (1 - \beta^2)\eta - b^3\beta^3}. \quad (6)$$

Это можно осуществить в двух крайних случаях. Прежде всего, рассматривая I как непрерывную функцию от параметра b , найдем первые члены разложения I по степеням b . Посредством дифференцирования под интегралом получаем

$$I = I_0 + b^3 I_1 + b^6 I_2 + \dots,$$

где

$$I_0 = \int_{\zeta}^{+\infty} \frac{\eta d\eta}{\eta^4 + 2\eta^2 + 1 - \beta^2}, \quad I_1 = \int_{\zeta}^{+\infty} \frac{d\eta}{(\eta^4 + 2\eta^2 + 1 - \beta^2)^2},$$

$$I_2 = \int_{\zeta}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta(\eta^4 + 2\eta^2 + 1 - \beta^2)^3}.$$

Интеграл I_0 берется элементарно, а I_1 и I_2 можно переписать в виде

$$I_1 = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \int_{\zeta}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^4 + 2\eta^2 + 1 - \beta^2}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{(\partial \beta^2)^2} \int_{\zeta}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta(\eta^4 + 2\eta^2 + 1 - \beta^2)}.$$

В результате дело свелось к сравнительно простым интегралам. Не приводя элементарных вычислений, укажем, что в результате I представляется в виде (2.21), где при $\beta \leq 1$

$$\psi(\beta) = \frac{2}{4(1 - \beta^2)} - \frac{2 + 3\beta}{16(1 + \beta)^{3/2}} \left(i\pi + \ln \frac{(1 + \sqrt{1 + \beta})^2}{\beta} \right) +$$

$$+ \frac{2 - 3\beta}{16(1 - \beta)^{3/2}} \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - \beta})^2}{\beta}, \quad (7)$$

а при $\beta \geq 1$ все остается тем же, только в последнем члене $\frac{1}{(1 - \beta)^{3/2}} \times$
 $\times \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - \beta})^2}{\beta}$ переходит в $-\frac{1}{(\beta - 1)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} + \text{arc tg} \frac{\beta - 2}{2\sqrt{\beta - 1}} \right)$.

В § 2 помещена таблица значений $\psi(\beta)$. В формуле (2.21) откинут член с b^2 . Его анализ показывает, что это можно делать, если

$$\beta b^2 \ll 1. \quad (8)$$

Осуществим теперь подход с другого конца. Введем вместо b и β

два новых параметра

$$g = (b_3^2)^{-2/5} \quad \text{и} \quad s = \frac{1}{5} (b_2^2)^{-1/5}, \quad (9)$$

которые в дальнейшем мы будем считать малыми, и сделаем под интегралом замену

$$x = \sqrt{g} \eta.$$

Тогда будем иметь

$$I = g \int_{i\sqrt{g}}^{i\sqrt{g}+\infty} \frac{x^2 dx}{x^5 + 2gx^3 + (g^2 - s)x - 1}. \quad (10)$$

Находя тем же методом, что и выше, первые члены разложения по степеням g и s , получаем

$$\frac{1}{g} I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^5 - 1} - 2g \int_0^{\infty} \frac{x^5 dx}{(x^5 - 1)^2} + s \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^5 - 1)^2}, \quad (11)$$

где все лежащие на действительной оси полюсы при интегрировании обходятся сверху.

Последние два интеграла упрощаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^5 dx}{(x^5 - 1)^2} &= - \left(\frac{\partial}{\partial q} \int_0^{\infty} \frac{dx}{qx^5 - 1} \right)_{q=1} = \\ &= - \left(\frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{q^{1/5}} \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^5 - 1} \right)_{q=1} = \frac{1}{5} \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^5 - 1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично будем иметь

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{(x^5 - 1)^2} = \frac{1}{5} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{x^5 - 1}. \quad (13)$$

Легко можно получить такую формулу для неопределенного интеграла

$$\int \frac{x^{m-1}}{x^n - 1} dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k)^m \ln(x - x_k), \quad (14)$$

где m и n — целые числа, а x_k — корни уравнения $x^n = 1$.

В результате вычислений (11) дает

$$I = g [0,204 - 0,628i + g (0,342 + 0,251i) - s (0,171 - 0,125i)]. \quad (15)$$

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Lamb. Proc. Roy. Soc., 1921, 48, 205.
2. M. Lax. J. Ac. Soc. Amer., 1944, 16, 5.
3. C. Zener. Phys. Rev., 1941, 59, 669.

ТЕОРИЯ МАГНИТНОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО РЕАКТОРА ¹

Часть I

СВОЙСТВА ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 1. Движение заряженной частицы в скрещенных полях. § 2. Кинетическое уравнение. Первое приближение теории (пренебрежение соударениями). § 3. Второе приближение теории, роль соударений. Теплопроводность и вязкость плазмы. § 4. Ориентировочный расчет малой модели магнитного термоядерного реактора с подогревом и температурным скачком.

§ 1. Движение заряженной частицы в скрещенных полях

Магнитное поле \mathbf{H} будем всюду считать направленным по оси z ; вектор электрического поля \mathbf{E} лежит в плоскости (xy) ; скорость частицы в этой плоскости будем обозначать через \bar{v}_1 ($v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$).

Если поля однородны (\mathbf{H} и \mathbf{E} не зависят от координат), то, как известно, траектория частицы в плоскости (xy) представляет собой трохойду: частица движется по окружности радиуса

$$R = \frac{mc v_1}{eH}, \quad (1.1)$$

центр которой перемещается перпендикулярно электрическому полю со скоростью

$$u = cE/H. \quad (1.2)$$

Перемещение центра ларморовой окружности называется дрейфом. Направление дрейфа не зависит от знака заряда частицы и параллельно вектору $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$.

Тот факт, что частицы обоих знаков заряда дрейфуют в одном и том же направлении перпендикулярно \mathbf{E} , означает, что электропроводность газа свободных заряженных частиц в скрещенных полях равна нулю.

¹ Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 3. Работа выполнена в 1951 г. Часть II этой работы написана А. Д. Сахаровым.

Как влияет на этот вывод а) соотношение напряженностей магнитного и электрического полей, б) соударения частиц и в) неоднородность полей?

Первый вопрос: как совершается переход к случаю $H=0$, в котором газ заряженных частиц заведомо обладает электропроводностью? В нерелятивистской теории указанные выше соотношения сохраняются и при $H \rightarrow 0$, только радиус ларморовых орбит стремится при этом к ∞ , так что движение частиц неизбежно нарушается стенками сосуда. Однако в действительности указанные соотношения осуществляются только при $H > E$. Это явствует уже из того, что при $H < E$ скорость дрейфа u согласно (1. 2) становится больше скорости света c . Действительно, при $H \rightarrow E$ нужно учитывать релятивизм потому, что в процессе обращения частицы по ее орбите, радиус которой стремится к ∞ , частица приобретает за счет разности потенциалов электрического поля кинетическую энергию, сравнимую с mc^2 .

Из теории относительности следует, что если $E \perp H$, то лоренцовым преобразованием системы координат можно добиться либо полного исчезновения E (если $H > E$), либо полного исчезновения H (если $E > H$). В первом случае преобразованные траектории являются окружностями, во втором — параболами (ускорение по направлению преобразованного E'). Отсюда следует, что при $H < E$ частицы ускоряются вдоль E (электропроводность!).

Второй вопрос: не позволяет ли электропроводность и при $E < H$, если учесть соударения частиц друг с другом? Ответ отрицательный (если поля однородны). Он следует из того факта, что соударения заряженных частиц друг с другом не изменяют значения величины ²

$$P_x = \sum e_i x_i, \quad (1. 3)$$

где x_i означает координату по оси x ларморовой окружности i -й частицы, причем предполагается, что ось x совпадает с направлением электрического поля. Величина P_x есть не что иное, как усредненное по периоду оборота частиц по ларморовым окружностям значение слагающей по оси x электрического дипольного

² Доказательство формулы (1. 3): из уравнений движения частиц $m_i \ddot{x}_i = e_i E + \frac{e_i}{c} H \dot{y}_i + f_{ix}$, $m_i \ddot{y}_i = -\frac{e_i}{c} H \dot{x}_i + f_{iy}$, где f_i — силы взаимодействия частиц друг с другом, следует (ввиду $\sum f_i = 0$), что $\sum_i \left(m_i \dot{y}_i + \frac{e_i}{c} H x_i \right) = \text{const}$. С другой стороны, в свободном движении частиц $\dot{y}_i = -u = -\frac{cE}{H}$, $\ddot{x}_i = x_i$. Вставляя это в предыдущее уравнение, получаем $P_x = \text{const}$.

момента системы. Так как усредненный по тому же периоду электрический ток \bar{j}_x по оси x равен

$$\bar{j}_x \sim \sum e_i \bar{v}_{ix} = \frac{d}{dt} \sum e_i x_i = \frac{dP_x}{dt}, \quad (1.4)$$

то из постоянства P_x следует $\bar{j}_x = 0$.

Нарушение постоянства P_x и, стало быть, появление тока j_x в однородном поле могут обуславливаться только столкновением заряженных частиц с нейтральными частицами (или со стенками сосуда).

Третий вопрос: как влияет на изложенные соотношения неоднородность электрического поля? Ограничимся первыми производными E , т. е. положим, что электрический потенциал V является квадратичной функцией координат. В этом случае уравнения движения частицы остаются линейными, а простое исследование приводит к следующим выводам. Надо различать три случая в зависимости от формы эквипотенциальных линий в плоскости $xу$. Если линии равного потенциала представляют собой семейство параллельных прямых (т. е. если, например, E_x является функцией x , а $E_y = 0$), то качественно сохраняются те же соотношения, что и в однородном поле. Если эквипотенциальные линии замкнуты (типа эллипса), то траектории частиц (при $E \ll H$) тоже замкнуты, т. е. не только нет электропроводности, но даже и систематический дрейф отсутствует. Если же эквипотенциальные линии разомкнуты (типа гипербола), то всегда будут существовать прямолинейные траектории частиц (наряду с замкнутыми), при движении вдоль которых частица непрерывно ускоряется электрическим полем (электропроводность)³.

§ 2. Кинетическое уравнение.

Первое приближение теории (пренебрежение соударениями)

В дальнейшем Φ_α будет обозначать функцию распределения частиц сорта α , т. е. число частиц этого сорта в элементе объема фазового пространства $dx dy dz dv_x dv_y dv_z$. Значение $\alpha=1$ будет соответствовать ионам, значение $\alpha=2$ — электронам. Масса иона — M , масса электрона — m . Введем еще обозначение для ларморовой частоты частицы:

$$\omega_\alpha = e_\alpha H / m_\alpha c. \quad (2.1)$$

³ Доказательство. Полагая $\frac{eV}{m} = -(\mathbf{lr}) - \frac{ax^2 + cy^2}{2}$ и $\omega = eH/mc$, где l_x, l_y, a и c постоянны, получаем $\ddot{x} = l_x + ax + \omega \dot{y}$, $\ddot{y} = l_y + cy - \omega \dot{x}$.

Решения имеют вид $x = -\frac{l_x}{a} + \sum A_\alpha e^{ik_\alpha t}$, $y = -\frac{l_y}{c} + \sum B_\alpha e^{ik_\alpha t}$, где k_α

суть корни уравнения $(k^2 + a)(k^2 + c) - k^2 \omega^2 = 0$. При $\omega \ll H$, т. е. при $|a| \ll \omega^2$, $|c| \ll \omega^2$, корни этого уравнения суть $\pm \omega$ и $\pm \sqrt{ac}/\omega$. Условием экспоненциально нарастающего во времени решения является требование $ac < 0$.

Кинетическое уравнение для полностью ионизированной плазмы в магнитном и электрическом полях имеет такой вид (в стационарном случае):

$$D\Phi \equiv v_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{eE_k}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} + \omega \left(v_y \frac{\partial \Phi}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial \Phi}{\partial v_y} \right) = St, \quad (2.2)$$

где St означает член, учитывающий соударения частиц друг с другом. Индексы α у букв m , e и ω мы здесь опустили. Напомним, что магнитное поле всюду считаем направленным по z .

Длина свободного пробега частиц в плазме между соударениями равна

$$l_{cm} = \frac{1,2 \cdot 10^{18} T_{кэв}^2}{n}, \quad (2.3)$$

где $T_{кэв}$ — температура плазмы в килоэлектронвольтах, а n — число ионов (или электронов) в 1 см^3 . При $T \sim 100 \text{ кэв}$ и $n \sim 10^{14}$ получаем $l \sim 10^8 \text{ см} \sim 10^3 \text{ км}$. Между тем средний радиус ларморовой окружности равен для ионов дейтерия и для электронов соответственно

$$R_D \text{ см} = \frac{5,6 \cdot 10^3 \sqrt{T_{кэв}}}{H}, \quad R_{эл} \text{ см} = \frac{94 \sqrt{T_{кэв}}}{H}, \quad (2.4)$$

так что при $T \sim 100 \text{ кэв}$, $H \sim 2,5 \cdot 10^4 \text{ гс}$, $R_D = 2,2 \text{ см}$, а $R_{эл} = 0,038 \text{ см} = 0,38 \text{ мм}$. Таким образом, ионы успевают в среднем совершить 10^7 оборотов по ларморовой окружности между каждыми двумя последовательными соударениями.

Поскольку влияние магнитного поля превалирует над влиянием соударений, целесообразно сначала рассмотреть газ невзаимодействующих заряженных частиц, отвлекаясь от эффектов их соударений.

В дальнейшем будем предполагать, что все интересующие нас величины (H , E , n , T) зависят только от одной координаты (от x в плоском случае и от r в цилиндрическом) и что электрическое поле тоже направлено либо по x , либо по r . В этом случае уравнение движения свободной частицы (а стало быть, и кинетическое уравнение (2.2) без учета члена соударений St) обладает двумя интегралами:

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2} + eV(x) \quad \text{и} \quad q = \frac{v_y}{\omega_0} + \xi, \quad (2.5)$$

где ω_0 — значение ω в точке $x=0$, $V(x)$ — электрический потенциал, а

$$\xi = \frac{1}{\omega_0} \int_0^x \omega dx = x + \left(\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} \right)_0 \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{H} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) \frac{x^3}{6} + \dots \quad (2.6)$$

Считая, что Φ не зависит от y , и вводя вместо x , v_x и v_y переменные ξ , q и v_x , можно преобразовать уравнение (2. 2) к виду

$$\left[\frac{eE(x)}{m} + \omega(x)v_y \right] \frac{\partial}{\partial v_x} \Phi(\xi, q, v_x) = St. \quad (2. 7)$$

В качестве нулевого приближения для функции распределения Φ_0 целесообразно выбрать такую функцию интегралов ε и q , которая была бы близка к максвеллову распределению. Мы выбираем

$$\Phi_0 = \frac{n_0^3}{\pi^{3/2}} e^{-\beta^2 \left(v^2 + \frac{2eV(x)}{m} \right)} \left[1 + \left(\frac{v_y}{\omega_0} + \xi \right) \left\{ a + b\beta^2 \left(v^2 + \frac{2eV}{m} \right) \right\} + \left(\frac{v_y}{\omega_0} + \xi \right)^2 \left\{ c + d\beta^2 \left(v^2 + \frac{2eV}{m} \right) \right\} + \frac{1}{\omega_0^2} F \left(v_x^2, v^2 + \frac{2eV}{m} \right) \right], \quad (2. 8)$$

где n , β , a , b , c , d — константы. Функция эта удовлетворяет кинетическому уравнению, если в нем пренебречь членом соударений. Функция $F(v_x^2, v^2 + (2eV/m))$ в уравнении (2. 8) есть полином с постоянными коэффициентами от v_x^2 и $v^2 + (2eV/m)$. Коэффициенты в этом полиноме подбираются так, чтобы при заданных a , b , c и d (определяемых формулами (2. 10) через $\frac{1}{T} \frac{dT}{dx}$, $\frac{1}{T} \frac{d^2T}{dx^2}$ и т. д.) отклонение функции Φ_0 от максвелловой было минимальным.

Вычисляем плотность n , температуру T и плотность потока частиц S по обычным формулам

$$n = \int \Phi dv, \quad T = \frac{m}{3n} \int v^2 \Phi dv, \quad S = \int v \Phi dv. \quad (2. 9)$$

Подставляя вместо Φ значение Φ_0 из (2. 8), заметим, что плотность тока S у нас определена как число частиц, проходящих через 1 см^2 за 1 сек .

Выполнив вычисления и продифференцировав затем результат по x , получаем (предполагая, что $V(0)=0$) следующие значения констант, фигурирующих в выражении (2. 8) (n равно плотности частиц в точке $x=0$):

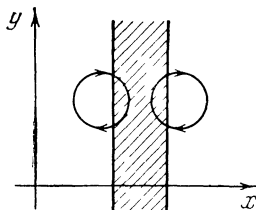
$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{m}{2T_0}, \quad a = \frac{1}{n_0} \left(\frac{dn}{dx} \right)_0 - \frac{3}{2} \frac{1}{T_0} \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 - \frac{eE_0}{T_0}, \quad b = \frac{1}{T_0} \left(\frac{dT}{dx} \right)_0, \\ 2c &= \frac{1}{n_0} \left(\frac{d^2n}{dx^2} \right)_0 - \frac{3}{2} \frac{1}{T_0} \left(\frac{d^2T}{dx^2} \right)_0 + \frac{1}{T_0} \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 \left\{ \frac{5eE_0}{T_0} - \frac{3}{n_0} \left(\frac{dn}{dx} \right)_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2H_0} \left(\frac{dH}{dx} \right)_0 \right\} - \frac{1}{n_0 H_0} \left(\frac{dn}{dx} \right)_0 \left(\frac{dH}{dx} \right)_0 + \frac{e^2 E_0^2}{T_0^2} + \frac{eE_0}{T_0} \left\{ \frac{1}{H_0} \left(\frac{dH}{dx} \right)_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{n_0} \left(\frac{dn}{dx} \right)_0 \right\} - \frac{e}{T_0} \left(\frac{dE}{dx} \right)_0, \\ d &= \frac{1}{2T_0} \left(\frac{d^2T}{dx^2} \right)_0 + \frac{1}{T_0} \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 \left\{ \frac{1}{n_0} \left(\frac{dn}{dx} \right)_0 - \frac{eE_0}{T_0} - \frac{1}{2H_0} \left(\frac{dH}{dx} \right)_0 \right\}. \end{aligned} \quad (2. 10)$$

Индексы 0 означают, что значения величин относятся к точке $x=0$. Кроме того, получаем из (2. 8) и (2. 9)

$$S_x = 0, \quad S_y = \frac{c}{eH} \frac{d}{dx} (nT) - \frac{cnE}{H}, \quad (2. 11)$$

где c — скорость света.

Таким образом, в этом приближении ток направлен перпендикулярно E и перпендикулярно градиенту парциального давления ионов (или электронов) $dp/dx = d(nT)/dx$. Второй член выражения для S_y соответствует дрейфу частиц в электрическом поле (см. (1. 2)). Заметим, что, в отличие от электрического дрейфа, та часть S_y ,



которая пропорциональна $d(nT)/dx$, имеет противоположный знак для частиц различного знака заряда (стало быть, направление соответствующей части электрического тока $j_y = eS_y$ не зависит от знака заряда частиц).

Для разрешения парадоксов, возникающих, например, при рассмотрении дрейфа частиц в неоднородном магнитном поле (см. ниже), существенно отметить, что отдельные слагающие выражения для S_y обладают совершенно разной физической природой. Член cnE/H , как уже отмечалось, соответствует обусловленному электрическим полем перемещению центров ларморовых окружностей частиц. Напротив, член, пропорциональный $d(nT)/dx$, вообще не связан с движением центров этих окружностей — ведь мы пренебрегли соударением частиц, и, стало быть, пространственное и энергетическое их распределение никак не может влиять на их движение. Происхождение этого члена легко понять из рисунка. Рассмотрим среднее значение скорости v_y частиц, находящихся в заштрихованной на рисунке полоске. Частицы, центры орбит которых лежат левее полоски, движутся внутри этой полоски против направления оси y , а частицы, центры орбит которых лежат правее полоски, движутся по оси y .

Если плотность частиц возрастает по направлению оси x , то частиц второго класса больше и, следовательно, средняя скорость частиц по оси y больше нуля. Это находит свое выражение в первом члене формулы (2. 11). Подобно этому, если $(dT/dx) > 0$, то средняя энергия и средние радиусы орбит увеличиваются с возрастанием x и в полоску попадет больше частиц справа, чем

слева; скорости их будут тоже большими, что приведет к тому, что $\bar{v}_y > 0$.

В дальнейшем будем называть дрейфовой скоростью, или дрейфовым током, скорость и ток, обусловленные перемещением центров ларморовых окружностей, т. е. реальным перемещением частиц. В отличие от него, скорости и токи, не связанные с изменением среднего положения частиц (т. е. только что рассмотренного типа), будем называть ларморовыми.

Заметим, что, как легко показать, в неоднородном магнитном поле каждая частица дрейфует со скоростью

$$\frac{\mathbf{u}}{c} = \frac{mv_{\perp}^2}{4eH^3} |\mathbf{H} \nabla H| \quad (2.12)$$

(предполагается, что направление вектора \mathbf{H} одинаково во всем пространстве). Между тем в выражении (2.11) не фигурирует градиент напряженности магнитного поля H . Объясняется это тем, что в неоднородном магнитном поле средняя ларморова скорость точно компенсирует скорость дрейфа (2.12).

Отметим, наконец, что формула (2.11) полностью соответствует гидродинамическим уравнениям движения газа. Помножим эту формулу на eH/c и просуммируем по обоим сортам частиц ($\alpha=1, 2$). Приняв во внимание, что давление газа равно

$$p = \sum_{\alpha=1}^2 n_{\alpha} T_{\alpha} \quad (2.13)$$

и что электрический ток j равен $e\mathbf{S}$, получаем

$$\nabla p = \sum_{\alpha} \frac{1}{c} [\mathbf{j}_{\alpha} \mathbf{H}] + \mathbf{E} \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha}. \quad (2.14)$$

Так как в нашем случае $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0$, то это уравнение полностью соответствует уравнению гидродинамики (для стационарного случая)

$$\rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{f},$$

где \mathbf{f} — внешняя сила, рассчитанная на единицу объема газа.

Простое преобразование уравнения (2.14) с помощью уравнений электродинамики $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha}$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi/c \sum_{\alpha} \mathbf{j}_{\alpha}$ приводит к следующему условию равновесия газа:

$$p - \left(\frac{E^2 - H^2}{8\pi} \right) = \text{const}. \quad (2.15)$$

В расчетах удобно вместо уравнения (2.11) пользоваться именно этим условием равновесия.

§ 3. Второе приближение теории, роль соударений. Теплопроводность и вязкость плазмы

Чтобы учесть роль соударений, необходимо раскрыть вид оператора соударений в кинетическом уравнении (2. 2). Вид этого оператора для заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона, был дан Ландау в 1936 г. Различая ионы и электроны индексом α ($\alpha=1, 2$), запишем систему кинетических уравнений для полностью ионизированной плазмы в следующей форме:

$$D\Phi_\alpha \equiv v_k \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_k} + \frac{e_\alpha E_k}{m_\alpha} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_k} + \omega_\alpha \left(v_y \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_y} \right),$$

$$D\Phi_\alpha = - \frac{\partial q_{\alpha, k}}{\partial v_k}, \quad (3. 1)$$

$$q_{\alpha, k} = \frac{2\pi e^4 \lambda}{m_\alpha} \sum_{\alpha'} \int d\mathbf{v}' \left(\frac{\Phi_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \Phi_{\alpha'}}{\partial v'_i} - \frac{\Phi_{\alpha'}}{m_\alpha} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_i} \right) \left(\frac{u^2 \delta_{kl} - u_k u_l}{u^3} \right).$$

Здесь ω_α — ларморова частота ($\omega_\alpha = e_\alpha H / m_\alpha c$); $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(\mathbf{v})$, $\Phi_{\alpha'} = \Phi_{\alpha'}(\mathbf{v}')$, $u = |\mathbf{v}' - \mathbf{v}|$.

Наконец, λ есть некоторая медленно (логарифмически) меняющаяся функция скорости частиц, которую можно приближенно выразить через температуру и плотность плазмы. Вид этой функции несколько различен в зависимости от того, больше или меньше единицы величина $e^2/\hbar v$, где \bar{v} — средняя скорость частиц. Выражение для λ , полученное в основополагающей работе Ландау, применимо для низкотемпературной плазмы. В наших условиях нужно пользоваться другим выражением, которое приведено в недавней работе Ландсхофа [1] и которое приближенно может быть представлено следующим образом:

$$\lambda = 36,2 - \frac{1}{2} \ln n + 2 \ln \frac{\bar{v}}{c}. \quad (3. 2)$$

Ввиду нечувствительности λ к выбору значений n и \bar{v} в дальнейшем будем приближенно полагать

$$\lambda \approx 20. \quad (3. 3)$$

Совсем недавно появилась работа Коэна, Шпицера и др.⁴, в которой, в частности, содержится критика работы Ландау. Однако их утверждение, что Ландау опустил в своем уравнении некоторые важные члены, учитывающие динамическое трение, неверно. Напротив, теория Ландау учитывает оба члена в используемом ими (Коэном и др. — *Прим. ред.*) уравнении Фоккера—Планка (оба члена в выражении для K , их уравнении (7)) и может быть получена путем преобразования этого уравнения.

⁴ Phys. Rev., 1950, 80, 230.

Что касается более правильного учета близких соударений, то хотя об этом в статье Коэна и др. и говорится, но фактически они пользуются тем же способом приближенной их оценки, что и Ландау. Таким образом, теория Коэна и др. по существу эквивалентна теории Ландау.

Сравнение численного значения электропроводности плазмы σ (без магнитного поля), подсчитанного по Ландау и по Коэну, показывает, что σ по Коэну на 15% меньше, чем по Ландау. Происхождение этой разницы, возможно, связано с тем, что Коэн бесосновательно пренебрег некоторыми членами в своем уравнении (23), — ошибка, которую он сам отмечает и собирается в дальнейшем исправить. Впрочем, возможно, что это расхождение частично обуславливается тем, что, применяя теорию Ландау, мы, следуя Ландсхофу, ограничились приближенным решением системы алгебраических уравнений, к которым она приводит.

Вообще же говоря, метод Коэна, будучи по существу эквивалентен методу Ландау, несравненно более громоздок и сложен.

Отметим, что, воспользовавшись оператором соударений (3. 1), мы пренебрегли влиянием магнитного поля на самый акт соударения частиц. Это законно, пока радиус ларморовых окружностей частиц много больше, чем дебаевская длина

$$D = \sqrt{\frac{T}{8\pi e^2 n}} = 1,66 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{T}{n}}. \quad (3. 4)$$

Как видно из сравнения (3. 4) с (2. 4), в интересующих нас условиях это требование удовлетворено для ионов, тогда как для электронов D может в несколько раз превышать $R_{\text{ларм}}$. Хотя это обстоятельство не может внести коренных изменений в результаты последующих вычислений, все же, несомненно, необходимо будет в дальнейшем развить теорию, не связанную с ограничением $D < R_{\text{ларм}}$.

Переходя к интегрированию уравнений (3. 1), представим функцию распределения в виде

$$\Phi_{\alpha} = \Phi_{0,\alpha} + f_{0,\alpha}\chi,$$

где

$$f_{0,\alpha} = \frac{n_{\alpha}^3}{\pi^{3/2}} e^{-\beta_{\alpha}^2 \left(v^2 + \frac{2e_{\alpha}V}{m_{\alpha}} \right)},$$

$$\beta_{\alpha}^2 = \frac{m_{\alpha}}{2T}, \quad (3. 5)$$

где $\Phi_{0,\alpha}$ задается уравнением (2. 8). Заметим, что эти выражения соответствуют предположению, что температура и плотность обеих компонент плазмы одинаковы.

Так как $\Phi_{0,\alpha}$ и $f_{0,\alpha}$ удовлетворяют уравнению $D\Phi=0$, то

подстановкой (3. 5) в (3. 1) приходим к системе уравнений

$$f_{0,\alpha} D\chi = -\frac{\partial \sigma_{\alpha,k}}{\partial v_k}, \quad (3. 6)$$

причем в первом приближении при вычислении $q_{\alpha,k}$ можно положить

$$\Phi_{\alpha} = \Phi_{0,\alpha}.$$

Далее, если $H \gg E$ и если функция распределения Φ (точнее, функция χ), мало меняется на расстояниях порядка радиуса ларморовой орбиты (2. 4), то в операторе D можно ограничиться последним членом, т. е. положить

$$D = \omega_0 \left(v_y \frac{\partial}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial}{\partial v_y} \right) = -\omega_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3. 7)$$

где

$$\varphi = \arctg \frac{v_y}{v_x}.$$

В результате громоздких вычислений получаются громоздкие выражения для χ . Не приводя их, выпишем вытекающие из них выражения для интересующих нас физических величин. Во-первых, получаются следующие значения для плотности потока ионов и электронов по направлению градиентов n и T :

$$S_{x, \text{эл}} = S_{x, \text{ион}} = -\frac{2,1 \cdot 10^{-5} n^2}{H^2 \sqrt{T_{\text{кэв}}}} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} + \frac{1}{4T} \frac{dT}{dx} \right) \frac{1}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}. \quad (3. 8)$$

Для потока энергии в направлении x получаем

$$\pi_x = -1,65 \cdot 10^{-12} \frac{n^2 \sqrt{T_{\text{кэв}}}}{H^2} \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dx} + \frac{0,072}{n} \frac{dn}{dx} \right) \text{эрг/см}^2 \cdot \text{сек}. \quad (3. 9)$$

Отмечу, что формулы (3. 8) и (3. 9) были получены мною по изложенному методу и независимо Ю. А. Романовым и Д. Н. Зубаревым⁵ и Е. С. Фрадкиным по способу, являющемуся обобщением на случай сильных магнитных полей способа, примененного в упомянутой статье Ландсхофа. Способ Ландсхофа гораздо сложнее изложенного здесь.

И поток частиц S_x , и тепловой поток π_x обратно пропорциональны H^2 . Сравнивая π_x с соответствующим выражением для теплового потока в полностью ионизированной плазме при отсутствии магнитного поля (по Ландсхофу)

$$H = 0, \quad \pi_x = -1,2 \cdot 10^{19} \cdot T_{\text{кэв}}^{5/2} \frac{dT_{\text{кэв}}}{dx} \text{эрг/см}^2 \cdot \text{сек}, \quad (3. 10)$$

получаем при $(dn/dx=0)$

$$\frac{\pi_{x, \text{магн}}}{\pi_{x, \text{немагн}}} = \frac{1,4 \cdot 10^{-31} n^2}{H^2 T_{\text{кэв}}^3}. \quad (3. 11)$$

⁵ Сентябрь 1950 г.

При $H=10^4$, $n=10^{14}$ и $T=100$ кэв отношение равно $1,4 \cdot 10^{-17}$.

Наиболее парадоксален тот факт, что выражение (3. 8) для потока частиц оказывается одинаковым для ионов и электронов и что оно вовсе не зависит от электрического поля (которое мы считаем направленным по оси x). Это является непосредственным выражением того, что при $H > E$ электропроводность плазмы перпендикулярно H равна нулю (см. § 1). Вместе с тем это приводит к тому, что у нас не хватает уравнений для определения значения электрического поля E : в плазме могут существовать произвольные объемные заряды, которые вследствие отсутствия электропроводности не будут растекаться.

Это можно высказать также следующим образом. Обычно потоки электронов и ионов определяются выражениями типа

$$\begin{aligned} S_{э,х} &= a_э \nabla T + b_э \nabla n + c_э E, \\ S_{ион} &= a_{ион} \nabla T + b_{ион} \nabla n + c_{ион} E. \end{aligned}$$

В стационарном режиме $S_{э,х} = S_{ион}$, ибо иначе происходило бы непрерывное перераспределение зарядов. Приравнивая выражения для $S_э$ и $S_{ион}$, получаем уравнение типа

$$E = A \nabla T + B \nabla n, \quad (3. 12)$$

с помощью которого можно определить E как функцию ∇T и ∇n (термо-э. д. с. и концентрационная э. д. с.). В магнитном же поле равенство $S_{э,х}$ и $S_{ион}$ удовлетворяется тождественно, и никакого выражения типа (3. 12), которое позволило бы нам определить значение E_x , мы не получаем.

Разрешение этой трудности можно искать в двух направлениях. Во-первых, можно ожидать, что при переходе от рассматриваемого нами второго приближения к более точным решениям кинетического уравнения возникнет зависимость потока S_x от E_x либо от производных dE_x/dx и т. д. Можно, однако, показать⁶, что члены в выражении для S_x , зависящие от E_x , будут по крайней мере порядка $1/H^4$ по отношению к H (тогда как основные члены в (3. 8) $\sim 1/H^2$) и, кроме того, будут по крайней мере третьего порядка по отношению к отклонениям от однородности (считая $\frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$, $\frac{1}{T} \frac{dT}{dx}$, $\frac{1}{H} \frac{dH}{dx}$ и $\frac{eE}{T} = -\frac{e}{T} \frac{dV}{dx}$ членами первого порядка, $\frac{1}{n} \frac{d^2n}{dx^2}$, $\left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x}\right)^2$ и т. д. членами второго порядка и т. д.).

Второй и, как будет показано, более правильный путь к разрешению рассматриваемой трудности был указан В. Л. Гинзбургом. Решение кинетического уравнения должно удовлетворять законам сохранения, которые выражаются уравнениями гидродинамики. В частности, в стационарном режиме должны

⁶ Рассматривался только одномерный случай (все градиенты и E направлены либо по одной и той же оси x , либо по радиусу r). Более общий случай потребует дополнительного рассмотрения.

соблюдаться уравнения движения

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{u}_{\alpha} \nabla) u_{\alpha, k} = - \frac{\partial p'_{kl}}{\partial x_l} + \sum_{\alpha} \left(n_{\alpha} e_{\alpha} E_k + \frac{[\mathbf{j}_{\alpha} \mathbf{H}]_k}{c} \right). \quad (3.13)$$

Здесь n_{α} — число частиц сорта α в единице объема, m_{α} и e_{α} — их масса и заряд, u_{α} — их средняя скорость ($\mathbf{u}_{\alpha} = \mathbf{S}_{\alpha}/n_{\alpha}$); p'_{kl} — тензор потока импульса

$$p'_{kl} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \int \Phi_{\alpha} (v_k - u_{\alpha, k}) (v_l - u_{\alpha, l}) dv. \quad (3.14)$$

Вместо этого тензора удобнее ввести тензор

$$p_{kl} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \int \Phi_{\alpha} v_k v_l dv. \quad (3.15)$$

Тогда уравнение (3.13) примет вид

$$\frac{\partial p_{kl}}{\partial x_l} = \sum_{\alpha} \left(n_{\alpha} e_{\alpha} E_k + \frac{1}{c} [\mathbf{j}_{\alpha} \mathbf{H}]_k \right). \quad (3.16)$$

Слагающая этого уравнения по оси x совпадает с рассмотренным уже выше уравнением (2.14); слагающая по оси y дает (так как $E_y = 0$ и $j_x = \sum e_{\alpha} S_{\alpha, x} = 0$)

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} = 0, \quad p_{xy} = \text{const}. \quad (3.17)$$

p_{xy} представляет собой не что иное, как соответствующую компоненту тензора вязкости. При отсутствии магнитного поля (при условии, что все градиенты и вектор \mathbf{E} направлены по оси x) эта «косая» компонента тензора вязкости тождественно равна нулю и уравнение (3.17) удовлетворяется автоматически. Однако магнитное поле приводит к появлению «косой» компоненты вязкости p_{xy} (так как u_y в этом случае не равно нулю и зависит от x), зависящей, в частности, от электрического поля E_x . Тем самым уравнение (3.17) становится содержательным и дает нам возможность определить E_x в функции от $\frac{1}{T} \frac{dT}{dx}$, $\frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$, $\frac{1}{T} \frac{d^2T}{dx^2}$ и т. д.

Как показывают вычисления, p_{xy} пропорционально $m_{\alpha}^{3/2}$, и поэтому при определении p_{xy} можно рассматривать только ионы, не учитывая вязкости электронного газа. Получаем

$$p_{xy} = \frac{\lambda e c^3 M^{3/2} n^2 \sqrt{T}}{H^3} [\gamma_1 b^3 + \gamma_2 c + \gamma_3 d], \quad (3.18)$$

где γ_1 , γ_2 , γ_3 — численные коэффициенты, значения которых еще не полностью подсчитаны, а величины b , c и d — функции от $\frac{1}{T} \frac{dT}{dx}$, $\frac{1}{T} \frac{d^2T}{dx^2}$, $\frac{eE}{T}$ и т. д., определяемые уравнениями (2.10).

Таким образом, электрическое поле E_x может быть определено

либо из условия $p_{xy} = \text{const}$, либо, как было указано на стр. 373, из высших приближений для потока частиц S_x .

Правилен первый путь, потому что выражение p_{xy} зависит от вторых производных $\frac{1}{n} \frac{d^2 n}{dx^2}$, $\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dx^2}$ и т. д. и от квадратов первых производных, тогда как зависящие от E_x члены в выражении потока S_x входят в комбинации с членами по крайней мере третьего порядка в производных (тип $\frac{1}{T} \frac{d^3 T}{dx^3}$, $\frac{1}{T^2} \frac{d^2 T}{dx^2} \frac{dT}{dx}$ и т. д.)⁷. Дело в том, что ведь мы не ставим задачи точного решения кинетических уравнений. Всякая приближенная теория типа гидродинамики исходит из разложения точных решений по некоторой эффективной длине пробега l , предполагаемой малой величиной, т. е. из разложения, в котором члены k -го порядка пропорциональны $l^k (dT/Tdx)^k$, либо $l^k (d^k T/Tdx^k)$, либо аналогичным величинам. Гидродинамика идеальной жидкости обрывает разложение на $k=1$, гидродинамика вязкой жидкости — на $k=2$ и т. д. В нашем случае оказывается необходимым учесть вязкость, т. е. необходимо дойти до $k=2$; зависимость же S_x от E_x может проявиться только в более высоких приближениях, учитывать которые нет никаких оснований.

Формулы для определения E_x из (3. 17) будут получены в ближайшее время.

§ 4. Ориентировочный расчет малой модели магнитного термоядерного реактора с подогревом и температурным скачком

Типы магнитного термоядерного реактора (МТР) могут быть, в частности, расклассифицированы по двум признакам: а) МТР с самоподдерживающейся ядерной реакцией или с внешним подогревом и б) МТР с температурным скачком между плазмой и стенкой сосуда или без температурного скачка у стенки (в последнем случае пристеночный слой является нейтральным газом). Температурный скачок возникает при малых плотностях плазмы и отсутствует (практически) при больших плотностях.

На границе плазмы со стенкой имеет место температурный скачок. Происхождение температурного скачка можно пояснить следующим образом. Допустим, что каждый ион, ударившись о стенку, нейтрализуется и отскакивает внутрь плазмы в виде нейтрального атома, энергия которого соответствует температуре стенки⁸. Плотность ионов около данной абсолютно погло-

⁷ Соответственно $p_{xy} \sim 1/N^3$, тогда как зависящие от E_x члены в S_x по крайней мере порядка $\sim 1/N^4$.

⁸ Эти предположения, которыми мы пользовались в расчете малой модели, являются максимально неблагоприятными. В действительности нейтральные атомы, возникающие при рекомбинации ионов на стенке, будут иметь в среднем существенно большую температуру, чем температура

щающей их стенки будет равна нулю (точнее, $n=0$ не при $r=r_1$, где r_1 — радиус стенки, а при $r=r_1+0,71 \lambda$, где λ — эффективная длина пробега ионов; этим уточнением пренебрегаем). Далее, в этом приближении ионы, так сказать, не имеют никаких прямых сведений о температуре стенки, — ведь ион остается ионом только до тех пор, пока он ни разу не ударился о стенку. Правда, ионы охлаждаются при соударениях с нейтральными атомами, но при малых плотностях рекомбинировавшие на стенке нейтральные атомы имеют большой пробег и проскакивают сравнительно далеко в глубь плазмы.

Отсюда следует, что температура плазмы вблизи стенки может быть гораздо выше температуры стенки (температурный скачок). Так как поток ионов на стенку в магнитном поле очень мал, то мало и количество образующихся на стенке нейтральных атомов и мала их объемная концентрация. Эти качественные соображения были проверены расчетом.

Подогрев плазмы в малой модели должен осуществляться внешним переменным электрическим полем, направленным по магнитным силовым линиям. Электропроводность плазмы в направлении, параллельном H (а также и в случае отсутствия H), равна

$$\sigma = 2,7 \cdot 10^{17} T_{\text{кэв}}^{3/2} \varphi(x) \frac{1}{\text{сек}} = 3,0 \cdot 10^5 T_{\text{кэв}}^{3/2} \varphi(x) 1/\text{ом} \cdot \text{см}. \quad (4.1)$$

Функция $\varphi(x)$ учитывает зависимость проводимости от частоты приложенного электрического поля и равна:

$x=0$	0,2	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	∞
$\varphi(x)=1$	0,815	0,44	0,184	0,064	0,022	0,0114	$\frac{1}{195 x^2}$

При этом

$$x = \frac{5,6 \cdot 10^8 T_{\text{кэв}}^{3/2} f}{n}, \quad (4.2)$$

где f — циклическая частота электрического поля.

Формулы (4.1) и (4.2) были получены из данных статьи Ландсхофа об электропроводности плазмы в магнитном поле путем замены в его формулах ларморовой частоты $\omega = eH/mc$ на частоту электрического поля f . Можно показать, что, поскольку Ландсхоф считает, что распределение ионов по скоростям является максвелловым (предположение, незаконное в случае сильного магнитного поля, но законное в интересующем нас сейчас случае), такая операция (замена eH/mc на f) вполне правомерна.

При расчете малой модели в целях упрощения было предположено, что пробег нейтральных атомов сравним с размерами сосуда, так что плотность их можно считать постоянной во всем

стенки. Кроме того, по сообщению И. Н. Головина, рекомбинация ионов при соударении их со стенкой будет иметь место не в 100% случаев соударений, а лишь в 75%.

объеме (максимально неблагоприятное предположение). Плотность нейтральных атомов предполагалась малой по сравнению с плотностью ионов, так что соударения нейтральных атомов друг с другом не учитывались. Учитывались ионизация нейтральных атомов электронами и перезарядка их на ионах, в результате которой получается быстрый нейтральный атом, обладающий той же энергией, какой обладал столкнувшийся с медленным атомом ион. Предполагалось, что все образующиеся в процессе перезарядки быстрые нейтральные атомы, пробежав через сосуд, отдают всю свою энергию стенке (максимально неблагоприятное предположение). Этот механизм отвода тепла стенке является основным и во много раз превышает отвод тепла за счет теплопроводности плазмы.

В отношении сечения перезарядки $\sigma_{\text{пер}}$ была использована полуэмпирическая формула Сены [2]

$$\sigma_{\text{пер}} = \frac{8\pi e^4}{I^2}, \quad (4.3)$$

где I — потенциал ионизации. По приводимым Сеной данным (стр. 187), эта формула хорошо подтверждается для ряда одноатомных газов (Hg, Ag, Ne, He) в области энергий порядка 900 эв. Для водорода (атомарного) по формуле (4.3) получаем

$$\sigma_{\text{пер}} = 2,86 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2. \quad (4.4)$$

Это сечение существенно больше сечения упругого соударения нейтральных атомов с ионами, которым мы пренебрегали.

При росте энергии сечение перезарядки должно сильно падать начиная с энергий порядка 5–10 кэв. Так, например, известно, что при больших энергиях сечение перезарядки, при котором электрон переходит с наинизшего уровня на наинизший же, падает при больших энергиях ϵ пропорционально $1/\epsilon^6$. Мы этого падения не учитывали и считали, что $\sigma_{\text{пер}}$ дается формулой (4.4) вплоть до 20 кэв.

Уже после проведения расчетов И. Н. Головин указал нам на экспериментальные измерения $\sigma_{\text{пер}}$ ионов H_2^+ в молекулярном водороде [3]. По Кину, $\sigma_{\text{пер}}$ имеет максимум, равный $0,96 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$, примерно при 6–7 кэв. Если при пересчете на атомарный водород просто разделить этот максимум на два, то получим около $0,5 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$, что в 5–6 раз меньше принятого нами значения $2,86 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$.

Однако такой расчет не правомерен, так как в нем не учитывается резонансный характер перезарядки H^+ в атомарном водороде, который приводит к увеличению $\sigma_{\text{пер}}$. Надо отметить, что данные Кина по резонансной перезарядке He^+ в He существенно выше (при экстраполяции — раза в два) прежних экспериментальных данных Ростаньи и Вольфа, которыми пользовался Сена.

Из изложенного следует, что вопрос о перезарядке требует экспериментального и теоретического уточнения.

При расчете малой модели мы пренебрегли следующими эффектами, которые в этой модели действительно несущественны: выделение энергии при ядерных реакциях, экранировка магнитного поля токами плазмы, тормозное излучение, объемная рекомбинация ионов (последняя мала по сравнению с рекомбинацией ионов на стенках). Кроме того, мы пренебрегли зависимостью электропроводности плазмы от ее плотности (функция $\varphi(x)$ в формуле (4.2)); учет этой зависимости привел бы к не очень существенным изменениям результатов расчета.

Расчет был проведен для случая, когда температура на оси прямого цилиндра равна 5 *кэв*. Приведем результаты расчета.

Мощность, потребляемая на подогрев плазмы (в расчете на 1 см длины цилиндра),

$$W = 1,74 \cdot 10^4 E^2 r_1^2 \text{ вт/см},$$

где r_1 — радиус цилиндра в сантиметрах, E — амплитуда напряженности электрического поля, подогревающего плазму, в вольтах на сантиметр.

Число реакций $D+D$

$$R = 4,44 \cdot 10^5 E^2 H^2 r_1^4 \text{ 1/см} \cdot \text{сек.}$$

Число ионов, рекомбинирующих в объеме (в расчете на 1 см длины цилиндра),

$$Q = 5,0 \cdot 10^7 E^2 H^2 r_1^4 \text{ 1/см} \cdot \text{сек.}$$

Плотность ионов на оси цилиндра

$$n_0 = 0,95 \cdot 10^{12} E H r_1 \text{ 1/см}^3.$$

Относительная концентрация нейтральных атомов на оси цилиндра

$$c_0 = \frac{1,08 \cdot 10^4}{H^2 r_1^2}.$$

Число пробегов медленных нейтральных атомов, укладывающихся на радиусе цилиндра, $\xi = 0,57 E H r_1^2$.

Задавшись в виде примера значениями $H = 10^3 \text{ гс}$, $E = 10^{-5} \text{ в/см}$, $r_1 = 20 \text{ см}$, получаем

$$W = 0,7 \text{ вт/см}, \quad R = 7,1 \cdot 10^6 \text{ 1/см} \cdot \text{сек}, \quad S = 6 \cdot 10^{11} \text{ 1/см} \cdot \text{сек},$$

$$Q = 8 \cdot 10^8 \text{ 1/см} \cdot \text{сек}, \quad n_0 = 2 \cdot 10^{11} \text{ 1/см}^3, \quad c_0 = 2,7 \cdot 10^{-5}, \quad \xi = 2,3.$$

Плотность ионов изменяется примерно по закону

$$n = n_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_1^2}}.$$

Температура растет от оси к стенкам сосуда примерно в 4 раза; этот парадоксальный результат обусловлен двумя причинами. Во-первых, теплоемкость плазмы убывает к стенке вследствие уменьшения ее плотности, тогда как благодаря тому, что мы пренебрегли зависимостью электропроводности плазмы от ее плотности, джоулево тепло считалось равномерно выделяющимся по всему объему плазмы. Во-вторых, нами не было учтено, что концентрация нейтральных атомов, а стало быть, и обусловленный их перезарядкой теплоотвод падают по мере удаления от стенки сосуда.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R. Landshoff. Phys. Rev., 1949, **76**, 904.
2. Л. А. Сена. Столкновения электронов и ионов с атомами газа. М., ГТТИ, 1948.
3. J. Keene. Phil. Mag., 1949, **40**, 369.

Примечание. Осенью 1950 г. И. Е. Тамм совместно с А. Д. Сахаровым предложил принцип магнитной термоизоляции плазмы для осуществления управляемой термоядерной реакции.

И. Е. Таммом был предложен термин для разрабатываемой установки — магнитный термоядерный реактор, сокращенно МТР.

В первые же недели работы над новой идеей И. Е. Тамм провел много важных расчетов, в том числе расчеты коэффициентов теплопроводности термодиффузии и диффузии замагниченной плазмы, вошедшие в публикуемую статью.

В этих расчетах И. Е. Тамм впервые в литературе в качестве нулевого приближения использует движение без столкновений в заданных скрещенных магнитном и электрических полях. Этот прием, представляющийся сейчас тривиальным, в то время оказался не просто методической находкой, а сыграл определенную роль в формировании основных качественных идей МТР.

Одновременно с И. Е. Таммом расчеты тех же коэффициентов были проведены Д. Н. Зубаревым и Ю. А. Романовым, которые использовали более традиционные (и более громоздкие в данном случае) методы.

Найденное И. Е. Таммом, Д. Н. Зубаревым и Ю. А. Романовым (и впоследствии, в более общей постановке, Е. С. Фрадкиным) численное отношение коэффициентов диффузии и термодиффузии 4 : 1 имело в то время принципиальное стимулирующее значение для всей проблемы, так как это значение допускает существование стационарного квазидиффузионного решения с максимальной температурой на оси установки.

Основополагающая в теории МТР статья И. Е. Тамма впервые была опубликована на Женевской конференции по мирному использованию ядерной энергии в 1958 г., после того как доклад П. Е. Курчатова в Харуэлле пробил брешь в завесе секретности, окружавшей эти работы.

ТЕОРИЯ МАГНИТНОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО РЕАКТОРА ¹

Часть III

ДРЕЙФ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЛАЗМЫ В ТОРОИДЕ ПРИ НАЛИЧИИ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО ТОКА

§ 1. По вопросу, которому посвящена эта статья, существовали превратные представления (которые разделял и я, хотя высказывал их только устно, а не письменно). Предполагалось, что линии дрейфа частиц, различающихся своим зарядом или соотношением между параллельной и перпендикулярной магнитному полю компонентами скоростей $v_{||}/v_{\perp}$, взаимно пересекаются, что приводит к резкому повышению теплопередачи в неравномерно нагретой плазме (по сравнению со случаем прямого цилиндра).

В этой работе, проведенной совместно с Н. Н. Боголюбовым, показывается, что если теплопроводность в прямом цилиндре обозначить

$$\kappa = \frac{A(N, T)}{H^2}, \quad (1.1)$$

то в тороиде

$$\frac{A}{H'^2 + H_{\varphi}^2} \leq \kappa \leq \frac{A}{H'^2}, \quad (1.2)$$

где H' — поле стабилизирующего тока, протекающего по плазме, а H_{φ} — поле катушки, намотанной на тороид. Здесь приводятся формулы, позволяющие вычислить точно зависимость κ от H' и H_{φ} .

Для упрощения будем предполагать, что электрического поля нет (оно всегда мало по сравнению с H , и введение его в качестве возмущения не представляет трудности). Далее будем предполагать, что система обладает аксиальной симметрией, т. е. что

$$\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.3)$$

Направление осей указано на рисунке, где φ — угол вращения

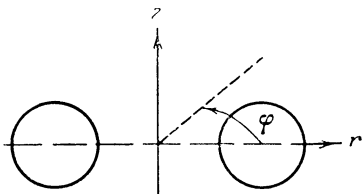
¹ Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. I. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 31. Работа выполнена в 1951 г. Часть II этой работы написана А. Д. Сахаровым.

около оси z . Поле H считаем заданным; вопроса о согласовании его с плазменными токами мы здесь не рассматриваем².

При наличии аксиальной симметрии (уравнение (1.3)) слагающие поля H_r и H_z могут быть выражены через компоненту A_φ векторного потенциала (создаваемого стабилизирующим плазменным током) с помощью соотношений

$$H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi), \quad H_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}. \quad (1.4)$$

Согласно общей теореме электродинамики движение заряженной частицы в таком поле (при отсутствии соударений с другими



частицами) обладает двумя точными интегралами движения

$$v^2 = \text{const}, \quad (1.5)$$

$$\frac{e}{c} r A_\varphi + mrv_\varphi = M_z = \text{const} \quad (1.6)$$

(M_z — обобщенный момент движения частицы вокруг оси z). Заметим, что уравнение проекции магнитной силовой линии на меридиональную плоскость r, z гласит

$$r A_\varphi = \text{const}. \quad (1.7)$$

Это утверждение следует из того факта, что согласно (1.4)

$$\mathbf{H} \text{ grad} (r A_\varphi) \equiv 0. \quad (1.8)$$

Из (1.6) и (1.7) следует, что частица в своем движении уклоняется от магнитной силовой линии не больше чем на величину ларморового радиуса в поле H' . Действительно, из (1.6) следует, что величина $(e/c)rA_\varphi$ при движении частицы изменяется не больше чем на $\pm mrv$ (где v — полная скорость частицы). Стало быть, если обозначить через δR максимальное отклонение частицы от магнитной силовой линии, то

$$\delta R |\text{grad} (r A_\varphi)| \leq \frac{mrv c}{e}. \quad (1.9)$$

² Хотя, например, меридиональное поле H_r и H_z создается током в плазме, для поддержания которого необходимо, вообще говоря, электрическое поле E_φ , мы этого поля E_φ пока не учитываем.

Так как согласно (1. 4) $|\text{grad}(rA_\varphi)| = rH'$, где $H'^2 = H_r^2 + H_z^2$, то из (1. 9) получаем

$$\delta R \leq \frac{m v c}{e H'} = R_{\text{Л}}(H'), \quad (1. 10)$$

где $R_{\text{Л}}(H')$ — радиус Лармора в поле H' .

Таким образом, траектории движения частиц в меридиональной плоскости r, z совпадают с магнитными силовыми линиями поля H' с точностью до $R_{\text{Л}}(H')$, т. е. одинаковы для частиц обоих знаков заряда, причем траектории эти замкнуты и не пересекаются между собой.

Ошибочные высказывания по этому вопросу были связаны со следующим обстоятельством. Если обозначить через \mathbf{u} скорость движения центров ларморовых окружностей (точнее, скорость движения частицы, усредненную по обращению ее вокруг направления магнитного поля), то нетрудно показать, что с точностью до членов порядка $1/\omega^2$

$$\mathbf{u} = v_{\parallel} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{v^2 + v_{\parallel}^2}{2\omega^2} [\boldsymbol{\varepsilon} \nabla \omega] + \frac{v_{\parallel}^2}{\omega^2} \{\text{rot } \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\varepsilon} \text{rot } \boldsymbol{\omega})\}. \quad (1. 11)$$

Здесь введены обозначения

$$\boldsymbol{\omega} = e\mathbf{H}/mc, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}/\omega, \quad (1. 12)$$

$$v_{\parallel} = (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{v}). \quad (1. 13)$$

В уравнение (1. 11) величина v_{\parallel} входит как параметр; ее изменение во времени определяется с точностью до членов порядка $1/\omega$ уравнением

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{v_{\parallel}^2 - v^2}{2\omega} (\boldsymbol{\varepsilon} \nabla \omega). \quad (1. 14)$$

Уравнения (1. 11) и (1. 14) представляют собой полную систему уравнений дрейфа (точнее, усредненного по ларморовому вращению движения частиц в магнитном поле).

В случае прямого цилиндра первый, главный член формулы (1. 11) направлен по оси z и дрейф частицы в плоскости xu определяется только членами, зависящими от *производных* магнитного поля по координатам. При рассмотрении дрейфа в торе недостаточно точно учитывалось, что главный член дрейфа в меридиональной плоскости r, z определяется *первым* членом формулы (1. 11) (ибо проекция его на меридиональную плоскость не равна нулю) и что члены с производными от ω являются лишь поправочными, меняющими траекторию частицы лишь на величину порядка ларморового радиуса.

§ 2. Теплопроводность плазмы определяется в первую очередь ионами и их соударениями друг с другом. Поэтому будем в даль-

нейшем рассматривать только ионы, пренебрегая их соударениями с электронами³.

Введем обозначение

$$\xi = \frac{e}{c} r A_{\varphi}. \quad (2.1)$$

Из (1.4) и (1.12) получаем

$$\text{grad } \xi = r (\omega_z \mathbf{i}_r - \omega_r \mathbf{i}_z), \quad (2.2)$$

где $\mathbf{i}_z, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_{\varphi}$ — единичные векторы по направлениям осей. Из (2.2) следует, в частности,

$$(\mathbf{v} \nabla \xi) = r [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}]_{\varphi}. \quad (2.3)$$

Помимо координаты ξ , постоянной вдоль проекции магнитных силовых линий на плоскость r, z , введем координату s , изменяющуюся вдоль магнитной силовой линии:

$$ds = (\boldsymbol{\omega}' d\mathbf{r}) / \omega'. \quad (2.4)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}'$ означает проекцию вектора $\boldsymbol{\omega}$ на меридиональную плоскость, т. е.

$$\omega'_r = \omega_r, \quad \omega'_z = \omega_z, \quad \omega'_\varphi = 0, \quad (2.5)$$

так что

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{i}_{\varphi} \omega_{\varphi}. \quad (2.6)$$

Из (2.2) и (2.4) следует

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\omega_z}{\omega'} \frac{\partial}{\partial s} - r \omega_r \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\omega_r}{\omega'} \frac{\partial}{\partial s} + r \omega_z \frac{\partial}{\partial \xi},$$

так что

$$(\mathbf{v} \nabla) = \frac{(\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}')}{\omega'} \frac{\partial}{\partial s} + r [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}]_{\varphi} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (2.7)$$

Введем еще обозначение k^2 для адиабатического инварианта

$$k^2 = \frac{\omega_0 v_{\perp}^2}{\omega} = \frac{\omega_0}{\omega} (v^2 - (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{v})^2). \quad (2.8)$$

Здесь ω_0 означает некоторую постоянную размерности и порядка ω : она введена в выражение для k^2 для того, чтобы сделать k^2 безразмерным.

Величина k^2 является адиабатическим инвариантом в том смысле, что ее производная по времени обращается в нуль после усреднения ее по Лармору:

$$\frac{dk^2}{dt} \ll \overline{(\mathbf{v} \nabla) k^2} = - \frac{k^2}{\omega} \overline{(\mathbf{v} \nabla) \omega} - \frac{2v_{\perp} \omega_0}{\omega} \overline{(\mathbf{v} \nabla) (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{v})} \ll 0. \quad (2.9)$$

³ Напротив, материальный поток частиц определяется исключительно соударениями ионов с электронами.

Усреднением по Лармору называем следующую операцию. Введем ортогональную тройку единичных векторов $\mathbf{\varepsilon}$, \mathbf{a} , \mathbf{b} , где

$$\mathbf{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}/\omega, [\mathbf{\varepsilon}\mathbf{a}] = \mathbf{b}, [\mathbf{b}\mathbf{\varepsilon}] = \mathbf{a}. \quad (2.10)$$

Разлагаем вектор \mathbf{v} по этим направлениям:

$$\mathbf{v} = v_{\parallel}\mathbf{\varepsilon} + v_{\perp}(\mathbf{a} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha). \quad (2.11)$$

Усреднением, по Лармору, будем обозначать усреднение по углу α . Легко показать, что

$$\overline{v_i v_k}^{\Pi} = \frac{v_{\perp}^2}{2} \delta_{ik} + \left(v_{\parallel}^2 - \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \varepsilon_i \varepsilon_k. \quad (2.12)$$

Пользуясь этим соотношением, легко показать справедливость формулы (2.9).

Заметим еще для дальнейшего, что в координатах v , v_{\parallel} и α (заметим, что $v_{\perp}^2 = v^2 - v_{\parallel}^2$) оператор

$$\sum_k [\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]_k \frac{\partial}{\partial v_k} = -\omega \frac{\partial}{\partial \alpha}. \quad (2.13)$$

§ 3. Кинетическое уравнение имеет вид

$$DF = \nu StF. \quad (3.1)$$

Здесь $F(r, v)$ — функция распределения частиц,

$$D = \sum_k [\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]_k \frac{\partial}{\partial v_k} + (\mathbf{v}\nabla), \quad (3.2)$$

St — оператор соударений, ν — безразмерная величина, пропорциональная среднему числу соударений частиц в единицу времени. В дальнейшем будем считать ν малой величиной и разлагать F по степеням ν .

Будем искать решение кинетического уравнения, по возможности близкое к максвеллову распределению. Так как частицы дрейфуют вдоль магнитных силовых линий, то плотность N и температура T частиц должны быть постоянны вдоль магнитных линий и, стало быть, могут зависеть только от координаты ξ , но не от s .

Положим

$$F = F_0(1 + \Phi + \chi), \quad (3.3)$$

$$F_0 = \frac{N(\xi)\beta^3(\xi)}{\pi^{3/2}} e^{-\beta^2(\xi)v^2}, \quad \beta^2 = \frac{m}{2T(\xi)}.$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_0} DF_0 &= \frac{1}{F_0} (\mathbf{v}\nabla F_0) = r [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}]_{\varphi} \left\{ \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial \xi} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \xi} \left(\beta^2 v^2 - \frac{3}{2} \right) \right\} = \\ &= \frac{[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}]_{\varphi}}{\omega'} \left\{ \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial n} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial n} \left(\beta^2 v^2 - \frac{3}{2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где $\partial/\partial n$ означает производную по нормали к магнитной силовой линии, т. е. производную по направлению изменения координаты ξ :

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{|\text{grad } \xi|} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{r\omega'} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Введя обозначение

$$\gamma = \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial n} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial n} \left(\beta^2 v_1^2 - \frac{3}{2} \right), \quad (3.4)$$

получаем

$$\frac{1}{F_0} DF_0 = \gamma \frac{[\omega v]}{\omega'}. \quad (3.5)$$

Внося (3.3) и (3.5) в (3.1) получаем

$$D(\Phi + \chi) + \gamma \frac{[\omega v]}{\omega'} (1 + \Phi + \chi) = \nu St' (\Phi + \chi), \quad (3.6)$$

где введено обозначение

$$St'(\Phi) = \frac{1}{F_0} St[F_0(1 + \Phi)]. \quad (3.7)$$

Выберем такие величины Φ и χ , чтобы Φ было решением кинетического уравнения при отсутствии соударений, т. е. положим

$$D\Phi + \gamma \frac{[\omega v]_{\Phi}}{\omega'} (1 + \Phi) = 0, \quad (3.8)$$

$$D\chi + \gamma \frac{[\omega v]_{\chi}}{\omega'} \chi = \nu St'(\Phi + \chi). \quad (3.9)$$

Уравнение (3.8) легко решить, разлагая Φ по обратным степеням ω . В частности, главный член Φ , обратный первой степени ω (точнее, ω'), равен

$$\Phi_1 = \gamma \frac{\nu_{\Phi}}{\omega'}. \quad (3.10)$$

Старшие члены нам не понадобятся.

Переходим к определению величины χ , учитывающей роль соударений. Разложим ее в ряд по степеням ν :

$$\chi = \chi_0 + \nu\chi_1 + \nu^2\chi_2 + \dots \quad (3.11)$$

Хотя при $\nu=0$ и можно положить $\chi=0$, однако при $\nu \neq 0$ в χ необходимо входит член, не зависящий от ν . Это объясняется следующим образом. Распределение $F = F_0(1 + \Phi)$ является одним из возможных распределений частиц в магнитном поле при отсутствии соударений. Однако нам в качестве исходного распределения нужно выбрать такое, какое минимально нарушалось бы соударениями. Распределение $F_0(1 + \Phi)$ таковым не является:

если бы мы не ввели в χ члена χ_0 , т. е. взяли бы в качестве исходного (без соударений) распределения именно $F_0(1+\Phi)$, а не $F_0(1+\Phi+\chi_0)$, то в χ появились бы члены, пропорциональные сколь угодно большим *положительным* степеням большой величины ω .

Итак, исходя из (3. 11) и внося это разложение в (3. 9), получаем

$$D\chi_0 + \gamma \frac{[\omega v]_{\Phi}}{\omega'} \chi_0 = 0, \quad (3. 12)$$

$$D\chi_1 + \gamma \frac{[\omega v]_{\Phi}}{\omega'} \chi_1 = \nu St' (\Phi + \chi_0) \quad \text{и т. д.} \quad (3. 13)$$

Итак, χ_0 является решением уравнения (3. 12), соответствующего отсутствию соударений. Разлагая это решение по обратным степеням ω , легко показать, что первый, главный член этого разложения должен быть функцией только следующих величин: ξ , ν^2 и k^2 . В противном случае решение будет включать в себя члены, пропорциональные более высокой степени ω , чем первый член, который мы считаем главным. Итак, главный член χ_0 будет функцией только ξ , ν^2 и k^2 ; обозначим его через

$$\chi_{0,1}(\xi, \nu^2, k^2). \quad (3. 14)$$

Второй индекс 1 после 0 означает, что этот член обратен *первой* степени ω .

Первый член разложения функции χ_1 по обратным степеням ω , который обозначим через $\chi_{1,1}$, может быть функцией более широкого класса аргументов ξ , s , ν^2 , $(\nu \varepsilon)$. При этом условии главная часть оператора D — оператор $\sum_k [\nu \omega]_k \frac{\partial}{\partial \nu_k}$ при действии на $\chi_{1,1}$ дает нуль. Заметим, что всякая функция от s , ξ , ν^2 , $(\nu \varepsilon)$ может быть представлена как функция ⁴ от s , ξ , ν^2 , k^2 .

Итак, положим, что

$$\chi_1 = \chi_{1,1} + \chi_{1,2} + \dots \quad (3. 15)$$

где второй индекс означает ту *обратную* степень ω , которой пропорционален данный член, причем

$$\chi_{1,1}(s, \xi, \nu^2, k^2). \quad (3. 16)$$

Внося (3. 15) в (3. 13), получаем

$$\sum_k [\nu \omega]_k \frac{\partial \chi_{1,2}}{\partial \nu_k} = St' (\Phi_1 + \chi_{0,1}) - (\nu \nabla \chi_{1,1}) - \gamma \frac{[\omega v]_{\Phi}}{\omega'} \chi_{1,1}, \quad (3. 17)$$

где Φ_1 дается формулой (3. 10).

⁴ Напротив, функцию ξ , ν , $(\nu \varepsilon)$ нельзя представить как функцию ξ , ν^2 , k^2 , если ω зависит от s .

Этим уравнением определяется функция $\chi_{1,2}$, через которую, в свою очередь, выражается теплопроводность.

Может показаться, что уравнение (3.17) неопределенное, так как искомая функция $\chi_{1,2}$ выражается через две другие неизвестные функции $\chi_{0,1}$ и $\chi_{1,1}$; однако это не так. При условиях (3.14) и (3.16) относительно возможных аргументов функции $\chi_{0,1}$ и $\chi_{1,1}$ требование разрешимости уравнения (3.17) задает эти функции с необходимой нам степенью определенности (впрочем, нам в дальнейшем придется еще рассмотреть условие разрешимости уравнения для $\chi_{2,2}$).

Действительно, во-первых, согласно (2.13) левая часть уравнения (3.17) равна $-\omega (\partial\chi_{1,2}/\partial\alpha)$.

Для того чтобы $\chi_{1,2}$ была однозначной функцией вектора скорости \mathbf{v} , необходимо, чтобы $\chi_{1,2}$ была периодической функцией угла α с периодом 2π . Для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы правая часть уравнения (3.17) была периодической функцией α , т. е. обращалась бы в нуль при усреднении по Лармору. Легко видеть, что среднее, по Лармору, от последнего члена правой части уравнений (3.17) равно нулю, и поэтому изложенное только что требование гласит

$$\overline{(\mathbf{v}\nabla\chi_{1,1})^{\Pi}} = St' (\bar{\Phi}_1^{\Pi} + \chi_{0,1}). \quad (3.18)$$

Выпишем теперь выражение для $(\mathbf{v}\nabla\chi_{1,1})$, воспользовавшись (2.7) и (3.16):

$$(\mathbf{v}\nabla\chi_{1,1}) = \frac{(\mathbf{v}\omega')}{\omega'} \frac{\partial\chi_{1,1}}{\partial s} \Big|_{k^2} + r[\omega\mathbf{v}]_{\varphi} \frac{\partial\chi_{1,1}}{\partial\xi} \Big|_{k^2} + \frac{\partial\chi_{1,1}}{\partial k^2} (\mathbf{v}\nabla k^2). \quad (3.19)$$

Здесь индексами $|_{k^2}$ у знака производных обозначено, что они берутся при постоянных k^2 ; дифференцирование же по k^2 учитывается последним членом формулы (3.19).

Легко убедиться, что

$$\overline{(\mathbf{v}\nabla\chi_{1,1})^{\Pi}} = \frac{\omega'}{\omega} v_{\parallel} \frac{\partial\chi_{1,1}}{\partial s} \Big|_{k^2}. \quad (3.20)$$

Стало быть, уравнение (3.18) можно записать в такой форме:

$$\frac{\partial\chi_{1,1}}{\partial s} \Big|_{k^2} = \frac{\omega}{\omega'v_{\parallel}} St' (\bar{\Phi}_1^{\Pi} + \chi_{0,1}). \quad (3.21)$$

Так как $\chi_{1,1}$ должна быть однозначной функцией координат, то, проинтегрировав (3.21) по всей замкнутой магнитной силовой линии, т. е. по s , получим

$$\oint \frac{ds}{\omega'} \frac{\omega}{v_{\parallel}} St' (\bar{\Phi}_1^{\Pi} + \chi_{0,1}) = 0. \quad (3.22)$$

Уравнение (3.22) определяет функцию $\chi_{0,1}$.

Выпишем это уравнение несколько подробнее. Внося выражение

$$\Phi_1 = \left\{ \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial n} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial n} \left(\beta^2 v^2 - \frac{3}{2} \right) \right\} \frac{v_\varphi}{\omega'}$$

(см. (3.4) и (3.10)) в оператор соударения, легко убедиться, что только член $\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial n} \beta^2 v^2 \frac{v_\varphi}{\omega'}$ в этом выражении дает результат, отличный от нуля⁵, а именно:

$$St' \Phi_1 = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial n} \frac{v_\varphi}{\omega'} f(\beta, v) = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{v_\varphi}{r \omega'^2} f(\beta, v). \quad (3.23)$$

Здесь $f(\beta, v)$ — некоторая функция, явный вид которой нам сейчас не существует.

Так как на основании (2.11) $\bar{v}_\varphi^{\text{II}} = v_{\parallel} \varepsilon_\varphi$, то уравнение (3.22) можно записать так:

$$\oint \frac{ds}{\omega'} \frac{\omega}{v_{\parallel}} St'(\chi_{0,1}) = - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \xi} f(\beta, v) \oint \frac{ds}{r \omega'^3} \frac{\omega_\varphi}{v_{\parallel}}. \quad (3.24)$$

Из этого интегрального уравнения нужно найти $\chi_{0,1}$. Определив $\chi_{0,1}$, нужно найти $\chi_{1,1}$ из уравнения (3.21). После этого нам известна правая часть уравнения (3.17), из которого можно, таким образом, определить $\chi_{1,2}$, и именно с помощью этой функции и выражается теплопроводность. Действительно, теплопроводность определяется теми членами функции распределения частиц $F(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, которые пропорциональны v_r и v_z , а члены такого характера входят в выражение для $\chi_{1,2}$ (в члены старших порядков относительно $1/\omega$).

Я не буду здесь излагать общего исследования системы уравнений (3.24), (3.21) и (3.17) и методов их решения, а ограничусь несколькими общими замечаниями.

Рассмотрим случай, когда продольное поле катушки отсутствует, т. е. $\omega_\varphi = 0$. В этом случае $\bar{\Phi}^{\text{II}} = 0$, и правая часть уравнения (3.24) обращается в нуль; стало быть, $\chi_{0,1}$ и $\chi_{1,1}$ можно приравнять нулю и уравнение (3.17) для $\chi_{1,2}$ после подстановки в правую часть выражения (3.23) приобретает точно такой же вид, как и в случае прямого цилиндра. Таким образом, в случае $\omega_\varphi = 0$ приходим к прежнему выражению теплопроводности (см. (1.1)):

$$\kappa = \frac{A(N, T)}{H'^2}. \quad (3.25)$$

Если теперь при заданном H' станем возбуждать дополнительно продольное поле H_φ , то теплопроводность может при этом

⁵ Мы ограничиваемся главным, линейным относительно Φ_1 членом в $St' \Phi_1$; остаточный член пропорционален более высокой степени $1/\omega$.

только уменьшаться. С другой стороны, она, очевидно, не может стать меньше, чем $\frac{A}{H'^2 + H_\Phi^2} = \frac{A}{H^2}$, откуда и получается неравенство (1.2).

Исследование, изложенное в настоящей статье, имеет главным образом методическое значение и дает точное доказательство справедливости общей картины движений, происходящих в неравномерно нагретой плазме в магнитном поле.

Общие методы решения кинетического уравнения, изложенные в этой статье, могут оказаться полезными при уточнении теории магнитного термоядерного реактора.

Примечание. Эта работа, в которой наряду с И. Е. Таммом принял участие Н. Н. Боголюбов, содержит качественный анализ квазистационарного решения кинетического уравнения в случае тороидального магнитного термоядерного реактора со стабилизирующим током. Вскоре после выполнения работы стало известно о макроскопической неустойчивости этого решения. Однако работа не потеряла своего значения. В частности, введенное в ней понятие о магнитных поверхностях (восходящее еще к работе И. Е. Тамма 20-х годов) и некоторые другие качественные понятия очень важны, хотя их значение полностью было осознано лишь много позднее.

ОБ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОНОВ В УСКОРИТЕЛЯХ ¹

Настоящая работа была выполнена мною в 1947—1948 гг. в связи с обсуждением в лаборатории ускорителей и в лаборатории колебаний ФИАН возможностей использования ускорителей в качестве мощных источников ультракороткого радиоизлучения. В дальнейшем эта проблема была более подробно исследована теоретически С. М. Рытовым, а соответствующие экспериментальные исследования проведены А. М. Прохоровым. Я же в публикуемой ниже работе ограничился решением чисто электродинамической задачи.

В последнее время эта работа несколько раз использовалась при расчетах эффектов излучения в сильноточных ускорителях и в накопительных системах. В связи с этим я и счел целесообразным опубликовать ее в Трудах ФИАН, хотя с момента окончания данной работы я уже ни разу не возвращался к затронутым в ней проблемам.

§ 1. Введение

Статья посвящена приближенному рассмотрению электродинамических сил взаимодействия между ускоренно движущимися электронами релятивистских скоростей и влияния этих сил на форму электронного сгустка в синхротроне и миллитроне.

Существенно, что рассмотрение электродинамического взаимодействия электронов позволяет определить не только суммарную силу торможения, обусловленную когерентным излучением электронов, но и распределение этих сил по элементам электронного сгустка, или, иными словами, позволяет определить радиационную силу, приложенную к каждому отдельному электрону сгустка. Эти сведения не могут быть получены путем рассмотрения поля излучения сгустка в волновой зоне. С другой стороны, рассмотрение электродинамических сил не позволяет определить спектр излучения, так что оба способа дополняют друг друга.

В этой статье мы будем пользоваться тремя далеко идущими упрощениями, делающими результаты статьи в ряде отношений приближенными.

Первое, особенно серьезное упрощение состоит в следующем. В первом приближении одиночный электрон совершает около

¹ Труды ФИАН СССР, 1962, 18, 3.

фазирующей точки гармонические колебания, причем трем взаимно перпендикулярным главным осям колебаний соответствуют различные частоты ω_1 , ω_2 , ω_3 . По мере роста энергии электрона и магнитного поля частота одного из этих колебаний медленно изменяется, а амплитуда всех трех колебаний медленно уменьшается. Допустим, что на каждый электрон сгустка, помимо электродинамических сил взаимодействия его с другими электронами, действуют только те «квазиупругие силы», которые соответствуют гармоническим колебаниям электрона.

В отношении внешних радиальных и вертикальных сил это допущение представляется вполне законным. Напротив, азимутальные фокусирующие (фазирующие) внешние силы, обусловленные действием ускоряющих элементов, оказываются того же порядка величины, что и разность электродинамических сил, действующих на отдельные участки электронного сгустка. Поэтому первоочередной задачей дальнейшей разработки теории является построение теории, в которой действие ускоряющих элементов и зависящие от конфигурации сгустка электродинамические силы учитываются одновременно в одном и том же приближении.

Второе упрощение, которым мы пользуемся в этой статье, связано с предположением, что плотность распределения электронов в сгустке стационарна (или, точнее, что она заметно изменяется лишь за много оборотов сгустка). Это предположение довольно хорошо выполняется, так как период фазовых колебаний значительно больше периода обращения частиц, а стационарность распределения может нарушиться только за время, сравнимое с периодом фазовых колебаний.

В том случае, когда движение электронов не возмущается их электродинамическим взаимодействием, движение отдельных электронов сгустка представляет собой наложение, во-первых, некоторого хаотического их движения и, во-вторых, некоторого упорядоченного движения, создающего в сгустке систему «постоянных токов» (см. § 3). Наличие этих токов не нарушает стационарности распределения электронов в сгустке только в том случае, если плотность электронов постоянна вдоль каждого из некоторой системы эллипсов, лежащих в горизонтальных плоскостях и характеризующимся определенным соотношением полуосей a/b . Наше второе упрощающее предположение сводится к тому, что сгусток имеет форму эллипсоида вращения, полуоси которого находятся в том же отношении a/b , что и полуоси упомянутой системы эллипсов, и что плотность электронов постоянна во всем объеме эллипсоидального сгустка.

Нужно, однако, отметить, что большая часть результатов этой статьи не связана со справедливостью обоих отмеченных упрощающих предположений. Зато третье предположение — о том, что длина сгустка в радианах мала по сравнению с единицей (и мала также по сравнению с областью устойчивости), — имеет для всего дальнейшего решающее значение.

§ 2. Обозначения

Мы будем пользоваться системой единиц, введенных С. М. Рытовым. За единицу длины мы примем

$$\lambda = \frac{v}{2\pi} = \frac{c}{\omega_r}, \quad (2.1)$$

где ω_r — радиочастота, λ — длина радиоволны, а за единицу времени мы примем

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{1}{\omega_r}. \quad (2.2)$$

В этих единицах скорость света равна единице; радиус предельной окружности, при движении по которой с угловой частотой ω_r скорость электрона достигает скорости света, также равен единице.

Введем обычным образом ориентированную цилиндрическую систему координат, r , θ , z . Соответствующие безразмерные переменные будут

$$\rho = r/\lambda \quad \text{и} \quad \zeta = z/\lambda, \quad (2.3)$$

и безразмерное время

$$\tau = \omega_r t. \quad (2.4)$$

Координаты равновесной фазы обозначим через ρ_0 , θ_0 и $\zeta_0 = 0$. При надлежащем выборе начала отсчета времени азимут равновесной фазы может быть выражен формулой

$$\theta_0 = \tau + \varphi_0, \quad (2.5)$$

где φ_0 — очень медленная функция времени, учитывающая смещение равновесной фазы по мере роста магнитного поля и радиационных потерь электронов. Как это обычно делается в теории ускорителей, мы будем пренебрегать производной от φ_0 по времени.

Наряду с лабораторной будем также рассматривать систему координат, вращающуюся относительно оси прибора с единичной угловой скоростью, и будем ее в дальнейшем называть просто «вращающейся системой»². Азимут в этой вращающейся системе будем обозначать через α и отсчитывать его от азимута равновесной фазы:

$$\alpha = \theta - \theta_0 = \theta - \tau - \varphi_0. \quad (2.6)$$

Пренебрегая производной φ_0 по времени, получаем из (2.6)

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\alpha}{d\tau} + 1. \quad (2.7)$$

² Конечно, время и длины мы отсчитываем всегда в лабораторной системе и используем только преобразование углов и частот (2.6) и (2.7). Поэтому термин «вращающаяся система» — это только удобный способ выражения.

Точка, покоящаяся во вращающейся системе координат, имеет угловую скорость, равную единице.

Наконец, скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля и силы взаимодействия электронов мы будем выражать в следующих единицах:

$$e/\lambda \text{ — единица потенциала и } e^2/\lambda^2 \text{ — единица силы.} \quad (2.8)$$

§ 3. Невозмущенное движение электронов

Движение электронов относительно фазирующей точки, не возмущенное их электродинамическим взаимодействием, может быть охарактеризовано следующим образом. В вертикальном направлении электроны совершают гармонические колебания с частотой

$$\omega_3 = \sqrt{n}, \quad (3.1)$$

где n — показатель, определяющий спадание магнитного поля вдоль радиуса прибора. Движение же в горизонтальной плоскости подчиняется условию³

$$\rho_0 \frac{d\alpha}{d\tau} = \rho_0 - \rho \quad (3.2)$$

и складывается из двух движений по эллипсам, малые оси которых направлены радиально: одного быстрого колебания с малой амплитудой и частотой

$$\omega_1 = \sqrt{1-n} \quad (3.3)$$

и одного медленного движения с большой амплитудой вдоль азимута и малой амплитудой радиуса ρ . В этой статье мы всюду будем предполагать, что азимутальное отклонение электрона от фазирующей точки α мало по сравнению с единицей:

$$\alpha \ll 1. \quad (3.4)$$

При этом условии медленное движение большой амплитуды по азимутам оказывается гармоническим с частотой

$$\omega_2 \sim \sqrt{\frac{eV_0 \cos \varphi_0}{2\pi E(1-n)}} \ll 1, \quad (3.5)$$

где V_0 — суммарная амплитуда напряжения на ускоряющих электродах, E — полная энергия электрона (включая его массу покоя).

Рассмотрим электронный «сгусток», т. е. совокупность большого числа электронов, совершающих колебания около равновесной фазы. Амплитуды и фазы этих колебаний случайны, причем фазы

³ Здесь и в дальнейшем рассматриваем релятивистский случай, поэтому все формулы из теории ускорителей приводятся только для случая $\beta^2 \sim 1$.

являются медленными периодическими функциями времени. Поэтому среднее значение скоростей электронов v в каком-либо элементе объема сгустка будет следующим: средняя слагающая v по вертикали равна нулю:

$$\bar{v}_z = 0; \quad (3.6)$$

не только средняя, но и истинная скорость по азимуту определяется уравнениями (3. 2) и (2. 7):

$$v_\alpha = \rho \frac{d\theta}{d\tau} = \rho \left(1 + \frac{d\alpha}{d\tau} \right) = \rho + \frac{\rho}{\rho_0} (\rho_0 - \rho). \quad (3.7)$$

Что же касается радиальной слагающей v , то фаза радиальной скорости, соответствующей быстрым колебаниям малой амплитуды и частоты ω_1 , не находится в каком-либо соотношении с координатами электрона, и поэтому ее среднее значение должно равняться нулю. Следовательно, при усреднении вытекающего из (3. 2) уравнения

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\rho_0 \frac{d^2\alpha}{d\tau^2}$$

можно в его правой части заменить $d^2\alpha/d\tau^2$ на $(-\omega_2^2\alpha)$, т. е. учесть только медленные колебания большой амплитуды по азимуту:

$$\bar{v}_r = \omega_2^2 \rho_0 \alpha. \quad (3.8)$$

Мы будем исходить из предположения, что в сгустке установилось стационарное распределение плотности и скорости электронов, т. е. что эти величины имеют постоянное значение по отношению к «вращающейся» системе координат. Иными словами, любая из этих величин f зависит от θ и τ только через комбинацию $\alpha = \theta - \tau - \varphi_0$, так что

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}. \quad (3.9)$$

При этом нужно иметь в виду, что если величина f векторная (скорость, вектор-потенциал и т. п.), то лишь компоненты вектора f_r, f_θ, f_z в цилиндрической системе координат являются в стационарном состоянии функциями только от α и удовлетворяют соотношению (3. 9), тогда как, например, компоненты вектора в неподвижной декартовой системе координат соотношению (3. 9) не удовлетворяют.

Обозначим плотность электронов в сгустке через ν . Уравнение непрерывности на основании (3. 9) принимает вид

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = -\frac{\partial \nu}{\partial \alpha} = -\text{div}(\nu \mathbf{v}). \quad (3.10)$$

Внося сюда значение средней макроскопической скорости из (3. 6)—(3. 8), получаем уравнение ⁴

$$\frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho_0} \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \omega_2^2 \rho_0 \alpha \frac{\partial(\rho v)}{\partial \rho} = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$v = \frac{1}{\rho} f \{ (\rho - \rho_0)^2 + \omega_2^2 \rho_0^2 \alpha^2; \zeta \}, \quad (3. 11)$$

где f — произвольная функция аргументов. Таким образом, ρv в стационарном состоянии имеет постоянное значение на эллипсах

$$(\rho - \rho_0)^2 + \omega_2^2 (\rho_0 \alpha)^2 = \text{const.}$$

(Так как ρ мало меняется на протяжении сгустка, то множитель $1/\rho$ в правой части (3. 11) можно заменить на $1/\rho_0$.) В дальнейшем мы для простоты будем предполагать, что сгусток представляет собой равномерно заряженный по своему объему ($v = \text{const}$) эллипсоид вращения с полуосями a и b

$$\frac{(\rho - \rho_0)^2 + \zeta^2}{b^2} + \frac{\rho_0^2 \alpha^2}{a^2} = 1, \quad (3. 12)$$

причем в соответствии с (3. 11)

$$b/a = \omega_2 \ll 1. \quad (3. 13)$$

Впрочем, многие результаты данной статьи никак не зависят от этих предположений.

Заметим, что при этом предположении слагающая v_r макроскопической скорости оказывается величиной второго порядка малости по отношению даже к поправочному второму члену

$$\rho (\rho_0 - \rho) / \rho_0$$

слагающей v_α (уравнение (3.7)). Действительно, этот второй член в v_α по порядку величины равен b , тогда как согласно (3. 8) и (3. 13)

$$(\tilde{v}_r)_{\text{max}} = \omega_2^2 \rho_0 \alpha_{\text{max}} = \omega_2^2 a = \omega_2 b \ll b.$$

Поэтому мы в дальнейшем пренебрежем величиной \tilde{v}_r , т. е. вместо (3. 8) положим

$$\tilde{v}_r = 0. \quad (3. 14)$$

Таким образом, мы воспользовались выражением (3. 8) для \tilde{v}_r только для определения формы невозмущенного сгустка. Заметим, что следующее (третье) приближение теории возмущений может в принципе изменить усредненное значение \tilde{v}_r на величину того же порядка, что полученная нами в выражении (3. 8). Однако единственно существенные для дальнейшего выводы, что $\tilde{v}_r \ll \tilde{v}_\alpha$ и

⁴ Поскольку в выражение (3.10) входят частные производные, ρ и α нужно считать независимыми переменными и полагать $\partial \rho / \partial \alpha = 0$.

что сгусток весьма вытянут по азимуту, не могут быть видоизменены дальнейшими уточнениями теории.

В большинстве формул этой статьи мы будем оставлять численное значение отношения полуосей эллипсоида b/a неопределенным, предполагая, однако, что

$$b/a \ll 1. \quad (3.15)$$

§ 4. Общие выражения для электродинамических сил

Внешние силы, определяющие невозмущенное движение электронов (в том числе и силы радиационного трения, действующие на отдельный электрон), мы рассматривать не будем, а исследуем только взаимодействие электронов сгустка.

На основании (3.9) общее выражение для действующих на электрон сил \mathbf{F} может быть записано так:

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + [\mathbf{v}, \mathbf{H}], \quad (4.1)$$

где φ и \mathbf{A} — потенциалы поля сгустка, а \mathbf{H} — магнитное поле сгустка. Так как вертикальная слагающая макроскопической скорости электронов согласно (3.6) равна нулю, то

$$A_z = 0, \quad (4.2)$$

$$H_\rho = -\frac{\partial A_\alpha}{\partial \zeta}, \quad H_\alpha = \frac{\partial A_\rho}{\partial \zeta}, \quad H_\zeta = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\alpha) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \alpha} \right\}. \quad (4.3)$$

Рассмотрим сначала силу, испытываемую электроном, покоящимся во «вращающейся» системе координат, слагающие скорости которого равны: $v_\rho = v_z = 0$, $v_\alpha = \rho$. Эту силу обозначим через \mathbf{F}^0 . Из (4.1)—(4.3) путем простых выкладок получаем

$$\mathbf{F}^0 = -\nabla\Phi, \quad (4.4)$$

где Φ — «обобщенный» потенциал:

$$\Phi = \varphi - \rho A_\alpha. \quad (4.5)$$

Таким образом, сила, испытываемая покоящимся относительно сгустка электроном, может быть сведена к градиенту обобщенного потенциала Φ , что во многом облегчает вычисления. Теорема эта, как я узнал впоследствии, ранее меня была доказана Л. Д. Ландау.

Обозначим через \mathbf{u} скорость произвольно движущегося электрона относительно «вращающихся» координат:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \rho \mathbf{i}_\alpha, \quad (4.6)$$

где \mathbf{i}_α — единичный вектор по направлению азимута.

Сила, испытываемая этим электроном, будет, очевидно, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 + \mathbf{F}', \quad (4.7)$$

где

$$\mathbf{F}' = [\mathbf{u}\mathbf{H}]. \quad (4.8)$$

Переходя к определению потенциалов поля сгустка, предположим сначала, что весь сгусток покоится во «вращающейся» системе координат, т. е. что макроскопическая скорость его элементов равна $\bar{v}_\rho = \bar{v}_z = 0$, $\bar{v}_\alpha = \rho$.

По формуле Льенара—Вихерта единичный заряд с неизменными во вращающейся системе координатами ζ' , ρ' и α' (точка P') возбуждает в точке P с координатами ζ , ρ , θ в момент τ потенциалы

$$\varphi = \frac{1}{R - \mathbf{v}'\mathbf{R}}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{v}'\varphi, \quad (4.9)$$

где \mathbf{R} — вектор, проведенный в точку P из точки Q , в которой заряд находился в момент $\tau' = \tau - R$, а \mathbf{v}' — скорость заряда в момент $\tau' = \tau - R$. Согласно (2. 6) азимут θ_Q точки Q равен $\theta_Q = \alpha' + \tau' + \varphi_0 = \alpha' + \tau + \varphi_0 - R$.

Обозначим разницу азимутов точек P и Q через β :

$$\beta = \theta - \theta_Q = \theta - \tau - \varphi_0 - \alpha' + R, \quad (4.10)$$

или

$$\beta = \alpha - \alpha' + R,$$

где $\alpha = \theta - \tau - \varphi_0$ согласно (2. 6) есть азимут точки P во «вращающейся» системе. Очевидно, что квадрат расстояния R точек Q и P равен

$$\begin{aligned} R^2 &= (\zeta - \zeta')^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \beta = \\ &= (\zeta - \zeta')^2 + (\rho - \rho')^2 + 2\rho\rho' (1 - \cos \beta). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Далее, так как, по предположению, скорость \mathbf{v}' точки Q перпендикулярна радиус-вектору \mathbf{R} (Q) этой точки, лежит в горизонтальной плоскости и численно равна ρ' , то из рис. 1 явствует, что

$$\mathbf{v}'\mathbf{R} = \mathbf{v}'\mathbf{R}(P) = v'\rho \sin \beta = \rho'\rho \sin \beta. \quad (4.12)$$

Наконец, для определения вектор-потенциала \mathbf{A} в точке P нужно знать слагающие скорости \mathbf{v}' по направлениям цилиндрических координат в точке P . Из этого же рис. 1 находим, что они равны

$$v'_\alpha = \rho' \cos \beta, \quad v'_\rho = \rho' \sin \beta, \quad v'_z = 0. \quad (4.13)$$

Суммируя результаты, получаем

$$\varphi = \frac{1}{S}, \quad A_\alpha = \frac{\rho' \cos \beta}{S}, \quad A_\rho = \frac{\rho' \sin \beta}{S}, \quad A_z = 0, \quad (4.14)$$

где введено обозначение

$$S = R - \mathbf{v}'\mathbf{R} = R - \rho\rho' \sin \beta. \quad (4.15)$$

Наконец, обобщенный потенциал Φ согласно (4.5) равен

$$\Phi_0 = \frac{1 - \rho\rho' \cos \beta}{S}. \quad (4.16)$$

Эти формулы определяют поле единичного заряда, расположенного в точке P' (ρ' , α' , ζ'). Полное же поле ступки определится

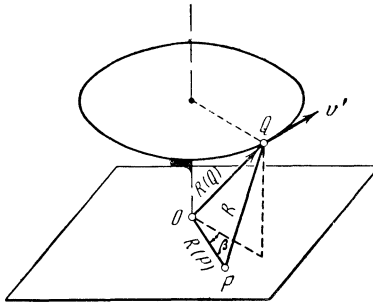


Рис. 1

интегрированием полученных формул по всем зарядам ступки, например:

$$\Phi = \int \frac{\nu' dV' (1 - \rho\rho' \cos \beta)}{S}, \quad (4.17)$$

где ν' — плотность зарядов в элементе объема dV' .

Как изменятся приведенные формулы, если мы откажемся от упрощающего предположения, что все заряды неподвижны относительно «вращающихся» координат? Наличие стационарных токов в ступке не изменяет распределения зарядов в нем; поэтому выражение для скалярного потенциала φ не изменится. Векторный же потенциал \mathbf{A} получится согласно (4.9) умножением φ на истинную макроскопическую скорость зарядов, отличающуюся от (4.13). Воспользовавшись обозначением (4.6), можно сказать, что наличие токов в ступке изменяет выражение (4.14) для \mathbf{A} на величину⁵

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{u}'\varphi = \frac{\mathbf{u}'}{S}, \quad (4.18)$$

⁵ Если написать выражение (4.9) для \mathbf{A} в развернутой форме

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}'}{R - \mathbf{v}'\mathbf{R}},$$

то может показаться, что при наличии токов в ступке нужно изменить соответствующим образом значение скорости не только в числителе этой формулы, как это мы сделали в (4.18), но и в знаменателе. Однако посту-

где u' — скорость заряда относительно вращающихся координат в эффективный момент τ' .

Если слагающие этой скорости по направлениям цилиндрических координат в точке Q равны $u'_{\rho'}$, $u'_{\alpha'}$, $u'_{\zeta'}$, то слагающие той же скорости по направлениям цилиндрических координат в точке P будут равны (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} u'_{\rho} &= u'_{\rho'} \cos \beta + u'_{\alpha'} \sin \beta, \\ u'_{\alpha} &= -u'_{\rho'} \sin \beta + u'_{\alpha'} \cos \beta, \quad u'_{\zeta} = u'_{\zeta'}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

В частности, при сделанных в § 3 предположениях о плотности токов в сгустке (уравнения (3.6), (3.7) и (3.14)) получаем

$$u'_{\rho} = \frac{\rho'(\rho_0 - \rho')}{\rho_0} \sin \beta, \quad u'_{\alpha} = \frac{\rho'(\rho_0 - \rho')}{\rho_0} \cos \beta, \quad u'_{\zeta} = 0. \quad (4.20)$$

Наконец, согласно (4.5), (4.18) и (4.20) добавок к обобщенному потенциалу Φ , обусловленный наличием токов в сгустке, равен

$$\Delta\Phi = -\rho\Delta A_{\alpha} = -\frac{\rho\rho'(\rho_0 - \rho') \cos \beta}{\rho_0 S}. \quad (4.21)$$

Чтобы от потенциалов перейти к силам, нужно продифференцировать потенциалы по координатам «точки наблюдения» P , т. е. по ρ , α и ζ . Для этого прежде всего определим производные по координатам от R и от β .

Дифференцируя (4.10) и (4.11), например, по ρ , получаем

$$\frac{\partial\beta}{\partial\rho} = \frac{\partial R}{\partial\rho}, \quad R \frac{\partial R}{\partial\rho} = \rho - \rho' \cos \beta + \rho\rho' \sin \beta \frac{\partial\beta}{\partial\rho},$$

откуда

$$\frac{\partial R}{\partial\rho} = \frac{\partial\beta}{\partial\rho} = \frac{\rho - \rho' \cos \beta}{R - \rho\rho' \sin \beta} = \frac{\rho - \rho' \cos \beta}{S}.$$

пять так хотя и можно, но отнюдь не обязательно и даже не желательно, ибо хотя конечный результат от этого не изменится, но вычисления усложняются. Ведь и при вычислении φ можно не учитывать постоянства плотности и следить за отдельным элементом заряда, подставляя в формулу

$$\varphi = \frac{1}{R - \mathbf{v}'\mathbf{R}}$$

полную макроскопическую скорость этого элемента. Результат будет такой же, как и при нашем способе вычисления, ибо φ не зависит от того, остались ли в данном элементе dV' прежние электроны в прежнем числе или же они сменились равным числом электронов, пришедших из смежных областей пространства.

В правильности нашего уравнения (4.18) можно убедиться также прямой подстановкой выражения $A + \Delta A$ в дифференциальные уравнения запаздывающих потенциалов.

Аналогичным образом получаем

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} - 1 = \frac{\rho \rho' \sin \beta}{S} \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial \zeta} = \frac{\partial \beta}{\partial \zeta} = \frac{\zeta - \zeta'}{S}. \quad (4. 22)$$

Приведем еще значения для производных от S :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \rho} &= \frac{(\rho - \rho' \cos \beta)(1 - \rho \rho' \cos \beta)}{S} - \rho' \sin \beta, \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= \frac{\rho \rho' \sin \beta (1 - \rho \rho' \cos \beta)}{S} - \rho \rho' \cos \beta, \\ \frac{\partial S}{\partial \zeta} &= \frac{(\zeta - \zeta')(1 - \rho \rho' \cos \beta)}{S}. \end{aligned} \quad (4. 23)$$

Силу, действующую на находящийся в точке ρ , α , ζ электрон со стороны единичного заряда, находящегося в точке ρ' , α' , ζ' , мы будем обозначать через \mathbf{f} ; полная действующая на данный электрон сила \mathbf{F} получается интегрированием силы \mathbf{f} по координатам ρ' , α' , ζ' (сравни переход от (4. 16) к (4. 17)). Скорость \mathbf{u} относительно вращающихся координат того электрона, на который действует сила, мы будем считать произвольной; скоростью же \mathbf{u}' зарядов сгустка, которыми обусловлена сила \mathbf{f} или \mathbf{F} , мы будем считать определенной формулами (4. 20).

В соответствии с формулами (4. 4), (4. 7), (4. 8), (4. 16) и (4. 21) мы представим силу \mathbf{f} в виде трех слагаемых:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{00} + \mathbf{f}' + \mathbf{f}'', \quad \mathbf{f}^{00} = -\nabla \Phi_0, \quad \mathbf{f}' = -\nabla (\Delta \Phi), \quad \mathbf{f}'' = [\mathbf{u} \mathbf{H}]. \quad (4. 24)$$

Путем простого дифференцирования получаем для этих слагаемых следующие выражения:

$$\begin{aligned} f_p^{00} &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} = \frac{1}{S^3} [\rho' R^2 \cos \beta - \rho' (1 + \rho^2) R \sin \beta + \\ &\quad + (1 + \rho^2 \rho'^2) (\rho - \rho' \cos \beta) + \rho \rho' (\rho' - 2\rho \cos \beta + \rho' \cos^2 \beta)], \\ f_\alpha^{00} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} = \frac{\rho'}{S^3} [(1 - \rho \rho' \cos \beta - R^2) \sin \beta + (\rho \rho' - \cos \beta) R], \\ f_\zeta^{00} &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta} = \frac{(\zeta - \zeta')}{S^3} [1 - 2\rho \rho' \cos \beta + \rho^2 \rho'^2 - \rho \rho' R \sin \beta]. \end{aligned} \quad (4. 25)$$

Далее,

$$\begin{aligned} f_p' &= -\frac{\partial}{\partial \rho} (\Delta \Phi) = \frac{\rho' (\rho_0 - \rho')}{\rho_0 S^3} [R^2 \cos \beta - \rho^2 R \sin \beta + \\ &\quad + \rho (\rho \rho' - \cos \beta) (\rho - \rho' \cos \beta)], \\ f_\alpha' &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Delta \Phi) = -\frac{\rho' (\rho_0 - \rho')}{\rho_0 S^3} [R^2 \sin \beta - \rho \rho' R + \rho \rho' \sin \beta \cos \beta], \\ f_\zeta' &= -\frac{\partial}{\partial \zeta} (\Delta \Phi) = -\frac{\rho \rho' (\zeta - \zeta') (\rho_0 - \rho')}{S^3 \rho_0} [R \sin \beta + \cos \beta - \rho \rho']. \end{aligned} \quad (4. 26)$$

Наконец,

$$f'_\rho = [\mathbf{uH}]_\rho = u_\alpha H_z - u_z \frac{\partial A_\rho}{\partial \zeta},$$

$$j'_\alpha = [\mathbf{uH}]_\alpha = -u_\rho H_z - u_z \frac{\partial A_\alpha}{\partial \zeta}, \quad (4.27)$$

$$f'_\zeta = u_\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial \zeta} + u_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial \zeta};$$

$$H_z = -\frac{\rho'}{S^3} \left[1 + \frac{(\rho_0 - \rho')}{\rho_0} \right] [\rho R \sin \beta + \rho(1 + \rho'^2) \cos \beta - \rho'(1 + \rho^2)]. \quad (4.28)$$

Выражения для $\partial A_\rho / \partial \zeta$ и $\partial A_\alpha / \partial \zeta$ не выписываем, так как в плоскости симметрии сгустка ($\xi=0$) соответствующие им члены в результирующей силе \mathbf{F} (получаемой суммированием \mathbf{f} по всем зарядам сгустка) равны нулю.

§ 5. Вычисление эффективного расстояния двух зарядов

Для вычисления эффективного расстояния двух точек в функции их координат нужно решить трансцендентное уравнение (4. 11), выразив в нем β через $\alpha - \alpha'$ и R с помощью (4. 10). Вводя обозначение δ для расстояния точек в меридиональной плоскости

$$\delta^2 = (\rho - \rho')^2 + (\zeta - \zeta')^2, \quad (5. 1)$$

можно записать это уравнение так:

$$R^2 = \delta^2 + 2\rho\rho' [1 - \cos(\alpha - \alpha' + R)]. \quad (5. 2)$$

Нам будет удобнее сначала определить β , выразив в (4. 11) или (5. 2) R через β :

$$[\beta - (\alpha - \alpha')]^2 = \delta^2 + 2\rho\rho' (1 - \cos \beta), \quad (5. 3)$$

а затем уже по β определить R с помощью формулы (4. 10):

$$\beta = \alpha - \alpha' + R. \quad (5. 4)$$

Мы будем предполагать, что размеры сгустка, а стало быть, и угол β настолько малы, что $\cos \beta$ и $\sin \beta$ можно разлагать в ряд, ограничиваясь членами не старше β^4 :

$$\sin \beta = \beta - \frac{\beta^3}{6}, \quad \cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{24}. \quad (5. 5)$$

Посмотрим, какие ограничения налагает это допущение на размеры сгустка. Так как сгусток весьма вытянут по азимуту (см. § 3), то ограничения эти могут относиться только к угловым размерам сгустка по азимуту. Поэтому можно положить $\delta=0$.

Полагая $\rho = \rho' = \rho_0 = 0,99$, что соответствует энергии электрона $E \sim 3,5 \text{ Мэв}$, и решая трансцендентное уравнение (5. 3) относительно β для двух значений $\alpha - \alpha'$, получаем следующую таблицу, в которой сопоставлены точные значения синуса и косинуса для этих значений β и их приближенные значения по формуле (5. 5) (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

	$\alpha - \alpha' = 0,101, \beta = 1$		$\alpha - \alpha' = 0,150, \beta = 1,5$	
	точное значение	по (5.5)	точное значение	по (5.5)
$\sin \beta$	0,8415	0,8333	0,9975	0,9375
$\cos \beta$	0,5402	0,5417	0,0706	0,0859

Таким образом, при $\alpha - \alpha' = 0,1 \sim 6^\circ$ формулы (5. 5) точны в пределах 1% и еще при $\alpha - \alpha' = 0,15 \sim 9^\circ$ дают сносную точность. Впрочем, в дальнейшем при относительно больших азимутальных расстояниях $\alpha - \alpha'$ мы будем пользоваться формулами, в которых под знаком \sin и \cos будет входить не β , а $\beta/2$; это позволяет получить точность в 1% при расстояниях $\alpha - \alpha' = 1/3 \sim 20^\circ$, соответствующих $\beta = 2$.

Заметим, что формулы (5. 2) и (5. 3) для R и β отнюдь не симметричны относительно углов α и α' . Это и понятно, ибо α — азимут электрона, на который действует электрон азимута α' . Если $\alpha > \alpha'$, т. е. задний (по направлению вращения) электрон действует на передний, то эффективное расстояние R этих электронов *больше* их мгновенного расстояния, ибо эффективное положение электрона смещено назад по отношению к его мгновенному положению; если же $\alpha < \alpha'$, т. е. передний электрон действует на задний, то R , наоборот, *меньше* мгновенного расстояния электронов. Поэтому условия применимости разложений (5. 5) определяются рассмотренным выше случаем $\alpha > \alpha'$.

Внеся (5. 5) в (5. 3) и перегруппировав члены, получаем для β следующее уравнение четвертого порядка:

$$\frac{\rho\rho'\beta^4}{12} + (1 - \rho\rho')\beta^2 - 2\beta(\alpha - \alpha') + (\alpha - \alpha')^2 - \delta^2 = 0. \quad (5. 6)$$

Существенная особенность этого уравнения состоит в том, что коэффициент квадратичного члена в нем очень мал.

Предположим сначала, что расстояние взаимодействующих зарядов очень мало (критерий будет указан ниже). В этом случае

⁶ В дальнейшем мы будем рассматривать релятивистский случай, т. е. будем считать, что ρ близко к единице.

можно пренебречь в (5. 6) членом, пропорциональным β^4 , и мы получаем из квадратичного уравнения первое приближение:

$$\beta_1 = \frac{(x - \alpha') + \sqrt{\rho\rho'(x - \alpha')^2 + (1 - \rho\rho')\delta^2}}{1 - \rho\rho'}. \quad (5. 7)$$

Знак перед корнем должен быть «плюсом», ибо только в этом случае мы получаем из (5. 4) положительное значение для существенно положительной величины R :

$$R_1 = \frac{\rho\rho'(x - \alpha') + \sqrt{\rho\rho'(x - \alpha')^2 + (1 - \rho\rho')\delta^2}}{1 - \rho\rho'}. \quad (5. 8)$$

Заменив в первом члене уравнения (5. 6) β^4 на β_1^4 , нетрудно найти второе приближение для β :

$$\beta_2 = \beta_1 \left(1 - \frac{\rho\rho'\beta_1^3}{24\sqrt{\rho\rho'(x - \alpha')^2 + (1 - \rho\rho')\delta^2}} \right) \quad (5. 9)$$

и для R :

$$R_2 = R_1 + (\beta_2 - \beta_1). \quad (5. 10)$$

Очевидно, что условием применимости формул (5. 7)—(5. 9) является малое отличие β_2 от β_1 , т. е. требование

$$\rho\rho'|\beta_1^3| \ll 24\sqrt{\rho\rho'(x - \alpha')^2 + (1 - \rho\rho')\delta^2}. \quad (5. 11)$$

Расстояния, удовлетворяющие этому требованию, мы будем называть малыми.

Для точек, лежащих в одной меридиональной плоскости ($\alpha = \alpha'$), условие (5. 11) принимает вид (при $\rho \sim 1$)

$$\delta = \sqrt{(\rho - \rho')^2 + (\zeta - \zeta')^2} \ll \sqrt{24}(1 - \rho\rho').$$

Если к тому же $\zeta = \zeta'$, то мы получаем

$$|\rho - \rho'| \ll \sqrt{24}(1 - \rho\rho'),$$

или, если положить $\rho = 1 - \varepsilon$, $\rho' = 1 - \varepsilon'$, то

$$|\varepsilon - \varepsilon'| \ll \sqrt{24}(\varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon\varepsilon').$$

Так как очевидно, что $0 < \varepsilon \ll 1$ и $0 < \varepsilon' \ll 1$, то это условие всегда выполняется. Если вертикальный поперечник сгустка того же порядка, что и его ширина по радиусу, то мы приходим к выводу, что *поперечные размеры сгустка всегда малы* (в смысле условия (5. 11)).

Рассмотрим теперь два заряда, расположенных на одной окружности, и положим в (5. 7) $\rho = \rho' = \rho_0$ и $\zeta = \zeta'$. Рассмотрим сначала действие переднего заряда на задний, т. е. случай $\alpha - \alpha' < 0$. В этом случае

$$\beta_1 = -\frac{(1 - \rho_0)|\alpha - \alpha'|}{1 - \rho_0^2} \sim -\frac{|\alpha - \alpha'|}{2} \quad (5. 7a)$$

и условие (5. 11) принимает вид $(\alpha - \alpha')^2 \ll 24 \times 8 = 192$, т. е. всегда выполняется. Таким образом, при рассмотрении действия переднего заряда на задний расстояние их всегда мало (в смысле условия (5. 11)).

В случае действия заднего заряда на передний ($\alpha - \alpha' > 0$)

$$\beta_1 \sim \frac{(1 + \rho_0)(\alpha - \alpha')}{1 - \rho_0^2} = \frac{(\alpha - \alpha')}{1 - \rho_0}$$

и условие (5. 11) принимает вид

$$\alpha - \alpha' \ll \sqrt{24}(1 - \rho_0)^{3/2}. \quad (5. 12)$$

Условие это очень жесткое; так, например, при $E=3,5 Mэв$ оно означает, что $\alpha - \alpha' \ll 1/200$. Расстояния, не удовлетворяющие условиям (5. 11) или (5. 12), мы будем называть «большими»; они встречаются только при рассмотрении действия заднего заряда на передний.

Для малых расстояний величина S (формула (4. 15)) в первом и втором приближениях оказывается равной

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\rho\rho'(\alpha - \alpha')^2 + (1 - \rho\rho')\delta^2}, \\ S_2 &= S_1 \left[1 - \frac{\rho\rho'\beta_1^3}{24S_1^3}(\alpha - \alpha' - 3S_1) \right]. \end{aligned} \quad (5. 13)$$

Переходим к случаю больших расстояний ($\alpha - \alpha' > 0$), ограничиваясь рассмотрением зарядов, лежащих на одной окружности ($\rho = \rho' = \rho_0$ и $\zeta = \zeta'$). В этом случае $\delta = 0$ и (5. 3) принимает вид

$$R^2 = [\beta - (\alpha - \alpha')]^2 = 2\rho_0^2(1 - \cos \beta) = 4\rho_0^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}.$$

Так как согласно (5. 4) при $\alpha - \alpha' > 0$ величина β положительна и $\beta > R$, то, извлекая корень, получаем

$$R = \beta - (\alpha - \alpha') = 2\rho_0 \sin \frac{\beta}{2} = \rho_0 \left(\beta - \frac{\beta^3}{24} \right), \quad (5. 14)$$

или

$$\frac{\rho_0 \beta^3}{24} + (1 - \rho_0)\beta - (\alpha - \alpha') = 0. \quad (5. 15)$$

Отметим, что при выводе этой формулы мы разлагали в ряд не $\sin \beta$, а $\sin \beta/2$, что, как указывалось в начале этого параграфа, законно вплоть до $\alpha - \alpha' \ll 1/3 \sim 20^\circ$. При выводе формулы (5. 15) предположение, что расстояние велико, еще не было использовано, так что эта формула годна и для малых расстояний; действительно, пренебрегая в ней кубичным членом, мы получаем из нее

$$\beta_1 = (\alpha - \alpha') / (1 - \rho_0),$$

что совпадает с (5. 7) (для точек, лежащих на одной окружности).

При больших расстояниях можно, наоборот, пренебречь в (5. 15) линейным членом по сравнению с кубичным, так что мы получаем в первом приближении

$$\beta_1 = 2 \left[\frac{3(z - \alpha')}{\rho_0} \right]^{1/3} \quad (5. 16)$$

и во втором приближении

$$\beta_2 = \beta_1 \left(1 - \frac{8(1 - \rho_0)}{\rho_0 \beta_1^2} \right). \quad (5. 17)$$

Условие применимости этого приближения имеет вид

$$\beta_1^2 \gg 8(1 - \rho_0),$$

или

$$\alpha - \alpha' \gg \frac{1}{3}(1 - \rho_0^2)^{3/2}. \quad (5. 18)$$

Сравнивая это условие для «больших» расстояний с условием (5. 12) малости расстояний, видим, что они перекрываются. В дальнейшем мы будем считать критерием малости азимутальных расстояний $\alpha - \alpha'$ величину

$$\sigma_0 = (1 - \rho_0^2)^{3/2}. \quad (5. 19)$$

«Малые» расстояния: $\alpha - \alpha' \leq \sigma_0$.

«Большие» расстояния: $\alpha - \alpha' \geq \sigma_0$.

При таком выборе критерия σ_0 относительная ошибка в β при пользовании формулами (5. 7), (5. 9) и (5. 16), (5. 17) оказывается минимальной (точнее было бы взять $\sigma_0 = 3^{1/6} (1 - \rho_0^2)^{3/2}$).

Из (4. 15) и (5. 14) получаем без всяких пренебрежений

$$S = R - \rho_0^2 \sin \beta = 2\rho_0 \sin \frac{\beta}{2} - \rho_0^2 \sin \beta = 2\rho_0 \sin \frac{\beta}{2} \left(1 - \rho_0 \cos \frac{\beta}{2} \right),$$

или, разлагая по степеням $\beta/2$ (а не по степеням β), получаем в первом приближении

$$S_1 = \rho_0 (\alpha - \alpha') \quad (5. 20)$$

и во втором приближении (отбрасывая некоторые несущественные члены)

$$S_2 = S_1 \left(1 - \frac{2(1 - \rho_0^2)}{[3(\alpha - \alpha')]^{2/3}} \right). \quad (5. 21)$$

§ 6. Приближенные выражения для электродинамических сил

Рассмотрим сначала два заряда, находящихся на «малом» расстоянии один от другого. В этом случае можно в первом приближении заменить в числителе формулы (4. 16) $\cos \beta$ на 1, под-

ставить в нее S_1 из (5. 13) и всюду, за исключением δ , положить $\rho = \rho' = \rho_0$:

$$\Phi_0 = \frac{1 - \rho_0^2}{\sqrt{\rho_0^2 (\alpha - \alpha')^2 + (1 - \rho_0^2) \delta^2}} = \frac{\sqrt{1 - \rho_0^2}}{\sqrt{\frac{\rho_0^2 (\alpha - \alpha')^2}{1 - \rho_0^2} + (\rho - \rho')^2 + (\zeta - \zeta')^2}}. \quad (6. 1)$$

Это выражение для обобщенного потенциала Φ_0 имеет простой физический смысл: знаменатель формулы (6. 1) представляет собой расстояние $R_{\text{Л}}$ между точками $P(\rho, \alpha, \zeta)$ и $P'(\rho', \alpha', \zeta')$, измеренное в той инерциальной системе отсчета, в которой в данный момент покоится фазовая точка (а стало быть, в первом приближении и весь сгусток). Эту систему мы будем называть «лоренцовой системой покоя». Действительно, если ось направлена в этой системе по направлению ее скорости ρ_0 относительно системы неподвижной, т. е. по касательной к окружности, то ввиду лоренцова сокращения длины разность y - x координат точек P и P' в этой системе будет при $\alpha \ll 1$

$$y - y' = \frac{\rho_0 \alpha - \rho_0 \alpha'}{\sqrt{1 - \rho_0^2}}. \quad (6. 2)$$

С другой стороны, координаты, перпендикулярные скорости системы, останутся неизменными: $x - x' = \rho - \rho'$, $z - z' = \zeta - \zeta'$. Поэтому действительно

$$R_{\text{Л}} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = \sqrt{(\rho - \rho')^2 + \frac{\rho_0^2 (\alpha - \alpha')^2}{1 - \rho_0^2} + (\zeta - \zeta')^2}, \quad (6. 3)$$

$$\Phi_0 = \frac{\sqrt{1 - \rho_0^2}}{R_{\text{Л}}}. \quad (6. 4)$$

Таким образом, обобщенный потенциал взаимодействия «ближних» зарядов отличается от их электростатического потенциала взаимодействия в лоренцовой системе покоя только множителем $\sqrt{1 - \rho_0^2}$.

Дифференцируя Φ_0 (формула (6. 1)) по координатам ρ , α и ζ , получаем слагающие сил нулевого приближения:

$$f_{\alpha}^{\text{Кул}} = -\frac{\rho_0 (\alpha - \alpha')}{\sqrt{1 - \rho_0^2} R_{\text{Л}}^3}, \quad f_{\rho}^{\text{Кул}} = -\frac{\sqrt{1 - \rho_0^2} (\rho - \rho')}{R_{\text{Л}}^3}, \\ f_{\zeta}^{\text{Кул}} = -\frac{\sqrt{1 - \rho_0^2} (\zeta - \zeta')}{R_{\text{Л}}^3}. \quad (6. 5)$$

Силы эти могут быть получены путем преобразования к лабораторной системе кулоновых сил взаимодействия зарядов, вычис-

ленных в системе покоя, поэтому мы будем называть силы (6. 5) *кулоновыми*.

Перейдем от кулоновых сил взаимодействия $F^{кул}$ двух электронов к кулоновым силам $F^{кул}$, возбуждаемым всеми зарядами сгустка. При этом удобно воспользоваться лоренцевой системой покоя. Если в лабораторной системе покоя плотность зарядов внутри эллипсоидального сгустка постоянна и равна ν , а полуоси эллипсоида равны a и b , то в лоренцевой системе покоя

$$\nu_{Л} = \nu \sqrt{1 - \rho_0^2}, \quad a_{Л} = \frac{a}{\sqrt{1 - \rho_0^2}}, \quad b_{Л} = b. \quad (6. 6)$$

Напряженность электрического поля внутри этого эллипсоида при $a_{Л} \gg b_{Л}$ (это условие слабее уравнения (3. 15), согласно которому $a \gg b$) равна

$$E_{Л, x} = 2\pi\nu_{Л}x, \quad E_{Л, y} = 4\pi\nu_{Л} \left(\frac{b_{Л}}{a_{Л}}\right)^2 \left[\ln\left(\frac{2a_{Л}}{b_{Л}}\right) - 1 \right] y, \quad E_{Л, z} = 2\pi\nu_{Л}z.$$

Чтобы получить $F^{кул}$, нужно преобразованием $E_{Л}$ найти в лабораторной системе координат E , H и $F = E + [vH]$. В результате получаем

$$\begin{aligned} F_{\rho}^{кул} &= 2\pi\nu(1 - \rho_0^2)(\rho - \rho_0), & F_{\xi}^{кул} &= 2\pi\nu(1 - \rho_0^2)\zeta, \\ F_{\alpha}^{кул} &= 4\pi\nu(1 - \rho_0^2)\frac{b^2}{a^2} \left[\ln\left(\frac{2a}{b\sqrt{1 - \rho_0^2}}\right) - 1 \right] \rho_0\alpha. \end{aligned} \quad (6. 7)$$

Перпендикулярные оси сгустка слагающие $F_{\rho}^{кул}$ и $F_{\xi}^{кул}$ расpiresают его вбок. Дальнейшие уточнения теории, которым посвящены последующие параграфы, этих боковых расpiresающих сил не изменяют. Поэтому уже сейчас целесообразно определить ту предельную плотность электронов ν_{max} в сгустке, при которой боковые кулоновы силы как раз уравновешиваются фокусирующими силами внешнего поля. Так как при невозмущенном движении каждый электрон совершает в радиальном и вертикальном направлениях гармонические колебания с частотой $\omega_1 = \sqrt{1 - n}$ и $\omega_3 = \sqrt{n}$ (см. § 3), то соответствующие слагающие «внешних» сил можно положить равными:

$$f_{\rho}^{внешн} = -\frac{m_0\omega_1^2(\rho - \rho_0)}{\sqrt{1 - \rho_0^2}} \quad \text{и} \quad f_{\xi}^{внешн} = -\frac{m_0\omega_3^2\zeta}{\sqrt{1 - \rho_0^2}}, \quad (6. 8)$$

где m_0 — масса покоящегося электрона, а $m_0/\sqrt{1 - \rho_0^2}$ — его полная масса. Однако в формулах (6. 8) слагающие $f^{внешн}$ выражены в единицах $\text{грамм} \cdot \lambda \omega_r^2 = \text{грамм} \cdot c^2/\lambda$ (уравнение (2. 1)). Чтобы выразить силы в единицах e^2/λ^2 , помножим правые части уравнений (6. 8) на $\lambda c^2/e^2$ и, внося в них значения ω_1 и ω_3 , получаем

$$f_{\rho}^{внешн} = -\left(\frac{\lambda}{r_0}\right) \frac{1 - n}{\sqrt{1 - \rho_0^2}} (\rho - \rho_0), \quad f_{\xi}^{внешн} = -\left(\frac{\lambda}{r_0}\right) \frac{n}{\sqrt{1 - \rho_0^2}} \zeta, \quad (6. 9)$$

где r_3 — классический радиус электрона:

$$\frac{e^2}{m_0 c^2} = r_3 = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (6.10)$$

Полагая $n=1/2$ и приравнивая силы (6.9) к силам (6.7), находим предельное значение v_{\max} плотности электронов в сгустке:

$$v_{\max} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\lambda}{r_3} \right) \frac{1}{(1 - \beta_0^2)^{3/2}}. \quad (6.11)$$

Таким образом, v_{\max} не зависит от размеров сгустка. Переходя от нашей единицы длины λ к обычным единицам длины и выражая $\sqrt{1 - \beta_0^2}$ через энергию электронов E , получаем

$$v_{\max} = \frac{1}{4\pi \lambda^2 r_3} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^{3/2}. \quad (6.12)$$

Полагая, например, $E=3,5 \text{ Мэв}$ и $\lambda=10^2 \text{ см}$, $\lambda \sim 16 \text{ см}$, получаем

$$v_{\max} = 2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}. \quad (6.13)$$

До сих пор мы рассматривали силы в первом приближении. Более точные значения сил можно получить, раскладывая формулы (4.25)–(4.28) в ряд по степеням β и R и внося в них выражения (5.9) и (5.10) этих величин.

Рассмотрим сначала силы f^{00} формулы (4.25). Главные члены этих формул вновь приводят к нескольким уточненным по сравнению с (6.5) выражениям для кулоновых сил:

$$f_{\rho}^{\text{кул}} = \frac{\sqrt{1 - \rho\rho'}(\rho - \rho')}{R'_{\text{II}}}, \quad f_{\alpha}^{\text{кул}} = \frac{\rho'(\alpha - \alpha')}{\sqrt{1 - \rho\rho'} R'_{\text{II}}}, \quad (6.14)$$

$$f_{\zeta}^{\text{кул}} = \frac{(\zeta - \zeta')\sqrt{1 - \rho\rho'}}{R'_{\text{II}}},$$

где

$$R'_{\text{II}} = \sqrt{\frac{\rho\rho'(\alpha - \alpha')^2}{1 - \rho\rho'} + \delta^2}. \quad (6.15)$$

Эти кулоновы силы удовлетворяют принципу равенства действия в противодействия (он несколько нарушается множителем ρ' в выражении для $f_{\alpha}^{\text{кул}}$), хотя и не направлены по линии, соединяющей взаимодействующие заряды. Следующее приближение приводит к добавлению к $f^{\text{кул}}$ некоторых поправок. Из них наиболь-

⁷ Легко показать, что формулы (6.11) и (6.12) остаются справедливыми при любом n , лежащем в пределах $0 < n < 1$, но что поперечное сечение сгустка предельной плотности в общем случае является не кругом, а эллипсом, полуоси которого b_1 (вдоль ρ) и b_2 (вдоль ζ) удовлетворяют соотношению

$$b_1/b_2 = n/(1 - n). \quad (6a.11)$$

шее значение имеют силы, которые мы условно будем называть «неконсервативными», чтобы отметить, что они не изменяют знака при перестановке координат ρ , α , ζ и ρ' , α' , ζ' , т. е. они действуют на оба взаимодействующих заряда в одинаковом направлении.

Пусть, например, оба электрона находятся в одной и той же меридиональной плоскости, т. е. пусть $\alpha = \alpha'$. В этом случае азимутальная слагающая кулоновых сил $f_{\alpha}^{k_{12}}$ обращается в нуль, но члены второго приближения в выражении (4. 25) для f_{α}^0 дают

$$f_{\alpha}^{\text{рад}} = -\frac{2}{3} \frac{\rho'}{(1 - \rho\rho')^2}. \quad (6. 16)$$

Это выражение, как легко видеть, почти совпадает с обычным выражением радиационной силы трения, которое для электрона, движущегося по окружности, имеет вид

$$f^{\text{рад}} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\ddot{v}}{(1 - v^2/c^2)^2}. \quad (6. 17)$$

В наших единицах измерения реакция излучения (6. 17), действующая на изолированный электрон, равна

$$f_{\alpha} = -\frac{e^2}{3} \frac{\rho}{(1 - \rho^2)^2}. \quad (6. 18)$$

Благодаря наличию вблизи электрона с координатами ρ и ζ близкого к нему электрона с координатами ρ' и ζ' к силе (6. 18) добавляется сила (6. 16), что практически удваивает реакцию излучения. То же относится и к электрону ρ' , ζ' . Таким образом, испытываемая парой близких электронов суммарная реакция излучения в два раза больше суммы реакций, испытываемой двумя изолированными электронами. Этот хорошо известный результат обычно получается путем рассмотрения потока энергии в волновой зоне излучающей системы электронов.

Рассмотрим теперь два «близких» электрона, находящихся на одной и той же окружности ($\rho = \rho'$, $\zeta = \zeta'$). Члены второго приближения в выражении (4. 25) для f_{α}^{00} дают в этом случае следующий добавок к кулоновой силе $f_{\alpha}^{k_{12}}$:

$$\begin{aligned} \Delta f_{\alpha}^{00} &= -\frac{(1 - 2\rho + 9\rho^2)}{24\rho^2(1 - \rho)^2}, \quad \text{если } \alpha > \alpha', \\ \Delta f_{\alpha}^{00} &= +\frac{(1 + 2\rho + 9\rho^2)}{24\rho^2(1 + \rho)^2} \sim \frac{1}{8}, \quad \text{если } \alpha < \alpha'. \end{aligned} \quad (6. 19)$$

Эти добавочные силы направлены противоположно кулоновым силам $f_{\alpha}^{k_{12}}$, т. е. уменьшают кулоново отталкивание электронов вдоль азимута. Существеннее же всего то обстоятельство, что неконсервативная часть этих сил (т. е. полусумма силы Δf_{α}^{00} , действующей со стороны электрона α на электрон α' , и силы $\Delta f_{\alpha'}^{00}$,

действующей со стороны электрона α' на электрон α) точно равна радиационной силе (6. 16):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1 + 2\rho + 9\rho^2}{24\rho^2(1 + \rho)^2} - \frac{1 - 2\rho + 9\rho^2}{24\rho^2(1 - \rho)^2} \right) = -\frac{2}{3} \frac{\rho}{(1 - \rho^2)^2} = f_{\alpha}^{\text{рад}}. \quad (6. 20)$$

Можно, наконец, показать, что неконсервативная часть азимутальных сил взаимодействия двух «близких» электронов выражается формулой (6. 16) при любом расположении обоих электронов, удовлетворяющих критерию «близости» (§ 5).

Так как все «радиационные» силы взаимодействия электронов (6. 16) одинаково направлены, в отличие от «кулоновых» сил (6. 14), то в сгустках достаточно большого сечения и для достаточно большой энергии результирующая «поправочных» радиационных сил больше результирующей кулоновых сил. Действительно, если радиус перпендикулярного азимуту сечения сгустка равен b' , то максимальное значение результирующих кулоновых сил, т. е. значение их на периферии сгустка, равно согласно (6. 7)

$$F_{\text{max}}^{\text{кул}} = 2\pi\nu(1 - \rho_0^2)b'.$$

С другой стороны, нижний предел для результирующей радиационных сил взаимодействия можно получить, учитывая воздействия на данный электрон только тех близких к нему электронов, которые смещены от данного электрона по азимуту не больше чем на $\sigma_0 = (1 - \rho_0^2)^{3/2}$ (см. уравнение (5. 19)). Число таких электронов равно $\nu\pi b'^2 2\sigma_0 = 2\pi\nu b'^2(1 - \rho_0^2)^{3/2}$, так что на основании (6. 16) нижний предел результирующей радиационных сил равен

$$F_{\alpha}^{\text{рад}} = -\frac{4}{3} \frac{\pi\nu b'^2}{\sqrt{1 - \rho_0^2}}. \quad (6. 21)$$

Таким образом,

$$\frac{F^{\text{кул}}}{F^{\text{рад}}} < \frac{3}{2} \frac{(1 - \rho_0^2)^{3/2}}{b'}$$

и радиационные силы заведомо преобладают над кулоновыми, если

$$b' \geq \frac{3}{2} (1 - \rho_0^2)^{3/2}; \quad (6. 22)$$

при $E = 3,5 \text{ Мэв}$ это условие дает $b' \geq 4,4 \cdot 10^{-3}$.

Помимо направленных по азимуту радиационных сил, «неконсервативные» силы имеют и радиальную слагающую. Действительно, пропорциональные β^2 и R^2 члены выражения (4. 25) для f_{ρ}^{00} дают

$$f_{\rho}^{\text{ин}} = \frac{\rho'}{2\sqrt{1 - \rho\rho'}R'_{\text{II}}} \left[1 + \frac{(\alpha - \alpha')^2}{\rho\rho'(\alpha - \alpha')^2 + (1 - \rho\rho')\delta^2} \right], \quad (6. 23)$$

где $R_{\text{Д}}$ означает уточненное согласно формуле (6. 15) расстояние взаимодействующих электронов, измеренное в лоренцовой системе покоя. При $\alpha = \alpha'$ эта формула имеет простой физический смысл. Взаимная электромагнитная масса двух покоящихся в лоренцовой системе электронов в обычных единицах равна

$$m_{\text{вз}}^0 = \frac{e^2}{R'_{\text{Д}} c^2},$$

или при пересчете к лабораторной системе

$$m_{\text{вз}} = \frac{e^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} R'_{\text{Д}} c^2}.$$

Соответствующая этой массе сила инерции, приложенная к электронам, движущимся по круговым орбитам, равна

$$f^{\text{ин}} = - \frac{e^2 \dot{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} R'_{\text{Д}} c^2}$$

и направлена радиально. Так как в наших единицах $|\dot{v}| = \rho$, то формула (6. 23) при $\alpha = \alpha'$ означает, что к каждому из взаимодействующих электронов приложено по половине этой «взаимной» силы инерции.

Поправки второго приближения к f_{α}^{00} не существенны и неконсервативных членов не содержат.

Силы $f^{0'}$ и f' , обусловленные движением электронов внутри сгустка (уравнения (4.26) и (4.27)), малы, и выражений для них мы здесь приводить не будем.

Переходим к рассмотрению взаимодействия электронов, находящихся на «большом» расстоянии друг от друга, т. е. (см. § 5) к рассмотрению действия «заднего» электрона α' на «передний» электрон α при условии (5. 18)

$$\alpha - \alpha' \geq \sigma_0 = (1 - \rho_0^2)^{1/2}. \quad (6. 24)$$

Мы ограничимся при этом рассмотрением только азимутальной слагающей сил f_{α}^{00} , во-первых, потому, что значение этой слагающей представляет наибольший практический интерес, и, во-вторых, потому, что в сильно вытянутом по окружности сгустке направление силы взаимодействия двух удаленных по азимуту электронов мало отклоняется от касательной к окружности (при $|\alpha - \alpha'| \ll 1$)⁸. Ввиду малости поперечного сечения мы можем

⁸ Заметим, что согласно (6. 14) тангенс угла между касательной к окружности и направлением кулоновой силы взаимодействия двух близких зарядов в $1 - \rho\rho'$ раз меньше тангенса угла между касательной к окружности и линией, соединяющей центры зарядов.

в случае удаленных зарядов положить $\rho = \rho'$ и $\zeta = \zeta'$. Воспользовавшись уравнениями (4.25), (5.17) и (5.21) и сделав некоторые несущественные упрощения, получаем

$$f_{\alpha}^{00} = \frac{2}{[3\rho^2(\alpha - \alpha')]^{1/3}} \left\{ 1 + \frac{3(1 - \rho^2)}{2[3(\alpha - \alpha')]^{1/3}} + \frac{8(1 - \rho^2)^2}{[3(\alpha - \alpha')]^{2/3}} \right\}. \quad (6.25)$$

Если всюду, кроме разности $(1 - \rho^2)$, положить $\rho = 1$ и вычесть из (6.25) полученное для малых расстояний выражение (6.14) азимутальной слагающей кулоновых сил, то получим

$$f_{\alpha}^{00} - f_{\alpha}^{\text{к.у.т}} = \frac{2}{[3(\alpha - \alpha')]^{1/3}} \left[1 - \frac{3(1 - \rho^2)}{[3(\alpha - \alpha')]^{1/3}} + \frac{8(1 - \rho^2)^2}{[3(\alpha - \alpha')]^{2/3}} \right]. \quad (6.26)$$

Если $\alpha - \alpha'$ существенно больше, чем $\sigma_0 = (1 - \rho_0^2)^{1/2}$, то в (6.26) превалирует первый положительный член. Это означает, что если два электрона находятся на больших расстояниях ($\alpha - \alpha' \gg \sigma_0$), то добавляющееся к кулонову радиационное взаимодействие не тормозит, а ускоряет передний электрон⁹. Это может происходить только за счет того, что совокупность обоих электронов благодаря интерференции излучает меньше, чем они излучали бы порознь. Величина первого положительного члена формулы (6.26) согласуется с этим выводом (при условии (6.24) он меньше, чем радиационное трение (6.18), испытываемое изолированным электроном).

§ 7. Силы, испытываемые электроном со стороны всего сгустка в целом

В предыдущем параграфе мы определили силы взаимодействия двух произвольно расположенных электронов; теперь нам нужно проинтегрировать эти силы, чтобы определить воздействие всего сгустка в целом на данный электрон.

Силы радиальные и вертикальные сводятся в основном к силам кулоновым, по нашей терминологии; результирующая этих сил была определена нами в § 6 (формула (6.7)). В радиальном направлении к ним добавляются еще «взаимные» силы инерции (6.23); однако они невелики и к тому же в основном не деформируют сгусток, а сдвигают его как целое вдоль радиуса во внешнюю сторону, так что мы их не станем подробнее рассматривать.

Таким образом, наша задача сводится к определению азимутальной слагающей результирующей силы.

Из формулы (3.12) следует, что площадь меридионального сечения сгустка по азимуту α равна S :

$$S = \pi b^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2 \alpha^2}{a^2} \right) = \pi b^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{\alpha_{\text{max}}^2} \right), \quad (7.1)$$

⁹ Задний электрон всегда «близок» к переднему (см. § 5), а «радиационное» воздействие на него согласно второй из формул (6.19) всегда его ускоряет, хотя и очень незначительно,

где через α_{\max} обозначена полудлина сгустка в радианах:

$$\alpha_{\max} = a/\rho_0. \quad (7.2)$$

Введем еще обозначения (см. уравнение (5.19))

$$\eta = \frac{\alpha}{\alpha_{\max}}, \quad \eta_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_{\max}} = \frac{(1 - \rho_0^2)^{1/2}}{\alpha_{\max}}. \quad (7.3)$$

Предположим сначала, что электрон, испытывающий электродинамическое воздействие сгустка, отстоит по азимуту от концов сгустка на расстояние, большее, чем α_0 , т. е. что

$$-1 + \eta_0 < \eta < 1 - \eta_0. \quad (7.4)$$

Азимутальная слагающая результирующих кулоновых сил определяется формулой (6.7), которая в обозначениях (7.3) гласит:

$$F_{\alpha}^{\text{кул}} = 4\pi\nu(1 - \rho_0^2) \frac{b^2}{a} \left[\ln \left(\frac{2a}{b\sqrt{1 - \rho_0^2}} \right) - 1 \right] \eta. \quad (7.5)$$

К этим кулоновым силам добавляются радиационные силы. Результирующая радиационных сил, обусловленных зарядами, отстоящими по азимуту от рассматриваемого электрона не более чем на α_0 , определяется формулой (6.21). В этой формуле b' означает радиус, а $\pi b'^2$ — сечение сгустка в месте нахождения электрона; внося в (6.21) значение (7.1) этого сечения, получаем

$$F_{\alpha \text{ близк}}^{\text{рад}} = - \frac{4\pi\nu b^3}{3\sqrt{1 - \rho_0^2}} (1 - \eta^2). \quad (7.6)$$

Чтобы учесть поправку к кулоновым силам, обусловленным электронами, находящимися впереди от рассматриваемого на расстоянии $|\alpha - \alpha'| > \alpha_0$, нужно помножить вторую из формул (6.19) на число электронов dN в отрезке сгустка длины $\rho_0 d\alpha'$ (см. (7.1) и (7.3))

$$dN = \nu S \rho_0 d\alpha' = \pi\nu b^2 a (1 - \eta'^2) d\eta' \quad (7.7)$$

и проинтегрировать по $d\eta'$:

$$\Delta F_{\alpha}^{\text{пер}} \sim \frac{\pi\nu b^2 a}{8} \int_{\eta+\eta_0}^1 (1 - \eta'^2) d\eta' = \frac{\pi\nu b^2 a}{12} \left[1 - \frac{3}{2}(\eta + \eta_0) + \frac{1}{2}(\eta + \eta_0)^3 \right]. \quad (7.8)$$

Наконец, электроны, находящиеся позади рассматриваемого на расстоянии $|\alpha - \alpha'| > \alpha_0$, дают согласно (6.26) (там, где это несущественно, мы полагаем $\rho_0 = 1$)

$$\Delta F_{\alpha}^{\text{задн}} = \frac{2\pi\nu b^2}{a^{1/3}} \int_{-1}^{\eta-\eta_0} d\eta' (1 - \eta'^2) \left\{ \frac{1}{[3(\eta - \eta')]^{1/3}} - \frac{\eta_0^{2/3}}{3(\eta - \eta')^2} + \frac{8\eta_0^{4/3}}{[3(\eta - \eta')]^{5/3}} \right\}.$$

Выполнив элементарное интегрирование и отбросив в скобках члены, содержащие η_0 в степени, выше первой (мы полагаем, что $\eta_0 \ll 1$), получаем

$$\Delta F_{\alpha}^{\text{задн}} = \frac{2\pi\nu b^2}{3^{1/3}\sqrt{1-\rho_0^2}} \left\{ 2,66(1-\eta^2) + 1,8\eta_0^{1/3}(1+\eta)^{1/3}(3\eta-2) + \right. \\ \left. + 2,88\eta_0 \left[1 + 0,883\eta - \eta \ln \left(\frac{1+\eta}{\eta_0} \right) \right] \right\}. \quad (7.9)$$

Нам остается собрать вместе члены (7.5), (7.6), (7.8) и (7.9). Член (7.8) настолько меньше остальных, что мы им пренебрежем. В результате, замечая, что полное число N электронов в сгустке равно

$$N = \frac{4\pi}{3} b^2 a \nu, \quad (7.10)$$

получаем

$$F_{\alpha} = \frac{N}{\alpha\sqrt{1-\rho_0^2}} \left\{ 3 \left[\ln \left(\frac{2a}{b\sqrt{1-\rho_0^2}} \right) - 0,71 \right] \eta_0 \eta - \right. \\ \left. - 0,076(1-\eta^2) + 0,62\eta_0^{1/3}(1+\eta)^{1/3}(3\eta-2) + \eta_0 \left[1 - \eta \ln \left(\frac{1+\eta}{\eta_0} \right) \right] \right\}. \quad (7.11)$$

Эта формула справедлива для электронов, азимут которых η удовлетворяет условию (7.4). Для электронов же, находящихся у самых концов сгустка, в предшествующие формулы должны быть внесены следующие изменения.

Выражение (7.5) для кулоновых сил остается без изменения. Выражение (7.6) для радиационной силы, обусловленной близкими электронами, может быть с достаточной степенью точности заменено следующим:

$$F_{\alpha\text{близки}}^{\text{ред}} = -\frac{2\pi\nu b^2}{3\sqrt{1-\rho_0^2}} \left(1 + \frac{1-\eta}{\eta_0} \right)^2 \eta_0, \quad \text{если } 0 < 1-\eta < \eta_0, \\ F_{\alpha\text{близки}}^{\text{рад}} = -\frac{2\pi\nu b^2}{3\sqrt{1-\rho_0^2}} \left(1 + \frac{1+\eta}{\eta_0} \right)^2 \eta_0, \quad \text{если } 0 < 1+\eta < \eta_0. \quad (7.12)$$

Силой $\Delta F_{\alpha}^{\text{нер}}$ (формула (7.8)) мы пренебрежем. Наконец, при $-1 < \eta < -1+\eta_0$ в сгустке вообще нет электронов, находящихся «далеко сзади» от рассматриваемого, так что в этом случае силу $\Delta F_{\alpha}^{\text{задн}}$ нужно положить равной нулю:

$$\Delta F_{\alpha}^{\text{задн}} = 0 \quad \text{при } 0 < 1+\eta < \eta_0. \quad (7.13)$$

Заметим, что, хотя при $\eta = -1+\eta_0$ точное выражение для $\Delta F_{\alpha}^{\text{задн}}$, конечно, обращается в нуль, все же приближенное выражение (7.9) для $\Delta F_{\alpha}^{\text{задн}}$ отлично от нуля при $\eta = -1+\eta_0$ (член в скобках порядка $-3,34\eta_0$). Это объясняется тем, что при выполнении интегрирования, приведшего нас к формуле (7.9), мы опустили

некоторые члены, которые при $1 + \eta \gg \eta_0$ пропорциональны $\eta^{1/3}$, но при $1 + \eta \sim \eta_0$ оказываются порядка η_0 .

Впрочем, все эти поправки к формуле (7.11) у самых концов сгустка не существенны, и о зависимости силы F_α от азимутального расстояния электрона до фазирующей точки можно судить по формуле (7.11). На рис. 2 дан график величины $\xi = 10F_\alpha \frac{a\sqrt{1-\rho_0^2}}{N}$,

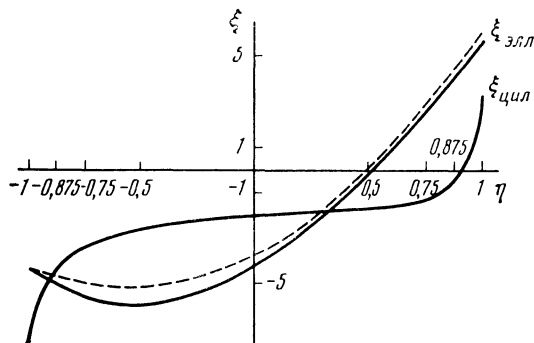


Рис. 2

вычисленный для значений $\eta_0 = 0,064$, $\sqrt{1-\rho_0^2} = 1/7$ и $b/a = 0,07$. Эти значения соответствуют примерно следующим заданиям: $a = 1/_{20}$, $E \sim 3,5$ Мэв, $eV_0 \sim 25$ кэв (см., в частности, (3.13) и (3.5)).

§ 8. Сила, действующая на весь сгусток в целом. Полное излучение сгустка

Чтобы определить результирующую силу, действующую на весь сгусток в целом, обусловленную электродинамическим взаимодействием электронов сгустка, нужно, очевидно, помножить силу¹⁰ F_α (формула (7.11)) на dN (формула (7.7)) и проинтегрировать по всему сгустку¹¹. В результате получаем

$$\Sigma F_\alpha = \int F_\alpha dN = -0,06 \frac{N^2}{a\sqrt{1-\rho_0^2}} (1 + 16\eta_0^{1/3} - 12\eta_0). \quad (8.1)$$

Эта тормозящая сгусток сила обусловлена, очевидно, когерентным излучением сгустка (некогерентная часть излучения нами не учитывалась). Полная энергия dW/dt , излучаемая (когерентно) сгустком за единицу времени, численно равна ΣF_α , помноженной

¹⁰ Результирующая сила ΣF , помимо азимутальной слагающей (8.1), имеет также и радиальную слагающую, обусловленную неконсервативными «взаимными» силами инерции $f^{ин}$ (формула (6.23)). Эту слагающую мы рассматривать не будем.

¹¹ Поправки к (7.11) у концов сгустка, указанные в конце § 7, не оказывают существенного влияния на значение результирующей силы ΣF_α .

на скорость сгустка ρ_0 . Переходя от наших единиц измерения к обычным СГС единицам, получаем из (8.1)

$$\frac{dW}{dt} = 0,06 \frac{N^2 e^2 c}{\alpha_{\max} \lambda^2} \left\{ \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right) + \frac{16}{\alpha_{\max}^{1/3}} - \frac{12}{\alpha_{\max}} \left(\frac{m_0 c^2}{E} \right)^2 \right\}. \quad (8.2)$$

Здесь N — полное число электронов в сгустке, α_{\max} — полудлина сгустка в радианах, $\lambda = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\text{длина радиоволны}}{2\pi}$, E — полная энергия электрона.

Формула (8.2) справедлива при условиях $\eta_0 \ll 1$ и $\alpha_{\max} \ll 1$, т. е. при условиях

$$\left(\frac{m_0 c^2}{E} \right)^3 \ll \alpha_{\max} \ll 1. \quad (8.3)$$

Некогерентное же излучение сгустка, под которым мы условно понимаем излучение, получаемое путем простого суммирования интенсивностей излучения всех электронов сгустка, равно (если скорость электронов можно считать равной c)

$$\frac{dW_{\text{неког}}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{N e^2 c}{\lambda^2} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^4. \quad (8.4)$$

Таким образом, когерентное излучение растет с энергией электронов значительно медленнее ($\propto E$), чем некогерентное ($\propto E^4$). Однако, помимо явной зависимости от энергии E , отношение когерентного излучения к некогерентному существенно зависит от величины N/α_{\max} (т. е. от числа электронов, приходящихся на единицу длины сгустка), которая, в свою очередь, может существенно зависеть от энергии электронов E .

Надо, впрочем, заметить, что формулы последних двух параграфов (§ 7 и 8) не отличаются точностью, ибо интегрирование сил, действующих на данный электрон со стороны всех прочих электронов сгустка, было произведено нами в § 7 весьма приближенно. В частности, численные значения коэффициентов в формулах (7.11), (8.1) и (8.2) очень чувствительны к выбору значения σ_0 (формула (5.19)).

Заметим в заключение, что из трех членов, стоящих в скобке в правой части уравнения (8.1), в интересующих нас условиях преобладающее значение имеет второй член. Действительно, он больше первого, если $\eta_0^{1/3} > 1/16$, т. е. если (см. уравнение (7.3)) $\sqrt{1 - \rho_0^2} = \frac{m_0 c^2}{E} > \frac{a^{1/3}}{16}$. Так как мы ограничились случаем, когда $2a < 1/3$, то это условие выполняется вплоть до энергий E , меньших, чем $14 Mэв$. Что же касается третьего члена, то он в пределах применимости изложенной теории всегда меньше второго, так как, по предположению, $\eta_0 \ll 1$. Поэтому в скобках правой части уравнения (8.1) можно ограничиться вторым членом,

Принимая во внимание, что согласно (7.3) $\gamma_0^{1/3} = \sqrt{1 - \rho_0^2/a_{\max}^{1/3}}$, можем вместо (8.1) с достаточной точностью написать

$$\sum F_\alpha = -\frac{dW}{d\tau} = -0,96 \frac{N^2}{a^{1/3}}. \quad (8.5)$$

§ 9. Зависимость электродинамических сил от формы сгустка. Цилиндрический сгусток

До сих пор мы рассматривали сгустки эллипсоидальной формы. Чтобы выяснить зависимость электродинамических сил от формы сгустка, рассмотрим теперь равномерно заряженный цилиндрический сгусток сечения S и длины $2a$. Ось цилиндра считаем совпадающей с отрезком окружности радиуса ρ_0 , центр сгустка — совпадающим с равновесной фазой. Сечение S цилиндра считаем малым в том смысле, что его радиус b (или половина максимального поперечника, если сечение не круговое, что не существенно) удовлетворяет неравенствам (см. формулу, следующую за уравнением (5.11))

$$b \ll \sqrt{24} (1 - \rho_0^2) \quad \text{и} \quad b \ll a. \quad (9.1)$$

Все вычисления для цилиндрического сгустка гораздо более просты, чем для сгустка эллипсоидального. Азимутальная слагающая F_α^{00} равнодействующей сил, испытываемых электроном с координатами ρ, α, ζ со стороны всех остальных электронов сгустка, равна (см. (4.24))

$$F_\alpha^{00} = \nu \int f_\alpha^{00} dV' = -\frac{\nu}{\rho} \int \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} \rho' d\rho' d\alpha' d\zeta'. \quad (9.2)$$

Легко убедиться, что ¹²

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha'}. \quad (9.3)$$

Внося (9.3) в (9.2) и выполняя интегрирование по α' , получаем

$$F_\alpha^{00} = \frac{\nu}{\rho} \left[\int \Phi_0 \rho' d\rho' d\zeta' \right]_{\alpha'=-z_{\max}}^{\alpha'=+z_{\max}}, \quad (9.4)$$

где интегрирование должно быть выполнено по обоим основаниям цилиндрического сгустка. Если рассматриваемый электрон от-

¹² Заметим, что это неравенство отнюдь не означает, что взаимодействие электронов ρ, α, ζ и ρ', α', ζ' удовлетворяет закону равенства действия и противодействия, ибо сила $f'_{\alpha'}$, действующая со стороны нештрихованного электрона на штрихованный, равна

$$f'_{\alpha'} = \frac{1}{\rho'} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha'} = + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_0'}{\partial \alpha},$$

где Φ_0' отлично от Φ_0 .

стоит от каждого из оснований цилиндра на расстояние, большее радиуса цилиндра, можно вынести $\rho' \Phi_0$ за знак интеграла и положить

$$F_{\alpha}^{00} = \nu S [\Phi_0]_{\alpha' = -\alpha_{\max}}^{\alpha' = +\alpha_{\max}} = \frac{N}{2a} [\Phi_0]_{\sigma' = -\sigma_{\max}}^{\sigma' = +\sigma_{\max}}, \quad (9.5)$$

где S — сечение сгустка, $N = \nu S \cdot 2a$ — полное число электронов в сгустке; в выражении для Φ_0 можно положить $\rho = \rho' = \rho_0$. Если $\alpha' = \alpha_{\max}$, то $\alpha - \alpha' < 0$ и при вычислении значения Φ_0 можно воспользоваться формулами (5.7а) и (5.13) для «малых» расстояний. Внося эти значения для S и β в выражение (4.16) для Φ_0 , получаем

$$\Phi_0 |_{\alpha' = \alpha_{\max}} = \frac{1 - \rho_0^2}{\alpha_{\max} - \alpha} + \frac{\alpha_{\max} - \alpha}{8} \quad \text{при} \quad \alpha_{\max} - \alpha > \sigma_0. \quad (9.6)$$

Аналогичное вычисление значения Φ_0 при $\alpha' = -\alpha_{\max}$ дает с помощью формул (5.16) и (5.20)

$$\Phi_0 |_{\alpha' = -\alpha_{\max}} = \frac{2}{[3(\alpha + \alpha_{\max})]^{1/3}} + \frac{(1 - \rho_0^2)}{3(\alpha_{\max} + \alpha)} \quad \text{при} \quad \alpha + \alpha_{\max} > \sigma_0. \quad (9.7)$$

Внося (9.6) и (9.7) в (9.5) и воспользовавшись обозначениями (7.3), получаем окончательную формулу для равнодействующей F_{α}^{00} в случае цилиндрического сгустка при $|\eta| < 1 - \eta_0$:

$$F_{\alpha}^{\text{цил}} = \frac{N}{a \sqrt{1 - \rho_0^2}} \left\{ \frac{\eta_0}{2(1 - \eta)} + \frac{(1 - \rho_0^2)^2}{16\eta_0} (1 - \eta) - \frac{\eta_0^{1/3}}{[3(1 + \eta)]^{1/3}} - \frac{\eta_0}{6(1 + \eta)} \right\}. \quad (9.8)$$

Чтобы получить результирующую силу трения, действующую на весь сгусток в целом, нужно помножить (9.8) на $dN = \nu S \rho d\alpha = (N/2)d\eta$ и проинтегрировать по всему сгустку. В результате получаем¹³

$$\sum F_{\alpha}^{\text{цил}} = \int F_{\alpha}^{\text{цил}} dN = -0,83 \frac{N^2}{a^{1/3}} \left\{ 1 - \frac{a^{1/3}}{13,2} - 0,21 \eta_0^{2/3} \ln \frac{2}{\eta_0} \right\}. \quad (9.9)$$

Последние два члена в скобках малы по сравнению с единицей, так как, с одной стороны, по предположению, $2a < 1/3$, с другой стороны, максимальное значение последнего члена в скобках (достигающееся при $\eta_0 \sim 0,49$) равно 0,20. Поэтому в первом приближении можно положить

$$\sum F_{\alpha} = -\frac{dW}{d\tau} = -0,83 \frac{N^2}{a^{1/3}}. \quad (9.10)$$

Это выражение для результирующей силы трения и для интенсивности когерентного излучения сгустка отличается от соответствующего выражения для эллипсоидального сгустка только чис-

¹³ Формула (9.8) не применима к концам сгустка ($1 - \eta_0 < |\eta| < 1$), но силы, действующие на эти концы, малы по сравнению с результирующей, и ими можно пренебречь.

ленными множителями, отношение которых равно $83/96=0,86$. Таким образом, результирующая сила трения мало зависит от формы сгустка (при заданной его длине). Напротив, распределение азимутальных сил по сгустку, определяемое формулами (7.11) и (9.8), довольно существенно зависит от формы сгустка.

Т а б л и ц а 2

η	-1	-7/8	-3/4	-1/2	0	+1/2	+3/4	+7/8	1
$\xi_{элл}$	-4,27		-5,57	-3,90	-4,21	-0,17	+2,61		+5,89
$\xi_{цил}$	-8,53	-4,43	-3,39	-2,61	-1,98	-1,58	-1,22	-0,53	+3,32

В табл. 2 и на рис. 2 приведены результаты вычисления по формулам (7.11) и (9.8) величин $\xi_{элл}$ и $\xi_{цил}$, пропорциональных $F_{\alpha}^{элл}$ и $F_{\alpha}^{цил}$:

$$\xi_{элл} = 10 \frac{F_{\alpha}^{элл}}{N \sqrt{1 - \rho_0^2}}, \quad \xi_{цил} = 10 \frac{F_{\alpha}^{цил}}{N \sqrt{1 - \rho_0^2}}, \quad (9.11)$$

для следующих значений параметров:

$$a = 1/10, \quad b/a = 1/15 \quad \text{и} \quad \eta_0 = 0,027,$$

что соответствует примерно $E=3,7 \text{ Мэв}$ и $eV_0 \cos \varphi_0 = 25 \text{ кэв}$ (см. формулы (3.13) и (3.5)).

Разницу в ходе кривых для $\xi_{элл}$ и $\xi_{цил}$ легко понять качественно. В средней части цилиндра сила F_{α} почти постоянна, так как ее зависимость от α обуславливается только удаленными концами цилиндра. В эллипсоиде же зависимость F_{α} от α определяется не только этими концевыми эффектами, но и изменением сечения эллипсоида при изменениях α . Напротив, у самых концов сгустка F_{α} меняется в цилиндре гораздо сильнее, чем в эллипсоиде, ибо цилиндр обрывается резко, тогда как толщина эллипсоида постепенно сходит на нет. Напомним, что та же качественная картина имеет место и в отношении обычного электростатического поля однородных заряженных эллипсоида и цилиндра: слагающая напряженности электрического поля E_{α} вдоль оси цилиндра резко возрастает по абсолютной величине у концов цилиндра, тогда как в случае эллипсоида E_{α} на всем протяжении зависит от α линейно.

Рассмотрим в заключение несколько подробнее случай эллипсоида (хотя это следовало бы сделать еще в § 7). Как видно из рис. 2, зависимость $F_{\alpha}^{элл}$ от η имеет параболический характер. Можно показать, что эта зависимость довольно хорошо выражается следующей простой приближенной формулой:

$$F_{\alpha}^{элл} = \frac{N}{a^{1/2}} (-1,28 + q\eta + 1,6\eta^2), \quad (9.12)$$

где

$$q = 0,8 + \eta_0^2 [3 \ln(a/b) + \ln(4/a) - 0,80]. \quad (9.13)$$

Интегрирование выражения (9.12) по объему сгустка приводит к прежней формуле (8.5) для полной интенсивности когерентного излучения. Результаты вычисления $F_\alpha^{\text{эла}}$ по формуле (9.12) нанесены на рис. 2 в виде штриховой кривой.

Электродинамические силы взаимодействия электронов стремятся увеличить длину сгустка. Им противодействуют фокусирующие силы внешнего поля, которые можно положить равными (см. формулы (6.8), (6.9) и (3.5)):

$$f_\alpha^{\text{внешн}} = \left(-\frac{\lambda}{r_0} \right) \frac{\omega_0^2 \alpha}{(1 - \rho_0^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{\pi r_0 (1 - n)} \frac{e V_0 \cos \varphi_0}{2E} \frac{\eta a}{(1 - \rho_0^2)^{3/2}}. \quad (9.14)$$

Напомним, что здесь r_0 означает классический радиус электрона (формула (6.10)). В знаменателе стоит $(1 - \rho_0^2)^{3/2}$, а не $(1 - \rho_0^2)^{1/2}$, как в (6.9), потому, что при рассмотрении азимутальных колебаний надо учитывать не поперечную, а продольную массу электрона $m_0/(1 - \beta^2)^{3/2}$.

Необходимым¹⁴ условием того, чтобы сгусток мог сохранять свою форму, является требование, чтобы у концов сгустка сумма $F_\alpha + f_\alpha^{\text{внешн}}$ действующих на электрон сил была направлена внутрь сгустка или в предельном случае обращалась в нуль. Как видно из (9.12), при росте числа электронов в сгустке N это условие нарушается прежде всего у переднего конца сгустка. Предельное значение N определяется соотношением

$$N_{\text{пред}} = \frac{\lambda a^{7/3}}{\pi (1 - n) r_0 (0,32 + q)} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{e V_0 \cos \varphi_0}{2mc^2} \right). \quad (9.15)$$

При $E \sim 3,5$ Мэв, $eV_0 \cos \varphi_0 \sim 25$ кэв, $\lambda \sim 16$ см, $a = 1/10$, $b/a \sim 1/14$, $n \sim 1/2$ это выражение дает

$$N_{\text{пред}} = 6 \cdot 10^{11}. \quad (9.16)$$

Конечно, еще до того, как условие (9.14) будет нарушено, электродинамическое взаимодействие электронов приведет к существенному видоизменению невозмущенной формы сгустка, которую можно определить только при одновременном учете как внешних сил, так и сил взаимодействия электронов, а также при учете движения электронов внутри сгустка.

§ 10. Устойчивость сгустка по отношению к азимутальным колебаниям электронов

Устойчивость сгустка по отношению к азимутальным колебаниям электронов определяется (при условии постоянства внешнего магнитного поля) производной по радиусу от вертикальной

¹⁴ Условие это становится достаточным только в том случае, если скорость $u_\alpha = \dot{\alpha}$ электронов у концов сгустка обращается в нуль.

слагающей момента сил, действующих со стороны сгустка на данный электрон. Это обстоятельство можно пояснить следующими простыми соображениями.

Уравнение движения электрона по азимуту гласит:

$$d(\rho p_\theta)/d\tau = \rho(F_\alpha + f_\alpha^{\text{внешн}}), \quad (10.1)$$

где $p_\theta = m\theta\rho$ — слагающая импульса электрона вдоль азимута, а правая часть уравнения — вертикальная слагающая моментов всех сил, действующих на электрон. Отвлекаясь от «внешних» сил, рассмотрим только силы F_α электродинамического взаимодействия электронов. Обозначая индексом 0 внизу значения величин на окружности, проходящей через равновесную фазу, т. е. при $\rho = \rho_0$ и $\zeta = 0$, можем написать

$$M_z = \rho F_\alpha = (\rho F_\alpha)_0 + (\partial(\rho F_\alpha)/\partial\rho)_0(\rho - \rho_0) + (\partial(\rho F_\alpha)/\partial\zeta)_0\zeta + \dots \quad (10.2)$$

Коэффициент $(\partial(\rho F_\alpha)/\partial\zeta)_0$ последнего члена по соображениям симметрии обращается в нуль. Разность же $\rho - \rho_0$ можно выразить согласно (3. 2) через азимутальную слагающую скорости $\rho_0\dot{\alpha}$ невозмущенного движения электронов:

$$\rho_0 - \rho = \rho_0\dot{\alpha}. \quad (10.3)$$

Таким образом, получаем

$$M_z = \rho_0 F_{\alpha 0} - (\partial(\rho F_\alpha)/\partial\rho)_0 \rho_0 \dot{\alpha}. \quad (10.4)$$

Величины $F_{\alpha 0}$ и $(\partial\rho F_\alpha/\partial\rho)_0$ зависят только от одной переменной α , но не от ρ и ζ . Поэтому $F_{\alpha 0}$ есть консервативная сила в том смысле, что она может быть выражена в виде производной от потенциальной энергии, являющейся функцией α (или θ). Эта сила изменяет только характер и частоту азимутальных колебаний, тогда как вопрос о том, будут ли эти колебания затухать или нарастать со временем, определяется знаком функции

$$K = (\partial(\rho F_\alpha)/\partial\rho)_0, \quad (10.5)$$

которую мы будем называть «коэффициентом азимутального трения» и к определению которой мы и перейдем.

Ограничиваясь, как и всюду, главной слагающей f^{00} электродинамических сил (см. (4. 24)), можем написать

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\alpha^{00}) = -\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}\right) = \frac{\partial F_\rho^{00}}{\partial\alpha},$$

так что

$$K = \left(\frac{\partial F_\rho^{00}}{\partial\alpha}\right)_0 = \nu \int \left(\frac{\partial f_\rho^{00}}{\partial\alpha}\right)_0 dV', \quad (10.6)$$

где f_ρ^{00} — радиальная слагающая силы (4. 25), действующая на

электрон с координатами ρ_0 , α и $\zeta=0$ со стороны электрона ρ' , α' , ζ' , и где интегрирование должно быть произведено по всему объему сгустка.

Рассмотрим сначала цилиндрический сгусток. Путем простых преобразований, вполне аналогичных тем, которые привели нас от формулы (9. 2) к (9. 5), получаем из (10. 6)

$$K_{\text{цил}} = -\frac{N}{2a} [f_{\rho_0}^{00}]_{\alpha'=-\sigma}^{\alpha'+\alpha_{\text{max}}}, \quad (10. 7)$$

где значение силы $f_{\rho_0}^{00}$ должно быть взято при $\rho=\rho'=\rho_0$ и $\zeta=\zeta'=0$ (если точка α достаточно далеко отстоит от обоих концов сгустка). При этих значениях переменных получаем из (4.25), внося в эту формулу значение R^2 из (5. 2),

$$f_{\rho_0}^{00} = \frac{\rho}{S^3} \{ (1 - \cos \beta) [1 + \rho^2 (1 + \cos \beta) + \rho^4] - R \sin \beta (1 + \rho^2) \}. \quad (10. 8)$$

При вычислении значения $f_{\rho_0}^{00}$ для $\alpha' = \alpha_{\text{max}}$ можно воспользоваться формулами для «малых» расстояний (5. 7) и (5. 13) или прямо формулой (6. 23) для радиальной силы взаимной инерции. В результате получаем с хорошей точностью

$$f_{\rho_0}^{00} = 1/(\alpha_{\text{max}} - \alpha) \quad \text{при} \quad \alpha' = \alpha_{\text{max}} \quad \text{и} \quad \alpha < \alpha_{\text{max}} - \sigma_0. \quad (10. 9)$$

При вычислении же значения $f_{\rho_0}^{00}$ для $\alpha' = -\alpha_{\text{max}}$ следует сначала выразить функции угла β через функции половинного угла $\beta/2$, для чего нужно воспользоваться формулами (5. 14) и формулой, предшествующей формуле (5. 20). В результате некоторые множители в числителе и знаменателе сокращаются и мы получаем

$$f_{\rho_0}^{00} = \frac{(1 - \rho_0)^2 \left[1 + 2\rho_0 \left(1 - \cos \frac{\beta}{2} \right) + \rho_0^2 \right] + 2\rho_0^3 \left(1 - \cos \frac{\beta}{2} \right)^2}{4\rho_0^2 \sin \frac{\beta}{2} \left(1 - \rho_0 \cos \frac{\beta}{2} \right)^3}. \quad (10. 10)$$

Ограничиваясь главным членом в (10. 10), получающимся при $\rho_0=1$, можем положить

$$f_{\rho_0}^{00} = \frac{1}{2 \sin \frac{\beta}{2} \left(1 - \cos \frac{\beta}{2} \right)} = \frac{8}{\beta^3} = \frac{1}{3(x + \alpha_{\text{max}})} \quad (10. 11)$$

при $\alpha' = -\alpha_{\text{max}}$ и $\alpha + \alpha_{\text{max}} > \sigma_0$.

Попытка учесть в приближенном выражении для $f_{\rho_0}^0$ малые члены порядка $(1 - \rho_0^2)/\xi^2$, как показал численный расчет одного конкретного случая, только ухудшает согласие приближенного выражения с точной формулой (10. 10); если желательно улучшить точность, необходимо пользоваться вместо (10. 11) этой точной формулой.

Подставляя (10.9) и (10.11) в (10.7), получаем окончательное выражение для коэффициента азимутального трения в цилиндрическом ступке (при $|\eta| < 1 - \eta_0$):

$$K_{\text{цил}} = \frac{N}{2a^2} \left(\frac{1}{3(1+\eta)} - \frac{1}{1-\eta} \right) = -\frac{N(1+2\eta)}{3a^2(1-\eta^2)} \quad (|\eta| < 1 - \eta_0). \quad (10.12)$$

Таким образом, на большей части ступки этот коэффициент трения отрицателен, т. е. приводит к нарастанию азимутальных

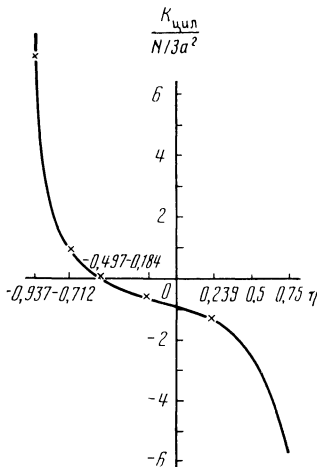


Рис. 3

колебаний; он становится положительным только в задней четверти ступки, при $\eta < -1/2$.

В табл. 3 и на рис. 3 приведены значения коэффициента $K_{\text{цил}}$, поделенного на $N/3a^2$, вычисленные, с одной стороны, по приближенной формуле (10.12) и, с другой стороны, при замене выражения (10.11) точной формулой (10.10) (в последнем случае мы полагаем $a=1/10$ и $E \sim 3 \text{ Мэв}$). Крестиками показаны вычисленные точки.

Т а б л и ц а 3

η	-0,937	-0,712	-0,497	-0,184	0	+0,239	+0,5	+0,75	0,9
По (10.12)	+7,15	+0,87	-0,001	-0,655	-1	-1,65	-2,67	-5,70	-14,7
По (10.10)	+6,57	+0,93	+0,051	-0,600	-1,60	-1,60			

Как видно из таблицы и рисунка, приближенная формула (10.12) достаточно хорошо передает зависимость $K_{\text{цил}}$ от η .

О ШИРИНЕ УДАРНЫХ ВОЛН БОЛЬШОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ¹

§ 1. Введение и резюме

Плоская ударная волна в идеальном газе в первом приближении представляет собой движущуюся с определенной скоростью поверхность разрыва величин, характеризующих состояние газа (скорость u , давление p , плотность ρ , температура T и т. д.); по обе стороны разрыва газ находится в состоянии термодинамического равновесия. В действительности эта поверхность разрыва представляет собой, конечно, переходный слой определенной толщины. Для случая слабых разрывов (т. е. для случая, когда относительные изменения характеризующих газ величин на протяжении всего переходного слоя малы по сравнению с единицей) структура этого слоя известна; так, давление газа изменяется по следующему закону:

$$p = \frac{p_2 + p_1}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2} \operatorname{th}(x/d), \quad (1 \ 1)$$

где p_1 и p_2 — давление по обе стороны разрыва; координата x отсчитывается от середины разрыва в перпендикулярном к нему направлении, а величина, которую мы будем называть шириной разрыва d , равна

$$d = \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} \delta,$$

где

$$\delta = \frac{2v^3}{\rho c^3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s} \left(\frac{4}{3} \eta + \xi + \frac{c_p - c_v}{c_p c_v} \gamma \right); \quad (1 \ 2)$$

здесь v — удельный объем газа, c — скорость звука в нем, η и ξ — коэффициенты вязкости, κ — коэффициент теплопроводности газа, c_p и c_v — теплоемкости газа, величина δ порядка длины свободного пробега в газе.

В частности, если считать атомы газа упругими шариками радиуса r , то для коэффициентов η и κ получаются выражения

$$\eta = \frac{0,169}{\eta^2} k \sqrt{\frac{T}{m}}, \quad \kappa = \frac{0,0448}{r^2} \sqrt{mkT},$$

¹ Труды ФИАН СССР, 1965, 29, 239 Работа выполнена в 1947 г.



И. Е. ТАММ
(60-ые годы)

где m — масса атома, а k — постоянная Больцмана; второй коэффициент вязкости ξ для одноатомного газа равен нулю. Внося в (1.2) эти значения и известные значения других величин, получаем

$$\delta = 1,28l, \quad (1.3)$$

где $l = \frac{1}{4} \pi r^2 N$ — длина свободного пути в газе (N — число молекул в единице объема).

Если применить приведенные формулы к сильным разрывам, когда $(p_2 - p_1)/(p_2 + p_1) \sim 1$, т. е. $p_2 \gg p_1$, то «ширина» d таких разрывов окажется порядка длины свободного пробега в газе². Однако формулы эти выведены для слабых разрывов $(p_2 - p_1)/(p_2 + p_1) \ll 1$, и поэтому случай сильных разрывов нуждается в специальном рассмотрении. При этом надо иметь в виду, что самые уравнения гидродинамики, которые лежат в основе вывода формул (1.1) и (1.2), справедливы лишь при условии $L \gg l$, где l — длина свободного пробега молекул, а L — расстояние, на котором заметно изменяются макроскопические характеристики жидкости или газа.

Очевидно, что при сильных разрывах, когда d становится сравнимым с l , нельзя пользоваться уравнениями гидродинамики³, а необходимо непосредственно исследовать решение основного кинетического уравнения

$$\mathbf{v} \operatorname{grad} f + \frac{\mathbf{K}}{m} \operatorname{grad}_v f = \chi(f, f), \quad (1.4)$$

где \mathbf{v} — скорость молекул; f — функция распределения молекул газа в пространстве фаз; \mathbf{K} — внешняя сила, действующая на молекулу; $\chi(f, f)$ — член, учитывающий соударения между молекулами (газ считаем состоящим из одноатомных тождественных молекул, не обладающих внутренними степенями свободы). Уравнение (1.4) записано для стационарного состояния газа $\partial f / \partial t = 0$; как известно, в случае плоской ударной волны состояние газа действительно стационарно, если система отсчета движется вместе с волной.

Точные решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.4) известны лишь для тривиальных случаев (напри-

² То обстоятельство, что плотность газа, а стало быть, и длина свободного пробега в нем меняются на протяжении разрыва, не вносит существенной неопределенности в эту оценку, так как максимально возможное изменение плотности в ударной волне не очень велико и равно $\rho_1/\rho_2 = (c_p - c_l)/(c_p + c_l)$.

³ Основываясь на развитом Д. Гильбертом методе решения основного уравнения кинетической теории газов по степеням отношения l/L , Л. Томас (J. Chem. Phys., 1944, 12, 449), учел и при определении структуры ударной волны следующее (по сравнению с тем, которое приводит к гидродинамическим уравнениям Навье—Стокса) приближение и получил поправку к выражению (1.2) для d , приводящую к конечной ширине скачка при $p_2/p_1 \rightarrow \infty$. Однако и его результаты применимы лишь к достаточно слабым разрывам.

мер, для равновесного состояния газа в статическом внешнем поле сил). Мы воспользуемся для решения этого уравнения следующим приближенным методом, аналогичным методу Ритца для линейных уравнений.

Интеграл

$$S = \int \int d\mathbf{v} d\mathbf{r} \left[\mathbf{v} \operatorname{grad} f + \frac{1}{m} \mathbf{K} \operatorname{grad}_v f - \chi(f, f) \right]^2 \quad (1.5)$$

неотрицателен и обращается в нуль только в том случае, если функция $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ удовлетворяет кинетическому уравнению (1.4). Таким образом, это уравнение эквивалентно требованию, чтобы S имело минимально возможное значение. Аппроксимируя функцию распределения f какой-либо подходящей функцией от \mathbf{r} и \mathbf{v} (в которой остаются неопределенными значения некоторых постоянных параметров и функциональная зависимость от части независимых переменных) и внося эту функцию в (1.5), получаем приближенное решение кинетического уравнения из требования

$$\delta S = 0. \quad (1.6)$$

В случае плоской ударной волны f является функцией только от x , v_x и v , так что S принимает вид

$$S = \int dx d\mathbf{v} \left[v_x \frac{\partial f}{\partial x} - \chi(f, f) \right]^2. \quad (1.7)$$

В качестве первого приближения я взял

$$f = \frac{1-g(x)}{2} f_1(\mathbf{v}) + \frac{1+g(x)}{2} f_2(\mathbf{v}), \quad (1.8)$$

где f_1 и f_2 — равновесные максвелловы функции распределения на больших расстояниях от разрыва (соответственно справа и слева от него), а g — искомая функция от x , подчиненная условиям:

$$g(x) \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow -\infty, \quad g(x) \rightarrow -1 \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.8) означает, что область скачка рассматривается как область своего рода диффузии газа с равновесным распределением f_1 в газ с равновесным распределением f_2 и обратно.

Внося (1.8) в (1.7) и выполняя интегрирование по v , получаем из (1.6) легко разрешимое дифференциальное уравнение для $g(x)$. В результате, например, для давления газа p получается формула (1.1), оказывающаяся, таким образом, в рассматриваемом приближении справедливой не только для слабых, но и для сильных разрывов. Значение постоянной δ для слабых разрывов получается равным

$$\delta = 1,37l, \quad (1.10)$$

т. е. отличается всего на 7% от значения (1.3), получающегося из гидродинамической теории. Что же касается предельного случая сильных разрывов, то при $(p_2 - p_1)/(p_2 + p_1) \rightarrow 1$ ширина разрыва d стремится к предельному значению,

$$d = 0,503l_1 = 2,012l_2, \quad (1.11)$$

где l_1 и l_2 — соответственно длины свободного пробега в газе до и после скачка (при $(p_2 - p_1)/(p_2 + p_1) \rightarrow 1$ в одноатомном газе $l_1/l_2 \rightarrow 4$).

Хотя сравнение с гидродинамической теорией показывает, что аппроксимация (1.8) хороша для слабых скачков, желательно проверить степень ее пригодности для сильных скачков, для чего следует провести вычисления в следующем более точном приближении или, что предпочтительнее, решить приближенное линейное интегро-дифференциальное уравнение для поправки к найденному решению f .

Все результаты этой статьи применимы лишь в том случае, когда температура газа до и после скачка не слишком велика; в противном случае нужно учитывать эффект Кнезера, излучение нагретого газа и т. п. Заметим, что условие малости абсолютных температур совместимо с условием сильного разрыва $(T_2 - T_1)/(T_2 + T_1) \sim 1$.

Заметим в заключение, что развитый в настоящей статье вариационный метод приближенного решения кинетического уравнения может быть применен для решения весьма разнообразных задач. В частности, он может быть обобщен и на случай, когда состояние газа не стационарно ($\partial f/\partial t \neq 0$).

В § 2 формулируются основные уравнения и условия проблемы и вводятся безразмерные переменные. В § 3 явно вводится приближенное выражение (1.8) для функции распределения и проводятся вычисления для предельных случаев слабого и сильного скачков.

§ 2. Основные соотношения проблемы в безразмерных переменных

Мы будем рассматривать плоскую разрывную волну в идеальном газе, состоящем из одноатомных тождественных молекул, не обладающих внутренними степенями свободы. Ось X направим перпендикулярно фронту волны. Пусть волна распространяется справа налево из области 2 в область 1. В этом случае $T_2 > T_1$, $p_2 > p_1$, $\rho_2 > \rho_1$. Введем систему координат, движущуюся вместе с волной. В этой системе отсчета газ будет перетекать из области 1 в область 2 и в обеих областях двигаться направо (по оси X) со скоростями u_1 и u_2 соответственно, причем $u_2 < u_1$. Условия сохранения потоком вещества, импульса и энергии на

протяжении всего газа записываются в виде

$$\begin{aligned} \int v_x f d\mathbf{v} &= j = \text{const}, \\ \int v_x^2 f d\mathbf{v} &= P = \text{const}, \\ \int v_x v^2 f d\mathbf{v} &= S = \text{const}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где j — поток числа атомов через единицу поверхности, P — поделенный на m поток импульса и S — поделенный на $m/2$ поток энергии.

Кинетическое уравнение имеет вид

$$v_x \frac{df}{dx} = \frac{\sigma}{2\pi} \int |w| \{f, f\} d\mathbf{v}_1 d\Omega, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \{f, f\} &= f(\mathbf{v}') f(\mathbf{v}'_1) - f(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}_1), \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} + w\mathbf{a}, \quad \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - w\mathbf{a}, \quad w = (\mathbf{a}, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

\mathbf{a} — единичный вектор, $\int d\Omega$ означает интегрирование по углам, определяющим его направление, w — абсолютная величина \mathbf{w} , σ — поперечное сечение соударения атомов.

Введем вместо функции распределения f пропорциональную ей функцию F размерности $1/v^3$:

$$f = j \frac{P}{S} F. \quad (2.4)$$

Далее, введем следующие единицы измерения:

$$\begin{aligned} \text{единица скорости} \quad u_0 &= \sqrt{S/j}, \\ \text{единица длины} \quad x_0 &= S/\sigma j P, \end{aligned} \quad (2.5)$$

и обозначение для безразмерной величины jS/P^2 :

$$\mu^2 = jS/P^2. \quad (2.6)$$

В этих обозначениях уравнения (2.1) и (2.2) запишутся в виде

$$\int v_x F d\mathbf{v} = \mu, \quad \int v_x^2 F d\mathbf{v} = 1, \quad \int v_x v^2 F d\mathbf{v} = \mu, \quad (2.7)$$

$$v_x \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2\pi} \int |w| \{F, F\} d\mathbf{v}_1 d\Omega = 0. \quad (2.8)$$

В эти уравнения входит только один безразмерный параметр μ . Вдали от скачка при $x = \pm \infty$ газ находится в термодинамическом

равновесии и, стало быть, функция распределения имеет в областях 1 и 2 вид

$$F_i = \rho_i \left(\frac{\alpha_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\alpha_i [(v_x - u_i)^2 + v_y^2 + v_z^2]}, \quad i = 1, 2, \quad x \rightarrow \pm \infty, \quad (2.9)$$

где

$$\alpha_i = \frac{m u_0^2}{2kT_i}. \quad (2.10)$$

Внося (2.9) в (2.7), получаем

$$\rho_i u_i = \mu, \quad \rho_i \left(u_i^2 + \frac{1}{2\alpha_i} \right) = 1, \quad \rho_i u_i \left(u_i^2 + \frac{5}{2\alpha_i} \right) = \mu;$$

откуда находим

$$u_i = \frac{1 \pm r}{2\sqrt{1-r^2}}, \quad \alpha_i = 10 \frac{1 \mp r}{3 \mp 5r}, \quad \rho_i = \frac{5}{2} (1 \mp r). \quad (2.11)$$

Здесь введено обозначение

$$r = \sqrt{1 - \frac{16\mu^2}{25}}; \quad (2.12)$$

верхний знак относится к $i = 1$, а нижний — к $i = 2$.

Так как температура T_i , а стало быть, и величина α_i не могут быть отрицательными, то

$$0 \leq r \leq \frac{3}{5}, \quad 1 \leq \mu \leq \frac{5}{4}. \quad (2.13)$$

Из (2.11) следует, что относительные скачки скорости, плотности, температуры и давления $p_i \sim \rho_i T_i$ равны:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} = r, \quad \frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} = \frac{5}{3} r, \quad \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1} = t = \frac{2r}{3 - 5r^2}. \quad (2.14)$$

При $r \rightarrow 0$ (т. е. $\mu \rightarrow 5/4$) скачки всех величин стремятся к нулю, тогда как при $r \rightarrow 3/5$ (т. е. $\mu \rightarrow 1$) они стремятся к следующим предельным значениям:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \rightarrow \frac{3}{5}, \quad \frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1} = t \rightarrow 1, \quad (2.15)$$

т. е. $p_2/p_1 = u_1/u_2 \rightarrow 4$, $p_2/p_1 = T_2/T_1 \rightarrow \infty$.

Соотношения (2.11) эквивалентны уравнению адиабаты Гюгоньо для идеального одноатомного газа.

Заметим, что на основании (2.4), (2.9) и (2.11) число молекул газа в областях 1 и 2 в обычной размерной единице объема равно

$$N_i = j \frac{P}{S} \rho_i = \frac{5}{2} j \frac{P}{S} (1 \pm r),$$

так что введенная нами в (2.5) единица длины равна

$$x_0 = \frac{5(1 \mp r)}{2rN_i} = \frac{5}{2}(1 \mp r)l_i, \quad (2.16)$$

где $l_i = 1/\sigma N_i$ означает длину свободного пробега молекул газа в областях 1 и 2.

Задача исследования плоской ударной волны сводится к нахождению решения $F(x, v)$ интегро-дифференциального уравнения (2.8), удовлетворяющего условиям (2.7) и принимающего при $x = \pm \infty$ значения (2.9).

§ 3. Приближенное решение основного уравнения вариационным методом

Естественно искать приближенное решение основных уравнений, сформулированных в § 2, в виде

$$F = e^{-\alpha[(v_x - u)^2 + v_y^2 + v_z^2]} [a + b(v_x - u)^2 + c(v_y^2 + v_z^2) + d(v_x - u)^4 + e(v_y^2 + v_z^2)^2], \quad (3.1)$$

где α, u, a, b, c, d, e — подлежащие определению функции от x . Внося (3.1) в (2.7), получаем три алгебраических уравнения, связывающих значения этих функций. Однако оказывается, что в случае сильных разрывов эти уравнения не имеют решений, при которых функция F оставалась бы положительной при всех значениях скорости молекулы⁴.

Так как интерес представляют как раз сильные разрывы, то я отказался от рассмотрения решений формы (3.1) и выбрал для F приближение типа (1.8):

$$F = \frac{1-g(x)}{2} F_1(\mathbf{v}) + \frac{1+g(x)}{2} F_2(\mathbf{v}), \quad (3.2)$$

где F_1 и F_2 — распределения Максвелла молекул по скоростям в областях 1 и 2, заданные уравнениями (2.9) и (2.11), а искомая функция $g(x)$ подчинена условиям (1.9). Условия (2.7) при этом выборе функций F выполняются автоматически.

Легко видеть, что определяемый уравнением (2.3) функционал $\{F, F\}$ обладает следующим свойством:

$$\{F + H, F + H\} = \{F, F\} + \{F, H\} + \{H, H\},$$

где

$$\{F, H\} = F(\mathbf{v}') H(\mathbf{v}_1') - F(\mathbf{v}) H(\mathbf{v}_1) + F(\mathbf{v}_1') H(\mathbf{v}') - F(\mathbf{v}_1) H(\mathbf{v}). \quad (3.3)$$

⁴ Включение во входящий в (3.1) полином не положительно определенных членов типа $A(v_x - u)$ приводит к затруднениям даже в случае слабых разрывов.

Так как $\{F_1, F_1\} = \{F_2, F_2\} = 0$, то для функции F , определяемой уравнением (3.2), получаем

$$\{F, F\} = \frac{1 - g^2(x)}{4} \{F_1, F_2\}.$$

Таким образом, внося (3.2) в левую часть кинетического уравнения (2.8), получаем

$$v_x \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2\pi} \int |w| \{F, F\} d\mathbf{v}_1 d\Omega = \frac{v_r}{2} g'(x) (F_2 - F_1) - \frac{1 - g^2(x)}{4 \cdot 2\pi} \int |w| \{F_1, F_2\} d\mathbf{v}_1 d\Omega,$$

где $g'(x) = dg/dx$. Внося это выражение в (1.7), получаем

$$S = \int dx [Ag'^2(x) + 2Bg'(x)(1 - g^2(x)) + C(1 - g^2(x))^2], \quad (3.4)$$

$$A = \frac{1}{4} \int v_x^2 (F_2 - F_1)^2 d\mathbf{v}, \quad C = \frac{1}{16} \int \chi^2(\mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

$$\chi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2\pi} \int |w| \{F_1, F_2\} d\mathbf{v}_1 d\Omega; \quad (3.5)$$

выражение для B нам не понадобится. A , B и C суть числовые функции параметра задачи μ (или r). Приравнявая нулю вариацию интеграла (3.4):

$$\delta S = \int dx [2\delta g' \{Ag' + B(1 - g^2)\} - 4\delta g \{Bgg' + (1 - g^2)g\}] = 0,$$

производя интегрирование по частям и приняв во внимание условия (1.9) при $x = \pm \infty$, получаем дифференциальное уравнение для $g(x)$, удовлетворяющее условиям (1.9). Его решение (при соответствующем выборе начала отсчета координаты x) имеет вид

$$g = \text{th } x/d, \quad (3.6)$$

$$d = \sqrt{A/C}. \quad (3.7)$$

Таким образом, функция (3.2) распределения молекул газа по скоростям имеет вид

$$F = \frac{F_1(\mathbf{v}) + F_2(\mathbf{v})}{2} + \frac{F_2(\mathbf{v}) - F_1(\mathbf{v})}{2} \text{th } x/d, \quad (3.8)$$

откуда следует, что, например, давление газа в случае как слабых, так и сильных разрывов выражается в рассматриваемом приближении формулой (1.1). Задача же определения ширины скачка d на основании (3.7) сводится к вычислению интегралов A и C .

Произведем предварительно некоторую замену переменных. Введем обозначения (см. (2.11)):

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 = 20 \frac{3 - 5r^2}{9 - 25r^2}, \quad t = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{2r}{3 - 5r^2}, \quad (3.9)$$

так что

$$\alpha_1 = \frac{S(1+t)}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{S(1-t)}{2}. \quad (3.10)$$

Заметим, что на основании (2.2) или (2.14) параметр t равен относительно скачку температуры.

Далее, вместо скорости молекулы v введем вектор p :

$$p = \frac{\sqrt{S}}{2}(v - i\mu), \quad (3.11)$$

где i — единичный вектор по оси X . В этих обозначениях выражение (2.9) принимает вид

$$F_i = \frac{5}{2}(1 - vr) \left[\frac{5(1 + vt)}{2\pi} \right]^{3/2} e^{-2(1+vt)p^2 - 4\lambda p_x - \frac{2\lambda^2}{1+vt}}, \quad (3.12)$$

где

$$v = +1 \quad \text{при} \quad i = 1, \quad v = -1 \quad \text{при} \quad i = 2, \quad (3.13)$$

$$\lambda = \frac{\alpha_i(\mu + u_i)}{\sqrt{S}} = \frac{2\mu}{\sqrt{S}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5(1-r^2)(9-25r^2)}{(3-5r^2)}}. \quad (3.14)$$

Далее, выражения (3.5) для A и $\chi(v)$ принимают вид

$$A = \frac{25\sqrt{S}}{4\pi^3} \int Q^2 \left(p_x + \frac{S\lambda}{4} \right)^2 e^{-4p^2 - 8\lambda p_x} dp, \quad (3.15)$$

где

$$Q = (1-r)(1+t)^{3/2} e^{-2tp^2 - \frac{2\lambda^2}{1+t}} - (1+r)(1-t)^{3/2} e^{2tp^2 - \frac{2\lambda^2}{1-t}}, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \chi = \frac{25}{4\pi^4} S (1-r^2)(1-t^2)^{3/2} e^{-\frac{4\lambda^2}{1-t^2}} \times \\ \times \int dp d\Omega |a, p_1 - p_2| R e^{-2(p^2 + p_1^2) - 4\lambda(p_x + p_{1x})^2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$R = \sum_{v=-1}^{v=+1} e^{-2vt(p_1^2 - p^2)} [e^{4vt\{(ap_1)^2 - (ap)^2\}} - 1]. \quad (3.18)$$

При выводе выражения для χ учтено, что на основании (2.3)

$$p' = p + wa, \quad p'_1 = p_1 - wa, \quad w = (a, p_1 - p) \quad (3.19)$$

и, стало быть, $p'^2 + p_1'^2 = p^2 + p_1^2$, $p'_x + p'_{1x} = p_x + p_{1x}$.

Интеграл A вычисляется элементарно, но мы не будем приводить здесь громоздкой общей формулы, а рассмотрим только два предельных случая.

В случае слабых скачков $t \rightarrow 0$, $r \rightarrow 3t/2$, $\lambda^2 \rightarrow 15/16$, $S \rightarrow 20/3$ и с точностью до членов порядка t^4

$$A = \frac{625}{512\pi} \sqrt{\frac{15}{\pi}} t^2 + O(t^4). \quad (3.20)$$

В случае сильных скачков $t \rightarrow 1$, $r \rightarrow 3/5$, $\lambda^2 \rightarrow 3(1-t)/4$, $S \rightarrow 16/3(1-t)$

$$A = 2 \left[\frac{2}{3\pi(1-t)} \right]^{3/2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right). \quad (3.21)$$

При вычислении интеграла χ вместо вектора \mathbf{p}_1 введем вектор $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}$. Тогда

$$\chi = \frac{25}{4\pi^4} S (1-r^2) (1-t^2)^{3/2} e^{-\frac{4\lambda^2}{1-t^2}} \int d\mathbf{q} d\Omega |\mathbf{a}\mathbf{q}| R e^{-4p^2-4p\mathbf{q}-2q^2-4\lambda^2(2p_x+qx)}, \quad (3.22)$$

где

$$R = \sum_{\nu} e^{-2\nu t(q^2+2p\mathbf{q})} [e^{4\nu t\{(a\mathbf{q})^2+2(a\mathbf{q})(a\mathbf{p})\}} - 1]. \quad (3.23)$$

Рассмотрим сначала предельный случай слабых скачков ($t \rightarrow 0$). Разложим скобку в выражении (3.23) для R по степеням параметра t , проинтегрируем R по $d\Omega$, разложим после этого и множитель $e^{-2\nu t(q^2+2p\mathbf{q})}$ по степеням t , просуммируем по ν и сохраним в результате только члены, пропорциональные наименьшей неисчезающей степени t , а именно t^2 . В результате получим

$$\chi = \frac{100}{3\pi^3} S t^2 e^{-4\lambda} \int q d\mathbf{q} [2q^2 p^2 - 6(\mathbf{q}\mathbf{p})^2 - 4q^2(\mathbf{q}\mathbf{p}) - q^4] e^{-4p^2-4p\mathbf{q}-2q^2-4\lambda^2(2p_x+qx)}.$$

Элементарное, но громоздкое интегрирование приводит затем к результату

$$\chi = \frac{25 S t^2}{48\pi^2 k} e^{-k^2} \left[\varphi_0 + 4\sqrt{2}\lambda \frac{k_x}{k} \varphi_1 + 8\lambda^2 \left(\frac{3k_x^2}{k^2} - 1 \right) \varphi_2 \right], \quad (3.24)$$

где вместо \mathbf{p} введен вектор $\mathbf{k} = \sqrt{2}(\mathbf{p} + i\lambda)$; функции φ_k имеют следующие значения:

$$\varphi_0 = (-39 + 6k^2 + 36k^4 - 8k^6) I(k) - (9k - 20k^3 + 4k^5) e^{-k^2};$$

$$\varphi_1 = \left(\frac{9}{k} - 30k - 12k^3 + 8k^5 \right) I(k) - (9 + 8k^2 - 4k^4) e^{-k^2};$$

$$\varphi_2 = \left(-\frac{3}{2k^2} + 3 - 6k^2 - 4k^4 \right) I(k) + \left(\frac{9}{2k} - 2k - 2k^3 \right) e^{-k^2},$$

$$I(k) = \int_0^k e^{-x^2} dx.$$

Вносим (3.24) в выражение (3.5) для C , принимая во внимание, что $d\mathbf{v} = \frac{8}{S^{3/2}} d\mathbf{p} = \left(\frac{2}{S} \right)^{3/2} dk$. Выполнив интегрирование по углам, определяющим направление вектора \mathbf{k} , и приняв во внимание, что $\lambda^2 \rightarrow 15/16$ при $t \rightarrow 0$, получаем

$$C = \frac{1}{9\pi^3} \sqrt{\frac{S}{2}} \left(\frac{5t}{4} \right)^4 \int_0^\infty dk [\varphi_0^2 + 10\varphi_1^2 + 45\varphi_2^2] e^{-2k^2}. \quad (3.25)$$

Путем интегрирования по частям все входящие в (3.25) интегралы приводятся к элементарным интегралам и к интегралу⁵

$$\int_0^\infty e^{-2k^2} I^2(k) dk = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

В результате элементарных, хотя и очень громоздких, вычислений получаем, приняв во внимание, что $S \rightarrow 20/3$ при $t \rightarrow 0$,

$$C = \frac{\xi}{9 \cdot 64 \cdot \pi^2} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \left(\frac{5t}{4} \right)^4, \quad (3.26)$$

где

$$\xi = \frac{2379247}{27} - \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot 7337 \left[\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \sim 8,019 \cdot 10^4. \quad (3.27)$$

Из (3.7), (3.21) и (3.26) следует, что в случае слабых скачков ширина разрыва d равна

$$d = \frac{12 \cdot 2^{3/4}}{t} \sqrt{\frac{3\pi}{\xi}} \sim \frac{0,2189}{t}.$$

С другой стороны, из (2.14) следует, что в слабых разрывах $t \rightarrow 2(p_2 - p_1)/5(p_2 + p_1)$, так что

$$d = \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} \delta, \quad (3.28)$$

где $\delta = 0,5472$ (при $t \rightarrow 0$).

⁵ Эта формула доказывается путем следующего преобразования:

$$I^2(k) = \int_0^k e^{-x^2} dx \int_0^k e^{-y^2} dy = 2 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{k/\cos\varphi} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} e^{-k^2/\cos^2\varphi} d\varphi.$$

Величина δ выражена здесь в определяемой уравнением (2.6) единице длины. В обычных же единицах длины

$$\delta = 1,368l, \quad (3.29)$$

где l — длина свободного пробега молекулы в газе, которую при слабых разрывах можно считать одинаковой по обеим сторонам разрыва. Таким образом, мы доказали формулу (1.10).

Перейдем теперь к вычислению χ и C для случая сильных скачков ($t \rightarrow 1$). В подынтегральное выражение формулы (3.23) для χ входят четыре слагаемых. Квадратичные по q показатели этих слагаемых равны соответственно $2(1 \pm t)(q_2^2 + q_3^2) - 2(1 \mp t)q_1^2$ и $-2(1 \pm t)q^2$, где q_1, q_2, q_3 означают взаимно перпендикулярные компоненты вектора \mathbf{q} , причем компонента q_1 параллельна единичному вектору \mathbf{a} . Так как в подынтегральное выражение входит помимо показательных сомножителей, также и абсолютная величина компоненты q_1 , то при $t \rightarrow 1$ три из четырех интегралов, из которых складывается χ , стремятся к бесконечности соответственно, как $1/(1-t)$, $1/(1-t)$ и $1/(1-t)^2$, тогда как четвертый интеграл остается конечным. Поэтому при $t \rightarrow 1$ в выражении (3.23) для χ можно оставить один только старший член, а именно можно положить ⁶:

$$\chi = -\frac{25}{4\pi^4} S (1-r^2) (1-t^2)^{3/2} e^{-\frac{4\lambda}{1-t^2}} \int d\mathbf{q} d\Omega |\mathbf{q}\mathbf{a}| \times \\ \times \exp[-4p^2 - 2(1-t)(q^2 + 2\mathbf{q}\mathbf{p}) - 4\lambda(2p_x + q_x)]. \quad (3.30)$$

Выполнив интегрирование по $d\Omega$ и приняв во внимание, что при $t \rightarrow 1$ $r \rightarrow 3/5$, получаем

$$\chi = -\frac{8S}{\pi^3} (1-t)^{3/2} e^{-\frac{4\lambda}{1-t^2}} \int q d\mathbf{q} \exp[-4p^2 - 2(1-t)(q^2 + 2\mathbf{q}\mathbf{p}) - \\ - 4\lambda(2p_x + q_x)].$$

Вносим это выражение для χ в выражение (3.5) для C и выполняем сначала интегрирование по $d\mathbf{v}$, т. е. по $\frac{8}{S^{3/2}} d\mathbf{p}$. Отбрасывая

⁶ Приведенное в тексте утверждение может показаться необудительным, потому что учтенный нами член выражения для χ пропорционален $e^{-4p^2}/(1-t)^2$, тогда как некоторые из неучтенных пропорциональны $[1/(1-t)] \exp[-2(1 \mp t)(p_2^2 + p_3^2) - 2(1 \pm t)p_1^2]$ и поэтому при $p \rightarrow \infty$ могут превышать учтенный. Если, однако, подставить χ в выражение для C , то можно показать, что вклад в значение C неучтенных нами членов в $1/\sqrt{1-t}$ раз меньше вклада учтенного члена. Физически этот главный учтенный нами член равен числу молекул более горячей и плотной второй компоненты смеси газов (3.2), уходящих за единицу времени из данного интервала скоростей $d\mathbf{v}$ благодаря соударениям с молекулами более холодной и менее плотной компоненты 1 смеси газов, с помощью которой мы приближенно описываем структуру разрыва.

в показателе член, пропорциональный $(1 - t)(\mathbf{q}\mathbf{q}')$, получаем

$$C = \frac{1}{\pi^4} \sqrt{\frac{2S}{\pi}} - (1 - t^2)^3 K^2, \quad (3.31)$$

$$K = \int q d\mathbf{q} \exp \left[-2(1 - t)q^2 - 4\lambda t q_x - \frac{4t\lambda^2}{1 - t^2} \right]. \quad (3.32)$$

Приняв во внимание, что $\lambda^2 \rightarrow [3(1 - t)]/4$ при $t \rightarrow 1$, получаем

$$K = \frac{\pi\eta}{2\sqrt{3}(1 - t)^2},$$

где

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-3/2} + 4 \int_0^{\sqrt{3/2}} e^{-x^2} dx \approx 3,523. \quad (3.33)$$

Приняв далее во внимание, что $S \rightarrow 16/(1 - t)$ при $t \rightarrow 1$, получаем окончательно

$$C = \frac{2\eta^2}{\pi} \left[\frac{2}{3\pi(1 - t)} \right]^{3/2}. \quad (3.34)$$

Из (3.7), (3.21) и (3.34) получаем

$$d = \sqrt{\frac{A}{C}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\eta} \approx 0,5031 \quad (t \rightarrow 1). \quad (3.35)$$

При $t \rightarrow 1$ и $r \rightarrow 3/2$ определяемая формулой (2.16) единица длины x_0 равна $l_1 = 4l_2$, где l_1 и l_2 — длины свободного пробега молекул до и после разрыва. Таким образом,

$$d = 0,5031l_1 = 2,012l_2 \quad (t \rightarrow 1), \quad (3.36)$$

что совпадает с формулой (1.11).

Можно сказать, что в предельном случае сильных разрывов более горячий и плотный газ проникает в более холодную и разреженную среду примерно на две длины свободного пробега молекул в этой среде.

Из предельных формул (3.28) и (3.35) интерполяцией можно получить приближенное значение величины d для средних разрывов. Так как $l_1 \neq l_2$, при этой интерполяции нужно, очевидно, пользоваться единицей длины x_0 .

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
Игорь Евгеньевич Тамм (краткий биографический очерк)	7

I

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. Электродинамика анизотропной среды в специальной теории относительности, 1924	19
2. Кристаллооптика теории относительности в связи с геометрией биквадратичной формы, 1924	33
3. Электродинамика анизотропных сред в специальной теории относительности (<i>совместно с Л. И. Мандельштамом</i>), 1925	62
4. Когерентное излучение быстрого электрона в среде (<i>совместно с И. М. Франком</i>), 1937	68
5. Свечение чистых жидкостей под действием быстрых электронов (<i>совместно с И. М. Франком и П. А. Черенковым</i>), 1938	75
6. Излучение, вызываемое равномерно движущимися электронами, 1939	77
7. О токах в ионосфере, обуславливающих вариации земного магнитного поля, 1944	100
8. Излучение электрона при равномерном движении в преломляющей среде (<i>совместно с И. М. Франком</i>), 1944	113
9. Общие свойства излучения, испускаемого системами, движущимися со сверхсветовыми скоростями, и некоторые приложения к физике плазмы, 1959	121

II

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

10. К квантовой теории парамагнетизма, 1925	133
11. Попытка количественного определения принципа соответствия и вычисление интенсивности спектральных линий. I. 1925	146
12. О квантовой теории молекулярного рассеяния света в твердых телах, 1930	168
13. Обобщенные шаровые функции и волновые функции электрона в поле магнитного полюса, 1931	186
14. К теории фотоэффекта в металлах (<i>совместно с С. П. Шубиным</i>), 1931	196
15. Некоторые замечания о теории фотоэлектрического эффекта в металлах, 1932	212

16. О возможных связанных состояниях электронов на поверхности кристалла, 1932	216
17. О работе выхода электронов из металла (<i>совместно с Д. И. Блохинцевым</i>), 1933	227
18. Энергия нулевых колебаний и физические свойства H_2O и D_2O (<i>совместно с Д. Д. Берналом</i>), 1935	256
19. Соотношение неопределенности энергия—время в перелятивистской квантовой механике (<i>совместно с Л. И. Мандельштамом</i>), 1945	258
20. О некоторых математических методах теории рассеяния частиц, ч. I, 1948	266
21. О некоторых математических методах теории рассеяния частиц, ч. II, 1949	279

III

ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ СИЛ И АТОМНОГО ЯДРА

22. Магнитный момент нейтрона (<i>совместно с С. А. Альтшулером</i>), 1934	283
23. Обменные силы между нейтронами и протонами и теория Ферми, 1934	287
24. Взаимодействие нейтронов и протонов, 1934	289
25. Бета-радиоактивность и ядерные силы, 1936	290
26. Изотопное смещение спектральных линий и взаимодействие нейтронов с электронами, 1938	320
27. О происхождении ядерных сил (<i>совместно с Л. Д. Ландау</i>), 1940	326

IV

ПРИКЛАДНЫЕ РАБОТЫ

28. Теория электромагнитных процессов в слоистом сердечнике (<i>совместно с В. Л. Гинзбургом</i>), 1943	328
29. О вынужденных колебаниях бесконечной пластинки, соприкасающейся с водой (<i>совместно с Л. М. Бреховских</i>), 1946	352
30. Теория магнитного термоядерного реактора. I, 1958	363
31. Теория магнитного термоядерного реактора. III, 1958	380
32. Об электродинамическом взаимодействии электронов в ускорителях, 1962	390
33. О ширине ударных волн большой интенсивности, 1965	424

ИГОРЬ ЕВГЕНЬЕВИЧ ТАММ

Собрание научных трудов
Том I

*Утверждено к печати
Отделением ядерной физики
Академии наук СССР*

Редактор *Б. М. Болотовский*
Художник *Л. Ф. Шканов*
Художественный редактор *Н. Н. Власик*
Технический редактор *П. С. Кашина*

Сдано в набор 16/IX 1974 г.
Подписано к печати 11/II 1975 г.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская 1.
Усл. печ. л. 27,5. Уч.-изд. л. 27,2. Тираж 4100.
Т-02044. Тип. зак. 1488. Цена 2 р. 16 к.

Издательство «Наука»
103717 ГСП. Москва, К-62, Подосенский пер., 21
1-я типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

<i>Страница</i>	<i>Строка</i>	<i>Напечатано</i>	<i>Должно быть</i>
4	5 св.	443	440
91	Рис.	w	w_0
379	2 сн.	θ П. Е. Курчатов	θ_0 И. В. Курчатов

И. Е. Тамм, т. I