

*W. M. ...*

# И.Е. ТАММ

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ  
В ДВУХ ТОМАХ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» • МОСКВА • 1975



# И.Е. ТАММ

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ

## II

ТЕОРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ  
И ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ  
ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

РАЗНОЕ

(ОБЗОРЫ, ВЫСТУПЛЕНИЯ, PERSONALIA,  
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЕ РАБОТЫ И Т. П.)



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» · МОСКВА · 1975

**Собрание научных трудов в двух томах. Т а м м И. Е.** Теория элементарных частиц и взаимодействий при высоких энергиях. Фундаментальные проблемы. Разное (обзоры, выступления, Personalia, научно-популярные работы и т. п.), том II. Изд-во «Наука», 1976, стр. 500.

Собрание трудов академика И. Е. Тамма содержит практически все его научные работы, опубликованные за период с 1924 по 1972 г. в отечественных и зарубежных изданиях, а также часть написанных им обзоров, научно-популярных статей и т. п. Научные интересы И. Е. Тамма весьма обширны и охватывают такие разделы, как электродинамика, квантовая механика и теория твердого тела, теория ядерных сил и атомного ядра, теория элементарных частиц и взаимодействий при высоких энергиях. Велик вклад И. Е. Тамма и в разработку фундаментальных проблем теории поля. Им было выполнено также немало прикладных работ. Широко известна научно-публицистическая деятельность И. Е. Тамма.

В том II вошли статьи по теории элементарных частиц и взаимодействий при высоких энергиях, работы по фундаментальным проблемам теории поля и часть написанных И. Е. Таммом обзоров, научно-популярных статей и т. п.

Издание представляет значительный интерес для научных работников в области физики, инженеров-физиков, а также преподавателей, студентов и аспирантов физических специальностей вузов.

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР**  
академик В. Л. ГИНЗБУРГ

**РЕДАКТОРЫ-СОСТАВИТЕЛИ**  
доктора физ.-матем. наук  
**Б. М. БОЛОТОВСКИЙ, И. М. ДРЕМИН**

#### ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

<i>Страница</i>	<i>Строка</i>	<i>Напечатано</i>	<i>Должно быть</i>
4	5 св.	1976	1975
	5 св.	500	488
56	12 сн.	вызванного	вызванного

И. Е. Тамм, т. II

# ТЕОРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

## К ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЭЛЕКТРОНА <sup>1</sup>

Движение вращающегося электрона исследуется с помощью полученных Томсеном релятивистских уравнений движения незаряженного твердого тела, причем магнитный момент электрона характеризуется не 6-вектором, а 4-вектором. Дополнительная энергия —  $M\mathbf{H}$ , которая есть у электрона в магнитном поле, объясняется изменением его кинетической энергии вращения. Вывод Томаса, что скорость прецессии электронной оси в «кажущемся» магнитном поле  $\mathbf{H}^* = -\frac{1}{c} [v\mathbf{E}]$  равна половине скорости в «настоящем» магнитном поле равной интенсивности, подтверждается в первом приближении, однако предположение, что аналогичное утверждение справедливо и для магнитной энергии электрона, как оказывается, теряет силу.

### § 1. Введение и резюме

Релятивистски инвариантные квантовомеханические уравнения «вращающегося» электрона, как известно, были получены Дираком <sup>2</sup> своеобразным способом, при котором не использовалась классическая теория вращающегося заряда. Существенный результат дираковской работы, что свойства электрона, которые классически описываются 3-импульсом и магнитным моментом электрона, с квантовомеханической точки зрения представляя собой характерные свойства электрического точечного заряда, конечно, не может иметь места в классической теории соответствия. Все же можно было бы думать, что неудачу всех попыток вывести релятивистские квантовомеханические уравнения магнитного электрона в согласии с принципом соответствия хотя бы

<sup>1</sup> *Z. Phys.*, 1929, 55, 199. Перевод Р. Э. Каллош.

<sup>2</sup> *P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc. London*, 1928, A 117, 610; 118, 351.

частично можно объяснить непоследовательным применением классической электродинамики к проблеме вращающегося заряда. В надежде прояснить это положение в данном сообщении исследуется вывод релятивистских уравнений движения твердого вращающегося заряда в рамках классической теории.

От релятивистской теории вращающегося электрона ожидают в первую очередь оправдания следующего предположения, к которому, как известно, привели свойства атомных спектров: в «кажущемся» магнитном поле  $\mathbf{H}^*$

$$\mathbf{H}^* = -\frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{E}], \quad (1)$$

действию которого электрон подвергается во время своего движения в электрическом поле  $\mathbf{E}$ , электрон имеет вдвое меньшую дополнительную магнитную энергию, чем в «действительном» внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$  той же интенсивности.

Томас <sup>4</sup> в заметке указал на связь этого предположения со свойствами релятивистски вычисленной прецессии оси вращения электрона; а именно, согласно Томасу, должно быть

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = [\mathbf{M}\mathbf{H}] + \frac{1}{2} [\mathbf{M}\mathbf{H}^*], \quad (2)$$

где  $\mathbf{S}$  означает 3-импульс, а  $\mathbf{M}$  — магнитный момент электрона. Затем Френкель <sup>5</sup> разработал релятивистскую теорию вращающегося электрона и подтвердил в первом приближении справедливость уравнения (2) для скорости прецессии, сообщенной электрону при вращении вокруг ядра. Перенос множителя  $1/2$  во втором члене уравнения прецессии (2) на энергию не кажется необходимым. Тем не менее в квантовой теории вращающегося электрона стало обычным вводить в гамильтонову функцию электрона множитель  $1/2$  в соответствии с уравнением (2) и для обоснования этого метода ссылаться на работу Френкеля <sup>6</sup>.

Вообще, мне кажется, против всей френкелевской теории вращающегося электрона имеются серьезные возражения. Во-первых, она основана на некоторых ad hoc введенных произвольных предположениях. Во-вторых, френкелевские уравнения движения электрона не второго, как должно было быть во всякой классической теории, а третьего порядка <sup>7</sup>; а именно они определяют скорость изменения ускорения электрона  $d^2\mathbf{v}/dt^2$  в зависимости от  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $d\mathbf{v}/dt$ . Далее, у Френкеля возникает инерционная масса

<sup>3</sup> В выражении для  $\mathbf{H}^*$  мы опустили вторые степени  $v/c$ .

<sup>4</sup> L. H. Thomas. Nature, 1926, 117, 514.

<sup>5</sup> J. Frenkel. Z. Phys., 1926, 37, 243, ср. также работу L. H. Thomas. Phil. Mag., 1927, 3, 1, которая мне стала известна только после написания этого сообщения и которая в некотором отношении ближе к нашему пониманию, чем френкелевская.

<sup>6</sup> Ср. W. Heisenberg, P. Jordan. Z. Phys., 1926, 37, 263; W. Pauli. Ebenda, 1927, 43, 601; C. G. Darwin. Proc. Roy. Soc. London, 1927, A116, 227.

<sup>7</sup> Чтобы это усмотреть, нужно в френкелевское уравнение (21) (l. c.) вставить значение (14) вспомогательного вектора  $a_7$ .

электрона, увеличенная на деленный на  $c^2$  вклад потенциальной энергии, которую электрон имеет из-за своего магнитного момента во внешнем электромагнитном поле. С другой стороны, масса электрона, которую электрон имеет из-за своего заряда во внешнем электромагнитном поле, не зависит от потенциальной энергии, и эти два факта должны каким-то образом быть приведены в соответствие <sup>8</sup>.

Последовательное применение релятивистской электродинамики к проблеме вращающегося электрона, по-моему, стало возможным только на основе недавно выведенных Г. Томсеном <sup>9</sup> релятивистских уравнений движения незаряженного твердого тела. Основу томсеновской работы составляет исходящее от Э. Ферми <sup>10</sup> рациональное определение поступательно движущейся системы покоя движущегося тела, которое кажется малоизвестным и поэтому в § 2 будет коротко обсуждаться. Оказывается, что момент импульса собственного вращения тела наиболее просто характеризуется 4-вектором, ортогональным к мировой линии центра тяжести тела. Если считать магнитный момент электрона пропорциональным его 3-импульсу, то и этот момент, оказывается, характеризуется 4-вектором (а не 6-вектором, как у Френкеля). Уравнения движения электрона тогда выводятся не произвольно. Нужно подчеркнуть следующие результаты.

В противоположность френкелевской теории здесь вклад механического и тем самым также магнитного момента электрона во время его движения, вообще говоря, не будет получен, что объясняется влиянием сил индукции, возникающих при изменении магнитного поля. Хотя относительные изменения 3-импульса электрона в практически встречающихся полях бесконечно малы, этими изменениями нельзя пренебречь из-за измеряемых изменений вращательной энергии электрона. Часть этой энергии, зависящая от магнитной силы поля, равна потенциальной энергии, которую имеет магнитный диполь с импульсом, равным импульсу электрона в магнитном поле. Тем самым «дополнительная магнитная энергия» электрона объясняется его кинетической энергией вращения, что согласуется с общими принципами электродинамики (§ 7).

При периодическом движении центра тяжести электрона для скорости прецессии оси вращения справедливо уравнение Томаса (2) (§ 8). Значит «дополнительная магнитная энергия» электрона пропорциональна магнитному полю в системе его покоя независимо от того, является ли поле, измеренное в системе покоя атомного ядра, чисто электрическим или же частично магнитным (§ 7).

<sup>8</sup> В общем потенциальную энергию электрона следует рассматривать как взаимную энергию электрона и заряда, порождающего внешнее поле (например, атомного ядра). Тем самым может быть повышена инерционная масса общей системы электрон—ядро, но не одной из этих частиц.

<sup>9</sup> G. Thomsen. Math. Z., 1928, 29, 96.

<sup>10</sup> E. Fermi. Rend. Accad. naz. Lincei, 1922, 31, 21, 51, 101, 184, 306.

Тем самым упомянутое вначале предположение о величине дополнительной энергии электрона в «кажущемся» поле теряет силу и противоречие между теорией и спектроскопическими данными, которое привело к этому предположению, кажется, продолжает существовать. Но я склонен предполагать, что это противоречие тем не менее кажущееся и может быть устранено еще в рамках боровской квантовой теории. По-видимому, неоправданно вначале квантовать движение точечного электрона, а потом к полученному вкладу энергии просто добавлять дополнительную магнитную энергию. Было бы правильное вначале получить функцию Гамильтона для проблемы вращающегося электрона в целом, а потом уже производить квантование обычным образом. Тогда вполне возможно, что фактически получатся результаты, которые не согласуются с получаемыми методом возмущений при движении точечного электрона, так как вращение электрона и движение его центра тяжести тесно между собой связаны и нет возможности рассматривать их отдельно. Тем самым можно надеяться с помощью правильного выбора фазового интеграла привести теорию к согласию с опытом.

В поддержку этого предположения я нахожу среди прочих тот факт, что при движении вращающегося (в противоположность точечному) электрона в радиальном электрическом поле момент импульса  $K$  движения его центра тяжести меняется, тогда как (усредненная) сумма вектора  $K$  и момента импульса  $S$  собственного вращения (по крайней мере приближенно) остается постоянной (§ 9). Также согласно дираковской теории ни  $K$ , ни  $S$  по отдельности, а только их сумма образует интеграл движения электрона в радиальном электрическом поле. С этим фактом связано также значительное отклонение дираковской систематики спектра водорода от обычной; с этой систематикой в тесной связи, однако, находится согласие между теоретически вычисленным и наблюдаемым расщеплением дублетов и т. д.

Чтобы проверить высказанные предположения, нужно прежде всего привести уравнения движения электрона к гамильтоновой форме, что мне до сих пор не удалось. Вывод гамильтоновых уравнений дал бы также возможность с помощью известного метода теории матриц получить квантовомеханические уравнения вращающегося электрона.

## § 2. Поступательно движущаяся система координат

При определенном сдвиге начальной точки некоторого вектора  $u^i$  вдоль кривой  $C$ , точки которой заданы функцией  $x^i(\tau)$ , компоненты вектора  $u^i$  можно понимать как функции  $u^i(\tau)$  параметра кривой  $\tau$ . По обычному, исходящему от Леви-Чивита определению, сдвиг называется параллельным, если  $u^i(\tau)$  удовлетворяют следующему уравнению:

$$\frac{du^i}{d\tau} + \Gamma^i_{jk} u^j \frac{dx^k}{d\tau} = 0, \quad (3)$$

причем если задан фундаментальный метрический тензор пространства  $g_{ik}$ , то  $\Gamma^i_{jk}$  совпадают с трехиндексными символами Кристоффеля. При таком параллельном сдвиге длина вектора  $u = \sqrt{g_{ij} u^i u^j}$  не меняется, также угол между двумя любыми векторами остается при сдвиге этих векторов вдоль  $C$  неизменным.

Ферми (1. с.) в 1922 г. для векторов, ортогональных к направлению сдвига, удовлетворяющих уравнению

$$g_{ij} u^i \frac{dx^j}{d\tau} = 0, \quad (4)$$

дал другой закон сдвига, гласящий следующее:

$$\frac{du^i}{d\tau} + \Gamma^i_{jku} u^j \frac{dx^k}{d\tau} = -g_{rs} u^r \left( \frac{d^2 x^s}{ds^2} + \Gamma^s_{lm} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^m}{ds} \right) \frac{dx^i}{d\tau}, \quad (5)$$

где  $s$  означает длину дуги кривой сдвига  $C$ :

$$ds = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}.$$

Как и в случае сдвига Леви-Чивита, так и в случае сдвига Ферми длины векторов и углы между ними сохраняются. Но существенная разница состоит в том, что вектор, перпендикулярный  $C$ , при сдвиге вдоль этой кривой согласно закону Ферми остается перпендикулярным  $C$ , в то время как при сдвиге по Леви-Чивита это происходит тогда и только тогда, когда кривая  $C$  — геодезическая; в этом случае вообще оба закона сдвига полностью совпадают<sup>11</sup>.

Если нужно привязать к движущейся материальной точке систему покоя, то эта система координат при движении точки  $M$  должна сдвигаться вдоль мировой линии  $C$  точки таким образом, чтобы временная координата системы все время была тангенциальна и тем самым пространственные координаты все время ортогональны к  $C$ . Если материальная точка не движется по геодезической линии, то закон Леви-Чивита не удовлетворяет этому требованию и нужен фермиевский закон.

В произвольной точке  $P$  мировой линии  $C$  материальной точки  $M$  берут четыре взаимно ортогональных единичных вектора  $u^{(1)}$ ,  $u^{(2)}$ ,  $u^{(3)}$ ,  $dx^i/ds$ :

$$g_{ij} u^{(a)}_i u^{(b)}_j = -\delta_{ab}^{12}, \quad g_{ij} u^{(a)}_i \frac{dx^j}{ds} = 0, \quad g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 1. \quad (6)$$

<sup>11</sup> Бесконечно малый фермиевский сдвиг можно понимать как суперпозицию бесконечно малого леви-чивитовского параллельного сдвига и последующего вращения сдвинутых векторов; вращение должно обеспечить ортогональность вектора к касательной  $C$  и происходить в плоскости, определяемой этой касательной и параллельно сдвинутому вектором.

<sup>12</sup> Из-за знака «минус» замечаем, что векторы  $u^{(a)}$  пространственно подобны.

Тангенциальный к  $C$  вектор  $dx^i/ds$  в долях скорости света равен измеряемой 4-скорости точки  $M$ ; греческие индексы в (6), как везде в дальнейшем<sup>13</sup>, пробегают значения 1, 2, 3, латинские— 1, 2, 3, 4. Если теперь сдвигать векторы вдоль  $C$  таким образом, что уравнение (6) сохраняется, то с помощью  $u_{\alpha}^i(\tau)$  и  $dx^i/ds$  определяется система координат, движущаяся с точкой  $M$ . Если этот сдвиг удовлетворяет фермиевскому закону (5), то эта система координат движется поступательно.

Ограничимся в дальнейшем псевдоевклидовой метрикой

$$g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad g_{4\alpha} = g_{\alpha 4} = 0, \quad g_{44} = 1, \quad (7)$$

тогда из-за исчезновения  $\Gamma_{jk}^i$  закон сдвига (5) принимает простейшую форму

$$\frac{du_{(\alpha)}^i}{d\tau} = -\frac{d^2x_r}{ds^2} u_{(\alpha)}^r \frac{dx^i}{d\tau}. \quad (8)$$

Замечая далее, что детерминант, составленный из 16 компонент векторов  $u_{(\alpha)}^i$  и  $dx^i/ds$ , «псевдоортогонален» из-за (6) и (7), легко доказать соотношение<sup>14</sup>

$$-\sum_{\alpha} u_{(\alpha)}^i u_{(\alpha)}^j + \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = g^{ij}. \quad (9)$$

<sup>13</sup> За исключением  $\nu$  в § 3.

<sup>14</sup> К матрице  $D$

$$D = \begin{pmatrix} u_{(1)}^1 & u_{(1)}^2 & u_{(1)}^3 & u_{(1)}^4 \\ u_{(2)}^1 & u_{(2)}^2 & u_{(2)}^3 & u_{(2)}^4 \\ u_{(3)}^1 & u_{(3)}^2 & u_{(3)}^3 & u_{(3)}^4 \\ \frac{dx^1}{ds} & \frac{dx^2}{ds} & \frac{dx^3}{ds} & \frac{dx^4}{ds} \end{pmatrix},$$

обратная матрица  $D^{-1}$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -u_{(1)1} & -u_{(2)1} & -u_{(3)1} & \frac{dx_1}{ds} \\ -u_{(1)2} & -u_{(2)2} & -u_{(3)2} & \frac{dx_2}{ds} \\ -u_{(1)3} & -u_{(2)3} & -u_{(3)3} & \frac{dx_3}{ds} \\ -u_{(1)4} & -u_{(2)4} & -u_{(3)4} & \frac{dx_4}{ds} \end{pmatrix},$$

где  $u_{(\alpha)i}$  — ковариантные компоненты вектора  $u_{(\alpha)}$ :

$$u_{(\alpha)i} = g_{ij} u_{(\alpha)}^j.$$

Из  $DD^{-1} = D^{-1}D = 1$  следует

$$-\sum_{\alpha} u_{(\alpha)i} u_{(\alpha)}^j + \frac{dx_i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = \delta_{ij} = g_i^j,$$

что согласуется с (9).



Если, наконец, выбрать векторы  $u_{(\alpha)}^i$  таким образом, чтобы они образовывали с  $dx^i/ds$  правовинтовую систему, и использовать известное утверждение, что минор второго порядка детерминанта  $D$  равен деленному на  $D$  алгебраическому дополнению соответствующего минора обратному к  $D$  детерминанта, то легко получить<sup>15</sup>

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} u_{(\beta)}^i u_{(\gamma)}^j = e^{ijhk} u_{(\alpha)h} \frac{dx_k}{ds}, \quad (10)$$

где через  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ , соответственно  $e^{ijhk}$ , обозначены компоненты трех-, соответственно четырехмерного, полностью антисимметричного тензора.

Компоненты тензора  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ , как известно, отличны от нуля, только если индексы  $\alpha, \beta, \gamma$  все различны, причем в этом случае

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \pm 1 \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$$

в зависимости от того, образует ли последовательность  $\alpha, \beta, \gamma$  1, 2, 3 четную или нечетную перестановку. Соответствующим образом тензорные компоненты

$$e_{ijhk} = g_{il} g_{jm} g_{kn} g_{lp} e^{lmnp} = -e^{ijhk} \quad (i, j, h, k = 1, 2, 3, 4)$$

отличны от нуля, только если индексы  $i, j, k, l$  имеют различные значения, причем в этом случае

$$e_{ijhk} = -e^{ijhk} = \pm 1$$

в зависимости от того, образует ли последовательность чисел  $i, j, h, k$  из 1, 2, 3, 4 четную или нечетную перестановку.

### § 3. Свободное движение твердого тела

Если с материальной точкой  $M$  некоторого тела связана описанным образом система координат, движущаяся совместно по фермиевскому закону сдвига, то движение тела полностью описывается заданием мировой линии  $C(\tau)$  точки  $M$  и заданием как функций  $\tau$  координат  $\eta_\nu^\alpha(\tau)$  каждой материальной точки  $\nu$  тела, относящихся к пространственным осям  $u_{(1)}^i, u_{(2)}^i, u_{(3)}^i$  ( $\nu=1, 2, \dots, N$ , где  $N$  означает число точек тела); под  $\eta_\nu^\alpha$  понимаются координаты пересечения мировых линий точек  $\nu$  с ортогональной к  $C(\tau)$  трехмерной поверхностью пространственно-временного мира. Если семейство этих поверхностей, зависящее от  $\tau$ , ортогонально к мировым линиям всех точек тела, то координаты  $\eta_\nu^\alpha(\tau)$  постоянны и движение называется твердым и по-

<sup>15</sup> Заметим, что из-за (7) детерминант  $|D|$  равен  $|D^{-1}|$  и тем самым  $|D|$  из-за  $DD^{-1}=1$  равно  $\pm 1$ . Если  $|D| = \pm 1$ , то матрица  $\bar{D}^{-1}$ , транспонированная к  $D^{-1}$ , является обратной к  $D$  (т. е. элементы  $\bar{D}^{-1}$  равны алгебраическим дополнениям соответствующих элементов из  $D$ ).

ступательным<sup>16</sup>. Вообще движение, согласно Г. Томсену (l. c.), называют твердым, если определенная совокупностью упомянутых точек пересечения трехмерная форма тела не изменяется во время движения, т. е. если возможно каждой материальной точке  $\gamma$  тела сопоставить постоянные твердые координаты  $z_\gamma^\alpha$  так, что

$$\eta_\gamma^\alpha = \sum_\beta \xi_\beta^\alpha z_\gamma^\beta,$$

причем косинусы направления  $\xi_\beta^\alpha(\tau)$  имеют одинаковое значение для всех точек и удовлетворяют условиям ортогональности.

$$\sum_\alpha \xi_\lambda^\alpha \xi_\mu^\alpha = \delta_{\lambda\mu}, \quad \sum_\lambda \xi_\lambda^\alpha \xi_\lambda^\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (11)$$

Томсен в цитированной статье показал, что твердое движение малого тела в заданном гравитационном поле в полной аналогии с классической механикой определяется лагранжевыми уравнениями

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial L}{\partial x^k}, \quad (12)$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \omega_\alpha} = \sum_{\beta, \gamma} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_\beta} \omega_\gamma + \sum_\lambda \frac{\partial L}{\partial \xi_\beta^\lambda} \xi_\lambda^\gamma \right), \quad (13)$$

где  $\dot{x}^k$  равно  $dx^k/d\tau$ , а  $\omega_\alpha$  — компоненты угловой скорости тела, отнесенные к твердым пространственным осям  $z^\alpha$  (относительно поступательно движущихся осей  $u_{(\alpha)}^i$ ).

Если тело сферически-симметрично и если начальную точку поступательно движущегося пересечения осей совместить с центром тяжести<sup>17</sup>, то данная Томсеном лагранжева функция в интересующем нас случае свободного от кривизны мира принимает следующую простую форму:

$$L_0 = -cm_0 \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} + \frac{1}{2 \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}} cB \sum_\alpha \omega_\alpha^2,$$

где  $m_0$  означает массу покоя, а  $B$  — момент инерции тела<sup>18</sup>.

<sup>16</sup> Исходя из этого определения твердого движения, Ферми при вычислении электромагнитной массы пришел к крайне интересным результатам. Ср. «Correzione di una grave discrepanza fra la theoria delle masse elettromagnetiche e la theoria della relativity». Rend. Accad. naz. Lincei, 1922, 31, 184, 306.

<sup>17</sup> Неясно, можно ли у тела конечных размеров выбрать эту точку произвольно. Проведенные до сих пор исследования, которые еще должны быть углублены, кажется, подтверждают возможность, что движение, являющееся твердым относительно некоторой точки  $M$  тела, совсем не должно быть твердым относительно другой точки  $M'$ . — *Примечание при корректуре.*

<sup>18</sup> Мы помножили данное Томсеном значение  $L$  на  $-c$ , так что при  $\tau$ , равном  $t$ , первый член в  $L$  имеет обычный вид

$$-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Введем вместо  $\omega_\alpha$  компоненты скорости вращения, отнесенные к движущимся совместно осям  $u_{(\alpha)}^i$ :

$$\Omega_\alpha = \sum_\beta \xi_\beta^\alpha \omega_\beta,$$

тогда, как легко вычислить<sup>19</sup>,

$$L_0 = -m_0 c \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} + \frac{1}{2 \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}} B c \sum_\alpha \Omega_\alpha^2, \quad (14)$$

и уравнения (13) принимают более простой вид:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \Omega_\alpha} = - \sum_{\beta, \gamma} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial L}{\partial \Omega_\beta} \Omega_\gamma. \quad (15)$$

Для дальнейшего заметим еще только, что трехмерному вектору  $\Omega_\alpha$ , определенному в поступательной системе покоя, в общей системе координат соответствует 4-вектор  $\Theta^i$

$$\Theta^i = \sum_\alpha u_{(\alpha)}^i \Omega_\alpha; \quad (16)$$

$\Theta^i$  из-за (6) ортогонально к 4-скорости  $\dot{x}^i$  тела

$$\Theta_i \dot{x}^i = 0. \quad (17)$$

Из (16) и (6) следует далее

$$\Theta_i \Theta^i = g_{ij} \Theta^i \Theta^j = - \sum_\alpha \Omega_\alpha^2. \quad (18)$$

Наконец, нужно заметить, что вращательная скорость  $\Omega_\alpha$  или  $\Theta^i$  отнесена к произвольному параметру  $\tau$  мировой линии центра тяжести тела. Если мы захотим эту скорость отнести к собственному времени  $\sigma$  центра тяжести

$$d\sigma = \frac{1}{c} ds = \frac{1}{c} \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} d\tau, \quad (19)$$

то будем обозначать ее  $\hat{\Omega}_\alpha$  или  $\hat{\Theta}^i$ :

$$\hat{\Omega}_\alpha = \Omega_\alpha \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{c \Omega_\alpha}{\sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}}, \quad \hat{\Theta}^i = \Theta^i \frac{d\tau}{d\sigma}. \quad (19')$$

#### § 4. Лагранжева функция вращающегося электрона

Мы рассматриваем вращающееся, заряженное, твердое, сферически-симметричное тело, которое будем для краткости называть электроном. Чтобы построить его лагранжеву функцию,

<sup>19</sup> Нужно учесть соотношение

$$\xi_\beta^\alpha = \sum_{\lambda, \mu} \varepsilon_{\beta\lambda\mu} \xi_\lambda^\alpha \omega_\mu.$$

мы должны, во-первых, известным образом к функции (14) добавить член

$$L' = \frac{e}{c} \varphi_i \dot{x}^i, \quad (20)$$

где  $\varphi_i$  — 4-потенциал (заданного) электромагнитного поля, компоненты которого следующим образом выражаются через обычные трехмерные потенциалы  $A$  и  $\varphi$ :

$$\varphi_\alpha = A_\alpha, \quad \varphi_4 = -\varphi. \quad (20')$$

Во-вторых, однако, нужно определить часть лагранжевой функции, соответствующую магнитному моменту электрона.

Прежде всего, мы принимаем, что магнитный момент электрона пропорционален отнесенной к собственному времени центра тяжести и измеренной в поступательной системе покоя скорости вращения, так что отнесенные к  $u_{(\alpha)}^i$ -осям компоненты момента равны

$$\mu_\alpha = C \hat{\Omega}_\alpha = C \Omega_\alpha \frac{d\tau}{d\sigma}, \quad (21)$$

где  $C$  — константа. Кроме того, мы принимаем по аналогии с классической механикой, что упомянутая часть лагранжевой функции может быть сопоставлена потенциальной энергии магнитного диполя  $\mu_\alpha$  в поступательной системе покоя:

$$L'' = \sum_\alpha H''_\alpha \mu_\alpha \frac{d\sigma}{d\tau} = C \sum_\alpha H''_\alpha \Omega_\alpha \quad (22)$$

(через  $H''_\alpha$  обозначена измеренная в системе электрона напряженность магнитного поля). Множитель  $d\sigma/d\tau$  следует ввести в (22), если мы хотим отнести лагранжеву функцию не к собственному времени, а к произвольному параметру  $\tau$ .

Мы переходим теперь от системы покоя к произвольной системе  $x^i$ . В этой системе магнитному моменту электрона соответствует 4-вектор  $M^i$ :

$$M^i = \sum_\alpha u_{(\alpha)}^i \mu_\alpha = C \hat{\Theta}^i \quad (23)$$

(ср. (16)), ортогональный к 4-скорости. Далее, напряженность магнитного поля  $H_\alpha$  образует пространственную часть антисимметричного тензора поля  $F_{ij}$ , временную часть которого определяет электрическая напряженность  $E_\alpha$ :

$$F_{\alpha\beta} = \sum_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} H_\gamma, \quad F_{\alpha 4} = E_\alpha. \quad (24)$$

Измеренные в системе покоя (штрихованные) пространственные компоненты  $F''_{ij}$  связаны с компонентами  $F_{ij}$  в  $x^i$ -системе с помощью коэффициентов преобразования:

$$F''_{\beta\gamma} = F_{ij} u_{(\beta)}^i u_{(\gamma)}^j.$$

Из обоих последних уравнений и из (22) следует

$$L'' = \frac{1}{2} CF_{ij} u_{(\beta)}^i u_{(\gamma)}^j \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \Omega_\alpha, \quad (25)$$

где нужно суммировать по всем индексам.

Суммируя вклады  $L$ ,  $L'$ ,  $L''$ , получаем полную лагранжеву функцию электрона:

$$L = -m_0 c \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} + \frac{1}{2\sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}} Bc \sum_\alpha \Omega_\alpha^2 + \frac{e}{c} \varphi_i \dot{x}^i + \frac{1}{2} CF_{ij} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} u_{(\beta)}^i u_{(\gamma)}^j \Omega_\alpha. \quad (26)$$

### § 5. Движение центра тяжести вращающегося электрона

Вставляя (26) в (12), получаем из-за постоянства  $g_{ij}$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\tau} \left( m_0 + \frac{B}{2g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} \sum_\alpha \Omega_\alpha^2 \right) \frac{c \dot{x}_k}{\sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}} + \frac{e}{c} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \dot{x}^i &= \\ &= \frac{e}{c} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} \dot{x}^i + \frac{1}{2} C \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} u_{(\beta)}^i u_{(\gamma)}^j \Omega_\alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

С учетом (10) и (16) получаем

$$\frac{1}{2} F_{ij} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} u_{(\beta)}^i u_{(\gamma)}^j \Omega_\alpha = \frac{1}{2} F_{ij} e^{ijhk} u_{(\alpha)h} \frac{dx_k}{ds} \Omega_\alpha = F_{hk}^* \hat{\Theta}^h \dot{x}^k \frac{1}{c}, \quad (28)$$

где

$$F_{hk}^* = \frac{1}{2} e_{ijhk} F^{ij} \quad (29)$$

означает тензор, дуальный<sup>20</sup> к  $F^{ij}$ , и где использовано соотношение

$$\Theta^h \frac{dx^k}{ds} = \hat{\Theta}^h \dot{x}^k \frac{ds}{ds} = \frac{1}{c} \hat{\Theta}^h \dot{x}^k$$

(ср. (19) и (19')). Подвергая последний член уравнения (27) преобразованию (28)<sup>21</sup> и учитывая соотношения (ср. (18) и (19))

$$\begin{aligned} \frac{1}{g^{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} \sum_\alpha \Omega_\alpha^2 &= \frac{1}{c^2} \sum_\alpha \hat{\Omega}_\alpha^2 = -\frac{1}{c^2} \hat{\Theta}_i \hat{\Theta}^i, \\ \frac{\dot{x}^k}{\sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}} &= \frac{dx^k}{ds}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} = F_{ki}, \end{aligned}$$

<sup>20</sup> Замечаем, что из (22) следует

$$F_{\alpha\beta}^* = -\sum_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} E_\gamma, \quad F_{\alpha 4}^* = H_\alpha. \quad (29')$$

<sup>21</sup> Это преобразование нельзя предпринимать до того, как функция  $L$  вставлена в уравнения движения, полученные из вариационного принципа, так как соотношение (10) теряется при вариации  $x^i$ .

получаем уравнения движения в виде

$$-\frac{d}{d\tau} \left( cm'_0 \frac{dx_k}{ds} \right) = \frac{e}{c} F_{ki} \dot{x}^i + \frac{1}{c} C \frac{\partial F_{ij}^*}{\partial x^k} \hat{\Theta}^i \dot{x}^j, \quad (30)$$

где положено

$$m' = m_0 + \frac{1}{2c^2} B \sum_{\alpha} \hat{\Theta}_{\alpha}^2 = m_0 - \frac{1}{2c^2} B \hat{\Theta}_i \hat{\Theta}^i. \quad (31)$$

Уравнение (30) отличается от уравнений движения поступательно движущегося электрона в двух отношениях. Во-первых, масса покоя электрона  $m_0$  подходящим образом заменена на массу  $m'_0$ , увеличенную на деленный на  $c^2$  вклад кинетической энергии вращения. Во-вторых, к обыкновенной, действующей на электрон силе Лорентца добавляется еще «магнитная дополнительная сила». Чтобы прояснить физический смысл этой силы, запишем пространственную часть уравнений движения в трехмерной векторной форме.

Положим для этого  $\tau = t$  и

$$\frac{dx^{\alpha}}{ds} = \gamma \beta^{\alpha}, \quad \frac{dx^4}{ds} = \gamma, \quad \beta = \frac{1}{c} \mathbf{v}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (32)$$

где  $\mathbf{v}$  — обыкновенная трехмерная скорость. Далее обозначим «эффективные» напряженности полей через  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{H}'$  (ср. (24) и (29)):

$$E'_\alpha = \frac{1}{c} F_{\alpha i} \dot{x}^i, \quad H'_\alpha = \frac{1}{c} F_{\alpha i}^* \dot{x}^i, \quad (33)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\beta \mathbf{H}], \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H} - [\beta \mathbf{E}]. \quad (33')$$

Наконец, заключим из (17) и (7)

$$\frac{1}{c} \hat{\Theta}_i \dot{x}^i = - \sum_{\alpha} \hat{\Theta}^{\alpha} \beta^{\alpha} + \hat{\Theta}^4 = 0$$

или

$$\hat{\Theta}^4 = \hat{\Theta}_4 = \hat{\Theta} \beta, \quad (34)$$

где с помощью  $\hat{\Theta}$  обозначена трехмерная векторная часть контравариантного 4-вектора  $\hat{\Theta}^i$ . Умножая (34) на  $C$  и учитывая (23), получаем

$$M^4 = M_4 = M \beta, \quad (34')$$

где  $M$  означает трехмерную векторную часть контравариантного 4-вектора магнитного момента.

Использование этих соотношений и учет (7) позволяют следующим образом записать контравариантную пространственную часть уравнений движения:

$$\frac{d}{dt} (m'_0 \gamma c \beta) = e \mathbf{E}' + \text{grad} \{ M \mathbf{H}' - (M \beta) (\mathbf{H}' \beta) \}. \quad (35)$$

В системе покоя ( $\beta=0$ ,  $\mathbf{H}'=\mathbf{H}$ ) тем самым удовлетворительным образом «магнитная дополнительная сила», действующая на электрон, равна силе, действующей на магнитный диполь  $\mathbf{M}$  в неоднородном магнитном поле согласно классической теории.

## § 6. Уравнение вращения

Подставляя  $L$  из (26) во вторую группу (13) лагранжевых уравнений, получаем

$$B \frac{d}{d\tau} \left( \frac{c\Omega_\alpha}{\sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}} \right) = -\frac{1}{2} C \frac{d}{d\tau} (F_{ij} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} u_{(\beta)}^i u_{(\gamma)}^j) - \frac{1}{2} C \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{ij} \varepsilon^{\beta\lambda\mu} u_{(\lambda)}^i u_{(\mu)}^j \Omega_\gamma,$$

где по всем индексам, за исключением  $\alpha$ , нужно суммировать.

Чтобы подготовить исключение вспомогательного параметра  $u_{(\alpha)}^i$  из этих уравнений, используем легко доказываемые соотношения

$$-\sum_{\beta, \lambda, \mu} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\beta\lambda\mu} u_{(\lambda)}^i u_{(\mu)}^j = u_{(\alpha)}^i u_{(\gamma)}^j - u_{(\gamma)}^i u_{(\alpha)}^j$$

и

$$\frac{1}{2} F_{ij} (u_{(\alpha)}^i u_{(\gamma)}^j - u_{(\gamma)}^i u_{(\alpha)}^j) = F_{ij} u_{(\alpha)}^i u_{(\gamma)}^j.$$

Учитывая далее (19') и (16) и подвергая первый член слева преобразованию, аналогичному (28), получаем

$$B \frac{d}{d\tau} \hat{\Omega}_\alpha = -C \frac{d}{d\tau} (F_{ij}^* u_{(\alpha)}^i \frac{dx^j}{ds}) + C F_{ij} u_{(\alpha)}^i \Theta^j.$$

Теперь  $du_{(\alpha)}^i/d\tau$  согласно (8) пропорционально  $\dot{x}^i$ , тем самым  $F_{ij}^* \frac{du_{(\alpha)}^i}{d\tau} \frac{dx^j}{ds}$  из-за антисимметрии  $F_{ij}^*$  равно нулю. Получается также

$$B \frac{d}{d\tau} \hat{\Omega}_\alpha = C u_{(\alpha)}^i \left\{ F_{ij} \Theta^j - \frac{d}{d\tau} (F_{ij}^* \frac{dx^j}{ds}) \right\}.$$

Мы умножаем эти уравнения на  $u_{(\alpha)}^k$  и суммируем по  $\alpha$ . Левая часть приобретает вид

$$B u_{(\alpha)}^k \frac{d\hat{\Omega}_\alpha}{d\tau} = B \frac{d}{d\tau} (u_{(\alpha)}^k \hat{\Omega}_\alpha) - B \hat{\Omega}_\alpha \frac{du_{(\alpha)}^k}{d\tau} = B \frac{d\hat{\Omega}^k}{d\tau} + B \left( \frac{d^2 x_r}{ds^2} \hat{\Theta}^r \right) \dot{x}^k$$

(ср. (16) и (8)). Учитывая далее (9), получаем окончательно искомые уравнения вращения

$$B \frac{d\hat{\Omega}^k}{d\tau} + B \left( \frac{d^2 x_r}{ds^2} \hat{\Theta}^r \right) \dot{x}^k = C \left( \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^i}{ds} - g^{ki} \right) \left\{ F_{ij} \hat{\Theta}^j \frac{d\alpha}{d\tau} - \frac{d}{d\tau} (F_{ij}^* \frac{dx^j}{ds}) \right\}. \quad (36)$$

Легко видно, что величина  $\hat{\Theta}^k \frac{dx_k}{ds}$  образует интеграл этих уравнений и что тем самым ортогональность вектора вращения  $\hat{\Theta}^k$  к 4-скорости  $dx^k/ds$  сохраняется при движении электрона<sup>22</sup>.

Если выбрать  $\tau=t$ , можно получить из (36) уравнения для пространственной части  $\hat{\Theta}$  4-вектора  $\hat{\Theta}^i$ . Учитывая (7), (19), (24), (32)–(34), получаем после некоторых вычислений

$$\frac{B}{C} \frac{d\hat{\Theta}}{dt} - \frac{B}{C} \gamma^2 \left( \hat{\Theta} \frac{d\beta}{dt} \right) \beta = \frac{1}{\gamma} [\hat{\Theta} \mathbf{H}] + \frac{1}{\gamma} \mathbf{E} (\hat{\Theta} \beta) - \\ - \gamma \beta \{ \hat{\Theta} \mathbf{E}' - \hat{\Theta} \beta \} (\mathbf{E}' \beta) - \frac{d}{dt} (\gamma \mathbf{H}') + \gamma^3 \beta \left( \mathbf{H}' \frac{d\beta}{dt} \right). \quad (37)$$

Более подробное обсуждение этого уравнения последует в § 8.

### § 7. Интеграл энергии. Зависимость скорости вращения от напряженности поля

В не зависящем от времени поле ( $\partial F_{ij}/\partial x^4=0$ ) четвертое из уравнений (30), если положить  $\tau=t$  и учесть (32), дает

$$-\frac{d}{dt} (m'_0 c \gamma) = \frac{e}{c} F_{4\alpha} \dot{x}^\alpha = -\frac{e}{c} \frac{\partial \varphi_4}{\partial x^2} \dot{x}^\alpha = -\frac{e}{c} \frac{d\varphi_4}{dt},$$

откуда следует<sup>23</sup>

$$\frac{d}{dt} (m'_0 c^2 \gamma - e \varphi_4) = 0.$$

Тем самым энергия вращающегося электрона

$$W = m'_0 c^2 \gamma - e \varphi_4 = \frac{m_0 c^2 + T_{\text{вр}}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + e \varphi \quad (38)$$

при его движении в не зависящих от времени полях остается постоянной. С помощью  $\varphi$  здесь согласно (20') обозначен скалярный

<sup>22</sup> Нужно заметить, что при использовании соотношения

$$\frac{d}{d\tau} \left( \hat{\Theta}^k \frac{dx_k}{ds} \right) = \frac{dx_k}{ds} \frac{d\hat{\Theta}^k}{d\tau} + \hat{\Theta}^k \frac{d^2 x_k}{d\tau ds} = 0$$

можно записать уравнение (36) следующим образом:

$$\left( g^{ki} - \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^i}{ds} \right) N_i = N^k - \frac{dx^k}{ds} \left( \frac{dx^i}{ds} N_i \right) = 0,$$

где положено

$$N_i = B \frac{d\hat{\Theta}_i}{d\tau} - C \frac{d}{d\tau} \left( F_{ij}^* \frac{dx^j}{ds} \right) + C F_{ij} \hat{\Theta}^j \frac{d\sigma}{d\tau}.$$

<sup>23</sup> Можно, конечно, это соотношение вывести также непосредственно из (35) и (37).



потенциал поля, а через  $T_{\text{вр}}$  — кинетическая энергия вращения (ср. (31)):

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} B \sum_{\alpha} \hat{\Omega}_{\alpha}^2 = -\frac{1}{2} B \hat{\Theta}_i \hat{\Theta}^i. \quad (38')$$

Энергия электрона  $W$  тем самым не состоит в непосредственном отношении к магнитной напряженности поля, что соответствует тому факту, что движущиеся электрические заряды не имеют энергии, зависящей от магнитного поля. Однако вращательная энергия электрона  $T_{\text{вр}}$  зависит существенно от напряженности магнитного поля.

А именно, из (36) следует с учетом (17):

$$\hat{\Theta}_k B \frac{d}{d\tau} \hat{\Theta}^k = C \hat{\Theta}^i \frac{d}{d\tau} (F_{ij}^* \frac{dx^j}{ds}) = C \frac{d}{d\tau} (\hat{\Theta}^i F_{ij}^* \frac{dx^j}{ds}) - C F_{ij}^* \frac{dx^j}{ds} \frac{d\hat{\Theta}^i}{d\tau}.$$

Подставляя в последний член опять значение  $d\hat{\Theta}^i/d\tau$  из (36), получаем

$$-C F_{ij}^* \frac{dx^j}{ds} \frac{d\hat{\Theta}^i}{d\tau} = \frac{C^2}{B} F_{ij}^* \frac{dx^j}{ds} F^{il} \hat{\Theta}_l \frac{d\sigma}{d\tau} - \frac{C^2}{B} F_{ij}^* \frac{dx^j}{ds} g^{il} \frac{d}{d\tau} (F_{lm}^* \frac{dx^m}{ds}).$$

Первый член справа равен нулю, что легче всего усмотреть, выражая  $dx^j/ds$  через  $\beta^j$  и подставляя  $\hat{\Theta}_4$  из (34). Вводя временно обозначение

$$G_i = F_{ij}^* \frac{dx^j}{ds}, \quad (39)$$

получаем

$$B \hat{\Theta}_k \frac{d\hat{\Theta}^k}{d\tau} = C \frac{d}{d\tau} (\hat{\Theta}^i G_i - \frac{C}{2B} G_i G^i), \quad (40)$$

а также (ср. (38'))

$$\frac{dT_{\text{вр}}}{d\tau} = -B \hat{\Theta}_k \frac{d\hat{\Theta}^k}{d\tau} = -C \frac{d}{d\tau} \left\{ G_i \left( \hat{\Theta}^i - \frac{C}{2B} G^i \right) \right\}$$

или

$$T_{\text{вр}} = T_{\text{вр}}^0 - C G_i \left( \hat{\Theta}^i - \frac{C}{2B} G^i \right), \quad (40')$$

где  $T_{\text{вр}}^0$  — постоянная интегрирования.

Учитывая (39), (34'), (33) и (23), это уравнение можно переписать в виде

$$T_{\text{вр}} = T_{\text{вр}}^0 - \gamma \left( \mathbf{M} + \frac{C^2}{2B} \gamma \mathbf{H}' \right) \{ \mathbf{H}' - \beta (\mathbf{H}' \beta) \}. \quad (41)$$

В системе покоя электрона ( $\beta=0$ ,  $\mathbf{H}'=\mathbf{H}$ ) (41) имеет вид

$$T_{\text{вр}} = T_{\text{вр}}^0 - \mathbf{M} \mathbf{H} - \frac{C^2}{2B} H^2. \quad (41')$$

Учитывая, что вращательная энергия  $T_{\text{вр}}$  согласно своему определению (38'), в противоположность энергии поступательного движения  $m_0 c^2 \gamma$ , инвариантна относительно координатных преобразований, и замечая по последнему члену уравнения (41'),

что во всех практически встречающихся полях она много меньше <sup>24</sup>, чем МН, видно, что меняющаяся часть вращательной энергии электрона равна потенциальной энергии — МН магнитного диполя М в магнитном поле Н, измеренном в системе покоя электрона <sup>25</sup>.

Из (41) после простого вычисления следует

$$(B\hat{\Theta} + \gamma CH')^2 - \{B\hat{\Theta}\beta + C\gamma N'\beta\}^2 = 2BT_{\text{вп}}^0 = \text{const.} \quad (42)$$

В системе покоя электрона ( $\beta=0$ ) получается, таким образом,

$$(B\hat{\Theta} + CH)^2 = B^2\hat{\Theta}_0^2 = \text{const}$$

или, если принять, что ось вращения параллельна или антипараллельна магнитному полю Н,

$$B\hat{\Theta} = B\hat{\Theta}_0 \mp CH. \quad (42')$$

Удовлетворительно, что именно точно такое же соотношение между  $\Theta$  и  $H$  получается при вычислении согласно классической теории изменения угловой скорости электрического заряда, которое вызывается силами индукции, возникающими при изменении магнитного поля.

В противоположность обычным предположениям в теории вращающегося электрона здесь не получается, вообще говоря, правильного поведения 3-импульса (и тем самым и магнитного момента) электрона при его движении. Хотя *относительные* изменения 3-импульса электрона во всех практически встречающихся полях могут быть бесконечно малыми <sup>26</sup>, этими изменениями нельзя пренебречь из-за связанного с ними измеряемого изменения вращательной энергии (дополнительной магнитной энергии) электрона.

Тем самым из уравнений (38) и (41) следует, что упомянутое в § 1 предположение, что величина дополнительной энергии

<sup>24</sup> Соотношение  $\lambda$  этих членов порядка величины  $\lambda = C^2H/2VM$ . Пренебрегая в первом приближении изменением поведения  $\hat{\Theta}$  и полагая, как обычно, 3-импульс  $B\hat{\Theta} = VM/C$  электрона равным  $\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} h$ , получаем  $\lambda = (2\pi/h) CH$ . Предполагая для оценки, что заряд электрона распределен по сферической поверхности радиуса  $a$ , получаем  $C = ea^2/3c$  (ср., например, Я. Френкель.

Электродинамика, т. 1, стр. 230) и тем самым  $\lambda = \frac{2\pi ea^2}{3c\hbar} \sim 5,1 \cdot 10^6 \cdot a^2H$ , т. е. при  $a \sim 10^{-13}$  см примерно  $\lambda \sim 10^{-19}H$ , где  $H$  выражено в единицах СГС (гаусс).

<sup>25</sup> Эти соотношения являются полным аналогом, известным из теории парамагнетизма; при возникновении магнитного поля появляется прецессия электронных орбит, вызывающая изменение кинетической энергии электрона, которая равна потенциальной энергии — МН магнитного диполя М, эквивалентного электронной орбите.

<sup>26</sup> А именно, из (42') следует  $\frac{\Delta\hat{\Theta}}{\hat{\Theta}_0} = -\frac{C\Delta H_{\Theta}}{B\hat{\Theta}_0} = -2\lambda\Delta H_{\Theta}$ , где  $H_{\Theta}$  означает компоненту напряженности поля в направлении  $\hat{\Theta}$  и  $\lambda$  порядка величины  $10^{-19}$  единиц СГС (ср. примечание стр. 24).

электрона в «кажущемся» поле  $\mathbf{H}$  равна половине значения его в «настоящем» поле равной интенсивности, теряет силу: «дополнительная магнитная энергия» электрона пропорциональна магнитному полю, измеренному в его системе покоя, независимо от того, является ли поле в системе покоя атомного ядра чисто электрическим или также частично магнитным. Тем самым возникает вопрос, как в действительности объясняются известные спектроскопические данные, приведшие к упомянутому предположению (ср. § 1).

### § 8. Прецессия оси вращения

Пренебрегая в левой части уравнения (37) членами, квадратичными по  $\beta$ , получаем с учетом (23) и (33)

$$B \frac{d\Theta}{dt} - B \left( \hat{\Theta} \frac{d\beta}{dt} \right) \beta = [\mathbf{M}\mathbf{H}] + \mathbf{E}(\mathbf{M}\beta) - \beta(\mathbf{M}\mathbf{E}) - C \frac{d\mathbf{H}'}{dt} \quad (43)$$

или

$$B \frac{d\Theta}{dt} - B \left( \hat{\Theta} \frac{d\beta}{dt} \right) \beta = [\mathbf{M}\mathbf{H}'] - C \frac{d\mathbf{H}'}{dt}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда электрон движется вокруг атомного ядра в слабом внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Мы пренебрегаем в первом приближении возмущением поступательного движения электрона, обусловленным магнитными силами, и положим

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{e}{cm_0} \mathbf{E}. \quad (44)$$

Обозначим 3-импульс электрона через  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = B \hat{\Theta}, \quad (45)$$

а отношение  $\mathbf{M}$  к  $\mathbf{S}$  через  $\kappa$ :

$$\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{S}} = \frac{C}{B} = \kappa. \quad (46)$$

В теории вращающегося электрона, как известно, предполагают, что

$$\kappa = e/cm_0. \quad (46')$$

Тем самым из (44) и (46) получается

$$B \left( \hat{\Theta} \frac{d\beta}{dt} \right) \beta = \frac{e}{cm_0} B (\hat{\Theta} \mathbf{E}) \beta = (\mathbf{M}\mathbf{E}) \beta.$$

Подставляя это значение в (43), получаем в пренебрежении малыми поправками в правой части

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = [\mathbf{M}\mathbf{H}'] + \beta(\mathbf{E}\mathbf{M}). \quad (47)$$

Первый член справа равен вращающему моменту магнитного поля, действующему на электрон, второй, однако, принимает во внимание, что даже при поступательном (в смысле Ферми) движении электрона направление его момента импульса, отнесенное к неподвижной системе координат, все время должно меняться из-за кривизны электронной траектории. При периоди-

ческом движении электрона этот член уничтожает как раз половину момента вращения, происходящего от кажущегося магнитного поля

$$\mathbf{H}^* = -[\beta\mathbf{E}].$$

Если пренебречь изменением момента импульса электрона во время его полного вращения вокруг ядра, то получим

$$\overline{\frac{d}{dt} \{\beta (\mathbf{M}\beta)\}} = \overline{\frac{d\beta}{dt} (\mathbf{M}\beta)} + \beta \overline{\left(\mathbf{M} \frac{d\beta}{dt}\right)} = 0,$$

где черта означает взятие среднего значения для (невозмущенного) периода обращения. Отсюда следует

$$\overline{\left[\mathbf{M} \left[\beta \frac{d\beta}{dt}\right]\right]} = \overline{\beta \left(\mathbf{M} \frac{d\beta}{dt}\right)} - \overline{\frac{d\beta}{dt} (\mathbf{M}\beta)} = 2\beta \overline{\left(\mathbf{M} \frac{d\beta}{dt}\right)}$$

или с учетом (44) и (4)

$$\overline{\beta (\mathbf{M}\mathbf{E})} = \frac{1}{2} \overline{[\mathbf{M}[\beta\mathbf{E}]]} = -\frac{1}{2} \overline{[\mathbf{M}\mathbf{H}^*]}.$$

Таким образом, из (47) получается

$$\overline{\frac{d\mathbf{S}}{dt}} = \overline{[\mathbf{M}\mathbf{H}]} + \frac{1}{2} \overline{[\mathbf{M}\mathbf{H}^*]}. \quad (48)$$

Это соотношение образует дополнение к томасовскому уравнению (2) и полностью согласуется с френкелевским уравнением (17) (1. с.). Скорость прецессии электрона в «кажущемся» поле  $\mathbf{H}^*$  равна половине ее величины в «действительном» поле равной интенсивности, хотя, как мы видели в § 8, магнитная энергия электрона в «кажущемся» и «действительном» полях равной интенсивности одинакова <sup>27</sup>.

## § 9. Сохранение полного момента импульса

Обозначим через  $\mathbf{K}$  момент импульса, соответствующий движению точечного тяжелого электрона:

<sup>27</sup> При вычислении прецессии (но не энергии) можно пренебречь изменениями вращательной скорости электрона. Вычеркивая относительно малый член  $\frac{d}{d\tau} \left( F_{ij}^* \frac{dx^j}{ds} \right)$  в последней скобке уравнения (36), от которого появляются эти изменения, заменяя в (30)  $m'_0$  на  $m_0$  и предполагая справедливость соотношения (46'), перепишем уравнения движения (30) и (36) после некоторых преобразований в следующем виде:

$$-cm_0 \frac{d}{d\tau} \frac{dx_k}{ds} = \frac{e}{c} F_{ki} x^i + R_k, \quad (49)$$

$$-cm_0 \frac{d}{d\tau} M_k = \frac{e}{c} F_{ki} M^i \frac{ds}{d\tau} - \frac{dx_k}{ds} (M^r R_r), \quad (49')$$

где положено

$$R_r = \frac{1}{c} \frac{\partial F_{ij}^*}{\partial x^r} M^i x^j.$$

$$\mathbf{K} = \frac{m'_0 [\mathbf{rv}]}{\sqrt{1-\beta^2}} = c\gamma m'_0 [\mathbf{r}\beta]. \quad (50)$$

Из (35) следует

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = e [\mathbf{rE}'] + [\mathbf{r} \text{grad} \{ \mathbf{M}\mathbf{H}' - (\mathbf{M}\beta)(\mathbf{H}'\beta) \}]. \quad (51)$$

Рассмотрим случай, когда электрон движется в радиальном электрическом поле:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} = \psi(r) \mathbf{r}, \quad \mathbf{H}' = -[\beta\mathbf{E}] = \psi(r) [\mathbf{r}\beta]$$

и

$$\text{grad} \{ \mathbf{M}\mathbf{H}' - (\mathbf{M}\beta)(\mathbf{H}'\beta) \} = (\mathbf{r} [\beta\mathbf{M}]) \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} + \psi(r) [\beta\mathbf{M}].$$

Тогда из (51) получается

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \psi(r) [\mathbf{r} [\beta\mathbf{M}]] = [\mathbf{E} [\beta\mathbf{M}]]. \quad (52)$$

Момент импульса движущейся точечной частицы, таким образом, не сохраняется при движении вращающегося электрона даже в радиальном электрическом поле. Однако сумма, усредненная по (невозмущенному) периоду обращения  $\mathbf{K}$  и моменту импульса  $\mathbf{S}$  его собственного вращения, по крайней мере в первом приближении остается постоянной.

Из (48) и (52) при  $\mathbf{H}=0$  следует

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{K} + \mathbf{S}) = [\mathbf{E} [\beta\mathbf{M}]] + \frac{1}{2} [\overline{\mathbf{M}\mathbf{H}^*}].$$

С другой стороны, при использовании соотношения (44) удается показать<sup>28</sup>, что

$$[\mathbf{E} [\beta\mathbf{M}]] = \frac{1}{2} [\overline{\mathbf{M} [\beta\mathbf{E}]}] = -\frac{1}{2} [\overline{\mathbf{M}\mathbf{H}^*}].$$

Имеет место также

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{K} + \mathbf{S}) = 0. \quad (53)$$

Нужно заметить, что также и по дираковской теории электрона<sup>29</sup> ни  $\mathbf{K}$ , ни  $\mathbf{S}$  по отдельности, но только их сумма остается постоянной при движении электрона в радиальном электрическом поле.

Данное сообщение является разработкой исследования, начатого мною во время пребывания в Лейдене (1928), и я не хочу упустить возможности также в этом месте выразить мою глубочайшую благодарность «Лорентцфонду», приглашение и поддержка которого сделали возможным мое пребывание в Лейдене, и проф. П. Эренфесту и А. Д. Фоккеру за многие полезные обсуждения.

Москва, Институт теоретической физики  
первого государственного университета

Поступила  
3 апреля 1929 г.

<sup>28</sup> Доказательство смотри у Френкеля (l. c.), стр. 252.

<sup>29</sup> P. A. M. Dirac, l. c., v. I.

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ С ИЗЛУЧЕНИЕМ ПО ДИРАКОВСКОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОНА И ПО КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ <sup>1</sup>

Последовательным квантовомеханическим методом рассматривается рассеяние излучения на электронах (волновое уравнение Дирака для электрона, квантование электромагнитного поля и материальных волн), а также подтверждается соответствующая формула для рассеяния, выведенная Клайном и Нишиной. При этом оказывается, что индуцированные излучением квантовые скачки электрона в промежуточные состояния *отрицательной электронной энергии* имеют решающее значение для рассеяния. В дальнейшем вычисляется вероятность спонтанных переходов электрона с положительных на отрицательные энергетические уровни. Вероятность этих переходов, которая согласно дираковской теории протонов должна соответствовать аннигиляции материи, равна классической вероятности столкновения двух электронов или протонов с относительной скоростью  $c$ . В § 2 приводится простой способ вычисления с волновыми функциями свободного электрона.

### § 1. Введение и резюме

1. Рассеяние излучения свободными электронами уже неоднократно рассматривалось. При этом, однако, в большинстве случаев квантовали только движение электронов, а рассеянное излучение определяли в соответствии с вычисленным распределением электронного тока. Но этот прием не только логически неудовлетворителен, но и неоднозначен <sup>2</sup>. Поэтому представляло интерес пересмотреть проблему последовательно квантовомеханически (квантование электромагнитного поля и  $\psi$ -волн) на основе дираковского волнового уравнения для электрона. Таким образом, можно прийти опять к выведенной Клайном и Нишиной <sup>3</sup> формуле рассеяния, чем подтверждается правомочность примененного этими исследователями принципа соответствия в изучении проблемы.

Мы хотели бы здесь подчеркнуть также следующий результат наших вычислений. Рассеяние светового кванта на электроне, как известно, состоит из последовательности двух электронных переходов, из которых каждый связан либо с поглощением, либо с испусканием светового кванта (непрямое рассеяние); прямые же процессы рассеяния (отклонение и изменение частоты светового кванта в единичном акте) исключены согласно кванто-

<sup>1</sup> Z. Phys., 1930, 62, 545. Перевод Р. Э. Каллош.

<sup>2</sup> Ср., например, исследование открытого А. Сmealом комбинационного рассеяния излучения на атомах, с одной стороны, Э. Шредингером (Ann. Phys., 1926, 81, 109) и О. Клайном (Z. Phys., 1927, 41, 407), с другой стороны.

<sup>3</sup> O. Klein, Y. Nishina. Z. Phys., 1929, 52, 853.

вой механике. В соответствии с физической постановкой вопроса в начальных и конечных состояниях рассеивающегося электрона учитываются только состояния положительной энергии. Было бы заманчиво ограничить также промежуточные состояния электрона состояниями положительной энергии <sup>4</sup>, в особенности потому, что до недавнего времени была распространена концепция, согласно которой состояния электрона с отрицательной энергией, допустимые в релятивистской теории, лишены всякого физического смысла. Но оказывается, что возникает вопиющее противоречие с экспериментом, когда при вычислении рассеяния учитывают только промежуточные состояния положительной энергии, и что как раз в области применимости классической теории, т. е. при малых частотах падающего излучения, практически все процессы рассеяния с электронными переходами связаны с промежуточными состояниями *отрицательной энергии* (§ 5).

2. Этот факт был также подчеркнут Дираком в его последней работе <sup>5</sup>, в которой представляется новая концепция всего вопроса о возможности отрицательной электронной энергии, а также развивается новая теория протонов. Согласно этой теории, почти все возможные состояния отрицательной энергии заняты электронами, которые вызывают равномерную отрицательную электризацию объема и поэтому не являются непосредственно наблюдаемыми <sup>6</sup>. Составляющие исключение незанятые состояния отрицательной энергии могут рассматриваться как «дырки» в этой отрицательной электризации. Эти дырки должны двигаться как частицы положительной энергии и положительного заряда и по теории Дирака их следует считать протонами <sup>7</sup>. Если одна из этих дырок при испускании излучения занята электроном положительной энергии, этот процесс можно истолковать как обоюдную нейтрализацию или аннигиляцию электрона и протона. Обратный процесс соответствует кажущемуся образованию электрона и протона из излучения.

Эти процессы можно последовательно изучать согласно теории Дирака, только если удастся понять теоретически взаимодействие электронов отрицательной энергии, исчезновение поля электрона и дырки при аннигиляции и т. д. <sup>8</sup> При современном состоя-

<sup>4</sup> При вычислениях согласно принципу соответствия рассеяния излучения речь идет только о начальных и конечных состояниях электрона, так что этот вопрос вообще не может возникнуть.

<sup>5</sup> P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc. London, 1930, A126, 260; я узнал об этой работе, когда мои вычисления рассеяния были почти закончены.

<sup>6</sup> При этом возникает вопрос, допустимо ли при вычислении рассеяния учитывать возможность электронных переходов через промежуточные состояния отрицательной энергии, так как эти состояния ведь заняты другими электронами. Этот вопрос разъяснен Дираком (l.c.).

<sup>7</sup> В то время не было известно о существовании позитронов и считалось, что античастицей электрона является протон. — Прим. ред.

<sup>8</sup> Мне неясно, почему вычисления рассеяния излучения, проведенные § 4 и 5 в пренебрежении этим обстоятельством, все же дают правильную формулу рассеяния.

нии теории мы могли лишь вычислить *вероятность* спонтанного *электронного* перехода с положительного на отрицательный энергетический уровень только при полном пренебрежении этим обстоятельством (§ 6)<sup>9</sup>. Если считать незанятый отрицательный энергетический уровень протоном и упомянутый переход аннигиляцией, тогда можно следующим образом резюмировать результат: аннигиляция происходит при столкновении электрона и протона; эффективное сечение этих частиц<sup>10</sup>, определяющее масштаб такого столкновения, равно классически вычисленному сечению  $\pi d^2 = \pi (e^2/mc^2)^2$  элементарного заряда  $e$ . Так как в пренебрежении взаимодействием дираковская теория симметрична относительно электронов и протонов<sup>11</sup>, под  $m$  в этом выражении нужно, вероятно, понимать некоторое, пока не определяемое более точно среднее значение массы электрона и протона<sup>12</sup>.

Даже отвлекаясь полностью от дираковской теории протонов, вычисления, проведенные в § 6, как нам кажется, представляют интерес, потому что они означают почти то же самое для возникающего в связи с дираковской теорией вопроса о возможности электронного перехода с положительного на отрицательный уровень, что и известные вычисления Клайна<sup>13</sup>, зато они не зависят от спорного предположения о резком потенциальном пороге.

3. При квантовании волновых полей мы использовали методы, развитые Дираком<sup>14</sup> и Гейзенбергом и Паули<sup>15</sup>. Мы, однако, разложили световые и материальные волны не по стоячим, а по *поступательным* монохроматическим волнам, что дало возможность приспособить вычисление к фактически имеющимся при измерении рассеяния условиям и избежать введения особых граничных условий<sup>16</sup>. Чтобы добиться дискретности спектра собственных значений, мы рассматриваем по методу Борна «циклическую решетку», т. е. мы представляем себе пространство разделенным на кубики с гранями одинаковой длины  $L$  и ограничиваем наше

<sup>9</sup> Тем самым наши результаты фактически справедливы только для случая, не реализующегося в действительности, когда в начальном состоянии системы не имеется вообще (или только мало) электронов отрицательной энергии. Принципиальная трудность всей теории коротко обсуждается в конце работы.

<sup>10</sup> С точностью до поправочного множителя  $f(\beta)$ ; ср. (52). Относительную скорость частиц при вычислении вероятности столкновения следует считать равной  $c$ .

<sup>11</sup> См. примечание 7 на предыдущей странице. — *Прим. ред.*

<sup>12</sup> Мне хотелось бы и в этом месте сердечно поблагодарить П. А. М. Дирака за некоторые сообщенные в письмах указания, которые были очень существенны при выяснении этих вопросов. Дирак сообщил мне, что уравнения (52) и (54) совпадают с вычисленной им вероятностью аннигиляции.

<sup>13</sup> *O. Klein. Z. Phys.*, 1929, 53, 157.

<sup>14</sup> *P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc. London*, 1927, A114, 243, 710.

<sup>15</sup> *W. Heisenberg, W. Pauli. Z. Phys.*, 1929, 56, 1.

<sup>16</sup> Если бы мы, например, подчинили волновую функцию  $\psi$  в пустом пространстве условию, что на граничной поверхности области  $\psi=0$  и  $\partial\psi/\partial t=0$ , из дираковского волнового уравнения следовало бы, что  $\psi$  во всем пустом пространстве должно исчезать. Ср. *O. Клайн*, I. с., стр. 159, замечание.



рассмотрение такими волнами, фазы которых в соответствующих точках двух произвольных кубиков имеют одинаковое значение<sup>17</sup>.

Следует еще отметить, что вычисления с волновыми функциями свободных электронов могут быть существенно облегчены с помощью следующих методов. Если располагать состояния свободных электронов по значению их импульса  $\mathbf{p}$ , то, как известно, каждому значению  $\mathbf{p}$  соответствуют четыре независимых состояния (два с положительной и два с отрицательной энергией, вырождение!), из которых каждое может быть описано дираковской волновой функцией  $\psi_s$  ( $s=1, 2, 3, 4$ ). Тогда можно объединить постоянные амплитуды  $u_s$   $4 \times 4$ -функций  $\psi_s$ , соответствующие данному значению  $\mathbf{p}$ , в квадратную матрицу  $U_{st}$ , которая отличается некоторыми простыми свойствами. Во многих случаях, в том числе во всех рассмотренных нами, знание этих свойств достаточно для решения имеющейся проблемы. Таким образом удастся избежать связанного с произволом установления независимых электронных состояний, которые из-за вырождения волнового уравнения не определяются однозначно, а также существенно облегчить вычисления.

## § 2. Собственные функции дираковского волнового уравнения свободного электрона

В отсутствие поля дираковское волновое уравнение, как известно, имеет вид<sup>18</sup>

$$\left( -\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \sum_{j=1}^3 \gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j} + mc\gamma_0 \right) \psi = 0, \quad (1)$$

где  $\hbar$  означает планковскую константу, деленную на  $2\pi$ . Мы принимаем, что антикоммутирующие спиновые матрицы  $\gamma_j$  и  $\gamma_0$

$$\gamma_\lambda \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\lambda = 2\delta_{\lambda\mu}, \quad \lambda, \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (1')$$

выбраны эрмитовыми, так что волновая функция  $\psi^+$  равна комплексно-сопряженной  $\psi^*$ . Четыре компоненты волновой функции  $\psi$  можно считать компонентами вектора в четырехмерном гильбертовом пространстве.

Каждому данному значению импульса  $\mathbf{p}_i$  электрона соответствуют четыре собственные функции волнового уравнения вида

$$\psi_r^i = L^{-3/2} u_r^i e^{-\frac{i(w_r^i t - \mathbf{p}_i \mathbf{R})}{\hbar}}, \quad r = 1, 2, 3, 4, \quad (2)$$

<sup>17</sup> Ср. *Иг. Тамм. Z. Phys.*, 1930, 60, 345, где используется и подробнее обоснуется аналогичный метод (см. наст. изд., том I, работу 12. — *Прим. ред.*).

<sup>18</sup> Из соображений удобства мы в первом члене (1) выбрали знак «минус» вместо обычного «плюса».

где  $W_i^r$  означает энергию электрона в соответствующем состоянии,  $u_i^r$  — это постоянные гильбертовы векторы с компонентами  $u_{i,s}^r$  ( $s=1, 2, 3, 4$ ). Множитель  $L^{-3/2}$  введен в (2) из соображений удобства; при этом  $L$  должно означать длину грани мысленно ограниченного в пространстве «основного кубика». Упомянутое в § 1 условие «циклической решетки», т. е. условие пространственной периодичности  $\psi$ -поля с периодом «основного кубика», гласит очевидно: компоненты импульса  $p_{ix}, p_{iy}, p_{iz}$  вдоль ребра куба должны быть целыми кратными  $2\pi\hbar L^{-1}$ . Если выразить энергию (или импульс) электрона через соответствующую круговую частоту  $\omega_i^r$  (или соответствующее волновое число  $k_i$ )

$$W_i^r = \hbar\omega_i^r, \quad \mathbf{p}_i = \hbar\mathbf{k}_i, \quad (3)$$

то можно выразить это условие периодичности также следующим образом:

$$k_{ix}, k_{iy}, k_{iz} = \text{целым кратным } 2\pi/L. \quad (4)$$

Если подставить (2) в (1), можно получить уравнение для амплитуд:

$$(c\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}_i + mc^2\gamma_0)u_i^r = u_i^r W_i^r,$$

или в более подробной записи:

$$\sum_{i=1}^4 (c\gamma_{st}\mathbf{p}_i + mc^2\gamma_{0, st})u_{i, t}^r = u_{i, s}^r W_i^r,$$

где обычным образом три матрицы  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  объединены в матричный вектор  $\boldsymbol{\gamma}$ .

Для дальнейшего очень удобно объединить  $4 \times 4$ -компоненты четырех гильбертовых векторов  $u_i^r$ , соответствующие данному импульсу электрона  $\mathbf{p}_i$ , в квадратную матрицу  $U_i$ :

$$U_{i, sr} = u_{i, s}^r. \quad (5)$$

Если далее ввести диагональную матрицу энергии  $W_i$

$$W_{i, sr} = W_i^r \delta_{sr} \quad (6)$$

и обозначение

$$H_i = c\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}_i + mc^2\gamma_0, \quad (6')$$

то уравнение для амплитуд можно записать следующим образом:

$$H_i U_i = U_i W_i, \quad U_i^{-1} H_i U_i = W_i. \quad (7)$$

Функция Гамильтона электрона, состояние которого характеризуется значением  $\mathbf{p}_i$  импульса, равна

$$\psi^* \left( -i\hbar \sum_{\gamma} \gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j} + mc \right) \psi = \psi^* c H_i \psi.$$

Тем самым уравнение (7) означает, что гамильтонова матрица

$cH_l$  преобразуется к главным осям с помощью амплитудной матрицы  $U_l$ .

С учетом (1') легко показать, что собственные значения  $W_l^r$  гамильтоновой матрицы  $H_l$  равны

$$W_l^r = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_l^2},$$

причем два собственных значения положительны и два отрицательны<sup>19</sup>. Если для определенности расположить собственные значения  $W_l^r$  таким образом, чтобы два первых ( $r=1, 2$ ) были положительны и два последних ( $r=3, 4$ ) отрицательны, то матрицу энергии  $W_l$  можно записать следующим образом:

$$W_l = |W_l| \rho_3, \quad (8)$$

где, согласно Дираку, матрица  $\rho_3$  равна

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8')$$

а  $|W_l|$  — абсолютная величина собственного значения

$$|W_l| = +\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_l^2}. \quad (8'')$$

При такой нормировке состояния с  $r=1$  и  $r=2$  (соответственно  $r=3$  и  $r=4$ ) отличаются только поляризацией (ориентацией спина) электрона.

Теперь пусть волновые функции  $\psi$  нормированы согласно условию

$$\int \psi_l^{r*} \psi_m^s d\tau = \delta_{lm} \delta_{rs}, \quad (9)$$

где пространственную интеграцию, как всюду в дальнейшем, следует провести по объему  $L^3$  основного куба. Из условия периодичности следует, что

$$\int e^{\frac{i(p_m - p_l)R}{\hbar}} d\tau = \int e^{i(k_m - k_l)R} d\tau = L^3 \delta_{lm}. \quad (10)$$

С учетом (2) и (5) условие нормировки (9) принимает вид

$$u_l^{r*} u_l^s = \sum_{t=1}^4 u_{l,t}^{r*} u_{l,t}^s = \sum_{t=1}^4 U_{l,t}^* U_{l,t} = \delta_{rs},$$

откуда следует, что амплитудная матрица  $U_l$  должна быть унитарна

$$U_l^\dagger U_l = U_l U_l^\dagger = 1; \quad (11)$$

<sup>19</sup> Для доказательства достаточно рассмотреть следующие соотношения:  $H_l^2 U_l = H_l U_l W_l = U_l W_l^2$ ,  $H_l^2 = m^2 c^4 + c^2 p_l^2$ ,  $\text{Spur } \gamma_\lambda = 0$ , также  $\text{Spur } H_l = 0$ .

$U_l^\dagger$  здесь, как обычно, означает матрицу, сопряженную к  $U_l$  ( $U_{l,rt}^\dagger = = U_{l,tr}^*$ ).

Знания свойств амплитудной матрицы  $U_l$ , выраженных в (7) и (11), достаточно для наших целей вполне; однако сама матрица еще не определена однозначно с помощью (7) и (11)<sup>20</sup>.

В дальнейшем мы еще будем использовать следующие соотношения, которые могут быть легко доказаны на основе (5), (11) и (8'):

$$\sum_{r=1}^4 u_{l, sr}^r u_{l, t}^{r*} = \sum_{r=1}^4 U_{l, sr} U_{l, tr}^* = (U_l U_l^\dagger)_{st} = \delta_{st},$$

$$\sum_{r=1}^2 u_{l, sr}^r u_{l, t}^{r*} = \sum_{r=1}^2 U_{l, sr} U_{l, tr}^* = \left( U_l \frac{1 + \rho_3}{2} U_l^\dagger \right)_{st},$$
(12)

или так как согласно (7) и (8)

$$|W_l| U_l \rho_3 U_l^\dagger = H_l U_l U_l^\dagger = H_l,$$
(13)

то

$$\sum_{r=1}^2 u_{l, sr}^r u_{l, t}^{r*} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{|W_l|} H_l \right)_{st},$$
(12')

и соответственно

$$\sum_{r=3}^4 u_{l, sr}^r u_{l, t}^{r*} = \left( U_l \frac{1 - \rho_3}{2} U_l^\dagger \right)_{st} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{|W_l|} H_l \right)_{st}.$$
(12'')

### § 3. Взаимодействие электронов с излучением и квантование волновых полей

Электромагнитный потенциал должен быть нормирован таким образом, чтобы  $\Phi_4 = \varphi = 0$ . Тогда плотность энергии взаимодействия электронов с излучением равна

$$V = eA\psi^* \boldsymbol{\gamma} \psi,$$
(14)

где  $A$  означает векторный потенциал<sup>21</sup>.

Мы разлагаем поле излучения в основном кубе  $L^3$  по поступательным линейно-поляризованным собственным колебаниям

$$A = c \sqrt{\frac{2}{L^3}} \sum_{\sigma} \sum_{\lambda=1}^2 e_{\sigma}^{\lambda} \omega_{\sigma}^{-1} E_{\sigma}^{\lambda} \cos(\omega_{\sigma} t - \mathbf{k}_{\sigma} \mathbf{R} + \varphi_{\sigma}^{\lambda}),$$
(15)

<sup>20</sup> Если выбрать для  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\boldsymbol{\gamma}_0$  дираковские матрицы  $\rho$ ,  $\sigma$  и  $\rho_3$ , то можно привести матрицу  $U_l$  к виду

$$U_l = a_l \cdot 1 - i b_l \rho_2 \sigma \mathbf{n}_l, \quad a_l = \sqrt{\frac{|W_l| + mc^2}{2|W_l|}}, \quad b_l = \sqrt{\frac{|W_l| - mc^2}{2|W_l|}},$$

где через  $\mathbf{n}_l$  обозначен единичный вектор в направлении  $\mathbf{p}_l$ .

<sup>21</sup> Ср., например, В. Гейзенберг и В. Паули, I. с., уравнение (79а).

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} = \sqrt{\frac{2}{L^3}} \sum_{\sigma} \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{e}_{\sigma}^{\lambda} E_{\sigma}^{\lambda} \sin(\omega_{\sigma} t - \mathbf{k}_{\sigma} \mathbf{R} + \varphi_{\sigma}^{\lambda}), \quad (15')$$

причем векторы волновых чисел  $\mathbf{k}_{\sigma}$

$$\mathbf{k}_{\sigma} = \frac{\omega_{\sigma}}{c} \mathbf{n}_{\sigma} \quad (16)$$

( $\mathbf{n}_{\sigma}$  обозначает нормаль к волне,  $n_{\sigma}=1$ ) опять должны удовлетворять условиям периодичности (4). Каждому значению  $\mathbf{k}_{\sigma}$  соответствуют две линейно-поляризованные волны, направление колебаний которых определяется ортогональными собственными векторами  $\mathbf{e}_{\sigma}^1$  и  $\mathbf{e}_{\sigma}^2$ . Через  $E_{\sigma}^{\lambda}$  обозначены коэффициенты разложения поля по нормировочным собственным функциям; в отсутствие материи эти коэффициенты, так же как фазы  $\varphi_{\sigma}^{\lambda}$ , — константы.

Чтобы проквантовать поле излучения, нужно, как известно, выразить величины  $E_{\sigma}^{\lambda}$  и  $\varphi_{\sigma}^{\lambda}$  через канонические переменные  $M_{\sigma}^{\lambda}$  (количество световых квантов сорта  $\sigma$ ,  $\lambda$  в основном кубе) и  $\chi_{\sigma}^{\lambda}$  (сопряженная фаза)

$$M_{\sigma}^{\lambda} = \frac{1}{4\pi\hbar\omega_{\sigma}} (E_{\sigma}^{\lambda})^2, \quad \chi_{\sigma}^{\lambda} = h(\omega_{\sigma} t + \varphi_{\sigma}^{\lambda}) \quad (17)$$

и постулировать соотношения коммутации для этих переменных

$$M_{\sigma}^{\lambda} e^{\pm i\chi_{\sigma}^{\lambda}/\hbar} = e^{\pm i\chi_{\sigma}^{\lambda}/\hbar} (M_{\sigma}^{\lambda} \pm 1). \quad (17')$$

Если при введении новых переменных в (15) учесть, что выражение для  $\mathbf{A}$  фактически выпадает, то получается <sup>22</sup>

$$\mathbf{A} = c \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{L^3}} \sum_{\sigma} \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{e}_{\sigma}^{\lambda} \omega_{\sigma}^{-1/2} (\sqrt{M_{\sigma}^{\lambda}} e^{i(\chi_{\sigma}^{\lambda}/\hbar - \mathbf{k}_{\sigma} \mathbf{R})} + \sqrt{M_{\sigma}^{\lambda} + 1} e^{-i(\chi_{\sigma}^{\lambda}/\hbar - \mathbf{k}_{\sigma} \mathbf{R})}). \quad (18)$$

Чтобы теперь провести квантование волнового поля  $\psi$  в соответствии с ферми-дираковской статистикой электронов, нужно прежде разложить волновые функции  $\psi$  по собственным функциям (2):

$$\psi = \sum_{l, r} c_l^r \psi_l^r = L^{-3/2} \sum_{l, r} c_l^r u_l^r e^{-i(\omega_l^r t - \mathbf{k}_l \mathbf{R})}, \quad (19)$$

где были использованы соотношения (3). Далее следует выразить коэффициенты разложения  $c_l^r$  и временные множители  $e^{-i\omega_l^r t}$  через канонические переменные  $N_l^r$  (число электронов в состоянии  $l$ ,  $r$  в основном кубе) и  $\theta_l^r$  (сопряженная фаза) <sup>23</sup>

$$c_l^r e^{-i\omega_l^r t} = v_l^r e^{-i\theta_l^r/\hbar} N_l^r, \quad c_l^{r*} e^{i\omega_l^r t} = N_l^r e^{i\theta_l^r/\hbar} v_l^r, \quad (20)$$

<sup>22</sup> Ср. И. Тамм (1. с.), уравнение (34). Несущественное отличие этого более раннего уравнения от (8) объясняется тем, что в уравнении (15) в соответствующем выражении для  $\mathbf{A}$  (1. с.) косинус был заменен на синус.

<sup>23</sup> Ср., например, В. Гейзенберг и В. Паули (1. с.), уравнение (98), где вместо  $c_l^r e^{-i\omega_l^r t}$  используется обозначение  $a_s$  и где можно положить  $N_s^{1/2} = N_s$ , так как  $N_s$  может принимать только значения 0 и 1.

и постулировать соотношение коммутации для этих переменных

$$N_l^r e^{\pm i\theta_l/\hbar} = e^{\pm i\theta_l/\hbar} (1 - N_l^r). \quad (20')$$

Как известно, из (20') следует, что собственные значения  $q$ -чисел  $N_l^r$  ограничены нулем и единицей (запрет тождественности). С помощью  $\nu_l^r$  в (20) обозначена знаковая функция Иордана—Вигнера

$$\nu_l^r = \prod_{(m, s) \leq (l, r)} (1 - 2N_m^s),$$

причем предполагается, что электронные состояния  $l, r$  расположены в определенной последовательности. Для наших целей, однако, установление этого порядка несущественно.

Если ввести (18)—(20) в выражение (14) для плотности энергии взаимодействия  $V$  и определить потом с помощью интегриации по объему  $L^3$  основного куба значение  $\bar{V}$  полной энергии взаимодействия, причем учесть соотношения, следующие из условия периодичности (4),

$$L^{-3} \int e^{i(\mathbf{k}_m - \mathbf{k}_l \mp \mathbf{k}_\sigma) \cdot \mathbf{r}} d\tau = \delta_{0, m-l \mp \sigma},$$

где

$$\left. \begin{array}{l} \text{при} \\ \text{иначе} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \delta_{0, m-l+1} = 1, \\ \mathbf{k}_m - \mathbf{k}_l \mp \mathbf{k}_\sigma = 0, \\ \delta_{0, m-l \mp \sigma} = 0, \end{array} \quad (21)$$

то можно получить

$$\begin{aligned} \bar{V} = \int V d\tau = & a \sum \omega_\sigma^{-1} b_{\sigma lm}^{\lambda rs} N_l^r e^{i\theta_l^r/\hbar} \nu_l^r \nu_m^s \times \\ & \times e^{i\theta_m^s/\hbar} N_m^s \left( \delta_{0, m-l-\sigma} \sqrt{M_\sigma^\lambda} e^{i\chi_\sigma^\lambda/\hbar} + \delta_{0, m-l+\sigma} \sqrt{M_\sigma^\lambda + 1} e^{-i\chi_\sigma^\lambda/\hbar} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где следует суммировать по всем индексам и где введены обозначения

$$a = ec \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{L^3}}, \quad b_{\sigma lm}^{\lambda rs} = \mathbf{e}_\sigma^\lambda u_l^{r*} \nu u_m^s. \quad (23)$$

#### § 4. Вероятности переходов

Состояние системы следует характеризовать заданием числа имеющихся в основном кубе  $L^3$  в каждом отдельном состоянии электронов и световых квантов, т. е. заданием значений  $N_l^r$  и  $M_\sigma^\lambda$  переменных  $N_l^r$  и  $M_\sigma^\lambda$ . Такому состоянию в пространстве этих переменных соответствует амплитуда вероятности

$$\Psi_a = \prod_{l, r} \delta_{N_l^r} \nu_l^r \prod_{\sigma, \lambda} \delta_{M_\sigma^\lambda} \nu_\sigma^\lambda.$$

Другое состояние  $b$  следует характеризовать числами  $N_l^{r''}$ ,  $M_\sigma^{\lambda''}$ . Вероятность переходов из состояния  $a$  в состояние  $b$  зависит от соответствующего матричного элемента  $v_{ba}$  энергии взаимодействия  $\bar{V}$  (экспоненциальный временной множитель в дальнейшем опускаем):

$$v_{ba} = \sum_{N_l^r, M_\sigma^\lambda} \Psi_b^* \bar{V} \Psi_a.$$

С учетом соотношений коммутации (17') и (20') и того обстоятельства, что  $\bar{V}$  — линейная функция операторов  $e^{i(\theta_l^r - \theta_m^s \pm \chi_\sigma^\lambda)/\hbar}$ , можно показать обычным способом, что отличны от нуля только те матричные элементы  $v_{ab}$ , которые соответствуют изменению состояния электрона, связанного с излучением или поглощением светового кванта.

Значение матричного элемента  $v_{ab}$ , соответствующего, например, переходу электрона из состояния  $l, r$  в состояние  $m, s$  с поглощением светового кванта  $\sigma, \lambda$ , зависит только от членов в (22), пропорциональных  $e^{i(\theta_l^r - \theta_m^s - \chi_\sigma^\lambda)/\hbar}$  и  $e^{i(\theta_m^s - \theta_l^r - \chi_\sigma^\lambda)/\hbar}$ . Оказывается после вычислений, при которых следует учесть соотношения

$$N_l^{r''} = 1 - N_l^{r'} = 0, \quad N_m^{s''} = 1 - N_m^{s'} = 1, \quad M_\sigma^{\lambda''} = M_\sigma^{\lambda'} - 1,$$

что

$$v_{ba}(\text{погл.}) = a \delta_{0, l-m+\sigma} \omega_\sigma^{-1/2} \sqrt{M_\sigma^{\lambda'}} b_{\sigma ml}^{\lambda sr} \nu_l^r (1 - N_l^{r'}, N_m^{s'}) \times \\ \times \nu_m^s (N_l^{r'}, 1 - N_m^{s''}), \quad (24)$$

где выписаны аргументы только тех знаковых функций  $\nu_l^r$  и  $\nu_m^s$ , которые меняются во время рассматриваемого перехода. В случае излучения светового кванта  $\sigma, \lambda$  матричный элемент  $v_{ba}$  (изл.) отличается от  $v_{ba}$  (погл.) только тем, что в (24) нужно заменить  $M_\sigma^{\lambda'}$  на  $M_\sigma^{\lambda'} + 1$  и  $\delta_{0, l-m+\sigma}$  на  $\delta_{0, l-m-\sigma}$ . Тем самым из определения (21) коэффициентов  $\delta_{0, l-m-\sigma}$  следует, что отличны от нуля матричные элементы  $v_{ab}$  только тех переходов, для которых удовлетворены соотношения

$$\mathbf{k}_l + \mathbf{k}_\sigma = \mathbf{k}_m \quad (\text{погл.}), \quad \mathbf{k}_l = \mathbf{k}_m + \mathbf{k}_\sigma \quad (\text{изл.}). \quad (25)$$

Эти соотношения выражают закон сохранения импульсов при переходах, так как векторы волновых чисел  $\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_m$  (соответственно  $\mathbf{k}_\sigma$ ) пропорциональны импульсу электрона (соответственно светового кванта) (ср. (3), (16)):

$$\mathbf{k}_l = \frac{1}{\hbar} \mathbf{p}_l, \quad \mathbf{k}_m = \frac{1}{\hbar} \mathbf{p}_m, \quad \mathbf{k}_\sigma = \frac{\omega_\sigma}{c} \mathbf{n}_\sigma = \frac{1}{\hbar} \mathbf{p}_\sigma. \quad (25')$$

Далее следует согласно общей дираковской теории исключить те переходы, которые связаны с непреенебрежимым изменением энергии системы<sup>24</sup>. Так как при излучении или поглощении фо-

<sup>24</sup> Под энергией системы здесь следует, как известно, понимать «proper energy», т. е. полную энергию минус энергию взаимодействия.

тона свободным электроном нельзя, как известно, удовлетворить одновременно сохранению импульса и энергии, следует рассматривать в качестве простейших возможных «двойные переходы» (т. е. последовательности из двух переходов, ведущие из начального состояния через промежуточное состояние в конечное состояние). При таком двойном переходе может или один квант поглощаться и другой испускаться (рассеяние излучения), или также два кванта поглощаться (соответственно — испускаться). Последняя возможность является решающей при спонтанном переходе электрона из состояний с положительной в состояние с отрицательной энергией.

Вычисленная вероятность в единицу времени того, что такой двойной переход системы из состояния  $a$  в состояние  $c$  (или точнее в состояния, которые только мало отличаются от  $c$ ) будет иметь место, равна <sup>25</sup>

$$Z_{ao} = \frac{2\pi}{\hbar\Delta W_c} \left| \sum_b \frac{v_{cb}v_{ba}}{W_a - W_b} \right|^2, \quad (26)$$

где через  $b$  обозначено промежуточное состояние рассматриваемого двойного перехода  $a \rightarrow b \rightarrow c$ , а  $\Delta W_c$  означает среднюю разницу энергий между двумя соседними конечными состояниями системы. Энергия системы в состоянии  $a$  и  $b$  обозначена через  $W_a$  и  $W_b$ .

Рассмотрим, например, рассеяние фотона  $\sigma$ ,  $\lambda$ , при котором рассеивающий электрон переходит из состояния  $k$ ,  $q$  в состояние  $n$ ,  $t$  а фотон — в состояние  $\tau$ ,  $\mu$ . Этот процесс рассеяния может либо начаться с поглощения кванта  $\sigma$ ,  $\lambda$ , при котором электрон переходит в состояние  $l$ ,  $r$ , и закончиться испусканием кванта  $\tau$ ,  $\mu$ :

$$(k, q) + (\sigma, \lambda) \rightarrow (l, r) \rightarrow (n, t) + (\tau, \mu), \quad (I)$$

либо начаться с испускания  $\tau$ ,  $\mu$ , при котором электрон переходит в другое промежуточное состояние  $m$ ,  $s$ , и закончиться поглощением  $\sigma$ ,  $\lambda$ :

$$(k, q) + (\sigma, \lambda) \rightarrow (m, s) + (\tau, \mu) + (\sigma, \lambda) \rightarrow (n, t) + (\tau, \mu). \quad (II)$$

Импульс электрона в промежуточном состоянии однозначно определяется из закона сохранения импульса:

$$\mathbf{k}_k + \mathbf{k}_\sigma = \mathbf{k}_l, \quad \mathbf{k}_k = \mathbf{k}_m + \mathbf{k}_\tau.$$

Это не так для состояния поляризации электрона и знака его энергии.

Для перехода типа (I), удовлетворяющего сохранению импульса, из (24) получается

<sup>25</sup> Ср. *P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc. London, 1927, A114, 710, уравнение (22)*, где  $\hbar$  означает планковскую константу, т. е. в  $2\pi$  раз больше, чем у нас.



$$v_{cb}v_{ba} = a^2 \sqrt{\frac{M_\sigma^{\lambda'} (M_\tau^{\mu'} + 1)}{\omega_\sigma \omega_\tau}} b_{\tau nl}^{\mu' r} b_{s lk}^{\lambda' r q} \nu_k^q (1 - N_k^{q'}, N_{l'}^{r'}) \times \\ \times \{\nu_l^r (N_k^{q''}, 1 - N_{l'}^{r''}, N_n^{t''})\}^2 \nu_n^t (N_{l'}^{r''}, 1 - N_n^{t''}),$$

где через  $N'$ ,  $N''$ ,  $N'''$  обозначено значение соответствующих переменных в состояниях  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . В случае перехода типа (II) следует в этом уравнении только заменить  $l$ ,  $r$  на  $m$ ,  $s$ . Если далее выразить меняющуюся при рассматриваемых переходах долю энергии системы через круговую скорость электрона и фотона

$$W_a = h(\omega_k^q + \omega_\sigma) + \text{const и т. д.},$$

и заметить, что абсолютное значение знаковой функции  $\nu$  равно 1, то получим

$$\left| \sum_b \frac{v_{cb}v_{ba}}{W_a - W_b} \right|^2 = \frac{a^4}{h^2 \omega_\sigma \omega_\tau} M_\sigma^{\lambda'} (M_\tau^{\mu'} + 1) |P_{\lambda\mu}^{qt}|^2, \quad (27)$$

где обозначено

$$P_{\lambda\mu}^{qt} = \sum_{r=1}^4 \frac{b_{\tau nl}^{\mu' r} b_{s lk}^{\lambda' r q}}{\omega_k^q + \omega_\sigma - \omega_l^r} + \sum_{s=1}^4 \frac{b_{\sigma nm}^{\lambda' s} b_{\tau mk}^{\mu' s q}}{\omega_k^q - \omega_\tau - \omega_m^s}. \quad (27')$$

Рассмотрим, например, первую, входящую в (27') сумму подробнее. Учитывая, что согласно (23)

$$b_{\tau nl}^{\mu' r} b_{s lk}^{\lambda' r q} = (u_n^{t*} e_\tau^{\mu'} \gamma u_l^r) (u_l^{r*} e_\sigma^{\lambda'} \gamma u_k^q)$$

и что при выбранной нормировке  $\omega_l^r = |\omega_l|$  при  $r=1, 2$  и  $\omega_l^r = -|\omega_l|$  при  $r=3, 4$ , можно переписать эту сумму в следующем виде:

$$\frac{u_n^{t*} e_\tau^{\mu'} \gamma}{(\omega_k^q + \omega_\sigma)^2 - \omega_l^2} \left\{ (\omega_k^q + \omega_\sigma) \sum_{r=1}^4 u_l^r u_l^{r*} + |\omega_l| \left( \sum_{r=1}^2 u_l^r u_l^{r*} - \sum_{r=3}^4 u_l^r u_l^{r*} \right) \right\} e_\sigma^{\lambda'} \gamma u_k^q.$$

Учитывая далее, что из (12), (12') и (12'') следует

$$\sum_{r=1}^4 u_l^r u_l^{r*} = 1, \quad \sum_{r=1}^2 u_l^r u_l^{r*} - \sum_{r=3}^4 u_l^r u_l^{r*} = 1 + \frac{1}{h|\omega_l|} H_l,$$

можно упростить эту сумму к виду

$$\frac{u_n^{t*} e_\tau^{\mu'} \gamma \left( \omega_k^q + \omega_\sigma + \frac{1}{h} H_l \right) e_\sigma^{\lambda'} \gamma u_k^q}{(\omega_k^q + \omega_\sigma)^2 - \omega_l^2}.$$

Если и вторую сумму в (27') преобразовать соответственно, получим окончательно

$$P_{\lambda\mu}^{qt} = u_n^{t*} \left\{ \frac{e_\tau^{\mu'} \gamma \left( \omega_k^q + \omega_\sigma + \frac{1}{h} H_l \right) e_\sigma^{\lambda'} \gamma}{(\omega_k^q + \omega_\sigma)^2 - \omega_l^2} + \frac{e_\sigma^{\lambda'} \gamma \left( \omega_k^q - \omega_\tau + \frac{1}{h} H_m \right) e_\tau^{\mu'} \gamma}{(\omega_k^q - \omega_\tau)^2 - \omega_m^2} \right\} u_k^q. \quad (28)$$

Если далее ввести (27) в (26), получим вычисленную вероятность в единицу времени рассматриваемого процесса рассеяния:

$$Z_{ac} = \frac{2\pi a^4}{\hbar^3 \omega_\sigma \omega_\tau \cdot \Delta W_c} M_\sigma^{\lambda'} (M_\tau^{\mu'} + 1) |P_{\mu'}^{\lambda'}|^2. \quad (29)$$

Вероятность излучения (соответственно—поглощения) двух фотонов  $\sigma$ ,  $\lambda$  и  $\tau$ ,  $\mu$  отличается от (29), как легко видеть, только тем, что в (29)  $M_\sigma^{\lambda'}$  нужно заменить на  $M_\sigma^{\lambda'} + 1$  (соответственно  $M_\tau^{\mu'} + 1$  на  $M_\tau^{\mu'}$ ), а в (28)  $\omega_\sigma$  на  $-\omega_\sigma$  (соответственно  $-\omega_\tau$  на  $\omega_\tau$ ).

## § 5. Рассеяние излучения свободными электронами

Мы теперь применим результаты, полученные в § 4, к случаю рассеяния излучения и простоты ради примем, что рассеивающий электрон в начальном состоянии покоится и имеет положительную энергию

$$\omega_k^0 = \omega_0 > 0, \quad \mathbf{k}_k = 0, \quad (30)$$

где через  $\omega_0$  обозначена круговая скорость

$$\omega_0 = mc^2/\hbar. \quad (31)$$

Дальше примем, что конечное состояние электрона — опять состояние положительной энергии:

$$\omega_n^t = \omega_n > 0. \quad (30')$$

Наконец, следует предположить, что не имелось первоначально излучения частоты  $\omega_\tau$

$$M_\tau^{\mu'} = 0, \quad (30'')$$

что соответствует обычным опытным условиям при измерениях рассеяния. Излучение, падающее в направлении  $\mathbf{n}_\sigma$ , с частотой  $\omega_\sigma$  пусть будет линейно-поляризованным. Нужно исследовать рассеянное излучение в заданном направлении  $\mathbf{n}_\tau$ .

Из сохранения импульса (25), справедливого для каждой ступени процесса рассеяния, и из сохранения энергии, справедливого только для начального и конечного состояний системы, но не для промежуточных ступеней с двойными переходами, следует

$$\mathbf{k}_\sigma = \mathbf{k}_l = \mathbf{k}_\tau + \mathbf{k}_n, \quad \mathbf{k}_m = -\mathbf{k}_\tau, \quad (32)$$

$$\omega_0 + \omega_\sigma = \omega_n + \omega_\tau. \quad (32')$$

Учитывая, что уравнение (8'') для произвольного  $\mathbf{k}_l$  на основе (3) может быть записано следующим образом:

$$\omega_l^2 = \omega_0^2 + c^2 k_l^2, \quad (33)$$

и вводя обозначения

$$\alpha = \frac{\omega_\sigma}{\omega_0} = \frac{\hbar \omega_\sigma}{mc^2}, \quad \mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\tau = \cos \Theta, \quad \beta = \alpha (1 - \cos \Theta), \quad (34)$$

можно получить, разрешая (32) и (32') с учетом (16), соотношения, известные из теории комpton-эффекта,

$$\frac{\omega_\sigma}{\omega_0} = \alpha, \quad \frac{\omega_\tau}{\omega_0} = \frac{\alpha}{1 + \beta}, \quad \frac{\omega_n}{\omega_0} = 1 + \frac{\alpha^2}{1 + \beta}, \quad (35)$$

как и последующие соотношения

$$\omega_\tau^2 = \omega_0^2 + \omega_\sigma^2 = \omega_0^2(1 + \alpha^2), \quad \omega_n^2 = \omega_0^2 + \omega_\tau^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{(1 + \beta)^2}\right). \quad (35')$$

Чтобы вычислить входящую в (29) среднюю разницу энергий  $\Delta W_c$  между двумя соседними конечными состояниями системы, нужно заметить, что из-за строгого закона сохранения импульса конечное состояние системы однозначно определено заданным  $\mathbf{k}_\tau$  и  $\mathbf{e}_\tau^\mu$  при заданном начальном состоянии. Как известно, в области частот между  $\omega_\tau$  и  $\omega_\tau + d\omega_\tau$  имеется

$$\left(\frac{L}{2\pi c}\right)^3 \omega_\tau^3 d\Omega_\tau d\omega_\tau = s_\tau d\omega_\tau$$

поступательных собственных колебаний куба  $L^3$  заданной поляризации  $\mathbf{e}_\tau^\mu$ , векторы нормали которых  $\mathbf{n}_\tau$  попадают в пространственный угол  $d\Omega_\tau$ . Если ввести для описания конечного состояния системы вместо  $\omega_\tau$ ,  $\mathbf{n}_\tau$ ,  $\mathbf{e}_\tau^\mu$  величины  $W_c$ ,  $\mathbf{n}_\tau$ ,  $\mathbf{e}_\tau^\mu$  и заменить  $d\omega_\tau$  через

$$d\omega_\tau = \frac{\partial \omega_\tau}{\partial W_c} dW_c = \frac{1}{\partial W_c / \partial \omega_\tau} dW_c,$$

где при дифференцировании направление  $\mathbf{n}_\tau$  сохраняется, то можно получить для  $\Delta W_c$  значение

$$\Delta W_c = \frac{dW_c}{s_\tau d\omega_\tau} = \frac{1}{s_\tau} \frac{\partial W_c}{\partial \omega_\tau}$$

и тем самым, принимая во внимание, что  $W_c = h(\omega_\tau + \omega_n) + \text{const}$ ,

$$\frac{1}{\Delta W_c} = \frac{s_\tau}{\partial W_c} = \left(\frac{L}{2\pi c}\right)^3 \frac{\omega_\tau^2}{h \left(1 + \frac{\partial \omega_n}{\partial \omega_\tau}\right)} d\Omega_\tau. \quad (36)$$

Производную  $\partial \omega_n / \partial \omega_\tau$  следует при этом вычислить из точного закона сохранения импульса (32); с учетом (16) и (33) получается

$$\mathbf{k}_n = \mathbf{k}_\sigma - \mathbf{k}_\tau, \quad c^2 k_n^2 = \omega_n^2 - \omega_0^2 = \omega_\sigma^2 + \omega_\tau^2 - 2\omega_\sigma \omega_\tau \mathbf{n}_\sigma \mathbf{n}_\tau;$$

таким образом, при постоянном направлении  $\mathbf{n}_\tau$

$$\omega_n \frac{\partial \omega_n}{\partial \omega_\tau} = \omega_\tau - \omega_\sigma \cos \Theta.$$

В это выражение можно ввести теперь значение  $\omega_\tau + \omega_n$  из (приблизительно справедливого) уравнения для энергий (32'). С учетом (34) получается

$$1 + \frac{\partial \omega_n}{\partial \omega_\tau} = \frac{\omega_0 + \omega_\sigma - \omega_\sigma \cos \Theta}{\omega_n} = \frac{\omega_0}{\omega_n} (1 + \beta),$$

и тем самым

$$\frac{1}{\Delta W_c} = \left(\frac{L}{2\pi c}\right)^3 \frac{\omega_\tau^2 \omega_n d\Omega_\tau}{h\omega_0(1+\beta)}.$$

Целесообразно число  $Z_{ac}$  рассеянных в единицу времени в направлении  $\mathbf{n}_\tau$  квантов выразить через измеренную на расстоянии  $R \gg L$  от осевого куба  $L^3$  интенсивность  $I'$  рассеянного излучения в кубе на один рассеивающий электрон:

$$Z_{ac} = \frac{I' R^2 d\Omega_\tau}{h\omega_\tau}.$$

Если далее выразить число  $M_\sigma^\lambda$  имеющихся в основном кубе квантов  $\sigma, \lambda$  через интенсивность  $I_0$  падающего света

$$h\omega_\sigma M_\sigma^{\lambda'} = \frac{1}{c} I_0 L^3$$

и подставить в (29) значение  $\Delta W_c$  и  $a$  (уравнение (23)), то можно получить с учетом (31)

$$I' = I_0 \frac{e^4 \omega_n}{h^2 \omega_0 R^2 (1+\beta)^3} |P_{\lambda\mu}^{qt}|^2 = I_0 \frac{c^4}{m^2 c^4 R^2} \frac{\omega_0 \omega_n}{(1+\beta)^3} |P_{\lambda\mu}^{qt}|^2. \quad (37)$$

Теперь мы должны вычислить  $P_{\lambda\mu}^{qt}$ . Подставляя в (28) значения  $\omega_k^q, \omega_\sigma$  и т. д. из (30), (35) и (35'), получаем

$$P_{\lambda\mu}^{qt} = \frac{1}{2\alpha\omega_0} u_n^{t*} Q u_k^q,$$

где через  $Q$  обозначена матрица

$$Q = \mathbf{e}_\tau^\mu \boldsymbol{\gamma} \left(1 + \alpha + \frac{1}{h\omega_0} H_l\right) \mathbf{e}_\sigma^\lambda \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_\sigma^\lambda \boldsymbol{\gamma} \left(1 + \beta - \alpha + \frac{1+\beta}{h\omega_0} H_m\right) \mathbf{e}_\tau^\mu \boldsymbol{\gamma}.$$

Из (6'), (31), (32) и (35) получается далее

$$\frac{1}{h\omega_0} H_l = \gamma_0 + \alpha \boldsymbol{\gamma} \mathbf{n}_\sigma, \quad \frac{1+\beta}{\omega_0} H_m = (1+\beta) \gamma_0 - \alpha \boldsymbol{\gamma} \mathbf{n}_\tau.$$

Нас интересует только квадрат абсолютной суммы  $P_{\lambda\mu}^{qt}$ , который следующим образом зависит от  $Q$ :

$$4\alpha^2 \omega_0^2 |P_{\lambda\mu}^{qt}|^2 = (u_n^{t*} Q^* u_k^{q*}) (u_n^{t*} Q u_k^q) = (u_k^{q*} Q^\dagger u_n^t) (u_n^{t*} Q u_k^q). \quad (38)$$

В этом месте удобно принять определенные значения для спинных матриц  $\gamma_0$  и  $\boldsymbol{\gamma}$ . Мы положим, следуя Дираку,

$$\gamma_0 = \rho_3, \quad \gamma_1 = \rho_1 \sigma_1, \quad \gamma_2 = \rho_1 \sigma_2, \quad \gamma_3 = \rho_1 \tau_3, \quad (39)$$

где  $\rho_i$  и  $\sigma_i$  — введенные Дираком матрицы, удовлетворяющие следующим соотношениям<sup>26</sup>:

$$\rho_i^2 = \sigma_i^2 = 1, \quad \rho_i \sigma_j = \sigma_j \rho_i, \quad \sigma_1 \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_1 = i\sigma_3, \\ \rho_1 \rho_2 = -\rho_2 \rho_1 = i\rho_3. \quad (39')$$

<sup>26</sup> P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc. London, 1928, A117, 610.

Если обозначить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  три произвольных вектора, коммутирующих с  $\rho_1$  и  $\sigma_j$ , то можно получить на основе (39') следующие правила вычисления:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}\gamma)(\mathbf{b}\gamma) &= \mathbf{ab} + i[\mathbf{ab}]\sigma, \\ (\mathbf{a}\gamma)(\mathbf{b}\gamma)(\mathbf{c}\gamma) &= (\mathbf{a}\gamma)(\mathbf{bc}) + i\rho_1\mathbf{a}[\mathbf{bc}] - [\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]\rho_1\sigma. \end{aligned} \quad (40)$$

С учетом этих соотношений получаем после некоторого вычисления

$$\begin{aligned} Q &= 2\alpha e_s^{\lambda} e_{\tau}^{\mu} + i(\rho_3 - 1) \{ \beta e_s^{\lambda} e_{\tau}^{\mu} + (2 + \beta)[e_s^{\lambda} e_{\tau}^{\mu}]\sigma \} + \\ &+ i\alpha\rho_1(a_s^{\lambda} e_{\tau}^{\mu} + a_{\tau}^{\mu} e_s^{\lambda}) + \alpha\rho_1\sigma ([a_s^{\lambda} e_{\tau}^{\mu}] + [a_{\tau}^{\mu} e_s^{\lambda}]), \end{aligned} \quad (41)$$

где обозначено

$$a_s^{\lambda} = |\mathbf{n}_s e_s^{\lambda}| \quad \text{и} \quad a_{\tau}^{\mu} = |\mathbf{n}_{\tau} e_{\tau}^{\mu}|. \quad (41')$$

Если нас интересует только интенсивность рассеянного излучения, а поляризация электрона после рассеяния незначительна, то мы должны суммировать в (38) по  $t=1, 2$ . С учетом (12') получаем

$$|P_{\lambda\mu}^q|^2 = \sum_{t=1}^2 |P_{\lambda\mu}^{qt}|^2 = \frac{1}{8z^2\omega_0^2} u_k^q{}^* Q^{\dagger} \left(1 + \frac{1}{\hbar\omega_n} H_n\right) Q u_k^q,$$

или в несколько более подробной записи

$$8\alpha^2\omega_0^2 |P_{\lambda\mu}^q|^2 = \sum_{r,s=1}^4 u_{k,r}^q{}^* \left(Q^{\dagger}Q + \frac{1}{\hbar\omega_n} Q^{\dagger}H_n Q\right)_{rs} u_{k,s}^q.$$

Принимая во внимание (6'), (35) и тот факт, что  $\mathbf{k}_n = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_{\tau}$  (уравнение (32)), легко доказать, что

$$\begin{aligned} \frac{\omega_n(1+\beta)}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{\hbar\omega_n} H_n\right) &= 1 + \beta + \alpha\beta + (1+\beta)\rho_3 + \\ &+ \alpha\beta_1\sigma \{(1+\beta)\mathbf{n}_s - \mathbf{n}_{\tau}\}. \end{aligned}$$

Наконец, мы хотим еще усреднить по возможным ориентациям спина рассеивающего электрона в начальном состоянии, т. е. определить

$$|P_{\lambda\mu}^q|^2 = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^2 |P_{\lambda\mu}^q|^2.$$

Из (12'), (6'), (30) и (39) следует

$$\sum_{q=1}^2 u_{k,s}^q u_{k,r}^q{}^* = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{|W_k|} H_k\right)_{sr} = \frac{1}{2} (1 + \gamma_0)_{sr} = \frac{1}{2} (1 + \rho_3)_{sr}$$

и тем самым с учетом (8')

$$32\alpha^2\omega_0^2 |P_{\lambda\mu}|^2 = \text{Spur} \left\{ Q^\dagger \left( 1 + \frac{1}{h\omega_n} H_n \right) Q \left( 1 + \rho_3 \right) \right\} = \\ = 2 \sum_{s=1}^2 \left\{ Q^\dagger \left( 1 + \frac{1}{h\omega_n} H_n \right) Q \right\}_{ss}. \quad (42)$$

Теперь нужно учесть, что члены  $\rho_{3, st}$  матрицы  $\rho_3$  (уравнение (8')) при  $s \leq 2$ ,  $t$  произвольном и при  $t \leq 2$ ,  $s$  произвольном равны  $\delta_{st}$ . Поэтому при вычислении правой стороны (42) в  $Q$  и  $Q^\dagger$  можно заменить матрицу  $\rho_3$  на единичную матрицу и тем самым член в (41), пропорциональный  $\rho_3 - 1$ , просто вычеркнуть. Далее легко проверить, что из 16 независимых квадратных матриц четвертого порядка  $1$ ,  $\rho_i$ ,  $\sigma_i$ ,  $\rho_i \sigma_j$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) только у матриц  $1$  и  $\rho_3$  сумма первых двух диагональных членов отлична от нуля, и притом равна 2. Поэтому при вычислении (42) нужно определить только члены  $QQ^\dagger$  и  $Q^\dagger H_n Q$ , содержащие матрицы  $1$  и  $\rho_3$ . Таким образом, получаем с учетом (40)

$$4\omega_0\omega_n (1 + \beta) |P_{\lambda\mu}|^2 = 4(1 + \beta) (e_\sigma^1 e_\tau^2)^2 + \alpha\beta \{ 1 - |e_\sigma^1 a_\tau^\lambda| |e_\tau^2 a_\sigma^\mu| \},$$

или на основе (41') и (34)

$$\omega_0\omega_n |P_{\lambda\mu}|^2 = (e_\sigma^1 e_\tau^2)^2 + \frac{\beta^2}{4(1 + \beta)}. \quad (43)$$

Вводя (43) в (37), получим вычисленную на один рассеивающий электрон интенсивность в направлении  $e_\tau^\mu$  доли излучения рассеяния:

$$I' = I_0 \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2 (1 + \beta)^3} \left\{ e_\sigma^1 e_\tau^2 + \frac{\beta^2}{4(1 + \beta)} \right\}. \quad (44)$$

Если положить единичный вектор  $e_\tau^\mu$  один раз ( $\mu=1$ ) в плоскость, определяемую  $e_\sigma^1$  и  $n_\tau$ , а другой раз ( $\mu=2$ ) перпендикулярно этой плоскости, то

$$(e_\sigma^1 e_\tau^1)^2 = \sin^2 \vartheta, \quad (e_\sigma^1 e_\tau^2)^2 = 0,$$

где с помощью  $\vartheta$  обозначен угол между направлением рассеяния  $n_\tau$  и направлением колебания  $e_\sigma^1$  падающего излучения. Полная интенсивность рассеянного в направлении  $n_\tau$  излучения равна сумме интенсивностей долей рассеянного излучения в перпендикулярных направлениях  $e_\tau^1$  и  $e_\tau^2$ ; таким образом,

$$I' = I_0 \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2 (1 + \beta)^3} \left( \sin^2 \vartheta + \frac{\beta^2}{2(1 + \beta)} \right). \quad (45)$$

Эта формула с точностью до обозначений совпадает с выведенной Клайном и Нишиной (1. с.) и тем самым находится в удовлетворительном согласии с опытом.

Если бы мы, напротив, при вычислении рассеяния пренебрегли переходами электронов через промежуточные состояния отрицательной энергии и учли бы только промежуточные состояния положительной энергии, то получили бы формулу, находящуюся в вопиющем противоречии с экспериментом.

Это противоречие особенно поразительно при малых частотах падающего излучения, т. е. в области справедливости классической теории. Если пренебречь  $\alpha^2 \left( \frac{h\omega_\sigma}{mc^2} \right)^2$  по сравнению с единицей, то получим для  $|P_{\lambda\mu}|^2$  вместо (43) значение *нуль*, учитывая только промежуточное состояние положительной энергии. В этом приближении соответствующее (43) значение

$$|P_{\lambda\mu}|^2 = \frac{1}{\omega_0\omega_n} (\mathbf{e}_\lambda^i \mathbf{e}_\tau^i)^2$$

получится, если учесть только промежуточные состояния отрицательной энергии. При больших длинах волн падающего излучения суммарное рассеяние также определяется практически теми переходами, которые ведут через промежуточные состояния отрицательной энергии электрона.

### § 6. Переходы электронов с положительных на отрицательные энергетические уровни (аннигиляция материи)

Мы рассматриваем простоты ради покоящийся электрон положительной энергии

$$h\omega_k^i = h\omega_0 > 0, \quad \mathbf{k}_k = 0$$

(ср. (30)) и ищем вероятность того, что электрон, испуская излучение, перейдет в заданное (незанятое) состояние отрицательной энергии

$$h\omega_n^f = -h\omega_n < 0.$$

Если принять по новейшей теории Дирака, что почти все остальные состояния отрицательной энергии заняты электронами, то такой переход соответствует, согласно Дираку, аннигиляции, или взаимной нейтрализации электрона и протона. Однако при настоящем состоянии теории мы должны полностью пренебречь взаимодействием электронов отрицательной энергии и можем поэтому рассматриваемый переход описывать как аннигиляцию только с четкой оговоркой (ср. § 1, п. 2). И поскольку дираковская теория при пренебрежении взаимодействием элементарных частиц симметрична в отношении электронов и протонов, то, пожалуй, лучшим приближением к действительности будет, если в этом параграфе понимать под  $m$  не массу электрона, а пока не точно определенную *среднюю массу электрона и протона*.

Как было замечено уже в § 4, закон сохранения импульса вынуждает нас принять, что процесс аннигиляции должен быть связан с эмиссией (по крайней мере) двух световых квантов  $\sigma$ ,  $\lambda$  и  $\tau$ ,  $\mu$ , т. е. его следует отметить как «двойной переход». Если вначале испускается квант  $\sigma$ ,  $\lambda$ , а потом квант  $\tau$ ,  $\mu$ , то будем обозначать соответствующее промежуточное состояние электрона индексом  $l$ , в противоположном случае — индексом  $m$ .

Применение законов сохранения энергии-импульса приводит к следующим соотношениям (ср. (32) и (32')):

$$\mathbf{k}_\sigma = -\mathbf{k}_l, \quad \mathbf{k}_\tau = -\mathbf{k}_m, \quad \mathbf{k}_\sigma + \mathbf{k}_\tau = -\mathbf{k}_l - \mathbf{k}_m = -\mathbf{k}_n, \quad (46)$$

$$\omega_0 = \omega_\sigma + \omega_\tau - \omega_n, \quad \text{или} \quad k_l + k_m = (\omega_0 + \omega_n)/c. \quad (46')$$

Частоты  $\omega_\sigma$ ,  $\omega_\tau$  и направление распространения  $\mathbf{n}_\sigma$ ,  $\mathbf{n}_\tau$  испускаемых световых квантов естественно не определены с помощью (46) и (46') однозначно.

Рассмотрим случай, когда направление  $\mathbf{n}_\sigma$  кванта  $\sigma$ ,  $\lambda$  попадает в пространственный элементарный угол  $d\Omega_\sigma = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ ; с помощью  $\vartheta$  при этом обозначается угол между  $\mathbf{k}_n$  и  $\mathbf{n}_\sigma$ . Разрешая (46), легко получаем с учетом уравнения (8')

$$\omega_\tau^2 = \omega_\sigma^2 + c^2 k_n^2 + 2ck_n \omega_\sigma \cos \vartheta, \quad (47)$$

$$\omega_l^2 = \omega_0^2 + \omega_\sigma^2, \quad \omega_m^2 = \omega_0^2 + \omega_\tau^2. \quad (47')$$

При незначительных изменениях проведенных в § 5 вычислений получаем для обратной величины средней разности энергий между соседними конечными состояниями системы значение (ср. (36))

$$\frac{1}{\Delta W_c} = \left(\frac{L}{2\pi c}\right)^3 \frac{\omega_\sigma^2}{h \left(1 + \frac{\partial \omega_\tau}{\partial \omega_\sigma}\right)} d\Omega_\sigma$$

и для вычисления из (47) при сохранении направления  $\mathbf{n}_\sigma$  производной  $d\omega_\tau/d\omega_\sigma$  — значение

$$\frac{\partial \omega_\tau}{\partial \omega_\sigma} = \frac{\omega_\sigma + ck_n \cos \vartheta}{\omega_\tau}.$$

Тем самым отсюда следует согласно (46)

$$1 + \frac{\partial \omega_\tau}{\partial \omega_\sigma} = \frac{\omega_0 + \omega_n + ck_n \cos \vartheta}{\omega_\tau}.$$

Чтобы иметь возможность применить формулы (28) и (29) к настоящему случаю (испусканию двух квантов), достаточно, как уже отмечалось в конце § 4, заменить  $M_\sigma^{\lambda'}$  в (29) на  $M_\sigma^{\lambda'} + 1$  и поменять знак перед  $\omega_\sigma$  в (28). Таким образом, можно получить с учетом (23) значение для вычисленной в единицу времени вероятности аннигиляции, связанной с испусканием двух световых квантов  $\sigma$ ,  $\lambda$  и  $\tau$ ,  $\mu$ :

$$Z = \frac{e^4 c \omega_\sigma}{L^3 h^2 (\omega_0 + \omega_n + ck_n \cos \vartheta)} (M_\sigma^{\lambda'} + 1) (M_\tau^{\beta'} + 1) |P_{\mu}^{\lambda}{}^i|^2 d\Omega_\sigma. \quad (48)$$

В последующем в (48) будем пренебрегать числом световых квантов сорта  $\sigma$ ,  $\lambda$  и  $\tau$ ,  $\mu$  по сравнению с единицей

$$M_\sigma^{\lambda'} + 1 \rightarrow 1, \quad M_\tau^{\beta'} + 1 \rightarrow 1, \quad (49)$$

что допустимо вследствие высокой частоты этих квантов ( $\omega \gg \frac{mc^2}{h}$ ) даже при сверхвысоких температурах, царящих внутри звезд.



Изменяя в (28) знак перед  $\omega_\sigma$  и вводя в эту формулу значения (47') для  $\omega_l^2$  и  $\omega_m^2$ , получим

$$2\omega_0\omega_\sigma\omega_\tau P_{\lambda\mu}^{qt} = -u_n^{t*} Q u_k^q,$$

$$Q = \omega_\tau \mathbf{e}_\tau^\mu \gamma \left( \omega_0 - \omega_\sigma + \frac{1}{h} H_l \right) \mathbf{e}_\sigma^\lambda \gamma + \omega_\sigma \mathbf{e}_\sigma^\lambda \gamma \left( \omega_0 - \omega_\tau + \frac{1}{h} H_m \right) \mathbf{e}_\tau^\mu \gamma,$$

и, далее, при незначительных изменениях вычислений, проведенных в § 5,

$$-\frac{1}{\omega_\sigma\omega_\tau} Q = 2\mathbf{e}_\sigma^\lambda \mathbf{e}_\tau^\mu + i\rho_1 (\mathbf{a}_\sigma^\lambda \mathbf{e}_\tau^\mu + \mathbf{a}_\tau^\mu \mathbf{e}_\sigma^\lambda) + \rho_1 \sigma \{ [\mathbf{a}_\sigma^\lambda \mathbf{e}_\tau^\mu] + [\mathbf{a}_\tau^\mu \mathbf{e}_\sigma^\lambda] \} + S, \quad (50)$$

где опять использованы обозначения (41') и где с помощью  $S$  обозначена определенная, содержащая множитель  $(1 - \rho_3)$  матрица, которая не будет нас интересовать более детально.

Квадрат абсолютной суммы  $P_{\lambda\mu}^{qt}$  мы усредним по различным ориентациям спина электрона в начальном и конечном состояниях (т. е. по  $q=1, 2$  и  $t=3, 4$ ). Если, таким образом, на этот раз положить

$$\frac{1}{4} \sum_{t=3}^4 \sum_{q=1}^2 |P_{\lambda\mu}^{qt}|^2 = |P_{\lambda\mu}|^2$$

и заметить, что согласно (12') и (12'')

$$\sum_{t=3}^4 u_{n,r}^t u_{n,s}^{t*} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{h\omega_n} H_n \right)_{rs},$$

$$\sum_{q=1}^2 u_{k,r}^q u_{k,s}^{q*} = \frac{1}{2} (1 + \rho_3)_{rs} \quad (\mathbf{p}_k = 0),$$

то получим

$$32\omega_0^2\omega_\sigma^2\omega_\tau^2 |P_{\lambda\mu}|^2 = \sum_{s=1}^2 \left\{ Q^\dagger \left( 1 - \frac{1}{h\omega_n} H_n \right) Q \right\}_{ss}.$$

При вычислении правой части этого уравнения мы можем поступить так же, как в § 5, т. е. заменить матрицу  $\rho_3$  в  $Q$  и  $Q^\dagger$  единичной матрицей, при этом матрица  $S$ , содержащая множитель  $1 - \rho_3$ , пропадает, а в  $Q^\dagger Q$  и  $Q^\dagger H_n Q$  удержат только члены с матрицами  $1$  и  $\rho_3$ . Принимая во внимание при этом, что согласно (6') и (39) нужно положить

$$1 - \frac{1}{h\omega_n} H_n = \frac{1}{\omega_n} (\omega_n - \omega_0 \rho_3 - c\rho_1 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}_n),$$

получаем после некоторого вычисления

$$8\omega_0\omega_n |P_{\lambda\mu}|^2 = -4 (\mathbf{e}_\sigma^\lambda \mathbf{e}_\tau^\mu)^2 + \left( 1 + \frac{\omega_n}{\omega_0} \right) (1 - \mathbf{n}_\sigma \mathbf{n}_\tau).$$

Выбирая для  $\mathbf{e}_\sigma^\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2$  (соответственно для  $\mathbf{e}_\tau^\mu$ ,  $\mu = 1, 2$ ) два произвольных ортогональных  $\mathbf{n}_\sigma$  (соответственно к  $\mathbf{n}_\tau$ ) перпендикулярных единичных вектора и суммируя выражение для  $|P_{\lambda\mu}|^2$  по  $\lambda = 1, 2$  и  $\mu = 1, 2$ , получаем

$$\sum_{\lambda, \mu} |P_{\lambda\mu}|^2 = \frac{1}{2\omega_0^2\omega_n} \{(\omega_0 + \omega_n)(1 - \mathbf{n}_\sigma\mathbf{n}_\tau) - \omega_0[1 + (\mathbf{n}_\sigma\mathbf{n}_\tau)^2]\}.$$

Для вероятности аннигиляции, имеющей место при испускании двух световых квантов заданной частоты ( $\omega_\sigma$  и  $\omega_\tau$ ) и направления распространения ( $\mathbf{n}_\sigma$  и  $\mathbf{n}_\tau$ ), но произвольной поляризации, получаем тем самым согласно (48) и (49) значение

$$Z = A \frac{\omega_\sigma [\omega_n - (\omega_0 + \omega_n) \mathbf{n}_\sigma\mathbf{n}_\tau - \omega_0 (\mathbf{n}_\sigma\mathbf{n}_\tau)^2]}{\omega_n (\omega_0 + \omega_n + ck_n \cos \vartheta)} d\Omega_\sigma, \quad (51)$$

где обозначено

$$A = \frac{e^4 c}{2L^3 h^2 \omega_0^2} = \frac{e^4 c}{2L^3 m^2 c^4}. \quad (51')$$

Чтобы теперь определить полную вероятность аннигиляции  $Z_g$ , нужно проинтегрировать (51) по всем возможным направлениям  $\mathbf{n}_\sigma$  светового кванта  $\omega_\sigma$ , причем величины  $\omega_\sigma$ ,  $\omega_\tau$ ,  $\mathbf{n}_\tau$  с учетом (46), (46') и (47) следует выразить через  $\mathbf{n}_\sigma$ . Поскольку обмен квантами  $\sigma$  и  $\tau$  не дает нового конечного состояния системы, то каждое конечное состояние системы при такой интеграции считается дважды; интеграл поэтому следует поделить на 2.

Если ввести вместо  $\vartheta$  переменную, определенную через

$$x = \frac{\omega_\sigma - \omega_\tau}{\omega_0 + \omega_n},$$

то получим

$$\begin{aligned} Z_g &= \frac{\omega_0}{2\gamma\omega_n} A \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\gamma}^{+\gamma} dx \left[ \frac{4 - 2\gamma^2}{1 - x^2} - 2 \left( \frac{1 - \gamma^2}{1 - x^2} \right)^2 - 1 \right] = \\ &= 2\pi A \frac{\omega_0}{\omega_n} \left( \frac{3 - \gamma^2}{\gamma} \lg \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} - 2 + \gamma^2 \right), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega_n - \omega_0}{\omega_n + \omega_0}}.$$

Если, наконец, выразить абсолютное значение  $\hbar\omega_n$  энергии электрона в конечном состоянии через его скорость  $\beta = v/c$

$$\omega_n = \frac{\omega_0}{z}, \quad z = \sqrt{1 - \beta^2},$$

получим следующее значение вероятности аннигиляции, вычисленной в единицу времени:

$$Z_g = Z_0 f(\beta), \quad (52)$$

$$Z_0 = 2\pi A = \frac{\pi e^4 c}{L^3 m^2 c^4}, \quad f(\beta) = \frac{z}{1+z} \left( \frac{1+4z+z^2}{z} \lg \frac{1+\frac{z}{z}}{1-\frac{z}{z}} - 3z - 1 \right). \quad (53)$$

Функция  $f(\beta)$  имеет значение 1 при  $\beta=0$  и подает очень медленно при увеличении скорости, пока не достигает значения ноль при  $\beta=1$

$$f(\beta) = 1 - \frac{3}{20}\beta^4 + \dots,$$

так что в большинстве случаев  $f(\beta)$  можно заменить 1.

Поучительно преобразовать выражение для  $Z_0$  следующим образом: если представить себе электрический заряд равномерно распределенным на сферической оболочке диаметра  $d$ , то электромагнитная масса  $m$  этого заряда согласно классической теории имеет значение <sup>27</sup>

$$m = \frac{1}{c^2} \frac{e^2}{d}.$$

Вводя это значение в (53), имеем

$$Z_0 = \pi d^2 c / L^3. \quad (54)$$

Это выражение, однако, дает вычисленную в единицу времени вероятность столкновения двух частиц, которые находятся в объеме  $L^3$ , движутся с относительной скоростью  $c$  и диаметр которых равен  $d$ . Тем самым вероятность аннигиляции (взаимной нейтрализации) свободного электрона и свободного протона равна вероятности столкновения этих частиц, вычисляемой по классической теории в предположении, что относительная скорость этих частиц равна скорости света. Последнее предположение кажется убедительным, если заметить, что скорости электрона по дираковской теории отвечает оператор  $c\gamma$ , собственные значения которого равны  $\pm c$ .

Если в виде опыта применить формулу (52) или (54) к электрону, связанному в атоме, то получим невозможно маленькое значение для времени жизни атома (около  $10^{-3}$  сек, если положить  $m$  равным массе протона, а  $L=10^{-8}$  см). Это приводит к принципиальной трудности всей дираковской теории протонов. Остается открытым вопрос, можно ли переносить проведенное рассмотрение к проблеме стабильности атома, пренебречь силами, действующими между электронами и протонами; уже в классической теории это было бы не так.

Москва, Государственный электротехнический  
исследовательский институт, Отдел физики

Поступила  
7 апреля 1930 г.

<sup>27</sup> Ср. *E. Fermi. Rend. Accad. naz. Lincei, 1922, 31, 184, 306.* Вообще числовой множитель в этом уравнении для нас безразличен, так как формула (52) может быть верной только по порядку величины.

## ЗАМЕЧАНИЯ К ДИРАКОВСКОЙ ТЕОРИИ РАСSEЯНИЯ СВЕТА И ДИСПЕРСИИ <sup>1</sup>

Показано, что рассеяние излучения на паре электронов, при котором оба электрона претерпевают квантовый скачок, возможно только в специальном случае, уже рассмотренном Дираком. Далее подчеркнута значимость учета антисимметрии волновой функции для последовательного рассмотрения этого случая.

§ 1. Рассеяние светового кванта материей состоит, как известно, согласно дираковской теории, из последовательности двух элементарных процессов, а именно поглощения падающего и испускания рассеянного светового кванта.

Обычно рассматривается рассеяние излучения на одном электро-роне. Однако может быть поднят вопрос, не произойдет ли также другой процесс рассеяния при наличии большего числа, скажем пары электронов, причем падающий световой квант поглощается одним электроном, но испускается другим электроном.

Фактически Дирак <sup>2</sup> уже рассмотрел специальный случай такого рассеяния на паре электронов, а именно случай, когда начальное состояние рассеивающего электрона идентично конечному состоянию другого. В § 3 мы рассмотрим этот случай подробнее.

§ 2. Покажем теперь, что более общий случай рассеяния на паре электронов, при котором начальные состояния  $m$  и  $n$  и конечные состояния  $m'$  и  $n'$  обоих электронов все отличаются друг от друга, вообще невозможен. В этом случае есть восемь возможных двойных переходов системы из начального состояния  $a$  (электроны  $m$  и  $n$ , падающий световой квант  $\nu$ ) в конечное состояние  $c$  (электроны  $m'$  и  $n'$ , рассеянный световой квант  $\nu'$ ), которые можно было бы легко указать. Для наших целей, однако, достаточно заметить, что каждому такому двойному переходу можно сопоставить другой, отличающийся от первого только последовательностью элементарных переходов; ср., например, переходы

$$(m, \nu) \rightarrow m', \quad n \rightarrow (n', \nu') \quad (I)$$

(это означает: вначале электрон  $m$  переходит в состояние  $m'$ , поглощая  $\nu$ , потом электрон  $n$  — в состояние  $n'$  с испусканием  $\nu'$ ) и

$$n \rightarrow (n', \nu'), \quad (m, \nu) \rightarrow m'. \quad (II)$$

<sup>1</sup> Z. Phys., 1930, 65, 704. Перевод Р. Э. Каллош.

<sup>2</sup> P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc. London, 1930, A126, 360.

Обозначим промежуточное состояние системы (например, в случае (I) — состояние, в котором электроны находятся в состоянии  $m'$  и  $n$  и не имеется светового кванта) через  $b$ . Тогда, как известно, полная вероятность данного рассеяния пропорциональна

$$\left| \sum_b \frac{V_{cb} V_{ba}}{W_b - W_a} \right|^2, \quad (1)$$

где через  $V_{ba}$  и  $V_{cb}$  обозначены амплитуды вероятности перехода  $a \rightarrow b$  и  $b \rightarrow c$ , а через  $W_a$  и  $W_b$  — энергия системы в состояниях  $a$  и  $b$ .

Так как энергия системы в начальном и конечном состояниях должна быть одинакова ( $W_c = W_a$ ), то изменения энергии при последующих элементарных переходах (например,  $(m, \nu) \rightarrow m'$  и  $n \rightarrow (n', \nu')$ ) должны быть взаимно противоположны. Таким образом, разности энергий  $W_b - W_a$  для двух двойных переходов, которые отличаются только последовательностью элементарных переходов (например, (I) и (II)), должны быть взаимно противоположны. Поэтому если значения  $V_{cb} V_{ba}$  членов суммы (1), отвечающих этим переходам, равны друг другу, то эта сумма равна нулю.

Это и в действительности имеет место, потому что амплитуды вероятности элементарных переходов зависят от последовательности переходов только в той степени, в которой встречается в соответствующих выражениях иордан-вигнеровская знаковая функция

$$\nu_i = \prod_{k \leq i} (1 - 2N_k) \quad (2)$$

( $N_k$  означает число электронов в состоянии  $k$ , которое может быть равно нулю или единице, и предположено, что все электронные состояния упорядочены в определенной последовательности). Амплитуда вероятности перехода, при котором электрон переходит из состояния  $l$  в состояние  $m$ , содержит, в частности, множитель  $\nu_l \nu_m$ , причем аргументы  $N_l$  и  $N_m$  обеих функций  $\nu_l$  и  $\nu_m$  следует положить равными нулю<sup>3</sup>. Однако нетрудно доказать<sup>4</sup>, что произведения этих множителей для двух двойных переходов, отличающихся только последовательностью элементарных переходов, равны друг другу и тем самым и произведения  $V_{cb} V_{ba}$  для этих переходов имеют одинаковое значение. Этим завершается доказательство того, что сумма (1) исчезает и что тем самым вероятность рассматриваемого рассеяния излучения парой электронов равна нулю.

§ 3. Если бы мы в § 2 упустили из виду знаковую функцию  $\nu_l \nu_m$  в выражении для вероятности перехода, то мы все равно

<sup>3</sup> Ср., например, *Ig. Tamt. Z. Phys.*, 1930, **62**, 545, уравнение (24), причем в общем случае нужно заменить  $\delta_{0, l-m+\sigma} b_{\sigma m l}^{l s r}$  на  $e_{\sigma}^l \int \psi_l^{*r} \gamma e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \psi_m^s d\tau$  (см. наст. том, работу 35. — *Прим. ред.*).

<sup>4</sup> Совсем аналогичное доказательство мы дадим подробнее в § 3.

пришли бы к тем же результатам. Напротив, учет этого множителя, т. е. учет антисимметрии волновой функции, является решающим для доказательства утверждения, высказанного Дираком (1. с.). Так как сам Дирак не приводит этого доказательства, мы его здесь коротко обрисуем.

Рассмотрим опять рассеяние светового кванта  $\nu$ . До рассеяния должно быть занято электронное состояние  $m$ , состояние же  $m'$  должно быть свободным, после рассеяния, напротив, —  $m$  должно быть свободным, а  $m'$  занятым. Имеется некоторое количество различных, связанных с рассеянием светового кванта двойных переходов электрона из состояния  $m$  в  $m'$ ; соответствующие промежуточные состояния электрона обозначим через  $n_1, n_2, n_3$  и т. д.

Дирак полагает, что вероятность рассеяния не зависит от того, имеется ли электрон в одном (или в большем числе) из промежуточных состояний  $n_1, n_2, \dots$  (например, в  $n_1$ ) как до, так и после рассеяния. А именно, если  $n_1$  не занято, то, например, возможен двойной переход

$$(m, \nu) \rightarrow n_1, \quad n_1 \rightarrow (m', \nu'); \quad (A)$$

если, напротив, вначале занято  $n_1$ , то возможна обратная последовательность элементарных переходов

$$n_1 \rightarrow (m', \nu'), \quad (m, \nu) \rightarrow n_1. \quad (B)$$

Мы докажем, что в обоих случаях выражение (1) действительно имеет одинаковое значение. В обоих случаях амплитуда вероятности  $V_{cb}V_{ba}$  каждого входящего в рассмотрение двойного перехода содержит знаковый множитель типа

$$\alpha_i = \nu_m \nu_{n_i} \cdot \nu_{n_i} \nu_{m'}. \quad (3)$$

Если все промежуточные состояния  $n_i$  до рассеяния были свободными, то  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots$ .<sup>5</sup> Если, напротив,  $n_1$  занято и вместо перехода (A) имеет место переход (B), то знак знаменателя  $W_b - W_a$  соответствующего члена суммы (1) меняется на противоположный. Значение (1), таким образом, только тогда останется неизменным, если в случае (B) множитель  $\alpha_1$  этого члена будет противоположен множителям  $\alpha_2 = \alpha_3, \dots$ . Мы покажем, что в случае (B) действительно

$$\alpha_1 = -\alpha_2. \quad (4)$$

Легко вычислить, что для перехода (B)

$$\alpha_1 = \nu_{n_1} (N_m = 1) \nu_{m'} (N_m = 1) \nu_m (N_{m'} = 1) \nu_{n_1} (N_{m'} = 1),$$

где выписаны только отличные от нуля аргументы функций<sup>6</sup>  $\nu$ .

<sup>5</sup> Ср. И. Тамм. (1. с.), выражение для  $\nu_{cb}\nu_{ba}$  на стр. 34 наст. тома.

<sup>6</sup> Если в системе имеется больше двух электронов, то только способ записи будет несколько затруднительнее, но в доказательстве ничего не изменится.

Напротив, например, для перехода  $(m, \nu) \rightarrow n_2, n_2 \rightarrow (m', \nu')$  получаем

$$\alpha_2 = \nu_m(N_{n_1} = 1) \nu_{n_2}(N_{n_1} = 1) \nu_{n_2}(N_{n_1} = 1), \\ \cdot \nu_{m'}(N_{n_1} = 1) = \nu_m(N_{n_1} = 1) \nu_{m'}(N_{n_1} = 1).$$

Теперь для двух любых состояний  $m$  и  $m'$  справедливо

$$\nu_{m'}(N_m = 1) \nu_m(N_{m'} = 1) = -1. \quad (5)$$

Поэтому из (2) получаем  $\nu_{m'}(N_m = 1) = -1, \nu_m(N_{m'} = 1) = 1$ , когда  $m < m'$ , и противоположные знаки, когда  $m > m'$ . Тем самым

$$\alpha_1 = -\nu_{n_1}(N_m = 1) \nu_{n_1}(N_{m'} = 1)$$

и

$$\alpha_1 \alpha_2 = -[\nu_{n_1}(N_m = 1) \nu_m(N_{n_1} = 1)][\nu_{n_1}(N_{m'} = 1) \nu_{m'}(N_{n_1} = 1)].$$

Согласно (5) каждая квадратная скобка равна  $-1$  и получается

$$\alpha_1 \alpha_2 = -1,$$

откуда следует (4). Выражение (1) и тем самым и вероятность рассеяния имеют, таким образом, одно и то же значение в случаях (А) и (В), причем изменение знака  $W_b - W_a$  компенсируется изменением знака  $\alpha_1$ .

Москва, Государственный электротехнический  
исследовательский институт, Отдел физики

Поступила  
23 сентября 1930 г.

## О ФОРМУЛИРОВКЕ ПРИНЦИПА ЗАПРЕТА В ДИРАКОВСКОЙ ТЕОРИИ ПОЗИТРОНА <sup>1</sup>

В последней статье <sup>2</sup> по теории позитрона Дирак рассмотрел электронную матрицу плотности для системы электронов, в которой почти все отрицательные состояния заполнены. Дирак пользуется приближением Хартри, но вместо обычной матрицы плотности  $\rho$ , определяемой формулой <sup>3</sup>

$$(x' | \rho | x'')_{\lambda\lambda'} = \sum_l \psi_{l\lambda'}(x') \bar{\psi}_{l\lambda''}(x''), \quad (1)$$

вводит релятивистски-обобщенную матрицу  $R$ , относящуюся к двум временам  $t'$  и  $t''$ :

$$(x', t' | R | x'', t'')_{\lambda\lambda'} = \sum_l \psi_{l\lambda'}(x', t') \bar{\psi}_{l\lambda''}(x'', t''). \quad (2)$$

Здесь  $x$  обозначает три пространственные координаты электрона,  $\lambda$  — спиновая переменная, и сумма берется по всем состояниям  $l$ , занятым электронами.

В нерелятивистском случае уравнение

$$\rho^2 = \rho \quad (3)$$

выражает условие того, что распределение электронов должно удовлетворять принципу запрета. В своей работе Дирак указывает, что в терминах  $R$  это условие нельзя выразить в компактной форме. Поэтому он не исследовал влияние принципа запрета на выражение, найденное им для конечной части  $R$ . В настоящей заметке мы рассмотрим, как выражается принцип запрета в терминах  $R$ .

Как известно, уравнение (3) эквивалентно условию, что набор функций  $\psi_{l\lambda}(x)$  в (1) является ортогональным и нормированным:

$$\sum_\lambda \int \psi_{l\lambda}(x) \bar{\psi}_{m\lambda}(x) dx = \delta_{lm}. \quad (4)$$

Далее, легко показать, что если функции  $\psi_{l\lambda}(x, t)$  удовлетворяют волновому уравнению Дирака и если уравнение

$$\sum_\lambda \int \psi_{l\lambda}(x, t) \bar{\psi}_{m\lambda}(x, t) dx = \delta_{lm} \quad (5)$$

выполняется в какой-нибудь частной системе отсчета в данный момент времени  $t$ , то уравнение (5) выполняется также и в любой другой лоренцовой системе в любой данный момент времени  $t'$  (см. Приложение). Хотя по виду уравнение (5) не является реля-

<sup>1</sup> Phys. Z. Sow., 1934, N 1-2, 189. Перевод Б. Л. Воронова.

<sup>2</sup> P. A. M. Dirac. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1934, 30, 150.

<sup>3</sup> Черта над  $\psi$  здесь означает комплексное сопряжение. — Прим. перев.



тивистски-инвариантным, условие, что функции  $\psi_{i\lambda}(x, t)$  в (2) должны ему удовлетворять, есть, таким образом, инвариантное выражение принципа запрета, соответствующее уравнению (4).

Введем теперь оператор  $D(\tau)$ , определенный формулой

$$(x', t' | D(\tau) | x'', t'')_{\lambda\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(x' - x'') \delta(t' - \tau) \delta(\tau - t''), \quad (6)$$

где  $\tau$  — произвольная константа.

Легко видеть, что если (5) удовлетворяется, то независимо от значения  $\tau$

$$R D(\tau) R = R. \quad (7)$$

С другой стороны, если (7) удовлетворяется для фиксированного значения  $\tau$  в некоторой частной системе отсчета, тогда условие (5) выполняется в этой системе в момент времени  $t = \tau$  и, значит, выполняется также и в любой другой системе в произвольный момент времени  $t'$ . Отсюда следует, что если (7) справедливо в некоторой частной системе для данного значения  $\tau$ , оно справедливо также во всех лорентцовских системах для всех значений  $\tau$ . Таким образом, хотя отдельный оператор  $D(\tau)$  не инвариантен, уравнение (7), отнесенное к бесконечному множеству всех возможных операторов  $D(\tau)$  и эквивалентное уравнению (5), является инвариантным и должно рассматриваться как релятивистское обобщение уравнения (5).

Легко показать, что выражение, полученное Дираком для  $R$  в случае отсутствия поля (см. примечание 2, уравнение (15)), удовлетворяет уравнению (7). Для доказательства надо использовать тот факт, что оператор

$$B = 1 - \frac{\alpha p + \alpha_4 m}{\sqrt{p^2 + m^2}}$$

в уравнении (15) удовлетворяет уравнению  $B^2 = 2B$ . Дираковское выражение для  $R_F$  также удовлетворяет уравнению (7). Случай, когда поле отсутствует, но калибровка изменяется так, что потенциал поля  $A_s$  отличен от нуля, тривиален и не представляет каких-либо трудностей. Но в случае произвольного поля из-за математических трудностей я до сих пор не смог проанализировать влияние принципа запрета (т. е. условия (7)) на матрицу плотности  $R$ .

## П р и л о ж е н и е

Доказательство того, что уравнение (5) является релятивистски-инвариантным

Предположим, что (5) действительно выполняется в системе отсчета  $A$  в момент времени  $t$  и что в этот момент все функции  $\psi_{i\lambda}(x, t)$  исчезают вне некоторого трехмерного объема. Из предположения, что  $\psi_{i\lambda}$  удовлетворяют волновому уравнению Дирака, согласно которому скорость распространения

фронта волны конечна и равна  $c$ , следует, что при любом конечном времени  $t + \Delta t$  все функции  $\psi_{l\lambda}$  будут исчезать вне четырехмерной мировой трубы  $T$  (трехмерное пространственное сечение которой совпадает в системе  $A$  в момент времени  $t$  с данным объемом  $V$ ). Рассмотрим любые два сечения I и II этой мировой трубы, которые не пересекаются друг с другом (это ограничение можно легко снять). Согласно волновому уравнению Дирака четырехмерная дивергенция вектора плотности тока

$$J_s(lm) = \sum_{\lambda, \lambda'} \psi_{l\lambda} \alpha_s^{\lambda' \lambda} \bar{\Psi}_{m\lambda'}, \quad s = 1, 2, 3, 4$$

( $\alpha_s$  — матрицы Дирака, причем  $\alpha_4$  — единичная матрица) тождественно равна нулю. Поскольку этот вектор исчезает на границе мировой трубы  $T$  (вследствие исчезновения  $\psi$ ), то потоки вектора  $J_s$  через сечения I и II должны быть равны:

$$\int_I J_n(lm) dS = \int_{II} J_n(lm) dS,$$

где  $n$  обозначает нормаль к элементу сечения  $dS$ .

Если сечение I совпадает с плоскостью  $t = \text{const}$  в системе отсчета  $A$ , то, так как  $\alpha_4 = 1$ , мы получаем, используя уравнение (5),

$$\begin{aligned} \int_I J_n(lm) dS &= \int J_4(lm) dx dy dz = \\ &= \sum_{\lambda} \int \psi_{l\lambda}(x, y, z, t) \bar{\Psi}_{m\lambda}(x, y, z, t) dx dy dz = \delta_{lm}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\int_{II} J_n(lm) dS = \delta_{lm}. \quad (8)$$

Пусть теперь сечение II совпадает с любой пространственноподобной трехмерной плоскостью  $t' = \text{const}$ , причем  $t'$  — временная переменная в некоторой лорентцовой системе отсчета  $(x', t')$ . Если  $\psi'_{l\lambda}(x', t')$  являются компонентами спинорных волновых функций  $\psi_l(x, t)$  в этой новой системе

$$\psi'_{l\lambda}(x', t') = \sum_{\mu} S_{\lambda\mu} \psi_{l\mu}(x, t),$$

где  $S_{\lambda\mu}$  — матрица преобразования, то таким же образом находим, что

$$\begin{aligned} \int_{II} J_n(lm) dS &= \int_{II} J'_4(lm) dx' dy' dz' = \\ &= \int \sum_{\lambda} \psi'_{l\lambda}(x', y', z', t') \bar{\Psi}'_{m\lambda}(x', y', z', t') dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно (8),

$$\int \sum_{\lambda} \psi'_{l\lambda}(x', t') \bar{\Psi}'_{m\lambda}(x', t') dx' = \delta_{lm}. \quad (9)$$

и наша теорема доказана.

*Теберда, Кавказ*

Поступила 31 июля 1934 г.

## К ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ<sup>1</sup>

Штерн [1] и Ланде [2] нашли, что выраженный в ядерных магнетонах магнитный спиновый момент  $\mu_p$  протона равен  $2^{1/2}$  (по Штерну) либо 2 (по Ланде), тогда как, если к протону было бы применимо волновое уравнение Дирака,  $\mu_p$  должно было бы равняться 1. Простейшее объяснение этого противоречия заключается в следующем.

Будем исходить из того, что в отсутствие поля к элементарной частице применимо соответствующее волновое уравнение Дирака и что, стало быть, ее спин равен  $1/2$ . При обобщении этого уравнения на случай наличия поля дираковское волновое уравнение электрона оказывается отнюдь не единственным возможным. Паули [3] показал, что электромагнитные свойства элементарной частицы могут характеризоваться не только ее зарядом  $e$ , но также и не зависимым от заряда магнитным спиновым моментом  $\mu$ . Соответствующее волновое уравнение с  $\mu \neq 0$  и  $e = 0$  должно, по Паули, быть справедливым для нейтрона. При неопределенных значениях констант  $e$  и  $\mu$  уравнение

$$\left( \gamma^i p_i + mc - \frac{e}{c} \gamma^i A_i - \frac{i\mu}{2c} \gamma^i \gamma^k F_{ik} \right) \psi = 0 \quad (1)$$

является, по Паули, наиболее общим, релятивистски-инвариантным, линейным в импульсах и в  $A_i, F_{ik}$ , самосопряженным и «эйхинвариантным» волновым уравнением, которое переходит в отсутствие поля в соответствующее уравнение Дирака и согласно которому частица и при наличии поля не обладает какими-либо новыми степенями свободы<sup>2</sup>. В уравнении (1) через  $\gamma^i$  обозначены

<sup>1</sup> Докл. АН СССР, 1934, 2, 151.

<sup>2</sup> Собственно говоря, уравнение (1) можно дополнить членом вида  $\frac{i\mu}{2mc^2} \gamma^i \gamma^k \gamma^l F_{ik} p_l$ , однако если энергия частицы мало отличается от ее энергии покоя  $mc^2$ , то этот член в первом приближении совпадает с последним членом уравнения (1). Далее можно было бы попытаться дополнить (1) членом типа  $\frac{i\lambda}{4c} \varepsilon_{ijkl} \gamma^i \gamma^j F^{hk}$ , в котором  $\lambda$  означает электрический момент частицы.

Здесь  $\varepsilon_{ijkl}$  суть компоненты полного антисимметричного тензора, меняющие знак при каждой перестановке индексов и равные либо 0, либо  $\pm 1$ . Однако знак этой компоненты изменяется при переходе от правых координатных систем к левым и обратно. Так как правым системам нельзя дать инвариантного геометрического определения, то, следовательно, необ-

дираковские матрицы, через  $A_i$  — четырехмерный потенциал и через  $F_{ik}$  — электромагнитный тензор.

Естественно предположить, что в природе фактически осуществляются все три возможности, соответствующие уравнению (1). Случай  $e \neq 0$ ,  $\mu = 0$  соответствует электрону, случай  $e = 0$ ,  $\mu \neq 0$  — нейтрону и, наконец, случай  $e \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$  — протону. Частицы всех трех родов элементарны, обладают спином, равным  $1/2$ , и подчиняются статистике Ферми—Дирака. Для протона величина  $\mu$  равна одному ядерному магнетону (по данным Лацде) и  $1^{1/2}$  (по данным Штерна), ибо магнитный спиновый момент частицы, как легко убедиться на основании уравнения (1), равен  $\left(\frac{eh}{2mc} + \mu\right)$ .

Однако эти представления не могут быть согласованы с данными о соударении нейтронов с протонами (и с их энергией взаимодействия в ядрах). Карлсон и Оппенгеймер [3] вычислили вероятность этих соударений в предположении, что для протона справедливо уравнение Дирака с  $\mu_p = 0$ , а для нейтрона — уравнение Паули. Если положить магнитный момент нейтрона  $\mu_n$  по порядку величины равным ядерному магнетону, что необходимо для истолкования сверхтонкой структуры спектральных линий, то радиус соударения нейтрона с протоном оказывается по порядку величины сравнимым с классическим радиусом протона  $R_p = \frac{e^2}{2mc^2}$ , т. е. примерно в  $5 \cdot 10^3$  раз меньше данных опыта.

Легко обобщить эти вычисления для случая применимости к протону уравнения (1) при  $\mu_p \neq 0$ . При этом для дифференциального эффективного сечения нейтрона и протона  $\sigma$  при малых скоростях ( $v \ll c$ )<sup>3</sup> получается следующее выражение:

$$\sigma d\alpha = 4\pi R_p^2 \mu_n^2 \alpha d\alpha \left( \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2} + \mu_p^2 \right), \quad (2)$$

где  $\mu_p$  и  $\mu_n$  предполагаются выраженными в ядерных магнетонах,  $\alpha = \cos \theta$  и  $\theta$  — угол рассеяния. Таким образом,  $\sigma$  имеет практически одинаковую величину и при  $\mu_p = 0$ , и при  $\mu_p \sim 1$ , и, стало быть, отрицательные результаты Карлсона и Оппенгеймера<sup>4</sup> остаются в силе и при наших предположениях.

хотимо произвольным образом фиксировать знак, например, компоненты  $\epsilon_{1234}$  в какой-либо произвольно избранной системе отсчета. Таким образом, без произвольного выделения какой-либо системы отсчета знак электрического момента частицы  $\lambda$  вообще не может быть определен. Следовательно, предположение о наличии у частицы электрического момента, хотя оно в сущности принципу относительности прямо и не противоречит, представляется весьма неправдоподобным.

<sup>3</sup> Таким образом, можно с самого начала рассматривать нерелятивистский случай. Однако, во всяком случае, нельзя воспользоваться обычным методом расчета, так как матричные элементы энергии взаимодействия двух магнитных диполей обращаются в бесконечность.

<sup>4</sup> Формула (3.10) этих авторов, соответствующая нашему уравнению (1), не совсем точна; в частности, в формулах (3.1) и (1.72) некоторые члены ими были пропущены.

Мы склонны полагать, что в известных случаях волновое уравнение вида (1) все же является справедливым и что оно применимо, например, к движению элементарной частицы (электрона, нейтрона, протона) в заданном внешнем поле. В общем же случае необходимо учесть возможность превращения частиц, т. е. возможность превращения протона в нейтрон плюс позитрон и обратно ( $p \rightleftharpoons n + e^+$  или, быть может,  $n \rightleftharpoons p + e^-$ ). Возможность такого превращения согласно квантовой механике должна оказывать существенное влияние и на те процессы, в которых это превращение фактически не осуществляется (например, соударения нейтрона и протона).

Неоднократно высказывавшееся предположение, что в этих превращениях принимает участие новая частица «нейтрино», представляется нам несколько искусственным и в настоящее время необоснованным<sup>5</sup>. Мы склонны скорее предположить, что превращение частиц (так же как и испускание и поглощение фотонов) не может быть описано в конфигурационном пространстве постоянного числа измерений и что возможность превращения  $p \rightleftharpoons n + e^+$  не дает права заключить, что протон не является элементарной частицей. Напротив, протон может обладать теми же степенями свободы и в том же числе, как и электрон или нейтрон.

Я надеюсь в ближайшем будущем вернуться к рассмотрению этих вопросов.

В заключение я хотел бы выразить искреннюю признательность акад. Л. И. Мандельштаму, внимательно следившему за ходом работы и много помогшему мне рядом ценных советов.

Москва, Научно-исследовательский институт физики  
Московского государственного университета.  
Отдел теоретической физики

Поступила  
23 марта 1934 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. O. Stern et al. Z. Phys., 1933, 85, 4, 17; 1933, 86, 132.
2. A. Land<sup>5</sup>. Phys. Rev., 1933, 44, 1028.
3. J. Carlson, J. Oppenheimer. Phys. Rev., 1932, 41, 763.

---

<sup>5</sup> Сейчас твердо доказано, что нейтрино обязательно принимает участие в процессах  $\beta$ -распада, превращения нейтрона в протон. — Прим. ред.

## ПРОНИКАЮЩИЕ ЧАСТИЦЫ В КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧАХ И ЯДЕРНЫЕ СИЛЫ <sup>1</sup>

Проникающая компонента космического излучения, по всей вероятности, состоит из тяжелых электронов. Согласно Блеккету [1], космические частицы большой энергии на уровне моря являются тяжелыми электронами, когда же энергия их благодаря торможению падает до  $2-3 \cdot 10^8$  эв, они превращаются в обычные электроны. Согласно Бауэну, Милликену и Нихеру [2], тяжелые электроны создаются в атмосфере первичным излучением — обычными электронами и фотонами. Однако это заключение не вытекает непосредственно из данных указанных авторов, так что эти данные не противоречат предположению о первичном характере тяжелых электронов. Во всяком случае, «превращения массы» электронов играют, по-видимому, существенную роль при прохождении их через атмосферу.

До сих пор не было предложено удовлетворительного механизма для этих превращений массы. Гипотеза Юкавы о лишенном спина тяжелом электроне, по-видимому, приводит к трудностям и нами рассматриваться не будет. Образование тяжелых пар фотонами [3] может быть существенным только для образования сравнительно легких частиц ( $m \sim 10m_0$ ) и к тому же не объясняет исчезновения замедлившихся тяжелых электронов. Предположение, что превращение массы может происходить при поглощении или излучении фотона либо в вакууме (Джонси), либо же под воздействием электрического поля ядра (Баба [4]), влечет за собой возможность спонтанного распада тяжелого электрона на обыкновенный электрон и фотон. Можно показать, что любое разумное предположение о длительности жизни тяжелого электрона приводит к ничтожно малым значениям поперечника сечения для превращения массы, вызванного действием фотона или электрического поля ядра. Кроме того, в последнем случае, как и в случае тормозного излучения, поперечник сечения оказывается пропорциональным  $Z^2$ , тогда как поперечник сечения для превращений массы в действительности, по-видимому, пропорционален  $Z$ .

Эти и подобные им соображения привели нас к предположению, что тяжелые электроны устойчивы в отсутствие атомных ядер <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Докл. АН СССР, 1938, 19, 475. См. также «Изв. АН СССР», ОМЕИ, серия физ., 1938, № 5-6, 737; С. г. Acad. sci. URSS, 1938, 19, 475; Phys. Rev., 1938, 53, 1016.

<sup>2</sup> Или что, во всяком случае, спонтанный распад тяжелых электронов за время прохождения ими атмосферы практической роли не играет.

и что превращение массы происходит только благодаря некоторому неэлектромагнитному взаимодействию электронов с протонами и нейтронами, характеризующемуся малым радиусом действия.

Простейшая количественная формулировка этой гипотезы состоит в введении в гамильтониан системы: электроны + ядерные частицы, оператора взаимодействия следующего вида:

$$\Omega = f \sum_{k, l} O \psi_k^* \psi_l \Psi^* \Psi, \quad (1)$$

где  $f$  означает универсальную константу,  $\psi_k$  и  $\psi_l$  — волновые функции электронов массы  $km_0$  и  $lm_0$ , а  $\Psi$  — волновая функция протона или нейтрона. Суммирование распространяется по всем возможным значениям  $k$  и  $l$ , начиная с  $k=l=1$ . Знак  $O$  означает релятивистски-инвариантную комбинацию волновых функций. Если под знак суммы в (1) ввести какой-либо множитель, зависящий от величины масс  $km_0$  и  $lm_0$ , то интересующие нас в этой заметке выводы не подвергнутся существенному изменению.

Пусть в результате соударения с ядром электрона массы  $m_i$  и энергии  $E$  масса его приобрела значение  $m_s$ . Если ядро не приобретает при этом заметной кинетической энергии, то из сохранения энергии следует, что

$$E = c \sqrt{c^2 m_i^2 + p_i^2} = c \sqrt{c^2 m_s^2 + p_s^2}, \quad (2)$$

где  $p_i$  и  $p_s$  — импульсы падающего и рассеянного электронов.

Пока длина волны электрона, или, точнее, величина  $\frac{h}{|p_i - p_s|}$ , велика по сравнению с радиусом ядра  $R$  (I интервал энергий), рассеяние это будет изотропным и пропорциональным квадрату числа  $A$  протонов и нейтронов в ядре:

$$\sigma = \frac{f^2 A^2 \hbar^2}{2\pi h^4 c^4} \frac{p_s}{p_i}. \quad (3)$$

Но когда  $\frac{h}{|p_i - p_s|}$  становится малым по сравнению с  $R$  (II интервал энергий), волны, рассеянные отдельными ядерными частицами, уже не будут в фазе друг с другом, станет преобладать рассеяние вперед, а эффективный поперечник рассеяния  $\sigma$  при возрастании энергии будет стремиться к постоянному значению, не зависящему от  $E$ ,  $m_i$  и  $m_s$  и пропорциональному  $A^{1/2}$ :

$$\sigma = \frac{9f^2 A^{1/2}}{16\pi h^2 c^2 r_0^2}, \quad (4)$$

где  $r_0 = RA^{-1/2} \sim 1,4 \cdot 10^{-13}$  см.

Наконец, если энергия  $E$  налетающего электрона превысит примерно  $2 \cdot 10^8$  эв (III интервал энергий), то частицы в ядре можно считать свободными, ибо приобретаемая под влиянием удара электрона энергия отдачи начинает превышать их энергию связи (при не очень малых углах рассеяния). Поперечник  $\sigma$  вновь начи-

нает возрастать пропорционально  $E^2$ . Поэтому если только значение  $\sigma$  (например, при  $E \sim 10^{10}$  эв) не чрезмерно велико, то значение его при  $E \leq 5 \cdot 10^8$  эв должно быть совершенно ничтожным.

Однако сомнительно, чтобы эти расчеты были справедливы в области очень больших энергий. Известно, что взаимодействие типа (1) приводит к расходящимся результатам даже в таких приближениях, в которых современная квантовая электродинамика не приводит еще к затруднениям. Так, например, если протон или нейтрон могут рассеивать электроны с изменением их массы, то они могут также создавать пары, т. е. электрон и позитрон, массы которых будут, вообще говоря, различны (неупругое рассеяние электрона, обладающего первоначально отрицательной энергией). Отсюда следует, что между протонами и нейтронами должно существовать определенное взаимодействие, соответствующее обмену парами между этими частицами. Однако вычисление этих сил на основе (1) приводит, как и при соответствующих вычислениях по теории  $\beta$ -распада, к расходящимся интегралам<sup>3</sup>.

За неимением лучшего приходится вводить в оператор (1) более или менее произвольный «гильотинирующий множитель». Простейшим и наиболее употребительным видом этого множителя является  $e^{-\tau(pk+pl)}$ , где  $p_k$  и  $p_l$  означают импульсы электронов массы  $km_0$  и  $lm_0$  в той системе координат, в которой средняя скорость ядерных частиц равна нулю. Благодаря этому множителю энергия  $V(r)$  взаимодействия этих частиц, на больших расстояниях меняющаяся пропорционально  $r^{-5}$ , стремится при убывающем  $r$  к значению

$$V(0) = -\frac{2f^2 N^2}{5\pi^4 c h^6 \tau^5} [a^2 + b^2 (s_1 s_2)]. \quad (5)$$

Здесь  $a$  и  $b$  — постоянные порядка единицы, зависящие от выбора оператора  $O$  в (1),  $s_1$  и  $s_2$  — спиновые векторы взаимодействующих частиц, а  $N$  означает число возможных значений массы  $km_0$  электрона.

Гильотинирующий множитель<sup>4</sup> влияет также на значение поперечника  $\sigma$  рассеяния электронов с изменением массы. Если  $\tau \sim 1/400m_0c$ , что соответствует длине волны  $\lambda \sim 2\pi \cdot 10^{-13}$  см, то в I и II интервалах энергии значение  $\sigma$  не претерпит изменений, так что при  $E \sim 2 \cdot 10^8$  эв оно достигает значения (4), но при даль-

<sup>3</sup> Хотя и можно выбрать такой порядок интегрирования, чтобы при конечном расстоянии  $r$  между взаимодействующими частицами получался конечный результат, однако при другом порядке интегрирования интегралы расходятся даже при конечном  $r$ . Причина этого лежит в том, что рассматриваемое взаимодействие соответствует обмену парами частиц, а не одиночными частицами (как, например, фотонами в случае электромагнитного взаимодействия).

<sup>4</sup> Этот множитель учитывает весьма грубым образом конечные размеры взаимодействующих частиц. В случае кулоновского рассеяния он был бы излишен, так как для последнего существенны только соударения на больших расстояниях.



нейшем возрастании энергии  $\sigma$  начнет экспоненциально убывать. Таким образом, превращение массы тяжелых электронов большой энергии будет маловероятным, но, как только они затормозятся примерно до  $3 \cdot 10^8$  эв, значение  $\sigma$  резко возрастет, что соответствует результатам опытов Блеккета. Эффективный поперечник для обратного процесса (превращения обычного электрона  $m_0$  в более тяжелый  $m_h$ ) имеет значение того же порядка величины при  $E \gg c^2 m_h$ , но при меньших энергиях отличается от  $\sigma$  ( $m_h \rightarrow m_0$ ) множителем

$$\frac{\rho_h^2}{\rho_0^2} = \frac{E^2 - c^4 m_h^2}{E^2 - c^4 m_0^2} < 1.$$

Если принять для  $\tau$  и для экстремального значения поперечника (4) в воздухе ( $\sigma_{\text{stat}}^{\text{air}}$ ) какие-либо определенные значения, то можно оценить энергию взаимодействия (5) ядерных частиц. Принимая, что  $\tau = 1/400 m_0 c$  и  $\sigma_{\text{stat}}^{\text{air}} = \alpha \cdot 10^{-25}$  см<sup>2</sup>, получаем для  $V(0)$  разумное значение  $V(0) = -3 \alpha N^2 \cdot 10^6$  эв.

Можно показать, что вероятность непосредственного излучения пары возбужденным ядром значительно меньше вероятности  $\gamma$ -излучения, по крайней мере при энергиях, меньших, чем  $5 \cdot 10^6$  эв.

На возможность объяснить ядерные силы на основе представления об обмене парами между протонами и нейтронами было уже обращено внимание Теллером [5] и Вентцелем [6], которые, однако, рассматривали только обычные электроны ( $m = m_0$ ) и, кроме того, не могли установить какой-либо связи между предположенным объяснением ядерных сил и другими физическими явлениями. Как уже было отмечено этими авторами, силы, соответствующие обмену парами, не зависят от электрического заряда ядерных частиц и вместе с тем позволяют сохранить виковское объяснение магнитного момента нейтрона. Единственное затруднение состоит в том, что эти силы, по-видимому, не обладают свойствами насыщения.

В заключение мы хотели бы заметить, что нередкие снимки треков в камере Вильсона, соответствующие кажущемуся увеличению энергии космической частицы, объясняются, быть может, не только искажениями треков или направленными вверх космическими лучами, но в известной своей части свидетельствуют об имевшем место в поглощающей пластинке (в особенности в случае легких веществ, как, например, Al) превращении тяжелого электрона в обычный; ведь это превращение согласно (1) должно сопровождаться увеличением импульса  $p$ .

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
20 апреля 1938 г.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *P. M. S. Blackett*. Proc. Roy. Soc. London, 1938, A165, 11; Abstr. of Papers, 7.
  2. *I. Bowen, R. Millikan, H. Neher*. Phys. Rev., 1938, 53, 217.
  3. *S. H. Neddermeyer*. Phys. Rev., 1938, 53, 102.
  4. *H. J. Bhabha*. Proc. Roy. Soc. London, 1938, A164, 257.
  5. *E. Teller*. Phys. Rev., 1937, 51, 289.
  6. *G. Wentzel*. Helv. Phys. Acta, 1937, 10, 107.
- 

*Примечание.* Настоящая статья была написана в то время, когда свойства только что открытых мезонов (впоследствии названных  $\mu$ -мезонами или мюонами) были еще неизвестны. Выдвинутое здесь И. Е. Таммом предположение, что эти «тяжелые электроны», потеряв энергию, превращаются в обычные электроны только в результате взаимодействия с ядрами, как известно, не оправдалось: мюоны порождают электроны в результате самопроизвольного распада. Вместе с тем представляет интерес едва ли не впервые встречающийся в этой работе учет возможной когерентности взаимодействия с ядром в неупругом процессе превращения частицы с изменением массы (формула (3) — сечение пропорционально квадрату числа частиц в ядре  $A$  в пределах дифракционного конуса рассеяния на ядре как целом).

## О МЯГКОЙ КОМПОНЕНТЕ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ НА УРОВНЕ МОРЯ <sup>1</sup>

*Совместно с С. З. Беленьким*

Получены простые аналитические выражения для числа и энергетического распределения электронов, генерируемых мезонами, проходящими через вещество (включая  $\delta$ -электроны, распадные электроны и порождаемые ими вторичные электроны ливня). Показано, что результаты Баба для числа таких электронов являются ошибочными.

В уравнениях, определяющих равновесие между электронами и мезонами, сделаны некоторые приближения, однако потери энергии электронов на ионизацию рассмотрены строго. Результаты находятся в согласии с экспериментом.

Указаны некоторые применения к теории ливней.

Основной вывод состоит в том, что обычные приближения, принятые в теории ливней и заключающиеся в пренебрежении ионизационными потерями выше критической энергии  $E_c$  и образованием пар ниже  $E_c$ , приводят к очень значительным ошибкам при нахождении числа и энергетического распределения ливневых электронов, имеющих энергии порядка  $E_c$  или меньше.

### § 1. Введение и выводы

Мягкая компонента космических лучей на уровне моря, по всей видимости, в основном генерируется проникающей компонентой. Во-первых, мезоны создают вторичные  $\delta$ -электроны, которые, в свою очередь, порождают ливни. Во-вторых, электроны испускаются в процессе спонтанного распада мезонов; мы будем называть их распадными электронами. Эти распадные электроны преобладают в воздухе, но совершенно пренебрежимы в других веществах.

В настоящей работе мы в основном будем рассматривать первый из упомянутых механизмов; однако в § 7 мы вычислим также число и энергетический спектр распадных электронов и создаваемых ими вторичных частиц.

Равновесие между  $\delta$ -электронами и их вторичными частицами, с одной стороны, и мезонами — с другой, было впервые исследовано Баба [1], который, однако, не опубликовал деталей своих вычислений, а привел лишь их результаты. Согласно Баба, число вторичных электронов быстро возрастает с увеличением атомного

<sup>1</sup> J. Phys. USSR, 1939, 1, 177. Перевод И. В. Андреева.

номера  $Z$  вещества, через которое проходят мезоны. Однако эксперименты Франк-Каменецкого [2] привели к противоположным результатам: он обнаружил, что относительная интенсивность мягкой компоненты под Рb была в 2,5 раза меньше, чем под Al.

С другой стороны, Скобельцын <sup>2</sup> указал, что полное число электронов, находящихся в равновесии с мезонами, может быть найдено на основе простых соображений, основанных на законе сохранения энергии (мы приведем аргументы Скобельцына в § 4). В противоположность как теории Баба, так и экспериментам Франк-Каменецкого он пришел к заключению, что это число должно быть приблизительно не зависящим от атомного номера  $Z$ .

Мы покажем, что теория находится в согласии с упомянутыми экспериментами, а также с экспериментами Нильсена и Моргана. В частности, хотя аргументы Скобельцына в основном правильны, он, будучи не в состоянии определить своим методом распределение по энергии вторичных электронов, недооценил долю медленных электронов. Фактически же доля таких электронов гораздо больше, чем это принято обычно считать, и, что особенно важно для интерпретации измерений, быстро возрастает с ростом атомного номера  $Z$ . Поэтому полное число электронов, обладающих энергией, достаточной для того, чтобы быть зарегистрированными в обычных экспериментальных установках, уменьшается с ростом  $Z$ . Кроме того, число электронов, регистрируемых под слоем тяжелого вещества, может существенно уменьшиться в результате рассеяния медленных электронов, доля которых велика.

Чтобы сравнить наши результаты с результатами Баба, мы рассчитали, пренебрегая ионизационными потерями, число  $N(E_c)$  электронов, обладающих энергиями, большими, чем критическая энергия  $E_c$ , и получили величину, совпадающую с той, которая была дана Баба <sup>3</sup>. Ионизационные потери уменьшают это число  $N(E_c)$  на 40—50%. Еще более существенна ошибка в вычислении Баба для числа сравнительно медленных электронов  $N_{<}$ . Для  $N_{<}$  (т. е. для полного числа электронов с энергией, меньшей, чем  $E_c$ ) получаются значения, данные Баба, если предположить, что число электронов на единицу интервала энергии  $P(E)$  остается постоянным для всех энергий, меньших, чем  $E_c$ . Однако истинная величина  $N_{<}$  в несколько раз больше, если учтены те электроны, которые генерируются с начальной энергией, меньшей, чем  $E_c$  (медленные первичные  $\delta$ -электроны и медленная компонента пар, создаваемых фотонами).

Если пренебречь ионизационными потерями электронов, то можно решить точно основные уравнения задачи и выразить  $P_{\uparrow}(E)$  в виде быстро сходящегося ряда; для большинства целей существен

<sup>2</sup> Соображения Д. В. Скобельцына приведены в работе Г. Франк-Каменецкого.

<sup>3</sup> Аналитическое выражение для  $N(E_c)$ , данное Баба, очень сложно и сильно отличается от нашей простой формулы (3.15), однако численные вычисления дают в обоих случаях практически совпадающие результаты.

только первый член этого ряда (§ 3). Если учесть ионизационные потери, то также можно построить точное решение задачи, однако вычисления на основе этого решения практически крайне неудобны. Поэтому мы упростили точное уравнение задачи; наше приближение очень близко к приближению, принятому Карлсоном и Оппенгеймером [3], хотя и не совпадает с ним. Приблизительно рассматриваются только те члены уравнения, которые описывают образование пар и тормозное излучение. Так как в области больших энергий, где эти члены важны, решение нашего упрощенного уравнения совпадает с решением точного уравнения, полученным без учета ионизации, и так как ионизация точно учитывается в упрощенном уравнении, то можно ожидать, что наше приближение справедливо для всех энергий. Это ожидание подтверждается численными расчетами (см. § 4), а также независимыми вычислениями С. Вернова, которые он намеревается вскоре опубликовать.

Решение упрощенного уравнения дает простое аналитическое выражение (6.1) для энергетического распределения электронов, находящихся в равновесии с мезонами.

Так как точные выражения для поперечных сечений образования пар и соударений с излучением очень сложны, в теории ливней по необходимости используются асимптотические выражения для этих поперечных сечений, которые, строго говоря, справедливы только в области очень больших энергий. К счастью, энергетическое распределение электронов, находящихся в равновесии с мезонами, совершенно не зависит от абсолютной величины поперечного сечения образования пар и от его изменения с энергией фотонов; это изменение гораздо больше, чем изменение поперечного сечения соударений с излучением, которым по необходимости пренебрегается в расчетах.

Наши результаты имеют также значение для теории ливней самой по себе. Мы получили простое аналитическое выражение для числа ливневых электронов энергии  $E$ , проинтегрированное по всем глубинам, т. е. для величины

$$P(E) = \int_0^{\infty} \pi(E, x) dx, \quad (1.1)$$

где  $\pi(E, x)$  означает число ливневых электронов энергии  $E$  на расстоянии  $x$  от верхней границы слоя, в котором падающий электрон рождает ливень. Этот проинтегрированный энергетический спектр показывает, что доля сравнительно медленных электронов в ливне гораздо больше, чем это обычно предполагается, и что функция распределения  $P(E)$ , растущая с увеличением энергии, в энергетическом интервале ниже  $E_c$  растет гораздо быстрее, чем при энергиях выше  $E_c$ . Число фотонов в ливне с энергиями  $h\nu < E_c$  также гораздо больше, чем это обычно считается. Мы надеемся вернуться к этим вопросам в другой работе.

Основной вывод нашей работы состоит в том, что обычное приближение, которое используется в теории ливней и которое состоит в пренебрежении ионизационными потерями выше критической энергии  $E_c$  и образованием пар ниже  $E_c$ , приводит к значительным ошибкам при нахождении числа и энергетического распределения ливневых электронов, имеющих энергии порядка  $E_c$  или меньше.

## § 2. Основные уравнения задачи

В настоящей работе мы будем использовать ливневую единицу длины  $x_0$ :

$$\frac{1}{x_0} = 4\alpha Z^2 r_0^2 n \ln(191Z^{-1/3}), \quad (2.1)$$

где  $\alpha = e^2/\hbar c$ ,  $r_0 = e^2/mc^2$  и  $n$  — число атомов с атомным номером  $Z$  в  $1 \text{ см}^3$ .

Частица массы  $M$  с энергией  $E_0$  рождает на пути единичной длины  $K(E)dE$   $\delta$ -электронов в энергетическом интервале  $E$ ,  $E+dE$ . Согласно Баба [1] (ср. его уравнение (21)),

$$\begin{aligned} K(E) &= \frac{a}{E^2} - \frac{b}{E_m E}, & \text{если } E < E_m, \\ K(E) &= 0, & \text{если } E > E_m, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$a = \frac{\tau mc^2}{2\alpha Z \ln(191Z^{-1/3})} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}, \quad b = a \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \quad (2.3)$$

и  $E_m$  означает максимальную энергию, которая может быть передана первичной частицей  $\delta$ -электрону:

$$E_m = 2mc^2 \frac{M^2(\gamma^2 - 1)}{M^2 + 2mM\gamma + m^2}, \quad \gamma = \frac{E_0}{Mc^2}. \quad (2.4)$$

Согласно Баба, выражение для  $K(E)$  содержит также третий член, который не зависит от  $E$ , но, в отличие от членов, содержащихся в (2.2), зависит от спина первичной частицы. Так как относительный вклад этого третьего члена очень мал, мы будем им всюду пренебрегать.

Пусть  $W_e(E, E') dE' dx$  есть вероятность того, что электрон энергии  $E$  излучает фотон энергии  $E'$  при прохождении слоя вещества толщины  $dx$ . Мы можем использовать для  $W_e(E, E')$  либо первоначальное асимптотическое выражение Бете и Гайтлера, несколько модифицированное Барлетом (ср. Сербер [4])

$$\begin{aligned} W_e(E, E') &= \frac{E^2 + (E - E')^2 - \frac{2}{3} E(E - E')}{E^2 E'} + \\ &+ \frac{31(E - E')}{90 \cdot E E' \ln(191Z^{-1/3})}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

либо приближение к формуле (2.5), предложенное Карлсоном и Оппенгеймером [3]:

$$W_p(E, E') = 1/E'. \quad (2.6)$$

Результаты не зависят существенно от выбора между (2.5) и (2.6). В § 3—5 мы будем главным образом использовать более простое выражение (2.6), но формулы этих разделов, обсуждаемые в § 6—8, будут исправлены с учетом различия между (2.5) и (2.6).

Пусть далее  $W_p(E, E') dE' dx$  означает вероятность того, что фотон энергии  $E$  создает пару электронов с энергиями  $E'$  и  $E - E'$ . Мы вскоре увидим, что число электронов и энергетическое распределение электронов в состоянии равновесия не зависят от абсолютной величины  $W_p(E, E')$ ; только энергетическое распределение пар (т. е. зависимость  $W_p(E, E')$  от  $E'/E$ ) влияет на окончательные результаты. Мы будем предполагать, что все возможные распределения энергии фотона между компонентами пары являются равновероятными, так что  $W_p$  не зависит от  $E'$ :

$$W_p(E, E') = g(E). \quad (2.7)$$

Это соотношение выполняется с большой точностью почти для всех значений  $E$ . Точная форма функции  $g$  не существенна для наших целей и должна быть конкретизирована только в том случае, если нужно определить число фотонов в ливне.

Наконец, потери энергии электрона на ионизацию на единице длины пути равны

$$\beta = \frac{\pi mc^2}{2zZ} \frac{\ln \theta}{\ln(191Z^{-1/3})}, \quad \theta = \frac{2}{\alpha^2 Z^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^3. \quad (2.8)$$

Мы будем считать, что  $\beta$  не зависит от энергии электрона  $E$ , и подставим в (2.8) в качестве  $E$  некоторое среднее значение  $\bar{E}$ .

Теперь можно легко написать основные уравнения процесса. Предположим, что рассматриваемое вещество пересекается потоком мезонов с энергией  $E_0$ , так что среднее число мезонов в единице объема равно единице. Пусть  $P(E) dE$  есть число электронов в единице объема в энергетическом интервале  $E, E + dE$ , которые генерируются непосредственно или в результате каких-либо процессов этим потоком мезонов. Пусть, далее,  $\Gamma(E) dE$  есть соответствующее число фотонов<sup>5</sup>. Тогда условие равновесия для электро-

<sup>4</sup> Если вместо (2.7) использовать точное асимптотическое выражение для  $W_p(E, E')$ , подобное (2.5), то величина постоянной  $g$  в наших окончательных формулах изменится лишь на 2%.

<sup>5</sup> Число мезонов в единице объема и число электронов и фотонов, находящихся в равновесии с ними, может рассматриваться как постоянная величина на протяжении такой толщины вещества, которая мала по сравнению с характерным интервалом для мезонов, но велика по сравнению с характерными интервалами для электронов и фотонов.

нов с энергией  $E$  имеет вид (ср., например, уравнение (6) работы Карлсона и Оппенгеймера [3])

$$K(E) + \int_E^{\infty} P(E') W_e(E', E' - E) dE' + 2 \int_E^{\infty} \Gamma(E') W_p(E', E) dE' - \\ - P(E) \int_0^E W_e(E, E') dE' + \beta \frac{dP}{dE} = 0. \quad (2.9)$$

Соответствующее условие равновесия для фотонов энергии  $E$  имеет вид

$$\int_E^{\infty} P(E') W_e(E', E) dE' - \Gamma(E) \int_0^E W_p(E, E') dE' = 0. \quad (2.10)$$

С помощью (2.7) это уравнение приводится к виду

$$\Gamma(E) = \frac{1}{Eg(E)} \int_E^{\infty} P(E') W_e(E', E) dE', \quad (2.11)$$

и третий член в (2.9) принимает форму

$$2 \int_E^{\infty} \Gamma(E') W_p(E', E) dE' = 2 \int_E^{\infty} \frac{dE''}{E''} \int_{E''}^{\infty} P(E') W_e(E', E'') dE' = \\ = 2 \int_E^{\infty} P(E') dE' \int_E^{E'} \frac{dE'' W_e(E', E'')}{E''},$$

так что основное уравнение (2.9), которое определяет число и энергетический спектр электронов, может быть записано следующим образом:

$$K + 2 \int_E^{\infty} P(E') dE' \int_E^{E'} \frac{W_e(E', E'') dE''}{E''} + \int_E^{\infty} P(E') W_e(E', E' - E) dE' - \\ - P(E) \int_0^E W_e(E, E') dE' + \beta \frac{dP}{dE} = 0. \quad (2.12)$$

Так как это уравнение не содержит функцию  $g(E)$ , равновесный спектр электронов не зависит от абсолютной величины и от энергетической зависимости поперечного сечения образования пар фотонами. Это обстоятельство легко может быть понято. Число пар, создаваемых в единицу времени фотонами с энергией  $E$ , равно числу фотонов этой энергии, исчезающих в единицу времени, и поэтому в состоянии равновесия должно быть равно числу фотонов энергии  $E$ , испускаемых электронами. Так как последняя



величина не зависит от  $W_p(E, E') = g(E)$ , число пар, создаваемых фотонами в единицу времени, также не зависит от  $g(E)$ . Только лишь равновесная концентрация  $\Gamma(E)$  фотонов определяется функцией  $g(E)$  (уравнение (2.11)).

При более низких энергиях необходимо принимать во внимание также эффект Комптона. Это сильно усложнило бы наши уравнения. Однако мы можем учесть эффект Комптона в грубом приближении, просто подставляя в (2.11) в качестве функции  $g(E)$  сумму вероятностей рождения пары и эффекта Комптона. Фактически, эффект Комптона становится существенным только при низких энергиях, когда потери электронов на излучение пренебрежимы по сравнению с их ионизационными потерями. В этих условиях не очень существенно, тратится ли полная энергия фотона на создание пары или же она преобразуется в меньшую энергию комптоновскими электронами <sup>6</sup>.

Наша задача теперь свелась к решению основного уравнения (2.12).

### § 3. Высокие энергии ( $E > E_c$ ); пренебрежение ионизацией

Если энергия электрона  $E$  больше, чем критическая энергия  $E_c$ , мы можем в первом приближении пренебречь его ионизационными потерями, которые, согласно определению  $E_c$ , меньше потерь на излучение при  $E > E_c$ . Пренебрежение ионизацией равнозначно отбрасыванию последнего члена в уравнении (2.12). Используя для  $W_e(E, E')$  выражение (2.6), получаем

$$K(E) + 2 \int_E^{\infty} P(E') \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E'} \right) dE' + \int_E^{\infty} \frac{P(E') dE'}{E' - E} - P(E) \int_0^E \frac{dE'}{E'} = 0. \quad (3.1)$$

Хотя два последних члена этого уравнения расходятся, их сумма конечна.

Применим теперь, как это обычно делается в теории ливней, преобразование Лапласа—Меллина

$$P(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \left( \frac{E_m}{E} \right)^z f(z) dz, \quad (3.2)$$

где  $E_m$  определяется соотношением (2.4) и путь интегрирования должен быть взят вдоль прямолинейного контура, параллельного

<sup>6</sup> Следует помнить, что если энергия фотона  $h\nu = E$  больше, чем, например,  $5mc^2$ , то средняя энергия комптоновских электронов не существенно отличается от  $h\nu/2$  и их распределение по энергии приблизительно равномерно.

мнимой оси и расположенного на расстоянии  $d > 2$  вправо от нее. Подставляя (3.2) в (3.1) и делая подстановку  $E' = \xi E$ , получаем

$$K(E) + \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \left(\frac{E_m}{E}\right)^z \varphi(z) dz = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\varphi(z) = M(z) f(z) \quad (3.4)$$

и

$$M(z) = \frac{2}{z-1} - \frac{2}{z} - \int_0^1 \frac{1-\xi^{z-1}}{1-\xi} d\xi = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z} - \psi(z) - C. \quad (3.5)$$

Здесь  $\psi(z)$  — логарифмическая производная  $\Gamma$ -функции:  $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z+1)$  и  $C$  — постоянная Эйлера:  $C = 0,577 \dots$

Решение интегрального уравнения (3.3) имеет вид

$$\varphi(z) = -\frac{a}{E_m^2(z-2)} + \frac{b}{E_m^2(z-1)}. \quad (3.6)$$

Чтобы доказать это, подставим выражение для  $\varphi(z)$ , а также выражение (2.2) для  $K$  в уравнение (3.3).

Вводя обозначение

$$E_m/E = e^y, \quad (3.7)$$

получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{yz} \left(\frac{a}{z-2} - \frac{b}{z-1}\right) dz = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0, \\ ae^{2y} - be^y, & \text{если } y > 0. \end{cases}$$

Если  $y < 0$ , контур интегрирования может быть замкнут полуокружностью бесконечного радиуса, расположенной вправо от прямой линии  $\text{Re } z = d$ . Так как предполагалось, что  $d > 2$ , подынтегральное выражение не имеет полюсов, расположенных справа от этой линии, и поэтому интеграл обращается в нуль. Если  $y > 0$ , контур может быть замкнут бесконечной полуокружностью, расположенной слева от линии  $\text{Re } z = d$ . В этом случае интеграл равен сумме вычетов в полюсах при  $z=2$  и  $z=1$  и поэтому удовлетворяет уравнению.

С помощью (3.2), (3.4), (3.6) и (3.7) получаем точное решение уравнения (3.1) в виде контурного интеграла:

$$P(E) = -\frac{1}{2\pi i E_m^2} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{e^{yz} dz}{M(z)} \left(\frac{a}{z-2} - \frac{b}{z-1}\right). \quad (3.8)$$

Чтобы вычислить этот интеграл, надо найти полюсы подынтегрального выражения. Действительные полюсы легко могут быть найдены.  $(z-1)M(z)$  остается конечным при  $z=1$ ;  $M(z)$  имеет только один положительный нуль при  $z=2$  и бесконечное

число отрицательных нулей: существует один и только один нуль функции  $M(z)$  между каждой парой последовательных отрицательных целых чисел; первый из этих нулей расположен между точками  $-1,5$  и  $-2$ .

Чтобы найти комплексные полюсы подынтегрального выражения, т. е. комплексные нули функции  $M(z)$ , положим  $z = u + iv$ . Мнимая часть  $M(z)$  принимает вид

$$\operatorname{Im} M(z) = v \left\{ \frac{1}{u^2 + v^2} - \frac{2}{(u-1)^2 + v^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(u+n)^2 + v^2} \right\}. \quad (3.9)$$

Если  $v \neq 0$ , это выражение может обращаться в нуль только в том случае, если сумма двух первых членов в скобках положительна. Отсюда следует, что комплексные нули функции  $M(z)$  должны лежать внутри круга  $(u+1)^2 + v^2 = 2$ . Аналогичные рассуждения, примененные для действительной части  $M(z)$ , показывают, что эти нули должны лежать слева от мнимой оси ( $u < 0$ ). Согласно хорошо известной теореме интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{M'(z)}{M(z)} dz$$

равен разности между числом нулей и числом полюсов функции  $M(z)$ , заключенных внутри контура интегрирования  $C$ . С помощью этой теоремы можно доказать, что  $M(z)$  имеет только два комплексно-сопряженных корня и что эти корни лежат внутри полосы  $-1/2 < u < 0$ . Поэтому подынтегральное выражение в (3.8) имеет только один полюс с положительной действительной частью при  $z=2$ .

Представляя интеграл (3.8) в виде суммы вычетов в полюсах

$$P(E) = -\frac{1}{E_m^2} \sum \operatorname{Res} \left\{ \frac{e^{yz}}{M(z)} \left( \frac{a}{z-2} - \frac{b}{z-1} \right) \right\}, \quad (3.10)$$

получим бесконечный ряд по степеням величины  $e^y = E_m/E$ , который, как можно показать, сходится при  $E < E_m$ . Если ограничиться только первым членом этого ряда, который отвечает  $z=2$ , получим

$$P(E) = -\frac{e^{2y}}{E_m^2 M'(2)} \left\{ a \left( y - \frac{1}{2} \frac{M''(2)}{M'(2)} \right) - b \right\}. \quad (3.11)$$

Подставляя численные значения  $M'(2)$  и  $M''(2)$  и используя (3.7), находим

$$P(E) = \frac{1}{2,45E^2} \left\{ a \ln \frac{E_m}{E} + 0,91a - b \right\}. \quad (3.12)$$

Все остальные члены ряда (3.10) отвечают полюсам, лежащим слева от мнимой оси, и поэтому пропорциональны отрицательным степеням  $(E_m/E)$ . Для больших значений  $E_m/E$  их вклад в сумму ряда очень мал, и в дальнейшем мы будем ими пренебрегать.

Используя (3.8) и (3.7), получаем следующее выражение для числа электронов  $N(E)$ , обладающих энергиями, превышающими  $E$ :

$$N(E) = \int_E^{E_m} P(E') dE' =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i E_m} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{e^{(z-1)y} dz}{(z-1)M(z)} \left( \frac{a}{z-2} - \frac{b}{z-1} \right). \quad (3.13)$$

Здесь подынтегральное выражение имеет те же полюсы, что и в интеграле (3.8), плюс добавочный полюс<sup>7</sup> при  $z=1$ . Представляя (3.13) в виде суммы вычетов в полюсах и ограничиваясь вкладом только двух положительных полюсов в точках  $z=2$  и  $z=1$ , находим

$$N(E) = -\frac{1}{EM'(2)} \left\{ a \left( \ln \frac{E_m}{E} - 1 - \frac{1}{2} \frac{M''(2)}{M'(2)} \right) - b \right\} +$$

$$+ \frac{b}{E_m [(z-1)M(z)]_{z=1}} \quad (3.14)$$

или, подставляя численные значения  $M'(2)$  и т. д.,

$$N(E) = \frac{1}{2,15E} \left\{ a \left( \ln \frac{E_m}{E} - 0,09 \right) - b \right\} + \frac{b}{2E_m}. \quad (3.15)$$

Для больших значений  $E_m/E$  последним членом в (3.15) можно пренебречь.

Если вместо (2.6) использовать для  $W_e(E, E')$  более точное выражение (2.5), то это лишь незначительно видоизменит результаты. Вместо (3.15) выражение для  $M(z)$  примет вид

$$M(z) = (2-\eta) \left[ \frac{2}{z-1} - \frac{2}{z^2} + \frac{3-2\eta}{2(2-\eta)} - \frac{1-2\eta}{(2-\eta)z} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{(2-\eta)(z+1)} - \psi(z) - C \right], \quad (3.16)$$

где

$$\eta = \frac{2}{3} - \frac{31}{90 \ln(191Z^{-1/3})}. \quad (3.17)$$

Все остальные формулы этого раздела, за исключением (3.9), (3.12) и (3.15), останутся без изменений.  $M(z)$  по-прежнему будет иметь только один действительный положительный нуль при  $z=2$ ; следующими будут два комплексно-сопряженных нуля, которые на этот раз лежат в полосе  $0 < \text{Re}z < 1/2$ .

Таким образом, уравнения (3.10) и (3.13) опять могут быть приближенно заменены на уравнения (3.11) и (3.14) и лишь численные значения  $M'(2)$  и  $M''(2)$  несколько изменятся. С помощью

<sup>7</sup>  $M(z)$  имеет простой полюс при  $z=1$ , так что  $(z-1)^2 M(z)$  обращается в нуль при  $z=1$ .

(3.16) и (3.17) можно показать, что эти величины почти не зависят от  $Z$  и равны:

$$M'(2) = -2,4, \quad M''(2) = 4,65. \quad (3.18)$$

Подставляя эти значения в (3.11) и (3.15), получаем

$$P(E) = \frac{1}{2,4E^2} \left\{ a \left( \ln \frac{E_m}{E} + 0,97 \right) - b \right\}, \quad (3.19)$$

$$N(E) = \frac{1}{2,4E} \left\{ a \left( \ln \frac{E_m}{E} - 0,03 \right) - b \right\}. \quad (3.20)$$

Следовательно, различие выражений (2.5) и (2.6) для функции  $W_e(E, E')$  незначительно сказывается на значениях  $P$  и  $N$ , приводя лишь к добавочному множителю  $2,15/2,4$ .

#### § 4. Решение для произвольной энергии с учетом ионизационных потерь

Если в основном уравнении (2.12) удерживать последний член, который учитывает ионизационные потери, и в качестве  $W_e(E, E')$  использовать выражение (2.6), то получим

$$K(E) + 2 \int_E^\infty P(E') \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E'} \right) dE' + \\ + \int_E^\infty \frac{P(E') dE'}{E' - E} - P(E) \int_0^E \frac{dE'}{E'} + \beta \frac{dP}{dE} = 0. \quad (4.1)$$

В области больших энергий последний член этого уравнения можно рассматривать как малую поправку и найти решение уравнения в виде ряда по возрастающим степеням величины  $\beta/E$ . Однако этот ряд, являющийся асимптотическим решением нашего уравнения, расходится и может быть использован для нахождения функции  $P(E)$  только в том случае, когда  $E$  гораздо больше, чем  $\beta$ . Нам же необходимо иметь решение, которое было бы справедливым также и при  $E < \beta$ .

Можно построить точное решение уравнения (4.1), которое удовлетворяет очевидному граничному условию нашей задачи:

$$P(E_m) = 0. \quad (4.2)$$

Именно, можно показать, что  $P$  может быть представлено в виде контурного интеграла (3.2), причем функция  $f(z)$  в подынтегральном выражении равна:

$$f(z) = \frac{1}{\beta E_m} \left\{ \frac{a}{z-1} - \frac{b}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{E_m}{\beta} \right)^n \frac{(z-1)!}{(z+n)!} M(z+1) \dots \right. \\ \left. \dots M(z+n) \left( \frac{a}{z+n} - \frac{b}{z+n+1} \right) \right\}, \quad (4.3)$$

где  $M(z)$  определяется равенством (3.5). Этот ряд сходится при всех значениях  $E_m/\beta$ , но для интересующих нас значений  $E_m/\beta$  сходимость столь плоха, что вычисление интеграла (3.2) с помощью (4.3) практически невозможно.

Мы, следовательно, должны искать приближенное решение уравнения (4.1). Вычисления предыдущего раздела показывают, что величина  $P$  при  $E \ll E_m$  практически определяется только первым нулем функции  $M(z)$  при  $z=2$  и ее первым полюсом при  $z=1$ . Поэтому можно надеяться, что мы получим хорошее приближение, если заменим  $M(z)$  в (4.3) выражением

$$M_1(z) = -q \frac{z-2}{z-1}, \quad (4.4)$$

где  $q$  — постоянная, которая должна быть выбрана таким образом, чтобы вычет функции  $1/M_1(z)$  в точке  $z=2$  был равен вычту точного выражения  $1/M(z)$ . Используя для  $M$  выражение (3.5), находим  $q=2,15$ .

Если в выражение (4.3) подставить в качестве  $M(z)$  функцию  $M_1(z)$ , то можно точно вычислить (3.2), что дает простое аналитическое выражение для  $P$ :

$$P = -\frac{dN}{dE}, \quad N(E) = -\frac{\varepsilon}{\beta} e^\varepsilon \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_m} \frac{dx}{x^2} e^{-x} \left( a \ln \frac{x}{\varepsilon_m} + b - \frac{bx}{\varepsilon_m} \right), \quad (4.5)$$

где

$$\varepsilon = qE/\beta, \quad \varepsilon_m = qE_m/\beta. \quad (4.6)$$

Мы не будем входить в детали этих вычислений, так как можно показать, что использование  $M_1(z)$  вместо  $M(z)$  эквивалентно следующей модификации уравнения (4.1):

$$K(E) + \frac{q}{E} \int_E^{\infty} P(E') dE' - qP(E) + \beta \frac{dP}{dE} = 0. \quad (4.7)$$

В частности, прямой подстановкой можно проверить, что (4.5) является решением уравнения (4.7) и удовлетворяет граничному условию (4.2).

Наша приближенная процедура очень похожа на ту, которая была использована Карлсоном и Опенгеймером [3]. Эти авторы подставляли в свои интегральные уравнения выражение

$$\frac{2}{E} \int_E^{\infty} P(E') dE' - 2P$$

вместо

$$\int_E^{\infty} \frac{P(E') dE'}{E' - E} - P \int_0^E \frac{dE'}{E'}. \quad (4.8)$$

Совершив такую подстановку в нашем уравнении (4.1), получим уравнение, которое отличается от (4.7) только коэффициентами двух промежуточных членов, причем эти коэффициенты равны 2 вместо  $q=2,15$ .

Так как в дальнейшем мы будем использовать упрощенное уравнение (4.7) вместо точного уравнения (4.1), мы должны показать, что (4.7) является хорошим приближением к (4.1).

Наше приближение затрагивает только те члены уравнения (4.1), которые учитывают образование пар и соударения с излучением, в то время как член, учитывающий ионизацию, остается неизменным. Поэтому, чтобы оценить ошибку, которая возникает в результате приближения, мы можем полностью пренебречь ионизацией. Решение уравнения (4.7) при  $\beta=0$  имеет вид

$$P(E) = \frac{1}{qE^2} \left( a \ln \frac{E_m}{E} + a - b \right), \quad (4.9)$$

и, так как  $q=2,15$ , оно практически совпадает с решением (3.12) точного уравнения (4.1); имеется только небольшое отличие во втором члене в скобках, где появляется величина  $a$  вместо  $0,91a$ .

Если бы мы использовали приближение Карлсона и Оппенгеймера, мы получили бы то же самое выражение (4.9) для  $P(E)$ , но величина  $q$  равнялась бы 2 вместо 2,15.

Если бы мы взяли в качестве  $K$  не функцию (2.2), а функцию <sup>8</sup>

$$K = \delta(E - E_m),$$

мы также пришли бы к выводу, что решения (4.1) и (4.7), полученные в пренебрежении ионизацией, практически совпадают (при  $E \ll E_m$ ), в то время как приближение Карлсона и Оппенгеймера привело бы к результату, отличающемуся множителем 2,15/2.

Поскольку наши уравнения линейны и произвольная функция может быть представлена в виде набора  $\delta$ -функций, этот результат имеет общий характер. Так как, кроме того, наше рассмотрение ионизационных потерь является точным, мы можем ожидать, что при меньших энергиях, где ионизационные потери преобладают, наше приближение будет по крайней мере столь же хорошим, как и в области больших энергий.

Далее необходимо доказать, что наше приближение не нарушает закон сохранения энергии, но лишь несколько искажает распределение энергии между электронами. Рассматриваемый случай, где  $K$  определяется выражением (2.2), не очень подходящий для этой цели, так как в этом случае полное число первичных  $\delta$ -электронов, а также их полная энергия бесконечны. Поэтому мы отложим рассмотрение этого случая до конца настоящего раз-

<sup>8</sup> Этот случай отвечает ливням, образованным первичными электронами определенной энергии  $E_m$ ; он будет рассмотрен в § 8.

дела и предположим, что  $K(E)$  является такой функцией от  $E$ , что интеграл

$$W = \int_0^{E_m} EK dE \quad (4.10)$$

имеет конечную величину.  $W$  есть полная энергия всех первичных электронов, которые генерируются в единицу времени в единице объема внешним фактором (например, мезонами или исходными электронами). В случае равновесия скорость диссипации энергии в результате ионизации, вызываемой как первичными электронами, так и вторичными, должна, очевидно, равняться  $W$ . Это означает, что полное число электронов должно быть равно

$$N_{\text{tot}} = N(0) = W/\beta. \quad (4.11)$$

Так как мы предполагаем, что все электроны испытывают одинаковые энергетические потери на ионизацию, то, строго говоря,  $N_{\text{tot}}$  является числом эквивалентных быстрых электронов; при этом медленный электрон эквивалентен нескольким быстрым электронам.

Чтобы показать, что наше уравнение (4.7) удовлетворяет условию сохранения энергии (4.10), умножим (4.7) на  $E$  и проинтегрируем по  $E$ :

$$\int_0^{E_m} EK(E) dE + q \int_0^{E_m} dE \int_E^{E_m} P(E') dE' - q \int_0^{E_m} EP(E) dE + \beta \int_0^{E_m} E \frac{dP}{dE} dE = 0. \quad (4.12)$$

Теперь

$$\int_0^{E_m} dE \int_E^{E_m} P(E') dE' = \int_0^{E_m} P(E') dE' \int_0^{E'} dE = \int_0^{E_m} E' P(E') dE'.$$

Далее, вследствие (4.2)

$$\int_0^{E_m} E \frac{dP}{dE} dE = [EP(E)]_0^{E_m} - \int_0^{E_m} P(E) dE = -N(0).$$

Таким образом, (4.12) эквивалентно (4.11), что и требовалось доказать.

Чтобы оценить ошибку, которая вносится нашим приближением, мы также провели ряд численных расчетов. Обозначим через  $P_0$  решение уравнения (4.7) и через  $P_0 + \delta P$  — решение уравнения (4.1). Можно легко показать, что  $\delta P$  должно удовлетво-



рять уравнению (4.1), в котором  $K$  заменено на  $\delta K$ :

$$\delta K = \frac{2-q}{E} N_0 + qP_0 + \int_0^{E_m} P(E') dE' \left( \frac{1}{E'-E} - \frac{2}{E'} \right) - P_0(E) \int_0^E \frac{dE'}{E'}. \quad (4.13)$$

Другими словами, решение уравнения (4.7) для данного  $K$  совпадает с решением уравнения (4.1), в котором  $K$  заменено на  $K + \delta K$ . Поэтому величина  $\delta K/K$  может служить мерой ошибки, которая вносится при замене (4.1) на (4.7). Величина  $\delta K/K$  была рассчитана численно для  $E_m = 1,7 \cdot 10^9$  эв и для нескольких различных значений  $E$ ; ее абсолютная величина не превосходила 0,08. Следует также отметить, что, как может быть показано, интеграл

$\int_0^{E_m} E \delta K dE$  равен нулю. Независимое вычисление С. Вернова, упо-

мянутое в § 1, также показало, что (4.7) является очень хорошим приближением к (4.1). Все эти аргументы показывают, что для всех наших целей мы можем с уверенностью заменить точное уравнение (4.1) гораздо более простым уравнением (4.7).

До сих пор для простоты мы рассматривали в качестве точного уравнение (4.1), которое было выведено из (2.12) с помощью выражения (2.6) для вероятности излучения  $W_e(E, E')$ . Можно, однако, взять для функции  $W_e(E, E')$  в уравнении (2.12) более точное выражение (2.5). Это не скажется на рассмотрении, развитом в настоящем разделе, и приведет лишь к изменению постоянной  $q$  в приближенном уравнении (4.7), которую теперь надо будет взять равной 2,4:

$$q = 2,4 \quad (4.14)$$

(ср. (3.18) и (4.4)). Это увеличит различие между нашим приближением и тем приближением, которое использовалось Карлсоном и Опенгеймером.

Вернемся теперь к решению (4.5) нашего уравнения (4.7). Если  $\varepsilon_m \gg 1$  и  $\varepsilon_m \gg \varepsilon$ , то можно заменить верхний предел интеграла в (4.5) на бесконечность, совершая при этом ошибку порядка  $\frac{\varepsilon a}{\beta \varepsilon_m^2} e^{-(\varepsilon_m - \varepsilon)}$ . Интегрирование по частям приводит тогда к результату

$$N = \frac{a}{\beta} \left\{ \ln \frac{E_m}{E} - 1 + \varepsilon e^\varepsilon (\ln \varepsilon_m - 1) \text{Ei}(-\varepsilon) + \varepsilon e^\varepsilon L(\varepsilon) \right\} - \frac{b}{\beta} \left\{ 1 + \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_m} \right) \varepsilon e^\varepsilon \text{Ei}(-\varepsilon) \right\},$$

где

$$L(\varepsilon) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} \ln x dx \quad (4.15)$$

и  $Ei(-\varepsilon)$  — интегральная экспонента:

$$Ei(-\varepsilon) = - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

Пренебрегая в последних скобках величиной  $1/\varepsilon_m$  по сравнению с единицей и используя соотношения  $b = a \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}$  и  $\ln \varepsilon_m = \ln \varepsilon - \ln \frac{E}{E_m}$  (ср. (2.3) и (4.6)), получаем окончательно

$$N = \frac{a}{\beta} \left\{ \varphi(\varepsilon) \left( \ln \frac{E_m}{E} - 1 - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \right) + \psi(\varepsilon) \right\}, \quad (4.16)$$

где

$$\varphi(\varepsilon) = 1 + \varepsilon e^{\varepsilon} Ei(-\varepsilon) \quad \text{и} \quad \psi(\varepsilon) = \varepsilon e^{\varepsilon} \{ L(\varepsilon) + \ln \varepsilon Ei(-\varepsilon) \}. \quad (4.17)$$

Функция  $\psi(\varepsilon)$  должна вычисляться численно. Наилучшая процедура для промежуточных значений  $\varepsilon$  состоит в том, чтобы использовать быстро сходящееся разложение

$$L(\varepsilon) + \ln \varepsilon Ei(-\varepsilon) = \frac{1}{2} \ln^2 \varepsilon + C \ln \varepsilon + A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^n}{n^2 n!},$$

где  $C = 0,577 \dots$  Постоянная

$$A = \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \ln x dx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 n!} = 0,9885$$

была найдена численно.

Краткая таблица функций  $\varphi(\varepsilon)$  и  $\psi(\varepsilon)$  может быть найдена на стр. 83 (табл. 3).

Рассмотрим теперь два предельных случая:  $\varepsilon \ll 1$  и  $\varepsilon \gg 1$ . Если  $\varepsilon \gg 1$ , т. е. если  $E \gg \beta$ , то можно использовать асимптотические разложения

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{2!}{\varepsilon} + \frac{3!}{\varepsilon^2} - \dots \right), \quad \psi(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{3}{\varepsilon} + \dots \right),$$

так что (4.16) принимает вид

$$N = \frac{a}{qE} \left\{ \ln \frac{E_m}{E} - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} + O\left( \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{E_m}{E} \right) \right\}. \quad (4.18)$$

Как и следовало ожидать, это выражение практически совпадает с решениями (3.15) и (3.20) точного уравнения, полученными в пренебрежении ионизацией.

С другой стороны, если  $\varepsilon \ll 1$ , т. е. если  $E \ll \beta$ , то можно использовать разложения

$$\varphi(\varepsilon) = 1 + \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon C + \dots, \quad \psi(\varepsilon) = \varepsilon \left( \frac{1}{2} \ln^2 \varepsilon + C \ln \varepsilon + \dots \right),$$

так что (4.16) принимает вид

$$N = \frac{a}{\beta} \left\{ \ln \frac{E_m}{E} - 1 - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} + O(\varepsilon \ln^2 \varepsilon) \right\}. \quad (4.19)$$

Этот результат может быть непосредственно выведен из закона сохранения энергии и выражения (2.2) для числа первичных  $\delta$ -электронов  $K(E)$ , и поэтому он совершенно не зависит от тех предположений и приближений, которые использовались при рассмотрении соударений с излучением и рождения пар. Это может быть показано с помощью уравнений (4.10) и (4.11), которые непосредственно следуют из закона сохранения энергии. Однако если подставить (2.2) в (4.10), то получится расходящийся интеграл. Следовательно, мы должны начинать интегрирование в (4.10) не с  $E=0$ , а с некоторого конечного значения  $E$ :

$$W(E_1) = \int_{E_1}^{E_m} EK dE = a \ln \frac{E_m}{E_1} - b \left( 1 - \frac{E_1}{E_m} \right),$$

где  $W(E_1)$  — полная энергия  $\delta$ -электронов с энергиями, большими, чем  $E_1$ , генерируемых мезонами в единицу времени в единице объема. Согласно (4.11) полное число ливневых электронов  $N_{\text{tot}}(E_1)$ , которые, в свою очередь, генерируются  $\delta$ -электронами (включая сами  $\delta$ -электроны), должно быть равно

$$N_{\text{tot}}(E_1) = W(E_1)/\beta. \quad (4.20)$$

Если  $E_1 \ll E_c$ , то распределение по энергиям этих  $N_{\text{tot}}(E_1)$  электронов ниже энергии  $E_1$  будет определяться только ионизацией (так как  $\delta$ -электроны, начальная энергия которых меньше, чем  $E_1$ , не включены в  $N_{\text{tot}}(E_1)$ ). Следовательно,  $P(E)$  будет иметь ниже  $E_1$  постоянное значение  $P(E_1)$ . Поэтому

$$N_{\text{tot}}(E_1) = N(E_1) + E_1 P(E_1) = N(E_1) - E_1 \frac{dN(E_1)}{dE_1}, \quad (4.21)$$

или согласно (4.20)

$$N(E_1) - E_1 \frac{dN(E_1)}{dE_1} = \frac{a}{\beta} \ln \frac{E_m}{E_1} - \frac{b}{\beta} \left( 1 - \frac{E_1}{E_m} \right).$$

Общее решение этого дифференциального уравнения

$$N(E_1) = \frac{a}{\beta} \left( \ln \frac{E_m}{E_1} - 1 \right) - \frac{b}{\beta} + O(E_1 \ln E_1) \quad (4.22)$$

совпадает с (4.19), что и требовалось доказать.

Приведенный вывод выражения (4.19) был впервые дан Скобельцыным<sup>9</sup>, который, однако, пренебрегал членом  $-E_1 \frac{dN}{dE_1}$  в (4.21); в результате его выражение для  $N$  отличается от (4.19) тем, что в нем отсутствует член  $-1$  в скобках.

<sup>9</sup> См. примечание 2 на стр. 62.

## § 5. Приближенное решение для малых энергий ( $E < E_c$ ); второй метод

Чтобы проверить результаты, полученные с помощью нашей формулы (4.16), мы вычислим число медленных электронов ( $E < E_c$ ) также другим методом. Этот второй метод гораздо менее точен, чем метод, развитый в § 4, но имеет то преимущество, что он позволяет понять причины расхождений между нашими результатами и результатами Баба. Этот метод также полезен для критического анализа некоторых общепринятых предположений, использующихся в теории ливней.

Пренебрежем ионизационными потерями при энергиях выше  $E_c$  и потерями энергии электронов на излучение при энергиях ниже  $E_c$ . Тогда при  $E < E_c$  условие равновесия (2.9) примет вид (ср. также (2.7))

$$K + \int_{E_c}^{E_m} P(E') W_e(E', E - E') dE' + 2 \int_{E_c}^{E_m} \Gamma(E') g(E') dE' + \\ + 2 \int_E^{E_c} \Gamma(E') g(E') dE' = -\beta \frac{dP}{dE} = \beta \frac{d^2 N}{dE^2}. \quad (5.1)$$

Число фотонов  $\Gamma(E)$  будет даваться формулой (2.11), если  $E > E_c$ , и формулой

$$\Gamma(E) = \frac{1}{Eg(E)} \int_{E_c}^{E_m} P(E') W_e(E', E) dE', \quad (5.2)$$

если  $E < E_c$ . Выражение (5.2) отличается от (2.11) только тем, что нижний предел интегрирования здесь равен  $E_c$  вместо  $E$ . Так как  $P(E)$  при  $E > E_c$  было вычислено в § 3 (в пренебрежении ионизацией), все члены в левой части уравнения (5.1) являются известными функциями от  $E$  и общее решение этого уравнения имеет вид

$$N^*(E) = \frac{1}{\beta} \int_E^{E_c} (E' - E) f(E') dE' + (E_c - E) P_0,$$

где  $f(E)$  обозначает левую часть (5.1),  $P_0$  есть значение  $P$  при  $E = E_c$  и  $N^*(E)$  — число электронов, энергия которых больше, чем  $E$ , но меньше, чем  $E_c$ . Обозначим через  $N_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) вклады в  $N^*$  от четырех последовательных членов в левой части (5.1). Тогда

$$N^* = \sum_{k=1}^4 N_k + (E_c - E) P_0 \quad (5.3)$$

и, например,

$$N_1 = \frac{1}{\beta} \int_E^{E'} (E' - E) K(E') dE'$$

есть число  $\delta$ -электронов, начальная энергия которых не превышала  $E_c$ . Аналогично,  $N_2$  — число электронов, которые, испустив фотон, перешли из области энергий выше  $E_c$  в область энергий ниже  $E_c$  и затем начали терять свою энергию на ионизацию;  $N_3$  и  $N_4$  отвечают электронам, которые родились с энергией  $E < E_c$ ; в процессе образования пар электроны  $N_3$  были созданы фотонами, обладающими энергией  $E > E_c$ , а электроны  $N_4$  — фотонами, обладающими энергией  $E < E_c$ . Как было упомянуто в конце § 2, комптоновские электроны также могут быть приближенно учтены в наших уравнениях<sup>10</sup> и должны быть включены в член  $N_4$ .

Используем для  $W_e(E, E')$  простое выражение (2.6), а для  $P(E)$  выше энергии  $E_c$  — соответствующее выражение (3.10). Вычисление  $N_1$  и  $N_4$  совершенно элементарно, вычисление же  $N_2$  и  $N_3$  несколько сложнее, но совершенно аналогично расчетам в § 3. Если  $E \ll E_c \ll E_m$  и если  $\gamma$  столь велико, что можно положить  $b=a$  (ср. (2.3)), то получаем

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{a}{\beta} \left( \ln \frac{E_c}{E} - 1 \right), & N_2 &= \frac{a}{2,15\beta} \left( 0,65 \ln \frac{E_m}{E_c} - 0,26 \right), \\ N_3 &= \frac{a}{2,15\beta} \left( 0,5 \ln \frac{E_m}{E_c} - 0,80 \right), & N_4 &= \frac{a}{2,15\beta} \left( \ln \frac{E_m}{E_c} - 1,09 \right), \end{aligned} \quad (5.4)$$

так что

$$N_{<} = \sum_{k=1}^4 N_k = \frac{a}{\beta} \left( \ln \frac{E_m}{E} - 2 \right). \quad (5.5)$$

Таким образом, число  $N_{<}$  электронов в энергетическом интервале между  $E_c$  и  $E \ll E_c$  дается выражением (4.22), которое было получено на основе чисто энергетических соображений для полного числа всех электронов, энергия которых больше, чем  $E$ . Такой результат можно было ожидать, так как в этом разделе мы предположили, что выше энергии  $E_c$  электроны не теряют энергию на ионизацию, и так как  $N$  в (4.20) и (4.22) означает число ионизирующих частиц. Значит, предположения, сделанные в этом разделе, с неизбежностью приводят к переоценке полного числа электронов

$$N_{\text{tot}} = N(E_c) + N_{<}. \quad (5.6)$$

До сих пор мы пренебрегаем последним членом в уравнении (5.3), который можно обозначить как

$$N_0 = (E_c - E) P_0 \quad (5.7)$$

и который зависит от граничного условия для  $P(E)$  при  $E=E_c$ . Насколько нам известно, во всех вычислениях числа ливневых

<sup>10</sup> Следует отметить, что в довольно широком интервале энергий ниже  $E_c$  поперечное сечение образования пар все еще больше, чем поперечное сечение комптон-эффекта.

электронов ниже энергии  $E_c$  делалось естественное предположение, что  $P$  непрерывно при  $E=E_c$ , так что

$$P_0 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(E - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(E + \varepsilon) \equiv P_>(E_c). \quad (5.8)$$

Используя (5.8) и (3.12) и пренебрегая  $E$  по сравнению с  $E_c$ , получаем

$$N_0 = \frac{a}{2,15E_c} \left( \ln \frac{E_m}{E_c} - 0,09 \right). \quad (5.9)$$

Однако граничное условие (5.8) несовместимо с сохранением энергии. Фактически, согласно (5.3) и (5.5) полное число ионизирующих частиц равно  $N_< + N_0$ . Поскольку, как мы видели,  $N_<$  электронов тратят на ионизацию всю энергию первичных  $\delta$ -электронов, то отсюда следует, что  $N_0$  должно равняться нулю. Поэтому единственным граничным условием, совместимым с законом сохранения энергии, является  $P_0=0$  и, следовательно,

$$N_0 = 0. \quad (5.10)$$

Чтобы сделать ясным значение этого условия, рассмотрим соседние энергетические интервалы от  $E_c + dE$  до  $E_c$  и от  $E_c$  до  $E_c - dE$ . В оба интервала в единицу времени будет поступать одинаковое число электронов в результате радиационных потерь энергии более быстрых электронов и в результате образования пар и первичной ионизации мезонами. В состоянии равновесия такое же число электронов в секунду должно покидать эти интервалы в результате энергетических потерь. Число электронов, покидающих интервал  $E_c, E_c + dE$ , определяется соударениями с излучением и, следовательно, пропорционально числу  $P_>(E_c)dE$  электронов, находящихся в этом интервале. В то же время электроны ниже  $E_c$  теряют свою энергию с постоянной скоростью; вследствие замедления все они выходят из интервала  $E_c, E_c - dE$  за время  $dt = \frac{x_0}{c\beta} dE$  совершенно независимо от их числа. Следовательно, пополнения электронов, компенсирующего потери в верхнем интервале, будет недостаточно, чтобы компенсировать потери в нижнем интервале  $E_c, E_c - dE$ , и величина  $P$  в нем будет падать до нуля.

Раумеется, в действительности  $P(E)$  изменяется непрерывно с изменением  $E$ , но при этом ионизационные потери не возникают скачком при  $E=E_c$ , как мы предположили.

Относительная важность различных вкладов в  $N_>$  и  $N_{\text{tot}}$ , определяемая выражениями (5.5) и (5.6), может быть проиллюстрирована табл. 1. При вычислении этой таблицы мы приняли следующие значения для различных параметров:

$$\begin{aligned} M &= 100 \text{ м} & E_0 &= 10^{10} \text{ эв,} \\ \beta &= 7 \text{ Мэв,} & E_c &= 10 \text{ Мэв для Рь,} \\ \beta &= 100 \text{ Мэв,} & E_c &= 150 \text{ Мэв для воздуха,} \end{aligned}$$

Таблица 1

	$N(E_c)$	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_{<}$	$N_{tot}$
Воздух	2,95(1,6)	10,2	3,5	1,8	4,4	19,9(15,4)	23(17)
Pb	9,1(5,25)	2,0	9,3	5,9	13,0	30,2(10,8)	39(16)

причем нижний предел энергии для электронов в выражении (5.4) для  $N_1$  был положен равным  $2,5 Mэв$ .

В табл. 1, так же как и в табл. 2, число электронов  $N$  выражено в процентах от числа мезонов.

Таблица 2

	Результаты Баба			(3,15) $N(E_c)$	(5,9) $N_0$	(5,4) $N_2$
	$N(E_c)$	$N_{<}$	$N_{tot}$			
Воздух	2,9	3,9	6,8	2,95	3,95	3,5
Pb	9,0	10,0	19,0	9,1	10,7	9,3

Можно видеть, что число электронов  $N_3 + N_4$  (создаваемых фотонами) с начальными энергиями, меньшими, чем  $E_c$ , значительно больше, чем число электронов  $N_2$ , которые были созданы с начальными энергиями, превышающими  $E_c$ , и были замедлены ниже  $E_c$  в результате соударений с излучением. Однако в большинстве работ по теории ливней электронами  $N_3 + N_4$  вообще пренебрегается и предполагается, что полное число  $N_{<}$  электронов ниже  $E_c$  равно  $N_0$  или  $N_2$  (см., например, Арлей [5]).

В ливне, создаваемом электроном, обладающим определенной энергией,  $N_{<}$  равно  $N_2 + N_3 + N_4$ , в то время как в рассматриваемом случае должны быть также учтены первичные  $\delta$ -электроны, начальная энергия которых меньше  $E_c$ ; их число  $N_1$ , естественно, зависит от абсолютной величины  $E_c$  и больше в воздухе, чем в свинце.

Величины, входящие в табл. 1, не должны непосредственно сравниваться с экспериментальными данными, так как в экспериментальных установках регистрируются только электроны, энергия которых превосходит определенную величину  $E_{min}$ , в то время как  $N_2$ ,  $N_3$  или  $N_4$  в табл. 1 означает полное число электронов определенного происхождения ниже  $E_c$ <sup>11</sup>. Дальнейшим источником

<sup>11</sup> Д. В. Скобельцын и Г. Франк-Каменецкий [2] в своих вычислениях не учитывали этого обстоятельства, считая, что большинство электронов  $N_2 + N_3 + N_4$  обладают энергиями, превышающими  $E_{min} \approx 2,5 Mэв$ . Однако в тяжелых веществах, таких, как Pb, это далеко не так.

ошибки, также приводящим к переоценке  $N_{\text{tot}}$ , является пренебрежение ионизацией выше  $E_c$ . Чтобы сравнить величины, вычисленные методом, развитым в этом разделе, с гораздо более надежными величинами, рассчитанными с помощью выражения (6.1), мы привели последние в скобках в табл. 1.

Результаты Баба лучше всего могут быть сопоставлены с нашими с помощью табл. 2. Это сравнение делает весьма правдоподобным предположение, что в своих неопубликованных вычи-

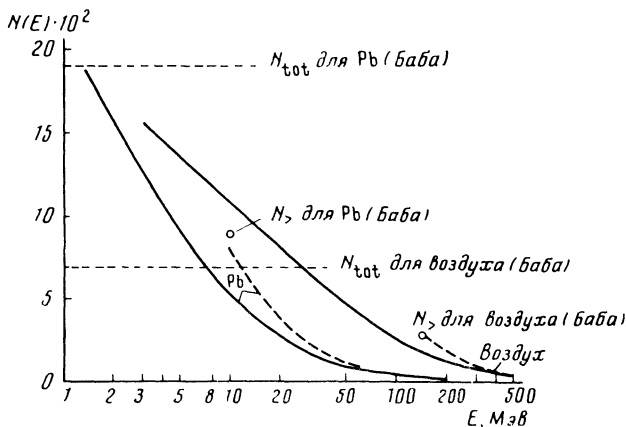


Рис. 1

слениях Баба пренебрегал ионизационными потерями выше  $E_c$  и предполагал, что  $N_{<}$  равно либо  $N_0$ , либо  $N_2$ , пренебрегая всеми другими вкладками в  $N_{<}$ . На рис. 1 мы нанесли значения  $N(E)$  для  $E_0 = 10^{10}$  эв и  $M = 100$  м, вычисленные с помощью выражения (6.1)<sup>12</sup>; штриховые линии были вычислены в пренебрежении ионизационными потерями. Для сравнения на чертеже указаны также результаты Баба.

## § 6. Обсуждение результатов и сравнение с экспериментом

Суммируем основные результаты § 2—5. Число электронов, сопровождающих проникающую частицу (за исключением  $\delta$ -электронов), дается выражением (4.5), где  $N(E)$  означает число электронов, энергия которых превышает  $E$ . Если  $E \ll E_m$ , где  $E_m$  — максимальная энергия этих электронов, определяемая (2.4), то вместо (4.5) можно использовать выражение (4.16):

$$N = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} A \left\{ \varphi(\epsilon) \left( \ln \frac{E_m}{E} - 1 - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \right) + \psi(\epsilon) \right\}, \quad (6.1)$$

<sup>12</sup> Так как  $N(E)$  зависит только от  $E_m = F(E_0, M)$ , но не от  $E_0$  и  $M$  в отдельности, этот график также пригоден, например, для  $M = 160$  м и  $E_0 = 1,2 \times 10^{10}$  эв.



где  $\varepsilon$  — энергия  $E$ , выраженная в единицах  $\beta/q$ :

$$\varepsilon = \frac{qE}{\beta} = \frac{2,4}{\beta} E. \quad (6.2)$$

Функции  $\varphi$  и  $\psi$  определяются соотношениями (4.17) и протабулированы в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

$\varepsilon$	0	0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	$\gg 1$
$\varphi$	1	0,798	0,665	0,538	0,459	0,404	0,277	0,214	$\frac{1}{\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon^2}$
$\psi$	0	0,244	0,289	0,294	0,283	0,266	0,179	0,154	$\frac{1}{\varepsilon} - \frac{3}{\varepsilon^2}$

Коэффициент  $A$  в (6.1) равен

$$A = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{a}{\beta} = \frac{1}{\ln \theta}, \quad \theta = \frac{2}{x^4 Z^2} \left( \frac{\bar{E}}{mc^2} \right)^3, \quad (6.3)$$

где  $\bar{E}$  — некоторое среднее значение энергии электронов. Величина  $\beta$  не очень чувствительна к точному значению  $\bar{E}$ . В настоящем разделе мы будем использовать<sup>13</sup> следующие значения  $\bar{E}$ :

Воздух:  $\bar{E} = 15 \text{ Мэв}$ , Al:  $\bar{E} = 12 \text{ Мэв}$ , Pb:  $\bar{E} = 8,5 \text{ Мэв}$ . (6.4)

Соответствующие значения величин  $\beta$  и  $A$  даны в табл. 4.

Т а б л и ц а 4

	Воздух	Al	Pb
$\beta, \text{ Мэв}$	90	47	7
$A \cdot 10^2$	3,7	4,0	5,0

<sup>13</sup> Эти значения  $\bar{E}$  были получены из уравнения

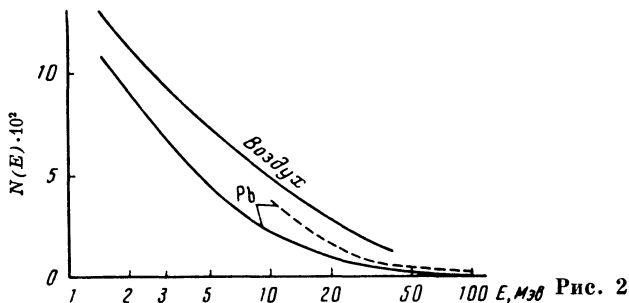
$$\ln \bar{E} = \frac{1}{N (3 \text{ Мэв})} \int_{E=3 \text{ Мэв}}^{E_m=350 \text{ Мэв}} dE \ln E P(E).$$

Величина  $E_m = 350 \text{ Мэв}$  для максимальной энергии первичных  $\delta$ -электронов была получена усреднением по энергетическому спектру мезонов (см. ниже). Эта средняя логарифмическая энергия имеет столь малую величину из-за наличия большого числа  $\delta$ -электронов с малыми начальными энергиями; средняя энергия электронов ливня, генерируемых электроном с энергией  $350 \text{ Мэв}$ , имеет гораздо большую величину (см. (8.12)).

На рис. 2 дан график функции  $N(E)$ , рассчитанный с помощью (6.1) для  $M=160$  т и  $E_0=1,7 \cdot 10^9$  эв. Эти кривые очень типичны, и их форма существенно не изменяется, если в разумных пределах изменять значения  $M$  и  $E_0$  (ср. рис. 1). На рис. 3 мы нанесли функцию распределения  $^{14}$  фотонов  $\Gamma(E)$  в Рв для того же значения  $E_0$  ( $1,7 \cdot 10^9$  эв). Нижняя кривая была рассчитана с помощью асимптотического выражения для  $W_p(E, E')$

$$W_p(E, E') = g(E) = \frac{2}{3}E,$$

которое мы подставили в уравнение (2.4), в то время как при



расчете верхней кривой мы использовали для  $g(E)$  точные значения полного поперечного сечения поглощения фотонов, учитывающие и образование пар, численно рассчитанное Бете и Гайтлером, и комптоновское рассеяние.

Рис. 1 и 2 показывают, что электроны в гораздо большей степени сконцентрированы в области низких энергий, чем это обычно предполагается. Видно, далее, что число энергичных электронов в Рв гораздо меньше, чем в воздухе. Причина этого состоит в том, что число первичных  $\delta$ -электронов в данном энергетическом интервале пропорционально атомному номеру  $Z$  вещества, в то время как вероятность того, что электрон потеряет свою энергию на излучение и в результате покинет этот энергетический интервал, пропорциональна  $Z^2$ . Следовательно, в области больших энергий, где ионизационные потери незначительны, равновесное число электронов приблизительно обратно пропорционально  $Z$ . Это также можно увидеть из выражения (3.20), так как  $a \approx 1/Z$ . С другой стороны, из энергетических рассмотрений следует (§ 4, в особенности выражения (4.11), (4.22)), что полное число электронов в первом приближении не зависит от  $Z$ , так как и полная энергия первичных  $\delta$ -электронов, генерируемых в единицу времени мезонами, и скорость диссипации энергии в результате ионизации

<sup>14</sup> Но не полное число фотонов, энергия которых превышает  $E$ , соответствующее функции  $N(E)$  для электронов.

приблизительно пропорциональны  $Z$ . Следовательно, доля низкоэнергетических электронов должна быстро возрасти с увеличением  $Z$ , что действительно можно видеть на рис. 1 и 2 (функция распределения  $P(E) = dN/dE$  пропорциональна наклону кривых  $N(E)$ ). Одна из причин этого состоит в том, что тормозное излучение электронов увеличивается с ростом  $Z$  и в тормозном излучении преобладают фотоны небольших энергий, создающие низкоэнергетические пары.

Штриховые кривые на рис. 1 и 2 были рассчитаны в пренебрежении ионизацией. Они показывают, что ионизация существенна

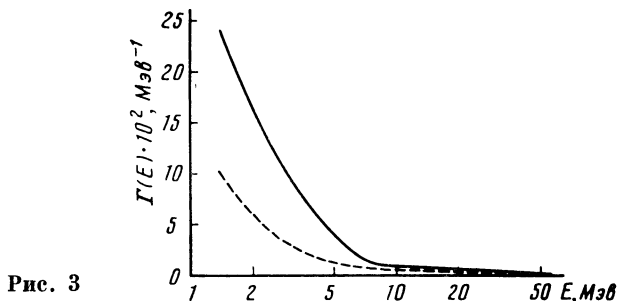


Рис. 3

не только ниже, но и выше энергии  $E_0$  и что она понижает число электронов  $E_0$  на 40—50%.

Сравним теперь наши результаты с измерениями относительной интенсивности мягкой компоненты космических лучей на уровне моря и ниже него. Для этой цели необходимо сделать некоторое предположение об энергетическом спектре проникающей компоненты на уровне моря. Мы предположили, что этот спектр дается формулой, выведенной Гейзенбергом и Эйлером [6] (выражение (49) их статьи), и рассчитали численно среднее значение величины  $\ln E_m$ , входящей в (6.1):

$$\overline{\ln E_m} = \frac{\int f(p) \ln E_m dp}{\int f(p) dp}. \quad (6.5)$$

Здесь  $f(p)$  — число мезонов, обладающих импульсом  $p$ , и  $E_m(p)$  определяется соотношением (2.4), где

$$E_0 = c \sqrt{c^2 M^2 + p^2}$$

и, согласно Гейзенбергу,

$$M = 160 \text{ м.}$$

Так как к проникающей компоненте относятся только энергичные мезоны, мы совершили в (6.5) интегрирование по  $E$  в пределах от  $cp = 2 \cdot 10^8$  эв до  $cp = \infty$  и нашли, что  $\lg \left( \frac{E_m}{2mc^2} \right) = 2,55$ . Это соответствует  $\bar{E}_m \approx 3,5 \cdot 10^8$  эв и  $\bar{E}_0 \approx 1,4 \cdot 10^9$  эв.

Т а б л и ц а 5

	Франк-Ка- менецкий	$E_m = 350 \text{ Мэв}$		$E_m = 750 \text{ Мэв}$	
		$E_{\min} = 3 \text{ Мэв}$	$E_{\min} = 6 \text{ Мэв}$	$E_{\min} = 3 \text{ Мэв}$	$E_{\min} = 6 \text{ Мэв}$
Воздух	$33 \pm 3$	9,5	6,9	11,9	11,1
Al	$11 \pm 3$	9,4	6,4	11,6	10,1
Pb	$4,5 \pm 3$	6,8	3,8	8,3	4,6

Во втором столбце табл. 5 приведена интенсивность мягкой компоненты, выраженная в процентах от проникающей компоненты, как она была измерена Франк-Каменецим [2] в свободной атмосфере, под 35 см Al<sup>15</sup> и под 10 см Pb. В третьем и четвертом столбцах приведено число электронов  $N$  ( $E_{\min}$ ), энергия которых превышает  $E_{\min} = 3 \text{ Мэв}$  и  $6 \text{ Мэв}$  соответственно, рассчитанное с помощью формулы (6.1) для  $M = 160 \text{ м}$  и  $E_m = 3,5 \cdot 10^8 \text{ эв}$ . Величина  $E_{\min} = 3 \text{ Мэв}$  приблизительно соответствует нижнему пределу энергии электронов, которые могли быть зарегистрированы в установке Франк-Каменецкого. Так как энергетическое распределение мезонов не известно с достаточной точностью, мы привели в табл. 5 также значения  $N$  ( $E_{\min}$ ), вычисленные для  $E_m = 750 \text{ Мэв}$ ; такая величина  $E_m$  соответствует значению  $E_0 = 2,6 \cdot 10^9 \text{ эв}$ .

Табл. 5 показывает, что в случае Al согласие между теорией и экспериментом весьма удовлетворительное. Большое различие в интенсивности мягкой компоненты в свободной атмосфере и под Al вызвано, несомненно, распадными электронами; измерения Франк-Каменецкого показывают, что число таких электронов в атмосфере составляет примерно 22% от числа проникающих частиц.

Хотя теоретически вычисленная интенсивность мягкой компоненты под Pb несколько меньше, чем под Al, различие между ними не столь велико, как между измеренными интенсивностями. Это можно было ожидать, так как электроны, обладающие энергиями в несколько Мэв, подвергаются в Pb очень значительному рассеянию и испускаются из пластинки свинца под всеми возможными углами. В экспериментах Франк-Каменецкого два счетчика, настроенных на совпадение, были помещены на расстоянии примерно 1 м от свинцовой пластинки размером  $65 \times 250 \text{ см}^2$ , так что значительная доля электронов, испускаемых из пластинки, должна была миновать счетчики. При таких экспериментальных условиях эффективный нижний предел для энергии электронов должен опре-

<sup>15</sup> Слой в 10 см Pb был помещен над Al, чтобы отфильтровать излучение.

деляться в большей мере их рассеянием в Pb, нежели их способностью проникать через стенки счетчиков. Так как электронный спектр в Pb сильно сконцентрирован в области низких энергий, разумное изменение величины  $E_{\min}$  от 3 до 6 Мэв является достаточным для того, чтобы привести теоретические оценки в соответствие с измерениями под Pb (табл. 5).

Было бы интересно измерить относительную интенсивность мягкой компоненты на установке, где исключены эффекты рассеяния (счетчики, со всех сторон окруженные свинцом). Такие эксперименты планируются С. Верновым в Физическом институте Академии наук СССР.

Обратимся теперь к экспериментам Нильсена и Моргана [7], которые сравнили относительную интенсивность мягкой компоненты в свободной атмосфере и в глубокой пещере. Они обнаружили, что мягкая компонента составляла вне пещеры 30%, а внутри пещеры, под скалами известняка, отвечающими 60 м водного эквивалента, — 25% полного излучения. Таким образом, интенсивность мягкой компоненты составляла 43 и 33% интенсивности проникающего излучения. Относительная интенсивность мягкой компоненты в атмосфере была выше, чем на уровне моря, так как эксперименты проводились на высоте 750 м. Так как скалы поглощают распадные электроны, присутствующие в атмосфере, и так как распад мезонов во время их прохождения через скалы полностью пренебрежим, можно ожидать очень значительного ослабления мягкой компоненты под скалами. Однако сама проникающая компонента становится более жесткой по мере того, как она проникает на большую глубину, — согласно Нильсену и Моргану, ее коэффициент поглощения уменьшается от  $4 \cdot 10^{-4}$  снаружи пещеры до  $2 \cdot 10^{-4}$  см<sup>2</sup>/г внутри пещеры. Доля вторичных электронов, находящихся в равновесии с мезонами, возрастает с ростом энергии мезонов, и этот рост может, по крайней мере частично, компенсировать отсутствие распадных электронов.

Фактически, если вычислить с помощью теории Гейзенберга и Эйлера [6] энергетическое распределение  $f(p)$  мезонов под 60 м водного эквивалента и подставить полученное распределение в (6.5), то получится, что  $\bar{E}_m = 2,35 \cdot 10^{10}$  эв, это соответствует  $\bar{E}_0 = 2,8 \cdot 10^{10}$  эв. Увеличение  $E_m$  от  $3,5 \cdot 10^8$  до  $2,4 \cdot 10^{10}$  эв соответствует согласно выражению (6.1) увеличению числа вторичных электронов от 9 до 24% (в веществах с небольшим атомным номером). Хотя, согласно Нильсену и Моргану, интенсивность мягкой компоненты под 60 м водного эквивалента является несколько большей и составляет 33%, видно все же, что в первом приближении теория может объяснить общие характеристики рассматриваемого явления.

Следует также упомянуть, что Оже [8] тоже измерил интенсивность мягкой компоненты на различных глубинах под землей и нашел, что под 65 м водного эквивалента скал мягкая компонента составляла только 2% от проникающей, а на поверхности земли

(под слоем 2 м водного эквивалента) она составляла 9%. Его результаты очевидным образом противоречат как теории, так и измерениям Нильсена и Моргана.

## § 7. Распадные электроны

В этом разделе мы рассчитаем число и распределение интенсивности распадных электронов, находящихся в равновесии с мезонами. Вероятность того, что мезон, обладающий импульсом  $p$  и массой  $M$ , спонтанно распадется на пути 1 см, равна  $M/\tau_0 p$ , где  $\tau_0$  — среднее время жизни мезона в состоянии покоя. Таким образом, мезон будет генерировать в среднем  $x_0 M/\tau_0 p$  распадных электронов на пути, равном ливневой единице длины (выражение (2.1)).

Согласно Гейзенбергу и Эйлеру [7], энергия распадного электрона есть

$$E = \frac{c}{2} (\sqrt{c^2 M^2 + p^2} + p \cos \varphi), \quad (7.1)$$

где  $\varphi$  — угол между направлениями движения мезона и испущенного электрона, измеренный в системе покоя мезона.

Так как в системе покоя мезона все направления испускания равновероятны, вероятность того, что  $\varphi$  лежит в интервале  $\varphi, \varphi + d\varphi$ , пропорциональна величине  $\sin \varphi d\varphi$ . Отсюда следует, что в системе наблюдателя энергетическое распределение электронов является постоянным в интервале

$$E_1 = \frac{c}{2} (\sqrt{c^2 M^2 + p^2} - p) \leq E \leq E_2 = \frac{c}{2} (\sqrt{c^2 M^2 + p^2} + p). \quad (7.2)$$

Таким образом, среднее число  $K(E) dE$  распадных электронов, генерируемых мезонами в энергетическом интервале  $E, E + dE$  на пути единичной длины, есть

$$\begin{aligned} K(E) &= \frac{x_0 M}{c \tau_0 p^2}, & \text{если } E_1 < E < E_2, \\ K(E) &= 0, & \text{если } E < E_1 \text{ или } E > E_2. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Полное число электронов, сопровождающих мезон и находящихся в равновесии с ним, включая распадные электроны и порождаемые ими ливневые электроны, может быть определено с помощью уравнения (4.7). Выразив  $P(E)$  через  $N(E)$

$$P(E) = -dN/dE$$

и взяв энергию  $E$  в единицах  $\beta/q$

$$\varepsilon = q \frac{E}{\beta} = \frac{2,4E}{\beta}, \quad (7.4)$$

можно представить это уравнение в виде

$$\frac{\beta K}{q^2} + \frac{N}{\varepsilon} + \frac{dN}{d\varepsilon} - \frac{d^2 N}{d\varepsilon^2} = 0. \quad (7.5)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее очевидным граничным условиям

$$N(E_2) = 0, \quad (dN/dE)_{E_2} = 0,$$

имеет вид

$$N(E) = \frac{x_0 M \beta^3}{2\tau_0 c p^2 q^2} \varepsilon e^\varepsilon \int_\varepsilon^{\varepsilon_2} e^{-x} dx \left( \frac{\varepsilon_2^2}{x^2} - 1 \right), \quad \text{если } \varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2, \quad (7.6)$$

$$N(E) = \frac{x_0 M \beta^3}{2\tau_0 c p^2 q^2} \varepsilon e^\varepsilon \left\{ (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) \int_\varepsilon^{\varepsilon_1} \frac{e^{-x}}{x^2} dx + \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} e^{-x} dx \left( \frac{\varepsilon_2^2}{x^2} - 1 \right) \right\},$$

если  $\varepsilon < \varepsilon_1$ ,

где

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{qc}{2\beta} \{ \sqrt{c^2 M^2 + p^2} \mp p \}. \quad (7.7)$$

Интегрируя по частям, можно свести интегралы в (7.6) к элементарным функциям и к интегральной экспоненте  $Ei(-\varepsilon)$ . Мы, однако, не станем обсуждать здесь энергетическое распределение электронов и определим только полное число электронов  $N(0)$ , сопровождающих мезон. Подставляя в (7.6)  $\varepsilon=0$ , находим

$$N(0) = \frac{x_0 M c}{2\tau_0 \beta} \frac{\sqrt{M^2 c^2 + p^2}}{p},$$

или, используя (2.8),

$$N(0) = \frac{1}{4\pi r_0^3 c n Z \ln \theta} \frac{M}{m} \frac{\sqrt{c^2 M^2 + p^2}}{p} \frac{1}{\tau_0}, \quad (7.8)$$

где  $n$  есть число атомов с атомным номером  $Z$  в  $1 \text{ см}^3$ .

Для случая воздуха при нормальной температуре и давлении это выражение принимает вид (для  $\beta=10^8 \text{ эв}$ ):

$$N(0) = \frac{M}{m} \frac{\sqrt{c^2 M^2 + p^2}}{p} \frac{3 \cdot 10^{-9} \text{ сек.}}{\tau_0}. \quad (7.9)$$

Это выражение справедливо только для не слишком медленных мезонов, так как при его выводе мы предполагали, что характерный интервал для мезонов гораздо больше, чем для электронов; в противном случае нужно было бы учитывать поглощение мезонов в том веществе, через которое они проходят. Во всяком случае, доля медленных мезонов в атмосфере столь мала, что в первом приближении можно пренебречь множителем  $\sqrt{c^2 M^2 + p^2}/p$  в (7.9), заменив его на 1. Таким образом, полное число распадных электронов, находящихся в равновесии с мезонами, практически не зависит от их энергетического распределения.

Как было упомянуто в § 6, различие в интенсивности мягкой компоненты в воздухе и в Al указывает, что число распадных электронов в атмосфере составляет около 22% от числа мезонов.

Подставив эту величину 0,22 в выражение (7.9) для  $N(0)$  и положив  $M = 160 \text{ м}$  и  $\sqrt{c^2 M^2 + p^2} \approx p$ , получим

$$\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ сек} \quad (7.10)$$

в полном согласии с первоначальными оценками Гейзенберга и Эйлера [6].

### § 8. «Проинтегрированный» энергетический спектр электронов ливня

В теории ливней интересуются не только энергетическим распределением электронов в ливне, но также их распределением в пространстве. Оба эти распределения характеризуются функцией  $\pi(E, t)$ , определяемой как число ливневых электронов энергии  $E$  в единичном энергетическом интервале на расстоянии  $t$  от верхней границы слоя, в котором падающий электрон (или фотон) рождает ливень.  $\gamma(E, t)$  — соответствующая функция распределения фотонов. Нахождение  $\pi(E, t)$  и  $\gamma(E, t)$  является гораздо более сложной проблемой, чем те задачи, которые мы исследовали в этой работе. Поэтому здесь мы ограничимся рассмотрением только одной частной характеристики спектра ливня, а именно — проинтегрированного спектра ливня:

$$P(E) = \int_0^{\infty} \pi(E, t) dt, \quad \Gamma(E) = \int_0^{\infty} \gamma(E, t) dt. \quad (8.1)$$

Интегродифференциальные уравнения для  $\pi$  и  $\gamma$  имеют вид (ср. (2.9) и (2.10))

$$\int_E^{\infty} \pi(E', t) W_e(E', E' - E) dE' + 2 \int_E^{\infty} \gamma(E', t) W_p(E', E) dE' - \pi(E, t) \int_0^E W_e(E, E') dE' + \beta \frac{\partial \pi}{\partial E} = \frac{\partial \pi}{\partial t}, \quad (8.2)$$

$$\int_E^{\infty} \pi(E', t) W_e(E', E) dE' - \gamma(E, t) \int_0^E W_p(E, E') dE' = \frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

Если ливень порожден падающим электроном энергии  $E_m$ , граничные условия для  $\gamma$  и  $\pi$  имеют вид

$$\gamma(E, t=0) = 0, \quad \pi(E, t=0) = \delta(E_m - E). \quad (8.3)$$

Проинтегрируем уравнения (8.2) по переменной  $t$  от  $t=0$  до  $t=\infty$ . Так как  $\pi$ , и  $\gamma$  должны, очевидно, обращаться в нуль при  $t=\infty$ , то с помощью (8.3) получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \pi}{\partial t} dt = -\delta(E_m - E), \quad \int_0^{\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial t} dt = 0.$$



Интегрирование левых частей уравнений равносильно замене в них  $\pi$  и  $\gamma$  на величины  $P$  и  $\Gamma$ , определенные в (8.1). Таким образом, в результате интегрирования для  $P$  и  $\Gamma$  получаются уравнения (2.9) и (2.10), исследованные в предыдущих разделах, где  $K(E)$  теперь обозначает функцию:

$$K(E) = \delta(E_m - E). \quad (8.4)$$

Итак, мы можем применить к рассматриваемой задаче все общие результаты, полученные в настоящей работе, лишь с теми видоизменениями, которые соответствуют модифицированной форме  $K(E)$ .

Если пренебречь ионизацией, опять можно найти точное решение уравнений (2.9) и (2.10). Соотношения (3.2) и (3.4) будут справедливы и в рассматриваемом здесь случае, а (3.3) примет вид

$$\delta(E_m - E) + \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \left(\frac{E_m}{E}\right)^z \varphi(z) dz = 0.$$

Легко показать, что решение этого интегрального уравнения имеет вид

$$\varphi(z) = -1/E_m.$$

Используя (3.2) и (3.4), находим

$$P(E) = -\frac{1}{2\pi i E_m} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \left(\frac{E_m}{E}\right)^z \frac{dz}{M(z)} = -\frac{1}{E_m} \sum \text{Res} \left\{ \left(\frac{E_m}{E}\right)^z \frac{1}{M(z)} \right\} \quad (8.5)$$

(ср. (3.8) и (3.10)). Если  $E \ll E_m$ , опять можно ограничиться первым членом ряда (8.5), соответствующим полюсу в точке  $z=2$ :

$$P = -\frac{1}{M'(2) E_m} \left(\frac{E_m}{E}\right)^2 \left[ 1 + O\left(\frac{E^{3/2}}{E_m^{3/2}}\right) \right] = \frac{E_m}{qE^2} \left[ 1 + O\left(\frac{E^{3/2}}{E_m^{3/2}}\right) \right]. \quad (8.6)$$

Соответствующее выражение для  $N$  имеет вид

$$N = \frac{E_m}{qE} \left[ 1 + O\left(\frac{E^{3/2}}{E_m^{3/2}}\right) \right]. \quad (8.7)$$

Если нужно учесть ионизационные потери электронов, то опять можно использовать наше приближенное уравнение (4.7) или эквивалентное уравнение (7.5). Так как  $K(E)$  определяется выражением (8.5) и так как

$$\delta(E - E_m) = \frac{q}{\beta} \delta(\varepsilon - \varepsilon_m),$$

уравнение (7.5) принимает вид

$$\frac{1}{q} \delta(\varepsilon - \varepsilon_m) + \frac{N}{\varepsilon} + \frac{dN}{d\varepsilon} - \frac{d^2N}{d\varepsilon^2} = 0. \quad (8.8)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию  $N(E_m)=0$ , есть

$$N = \frac{1}{q} \varepsilon_m \varepsilon e^\varepsilon \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_m} \frac{e^{-x}}{x^2} dx = \frac{E_m}{\beta} \left\{ 1 + \varepsilon e^\varepsilon \text{Ei}(-\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} e^{-(\varepsilon_m - \varepsilon)} \right\}. \quad (8.9)$$

Это решение может быть получено также из решения (7.6) для  $K$ , определенного формулой (7.3), если  $E_1$  устремить к  $E_2$ . Из (8.9) следует

$$N_{\text{tot}} = N(0) = E_m/\beta,$$

что эквивалентно условию сохранения энергии (4.11).

Если  $E \ll E_m$ , то последним членом в скобках в (8.9) можно пренебречь, в результате чего для  $N$  получается простое выражение

$$N = \frac{E_m}{\beta} \varphi(\varepsilon), \quad (8.10)$$

где  $\varphi$  — функция, определяемая (4.17) и протабулированная в табл. 3. Если  $\varepsilon \gg 1$ , т. е. если  $E \gg \beta$ , то можно использовать для функции  $\varphi(\varepsilon)$  ее асимптотическое разложение (см. стр. 83), так что в этом случае (8.10) принимает вид

$$N = \frac{E_m}{\beta} \left( 1 - \frac{2}{\varepsilon} + \dots \right) = \frac{E_m}{qE} \left( 1 - \frac{2}{\varepsilon} + \dots \right);$$

как и следовало ожидать, это эквивалентно решению (8.7) точного уравнения (2.12) для случая  $\beta=0$ .

Так как  $\varphi(\varepsilon)=0,5$  при  $\varepsilon=0,62$  и  $\varphi(0)=1$ , половина полного числа электронов ливня имеет энергии, меньшие, чем

$$E_{1/2} = \frac{0,62\beta}{q} \approx \frac{\beta}{4}. \quad (8.11)$$

Эта «полуэнергия» равна 25 Мэв в воздухе и 1,8 Мэв в Рь. Однако средняя энергия электронов в ливне имеет гораздо большую величину

$$\bar{E} = -\frac{1}{N(0)} \int_0^{E_m} E \frac{dN}{dE} dE = \frac{\beta}{q} \left\{ \ln \varepsilon_m + C - 1 + \frac{1}{\varepsilon_m} - \text{Ei}(-\varepsilon_m) - \frac{e^{-\varepsilon_m}}{\varepsilon_m} \right\},$$

или, приблизительно, для  $\varepsilon_m \gg 1$

$$\bar{E} = \frac{\beta}{2,4} (\ln \varepsilon_m - 0,42). \quad (8.12)$$

Для  $E_m=350$  Мэв величина  $\bar{E}$  примерно равна 70 Мэв для воздуха и 10 Мэв для свинца. Для свинца получились бы гораздо большие значения  $\bar{E}$ , если бы при вычислении  $\bar{E}$  учитывались только те электроны, энергия которых достаточна для того, чтобы они были зарегистрированы в обычных экспериментальных установках.

Функция  $N$ , определяемая формулой (8. 9), изображена на рис. 4 для воздуха и для Рb в предположении, что  $E_m = 350$  Мэв. Электроны ливня опять оказываются сосредоточенными в области низких энергий в большей мере, чем это обычно принято считать; однако это сосредоточение, естественно, не столь ярко выражено, как на рис. 2, относящемся к той же величине  $E_m$ , так как рис. 2 дает суммарный вклад всех  $\delta$ -электронов, энергия которых не превышает  $E_m$ . Штриховая кривая на рис. 4 вычислена в пренебре-

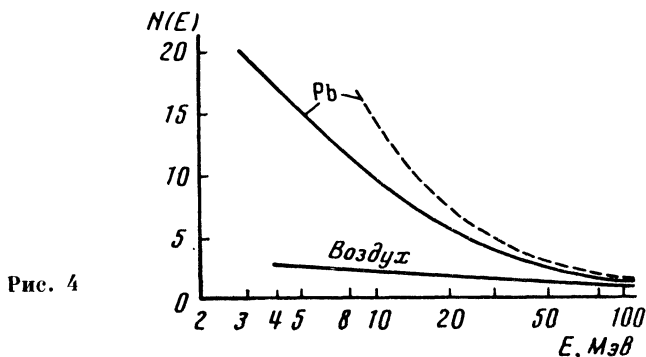


Рис. 4

жении ионизацией (выражение (8. 7)); видно, что ионизация уменьшает число ливневых электронов выше критической энергии на 33%.

Согласно оценке Эйлера и Гейзенберга, число электронов, энергия которых превышает  $E_c$ , должно быть примерно равно  $\frac{3}{4} \frac{E_m}{E_c}$  (ср. выражение (17) их работы [6]). Однако, предполагая, что  $E_c = \beta / \ln 2$ , так что  $\varepsilon_c = \frac{qE_c}{\beta} = 3,45$ , из уравнения (8. 10) получаем значение  $N(E_c) = 0,28 \frac{E_m}{E_c}$ , которое в 2,7 раза меньше, чем оценка Эйлера и Гейзенберга.

Хотя наши результаты только в немногих случаях могут быть непосредственно сопоставлены с результатами собственно теории ливней, имеется много указаний на то, что в современной формулировке этой теории число ливневых электронов ниже критической энергии  $E_c$  обычно существенно недооценивается, в то время как число электронов выше  $E_c$  переоценивается. Мы надеемся вернуться к этому вопросу в другой работе.

Мы очень признательны проф. Д. Скобельцыну и С. Вернову за многочисленные полезные обсуждения и ценные предложения.

Москва, Физический институт Академии наук  
и Физический институт государственного  
университета

Поступила  
21 апреля 1939 г.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *H. J. Bhabha*. Proc. Roy. Soc. London, 1938, **A164**, 257.
  2. *Г. Франк-Каменецкий*. Докл. АН СССР, 1938, **21**, 167.
  3. *J. F. Carlson, J. K. Oppenheimer*. Phys. Rev., 1937, **51**, 220.
  4. *R. Serber*. Phys. Rev., 1938, **54**, 317.
  5. *N. Arley*. Proc. Roy. Soc. London, 1938, **A168**, 519.
  6. *H. Euler, W. Heisenberg*. Ergebn. d. exakt. Naturwiss., 1938, **17**, 2.
  7. *W. Nielsen, K. Morgan*. Phys. Rev., 1938, **54**, 245.
  8. *P. Auger*. C. r. Acad. sci. Paris, 1938, **206**, 346.
- 

*Примечание.* В последнее время получены более точные (нежели использованные в статье) данные для сечений взаимодействия мезонов, электронов и фотонов с веществом и о виде спектра мюонов (см. *С. Хаякава*. Физика космических лучей. М., «Мир», 1973). Их использование приведет лишь к незначительному изменению некоторых численных факторов.

## ДВИЖЕНИЕ МЕЗОНОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ <sup>1</sup>

§ 1. В настоящей статье мы покажем, что движение заряженных частиц со спином 1 в кулоновом поле (как и взаимодействие их со светом большой частоты) существенно зависит от радиуса этих частиц, что резко отличает их от частиц со спином 0 или  $1/2$ . Объясняется это тем, что частицы со спином 1 (в дальнейшем мы будем называть их *мезонами*), в отличие от электронов, обладают истинным магнитным моментом (в смысле этого термина, уточненном в § 4).

Известно, что теория мезонов неоднократно приводила к физически неприемлемым результатам. Простейшим примером является рассеяние мезонов точечным зарядом: в борновском приближении рассеяние это не падает с увеличением энергии мезонов, а стремится к конечному пределу [1]. Все же можно было надеяться, что точное решение задачи приведет к разумному результату. Однако это не так.

§ 2. Уравнения Прока для мезонов в электромагнитном поле, описываемом потенциалами  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ , можно привести в следующей форме:

$$\begin{aligned} h \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + ie\varphi \mathbf{F} &= \mu c^2 \mathbf{V} - \frac{1}{\mu} [\mathbf{P} [\mathbf{P}\mathbf{B}]], \\ h \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + ie\varphi \mathbf{B} &= -\mu c^2 \mathbf{F} - \frac{1}{\mu} \mathbf{P} (\mathbf{P}\mathbf{F}), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{P} = -i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}$ , а  $\mu$  — масса мезона.

Векторы  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{B}$  мезонного поля соответствуют электрической напряженности  $\mathbf{E}$  и векторному потенциалу  $\mathbf{A}$  электромагнитного поля. Величины, соответствующие магнитной напряженности  $\mathbf{H}$  и скалярному потенциалу  $\varphi$ , исключены из уравнений мезонного поля (1): они выражаются алгебраически через  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{B}$  и их пространственные производные. Поэтому уравнения (1), хотя они и содержат пространственные производные второго порядка, соответствуют дираковским уравнениям первого порядка.

Положим

$$\Psi_{1k} = F_k, \quad \Psi_{2k} = iB_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2)$$

и введем два ряда матриц: три паулиевские матрицы  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ , действующие на первый индекс мезонной волновой функции  $\Psi_{ak}$ , и три матрицы  $s_i$ , действующие на второй ее индекс:

<sup>1</sup> Докл. АН СССР, 1940, 29, 551; С. г. Acad. Sci. URSS, 1940, 29, 551; Phys. Rev., 1940, 58, 952.

$$s_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix}, \quad s_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad s_3 = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Матрицы  $s_k$  удовлетворяют трем соотношениям типа  $s_1 s_2 - s_2 s_1 = i s_3$ , и их собственные значения равны  $\pm 1$  и 0. Они соответствуют спину мезона. В частности, оператор момента количества движения мезона равен

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rP}] + \hbar \mathbf{s}. \quad (4)$$

С помощью обозначений (2) и (3) уравнения (1) принимают вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = K \Psi, \quad (5)$$

$$K = e\varphi + \tau_1 \left\{ \mu c^2 + \frac{P^2}{2\mu} - \frac{eh}{2\mu c} (\mathbf{sH}) \right\} - i\tau_2 \left\{ \frac{P^2}{2\mu} - \frac{eh}{2\mu c} (\mathbf{sH}) - \frac{(\mathbf{sP})^2}{\mu} \right\}.$$

Оператор  $K$  не эрмитов, но  $\tau_1 K$  эрмитов, и энергия мезонного поля, определенная с помощью релятивистского тензора энергии и импульса, равна

$$E = \int \Psi^* \tau_1 K \Psi dV. \quad (6)$$

При этом следует иметь в виду, что плотность зарядов мезонов равна

$$\rho = ie(\mathbf{F}^* \mathbf{B} - \mathbf{F} \mathbf{B}^*) = e\Psi^* \tau_1 \Psi. \quad (7)$$

Стационарные решения уравнений (1) или (5) имеют вид

$$\Psi_{ak} = \psi_{ak}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \text{т. е. } \mathbf{F} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \mathbf{b}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (8)$$

причем

$$\hbar\omega\psi = K\psi. \quad (9)$$

Можно показать, что энергия мезона в состоянии (8) равна

$$E = \hbar\omega \frac{1}{e} \int \rho dV. \quad (10)$$

Так как  $E$  действительно, то  $\omega$  может быть комплексным только в том случае, если равны нулю как энергия  $E$ , так и полный заряд  $\int \rho dV$  мезонного поля. Волновые функции комплексной частоты описывают рождение и аннигиляцию мезонных пар. Если же полный заряд отличен от нуля, то волновую функцию можно нормировать:

$$\int \rho dV = \pm e; \quad (11)$$

частота ее действительна и

$$\hbar\omega = \pm E. \quad (12)$$

§ 3. Рассмотрим стационарные состояния мезона в центральном поле ( $\varphi = \varphi(r)$ ,  $A = 0$ ). Решение уравнений

$$M_z \psi = m\hbar\psi, \quad M^2 \psi = j(j+1)\hbar^2 \psi, \quad (13)$$

определяющих значение механического момента мезона  $j$  и его проекции  $m$  на ось  $Z$ , имеет вид

$$\begin{aligned} f_x + if_y &= Y_{j+1}^{m+1} f_+ + Y_j^{m+1} f_0 + Y_{j-1}^{m+1} f_-, \\ f_x - if_y &= -(j-m+1)(j-m+2) Y_{j+1}^{m-1} f_+ + \\ &+ (j-m+1)(j+m) Y_j^{m-1} f_0 - (j+m-1)(j+m) Y_{j-1}^{m-1} f_-, \\ f_z &= (j-m+1) Y_{j+1}^m f_+ - m Y_j^m f_0 - (j+m) Y_{j-1}^m f_-; \end{aligned} \quad (14)$$

аналогично выражаются и компоненты вектора  $\mathbf{b}$ . Здесь  $Y_j^m = e^{im\varphi} P_j^m(\theta)$ , а  $f_{\pm}$ ,  $f_0$ ,  $b_{\pm}$ ,  $b_0$  суть шесть функций радиус-вектора  $r$ .

Если внести (14) в уравнения (1) или (5), то они распадаются на две независимые группы. Первая имеет вид

$$\begin{aligned} b_0'' + \frac{2}{r} b_0' - \frac{j(j+1)}{r^2} b_0 + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \{(\hbar\omega - e\varphi)^2 - \mu^2 c^4\} b_0 &= 0, \\ \mu c^2 f_0 &= i(e\varphi - \hbar\omega) b_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнение для  $b_0(r)$  совпадает с обычным уравнением для бесспиновой частицы. Вторая независимая система уравнений с помощью обозначений

$$\begin{aligned} j f_- - (j+1) f_+ &= \frac{\sqrt{j(j+1)}}{r} \Phi_1, & f_- + f_+ &= -\frac{\Phi_2}{r \sqrt{j(j+1)}}, \\ j b_- - (j+1) b_+ &= \frac{i\beta_1}{r}, & b_- + b_+ &= -\frac{i\beta_2}{r}, \\ \lambda &= \frac{(e\varphi - \hbar\omega)}{\sqrt{j(j+1)}} \left( \frac{\mu}{\hbar^2} \right), & K_0 &= \frac{\mu c}{\hbar} \end{aligned} \quad (16)$$

может быть записана так:

$$\begin{aligned} \Phi_1'' + \frac{\Phi_2'}{r} - \frac{2(\Phi_1 + \Phi_2)}{r^2} - K_0^2 \Phi_1 + \lambda \beta_1 &= 0, \\ \frac{\beta_2''}{r} + \frac{\beta_1'}{r} - \frac{\beta_1}{r^2} - K_0^2 \beta_2 + \lambda \Phi_2 &= 0, \\ \frac{\Phi_1'}{r} + \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{r^2} + \frac{K_0^2}{\sqrt{j(j+1)}} \Phi_2 - \lambda \beta_2 &= 0, \\ \frac{\beta_2'}{r} + \frac{\beta_1}{r^2} + \frac{K_0^2}{\sqrt{j(j+1)}} \beta_1 - \lambda \Phi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим для определенности несвязанные состояния мезона ( $|\hbar\omega| > \mu c^2$ ). Если потенциальная энергия мезона  $e\varphi(r)$  не имеет полюсов, то при фиксированных значениях  $\omega$ ,  $j$  и  $m$ , удовлетворяющих условиям <sup>2</sup>  $|\hbar\omega| > \mu c^2$ ,  $|m| \leq j$ ,  $j \geq 1$ , уравнения (1) или (5) имеют три независимых решения. Одно из этих решений удовлетворяет уравнениям (15) и два — уравнениям (17). Они соответствуют трем возможным ориентациям спина мезона  $s$  относительно его орбитального момента <sup>3</sup>  $l$ .

<sup>2</sup> При  $j=0$  есть лишь одно решение для каждого  $\omega$ .

<sup>3</sup> Однако лишь  $l+s$ , а не  $l+s$  порознь являются интегралами движения,

Однако в поле точечного заряда  $\varphi=e'/r$  по-прежнему (при  $j \geq 1$ ) есть одно конечное решение уравнений (15), решения же уравнений (17) при  $r \rightarrow 0$  имеют вид (ср. уравнение (24))

$$f_{\pm} \sim b_{\pm} \sim r^{-7/4} \exp \left\{ 2\eta \sqrt{\frac{ee'}{\mu c^2 r}} [j(j+1)]^{1/4} \right\}, \quad (18)$$

где  $\eta = \sqrt[4]{1}$ , т. е.  $\eta = \pm 1$  или  $\eta = \pm i$ . Не два, а только одно из этих решений ( $\eta = -1$ ) остается конечным при  $r=0$ . Решение, соответствующее  $\eta = +1$ , растет экспоненциально при  $r \rightarrow 0$ , тогда как решения  $\eta = \pm i$  соответствуют постоянному потоку мезонов, направленному к точечному заряду или от него. Выражение энергии (6) в случаях  $\eta = +1$  и  $\eta = \pm i$  оказывается бесконечным.

Таким образом, допустимые решения уравнений Прока в поле точечного заряда не образуют полной системы функций и, например, задача о рассеянии мезонов кулоновым полем не имеет решений.

Причина этой несостоятельности теории лежит, по всей вероятности, в том, что ею не учитываются конечные размеры мезона: обычные уравнения движения должны перестать быть применимыми при  $r \sim r_0 = e^2/\mu c^2$ .

Во всяком случае, сделанные различными авторами оценки кулонового рассеяния мезонов, их тормозного излучения и т. д. требуют пересмотра и не могут быть правильными при  $E \geq 137 \mu c^2$ .

§ 4. Физическую причину своеобразного поведения мезонов легче всего выяснить на простейшем примере движения мезонов в поле, зависящем только от одной координаты  $x$  [ $\varphi = \varphi(x)$ ]. Направим ось  $y$  перпендикулярно плоскости движения мезона. Тогда

$$\Psi = u(x) e^{i(kz - \omega t)} \quad (19)$$

и уравнения (1) могут быть сведены к трем независимым уравнениям типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left\{ \frac{(\hbar\omega - e\varphi)^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} - k^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2} V(x) \right\} u = 0, \quad (20)$$

где

$$V(x) = \xi \frac{eh^2 k E}{2\mu^2 c^2}. \quad (21)$$

Здесь  $E = -\partial\varphi/\partial x$  и  $\xi = \pm 1, 0$  в зависимости от значения проекции спина мезона на ось  $y$ .

Уравнение (20) отличается от релятивистского шредингеровского уравнения только членом  $2\mu V/\hbar^2$ , причем  $V(x)$  точно равно классической энергии магнитного диполя момента  $m_0 = eh/2\mu c$ , движущегося в поле  $E$  со скоростью  $v$ , определяемой из соотношения  $P = mv \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Действительно, так как  $E$  направлено

---

так что в решениях типа (17) параллельная и антипараллельная ориентации  $s$  относительно  $l$  смешаны между собой.



по  $x$  и  $v_y = 0$ , то энергия эта равна

$$\pm m_0 \frac{v_x E}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \pm \frac{eh}{2\mu c} \frac{kh}{\mu c} E.$$

Дираковское уравнение для движения частицы со спином  $1/2$  в поле  $\varphi = \varphi(x)$  тоже может быть приведено в форму (20); однако в этом случае  $V(x)$  имеет следующее значение:

$$V(x) = \pm \frac{eh^2 E}{2\mu(\mu c^2 + h\omega - e\varphi)} \left( k - \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (21')$$

Это выражение сводится к классической энергии магнитного диполя только при условиях  $|h\omega - e\varphi| \ll \mu c^2$  и  $\left| \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll k$ . Таким образом, электрон может быть уподоблен заряженному магнитному диполю только в нерелятивистском паулиевском приближении, тогда как мезон обладает «истинным» магнитным моментом при как угодно больших энергиях. Этим объясняется также и подчеркивавшееся многими авторами аномально сильное взаимодействие мезонов со светом большой частоты: энергия взаимодействия диполя со светом пропорциональна  $E$  и  $\hbar$ , а не  $A$ , т. е. пропорциональна более высокой степени частоты света.

В соответствии с изложенным можно ожидать, что в уравнение движения мезона в кулоновом поле  $E = e' \mathbf{r} / r^3$  будет входить член вида

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} \dot{V}(r) \sim \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{m_0 s [pE]}{\mu c} = \frac{2m_0 e' s [pr]}{\hbar^2 c r^3} = - \frac{ee'}{\mu c^2} \frac{(sl)}{r^3}, \quad (22)$$

где  $hl = [pr]$ . И действительно, из (17) можно получить два довольно сложных уравнения для функций

$$u_1 = \Phi_1 + \beta_2 \quad \text{и} \quad u_2 = \Phi_1 - \beta_2; \quad (23)$$

главные члены этих уравнений при  $r \rightarrow 0$  имеют вид

$$u'' + \frac{2}{r} u' - \frac{j(j+1)}{r^2} u \pm \frac{ee'}{\mu c^2} \frac{\sqrt{j(j+1)}}{r^3} u = 0. \quad (24)$$

Последнее уравнение совпадает по форме с уравнением Шредингера (при  $r \rightarrow 0$ ) в силовом поле  $V(r)$ , подобном (22). Уравнения (24) обладают существенно особой точкой при  $r=0$ ; их решения отличаются от (18) множителем  $r^{3/2}$  (ибо, например,  $f_{\pm} \sim u' \sim r^{-3/2} u$ ). Дипольный член в уравнении (24) начинает превалировать при  $r \sim r_0 = e^2 / \mu c^2$ .

Подробная статья появится в «Journal of Physics».

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
19 октября 1940 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. H. Massey, H. Corben. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1939, 35, 463; J. R. Oppenheimer, H. Snyder, R. Serber. Phys. Rev., 1940, 57, 75.

## РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ <sup>1</sup>

Выведены релятивистские уравнения, определяющие стационарные состояния взаимодействующих частиц. Рассмотрены только члены второго порядка по константе взаимодействия, но не сделано никаких ограничений на скорость частиц. Релятивистское исследование не изменяет выводов нерелятивистской теории об отсутствии стабильных связанных состояний ядерных частиц в случае дипольного взаимодействия между ними. Рассматриваются некоторые дальнейшие приложения общих уравнений.

### § 1. Введение и заключение

Релятивистское рассмотрение движения частиц в данном силовом поле, так же как и процессов столкновения и испускания, в настоящее время значительно более удовлетворительно, чем релятивистское исследование стационарных состояний взаимодействующих частиц. Насколько мне известно, только взаимодействие двух электронов в атоме, передаваемое поперечными электромагнитными волнами и рассматриваемое как малое возмущение кулоновского поля, было рассчитано Брейтом вплоть до членов порядка  $v^2/c^2$ .

Конечно, взаимодействие ядерных частиц часто записывается в релятивистской форме, но при вычислениях энергии взаимодействия всегда пренебрегают отдачей, испытываемой нуклонами при испускании и поглощении мезонов. Это оправдано только до тех пор, пока расстояние  $r$  между взаимодействующими частицами много больше, чем  $\hbar/cM$  ( $M$  — масса протона), так как на данном расстоянии  $r$  основное взаимодействие осуществляется с помощью мезонов, имеющих импульс порядка  $\hbar/r$ .

В большинстве современных теорий потенциал ядерных сил  $V(r)$  содержит члены, пропорциональные  $1/r^3$ , и поэтому должен быть обрезан на некотором расстоянии  $r_0$ . Энергия стационарных состояний ядер критически зависит от величины  $r_0$ . Например, в нейтральной теории ядерных сил, предложенной Бете [1], предполагается, что  $r_0$  только в 3—4 раза больше, чем  $\hbar/Mc$ ; пренебрежение отдачей на таких расстояниях не оправдано. Таким образом, необходимо исследовать, можно ли обеспечить

<sup>1</sup> J. Phys., 1945, 9, N 6, 449. Перевод Е. И. Волкова. В формулах (3.13), (5.2), (5.4), (6.9) исправлены опечатки, отмеченные в работе 44 настоящего собрания трудов (см. примечание на стр. 127). — *Прим. ред.*

существование стационарных состояний ядер с помощью изменения взаимодействия на малых расстояниях из-за отдачи и без какого-либо обращения к конкретной обрезавшей процедуре. Мы покажем, что это не так <sup>2</sup> (§ 6) и что отдача существенно изменяет только взаимодействие частиц с целым спином (§ 7). Электромагнитное взаимодействие мезона со спином 1 с протоном будет рассмотрено в § 7.

Однако существуют другие проблемы, где необходимо релятивистское исследование взаимодействия. Например, «зарядовое взаимодействие» (в отличие от «дипольного взаимодействия» <sup>3</sup>) псевдоскалярных мезонов с нуклоном существенно релятивистское и исчезает в первом нерелятивистском приближении. Во втором приближении это зарядовое взаимодействие эквивалентно [2] нерелятивистскому дипольному взаимодействию. Однако в этом приближении потенциальная энергия нуклонов  $V(r)$  имеет сингулярность типа  $1/r^3$  при  $r \rightarrow 0$ , тогда как при релятивистском исследовании зарядового взаимодействия псевдоскалярных мезонов с нуклонами таких усложнений не возникает.

Методы, развитые в настоящей заметке, будут применены в следующей статье к исследованию нового варианта теории ядерных сил. Так как протон-нейтронные и протон-протоновые взаимодействия приблизительно равны, то в этой теории предполагается, что ядерные силы в основном обусловлены обменом нейтральными скалярными мезонами [ $V(r) \sim (1/r)e^{-\alpha r}$ ]. С другой стороны, предполагается, что заряженные мезоны псевдоскалярны, причем они взаимодействуют с нуклонами по зарядовому типу, и величина взаимодействия исчезающе мала в нерелятивистском приближении. Таким образом, эти мезоны только слегка изменяют ядерные силы, обусловленные нейтральными мезонами. Однако взаимодействие заряженных мезонов с релятивистскими протонами космических лучей даже сильнее взаимодействия нейтральных мезонов с ними.

Спиновая зависимость ядерных сил в этой теории почти полностью определяется заряженными мезонами. Вычисляя постоянную  $f$ , характеризующую их взаимодействие с нуклонами, из данных по аномальному рассеянию мезонов космических лучей, получают разумную оценку для разности энергий  $^1S$ - и ( $^3S + ^3D$ )-состояний в дейтроне.

Квадрупольный момент дейтрона имеет правильный знак. В согласии с недавними экспериментами быстрые нейтроны ( $\sim 15 Mэв$ ) рассеиваются на протонах преимущественно в прямом направлении. Эта теория не нуждается в какой-либо про-

<sup>2</sup> Если судить по аннотации, появившейся в «Phys. Rev.», 1945, 67, 60, Л. Лопес пришел к аналогичным результатам. — *Примечание при корректуре.*

<sup>3</sup> Мы говорим о дипольном взаимодействии, если оператор взаимодействия содержит производные волновой функции мезона, и о зарядовом взаимодействии, если он содержит саму волновую функцию.

педуре обрезания, так как взаимодействие вблизи нуля имеет только простой полюс  $1/r$ .

Но вернемся к содержанию настоящей статьи. В ней мы выведем релятивистское уравнение, определяющее стационарные состояния взаимодействующих частиц, принимая во внимание только члены порядка квадрата константы взаимодействия ( $e^2$  или  $g^2$ , или  $f^2$ ), но не накладывая никаких ограничений на скорость частиц. Релятивистское взаимодействие частиц зависит не только от расстояния между ними, но и от их импульсов. Поэтому оператор взаимодействия не является диагональным ни в координатном, ни в импульсном представлениях и уравнение движения не дифференциальное, а интегральное. Это уравнение имеет в импульсном пространстве значительно более простую форму, чем в координатном.

§ 3—7 содержат некоторые приложения общего уравнения, особенно к взаимодействиям, переносимым скалярными и псевдоскалярными мезонами.

## § 2. Общее уравнение движения

Рассмотрим один или несколько сортов «частиц» (например, электронов, протонов, нейтронов) и электромагнитное или мезонное «поле» их взаимодействия. Предполагается, что волновое поле «частиц» и «взаимодействующее поле» квантованы и волновая функция системы представлена как функция многих взаимодействующих и полевых (фотонов или мезонов) частиц в различных состояниях, соответствующих плоским волнам свободных частиц. Чтобы сделать спектр дискретным, мы налагаем на волновые функции обычные периодические условия; длину ребра куба периодичности обозначим через  $L$ . Гамильтониан системы  $H$  равен сумме гамильтониана  $H_0$  свободных частиц всех сортов и оператора взаимодействия  $H'$ :

$$H = H_0 + H'. \quad (2.1)$$

Пусть  $\psi_\lambda, \varphi_\mu, \chi_\nu, \dots$  — собственные функции  $H_0$ ,

$$H_0 \psi_\lambda = E_\lambda \psi_\lambda, \quad H_0 \varphi_\mu = E_\mu \varphi_\mu, \quad H_0 \chi_\nu = E_\nu \chi_\nu, \dots, \quad (2.2)$$

$\psi_\lambda$  соответствует состояниям, где нет свободных частиц,  $\varphi_\mu$  — состояниям, в которых присутствует одна и только одна частица поля с произвольным импульсом и спином, и т. д. Квантованная волновая функция  $\Psi$  системы может быть символически записана в виде

$$\Psi = \sum_\lambda a_\lambda \psi_\lambda + \sum_\mu b_\mu \varphi_\mu + \sum_\nu c_\nu \chi_\nu + \dots, \quad (2.3)$$

где  $a_\lambda, b_\mu, \dots$  — квантованные амплитуды вероятностей состояний  $\psi_\lambda, \varphi_\mu, \dots$ .

Мы предполагаем, что оператор взаимодействия  $H'$  есть сумма членов, соответствующих рождению или уничтожению одной

частицы поля <sup>4</sup>. В этом случае уравнение, определяющее стационарные состояния системы

$$W\Psi = (H_0 + H')\Psi, \quad (2.4)$$

где  $W$  — энергия состояния, эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} (W - E_\lambda) a_\lambda &= \sum_\mu (\lambda | H' | \mu) b_\mu, \\ (W - E_\mu) b_\mu &= \sum_\lambda (\mu | H' | \lambda) a_\lambda + \sum_{\nu \neq \mu} (\mu | H' | \nu) c_\nu, \\ (W - E_\nu) c_\nu &= \sum_\mu (\nu | H' | \mu) b_\mu + \sum_\sigma (\nu | H' | \sigma) d_\sigma, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Пусть в нулевом приближении взаимодействующие частицы свободны и нет полевых частиц ( $a_\lambda \neq 0$ , тогда как  $b_\mu = c_\nu = \dots = 0$ ). Тогда в первом приближении, оставляя в (2.5) только члены первого порядка по  $H'$ , получаем

$$\begin{aligned} (W - E_\lambda) a_\lambda &= \sum_\mu (\lambda | H' | \mu) b_\mu, \\ (W - E_\mu) b_\mu &= \sum_\lambda (\mu | H' | \lambda) a_\lambda \end{aligned} \quad (2.6)$$

и, исключая  $b_\mu$ ,

$$(W - E_\lambda) a_\lambda = \sum_{\mu, \lambda'} \frac{(\lambda | H' | \mu) (\mu | H' | \lambda')}{W - E_\mu} a_{\lambda'}. \quad (2.7)$$

Это есть общее уравнение, описывающее первый порядок взаимодействия частиц, вызванного эмиссией и последующим поглощением одной-единственной частицы поля. Диагональные члены правой части (2.7) соответствуют собственной энергии частиц <sup>5</sup> и при современном состоянии квантовой теории нельзя сделать ничего лучше, чем опустить их совсем.

Особенность уравнения (2.7) в том, что правая часть оператора взаимодействия

$$(\lambda | V | \lambda') = \sum_\mu \frac{(\lambda | H' | \mu) (\mu | H' | \lambda')}{W - E_\mu} \quad (2.8)$$

зависит от энергии стационарного состояния  $W$ , на волновую функцию  $a_\lambda$  которого этот оператор действует.

<sup>4</sup> Легко расширить теорию на случаи, когда в одном акте рождается или аннигилирует пара полевых частиц.

<sup>5</sup> Действительно, только если испущенный фотон или мезон поглотится опять той же частицей, которая его испустила (собственно-энергетические члены!), то конечное состояние системы будет идентично начальному ( $\lambda = \lambda'$ ). В противном случае, момент будет передан с испускающей частицы на поглощающую ( $\lambda' \neq \lambda$ ).

Если пренебрегать полем, то не только в первом, но и в любом приближении получается уравнение типа (2. 7), определяющее энергию  $W$  и волновую функцию  $a_\lambda$  системы взаимодействующих частиц, так что эквивалентного оператора взаимодействия  $V$ , не зависящего от величины  $W$ , не существует.

В последующем мы ограничимся *связанными* состояниями взаимодействующих частиц, т. е. состояниями, энергия которых  $W$  меньше, чем  $E_0$  — сумма энергий покоя взаимодействующих частиц. Это ограничение обеспечивает конечность знаменателя  $W - E_\mu$  в (2. 7) и (2. 8) при всевозможных  $E_\mu$ . Однако, поскольку мы рассматриваем только первое приближение по взаимодействию  $H'$ , то можем заменить  $W$  в правой (но не в левой) части (2. 7) на сумму энергий покоя взаимодействующих частиц:

$$W = E_0. \quad (2. 9)$$

Уравнение (2. 7), строго говоря, не описывает взаимодействие фиксированного числа частиц, так как всегда возможно образование пар и аннигиляция частиц. Однако в первом приближении можно пренебречь этими процессами вообще. Действительно, обозначим через  $a_\lambda^n$  амплитуды вероятности состояний, в которых находятся  $n$  взаимодействующих частиц (и нет полевых частиц). Уравнение (2. 7) устанавливает связь между  $a_\lambda^n$ ,  $a_\lambda^{n\pm 2}$ ,  $a_\lambda^{n\pm 4}$  и т. д. Пусть в первом приближении имеются две взаимодействующие частицы ( $a_\lambda^n = 0$ , если  $n \neq 2$ ). В следующем приближении необходимо также принять во внимание  $a_\lambda^0$  и  $a_\lambda^4$ ; исключая эти амплитуды из (2. 7), получаем уравнение для  $a_\lambda$  с дополнительным членом четвертой степени в матричных элементах  $H'$ . Но поскольку мы пренебрегали членами этого порядка при выводе (2. 7) из (2. 5), то, по-видимому, будет непоследовательным принимать такие члены во внимание при дальнейших вычислениях.

Эти рассуждения применимы к «конечным» состояниям системы  $a_\lambda$ , но не к ее промежуточным состояниям  $b_\mu$ . Однако рассмотрим, например, электромагнитное взаимодействие двух электронов. Имеются промежуточные состояния системы с двумя электронами в их «начальном» состоянии, одна вновь созданная электрон-позитронная пара и один фотон. Происходящий затем процесс аннигиляции может влиять только на один из первоначально присутствующих электронов, а на другой уже не может.

Следовательно, соответствующий член в (2. 7) описывает не взаимодействие электронов, а их собственную энергию, и он должен быть опущен. Таким образом, образование пар и аннигиляцию в промежуточных состояниях надо принимать во внимание, только если рассматривается взаимодействие электрона с позитроном или протона с антипротоном<sup>6</sup> и т. д. Не интересуясь та-

<sup>6</sup> Если допустить, что обычное уравнение Дирака справедливо не только для протонов, но также и для нейтронов. Ситуация изменится, если для нейтронов принимается майорановский вариант теории Дирака и рассматривают взаимодействие нейтрона и протона, осуществляемое заряженными мезонами.

кими случаями, мы можем в дальнейшем полностью пренебречь как образованием пар, так и аннигиляцией и можем считать число взаимодействующих частиц фиксированной величиной. Поэтому до тех пор, пока мы имеем дело с частицами спина  $1/2$  (не целого спина), нет нужды квантовать их волновые уравнения, и мы будем квантовать только электромагнитное или мезонное поле их взаимодействия.

Оператор (2. 8) является эрмитовым:

$$(\lambda | V | \lambda') = (\lambda' | V | \lambda)^*; \quad (2. 10)$$

поэтому уравнение (2. 7) (так же как интегральные уравнения, которые будут в последующем выведены из (2. 7)) может быть получено из вариационного принципа и его собственные значения  $W$  действительны (см. также § 4).

### § 3. Взаимодействие, переносимое нейтральными скалярными мезонами

Чтобы проиллюстрировать применения нашего уравнения (2. 7), мы рассмотрим более подробно простейший случай взаимодействия двух частиц спина  $1/2$  (для краткости мы будем называть их нуклонами), переносимого скалярными нейтральными мезонами. В неквантованной теории взаимодействие между нуклонами и нейтральными мезонами может быть записано в форме

$$H' = \sqrt{4\pi}gch \int dV \varphi \psi^* \rho_3 \psi, \quad (3. 1)$$

где  $\varphi$  — (действительная) волновая функция мезона,  $\psi$  — волновая функция нуклона,  $\rho_3$  — матрица Дирака и  $g$  — «мезонный заряд».

Состояние свободного нуклона (с положительной энергией) характеризуется его волновым числом  $\mathbf{k}$  и спином  $s$ . Амплитуда вероятности  $a_{\mathbf{k}}$  того, что один нуклон находится в состоянии  $\mathbf{k}, s$ , в то время как другой нуклон — в состоянии  $\mathbf{k}', s'$ , будет обозначаться  $a(\mathbf{k}, s; \mathbf{k}', s')$ . Матричный элемент  $H'$ , соответствующий переходу нуклона из состояния  $\mathbf{k}, s$  в состояние  $\mathbf{k}-1, s'$ , при испускании мезона с импульсом  $\hbar \mathbf{l}$  равен

$$(\mathbf{k}-1, s'; 1 | H' | \mathbf{k}, s) = \frac{\sqrt{4\pi}gch}{\sqrt{2L^3 E_l}} u^*(\mathbf{k}-1, s') \rho_3 u(\mathbf{k}, s). \quad (3. 2)$$

Здесь  $u(\mathbf{k}, s)$  — четырехкомпонентная амплитуда дираковской волновой функции нуклона:

$$\psi_{\sigma}(\mathbf{r}) = L^{-3/2} u_{\sigma}(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \sigma = 1, 2, 3, 4, \quad (3. 3)$$

соответствующая положительной энергии

$$E_{\mathbf{k}} = c\hbar \sqrt{k_0^2 + \mathbf{k}^2}, \quad (3. 4)$$

<sup>7</sup> Пока мы можем пренебречь изотопическим спином нуклона.

$E'(l)$  — энергия мезона:

$$E'(l) = c\hbar\sqrt{x^2 + l^2} \quad (3.5)$$

и

$$k_0 = cM/\hbar, \quad x = c\mu/\hbar, \quad (3.6)$$

$M$  и  $\mu$  — массы нуклона и мезона. Амплитуды  $u(\mathbf{k}, s)$  предполагаются нормированными

$$\sum_{\sigma} u_{\sigma}^*(\mathbf{k}, s) u_{\sigma}(\mathbf{k}, s') = \delta_{ss'}. \quad (3.7)$$

Подставляя (3.2) в (2.7), получаем

$$\begin{aligned} (W - E_k - E_{k'}) a(\mathbf{k}, s; \mathbf{k}', s') &= \frac{2\pi g^2 c^2 \hbar^2}{L^3} \times \\ &\times \sum_{l, s'', s'''} \left\{ \frac{[u^*(\mathbf{k}, s) \rho_3 u(\mathbf{k}-1, s'')] [u^*(\mathbf{k}', s') \rho_3 u(\mathbf{k}'+1, s''')] a(\mathbf{k}-1, s''; \mathbf{k}'+1, s''')}{E'_l (W - E_{\mathbf{k}-1} - E_{\mathbf{k}'} - E'_l)} + \right. \\ &\left. + \frac{[u^*(\mathbf{k}, s) \rho_3 u(\mathbf{k}+1, s'')] [u^*(\mathbf{k}', s') \rho_3 u(\mathbf{k}'-1, s''')] a(\mathbf{k}+1, s''; \mathbf{k}'-1, s''')} {E'_l (W - E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}'-1} - E'_l)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Поскольку полный импульс частиц  $\hbar(\mathbf{k}+\mathbf{k}')$  сохраняется, мы можем выбрать систему отсчета, в которой он исчезает:  $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$ , и обозначить  $a(\mathbf{k}, s; -\mathbf{k}, s)$  через  $a(\mathbf{k}; s, s')$ . В этой системе отсчета изменение знака  $l$  во втором члене суммы делает его тождественно равным первому члену. Сумму по всем возможным величинам  $l$  можно обычным путем заменить на интеграл. В дальнейшем удобнее писать  $l$  вместо  $\mathbf{k}-1$ . В конце концов получаем

$$\begin{aligned} (W - 2E_k) a(\mathbf{k}; s, s') &= \frac{g^2 c^2 \hbar^2}{2\pi^2} \times \\ &\times \sum_{s'', s'''} \int \frac{dl [u^*(\mathbf{k}, s) \rho_3 u(l, s'')] [u^*(-\mathbf{k}, s') \rho_3 u(-l, s''')] a(l; s'', s''')}{E'(l) [W - E_k - E_l - E'(-\mathbf{k}-l)]} \end{aligned} \quad (3.9)$$

В дальнейшем мы часто будем выражать энергию в единицах длины

$$\varepsilon_k = \frac{E_k}{c\hbar} = \sqrt{k_0^2 + k^2}, \quad \varepsilon'_k = \frac{E'_k}{c\hbar} = \sqrt{x^2 + k^2}, \quad \omega = \frac{W}{c\hbar}. \quad (3.10)$$

Можно легко показать, что для волновых функций нуклона с положительной энергией

$$\begin{aligned} u^*(\mathbf{k}, s) \rho_3 u(l, s'') &= \sum_{\sigma, \tau} u_{\sigma}^*(\mathbf{k}, s) \rho_{3, \sigma\tau} u_{\tau}(l, s'') = \\ &= \frac{\{(\varepsilon_k + k_0)(\varepsilon_l + k_0) - \mathbf{k}l\} \delta_{ss''} - i\sigma[\mathbf{k}, l]}{2\sqrt{\varepsilon_k(\varepsilon_k + k_0)\varepsilon_l(\varepsilon_l + k_0)}}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где матрицы Паули  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  в правой части действуют не на спиновые индексы  $\sigma, \tau$  дираковских четырехкомпонентных волно-



вых функций, а на переменные  $s, s''$ , определяющие ориентацию спина нуклона в состояниях  $k, s$  и  $l, s''$ . Оператор в правой части (3.9) включает, очевидно, два набора матриц Паули  $\sigma^I$  и  $\sigma^{II}$ , один — относящийся к спиновым состояниям  $s$  и  $s''$  нуклона с импульсом  $k$  и другой — к состояниям  $s'$  и  $s'''$  нуклона с импульсом  $k$ . Вместо этих двух наборов двумерных матриц Паули  $\sigma^I$  и  $\sigma^{II}$  удобно ввести два коммутирующих набора четырехмерных матриц Дирака  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  и  $\rho_x, \rho_y, \rho_z$ , которые, конечно, не следует путать с матрицами Дирака, стоящими в волновом уравнении нуклона (такими, как  $\rho_3$  в (3.1) или в левой части (3.11)). Соответственно следует обозначить  $a(k; s, s')$  через  $a_\lambda(k)$ , тогда матрицы  $\sigma$  и  $\rho$  будут действовать на индекс  $\lambda$ . Между новыми и старыми обозначениями существует следующее соответствие:

$$\begin{aligned} a(k; +, +) &\equiv a_1(k), & a(k; +, -) &\equiv a_2(k), \\ a(k; -, +) &\equiv a_3(k), & a(k; -, -) &\equiv a_4(k). \end{aligned} \quad (3.12)$$

С этими обозначениями получаем

$$(\omega - 2\varepsilon_k) a_\lambda(k) \frac{-g^2}{8\pi^2 c \hbar} \sum_{\mu=1}^4 \int \frac{dS_{\lambda\mu}(k, l) a_\mu(l)}{\varepsilon'(k-l) \{\varepsilon_k + \varepsilon_l + \varepsilon(k-l) - \omega\}}, \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \varepsilon_l (\varepsilon_k + k_0) (\varepsilon_l + k_0) S(k, l) &= \{(\varepsilon_k + k_0) (\varepsilon_l + k_0) - \mathbf{k}l - i\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{k}l]\} \times \\ &\times \{(\varepsilon_k + k_0) (\varepsilon_l + k_0) - \mathbf{k}l - i\rho[\mathbf{k}l]\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Уравнение (3.13) представляет собой релятивистское интегральное уравнение<sup>8</sup>, точно учитывающее члены второго порядка по константе взаимодействия  $g$ . Оно определяет стационарные состояния двух нуклонов, взаимодействующих посредством испускания и поглощения скалярных мезонов. Его можно рассматривать как волновое уравнение в импульсном пространстве частиц.

Рассмотрим теперь нерелятивистское приближение уравнения (3.13). Пусть

$$\omega = 2k_0 + \varepsilon, \quad (3.15)$$

где  $\hbar c \varepsilon = E$  — нерелятивистская энергия частиц.

Чтобы получить нерелятивистское приближение, надо устремить массу  $M$  частиц (и, следовательно, величину  $k_0 = cM/\hbar$ ) к бесконечности, т. е. надо пренебречь в правой части (3.13) величинами  $\mathbf{k}, l$  и  $\varepsilon$  по сравнению с  $k_0$ , положив  $\varepsilon_k = \varepsilon_l = k_0$  и  $\omega = 2k_0$ ,

<sup>8</sup> Своеобразие уравнения (3.13) заключается в том, что собственное значение  $\omega$  появляется как в левой части, так и в знаменателе правой части. Однако проблема определения собственных значений  $\omega$  при фиксированной величине константы взаимодействия  $g$  эквивалентна проблеме нахождения собственных значений  $g^2$  при фиксированной  $\omega$ . С помощью преобразования  $a_\lambda(k) = b_\lambda(k)/\sqrt{2\varepsilon_k - \omega}$  можно свести (3.13) к системе интегральных уравнений обычного типа для  $g^2$ .

в то время как фактор  $\omega - 2\varepsilon_k = 2k_0 + \varepsilon - 2\sqrt{k_0^2 + k^2}$  в левой части (3.13) стремится к величине  $\varepsilon - k^2/k_0$ . Таким способом получаем

$$(\varepsilon - k^2/k_0) a(\mathbf{k}) = -\frac{g^2}{2\pi^2 c \hbar} \int \frac{d\mathbf{l} a(\mathbf{l})}{\varepsilon'^2(\mathbf{k}-\mathbf{l})}, \quad (3.16)$$

где  $\varepsilon'^2(\mathbf{k}-\mathbf{l}) = (\mathbf{k}-\mathbf{l})^2 + x^2$ ; мы опустили индекс  $\lambda$  при  $a(\mathbf{k})$ . Уравнение (3.16) есть не что иное, как обычное уравнение Шредингера в импульсном пространстве; действительно, совершая фурье-преобразование

$$a(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (3.17)$$

легко получить из (3.16)

$$\left(\varepsilon + \frac{1}{k_0} \nabla^2\right) \psi(\mathbf{r}) = \frac{-g^2}{4\pi\hbar^3 c^3} \frac{e^{-x\mathbf{r}}}{r} \psi(\mathbf{r})$$

или

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + \frac{M}{\hbar^2} \left(E + \frac{g^2 e^{-x\mathbf{r}}}{r}\right) \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.18)$$

Однако если применить преобразование (3.17) к релятивистскому уравнению (3.13), то получится чрезвычайно сложное интегральное уравнение в координатном пространстве, ядро которого само по себе является нетривиальным многократным интегралом.

## § 4. Классификация состояний.

### Отделение угловых переменных

Уравнение (3.13) типично для любого типа взаимодействий, так что большинство результатов этого параграфа имеет общий характер.

В этом параграфе мы сведем систему четырех интегральных уравнений (3.13) от трех переменных  $l_x, l_y, l_z$  к значительно более простой системе.

Прежде всего, состояния двух частиц со спином  $1/2$  могут быть разделены на триплетные, соответствующие параллельным спинам частиц, и синглетные, соответствующие антипараллельным спинам. Возможность такого разделения следует из инвариантности оператора взаимодействия по отношению к перестановкам спинов частиц. Легко видеть, что в наших обозначениях (3.12):

$$\begin{aligned} \text{в синглетных состояниях } a_2(\mathbf{k}) &= -a_3(\mathbf{k}), \\ \text{в триплетных состояниях } a_2(\mathbf{k}) &= a_3(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Далее, поскольку оператор взаимодействия инвариантен относительно отражения импульсов ( $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ ,  $l \rightarrow -l$ ), состояния системы могут быть разделены на четные и нечетные.

Наконец, можно легко показать, что интегральный оператор в правой части (3.13) коммутирует с оператором углового момента

(деленного на  $\hbar$ )

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} + \frac{\sigma + \rho}{2}, \quad \text{где } \mathbf{m} = -i[\mathbf{k}\nabla_{\mathbf{k}}]. \quad (4.2)$$

Поэтому состояния системы могут быть, как обычно, классифицированы с помощью двух квантовых чисел  $m$  и  $j$ , определяемых следующим образом:

$$M_z a = m a, \quad M^2 a = j(j+1) a. \quad (4.3)$$

Для любых целых величин  $m$  и  $j$  таких, что  ${}^9 j \geq 1$  и  $|m| \leq j$ , имеются четыре собственные функции  $a_\lambda(\mathbf{k})$  уравнения (3.13), разделяющиеся на три несвязанных набора:

синглет

$$a_1 = a_4 = 0, \quad a_2 = -a_3 = A(k) Y_{j, m}; \quad (4.4)$$

триплет I

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{(j+m-1)(j+m)} B(k) Y_{j-1, m-1} + \\ &\quad + \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)} C(k) Y_{j+1, m-1}, \\ a_2 &= a_3 = -\sqrt{j^2 - m^2} B(k) Y_{j-1, m} + \sqrt{(j+1)^2 - m^2} C(k) Y_{j+1, m}, \\ a_4 &= \sqrt{(j-m+1)(j-m)} B(k) Y_{j-1, m+1} + \\ &\quad + \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)} C(k) Y_{j+1, m+1}; \end{aligned} \quad (4.5)$$

триплет II

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)} D(k) Y_{j, m-1}, \\ a_2 &= a_3 = m D(k) Y_{j, m}, \\ a_4 &= -\sqrt{(j+m+1)(j-m)} D(k) Y_{j, m+1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Триплеты I и II обладают разной четностью.  $Y_{j, m}$  обозначает

$$Y_{j, m} = \overline{P_{j, m}}(\theta) e^{im\varphi}, \quad (4.7)$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  — углы, определяющие направление вектора  $\mathbf{k}$ , и  $\overline{P_{j, m}}$  — присоединенные нормированные функции Лежандра.

Функции синглета и триплета II соответствуют азимутальному квантовому числу  $l$ , равному  $j$ , в то время как функция триплета I является смесью состояний с  $l=j-1$  и  $l=j+1$ .

Подставляя любой из наборов (4.3)–(4.6) в (3.13) и выполняя интегрирование по угловым переменным, получаем или одно интегральное уравнение, или (в случае триплета I) систему двух интегральных уравнений для амплитуд  $A(k)$ ,  $B(k)$  и т. д., включающих только абсолютную величину волнового вектора  $k$ .

<sup>9</sup> Для  $j=0$  имеются только две собственные функции, одна синглетная и одна триплетная, компоненты которых пропорциональны  $Y_{1,0}$  и  $Y_{1,\pm 1}$ .

Мы приведем здесь результат только для члена  ${}^1S$  ( $j=0, l=0$ ).  
Обозначая

$$\alpha(k) = kA(k) \quad (4.8)$$

и

$$q = \varepsilon_k + \varepsilon_l - \omega, \quad \varepsilon'_1 = \sqrt{(k-l)^2 + \kappa^2}, \quad \varepsilon'_2 = \sqrt{(k+l)^2 + \kappa^2}, \quad (4.9)$$

получаем в случае  ${}^1S$

$$\begin{aligned} (\omega - 2\varepsilon_k) \alpha(k) &= -g^2/2\pi\hbar c \int_0^\infty dl \alpha(l) \Phi(k, l), \\ \varepsilon_k \varepsilon_l \Phi(k, l) &= kl - \frac{q(\varepsilon'_2 - \varepsilon'_1)}{2} + \\ &+ \left[ 2\varepsilon_k \varepsilon_l - (\varepsilon_k + \varepsilon_l) \omega + 2k_0^2 + \frac{\omega^2 - \kappa^2}{2} \right] \ln \left( \frac{\varepsilon'_2 + q}{\varepsilon'_1 + q} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Нерелятивистское приближение уравнения (4.10) имеет вид (ср. с выводом (3.16))

$$\left( \varepsilon - \frac{k^2}{k_0} \right) \alpha(k) = -\frac{g^2}{2\pi\hbar c} \int_0^\infty dl \alpha(l) \ln \frac{(k+l)^2 + \kappa^2}{(k-l)^2 + \kappa^2}. \quad (4.11)$$

Переходя к координатному представлению посредством преобразования

$$\alpha(k) = ka(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dr r \psi(r) \sin kr, \quad (4.12)$$

получаем для функции  $\varphi(r) = r\psi(r)$  обычное уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{M}{\hbar^2} \left( E + g^2 \frac{e^{-\kappa r}}{r} \right) \varphi = 0. \quad (4.13)$$

## § 5. Дипольное взаимодействие

В качестве следующего типичного примера мы теперь рассмотрим дипольное взаимодействие нуклонов, переносимое псевдоскалярными нейтральными мезонами.

В некантованной теории это взаимодействие описывалось лагранжианом

$$L'' = \frac{\sqrt{4\pi f c \hbar}}{\kappa} \int dV \psi^* \left( \sigma \nabla \varphi + \rho_1 \frac{\partial \varphi}{c \partial t} \right) \psi \quad (5.1)$$

(ср. Кеммер [3], уравнение (39)). Здесь  $\varphi$  — действительная псевдоскалярная волновая функция мезонов,  $\psi$  — волновая функция нуклонов,  $\sigma$  и  $\rho_1$  — матрицы Дирака и  $f$  — константа взаимодействия. Если  $H''$  — гамильтониан, соответствующий лагранжиану  $L''$ , то матричный элемент  $H''$ , описывающий переход нуклона из состояния  $k, s$  в состояние  $k-1, s'$ , при испускании

псевдоскалярного мезона с импульсом  $\hbar l$  равен

$$(k-1, s'; 1 | H'' | k, s) = \frac{-if\sqrt{4\pi\hbar c}}{\kappa\sqrt{2L^3\varepsilon'_i}} u^*(k-1, s') (\sigma l - \rho_1 \varepsilon'_i) u(k, s). \quad (5.2)$$

Обозначения здесь те же, что и в (3.2), за исключением того, что энергия мезона  $E'_i$  обозначена через  $\hbar c \varepsilon'_i$  (ср. (3.10)).

Вычисления, совершенно аналогичные вычислениям §3, приводят к следующей системе интегральных уравнений (ср. (3.13)):

$$(\omega - 2\varepsilon_k) a_\lambda(k) = - \frac{f^2}{4\pi^2 \kappa^2 \hbar c} \sum_\mu \int \frac{dl S'_{\lambda\mu}(k, l) a_\mu(l)}{\varepsilon'(k-1) [\varepsilon_k + \varepsilon_l + \varepsilon'(k-1) - \omega]}, \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \varepsilon_l S'(kl) &= 4k_0^2 \{(\sigma k^*)(\rho k^*) + (\sigma l^*)(\rho l^*)\} - (\varepsilon_k \varepsilon_l + k_0^2 - kl + \frac{\kappa^2}{2}) \times \\ &\times (\sigma, k^* + l^*)(\rho, k^* + l^*) + 2k_0(\varepsilon_k - \varepsilon_l) \{(\sigma k^*)(\rho k^*) - (\sigma l^*)(\rho l^*)\}, \quad (5.4) \\ k^* &= k \sqrt{\frac{\varepsilon_l + k_0}{\varepsilon_k + k_0}}, \quad l^* = l \sqrt{\frac{\varepsilon_k + k_0}{\varepsilon_l + k_0}}. \end{aligned}$$

Исключение угловых переменных из (5.3) может быть проведено точно так же, как в §4. Для амплитуды  $\alpha(k) = kA(k)$  состояния  ${}^1S$  получаем уравнение

$$(\omega - 2\varepsilon_k) \alpha(k) = - \frac{1}{\pi \kappa^2} \frac{f^2}{\hbar c} \int_0^\infty dl \alpha(l) \Phi'(k, l). \quad (5.5)$$

Функция  $\Phi'(k, l)$  достаточно сложная. Для упрощения мы можем предположить (не ухудшая результатов следующего параграфа), что  $\kappa=0$ . Тогда для  $l > k$

$$\varepsilon_k \varepsilon_l \Phi'(k, l) = k(l-q)(R - 2k_0^2) - q \frac{k^3}{3} + (k^2 l^2 - k_0^2 q^2 - R^2) \ln \frac{q+l+k}{q+l-k}, \quad (5.6)$$

где

$$q = \varepsilon_l + \varepsilon_k - \omega, \quad R = \omega(\varepsilon_l + \varepsilon_k) - \varepsilon_l \varepsilon_k - k_0^2 - \frac{\omega^2}{2}. \quad (5.7)$$

Если  $l < k$ , надо переставить в (5.6)  $k$  с  $l$ . Чтобы получить нерелятивистское приближение, положим в (5.6)

$$k = l = 0, \quad \varepsilon_k = \varepsilon_l = k_0, \quad \omega = 2k_0$$

(ср. вывод (3.16)), тогда найдем, что  $\Phi'(k, l)$  исчезает. Однако этот результат бессмыслен, поскольку, как мы сейчас покажем, интеграл в правой части (5.5) не сходится, когда  $\alpha(l)$  принадлежит к физически допустимому классу функций.

## § 6. Существование устойчивых состояний

Энергетический спектр взаимодействующих частиц должен иметь конечную нижнюю границу, соответствующую устойчивому состоянию системы (состоянию с минимальной энергией);

в противном случае теория, очевидно, не имеет физического смысла. В этом параграфе мы будем исследовать условия, необходимые для существования устойчивых состояний.

Волновая функция  $a_\lambda(\mathbf{k})$  двух взаимодействующих частиц в  $k$ -пространстве может, очевидно, быть нормирована в соответствии с условием

$$\int d\mathbf{k} \sum_\lambda |a_\lambda(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (6.1)$$

Умножая интегральные уравнения для  $a_\lambda(\mathbf{k})$ , т. е. уравнения (3.13) или (5.5) на  $a_\lambda^*(\mathbf{k})$ , интегрируя по  $\mathbf{k}$  и суммируя по  $\lambda$ , получаем

$$W = \hbar c \omega = T + V, \quad (6.2)$$

где

$$T = 2\hbar c \int d\mathbf{k} \varepsilon_k \sum_\lambda |a_\lambda(\mathbf{k})|^2 \quad (6.3)$$

есть собственная энергия взаимодействующих частиц и  $V$  — энергия их взаимодействия.

Если  $V$  положительно (отталкивание), то существование устойчивых состояний самоочевидно. Если  $V$  отрицательно (притяжение), то для существования устойчивых состояний необходимо, чтобы математическое ожидание величины  $V$  было конечным для любого состояния, в котором математическое ожидание положительной величины  $T$  — конечно.

Это означает, что математическое ожидание величины  $V$  должно быть конечным для любой волновой функции  $a_\lambda(\mathbf{k})$ , удовлетворяющей условию

$$a_\lambda(\mathbf{k}) \rightarrow \frac{f_\lambda(\theta, \varphi)}{k^{2+\eta}} \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty \quad (\eta > 0). \quad (6.4)$$

Нам будет достаточно рассмотреть несколько подробнее только  $^1S$ -состояния системы. В этих состояниях  $a_\lambda(\mathbf{k}) = \alpha(k)/k (\delta_{\lambda,2} - \delta_{\lambda,3})$  и условие (6.4) принимает вид

$$\alpha(k) \rightarrow \frac{\text{const}}{k^{1+\eta}} \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty \quad (\eta > 0). \quad (6.5)$$

В случае зарядового взаимодействия, передаваемого скалярными мезонами, в соответствии с (4.10) имеем

$$V = \frac{-g^2}{2\pi} \int_0^\infty dk \int_0^\infty dl \alpha(k) \alpha(l) \Phi(k, l), \quad (6.6)$$

тогда как в случае дипольного взаимодействия, передаваемого псевдоскалярными мезонами, в соответствии с (5.5) получим

$$V = \frac{-f^2}{\pi\gamma^2} \int_0^\infty dk \int_0^\infty dl \alpha(k) \alpha(l) \Phi'(k, l). \quad (6.7)$$

В асимптотическом случае  $k_0 \rightarrow \infty$  и  $l \rightarrow \infty$

$$\Phi(k, l) \rightarrow \text{const}, \quad (6.8)$$

а при  $k \rightarrow \infty$ ,  $l \rightarrow \infty$  и  $k \geq l$

$$\Phi'(k, l) \rightarrow \frac{2}{3} l^2 \left(1 - \frac{l}{2k}\right) > 0; \quad (6.9)$$

если  $k \leq l$ , в (6.9)  $k$  нужно заменить на  $l$ . Отсюда следует, что в первом случае (зарядовое взаимодействие) математическое ожидание величины  $V$  конечно для любой регулярной волновой функции  $\alpha(k)$ , удовлетворяющей условию (6.5), а во втором случае  $V$  отрицательно и расходится, как  $\int dk$ , даже если  $\alpha(k) \rightarrow 1/k^{3/2}$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Таким образом, релятивистское рассмотрение взаимодействия не изменяет результатов нерелятивистской теории, а именно, — наличие устойчивых состояний в случае зарядового взаимодействия и отсутствие таких состояний в случае дипольного взаимодействия.

Легко видеть, что результаты релятивистского рассмотрения того или иного взаимодействия частиц со спином  $1/2$  будут совпадать в этом отношении с результатами нерелятивистской теории.

## § 7. Взаимодействие частиц, обладающих целым спином

До сих пор мы ограничивали свое внимание частицами со спином  $1/2$ . Релятивистское взаимодействие частиц с целым спином, хотя и не представляет большого физического интереса, весьма своеобразно в некоторых отношениях.

Рассмотрим в качестве простейшего примера взаимодействие двух бесспиновых частиц (мы будем называть их для краткости тяжелыми частицами), переносимое скалярными нейтральными мезонами с исчезающе малой массой покоя. В неквантованной теории гамильтониан взаимодействия равен

$$H' = \sqrt{2\pi} g \hbar c \int dV \varphi \psi^* \psi, \quad (7.1)$$

где  $\psi$  — волновая функция тяжелых частиц,  $\varphi$  — мезонов.

В случае частиц со спином  $1/2$  мы смогли избежать квантования их волнового поля и квантовали только мезонное поле, но в данном случае бесспиновых частиц квантование их волнового поля совершенно необходимо (в неквантованной теории нет понятия частиц).

Таким образом, мы должны положить

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{k_0}{2L^3}} \sum_k \frac{A^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} + B(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\sqrt{\varepsilon_k}}, \quad (7.2)$$

где  $A^*(\mathbf{k})$ ,  $A(\mathbf{k})$ ,  $B^*(\mathbf{k})$ ,  $B(\mathbf{k})$  — хорошо известные операторы

рождения и уничтожения «тяжелых» частиц соответственно положительного и отрицательного зарядов;  $\varepsilon_k$  и  $k_0$  определены в (3. 6) и (3. 9).

Повторяя с небольшими изменениями вычисления § 3, получаем следующее интегральное уравнение

$$(\omega - 2\varepsilon_k) a(\mathbf{k}) = - \frac{g^2 k_0^2}{4\pi^2 \hbar c} \int \frac{d\mathbf{l} a(\mathbf{l})}{\varepsilon_k \varepsilon_l |\mathbf{k} - \mathbf{l}| (\varepsilon_k + \varepsilon_l + |\mathbf{k} - \mathbf{l}| - \omega)}. \quad (7. 3)$$

В случае  $^1S$ -состояния это уравнение сводится к условию

$$\varepsilon_k \varepsilon_l \Phi^0(k, l) = \ln \frac{k + l + \varepsilon_k + \varepsilon_l - \omega}{|k - l| + \varepsilon_k + \varepsilon_l - \omega}. \quad (7. 4)$$

В нерелятивистском приближении ( $k_0 \rightarrow \infty$ ) данное уравнение (7. 4) совпадает с соответствующим уравнением (4. 10) для частиц спина  $1/2$  (если, конечно, положить в (4. 10)  $\kappa=0$ ). Но асимптотическое поведение ядра  $\Phi^0(k, l)$  уравнения (7. 4) совершенно иное, чем поведение ядра  $\Phi(k, l)$  в (4. 10): если  $k$  и  $l$  стремятся к бесконечности, то  $\Phi(k, l)$  стремится к постоянной величине, в то время как  $\Phi^0(k, l)$  стремится к нулю как  $\text{const}/kl$ <sup>10</sup>. Таким образом, сходимость математического ожидания величины энергии взаимодействия частиц для бесспиновых частиц значительно лучше, чем для частиц со спином  $1/2$ .

Теперь нерелятивистская потенциальная энергия  $V(r)$  частиц со спином  $1/2$  имеет в нуле допустимую сингулярность  $1/r$  в случае зарядовых взаимодействий и нежелательную сингулярность  $1/r^3$  в случае дипольных взаимодействий. Соответственно  $\Phi(k, l)$  асимптотически стремится к постоянной величине в первом случае и становится бесконечной, как  $kl$ , во втором случае. Однако в случае зарядового взаимодействия бесспиновых частиц функция  $\Phi^0(k, l)$  исчезает в асимптотике, как  $1/kl$ . Очевидно, в случае дипольного взаимодействия бесспиновых частиц, которое в нерелятивистском пределе давало бы  $V(r) \sim 1/r^3$ , функция  $\Phi(k, l)$  будет асимптотически стремиться к постоянной величине и релятивистское ожидание величины энергии взаимодействия будет конечным.

Таким образом, мы пришли к заключению, что релятивистское исследование взаимодействия частиц с целым спином обеспечивает существование устойчивых состояний в тех случаях, в которых, следуя нерелятивистской теории, этих состояний не существует.

Наиболее интересно в таких случаях, по-видимому, электромагнитное взаимодействие заряженных мезонов спина 1. Но его физическое значение зависит от существования устойчивых состояний в случае взаимодействия таких мезонов с фотонами. Известно [4], что уравнения движения мезона единичного спина в кулоновом поле точечного заряда сингулярны и не имеют пол-

<sup>10</sup> Это вытекает из различий в нормировке волновой функции  $\psi$  для частиц с целым и полуцелым спином (ср. (3.3) и (7.2)).



ного набора регулярных решений. Было бы интересно посмотреть, улучшится ли ситуация при релятивистском подходе к электромагнитному взаимодействию мезона с фотоном. Такие вычисления ведутся в нашем институте.

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
27 августа 1945 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *H. A. Bethe*. Phys. Rev., 1940, 57, 390.
2. *E. C. Nelson*. Phys. Rev., 1941, 60, 830.
3. *N. Kemmer*. Proc. Roy. Soc. London, 1938, A166, 127.
4. *И. Тамм*. С. г. Acad. Sci. URSS, 1940, 29, 551 (наст. том, работа 41) — *Прим. ред.*). Phys. Rev., 1940, 58, 952; *H. Corben, J. Schwinger*. Phys. Rev., 1940, 58, 953.

---

*Примечание.* Разработанный в этой работе метод был переоткрыт Данковым (Phys. Rev., 1950, 78, 382) и получил название «метод Тамма—Данкова» (метод ТД). Аналогичный метод был применен Фоком в квантовой электродинамике еще в 1934 г. (Sov. Phys., 1934, 6, 425). Различным применениям и дальнейшему развитию метода ТД посвящено большое число работ (см., в частности, работу 46 настоящего сборника). Общие вопросы формулировки метода и анализ трудностей, возникающих при попытке перенормировать уравнения метода ТД, изложены в обзоре В. П. Силина и В. Я. Файнберга (УФН, 1955, 56, № 4, 569). Релятивистским обобщением метода ТД в квантовой теории поля является уравнение Бете—Солпитера.

По своему содержанию к методу ТД близок квазипотенциальный подход (см., например, А. А. Логунов, О. А. Хрусталева. Проблемы теоретической физики. Сборник памяти И. Е. Тамма. М., «Наука», 1972, 96 стр.).

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР КАСКАДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ <sup>1</sup>

*Совместно с С. З. Беленьким*

Теоретические исследования энергетического спектра электронов ливня, выполненные Росси и Клапманом, а также Баба и Чакрабарти, анализируются и сравниваются с теорией, развитой ранее авторами настоящей работы.

В последнее время Росси и Клапманом [1], а также Баба и Чакрабарти [2] были опубликованы теоретические исследования энергетического спектра ливневых электронов. Настоящая заметка содержит анализ этих исследований и сравнение их результатов с результатами, ранее полученными нами.

1. Несколько лет назад мы получили [3] простые аналитические выражения для числа и энергетического распределения ливневых электронов, проинтегрированные по полной глубине ливня. Эта функция распределения отличается только постоянным множителем от «длины пробега» ливневых электронов, определенной Росси и Клапманом [1].

Мы получили также аналитические выражения для энергетического спектра электронов (находящихся в равновесии с мезонами), генерируемых как в результате процессов выбивания, так и в результате распада мезонов. Несколько позже мы вычислили энергетический спектр ливневых электронов и фотонов как функцию глубины [4]. Эти расчеты показали, что предположения, которые обычно делаются в теории ливней относительно потери энергии при столкновениях (например, в работах Баба [5], Арлея [6] и др.), приводят к серьезным ошибкам в энергетическом спектре ливневых частиц вблизи «критической» энергии и ниже ее. Было найдено, что число электронов с малой энергией гораздо больше, чем это обычно предполагается, что существенно для интерпретации многих экспериментов с космическими лучами.

В настоящей заметке мы покажем, что результаты численных интегрирований, выполненных Росси и Клапманом, полностью подтверждают нашу теорию, и дадим критический разбор теории, развитой Баба и Чакрабарти.

2. Росси и Клапман с помощью численного интегрирования уравнений теории ливней рассчитали полную длину пробега электронов для ливня в воздухе, вызванного первичным электроном произвольной энергии. Из-за трудностей численного интегрирования авторы не смогли получить полный энергетический спектр

<sup>1</sup> Phys. Rev., 1946, 70, 660. Перевод И. В. Андреева.

электронов, т. е. длину пробега электронов, энергия которых превосходит произвольную заданную величину  $E$ , и ограничились одной точкой спектра ( $E=10^7$  эв). С другой стороны, в их вычислениях были учтены все процессы, которые могут играть сколько-нибудь заметную роль при прохождении ливневых частиц через вещество, и для вероятностей этих процессов были использованы точные выражения вместо обычно принятых асимптотических. Полученные таким образом результаты были использованы для того, чтобы вычислить число электронов, энергия которых превосходит  $10^7$  эв, в ливнях, создаваемых в атмосфере соударениями и распадами мезонов.

В наших вычислениях электронного спектра было сделано множество упрощений (были использованы асимптотические выражения для вероятностей радиационных потерь и образования пар, пренебрегалось комптон-эффектом, были сделаны приближения в диффузионных уравнениях теории ливней и т. д.). Поэтому сравнение наших формул с результатами, полученными численным интегрированием для  $E=10^7$  эв (т. е. для 0,1 критической энергии в воздухе), представляется очень желательным и обеспечивает ценную проверку точности наших аналитических выражений для электронного спектра.

Выражение, полученное нами для полного (проинтегрированного по глубине ливня) числа электронов, энергия которых превышает  $E$ , в ливне, вызванном первичным электроном энергии  $E_m$ , имеет вид (см. формулу (8. 9), Т—Б<sup>2</sup>)

$$N(E_m, E) = E_m \varphi(\varepsilon_m, \varepsilon) / \beta, \quad (1)$$

где

$$\varphi(\varepsilon_m, \varepsilon) = 1 - \varepsilon e^\varepsilon \int_\varepsilon^{\varepsilon_m} \frac{e^{-x}}{x} dx - \frac{\varepsilon e^{\varepsilon - \varepsilon_m}}{\varepsilon_m}, \quad (2)$$

$\beta$  — потери электронов на соударения на радиационной длине,  $\varepsilon=2,4 E/\beta$ ,  $\varepsilon_m=2,4 E_m/\beta$ . Величина  $N(E_m, E)$  тесно связана с полной длиной пробега электрона  $Z(E_m, E)$ , определенной Росси и Клапманом,

$$Z(E_m, E) = N(E_m, E) X_0 \rho, \quad (3)$$

где  $X_0$  — ливневая единица длины (см. Т—Б, (2. 1)) и  $\rho$  — плотность вещества, в котором развивается ливень.

Подставляя в (3) выражение (1) для  $N(E_m, E)$ , находим

$$Z(E_m, E) = \frac{A}{\pi L Z N_0 r_0^2} \left( \frac{E_m}{2mc^2} \right) \varphi(\varepsilon_m, \varepsilon). \quad (4)$$

Здесь  $A$  — атомный вес вещества,  $Z$  — его атомный номер,  $N_0$  — число Авогадро,  $r_0=e^2/mc^2$  и  $L$  — среднее значение логарифма, содержащегося в формуле для потерь на столкновения.

<sup>2</sup> Далее в этой статье работа [3] будет цитироваться как Т—Б.

Если  $\epsilon_m \gg 1$  и  $\epsilon \ll \epsilon_m$ ,

$$\varphi(\epsilon_m, \epsilon) = 1 + \epsilon e^\epsilon \text{Ei}(-\epsilon), \quad (2a)$$

где  $\text{Ei}(\epsilon)$  — интегральная экспонента.

Используя формулу (1) или независимо от нее выполнив необходимые вычисления (как это было сделано в Т—Б), можно найти функции  $N_c(E_m, E)$  и  $N_d(p, E)$ , где  $N_c(E_m, E)$  — число электронов с энергией, превышающей  $E$ , возникающих в результате процессов столкновения мезонов с максимальной передачей энергии  $E_m$ , и  $N_d(p, E)$  — число электронов с энергией, превышающей  $E$ , возникающих при распаде мезонов с импульсом  $p$ . Обе величины относятся к одному падающему мезону.

Согласно (4. 5) и (4. 6), Т—Б, функция  $N_c(E_m, E)$  имеет вид

$$N_c(E_m, E) = \frac{\epsilon e^\epsilon}{L} \int_{\epsilon}^{\epsilon_m} \frac{e^{-x}}{x^2} \left\{ \frac{c^2}{v^2} \ln \left( \frac{x}{\epsilon_m} \right) + 1 - \frac{x}{\epsilon_m} \right\} dx, \quad (5)$$

где  $c$  — скорость света и  $v$  — скорость мезона.

Если  $\epsilon_m \gg 1$ ,  $\epsilon \ll \epsilon_m$  и  $v \sim c$ , то из (5) получаем (см. (4. 16), Т—Б)

$$N_c(E_m, E) = \frac{1}{L} \left\{ \left( \ln \frac{E_m}{E} - 2 \right) (1 + \epsilon e^\epsilon \text{Ei}(-\epsilon)) + \psi(\epsilon) \right\}, \quad (6)$$

где

$$\psi(\epsilon) = \epsilon e^\epsilon \left\{ \ln \epsilon \text{Ei}(-\epsilon) + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \ln x dx \right\}. \quad (7)$$

Функция  $\psi(\epsilon)$  протабулирована в работе Т—Б. Максимальная величина  $\psi(\epsilon)$  не превосходит 0,3, и поэтому при  $\epsilon \ll \epsilon_m$  член  $\psi(\epsilon)$  мал по сравнению с первым членом в скобках формулы (6).

Согласно (7. 6), Т—Б, число электронов распада (включая порождаемые ими вторичные электроны), находящихся в равновесии с мезоном, имеющим импульс  $p$ , массу  $M$  и время жизни в системе покоя  $\tau_0$ , выражается следующими формулами:

$$N_d(p, E) = \frac{x_0 M \beta}{2\tau_0 c p^2} \frac{1}{q^2} \epsilon e^\epsilon \int_{\epsilon}^{\epsilon_2} e^{-x} \left( \frac{\epsilon_2^2}{x^2} - 1 \right) dx \quad (8)$$

при  $\epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_2$ ,

$$N_d(p, E) = \frac{x_0 M \beta}{2\tau_0 c p^2} \frac{1}{q^2} \epsilon e^\epsilon \left\{ (\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2) \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{e^{-x}}{x^2} dx + \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} e^{-x} \left( \frac{\epsilon_2^2}{x^2} - 1 \right) dx \right\}$$

при

$$\epsilon < \epsilon_1,$$

где

$$q = 2, 4$$

и

$$\epsilon_{1, 2} = \frac{qc}{2\beta} \left\{ (c^2 M^2 + p^2)^{1/2} \mp p \right\}. \quad (8a)$$

Если  $p \gg cM$ ,  $\varepsilon_2 \gg 1$  и  $\varepsilon \ll \varepsilon_2$ , то

$$N_d(p, E) = \frac{x_0 M c}{2\tau_0 \beta} [1 + \varepsilon e^\varepsilon \text{Ei}(-\varepsilon)]. \quad (9)$$

Следуя Росси и Клапману, мы можем обозначить через  $K_0 = \frac{1}{2} M c / \tau_0 \rho$  среднюю энергию, передаваемую электронам распада одним мезоном на  $1 \text{ г/см}^2$ . Используя это обозначение, формулу (9) можно записать в виде

$$N_d(p, E) = \frac{A}{\pi L Z N_0 r_0^2} \left( \frac{K_0}{2m c^2} \right) [1 + \varepsilon e^\varepsilon \text{Ei}(-\varepsilon)]. \quad (9a)$$

Сравним наши результаты с результатами, полученными Росси и Клапманом для числа электронов в воздухе с энергиями, превышающими  $E = 10^7 \text{ эв}$ . Положим, прежде всего,  $\varepsilon_m \gg 1$  и  $\varepsilon_2 \gg 1$  (это соответствует  $E_m$  или  $pc \gg \beta/2, 4 = 4,1 \cdot 10^7 \text{ эв}$ ); в этом случае мы можем использовать формулы (4) и (2a), (5) и (9a). Подставляя в эти формулы значения Росси и Грейзена [7]:  $\beta = 9,8 \cdot 10^7 \text{ эв}$  для воздуха и  $E = 10^7 \text{ эв}$ , получим

$$\begin{aligned} Z(E_m, 10^7 \text{ эв}) &= 3,2 \left( \frac{E_m}{10^7} \right) \text{ г/см}^2, \\ N_c(E_m, 10^7 \text{ эв}) &= 0,035 + 0,024 \ln(E_m/2 \cdot 10^8), \\ N_d(p, 10^7 \text{ эв}) &= 3,2 (K_0/10^7). \end{aligned} \quad (10)$$

Согласно вычислениям Росси и Клапмана, эти величины равны:

$$\begin{aligned} Z(E_m, 10^7 \text{ эв}) &= 3,06 \left( \frac{E_m}{10^7} \right) \text{ г/см}^2, \\ N_c(E_m, 10^7 \text{ эв}) &= 0,035 + 0,0234 \ln(E_m/2 \cdot 10^8), \\ N_d(p, 10^7 \text{ эв}) &= 3,06 (K_0/10^7). \end{aligned} \quad (11)$$

Значения  $Z(E_m, 10^7 \text{ эв})$  и  $N_c(E_m, 10^7 \text{ эв})$  для меньших энергий  $E_m$  (т. е. для  $E_m \leq 4,1 \cdot 10^7 \text{ эв}$ ) в работах Росси и Клапмана даются только в виде графиков. Используя для этого интервала  $E_m$  наши выражения (2), (4) и (5), мы получили значения  $Z$  и  $N_c$ , которые в пределах точности графиков практически совпадают со значениями, найденными Росси и Клапманом.

Таким образом, численное интегрирование уравнений теории ливней, выполненное Росси и Клапманом, подтверждает справедливость приближений, на которых основан наш вывод аналитических выражений для энергетического спектра каскадных электронов. С другой стороны, результаты, полученные ранее другими авторами (Баба [5] и Арлей [6]) для числа электронов, энергия которых того же порядка или меньше, чем критическая энергия, находятся в полном противоречии с вычислениями Росси и Клапмана.

3. Баба и Чакрабартти [2]<sup>3</sup> развили модификацию теории

<sup>3</sup> Далее цитируется как Б—Ч.

ливней, намереваясь более точно учесть потери электронов на соударения, чем это было сделано в большинстве предыдущих работ. В их теории радиационные потери и рождение пар описываются, как обычно, асимптотическими формулами и предполагается, что потери на столкновения не зависят от энергии электронов. При этих предположениях Б—Ч получают решение уравнения теории ливней в виде ряда и показывают, что для энергий, превышающих одну треть критической энергии, достаточно удерживать только первый член этого ряда. При более низких энергиях недостаточно учитывать только первый член или даже несколько первых членов ряда. Однако Б—Ч, придерживаясь мнения, что вклад электронов низких энергий в полное число частиц сравнительно мал, учитывают в своих окончательных формулах только первый член ряда.

Решение уравнений теории ливней, полученное Б—Ч, точно удовлетворяет граничным условиям, и авторы считают, что оно обладает определенными преимуществами по сравнению с хорошо известным решением, полученным Снайдером [8] и Сербером [9], которое удовлетворяет этим условиям только приближенно. Каскадная кривая (полное число электронов в зависимости от глубины), данная Б—Ч [10], существенно отличается от каскадных кривых Снайдера и Сербера.

Б—Ч рассчитали также энергетический спектр электронов ливня и пришли к заключению, что потери на соударения существенно сказываются на виде спектра; даже число электронов, энергия которых превосходит критическую энергию, значительно уменьшается.

Дальнейшие применения этой теории к большому числу задач теории ливней были рассмотрены Баба и Чакрабартти в работах [10, 11] <sup>4</sup>. Теория Баба и Чакрабартти является весьма удовлетворительной для энергий порядка и выше критической и в этой области исправляет предыдущие исследования Баба и Арлея. Однако предположение Б—Ч, что число электронов низких энергий (ниже, чем одна треть критической энергии) сравнительно незначительно, ошибочно, и вследствие этого их каскадная кривая, а также их энергетический спектр в области низких энергий неправильны.

Чтобы показать это, рассчитаем по теории Б—Ч, а также по теории, развитой одним из нас [4], энергетическое распределение электронов ливня на глубине, соответствующей максимуму каскадной кривой, и в области энергий вблизи или ниже критической энергии.

Далее будет предполагаться, что энергия  $E_0$  первичного электрона, вызывающего ливень, столь велика, что не только  $E_0/\beta$ , но также и  $\ln(E_0/\beta)$  гораздо больше, чем 1.

---

<sup>4</sup> Работа [11] была нам недоступна.

Используя формулы Б—Ч [2], можно получить следующее выражение для числа электронов, энергия которых превосходит  $E$  (обозначения те же, что у Б—Ч):

$$N(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \left[ \frac{E_0}{E_0 + \beta g(s, t)} \right]^{s-1} \frac{1}{s-1} \frac{D - \lambda_s}{\mu_s - \lambda_s} \exp(-\lambda_s t) ds. \quad (12)$$

Выполнив интегрирование этого выражения методом перевала, получаем в максимуме ливня (для энергий порядка или меньше  $\beta$ )

$$N_{\max}(E) = \frac{1}{(-2\pi\lambda_2'' \ln(E_0/\beta))^{1/2}} \frac{E_0}{\beta} \frac{1}{(E/\beta) + g(2, t)} \frac{D}{\mu_2}. \quad (13)$$

Подставляя численные значения для  $\lambda_2''$ ,  $D$ ,  $\mu_2$  и  $g(2, \infty)$  согласно таблице, данной в работе Баба и Чакрабарти (так как  $\ln(E_0/\beta) \gg 1$ , то  $t \gg 1$ ), мы получаем

$$N_{\max}(E) = \frac{0,31 E_0/\beta}{(\ln(E_0/\beta))^{1/2}} n_1(\varepsilon), \quad (14)$$

где  $\varepsilon = 2,4 E/\beta$  и

$$n_1(\varepsilon) = 1/(0,95\varepsilon + 1,87). \quad (14_1)$$

С другой стороны, интегрируя методом перевала выражение (14) нашей работы [4], которое дает число частиц с энергией, превосходящей заданную величину  $E$ , как функцию глубины, мы получаем в максимуме ливня

$$N_{\max}(E) = \frac{0,31 E_0/\beta}{(\ln(E_0/\beta))^{1/2}} n_2(\varepsilon), \quad (15)$$

где

$$n_2(\varepsilon) = 1 + \varepsilon e^\varepsilon \text{Ei}(-\varepsilon). \quad (15_1)$$

Спектр (15<sub>1</sub>) совпадает с «равновесным спектром» частиц ливня (см. выражение (2а) настоящей статьи).

Величины  $n_1(\varepsilon)$  и  $n_2(\varepsilon)$  для различных  $\varepsilon$  даны в таблице.

$\varepsilon$	0	0,25	0,5	1	2	3	$\varepsilon \gg 1$
$n_1$	0,534	0,473	0,425	0,353	0,264	0,211	$\frac{1,05}{\varepsilon} \left(1 - \frac{1,97}{\varepsilon}\right)$
$n_2$	1	0,665	0,536	0,404	0,277	0,214	$\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{2}{\varepsilon}\right)$

Из таблицы видно, что для энергий порядка или выше критической результаты теории Баба—Чакрабарти практически совпадают с нашими. Однако имеется существенное разногласие при энергиях ниже критической. В результате наше значение для

полного числа электронов почти вдвое больше, чем величина, рассчитанная согласно теории Б—Ч. Фактически согласно выражению (14) полное число электронов в максимуме ливня есть

$$N_{\max}(0) = \frac{0,165}{(\ln(E_0/\beta))^{1/2}} \frac{E_0}{\beta}, \quad (16)$$

в то время как согласно нашему выражению (15)

$$N_{\max}(0) = \frac{0,31}{(\ln(E_0/\beta))^{1/2}} \frac{E_0}{\beta}. \quad (17)$$

Наша величина (17) для  $N_{\max}(0)$  совпадает с величиной, вычисленной Сербером [9]. Правильность этой величины подтверждается работой Ландау [12]. Ландау было показано, что, отвлекаясь от какого-либо детального анализа низкоэнергетической части электронного спектра и используя только соображения весьма общего характера (например, используя соотношение

$$\int_0^{\infty} N(0, t) dt = E_0/\beta,$$

которое выражает закон сохранения энергии), можно доказать, что в случае  $\ln(E_0/\beta) \gg 1$  величина  $N_{\max}(0)$  должна совпадать с (17).

Легко понять, почему решение Б—Ч не может удовлетворять соотношению (17), доказанному Ландау. Ранее упоминалось, что это решение математически оправдано только для энергий, превышающих одну треть критической энергии. Экстраполяция этого решения в область низких энергий была бы возможной только в том случае, если бы область низких энергий не имела существенного значения. Однако согласно последней строке таблицы более половины всех частиц обладает энергиями, меньшими, чем  $\beta/3$  (т. е.  $\epsilon < 0,8$ ), и, таким образом, принадлежит к области, в которой решение Б—Ч неприменимо.

В связи с последним вопросом мы хотели бы отметить, что утверждение Б—Ч (стр. 293 их статьи), что при  $E \rightarrow 0$  распределение числа частиц  $P(E) = -\partial N/\partial E$  стремится к конечной величине, также ошибочно. Дифференцируя (15) по  $E$ , мы получаем (для  $\epsilon \ll 1$ ):  $p(E) = c \ln \epsilon$ , где  $c$  не зависит от  $E$ . Логарифмическая расходимость дифференциального электронного спектра при низких энергиях была независимо подтверждена вычислениями Бете, результаты которых обсуждаются в обзоре Росси и Грейзена [7].

В заключение следует отметить, что в противоположность утверждению Баба и Чакрабарти теория Снайдера и Сербера дает правильное выражение для полного числа частиц как функции глубины. Мы показали [4], что члены, которые нужно добавить к выражению Сербера для того, чтобы точно удовлетворить граничным условиям, существенны только для энергий электрона  $E$ ,



близких к энергии  $E_0$  первичной частицы. Эти члены вносят в полное число частиц долю, которая в первом приближении пропорциональна  $\beta/E_0$  и которая становится пренебрежимой уже при  $\beta/E_0 \sim 0,1$ .

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
1 июля 1946 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *B. Rossi, S. Klapman.* Phys. Rev., 1942, **61**, 414.
2. *H. J. Bhabha, S. K. Chakrabarty.* Proc. Roy. Soc. London, 1943, **A181**, 267.
3. *Ig. Tamm, S. Belenky.* J. Phys. USSR, 1939, **1**, 177 (наст. том, работа 40. — Прим. ред.).
4. *С. Беленький.* Докл. АН СССР, 1941, **30**, 608.
5. *H. J. Bhabha.* Proc. Roy. Soc. London, 1937, **A164**, 257.
6. *N. Arley.* Proc. Roy. Soc. London, 1938, **A168**, 519.
7. *B. Rossi, K. Greisen.* Rev. Mod. Phys., 1941, **13**, 240.
8. *H. Snyder.* Phys. Rev., 1938, **53**, 960.
9. *R. Serber.* Phys. Rev., 1938, **54**, 317.
10. *S. K. Chakrabarty.* Ind. J. Phys., 1942, **16**, 377.
11. *H. J. Bhabha, S. K. Chakrabarty.* Proc. Ind. Acad. Sci., 1942, **15**, 464.
12. *L. Landau.* J. Phys. USSR, 1940, **3**, 237.

---

*Примечание.* Установлено, что равновесный спектр электронов и фотонов Тамма—Беленького с ошибкой не более 10% является правильным вплоть до энергий  $E \lesssim 0,5 Mэв$ ,  $E_0 \geq \beta$  как в легких, так и в тяжелых веществах (см. *И. П. Иваненко.* Электромагнитные каскадные процессы. М., Изд-во МГУ, 1972).

## К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НУКЛОНОВ <sup>1</sup>

*Совместно с В. П. Силиным и В. Я. Файнбергом*

Рассматривается взаимодействие нуклонов, обусловленное псевдоскалярными  $\pi$ -мезонами. Показано, что учет так называемого контактного взаимодействия, появляющегося в случае псевдовекторной связи, оставляет без изменения полученный в [1] вывод о неустойчивости системы двух нуклонов. Выявлена ошибочность утверждения [2] об отсутствии связанных состояний системы двух нуклонов, взаимодействующих через псевдоскалярное поле с псевдоскалярной связью.

### § 1. Введение

Экспериментальные исследования последнего времени установили с большой степенью вероятности, что пионы ( $\pi$ -мезоны) являются псевдоскалярными частицами со спином нуль. Так как эти мезоны сильно взаимодействуют с нуклонами, то ядерные силы (по крайней мере на расстояниях, больших, чем примерно  $3\hbar/Mc \sim 0,6 \cdot 10^{-13}$  см) должны обуславливаться пионным полем. Наконец, ряд данных заставляет считать, что взаимодействие нуклонов с пионами является псевдовекторным (не исключено, что к такой связи примешана также псевдоскалярная связь).

Основной трудностью, стоящей на пути построения теории ядерных сил, является тот известный факт, что в первом приближении теории возмущений псевдовекторная связь мезонов с нуклонами приводит к силам взаимодействия нуклонов друг с другом, обладающим недопустимой особенностью в нуле (полюс  $1/r^3$ ) и не обеспечивающим поэтому устойчивости атомного ядра. Разрешение этой трудности можно искать в различных направлениях — например, в неприменимости квантовой теории на расстояниях, меньших некоторой универсальной длины  $r_0$ , и т. п. В настоящей статье мы коснемся только одной из этих возможностей (учет релятивистских эффектов).

Еще в 1945 г. один из авторов настоящей статьи отметил, что при наличии полюса  $1/r^3$  в потенциальной энергии нерелятивистская трактовка нуклонов и пренебрежение отдачей, испытываемой нуклонами при испускании и поглощении виртуальных мезонов, могут оказаться неправомерными, и сформулировал приближенную систему уравнений релятивистской теории взаимодействия элементарных частиц [1] (в дальнейших ссылках на эту

<sup>1</sup> ЖЭТФ, 1953, 24, 3.

статью мы будем обозначать ее I). В этой статье было, кроме того, показано, что в случае псевдовекторного взаимодействия учет релятивизма не устраняет тех трудностей (неустойчивость системы двух нуклонов), которые в нерелятивистской теории связаны с наличием полюса  $1/r^3$ .

В § 2 и 3 настоящей статьи уточняется этот вывод статьи I. Дело в том, что в I по примеру работы [3] отбрасывались так называемые контактные члены взаимодействия нуклонов, появляющиеся в случае псевдовекторной связи. В работе [3] законность такого отбрасывания аргументировалась тем, что контактный член не приводит к конечной энергии связи нуклонов и будто бы не дает вклада в процессы рассеяния. Последнее утверждение является ошибочным; что касается связанных состояний, то наличие контактного члена наряду с обычным взаимодействием может существенно изменить энергию связи. В настоящей статье показывается, что учет контактного члена делает соответствие между релятивистской и нерелятивистской теорией взаимодействия нуклонов более полным, но оставляет неизменным основной вывод I о неустойчивости системы двух нуклонов, связанных псевдовекторной связью с псевдоскалярным мезонным полем. Отметим, что этот вывод должен остаться справедливым и в том случае, если включить в рассмотрение не учитываемые нами состояния отрицательной энергии свободных нуклонов.

Отметим также, что в настоящей статье мы не ограничиваемся, как в I, рассмотрением только синглетного состояния двух нуклонов, но рассматриваем также и триплетное их состояние (дейтрон).

§ 4 посвящен критике статьи [2], также трактующей о релятивистской теории ядерных сил<sup>2</sup>. Рассматривая псевдоскалярную связь псевдоскалярных мезонов с нуклонами, автор этой работы пришел к выводу, что в релятивистской теории в противоположность теории нерелятивистской ни при каком значении константы связи  $g$  не получается связанных состояний нуклонов; более того, энергия системы двух нуклонов оказывается положительной и бесконечной. Он ищет разрешения этого парадокса в еще более парадоксальном утверждении, что представления рассмотренного им взаимодействия в координатном и в импульсном пространстве не эквивалентны друг другу. В § 4 мы указываем на ошибки этого автора, приведшие его к неправильным выводам.

---

<sup>2</sup> Заметим, что в самое последнее время (С. г., 1952, 234, 815, 922) появилось еще несколько статей того же автора. В первой из них в основном излагаются некоторые результаты статьи I; во второй доказывается эквивалентность релятивистского уравнения, полученного в работе [4] при помощи ковариантного формализма, с основным уравнением в I.

## § 2. Релятивистское взаимодействие нуклонов; псевдоскалярное мезонное поле, псевдовекторная связь

Мы будем пользоваться обозначениями статьи I, к которой отсылаем читателя за всеми подробностями. Отличие от прежних обозначений будет состоять только в том, что мы будем пользоваться системой единиц, в которой

$$c = \hbar = M = 1, \quad (2.1)$$

где  $M$  — масса нуклона.

Рассмотрим сначала (вещественное) поле  $\varphi$  нейтральных псевдоскалярных мезонов. Лагранжиан мезонного поля с учетом взаимодействия мезонов с нуклонами в случае псевдовекторной связи равен (ср. I (5.1))

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \varphi)^2 + \kappa^2 \varphi^2 \right] - \frac{\sqrt{4\pi} f}{\kappa} \sum_j \psi_j^* (\sigma \nabla \varphi + \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \psi_j. \quad (2.2)$$

Здесь  $\kappa$  — масса мезона,  $f$  — константа взаимодействия,  $\psi_j$  — волновая функция  $j$ -го нуклона ( $j=1, 2$ ). Вводя импульс мезонного поля

$$\Pi = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\varphi}$$

и переходя при помощи уравнения  $H = \Pi \dot{\varphi} - L$  к гамильтониану, получаем

$$H = \frac{1}{2} (\Pi^2 + (\nabla \varphi)^2 + \kappa^2 \varphi^2) + \frac{\sqrt{4\pi} f}{\kappa} \sum_j \psi_j^* (\sigma \nabla \varphi + \rho_1 \Pi) \psi_j + \frac{2\pi}{\kappa^2} \sum_{j,k} (\psi_j^* \rho_1 \psi_j) (\psi_k^* \rho_1 \psi_k). \quad (2.3)$$

Последний, так называемый контактный член формулы (2.3) был по примеру работы [3] отброшен в I; здесь мы его сохранили. Выразив в (2.3) величины  $\Pi$  и  $\varphi$  через операторы рождения и уничтожения мезонов, получаем следующее выражение для матричного элемента, соответствующего переходу свободного нуклона из состояния  $(\mathbf{k}, s)$  ( $\mathbf{k}$  — импульс,  $s$  — спин нуклона) в состояние  $(\mathbf{k}-1, s')$  с испусканием мезона с импульсом  $l$ :

$$(\mathbf{k}-1, s' | H | \mathbf{k}, s) = -\frac{if}{\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{L^3 \varepsilon'_l}} U^*(\mathbf{k}-1, s') (\sigma \mathbf{l} - \rho_1 \varepsilon'_l) U(\mathbf{k}, s). \quad (2.4)$$

Здесь  $\varepsilon'_l$  означает энергию мезона с импульсом  $l$

$$\varepsilon'_l = \sqrt{\kappa^2 + l^2}, \quad (2.5)$$

а  $U(\mathbf{k}, s)$  — четырехкомпонентная амплитуда дираковской функции  $\psi(\mathbf{k}, s)$  свободного нуклона:

$$\psi_\sigma(\mathbf{k}, s) = L^{-3/2} U_\sigma(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \sigma = 1, 2, 3, 4. \quad (2.6)$$



в I, единственное отличие заключается в наличии последнего члена в уравнении (2. 10).

Приведем окончательный вид релятивистского уравнения движения двух нуклонов, взаимодействующих посредством псевдовекторной связи с полем псевдоскалярных мезонов. Волновую функцию системы двух нуклонов разлагаем по дираковским функциям свободных нуклонов, ограничиваясь при этом свободными состояниями и положительной энергией<sup>4</sup>. В системе отсчета, в которой суммарный импульс нуклонов равен нулю, получаем

$$\psi_{\sigma\tau}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{L^3} \sum_{s_1, s_2} \int d\mathbf{k} a(\mathbf{k}, s_1, s_2) \times \\ \times U_{\sigma}(\mathbf{k}, s_1) U_{\tau}(-\mathbf{k}, s_2) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}. \quad (2. 11)$$

Если ввести обозначения (3. 12) I, а именно:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}, +, +) &= a_1(\mathbf{k}), & a(\mathbf{k}, +, -) &= a_2(\mathbf{k}), \\ a(\mathbf{k}, -, +) &= a_3(\mathbf{k}), & a(\mathbf{k}, -, -) &= a_4(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (2. 12)$$

где (+) и (-) обозначают знак проекции спина соответствующего нуклона на ось  $\mathbf{z}$ , то уравнение для амплитуд  $a_{\lambda}(\mathbf{k})$  приобретает вид

$$\begin{aligned} (\omega - 2\varepsilon_k) a_{\lambda}(\mathbf{k}) &= \\ &= -\frac{f^2 T}{4\pi^2 \chi^2} \sum_{\mu} \int \frac{dS_{\lambda\mu}(\mathbf{k}, l) a_{\mu}(l)}{\varepsilon'_{\mathbf{k}-l} [\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_l + \varepsilon'_{\mathbf{k}-l} - \omega]} - \\ &\quad - \frac{f^2 T}{8\pi^2 \chi^2} \int dP_{\lambda\mu}(\mathbf{k}, l) a_{\mu}(l), \end{aligned} \quad (2. 13)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \varepsilon_l S_{\lambda\mu} &= 4 \{(\sigma\mathbf{k}^*)(\rho\mathbf{k}^*) + (\sigma\mathbf{l}^*)(\rho\mathbf{l}^*)\} + \\ &+ 2(\varepsilon_k - \varepsilon_l) \{(\sigma\mathbf{k}^*)(\rho\mathbf{k}^*) - (\sigma\mathbf{l}^*)(\rho\mathbf{l}^*)\} - \\ &- \left\{ \varepsilon_k \varepsilon_l + 1 - \mathbf{k}\mathbf{l} + \frac{\chi^2}{2} \right\} (\sigma, \mathbf{k}^* + \mathbf{l}^*)(\rho, \mathbf{k}^* + \mathbf{l}^*) \end{aligned} \quad (2. 14)$$

и

$$\varepsilon_k \varepsilon_l P_{\lambda\mu} = (\sigma, \mathbf{k}^* + \mathbf{l}^*)(\rho, \mathbf{k}^* + \mathbf{l}^*). \quad (2. 15)$$

Здесь

$$\varepsilon_k = \sqrt{1 + k^2} \quad (2. 16)$$

обозначает энергию свободного нуклона с импульсом  $\mathbf{k}$ ,

$$\mathbf{k}^* = \mathbf{k} \sqrt{\frac{\varepsilon_l + 1}{\varepsilon_k + 1}} \quad \text{и} \quad \mathbf{l}^* = \mathbf{l} \sqrt{\frac{\varepsilon_k + 1}{\varepsilon_l + 1}},$$

а дираковские матрицы  $\sigma$  и  $\rho$  действуют в этом уравнении на индекс  $\lambda$  функций  $a_{\lambda}(\mathbf{k})$ , определяемых уравнениями (2. 12).

Кроме того, мы ввели в уравнение (2. 13) еще изотопический множитель  $T$ . Если взаимодействие передается только нейтраль-

<sup>4</sup> Аргументацию в пользу этого ограничения см. ниже, стр. 132.

ными мезонами, как мы до сих пор предполагали, и если константа связи  $f$  одинакова для протонов и нейтронов (т. е.  $f_p = f_n$ ), то  $T=1$ . Если же взаимодействие нуклонов передается и заряженными мезонами (а также если  $f_p \neq f_n$ ), то значение множителя  $T$  зависит как от изотопической четности данного состояния системы нуклонов, так и от конкретных предположений о типе взаимодействия. В частности, в симметричной теории ядерных сил  $T=1$  или  $T=-3$  в зависимости от того, является ли данное состояние четным или нечетным относительно изотопического спина нуклонов.

Уравнения (2.13) и (2.14) отличаются от соответствующих уравнений (5.3) и (5.4) в I (помимо множителя  $T$ ) только членом «прямого» взаимодействия нуклонов.

В дальнейшем мы будем рассматривать только связанные состояния нуклонов, для которых  $\omega < 2$  (т. е. в обычных единицах энергия  $< 2Mc^2$ ). Поскольку мы пользуемся первым приближением теории возмущений, то в правой части уравнения (2.13) мы должны в этом случае положить  $\omega=2$ .

Произведем исключение углов из уравнения (2.13) для двух случаев — для состояния  ${}^1S$  и для состояния  ${}^3S$  системы двух нуклонов.

В  ${}^1S$ -состоянии  $a_1 = a_4 = 0$ ,  $a_2 = -a_3$ , причем  $a_2(k)$  и  $a_3(k)$  не зависят от углов  $\theta$  и  $\varphi$ , определяющих направление вектора  $k$ . Полагая

$$ka_2 = \alpha(k) \quad (2.17)$$

и выполняя в (2.13) интегрирование по углам  $\theta_i$  и  $\varphi_i$ , получаем уравнение для  $\alpha(k)$ :

$$(\omega - 2\varepsilon_k)\alpha(k) = -\frac{j^2 T}{\pi k^2} \int_0^\infty dl \Phi(k, l) \alpha(l). \quad (2.18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \varepsilon_l \Phi(k, l) = & 2kl(R - q - 1) - \\ & - \frac{q(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{12} [8R + q^2 - 12 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 + x^2] + \\ & + [k^2 l^2 - q^2 - R^2 + x^2(q - R + 1)] \ln \left( \frac{\varepsilon_2 + q}{\varepsilon_1 + q} \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

причем мы положили  $\omega=2$  в  $\Phi(k, l)$  и воспользовались обозначениями

$$\begin{aligned} q = \varepsilon_k + \varepsilon_l - 2, \quad R = 2(\varepsilon_k + \varepsilon_l) - \varepsilon_k \varepsilon_l - 3, \\ \varepsilon_1 = \sqrt{x^2 + (k+l)^2}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{x^2 + (k-l)^2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Выражение (2.19) для  $\Phi(k, l)$  отличается от прежнего выражения (5.6) в I только членом

$$\varepsilon_k \varepsilon_l \delta \Phi(k, l) = kl(R - 2q), \quad (2.21)$$

учитывающим «прямое» взаимодействие нуклонов (кроме того, в (5.6) в I для упрощения было положено  $x=0$ ).

Перейдем к рассмотрению триплетного состояния  ${}^3S$ . Волновая функция  $a_\lambda(k)$  этого состояния может быть записана следующим образом (см. I, формула (4. 5) при  $m=1$ ):

$$\begin{aligned} ka_1 &= \alpha_1(k) + \frac{1}{8^{1/2}} \alpha_2(k) \{3 \cos^2 \theta - 1\}, \\ ka_2 &= ka_3 = \frac{3}{8^{1/2}} \alpha_2(k) \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}, \\ ka_4 &= \frac{3}{8^{1/2}} \alpha_2(k) \sin^2 \theta e^{2i\varphi}, \end{aligned} \quad (2. 22)$$

где  $\alpha_1(k)$  или  $\alpha_2(k)$  не зависят от углов  $\theta$  и  $\varphi$ , определяющих направление вектора  $k$ . Внося (2. 22) в (2. 13) и выполняя интегрирование по углам  $\theta_l$  и  $\varphi_l$ , получаем систему двух интегральных уравнений:

$$(\omega - 2\varepsilon_k) \alpha_i(k) = -\frac{f^2 T}{3x^2} \int_0^\infty dl \sum_j \Phi_{ij}(k, l) \alpha_j(l), \quad i, j = 1, 2. \quad (2. 23)$$

Здесь  $\Phi_{11}(k, l) = -\Phi(k, l)$ , где  $\Phi(k, l)$  определяется уравнением (2. 19):

$$\begin{aligned} \Phi_{12}(k, l) &= \Phi_{21}(l, k) = \sqrt{2} \left\{ \Phi_{11} - \Phi_{22} + \left( \frac{1}{\varepsilon_l} - \frac{1}{\varepsilon_k} \right) M \right\}, \\ \varepsilon_k \varepsilon_l \Phi_{22} &= N + (R - 2q)(M + kl), \\ klM &= -3(q + 1) \left( R + \frac{x^2}{2} \right) + \frac{q(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{20 kl} [-8R^3 + \\ &+ 4Rq^2 + q^4 + 5q^3 + 88Rq + 88R - 31q^2 - 48q] + \\ &+ 4x^2 \left( R + 5q + 5 + \frac{q^2}{2} \right) + x^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 (2R + q^2 + \\ &+ 5q + 5 + x^2) + \frac{3(q + 1)}{kl} \left[ \left( R + \frac{x^2}{2} \right)^2 - \right. \\ &\left. - k^2 l^2 \right] \ln \left( \frac{\varepsilon_2 + q}{\varepsilon_1 + q} \right), \end{aligned} \quad (2. 24)$$

$$\begin{aligned} N &= -2kl \left( R + 1 + \frac{3x^2}{4} \right) + \frac{q}{6} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) (8R + q^2 + \\ &+ 6 + \frac{11}{2} x^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) + 2 \left[ R^2 - \frac{q^2}{2} - k^2 l^2 + \right. \\ &\left. + x^2 \left( R + \frac{q + 1}{2} \right) + \frac{3}{8} x^4 \right] \ln \frac{\varepsilon_2 + q}{\varepsilon_1 + q}. \end{aligned}$$

Система двух интегральных уравнений (2. 23) в импульсном пространстве соответствует в нерелятивистском приближении системе двух дифференциальных уравнений для двух волновых функций  $S$  и  $D$  в координатном пространстве.

В нерелятивистском приближении  $k \ll 1$ ,  $l \ll 1$ ,  $x^2 \ll 1$  можно положить

$$\omega = 2 + \varepsilon, \quad \varepsilon_k = 1 + k^2/2, \quad (2. 25)$$



где  $\epsilon$  — отличие энергии системы от энергии покоя нуклонов.

Удерживая в выражении (2. 13) только главные (квадратичные в  $k$  и  $l$ ) члены, получаем

$$(\epsilon - k^2) a(\mathbf{k}) = -\frac{f^2 T}{4\pi\kappa^2} \int d\mathbf{l} \left\{ 2 \frac{(\rho, \mathbf{k} - \mathbf{l})(\sigma, \mathbf{k} - \mathbf{l})}{(\epsilon'_{\mathbf{k}-\mathbf{l}})^2} \right\} a(\mathbf{l}). \quad (2. 26)$$

Переходя от импульсного представления к координатному при помощи преобразования

$$a(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{r} \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (2. 27)$$

получаем из (2. 26) уравнение для волновой функции  $\psi(\mathbf{r})$ :

$$(\epsilon + \nabla^2) \psi(\mathbf{r}) = T f^2 \left[ (\boldsymbol{\sigma} \nabla) (\boldsymbol{\rho} \nabla) \frac{e^{-\kappa r}}{\kappa^2 r} \right] \psi(\mathbf{r}). \quad (2. 28)$$

Как и следовало ожидать, (2. 28) совпадает с волновым уравнением, получающимся при использовании обычного нерелятивистского выражения для потенциальной энергии  $V(\mathbf{r})$  нуклонов, обусловленного псевдовекторной связью их с псевдоскалярными мезонами:

$$V(\mathbf{r}) = T f^2 (\boldsymbol{\sigma}_1 \nabla) (\boldsymbol{\sigma}_2 \nabla) \frac{e^{-\kappa r}}{\kappa^2 r}. \quad (2. 29)$$

### § 3. Неустойчивость системы протон — нейтрон

Для устойчивости системы частиц необходимо, чтобы энергетический спектр системы был ограничен снизу, т. е. чтобы минимальное значение энергии системы было конечным. При исследовании энергетического спектра удобно воспользоваться вариационным принципом.

Уравнение движения (2. 13) системы двух нуклонов может быть записано в виде

$$(\omega - 2\epsilon_k) a_\lambda(\mathbf{k}) = \sum_\mu \int d\mathbf{l} V_{\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) a_\mu(\mathbf{l}), \quad (3. 1)$$

причем при исследовании связанных состояний системы, согласно сказанному на стр. 129, в выражении для  $V_{\lambda\mu}(\mathbf{l}, \mathbf{k})$  нужно положить  $\omega=2$ . Ввиду того что  $V_{\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = V_{\mu\lambda}^*(\mathbf{l}, \mathbf{k})$ , уравнение (3. 1) эквивалентно вариационному принципу

$$\omega = \text{extr} (K + V) \quad (3. 2)$$

при условии

$$\sum_\lambda \int d\mathbf{k} |a_\lambda(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (3. 3)$$

Здесь  $K$  и  $V$  — математические ожидания операторов кинетической и потенциальной энергий в состоянии  $a_\lambda(\mathbf{k})$ :

$$K = 2 \sum_\lambda \int d\mathbf{k} \epsilon_k |a_\lambda(\mathbf{k})|^2, \quad V = \sum_{\lambda\mu} \int d\mathbf{k} d\mathbf{l} a_\lambda^*(\mathbf{k}) V_{\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) a_\mu(\mathbf{l}). \quad (3. 4)$$

Так как  $V_{\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$  конечно при конечных  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{l}$  (при  $\omega \leq 2$  знаменатель, входящий в выражение для  $V_{\lambda\mu}$ , в нуль не обращается), то  $V$ , а стало быть, и  $\omega$  могут обратиться в  $-\infty$  только за счет интегрирования по области  $\mathbf{k} \rightarrow \infty$  и  $\mathbf{l} \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим триплетное  ${}^3S$ -состояние системы (дейтрон). Воспользовавшись (2.23)–(2.24), можем записать уравнения (3.2)–(3.4) для этого состояния в форме

$$4\pi \int_0^{\infty} dk \sum_i \alpha_i^2(k) = 1; \quad (3.5)$$

$$K = 8\pi \int_0^{\infty} \varepsilon_k dk \sum_i \alpha_i^2(k), \quad (3.6)$$

$$V = -\frac{4\pi}{3\lambda^2} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} dl \sum_{ij} \Phi_{ij}(k, l) \alpha_i(k) T \alpha_j(l),$$

причем при  $k \rightarrow \infty$ ,  $l \rightarrow \infty$  и  $l > k$

$$\Phi_{11} = kl \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{k}{l} + \frac{k^2}{3l^2} \right), \quad \Phi_{22} = -\frac{k^2}{3} \left( 1 - \frac{7}{5} \frac{k}{l} + \frac{3}{5} \frac{k^2}{l^2} \right); \quad (3.7)$$

при  $l < k$  в (3.6) нужно произвести замену  $k \rightleftharpoons l$ . Выражение для  $\Phi_{12}$  нам не понадобится. В симметричной теории ядерных сил для дейтрона множитель  $T = -3$ . Выберем пробную функцию такого вида:

$$\alpha_1(k) \rightarrow 0, \quad \alpha_2(k) \rightarrow \frac{1}{k^{3/2}} \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

которая может быть нормирована. При таком выборе  $\alpha_i(k)$  интеграл  $K$  сходится, тогда как  $V$ , а следовательно, и энергия  $\omega$  стремятся к отрицательной бесконечности. Таким образом, принятое нами взаимодействие нуклонов при релятивистском рассмотрении проблемы дейтрона приводит к тому же отрицательному результату — неустойчивости дейтрона, как и соответствующая нерелятивистская теория.

Заметим, что этот результат должен остаться справедливым и в том случае, если бы при разложении волновой функции системы  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  (ср. уравнение (2.9)) мы не ограничились бы функциями свободных нуклонов, соответствующих положительной энергии, а включили бы и функции, соответствующие отрицательным энергиям свободных нуклонов. Действительно, если при рассмотрении ограниченного класса функций энергия  $\omega$  может обратиться в  $-\infty$ , то включение в рассмотрение более широкого класса функций не может повысить экстремальное значение энергии<sup>5</sup>.

<sup>5</sup> Отметим еще, что если выбрать значение изотопического множителя  $T$  не отрицательным, как в симметричной теории, а положительным, то  $V$  и  $\omega$  обратятся в  $-\infty$  при пробной функции  $\alpha_1(k) \rightarrow 1/k^{3/2}$ ,  $\alpha_2(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Обратимся теперь к состоянию  ${}^1S$ . Путем рассмотрения синглетного состояния вполне аналогично только что изложенному в I было показано, что и состояние  ${}^1S$  двух нуклонов неустойчиво. Вывод этот основан на следующем асимптотическом выражении функции  $\Phi(k, l)$  (уравнение (6. 9) в I) при  $k \rightarrow \infty$ ,  $l \rightarrow \infty$  и  $l > k$ :

$$\Phi \rightarrow \frac{2}{3} k^2 \left(1 - \frac{k}{2l}\right). \quad (3. 8)$$

Если, однако, учесть контактный член в гамильтониане (2. 3), который был опущен в I, то асимптотическое выражение для  $\Phi$  меняет знак при  $k \rightarrow \infty$ ,  $l \rightarrow \infty$ ,  $l > k$ :

$$\Phi \rightarrow -kl \left(1 - \frac{2k}{3l} + \frac{k^2}{3l^2}\right). \quad (3. 9)$$

Поэтому расходящиеся члены в выражении типа (3. 6) для потенциальной энергии  $V$  положительны, а не отрицательны, и энергетический спектр системы  ${}^1S$  ограничен снизу <sup>6</sup>.

Итак, релятивистское рассмотрение проблемы устойчивости системы протон—нейтрон не меняет выводов нерелятивистской теории: синглетное состояние оказывается устойчивым, а триплетное — неустойчивым <sup>7</sup>.

#### § 4. Псевдоскалярное мезонное поле, псевдоскалярная связь

Гамильтонова функция взаимодействия нейтральных псевдоскалярных мезонов с нуклонами в случае псевдоскалярной связи равна

$$H = \sqrt{4\pi} g (\psi^* \rho_2 \psi) \varphi. \quad (4. 1)$$

Взаимодействие двух нуклонов друг с другом, обусловленное этой связью, может быть вычислено аналогично тому, как это было сделано в § 3 в I.

Мы приведем здесь только окончательный результат для  ${}^1S$ -состояния [ $a_1(\mathbf{k}) = a_4(\mathbf{k}) = 0$ ,  $a_2(\mathbf{k}) = -a_3(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k})$ ]:

$$(\omega - 2\varepsilon_k) a(\mathbf{k}) = -\frac{g^2}{16\pi} \int d\mathbf{l} a(\mathbf{l}) \Phi(k, l), \quad (4. 2)$$

$$\varepsilon_k \varepsilon_l \Phi(k, l) = \frac{1 + \mathbf{k}\mathbf{l} - \varepsilon_k \varepsilon_l}{\varepsilon'_{\mathbf{k}-\mathbf{l}} (\varepsilon_k + \varepsilon_l + \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{l}} - 2)}. \quad (4. 3)$$

<sup>6</sup> В сущности говоря, из (3.9) непосредственно следует, что положительность знака расходящихся членов в выражении для  $V$  обеспечена в том случае, если пробная волновая функция не осциллирует при  $k \rightarrow \infty$ . Случай функций, осциллирующих при  $k \rightarrow \infty$ , требует специального исследования. Хотя это исследование и не было нами проведено с надлежащей строгостью, однако у нас есть доводы в пользу предположения, что рассмотрение осциллирующих функций не меняет того результата, что синглетное состояние устойчиво.

<sup>7</sup> Последние два абзаца стр. 458 в I содержат ошибочные утверждения по этому вопросу.

В статье [2], используя так называемый адиабатический метод, автор ее получил уравнение типа (4.2) с несколько отличным ядром  $\Phi(k, l)$ :

$$\varepsilon_k \varepsilon_l \Phi'(k, l) = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \frac{x^2}{\varepsilon_{k-1}^2 - (\varepsilon_k - \varepsilon_l)^2} \right\} = \frac{1 + kl - \varepsilon_k \varepsilon_l}{\varepsilon_{k-1}^2 - (\varepsilon_k - \varepsilon_l)^2}. \quad (4.4)$$

В нерелятивистском приближении ( $k \ll 1$ ,  $l \ll 1$ ,  $x \ll 1$ ) оба выражения для  $\Phi(k, l)$  совпадают:

$$\Phi(k, l) = -\frac{(k-1)^2}{2|x^2 + (k-1)^2|}. \quad (4.5)$$

Нас интересует сейчас не отличие выражения (4.3) от (4.4), связанное с различными методами их получения<sup>8</sup>, а те ошибочные выводы, которые получены в [2], а именно: исходя из того факта, что ядро уравнения (4.4) всюду отрицательно, автор этой работы пришел к заключению, что уравнение (4.4) ни при каких значениях  $g^2$  не имеет решений, соответствующих связанным состояниям, т. е. решений, для которых  $\omega < 2$ . Основная ошибка заключается здесь в том, что рассматриваются только такие решения (4.4), которые не меняют знака во всей области изменения  $l$  и  $k$ , и забывается о существовании знакопеременных функций  $a(l)$ , в частности, и таких, для которых

$$I = \int_0^{\infty} a(l) dl = 0.$$

Не вдаваясь в подробное изложение ошибок статьи [2], покажем что в противоположность утверждению ее автора уравнение (4.2) при достаточно больших значениях константы связи  $g$  имеет решения, для которых  $\omega < 2$ . Доказательство не зависит от того, каким из двух выражений — (4.3) или (4.4) — для  $\Phi(k, l)$  мы будем пользоваться. Приведем уравнение (4.2) к вариационному принципу типа (3.2)

$$\omega = \text{extr}(K + V), \quad (4.6)$$

при условии

$$\int dk |a(k)|^2 = 1.$$

Ограничимся рассмотрением таких функций, для которых  $a(k) = 0$  при  $k > k_0$ , где

$$k_0 \ll 1 \quad \text{и} \quad k_0 \ll x. \quad (4.7)$$

Мы покажем, что для этого ограниченного класса функций функционал  $(K + V)$  при достаточно больших значениях  $g$  становится отрицательным. Отсюда будет следовать, что истинный экстремум функционала  $(K + V)$ , т. е. наинизшая возможная энергия  $\omega$  (при достаточно больших  $g$ ), заведомо будет лежать ниже 2.

<sup>8</sup> Следует заметить, что, поскольку метод канонических преобразований, при помощи которого получен потенциал, использованный в [2], не является однозначным, следует отдать предпочтение методу получения потенциала, принятому в I и в этой статье.

Рассматривая функцию класса (4.7), можно, очевидно, не только воспользоваться нерелятивистским выражением (4.5) для ядра  $\Phi(k, l)$  интегрального уравнения (4.2), но и пренебречь в знаменателе этого выражения членом  $(\mathbf{k}-\mathbf{l})^2$ , т. е. положить

$$\Phi(k, l) = -\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{l})^2}{2x^2}.$$

Соответственно этому математическое ожидание потенциальной энергии  $V$  (для функций, зависящих только от модуля вектора  $\mathbf{k}$ ) примет вид

$$\begin{aligned} V &= -\frac{g^2}{16\pi} \int dk dl \Phi(k, l) a(k) a(l) = \\ &= \frac{\pi g^2}{2x^2} \int_0^{k_0} k^2 dk \int_0^{k_0} l^2 dl (k^2 + l^2) a(k) a(l). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Выберем в качестве пробной функции  $a(k)$  функцию

$$\begin{aligned} a(k) &= A \quad \text{при } 0 < k < \alpha k_0, \\ a(k) &= -A \quad \text{при } \alpha k_0 < k < k_0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $\alpha$  и  $A$  — постоянные, причем  $0 < \alpha < 1$ . Условия нормировки будут удовлетворены, если

$$A^2 = 3 [4\pi k_0^3 (2\alpha^3 - 1)]^{-1}$$

(очевидно, что должно быть  $\alpha^3 > 1/2$ ).

Внося (4.9) в (4.8), получим

$$V = \frac{\pi g^2 A^2 k_0^8}{15x^2} (2\alpha^3 - 1)(2\alpha^5 - 1) = \frac{g^2 k_0^5 (2\alpha^5 - 1)}{20x^2}. \quad (4.10)$$

Если  $\alpha^5 < 1/2$  (причем  $\alpha^3 > 1/2$ ), то  $V$  отрицательно, что и требовалось доказать.

В связи с изложенным отпадает также утверждение о неэквивалентности в рассмотренной задаче импульсного и координатного представлений, содержащееся в [2].

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
2 сентября 1952 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. Тамм. J. Phys. USSR, 1945, 9, 449 (наст. том, работа 42. — Прим. ред.).
2. M. Levi. Phys. Rev., 1951, 84, 441.
3. N. Kemmer. Helv. Phys. Acta, 1937, 10, 47.
4. E. E. Salpeter, H. A. Bethe. Phys. Rev., 1951, 84, 1232.

*Примечание.* В этой статье впервые для описания резонансного состояния нуклона-изобары  $\Delta(1236)$  было использовано релятивистское уравнение со спином  $3/2$ .

# ПОЛУФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ $\pi$ -МЕЗОНОВ С НУКЛОНАМИ.

## I. РАССЕЙЯНИЕ $\pi$ -МЕЗОНОВ НУКЛОНАМИ <sup>1</sup>

*Совместно с Ю. А. Гольфандом, В. Я. Файнбергом*

В основу полуфеноменологической теории взаимодействия  $\pi$ -мезонов с нуклонами положено предположение о существовании у нуклона (помимо основного состояния) возбужденного («изобарного») состояния, обычный и изотопический спины которого равны  $3/2$ . Теория строится релятивистски-инвариантно. В настоящей статье рассмотрена задача о рассеянии  $\pi$ -мезонов нуклонами с учетом затухания. При надлежащем выборе входящих в теорию четырех свободных параметров удастся достичь удовлетворительного согласия с экспериментальными данными как по угловому распределению рассеянных  $\pi$ -мезонов, так и по зависимости полного сечения от энергии во всем исследованном интервале энергии.

### 1. Введение и краткое резюме

Создание последовательной теории взаимодействия нуклонов и мезонов, исходящей из минимально возможного числа допущений, является важнейшей задачей современной теоретической физики. Однако решение этой задачи наталкивается на чрезвычайно большие трудности, одна из причин которых заключается в том, что теория возмущений, лежащая в основе электродинамики, оказалась не применимой к мезодинамике.

Так как построение последовательной теории может потребовать очень значительного времени, то наряду с поисками такой теории представляется желательным также и построение полуфеноменологической теории взаимодействия нуклонов и мезонов. Теория такого рода может непосредственно опереться на обширные опытные данные, полученные в последнее время при изучении рассеяния  $\pi$ -мезонов на нуклонах, фоторождения  $\pi$ -мезонов и т. д. Систематизация и обобщение этих данных могут не только помочь рациональной постановке экспериментальных исследований, но и облегчить задачу построения более последовательной теории.

Наиболее яркая особенность взаимодействия мезонов <sup>2</sup> и фотонов с нуклонами, выявившаяся в последнее время, состоит в том, что это взаимодействие изменяется с энергией немонотонным образом. Так, сечение фоторождения нейтральных  $\pi$ -мезонов на протонах имеет вполне отчетливый, хотя и широкий максимум резонансного типа при энергии фотонов порядка  $250 \text{ Мэв}$  (в системе центра

<sup>1</sup> ЖЭТФ, 1954, 26, 649.

<sup>2</sup> В дальнейшем под термином «мезон» всегда надо понимать  $\pi$ -мезон.

тяжести). В сечении рассеяния  $\pi$ -мезонов на протонах тоже, хотя и гораздо менее отчетливо, намечается максимум приблизительно при той же полной энергии мезонов (кинетическая энергия + энергия покоя).

Анализ данных по фоторождению и по рассеянию мезонов, в частности фазовый анализ углового распределения рассеянных мезонов [1, 2], полностью подтвердил гипотезу об инвариантности по отношению к знаку заряда взаимодействия мезонов с нуклонами, впервые возникшую в теории ядерных сил. Вместе с тем этот анализ показал, что наибольший вклад в рассеяние (а также и в фоторождение) мезонов вносят те состояния системы нуклон + мезон, полный изотопический спин которых  $I$  равен  $3/2$ , а полный механический спин  $J$  равен  $3$  либо  $3/2$ , либо  $1/2$ .

Известно, что из так называемой теории сильной связи вытекает существование возбужденных или изобарных состояний нуклонов, первое из которых характеризуется как раз нужными значениями спинов  $I=J=3/2$ . Таким образом, эта теория позволяет объяснить некоторые качественные особенности наблюдаемых явлений, в том числе резонансный характер зависимости сечений от энергии. Однако в количественном отношении теория сильной связи, так же как и теория возмущений, совершенно неприменима к действительности.

Ввиду всего изложенного мы обратились к построению полуфеноменологической теории следующего характера. Постулируется, что нуклон может находиться не только в обычном состоянии, характеризуемом спинами  $I=J=1/2$  и массой  $M$ , но также в изобарном состоянии со спинами  $^4 I=J=3/2$  и массой  $M_1=M+\Delta$ . Значение энергии возбуждения  $\Delta$  не выводится из каких-либо теоретических соображений, а подбирается так, чтобы по возможности удовлетворить опытным данным. Взаимодействие нуклонов с мезонами характеризуется тремя константами: константой псевдовекторного взаимодействия  $g/\mu$  (где  $\mu$  — масса мезона), константой псевдоскалярного взаимодействия  $g'=sg$  (где  $s$  — число) и константой  $g_1$ , определяющей вероятность таких процессов поглощения или излучения мезонов, при которых нуклон переходит из невозбужденного состояния в изобарное, или обратно. Таким образом, всего в теорию входят четыре свободных параметра:  $\Delta$ ,  $g$ ,  $s$  и  $g_1$ .

Мы подбираем значения этих параметров так, чтобы по возможности наилучшим образом удовлетворить опытным данным по рассеянию мезонов протонами. Эти данные достаточно обширны: измерены полные сечения рассеяния  $\pi^+$ - и  $\pi^-$ -мезонов с кинетической энергией от нескольких десятков  $Mэв$  до  $135 Mэв$  ( $\pi^+$ ) и

<sup>3</sup> Как известно, фазовый анализ имеющихся экспериментальных данных по рассеянию допускает два различных решения, соответствующих преобладанию состояний либо с  $J=3/2$ , либо с  $J=1/2$ .

<sup>4</sup> В настоящее время нами рассматривается также вариант  $I=3/2$  и  $J=1/2$ .

до 212 Мэв ( $\pi^-$ ) [3], а также своеобразное угловое распределение рассеянных мезонов (в том числе и нейтральных, образующихся при перезарядке на протонах) при энергиях от 40 до 192 Мэв [2, 4]. Все эти экспериментальные данные, как нам представляется, достаточно хорошо описываются предлагаемой теорией при надлежащем подборе указанных четырех констант<sup>5</sup>.

Теория эта излагается в разделах 2—6. В разделе 2 обосновывается сделанный нами выбор лагранжиана взаимодействия нуклонов с мезонным полем. Не только мезоны, но и нуклоны трактуются нами строго релятивистски, что существенно сужает произвол в формулировке основных уравнений и оказывает весьма заметное количественное влияние на сечение рассеяния мезонов даже при сравнительно малых энергиях ( $\sim 50$  Мэв).

Свойства входящих в лагранжиан матриц изотопического спина системы мезон+нуклон кратко изложены в Приложении А. В разделе 3 вычисляются матричные элементы рассеяния мезона на нуклоне во втором порядке ( $\sim g^2$  и  $g_1^2$ ). Так как наша теория является полуфеноменологической, мы вправе ограничиться только этими членами и вовсе не принимать во внимание высших приближений, влияние которых согласно основной идее теории учитывается введением в нее изобарного состояния нуклона. Сечения рассеяния вычисляются в разделе 4 с учетом затухания падающей волны и выражаются через фазы парциальных волн. При этом используются ортогональная и нормированная системы инвариантных угловых функций, свойства которых для удобства читателя изложены в Приложении Б. Наконец, в разделе 5 производится сравнение теории с опытными данными по рассеянию, а также с данными по распаду мезоводородного атома. Выясняется, что наилучшее согласие получается при следующих значениях параметров<sup>6</sup>:  $\Delta=2,1\mu$ , причем либо  $s=2,3$ ,  $g^2=0,20$  и  $g_1^2=0,13$ , либо  $s=2,0$ ,  $g^2=0,10$  и  $g_1^2=0,12$ . Точность имеющихся экспериментальных данных не позволяет отдать явное предпочтение одной из этих систем значений.

В отдельной статье мы рассмотрим вопрос о применении нашей теории к определению ядерных сил между нуклонами. Не приходится сомневаться в том, что на не слишком малых расстояниях между нуклонами эти силы обуславливаются обменом  $\pi$ -мезонами. Так как этот обмен сводится к сочетаниям тех же актов излучения и поглощения мезонов, к которым сводится и рассеяние мезонов нуклонами, то всякая, хотя бы и феноменологическая, теория, которая правильно описывает это рассеяние, должна дать возможность без каких-либо новых допущений определить и силы

<sup>5</sup> В последнее время появились данные по рассеянию мезонов больших энергий, которые оказались в хорошем согласии с теорией вплоть до энергий порядка 400 Мэв (см. раздел 5). — *Примечание при корректуре.*

<sup>6</sup> Всюду, где не оговорено противное, мы пользуемся системой единиц, в которых  $\hbar=c=1$ .



взаимодействия между нуклонами, находящимися на не слишком малых расстояниях друг от друга <sup>7</sup>.

В рамках предлагаемой теории в настоящее время нами рассчитываются ядерные силы, процессы фоторождения мезонов на нуклонах и рассеяния света на нуклонах.

Когда все основные результаты, изложенные в настоящей статье, были уже нами получены, нам стала известна работа [5]. Все исходные положения нашей работы и указанной работы [5] совершенно идентичны. Существенные же отличия состоят в следующем.

Во-первых, авторы работы [5] приближенно учитывают затухание падающей волны только в одном (резонансном) члене формулы, выражающей сечение рассеяния мезонов, тогда как мы последовательно учитываем затухание во всех членах этой формулы, что существенно видоизменяет значение сечения при больших энергиях.

Во-вторых, в работе [5] при вычислении рассеяния учитывается либо только псевдоскалярная, либо только псевдовекторная связь нуклонов с мезонами. Правда, при этом авторы приходят к заключению, что для правильного описания результатов эксперимента необходимо учесть обе связи одновременно (как это делаем мы), но обещают это сделать лишь в следующей статье <sup>8</sup>.

В-третьих, авторы [5] вовсе не касаются вопроса о ядерных силах и возможности определения их из данных по рассеянию.

Наконец, в-четвертых, они вычисляют фоторождение мезонов (опять-таки недостаточно последовательно учитывая затухание) и показывают, что учет изобарных состояний позволяет качественно объяснить зависимость сечения фоторождения от энергии фотонов; подробного количественного сравнения теории с опытом они не проводят.

## 2. Лагранжиан нуклона, взаимодействующего с мезонным полем

Условимся пользоваться обозначениями Фейнмана [6], добавив для ясности знак  $\wedge$  над выражениями типа

$$\hat{a} = \gamma_{\mu} a_{\mu}, \quad (2.1)$$

где  $a_{\mu}$  — произвольный вектор,  $\gamma_4 = \beta$ ,  $\gamma_i = \beta \alpha_i$ . Всюду, если не оговорено противного, греческие индексы пробегают значения

<sup>7</sup> Нетрудно убедиться, что если теория правильно описывает рассеяние мезонов вплоть до энергии мезонов  $\epsilon_0$  (в системе центра масс), то она должна позволить определить взаимодействие нуклонов вплоть до расстояний между ними порядка  $r_0 = (\epsilon_0^2 - \mu^2)^{-1/2}$ , если только на этих расстояниях не начинают уже сказываться поля мезонов более тяжелых, чем  $\pi$ -мезоны.

<sup>8</sup> Необходимость учитывать обе связи одновременно наиболее непосредственным образом вытекает из анализа данных по распаду мезоводородного атома (см. раздел 5).

1, 2, 3, 4, а латинские только 1, 2, 3. Напомним также, что

$$(ab) = a_\mu b_\mu = a_4 b_4 - a_i b_i, \quad i\hat{\nabla} = \hat{p} = i\beta \frac{\partial}{\partial t} + i\beta\alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.2)$$

и что  $x_4 = t$ .

Волновая функция нуклона, являющегося частицей с (механическим) спином  $1/2$ , есть биспинор  $\psi_\sigma$ . Волновая функция изобары, т. е. частицы с (механическим) спином  $3/2$ , есть спин-вектор  $B_{\sigma, \nu}$ , где  $\nu$  — векторный индекс, а  $\sigma$  — спиновый.

Чтобы написать лагранжиан для частицы со спином  $3/2$ , вводим, согласно [7], вспомогательный биспинор  $D_\sigma$ . Функция Лагранжа свободного движения нуклона в невозбужденном и в изобарном состояниях имеет вид

$$\mathcal{L}_0 = \psi^+ (i\hat{\nabla} - M) \psi - B_\mu^+ (i\hat{\nabla} - M_1) B_\mu + \\ + i \left( B_\mu^+ \frac{\partial D}{\partial x_\mu} - \frac{\partial D^+}{\partial x_\mu} B_\mu \right) - \frac{3}{2} i D^+ \hat{\nabla} D - 3M_1 D^+ D, \quad (2.3)$$

где  $M_1 = M + \Delta$  есть масса изобары. В этом уравнении, как и всюду в дальнейшем, мы опустили спиновые индексы у волновых функций  $\psi$ ,  $D$  и  $B_\mu$ .

Как известно, спин-вектор  $B_\mu$  подчинен дополнительному условию

$$\hat{B} = \gamma_\mu B_\mu = 0, \quad (2.4)$$

которое должно быть учтено при варьировании функции Лагранжа. Напомним, что из уравнений свободного движения частицы со спином  $3/2$ , получающихся при варьировании  $\mathcal{L}_0$ , следует, что

$$D = 0, \quad \partial B_\mu / \partial x_\mu = 0. \quad (2.5)$$

При введении взаимодействия мы будем исходить из постулата об инвариантности уравнений движения по отношению к вращениям изотопического пространства (зарядово-независимое взаимодействие). В силу этого постулата функция Лагранжа, описывающая взаимодействие нуклона с мезонным полем, не связанное с возбуждением изобар, должна иметь вид

$$\mathcal{L}_1 = \frac{ig\sqrt{4\pi}}{\mu} \psi^+ \sum \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \{ (\tau_r^+ b_r^+(q_\mu) - \\ - \tau_r b_r(q_\mu)) \gamma_5 \hat{q} + s\mu (\tau_r^+ b_r^+(q_\mu) + \tau_r b_r(q_\mu)) \gamma_5 \} \psi, \quad (2.6)$$

где

$$b_r(q_\mu) = a_r(q_\mu) e^{-i(qx)}.$$

Здесь  $g/\mu$  — константа псевдовекторного, а  $sg$  — константа псевдоскалярного взаимодействия нуклона с мезонным полем,  $\mu$  — масса  $\pi$ -мезона<sup>9</sup>,  $q$  — четырехмерный импульс мезона, а  $\varepsilon$  —

<sup>9</sup> Разницей масс нейтрального и заряженного мезонов мы пренебрегаем и учтем ее только при рассмотрении распада мезоводородного атома.

его энергия, так что  $\epsilon=q_4$ ,  $\tau_r$  — матрицы изотопического спина,  $a_r(q_\mu)$  и  $a_r^+(q_\mu)$  — соответственно операторы исчезновения и рождения мезонов с импульсом  $q_\mu$  и сорта  $r$ . Индекс  $r$  служит для различения  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  и  $\pi^0$ -мезонов (см. Приложение А).

Переходим к той части лагранжиана  $\mathcal{L}_2$ , которая связывает изобарные состояния с невозбужденными нуклонными состояниями. Ввиду условия (2. 4) инвариантную комбинацию волновых функций  $\psi$  и  $B_\mu$  можно составить только с привлечением вектора  $q_\mu$  (псевдовекторная связь). При этом нужно сделать определенное допущение о четности величины  $\psi^+ B_\mu q_\nu$ : если она является скаляром, то ввиду псевдоскалярности мезона в лагранжиан должна войти матрица  $\gamma_5$ ; если же она псевдоскаляр, то  $\gamma_5$  в лагранжиане  $\mathcal{L}_2$  отсутствует. В нерелятивистском приближении (т. е. при  $M \rightarrow \infty$  и  $M_1 \rightarrow \infty$ ) выражение  $\psi^+ \gamma_5 (Bq)$  обращается в нуль (если  $\psi$  и  $B_\mu$  удовлетворяют уравнениям свободного движения с положительной энергией), тогда как выражение  $\psi^+ (Bq)$  конечно. Ввиду того что, как показывает опыт, вероятность возбуждения изобарного состояния мезонами велика даже при энергиях, много меньших чем  $M$ , мы остановимся на второй возможности. Это допущение вполне соответствует трактовке изобары, как системы «нуклон +  $\pi$ -мезон». Оно приводит к следующему виду лагранжиана:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{ig_1 \sqrt{4\pi}}{\mu} \sum \{ \psi^+ (S_r^+ b_r^+(q_\mu) - S_r b_r(q_\mu)) (qB) + \\ + (B^+ q) (S_r^+ b_r^+(q_\mu) - S_r b_r(q_\mu)) \psi \}. \quad (2. 7)$$

В этом выражении  $g_1$  означает третью по счету константу взаимодействия, а  $S_r$  и  $S_r^+$  — матрицы в изотопическом пространстве, переводящие невозбужденные состояния в изобарные и обратно. Вид этих матриц определен в Приложении А.

Следует отметить, что (2.7) не является самым общим возможным видом лагранжиана, связывающего невозбужденные и изобарные состояния нуклонов. К  $\mathcal{L}_2$  можно еще добавить член  $\mathcal{L}'_2$  типа члена  $\mathcal{L}_1$

$$\mathcal{L}'_2 = \frac{ig'_1 \sqrt{4\pi}}{\mu} \psi^+ \sum \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \{ (S_r^+ b_r^+(q_\mu) - \\ - S_r b_r(q_\mu)) \hat{q} + s'_\mu (S_r^+ b_r^+(q_\mu) + S_r b_r(q_\mu)) \} D + \text{компл. сопр.} \quad (2. 8)$$

с двумя новыми константами  $g'_1$  и  $s'$ . Учет  $\mathcal{L}'_2$  вносит чисто релятивистскую поправку в рассеяние. Чтобы не увеличивать числа свободных параметров теории, мы членов  $\mathcal{L}'_2$  учитывать не будем, хотя и не исключено, что дальнейшее уточнение эксперимента приведет к необходимости ввести в рассмотрение и эти члены<sup>10</sup>.

Помимо  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , в лагранжиан должен входить еще член  $\mathcal{L}_3$ , билинейный в функциях  $B_\mu$  и  $B_\mu^+$  и описывающий взаимодействие

<sup>10</sup> В работе [5] выбран лагранжиан, соответствующий сумме  $\mathcal{L}_2$  и  $\mathcal{L}'_2$  при  $g'_1 = -3/2 g_1$ ,  $s' = 0$ .

изобары с мезонным полем, не связанное с переходом изобары в невозбужденное нуклонное состояние. Однако от этого члена  $\mathcal{L}_3$  зависят только те элементы матрицы рассеяния, которые соответствуют «комбинационному» рассеянию мезонов, после которого первоначально невозбужденный нуклон остается в изобарном состоянии (с последующим излучением второго мезона при распаде изобары).

Нижний предел кинетической энергии падающего мезона, при которой может осуществляться комбинационное рассеяние, равен  $\mu \left(1 + \frac{3\mu}{2M}\right)$ , т. е.  $\sim 170$  Мэв в лабораторной системе. Однако сечения комбинационного и обычного рассеяний сравнимы между собой лишь при энергиях порядка  $\Delta$  в системе центра масс или 470 Мэв в лабораторной системе, о чем свидетельствуют некоторые экспериментальные данные. Поскольку нас интересует область меньших энергий, мы в этой статье член  $\mathcal{L}_3$  рассматривать не будем, т. е. положим, что лагранжиан равен

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2. \quad (2.9)$$

### 3. Матричные элементы рассеяния

Варьируя лагранжиан (2.9) с учетом условия (2.4), получаем уравнения движения нуклона<sup>11</sup>:

$$\begin{aligned} (\hat{p} - M)\psi &= P, \\ (\hat{p} - M_1)B_\mu - 1/2\gamma_\mu(pB) - p_\mu D + 1/4\gamma_\mu\hat{p}D &= R_\mu, \\ 3/2(\hat{p} + 2M_1)D - (pB) &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где мы в соответствии с (2.2) заменили  $i\nabla$  на  $\hat{p}$  и где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} P &= -\frac{ig\sqrt{4\pi}}{\mu}\gamma_5\sum\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\{(\tau_r^+b_r^+ - \tau_r b_r)\hat{q} + s_\mu(\tau_r^+b_r^+ + \tau_r b_r)\}\psi - \\ &- \frac{ig_1\sqrt{4\pi}}{\mu}\sum\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(S_r^+b_r^+ - S_r b_r)(qB), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$R_\mu = \frac{ig_1\sqrt{4\pi}}{\mu}\sum\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(S_r^+b_r^+ - S_r b_r)(q_\mu - 1/4\gamma_\mu\hat{q})\psi. \quad (3.3)$$

Обозначим совокупность волновых функций  $\psi$ ,  $B_\mu$  и  $D$  через  $\Phi$ :

$$\Phi_0 = \psi, \quad \Phi_\mu = B_\mu \quad (\mu = 1, 2, 3, 4), \quad \Phi_5 = D, \quad (3.4)$$

<sup>11</sup> Волновые функции  $\psi$ ,  $B_\mu$  и  $D$  являются, конечно, функциями не только от координат нуклона (например, его импульса и проекции его спинов), но также и от чисел мезонов различных импульсов и различного заряда, имеющихя в описываемом этими функциями состоянии системы.

и запишем уравнения (3.1) в форме

$$\sum_{\beta=0}^5 L_{\alpha\beta} \Phi_{\beta} = \sum_{\beta=0}^5 A_{\alpha\beta} \Phi_{\beta}, \quad (3.5)$$

где  $L_{\alpha\beta}$  — дифференциальный оператор, соответствующий свободному движению нуклона, а  $A_{\alpha\beta}$  — оператор, характеризующий взаимодействие нуклона с мезонным полем. Оператор  $K=L^{-1}$ , обратный оператору  $L$  системы уравнений (3.1), был получен одним из нас [8]; в обозначениях нашей статьи его отличные от нуля элементы записываются так:

$$\begin{aligned} K_{00} &= (\hat{p} - M)^{-1}, \\ K_{\mu\nu} &= (\hat{p} - M_1)^{-1} \left\{ \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{6M_1^2} (\gamma_{\mu} \hat{p} + 2p_{\mu} + 3\gamma_{\mu} M_1) p_{\nu} \right\} (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4), \\ K_{\mu 5} &= \frac{1}{12M_1^2} (\hat{p} - M_1)^{-1} \{ \gamma_{\mu} p^2 + \gamma_{\mu} M_1 \hat{p} + 2p_{\mu} \hat{p} - 4p_{\mu} M_1 \}, \\ K_{5\mu} &= -\frac{p_{\mu}}{3M_1^2}, \quad K_{55} = \frac{1}{6M_1^2} (\hat{p} - 2M_1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ввиду трудностей, связанных с применением метода Гамильтона к решению уравнений для частиц с высшими спинами, матричный элемент второго порядка вычисляется по методу Фейнмана при помощи обратного оператора и имеет вид [8]

$$U = \Phi_{\alpha, \text{кон}}^+ A_{\alpha\beta} K_{\beta\gamma} A_{\gamma\delta} \Phi_{\delta, \text{нач}}, \quad (3.7)$$

где  $\Phi_{\text{нач}}$  и  $\Phi_{\text{кон}}$  — начальная и конечная волновые функции ( $\Phi^+ = \Phi^* \beta$ ). Для рассеяния мезонов на невозбужденном нуклоне (после которого нуклон продолжает оставаться невозбужденным) выражение (3.7) сводится к

$$U = \psi_{\text{кон}}^+ A_{03} K_{\beta\gamma} A_{\gamma 0} \psi_{\text{нач}}. \quad (3.8)$$

Пусть падающий мезон принадлежит к сорту  $r_0$ , а его четырехмерный импульс равен  $q_{0\mu}$ , причем

$$q_0 = l_0, \quad q_{04} = \epsilon_0 = \sqrt{\mu^2 + l_0^2}. \quad (3.9)$$

Соответственно величины для рассеянного мезона обозначим через  $r_1$ ,  $q_{\mu}$ ,  $l_1$ ,  $\epsilon_1$ . Мы будем вести вычисления в системе центра масс, поэтому четырехмерные начальный и конечный импульсы нуклона будут выражаться так:

$$\begin{aligned} p_0 &= -l_0, \quad p_{04} = E_0 = \sqrt{M^2 + l_0^2}, \\ p_1 &= -l_1, \quad p'_4 = E_1 = \sqrt{M^2 + l_1^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Закон сохранения 4-импульса  $p_\mu^0 + q_\mu^0 = p_\mu' + q_\mu'$  в данном случае сводится к равенствам

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon, \quad E_0 = E_1 = E, \quad |l_0| = |l_1| = |l|. \quad (3.11)$$

Матричному элементу рассеяния во втором порядке соответствуют четыре диаграммы, изображенные на рис. 1, где двойная черта отвечает нуклону в изобарном состоянии.

Соответственно этому матричный элемент перехода  $U$  распадается на четыре слагаемых. Если волновую функцию нуклона  $\psi$

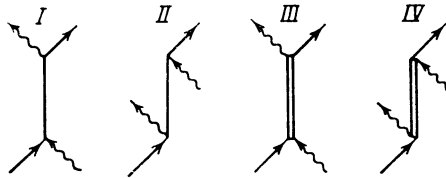


Рис. 1

представить в виде произведения функции  $\varphi$  координат и механического спина на функцию  $\chi$  изотопического спина

$$\psi = \chi\varphi, \quad (3.12)$$

то  $U$  можно записать так:

$$U = \chi_{\text{кон}}^+ \{ \tau_{r_1}^+ \tau_{r_0} A - \tau_{r_0} \tau_{r_1}^+ B + S_{r_1}^+ S_{r_0} C - S_{r_0} S_{r_1}^+ D \} \chi_{\text{нач}}, \quad (3.13)$$

причем

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2\pi g^2}{\mu^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0}} \varphi_{\text{кон}}^+ \gamma_5 (\hat{q}' + s\mu) (\hat{p}_0 + \hat{q}_0 - M)^{-1} \gamma_5 (\hat{q}^0 - s\mu) \varphi_{\text{нач}}, \\ B &= \frac{2\pi g^2}{\mu^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0}} \varphi_{\text{кон}}^+ \gamma_5 (\hat{q}_0 - s\mu) (\hat{p}_0 - \hat{q}' - M)^{-1} \gamma_5 (\hat{q}' + s\mu) \varphi_{\text{нач}}, \\ C &= \frac{2\pi g_1^2}{\mu^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0}} \varphi_{\text{кон}}^+ q_\mu' K_{\mu\nu} (p_0 + q_0) (q_\nu^0 - 1/4 \gamma_\nu \hat{q}^0) \varphi_{\text{нач}}, \\ D &= -\frac{2\pi g_1^2}{\mu^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0}} \varphi_{\text{кон}}^+ q_\mu^0 K_{\mu\nu} (p_0 - q') (q_\nu' - 1/4 \gamma_\nu \hat{q}') \varphi_{\text{нач}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

При вычислении выражений (3.14) нужно учесть, что как начальное, так и конечное состояния нуклона должны обладать положительной энергией. В результате довольно громоздких вычислений<sup>12</sup> получаем следующие значения величин  $A$  и  $C$ :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi g^2}{\mu^2 \varepsilon (M + E)} \left\{ \frac{l^2}{\omega} (2M + \omega + s\mu)^2 (\cos \theta + i(\sigma \mathbf{m})) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega - s\mu)^2 (M + E)^2}{(2M + \omega)} \right\}, \end{aligned}$$

<sup>12</sup> При этих вычислениях удобно пользоваться формальным аппаратом, изложенным в статье [9] одного из нас. В особенности полезна нenumerованная формула в конце стр. 551. (Наст. том, работа 37, стр. 34, примечание 20.—Прим. ред.)

$$C = \frac{\pi g_1^2 (M + E)}{3\mu^2 \varepsilon E} \left\{ \frac{l^4 (3 \cos^2 \theta - 1 + 3i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{m}) \cos \theta)}{(M + E)^2 (2M + \omega + \Delta)} + \right. \\ \left. + \frac{l^2}{\omega - \Delta} (2 \cos \theta - i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{m})) + (3M + 2\Delta + \omega) \frac{(4\varepsilon - \omega)^2}{8M_1^2} - \right. \\ \left. - \frac{l^2 (M + 2\Delta - \omega)}{8(M + E)^2 M_1^2} (\cos \theta + i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{m})) \right\}. \quad (3.15)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\omega = E - M + \varepsilon, \quad \Delta = M_1 - M, \quad \mathbf{m} = (1/l^2) [I_1 I_0]; \quad (3.16)$$

$\theta$  — угол рассеяния мезона, т. е. угол между векторами  $I_0$  и  $I_1$ . Наконец, двурядные матрицы Паули  $\boldsymbol{\sigma}$ , входящие в (3.15), действуют на индекс  $\alpha$ , отличающий состояния свободного движения нуклона положительной энергии, соответствующие различным направлениям его механического спина.

Выражения для величин  $B$  и  $D$  ввиду их громоздкости мы здесь не приводим. Коэффициенты разложения этих величин по ортогональным матрицам  $L_i$  (см. Приложение Б) очень просто связаны с величинами  $b_i$  и  $d_i$ , приведенными в уравнениях (4.16) и (4.19).

Заметим, что мы всюду считаем волновую функцию нуклона нормированной, как обычно:  $\varphi^* \varphi = 1$ .

#### 4. Сечения рассеяния и фазы парциальных волн

Чтобы определить сечение рассеяния мезонов на нуклонах с учетом затухания падающей волны, мы будем исходить из интегрального уравнения Гайтлера [10], которое для нашего случая записывается в следующем виде:

$$F(\mathbf{n}, \xi; \mathbf{n}_0, \xi_0) = U(\mathbf{n}, \xi; \mathbf{n}_0, \xi_0) - \\ - i\eta \int d\Omega' U(\mathbf{n}, \xi; \mathbf{n}', \xi') F(\mathbf{n}', \xi'; \mathbf{n}_0, \xi_0). \quad (4.1)$$

Здесь  $F(\mathbf{n}, \xi; \mathbf{n}_0, \xi_0)$  — амплитуда рассеянной волны;  $U(\mathbf{n}, \xi; \mathbf{n}_0, \xi_0)$  — матричный элемент перехода, вычисленный в предыдущем разделе;  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}_0$  — единичные векторы в направлениях импульсов  $I$  и  $I_0$  рассеянного и падающего мезонов в системе центра тяжести;  $d\Omega'$  — телесный угол, внутри которого лежит  $\mathbf{n}'$ ;  $\xi$  обозначает совокупность параметров, характеризующих сорт мезона  $r$ , его изотопический спин  $\tau$  и спиновое состояние  $\alpha$  нуклона; наконец,

$$\eta = \frac{l^2}{8\pi^2} \frac{dl}{dW} \Big|_{l=l_0} = \frac{\varepsilon l E}{8\pi^2 (\varepsilon + E)} \quad (|I| = |I_0|), \quad (4.2)$$

где  $W$  — полная энергия системы, причем при фиксированных значениях параметров  $\xi$  дифференциальный поперечник рассеяния равен

$$d\sigma = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{\varepsilon E}{\varepsilon + E} \right)^2 |F(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0)|^2 d\Omega. \quad (4.3)$$

Чтобы разрешить уравнения (4.1), воспользуемся тем фактом, что взаимодействие является инвариантным относительно враще-

ний в изотопическом и координатном пространствах, и перейдем к такому представлению, в котором полные угловой и изотопический моменты системы диагональны. Для этой цели возьмем матричные элементы оператора  $F$  по собственным функциям полного изотопического момента  $I$ , принадлежащим заданному значению его проекции  $^{13} I_3$ :

$$(\Phi_{I_3}^I | F(\mathbf{n}, \xi', \mathbf{n}', \xi') | \Phi_{I_3}^I) = \delta_{II'} \delta_{I_3 I_3'} F_{\alpha\alpha'}^I(\mathbf{n}, \mathbf{n}'). \quad (4.4)$$

Разложим далее  $F_{\alpha\alpha'}^I(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$  по системе матриц относительно спиновых переменных  $L_{i, \alpha\alpha'}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ :

$$F_{\alpha\alpha'}^I(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \sum_i a_i^I L_{i, \alpha\alpha'}(\mathbf{n}, \mathbf{n}'). \quad (4.5)$$

Эти матрицы имеют следующий вид:

$$L_i^+(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = (l+1) P_l(\cos \theta) - i\sigma[\mathbf{n}, \mathbf{n}'] P_l^i(\cos \theta) \quad \left(J = l + \frac{1}{2}\right),$$

$$L_i^-(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = l P_l(\cos \theta) + i\sigma[\mathbf{n}, \mathbf{n}'] P_l^i(\cos \theta) \quad \left(J = l - \frac{1}{2}\right). \quad (4.6)$$

При фиксированных  $\mathbf{n}'$  и  $\alpha'$  матрицы  $L_{i, \alpha\alpha'}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$  образуют полный ортогональный набор собственных функций полного углового момента системы  $J$ . Эти матрицы удовлетворяют следующим условиям ортогональности и нормировки:

$$\int d\Omega' L_{i, \alpha\beta}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') L_{j, \beta\gamma}(\mathbf{n}', \mathbf{n}_0) = 4\pi \delta_{ij} L_{\alpha\gamma}(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0). \quad (4.7)$$

Свойства этих матриц изложены в Приложении Б.

Произведя аналогичное разложение величины  $U(\mathbf{n}, \xi; \mathbf{n}', \xi')$ , мы из уравнения (4.1) непосредственно получаем

$$a_i^I = S_i^I / (1 + 4\pi i \eta S_i^I), \quad (4.8)$$

где  $S_i^I$  — соответствующие коэффициенты разложения  $U$  по матрицам  $L_i$ .

При вычислении удобно воспользоваться следующей таблицей, где  $\langle \tau_r^+ \tau_{r_0} \rangle$  означает  $(\Phi^{I+} | \tau_r^+ \tau_{r_0} | \Phi^I)$ :

$I$	$\langle \tau_r^+ \tau_{r_0} \rangle$	$\langle \tau_{r_0}^+ \tau_r \rangle$	$\langle S_r^+ S_{r_0} \rangle$	$\langle S_{r_0} S_r^+ \rangle$
$1/2$	$3/2$	$-1/2$	0	4
$3/2$	0	1	3	1

Получаем

$$U^{1/2} = 3/2 A + 1/2 B - 4D, \quad U^{3/2} = -B + 3C - D. \quad (4.9)$$

<sup>13</sup>  $F^I$  не зависит от  $I_3$  вследствие инвариантности взаимодействия относительно вращений в изотопическом пространстве.



Введем обозначение

$$\operatorname{tg} \delta_i^I = -4\pi\eta S_i^I. \quad (4.10)$$

Учитывая формулы (4.2), (4.3), (4.8), (4.10) и производя суммирование по спинам конечного и усреднение по спидам начального состояния нуклона, получаем для дифференциального сечения рассеяния  $\pi$ -мезонов неполяризованными нуклонами при заданном  $I$  выражение

$$\frac{d\sigma^I}{d\Omega} = \frac{1}{2l^2} \operatorname{Sp} \left| \sum_i L_i \sin \delta_i^I \exp \{i\delta_i^I\} \right|^2. \quad (4.11)$$

Из сравнения этой формулы с формулой (3.16) работы [11] следует, что  $\delta_i^I$  суть не что иное, как фазы парциальных волн, отвечающие определенным значениям изотопического спина  $I$ , полного углового момента  $J$  и орбитального момента  $l$ .

Рассмотрим сначала рассеяние  $\pi^+$ -мезонов протонами. В этом случае начальное и конечное состояния системы являются собственными состояниями полного изотопического момента  $I=3/2$ . Поэтому выражение для дифференциального сечения рассеяния  $\pi^+$ -мезонов протонами совпадает с (4.11) при  $I=3/2$ .

Амплитуды упругого рассеяния  $\pi$ -мезонов на протоне и процесса перезарядки ( $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ ) следующим образом выражаются через  $F^I$  (см. [11], формула (2.16)):

$$F_{(-)} = \frac{1}{3} (F^{3/2} + 2F^{1/2}), \quad F_{(0)} = \frac{\sqrt{2}}{3} (F^{3/2} - F^{1/2}). \quad (4.12)$$

Отсюда для дифференциального сечения упругого рассеяния  $\pi^-$ -мезонов протонами и процесса перезарядки получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{(-)}}{d\Omega} &= \frac{1}{18l^2} \operatorname{Sp} \left| \sum_i L_i (\sin \delta_i^{3/2} \exp \{i\delta_i^{3/2}\} + 2 \sin \delta_i^{1/2} \exp \{i\delta_i^{1/2}\}) \right|^2, \\ \frac{d\sigma_0}{d\Omega} &= \frac{1}{9l^2} \operatorname{Sp} \left| \sum_i L_i (\sin \delta_i^{3/2} \exp \{i\delta_i^{3/2}\} - \sin \delta_i^{1/2} \exp \{i\delta_i^{1/2}\}) \right|^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Формулы (4.11) и (4.13) выражают сечения рассеяния  $\pi$ -мезонов на протонах через фазы  $\delta_i^{3/2}$  и  $\delta_i^{1/2}$  парциальных волн, соответствующих двум возможным значениям изотопического спина  $I=1/2$  и  $I=3/2$  системы мезон+нуклон.

Нам остается привести окончательные выражения для этих фаз. Исходя из уравнений (3.13)–(3.16) и (3.9), удобно представить выражения (4.10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_i^{3/2} &= \frac{l(M+E)}{2\mu^2(M+\omega)} \left[ g^2 b_i - g_1^2 \left( c_i - \frac{1}{3} d_i \right) \right], \\ \operatorname{tg} \delta_i^{1/2} &= - \frac{l(M+E)}{2\mu^2(M+\omega)} \left[ \frac{1}{2} g^2 (3a_i + b_i) - \frac{4}{3} g_1^2 d_i \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь величины  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  и  $d_i$  пропорциональны коэффициентам разложения величин  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  [см. уравнение (3.15)] по операторам  $L_i$ . Мы приведем здесь значения этих величин только для волн  $S$ ,  $P_{1/2}$  и  $P_{3/2}$ , т. е. при  $i=1, 2, 3$  соответственно:

$$a_1 = -\frac{(\omega - s\mu)^2}{(2M + \omega)}, \quad a_2 = -\frac{l^2(2M + \omega + s\mu)^2}{\omega(M + E)^2}, \quad a_3 = 0; \quad (4.15)$$

$$b_1 = \frac{1}{(2\varepsilon E - \mu^2)} \left\{ \omega s^2 \mu^2 + (\omega + 2s\mu)(2\varepsilon^2 - \omega^2) - \frac{4Ml^2(\omega + \varepsilon)}{(M + E)} + \right. \\ \left. + \frac{(x-1)(2M + s\mu)^2}{2(M + E)^2} [4\omega M^2 + 4(\omega - \varepsilon)^2 M + \omega(\omega - 2\varepsilon)^2] \right\}, \\ b_2 = \frac{l^2(2s\mu - \omega)}{(M + E)^2} + \frac{(2M + s\mu)^2}{2} \left\{ \frac{\alpha x(2M + \omega)}{(M + E)^2} + \frac{(1-x)\omega}{l^2} \right\}, \quad (4.16)$$

$$b_3 = (2M + s\mu)^2 \left[ \frac{\omega(1-x)}{2l^2} - \frac{(2M + \omega)}{4x(M + E)^2} \{3(1-x) + \alpha^2 x^2\} \right],$$

где положено

$$\alpha = \frac{2l^2}{2\varepsilon E - \mu^2}, \quad x = \frac{1}{2\alpha} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), \quad (4.17)$$

$$c_1 = -\frac{(4\varepsilon - \omega)^2}{8M_1^2} (3M + \omega + 2\Delta), \\ c_2 = \frac{l^2}{8M_1^2} (M + 2\Delta - \omega) \left( \frac{2M + \omega - 4\varepsilon}{M + E} \right)^2, \quad c_3 = \frac{l^2}{\Delta - \omega}; \quad (4.18)$$

$$d_1 = \frac{2(y-1)}{q} P_0 + P_1 + 2(y-1)Q_0 + Q_1, \\ d_2 = \frac{(1-y)}{l^2} P_0 - P_2 - 2(y-1)\beta Q_0 - Q_2, \quad (4.19) \\ d_3 = \frac{(1-y)}{l^2} P_0 - P_2 + \frac{1}{\beta} [\beta^2 y - 3(y-1)] Q_0,$$

где положено

$$q = 2\Delta M + 2\varepsilon E + \Delta^2 - \mu^2, \quad \xi = \Delta/M_1, \\ \beta = \frac{2l^2}{q}, \quad y = \frac{1}{2\beta} \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right), \\ P_0 = (\omega + \Delta) \left[ M^2 - \frac{3}{4}(\Delta - \omega)^2 - (\Delta^2 - \mu^2) \left( 1 + \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{4} + \frac{\mu^2}{4M_1^2} \right) \right] + \\ + 3(\Delta^2 - \mu^2) \left[ \Delta \left( 1 - \frac{\xi}{4} \right) + \frac{\mu^2}{4M_1} \right], \quad (4.20) \\ P_2 = \frac{l^2}{12M_1^2} \left[ 5 - \frac{(\omega + 3\Delta)}{M_1} \right]; \\ Q_0 = \frac{2}{(E + M)^2} \left[ M_1 \left\{ (M + \omega)^2 + \frac{\Delta^2}{8} - \frac{5\omega\Delta}{4} + \frac{\omega^2}{8} - \frac{\mu^2}{2} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{(\Delta + \omega)(\Delta^2 - \mu^2)}{4} + \frac{(3\Delta - \omega)}{16} \left\{ 3\omega(2\Delta - \omega) + \left[ \Delta - \frac{(\Delta^2 - \mu^2)}{M_1} \right]^2 \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{16M_1} \{ 3\omega\Delta^3 - 5(\Delta^2 - \mu^2)^2 \} \right],$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{l^4}{12M_1(E+M)^2} \left( 7 + \frac{\omega - 5\Delta}{M_1} \right), \\
 P_1 &= \frac{1}{q} \left[ p + \omega r + \frac{Ml^2(\varepsilon + 4\omega)}{2(E+M)} - k(2\varepsilon^2 - \omega^2) \right], \\
 Q_2 &= \frac{l^2}{q(E+M)^2} \left[ (2M + \omega)((2M + \omega)^2 - 2\varepsilon^2) + \right. \\
 &\quad \left. + (2M + \omega) \left( \frac{3}{2} \varepsilon M - r \right) + \frac{7}{2} \varepsilon^2 M + p \right].
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

В последних двух формулах положено

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{3\Delta}{4} \left( 1 + \frac{\xi^2 - \xi}{6} \right), \\
 p &= \varepsilon^2 \Delta \left( 7 - \frac{11}{2} \xi + \frac{3}{2} \xi^2 \right) + \frac{\mu^2}{2M_1} \left[ \varepsilon E (13 - 7\xi) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3\mu^2}{4} (11 - 5\xi) \right] - \frac{l^2 \varepsilon^2}{2M_1} (5 - 3\xi), \\
 r &= \frac{\varepsilon E}{2} \left( \xi + \frac{\xi^2}{2} - \frac{3\mu^2}{M_1^2} \right) - \varepsilon^2 \left( 1 + \xi - \frac{\xi^2}{2} - \frac{l^2}{2M_1^2} \right) - \\
 &\quad - \frac{3}{2} \varepsilon \omega + \frac{\mu^2}{4} \left( 11 - \xi - \frac{5}{2} \xi^2 + \frac{9}{2} \frac{\mu^2}{M_1^2} \right).
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

## 5. Сравнение теории с опытом

Экспериментальное изучение рассеяния  $\pi$ -мезонов, генерированных на ускорителях, позволило за последние  $1\frac{1}{2}$ —2 года определить основные характеристики рассеяния их на протонах в довольно большом интервале энергий. Полные сечения рассеяния промерены для  $\pi^+$ -мезонов с энергиями от 37 до 135  $M\varepsilon$  и для  $\pi^-$ -мезонов от 37 до 217  $M\varepsilon$  [3]. Угловое распределение измерено для  $\pi^+$ -мезонов при энергиях 40, 58, 78, 110, 135  $M\varepsilon$ , а для  $\pi^-$ -мезонов при энергиях 120 и 144  $M\varepsilon$  <sup>14</sup> [2, 4] <sup>15</sup>.

Для количественного согласования теории с опытом в нашем распоряжении имеются четыре свободных параметра  $g$ ,  $g_1$ ,  $s$  и  $\Delta$ . При выборе оптимальных значений этих параметров мы не прибегали к весьма трудоемким количественным критериям (типа метода наименьших квадратов), а ограничивались методом проб и интерполяции, стремясь при этом возможно лучше удовлетворить всей совокупности опытных данных.

<sup>14</sup> Говоря об энергии мезона, мы имеем в виду его кинетическую энергию в лабораторной системе координат.

<sup>15</sup> После того как эта работа была сдана в печать, появились новые экспериментальные данные по рассеянию мезонов для энергий вплоть до 1,5  $G\varepsilon$  [14]. Эти данные до 400  $M\varepsilon$  нанесены на рис. 2 и 3 и, как видно из рисунков, хорошо согласуются с предсказаниями теории. При энергиях, больших 400  $M\varepsilon$ , существенную роль начинают играть процессы неупругого рассеяния с образованием нескольких мезонов. В настоящее время ведутся расчеты таких процессов, причем уже получено качественное согласие с опытом. — *Примечание при корректуре.*

Подробный численный анализ привел нас к следующим двум системам значений параметров<sup>16</sup>:

$$I. \Delta = 2,1, \quad s = 2,3, \quad g^2 = 0,10, \quad g_1^2 = 0,12. \quad (5.1)$$

$$II. \Delta = 2,25, \quad s = 2,0, \quad g^2 = 0,20, \quad g_1^2 = 0,13. \quad (5.2)$$

На рис. 2 и 3 нанесены экспериментальные данные о полных и дифференциальных сечениях рассеяния мезонов и теоретически рассчитанные значения этих сечений для обеих систем значений параметров. Из приведенных графиков видно, что наша теория неплохо согласуется с опытом во всем диапазоне измерений. Вместе с тем ясно, что существенно уточнить значение параметров  $\Delta$ ,  $s$ ,  $g^2$ ,  $g_1^2$  и, в частности, надежно установить, какая из двух систем значений этих параметров ближе всего к оптимальной<sup>17</sup>, можно будет только на основе более полных и точных экспериментальных данных, которые пока нельзя считать окончательными.

Необходимо добавить несколько замечаний о том, как производилось вычисление теоретических кривых, нанесенных на рис. 2 и 3.

Во-первых, при вычислении сечений мы учитывали фазы парциальных волн, соответствующих только  $S$ - и  $P$ -состояниям, и пренебрегали всеми остальными фазами. В рассмотренном нами диапазоне энергий это пренебрежение вполне законно. Так, например, численные оценки, проведенные для энергии  $135 \text{ Мэв}$ , показали, что вклад  $D$ -волн в дифференциальные сечения рассеяния не превышает 3—4%. При отбрасывании всех парциальных волн, соответствующих  $l \geq 2$ , выражения для дифференциальных сечений приобретают простой вид:

$$d\sigma_\lambda/d\Omega = a_\lambda + b_\lambda \cos \theta + c_\lambda \cos^2 \theta, \quad (5.3)$$

где индекс  $\lambda$  пробегает значения  $+$ ,  $-$ ,  $0$ , что соответствует упругому рассеянию  $\pi^+$ - и  $\pi^-$ -мезонов и рассеянию  $\pi^-$ -мезонов с перезарядкой. Выражения коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  через фазы парциальных волн см. в [11].

Во-вторых, необходимо отметить некоторую особенность рассеяния с перезарядкой:

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n. \quad (5.4)$$

Так как  $\pi^0$ -мезон, возникший при перезарядке, распадается на два  $\gamma$ -кванта за время  $\sim 10^{-14} \text{ сек}$ , то в эксперименте наблюдаются не рассеянные  $\pi^0$ -мезоны, а  $\gamma$ -кванты распада. Иными словами, вместо углового распределения процесса (5.4) эксперимент дает угловое распределение для процесса

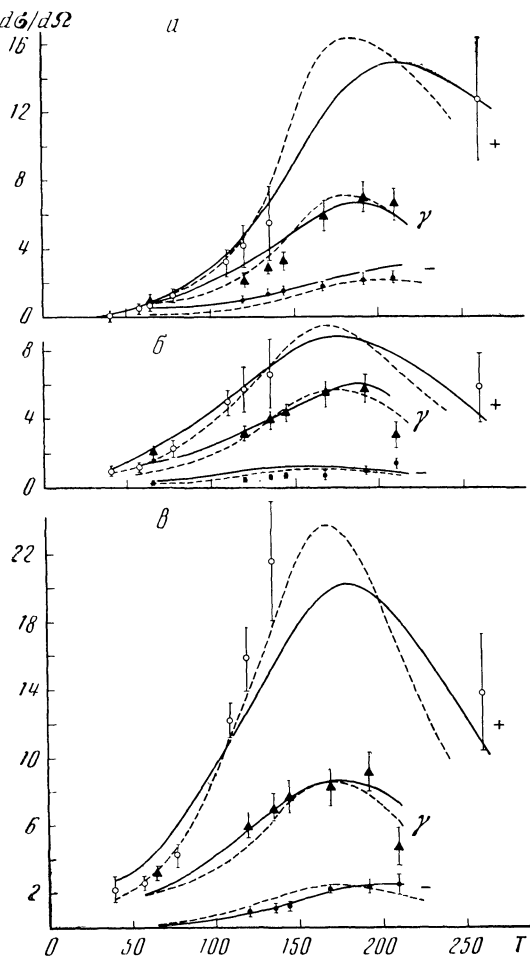
$$\pi^- + p \rightarrow 2\gamma + n. \quad (5.5)$$

<sup>16</sup> При этом мы принимали массу мезона равной  $276 m_e$ .

<sup>17</sup> Промежуточные между указанными в (5.1), (5.2) значения параметров  $g^2$  и  $g_1^2$  согласуются с опытом хуже, чем указанные.

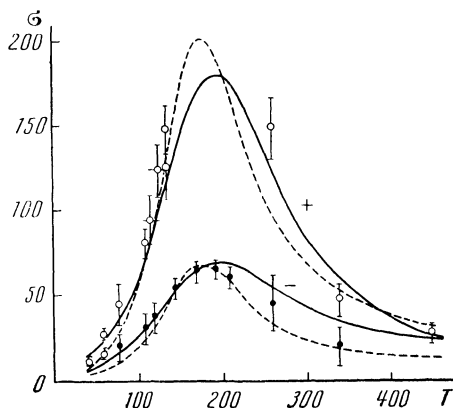
**Рис. 2.** Угловое распределение рассеянных  $\pi$ -мезонов  $d\sigma/d\Omega$  для процессов  $\pi^+ \rightarrow \pi^+$  (+),  $\pi^- \rightarrow \pi^-$  (-),  $\pi^- \rightarrow \pi^0 \rightarrow 2\gamma$  ( $\gamma$ )

По оси абсцисс отложена кинетическая энергия падающих мезонов  $T$  (Мэв) в лабораторной системе отсчета, по оси ординат — дифференциальное сечение  $d\sigma/d\Omega$  ( $10^{-27}$  см<sup>2</sup>/стер) в системе центра масс. Кривые построены для следующих значений угла рассеяния:  $a - \theta = 56^\circ$ ;  $b - \theta = 105^\circ$ ;  $\theta - \theta = 145^\circ$ . Штриховые линии соответствуют значениям параметров:  $\Delta = 2,1\mu$ ,  $s = 2,3$ ,  $g^2 = 0,10$ ,  $g_1^2 = 0,12$ ; сплошные линии:  $\Delta = 2,25\mu$ ,  $s = 2,0$ ,  $g^2 = 0,20$ ,  $g_1^2 = 0,13$



**Рис. 3.** Зависимость полного сечения рассеяния  $\pi$ -мезонов  $\sigma$  ( $10^{-27}$  см<sup>2</sup>) от энергии; (+) — сечение  $\pi^+ \rightarrow \pi^+$ -рассеяния, (-) — суммарное сечение процессов  $\pi^- \rightarrow \pi^-$  и  $\pi^- \rightarrow \pi^0$

Остальные обозначения те же, что и на рис. 2



По угловому распределению этого процесса можно теоретически восстановить дифференциальное сечение процесса (5.5), а именно, сечение процесса (5.5) выражается в форме, аналогичной (5.3):

$$d\sigma_{\gamma}/d\Omega = a_{\gamma} + b_{\gamma} \cos \theta + c_{\gamma} \cos^2 \theta, \quad (5.6)$$

причем, как показали Ферми и др. [2], коэффициенты  $a_{\gamma}$ ,  $b_{\gamma}$ ,  $c_{\gamma}$  связаны простыми соотношениями с коэффициентами  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$ .

В соответствии с (5.3) для полных сечений рассеяния  $\pi^+$ - и  $\pi^-$ -мезонов (включая рассеяние с перезарядкой) мы пользовались выражениями

$$\sigma_+ = 4\pi(a_+ + \frac{1}{3}c_+), \quad \sigma_- = 4\pi(a_- + a_0 + \frac{1}{3}c_- + \frac{1}{3}c_0). \quad (5.7)$$

Теоретические кривые на приведенных выше графиках были вычислены по формулам (5.3), (5.6), и (5.7), причем фазы парциальных волн вычислялись по формулам (4.14).

В заключение произведем сравнение результатов теории с экспериментальными данными для процесса перезарядки в области малых энергий. Как показано в [12], экспериментальные данные по  $K$ -захвату  $\pi^-$ -мезона в водороде, а также экстраполяция данных по фоторождению  $\pi^-$ -мезонов в области малых энергий позволяют оценить вероятность  $K$ -захвата  $\pi^-$ -мезона с образованием  $\pi^0$ -мезона. Грубая оценка приводит к значениям вероятности  $R$  порядка  $10^{15} \text{ сек}^{-1}$ .

Теоретический расчет вероятности этого процесса приводит к формуле

$$R = 19,6 \cdot 10^{-27} \left(\frac{8\pi}{9}\right) \left(\frac{3g^2s}{M}\right)^2 \left(\frac{v_0}{\pi b^3}\right),$$

где  $v_0$  — скорость  $\pi^0$ -мезона, равная  $8 \cdot 10^9 \text{ см/сек}$ , а  $b = 2,2 \times 10^{-11} \text{ см}$  — радиус орбиты мезоводородного атома.

Подстановка в эту формулу численных значений дает

$$R = 0,46 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1} \quad \text{и} \quad 0,14 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$$

соответственно для первого и второго вариантов (5.1) и (5.2) значений параметров  $g^2$  и  $s$ , что по порядку величины согласуется с приведенной выше оценкой.

В заключение мы хотим выразить глубокую признательность за ценную помощь, оказанную нам при выполнении этой работы, Л. В. Парийской, а также В. П. Силину и Ю. К. Хохлову.

# Приложение А

## Матрицы в изотопическом пространстве

$\psi$ -функция частицы, могущей находиться в состояниях с изотопическим спином  $1/2$  и  $3/2$ , рассматриваемая как вектор в изотопическом пространстве, должна обладать шестью компонентами:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{I_3}^{1/2} \\ \Phi_{I_3}^{3/2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A. 1})$$

где  $\Phi_{I_3}^{1/2}$  и  $\Phi_{I_3}^{3/2}$  — функции частицы, находящейся в состоянии с изотопическим спином  $1/2$  и  $3/2$  соответственно, причем  $\Phi_{I_3}^{1/2}$  имеет две компоненты ( $I_3 = \pm 1/2$ ), а  $\Phi_{I_3}^{3/2}$  — четыре компоненты ( $I_3 = \pm 1/2, \pm 3/2$ ).

Оператор полного изотопического момента такой частицы равен

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \tau & | \\ \hline & \mathbf{T} \end{pmatrix}, \quad (\text{A. 2})$$

где  $\tau$  и  $\mathbf{T}$  — операторы изотопического спина соответственно в невозбужденном ( $I=1/2$ ) и возбужденном ( $I=3/2$ ) состояниях. Проекции этих векторов могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \tau_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ T_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, & T_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \\ T_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A. 3})$$

Необходимо также построить векторный оператор, описывающий переходы из состояний  $\Phi_{I_3}^{1/2}$  в состояние  $\Phi_{I_3}^{3/2}$  и обратно. Если потребовать, чтобы этот оператор, будучи эрмитовым, был вектором в изотопическом пространстве (т. е. надлежащим образом преобразовывался при вращении этого пространства), то вид его определяется однозначно с точностью до постоянного множителя [13]. Мы обозначим его через  $S$  и положим

$$S_1 = \left( \begin{array}{cc|cccc} & & \sqrt{3} & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ \hline \sqrt{3} & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & 0 & \\ 0 & -\sqrt{3} & & & & \end{array} \right),$$

$$S_2 = \left( \begin{array}{cc|ccc} & & i\sqrt{3} & 0 & i & 0 \\ & 0 & 0 & i & 0 & -\sqrt{3} \\ \hline -i\sqrt{3} & 0 & & & & \\ 0 & -i & & & & \\ -i & 0 & & & 0 & \\ 0 & -i\sqrt{3} & & & & \end{array} \right), \quad (\text{A. 4})$$

$$S_3 = 2 \left( \begin{array}{cc|cccc} & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & 0 & \\ 0 & 0 & & & & \end{array} \right).$$

Волновую функцию  $\pi$ -мезона также можно рассматривать как вектор в изотопическом пространстве. При этом компоненты этого вектора следующим образом связаны с волновыми функциями  $\varphi$  и  $\varphi_0$  заряженного и нейтрального мезонов:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + \varphi^*}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2 = \frac{i(\varphi - \varphi^*)}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_3 = \varphi_0. \quad (\text{A. 5})$$

Из векторов  $\tau$ ,  $T$ ,  $S$  и  $\varphi$  можно построить всего три независимых вещественных инварианта, линейных относительно  $\varphi_i$ , а именно<sup>18</sup>:

$$\eta_1 = (\tau\varphi), \quad \eta_2 = (S\varphi), \quad \eta_3 = (T\varphi). \quad (\text{A. 6})$$

Если теперь выразить функции  $\varphi$  и  $\varphi_0$  мезонного поля через операторы рождения и исчезновения мезонов  $a^+$  и  $a$ , то для  $\eta_1$  и  $\eta_2$  получим следующие выражения:

$$\eta_1 = \sum \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \{ \tau_r a_r \exp[-iq_\mu x_\mu] + \tau_r^+ a_r^+ \exp[iq_\mu x_\mu] \},$$

$$\eta_2 = \sum \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \{ S_r a_r \exp[-iq_\mu x_\mu] + S_r^+ a_r^+ \exp[iq_\mu x_\mu] \}. \quad (\text{A. 7})$$

Здесь индекс  $r$  пробегает значения  $+$ ,  $-$  и  $0$ , операторы  $a_r^+$  и  $a_r$  означают соответственно рождение (или исчезновение) положительных, отрицательных и нейтральных мезонов<sup>19</sup>, а матрицы  $\tau_r$  и  $S_r$  имеют следующий вид:

$$\tau_+ = \tau_1 + i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- = \tau_1 + i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau_0 = \sqrt{2} \tau_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_+ = \frac{S_1 + iS_2}{2}, \quad S_- = \frac{S_1 - iS_2}{2}, \quad (\text{A. 8})$$

$$S_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} S_3.$$

Выражения для  $T_\pm$  и  $T_0$  не используются в настоящей работе.

<sup>18</sup> Заметим, что векторы  $\tau_i$ ,  $T_i$  и  $S_i$  взаимно ортогональны.

<sup>19</sup> Мы для простоты не выписываем индекс  $q_\mu$  у операторов  $a^+$  и  $a$ .



## П р и л о ж е н и е Б

### Инвариантные функции спина и углов

Рассмотрим операторы в двумерном спиновом пространстве, зависящие от направления двух единичных (полярных) векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  и инвариантные относительно вращения и отражения системы отсчета. Ввиду того что спиновый вектор аксиален, операторы эти должны иметь вид

$$L = F(\cos \theta) + (\sigma [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]) f(\cos \theta), \quad (\text{Б. 1})$$

где  $F$  и  $f$  — произвольные функции косинуса угла  $\theta$  между векторами  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ .

Введя единичный эрмитов оператор

$$h = \frac{(\sigma [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2])}{\sin \theta}, \quad \bar{h} = h^+, \quad h^2 = 1, \quad (\text{Б. 2})$$

можно записать (Б. 1) в форме

$$L = F(\cos \theta) + h \sin \theta f(\cos \theta). \quad (\text{Б. 3})$$

Допустим на время, что вектор  $\mathbf{n}_2$  фиксирован и направлен по оси  $z$ . В этом предположении  $L$  является функцией углов  $\theta$  и  $\varphi$ , определяющих направление вектора  $\mathbf{n}_1$ , причем

$$h = \begin{vmatrix} 0 & ie^{-i\varphi} \\ -ie^{i\varphi} & 0 \end{vmatrix}. \quad (\text{Б. 4})$$

На те же переменные  $\theta$  и  $\varphi$  и на спиновый индекс действует оператор  $M = m + \sigma/2$  полного момента количества движения частицы со спином  $1/2$  ( $m$  есть оператор орбитального момента частицы). Рассмотрим систему операторов  $L_i$ , относящихся к типу (Б.3) и являющихся вместе с тем собственными функциями оператора  $M^2$ :

$$M^2 L_i = j_i(j_i + 1) L_i. \quad (\text{Б. 5})$$

Можно показать, что эта система сводится к совокупности взаимно ортогональных операторов следующих двух классов:

$$\begin{aligned} L_l^+ &= (l+1) P_l^0(\cos \theta) - ih P_l^1(\cos \theta), & j &= l + 1/2, & l &= 0, 1, 2, \dots, \\ L_l^- &= l P_l^0(\cos \theta) + ih P_l^1(\cos \theta), & j &= l - 1/2, & l &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (\text{Б. 6})$$

где  $P_l^0$  и  $P_l^1$  — обыкновенные и присоединенные ненормированные полиномы Лежандра, а  $l$  и  $j$  равны соответственно орбитальному и полному моменту количества движения частицы.

Мы выпишем здесь явные выражения для функций, соответствующих  $S$ - и  $P$ -состояниям:

$$S_{1/2}, L = 1; \quad P_{1/2}, L = \cos \theta + ih \sin \theta; \quad P_{3/2}, L = 2 \cos \theta - ih \sin \theta. \quad (\text{Б. 7})$$

Если теперь отказаться от допущения, что вектор фиксирован и совпадает с осью  $z$ , то все приведенные формулы останутся в силе для операторов

$L_i (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ , за исключением выражения (Б.4), вместо которого надо пользоваться более общим выражением (Б.2). Существенно, что операторы (Б.6) взаимно ортогональны и нормированы в том смысле, что они удовлетворяют уравнениям (4.7).

Для доказательства этих утверждений разложим операторы  $L_i (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  по сферическим функциям со спином [13]:

$$g_m^{l, l+1/2} (\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m-1/2} (\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{l-m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m+1/2} (\theta, \varphi) \end{pmatrix},$$

$$g_m^{l, l-1/2} (\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{l-m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m-1/2} (\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{l+m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m+1/2} (\theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

В результате получаем

$$L_i^+ = 4\pi \sum_{m=-(l+1/2)}^{l+1/2} g_m^{l, l+1/2} (\mathbf{n}_1) g_m^{*l, l+1/2} (\mathbf{n}_2),$$

$$L_i^- = 4\pi \sum_{m=-(l-1/2)}^{l-1/2} g_m^{l, l-1/2} (\mathbf{n}_1) g_m^{*l, l-1/2} (\mathbf{n}_2).$$
(Б. 8)

Условие ортогональности (4.7) следует из представления (Б.8) и ортогональности сферических функций со спином  $g_m^{l, l\pm 1/2}$ .

Заметим, что из (4.7) и (Б.6) следует, что коэффициенты  $S_i$  разложения произвольного оператора  $U_{\alpha 3} (\mathbf{n}, \mathbf{n}')$  по системе операторов  $L_i$

$$U (\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \sum S_i L_i (\mathbf{n}, \mathbf{n}').$$
(Б. 9)

равны

$$S_i^{l+1/2} = \frac{1}{4\pi(l+1)P_l(1)} \int d\Omega' L_i^+ (\mathbf{n}, \mathbf{n}') U (\mathbf{n}', \mathbf{n}),$$

$$S_i^{l-1/2} = \frac{1}{4\pi l P_l(1)} \int d\Omega' L_i^- (\mathbf{n}, \mathbf{n}') U (\mathbf{n}', \mathbf{n}).$$
(Б. 10)

Москва, Физический институт  
им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
6 января 1954 г.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *B. T. Feld*. Phys. Rev., 1953, 89, 330; *N. Jarmie, G. W. Repp, R. S. White*. Phys. Rev., 1953, 91, 1023.
2. *P. L. Anderson, E. Fermi, R. Martin, D. E. Nagle*. Phys. Rev., 1952, 86, 793; 1953, 91, 155.
3. *E. Fermi et al.* Phys. Rev., 1952, 85, 934; 1952, 86, 413.
4. *G. P. Perry, C. E. Angel*. Phys. Rev., 1953, 91, 1289; *D. Bodansky, A. Sachs, S. J. Steinberger*. Phys. Rev., 1953, 90, 996; *E. Fermi et al.* Phys. Rev., 1953, 92, 161.
5. *S. Minami, T. Nakano, K. Nishijima, H. Okonogi, E. Yamada*. Progr. Theor. Phys., 1952, 8, 531.
6. *R. Feynman*. Phys. Rev., 1949, 76, 749, 769.
7. *M. Fierz, W. Pauli*. Proc. Roy. Soc. London, 1939, A 173, 211; *В. Л. Гинзбург*. ЖЭТФ, 1942, 12, 425.
8. *В. Я. Файнберг*. ЖЭТФ, 1953, 25, 644.
9. *И. Е. Тамм*. Z. Phys., 1930, 62, 545 (наст. том, работа 35. — Прим. ред.).
10. *W. Heitler*. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1941, 37, 291.
11. *В. П. Силин, В. Я. Файнберг*. УФН, 1953, 50, 325.
12. *E. Fermi, H. L. Anderson*. Phys. Rev., 1952, 86, 794.
13. *И. М. Гельфанд, З. Я. Шапиро*. УМН, 1952, 7, 3.
14. *L. C. L. Yuan, S. J. Steinberger*. Phys. Rev., 1953, 92, 1578; *R. L. Cool, L. Madansky, O. Piccony*. Phys. Rev., 1954, 93, 250; *W. B. Fowler et al.* Phys. Rev., 1953, 92, 832.

# МЕТОД УСЕЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАССЕЯНИЮ МЕЗОНОВ НУКЛОНАМИ <sup>1</sup>

*Совместно с В. П. Силиным и В. Я. Файнбергом*

Исследуются некоторые общие вопросы, связанные с использованием нового метода усеченных уравнений. Этот метод применяется к проблеме рассеяния мезонов нуклонами в более высоком приближении, чем это делалось до сих пор.

## 1. Введение

Несмотря на известные недостатки современной квантовой теории поля, все доступные экспериментальной проверке выводы квантовой электродинамики полностью подтверждаются опытом. Однако этого пока нельзя сказать о теории мезонов, и, прежде всего, потому, что в теорию мезонов нельзя непосредственно перенести используемое в электродинамике разложение по степеням константы взаимодействия. Тем не менее отнюдь не исключено, что современная мезонная теория соответствует действительности, хотя бы в некоторой ограниченной области энергий. Для получения ответа на этот вопрос необходимо использовать методы решения уравнений поля, отличные от обычной теории возмущений. Из числа такого рода методов наиболее интенсивно разрабатывается в последние годы метод усечения уравнений поля по числу виртуальных частиц (мы будем для краткости называть его методом усеченных уравнений). Преимущества его по сравнению с так называемыми четырехмерными методами (например, с методом Бете—Сальпетера [1]) заключаются в том, что, во-первых, совершенно ясен физический смысл всех величин, с которыми этот метод оперирует, и, во-вторых, он позволяет непосредственно получить из системы четырехмерных ковариантных уравнений сравнительно легко решаемую систему уравнений в трехмерном импульсном пространстве.

Однако суждение о ценности этого метода в конечном счете будет определяться тем, окажется ли достаточным при решении физических задач, хотя бы в ограниченной области энергий, учитывать лишь некоторое небольшое число виртуальных частиц в том смысле, что учет большего числа частиц не будет существенно влиять на результат вычислений и что этот результат совпадает с опытом. Пока не удалось найти способ общего аналитического

---

<sup>1</sup> ЖЭТФ, 1955, 29, 6.

решения этого вопроса, так что ответ на него, по-видимому, будет получен лишь путем непосредственного вычисления различных эффектов.

Главное основание для надежд на возможный успех этого метода заключается, по нашему мнению, в том, что применение его к рассеянию мезонов нуклонами привело к весьма значительному успеху теории — объяснению наблюдаемого на опыте резонанса системы  $\pi$ -мезон+нуклон в состоянии со спинами  $I=J=3/2$  при энергии порядка  $180 Mэв$  (см. [2]).

Метод усеченных уравнений мезодинамики был независимо друг от друга предложен Таммом в 1945 г. [3] и Данковым в 1950 г. [4], которым, однако, было неизвестно, что аналогичный метод был применен к электродинамике Фоком еще в 1934 г. [5]. Не останавливаясь на истории развития метода, отметим лишь две наиболее важные работы последних лет, весьма существенно его усовершенствовавшие. Чини [6] предложил ковариантную формулировку метода и впервые исследовал вопрос о перенормировке в этом методе. Дайсон [7] предложил описывать реальную физическую систему параметрами, характеризующими отличие этой системы не от математического, а от физического вакуума, что, в частности, позволило ему полностью исключить из рассмотрения вакуумные петли, трактовка которых в старом варианте метода встречалась со специфическими трудностями. Предложенный Дайсоном вариант метода мы будем называть новым методом усеченных уравнений.

В настоящей работе, во-первых, рассматриваются некоторые общие вопросы, возникающие при использовании нового метода, и, во-вторых, этот метод применяется к проблеме рассеяния мезонов нуклонами в более высоком приближении, чем это было сделано до сих пор. В разделе 2 формулируются общие правила получения системы ковариантных уравнений в новом методе усеченных уравнений. Подчеркивается существенное различие между указанной формулировкой метода и так называемым методом Леви—Клейна [8], который приводит к появлению в ядре для искомой амплитуды, вообще говоря, расходящегося ряда по степеням константы связи. В разделе 3 рассматривается преобразование ковариантных уравнений к трехмерному импульсному пространству. Раздел 4 посвящен главным образом обсуждению вопроса о выборе правильных граничных условий при решении различных задач в новом методе усеченных уравнений. Показано, что использование связи между амплитудами нового и старого метода позволяет сформулировать граничные условия в новом методе.

В разделе 5 новый метод применяется к исследованию задачи рассеяния  $\pi$ -мезонов нуклонами. Рассмотрено приближение, в котором учитывается вклад в амплитуду рассеяния так называемых «минус-частиц». В разделе 6 кратко сообщаются основные результаты анализа собственно-энергетических членов, возникающих в уравнении для системы мезон+нуклон.

Последовательное устранение расходящихся выражений в уравнениях для системы мезон+нуклон в рассматриваемом в этой работе приближении встречает значительные затруднения. Во-первых, после перенормировки собственно-энергетических ядер возникают два перенормированных заряда [9]; во-вторых, учет конечных добавок от этих ядер приводит к появлению в уравнениях дополнительных полюсов (см. также [10]), и, наконец, в-третьих, в отличие от задачи о взаимодействии двух нуклонов, решение уравнения мезон+нуклон для  $I=1/2$  содержит бесконечности, для устранения которых необходима дополнительная перенормировка [11]. В настоящей работе эти вопросы не обсуждаются.

Нами проводятся численные расчеты для случая  $I=3/2$  без учета собственно-энергетических членов, но с учетом «минус-частиц».

## 2. Общая формулировка нового метода

Будем пользоваться представлением взаимодействия. Пусть  $\Psi(\sigma)$  есть вектор состояния рассматриваемой системы на пространственноподобной трехмерной поверхности  $\sigma$ ;  $\Psi_0(\sigma)$  — соответствующий вектор физического вакуума.

Пусть  $H(x)$  есть гамильтониан взаимодействия в четырехмерной точке  $x$ , лежащей на поверхности  $\sigma$ . Волновые функции подчиняются известным уравнениям:

$$i \frac{\delta \Psi(\sigma)}{\delta \sigma(x)} = H(x) \Psi(\sigma), \quad -i \frac{\delta \Psi^*(\sigma)}{\delta \sigma(x)} = \Psi^*(\sigma) H(x). \quad (2.1)$$

Пусть  $\psi_\alpha^\lambda(x)$  и  $\bar{\psi}_\alpha^\lambda(x)$  суть операторы нуклонного поля в представлении взаимодействия, а  $\varphi^s(x)$  — операторы мезонного поля. Здесь  $\alpha$  — спинорный индекс ( $\alpha=1, 2, 3, 4$ ),  $\lambda$  — индекс изотопического спина нуклона ( $\lambda=1, 2$ ), а  $s$  — индекс изотопического спина мезона ( $s=1, 2, 3$ ). В дальнейшем эти индексы мы часто будем опускать. Операторы  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  и  $\varphi$  подчиняются обычным правилам коммутации:

$$\begin{aligned} [\psi_\alpha^\lambda(x_1), \bar{\psi}_\beta^\mu(x_2)]_+ &= -i \delta_{\lambda\mu} S_{\alpha\beta}(x_1 - x_2), \\ [\varphi^s(x_1), \varphi^{s'}(x_2)]_- &= -i \delta_{ss'} \Delta(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Будем называть величины типа

$$\begin{aligned} \langle \psi(x_1) \rangle_\sigma &\equiv \Psi_0^*(\sigma) \psi(x_1) \Psi(\sigma), \\ \langle \psi(x_1) \varphi(x_2) \rangle_\sigma &\equiv \Psi_0^*(\sigma) \psi(x_1) \varphi(x_2) \Psi(\sigma), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}(x_1) \dots \bar{\psi}(x_n) \psi(y_1) \dots \psi(y_m) \varphi(z_1) \dots \varphi(z_r) \rangle_\sigma &\equiv \\ \equiv \Psi_0^*(\sigma) N \bar{\psi}(x_1) \dots \bar{\psi}(x_n) \psi(y_1) \dots \psi(y_m) \varphi(z_1) \dots \varphi(z_r) \Psi(\sigma) \end{aligned}$$

« $n+m+r$ -частичными амплитудами». Четырехмерные точки  $x_1$ ,  $x_2$  и т. д. совершенно произвольны и не обязаны лежать на поверх-

ности  $\sigma$ . В формулах (2.3)  $N$  означает упорядоченное произведение операторов, т. е. каждый оператор поля  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  и  $\varphi$  представляется в виде суммы оператора поглощения и образования частицы, причем все операторы поглощения располагаются в  $N$ -произведении справа от операторов рождения. Простейшие примеры показывают отличие  $N$ -упорядоченного произведения от обычного

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_\alpha^\lambda(x_1)\psi_\beta^\mu(x_2) &= N\bar{\psi}_\alpha^\lambda(x_1)\psi_\beta^\mu(x_2) - i\delta_{\lambda\mu}S_{\beta\alpha}^{(-)}(x_2 - x_1), \\ \varphi_s(x_1)\varphi_{s'}(x_2) &= N\varphi_s(x_1)\varphi_{s'}(x_2) - i\delta_{ss'}\Delta^{(+)}(x_1 - x_2),\end{aligned}$$

где индексы  $\pm$  означают положительно- и отрицательно-частотные части перестановочных функций  $S$  и  $\Delta$ . При аналогичных преобразованиях более сложных произведений операторов следует применить известную теорему Вика [12].

Из (2.1) легко получается уравнение для амплитуд

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\langle\psi_\lambda(x_1)\rangle_\sigma = \langle[\psi_\lambda(x_1), H(x)]\rangle_\sigma \quad (2.4)$$

и аналогичные уравнения для многочастичных амплитуд.

Если конкретизировать вид гамильтониана и положить

$$H(x) = ig\tau_{\lambda\mu}^s\bar{\psi}^\lambda(x)\gamma^5\psi^\mu(x)\varphi_s(x), \quad (2.5)$$

где  $\tau_{\lambda\mu}^s$  — матрица изотопического спина нуклона, а  $\gamma^5 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = \rho_1$  (мы пользуемся фейнмановским видом дираковских матриц  $\gamma^k$ ), то при помощи (2.2) уравнение (2.4) можно преобразовать к виду

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\langle\psi_\lambda(x_1)\rangle_\sigma = g\tau_{\lambda\mu}^s S(x_1 - x)\gamma^5\langle\psi^\mu(x)\varphi_s(x)\rangle_\sigma. \quad (2.6)$$

Аналогичным образом можно получить уравнения и для других амплитуд. В общем случае в правой части возникает несколько амплитуд. Получающаяся при этом, вообще говоря, бесконечная система уравнений является точной ковариантной системой уравнений поля. Она распадается на независимые подсистемы по величине ядерного заряда — разность числа операторов  $\psi$  и числа сопряженных операторов  $\bar{\psi}$  в каждой подсистеме постоянна.

Чтобы получить приближенную «усеченную» систему уравнений, следует в точной системе уравнений отбросить все амплитуды для числа частиц, большего некоторого  $n_0$ . В результате получится полная и, как можно показать, совместная «усеченная» система уравнений для определения упорядоченных амплитуд с числом частиц, не превышающим числа  $n_0$ .

При проведении вычислений удобно в качестве поверхностей  $\sigma$  выбрать трехмерные плоскости  $t = \text{const}$ . Интегрируя дифференциальные уравнения для амплитуд типа (2.4) по трехмерному пространству, получаем уравнения типа

$$i\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi(x_1)\rangle_t = \int d\mathbf{r}\langle[\psi(x_1), H(x)]\rangle_t, \quad (2.7)$$

где  $x = (\mathbf{r}, t)$ .

Многие авторы [8, 13], работавшие с так называемыми уравнениями Тамма—Данкова, понимают под этим термином одно уравнение для одной амплитуды, соответствующей реально имеющейся в данной задаче системе частиц (например, нуклон+мезон в теории рассеяния или два нуклона в теории дейтрона), причем это уравнение получается из описанной выше системы зацепляющихся уравнений для  $n$  различных амплитуд путем приближенного исключения из нее всех амплитуд, кроме одной-единственной. Практически это исключение сводится к тому, что ядро точного интегрального уравнения для выделенной амплитуды разлагается по степеням константы взаимодействия  $g$  и обрывается на некоторой степени этой константы. Однако так как известно [8], что разложение ядра по степеням  $g$ , вообще говоря, расходится, то такого рода упрощение системы усеченных уравнений может привести к неправильным результатам.

Отметим, что примерно половина входящих в эти уравнения амплитуд всегда может быть из них исключена. Действительно, как следует из изложенного, производные амплитуд с нечетным числом частиц выражаются через амплитуды с четным числом частиц, и наоборот. Поэтому путем интегрирования по времени уравнений типа (2.7) всегда можно выразить, например, все нечетно-частичные амплитуды через четно-частичные и затем вовсе исключить нечетные амплитуды из системы уравнений.

### 3. Переход к импульсному представлению

Выберем в качестве поверхности  $\sigma$  поверхность  $t = \text{const}$ . Ограничимся рассмотрением стационарных состояний физических систем. Вектор состояния таких состояний в представлении взаимодействия имеет вид

$$\Psi(t) = \exp\{i(H_0 - \mathcal{E})t\} \Psi'. \quad (3.1)$$

Аналогичный вид имеет вектор физического вакуума

$$\Psi_0(t) = \exp\{i(H_0 - \mathcal{E}_0)t\} \Psi'_0, \quad (3.2)$$

где  $H_0$  — гамильтониан свободных, невзаимодействующих нуклонного и мезонного полей,  $\mathcal{E}$  — энергия данной системы,  $\mathcal{E}_0$  — энергия физического вакуума и, наконец,  $\psi'$  и  $\psi'_0$  — постоянные векторы в функциональном пространстве.

Разложим операторы  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  и  $\varphi$  в трехмерный ряд Фурье, воспользовавшись известными формулами

$$\varphi_s(x) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (Q_s(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}x} + Q_s^*(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x}),$$

$$\psi_{\alpha}^{\lambda}(x) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{n=1}^4 \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}x} B_n^{\lambda}(\mathbf{p}) u_{\alpha}^n(\mathbf{p}) \quad (3.3)$$



и соответствующим выражением для  $\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4$ . Здесь

$$kx = \omega_k t - \mathbf{k}\mathbf{r}, \quad \omega_k = \sqrt{\mu^2 + \mathbf{k}^2}, \quad (3.4)$$

$Q_s$  и  $Q_s^*$  — соответственно операторы поглощения и испускания мезонов сорта  $s$ , причем

$$[Q_s(\mathbf{k}), Q_s^*(\mathbf{k}')]_- = \delta_{ss} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (3.5)$$

$u_\alpha^n(\mathbf{p})$  — четыре биспинора ( $n = 1, 2, 3, 4$ ), удовлетворяющих уравнению Дирака для заданного  $\mathbf{p}$  и условиям ортогональности

$$\sum_\alpha u_\alpha^{n*}(\mathbf{p}) u_\alpha^{n'}(\mathbf{p}) = \delta_{nn'}, \quad (3.6)$$

причем индексы  $n=1, 2$  соответствуют решениям с положительной энергией, а  $n=3, 4$  — решениям с отрицательной энергией. Далее,

$$px = p_0 t - \mathbf{p}\mathbf{r}, \quad p_0 = \delta_n E_p, \quad E_p = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}, \quad (3.7)$$

причем  $\delta_n = +1$  при  $n = 1, 2$  и  $\delta_n = -1$  при  $n = 3, 4$ . Наконец,  $B_1^\lambda(\mathbf{p})$  и  $B_2^\lambda(\mathbf{p})$  — операторы поглощения нуклонов сорта  $\lambda$  ( $\lambda = 1$  — протон,  $\lambda = 2$  — нейтрон) и импульса  $\mathbf{p}$ , а  $B_3^\lambda(\mathbf{p})$ ,  $B_4^\lambda(\mathbf{p})$  — операторы испускания антинуклонов с импульсом  $-\mathbf{p}$ , причем

$$[B_n^{\lambda*}(\mathbf{p}), B_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}. \quad (3.8)$$

При помощи формул (3.1) и (3.3) можно выразить введенные в разделе 2 и зависящие от времени амплитуды типа  $\langle \psi(x_1) \rangle_t$  через не зависящие от времени амплитуды типа

$$\langle B_n^\lambda(\mathbf{p}) \rangle \equiv \Psi_0'^* B_n^\lambda(\mathbf{p}) \Psi'. \quad (3.9)$$

Так, например, из (2.7), (3.1) и (3.3), приняв во внимание обычные правила коммутации гамильтониана свободного поля  $H_0$  с операторами  $B_n^\lambda$ , получаем

$$\langle \psi(x_1) \rangle_t = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_n \sum_{\mathbf{p}} u_\alpha^n(\mathbf{p}) \exp\{-ipx_1 + i(p_0 - W)t\} \langle B_n^\lambda(\mathbf{p}) \rangle, \quad (3.10)$$

где  $W = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0$  — разность энергии рассматриваемой системы  $\mathcal{E}$  и энергии физического вакуума  $\mathcal{E}_0$ . Таким образом,  $W$  равно наблюдаемой энергии системы.

Для перехода к импульсному представлению нужно еще воспользоваться известными выражениями для перестановочных функций:

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 k e^{-ikx} \delta(k^2 - \mu^2) \varepsilon(k_0), \\ S(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p e^{-ipx} \delta(p^2 - M^2) \varepsilon(p_0) (\hat{p} + M), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $\hat{p} = p_\mu \gamma^\mu$  и

$$\varepsilon(k_0) = 1 \quad \text{при} \quad k_0 > 0, \quad \varepsilon(k_0) = -1 \quad \text{при} \quad k_0 < 0. \quad (3.12)$$

При помощи формул (3.4) и (3.11) система ковариантных усеченных уравнений в четырехмерном координатном пространстве, описанная в разделе 2, может быть преобразована к системе уравнений для стационарных амплитуд типа  $\langle B_n^\lambda(\mathbf{p}) \rangle$  в трехмерном импульсном пространстве. Так, например, если провести это преобразование для уравнения (2.7), то получатся два уравнения — одно для величины  $\sum_{n=1}^2 u_\alpha^n(\mathbf{p}) \langle B_n^\lambda(\mathbf{p}) \rangle$  и другое для  $\sum_{n=3}^4 u_\alpha^n(\mathbf{p}) \langle B_n^\lambda(\mathbf{p}) \rangle$ . Воспользовавшись ортогональностью функций  $u_\alpha^n(\mathbf{p})$  (равенство (3.6)), можно свести эти уравнения к виду

$$\begin{aligned} (W - \delta_n E_p) \langle B_n^\lambda(\mathbf{p}) \rangle &= \frac{ig}{2E_p} \tau_{\lambda\mu}^s \delta_n u^{n*}(\mathbf{p}) \times \\ &\times (M + \hat{p}) \gamma^5 \int d\mathbf{q} \sum_{n'=1}^4 u^{n'}(\mathbf{q}) \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}}} \times \\ &\times \{ \langle B_{n'}^\mu(\mathbf{q}) Q_s(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \rangle + \langle B_{n'}^\mu(\mathbf{q}) Q_s^*(\mathbf{q}-\mathbf{p}) \rangle \}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $\hat{p} = \delta_n E_n \gamma_4 - p\boldsymbol{\gamma}$ .

Отметим, что общие преобразования уравнений, в частности исключение части амплитуд из системы уравнений и их перенормировку, удобно проводить в ковариантных уравнениях, записанных в координатном пространстве. Исключение же углов и численное решение уравнений необходимо проводить в импульсном представлении.

#### 4. «Минус-частицы». Граничные условия

Обратимся к вопросу о смысле стационарных амплитуд типа  $\langle B(\mathbf{p}) \rangle$ , которые мы будем называть дайсоновскими амплитудами.

В старом методе усеченных уравнений состояние системы  $\Psi'$  характеризовалось совокупностью амплитуд типа

$$\langle B(\mathbf{p}) \dots Q(\mathbf{k}) \dots \rangle \equiv \Phi_0^{*B}(\mathbf{p}) \dots Q(\mathbf{k}) \dots \Psi', \quad (4.1)$$

где  $\Phi_0$  — вектор состояния математического вакуума.

Эти амплитуды имеют смысл амплитуд вероятности того, что в состоянии  $\Psi'$  имеется заданное число частиц с определенными импульсами. Из определения математического вакуума следует, что все упорядоченные амплитуды типа (4.1), в которых встречаются операторы испускания частиц, равны нулю.

Дайсоновские амплитуды (3.9) отличаются от старых амплитуд (4.1) тем, что в них вектор состояния математического вакуума  $\Phi_0$  заменен вектором состояния физического вакуума  $\Psi_0'$ . По-

этому дайсоновские амплитуды, вообще говоря, отличны от нуля и в том случае, если в них входят операторы испускания частиц. Так, например, амплитуда  $\langle Q^*(\mathbf{k}) \rangle = \Psi_0'^* Q^*(\mathbf{k}) \Psi'$  описывает вероятность того, что состояние  $\Psi'$  отличается от физического вакуума тем, что в нем недостает одного мезона импульса  $-\mathbf{k}$ , имеющегося в состоянии  $\Psi_0'$ , т. е. в вакууме. Будем говорить в этом случае, что в состоянии  $\Psi'$  имеется один «минус мезон» (или соответственно «минус-нуклон», или «минус-антинуклон»). Отметим важное обстоятельство: если для данного состояния найдены дайсоновские амплитуды, то по этим амплитудам можно определить как «старые» амплитуды типа (4.1) состояния  $\Psi'$ , так и вакуумные амплитуды <sup>2</sup>

$$\Phi_0'^* B(\mathbf{p}) \dots Q(\mathbf{k}) \dots \Psi' \quad (4.2)$$

Таким образом, решение каждой физической задачи новым методом эквивалентно решению старым методом той же задачи и одновременно с этим — задачи об определении амплитуд (4.2), характеризующих состояние физического вакуума.

Система уравнений, которой подчиняются амплитуды Дайсона, имеет следующий вид:

$$(W - \delta_n E_p - \delta_{n'} E_{p'} - \dots - \xi_k \omega_k) \langle B^n(\mathbf{p}) B^{n'}(\mathbf{p}') \dots Q^{\xi_k}(\mathbf{k}) \rangle = X^{nn' \dots \xi_k}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \dots, \mathbf{k}), \quad (4.3)$$

где нами введены обозначения  $\xi_k = \pm 1$ ,

$$Q^{\xi_k}(\mathbf{k}) = Q(\mathbf{k}), \text{ если } \xi_k = +1, \quad Q^{\xi_k}(\mathbf{k}) = Q^*(\mathbf{k}), \text{ если } \xi_k = -1, \quad (4.4)$$

и где  $X(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \dots, \mathbf{k})$  — определенные линейные функции дайсоновских амплитуд.

Если множитель, стоящий в левой части уравнения (4.3), не обращается в нуль, то это уравнение имеет однозначное решение:

$$\langle B^n(\mathbf{p}) B^{n'}(\mathbf{p}') \dots Q^{\xi_k}(\mathbf{k}) \rangle = \frac{X^{nn' \dots \xi_k}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \dots, \mathbf{k})}{W - \delta_n E_p - \delta_{n'} E_{p'} - \dots - \xi_k \omega_k}. \quad (4.5)$$

Напротив, если множитель левой части (4.3) обращается в нуль, то к правой части решения (4.5), которое в этом случае для определенности мы всегда будем понимать в смысле главного значения, можно прибавить с произвольным множителем величину  $\delta(W - \delta_n E_p - \delta_{n'} E_{p'} - \dots - \xi_k \omega_k)$ . Для устранения такой неоднозначности следует, как это делается обычно, учесть граничные условия, без которых всякая физическая задача становится неопределенной. Чтобы сформулировать правильные граничные условия, используем связь амплитуд Дайсона с амплитудами старого метода. Именно, используем формулу (26) работы [7]:

$$a(N, N') = \sum_M \beta^*(N + M) a(N' + M) C(N, N'; M), \quad (D)$$

<sup>2</sup> См. [7], уравнение (26), из которого определяется отношение любых двух «старых» амплитуд как для состояния  $\Psi'$ , так и для состояния  $\Psi_0'$ .

где  $a$  — амплитуда нового метода,  $\alpha$  — амплитуда старого метода для того же состояния,  $\beta$  — амплитуда состояния вакуума,  $C$  — численные коэффициенты,  $N$  и  $N'$  означают соответственно число минус- и плюс-частиц.

Отметим прежде всего, что амплитуды вакуума  $\beta(N)$  не должны содержать  $\delta$ -функций (хотя бы потому, что из соображений релятивистской инвариантности энергия состояния вакуума  $E_0$  после выполнения перенормировок должна равняться нулю). Это приводит к тому, что в формуле (D)  $\delta$ -функции могут возникнуть только благодаря амплитудам  $\alpha(N'+M)$  (так как  $E=W$  при  $E_0=0$ ). Действительно, для амплитуд  $\alpha(N'+M)$  возможно появление  $\delta$ -функций вида  $\delta(W-E_{N'}-E_M)$ . Следовательно, при  $N \neq 0$  в  $a(N, N')$  невозможно появление  $\delta(W+E_N-E_{N'})$ , а при  $N=0$  возможно появление  $\delta(W-E_{N'})$ . Однако это появление  $\delta$ -функции для амплитуд состояний, содержащих только плюс-частицы, определяется обычными граничными условиями. В случае же появления сингулярностей типа  $(W+E_N-E_{N'})^{-1}$ , возникающих для амплитуд состояний, содержащих хотя бы одну минус-частицу, их следует понимать в смысле главного значения [7].

Сделаем два замечания. Во-первых, при стационарной трактовке, которой мы все время придерживаемся, не возникает каких-либо вопросов о характере «включения» взаимодействия. Во-вторых, в методе усеченных уравнений задача о соударении мезона с нуклоном соответствует задаче о соударении в трехмерном пространстве реальных (в данном приближении), а не «голых» частиц. Для того чтобы пояснить последнее, рассмотрим амплитуды, зацепляющиеся в системе усеченных уравнений с амплитудой нулевого приближения

$$\langle B^n(\mathbf{p}) Q(-\mathbf{p}) \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \chi_n, \quad (4.6)$$

(где  $\chi_n=0$  при  $n=3, 4$ ), описывающей движение «голых» невзаимодействующих нуклона и мезона в системе их центра инерции. Эти амплитуды описывают не только акт соударения мезона с нуклоном, но и обрастание «голового» нуклона и «голового» мезона облаком виртуальных частиц. Необходимо подчеркнуть, что такое обрастание имеет место и для бесконечно удаленных друг от друга (в трехмерном пространстве, соответствующем импульсному пространству) мезона и нуклона. Так, например, подстановка (4.6) в уравнение, определяющее амплитуду  $\langle B(\mathbf{p}) Q(\mathbf{k}) Q(\mathbf{l}) \rangle$ , показывает, что выражение для этой амплитуды содержит член, пропорциональный  $\delta(\mathbf{l} + \mathbf{p}_0) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{p}_0)$  и описывающий состояние, в котором первичный «голый» мезон движется с импульсом  $-\mathbf{p}_0$ , а первичный нуклон диссоциировал на нуклон  $\mathbf{p}$  и мезон  $\mathbf{k}$  с общим импульсом  $\mathbf{p}_0$ . Существенно, что при этом амплитуда  $\langle B(\mathbf{p}) Q(\mathbf{k}) Q(\mathbf{l}) \rangle$  выражается через амплитуду  $\langle B(\mathbf{p}) Q(-\mathbf{p}) \rangle$  уравнением типа (4.5) без добавления к его правой части какой-либо  $\delta$ -функции.

Установив граничные условия для уравнений в импульсном пространстве, можно сформулировать соответствующие условия для ковариантных уравнений в координатном пространстве. Как мы убедились в разделе 3, при переходе к импульсному пространству уравнения типа (2. 6) имеют вид

$$i \frac{d}{dt} A(x_1, x_2, \dots; t) = \int d\mathbf{r} Y(x_1, x_2, \dots; \mathbf{r}, t) = \\ = \int d\mathbf{r} \int d\nu f(x_1, x_2, \dots, \mathbf{r}, \nu) e^{-i\nu t}, \quad (4. 7)$$

где  $A$  означает какую-либо амплитуду типа (2. 6). Решение этого уравнения равно

$$A(x_1, x_2, \dots; t) = \int d\mathbf{r} \int \frac{d\nu}{\nu} f(x_1, x_2, \dots, \mathbf{r}, \nu) e^{-i\nu t} + \\ + a(x_1, x_2, \dots), \quad (4. 8)$$

где  $a(x_1, x_2, \dots)$  — произвольная, не зависящая от времени функция, а интеграл по  $\nu$  нужно понимать в смысле главного значения (если  $\nu$  обращается в нуль в области интегрирования). Формулу (4. 8) удобно записать в форме

$$A(x_1, x_2, \dots; t) = \frac{1}{2} \int dx' \varepsilon(t - t') Y(x_1, x_2, \dots; x') + \\ + a(x_1, x_2, \dots), \quad (4. 9)$$

где интегрирование проводится по всему четырехмерному пространству. Однако такую запись следует понимать с условием, что после выполнения интегрирования значения интеграла при  $t = \pm \infty$  нужно опустить из полученного выражения. Функция  $a(x_1, x_2, \dots)$  соответствует в импульсном пространстве  $\delta$ -функции, описывающей плоские и сферические волны, энергия которых равна  $W$ . Из сформулированных выше граничных условий в импульсном пространстве следует, что для всех состояний, в которых имеется хотя бы одна минус-частица, функции  $a(x_1, x_2, \dots)$  нужно приравнять нулю. Для состояний же, в которых имеются только плюс-частицы, эту функцию тоже нужно приравнять нулю, если частота  $\nu$  не обращается в нуль в области интегрирования; в противном случае функция  $a$  отлична от нуля и должна быть выбрана так, чтобы функции  $A$  соответствовали определяемые условиями задачи плоские и расходящиеся волны плюс-частиц, суммарная энергия которых равна  $W$ .

В частности, в задаче о рассеянии мезона нуклоном при энергиях  $W$ , недостаточных для рождения второго свободного мезона, как следует из изложенного выше, для всех амплитуд, кроме амплитуды состояния  $\langle B(\mathbf{p}) Q(-\mathbf{p}) \rangle$  (один «голый» мезон и один «голый» нуклон), функция  $a = 0$ .

## 5. Уравнения для системы мезон+нуклон

Ограничимся рассмотрением состояний системы с числом виртуальных частиц, не превышающим трех. Соответственно этому выписываем уравнения типа (2.6) для основной амплитуды задачи  $\langle \psi(x_1) \varphi(x_2) \rangle_t$  и для зацепляющихся с нею амплитуд

$$\langle \psi(x_1) \rangle_t, \quad \langle \psi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \rangle_t \quad \text{и} \quad \langle \bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \psi(x_3) \rangle_t$$

(нуклон, нуклон+2 мезона и нуклон+пара). В правых частях уравнений для последних двух амплитуд входит основная амплитуда  $\langle \psi(x_1) \varphi(x_2) \rangle_t$  и четырехчастичные амплитуды  $\langle \bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \times \psi(x_3) \varphi(x_4) \rangle_t$  и  $\langle \psi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) \rangle_t$ ; последние в нашем приближении мы опускаем.

Проводя интегрирование дифференциальных уравнений для одночастичной и трехчастичных амплитуд, выражаем их по формуле (4.9)<sup>3</sup> через их правые части, т. е. через амплитуду  $\langle \psi(x_1) \varphi(x_2) \rangle_t$ . Полученные выражения для одночастичной и трехчастичных амплитуд вносим в правую часть уравнения для амплитуды  $\langle \psi(x_1) \varphi(x_2) \rangle_t$  и получаем окончательное уравнение для этой амплитуды:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi^\lambda(x_1) \varphi_s(x_2) \rangle_t = \frac{1}{2} g^2 \int dr dx' \varepsilon(t-t') \{ N_1 Y_1 + N_2 Y_2 + Y_n + Y_m \}, \quad (5.1)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Y_1 &= S(x_1 - x) \gamma^5 (ZS(x - x') \Delta(x' - x_2)) \gamma^5 \langle \psi^\mu(x') \varphi_{s'}(x) \rangle_t, - \\ &\quad - \Delta(x - x_2) (ZS(x_1 - x') \gamma^5 S(x' - x)) \gamma^5 \langle \psi^\mu(x) \varphi_{s'}(x') \rangle_t, \\ Y_2 &= (ZS(x_1 - x) \Delta(x - x_2)) \gamma^5 S(x - x') \gamma^5 \langle \psi^\mu(x') \varphi_{s'}(x') \rangle_t, \\ Y_n &= 3S(x_1 - x) \gamma^5 (ZS(x - x') \Delta(x' - x)) \gamma^5 \langle \psi^\lambda(x') \varphi_s(x_2) \rangle_t, \\ Y_m &= 2\Delta(x - x_2) \text{Tr} (ZS(x - x') \gamma^5 S(x' - x) \gamma^5) \langle \psi^\lambda(x_1) \varphi_s(x') \rangle_t. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Знак  $Z$  имеет следующий смысл:

$$(ZS(x') \Delta(x'')) = S^{(+)}(x') \Delta^{(-)}(x'') - S^{(-)}(x') \Delta^{(+)}(x''), \quad (5.3)$$

аналогично при замене  $\Delta(x'')$  на  $S(x'')$  знак  $\text{Tr}$  означает след матрицы по спиновым индексам. Наконец,  $N_1$  и  $N_2$  суть операторы в пространстве изотопического спина:

$$N_1 = \tau_{\lambda\nu}^s \tau_{\nu\mu}^s, \quad N_2 = \tau_{\lambda\nu}^s \tau_{\nu\mu}^{s'}. \quad (5.4)$$

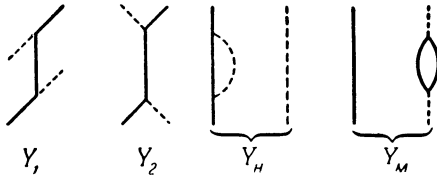
Собственные значения этих операторов равны:

$$\begin{aligned} N_1 &= -1, \quad N_2 = 3, \quad \text{если} \quad I = 1/2, \\ N_1 &= 2, \quad N_2 = 0, \quad \text{если} \quad I = 3/2, \end{aligned} \quad (5.5)$$

<sup>3</sup> Согласно сказанному в разделе 4, добавочных членов типа  $a(x_1, \dots)$  в данном случае в эту формулу вводить не надо, если энергия системы  $W$  недостаточна для испускания второго свободного мезона.

где  $I$  означает полный изотопический спин системы мезон+нуклон. В дальнейшем мы нигде не будем выписывать изотопических индексов  $\lambda$  и  $s$  и будем понимать под операторами  $N_1$  и  $N_2$  их собственные значения (5.5).

Диаграммы, изображающие ядра  $Y_i$  уравнения (5.1), приведены на рисунке.



Первые два ядра соответствуют рассеянию мезонов на нуклоне, причем ядро  $Y_1$  — рассеянию с первоначальным испусканием мезона («цепочка с испусканием»), а  $Y_2$  — с первоначальным поглощением мезона («цепочка с поглощением»). Эти ядра конечны, тогда как ядра  $Y_n$  и  $Y_m$ , соответствующие собственной энергии нуклона и мезона, бесконечны и подлежат перенормировке (как, впрочем, и конечное ядро  $Y_2$ ; см. ниже). Перенормировка собственно-энергетических членов будет рассмотрена отдельно, в этом же разделе мы вовсе не будем рассматривать эти члены и учтем только конечные ядра  $Y_1$  и  $Y_2$ . Отметим, что уравнением (5.1) учитываются все процессы, соответствующие всем возможным итерациям диаграмм рисунка.

Переход от уравнения (5.1) к импульсному представлению проводится совершенно аналогично тому, как это сделано в разделе 3. Будем пользоваться системой координат, связанной с центром инерции мезона и нуклона. Пусть  $\mathbf{p}_0$  — импульс падающего нуклона,  $-\mathbf{p}_0$  — падающего мезона, так что энергия системы равна

$$W = E_0 + \omega_0 = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}_0^2} + \sqrt{\mu^2 + \mathbf{p}_0^2}. \quad (5.6)$$

Удобно ввести следующие обозначения для амплитуд:

$$b_{\alpha}^{\epsilon \xi}(\mathbf{p}) = \langle B^n(\mathbf{p}) Q^{\epsilon p}(-\mathbf{p}) \rangle, \quad (5.7)$$

где  $\epsilon$ , подобно  $\xi$ , принимает значения  $\pm 1$  ( $\epsilon = +1$  для  $n=1, 2$ , т. е. для плюс-нуклонов, и  $\epsilon = -1$  для  $n=3, 4$ , т. е. для минус-антинуклонов), а индексом  $\alpha=1, 2$  различаются возможные направления (механического) спина нуклонов и антинуклонов. Введем также матрицы Паули  $\sigma$ , действующие на спиновый индекс  $\alpha$ , и, наконец, обозначение

$$a^{\epsilon \xi}(\mathbf{p}) = \left( \frac{\sigma \mathbf{p}}{b} \right)^{(1-\epsilon)/2} b^{\epsilon \xi}(\mathbf{p}) \quad (5.8)$$

(спиновые индексы опускаем). В этих обозначениях уравнение (5.1) (без членов  $Y_n$  и  $Y_m$ ) в импульсном представлении приобретает вид

$$(W - \varepsilon E - \xi \omega) a^{\varepsilon \xi}(\mathbf{p}) = \frac{\lambda}{4\pi} \sum_{\varepsilon' \xi'} \int d\mathbf{p}' R_{\varepsilon' \xi'}^{\varepsilon \xi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') a^{\varepsilon' \xi'}(\mathbf{p}'), \quad (5.9)$$

$$R_{\varepsilon' \xi'}^{\varepsilon \xi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \varphi(p, p') \{N_1 S_{\varepsilon' \xi'}^{\varepsilon \xi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + N_2 T_{\varepsilon' \xi'}^{\varepsilon \xi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\}, \quad (5.10)$$

где

$$\lambda = \frac{g^2}{8\pi^2}, \quad \varphi(p, p') = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(E+M)(E'+M)}{EE'\omega\omega'}},$$

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon' \xi'}^{\varepsilon \xi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = & \varepsilon \varepsilon' \xi \left(\frac{p}{E+M}\right)^{(1-\varepsilon)/2} \left(\frac{p'}{E'+M}\right)^{(1-\varepsilon')/2} [(W-M)m_{\varepsilon \varepsilon'} + \\ & + n_{\xi \xi'}(\varepsilon E + \varepsilon' E' + \xi \omega + \xi' \omega' - M - W)] + \\ & + \xi \left(\frac{E+M}{p}\right)^{(1-\varepsilon)/2} \left(\frac{E'+M}{p'}\right)^{(1-\varepsilon')/2} \frac{\sigma \mathbf{p}}{E+M} \frac{\sigma \mathbf{p}'}{E'+M} \times \\ & \times [ (W+M)m_{\varepsilon \varepsilon'} + (\varepsilon E + \varepsilon' E' + \xi \omega + \\ & + \xi' \omega' + M - W) n_{\xi \xi'} ], \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} T_{\varepsilon' \xi'}^{\varepsilon \xi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = & (\varepsilon + \xi) \left\{ \frac{1}{W+M} \left(\frac{M-E}{p}\right)^{(1-\varepsilon)/2} \left(\frac{M-E'}{p'}\right)^{(1-\varepsilon')/2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{W-M} \left(\frac{E+M}{p}\right)^{(1-\varepsilon)/2} \left(\frac{E'+M}{p'}\right)^{(1-\varepsilon')/2} \frac{\sigma \mathbf{p}}{E+M} \frac{\sigma \mathbf{p}'}{E'+M} \right\}; \\ m_{\varepsilon \varepsilon'} = & \{E_q(\varepsilon E_q + \varepsilon E + \varepsilon' E' - W)\}^{-1}, \\ n_{\xi \xi'} = & \{E_q(\xi E_q + \xi \omega + \xi' \omega' - W)\}^{-1}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

а  $E, E', \omega$  и  $\omega'$  означают энергии нуклона и мезона с импульсом  $\mathbf{p}$  и с импульсом  $\mathbf{p}'$ ,  $E_q = \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 + M^2}$ .

Согласно сказанному в разделе 4, в рассматриваемой нами задаче рассеяния асимптотическое поведение функции  $a^{+,+}(\mathbf{p})$  должно соответствовать падающей и расходящейся волнам. Соответственно этому положим

$$a^{+,+}(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + f^{+,+}(\mathbf{p}) \delta_+(E + \omega - W), \quad (5.13)$$

где, как обычно,  $\delta_+(x) = i\pi\delta(x) - (1/x)$ , а для остальных функций

$$a^{\varepsilon \xi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{W - \varepsilon E - \xi \omega} f^{\varepsilon \xi}(\mathbf{p}). \quad (5.14)$$

Внеся (5.13) и (5.14) в (5.9), получаем

$$\begin{aligned} f^{\varepsilon \xi}(\mathbf{p}) = & \frac{\lambda}{4\pi} R_{++}^{\varepsilon \xi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + i \frac{\lambda}{4} \int d\mathbf{p}' R_{++}^{\varepsilon \xi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f^{++}(\mathbf{p}') \delta(E' + \omega' - W) + \\ & + \frac{\lambda}{4\pi} \sum_{\varepsilon' \xi'} \int d\mathbf{p}' \frac{R_{\varepsilon' \xi'}^{\varepsilon \xi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f^{\varepsilon' \xi'}(\mathbf{p}')}{W - \varepsilon' E' - \xi' \omega'}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Чтобы произвести отделение угловых переменных, воспользуемся ортогональной системой инвариантных функций спина и углов  $L_i^{\pm}$ , рассмотренных в работе [14]:



$$L_l^+(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = (l+1)P_l(\cos\theta) - i\sigma[\mathbf{nn}']P_l^i(\cos\theta) \quad \text{при } j = l + 1/2, \quad (5.16)$$

$$L_l^-(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = lP_l(\cos\theta) + i\sigma[\mathbf{nn}']P_l^i(\cos\theta) \quad \text{при } j = l - 1/2.$$

Благодаря введенному выше преобразованию (5.8) для отделения угловых переменных достаточно разложить по полиномам  $L_l^+$  функции  $f^{\varepsilon\xi}$  и ядра  $R_{\varepsilon'\xi'}^{\varepsilon\xi}$ . Внося в уравнение (5.15) разложение функций

$$f^{\varepsilon\xi}(\mathbf{p}) = \sum L_l^+\left(\frac{\mathbf{p}}{p}, \frac{\mathbf{p}_0}{p_0}\right) f_{jl}^{\varepsilon\xi}(\mathbf{p}), \quad (5.17)$$

получаем после исключения угловых и спиновых переменных систему уравнений для амплитуд рассеяния  $f_{jl}^{\varepsilon\xi}$ , соответствующих заданному значению полного и орбитального моментов и зависящих только от модуля  $\mathbf{p}$ :

$$f_{jl}^{\varepsilon\xi}(p) = \frac{\lambda}{4\pi} {}^j l R_{++}^{\varepsilon\xi}(p, p_0) \left\{ 1 + i\lambda \frac{4\pi^2 p_0 E_0 \omega_0}{E_0 + \omega_0} f_{jl}^{++}(p_0) \right\} + \\ + \lambda \sum_{\varepsilon'\xi'} \int \frac{p'^2 d p' {}^j l R_{\varepsilon'\xi'}^{\varepsilon\xi}(p, p')}{W - \varepsilon' E' - \xi' \omega'} f_{j'l}^{\varepsilon'\xi'}(p'). \quad (5.18)$$

Здесь ядра  ${}^j l R$  связаны с функциями  ${}^j l S$  и  ${}^j l T$  прежней формулой (5.10), причем, в отличие от (5.11),

$${}^j l S_{\varepsilon'\xi'}^{\varepsilon\xi} = \varepsilon\varepsilon'\xi \left(\frac{p}{E+M}\right)^{(1-\varepsilon)/2} \left(\frac{p'}{E'+M}\right)^{(1-\varepsilon')/2} [\varepsilon(W-M) \times \\ \times J_{k_1}(E + \varepsilon\varepsilon'E' - \varepsilon W) + \xi(\varepsilon E + \varepsilon'E' + \xi\omega + \xi'\omega' - \\ - M - W) J_{k_1}(\omega + \xi\xi'\omega' - \xi W)] + \\ + \xi \left(\frac{p}{E+M}\right)^{(1-\varepsilon)/2} \left(\frac{p'}{E'+M}\right)^{(1+\varepsilon')/2} [\varepsilon(W+M) \times \\ \times J_{k_2}(E + \varepsilon\varepsilon'E' - \varepsilon W) + \xi(\varepsilon E + \varepsilon'E' + \xi\omega + \xi'\omega' + \\ + M - W) J_{k_2}(\omega + \xi\xi'\omega' - \xi W)]. \quad (5.19)$$

Выражение для  ${}^j l T$  нам не понадобится, и мы его выписывать не будем. В (5.19) введены обозначения

$$J_k(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_k(x) dx}{E_q(E_q + z)}, \quad E_q = \sqrt{M^2 + p^2 + p'^2 + 2pp'x}, \quad (5.20)$$

где  $P_k(x)$  — полиномы Лежандра. Для состояния  $S_{1/2}$  ( $j=1/2$ ,  $l=0$ ) нужно в (5.18) положить  $k_1=0$ ,  $k_2=1$ , для состояния  $P_{1/2}$   $k_1=1$ ,  $k_2=0$ , для состояния  $P_{3/2}$   $k_1=1$ ,  $k_2=2$ .

Уравнения (5.18) для функций  $f_{jl}$  содержат мнимые коэффициенты. Однако при помощи преобразования

$$U_{jl}^{\varepsilon\xi}(p) = f_{jl}^{\varepsilon\xi}(p) \left[ 1 + i\lambda \frac{4\pi^2 p_0 \omega_0 E_0}{E_0 + \omega_0} f_{jl}^{++}(p_0) \right]^{-1} \quad (5.21)$$

можно перейти к уравнению с вещественными коэффициентами

для вещественных функций  $U^{*i}$ . Эти уравнения отличаются от (5. 18) только заменой  $f$  на  $U$  и отсутствием мнимого слагаемого в скобках.

Как легко убедиться, фаза рассеяния  $\pi$ -мезонов на нуклонах для волны  $j, l, I$  определяется формулой

$$\operatorname{tg}^I \delta_{jI} = -\frac{4\pi^2 p_0 E_0 \omega_0}{E_0 + \omega_0} I U_{jI}^{*+}(p_0). \quad (5. 22)$$

Значение изотопического спина  $I$  состояния определяет согласно формулам (5. 5) численное значение коэффициентов  $N_1$  и  $N_2$  в формуле (5. 10), связывающей  $R$  с  $S$  и  $T$ .

Существенно, что согласно (5. 5) коэффициент  $N_2$  у функции  $T$  отличен от нуля только при  $I=1/2$ , и, кроме того, самые коэффициенты  $j' T$  разложения  $T$  по полиномам  $L_j^\pm$  отличны от нуля только для  $S_{1/2}$ - и  $P_{1/2}$ -состояний. Это объясняется тем, что ядро  $T$  соответствует «цепочке с поглощением»  $Y_2$ , т. е. в промежуточном состоянии имеется только один нуклон, покоящийся в системе центра инерции и, стало быть, обладающий спинами  $j=I=1/2$ .

В отличие от ядра  $S$  асимптотическое поведение ядра  $T$  при больших импульсах таково, что те из уравнений (5. 18), в которые входит ядро  $T$  (т. е. уравнения для  $1/2 S_{1/2}$  и  $1/2 P_{1/2}$ ), не имеют конечных решений. Причина этого заключается в том, что итерация диаграмм  $Y_1$  и  $Y_2$ , соответствующих ядрам  $S$  и  $T$  и поэтому учитываемых нашими интегральными уравнениями, приводит к диаграммам, содержащим вершинные части и перекрывающиеся бесконечности собственно-энергетического типа. Таким образом, уравнения для состояний  $1/2 S_{1/2}$  и  $1/2 P_{1/2}$  подлежат, помимо перенормировки собственно-энергетических членов, дополнительной перенормировке, устраняющей указанные бесконечности [11]. Так как эта дополнительная перенормировка нами пока не проведена, то мы так же, как и авторы работ [2], ограничились рассмотрением тех из уравнений (5. 18), в которые ядро  $T$  не входит. Отметим, что все рассмотренные в этом разделе уравнения при пренебрежении всеми амплитудами и ядрами, для которых  $\epsilon$  и  $\xi$  отличаются от  $+1$ , полностью совпадают с результатами работы [2].

При не очень больших энергиях  $W$  существенную роль в рассеянии играют только  $S$ - и  $P$ -волны. В настоящее время нами проводится численное решение системы уравнений (5. 18) для четырех состояний  $3/2 S_{1/2}$ ,  $3/2 P_{1/2}$ ,  $3/2 P_{3/2}$  и  $1/2 P_{3/2}$  при различных энергиях (вплоть до энергии, соответствующей кинетической энергии мезонов в лабораторной системе порядка 300 Мэв). Результаты расчетов будут опубликованы дополнительно.

## 6. Результаты перенормировок

Из-за недостатка места мы не можем подробно рассмотреть вопросы перенормировок и поэтому ограничимся кратким изложением результатов.

Учет членов  $Y_n$  и  $Y_m$  в уравнении (5.1) приводит к появлению дополнительных конечных (после перенормировки) выражений в левых частях формул (5.9), (5.15) и (5.18). В результате в левой части, например, уравнения (5.18) нужно заменить  $f^{\xi}$  на

$$\sum_{\varepsilon', \xi'} \Delta_{\varepsilon'/\xi'}^{\varepsilon \xi} f^{\varepsilon' \xi'} : \quad \Delta_{\varepsilon'/\xi'}^{\varepsilon \xi} = b_{\varepsilon'/\xi'}^{\varepsilon \xi} (W - \varepsilon' E - \xi' \omega)^{-1}, \quad (6.1)$$

где

$$b_{\varepsilon'/\xi'}^{\varepsilon \xi} = \delta_{\varepsilon \varepsilon'} \delta_{\xi \xi'} \left\{ (W - \varepsilon E - \xi \omega) [1 + A(\xi)] - \frac{M}{E} B(\xi) + \xi C(\varepsilon) \right\} + \delta_{\varepsilon \varepsilon'} \delta_{\xi \xi'} \delta_{-\xi} \xi C(\varepsilon) + \delta_{\xi \xi'} \delta_{\varepsilon, -\varepsilon'} B(\xi) \frac{p}{E}, \quad (6.2)$$

$$A(\xi) = \frac{3}{2} \lambda \int_0^1 dU (1-U) \left\{ \ln \left| \frac{\mu^2 (1-U) + M^2 U^2}{\mu^2 (1-U) + \nu^2 (U-U^2) + U M^2} \right| + \frac{2M^2 U^2}{\mu^2 (1-U) + M^2 U^2} \right\}, \quad (6.3)$$

$$B(\xi) = \frac{3}{2} \lambda \int_0^1 dU U \ln \left| \frac{\mu^2 (1-U) + M^2 U^2}{\mu^2 (1-U) + \nu^2 (U-U^2) + U M^2} \right|, \quad (6.4)$$

$$C(\varepsilon) = -4\lambda \int_0^1 dU \left\{ [3\rho^2 (U-U^2) + M^2] \ln \left| \frac{M^2 + \rho^2 (U-U^2)}{M^2 - \mu^2 (U-U^2)} \right| - \frac{(\rho^2 + \mu^2) (U-U^2) [M^2 - 3\rho^2 (U-U^2)]}{M^2 - \mu^2 (U-U^2)} \right\}, \quad (6.5)$$

$$\nu^2 = p^2 - (W - \xi \omega)^2, \quad \rho^2 = p^2 - (W - \varepsilon E)^2. \quad (6.6)$$

Детерминант матрицы  $\Delta_{\varepsilon'/\xi'}^{\varepsilon \xi}$ , при больших значениях  $p$  для случая достаточно малых  $\lambda$  имеет следующий вид:

$$\Delta \approx \left(1 - \frac{3}{4} \lambda \ln p\right)^2 \left(1 - \frac{11}{4} \lambda \ln p\right)^2, \quad (6.7)$$

т. е. может обратиться в нуль. Возможность обращения  $\Delta$  в нуль сохраняется и при больших значениях  $\lambda$ . При этом с увеличением  $\lambda$  уменьшается значение  $p$ , при котором детерминант становится равным нулю. Факт обращения  $\Delta$  в нуль тесно связан с результатом работ [15], где показано, что решение приближенных уравнений для функции Грина как в электродинамике, так и в мезодинамике приводит к появлению у соответствующих функций дополнительных полюсов, не имеющих прямого физического смысла (см. также [10]). Все это указывает на ограниченную область применимости приближенных уравнений.

Однако учет высших приближений может, вообще говоря, привести к коренному изменению асимптотического поведения функции Грина или в нашем случае соответственно к существенному изменению поведения  $\Delta$ . Отметим, что если ограничиться рассмотрением функций  $U^{++}$  и  $U^{-+}$ , а также пренебречь

поляризацией мезонного вакуума, то

$$\Delta = \left\{ 1 + A(+)-\frac{MB(+)}{(W-\omega)^2-E^2} \right\}^2 + B^2(+)\frac{p^2-(W-\omega)^2}{[(W-\omega)^2-E^2]^2}. \quad (6.8)$$

Это выражение при не слишком больших  $\lambda$  не обращается в нуль.

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
15 апреля 1955 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. E. E. Salpeter, H. A. Bethe. Phys. Rev., 1951, 84, 1232; J. Schwinger. Proc. Nat. Acad. Sci., 1951, 37, 455; M. Gell-Mann, F. Low. Phys. Rev., 1951, 84, 350.
2. S. Fubini. Nuovo Cim., 1953, 10, 564; F. J. Dyson, M. Ross, E. E. Salpeter, S. S. Schweber, M. K. Sundaresan, W. M. Virschera, H. A. Bethe. Phys. Rev., 1954, 95, 1644.
3. И. Е. Тамм. J. Phys., USSR, 1945, 9, 445 (наст. том, работа 42.—Прим. ред.).
4. S. M. Dancoff. Phys. Rev., 1950, 78, 382.
5. B. A. Фок. Sov. Phys., 1934, 6, 425.
6. M. Cini. Nuovo Cim., 1953, 10, 526, 624.
7. F. Dyson. Phys. Rev., 1953, 90, 994; 91, 421, 1543.
8. A. Klein. Phys. Rev., 1953, 90, 1101.
9. B. П. Силн. ЖЭТФ, 1954, 27, 754.
10. W. M. Visscher. Phys. Rev., 1954, 96, 788.
11. S. Fubini. Nuovo Cim., 1953, 10, 851; M. Lévy. Phys. Rev., 1954, 94, 460; D. Ito, H. Tanaka. Progr. Theor. Phys., 1954, 11, 501; S. Chiba. Progr. Theor. Phys., 1954, 11, 494; T. Joshimura. Progr. Theor. Phys., 1954, 11, 224.
12. G. C. Wick. Phys. Rev., 1950, 80, 268 (перевод этой статьи см. в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики». М., ИЛ, 1954); А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. М., ГТТИ, 1953.
13. M. Lévy. Phys. Rev., 1952, 88, 72, 725; F. Mache. Z. Naturforsch., 1954, 8a, 594; W. Zimmermann. Suppl. Nuovo Cim., 1954, 11, 43; J. C. Taylor. Phys. Rev., 1954, 97, 1313.
14. И. Е. Тамм, Ю. А. Гольфанд, В. Я. Файнберг. ЖЭТФ, 1954, 26, 649 (наст. том, работа 45.—Прим. ред.).
15. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1954, 95, 497, 773, 1177; 96, 261; А. А. Абрикосов, А. Д. Галанин, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1954, 97, 793.

О СТРУКТУРЕ НУКЛОНОВ <sup>1</sup>

Сопоставление результатов измерений рассеяния быстрых электронов (с энергией до 550 Мэв) протонами, выполненных Чемберсом и Хофстетером [1], с измерениями взаимодействия электронов с нейтронами [2, 3] привело ряд физиков к заключению, что совокупность этих данных несовместима либо с зарядовой независимостью взаимодействия  $\pi$ -мезонов с нуклонами, либо с основами квантовой электродинамики. Цель этой заметки — привести доводы против законности такого рода заключений.

Наиболее прямой аргумент в пользу приведенного заключения был сформулирован Д. Енни, М. Леви и Д. Ревенхоллом [4]; он сводится к следующему. Чемберс и Хофстетер показали, что средний квадратичный радиус распределения электрического заряда протона близок к значению

$$r_p = 0,77 \cdot 10^{-13} \text{ см} = 0,55 \text{ } h/\mu c. \quad (1)$$

С другой стороны, если взаимодействие  $\pi$ -мезонов с нуклонами зарядово-инвариантно, то мезонные облака протона и нейтрона должны быть зеркально-симметричны (тождественное распределение зарядов, но противоположных знаков). Поэтому если, следуя Саксу, сложить плотности заряда в протоне и нейтроне, то их мезонные заряды взаимно сократятся и мы получим плотность зарядов так называемой сердцевинки нуклонов, т. е. плотность заряда, обусловленную распределением одних лишь нуклонов и нуклонных пар:

$$\rho_c(r) = \rho_p(r) + \rho_n(r).$$

Используя упомянутые выше данные эксперимента, Енни и др. нашли, что средний квадратичный радиус заряда сердцевинки практически равен  $r_p$ :

$$r_c \sim r_p \sim 0,77 \cdot 10^{-13} \text{ см} \sim 3,7 \text{ } h/Mc. \quad (2)$$

Именно этот результат и считается парадоксальным, и вот почему. Если ограничиться рассмотрением мезонов с энергией, меньшей, чем  $\mu c^2$ , то отдачей при излучении мезона «голым» нуклоном можно пренебречь, так что этот нуклон должен нахо-

<sup>1</sup> ЖЭТФ, 1957, 32, 178.

даться в центре физического нуклона ( $r_c \sim 0$ ), тогда как радиус распределения мезонов должен быть порядка  $\hbar/\mu c$ , что не противоречит уравнению (1), но противоречит уравнению (2). В случае же излучения мезонов с энергией порядка  $\mu c^2$  испытываемую нуклонами отдачу учитывать необходимо, причем благодаря отдаче нуклоны будут отброшены примерно на такое же расстояние, как и мезоны; однако это расстояние должно быть порядка  $\hbar/Mc$ . Между тем согласно (2)  $r_c$  заметно больше этой величины.

По моему мнению, приведенное рассуждение, хотя и неявно, основано на представлении о слабом взаимодействии мезонов с нуклонами. Так как в действительности это взаимодействие сильно, то каждый мезон значительную долю времени должен быть диссоциирован на пару нуклон—antinуклон. Поэтому распределение этих пар (входящих, по определению, в состав сердцевин нуклона) должно быть примерно таким же, как и распределение мезонов ( $r \sim \hbar/\mu c$ ), в соответствии с (2).

Правда, если ограничиться рассмотрением процессов типа  $\pi \rightarrow N + \bar{N} \rightarrow \pi$  (где  $\bar{N}$  означает antинуклон), то заряд нуклонных пар будет распределен так же, как заряд мезонов, и, стало быть, сократится при вычислении величин  $\rho_c$  и  $r_c$ . Однако измерения Сегре и др. показали, что сечение аннигиляции антипротонов на нуклонах очень велико<sup>2</sup> (что вполне понятно с точки зрения мезонной теории). Поэтому antинуклоны, образовавшиеся на мезонной периферии физического нуклона, будут с большой вероятностью аннигилировать с нуклоном, находящимся в его центре, вновь возрождаться и т. д. В результате заряды всех нуклонов и antинуклонов (т. е. заряд сердцевин) распределяется более или менее равномерно по всему объему мезонного облака, что соответствует уравнениям (1) и (2).

Изложенные представления вполне согласуются также с тем фактом [1], что нет никаких экспериментальных указаний на какую-либо концентрацию заряда протона вблизи его центра.

Если весь заряд нуклона действительно распределен по всему его объему, то не может быть зеркальной симметрии распределения зарядов даже в периферийных областях протона и нейтрона. Это, однако, не должно обязательно противоречить зеркальной симметрии их аномальных магнитных моментов, так как эти моменты ввиду различия масс мезона и нуклона, вероятно, в основном обусловлены мезонными (а не нуклонными) токами, а эти последние зеркально-симметричны ввиду зарядовой инвариантности.

Упомянем еще об одном недоразумении, связанном со структурой нуклона. В нерелятивистском приближении взаимодействие

<sup>2</sup> Согласно данным, сообщенным на Конгрессе по теоретической физике в Сиэтле в сентябре 1956 г., это сечение равно 120—100 мбн при энергиях антипротонов 200—250 Мэв.

с электрическим полем нейтральной (в целом) частицы, заряд которой распределен сферически-симметрично (нейтрон), характеризуется потенциальной энергией

$$V = -a \operatorname{div} E. \quad (3)$$

Фолди [5] указал на то, что экспериментальное значение постоянной  $a$  для нейтрона весьма близко к тому значению  $a_m = (h/2Mc) \mu_n$  (где  $\mu_n$  — магнитный момент нейтрона), которым в нерелятивистском приближении должна характеризоваться дираковская частица, релятивистское взаимодействие которой с электромагнитным полем определяется паулиевским членом  $(i/2) \mu_n \gamma^2 \gamma^3 F_{23}$ .

Согласно последним экспериментальным данным [2, 3], различие между  $a$  и  $a_m$  составляет всего  $2 \pm 7\%$ . Таким образом, практически ничего не остается на взаимодействие нейтрона с электрическим полем, обусловленное распределением электрического заряда в нем.

Между тем если оценить это последнее взаимодействие, исходя из обычной модели нейтрона (маленькая положительная сердцевина, окруженная отрицательным мезонным облаком радиуса порядка  $\hbar/\mu c$ ), то взнос только этого взаимодействия в величину  $a$  должен в несколько раз превышать все экспериментальное значение  $a$ .

Это противоречие устраняется, если принять описанную в этой заметке модель нуклонов: нуклоны и антинуклоны распределены внутри них по тому же примерно закону, как и  $\pi$ -мезоны, и так как полный заряд нейтрона равен нулю, то и плотность зарядов в нем близка к нулю и обусловленный ею взнос в значение  $a$  должен быть мал.

Необходимо, однако, оговорить, что обе приведенные попытки оценить значение разности  $a - a_m$  на основании определенной модели нейтрона не надежны. В феноменологической теории  $a = a_m + a'$ , где значение постоянной  $a'$  совершенно произвольно (в релятивистской теории  $a'$  фигурирует в описываемом взаимодействии частицы с полем члене  $a' \gamma_\alpha \partial F^{\alpha\beta} / \partial x^\beta$ ). Непосредственное вычисление, исходящее из определенной (релятивистской) модели нуклона, может установить зависимость величины  $a'$  от распределения зарядов в частице. Результат этих вычислений трудно предугадать.

Так, например, в результате вычислений, проведенных по мезонной теории методом возмущений до второго порядка по  $g$  включительно, оказывается [6], что  $a' = 0,32 a_m$ . Однако, во всяком случае, пока нет никаких оснований считать, что так называемое равенство нулю электрического радиуса нейтрона (т. е. равенство  $a - a_m = 0$ ) несовместимо с зарядовой инвариантностью.

С точки зрения изложенных представлений теории, не учитывающие образования нуклонных пар мезонами (например, теории Чью и Лоу), не могут рассчитывать на успешное объяснение

структуры нуклонов. Точная теория нуклонов должна также учесть своеобразные особенности облака виртуальных  $K$ -мезонов, возникающего вокруг нуклонов [7].

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
25 октября 1956 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *E. E. Chambers, H. Hofstadter.* CERN Symposium, 1956.
2. *D. J. Hughes, J. A. Harvey, M. D. Goldberg, M. J. Stajne.* Phys. Rev., 1953, 90, 497.
3. *E. Melkonian, B. Rustad, W. Havens.* Bull. Amer. Phys. Soc., 1956, 1, 62.
4. *М. Леву.* Доклад на Московской конференции по физике высоких энергий, май 1956 г.
5. *L. L. Foldy.* Phys. Rev., 1952, 87, 693.
6. *B. D. Fried.* Phys. Rev., 1952, 88, 1142.
7. *G. Sandri.* Phys. Rev., 1956, 101, 1616.



## РАСПАДЫ СТРАННЫХ ЧАСТИЦ В ТЕОРИИ ФЕЙНМАНА И ГЕЛЛ-МАННА <sup>1</sup>

*Совместно с И. Ю. Кобзаревым*

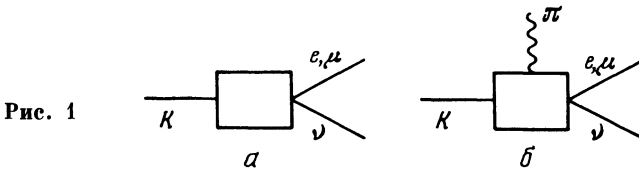
Дано объяснение равной вероятности  $K_{e3}$ -,  $K_{\mu3}$ -распадов при отсутствии  $K_{e2}$ -распада и большой асимметрии при распадах поляризованных гиперонов в предположении универсального  $A - V$ -взаимодействия Гелл-Манна и Фейнмана.

Одним из наиболее интересных фактов, относящихся к лептонным распадам  $K$ -мезонов, является отсутствие распада  $K^+ \rightarrow e^+ + \nu$  при наличии распада  $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$  и имеющих приблизительно равные вероятности распадов  $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu + \pi^0$ ,  $K^+ \rightarrow e^+ + \nu + \pi^0$ .

Мы хотели бы указать, что эти факты могут быть объяснены весьма естественным образом, если предположить, что все эти распады происходят за счет универсального четырехфермионного взаимодействия, предложенного Гелл-Манном и Фейнманом [1] и Сударшаном и Маршаком [2]. Если предположить, что такое взаимодействие существует, то распады  $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ ,  $K^+ \rightarrow e^+ + \nu$  должны происходить за счет превращения  $K$ -мезона в пару барион—антибарион с последующим ее превращением в  $e\nu$ ,  $\mu\nu$ , идущим через слабое четырехфермионное взаимодействие

$$(G/\sqrt{2})(\bar{\psi}_Y \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_N)(\bar{\psi}_\nu \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_e).$$

В общем виде график для такого процесса может быть изображен, как на рис. 1, а. Так же, как и для аналогичных распадов



$\pi$ -мезона [1], соответствующий матричный элемент имеет вид

$$F \sim fMG(\bar{\psi}_\nu \hat{p}_K (1 + \gamma_5) \psi_{\mu, e}), \quad (1)$$

где  $M$  — масса нуклона, а  $f$  — численная постоянная, одинаковая для  $\mu$ -мезона и электрона (ввиду того, что матричный элемент перехода может зависеть только от  $p_K$ ).

<sup>1</sup> ЖЭТФ, 1958, 34, 899.

Соответствующая вероятность  $w$  пропорциональна  $1 + (v_{\mu, e}/c) \cos \vartheta$ , где  $\vartheta$  — угол между направлениями импульсов  $\mu$ -мезона (электрона) и нейтрино. Для двухчастичного распада  $\cos \vartheta = -1$ , так что вероятность пропорциональна  $1 - v/c$  и весьма мала для электрона. Отношение вероятностей распадов  $K \rightarrow e + \nu$ ,  $K \rightarrow \mu + \nu$  равно

$$\frac{K \rightarrow e + \nu}{K \rightarrow \mu + \nu} \approx \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \sim 0,25 \cdot 10^{-4}.$$

Ситуация существенно изменяется, если из барионной петли испускается  $\pi$ -мезон. Соответствующая диаграмма имеет вид рис. 1, б. Общий вид соответствующего матричного элемента будет

$$F \sim f_1 G(\bar{\Psi}_K \hat{p}_K (1 + \gamma_5) \Psi_{e,\mu}) + f_2 G(\bar{\Psi}_\nu \hat{p}_\pi (1 + \gamma_5) \Psi_{\mu,e}). \quad (2)$$

Учитывая, что  $p_K = p_{e,\mu} + p_\nu + p_\pi$ , и используя уравнение Дирака, можно привести (2) к виду

$$F \sim (f_1 + f_2) G(\bar{\Psi}_\nu \hat{p}_K (1 + \gamma_5) \Psi_{e,\mu}) + f_2 m_{e,\mu} G(\bar{\Psi}_\nu (1 - \gamma_5) \hat{p}_\pi \Psi_{\mu,e}). \quad (3)$$

Если рассматривать простейшие диаграммы вида 1, б (см. рис. 2), то они приводят к логарифмически расходящимся интегралам. Если учитывать только логарифмический член, то  $f_1 = f_2$  независимо от четности  $K$ -мезона.

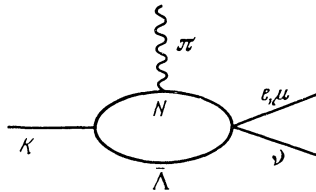


Рис. 2

Мы будем предполагать, что  $f_1 \approx f_2$ ; тогда можно пренебречь вторым членом в (3) (что дает для  $\mu$ -мезона ошибку порядка 10%) и записать (3) в том же виде, что и (1):

$$F \sim f(\bar{\Psi}_\nu p_K (1 + \gamma_5) \Psi_{\mu,e}). \quad (4)$$

Вероятность распадов  $K_{e3}$ ,  $K_{\mu3}$  по-прежнему пропорциональна  $1 + (v/c) \cos \vartheta$ , но так как эти распады трехчастичные, то  $\cos \vartheta$  уже не должен быть равен  $-1$ . Тем самым запрет, имеющий место для распада  $K \rightarrow e + \nu$ , снимается для распада  $K \rightarrow e + \nu + \pi$  и мы получаем для отношения вероятностей

$$\frac{K \rightarrow e + \nu + \pi}{K \rightarrow \mu + \nu + \pi} \sim 1.$$

Этот результат по порядку величины имеет место всегда, если только  $f_1 \neq -f_2$ , что представляется невероятным. Заметим, что спектр  $\mu$ -мезонов и электронов для взаимодействия вида (4) наряду с другими возможными вариантами рассматривался Фуруичи

и др. [3]; угловые корреляции между импульсами  $\pi$ -мезона и электрона (легко наблюдаемые для случая распада  $K^0 \rightarrow e^\pm + \nu + \pi^\mp$ , являющегося аналогом соответствующего  $K^+$ -распада) были получены в работе Пайса и Треймана [4].

Следует заметить, что применение аналогичных соображений к распадам  $\pi \rightarrow e + \nu$ ,  $\pi \rightarrow \mu + \nu$  дает для отношения вероятностей распадов

$$\frac{\pi \rightarrow e + \nu}{\pi \rightarrow \mu + \nu} \approx 1,3 \cdot 10^{-4}$$

(см., например, [1]). Распад  $\pi \rightarrow e + \nu$  не был обнаружен. Латтес и Андерсон [5] дают для этого отношения верхний предел  $10^{-5}$ . Мы считаем, однако, что вопрос о существовании  $\pi \rightarrow e + \nu$ -распада нуждается в дополнительной проверке.

Возникает вопрос, не может ли запрет для  $\pi \rightarrow e + \nu$ -распада сниматься за счет испускания  $\gamma$ -кванта для  $\pi \rightarrow e + \nu + \gamma$ -распада, что дало бы

$$\rho_\gamma = \frac{\pi \rightarrow e + \nu + \gamma}{\pi \rightarrow \mu + \nu} \sim e^2 \frac{K \rightarrow e + \nu + \pi}{K \rightarrow \mu + \nu} \sim 10^{-3},$$

это противоречило бы опытам Кассельса [6], где для  $\rho_\gamma$  был полу-

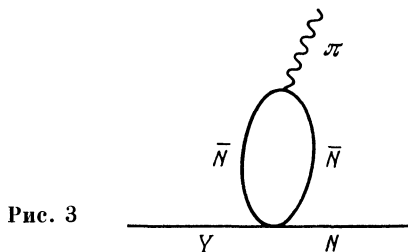


Рис. 3

чен верхний предел  $\rho_\gamma < 10^{-5}$ . В действительности можно показать, что как  $A$ -, так и  $V$ -варианты дают  $\rho_\gamma \sim 10^{-7}$ . Для  $A$ -взаимодействия это показано в работе Треймана и Уальда [7] (см. также [8]), соответствующие оценки для  $V$ -варианта были проведены В. Г. Ваксом (частное сообщение).

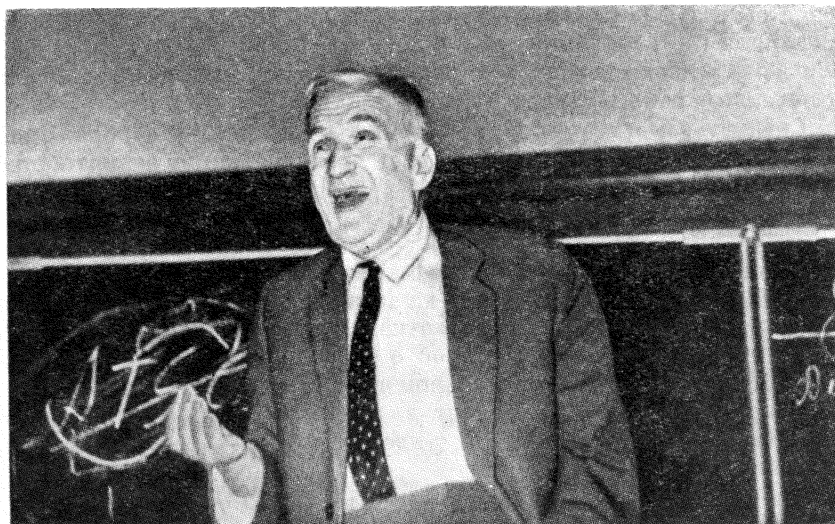
Наличие универсального  $A-V$ -взаимодействия естественным образом объясняет также большую асимметрию в гиперонных распадах  $Y \rightarrow N + \pi$ . Если описывать такие распады простейшими графиками теории возмущений (рис. 3), то для матричного элемента мы получим

$$F \sim fGM (\bar{\psi}_N k (1 + \gamma_5) \psi_Y),$$

где  $k$  — импульс  $\pi$ -мезона.

В нерелятивистском по нуклону приближении получим

$$F \sim fGM (\psi_N^* (k_0 + \sigma \mathbf{k}) \psi_Y).$$



И. Е. Тамм читает лекцию в г. Горьком (1963)

Если распадающийся гиперон полностью поляризован, то вероятность вылета нуклона под углом  $\vartheta$  к направлению спина гиперона пропорциональна выражению  $1 + \alpha \cos \vartheta$ , где

$$\alpha = 2(k/k_0)/[1 + (k/k_0)^2],$$

что для распада поляризованного  $\Lambda$ -гиперона дает  $\alpha \sim 0,9$ . Последние экспериментальные данные для распада  $\Lambda$ -частицы, образующейся в реакции  $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K$ , приводят к следующему эффективному значению константы  $\alpha$ :  $\alpha_{\text{эфф}} = 0,77 \pm 0,16$ . Отсюда следует заключить, что образующаяся в этой реакции  $\Lambda$ -частица поляризована в плоскости рождения, причем среднее значение ее поляризации лежит в пределах от  $2/3$  до 1.

Значительно меньшее значение асимметрии распада  $\Sigma$ -гиперонов, образующихся в той же реакции  $\pi^- + p$ , по-видимому, следует отнести за счет того, что поляризация этих гиперонов в момент их рождения значительно меньше поляризации  $\Lambda$ -частиц.

Заметим, что согласно рассматриваемой схеме отношение вероятностей распада  $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$ ,  $\Lambda \rightarrow n + \pi^0$  определяется в основном относительной вероятностью рождения барионом заряженного и нейтрального  $\pi$ -мезона, т. е. примерно равно 2, что близко к экспериментальному значению.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Gell-Mann, R. P. Feynman.* Phys. Rev., 1958, **109**, 193.
2. *R. E. Marschak, E. G. Sudarshan.* Труды конф. в Падуде, 1957. (См. перевод: ПСФ, 1959, **2**, 3).
3. *S. Furuichi et al.* Progr. Theor. Phys., 1956, **16**, 64; 1956, **17**, 89.
4. *A. Pais, S. B. Treiman.* Phys. Rev., 1957, **105**, 1616.
5. *C. Lattes, H. L. Anderson.* Nuovo Cim., 1957, **6**, 1356.
6. *J. M. Cassels.* Proc. Phys. Soc., 1957, **70**, 729.
7. *S. B. Treiman, H. W. Wyld.* Phys. Rev., 1956, **101**, 1552.
8. *S. Bludman, M. Ruderman.* Phys. Rev., 1956, **101**, 910.

---

*Примечание.* Описание лептонных распадов  $K$ -мезонов в рамках  $V-A$ -теории, данное в этой статье и независимо рядом авторов (*P. Гаммо.* Phys. Rev., 1958, **111**, 1426; *Ф. Захарайзен.* Phys. Rev., 1958, **110**, 1481), находится в согласии с обширной совокупностью экспериментальных данных и является общепринятым. Предположение о равенстве констант  $f_1=f_2$ , сделанное в статье на основе результатов теории возмущений, может быть обосновано в рамках  $SU(3)$ -симметрии (*И. Кобзарев, Л. Окунь.* ЖЭТФ, 1962, **42**, 1400) и находится в согласии с последними экспериментальными данными.

Более сложна ситуация с адронными распадами гиперонов. Полная их теория в рамках  $V-A$ -взаимодействия отсутствует, но, по-видимому, несомненно, что в этих распадах выполняется правило отбора по изоспину  $\Delta I=1/2$ . Модель, рассматриваемая в работе, этому правилу противоречит.

**О СВЯЗИ  
ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ  
С КВАНТОВОЙ ТЕОРИЕЙ <sup>1</sup>**

В данной заметке я надеюсь показать, что у новой эйнштейновской теории поля имеются определенные квантовомеханические черты.

1. Основная мысль новой эйнштейновской теории <sup>2</sup> состоит в предположении, что физические свойства пространственно-временного континуума могут быть определены заданием всех локальных параллельных реперов. Под репером следует понимать совокупность из четырех взаимно ортогональных единичных векторов, компоненты которых в произвольной системе координат  $x^y$  обозначаются через  ${}^s h^y$ , а соответствующие нормированные реперы — через  ${}^s h_y$ . Компоненты одинакового номера локальных реперов в двух произвольных мировых точках следует рассматривать, согласно определению, как параллельные (дальний параллелизм). Имеет место

$${}^s h_\mu {}^s h_\nu = g_{\mu\nu}, \quad {}^s h^\mu {}^s h^\nu = g^{\mu\nu}, \quad (1)$$

где  $g_{\mu\nu}$  — фундаментальный метрический тензор. Простейший тензор, который можно построить из производных  ${}^s h_\nu$ , — это тензор <sup>3</sup>

$$\Lambda_{\mu\nu}^\lambda = -\Lambda_{\nu\mu}^\lambda = \frac{1}{2} {}^s h^\lambda \left( \frac{\partial {}^s h_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial {}^s h_\nu}{\partial x_\mu} \right). \quad (2)$$

Если  $\Lambda_{\mu\nu}^\lambda$  равно нулю, мир (псевдо)-евклидов. След тензора  $\Lambda_{\mu\nu}^\lambda$ ,

<sup>1</sup> ЖПФ, 1929, 6, вып. 1, 130. Перевод Р. Э. Каллош.

<sup>2</sup> A. Einstein. Sitzungsber. Preuss. Acad., XVII und XVIII, 1928.

<sup>3</sup> В последней статье Эйнштейн опускает множитель  $1/2$  в (2).

согласно Эйнштейну, должен быть равен электромагнитному 4-потенциалу. Мы будем считать несколько общее:

$$\Lambda_{\mu\lambda}^\lambda = a\Phi_\mu; \quad (3)$$

универсальная константа пропорциональности  $a$  должна быть определена позднее.

2. Данное Дираком <sup>4</sup> волновое уравнение электрона в свободном от поля пространстве можно записать следующим образом, используя определение масс Минковского:

$$F\psi = (A^s p_s + Bmc)\psi = 0, \quad (4)$$

где  $A^s$  (соответственно  $B$ ) означают компоненты постоянного  $q$ -вектора (соответственно скалярное  $q$ -число), которые могут быть представлены в матричной форме и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$A^q A^s + A^s A^q = 2\delta_{qs}, \quad A^q B + B A^q = 0, \quad B^2 = 1. \quad (5)$$

Чтобы определить волновое уравнение электрона в электромагнитном поле, согласно Дираку, нужно заменить в (5)  $p_s$  через  $p_s + \frac{e}{c}\Phi_s$ . Мы, однако, будем исходить из следующего предположения: если отнести векторы  $A^s$  и  $p_s$  к эйнштейновским параллельным реперам, тогда волновое уравнение обладает в существенном такой же простой формой (4) в произвольном поле, как в случае без поля; тогда когда вектор  $\Lambda_{\mu\lambda}^\lambda$  отличен от нуля, в (4) должен быть введен еще дополнительный член <sup>5</sup>

$$i\mu\psi = iK\sqrt{\Lambda_{\mu\lambda}^\lambda \Lambda_{\mu\nu}^\nu}, \quad K = h/2\pi. \quad (6)$$

Если, однако, волновое уравнение желательно отнести к произвольной системе координат, то векторы  $A^s$  и  $p_s$  нужно соответственно преобразовать, так что вместо (2) записать

$$F\psi = (A^\nu p_\nu + Bmc + i\mu)\psi = ({}^s h^\nu A^s p_\nu + Bmc + i\mu)\psi = 0. \quad (7)$$

Чтобы сделать возможным сравнение волнового уравнения (7) с шредингеровским уравнением, перейдем к уравнению второго порядка по  $\psi$ , для чего мы левую часть уравнения (7) подвергнем сопряженной к  $F$  операции  $F^*$ :

$$F^* = A^\nu p_\nu + Bmc - i\mu. \quad (8)$$

Заменяя  $p_\nu$  через  $-iK \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  и учитывая (3) и (5), получим после

<sup>4</sup> P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc. London, 1928, A117, 610; 118, 351.

<sup>5</sup> Подчеркивание индекса, согласно Эйнштейну, означает поднятие (соответственно опускание) индекса.

простого вычисления

$$F^*F\psi = -K^2 g^{\mu\nu} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda} + 2a \Phi_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} + a^2 \Phi_\mu \Phi_\nu \right\} + \\ + m^2 c^2 \psi + K^2 A^\mu A^\nu \Lambda_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda} + K^2 a A^\nu \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \sqrt{\Phi_\mu \Phi^\mu} \right) \psi = 0, \quad (1)$$

где  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  — трехиндексные символы, образованные из метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ .

Если теперь принять, что

$$a = \pm \frac{ie}{cK} = \pm \frac{2\pi ie}{ch}, \quad (1.1)$$

тогда часть уравнения (9), не зависящая от матричного вектора  $A^\nu$ , полностью совпадает с общерелятивистским уравнением Шредингера. Предпоследний член в (9) близок к встречающемуся в дираковском волновом уравнении члену  $i \frac{e}{c} K A^\nu A^\nu F_{\mu\nu} \psi$ , учитывающему магнитные свойства электрона; последний член в (9) такого же порядка величины.

Если заменить в (9) волновую функцию  $\psi$  через  $e^{iS/K}$  и перейт к пределу  $K=0$ , получим классическое дифференциальное уравнение Гамильтона—Якоби <sup>6</sup>

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{1}{\psi} F^*F\psi = g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \pm \frac{2e}{c} \Phi_\mu \frac{\partial S}{\partial x^\nu} + \frac{e^2}{c^2} \Phi_\mu \Phi_\nu \right) + m^2 c^2 = 0. \quad (11)$$

Знак заряда  $e$  в (11) зависит от того, какое из двух комплексно-сопряженных значений  $a$  вставлено в волновое уравнение (9).

3. Тот факт, что описанный метод действительно приводит к разумному волновому уравнению, особенно интересен потому, что аналогичная упомянутому волномеханическому предположению «классическая» гипотеза, что движение электрона, отнесенное к реперу, имеет всегда одинаковый вид, не приводит к пригодному уравнению движения. Тем самым в эйнштейновской теории возникает волномеханический принцип, стоящий над принципом кратчайшего пути в геометрической оптике. Переход к классической механике, т. е. к пределу  $K = h/2\pi = 0$ , может быть сделан только после того, как волновая функция  $\psi$  вставлена в волновое уравнение, так как множитель, содержащий  $K$ , в соотношении, определяющем константу пропорциональности между  $\Lambda_{\mu\lambda}^\lambda$  и  $\Phi_\mu$ , может быть скомпенсирован только соответствующим множителем, входящим в волновое уравнение.

<sup>6</sup> Если бы мы не ввели дополнительный член  $i\mu\psi$  в (7), то член  $\frac{e^2}{c^2} \Phi_\mu \Phi^\mu$  отсутствовал бы в (11). Можно было бы, однако, вместо этого

заменить  $m$  в (4) через  $m' = \sqrt{m^2 - \frac{K^2}{c^2} \Lambda_{\mu\lambda}^\lambda \Lambda_{\mu\nu}^\nu}$ . Какая из двух форм правильная, мы пока еще не могли решить.



4. Полученные выше результаты, по-видимому, тесно связаны с некоторыми особенностями эйнштейновских полевых уравнений. В то время как Эйнштейн полагает электромагнитный потенциал  $\Phi_\mu$  равным  $\Lambda_{\mu\lambda}^\lambda$ , он определяет тензорную плотность

$$\bar{\mathfrak{B}}_{kl}^\alpha = \mathfrak{B}_{kl}^\alpha - \varepsilon |h| (\Phi_l \delta_k^\alpha - \Phi_k \delta_l^\alpha), \quad (12)$$

где  $|h|$  — образованный из  ${}_s h^\nu$  детерминант, а  $\varepsilon$  — произвольная малая вспомогательная величина;  $\mathfrak{B}_{kl}^\alpha$  — это определенная, образованная из  ${}_s h^\nu$  тензорная плотность.

Эйнштейновские гравитационные уравнения гласят

$$\bar{\mathfrak{B}}_{kl|l}^\alpha - \mathfrak{B}_{k\tau}^\sigma \Lambda_{\sigma\tau}^\alpha = 0 \quad (13)$$

с предписанием перехода к  $\varepsilon=0$  после операции «/|» (образование дивергенции).

Если теперь допустить справедливость соотношений (3) и (40), то (12) в пренебрежении  $\varepsilon$  можно записать следующим образом:

$$\bar{\mathfrak{B}}_{kl}^\alpha = \mathfrak{B}_{kl}^\alpha \pm \frac{iKc}{e} |h| (\Lambda_{l\sigma}^\sigma \delta_k^\alpha - \Lambda_{k\sigma}^\sigma \delta_l^\alpha), \quad (14)$$

а предписание перейти к  $\varepsilon=0$  заменится предписанием  $K = \hbar/2\pi \rightarrow 0$ ; при этом переходе выпадает часть (14), умноженная на мнимую единицу. Вообще в первом приближении при  $K=0$  и при отсутствии материи наступает разделение закона электричества и гравитации, что с защищаемой здесь точки зрения соответствует разделению реальной и мнимой частей тензора  ${}_s h^\nu$  ( ${}_s h^\nu = {}_s h^\mu = g^{\mu\nu}$  — действительное,  $\Lambda_{\mu\lambda}^\lambda = a\Phi_\mu$  — мнимое).

Так как уравнения (12) и (14) при  $K=0$  в первом приближении совпадают с классическими уравнениями гравитации, то можно было бы предположить, что при конечном  $K$  эйнштейновские полевые уравнения правильно будут передавать существенные квантовые черты микрокосмоса.

Москва, Институт теоретической физики  
Первого государственного университета |

Поступила  
14 марта 1929 г.

<sup>7</sup> Возможно и даже вероятно, что  $\varepsilon$  не должно быть опущено, а должно быть заменено определенным конечным множителем.

## НОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЙНШТЕЙНА И ТЕОРИЯ КВАНТОВ <sup>1</sup>

1. Волновое уравнение, данное Дираком, имеет в случае отсутствия силовых полей вид

$$F\psi = ({}^s\alpha p_s + imc)\psi = 0, \quad (1)$$

где через  ${}^s\alpha$  обозначены составляющие постоянного « $q$ -вектора», удовлетворяющие известным соотношениям

$${}^s\alpha^q\alpha + {}^q\alpha^s\alpha = Q\delta_{qs}. \quad (2)$$

Для того чтобы перейти к случаю, когда присутствует электромагнитное поле, следует лишь (Дирак) заменить оператор  $p_s = -\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x^s}$  на  $p_s + \frac{e}{c} \Phi_s$ , где  $\Phi_s$  — составляющие электромагнитного вектор-потенциала.

Что касается нас, то мы, используя понятие параллелизованных «тетрад» (4-Beine), характерное для новой теории Эйнштейна, исходим из следующей гипотезы: составляющие « $q$ -вектора»  $\alpha$ , взятые вдоль параллелизованных тетрад, во всех случаях имеют постоянные значения, и волновое уравнение в любом поле сохраняет ту же простую форму (1), которую оно имеет в отсутствие силовых полей.

Следует заметить, что составляющие  $\alpha^y = {}_s h^y \alpha$  вектора  $\alpha$ , взятые вдоль осей гауссовых координат <sup>2</sup>, будут, вообще говоря, переменными. Если  ${}_s h^y$  и, следовательно,  $\alpha^y$  постоянны, то, очевидно,  $\alpha^y p_y \psi = p_y \alpha^y \psi$ , и уравнение (1) может быть записано в общем виде:

$$F\psi = (c_1 \alpha^y p_y + c_2 p_y \alpha^y + imc)\psi = 0, \quad (3)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — две произвольные постоянные, сумма которых равна 1. Но если  ${}_s h^y$  и  $\alpha^y$  переменны, то выбор значений  $c_1$  и  $c_2$  становится существенным моментом. Для того чтобы обеспечить действительность характеристических чисел в уравнении (3) и соответствующих значений плотности электрического заряда и тока,  $c_2$  должно быть равно комплексно-сопряженному <sup>3</sup> от  $c_1$ ,

<sup>1</sup> С. г. Acad. sci. Paris., 1929, 188, N 25, 1598. Заседание от 15 апреля 1929 г. Перевод А. А. Собянина.

<sup>2</sup>  ${}_s h^y$  — составляющие эйнштейновских тетрад вдоль координатных осей  $x^y$ .

<sup>3</sup> В недавней заметке (Proc. Nederl. Akad. Wetensch., 1929, 32, 3) я ошибочно не заметил этого важного условия.

т. е., учитывая условие  $c_1 + c_2 = 1$ , следует положить

$$c_1 = (1 + in)/2, \quad c_2 = (1 - in)/2, \quad (4)$$

где  $n$  — произвольное действительное число.

Наконец, в общем случае следует, очевидно, приписать  $p$ , смысл ковариантного дифференцирования, а именно, риманова дифференцирования. Последнее легко усмотреть, если волновое уравнение выводить из принципа минимума.

2. Учитывая известные соотношения Эйнштейна

$$g_{\mu\nu} = \sum_s s h_\mu^s h_\nu^s, \quad \Lambda_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} s h^\lambda \left( \frac{\partial^s h_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial^s h_\nu}{\partial x^\mu} \right)$$

и соотношение (2), легко получаем

$$p_\nu \alpha^\nu - \alpha^\nu p_\nu = 2iK \alpha^\nu \Lambda_{\nu\sigma}^\sigma = 2iaK \alpha^\nu \Phi_\nu, \quad (5)$$

где через  $a$  обозначен универсальный коэффициент пропорциональности между  $\Lambda_{\nu\sigma}^\sigma$  и  $\Phi_\nu$  (и где  $K = h/2\pi$ ). Таким образом, уравнение (3) может быть записано в виде

$$F\psi = \alpha^\nu [p_\nu + (1 - in)iaK\Phi_\nu] \psi + imc\psi = 0. \quad (6)$$

3. Для того чтобы сравнить наши результаты с уравнением Шредингера, нужно перейти от (3) или (6) к уравнению второго порядка. Если положить

$$na = \frac{e}{cK} = \frac{2\pi e}{ch}, \quad (7)$$

то после довольно простого вычисления получим

$$FF\psi = D\psi - \frac{1 - 2in}{n^2} \frac{e^2}{c^2} \Phi^\mu \Phi_\mu \psi + \left( \frac{1}{n} - i \right) \frac{eK}{c} \Phi^\nu; \nu \psi + \alpha^\mu \alpha^\nu \left( \frac{eK}{2nc} F_{\mu\nu} \psi + \Lambda_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda} \right) = 0, \quad (8)$$

где  $D\psi = 0$  обозначает уравнение Шредингера—Дирака,

$$D\psi = K^2 g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda} \right) + \frac{2ieK}{c} \Phi^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - \frac{e^2}{c^2} \Phi^\mu \Phi_\mu \psi - m^2 c^2 \psi + \frac{ieK}{2c} \alpha^\mu \alpha^\nu F_{\mu\nu} \psi = 0. \quad (9)$$

Различие между (8) и (9) — второго порядка малости. Оно будет пренебрежимо мало, если  $n \geq 1$ , так как, с одной стороны,  $\Phi^\nu; \nu$  в первом приближении равно нулю, с другой стороны, второй член в (8) не изменяет, по крайней мере в кулоновском электрическом поле, значений характеристических чисел<sup>4</sup>. Правда, мы не

<sup>4</sup> Этот последний пункт может быть проверен расчетом по теории возмущений. Вообще, если мы хотим изучать в рамках теории Эйнштейна электри-

можем в настоящее время определить точные значения постоянных  $n$  и  $a$ , но лишь их произведение (7).

Для того чтобы проверить уравнение (8), нужно рассчитать тонкую структуру спектра (атома) водорода. Однако этот расчет может быть произведен лишь после того, как будет вычислено по эйнштейновской теории электрическое поле заряженной частицы (ядра атома), так как нет уверенности, что это поле не отличается от кулоновского поля.

4. В заключение мы получили, исходя из очень простой гипотезы, линейное (рациональное) волновое уравнение. С другой стороны, в новой теории Эйнштейна ни уравнение наикратчайшей, ни уравнение наипрямейшей геодезической не совпадают с уравнением движения заряженной частицы. Похоже, таким образом, что новая теория носит черты, характерные для волновой, а не для корпускулярной механики.

*Москва, Институт теоретической физики  
Первого государственного университета*

Поступила  
15 апреля 1929 г.

---

ческое поле, пренебрегая гравитационным, то можно положить

$${}_s h^{\nu} = \delta_{s\nu} + 2a\eta_{s\nu}, \quad \eta_{s\nu} = -\eta_{\nu s} \quad (x^4 = ict). \quad (10)$$

Пренебрегая вторыми степенями  $\eta_{s\nu}$ , легко убеждаемся, что  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  и что  $\eta_{s\nu}$  равен декартову тензору.

## ЗАМЕЧАНИЯ К ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ <sup>1</sup>

*Совместно с М. А. Леонтовичем*

Гравитационное поле покоящейся незаряженной точечной массы, вычисленное согласно эйнштейновской теории (апрель 1929 г.), полностью соответствует известному из классической теории. Новые полевые уравнения, однако, не имеют сферически-симметричного решения, которое должно было бы соответствовать полю покоящейся заряженной точечной массы.

Известный метод построения уравнений движения, основывающийся на исчезновении дивергенции тензора материи, и в новой теории приводит к уравнениям геодезической линии, на которой действующая на заряженную точку сила Лоренца совсем не учитывается. Коротко обсуждается возможное объяснение этого результата.

### § 1. Введение и резюме

а) Проблема единого геометрического описания электричества и гравитации решена логически удовлетворительно уже пятимерной теорией. Эта теория, однако, не может привести к нахождению новых связей между электричеством и гравитацией, так как ее физическое содержание покрывается полностью классической максвелл-эйнштейновской теорией. Напротив, именно от новой эйнштейновской теории можно ожидать открытия новых физических фактов, в чем, собственно, и можно усмотреть основание для построения этой теории.

Но новые связи могут относиться только к области микрокосмоса, так как едва ли можно ожидать существования более глубоких связей между электричеством и гравитацией в области макроскопических явлений. Мы хотели бы поэтому (а также из других соображений) верить, что новая эйнштейновская теория имеет отношение к микрокосмосу.

б) Если искать статическое сферически-симметричное решение эйнштейновских уравнений поля <sup>2</sup>, то можно легко найти решение, соответствующее незаряженной материальной точке; при этом для метрического фундаментального тензора  $g_{\mu\nu}$  получается выраже-

<sup>1</sup> Z. Phys., 1929, 57, 354. Перевод Р. Э. Каллош.

<sup>2</sup> Везде имеются в виду полевые уравнения, которые даны в последней (апрель 1929 г.) статье Эйнштейна (Berlin. Ver., 1929, S. 156; далее везде будет цитироваться как Эйнштейн, 1. с.).

ние, полностью совпадающее <sup>3</sup> с вычисляемым по классической теории (1916) (§ 2). Напротив, не существует, насколько мы можем судить, статического сферически-симметричного решения новых полевых уравнений, которое могло бы соответствовать заряженной массивной точке (§ 3).

Это ни в какой мере не противоречит факту о том, что приближенные линейные полевые уравнения, которые в первом приближении совпадают с точными нелинейными уравнениями теории, имеют упомянутые решения, так как не все решения приближенных уравнений должны соответствовать точным решениям <sup>4</sup>.

Может быть, этот результат можно так объяснить, что простейшее решение эйнштейновских полевых уравнений, соответствующее покоящейся заряженной частице, отличается не сферической, но аксиальной симметрией и тем самым принимает во внимание спин заряженной частицы <sup>5</sup>. Это предположение, однако, может быть проверено только с помощью дальнейших предположений <sup>6</sup>.

в) В классической теории относительности есть три способа построения уравнений движения материальной точки <sup>7</sup>.

1. Постулируется закон геодезической линии.

2. Полевой закон дополняется введением тензора материи  $T^{\mu\nu}$ , который известным образом должен зависеть от плотности и скорости материи, и потом исследуется случай, когда материя упорядочена вдоль узкой мировой трубы. С учетом отсутствия дивергенции у тензора материи находят, что оси этой трубы являются геодезическими линиями.

3. Материальные точки понимают как сингулярные точки соответствующих мировых линий и ищут сингулярные решения нелинейных уравнений поля.

Что касается новой единой теории поля, то в ней может быть несправедлив закон кратчайшей геодезической линии (так же

<sup>3</sup> Электромагнитная напряженность поля при этом равна нулю, но векторный потенциал с нулевым ротором имеет вполне определенную, отличную от нуля величину.

<sup>4</sup> Ср. А. Einstein, J. Grommer. Berlin. Ver., 1927, S. 2.

<sup>5</sup> Сферически-симметричное решение для незаряженной частицы едва ли могло бы соответствовать атому водорода, который согласно квантовой механике в основном состоянии полностью сферически-симметричен. В этой связи нужно еще заметить следующее. Из единой теории поля, уравнения которой в известном смысле переопределены, можно было бы ожидать установления связей между массой и зарядом элементарной частицы. Тогда соответствующие параметры  $m$  и  $e$ , от которых зависит решение полевых уравнений, имеют размерность длины ( $m$ ) и соответственно нулевую размерность ( $e$ ), так как  $\Delta_{\lambda}^{\lambda}$  и электрический потенциал  $\Phi_4 = \Delta_{\lambda}^{\lambda} \sim e/r$  имеют размерность обратной длины (мы полагаем  $c=1$  и время также измеряем в единицах длины). Так как статическое сферически-симметричное решение не может зависеть ни от каких дополнительных параметров, то полевые уравнения (поскольку в них нет универсального коэффициента пропорциональности) не могут дать связей между  $m$  и  $e$ . Аксиально-симметричное же решение зависит еще от магнитного момента  $\mu$  частицы, который имеет размерность длины, так что между  $m$ ,  $e$  и  $\mu$  очень возможно появление численного соотношения.

<sup>7</sup> Ср. А. Einstein, J. Grommer, l. c.

как из других соображений — наиболее прямой), так как в уравнении геодезической нет члена, соответствующего силе Лоренца. Второй из перечисленных способ рассмотрения ведет и в новой теории к уравнению кратчайшей геодезической, т. е. к непригодному закону движения (§ 4). Наконец, что касается третьего способа рассмотрения, который является наиболее строгим и принципиально наиболее приемлемым из всех, то из-за трудностей, связанных с проведением соответствующей программы, мы должны от него отказаться; следует, однако, отметить, что в классической теории этот способ действий приводит к такому же результату, как второй.

Как же следует теперь понимать неудачу этих попыток построения уравнений движения? Один из нас недавно попытался показать<sup>8</sup>, как естественно получается волновое уравнение электрона в новой эйнштейновской теории, и при этом высказал гипотезу, что в этой теории волномеханический принцип стоит выше принципа кратчайшего пути, так что уравнения движения (заряженной) частицы следует выводить с помощью предельного перехода из волнового уравнения. Если действительно подтвердится это предположение, а также предположение о том, что решение эйнштейновских уравнений поля, соответствующее заряженной частице, учитывает спин элементарного заряда, то тем самым макроскопическое объяснение эйнштейновской теории подтвердится в большой степени.

Но есть также возможность, что результаты, сообщенные в данной статье, следует рассматривать как указание на необходимость дальнейшего изменения эйнштейновских полевых уравнений.

## § 2. Сферически-симметричное поле незаряженной точечной массы

Точечная масса должна покоиться в начальной точке декартовой системы координат. Для компонент репера  ${}^{\sigma}h_{\lambda}$  в этой системе координат сделаем следующую диагонализацию<sup>9</sup>:

$${}^s h_k = \lambda \delta_{sk}, \quad {}^4 h_4 = i\rho, \quad {}^s h_4 = {}^4 h_k = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda$  и  $\rho$  — реальные функции радиус-вектора  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ . Латинские индексы всюду в дальнейшем пробегают значения от 1 до 3, греческие же — от 1 до 4.

Основные соотношения эйнштейновской теории

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\sigma} {}^{\sigma} h_{\mu} {}^{\sigma} h_{\nu}, \quad \Lambda_{\mu\nu}^{\lambda} = \mathcal{J}^{\lambda} \left( \frac{\partial {}^{\sigma} h_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial {}^{\sigma} h_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) \quad (2)$$

<sup>8</sup> *Ig. Tamm. Proc. Nederl. Akad. Wetensch.*, 1929, **32**, 3; *C. r. Acad. sci. Paris*, 1929, 188, N 25, 1598 (см. наст. том, работу 50. — *Прим. ред.*).

<sup>9</sup> Как известно, достаточно незначительного изменения уравнения (2), чтобы все компоненты репера записывать реальными.

дают

$$g_{jk} = \lambda^2 \delta_{jk}, \quad g_{44} = -\mu^2, \quad g_{k4} = 0, \quad \sqrt{-g} = -ih = \lambda^3 \mu \quad (3)$$

и

$$\Lambda_{ki}^j = \frac{\lambda'}{r\lambda} (x_i \delta_{jk} - x_k \delta_{ji}), \quad \Lambda_{4k}^4 = -\Lambda_{k4}^4 = \frac{\mu'}{r\mu} x_k, \quad (4)$$

все остальные  $\Lambda_{\mu\nu}^\lambda$  исчезают. Штрих означает дифференцирование по аргументу  $r$ .

Из (4) после простого вычисления получается следующее выражение для эйнштейновских дифференциальных инвариантов  $\mathfrak{I}_1$ ,  $\mathfrak{I}_2$ ,  $\mathfrak{I}_3$  и для гамильтоновой функции  $\mathfrak{S}$ :

$$\mathfrak{I}_1 = \sqrt{-g} \Lambda_{\mu\beta}^\alpha \Lambda_{\mu\alpha}^\beta = \lambda\mu \left\{ \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^2 + 2 \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 \right\},$$

$$\mathfrak{I}_2 = \sqrt{-g} \Lambda_{\mu\beta}^\alpha \Lambda_{\mu\beta}^\alpha = 2\mathfrak{I}_1,$$

$$\mathfrak{I}_3 = \sqrt{-g} \Lambda_{\mu\alpha}^\alpha \Lambda_{\mu\beta}^\beta = \lambda\mu \left( \frac{\mu'}{\mu} + 2 \frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2,$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \mathfrak{I}_1 + \frac{1}{4} \mathfrak{I}_2 - \mathfrak{I}_3 = -2\mu\lambda' \left( \frac{2\mu'}{\mu} + \frac{\lambda'}{\lambda} \right).$$

При варьировании  $\lambda$  и  $\mu$  в гамильтоновом интеграле

$$\int \mathfrak{S} r^2 dr = -2 \int \lambda' \mu r^2 \left( \frac{2\mu'}{\mu} + \frac{\lambda'}{\lambda} \right) dr$$

получаются следующие лагранжевы уравнения:

$$\lambda'' + \frac{2}{r} \lambda' - \frac{\lambda'^2}{2\lambda} = 0, \quad \frac{\mu''}{\mu'} + \frac{2}{r} + \frac{\lambda'}{\lambda} = 0.$$

Единственное решение системы уравнений, которая на бесконечности удовлетворяет условиям

$$\lambda \rightarrow 1, \quad \mu \rightarrow 1 \quad (r \rightarrow \infty),$$

гласит:

$$\lambda = \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^2, \quad \mu = \left( 1 - \frac{m_1}{2r} \right) \left( 1 + \frac{m}{2r} \right), \quad (5)$$

где  $m$  и  $m_1$  — две постоянные интегрирования.

Пока не меняется определенная в (1) «диагональная форма»  ${}^{\sigma}h_\lambda$  и только варьируются  $\lambda$  и  $\mu$ , константы  $m$  и  $m_1$  остаются независимыми. Чтобы найти соотношения между ними, следовало бы, собственно говоря, предпринять более общую вариацию  ${}^{\sigma}h_\lambda$ . Можно, однако, удовлетвориться следующим простым наблюдением. Как показал Эйнштейн, его уравнения поля совпадают с классическими в первом приближении. Тем самым  $\lambda^2 = g_{kk}$  и  $\mu^2 = -g_{44}$  в этом приближении должны иметь известные значения

$$g_{kk} = 1 + \frac{2m}{r}, \quad g_{44} = - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right).$$



Отсюда следует

$$m_1 = m \quad \text{и} \quad \lambda = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2, \quad \mu' = \left(1 - \frac{m}{2r}\right) \left/ \left(1 + \frac{m}{2r}\right) \right., \quad (5')$$

и, наконец, согласно (3)

$$g_{kk} = \lambda^2 = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4, \quad -g_{44} = \mu^2 = \left[ \left(1 - \frac{m}{2r}\right) \left/ \left(1 + \frac{m}{2r}\right) \right. \right]^2. \quad (6)$$

Тем самым метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  в рассматриваемом случае полностью совпадает с вычисленным по классической теории (1916).

Максвелловские уравнения не накладывают на  ${}^{\sigma}h_{\lambda}$  дальнейших ограничений, так как исчезает электромагнитный тензор поля  $f^{\mu\nu}$ , вычисленный по эйнштейновским формулам из (4) и (5). Мы, таким образом, действительно имеем дело с незаряженной точечной массой. Но свободный от ротора векторный потенциал в поле такой точки никоим образом не равен нулю, но имеет вполне определенное значение. А именно из (4) и (5') получаются следующие выражения<sup>10</sup> для 4-потенциала  $\Phi_{\lambda}$ :

$$\Phi_k = \Lambda_k^{\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\lg \lambda^2 \mu), \quad \Phi_4 = \Lambda_{4\lambda}^{\lambda} = 0. \quad (7)$$

### § 3. Общее статическое сферически-симметричное решение полевых уравнений

В то время как мы опять используем декартову систему координат, для пространственных компонент репера мы примем следующее приближение:

$${}^s\mathbf{h} = \lambda {}^s\mathbf{e} + br ({}^s\mathbf{er}) + c [{}^s\mathbf{er}], \quad {}^4\mathbf{h} = isr. \quad (8)$$

Величины  $\lambda$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $s$ , так же как  ${}^4h_4 = i\mu$ , по-прежнему должны зависеть только от  $r$ ; с помощью  ${}^s\mathbf{e}$  обозначены три пространственных постоянных единичных вектора, ортогональных друг другу, в остальном же произвольных.

При использовании преобразования  $x'_k = u(r) x_k$  можно, как известно, привести метрический тензор статического сферически-симметричного поля в следующую нормальную форму:

$$g_{jk} = \gamma^2(r) \delta_{jk}, \quad -g_{44} = \alpha^2(r), \quad g_{k4} = 0. \quad (9)$$

Считая эти преобразования проведенными и предполагая справедливость (9), мы можем вычислить из (2), (7) и (9) значения оставшихся еще не определенными временных компонент

$${}^s h_4 = \omega(r) ({}^s\mathbf{er}), \quad \omega(\lambda + br^2) = s\mu \quad ({}^4h_4 = i\mu), \quad (8')$$

<sup>10</sup> Замечание при корректуре о роли свободных от ротора членов в потенциале  $\Phi_{\nu}$ . Если принять, что  ${}^{\sigma}h_{\lambda}^{\lambda} = X {}^{\sigma}h_{\lambda}$ , где  $X$  — произвольная функция, то получаем для линейного элемента  $dS^* = X ds$  и для потенциала  $\Phi_{\nu} = \Phi_{\nu} - \frac{\partial \ln X^{\sigma}}{\partial x_{\nu}}$ .

при этом вычисления дают еще одну связь между введенными ранее величинами

$$2\lambda b + br^2 = s^2 + c^2. \quad (10)$$

Таким образом, остаются произвольными четыре из шести функций радиус-вектора  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $s$ ,  $\omega$ . Для  $g_{\mu\nu}$  получается

$$g_{jk} = (\lambda^2 + c^2 r^2) \delta_{jk}, \quad -g_{44} = \mu^2 - \omega^2 r^2, \quad g_{k4} = 0. \quad (11)$$

Система величин (8), (8') образует наиболее общую статическую основу для компонент репера (в координатной системе, определенной в [9]), которая вообще совместима с требованием сферической симметрии (доказательство этого утверждения см. в Приложении в конце работы).

Теперь нужно привлечь к рассмотрению эйнштейновские уравнения поля. Легко вычислить, что эйнштейновское требование <sup>11</sup>

$$S_{\beta\gamma}^\alpha = 0 \quad (S_{\beta\gamma}^\alpha = \Lambda_{\beta\gamma}^\alpha + \Lambda_{\alpha\beta}^\gamma + \Lambda_{\gamma\alpha}^\beta)$$

означает исчезновение функции <sup>12</sup>, обозначенной  $c$ . Мы положим в соответствии с этим <sup>13</sup>

$$c = 0$$

и введем следующие три независимые функции:

$$\lambda = \sqrt{g_{kk}}, \quad \alpha = \sqrt{-g_{44}} = \sqrt{\mu^2 - \omega^2 r^2}, \quad \xi = 1 + \frac{br^2}{\lambda}. \quad (12)$$

Из (8') и (10) тогда можно вычислить  ${}^s h_\lambda$  в их зависимости от  $\lambda$ ,  $\alpha$  и  $\xi$ . Если принять, что введенные в (8) единичные векторы  ${}^s e$  параллельны пространственным координатным осям, то получаем

$$\begin{aligned} {}^s h_k &= \lambda \left( \delta_{sk} + \frac{\xi - 1}{r^2} x_s x_k \right), & {}^s h_4 &= \alpha \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{x_s}{r}, \\ {}^4 h_k &= i\lambda \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{x_k}{r}, & {}^4 h_4 &= i\alpha \xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее из (2) получаем следующие выражения для тензора и 4-потенциала  $\Phi_\lambda$ :

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{kl}^j &= (x_k \delta_{jl} - x_l \delta_{jk}) \left( \frac{\xi - 1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r\lambda} \right), & \Lambda_{4k}^j &= \frac{\omega}{\lambda} \delta_{jk} + \frac{\nu}{\lambda^2 r} x_j x_k, \\ \Lambda_{jk}^4 &= 0, & \Lambda_{4k}^4 &= \frac{\alpha'}{\alpha} \frac{x_k}{r} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

и

$$\Phi_k = \Lambda_{k\lambda}^\lambda = \Omega x_k, \quad \Phi_4 = \Lambda_{4\lambda}^\lambda = \frac{\nu r}{\lambda^2} + \frac{3\omega}{\lambda},$$

<sup>11</sup> А. Einstein, I. с., уравнение (22).

<sup>12</sup> Достаточно даже только предположить  $\mathcal{G}_{\beta\gamma}^\alpha = 0$ ; ср. А. Einstein, I. с.

<sup>13</sup> Для последующего это очень существенный пункт, так как при решении приближенных линейных уравнений поля наличие электрического поля как раз связано с условием  $c \neq 0$ .

где положено

$$\omega = \frac{a}{r} \sqrt{\xi^2 - 1}, \quad \nu = \omega \lambda \left( \frac{\xi'}{\xi^2 - 1} - \frac{1}{r} \right),$$

$$\Omega = \frac{1}{r} \left( \frac{2(\xi - 1)}{r} - \frac{a'}{a} - \frac{2\lambda'}{\lambda} \right).$$

Предпринимая вариацию гамильтоновой функции, легко показать, что и в этом случае метрический тензор должен иметь форму

$$g_{kk} = \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^4, \quad g_{44} = - \left[ \left( 1 - \frac{m_1}{2r} \right) \left( 1 + \frac{m}{2r} \right) \right]^2.$$

Но поскольку нас в первую очередь интересует электрическое поле частицы, то мы переходим непосредственно к максвелловским уравнениям.

В форме, данной Эйнштейном (1. с.), эти уравнения гласят:

$$\frac{1}{h} D_{\mu} f^{\mu\alpha} = f^{\mu\alpha}_{;\mu} - f^{\mu\alpha} \Phi_{\mu} + f^{\mu\lambda} \Lambda^{\lambda}_{2\mu} = 0, \quad (15)$$

где  $f^{\mu\alpha}$  — электромагнитный тензор поля.

Легко вычислить, что в нашем случае магнитное поле исчезает ( $f^{jk} = 0$ ) и что  $f^4_k$  тоже равно нулю. Уравнение (15) поэтому принимает следующую форму для  $\alpha = k$  ( $= 1, 2, 3$ ), соответственно для  $\alpha = 4$ :

$$-f^{4k} \Phi_4 + f^{j4} \Lambda^k_{kj} + f^{4j} \Lambda^j_{k4} = 0, \quad (16)$$

$$f^{j4}_{;j} - f^{j4} \Phi_j + f^{j4} \Lambda^4_{4j} = 0. \quad (16')$$

Так как электрическая напряженность поля параллельна радиус-вектору

$$f^{4k} = Q(r) x_k,$$

то из (15) следует при  $Q \neq 0$

$$-x_k \Phi_4 + x_j (\Lambda^j_{k4} - \Lambda^4_{kj}) = 0.$$

Если подставить в это уравнение вычисленные выше значения  $\Phi_4$  и  $\Lambda^{\lambda}_{\mu\nu}$ , то получим

$$\nu r + 2\omega\lambda = 0 \quad (17)$$

или

$$\frac{\xi'}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{r} = 0.$$

Интегрирование дает

$$\xi = \left( 1 + \frac{a}{r^2} \right) \left( 1 - \frac{a}{r^2} \right), \quad a = \text{const.}$$

Теперь выражение (14) для  $\Phi_4$  с учетом (17) можно преобразовать следующим образом:

$$\Phi_4 = \frac{\omega}{\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda r} \sqrt{\xi^2 - 1}.$$

На бесконечности  $\lambda = \sqrt{g_{kk}}$  и  $\alpha = \sqrt{-g_{44}}$  должны стремиться к 1 и

$$\sqrt{\xi^2 - 1} = \frac{2r\sqrt{a}}{r^2 - a} \rightarrow \frac{\text{const}}{r};$$

тем самым  $\Phi_4$  на бесконечности ведет себя как  $\text{const}/r^2$ . Это асимптотическое значение для  $\Phi_4$ , однако, не может удовлетворить уравнению (16'), так как при  $r \rightarrow \infty$  оно ведь переходит в обыкновенное уравнение Лапласа. Тем самым должно быть  $a=0$ ,  $\xi=1$  и  $\Phi_4=0$ , что нас опять приводит к случаю, рассмотренному в § 2.

Эйнштейновские уравнения

$$\mathfrak{G}_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0, \quad D_{\mu} f^{\mu\alpha} = 0$$

приводят также к заключению, что и общее сферически-симметричное статическое решение полевых уравнений, при котором  ${}^{\sigma}h_{\lambda}$  имеют вид, определяемый в (8), (8') и (10), соответствует полю незаряженной элементарной частицы ( $f^{\lambda\mu}=0$ ), так что покоящаяся заряженная частица не может иметь сферически-симметричного решения.

#### § 4. Об уравнениях движения

Вначале короткая подготовка. Для гамильтоновой производной  $\mathfrak{G}^{\mu\nu}$  функции действия  $\mathfrak{S}$  справедливо тождество (Эйнштейн, I. с.)

$$D_{\mu} \mathfrak{G}^{\mu\alpha} = \mathfrak{G}^{\alpha\mu}_{;\mu} + \mathfrak{G}^{\mu\beta} \Lambda_{\alpha\mu}^{\beta} \equiv 0. \quad (18)$$

С учетом соотношений<sup>14</sup>

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} = \Delta_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{1}{2} (\Lambda_{\lambda\nu}^{\mu} + \Lambda_{\lambda\mu}^{\nu}) \quad (19)$$

оператор типа дивергенции  $D_{\mu}$  можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{h} D_{\mu} \mathfrak{G}^{\mu\alpha} = \nabla_{\mu} G^{\mu\alpha} + \frac{1}{2} G^{\nu\sigma} \Lambda_{\mu\sigma}^{\alpha} + \frac{1}{2} G^{\mu\sigma} (\Lambda_{\sigma\mu}^{\alpha} - \Lambda_{\alpha\sigma}^{\mu}), \quad (20)$$

где  $\nabla_{\mu} G^{\mu\alpha}$  означает обыкновенную дивергенцию тензора  $G^{\mu\alpha}$  в римановом смысле. Так как  $G^{\mu\alpha}$  — симметричный тензор, два последних члена в (20) исчезают. Тем самым тождество (18) упро-

<sup>14</sup> Ср., например, *R. Weitzenböck*. Berlin. Ver., 1928, S. 466, уравнение (13). Р. Вайтценбек использует другое определение  $\Lambda_{\lambda\nu}^{\mu}$ , отсюда разница в коэффициентах.

щается к виду

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\alpha} = \frac{\partial G^{\mu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} G^{\mu\nu} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\alpha \end{matrix} \right\} G^{\nu\alpha} \equiv 0. \quad (18')$$

Тензор  $G^{\mu\nu}$  в вакууме равен нулю. Направивается предположение по аналогии с классической теорией, что в присутствии материи  $G^{\mu\nu}$  пропорционально тензору материи

$$G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}, \quad (21)$$

где  $T^{\mu\nu}$  определено следующим образом:

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} \quad (22)$$

( $\rho$  — это плотность и  $\partial x^{\mu}/ds$  — скорость материи).

Можно сомневаться в том, что уравнения (21) и в особенности (22), которые построены по образцу соответствующей классической теории<sup>15</sup>, справедливы в новой теории. В частности, в классической теории в правой части (21) выступает еще один дополнительный член, равный плотности энергии-импульса электромагнитного поля. Однако в единой теории поля, где электромагнитное и гравитационное поля не могут быть резко разделены, специальное введение такого дополнительного члена кажется неоправданным.

Из (18') и (21) следует, что тензор материи  $T^{\mu\nu}$  в римановом смысле имеет нулевую дивергенцию. Если рассмотреть случай, когда плотность материи  $\rho$  исчезает на поверхности тонкой мировой трубы, применить закон сохранения и, наконец, перейти к пределу бесконечно тонкой мировой трубы (материальная точка инфинитезимальной массы), то получается, как известно, с учетом (22)<sup>15</sup>, что осью этой мировой трубы должна быть (кратчайшая) геодезическая линия

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0. \quad (23)$$

Тем самым предположения (21) и (22) приводят к уравнению движения, которое совсем не учитывает силу Лоренца, действующую на заряженную точечную массу.

Следует еще заметить, что и уравнения самой прямой геодезической линии

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{ds^2} + \Delta_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0 \quad (24)$$

не могут соответствовать уравнениям движения точечной массы, потому что в поле, не зависящем от времени, справедливо

$$\Delta_{\mu 4}^{\lambda} = \delta^{\lambda}_{\mu} \frac{\partial h_{\mu}}{\partial x^4} = 0 \quad (x^4 = ct). \quad (25)$$

<sup>15</sup> Ср., например, *A. S. Eddington. Mathematical Theory of Relativity, 1923, § 56.*

Если бы, таким образом, уравнения движения были идентичны (24), то ускорение покоящейся точечной массы ( $dx^k/ds=0$ ,  $dx^4/ds=1$ ) в не зависящем от времени поле должно было бы быть равным нулю.

## П р и л о ж е н и е

Доказательство того, что определенный в (8), (8') и (10) вид для компонент  ${}^{\sigma}h_{\lambda}$  — наиболее общий сферически-симметричный вид

Поле репера  ${}^{\sigma}h_{\lambda}$  может быть определено заданием тензоров  $g_{\mu\nu}$  и  $\Delta_{\mu\nu}^{\lambda}$ . Трехиндексные символы Кристоффеля, вычисляемые по  $g_{\mu\nu}$  и  $\Delta_{\mu\nu}^{\lambda}$ , определяются однозначно согласно (19) по  $\Delta_{\mu\lambda}^{\lambda}$  и  $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$ . Если же известно  $\Delta_{\mu\nu}^{\lambda}$ , то репер, заданный в произвольной мировой точке, при сохранении дальнего параллелизма можно передвинуть в любую другую мировую точку, таким образом найти  ${}^{\sigma}h_{\lambda}$  как функции координат.

Мы опять используем координатную систему, определяемую в (9), что не означает ограничения общности.  $\gamma = \sqrt{g_{kk}}$  и  $\alpha = \sqrt{-g_{44}}$  — это произвольные функции радиус-вектора  $r$ . Ковариантный тензор III ранга  $\Delta_{\mu\nu}^{\lambda}$  расщепляется в статическом поле на следующие независимые трехмерные составные части: один тензор I ранга  $\Delta_{4k}^4 = -\Delta_{k4}^4$ , два тензора II ранга  $\Delta_{jk}^4$  и  $\Delta_{4k}^j = -\Delta_{k4}^j$  и один тензор III ранга  $\Delta_{kjl}^j$ . С учетом антисимметрии  $\Delta_{\mu\nu}^{\lambda}$  относительно нижних индексов легко показать, что наиболее общая гипотеза о сферически-симметричной структуре для этих частей тензора  $\Delta_{\mu\nu}^{\lambda}$  гласит следующее:

$$\Delta_{4k}^4 = Ax_k, \quad \Delta_{4k}^j = B\varepsilon_{jkl}x_l + C\delta_{jk} + Dx_jx_k, \quad \Delta_{jk}^4 = E\varepsilon_{jkl}x_l, \quad (26)$$

$$\Delta_{kjl}^j = Lx_j\varepsilon_{kln}x_n + N(x_k\delta_{jl} - x_l\delta_{jk}) + P\varepsilon_{jkl}, \quad (27)$$

где по всем дважды встречающимся индексам следует суммировать. Величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и т. д. — это произвольные функции  $r$ , а  $\varepsilon_{jkl}$  — полностью пространственно-антисимметричный тензор ( $\varepsilon_{jkl}=0$ , если не все индексы  $j$ ,  $k$ ,  $l$  различны, или  $\varepsilon_{jkl} = \pm 1$ , в зависимости от того, возникает ли последовательность  $j$ ,  $k$ ,  $l$  из 1, 2, 3 с помощью четной или нечетной перестановки).

Если теперь вычислить  $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$  в функции от  $\gamma$  и  $\alpha$  и потом с учетом (19), (25) и (27) найти  $\Delta_{\mu\nu}^{\lambda}$ , то получим, во-первых, два соотношения между десятью величинами  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и т. д.:

$$E = -2B, \quad A = -\alpha\alpha'/r, \quad (28)$$

и, во-вторых, следующие выражения для  $\Delta_{\mu k}^{\lambda}$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{4k}^4 &= \frac{\alpha'}{r\alpha} x_k, & \frac{\alpha}{\gamma} \Delta_{jk}^4 &= \frac{\gamma}{\alpha} \Delta_{4k}^j = U\varepsilon_{jkl}x_l + V\delta_{jk} + Wx_jx_k, \\ \Delta_{kjl}^j &= Q\varepsilon_{jkl} + Rx_l\varepsilon_{kln}x_n + S(x_k\delta_{jl} - x_j\delta_{kl}) + \frac{\gamma'}{r\gamma} x_l\delta_{jk}, \end{aligned} \quad (29)$$

где положено

$$Q = \frac{1}{2\gamma^2} (P + hr^2), \quad R = \frac{1}{\gamma^2} L, \quad S = \frac{1}{\gamma^2} N + \frac{\gamma'}{r\gamma},$$

$$U = \frac{1}{\alpha\gamma} B, \quad V = \frac{1}{\alpha\gamma} C, \quad W = \frac{1}{\alpha\gamma} D.$$

Теперь учтем тот факт, что риманов тензор кривизны, построенный из  $\Delta_{\mu\nu}^\lambda$ , должен исчезать:

$$\Delta_{\mu\nu, \rho}^\lambda - \Delta_{\mu\rho, \nu}^\lambda + \Delta_{\sigma\rho}^\lambda \Delta_{\mu\nu}^\sigma - \Delta_{\sigma\nu}^\lambda \Delta_{\mu\rho}^\sigma = 0.$$

Вставляя в это уравнение выражения (29), получим следующие соотношения, которым должны удовлетворять введенные выше функции:

$$U (Sr^2 + 1) + VQ = 0, \quad Q^2 + S (2 + Sr^2) - V^2 - U^2 r^2 = 0,$$

$$U (Q - Rr^2) + VS + W (Sr^2 + 1) - \frac{1}{r} V' = 0,$$

$$2US + VR - WQ - \frac{1}{r} U' = 0,$$

$$U (V + Wr^2) - SQ + R (Sr^2 + 1) + \frac{1}{r} Q' = 0,$$

$$U^2 - VW - RQ - S^2 + \frac{1}{r} S' = 0.$$

Как легко вычислить, четыре из этих шести соотношений независимы, т. е. позволяют выразить четыре из шести входящих в них величин в функции от остальных двух (и их производных). Если, например, положить<sup>16</sup>  $U \neq 0$  и  $V \neq 0$ , то легко получить

$$Sr^2 = V\eta - 1, \quad Q = -U\eta, \quad Wr^2 = r\xi' + \frac{1}{\eta} - V,$$

$$Rr^2 = U \left( \frac{1}{V} - \eta + \frac{rU'}{U} - \frac{r\xi'}{\xi} \right),$$

где положено

$$\xi^2 = U^2 + V^2 r^2 \quad \text{и} \quad \eta = \frac{\sqrt{1 + r^2 \xi^2}}{\xi}.$$

Тем самым в общей сферически-симметричной структуре для  $g_{\mu\nu}$  и  $\Delta_{\mu\nu}^\lambda$  остаются четыре независимые функции, например:  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $U$  и  $V$ . Можно было бы провести интеграцию, чтобы определить компоненты  ${}^s h_\lambda$ , соответствующие заданным значениям  $g_{\mu\nu}$  и  $\Delta_{\mu\nu}^\lambda$ . Это, однако, излишне, так как наша гипотеза (8), (8') и (10) содержит как раз четыре произвольные функции  $r$ , а  $g_{\mu\nu}$  и  $\Delta_{\mu\nu}^\lambda$ , вычисляемые из нее, удовлетворяют всем данным соотношениям. Тем самым доказано, что наша структура — это наиболее общая сферически-симметричная структура.

Москва, Институт теоретической физики  
Первого государственного университета

Поступила  
28 июня 1928 г.

<sup>16</sup> Исчезновение одной или обеих этих функций ничего не меняет в окончательном результате.

## ЭЙНШТЕЙНОВСКАЯ ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ <sup>1</sup>

§ 1. Дираковское волновое уравнение гласит в случае отсутствия силовых полей:

$$({}^s\alpha P_s + mc)\Psi = 0, \quad (1)$$

где некоммутирующие матрицы  ${}^s\alpha$  могут рассматриваться как компоненты  $q$ -вектора. С точки зрения эйнштейновской единой теории поля нужно предположить примерно следующее: в произвольном поле компоненты  ${}^s\alpha$   $q$ -вектора  $\alpha$ , отнесенные к параллельному 4-реперу, остаются постоянными, а волновое уравнение сохраняет в основном простую форму (1). Но нужно учесть следующее.

Если бы компоненты репера  ${}^s h^\lambda$  и тем самым и компоненты  $q$ -вектора  $\alpha^\nu = {}^s h^\nu {}^s\alpha$  в гауссовой системе координат были постоянны, то  $p_s {}^s\alpha = {}^s a p_s$  и можно было бы волновое уравнение (1) записать в более общей форме:

$$(\lambda_1 \alpha^\nu P_\nu + \lambda_2 P_\nu \alpha^\nu + mc)\Psi = 0, \quad (2)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — две произвольные константы с суммой, равной 1. Если, однако,  ${}^s h^\nu$  и тем самым и  $\alpha^\nu$  не постоянны, тогда точные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  существенны. Чтобы собственные значения в (2), так же как вектор тока, были действительны, нужно дать  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  комплексно-сопряженные значения:

$$\lambda_1 = \lambda = (1 + in)/2, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda} = (1 - in)/2, \quad (3)$$

где  $n$  — произвольное действительное число <sup>2</sup>.

Далее, в общем случае под  $P_\nu$  нужно понимать ковариантное дифференцирование, а именно риманово. Это видно непосредственно, если уравнение (2) выводится из вариационного принципа:

$$\delta \int H \sqrt{-g} d\Sigma = 0, \quad (4)$$

$$H = -iK \left( \lambda \bar{\psi} \beta^\nu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} - \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^\nu} \beta^\nu \Psi \right) + mc \bar{\psi}^0 \alpha \psi. \quad (5)$$

<sup>1</sup> Phys. Z., 1929, 30, 652. Перевод Р. Э. Каллош.

<sup>2</sup> В более ранней заметке в «Amsterdam Proc.» (1929, N 3) я, к сожалению, не учел этого требования. За критику этой статьи я обязан любезности доктора Казимира.



$K$  — это деленная на  $2\pi$  планковская константа и  $\beta^{\nu} = {}^0\alpha\alpha^{\nu} = {}_s h^{\nu}\alpha^s$ . Введение матрицы  $\beta^{\nu}$  необходимо, так как из-за мнимости пространственных компонент репера  $\alpha^{\nu}$  неэрмитовы (так же как  $\beta^{\nu}$ ).

§ 2. Если обозначить  $a$ , определенную через

$$\Lambda_{\mu\lambda}^{\lambda} = a\Phi_{\mu} \left\{ \Lambda_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} {}_s h^{\lambda} \left( \frac{\partial {}_s h_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial {}_s h_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) \right\},$$

универсальную константу пропорциональности между  $\Lambda_{\mu\lambda}^{\lambda}$  и 4-потенциалом  $\Phi_{\mu}$ , то после некоторых преобразований уравнение (2) можно привести к обычному виду, аналогичному уравнению Дирака:

$$\alpha^{\nu} (p_{\nu} + 2ai\bar{\lambda}K\Phi_{\mu})\psi + mc\psi = 0. \quad (6)$$

Если, далее, принять, что

$$an = e/c\kappa,$$

то легко показать, что следующее из (2) уравнение второго порядка по  $\psi$  отличается только на члены второго порядка величины от общего релятивистского уравнения Шредингера, дополненного дираковским спиновым членом<sup>3</sup>.

§ 3. Тем самым эйнштейновская теория позволяет определить общековариантную форму волнового уравнения очень простым способом. Поскольку, с другой стороны, в этой теории уравнения движения заряженной частицы, по-видимому, не соответствуют простому принципу движения (во всяком случае, не принципу геодезической линии), то в новой эйнштейновской теории волномеханический принцип оказывается превалирующим над принципом кратчайшего пути.

*Замечание* (от 9.VII 1929 г.). В отличие от  $H$  (уравнение (5)) функцию действия поля будем обозначать  $H^*$ , где  $H$  некоторым образом может зависеть от  ${}_s h^{\lambda}$ ,  $\Lambda_{\mu\lambda}^{\lambda}$  и т. д. Принцип действия полного мирового события (материя+поле) должен, таким образом, гласить:

$$\delta \int (H + H^*) \sqrt{-g} d\Sigma = 0. \quad (7)$$

Варьируя в (7) волновую функцию  $\psi$  (соответственно  $\bar{\psi}$ ), получим умноженное на  ${}^0\alpha$  волновое уравнение (2). Варьируя компоненты репера  ${}_s h^{\lambda}$ , получаем волновые уравнения

$$G_{\nu}^{\mu} = T_{\nu}^{\mu}, \quad (8)$$

где  $G_{\nu}^{\mu}$  — гамильтоновы производные от  $H^*$  и

$$T_{\nu}^{\mu} = iK \left( \lambda \bar{\psi} \beta^{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\nu}} - \bar{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\nu}} \beta^{\mu} \bar{\psi} \right) \quad (9)$$

<sup>3</sup> См. подробнее в «С. г. Acad. sci. Paris» от 25 июня 1929 г. (см. наст. том, работу 50. — *Прим. ред.*).

следует рассматривать как тензор энергии-импульса материи. С учетом (2) можно показать, что, во-первых,

$$D_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0, \quad (10)$$

что соответствует тождествам для  $G_{\nu}^{\mu}$ , выведенным Эйнштейном, и что, во-вторых,

$$T = T_{\mu}^{\mu} = mc\bar{\psi}^0\alpha\psi. \quad (11)$$

Тем самым по аналогии с классической теорией  $\text{Sp}T_{\mu}^{\mu}$  тензора материи равен (средней) плотности материи. Экстремум гамильтоновой функции  $H$ , которая согласно (5) и (9) может быть записана следующим образом:

$$H = mc\bar{\psi}^0\alpha\psi - T_{\mu}^{\mu}, \quad (12)$$

равен нулю <sup>4</sup>.

Тензор материи не симметричен; предположительно симметричная часть (8) соответствует гравитационным, антисимметричная — электромагнитным уравнениям поля.

*Москва, Институт теоретической физики  
Первого государственного университета*

---

<sup>4</sup> Ср. с этим V. Fock. С. г. Acad. sci. Paris, 2 Juli, 1923.

К ТЕОРИИ СПИНА <sup>1</sup>*Совместно с В. Л. Гинзбургом*

В работе развивается теория спина на основе построения релятивистских уравнений для волновой функции, зависящей не только от координат частицы, но также от других четырехмерных тензоров (спиноров). Этот путь, на котором открывается целый ряд возможностей, приводит к появлению новых величин, преобразующихся по бесконечномерному унитарному представлению группы Лоренца и не сводящихся, таким образом, к обычным спинорам

§ 1. В релятивистской теории состояние частицы со спином  $s$  может быть описано  $2(2s+1)$  волновыми функциями от трех пространственных координат <sup>2</sup>. Можно сказать поэтому, что частица со спином  $s$  имеет, помимо обычных трех степеней свободы, еще дискретные, «внутренние» степени свободы, соответствующие  $2s+1$  возможным ориентациям ее спина и двум возможным знакам ее заряда (в случае целого спина) или ее энергии (в случае полуцелого спина). В настоящей статье рассматривается релятивистская теория частиц, обладающих, помимо трех пространственных степеней свободы, еще некоторым числом не дискретных, а непрерывных «внутренних» степеней свободы. Иными словами, волновая функция (могущая иметь несколько компонент) предполагается зависящей не только от  $x, y, z, t$ , но также и от ряда «внутренних» координат  $u_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, 3, \dots$ ), возможные значения которых образуют непрерывное множество.

В дальнейшем будет, например, более подробно рассмотрен случай, когда эти внутренние координаты могут быть интерпретированы как три угла, определяющие ориентацию единичного вектора в четырехмерном пространстве. Приступая к этому исследованию в 1941 г., мы исходили из убеждения, что указанное обобщение теории элементарных частиц является естественным развитием современной теории частиц с произвольным (в частности с переменным) спином [1, 2], на основании которого можно будет преодолеть специфические трудности, возникающие в этой теории для частиц со спином  $\geq 1$ . При этом мы руководствовались соображениями в духе принципа соответствия, которые будут изложены в § 2. Наша работа, проводившаяся с многочисленными

<sup>1</sup> ЖЭТФ, 1947, 17, 227.

<sup>2</sup> Например, в частном случае спина  $s=0$  для описания состояния частицы в релятивистской теории необходимо знание не только волновой функции, но и ее производной по времени.

перерывами в 1941—1945 гг., не привела нас к результатам, имеющим непосредственное физическое значение, и во многом не оправдала наших надежд. Тем не менее ряд выявившихся новых возможностей в теории элементарных частиц, не охватываемых спинорным анализом, побудил нас опубликовать наши результаты в том незавершенном виде, до которого они нами были доведены.

§ 2. В 1939 г. Гейзенберг показал, что известные трудности теории частиц с «истинным» магнитным моментом связаны с безынерционностью спина в современной его трактовке, т. е. с тем, что современная теория не учитывает электромагнитного момента инерции магнитного диполя. В классической теории учет электромагнитного момента инерции магнитного диполя приводит к тому, что уравнение

$$\dot{\mu} = \kappa |\mu \mathbf{H}|, \quad (I)$$

определяющее вращение диполя в магнитном поле  $\mathbf{H}$ , дополняется еще одним членом [2]:

$$\dot{\mu} = \kappa |\mu \mathbf{H}| + \alpha [\mu \ddot{\mu}], \quad (II)$$

где  $\alpha$  — постоянная, равная бесконечности для точечного диполя.

Второй член формулы (II), естественно, ограничивает рассеяние диполем коротких электромагнитных волн (поперечное сечение этого рассеяния при  $\nu \rightarrow \infty$  стремится к конечному пределу, тогда как уравнение (I) приводит к пропорциональности этого сечения квадрату частоты [2]).

Уравнение (II) представляет собой не что иное, как уравнение движения симметричного волчка в натуральной форме. Квантование симметричного волчка приводит, как известно, к следующим результатам. Если считать фиксированным значение «собственного» момента вращения  $s$  волчка относительно оси симметрии, то его энергия определяется квантовым числом  $j \geq s$ ; каждому значению  $j$  соответствует  $2j+1$  собственных функций, преобразующихся по представлению группы вращения  $D(j)$ .

Учетом в уравнении Шредингера наряду с вращением волчка также и движение его центра инерции. Если внешние поля, обуславливающие квантовые переходы, соответствующие изменению числа  $j$ , обладают малой интенсивностью, а изменения энергии при этих переходах велики, то этими переходами можно в первом приближении пренебречь. В этом случае уравнения движения волчка совершенно идентичны нерелятивистским уравнениям движения частицы со спином  $j$ , причем энергия вращательного движения волчка играет в этом случае роль энергии покоя. Учет же в следующем приближении вызываемых внешним полем квантовых переходов, соответствующих изменению числа  $j$ , приводит к (нерелятивистским) уравнениям движения частицы с переменным спином и переменной энергией покоя, зависящим от значения числа  $j$  [2, 3].

Эти обстоятельства побудили нас предпринять попытку построения релятивистской теории частиц с переменным спином, основанной на аналогии с указанными результатами нерелятивистской теории волчка. Конечно, эту аналогию, имеющую лишь эвристическое значение, нельзя понимать слишком широко. Теория строится не для протяженного тела конечных размеров, а для элементарной частицы (не говоря уже о том, что теория относительности вообще не допускает существование твердых тел). Мы исходим из предположения, что состояние точечной частицы может характеризоваться не только тремя пространственными координатами, но также и некоторыми углами, соответствующими в классической теории направляющим углам оси симметрии волчка. Свойства такой частицы будут определяться не только ее массой и зарядом, но и добавочными постоянными (соответствующими моментам инерции волчка).

Один из нас показал на ряде примеров [2], как можно построить релятивистские уравнения движения для частицы с переменным спином и переменной массой путем введения определенной связи между обычными уравнениями движения двух родов частиц с различными спинами. При этом удалось показать, что в такого рода схемах действительно устраняются некоторые трудности теории (например, рост с энергией поперечного сечения для рассеяния). Однако ввиду безграничного количества возможных вариантов такого рода теории и полного произвола в выборе значений входящих в нее констант эти результаты надо рассматривать лишь как иллюстрацию возможностей, заключенных в теориях частиц с переменным спином. Настоящая работа возникла в результате стремления положить в основу теории частиц с переменным спином некоторые положения более общего характера.

§ 3. Волновое уравнение частицы со спином нуль, как известно, имеет вид

$$(\square - \kappa^2) \Psi(x_i) = 0, \quad (1)$$

$$\square \equiv \square_{x_i} \equiv \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \equiv \sum_{i=1}^4 \partial_i^2, \quad x_4 = ict = ix_0, \quad \kappa^2 = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}.$$

В обычной теории частиц с отличным от нуля спином функция  $\Psi(x_i)$  является не скаляром, как в (1), а спинором соответствующего ранга. При этом компоненты функции  $\Psi$  по-прежнему удовлетворяют уравнению (1) и, кроме того, другим известным уравнениям [1]. В соответствии со сказанным выше мы в развиваемой здесь теории спина будем считать  $\Psi$  скалярной функцией, зависящей, однако, помимо  $x_i$ , также от других четырехмерных тензоров или спиноров. В этом параграфе рассмотрен простейший вариант подобной теории, когда  $\Psi$  зависит от четырехмерного вектора  $u_i$ , т. е. имеет вид  $\Psi(x_i, u_i)$ ; общий случай разбирается в § 4—5.

Предположим, что скалярное волновое уравнение для функции  $\Psi(x_i, u_i)$  отличается от уравнения (1) добавлением к оператору  $\square - \chi^2$  некоторого скалярного оператора, действующего на переменные  $u_i$  (но не на  $x_i$ ). Все операторы этого типа могут быть сведены к скалярным функциям следующих трех скалярных операторов:

$$\square u_i \equiv \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial u_i^2}, \quad u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \equiv \sum_{i=1}^4 u_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad \sum_{i=1}^4 u_i^2. \quad (2)$$

Перейдем к сферическим координатам, положив

$$\begin{aligned} u_1 &= r \operatorname{ch} \chi \sin \theta \cos \varphi, & u_3 &= r \operatorname{ch} \chi \cos \theta, \\ u_2 &= r \operatorname{ch} \chi \sin \theta \sin \varphi, & u_4 &= ir \operatorname{sh} \chi, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $-\infty < \chi < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Из (3) следует, что  $\sum u_i^2 = r^2 > 0$ , так что вектор  $u_i$  пространственно подобен (о возможности выбора времениподобного вектора  $u_i$  см. примечание на стр. 210).

В сферических координатах

$$\square u_i \equiv \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L_1}{r^2}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \operatorname{ch}^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right) + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \chi} \Delta_{\theta, \varphi}, \\ \Delta_{\theta, \varphi} &\equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\sum u_i^2 = r^2, \quad u_i \frac{\partial}{\partial u_i} = r \frac{\partial}{\partial r}. \quad (6)$$

Мы примем, что «длина» вектора  $u_i$  задана и не может принимать различных значений; в противном случае мы получили бы еще одну степень свободы, которая, как ясно из дальнейшего, оказывается излишней с точки зрения теории спина (см., однако, § 5).

Принимая, таким образом, что  $r^2 = \text{const}$  и, следовательно,  $\partial \Psi / \partial r = 0$ , мы видим, что нас должен интересовать лишь оператор  $L_1$ , имеющий смысл квадрата собственного четырехмерного момента количества движения. Действительно, введем оператор

$$M_{ik} \equiv u_i \frac{\partial}{\partial u_k} - u_k \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad (7)$$

отличающийся от оператора момента отсутствием множителя  $ih$  и удовлетворяющий, как легко проверить, перестановочным соотношениям

$$M_{ik} M_{nm} - M_{nm} M_{ik} = M_{nk} \delta_{im} + M_{km} \delta_{in} + M_{in} \delta_{km} + M_{mi} \delta_{nk}. \quad (8)$$

Тогда

$$\frac{1}{2} M_{ik} M_{ik} = \sum u_i^2 \square u_i - \left( u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right)^2 - 3 u_i \frac{\partial}{\partial u_i} = L_1. \quad (9)$$

Следовательно, если мы хотим, чтобы уравнение для  $\Psi(x_i, u_i)$  было не выше второго порядка, то оно должно иметь вид

$$\left(\square - x^2 + \frac{\beta}{2} M_{ik} M_{ik}\right) \Psi(x_i, u_i) = 0, \quad (10)$$

где  $\beta$  — новая постоянная.

То же уравнение можно получить сразу, если стремиться непосредственно обобщить нерелятивистскую теорию волчка, в которой добавочная энергия равна квадрату трехмерного момента количества движения (см., например, [2] (2.1)) и волновое уравнение таково:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\hbar^2 \Delta + \frac{\beta}{2} M^2\right) \Psi.$$

Поскольку в уравнении (10) переменные разделяются, мы можем положить

$$\Psi(u_i, x_i) = \Psi(x_i) \varphi(u_i) \quad (11)$$

и, таким образом, получаем уравнения

$$\left(\square - x^2 + \lambda\beta\right) \Psi(x_i) = 0 \quad (12)$$

и

$$L_1 \varphi = \frac{1}{2} M_{ik} M_{ik} \varphi = \lambda \varphi. \quad (13)$$

Как ясно из (12), значение параметра  $\lambda$  определяет массу покоя частицы (подстановка  $\Psi(x_i) = \text{const } e^{\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}$  приводит к соотношению  $m_0^2 c^2 = \hbar^2 x^2 - \hbar^2 \lambda \beta$ ).

В отношении функции  $\varphi$  мы потребуем, чтобы модуль ее квадрата был интегрируем на гиперповерхности  $r^2 = \text{const}$ , т. е. чтобы можно было осуществить релятивистски-инвариантную нормировку

$$\int |\varphi|^2 dS \equiv \int |\varphi|^2 \text{ch}^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\varphi, \quad (14)$$

где  $dS = \text{ch}^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\varphi$  есть площадь элемента гиперповерхности и интегрирование ведется по всей гиперповерхности, т. е. во всей указанной выше области изменения переменных  $\chi$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ .

Требование интегрируемости  $|\varphi|^2$  является необходимым условием для возможности интерпретировать  $|\varphi|^2$  как плотность вероятности.

Учитывая (9), можно положить

$$\varphi(\chi, \theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi) R(\chi), \quad (15)$$

где  $Y_{lm}$  — шаровые функции ( $\Delta_{\theta\varphi} Y_{lm} = -l(l+1) Y_{lm}$ ). В результате подстановки (15) в (13) мы получаем следующее уравнение для  $R(\chi)$ :

$$\left[\frac{1}{\text{ch}^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\text{ch}^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi}\right) + \frac{l(l+1)}{\text{ch}^2 \chi} + \lambda\right] R = 0. \quad (16)$$

Полагая  $v = R(\operatorname{ch}\chi)^{l+1}$  и  $y = \operatorname{sh}\chi$ , получаем уравнение

$$(1 + y^2) \frac{d^2 v}{dy^2} - (2l - 1) y \frac{dv}{dy} + \{(l^2 - 1) + \lambda\} v = 0 \quad (17)$$

и условие нормировки в виде (шаровые функции предполагаются нормированными на единицу)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R^2| \operatorname{ch}^2 \chi d\chi = \int_{-\infty}^{+\infty} |v|^2 (1 + y^2)^{-\left(l + \frac{1}{2}\right)} dy = 1. \quad (18)$$

Применяя к гипергеометрическому уравнению (17) обычный метод полинома, т. е. полагая  $v = \sum_n a_n y^n$ , можно показать, что входящий в (18) интеграл сходится только при условии, что этот ряд для функции  $v$  обрывается на некотором числе  $n_{\max}$ , причем  $n_{\max} \leq l - 1$ .

В результате оказывается, что возможные значения  $\lambda$  и  $l$  связаны следующими соотношениями:

$$\lambda = -(j^2 - 1), \quad j = 1, 2, 3, \dots; \quad l = j, j + 1, j + 2, \dots \quad (19)$$

Таким образом, при  $l=0$  уравнение (17) не имеет интегрируемых решений<sup>3</sup>.

Энергия частицы зависит лишь от  $j$  (см. (12)), и, таким образом, спектр бесконечно вырожден, так как каждому  $j$  отвечает бесконечное число состояний с  $l \geq j$ . Значит, мы получили не частицу с определенным спином и даже не частицу с переменным спином, а скорее частицу с неопределенным спином; в соответствии с этим собственные функции уравнения (10) не сводятся к спинорам, а преобразуются по некоторому новому представлению группы Лоренца.

Система функций  $Y_{lm}(\theta, \varphi) R_{jl}(\chi)$ , удовлетворяющих уравнению (13), может быть ортогонализирована и нормирована, и любая функция  $\Psi(u_i) = \Psi(\chi, \theta, \varphi)$ , заданная на гиперповерхности  $\sum u_i^2 = \operatorname{const}$ , удовлетворяющая обычным требованиям и не содержащая<sup>4</sup> члена с  $Y_{00}$ , может быть разложена по функциям  $Y_{lm} R_{jl}$ :

$$\Psi(\theta, \varphi, \chi) = \sum_{lmj} a_{lmj} Y_{lm} R_{jl}. \quad (20)$$

Далее,

$$\int |\Psi|^2 dS = \sum_{lmj} |a_{lmj}|^2. \quad (21)$$

<sup>3</sup> Если считать вектор  $u_i$  времениподобным, то таким же образом, как выше, можно показать, что в этом случае имеется лишь решение, соответствующее значению  $l=j=0$ , которое не фигурирует в (19). Спектр при этом оказывается непрерывным ( $\lambda$  — любое положительное число). Ниже этот случай не рассматривается.

<sup>4</sup> Как указано выше, в числе решений уравнения (13) отсутствует решение  $Y_{00} R_{00}$ , чем и вызвано сделанное ограничение вида  $\Psi(\chi, \theta, \varphi)$ .



При преобразовании Лоренца функции  $Y_{lm}R_{jl}$  и коэффициенты  $a_{lmj}$  претерпевают линейное преобразование, представляющее собой бесконечномерное, унитарное представление лоренцевой группы. Унитарность этого представления следует из того, что при преобразовании остается инвариантной положительная форма (21). Коэффициенты  $a_{lmj}$  являются компонентами новой величины, не сводящейся к спинорам. К этому вопросу мы еще вернемся в § 4.

Из сказанного ясно, что для получения уравнений для частицы с определенным (или переменным) спином нужно дополнить уравнение (10) еще каким-либо другим. Требование релятивистской инвариантности весьма сильно ограничивает открывающиеся здесь возможности и показывает, что в качестве упомянутого уравнения нужно выбрать следующее ( $\partial_i = \partial/\partial x_i$ ):

$$(M_{il}M_{kl}\partial_i\partial_k - (j_0 + 1)\sum_i \partial_i^2)\Psi \equiv \partial_i(M_{il}M_{kl}\partial_k - (j_0 + 1)\partial_i)\Psi = 0, \quad (22)$$

где  $j_0$  — заданное число.

В покоящейся системе координат из четырех производных  $\partial_i\Psi$  отлична от нуля лишь производная  $\partial_4\Psi$ , и (22) переходит в

$$(M_{4l}M_{4l} - (j_0 + 1))\Psi = 0. \quad (23)$$

Как ясно из (9), (18) и (19),

$$\begin{aligned} (M_{4l}M_{4l})\Psi &= \left\{ \frac{1}{2}M_{ik}M_{ik} - (M_{23}^2 + M_{31}^2 + M_{12}^2) \right\} \Psi = \\ &= \{-j^2 + 1 + l(l+1)\}\Psi. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (23) означает, что на  $j$  и  $l$  накладывается условие

$$l^2 + l - j^2 - j_0 = 0, \quad (24)$$

причем

$$l \geq j, \quad j \neq 0, \quad l \text{ и } j \text{ — целые числа.} \quad (25)$$

Уравнение (24) имеет решения, удовлетворяющие условиям (25) лишь при целочисленных значениях  $j_0$ . При этом всегда есть решение

$$j = l = j_0. \quad (26)$$

При  $j_0 \leq 4$  это решение единственно, но при  $j_0 = 5$  имеется также решение с  $j=1$  и  $l=2$ . Подобные дополнительные к (26) решения имеются и при некоторых других значениях  $j_0 > 5$ . Из сказанного вытекает, что при  $j_0 \leq 4$  частица, описываемая уравнениями (10) и (22), обладает в покоящейся системе координат спином  $l=j_0$ , т. е. имеется  $2l+1$  независимых решений, отличающихся квантовым числом  $m$  и преобразующихся по соответствующему представлению группы вращений.

В движущейся системе координат решения уравнений (10) и (22) не сводятся к шаровым функциям с определенным  $l$ , а представляются в виде ряда типа (20). Однако, поскольку число не-

зависимых решений остается по-прежнему равным  $2l+1$ , значение спина остается неизменным.

При  $j_0=5$  и при некоторых больших значениях  $j_0$  спин может принимать несколько значений (например, при  $j_0=5$ ,  $l=2$ ,  $j=1$  и  $l=j=5$ ), причем масса покоя частицы в различных состояниях неодинакова (см. (12) и (19)).

Весьма интересно, что данное значение спина  $l$  может реализоваться различными способами. Задаваясь в (24) определенным значением  $l$ , мы видим, что при соответствующих значениях  $j_0$  существуют решения для всех  $j \leq l$  (например, при  $l=1$   $j=j_0=1$ ; при  $l=2$   $j=j_0=2$  и  $j=1$ ,  $j_0=5$ ; при  $l=3$   $j=j_0=3$ ,  $j=2$ ,  $j_0=8$  и  $j=1$ ,  $j_0=11$  и т. д.).

В покоящейся системе волновые функции, отвечающие различным реализациям  $Y_{lm}R_{jl}$  заданного значения спина, отличаются функциями  $R$ , так как число  $j$  в различных реализациях разное. В движущейся системе при разложении волновой функции в ряд типа (20) коэффициенты  $a_{lmj}$  для различных реализаций не одинаковы.

Вопрос о характере различных решений и реализаций нуждается в дальнейшем исследовании. Оно не было проведено ввиду трудностей, возникших при попытках ввести в теорию взаимодействие частицы с полем (см. § 6).

§ 4. Выше был рассмотрен лишь простейший частный случай развиваемой здесь теории, характеризующийся тем, что  $\Psi$  зависит от вектора  $u_i$ . Между тем если использовать классическую аналогию, то для построения уравнений для частиц с переменным спином нужно в качестве новых аргументов  $\Psi$  выбрать не компоненты вектора  $u_i$ , а компоненты некоторого антисимметричного тензора  $S_{ik}$  (см. [2], дополнение 3); в этом случае операторы момента имеют вид

$$M_{ik} = S_{kl} \frac{\partial}{\partial S_{il}} - S_{il} \frac{\partial}{\partial S_{kl}} \quad (27)$$

и удовлетворяют по-прежнему соотношениям (8).

Однако как в случае векторного, так и в случае тензорного аргумента получаются уравнения для целого спина. В случае полужелых спинов аргументы  $\Psi$  должны, по-видимому, быть спинорами нечетного ранга, в частности биспинорами теории Дирака. Различные обобщения теории на случай невекторного аргумента функции  $\Psi$  нами подробнее не рассматривались как по причинам, указанным в § 6, так и в силу того, что существенное продвижение вперед возможно без всяких частных предположений об аргументах  $\Psi$  на основе использования некоторых математических результатов И. М. Гельфанда<sup>5</sup>; мы остановимся здесь на

<sup>5</sup> Мы весьма признательны проф. И. М. Гельфанду за сообщение в середине 1944 г. некоторых своих неопубликованных материалов и за обсуждение вопроса. В последнее время появилась работа Дирака [4], в которой

них с точки зрения применения к нашей задаче. Как известно, не существует конечномерных унитарных представлений группы Лоренца, и все величины, преобразующиеся по конечномерному представлению этой группы, сводятся к спинорам [5]. Однако существуют величины с бесконечным числом компонент, преобразующиеся по бесконечномерному унитарному представлению лоренцовой группы. Именно такие величины, полученные нами в § 3, были независимо рассмотрены Гельфандом в общем виде. Для нас сейчас важен лишь следующий результат: компоненты этих величин удовлетворяют уравнениям

$$L_1\varphi \equiv \frac{1}{2} M_{ik} M_{ik} \varphi = \lambda_1 \varphi, \quad (28)$$

$$L_2\varphi \equiv -i \{M_{23}M_{14} + M_{31}M_{24} + M_{12}M_{34}\} \varphi = \lambda_2 \varphi,$$

где  $M_{ik}$  — операторы, подчиняющиеся перестановочным соотношениям (8) и играющие роль операторов бесконечно малых преобразований<sup>6</sup>. При этом способ реализации этих операторов не имеет значения, так что результаты сразу относятся к реализации  $M_{ik}$  как в виде (7), так и в виде (27) и т. д. Если, например,  $\varphi = \varphi(S_{ik})$ , то совокупность решений уравнений (28) образует полную систему функций на гиперповерхности, определяемой заданием значений всех инвариантов  $S_{ik}$ , т. е. [5]

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} S_{ik} S_{ik} \quad \text{и} \quad \sigma_2 = -i \{S_{23}S_{14} + S_{31}S_{24} + S_{12}S_{34}\}.$$

В случае вектора нужно задать  $\Sigma u_i^2$ , что мы и делали в § 3.

Формой, остающейся инвариантной при преобразовании, является интеграл от  $|\varphi|^2$  по гиперповерхности (см. (14)). Собственные функции  $\varphi$  уравнений (28) характеризуются квантовыми числами  $j, l, m, \alpha$ , где  $j, l, m$  — полуцелые или целые числа и  $\alpha$  — вещественное положительное число, причем  $l \geq j$ ,  $|m| \leq l$ . Используя полученные Гельфандом выражения для  $M_{ik}\varphi_{jlm\alpha}$ , легко показать, что

$$\lambda_1 = -(j^2 - 1) + \alpha^2, \quad \lambda_2 = -\alpha j. \quad (29)$$

Кроме того, как всегда,  $(M_{23}^2 + M_{31}^2 + M_{12}^2)\varphi = -l(l+1)\varphi$ . В случае  $\Psi(u_i)$ , т. е. при выборе  $M_{ik}$  в виде (7), легко видеть, что  $L_2 \equiv 0$ ; поэтому при  $j \neq 0$   $\alpha = 0$  и (29) переходит в (19). При этом в (19)  $l, j$  и  $m$  — целые и  $j \neq 0$ . Вообще же эти числа могут быть и полуцелыми. Для реализации этих случаев нужно считать функцию  $\varphi$

также рассматриваются унитарные представления лоренцовой группы; однако полученные в этой работе результаты в отношении их полноты и общности значительно уступают исследованию Гельфанда.

<sup>6</sup> И. М. Гельфандом рассматривалась лишь собственная группа Лоренца (без зеркального отражения), вследствие чего он считал инвариантами псевдоскаляры  $L_2$  и  $\sigma_2$ . Для дальнейшего это не существенно. При конструировании уравнений можно использовать скаляры  $L_2^2$  и  $\sigma_2^2$ .

зависящей не от  $u_i$ , а от других величин. Решение (19) и указанные перед этой формулой значения  $j$ ,  $l$ ,  $m$  и  $\alpha$  охватывают все возможности, и в том числе также возможности, могущие не реализоваться при каком-либо определенном выборе аргументов функции  $\Psi$ .

§ 5. Используя результаты § 3 и 4, можно построить уравнения движения для функции  $\Psi$ , зависящей, помимо  $x_i$ , от других спиноров, все инварианты которых имеют фиксированные значения. Эти уравнения имеют тот же вид, как (10) и (22):

$$\left( \square_{x_i} - x^2 + \frac{\delta}{2} M_{ik} M_{ik} \right) \Psi = 0, \quad (30)$$

$$[M_{it} M_{kt} \partial_i \partial_k - (j_0 + 1) \square_{x_i}] \Psi = 0, \quad (31)$$

где  $M_{ik}$  удовлетворяют условиям (8).

Используя (29)–(31), мы получаем в покоящейся системе координат условие, обобщающее (24):

$$l^2 + l - j^2 - j_0 + \alpha^2 \equiv l^2 + l - j^2 - \delta = 0, \quad (32)$$

причем  $l \geq j$ , где  $l$  и  $j$  — целые либо полуцелые числа, и в том числе нуль.

При переходе к координатному представлению становится ясным, что возможные значения  $j$  и  $l$  нужно считать либо все целыми, либо все полуцелыми. Поэтому мы рассмотрим оба эти случая отдельно. При целых значениях  $j$  и  $l \geq j$  уравнение (32) имеет решения, лишь если число  $\delta = (j_0 - \alpha^2)$  является целым положительным или нулем (в отличие от случая, разобранный в § 3, значение  $j = l = 0$  при общем рассмотрении исключено быть не может). Отсюда следует, что при фиксированном  $j_0$  число  $\alpha^2$  может принимать лишь конечный ряд значений, меньших или равных  $j_0 \geq 0$ . Далее, при данном значении  $\delta$ , как мы видели в § 3, уравнение (32) имеет решение (26), где  $j_0$  нужно заменить на  $\delta$ , а также иногда некоторые другие решения. Рассмотрим, например, случай  $j_0 = 1$ ; при этом имеются два решения:  $\alpha^2 = 0$ ,  $l = j = 1$  и  $\alpha^2 = 1$ ,  $l = j = 0$ .

Если  $j_0 = 2$ , то имеются решения

$$\begin{array}{ll} \alpha^2 = 0, & l = j = 2; & \alpha^2 = 0, & j = 0, & l = 1; \\ \alpha^2 = 1, & l = j = 1; & \alpha^2 = 2, & j = l = 0. \end{array}$$

Различным решениям, вообще говоря, соответствуют различные значения массы покоя. Мы имеем здесь, таким образом, случай частицы с переменным спином, причем так же, как в [2] и в отличие от нерелятивистского волчка, спектр оборван сверху (каждому значению  $j_0$  соответствует некоторое максимальное возможное значение  $l$ ).

В случае  $j$  и  $l \geq j$  полуцелых уравнение (32) имеет решения лишь при полуцелых значениях  $\delta = (j_0 - \alpha^2)$ . Если  $\delta$  — полуцелое, т. е.  $\delta = k + 1/2$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), то всегда есть решение  $j =$

$=l=\delta$ . При  $\delta \leq 5/2$  это решение единственное, но при больших  $\delta$  возможны и другие решения; так, при  $\delta=7/2$  имеется добавочное решение  $l=3/2, j=1/2$ . Данное полуцелое значение спина  $l$  при  $l=1/2$  реализуется лишь одним способом ( $\delta=1/2, j=1/2$ ), но при  $l > 1/2$  существует несколько реализаций (например, при  $l=3/2, j=\delta=3/2$  и  $j=1/2, \delta=7/2$ ). Обращает на себя внимание тот факт, что для низших спинов 0,  $1/2$  и 1 существует лишь одна реализация<sup>7</sup>, и вместе с тем, как известно, лишь для этих же значений спина обычная теория приводит к простым результатам (см. [1, 6]).

Следует иметь в виду, что уравнения (30)–(31) не являются единственно возможными; в (30) можно, например, ввести также оператор  $L_3^2$  (см. (28)).

Введение в систему (30)–(31) взаимодействия с полем встречается с затруднениями, на которых мы остановимся в § 6; эти затруднения связаны с тем, что система (30)–(31) переопределена (одна функция  $\Psi$  подчиняется двум уравнениям). Поэтому мы стремились освободиться от дополнительных условий типа (31). Рассмотрим, например, уравнение

$$\left( \square - \alpha^2 + \frac{3}{2} M_{ik} M_{ik} + \varepsilon M_{il} M_{kl} \partial_i \partial_k \right) \Psi = 0. \quad (33)$$

Подстановка в (33) решения  $e^{-iE_0 t + i h \varphi}$  приводит к следующему значению для энергии покоя  $E_0 = m_0 c^2$ :

$$\frac{E_0^2}{c^2 \hbar^2} = \frac{\alpha^2 - \zeta (\alpha^2 - j^2 + 1)}{1 + \varepsilon (l^2 + l - j^2 + \alpha^2 + 1)}. \quad (34)$$

Если  $\varphi$  зависит от вектора  $u_i$  ( $\sum u_i^2 > 0$ ), то  $\alpha^2 = 0$  (см. § 3) и мы получаем дискретный, невырожденный спектр. Этот спектр, однако, неприемлем. Действительно, при заданном  $j$ , если  $\varepsilon > 0$ , то с ростом  $l$   $E_0^2 \rightarrow 0$  (падающий спектр с точкой сгущения); если же  $\varepsilon < 0$ , то при достаточно большом  $l$  появляются решения, для которых  $E_0^2 < 0$ , т. е. решения типа  $e^{+E_0 t / \hbar}$ , также недопустимые с физической точки зрения.

В принципе для обобщения уравнения (30) или (33) открывается целый ряд возможностей. Так, если сохранить требование, чтобы уравнение было не выше второго порядка в переменных  $x_i$  и новых переменных  $u_i$  (для определенности считаем новые переменные компонентами вектора), то можно ввести члены  $u_i \partial_i$  и  $(u_i \partial_i)^2$ ; кроме того, можно, не считая, что  $\sum u_i^2 = r^2 = \text{const}$ , ввести в уравнение потенциал  $f(\sum u_i^2)$  и рассматривать волновые функции, зависящие не только от  $\chi, \theta$  и  $\varphi$ , но и от  $r$ . Исследование соответствующих уравнений весьма сложно и нами не проводилось. Представляется также возможным считать волновую функ-

<sup>7</sup> Для спина 1 уравнение (32) дает две реализации ( $j=l=\delta=1$  и  $j=0, l=1, \delta=2$ ). Однако, как мы видели в § 3, при конкретизации уравнений (30)–(31) на гиперповерхности  $\sum u_i^2 = \text{const} > 0$  значение  $j=0$  исключается.

цию не скалярной, как это предполагалось выше, а спинорной (или тензорной). Например, считая  $\Psi(x_i, u_i)$  биспинорной функцией, естественно рассмотреть уравнение

$$(\gamma_i \partial_i + b \gamma_i \gamma_k M_{ik} + \kappa) \Psi = 0,$$

где  $\gamma_i$  — известные матрицы теории Дирака.

Вводя векторную функцию  $\Psi_i$ , приходим к уравнению

$$\square \Psi_i - \kappa^2 \Psi_i + b M_{ik} \Psi_k + \varepsilon \partial_i \partial_k \Psi_k = 0.$$

Исследование этих уравнений показало, что они приводят к спектру типа (34), т. е. либо к падающему спектру, либо к появлению нарастающих во времени решений. Помимо того, представляется весьма искусственным вводить в  $\Psi$  одновременно и новые переменные ( $u_i$  и т. п.) и спинорный индекс. Во всяком случае, в настоящее время из числа известных нам уравнений лишь уравнения (30)—(31) приводят к решениям, вполне разумным с точки зрения соответствующего спектра энергий покоя. Однако введение в эти уравнения взаимодействия с полем остается нерешенной проблемой, на которой мы остановимся в следующем параграфе.

§ 6. В уравнения для частиц со спином  $> 1$  поле (для определенности мы будем говорить об электромагнитном поле) вводится весьма просто путем замены  $\partial/\partial x_i$  на  $\Pi_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{ie}{\hbar c} A_i$ , где  $A_i$  — векторный потенциал; в уравнения можно ввести также члены, зависящие от тензора поля  $F_{ik}$ . В случае уравнений со спином, большим единицы, поступить указанным образом уже нельзя [6]. Это объясняется тем, что в этих случаях число уравнений больше числа неизвестных функций и при замене  $\partial/\partial x_i$  на  $\Pi_i$  уравнения перестают быть совместными. Поэтому приходится вводить новые функции, обрезающиеся в нуль при отсутствии поля и не равные нулю при его наличии; новые функции вводятся таким образом, что при их учете число уравнений равно числу функций и задача допускает вариационную формулировку [6] (см. также [2, 7]). В случае уравнений (30)—(31) число уравнений (два) также больше числа неизвестных функций (известна одна функция). Поэтому получить систему (30)—(31) из вариационного принципа обычным образом невозможно, так же как в эту систему нельзя ввести поле путем упомянутой замены  $\partial/\partial x_i$  на  $\Pi_i$ . Это и понятно, так как уравнения (30)—(31) охватывают и спиновые состояния со спином  $> 1$ , для которых имеют место упомянутые затруднения в обычной теории спина. Связь здесь еще более тесная, так как уравнение (31), так же как второе дифференциальное уравнение в теории высших спинов, имеет вид  $\text{div } f\Psi = 0$ , где  $f$  — некоторый линейный оператор (см. (22) и [1, 6, 7]). Таким образом, для получения (30)—(31) из некоторой функции Лагранжа и последующего введения поля необходимо использование новых дополнительных волновых функций. К сожалению, нам не удалось

пока обнаружить в математической литературе какого-либо регулярного метода сведения к вариационной задаче совместной системы дифференциальных уравнений в частных производных с числом уравнений, большим числа неизвестных функций. Поэтому обобщение развитой здесь схемы на случай наличия внешних полей требует дальнейшего исследования. Заметим в заключение, что присутствие в теории новых переменных и соответствующих им инвариантов (например,  $u_i$  и  $\sum u_i^2$ ) может оказаться интересным не только для развития теории спина, но и с точки зрения других возможных обобщений релятивистских волновых уравнений.

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
9 июля 1946 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Fierz*. *Helv. Phys. Acta*, 1939, **12**, 3.
2. *В. Л. Гинзбург*. *ЖЭТФ*, 1943, **13**, 33.
3. *W. Heitler, S.T.Ma*. *Proc. Roy. Soc. London*, 1940, **A176**, 369.
4. *P. A. M. Dirac*. *Proc. Roy. Soc. London*, 1945, **A183**, 284.
5. *Б. Л. Ван-дер-Верден*. Метод теории групп в квантовой механике, § 20. Харьков, ГНТИ, 1938.
6. *M. Fierz, W. Pauli*. *Proc. Roy. Soc. London*, 1939, **173**, 211.
7. *В. Л. Гинзбург*. *ЖЭТФ*, 1942, **12**, 425.

---

*Примечание.* Работа получила развитие и упоминается в целом ряде статей. Обзор соответствующего направления исследований см. в статье В. Л. Гинзбурга и В. И. Манько в сб. «Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра». М., «Атомиздат», 1975 (см. также *В. Л. Гинзбург*. Проблемы теоретической физики. Сборник памяти И. Е. Тамма. М., «Наука», 1972, стр. 192).

О КРИВОМ ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ <sup>1</sup>

Моя цель состоит в построении теории, свободной от расходимостей. Я, конечно, понимаю, как малы шансы на успех в достижении этой цели. Я приведу лишь предварительные результаты моего исследования, которое ни в коей мере не является законченным, так что многие важные проблемы еще должны быть исследованы.

В настоящее время стало ясным, что развитие физики подвело нас к такой точке, когда стало необходимым изменение некоторых из наших фундаментальных физических представлений и что изменение должно быть столь же коренным, как и то, которое связано с созданием теории относительности и квантовой механики. Одним из многих указаний на это является трудность с расходимостями, возникающими в теории. Хотя процедура перенормировки очень успешно применяется во многих случаях, однако, не говоря уже о существовании неперенормируемых теорий, теория, в которой с необходимостью присутствуют расходимости, которые на каком-то этапе приходится устранять довольно искусственным путем, конечно, не является удовлетворительной.

Мне представляется правдоподобным, что, подобно тому как принцип неопределенности между координатами и импульсами является основой квантовой механики, соотношение неопределенности между самими координатами будет в основе новой физической теории. В связи с этим я должен напомнить, что, как профессор Розенфельд уже отмечал, понятие координаты, как любое другое физическое понятие, должно быть прямо связано с наблюдениями. Координаты элементарных частиц могут быть измерены путем рассеяния пробных частиц (таких, как фотон). Чтобы увеличить точность измерения, необходимо перейти к меньшим длинам волн, т. е. к большим энергиям. Но при больших энергиях рассеяние сопровождается рождением многих новых частиц. Это обстоятельство сильно усложняет измерение. Более того, многие из вновь образовавшихся частиц распадаются в полете на очень малых расстояниях, порядка  $10^{-13} \sim 10^{-14}$  см, и отсутствие возможности отличить частицы, возникшие в результате распада, от появившихся в первоначальном акте рас-

---

<sup>1</sup> Proceedings of the International Conference on Elementary Particles. Kyoto, 1965, p. 314. Перевод В. Б. Вологодского.



сеяния, может наложить принципиальный предел точности измерения координат.

Если все это действительно так, тогда должно существовать соотношение неопределенности между координатами и тогда в принципе невозможно построить последовательную теорию в координатном пространстве. Какой может быть выход? В квантовой теории координатное и импульсное представления полностью эквивалентны (они связаны преобразованием Фурье), и мы предпочтем последнее, тем более что в настоящее время нет никаких указаний о существовании фундаментального ограничения на точность измерения импульса быстрых частиц (например, путем отклонения заряженных частиц в магнитном поле).

Итак, рассмотрим теорию поля, сформулированную в импульсном пространстве. В 1947 г. Снайдер показал, что предположение об искривленности импульсного пространства может, во-первых, избавить теорию от трудностей с расходимостями и, во-вторых, приводит к квантованию пространства-времени. Действительно, в кривом импульсном пространстве элемент объема определяется следующим образом:

$$d^4p \sqrt{\det |g^{\alpha\beta}|}, \quad (1)$$

где  $g^{\alpha\beta}$  — метрический тензор. Если детерминант  $\det |g^{\alpha\beta}|$ , являющийся функцией от  $p^2$ , стремится к нулю при стремлении  $p^2$  к бесконечности, тогда мы имеем обрезавший фактор. Во-вторых, операторы координат, которые в плоском пространстве-времени определяются равенством

$$x_\alpha = i \frac{\partial}{\partial p^\alpha}, \quad (2)$$

в кривом импульсном пространстве принимают вид

$$x_\alpha = i F_{\alpha\beta}(p^2) \frac{\partial}{\partial p^\beta}, \quad (3)$$

где функции  $F_{\alpha\beta}(p^2)$  определяются значениями компонент метрического тензора  $g^{\alpha\beta}$ . Из выражения (3) очевидно, что в общем случае операторы  $x_\alpha$  не коммутируют и соотношения неопределенности между координатами легко выводятся из этого выражения.

Геометрический подход Снайдера представляется мне привлекательным, так как он позволяет последовательно построить всю теорию, исходя из постулата, определяющего метрику в импульсном пространстве, и, как мы увидим ниже, из второго постулата, определяющего закон сложения импульсов.

Снайдер опубликовал на эту тему две статьи в 1947 г. и ничего более относящегося к данной проблеме. Мне представляется, это обусловлено тем, что конкретный вид метрики, предложенный Снайдером, является неприемлемым. Во-первых, фактор  $\det |g^{\alpha\beta}|$  в выражении (1) имеет в этой метрике полюс при действительных

значениях  $p^2$ , который приводит к новым бесконечностям. Во-вторых, и это является гораздо более серьезным, в теории Снайдера имеют место так называемые угловые расходимости. Чтобы проиллюстрировать природу этих расходимостей, вычислим четырехмерный объем области импульсного пространства, определяемой условием  $|p^2| < a^2$ , где  $a$  — некоторая постоянная. Как показано на рис. 1, эта область сосредоточена вблизи светового конуса. Ограничимся рассмотрением объема той части этой области,

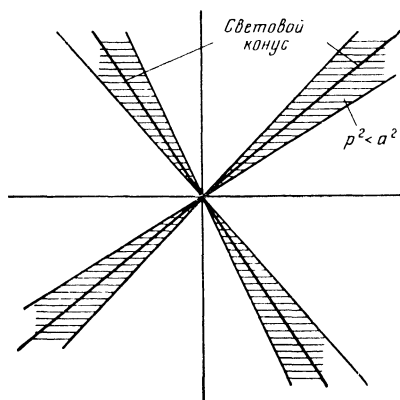


Рис. 1. Объем  $|p^2| < a^2$

которая лежит в верхнем световом конусе. Введя гиперболический угол  $\psi$ , получим

$$V = \int d^4p = \int_0^a p^3 dp \int_0^\infty \text{sh}^2 \psi d\psi \int d\theta. \quad (4)$$

Этот объем бесконечен, и никакой форм-фактор, зависящий от  $p^2$ , не может устранить расходимость.

Мне представляется, что эта угловая расходимость неизбежна в любом пространстве постоянной кривизны. Снайдер и, насколько мне известно, все, кто в дальнейшем развивал его идеи, рассматривали лишь импульсное пространство постоянной кривизны. Почему? Вероятно, основной причиной был тот факт, что если пространство инвариантно не только относительно вращений, но и относительно трансляций, то оно должно иметь постоянную кривизну. Но в импульсном пространстве вообще нет инвариантности относительно трансляций. Например, если мы совершим трансляцию в импульсном пространстве, то массы всех частиц изменятся, причем  $\Delta m$  будут иметь очень странный вид, зависящий от скоростей частиц и направления их движения. Таким образом, мы не должны требовать трансляционной инвариантности в импульсном пространстве. В пространстве же переменной кривизны угловые расходимости могут быть устранены.

Прежде чем переходить к обсуждению этой проблемы, позвольте мне сделать несколько предварительных замечаний. Мы рассмотрим изотропное импульсное пространство, инвариантное относительно вращений, но не относительно трансляций, так что нулевая точка, соответствующая нулевым значениям четырех компонент импульса, является фиксированной.

Далее, мы постулируем, что пространство инвариантно относительно собственных преобразований Лоренца. В таком пространстве всегда возможно выбрать такую систему координат, что метрический тензор будет иметь вид

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^0 f(p^2) + p_\alpha p_\beta h(p^2), \quad (5)$$

где  $f$  и  $h$  — две произвольные функции от  $p^2$ , а  $g_{\alpha\beta}^0$  — обычный тензор Минковского:

$$g_{\alpha\beta}^0 = \begin{vmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & +1 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Действительно, лишь два тензора  $\Pi$  ранга  $g_{\alpha\beta}^0$  и  $p_\alpha p_\beta$  полностью изотропны.

В дальнейшем я буду рассматривать функции  $f$  и  $h$ , зависящие не от ковариантной величины  $\tilde{p}^2 = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta$ , а от обычного лоренцовского инварианта

$$p^2 = g_{\alpha\beta}^0 p^\alpha p^\beta. \quad (7)$$

Всегда можно выразить  $\tilde{p}^2$  как функцию  $p^2$ , и, кроме того, если логические основания для такого выбора  $p^2$  но я сейчас их опущу.

Важно отметить, что в выбранной системе координат любая прямая линия, проходящая через начало координат т. е. через точку  $p^\alpha = 0$ , является геодезической линией, в то время как геодезическая линия, не проходящая через начало координат, никоим образом не прямая.

Необходимо определить понятие суммы двух импульсов:  $p_1$  и  $p_2$ . Определение, использованное Снайдером, неприемлемо в данном случае, когда кривизна пространства не постоянна. Есть несколько способов определения суммы импульсов, но наиболее естественным, приводящим к нулевому результату, является следующий. В плоском пространстве мы определяем сумму импульсов  $p_1$  и  $p_2$  с помощью хорошо известного правила параллелограмма. В кривом пространстве мы можем параллельным образом перенести, например, направление импульса  $p_2$  из начала координат  $O$  в конечную точку отрезка, изображающего импульс  $p_1$  (вспомним, что в нашей метрике прямые линии от начала координат до конечных точек  $p_1$  и  $p_2$  являются геодезическими линиями), а затем мы можем провести геодезическую линию из этой

концевой точки в определенном таким образом направлении. Таким же способом мы можем провести вторую геодезическую линию через концевую точку отрезка, изображающего импульс  $p_2$ . Точка пересечения проведенных геодезических линий соответствует, по определению, сумме импульсов  $p_1$  и  $p_2$ . Это определение является естественным обобщением суммы в плоском пространстве.

Существенно отметить, что нет закона ассоциативности сложения, т. е. значение суммы, например, трех импульсов зависит от порядка, в котором производится это сложение, так что, вообще говоря,

$$(p_1 + p_2) + p_3 \neq p_1 + (p_2 + p_3). \quad (8)$$

Это общее свойство кривого пространства, и, в частности, так же обстоит дело и в теории Снайдера. Если мы имеем дело с суммой более двух импульсов, то, конечно, необходимо указать порядок их суммирования, но я не буду входить здесь в эти детали.

Вернемся к проблеме угловых расходимостей. В квантовой теории мы имеем дело главным образом с такими интегралами, в которые входят функции распространения со знаменателями вида

$$(p + p')^2 - m^2 + i\varepsilon. \quad (9)$$

В обычной метрике плоского пространства квадрат суммы двух импульсов  $p$  и  $p'$  пропорционален их скалярному произведению  $pp' \text{ch } \psi$ , где  $\psi$  — гиперболический угол между  $p$  и  $p'$ . Но элемент объема (см. равенство (4)) содержит  $\text{sh}^2 \psi$  в числителе, так что интеграл расходится. Чтобы избежать этой расходимости, мы должны найти метрику, в которой при стремлении скалярного произведения двух импульсов к бесконечности квадрат их суммы пропорционален не первой, а более высокой степени скалярного произведения:

$$(p_1 + p_2)^2 \sim (p_1 p_2)^C \sim (\text{ch } \psi)^C, \quad C > 1, \quad \psi \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Я был очень обрадован, когда стало ясно, что это требование позволяет устранить угловые расходимости не только в случаях, когда подынтегральное выражение содержит функции распространения со знаменателями вида (9), но и в тех случаях, когда таких функций нет или одно лишь их наличие не является достаточной гарантией сходимости. Например, лагранжиан псевдоскалярного четырехфермионного взаимодействия

$$L = \lambda \int d^4x (\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x)) (\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x)) \quad (11)$$

после преобразования Фурье в импульсном пространстве принимает вид

$$L = \frac{\lambda}{(2\pi)^4} \int d^4p_1 \int d^4p_2 \int d^4p_3 \int d^4p_4 \delta(p_1 - p_2 + p_3 - p_4) \times \\ \times (\bar{\psi}(p_1) \gamma_5 \psi(p_2)) (\bar{\psi}(p_3) \gamma_5 \psi(p_4)). \quad (12)$$

Так как в кривом пространстве аргумент дельта-функции, т. е. сумма четырех импульсов ( $p_1 - p_2 + p_3 - p_4$ ), является сложной функцией компонент этих импульсов, то, если константа  $C$  в равенстве (10) превосходит 3, выражение для собственной массы фермиона<sup>2</sup>, следующее из лагранжиана (12), оказывается конечным. Вначале я опасался, что будет очень трудно выбрать одну определенную метрику из огромного множества возможных.

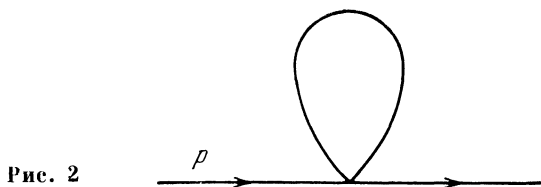


Рис. 2

Но оказалось, что по крайней мере асимптотический вид функций  $f(p^2)$  и  $h(p^2)$ , которые согласно равенству (5) определяют метрику, однозначно следует из простых физических требований. Позвольте мне перечислить их.

1) Согласно принципу соответствия при малых импульсах геометрия должна совпадать с обычной геометрией плоского пространства. Введем элементарную длину  $l_0$  или фундаментальный импульс  $p_0 = \hbar/l_0$  и фундаментальную массу  $M_0 = \hbar/cl_0$ . Если мы выразим импульс  $p_\alpha$  в единицах  $p_0$  (как я буду делать во всех последующих формулах), то это требование означает следующее:

$$f(p^2) \rightarrow 1 \quad \text{и} \quad h(p^2) \rightarrow 0 \quad \text{или} \quad h(p^2) \rightarrow \text{const} \quad \text{при} \quad p^2 \ll 1. \quad (I)$$

2) Фактор  $\sqrt{\det |g^{\alpha\beta}|}$ , входящий в выражение (I) для элемента объема, который, будучи выраженным через функции  $f$  и  $h$ , имеет вид

$$\sqrt{\det |g^{\alpha\beta}|} = \frac{1}{f^{3/2} (1 + p^2 h)^{1/2}}, \quad (II)$$

не должен иметь полюсов при действительных значениях  $p^2$ .

3) Чтобы обеспечить обрезание интегралов, фактор (II) должен стремиться к нулю достаточно быстро при стремлении  $p^2$  к бесконечности, так что

$$f \sim |p^2|^\alpha, \quad \alpha > 0 \quad \text{при} \quad p^2 \rightarrow \infty. \quad (III)$$

4) Для устранения угловых расходимостей необходимо удовлетворить условию (10), что приводит к условиям

$$\frac{p^2 h}{f} \rightarrow C^2 - 1, \quad C > 1 \quad \text{при} \quad |p^2| \rightarrow \infty \quad (IVa)$$

$$\text{и} \quad \alpha \geq 1. \quad (IVb)$$

<sup>2</sup> Имеется в виду собственная масса в низшем порядке теории возмущений, т. е. выражение, соответствующее диаграмме рис. 2. — *Прим. перев.*

5) Чтобы сумма любых двух импульсов  $p_1$  и  $p_2$  вполне определялась методом, изложенным выше, необходимо, чтобы

$$\alpha \leq 1. \quad (V)$$

В противном случае каждый раз можно указать такую пару импульсов, что геодезические линии, проведенные в соответствии со сформулированными выше правилами через концы отрезков, изображающих эти импульсы, никогда не пересекались бы друг с другом (даже если геодезические линии продолжить в обратном направлении).

Из условий (IVb) и (V) следует, что  $\alpha=1$ . Поэтому при соответствующем выборе единицы импульса  $p_0$  асимптотические выражения для функций  $f$  и  $h$  имеют вид

$$f = 1 + |p^2|, \quad h = (C^2 - 1) \frac{p^2}{|p^2|}. \quad (13)$$

Конечно, можно взять для функций  $f$  и  $h$  аналитические выражения, например

$$f = \frac{1 + |p^4|}{\sqrt{1 + p^4}}, \quad h = \frac{(C^2 - 1)p^2}{\sqrt{1 + p^4}}, \quad (14)$$

или

$$f = \frac{p^2}{\text{th}(p^2)}, \quad h = (C^2 - 1) \text{th}(p^2). \quad (15)$$

Обратимся теперь к вопросу о возможной экспериментальной проверке (или опровержении) теории. Во-первых, теория предсказывает, что обычные законы сложения энергии и импульсов верны лишь при сравнительно небольших энергиях. Но, чтобы определить, при каких энергиях эти законы существенно нарушаются, необходимо знать величину константы  $l_0$ , т. е. фундаментальную длину. Чтобы определить величину  $l_0$  и безразмерную константу  $C$ , фигурирующую в выражении (13), я поступлю следующим образом. Я буду исходить из гипотезы Гейзенберга о фундаментальном спинорном поле. Так как расходимости устранены, нет необходимости вводить, как это сделал Гейзенберг, индефинитную метрику, «дúхи» и т. д. В настоящее время я не стремлюсь развить последовательную теорию, позволяющую определить точный вид четырехфермионного взаимодействия и т. п., а попытаюсь представить в качестве первого шага лишь грубое приближение. Я перепису лагранжиан (12) для псевдоскалярного взаимодействия в импульсном пространстве в ковариантной форме, соответствующей кривому импульсному пространству. Для этого необходимо лишь ввести инвариантный элемент объема (4) и использовать для импульса ковариантный закон сложения, конкретизировав определенный порядок их сложения. Чтобы определить значения трех констант теории ( $l_0$ ,  $C$  и константу связи  $\lambda$ ), мне необходимо вычислить три величины, кото-

рые являются функциями этих констант, а именно собственную массу нуклона, массу мезона, рассматриваемого как связанное состояние нуклона с антинуклоном, и эффективное значение константы  $g$  связи мезонов с нуклонами. Сравнив вычисленные значения с экспериментальными, я буду иметь возможность определить значения констант  $l_0$ ,  $C$  и  $\lambda$ .

Я упомяну лишь один предварительный результат. Вначале существовало опасение, что фундаментальная константа  $M_0 = \hbar/cl_0$  окажется порядка массы нуклона. Это было бы в явном противоречии с экспериментом, так как это означало бы, что закон сложения энергий и импульсов существенно отличается от обычного уже при энергиях порядка собственной энергии  $M_p$  нуклона. Но, к счастью, это не так. В первом приближении отношение массы нуклона к фундаментальной массе  $M_0$  (это отношение, будучи пропорционально  $\lambda^{1/4}$ , совершенно нечувствительно к значению этой константы) пропорционально фактору  $(C^2 - 1)^{-(C+1)}$ . Как отмечалось выше,  $C$  должно быть больше трех, чтобы обеспечить сходимость интегралов. Полагая  $C=4$ , получим  $M_p = 0,01 M_0$ . Конечно,  $C$  может оказаться значительно большим, и тогда отношение  $M_p/M_0$  будет значительно меньшим. Но в настоящее время я не знаю значения константы  $C$ , так как еще не закончил вычисление других необходимых величин (массы мезона и мезонной константы связи). Вычисления очень сложны главным образом вследствие сложности закона сложения импульсов. В процессе вычислений приходится преодолевать постоянно возникающие трудности. Конечно, вполне может оказаться, что результат будет противоречить экспериментальным фактам и все рухнет.

Благодарю вас за внимание к столь проблематичным и безумным идеям.

*Москва, Физический институт  
им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР*

---

*Примечание.* Данный доклад был сделан И. Е. Таммом на конференции по физике элементарных частиц в Киото в 1965 г. Он посвящен проблеме, над которой И. Е. Тамм с увлечением работал последние годы своей жизни — теории поля в кривом импульсном пространстве с непостоянной кривизной.

Анализ характерных черт теории в докладе проводится на примере диаграммы собственной энергии с времениподобным внешним импульсом. Как выяснилось в ходе дальнейшего исследования, в случае диаграмм с пространственноподобными внешними импульсами положение оказывается значительно более сложным.

Более подробное рассмотрение этой проблемы проведено в помещенной ниже работе И. Е. Тамма и В. Б. Вологодского «Об использовании кривого импульсного пространства при построении нелокальной квантовой теории поля».

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КРИВОГО ИМПУЛЬСНОГО ПРОСТРАНСТВА ПРИ ПОСТРОЕНИИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ<sup>1</sup>

*Совместно с В. Б. Вологодским*

### Введение

1. Многими сейчас признается, что развитие физики привело к такому положению, когда необходимо изменить некоторые из фундаментальных физических принципов, лежащих в основе наших представлений о строении вещества. Очень вероятно, что это изменение должно быть столь же радикальным, как это имело место при создании теории относительности или квантовой теории.

Одним из указаний в пользу сказанного могут служить трудности с расходимостями, появляющимися в существующей теории поля. Во многих случаях эти трудности можно обойти, применяя известную процедуру перенормировки. Однако, не говоря уже о самом факте существования неперенормируемых взаимодействий, вряд ли можно считать последовательной теорию, органически включающую расходимости, которые могут быть устранены лишь с помощью некоторого искусственного приема. Определенного изменения существующей теории требует также решение одной из важнейших задач физики элементарных частиц — понять многообразие сортов этих частиц и объяснить основные их свойства. В большинстве динамических вариантов существующей теории эта задача даже не может быть поставлена. Кажущаяся наиболее перспективной в этом плане теория фундаментального спинорного поля Гейзенберга еще крайне далека от законченности, в значительной мере из-за трудностей с расходимостями.

В настоящее время едва ли кто-нибудь способен с уверенностью предсказать, какие принципы существующей теории должны быть пересмотрены и в каком именно направлении. В основе данной работы лежит убежденность в том, что этот пересмотр должен коснуться понятия координаты частицы.

В соответствии с самим духом современной физики это понятие должно быть непосредственно согласовано с процедурой измерения соответствующей величины. Между тем заимствованное из классической физики и используемое сейчас понятие о координате как о неограниченно измеримой величине находится в явном несоответствии с фундаментальными фактами физики высо-

<sup>1</sup> Труды ФИАН СССР, 1972, 57, 5.



ких энергий. В самом деле, измерить координату частицы можно путем рассеяния на ней пробных частиц, таких, как фотоны или мезоны. Увеличение точности измерения требует перехода к более коротким волнам, т. е. к более высоким энергиям. Но в этих условиях процесс рассеяния будет обязательно сопровождаться рождением новых частиц, многие из которых к тому же окажутся нестабильными и, распадаясь, в свою очередь, будут порождать новые частицы. Очевидная невозможность различить частицы, участвовавшие в первичном акте рассеяния, и многочисленные вторичные частицы, находящиеся от исходной частицы на некотором конечном расстоянии, не может не наложить предела точности измерения координаты.

Основу квантовой теории составляют, как известно, соотношения неопределенностей для координат и импульсов, ограничивающие точность одновременного измерения этих величин. В свете сказанного представляется разумным положить в основу новой теории поля соотношения неопределенностей для компонент координаты, кладущие предел точности измерения самой координаты. Соответственно эти компоненты теперь нужно считать операторами, не коммутирующими друг с другом.

2. Описание процессов взаимодействия элементарных частиц в существующей теории поля можно с равным правом вести и в координатном и в импульсном пространствах; переход от одного из них к другому осуществляется просто преобразованием Фурье соответствующих величин. Предположение о некоммутации компонент координаты сразу делает невозможным или по крайней мере чрезвычайно затрудняет использование координатного пространства. Очень существенно, как показал Снайдер [1] еще в 1947 г., что некоммутирующим координатам отвечают импульсы, которые по-прежнему можно считать обычными числами<sup>2</sup>, но которые теперь составляют не псевдоевклидово, а кривое риманово пространство. При этом координаты, определяющиеся как операторы бесконечно малого сдвига по импульсам, имеют вид  $x^\alpha = i\hbar F^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial p^\beta}$  ( $F^{\alpha\beta}$  — некоторая функция импульса) и очевидным образом не коммутируют друг с другом.

В основу модификации существующей теории поля можно, таким образом, положить чисто геометрический принцип, постулируя определенную геометрию пространства импульсов и приводя в соответствие с этой геометрией все параметры, входящие в выражения для наблюдаемых величин. Точнее говоря, речь идет о построении схемы, которая обладала бы свойством общековариантности относительно произвольных преобразований в пространстве импульсов.

Рассматривая выражение для матричного элемента какого-

<sup>2</sup> Физически это соответствует тому, что до сих пор не имеется никаких указаний на принципиальные ограничения точности измерения импульса частицы.

либо процесса в импульсном представлении, можно составить себе представление о том, какие именно величины должны подвергнуться модификации. В это выражение входят следующие структурные факторы: интегралы по объему пространства импульсов;  $\delta$ -функции от суммы импульсов, сходящихся в данной вершине; функции Грина свободных частиц и, наконец, функции, отвечающие свободным концам диаграммы. Введем кривое импульсное пространство путем модификации лишь первых двух из перечисленных величин. В соответствии с требованием общековариантности элемент объема в пространстве импульсов должен претерпеть следующее изменение:

$$d^4p \rightarrow d^4p \sqrt{|\det |g_{\alpha\beta}(p)|},$$

где  $g_{\alpha\beta}$  — метрический тензор пространства импульсов,  $d^4p$  — псевдоевклидов элемент объема.

Далее, обычное определение суммы векторов, основанное на правиле параллелограмма, очевидным образом перестает быть применимым в кривом пространстве импульсов. В разделе 1 будет сформулировано обобщенное правило сложения векторов импульса, которое совместимо с требованием общековариантности и которое понадобится для вычисления аргументов  $\delta$ -функций.

Заметим, что переход к ковариантному интегрированию и обобщение правила сложения импульсов еще не приводит к общей ковариантности матричных элементов. Для достижения последней необходимо было бы также провести ковариантное обобщение функции распространения  $D_F$ . При строгом рассмотрении необходимо было бы проквантовать свободное поле в кривом импульсном пространстве и найти функцию распространения из самого этого аппарата. В данной работе это не делается. Поэтому мы пока оставим вид функции распространения таким же, как в обычной теории, и посмотрим, к чему приводят переход к ковариантному интегрированию и обобщение понятия суммы импульсов.

3. Самые простые соображения, связанные с изменением элемента объема, дают возможность надеяться, что переход к кривому пространству импульсов позволит устранить ультрафиолетовые расходимости, присущие обычной теории поля. Выбирая метрику пространства импульсов настолько сильно отличающейся от псевдоевклидовой, чтобы  $\det |g_{\alpha\beta}|$  оказался достаточно быстро убывающей функцией  $p^2$ , всегда можно добиться сходимости интегралов по  $p^2$ . Таким образом, в новой теории поля естественно возникает обрезаящий фактор, который имеет чисто геометрическое происхождение.

Однако в действительности этого еще далеко не достаточно для сходимости полных четырехмерных интегралов по импульсу. Псевдоевклидов элемент объема  $d^4p$  можно представить (опуская несущественный коэффициент) как произведение  $p^2 dp^2 d^4\Omega$ , где  $d^4\Omega = d^3\Omega \text{sh}^2 \psi d\psi$  — элемент поверхности единичного гипербола-

ида,  $\phi$  — гиперболический угол. Сама по себе эта поверхность имеет бесконечную величину, и необходима специальная проверка сходимости интегралов по  $\phi$ . В существующей теории поля можно избежать появления таких интегралов, поскольку всегда можно перевести интегрирование по четвертой компоненте импульса  $p^0$  на мнимую ось и сделать тем самым псевдоевклидово пространство евклидовым, а гиперboloид — сферой. Однако в не-локальной теории с обрезающим фактором, частным случаем которого является рассматриваемая теория, переход к мнимой оси, как правило, невозможен из-за необычных аналитических свойств подынтегрального выражения в комплексной плоскости  $p^0$ , т. е. в конечном счете из-за нарушения условия микроскопической причинности. Поэтому здесь встает проблема расходимостей по  $\phi$  — так называемых угловых расходимостей. Именно такие расходимости составляют главный недостаток первоначальной теории Снайдера.

В более ранних работах по теории поля в кривом импульсном пространстве [1—3] использовалось импульсное пространство постоянной кривизны. Такой выбор метрики, помимо соображений простоты, диктовался, видимо, требованиями однородности пространства импульсов. Однако ясно, что эти требования, в отличие от аналогичного требования для пространства координат, совершенно излишни из-за отсутствия трансляционной инвариантности в пространстве импульсов. В самом деле, при такой трансляции масса частицы изменяется весьма сложным образом, зависящим к тому же от направления и величины скорости движения. В данной работе мы не рассматриваем пространство импульсов постоянной кривизны ввиду того, что в этом случае  $\det |g_{\alpha\beta}|$  имеет особенности при действительных значениях импульса, что приводит к дополнительным трудностям.

В разделе 1 приводится обобщение обычного ряда теории возмущения на кривое импульсное пространство. В частности, постулируется способ сложения импульсов, входящих в аргумент  $\delta$ -функций, соответствующих вершинам диаграмм Фейнмана. В разделе 2 показано, что проведенное в разделе 1 прямое обобщение теории на кривое импульсное пространство не приводит к успеху ввиду наличия бесконечностей (угловых расходимостей) в матричных элементах и нарушения условия унитарности. В разделе 3 дан другой способ построения  $S$ -матрицы в кривом импульсном пространстве, при котором  $S$ -матрица записывается в виде анти-хронологически упорядоченной по заряду экспоненты [4, 5]. При этом  $S$ -матрица автоматически оказывается унитарной и, видимо, свободной от бесконечностей. Однако вследствие того, что при ее построении для сохранения релятивистской инвариантности было использовано тождество  $\theta(x) [\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(0)]_- = \theta(x) \theta[(x+\tau)^2] [\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(0)]_-$  (где  $\mathcal{L}(x)$  — лагранжиан,  $\tau$  — произвольный вектор, лежащий в верхнем световом конусе), возникла трудность, связанная с нарушением принципа соответ-

ствия в смысле предельного перехода к локальной теории. Эта трудность обсуждается также в Приложении III. Основные формулы для элемента объема и суммы импульсов в кривом импульсном пространстве получены в Приложении I. Некоторые ограничения на вид метрического тензора, исходя из требования отсутствия сингулярностей в элементе объема, существования суммы для любой пары импульсов, конечности этой суммы при конечной величине складываемых импульсов и отсутствия расходимостей в простейших матричных элементах<sup>3</sup>, найдены в Приложении II.

В статье используется система единиц, в которой  $c = \hbar = 1$ .

### 1. Обобщение ряда теории возмущения для матричных элементов на кривое риманово пространство

Как известно, выражение для матрицы рассеяния в локальной теории можно записать в различной форме: в виде ряда теории возмущения по константе связи, членам которого соответствуют различные диаграммы Фейнмана; в виде континуального интеграла (см., например, [6]); в операторной форме [7]; в виде так называемой  $\hat{T}_g$ -экспоненты [8]; в форме, предложенной в [2], и т. д. Все эти выражения для  $S$ -матрицы тождественны. Но при проведении обобщения обычной локальной теории на кривое импульсное пространство не безразлично, из какой формы локальной теории исходить. Обобщая различные формы локальной теории, мы будем получать различные неэквивалентные друг другу теории в кривом импульсном пространстве.

В данном разделе будем исходить из ряда теории возмущения, записанного в импульсном пространстве. Обобщение на кривое импульсное пространство естественно провести посредством введения следующих постулатов [9]. Прежде всего, постулируется вид метрического тензора импульсного пространства, причем из требования релятивистской инвариантности ясно, что он должен иметь вид

$$g^{\alpha\beta}(x) = g^{\alpha\beta} \tilde{f}(x) + p^\alpha p^\beta \tilde{h}(x), \quad (1)$$

где отличными от нуля компонентами тензора  $g^{\alpha\beta}$  являются  $g^{0,00} = -g^{0,11} = -g^{0,22} = -g^{0,33} = -1$ ,  $x = g_{\alpha\beta}^0 p^\alpha p^\beta$ ,  $\tilde{f}$  и  $\tilde{h}$  — некоторые функции.

Из размерных соображений

$$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{x}{M^2}\right), \quad \tilde{h}(x) = \frac{1}{M^2} h\left(\frac{x}{M^2}\right),$$

<sup>3</sup> Последнее условие формулируется применительно к обычному ряду теории возмущения, рассмотренному в разделах 3, 4, при времениподобных внешних импульсах. Однако результаты Приложения II в основном применимы и к варианту теории, рассмотренному в разделе 3.

где  $M$  — некоторая величина размерности массы, характеризующая степень отступления от псевдоевклидовой метрики. Величина  $M$  должна быть значительно больше масс элементарных частиц, иначе рассматриваемая теория привела бы к результатам, противоречащим опыту. Для соблюдения соответствия с обычной теорией необходимо, чтобы

$$f \rightarrow 1, \quad \frac{x}{M^2} h \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \frac{x}{M^2} \rightarrow 0.$$

Ограничиваясь ниже случаем, когда отношение  $xh(x)/f(x)$  стремится к некоторой константе  $|x| \rightarrow \infty$ , можно показать (см. Приложение II), что в этом случае асимптотика функции  $f(x)$  должна иметь степенной вид  $f(x) \sim |x|^\alpha$ , причем показатель  $\alpha$  и величина  $C = \left(1 - \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{xh}{f}\right)^{1/2}$  должны удовлетворять следующим ограничениям: или  $\alpha=1$  при произвольном  $C$ , или  $\alpha < 1$  и  $1 < C(1-\alpha) < 2$ ; кроме того, при построении  $S$ -матрицы в кривом импульсном пространстве методом, рассмотренным в разделах 1 и 2, величина  $C$  в случае скалярного взаимодействия должна удовлетворять неравенству  $C \geq 2$ ; при рассмотрении других моделей последнее условие может измениться.

После выбора метрики постулируем следующие обобщения в выражениях, соответствующих различным элементам диаграмм Фейнмана:

1) элемент объема пространства импульсов, соответствующий интегрированию по этому пространству, заменяем ковариантным выражением  $d^4p \sqrt{|\det |g_{\alpha\beta}(p)|}$ ; явный вид этой величины дается формулой (I. 4) Приложения I;

2) обычную сумму 4-импульсов, входящую в аргументы  $\delta$ -функций, соответствующих узлам диаграмм, заменяем некоторой обобщенной суммой

$$p \dagger q \rightarrow p \oplus q = q \oplus p.$$

Из требования релятивистской инвариантности очевидно, что обобщенная сумма должна иметь вид

$$p \oplus q = \Phi(p^2, q^2, pq)p \dagger \Phi(q^2, p^2, pq)q.$$

Явный вид функции  $\Phi$  мы найдем с помощью естественного обобщения обычного правила параллелограмма для сложения импульсов на кривое пространство. А именно, чтобы сложить два импульса  $p$  и  $q$ , проводим геодезические линии из начала координат в эти точки<sup>4</sup>. Затем вектор, касающийся в начале координат

<sup>4</sup> В Приложении I будет показано, что такие геодезические оказываются прямыми линиями.

геодезической, проведенной в точку  $q$ , параллельным образом (в смысле параллельного переноса векторов в римановом пространстве) переносим вдоль другой геодезической в точку  $p$ . Через точку  $p$  в направлении перенесенного вектора проводим новую геодезическую линию. Аналогичным образом проводим еще одну геодезическую линию через точку  $q$ . Точка пересечения этих двух новых геодезических линий дает, по определению, суммарный импульс  $p \oplus q$  (рис. 1)<sup>5</sup>. Подробно этот вопрос обсуждается в Приложении I. Явный вид суммы импульсов, когда каждый из них лежит в верхнем световом конусе, дается формулой (I. 9).

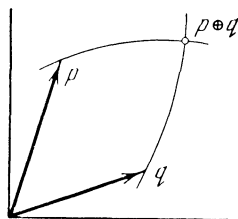


Рис. 1

Введенное правило сложения векторов не обладает, вообще говоря, свойством ассоциативности, т. е., например,

$$(p_1 \oplus p_2) \oplus p_3 \neq p_1 \oplus (p_2 \oplus p_3).$$

Так как в аргументе  $\delta$ -функций обычно суммируется более двух импульсов, то необходимо дополнительно постулировать порядок, в котором следует складывать эти импульсы. Некоторые ограничения на допустимый порядок сложения возникают из условия унитарности (см. раздел 3).



Рис. 2

Изменение закона сложения импульсов ведет к далеко идущим следствиям. В частности, в результате такой модификации оказывается, вообще говоря, нарушенным закон сохранения энергии-импульса, т. е. матричный элемент после интегрирования по виртуальным импульсам может не содержать  $\delta$ -функции, связывающей начальные и конечные импульсы частиц<sup>6</sup>. В частности, матричные элементы, соответствующие диаграммам типа рис. 2 (собственная масса), могут оказаться отличными от нуля при

<sup>5</sup> Заметим, что можно было бы постулировать способ сложения импульсов иначе; например, потребовав не «параллельность», а равенство «длин» противоположных сторон «параллелограмма» в кривом пространстве.

<sup>6</sup> Это, в свою очередь, делает более сложным переход от матричного элемента какого-либо процесса к сечению процесса.

$p_1^2 \neq p_2^2$ , т. е. мы сталкиваемся с «размазкой массы». В данной работе мы не будем подробно останавливаться на вопросах, связанных с этими чертами теории. Отметим, что такие же черты присущи и другим вариантам теории в кривом импульсном пространстве (см., например [2]).

Излагаемую схему, в которой модификация выражений, соответствующих различным структурным элементам диаграмм, проводится из геометрических соображений, можно рассматривать как частный случай более общей схемы, в которой на функцию  $\Phi$ , определяющую сумму импульсов, и на модифицированную функцию <sup>7</sup> распространения  $\tilde{D}_F$  (а также на форм-фактор  $F$ , который можно поставить в соответствие вершинам диаграмм) не накладываются никаких специальных условий.

## 2. Вопросы сходимости и унитарности

Прямое обобщение выражения для матричного элемента на случай кривого пространства импульсов, проведенное в предыдущем разделе, хотя и подсказывается простыми геометрическими соображениями, тем не менее к успеху не приводит. В получающейся схеме возникают трудности, связанные с наличием расходимостей и с нарушением условия унитарности матрицы рассеяния.

Рассмотрим сначала проблему угловых расходимостей <sup>8</sup>. Во введении уже указывались причины этой трудности, в данном же разделе рассмотрим этот вопрос более подробно.

Обращаясь к выражению для собственной энергии скалярной частицы (рис. 2), проведем в нем все интегрирования по виртуальным импульсам, кроме одного. Результат ввиду релятивистской инвариантности теории может быть записан в форме

$$M(p) = \int d^4q f(p^2, q^2, pq),$$

где функция  $f$  предполагается достаточно быстро убывающей с ростом своих аргументов. Выделим в этом интеграле область верхнего светового конуса  $q^2 > 0$ ,  $q^0 > 0$  и введем параметризацию

$$q^0 = \sqrt{q^2} \operatorname{ch} \psi, \quad |\mathbf{q}| = \sqrt{q^2} \operatorname{sh} \psi. \quad \text{Тогда получаем}$$

$$M_1(p) = \int_0^\infty q^2 dq^2 \int_0^\infty d\psi \operatorname{sh}^2 \psi \int_{-1}^1 d \cos \theta \times \\ \times f(p^2, q^2, \sqrt{q^2}(p^0 \operatorname{ch} \psi - |\mathbf{p}| \operatorname{sh} \psi \cos \theta)),$$

<sup>7</sup> Переход от обычного интегрирования к ковариантному  $d^4p \rightarrow \sqrt{|\det g_{\alpha\beta}(p)|} d^4p$  эквивалентен модификации функции распространения

$$\tilde{D}_F(p) \rightarrow D_F(p) = \sqrt{|\det g_{\alpha\beta}(p)|} D_F(p).$$

<sup>8</sup> См. по этому поводу также [8, 10].

где  $M_1$  — вклад в  $M$  от интегрирования по верхнему световому конусу. Если вектор  $p$  времениподобен, то, переходя в систему отсчета, где  $p=0$ , убеждаемся в отсутствии угловых расходимостей, так как с ростом гиперболического угла  $\psi$  функция  $f$  достаточно быстро убывает. Иное положение имеет место для пространственноподобного вектора  $p$ . В этом случае всегда можно из области интегрирования выделить такие подобласти бесконечного объема, в пределах которых  $\cos\theta \rightarrow 0$  при  $\psi \rightarrow \infty$ , а инварианты  $q^2$  и  $pq$  меняются в малых пределах, и, следовательно, функция  $f$  почти постоянна. Вследствие этого интеграл по таким областям импульсного пространства оказывается равным бесконечности. Для сходимости интеграла по угловым переменным при интегрировании по любой области необходимо, чтобы матричный элемент зависел хотя бы от одного времениподобного импульса или трех некопланарных  $p, r, s$  пространственноподобных. Возможность устранения бесконечностей в последнем случае ясна из того, что в системе координат, в которой компоненты  $p_0, p_1, p_2, r_2$  внешних импульсов равны нулю, инварианты  $qp, qr, qs$  можно записать (при  $q^2 > 0, q^0 > 0$ ) в виде

$$pq = -\sqrt{q^2} \operatorname{sh} \psi \cos \theta p_3,$$

$$rq = \sqrt{q^2} \operatorname{ch} \psi r_0 - \sqrt{q^2} \operatorname{sh} \psi (\sin \theta \cos \varphi r_1 + \cos \theta r_3),$$

$$sq = \sqrt{q^2} \operatorname{ch} \psi s_0 - \sqrt{q^2} \operatorname{sh} \psi (\sin \theta \cos \varphi s_1 + \sin \theta \sin \varphi s_2 + \cos \theta s_3);$$

откуда, учитывая, что при  $\psi \rightarrow \infty \operatorname{ch} \psi \approx \operatorname{sh} \psi \rightarrow \infty$ , ясно, что при  $\psi \rightarrow \infty$  хотя бы один из этих инвариантов стремится к бесконечности, так как варьированием двух параметров ( $\theta$  и  $\varphi$ ) невозможно обратить в нуль три величины:

$$(-\cos \theta p_0, \quad r_0 - \sin \theta \cos \varphi r_1 - \cos \theta r_3$$

и

$$s_0 - \sin \theta \cos \varphi s_1 - \sin \theta \sin \varphi s_2 - \cos \theta s_3).$$

Поэтому, если подынтегральное выражение для матричного элемента достаточно быстро убывает с ростом любой из инвариантных комбинаций импульса, соответствующий интеграл будет сходящимся. Если же имеются лишь два внешних пространственноподобных импульса, то можно показать, что хотя расходимость по гиперболическому углу и уменьшается по сравнению со случаем наличия лишь одного внешнего пространственноподобного импульса (из линейной становится логарифмической), но все же остается.

Правда, наличие областей при интегрировании, по которым возникают бесконечности, еще не означает обязательно, что интеграл по всему импульсному пространству расходится, так как бесконечности, возникающие при интегрировании по различным областям, могут оказаться различного знака. В этом случае, как известно, интеграл не является точно определенным. Интеграл



по бесконечному пространству есть предел интеграла по конечной области, когда ее размеры стремятся к бесконечности. Если имеются различные области бесконечного объема при интегрировании, по которым возникают бесконечности разного знака, то результат интегрирования по всему пространству зависит от того, каким образом выполнен предельный переход от конечной области ко всему пространству. При вычислении интегралов в квантовой теории поля подразумевается доопределение, состоящее в том, что в качестве одной из переменных интегрирования выбирается  $q^0$  и в первую очередь проводится интегрирование по  $q^0$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  или, наоборот, сначала интегрирование по всему трехмерному пространству (но, например, не интегрирование до бесконечности по гиперболическому углу  $\psi$ ). В принципе не исключено, что при таком вычислении расходимости, ведущие свое происхождение от различных областей импульсного пространства, в точности скомпенсируют друг друга. Такая компенсация имеет место, например, в матричных элементах, регуляризованных по Паули—Вилларсу. Но в рассматриваемой теории, равно как (при некоторых предположениях) и в более общей схеме, о которой говорилось в конце предыдущего раздела, такая компенсация не происходит. Подробнее этот вопрос исследован в [13]. Из рассмотрения различных моделей нелокальной квантовой теории поля и способов регуляризации видно, что компенсация, по-видимому, возможна лишь в тех случаях, когда удается сохранить аналитические свойства подынтегрального выражения, допускающие поворот контура интегрирования по  $q^0$  на мнимую ось (в качестве примеров см. [2, 11, 12]).

Переходим к проблеме унитарности матрицы рассеяния. Требование унитарности в математическом плане сводится к выполнению определенных соотношений между мнимой частью данного матричного элемента и матричными элементами более низкого порядка теории возмущений, отвечающими процессам, которые являются промежуточными для исходного процесса. Эти соотношения налагают определенные ограничения на структуру матричного элемента. Как показано в [8], формальная подстановка форм-фактора в матричный элемент, нарушающая его аналитические свойства, нарушает и условие унитарности. И в теории поля в кривом импульсном пространстве дело обстоит аналогичным образом. Действительно, рассмотрим собственную энергию какой-либо частицы. В этом случае условие унитарности во втором порядке теории возмущения имеет вид

$$\langle p | S_2 + S_2^+ | p \rangle = - \langle p | S_1^+ S_1 | p \rangle, \quad (2)$$

где  $S_{1,2}$  — части  $S$ -матрицы первого и второго порядков соответственно. Левая часть этого равенства пропорциональна мнимой части поляризационного (или массового) оператора. При некотором конкретном выборе порядка суммирования импульсов поляризационный оператор имеет вид, даваемый формулой (II. 5) Прило-

жения II. Взяв в качестве примера метрический тензор в виде (I. 10) и используя формулы (I. 11) и (I. 13), можно убедиться прямым вычислением, что при  $k^2 \leq 0$ , где  $k$  — внешний импульс, мнимая часть поляризационного оператора оказывается отличной от нуля (более того, равной бесконечности<sup>9</sup>). Ясно, что это означает нарушение унитарности, так как правая часть в (2) при  $k^2 \leq 0$  равна нулю, как и в локальной теории.

### 3. Другой метод построения $S$ -матрицы

Для построения унитарной  $S$ -матрицы воспользуемся методом, предложенным в [8]. Проведем обобщение на кривое импульсное пространство не в членах обычного ряда теории возмущения, а в выражении

$$S = \tilde{T}_g \exp \left[ i \int_0^g \frac{dg}{g} \mathcal{L}(0) \right], \quad (3)$$

предварительно разложив его в ряд и проведя упорядочение по Вику. Здесь символ  $\tilde{T}_g$  означает антихронологическое упорядочение по заряду  $g$ , а  $\mathcal{L}(p)$  — фурье-образ лагранжиана в гейзенберговском представлении. В координатном пространстве  $\mathcal{L}(x)$  удовлетворяет уравнению (см. [5, 8])

$$g \frac{d\mathcal{L}(x)}{dg} = i \int d^4y \theta(x_0 - y_0) [\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)]. \quad (4)$$

Это выражение не подходит для перехода к кривому импульсному пространству, так как из-за наличия  $\theta(x_0 - y_0)$  при таком переходе нарушалась бы релятивистская инвариантность. Поэтому, учитывая, что в локальной теории лагранжианы коммутируют вне светового конуса, перепишем его предварительно тождественно в такой форме:

$$g \frac{d\mathcal{L}(x)}{dg} = i \int d^4y \theta[(x - y + \tau)^2] \theta(x_0 - y_0) [\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)]. \quad (5)$$

Здесь  $\tau$  — произвольный времениподобный вектор, устремляемый в окончательном результате к нулю<sup>10</sup>,  $x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2$ . Учитывая,

<sup>9</sup> Эта ситуация характерна не только для теории в кривом импульсном пространстве. И в «обычной» нелокальной теории, например, при такой модификации функции распространения

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{\Lambda^4}{(p^2)^2 + \Lambda^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

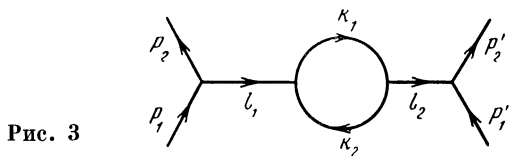
мнимая часть поляризационного оператора оказывается бесконечной при  $k^2 \leq 0$ .

<sup>10</sup> Положить  $\tau=0$  сразу под интегралом в выражении (5) нельзя, так как тогда вследствие наложения сингулярностей на световом конусе это выражение не совпало бы с (4).

что фурье-образ величины  $\theta[(x+\tau)^2] \theta(x)$  с точностью до численного коэффициента равен  $\exp(-ip\tau)/(p^2+i\epsilon p^0)^2$  ( $p^2=(p^0)^2-p^2$ ), получаем, переходя в (5) в импульсное пространство:

$$g \frac{d\tilde{\mathcal{L}}(p)}{dg} \sim i \int \frac{\exp(-iq\tau)}{(q^2+i\epsilon q^0)^2} [\tilde{\mathcal{L}}(s), \tilde{\mathcal{L}}(q)]_- \delta(q+s-p) d^4q d^4s. \quad (6)$$

Проведем обобщение полученных выражений на кривое импульсное пространство. Решая уравнение (6) итерациями, найдем выражение для функции действия  $\tilde{\mathcal{L}}(0)$  в виде ряда по степеням константы связи. Подставим полученный ряд в выражение (3),



проведем в этом выражении разложение экспоненты, интегрирование по заряду и упорядочение по Вику. Переход к кривому импульсному пространству в матричных элементах полученного ряда произведем так же, как это делалось в разделе 2. Члены этого ряда отличаются от соответствующих членов ряда, о котором шла речь в предыдущем разделе, тем, что вместо функции  $D_F$  стоит функция  $-D_+$  или вместо произведения функции  $D_F(p)$  на «прилегающие»  $\delta$ -функции (т. е. вместо  $\delta(a \oplus p) D_F(p) \delta(b \oplus p)$ , где  $a$  и  $b$  — остальные импульсы, сходящиеся в рассматриваемых вершинах) стоит величина

$$\frac{4}{(2\pi)^3} \int \frac{\delta(a \oplus p \oplus q) D(p) \exp(-i\tau q) \delta(b \oplus p \oplus q)}{(q^2+i\epsilon q^0)^2} \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(q)|} d^4q$$

(в случае плоского пространства последнее выражение, будучи проинтегрировано по  $p$ , тождественно равно

$$\int \delta(a+p) D_R(p) \delta(b+p) d^4p.$$

Порядок суммирования импульсов в последней формуле мы выбрали произвольно.

Например, вместо выражения

$$\begin{aligned} & \int \{ \delta[p_1 \ominus (p_2 \oplus l_1)] D_F(l_1) \delta[k_1 \ominus (k_2 \oplus l_1)] D_F(k_1) D_F(k_2) \times \\ & \times \delta[k_1 \ominus (k_2 \oplus l_2)] D_F(l_2) \delta[p_2 \ominus (p_1 \oplus l_2)] \} \times \\ & \times \prod_{i=1}^2 \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(l_i)|} \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(k_i)|} d^4l_i d^4k_i, \end{aligned} \quad (7)$$

соответствующего диаграмме, представленной на рис. 3 (факторы, соответствующие внешним линиям диаграммы, опущены),

возникает сумма нескольких членов:

$$\begin{aligned}
 & - \int \{ \delta [p_1 \ominus (p_2 \oplus l_1)] D_+(l_1) \delta [k_1 \ominus (k_2 \oplus l_1)] D_+(k_1) D_+(k_2) \delta [k_1 \ominus (k_2 \oplus l_2)] \times \\
 & \times D_+(l_2) \delta [p_2 \ominus (p_1 \oplus l_2)] \} \prod_{i=1}^2 \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(l_i)|} \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(k_i)|} d^4 l_i d^4 k_i - \\
 & - \frac{4}{(2\pi)^3} \int \delta [p_1 \oplus (p_2 \oplus l_1 \oplus q)] \frac{|D(l_1)| \exp(-i\tau q)}{(q^2 + i\epsilon q^0)^2} \delta [k_1 \ominus (k_2 \oplus l_1 \oplus q)] \times \\
 & \times D_+(k_1) D_+(k_2) \delta [k_1 \ominus (k_2 \oplus l_2)] D_+(l_2) \delta [p_2 \ominus (p_1 \oplus l_2)] \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(q)|} d^4 q \times \\
 & \times \prod_{i=1}^2 \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(l_i)|} \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(k_i)|} d^4 l_i d^4 k_i d^4 q + \dots \quad (8)
 \end{aligned}$$

(относительно выбора порядка суммирования импульсов будет сказано ниже).

Выводы раздела 2 об угловых расходимостях в данном случае неприменимы, так как при такой формулировке теории не существует обычной диаграммной техники (хотя и можно ввести видоизмененную диаграммную технику) и, следовательно, не существует, например, понятия «массового оператора при пространственноподобном внешнем импульсе». В частности, в выражении (7) при пространственноподобной разности  $p_2 \ominus p_1$  неизбежно возникновение бесконечностей при интегрировании по  $k_{1,2}$ , так как интеграл в этом случае зависит лишь от одного внешнего пространственноподобного импульса  $l_1 = l_2$ . Интегрирование же по  $k_{1,2}$  в слагаемых суммы (8) может не привести к бесконечности, так как эти интегралы зависят от одного ( $l_1 = l_2$  для первого слагаемого) или трех ( $l_1, l_2, q$  для второго слагаемого) импульсов, причем импульс  $l_1$  теперь времениподобен (так как  $D_{\pm}(l_1) = D(l_1) = 0$  при  $l_1^2 < 0$ ). Если же прежде, чем интегрировать по  $k_{1,2}$ , проинтегрировать по  $q$  и  $l_{1,2}$ , то слагаемые суммы (8) будут зависеть не от одного пространственноподобного импульса  $p_2 \ominus p_1 = p'_1 \ominus p'_2$ , а от импульсов  $p_i$  по отдельности (именно с этой целью мы выбрали один из таких порядков суммирования импульсов, при которых импульсы  $p_i$  входят не в комбинации  $p_1 \oplus p_2$ ). Поэтому и в том случае, когда интегрирование по  $k_{1,2}$  проводится в последнюю очередь, ясно, что появление бесконечностей в выражении (8) необязательно.

При подходящем выборе порядка сложения импульсов  $S$ -матрица, построенная таким образом, является унитарной. Чтобы показать это, заметим, прежде всего, что при рассматриваемом способе построения  $S$ -матрицы переход к кривому импульсному пространству можно осуществить на более раннем этапе, чем это было сделано в разделе 2 в случае обычного ряда теории возмущения. А именно, кривое импульсное пространство можно ввести уже в выражение (6), предварительно записав его и выражение (3)

в матричной форме <sup>11</sup>:

$$\begin{aligned} \langle a | S | b \rangle &= \left\langle a \left| \tilde{T}_g \exp \left( i \int_0^g \frac{dg}{g} \tilde{\mathcal{L}}(0) \right) \right| b \right\rangle = \\ &= i \langle a | \tilde{\mathcal{L}}(0) | b \rangle - \frac{1}{2} \langle a | \tilde{\mathcal{L}}(0) | n \rangle \langle n | \tilde{\mathcal{L}}(0) | b \rangle + \dots \\ g \left\langle a \left| \frac{d\tilde{\mathcal{L}}(p)}{dg} \right| b \right\rangle &\sim i \int \left\{ \frac{\exp(-iq\tau)}{(q^2 + i\varepsilon q^0)^2} [\langle a | \tilde{\mathcal{L}}(s) | n \rangle \langle n | \tilde{\mathcal{L}}(q) | b \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle a | \tilde{\mathcal{L}}(q) | n \rangle \langle n | \tilde{\mathcal{L}}(s) | b \rangle] \delta[(q \oplus s) \ominus \varphi] \right\} \times \\ &\quad \times \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(q)|} \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(s)|} d^4 q d^4 s. \end{aligned} \quad (9)$$

Интегрирование по промежуточным состояниям в этих формулах подразумевается также ковариантным.

Выберем такой порядок суммирования импульсов, чтобы в первом порядке теории возмущения матричные элементы лагранжиана обладали свойством эрмитовости:

$$\langle a | \mathcal{L}^{(1)}(p) | b \rangle^* = \langle b | \mathcal{L}^{(1)}(-p) | a \rangle.$$

Например, в случае взаимодействия нуклонов с мезоном можно выбрать такой порядок сложения импульсов:

$$\langle p_2 | \mathcal{L}^{(1)}(p) | p_1, k \rangle \sim \delta[(p_1 \ominus p_2) \oplus (k \ominus p)],$$

где  $p_i$  — импульсы нуклонов,  $k$  — импульс мезона. Тогда с помощью уравнения (9) методом математической индукции легко показать, что этим свойством будут обладать матричные элементы в любом порядке теории возмущения, откуда следует унитарность  $S$ -матрицы. Заметим, что если бы в формуле (9) мы выбрали порядок суммирования импульсов, нарушающий симметрию между  $q$  и  $s$  (например, такой:  $\delta[q \oplus (s \ominus p)]$ ), то последнее доказательство не имело бы места.

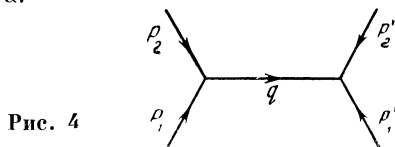


Рис. 4

Хотя в рассматриваемом варианте теории выполняется условие унитарности и, возможно, отсутствуют расходимости, но возникает новая трудность, заключающаяся в отсутствии правильного предельного перехода к локальной теории. Продемонстрируем это на примере простейшего матричного элемента для трехбозонного взаимодействия (рис. 4). Для иллюстрации рассмотрим упрощенную модель, когда одна из обобщенных сумм импульсов в аргументе  $\delta$ -функции заменяется на простую. Как показано

<sup>11</sup> Мы используем в кривом импульсном пространстве матричную форму уравнений, поскольку, как уже отмечалось, в данной работе не ставится задача квантования поля в таком пространстве и соответственно не вводятся операторы поля, лагранжиан и  $S$ -матрица в операторной форме.

в Приложении III, в этом случае для матричного элемента при некотором ограничении на внешние импульсы получаем выражение

$$M \sim \lim_{\tau \rightarrow 0} \int \frac{\exp(iq\tau) \operatorname{sgn} q^0 (q^2 - m^2) \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|} |(p_1 \ominus q) - p_2|}{\{[(q \ominus p_1) + p_2]^2 - i\varepsilon [(q \ominus p_1) + p_2]_0\}^2} d^4q. \quad (10)$$

Рассмотрим мнимую часть интеграла (10). Очевидно, в мнимую часть могут дать вклад лишь те области интегрирования, в которых или знаменатель в (10) обращается в нуль, или  $q^0$  настолько велико, что сказывается отличие величины  $\exp(iq\tau)$  от единицы. Несмотря на то, что  $\tau \rightarrow 0$ , область больших  $q^0$  в случае локальной теории дает вклад в мнимую часть интеграла.

Дело в том, что если заменить  $\exp(iq\tau)$  под интегралом на единицу, то интеграл (10) в локальной теории оказывается логарифмически расходящимся. Поэтому нельзя сделать предельный переход  $\tau \rightarrow 0$  под интегралом, подобно тому как это нельзя сделать в интеграле

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \tau q^0}{q^0} dq^0 = \frac{\pi}{2}.$$

Иное положение оказывается после введения кривого импульсного пространства. При рассмотрении конкретных примеров, в которых метрический тензор удовлетворяет условиям, необходимым для сходимости матричных элементов, оказалось, что после интегрирования в (10) по  $q$  оставшийся интеграл по  $q^0$  равномерно сходится относительно  $\tau$ . Поэтому можно перейти к пределу  $\tau \rightarrow 0$  под знаком интеграла, и, следовательно, после введения кривого импульсного пространства область больших  $q^0$  не дает вклада в мнимую часть интеграла (10). Вклад же полюсов оказывается с точностью до малых членов таким же, как в локальной теории (см. Приложение III). В результате при выбранном виде матричного тензора выражение (10) дает для сечения рассеяния в низшем порядке теории возмущения результат, сильно отличающийся от того, который мы имеем в обычной теории. Это находится в противоречии с экспериментом. С математической точки зрения это происходит из-за того, что при стремлении  $\tau$  к нулю, а «граничного импульса»  $M$ , характеризующего отступление от псевдоевклидовой метрики, — к бесконечности, результат оказывается зависящим от того, в каком порядке совершаются эти два предельных перехода. В качестве простой аналогии можно привести, например, такое выражение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iq^0\tau)}{q^0 + \frac{1}{M^2} (q^0)^3 - i\varepsilon} dq^0,$$

которое обладает таким же свойством<sup>12</sup>.

<sup>12</sup> Принцип соответствия с локальной теорией можно было бы сохранить, если не устремлять в окончательном результате  $\tau$  к нулю, а оставить его



Доклад на научном заседании

Итак, рассмотрение конкретных примеров показывает, что в последнем варианте теории условие сходимости может оказаться несовместимым с принципом соответствия.

### Заключение

Как было выяснено выше, серьезной трудностью рассмотренного варианта теории поля в кривом импульсном пространстве является отсутствие правильного предельного перехода к плоскому пространству. Возможно, эту трудность удастся преодолеть путем подходящего выбора метрического тензора.

Впрочем, если нужную метрику и не удастся найти, остаются еще возможности изменения некоторых положений теории. В частности, та форма локальной теории, из которой мы исходили при построении теории поля в кривом импульсном пространстве, не единственно возможная.

Не исключено, что более подходящей для обобщения является евклидова (а не псевдоевклидова) форма обычной теории [2, 14].

Отметим еще один важный принципиальный вопрос, требующий детальной разработки, — доказательство того, что, как бы ни был велик импульс макроскопических тел, состоящих из элементарных частиц не слишком больших энергий, тела эти подчиняются классическим законам движения.

---

в качестве еще одного параметра в теории. Однако это нарушило бы релятивистскую инвариантность.

В заключение выражаем искреннюю благодарность многим сотрудникам нашего отдела, в особенности Д. А. Киржницу и В. Я. Файнбергу за чрезвычайно большую помощь критикой и советами.

## П р и л о ж е н и я

### I. Нахождение элемента объема и обобщенной суммы импульсов в кривом импульсном пространстве

Из формулы (1) следует<sup>13</sup>

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{g_{\alpha\beta}^0}{f(x)} - \frac{p_\alpha p_\beta h(x)}{f(x) |f(x) + xh(x)|}, \quad \text{где } p_\alpha = g_{\alpha\beta}^0 p^\beta.$$

При этом

$$\sqrt{|\det |g_{\alpha\beta}|} = f^{-3/2} (f + xh)^{-1/2}. \quad (1.1)$$

Уравнение для геодезической линии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p^\mu}{d\sigma^2} - \frac{f'(x)}{f(x)} \frac{dx}{d\sigma} \frac{dp^\mu}{d\sigma} + \left[ \frac{h(x)f'(x) - f(x)h'(x)}{4f(x)|f(x) + xh(x)|} \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{f(x) + xh(x)}{f(x)} f'(x) - h(x) \right] p^\mu = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$d\sigma = \sqrt{|ds^2|}, \quad ds^2 = g_{\alpha\beta}(p) dp^\alpha dp^\beta.$$

Легко видеть, что геодезические, проводимые через точки  $p$  и  $q$  при сложении соответствующих импульсов, лежат в плоскости, проходящей через эти точки и начало координат. Поэтому, не ограничивая общности, можно рассматривать двумерную задачу. При этом, как легко показать, в случае, если выполнено неравенство  $(pq)^2 - p^2 q^2 > 0$ , можно считать  $p^2 = p^3 = q^2 = q^3 = 0$ . В случае же, когда выполнено обратное неравенство, можно считать  $p^0 = p^3 = q^0 = q^3 = 0$ . Мы подробно рассмотрим первый, более сложный случай.

Умножая уравнение (1.2) при  $\mu=0$  на  $p^1$  и при  $\mu=1$  на  $p^0$  и вычитая второе из первого, придем, интегрируя получившееся выражение, к

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{p^1}{p^0} = \frac{bf}{(p^0)^2}, \quad (1.3)$$

где  $b$  — некоторая константа.

Второе уравнение проще найти не из уравнений (1.2), а из определения  $(d\sigma)^2 = |g_{\alpha\beta} dp^\alpha dp^\beta|$ . Получаем

$$(d\sigma)^2 = \left| \frac{(dx)^2}{4x(f+xh)} - \frac{(p^0)^4 \left(d \frac{p^1}{p^0}\right)^2}{xf} \right|,$$

<sup>13</sup> Здесь за единицу измерения импульса и энергии мы принимаем величину  $M$  «фундаментального» импульса.



откуда, учитывая (I.3) и определение  $x=(p^0)^2-(p^1)^2$ , легко найти

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{f(x)}{x \sqrt{[f(x) + xh(x)][f(x) + vx]}} , \quad (I.4)$$

где  $z = \ln \left| \frac{p^0 + p^1}{p^0 - p^1} \right|$ , а  $v$  — некоторая новая постоянная ( $v = \pm 1/b^2$ ). Знак правой части в (I.4) выбирается в зависимости от того, возрастает или убывает  $z$  с ростом  $x$ , что, в свою очередь, видно из граничных условий. Этот знак не остается постоянным вдоль всей геодезической линии. В точках, где квадратный корень в (I.4) обращается в нуль, знак меняется на противоположный. Из (I.4) видно, в частности, что прямые линии, проходящие через начало координат (для них  $dz/dx=0$ ), являются геодезическими (им соответствует  $v=\infty$ ). Отметим, что вместо переменной  $z$  можно было бы ввести гиперболический угол  $\psi$  (например, в верхнем световом конусе  $p^0 = \sqrt{x} \operatorname{ch} \psi$ ). Однако в этом случае времениподобную и пространственноподобную области пришлось бы рассматривать раздельно.

Для определения постоянной  $v$  в (I.4) необходимо предварительно найти приращение вектора, характеризующего направление геодезической линии, проходящей через  $q$ , при параллельном переносе этого вектора из начала координат в точку  $p$ . В качестве рассматриваемого вектора нужно взять  $w = dv/ds$ , где  $v$  — текущая точка на геодезической, проходящей через  $q$ , а  $ds = \sqrt{|g_{\alpha\beta} dv^\alpha dv^\beta|}$ . Так как геодезические линии, проходящие через начало координат, суть прямые, то легко видеть, что в начале координат  $dv/ds = Cq$ , где  $C$  — некоторая константа.

Пусть  $u$  — произвольная точка геодезической линии, проходящей через  $p$ , а  $\tilde{w}$  — значение  $w$ , перенесенного параллельным образом в точку  $u$ . Приращение вектора при бесконечно малом переносе определяется формулой

$$\delta \tilde{w}^i = -\Gamma_{kl}^i \tilde{w}^k du^l . \quad (I.5)$$

Обозначая  $x = g_{\alpha\beta}^0 u^\alpha u^\beta$ ,  $ab = g_{\alpha\beta}^0 a^\alpha b^\beta$ , можно получить из (I.5)

$$\frac{d\tilde{w}^i}{dx} = \frac{\tilde{w}^i f'(x)}{2f(x)} + \frac{p^i(\tilde{w}p)}{2p^2} \left[ \frac{h(x) + xh'(x) + f'(x)}{f(x) + xh(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} \right] .$$

Решением этого уравнения с начальным условием  $\tilde{w} = Cq$  при  $x=0$  является

$$\tilde{w}^i = C \frac{p^i(pq)}{p^2} [\sqrt{|f + xh|} - \sqrt{f}] + Cq^i \sqrt{f} .$$

Определяя теперь  $v$  в (I.4) из условия, чтобы геодезическая линия проходила через  $p$  в направлении перенесенного вектора  $\tilde{w}$ , получаем

$$v = \frac{f(p^2) q^2}{(pq)^2 - p^2 q^2} .$$

Окончательно для произвольной точки  $k$  геодезической линии, проходящей через  $p$  в направлении  $\tilde{w}$ :

$$z(k^2) = \pm \int_p^{k^2} \frac{f(x) dx}{x \sqrt{[f(x) + xh(x)] \left[ f(x) + \frac{f(p^2)x}{p^2(\xi^2 - 1)} \right]}} + z_1 , \quad (I.6)$$

где  $\xi = (pq)^2/\sqrt{p^2q^2}$ ,  $z_1$  — значение  $z$  в точке

$$p \left( z_1 = \ln \left| \frac{p_0 + p^1}{p^0 - p^1} \right| \right).$$

Для нахождения суммы  $l = p \oplus q$  остается написать аналогичное выражение для геодезической линии, проведенной через точку  $q$ , и приравнять значения  $z$  в точке пересечения этих двух линий. Предполагая для определенности, что  $p$  и  $q$  лежат в верхнем световом конусе и что  $z_1 > z_2$ , а также учитывая, что в этом случае в (I.6) интеграл нужно взять с плюсом, а в аналогичном выражении для другой геодезической линии с минусом, получаем для определения  $l^2 = g_{\alpha\beta}^0 l^\alpha l^\beta$  уравнение

$$J_1 + J_2 = 2 \ln (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}), \quad (\text{I. 7})$$

где

$$J(l^2, p^2, \xi) = \int_{p^2}^{l^2} \frac{f(x) dx}{x \sqrt{[f(x) + xh(x)] \left[ f(x) + \frac{f(p^2)x}{p^2(\xi^2 - 1)} \right]}}, \quad (\text{I. 8})$$

$\xi = \text{ch } \psi = (pq)/\sqrt{p^2q^2}$ , а  $J_2$  получается из  $J_1$  заменой  $p \rightleftharpoons q$ . В случае псевдоевклидова импульсного пространства ( $f=1, h=0$ ) (I.7), как и должно быть, дает  $l^2 = p^2 + q^2 + 2\sqrt{p^2q^2}\xi$ . Составляющие  $l^\alpha$  суммы даются выражением

$$l^\alpha = \frac{\sqrt{l^2}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left( \frac{p^\alpha}{\sqrt{p^2}} \text{sh } J_2 + \frac{q^\alpha}{\sqrt{q^2}} \text{sh } J_1 \right). \quad (\text{I. 9})$$

Аналогичные формулы могут быть получены, когда один или оба из складываемых импульсов лежат не в верхнем световом конусе.

В качестве примера рассмотрим метрический тензор, определяемый равенствами:

$$f = 1 + |x|, \quad h = (C^2 - 1) \frac{x}{|x|}, \quad (\text{I. 10})$$

который удовлетворяет всем приведенным в Приложении II условиям. Из формулы (I.4) имеем

$$\sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|} = (1 + |q^2|)^{-3/2} (1 + C^2 |q^2|)^{-1/2}, \quad (\text{I. 11})$$

а интеграл (I.8) переходит в

$$J_1 = \int_{p^2}^{l^2} \frac{(1+x) dx}{x \sqrt{1 + C^2 x} (1 + \lambda x)}, \quad (\text{I. 12})$$

где  $\lambda = \frac{\xi^2 + 1/p^2}{\xi^2 - 1}$ .

Из (I.7) и (I.12) легко получить выражение для  $l^2$  в предельных случаях малых и больших  $\xi$ . Рассмотрим частный случай  $p^2 = q^2 = m^2$ .

При  $\xi \ll \frac{M^2}{2C^2 m^2}$  получаем<sup>14</sup> с точностью до малых поправок то же, что

<sup>14</sup> Здесь мы измеряем энергию и импульс в обычных единицах, а не в единицах «фундаментального» импульса  $M$  (но по-прежнему  $\hbar=c=1$ ).

и в случае псевдоевклидова импульсного пространства, т. е.  $l^2 = 2m^2 \times \times (\xi^2 + 1)$ . При  $\xi \gg \frac{M^2}{2C^2 m^2}$  имеем

$$l^2 = M^2 \frac{(C+1)^2}{4C^2} \left[ \frac{m^2 \xi (C+1)^2}{2M^2} \right]^C \equiv 2\alpha^{C-1} (m^2 \xi)^C,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{(C+1)^2}{2} \right]^{C-1} (4C^2)^{-\frac{1}{C-1}}.$$

Отсюда видно, что выражение для  $l = p \oplus q$ , даваемое (I.9) и (I.12), можно аппроксимировать следующим образом:

$$p \oplus q = [1 + (\alpha |pq|)^b] (p + q), \quad (I.13)$$

где  $b = (C-1)/2$ , а  $p+q$  — обычная сумма импульсов. Это выражение правильно передает приведенные выше предельные случаи. Им можно пользоваться при сложении любых импульсов, удовлетворяющих неравенству  $(pq)^2 - p^2 q^2 > 0$  (а не только в случае, когда оба они лежат в верхнем световом конусе).

## II. Некоторые ограничения на метрический тензор

В отличие от работ [1—3] мы будем требовать, чтобы  $\det |g_{\alpha\beta}(p)|$ , входящий в элемент объема, не имел особенностей на действительной оси. Из выражения (I.1) ясно, что для этого необходимо выполнение условий

$$\frac{x\hbar(x)}{f(x)} > -1, \quad f(x) > 0$$

при действительных  $x$ .

Другие ограничения на метрический тензор мы получим из условия сходимости (по  $p^2$  и гиперболическому углу  $\psi$ ) выражения для поляризационного оператора при времениподобном внешнем импульсе, а также из требования существования суммы для любой пары импульсов и конечности этой суммы для конечных складываемых импульсов. Необходимость выполнения последнего условия ясна из того, что хотя при больших энергиях и возможно отступление от обычного закона сохранения энергии-импульса, однако при столкновении частиц не может выделиться бесконечно большая энергия. Очевидно, условие существования суммы для любой пары импульсов означает, что геодезические линии, проводимые при сложении, должны пересекаться. Из этих условий следует, что функция  $f(x)$  не может убывать при  $|x| \rightarrow \infty$ . Действительно, в противном случае, как видно из (I.1), для отсутствия расхождений по  $p^2$  было бы необходимо, чтобы  $x\hbar$  росло (можно показать, что учет пропагаторов не меняет этого заключения) и отношение  $x\hbar/f$  стремилось к бесконечности при  $|x| \rightarrow \infty$ . Но тогда сумма  $p_1 \oplus p_2$ , где  $p_i$  — импульсы, лежащие в верхнем световом конусе, имела бы при некотором  $\xi = (p_1 p_2) / \sqrt{p_1^2 p_2^2}$  бесконечные компоненты. Это ясно из того, что в этом случае интеграл (см. (I.8))

$$J(\infty, p_i^2, \xi) < \int_{p_i^2}^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1 + \frac{x\hbar}{f}}} = \text{const}(\xi)$$

является ограниченной функцией  $\xi$  и, следовательно, уравнение (см. (I.7)) относительно  $\xi$

$$J(\infty, p_1^2, \xi) + J(\infty, p_2^2, \xi) = 2 \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$$

имеет некоторое решение  $\xi = \xi_0$ , так как правая часть этого уравнения при  $\xi = 1$  меньше, а при  $\xi \rightarrow \infty$  больше его левой части. Таким образом, предположение об убывании функции  $f$  ведет к противоречию с одним из первоначальных условий.

Ограничимся рассмотрением таких функций  $h(x)$ , которые знакопостоянны при достаточно больших значениях своего аргумента. Тогда в асимптотической области должно соблюдаться неравенство  $xh \geq 0$ . Действительно, рассмотрим случай  $p_i^2 \ll 1$ . Если бы при больших  $x$  соблюдалось обратное неравенство  $xh < 0$ , то при достаточно больших  $\xi$ , а следовательно, и  $x$ , учитывая, что  $f(x)$  — растущая функция, мы имели бы

$$J(x, p_i^2, \xi) > \int_{p_i^2}^x \frac{dx}{x \sqrt{1 + \frac{x}{p_i^2(\xi^2 - 1)}}}.$$

Поэтому для выполнения равенства (I.7)  $x$  должен был быть более медленно растущей функцией  $\xi$ , чем в плоском импульсном пространстве. Таким образом, если бы при больших  $x$  выполнялось неравенство  $xh < 0$ , то функция  $D_F(p_1 \oplus p_2)$  с ростом  $\xi$  убывала бы не быстрее, чем  $\xi^{-1}$ , и в результате остались бы угловые расходимости.

Сузим еще класс допустимых метрик, потребовав, чтобы любая пара импульсов имела сумму в определенном выше смысле. Для выполнения этого условия необходимо, в частности, чтобы уравнение

$$f(x) + v_p x = 0, \quad (II.1)$$

где

$$v_p = \frac{f(p^2) q^2}{(pq)^2 - p^2 q^2},$$

имело не более одного решения. Действительно, как видно из (I.4), геодезические линии целиком лежат в областях, в которых величина  $f(x) + vx$  положительна. Если бы уравнение (II.1) имело несколько решений  $x_1, x_2, \dots$  ( $|x_1| < |x_2| < \dots$ ), то геодезические линии, проводимые при сложении некоторых импульсов  $p$  ( $p^2 > |x_2|$ ) и  $q$  ( $q^2 = -p^2$ ), целиком лежали бы в областях, ограниченных со стороны малых  $|x|$  гиперболами  $|x| = |x_2|$ . Это видно из того, что в области  $|x_1| < x < |x_2|$  выполнялось бы неравенство  $f(x) + v_p x < 0$  и аналогично  $f(x) + v_q x < 0$  в области  $-|x_2| < x < -|x_1|$  (необходимо учесть, что в силу положительности функции  $f(x)$  все решения уравнения (II.1) имеют одинаковый знак; в силу равенства  $q^2 = -p^2$  решения уравнений (II.1) при  $v = v_p$  и  $v = v_q$  отличаются лишь знаком;  $f(x) + v(x) = 1 > 0$  при  $x = 0$ ). Таким образом, одна из геодезических линий целиком лежала бы во времениподобной, а другая — в пространственноподобной области и пересечение между ними было бы невозможно. Требование наличия у уравнения (II.1) не более одного решения приводит к следующему ограничению на функцию  $f(x)$ :

$$f'(x) < \left| \frac{f(x)}{x} \right|. \quad (II.2)$$

Но это не единственное ограничение, которое накладывает на метрический тензор требование существования суммы импульсов. Для простоты ограничимся ниже случаем, когда величина  $xh(x)/f(x)$  имеет некоторый предел при  $|x| \rightarrow \infty$ . Как ясно из предыдущего, этот предел должен быть положительным и конечным. Покажем, что для того, чтобы при выполнении всех полученных выше ограничений на функции  $f$  и  $h$  для любой пары импульсов существовала сумма, необходимо и достаточно, чтобы функция  $f$  имела асимптотическое поведение  $f(x) \sim |x|^\alpha$ , причем показатель  $\alpha$  и величина  $C = \left(1 + \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{xh(x)}{f(x)}\right)^{1/2}$  должны удовлетворять следующим условиям:

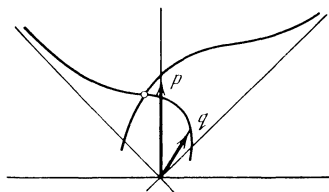


Рис. 5

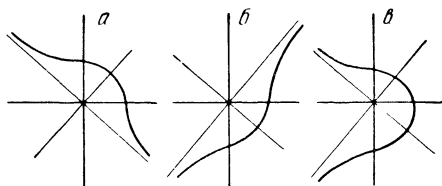


Рис. 6

или  $\alpha=1$  при произвольном  $C$ , или  $\alpha < 1$  и  $1 < C(1-\alpha) < 2$ . Необходимость выполнения неравенства  $\alpha \leq 1$  следует из условия (II.2). Пусть  $\alpha=1$ . Рассмотрим сначала случай, когда выполнено неравенство  $(pq)^2 - p^2q^2 > 0$ . В этом случае интеграл  $J$  (см. (I.8)) расходится при  $|x| \rightarrow \infty$ . Это означает, что геодезические линии асимптотически приближаются к световому конусу. Отсюда, учитывая, что изменение знака величины  $dz/dx$  происходит лишь в тех точках геодезической линии, в которых подкоренное выражение  $J$  обращается в нуль, ясно, что если складываемые импульсы  $p, q$  лежат в верхнем световом конусе, то геодезические линии имеют вид, представленный на рис. 5, и, следовательно, они неизбежно пересекаются.

Рассмотрим еще случай, когда один из складываемых импульсов лежит в верхнем световом конусе, а другой — в нижнем. Не ограничивая общности, можно считать  $p^2 \geq q^2, p^1, q^1 \geq 0$ . Так как уравнение (II.1) при  $p^2, q^2 > 0$  может иметь решение лишь при  $x < 0$ , то для обеих геодезических линий  $dz/dx$  может изменить знак, пройдя через бесконечность, лишь при  $x < 0$ . Если уравнение (II.1) имеет решение  $\tilde{x}$ , то  $|\tilde{x}|$  является максимальным значением (для области  $x < 0$ ), которое  $|x|$  принимает вдоль геодезической линии. Геодезические линии в рассматриваемом случае могут иметь лишь вид, представленный на рис. 6, а, б или в. Казалось бы, они могут не пересекаться, если хотя бы одна из них имеет вид, представленный на рис. 6, в. Покажем, что в действительности пересечение имеет место. Обозначим через  $\tilde{x}_p$  и  $\tilde{x}_q$  значения  $\tilde{x}$  для геодезических линий, проведенных через точки  $p$  и  $q$  соответственно. Легко видеть, что при  $p^2 \geq q^2$  и выполнении условия (II.2) будут выполнены неравенства  $v_p \leq v_q, |\tilde{x}_p| \geq |\tilde{x}_q|$ . Последнее неравенство имеет место в том случае, когда  $|\tilde{x}_p| = \infty$ , т. е. когда уравнение (II.1) не имеет решения. В силу последнего неравенства та точка геодези-

ческой линии, проходящей через  $p$ , для которой  $|x| = |\tilde{x}_p|$ , лежит правее второй геодезической. С другой стороны, при больших  $x$  в верхнем световом конусе  $z_p$  стремится к  $-\infty$ , как  $-\frac{1}{C\sqrt{1+\nu_p}} \ln x$ , а  $z_q$  в верхнем световом конусе — как  $-\frac{1}{C\sqrt{1+\nu_q}} \ln x$ , и так как  $\nu_p \leq \nu_q$ , то при достаточно больших  $x$  точки геодезической линии, проходящей через  $p$ , будут лежать левее другой геодезической линии. Отсюда ясно, что геодезические линии пересекаются. Аналогичное рассмотрение показывает, что сумма двух импульсов существует и в том случае, когда один из них времени-, а другой пространственноподобен.

При  $\alpha \neq 1$  мы не будем проводить общего доказательства нашего утверждения, а ограничимся рассмотрением случая, когда функции  $f(x)$  и  $h(x)$  имеют следующий конкретный вид:

$$f(x) = \theta(1 - |x|) + |x|^\alpha \theta(|x| - 1), \quad (\text{II. 3})$$

$$h(x) = (C^2 - 1) \frac{|x|^\alpha}{x} \theta(|x| - 1). \quad (\text{II. 4})$$

Интеграл  $J$  в этом случае вычисляется точно. Поскольку  $J(x)$  при  $\alpha < 1$  имеет конечный предел при  $|x| \rightarrow \infty$ , геодезические линии асимптотически приближаются к некоторым прямым, проходящим через начало координат и не совпадающим с границами светового конуса. Если складываемые импульсы времениподобны, то вследствие того, что подкоренное выражение в интеграле  $J$  при некотором  $x < 0$  обращается в нуль, обе асимптотики лежат внутри светового конуса.

Покажем, что в случае, когда  $C(1-\alpha) < 1$ , сумма существует не для любой пары импульсов. Пусть  $p^2, q^2 > 0, p^0 > 0, q^0 < 0, \xi^2 - 1 \ll 1, (q^2)^{1-\alpha} (\xi^2 - 1) = 1, (p^2)^{1-\alpha} (\xi^2 - 1) \gg 1$ . Обозначим через  $z_p$  и  $z_q$  асимптотические значения  $z$  в верхнем световом конусе для геодезических линий, проходящих соответственно через  $p$  и  $q$ , а через  $z'_p$  и  $z'_q$  — асимптотические значения  $z$  в нижнем световом конусе. Простые вычисления дают:

$$z'_p - z'_q \approx 4 \left( \frac{1}{C(1-\alpha)} - 1 \right) \ln(\sqrt{2} + 1) > 0,$$

$$z''_p - z''_q \approx -2 \left( \frac{2}{C(1-\alpha)} - 1 \right) \ln(|\xi| + \sqrt{\xi^2 - 1}) < 0.$$

Учитывая также, что  $p^2 \gg q^2$ , легко видеть, что геодезические линии расположены так, как показано на рис. 7, т. е. одна из них всюду лежит правее другой, и, следовательно, эти линии не пересекаются.

Понятие суммы оказывается определенным не для любой пары импульсов также и в случае, когда  $C(1-\alpha) > 2$ . Действительно, в этом случае при  $p$  и  $q$ , лежащих в верхнем световом конусе, и  $p^2 > q^2$  вычисления дают  $z'_p - z'_q < z''_p - z''_q$ . Кроме того, при  $\xi \gg 1$  оказывается  $z'_p - z'_q > 0$ , если  $p^2 = q^2 = 1/(\xi^2 - 1)$ , и  $z'_p - z'_q < 0$ , если  $p^2 = q^2 = 1$ . Отсюда легко видеть, что на отрезке  $(1/(\xi^2 - 1), 1)$  найдутся такие  $p^2, q^2$ , при которых будет  $z'_p - z'_q < 0$ , а  $z''_p - z''_q > 0$ . При этом геодезические линии проходят так, как показано

на рис. 8, не пересекаясь. Заметим, что метрический тензор, для которого  $C(1-\alpha) > 2$ , неприемлем также и по другой причине. А именно путем рассуждений, аналогичных тем, которые приводились при доказательстве невозможности убывания функции  $f(x)$ , можно показать, что и в случае, когда  $C(1-\alpha) > 2$ , при сложении некоторых импульсов получается бесконечно большая сумма. Это видно из того, что в этом случае, когда  $p$  и  $q$  лежат в верхнем световом конусе, а  $\xi \gg 1$ , выполняется неравенство

$$J(\infty, p^2, \xi) + J(\infty, q^2, \xi) < 2 \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}),$$

откуда ясно, что уравнение (I.7) имеет решение (относительно  $\xi$ ) при  $x = \infty$ .

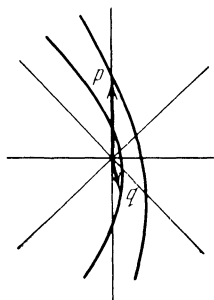


Рис. 7

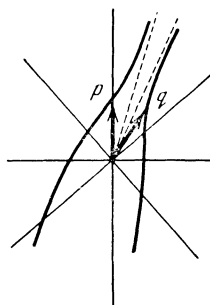


Рис. 8

Легко видеть, что последнее рассуждение без изменения применимо к любому метрическому тензору, для которого выполнено неравенство  $C(1-\alpha) > 2$  (а не только к метрическому тензору, определяемому равенствами (II.3), (II.4)).

Путем сопоставления знака величин  $z'_p - z'_q$  и  $z''_p - z''_q$ , а также положения точек, для которых  $dz/dx = \infty$ , можно показать, что в случае выполнения неравенства  $1 < C(1-\alpha) < 2$  понятие суммы определено для любой пары импульсов (удовлетворяющих, как было предположено с самого начала, неравенству  $(pq)^2 - p^2q^2 > 0$ ). Пусть, например, импульсы  $p$  и  $q$  лежат в верхнем световом конусе,  $p^2 = q^2$  и  $\xi \gg \max\{p^2, 1/p^2\}$ . Существование суммы в этом случае ясно уже из того, что уравнение (I.7) может быть удовлетворено, так как при  $x = p^2$

$$J(x, p^2, \xi) + J(x, q^2, \xi) = 0 < 2 \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}),$$

а при  $x \rightarrow \infty$ , как легко убедиться,

$$J(x, p^2, \xi) + J(x, q^2, \xi) > 2 \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}).$$

Рассмотрение случая, когда импульсы  $p$  и  $q$  удовлетворяют неравенству  $(pq)^2 - p^2q^2 < 0$ , проще и не изменяет полученных результатов. Правда, если функция  $f(x)$  асимптотически ведет себя, как  $|x|$ , дело осложняется тем, что при выполнении последнего неравенства геодезические линии имеют вид спиралей (рис. 9) и вследствие этого пересекаются бесчисленное число раз. Для того чтобы выяснить, какую из этих точек пересечения следует рассматривать как сумму импульсов, необходимо сделать адиабатический

переход к плоскому пространству и воспользоваться принципом соответствия. Это связано с техническими (но не принципиальными) трудностями.

Наконец, получим ограничения на метрический тензор из условия отсутствия угловых расходимостей поляризованного оператора при времени-подобном внешнем импульсе (частично это условие уже было использовано выше). При этом результат может, вообще говоря, оказаться зависящим от выбора модели и порядка суммирования импульсов в аргументе  $\delta$ -функции. Для примера рассмотрим взаимодействие бесспиновых нуклонов со скаляр-

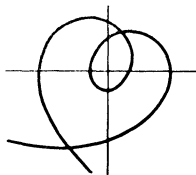


Рис. 9

ным мезонным полем, выбрав некоторый конкретный порядок суммирования импульсов:

$$\begin{aligned} \Pi(k) &\sim i \int \frac{\delta[(p \oplus k) \ominus q] \delta[(p \oplus k') \ominus q]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)(q^2 - m^2 + i\varepsilon)} \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(p)|} \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(q)|} d^4 p d^4 q \sim \\ &\sim i \int \frac{\delta[(p \oplus k) \ominus (p \oplus k')]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p \oplus k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(p)|} d^4 p \sim \\ &\sim i \delta(k - k') \int \frac{\sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(p)|} d^4 p}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p \oplus k)^2 - m^2 + i\varepsilon]}, \end{aligned}$$

т. е. действительная часть поляризованного оператора имеет вид

$$\operatorname{Re} \Pi(k) \sim \int \frac{\delta(p^2 - m^2) \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(p)|} d^4 p}{(p \oplus k)^2 - m^2}. \quad (\text{II. 5})$$

Переходя к гиперболической системе координат  $d^4 p \sim p^2 dp^2 \operatorname{sh}^2 \psi d\psi$ , где  $\operatorname{ch} \psi = (pk)/\sqrt{p^2 k^2}$ , видим, что для сходимости по  $\psi$  необходимо, чтобы  $(p \oplus k)^2$  при больших  $\psi$  рос быстрее, чем  $(\operatorname{ch} \psi)^2$  (в плоском же пространстве  $(p+k)^2 \sim \operatorname{ch} \psi$ ). Чтобы выяснить, какие ограничения накладывает это на метрический тензор, найдем зависимость  $x = (p \oplus k)^2$  от  $\xi = \operatorname{ch} \psi$  при больших  $\xi$ . В этом случае при выполнении полученных выше условий можно пренебречь под корнем в выражении для  $J$  величиной  $f(p^2) x/p^2 (\xi^2 - 1) f(x)$  по сравнению с единицей, т. е. приближенно можно считать, что

$$\int_x^x \frac{dx}{x \sqrt{\left(1 + \frac{xh(x)}{f(x)}\right) \left(1 + \frac{f(p^2)x}{p^2(\xi^2 - 1)f(x)}\right)}} \sim \int_x^x \frac{dx}{x \sqrt{1 + \frac{xh(x)}{f(x)}}}.$$

Действительно, пусть, например,  $p$  и  $k$  лежат в верхнем световом конусе. Тогда, сделав в уравнении (I.7) указанное приближение, получим при больших  $\xi$  (а следовательно, и больших  $x$ )

$$\frac{1}{C} \ln \frac{x}{p^2} + \frac{1}{C} \ln \frac{x}{k^2} = 2 \ln 2\xi, \quad \text{т. е. } x = (2\xi)^C \sqrt{p^2 k^2}. \quad (\text{II. 6})$$



При этом  $\frac{x}{(\xi^2 - 1) f(x)} \sim \frac{|x|^{1-\alpha}}{\xi^2} \sim \xi^{C(1-\alpha)-2} \ll 1$ , так как в силу полученного ранее условия  $C(1-\alpha) < 2$ . Таким образом, сделанное выше упрощение оказывается оправданным. Очевидно, это верно и при  $\alpha=1$ . Из выражения (II.6) видно, что для того, чтобы величина  $(p \oplus k)^2$  росла при больших  $\psi$  быстрее, чем  $(\text{ch}\psi)^2$ , необходимо выполнение условия  $C > 2$ .

### III. Рассмотрение вопроса о принципе соответствия для простейшего матричного элемента

Получим выражение (10) для матричного элемента, соответствующего диаграмме, изображенной на рис. 4. Мы не будем здесь использовать общую формулу (3), а проведем вывод несколько иным, эквивалентным для рассматриваемого матричного элемента способом. Запишем тождество<sup>15</sup>

$$T \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) = \theta(x-y) [\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)]_- + \mathcal{L}(y) \mathcal{L}(x) = \\ = \theta[(x-y+\tau)^2] \theta(x-y) [\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)]_- + \mathcal{L}(y) \mathcal{L}(x), \quad (\text{III.1})$$

где  $T$  означает хронологическое упорядочение,  $[\dots]$  — коммутатор,  $\tau$  — произвольный времениподобный вектор, в дальнейшем устремляемый к нулю. Отбрасывая член  $\mathcal{L}(y)\mathcal{L}(x)$ , как не дающий вклада в рассматриваемый матричный элемент, и переходя в импульсное пространство, получаем для матрицы рассеяния во втором порядке теории возмущения

$$S_2 = \int \exp(-ip\tau) \frac{\mathcal{L}(p) \mathcal{L}(-p) - \mathcal{L}(-p) \mathcal{L}(p)}{(p^2 + i\epsilon p^0)^2} d^4p,$$

где  $\mathcal{L}(p)$  — фурье-образ лагранжиана,  $p^2 = (p^0)^2 - p^2$ .

Обобщение матричных элементов этого выражения на кривое импульсное пространство проводится так же, как это было сделано в разделе 1. Однако для выяснения вопроса о предельном переходе к локальной теории мы ограничимся рассмотрением упрощенной модели, когда некоторые из обобщенных сумм импульсов заменяются простыми. Выбирая определенный порядок суммирования импульсов, получаем, например, в случае трехбозонного взаимодействия следующее выражение для искомого матричного элемента:

$$M \sim \lim_{\tau \rightarrow 0} \int \exp(-ip\tau) \delta[(q \ominus p_1) - p_2 + p] \delta[(q \ominus p'_2) - p'_1 + p] \times \\ \times \frac{\text{sgn } q^0 \delta(q^2 - m^2) \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(p)|} \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(q)|}}{(p^2 + i\epsilon p^0)^2} d^4p d^4q.$$

Рассмотрим для простоты случай  $p'_2 = p_1$ . Тогда после интегрирования по  $p$  оставшаяся  $\delta$ -функция выносится за знак интеграла. Учитывая также, что  $\sqrt{\det |g_{\alpha\beta}(q)|} = \text{const} \sim 1$  (ввиду наличия под интегралом  $\delta(q^2 - m^2)$ ) и пренебрегая малыми ( $\tau \rightarrow 0$ ) членами в экспоненте, приходим к формуле (10).

Для выяснения вопроса о предельном переходе к локальной теории в выражении (10) важно знать, имеет ли это выражение дополнительные полюсы на действительной оси. Используя явное выражение (I.13) для суммы импульсов, когда метрический тензор имеет простейший вид (I.10), получаем,

<sup>15</sup> Вместо (III.1) можно было бы использовать тождество  $T \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) = = \frac{1}{2} \theta[(x-y+\tau)^2] \text{sgn}(x^0 - y^0) [\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)]_- + \frac{1}{2} \{\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)\}_+$ .

отбрасывая малые члены вида  $\alpha f(p_i, q^2)$  (функция  $f$  зависит от  $q$  лишь через  $q^2$ ),

$$[(q \ominus p_1) - p_2]^2 \approx q^2 - 2qk + k^2 - 2(\alpha |p_1 q|)^b (qk + qp_1) + 2(\alpha |p_1 q|)^{2b} p_1 q,$$

где  $k = p_1 + p_2$ . Введем систему координат, в которой

$$\begin{aligned} k &= \{k, 0, 0, 0\}, & p_1 &= \{p_1^0, p_1^1, 0, 0\}, \\ q &= \{q^0, q \cos \theta, q \sin \theta \cos \varphi, q \sin \theta \sin \varphi\}. \end{aligned}$$

Учитывая наличие под интегралом в (10)  $\delta(q^2 - m^2)$ , получаем

$$\begin{aligned} [(q \ominus p_1) - p_2]^2 &= m^2 - 2q^0 k + k^2 - 2(\alpha |q^0 p_1^0 - p_1^1 \sqrt{(q^0)^2 - m^2} \cos \theta|)^b \times \\ &\quad \times (q^0 k + q^0 p_1^0 - p_1^1 \sqrt{(q^0)^2 - m^2} \cos \theta) + \\ &\quad + 2(\alpha |q^0 p_1^0 - p_1^1 \sqrt{(q^0)^2 - m^2} \cos \theta|)^{2b} (q^0 p_1^0 - p_1^1 \sqrt{(q^0)^2 - m^2} \cos \theta). \end{aligned}$$

Благодаря малости  $\alpha \sim 1/M^2 \ll 1/m^2$  (малое отклонение от псевдоевклидовости) можно заменить это выражение на

$$\begin{aligned} m^2 - 2q^0 k + k^2 - 2(\alpha |q^0 p_1^0 - |q^0| p_1^1 \cos \theta|)^b (q^0 k + q^0 p_1^0 - |q^0| p_1^1 \cos \theta) + \\ + 2(\alpha |q^0 p_1^0 - |q^0| p_1^1 \cos \theta|)^{2b} (q^0 p_1^0 - |q^0| p_1^1 \cos \theta). \end{aligned}$$

Так как интегрирование по  $\theta$  проводится от 0 до  $\pi$ , то под интегралом в последнем выражении можно заменить  $|q^0|$  на  $q^0$ , и мы получаем

$$\begin{aligned} m^2 - 2q^0 k + k^2 - 2(\alpha |q^0 p_1^0 - q^0 p_1^1 \cos \theta|)^b (k + p_1^0 - p_1^1 \cos \theta) q^0 + \\ + 2(\alpha |q^0 p_1^0 - q^0 p_1^1 \cos \theta|)^{2b} (p_1^0 - p_1^1 \cos \theta) q^0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что это выражение является монотонной функцией величины  $q^0$ . Поэтому подынтегральное выражение в формуле (10) для матричного элемента имеет лишь один полюс, близкий к тому, который имеется в локальной теории. Вклад этого полюса в (10) с точностью до членов, стремящихся к нулю при  $\alpha \rightarrow 0$ , оказывается равным

$$\frac{\pi^2 i}{2k^2} \frac{k^2 + m^2}{k^2 - m^2}, \quad (\text{III. 2})$$

как и в локальной теории. Однако, так как в локальной теории мы не можем положить  $\tau = 0$  под интегралом, вклад в мнимую часть интеграла дает не только полюс, но и область больших  $q^0$ .

Результат интегрирования по области больших  $q^0$  также легко найти, используя малость  $\tau$ . Складывая его с (III.2), получаем в локальной теории

$$\pi^2 i / (k^2 - m^2). \quad (\text{III. 3})$$

Однако в случае кривого импульсного пространства интеграл (10) сходится равномерно относительно  $\tau$ , поскольку, как видно из (I.11) и (I.13), обобщенная сумма  $p \oplus q$  достаточно быстро растет, а  $\sqrt{|\det g_{\alpha\beta}(p)|}$  убывает с ростом импульса. Поэтому в этом случае можно перейти к пределу  $\tau \rightarrow 0$  под знаком интеграла. В результате область больших  $q^0$  не дает вклада в мнимую часть интеграла, и с точностью до малых членов мы получаем в кривом импульсном пространстве для мнимой части матричного элемента выражение, пропорциональное (III.2), а не (III.3), как это было в локальной теории. Таким образом, при выборе метрического тензора в виде (I.10) принцип соответствия с локальной теорией нарушается.

*Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Snyder*. Phys. Rev., 1947, **71**, 38.
2. *Ю. А. Гольфанд*. ЖЭТФ, 1959, **37**, 504; 1962, **43**, 256.
3. *В. Г. Кадышевский*. Докл. АН СССР, 1962, **147**, 588.
4. *В. Г. Кадышевский*. ЖЭТФ, 1964, **46**, 872.
5. *Д. А. Киржниц*. УФН, 1966, **90**, 129.
6. *Е. С. Фрадкин*. Докл. АН СССР, 1954, **98**, 47.
7. *Е. С. Фрадкин*. Докл. АН СССР, 1955, **100**, 897.
8. *Д. А. Киржниц*. ЖЭТФ, 1961, **41**, 511; 1963, **45**, 143, 2024; 1965, **49**, 1544.
9. *И. Е. Тамм*. Докл. на 12-й Международной конференции по физике высоких энергий. Дубна, 1964.
10. *C. Bloch*. Kgl Danske Mat.-Fys., 1952, **27**, 8.
11. *А. Н. Лезнов, Д. А. Киржниц*. ЖЭТФ, 1965, **48**, 622.
12. *Г. В. Ефимов*. Препринт ОИЯИ, P-2870. Дубна, 1966; P2-3590, 1967.
13. *В. Б. Вологодский*. Препринт ФИАН, № 84, 1970.
14. *В. Б. Вологодский*. Препринт ФИАН, № 85, 1970.

## VII

### РАЗНОЕ

(Обзоры, выступления, Personalia,  
научно-популярные работы и т. п.)

---

56

#### МАГНЕТИЗМ И СТРОЕНИЕ АТОМОВ <sup>1</sup>

1. Теория Ланжевена и магнетон Вейсса. 2. Магнетон Бора. 3. Квантование ориентации. 4. Непосредственное доказательство квантования ориентации. 5. Квантовая энергия и опытные данные о магнетоне Бора. 6. Спектроскопический способ определения магнитного момента атомов. 7. Магнетизм и периодическая система элементов. 8. Трудности квантовой теории магнетизма. 9. Литература.

Современное развитие теории атомного магнетизма несомненно заслуживает самого пристального внимания. Последние годы принесли теории квантов ряд очень крупных успехов в этой области. Вопросы атомного магнетизма оказались непосредственно связанными с вопросом о сложной структуре спектральных линий, о внутреннем строении атома и т. д. Но особенно интересно, что в теории магнетизма с необычайной яркостью отразились характерные стороны всего современного положения теории квантов в целом. С одной стороны, приходится констатировать поражающий успех предположений, простых до наивности, с другой стороны, — непрерывное накопление все обостряющихся *внутренних* противоречий. Противоречия эти, коренящиеся в применении к стационарным состояниям атома законов классической физики, нигде не проявляются, пожалуй, с такой резкостью и определенностью, как в рассматриваемой нами области. Именно поэтому дальнейшее развитие квантовой теории магнетизма обещает быть особенно плодотворным.

Теория эта уже в настоящее время настолько разрослась, что, конечно, в журнальной статье нельзя дать сколько-нибудь систе-

<sup>1</sup> УФН, 1925, 5, 105.

матического изложения связанных с нею вопросов. Настоящая статья будет посвящена преимущественно вопросу о *результатирующем магнитном моменте атома в целом*; вопросы *внутриатомного* магнетизма, столь важные для теории спектров, будут затронуты лишь постольку, поскольку это необходимо для основной темы; наконец, совершенно исключены из рассмотрения ферромагнитные явления, коренящиеся во взаимодействии *между* атомами.

## 1. Теория Ланжевена и магнетон Вейсса

Прежде чем переходить к изложению современных теорий магнетизма, необходимо напомнить экспериментальные основы всего учения об атомном магнетизме.

За исключением нового спектроскопического способа, о котором речь впереди, существует только один способ определения величины магнитного момента парамагнитных атомов — способ, основанный на кинетической теории Ланжевена<sup>2</sup>. Ввиду исключительной важности этой теории позволю себе вкратце напомнить основные ее положения.

Рассмотрим парамагнитный газ, молекулы которого обладают магнитным моментом  $m$ . При отсутствии внешнего магнитного поля молекулы газа ориентированы беспорядочным образом. Возникновение поля ведет к установке магнитных осей молекулы вдоль направления поля, чему, однако, препятствует тепловое движение. В результате устанавливается стационарное состояние, при котором согласно известной теореме статистической механики распределение осей по различным направлениям определяется формулой Больцмана (Boltzmann)

$$dn = ce^{-P/kT} d\omega.$$

Здесь  $dn$  означает число молекул в моле (грамм-молекуле), направление осей которых заключается внутри телесного угла  $d\omega$ ;  $P$  означает потенциальную энергию, соответствующую этой ориентации молекулы; наконец,  $k$  есть постоянная Больцмана, а  $T$  — абсолютная температура.

Если угол между магнитной осью молекулы и направлением магнитного поля  $H$  равен  $\varphi$ , то, как известно,  $P = -mH \cos\varphi$ .

Вводя обозначение

$$a = mH/kT,$$

получим

$$dn = ce^{a \cos\varphi} d\omega.$$

Во всех интересующих нас случаях  $a$  мало, и потому величину  $e^{a \cos\varphi}$  можно разложить в ряд, ограничиваясь первыми членами

<sup>2</sup> Для ферромагнитных тел атомные элементы вычисляются по насыщению намагничивания при низких температурах; в парамагнитных телах насыщение не наблюдается.

разложения:

$$dn = c(1 + a \cos \varphi) d\omega.$$

Коэффициент пропорциональности  $c$  определяется из того условия, что общее число молекул в моле должно равняться числу Авогадро  $N$ . Произведя вычисления, найдем, что  $c = N/4\pi$  и, стало быть,

$$dn = \frac{N}{4\pi} (1 + a \cos \varphi) d\omega.$$

Общий магнитный момент молекул  $dn$  равен  $mdn$ ; по направлению поля  $H$  им соответствует слагающая намагничения  $dG$ :

$$dG = m \cos \varphi dn = \frac{Nm}{4\pi} \cos \varphi (1 + a \cos \varphi) d\omega.$$

Интегрируя по всем возможным направлениям осей, получим общее намагничение одного моля газа:

$$G = \frac{Nm}{4\pi} \int (\cos \varphi + a \cos^2 \varphi) d\omega = \frac{Nma}{4\pi} \int \cos^2 \varphi d\omega = Nma \overline{\cos^2 \varphi}.$$

Здесь  $\overline{\cos^2 \varphi}$  означает, как обычно, среднее значение  $\cos^2 \varphi$  по всем возможным ориентациям молекулы:

$$\overline{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{4\pi} \int \cos^2 \varphi d\omega = \frac{1}{4\pi} \int \int \cos^2 \varphi \sin \varphi d\lambda d\varphi = 1/3.$$

Мы, однако, этого числового значения в предыдущую формулу вводить пока не станем, а внесем в нее лишь значение величины  $a$ . Получим

$$G = \frac{Nm^2 H}{kT} \overline{\cos^2 \varphi}.$$

Разделив обе части равенства на  $H$ , получим выражение для магнитной восприимчивости (при расчете ее на грамм-молекулу):

$$\chi = \frac{G}{H} = \frac{Nm^2}{kT} \overline{\cos^2 \varphi}.$$

Помножая обе части дроби на число Авогадро  $N$ , припоминая, что  $Nk = R$ , где  $R$  — газовая постоянная, и вводя, кроме того, новое обозначение

$$Nm = M,$$

получим окончательно

$$\chi = \frac{M^2}{RT} \overline{\cos^2 \varphi}, \quad \overline{\cos^2 \varphi} = 1/3. \quad (1)$$

Таков окончательный вид формулы Ланжевена для случая  $a \ll 1$ . Эта теоретическая формула вполне согласуется с ранее найденной эмпирической формулой Кюри (P. Curie)

$$\chi = C/T, \quad C = \text{const}, \quad (2)$$

которая хорошо отображает температурную зависимость магнитной восприимчивости целого ряда парамагнитных веществ. Сравнение правых частей этих формул приводит к соотношению

$$C = \frac{M^2}{R} \overline{\cos^2 \varphi}, \quad (3)$$

откуда  $M = \sqrt{\frac{RC}{\cos^2 \varphi}}$ . Вставляя сюда  $\cos^2 \varphi = 1/3$ , получим окончательно

$$M = \sqrt{3RC}. \quad (3a)$$

Так как постоянная Кюри  $C$  определяется из опытных данных, то формула эта может служить для определения  $M$ .

Изложенная теория Ланжевена относится к парамагнитным газам; для парамагнитных твердых и жидких тел температурная зависимость выражается уже не формулой Кюри (2), а более сложной формулой с двумя константами:

$$\chi = C/(T - \Theta), \quad C = \text{const}, \quad \Theta = \text{const}. \quad (2a)$$

П. Вейссу (P. Weiss [1]) удалось дать теоретическое истолкование и этой усложненной формуле. Предположим, что при намагничении создается внутреннее магнитное поле  $H_i$ , пропорциональное намагничению  $H_i = \lambda G$ , и предположим, что это внутреннее поле, в свою очередь, воздействует ориентирующим образом на молекулы тела; иными словами, примем во внимание магнитное взаимодействие молекул. Тогда нужно будет соответствующим образом исправить выражение для  $P$  и для  $a$ ; очевидно, что в этом случае

$$a = \frac{m(H + H_i)}{kT} = \frac{m(H + \lambda G)}{kT}.$$

Повторяя теперь прежнюю цепь рассуждений, получим окончательно формулу типа (2a), а именно

$$\chi = C/(T - \lambda C),$$

где по-прежнему

$$C = \frac{M^2}{R} \overline{\cos^2 \varphi}. \quad (3)$$

Таким образом, формула (3) оказывается применимой ко всем парамагнитным телам вне зависимости от их агрегатного состояния.

Вейсс применил эту формулу к большому количеству парамагнитных тел и пришел к заключению, что магнитные моменты различных молекул почти всегда находятся в отношении целых чисел. Иными словами, Вейсс нашел, что магнитный момент молекулы всегда является целым кратным некоторого элементарного магнитного момента, который по аналогии с электроном

получил название *магнетона*<sup>3</sup>. Величина этого элементарного магнитного момента  $m_0$  оказалась равной  $18,6 \cdot 10^{-22}$  СГС. Принято, однако, вводить в рассмотрение не  $m_0$ , а величину  $M_0 = Nm_0 = 1123,5$  гс·см, т. е., другими словами, принято рассчитывать магнитный момент на моль (грамм-молекулу) вещества.

Как известно, магнитные свойства химических соединений подчиняются закону аддитивности; при проверке этого закона нужно, однако, учитывать состояние ионизации атомов, которое оказывает решающее влияние на их магнитные свойства. Иными словами, необходимо отличать магнетизм нейтральных атомов от магнетизма соответствующих ионов. Зато магнитный момент атома, находящегося в данном состоянии ионизации, почти совершенно не зависит от агрегатного состояния исследуемого вещества (раствор, кристаллическое соединение и т. д.).

В виде иллюстрации мы приводим таблицу значений магнитного момента иона  $Mn^{II}$ , полученных различными исследователями<sup>4</sup>. В этой таблице, как обычно, за единицу магнитного момента принят вейссовский магнетон.

Таблица I

Соединение	Безводная соль в твердом состоянии	С кристаллической водой $4H_2O$	В водном растворе	Наблюдатели
$Mn^{II}SO_4$	29,04 (Th)	29,2 O	29,33	Th = (Theodorides, 1922) Теодоридес
	29,0			
$Mn^{II}(NO_3)_2$	29,05 (Th)	29,06 (цельный кристалл) F	29,33 C	H = (Honda, 1914) Гонда
	—			
$Mn^{II}Cl_2$	28,45 (Th) 27,3 H	—	29,43 C	O = (K. Onnes & Oosterhuis, 1913) Камерлинг — Оннес и Остергейс
$Mn^{II}O$	27,43 (Th)	—	—	F = (Fох, 1921)
	30,2			
	26,43 (Th)			Факс C = (Cabrera) Кабрера

Один из лучших современных специалистов по магнетизму солей, испанский физик Кабрера (P. Cabrera) считает «почти достоверным», что магнитный момент иона  $Mn^{II}$  равен 29,0 маг-

<sup>3</sup> Что касается исторической последовательности, то нужно отметить, что к понятию магнетона Вейсс впервые пришел на основании своих исследований о насыщении ферромагнитных тел при низких температурах. Существовавшие в то время дела это не меняет.

<sup>4</sup> Таблица взята из статьи В. Герлаха [а].



нетонов. Не предупреденному человеку выписывание нуля после запятой кажется по меньшей мере преждевременным, ибо взаимное согласие различных определений недостаточно для того, чтобы судить о десятичных знаках. Пример этот довольно типичен для теории вейссовского магнетона. Справедливость этой теории, утверждающей, что магнитные моменты атомов равны целому числу магнетонов Вейсса, неоднократно вызывала сомнения<sup>5</sup>. Указывалось на известную предубежденность ее сторонников при выводе средних значений; указывалось также, что некоторым атомам и ионам приписывается столь большое число магнетонов (до 30), что при малой точности опытных данных различие между столь большими целыми и промежуточными дробными числами лежит в пределах экспериментальных ошибок. Несомненно, во всяком случае, что реальность вейссовского магнетона не может считаться окончательно установленной. Нужно, однако, признать, что для некоторых веществ измерения дают числа магнетонов, действительно крайне близкие к целым. Во всяком случае, большая заслуга вейссовской теории магне-

Т а б л и ц а 2

Ионы:	Cr''	Cr'''	Mn''	Mn'''	Mn''''
Число магнетонов	24,0	19,0	29,0	25	19
Границы колебаний	—	—	26,5—30,2	—	—

Т а б л и ц а (окончание)

Ионы:	Fe''	Fe'''	Co''	Ni''	Ti'''	V'''	U''''
Число магнетонов	26,0	29,0	25,0	16,0	8,6	9,2	6,7
Границы колебаний	26—29	28,7—29,15	24,0—25,06	13—16,9	—	—	—

тона состоит в том, что она послужила толчком к целому ряду исследований, собравших большой экспериментальный материал.

Как известно, парамагнетизм встречается почти исключительно в тех участках периодической системы элементов, в которых происходит перестройка внутренних электронных слоев атома. Таковы элементы триад восьмой группы и непосредственно им предшествующие, таковы также и редкие земли. Однако скольконибудь полно исследованы только элементы группы железа от Ti (22) до Ni (28); рассмотрением этой группы элементов нам

<sup>5</sup> В настоящее время сам автор теории признал, что число магнетонов в атоме может быть *полуцелым* (кратным половине)! См. J. Phys., 1924, 5, 129.

поэтому в большинстве случаев и придется ограничиться. В табл. 2 приведены данные о числе магнетонов в различных ионах этой группы. В большинстве своем они взяты из критической сводки Кабреры [2] данные относительно  $Mn^{II}$  и  $Mn^{III}$  взяты из статьи Герлаха [a], наконец, число магнетонов в  $V^{II}$  и  $V^{III}$  было определено Паскалем (Pascal) и цитируется нами по Вейссу. В последней строке таблицы указаны для некоторых ионов те границы, в пределах которых колеблются результаты различных измерений.

## 2. Магнетон Бора

Вейссовская «теория магнетона» носит чисто эмпирический характер. Дать ей теоретическое обоснование можно только на основании определенных представлений о строении атома. В деле изучения строения атомов за последнее десятилетие сделаны такие успехи, что для теории атомного магнетизма созданы уже, казалось бы, все необходимые предпосылки.

Во-первых, опыты Эйнштейна и де-Гааса (Einstein und de Haas), Барнетта (Barnett) и их продолжателей обнаружили существование *магнитомеханических* эффектов, а именно намагничение ферромагнитных металлов и сплавов при быстром вращении и, обратно, появление вращающих пондеромоторных сил при намагничении этих металлов. Опыты эти принесли с собой долгожданное доказательство амперовой теории молекулярных токов; в настоящее время можно считать несомненным, что магнетизм атомов обуславливается движением электрических частиц внутри атомов.

С другой стороны, учение Бора о строении атомов позволяет предвычислить самую величину магнитного момента атомов и почти без всяких дополнительных предположений приводит к понятию магнетона. Другими словами, теория Бора приводит к утверждению, что атомные моменты должны быть целыми кратными некоторого элементарного магнитного момента или магнетона. Однако, несмотря на качественное совпадение магнитных теорий Бора и Вейсса, между ними существует резкое количественное противоречие: боровская теоретическая единица магнетизма — «магнетон Бора» — в 5 раз больше эмпирически найденного «магнетона Вейсса».

Само вычисление величины магнетона Бора не представляет никаких трудностей. Согласно теории квантов, момент вращения (момент количества движения) электрона в атоме  $j$  должен быть целым кратным от  $h/2\pi$ :

$$|j| = \mu |r\mathbf{v}| = nh/2\pi, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (4)$$

Здесь  $\mu$  — масса электрона,  $r$  — его расстояние от центра атома,  $v$  — скорость,

Известно, что момент вращения  $\mathbf{j}$  равен постоянной площадей, т. е. равен удвоенной секториальной скорости электрона, помноженной на его массу:

$$j = 2\mu \frac{ds}{dt}, \quad (5)$$

где  $s$  — площадь, описываемая радиус-вектором.

С другой стороны, при вычислении магнитного поля движущегося электрона мы вправе заменить его замкнутым током, сила которого  $i$  определяется из условия

$$i = \varepsilon/T,$$

где  $\varepsilon$  — заряд электрона, а  $T$  — период его обращения. Магнитный момент  $m$  замкнутого тока равняется, как известно,  $iS$ :

$$m = iS,$$

где  $S$  обозначает величину обтекаемой током площади. Очевидно, что

$$S = T \frac{ds}{dt},$$

а потому

$$m = iS = \varepsilon \frac{ds}{dt}.$$

Сравнивая это с формулой (5), получим важное соотношение

$$\mathbf{m} = \frac{\varepsilon}{2\mu} \mathbf{j}, \quad (6)$$

откуда на основании (4) найдем окончательно

$$m = n \frac{\varepsilon h}{2\mu \cdot 2\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Таким образом, магнитный момент, обусловленный движением электрона в атоме, всегда должен быть целым кратным элементарного магнитного момента  $m_0$ , называемого магнетонем Бора:

$$m = nm_0, \quad m_0 = \frac{\varepsilon h}{2\mu \cdot 2\pi}. \quad (8)$$

Подставляя в формулу (8) известное значение универсальных постоянных и пересчитывая, как обычно, величину магнетона на грамм-молекулу, получим

$$\text{магнетон Бора} = M_0 = Nm_0 = \frac{N\varepsilon h}{2\mu \cdot 2\pi} = 5584 \text{ гс} \cdot \text{см}. \quad (9)$$

Уравнениям (4), (6), (7) можно придать очень простую форму, если только для измерения вращательного и магнитного моментов атома  $j$  и  $m$  пользоваться не единицами СГС, а рациональными единицами, равными соответственно  $h/2\pi$  и  $\varepsilon h/2\mu \cdot 2\pi$ , т. е. боровскому магнетону. Тогда уравнения эти примут следующий

простой вид:

$$j = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4a)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{j}, \quad (6a)$$

$$m = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7a)$$

В дальнейшем мы всегда будем пользоваться этой рациональной системой единиц, за исключением только особо оговоренных случаев.

Но вернемся к числовой величине магнетона Бора. Как показывает уравнение (9), магнетон Бора действительно в 5 раз (точнее, в 4,98 раза) больше вейссовского; стало быть, по теории Бора число вейссовских магнетонов в атоме любого вещества всегда должно быть кратным пяти. Это положение находится в определенном противоречии с опытными данными, причем острота этого противоречия ни в коей мере не связана с вопросом о реальности вейссовского магнетона. Ведь Вейсс пришел к понятию магнетона чисто эмпирическим путем, и вейссовский магнетон, по *определению*, равен общему наибольшему делителю магнитных моментов различных атомов. Стало быть, магнитные моменты атомов, во всяком случае, не могут быть целыми кратными впятеро большего боровского магнетона.

Чем объяснить это противоречие между теорией и опытом? Не сделали ли мы в предыдущем каких-либо упущений? Во-первых, может показаться, что нами было учтено магнитное поле одних только электронов и забыто поле положительных зарядов, которые, быть может, тоже движутся в атоме. Приняв, однако, во внимание, что формула (7) остается справедливой и для положительных зарядов, но что отношение  $\epsilon/\mu$  для этих зарядов несравненно меньше того же отношения для электронов, мы убедимся, что магнитным полем положительных зарядов можно безнаказанно пренебречь.

Недостаток изложенной теории можно было бы также усмотреть в том, что если магнитный момент каждого из движущихся в атоме электронов равен целому числу боровских магнетонов, то из этого обстоятельства еще нельзя вывести каких-либо следствий о магнитном моменте всего атома в целом: ведь результирующий магнитный момент атома складывается *векториально* из моментов входящих в его состав электронов и зависит, стало быть, от геометрического расположения орбит этих электронов. Однако с точки зрения теории квантов и это возражение оказывается несостоятельным. Чтобы разобраться в этом первейшей важности вопросе, нам придется поподробнее остановиться на так называемом квантовании ориентации.

### 3. Квантование ориентации (Raumquantelung)

Вообще говоря, теория квантов ограничивает лишь числовую величину вектора вращательного момента  $\mathbf{j}$ , требуя, чтобы вектор

этот принимал только целые значения <sup>6</sup>. Направление же вектора  $\mathbf{j}$ , вообще говоря, остается произвольным.

Однако, если среди всех возможных пространственных направлений одно какое-нибудь направление чем-нибудь физически выделяется (совпадая, например, с направлением электрического или магнитного поля), тогда вносится добавочное ограничение, касающееся направления вектора  $\mathbf{j}$ : не только сам вектор может принимать только целые значения, но и *проекция* его на выделяющееся пространственное направление может иметь только целое значение <sup>7</sup>. Если применить это правило к вопросу о строении атома, как это сделал впервые Ланде (Landé [3]), то «выделяющимся» направлением нужно будет считать направление результирующего момента вращения (нормаль к неизменяемой плоскости атома). Стало быть, проекции момента вращения каждого из электронов на направление результирующей должны иметь целые значения, следовательно, и результирующая эта тоже будет иметь целое значение. Иначе, результирующий магнитный момент атома в целом должен равняться целому числу боровских магнетонов.

Таким образом, возражение против квантовой теории магнетонов, приведенное в конце прошлого раздела, оказывается с точки зрения этой теории несостоятельным, и противоречие между теорией и опытом остается в полной силе. Это противоречие долгое время являлось излюбленным аргументом противников боровской теории, пока, наконец, в 1920 г. В. Паули младший (W. Pauli, jun) не показал, что коренится оно лишь в недостаточно последовательном применении теории квантов.

В самом деле, величина магнитного момента парамагнитных атомов и ионов вычисляется, как мы видели, по формуле Ланжевена

$$M = \sqrt{3RC}. \quad (3a)$$

При выводе этой формулы приходится определять среднее значение  $\cos^2 \varphi$ , причем предполагается, что оси атомов могут принимать любое направление в пространстве. Однако теория пространственного квантования ограничивает направление осей атомов рядом дискретных возможностей, что, конечно, может существенно изменить численное значение величины  $\overline{\cos^2 \varphi}$ . По классической теории  $\overline{\cos^2 \varphi}$  при всех обстоятельствах равняется одной трети, по квантовой же значение  $\overline{\cos^2 \varphi}$  зависит от величины момента вращения  $\mathbf{j}$ . Так как проекция вектора  $\mathbf{j}$  на «выделяющееся» направление внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}$  должна принимать

<sup>6</sup> Конечно, при условии выбора рациональной единицы вращательного момента, равной  $h/2$  (см. уравнение (4a)).

<sup>7</sup> Я привожу наиболее простую первоначальную формулировку А. Зоммерфельда, не касаясь более глубокого и плодотворного рассмотрения этого вопроса, данного Н. Бором.

только целые значения, то при  $|j|=n$  (где  $n$  целое число)  $\cos \varphi$  может иметь только одно из следующих значений<sup>8</sup>:

$$\cos \varphi = \pm \frac{1}{n}, \pm \frac{2}{n}, \dots, \pm \frac{n-1}{n}, \pm \frac{n}{n}.$$

Поэтому

$$\overline{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{1}{n} \right)^2 + \left( \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 + \left( \frac{n}{n} \right)^2 \right].$$

Произведя вычисления, получим

$$\overline{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{3} \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2}.$$

Таким образом,  $\cos^2 \varphi$  принимает «классическое» свое значение  $1/3$  лишь в пределе при  $n=\infty$ ; вообще же говоря, формулу (3а) нужно заменить следующей (см. уравнение (3)):

$$M' = \sqrt{\frac{HC}{\overline{\cos^2 \varphi}}} = \sqrt{3RC} \sqrt{\frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}}, \quad (3б)$$

или

$$M' = M \sqrt{\frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}}. \quad (3с)$$

Здесь  $M'$  обозначает магнитный момент грамм-атома, вычисленный по квантовой теории, а  $M$  — величину того же момента по классической теории;  $n$  равно числу боровских магнетонов в атоме.

Таким образом, с квантовой точки зрения формула (3а), по которой обычно вычисляется магнитный момент атомов, оказывается неправильной. Нет поэтому ничего удивительного в том, что найденные с помощью этой формулы фиктивные значения магнитных моментов не оказались кратными боровского магнетона. Наоборот, величина  $M'$ , очевидно, должна быть целым кратным боровского магнетона, т. е. должно быть справедливо следующее равенство:

$$M' = n \times 5584 \text{ гс} \cdot \text{см},$$

где  $n$  — целое число.

Каково же должно быть соотношение между боровским и вейссовским магнетонами? Число  $k$  вейссовских магнетонов в атоме вычисляется, конечно, по величине его магнитного момента  $M$ ,

<sup>8</sup> Для  $\cos \varphi$  можно было бы ожидать еще значение нуль, которое также соответствует целому (нулевому) значению проекции. Однако, исходя из адиабатной гипотезы (сейчас применяется термин «адиабатическая гипотеза». — *Прим. ред.*), Бор пришел к заключению, что это значение  $\cos \varphi = 0$  исключено (см. доказательство, например, у Sommerfeld'a. *Atombau*, 3 Aufl., S. 382). На этом основании оно и не учитывалось в теории Паули. Мы не останавливаемся на этом вопросе потому, что в настоящее время нулевое значение  $\cos \varphi = 0$  вновь считается возможным для *сложных* атомов (доказательство Бора применимо лишь к водороду).

определяемого по «классической» формуле (3а); другими словами,  $k$  определяется из следующего соотношения:

$$M = k \times 1123,5 \text{ гс} \cdot \text{см.}$$

Вставляя последние два уравнения в формулу (3с) и сокращая (приближенно) на 1123,5, получим

$$5n = k \sqrt{\frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}}$$

или

$$k = 5n \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}. \quad (10)$$

Таким образом, хотя величина боровского магнетона почти ровно в 5 раз больше вейссовского, однако соотношение между числом  $k$  вейссовских магнетонов в атоме (вычисленным по классической теории) и числом  $n$  боровских магнетонов в том же атоме (вычисленным по квантовой теории) носит довольно сложный характер.

Разобраться в этой зависимости проще всего с помощью табл. 3. Число  $k$  «кажущихся» вейссовских магнетонов, соответствующих одному, двум и т. д. боровским магнетонам, высчитано по формуле (10) и внесено в последнюю строчку этой таблицы.

Т а б л и ц а 3

Число боровских магнетонов $n$	1	2	3	4	5
Кажущееся число вейссовских магнетонов $k$	8,7	13,7	18,7	23,7	28,7

Таблица эта дает возможность произвести проверку теории.

Действительно, если квантовая теория верна, то обработка опытных данных по «классической» формуле (3а) обязательно должна приводить к одному из следующих значений числа  $k$  вейссовских магнетонов (в круглых цифрах): 9, 14, 19, 24 и т. д.

Паули считал возможным произвести эту проверку квантовой теории только по отношению к парамагнитным газам: в твердых же и жидких телах внутренние молекулярные силы слишком велики, для того чтобы можно было говорить о квантовании ориентации по отношению к внешнему магнитному полю.

До сих пор известны только два парамагнитных газа NO и O<sub>2</sub>. Кажущееся число вейссовских магнетонов  $k$  по новейшим измерениям колеблется для NO от 8,9 до 9,2, а для O<sub>2</sub> от 13,9 до 14,12. Совпадение этих чисел с числами предыдущей таблицы ( $k=8,7$ ,  $k=13,7$ ) вполне удовлетворительно; это дает нам право считать, что в NO имеется один, а в O<sub>2</sub> — два боровских магнетона; другими словами, в каждом атоме кислорода имеется по одному магнетону Бора.

Как ни сильно говорит это количественное совпадение в пользу квантовой теории, однако нужно заметить, что изложенная нами

теория Паули относится, собственно, только к одноатомным газам; для случая же двухатомных газов NO и O<sub>2</sub> нужно было бы еще принять во внимание тепловое вращение молекул. А priori представляется весьма вероятным, что вращение сгладит влияние пространственного квантования. Однако указанное совпадение элементарной теории с опытом доказывает, что тепловое вращение не нарушает дискретной квантовой ориентации магнитных осей. Объяснить этот факт можно только, сделав маловероятное предположение, что магнитная ось молекул NO и O<sub>2</sub> направлена перпендикулярно ее оси симметрии (т. е. линии, соединяющей центры атомов).

Во всяком случае, каковы бы ни были трудности, связанные с дальнейшим развитием теории, несомненно одно: указав на неправильность формулы Ланжевена с точки зрения теории квантов, Паули тем самым доказал полную несостоятельность тех возражений против квантовой теории магнетизма, которые основывались на кажущемся противоречии между этой теорией и «непосредственными» измерениями атомных магнитных моментов.

В реферируемой небольшой работе Паули (1920), собственно говоря, содержатся уже все основные положения современной теории атомного магнетизма; дальнейшее развитие теории состояло в детализации и в экспериментальной проверке этих положений.

#### 4. Непосредственное доказательство квантования ориентации

Мы убедились, что основной посылкой квантовой теории магнетизма является гипотеза о квантовом, дискретном характере законов ориентации атомов. Естественно поэтому, что непосредственное опытное доказательство квантования ориентации должно иметь громадное значение для всей этой теории. Путь к такому доказательству был указан О. Штерном (O. Stern) в 1921 г.; самый опыт был успешно выполнен им в сотрудничестве с В. Герлахом в 1922 г.

Опыт этот поражает своей простотой и является едва ли не самым прямым из всех известных пока опытных подтверждений теории квантов. Убедительная сила его столь велика, что главным образом под влиянием успеха этого именно опыта М. Планк в 5-м издании (1923) своей знаменитой книги «Theorie der Wärmestrahlung» отказался от второго варианта своей квантовой теории излучения<sup>9</sup>.

Ввиду широкой известности, какую успел приобрести опыт Штерна и Герлаха<sup>10</sup>, я позволю себе при его описании ограни-

<sup>9</sup> Как известно, в этом варианте прерывный характер приписывался только актам излучения, тогда как для излучающей системы допускалось непрерывное многообразие состояний (непрерывное поглощение).

<sup>10</sup> Работы О. Штерна и В. Герлаха были подробно прореферированы в УФН, т. III, вып. 2-3, стр. 301 (см. также печатаемую в этом выпуске (т. е. УФН, 1925, 5, 57) статью Н. Н. Семенова «Молекулярный пучок». — *Прим. ред.*).



читься лишь самым существенным. Задача, стоявшая перед Штерном, состояла в том, чтобы измерить магнитный момент атома, или, вернее, слагающую этого момента по направлению внешнего магнитного поля. Штерн указал, что для этого достаточно измерить механическое воздействие поля на атом *при условии, что поле это неоднородно*. Действительно, в неоднородном магнитном поле, помимо пары сил, стремящейся повернуть атом и поставить его ось по направлению поля, на атом действует еще и результирующая сила, приложенная к его центру тяжести. Предположим для простоты, что направление градиента  $\partial H/\partial s$  совпадает с направлением самого поля  $H$ , тогда, очевидно, к атому будет приложена результирующая сила

$$F = m \frac{\partial H}{\partial s} \cos(\mathbf{m}, \mathbf{H}),$$

где магнитный момент  $m$  должен быть, по-видимому, выражен не в рациональных, а в обычных единицах СГС.

Таким образом, величина этой силы  $F$  зависит от проекции  $m$  на направление поля  $H$ , т. е. от величины  $m \cos(\mathbf{m}, \mathbf{H})$ . Измеряя силу  $F$  и градиент  $\partial H/\partial s$ , можно, стало быть, измерить и  $m \cos(\mathbf{m}, \mathbf{H})$ .

По классической теории возможны любые значения  $\cos(\mathbf{m}, \mathbf{H})$  от 0 до 1, тогда как по теории квантов все атомы делятся на несколько резких групп и каждой группе соответствует одно определенное значение проекции  $m \cos(\mathbf{m}, \mathbf{H})$ . Наблюдения над отклонением атомов в неоднородном магнитном поле под влиянием силы  $F$  должны решить, какая из этих теорий верна.

Практически этот *experimentum crucis* был выполнен следующим образом. В высоком вакууме<sup>11</sup> кипятилось серебро; из потока атомов, вырывавшихся с поверхности расплавленного серебра, две диафрагмы с отверстием в  $0,5 \times 0,05$  мм<sup>2</sup> вырезали узкий пучок атомов; этот «атомный луч» проходил вдоль клинообразного полюса электромагнита на расстоянии нескольких десятых миллиметра от него и затем улавливался охлажденной стеклянной пластинкой. Вблизи полюса градиент  $\partial H/\partial s$  магнитного поля достигал 150 000 гс/см, причем направление градиента совпадало с направлением поля. На рис. 1 приведена увеличенная в 40 раз микрофотография серебряного осадка, полученного на стеклянной пластинке при выключенном электромагните; рис. 2 изображает осадок (след луча), полученный при наличии магнитного поля. В последнем случае серебряный луч резко расщепился надвое; часть атомов притянулась, другая с той же силой оттолкнулась от полюса магнита. Стало быть, все атомы разделились на две и только на две группы: у одной группы оси направлены по полю, у другой — в прямо противоположном направлении. Промежуточные же ориентации вовсе отсутствуют.

<sup>11</sup> Чтобы исключить влияние столкновений между молекулами.

Итак, этот опыт доказывает, во-первых, квантование ориентации в магнитном поле и, во-вторых, наличие в атоме серебра *одного* магнетона. Последнее явствует из того обстоятельства, что, как указывалось выше число возможных ориентаций оси атома вдвое превышает число имеющихся в нем магнетонов.

Более того, опыт Штерна и Герлаха дает возможность измерить самую величину магнитного момента серебра, т. е. величину магнетона Бора. Для этого, очевидно, нужно только измерить величину отклонения луча в магнитном поле и величину градиента

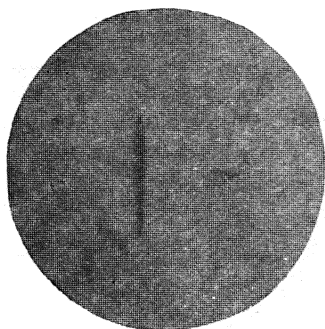


Рис. 1



Рис. 2

$\partial H / \partial s$ , а также время, в течение которого атом был подвержен воздействию отклоняющей силы. Последнее определяется из пройденной в магнитном поле длины пути и из скорости полета атомов (скорость эта была непосредственно измерена Штерном при тех же условиях опыта еще в 1920 г.). Среднее значение магнитного момента атома серебра из двух различных опытов оказалось равным (при расчете на грамм-атом)

$$mN = M = 5475 \pm 5\% \text{ гс} \cdot \text{см},$$

что отлично согласуется с теоретической величиной боровского магнетона  $M_0 = 5584 \text{ гс} \cdot \text{см}$ . Итак, опыты Штерна и Герлаха принесли с собой блестящее подтверждение квантовой теории магнетона.

В связи с этим успехом этого опыта естественно возникает ряд вопросов. Каким образом протекает процесс установки оси атома в квантово-допустимое направление и, в частности, что происходит при изменении направления внешнего поля? Следует ли ось атома непрерывно за направлением поля или же нет? В чрезвычайно интересной совместной работе Эйнштейн и Эренфест рассмотрели ряд возможных предположений и пришли к следующим довольно обескураживающим выводам.

Всякое изменение ориентации магнитной оси атома во внешнем магнитном поле должно сопровождаться выделением или

поглощением соответствующей энергии. Если бы это излучение и поглощение энергии происходило по классическим законам, то для квантовой установки оси атома потребовался бы промежуток времени, в  $10^{14}$  раз превышающий время полета атома в опыте Штерна и Герлаха. Можно отказаться от классических воззрений и допустить, что при изменении направления поля направление оси атома вначале отстает от него и что установка оси происходит затем скачком, причем выделение (поглощение) избыточной (недостающей) энергии происходит по квантовым законам. Однако такое представление привело бы к необходимости делать совершенно непонятное принципиальное различие между системами, могущими излучать (заряженными) и не могущими излучать (незаряженными). Внесение подобного различия резко противоречит нашим сведениям и представлениям о теплоемкости твердых и газообразных тел.

Если, наконец, предположить, что ось атома мгновенно следует за каждым изменением направления поля, то это приведет нас к противоречию с законами механики. Таким образом, крупный успех теории квантов повлек за собой возникновение целого ряда недоуменных и неразрешенных вопросов.

## 5. Квантовая теория и опытные данные о магнетоне Бора

Несмотря на указанные трудности теоретического истолкования, успех опыта Штерна и Герлаха чрезвычайно укрепил позицию теории Паули, которая была изложена нами в разделе 3. К недостаткам этой теории можно было бы причислить чрезвычайную ограниченность области непосредственного ее применения (два парамагнитных газа). Паули не решился применить выведенные им формулы к жидким и твердым телам, считая, что междуатомные силы в этих телах, гидратация ионов в растворах и т. д. должны до неузнаваемости изменить характер ориентации элементарных магнитов. Эти соображения казались столь очевидными и неоспоримыми, что Зоммерфельд еще в январе 1923 г. [12], обсуждая сводку Кабреры (см. раздел 1) и упоминая о теории Паули, считал необходимым подчеркнуть неприменимость этой теории к твердым и жидким телам. А между тем стоило только сравнить сводку опытных данных (табл. 2) с теоретической табл. 3, чтобы убедиться в несомненной применимости квантовой теории к парамагнитным телам любого агрегатного состояния<sup>12</sup>.

По квантовой теории магнетизма одному, двум и т. д. реальным боровским магнетонам должно соответствовать (в круглых цифрах) 9, 14, 19, 24, 29 и т. д. кажущихся вейссовских магнетонов. Экспериментально же для ионов группы железа найдены следующие

<sup>12</sup> На это обстоятельство впервые обратили внимание независимо друг от друга Эшптейн (P. Epstein) [9] и Герлах (W. Gerlach) [10].

щие значения числа  $k$  вейссовских магнетонов (тоже в круглых числах): 2 раза по 9, 2 раза по 19, 1 раз  $k=24$  и 2 раза близкое этому значение  $k=25$ , наконец, 2 раза  $k=29$ . Все эти семь значений вполне соответствуют теоретическим предсказаниям. Оставшиеся три значения

$$k = 6,7 (V'''), \quad k = 16 (Ni'') \quad \text{и} \quad k = 26 (Fe'').$$

Данные для Fe принадлежат как раз к наименее достоверным; отдельные определения колеблются между 26 и 29; наконец, данные для  $V'''$  взяты мною из старых и сравнительно мало точных измерений Паскаля<sup>13</sup>. Это совпадение результатов измерений с теоретическими предсказаниями имеет место и для других парамагнитных веществ, как это явствует из табл. 4, в которую остались не включенными только ферромагнитные металлы<sup>14</sup>, комплексные соединения и редкие земли. Здесь во втором столбце стоят теоретически вычисленные значения числа  $k$ , соответствующие одному, двум и т. д. боровским магнетонам; в следующем столбце те же значения округлены; наконец, в четвертом столбце указаны экспериментально найденные значения  $k$  для различных веществ. Эти значения только в трех рассмотренных уже случаях сколько-нибудь значительно отличаются от теоретически допустимых.

Т а б л и ц а 4

$n$	$k$		
1	8,7	9	Ag ( $n=1$ ); Cu'' $k=9-10$ ; V''9,2; V'''9; Ti'''8,6; Ni9,2; Pt8-9 Pd $\infty$ 8
2	13,6	14	O <sub>2</sub> 14, V''''14, Ni''16(?)
3	18,7	19	Cr'''19, Mi''''19
4	23,7	24	Co''24, Cr''24, Mn'''25, Fe''26(?)
5	28,7	29	Fe'''29, Mn''29

Принимая во внимание малую точность большинства измерений, согласие теории с опытом нельзя не признать более чем удовлетворительным<sup>15</sup>. Согласие это тем удивительнее и неожи-

<sup>13</sup> В последней статье Вейсса (J. Phys., 1924, 5, 129) приведено для  $V'''$  новое значение  $k=9$ , отлично согласующееся с требованиями теории. Значение это внесено мною в табл. 4. — *Примечание при корректуре.*

<sup>14</sup> При высоких температурах металлы эти становятся парамагнитными.

<sup>15</sup> Как сообщает А. Зоммерфельд [14], по мнению Кабреры, магнитные моменты некоторых ионов из группы железа измерены столь точно, что с несомненностью можно констатировать отклонение от требований квантовой теории и, наоборот, подтверждение теории Вейсса. Несмотря на всю авторитетность Кабреры в этих вопросах, нам все же кажется вместе с Герлахом и Зоммерфельдом, что непредубежденному уму положение вещей

даннее, что нами не были учтены силы междумолекулярных взаимодействий, которые не могут, конечно, не исказить результатов квантования ориентации во внешнем магнитном поле.

Чтобы отдать отчет в этом неожиданном успехе заведомо неполной теории, остается только сослаться на то, что все магнитометрические измерения производились в очень сильных полях; очевидно, что для квантования ориентации определяющим является отношение силы этого поля к силе молекулярных полей.

В связи с этим интересно напомнить тот факт, что во многих кристаллах уже при сравнительно слабых полях наблюдается отчетливое зееманово расщепление спектра поглощения и спектра флуоресценции, в чем, несомненно, проявляется преобладание влияния внешнего поля над полями внутренними. Во всяком случае, не может быть чистой случайностью то обстоятельство, что все измеренные значения числа  $k$  вполне определенно группируются около пяти определенных, *предсказанных* теорией чисел. Необходимо также отметить, что теория квантов приписывает измеренным атомам малое число (до 5) магнетонов, тогда как, по Вейссу, для многих атомов число магнетонов превышает 20—25. Очевидно, что столь большие значения числа  $k$  значительно уменьшают убедительность теории Вейсса: в конце концов, ведь с помощью достаточно больших целых чисел можно как угодно близко аппроксимировать любую последовательность любых чисел.

Наконец, необходимо принять во внимание, что квантовая теория теоретически предвычислила величину магнетона, совершенно не пользуясь при этом опытными данными и исходя из одних только универсальных констант ( $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $h$ ).

Остается только еще раз констатировать, что наиболее простые и, казалось бы, маловероятные допущения (применимость квантования к телам любого агрегатного состояния) далеко не всегда оказываются ошибочными.

Убедительность квантовой теории, несомненно, еще усугубляется при рассмотрении зависимости магнитного момента ионов от числа его внешних (валентных) электронов. Мы, однако, отложим обсуждение этого вопроса до тех пор, пока не познакомимся еще с одним совершенно независимым способом определения числа магнетонов в атоме — со способом спектроскопическим.

## 6. Спектроскопический способ определения магнитного момента атомов

Вопросы атомного магнетизма за последние годы приобрели решающее значение для дальнейшего развития теории спектров. В центре внимания этой теории стоят сейчас два вопроса, на кото-

---

должно представляться как раз в обратном свете, тем более что ведь числа табл. 3 носят характер первого приближения (не учтены молекулярные поля; см. также в дальнейшем о возможности дробного числа боровских магнетонов в атоме).

рые была бессильна ответить элементарная квантовая теория. Это вопрос о характерной «множественности» или «кратности» (Multiplizität) большинства спектральных линий (дублеты, триплеты и т. д.) и вопрос об аномальном характере расщепления этих линий в магнитном поле (аномальное явление Зеемана)<sup>16</sup>. Мы знаем теперь, что бессилие теории в этих вопросах объясняется тем, что они непосредственно связаны с магнитными свойствами атомов.

В настоящее время можно считать установленным, что все магнитные свойства атомов носят аномальный характер<sup>17</sup>. Объясняется это, очевидно, тем, что обычные законы электромагнетизма неприменимы даже к стационарным состояниям атома. Необходимость видоизменения основных законов механики и электродинамики с полной определенностью устанавливается всем современным развитием теории квантов, но непригодность классических воззрений, пожалуй, нигде не проявляется с такой резкостью, как именно в учении о магнетизме (см. [18]).

Понятно поэтому, что пока все попытки уяснить внутренний «магнитный» механизм атомов кончились неудачей; зато в последние годы, главным образом благодаря работам Ланде, Зоммерфельда и Гейзенберга, удалось создать чисто формальную теорию, вернее, стройную числовую схему, которая охватывает воедино все эти сложные явления. Теория эта пока прекрасно оправдывается опытом, и целый ряд ее предсказаний уже получил экспериментальное подтверждение. В частности, только благодаря этой теории удалось, наконец, расшифровать столь сложные спектры, как, например, спектры Mn, Cr, Fe и т. д. Однако теория эта все же находится еще только в стадии разработки; кроме того, благодаря своему формальному характеру она допускает ряд различных интерпретаций. До сих пор еще изложение теории у разных авторов разнится не только по существу, но даже в выборе основных величин и в обозначении их. Мы не собираемся излагать этой теории сколько-нибудь подробно, но бегло остановиться на ней нам все же придется, ибо она приводит к новому спектроскопическому способу определения магнитного момента атомов. При этом мы будем придерживаться той формы теории, которой пользуется Зоммерфельд, во-первых, потому, что она несколько проще теории Ланде, а во-вторых, потому, что именно Зоммерфельд и применил свою теорию к вопросу о магнетоне<sup>18</sup> [15].

<sup>16</sup> Как известно, для всех кратных линий явление Зеемана носит аномальный характер в том смысле, что линии эти расщепляются не на три компонента, как того требуют и классическая и элементарная квантовые теории, а обыкновенно на большое число (до 24) компонент; расстояния между отдельными компонентами и поляризация их тоже носят аномальный характер.

<sup>17</sup> См. на стр. 37 о магнитомеханической аномалии.

<sup>18</sup> Некоторые положения первых работ Зоммерфельда, частью вошедшие в третье издание его известной книги «*Atombau und Spektrallinien*», были им впоследствии несколько видоизменены.

Кратность спектральных линий обуславливается, очевидно, кратностью стационарных состояний атома. Вообще говоря, различие состояний атома лежит в различии орбит внешнего электрона (Leuchtelektron); от характера этих орбит и зависит в первую очередь внутренняя энергия атома. Каждая орбита характеризуется двумя квантовыми числами: так называемым главным (Hauptquantenzahl) и азимутальным ( $n$  и  $k$  в обозначениях Бора). Однако только в самых простых случаях (H и He<sup>+</sup>) двух этих чисел достаточно для исчерпывающего определения состояния атома; вообще говоря, одной и той же паре квантовых чисел  $n$  и  $k$  может соответствовать несколько более или менее близких уровней энергии. Существование этих более мелких подразделений уровней энергии и обнаруживается в кратной структуре спектральных линий.

Причина расщепления лежит в возможности различных ориентаций орбиты внешнего электрона (или электронов) по отношению к «остову» атома (Atomzumpf — так называется совокупность ядра и внутренних электронов). Предполагается, что остов атома представляет собой более или менее связанное целое и что ось остова может занимать различные ориентации по отношению к плоскости орбиты внешнего электрона, подчиняясь при этом закону квантования. Различным ориентациям остова соответствует различная потенциальная энергия его в магнитном поле внешнего электрона. Таким образом, чтобы вполне охарактеризовать состояние атома, нужно, помимо двух квантовых чисел  $n$  и  $k$ , определяющих собой орбиту внешнего электрона, задать еще угол между плоскостью этой орбиты и осью остова. Для этого достаточно задать результирующий момент вращения атома, который геометрически складывается из момента вращения внешнего электрона и момента вращения остова атома и который, стало быть, зависит от ориентации оси остова. Число, выражающее величину этого результирующего момента вращения в рациональных единицах ( $1 = h/2\pi$ ), называется *внутренним квантовым числом* и обозначается буквой  $j$ . В отличие от обыкновенных квантовых чисел, оно может принимать не только целые, но и полуцелые значения (кратные половине). Таким образом, одному и тому же значению  $n_k$  может соответствовать ряд различных внутренних чисел, а стало быть, и ряд различных уровней энергии атома. Пример: желтому дублету натрия  $D_1$  и  $D_2$  соответствуют начальные орбиты  $2p_2$  и  $2p_1$ ; первая из них характеризуется квантовыми числами  $n=2, k=2, j=1/2$ , вторая же — числами  $n=2, k=2, j=3/2$ <sup>19</sup>.

Перейдем теперь к эффекту Зеемана. При отсутствии внешнего поля направление оси атома, другими словами, направление его результирующего момента вращения  $j$ , вполне произвольно.

<sup>19</sup> Значения квантовых чисел, соответствующих различным состояниям атома, определяются на основании совокупности спектральных данных. Входить в подробности мы здесь не имеем возможности, в дальнейшем мы будем рассматривать эти числа как данные.

При возникновении внешнего магнитного поля законы квантования ориентации вступают в свои права, и направление оси атома ограничивается рядом дискретных возможностей. Ориентация атома характеризуется углом между направлением поля  $\mathbf{H}$  и направлением вектора вращательного момента  $\mathbf{j}$ . Правило квантования сводится к тому, что проекция  $j_H$  вектора  $\mathbf{j}$  на направление  $H$  [ $j_H = j \cos(\mathbf{j}, \mathbf{H})$ ] должна либо равняться  $\pm j$ , либо может отличаться от него на целое число единиц. Так, например, для  $j = 3/2$  возможны четыре значения проекции  $j_H$ :  $\pm 3/2$  и  $\pm 1/2$ .

В зависимости от ориентации атома меняется и его потенциальная энергия во внешнем магнитном поле; энергия эта равна

$$\Delta E = -mH \cos(\mathbf{m}, \mathbf{H}), \quad (11)$$

где  $m$  — магнитный момент атома, выраженный на этот раз не в рациональных, а в обычных единицах СГС.

Таким образом, одной и той же системе значений  $n$ ,  $k$  и  $j$  может соответствовать ряд различных значений энергии атома (в зависимости от угла  $\cos(\mathbf{m}, \mathbf{H})$ ). Другими словами, в магнитном поле каждый спектральный терм (уровень энергии) расщепляется на ряд близких между собой термов, соответствующих различным ориентациям магнитной оси атома; этим и объясняется магнитное расщепление спектральных линий (явление Зеемана).

Величина расщепления термов  $\Delta E$  может быть измерена спектроскопически. С другой стороны, направление вектора, конечно, совпадает с направлением вектора  $\mathbf{j}$ , т. е.

$$\cos(\mathbf{m}, \mathbf{H}) = \cos(\mathbf{j}, \mathbf{H}).$$

Итак, в уравнении (11) величины  $\Delta E$  и  $H$  можно измерить непосредственно,  $\cos(\mathbf{j}, \mathbf{H})$  определяется по правилам квантования, и, стало быть, уравнение это дает возможность на основании измерений эффекта Зеемана вычислить величину атомного магнитного момента  $m$ .

Может показаться, что мы совершенно напрасно усложнили простую задачу. Ведь мы уже неоднократно ссылались на хорошо известное соотношение между вращательным и магнитным моментами

$$m = \frac{e}{2\mu} j \quad (\text{уравнение } (4)).$$

Нами уже указывалось, что если измерять  $m$  и  $j$  в рациональных единицах (равных соответственно  $h/2\pi$  и боровскому магнетону  $\frac{eh}{2\mu \cdot 2\pi}$ ), то равенство (4) сведется к равенству численных значений вращательного и магнитного моментов атома:

$$m = j. \quad (4a)$$

Входящая в эту формулу величина  $j$  есть не что иное, как внутреннее квантовое число; стало быть, число магнетонов в атоме  $m$  должно быть попросту равным внутреннему квантовому числу  $j$ .



Таким образом, может показаться, что для определения магнитного момента  $m$  вовсе нет надобности прибегать к измерению эффекта Зеемана. Однако, к сожалению, в действительности дело обстоит гораздо сложнее: об этом в первую очередь свидетельствует аномалия зееманова эффекта большинства спектральных линий. Элементарная теория, основывающаяся на равенстве (4а), требует для всех линий нормального зеемановского триплетта. Чтобы объяснить совокупность опытных данных, приходится допустить, что соотношение между моментами магнитным и вращательным гораздо сложнее того, что предполагалось классической теорией и что равенство (4а) должно быть заменено соотношением  $m = gj$ .

Входящий в эту формулу множитель  $g$  носит название «фактора расщепления»<sup>20</sup> (Aufspaltungsfaktor) и является довольно сложной функцией азимутального квантового числа  $k$ , внутреннего квантового числа  $j$  и, наконец, еще третьего числа  $r$ , которое характеризует собой так называемую максимальную кратность термов данной спектральной серии<sup>21</sup>.

Таким образом, для определения  $m$  недостаточно еще знать одно только  $j$ , а приходится прибегать к указанному выше способу, основанному на измерении расщепления термов  $\Delta E$ . Способ этот, как уже говорилось, позволяет непосредственно определить  $m$ , затем уже по формуле (12) можно вычислить и  $g = m/j$ .

Надо признать, что, заменяя равенство  $m = j$  (4а) соотношением  $m = gj$ , квантовая теория магнетизма, собственно говоря, вырывает у себя почву из-под ног: ведь равенство (4а) вытекает из основных законов электромагнетизма, на нем ведь зиждется самое понятие боровского магнетона.

Здесь мы должны опять констатировать столь характерный для современного развития физики процесс нарастания глубоких внутренних противоречий в новых, плодотворных теориях. Несмотря, однако, на эти противоречия, теории эти во множестве случаев приводят нас к открытию новых закономерностей — закономерностей столь простых и убедительных, что они, несомненно, соответствуют истинной природе вещей.

Так обстоит дело и в рассматриваемом нами случае. Множитель  $g$  был введен Ланде [11] только для того, чтобы объяснить аномалию эффекта Зеемана в двукратных и трехкратных спектральных линиях (дублеты и триплеты). Естественное обобщение этой

<sup>20</sup> Сейчас используется термин «множитель Ланде». — Прим. ред.

<sup>21</sup> Эта функция имеет вид  $g = \frac{3}{2} + \frac{r(r+1) - k(k-1)}{2j(j+1)}$ . Число  $r$  равно 0 для одиночных линий,  $1/2$  для дублетов,  $2/2$  для триплетов и т. д.

Физический смысл величины  $g$  до сих пор не выяснен. Предполагалось, что появление множителя  $g$  в уравнении (12) объясняется тем, что ориентации отдельных электронных орбит в магнитном поле до известной степени независимы друг от друга. Это предположение дало возможность объяснить характер магнитного расщепления дублетных спектральных линий, однако применение его к линиям более сложной структуры не увенчалось успехом.

теории позволило затем представить сложную структуру многократных линий (мультиплетов) и характер расщепления их в магнитном поле. Эти теоретические предсказания впервые позволили разобраться в чрезвычайно сложной и запутанной области спектрального анализа и блестяще подтвердились на опыте. За последнее время чуть ли не каждый месяц приносит с собой новые успехи в этой области<sup>22</sup>. Уже одна эта заслуга теории чрезвычайно велика. Но, кроме того, оказалось, что та же самая теория способна почти без всяких дополнительных предположений «объяснить» аномалию магнитомеханического эффекта<sup>23</sup>.

Наконец (и это является для нас сейчас самым важным), на основании все той же теории можно определить число магнетонов в атоме, причем полученные таким образом результаты оказываются в полном согласии с результатами непосредственных магнитных измерений.

Как уже указывалось, для определения магнитного момента атома приходится прибегать к формуле (12). Мы не станем рассказывать о том, каким путем находятся значения величин  $g$  и  $j$ , соответствующие данному состоянию атома, ибо это завело бы нас слишком далеко. Упомянем только об одном простом правиле, позволяющем в ряде случаев непосредственно определить величину  $m$ .

Из всех квантовых чисел, характеризующих собой состояние атома, наиболее важное значение имеет азимутальное число  $k$ .

---

<sup>22</sup> Чтобы охарактеризовать всю новизну этой области, достаточно сказать, что до последнего времени наши сведения не шли дальше триплетов. Теперь же удалось уже расшифровать спектр  $Mn$ , содержащий в себе октеты (восьмикратные линии). Некоторые из его линий расщепляются в магнитном поле на 24 компоненты! Все эти сложные соотношения вполне укладываются в теоретическую схему Ланде.

<sup>23</sup> Мы можем здесь лишь мельком коснуться этого вопроса. Как известно, измерение магнитомеханических эффектов (см. § 2) дает возможность определить соотношение между вращательным и магнитным моментами атома. Обычная теория приводит к соотношению (6) или (6а). Этому уравнению удовлетворяли результаты первых опытов. Однако ряд более точных исследований последних лет (Arvidson, 1920; Chattock, Sucksmith, Bates, 1922) с полной определенностью показал, что уравнение (6а) неприменимо ни к одному из исследованных тел (Fe, Ni, сплав Гейслера) и что оно должно быть заменено уравнением  $m=2j$ . Последнее соотношение является частным случаем нашей формулы (12) для  $g=2$ .

Замечательнее всего, что спектроскопическая теория магнетизма Ланде совершенно независимым путем пришла к тому выводу, что  $g=2$  для всех атомов и ионов, находящихся в нормальном одноквантовом состоянии (азимутальное квантовое число  $k=1$ ). Таким образом, магнитомеханическая аномалия может быть «объяснена» на основе предположения, что атомы или ионы ферромагнитных веществ находятся при обычных условиях в одноквантовом состоянии.

За недостатком места мы должны оставить в стороне вопрос о том, насколько это предположение совместимо со взглядами Бора на строение периодической системы элементов и с новейшими исследованиями спектра паров железа.

В дальнейшем мы будем говорить об одноквантовых, двухквантовых и т. д. состояниях, подразумевая при этом значение числа  $k$ , ибо значение главного квантового числа  $n$  ни на вращательный, ни на магнитный момент атома влияния не оказывает. Упомянем еще, что в спектроскопии принято пользоваться буквами  $s$ ,  $p$ ,  $d$  и т. д. для обозначения орбит, соответствующих  $k = 1$ ,  $k = 2$ ,  $k = 3$  и т. д.

Условившись в терминологии, мы можем следующим образом формулировать правило Зоммерфельда: в нормальном одноквантовом состоянии  $s$  ( $k = 1$ ) число магнетонов в атоме на единицу меньше максимальной кратности его уровней энергии<sup>24</sup>. Так, например, для атома, излучающего простые линии, например Са, максимальная кратность линий  $= 1$ , стало быть, число магнетонов  $m$  равно  $m = 1 - 1 = 0$ . Для атомов, излучающих дублеты (например, Na), максимальная кратность  $= 2$ , следовательно,  $m = 2 - 1 = 1$ ; для атомов, излучающих триплеты (например, тот же Са), максимальная кратность равна 3, следовательно,  $m = 3 - 1 = 2$  и т. д.

В частности, атомы кальция могут излучать как простые линии, так и триплеты; стало быть, и встречаются они в двух различных состояниях. В спектроскопии для различения этих состояний принято обозначать их соответственно большими и малыми буквами:  $S$ ,  $P$ ,  $D$  . . . и  $s$ ,  $p$ ,  $d$  и т. д. В состоянии  $S$  (простые линии) число магнетонов равно нулю, в состоянии  $s$  (триплеты) число магнетонов равно двум. Конечно, указанное простое правило применимо только к нормальным одноквантовым состояниям атома. В возбужденном состоянии атома изменяется его момент вращения  $j$ , а стало быть, и магнитный момент  $m$ .

Необходимо, наконец, отметить, что некоторые вещества даже в обычных условиях находятся в многоквантовых состояниях ( $k > 1$ ), которые, таким образом, являются для них нормальными. Таковы, например, пары Al и Tl (нормально  $2p$ ), пары Fe (нормально 3) и т. д. К этим веществам указанное простое правило Зоммерфельда неприменимо.

## 7. Магнетизм и периодическая система элементов

Одним из наилучших подтверждений квантовой теории магнетизма служит полное согласие результатов, получаемых совершенно различными способами (спектроскопическим и непосредственным магнитометрическим). На рис. 3 приведена диа-

<sup>24</sup> Мы говорим о максимальной кратности потому, что кратность уровней энергии данного атома, вообще говоря, растет с возрастанием азимутального числа  $k$ , пока не достигнет максимума. Известно, например, что одноквантовые уровни энергии (термы)  $S$  вообще никогда не бывают расщепленными.

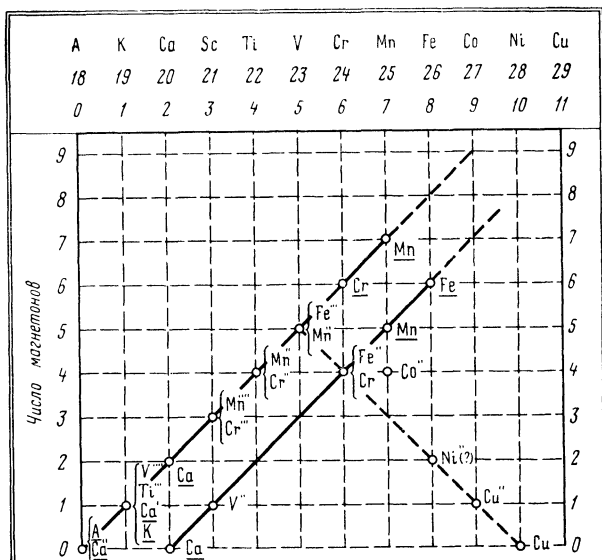


Рис. 3

грамма Зоммерфельда, на которой нанесены результаты измерений той группы элементов, которая лучше всего изучена в магнитном отношении. По оси абсцисс откладывается число «внешних» электронов<sup>25</sup> в атоме или ионе, по оси ординат — число магнетонов в нем. Выше числа внешних электронов стоит общее число электронов в атоме и название соответствующего нейтрального атома. Результаты спектроскопических измерений подчеркнуты; остальные величины найдены обычным магнитометрическим способом (см. сводку в табл. 4). Число магнетонов округлено до целых значений, что может вызвать сомнение только по отношению к

$Ni''$  и  $Fe''$ <sup>26</sup>.

Диаграмма дополнена некоторыми данными, которые не были включены в нее Зоммерфельдом ( $K$ ,  $V''$ ,  $V''''$ ,  $Mn''''$ ,  $Fe''$ ,  $Cr$ ); число магнетонов для  $Fe$  вычислено мною на основании новой спектроскопической работы Гильды Гизелер и В. Гротриана [16]<sup>27</sup>. Для некоторых атомов ( $Ca$ ,  $Cr$ ,  $Mn$ ) приведены по два различных значения, ибо атомы эти могут находиться в двух различных одноквантовых состояниях  $S$ ; это обстоятельство прояв-

<sup>25</sup> Под числом «внешних» электронов мы подразумеваем разницу между общим числом электронов в данном атоме и числом электронов в атоме предшествующего благородного газа.

<sup>26</sup> См. раздел 5. В. Герлах [10] полагает для  $Fe''$   $n=5$ , а не  $n=4$ , как это делаем мы.

<sup>27</sup> См. также заметку Ангерера и Иооса (Angerer и Joos) в «Naturwissenschaften» от 15.II 1924 г.

ляется в наличии двух различных систем спектральных линий. Так, например, атом Са может излучать как простые линии, так и триплеты, Сг — квинтеты и сектеты и т. д.

При первом же взгляде на диаграмму бросается в глаза проявляющаяся в ней строгая закономерность, которая свидетельствует о полном согласии результатов, полученных двумя совершенно независимыми методами (магнитометрический и спектроскопический).

Прежде всего обращает на себя внимание прямая, проходящая через начало координат под углом  $45^\circ$ ; вся она сплошь усажена совпадающими между собой точками. Магнитные моменты всех 15 атомов и ионов, лежащих на этой прямой, подчиняются следующему простому и убедительному правилу: число магнетонов в атоме равно числу его внешних (валентных) электронов. Потеря атомом электронов при ионизации ведет вместе с тем и к потере магнетонов. Пример: Мп имеет 7 электронов и 7 магнетонов ( $m = 7$ ), для Мп''  $m = 5$ , для Мп'''  $m = 4$ , наконец, для Мп''''  $m = 3$ . С особенной убедительностью подтверждается это правило совпадением числа магнетонов у ионов совершенно различного происхождения, но одинакового числа внешних электронов. Пример:  $m = 1$  для К, Са', Тi''' и V''''.

Перейдем теперь к следующей прямой, лежащей несколько ниже первой, на которой тоже располагается довольно много точек<sup>28</sup>. Число магнетонов в соответственных точках этих двух прямых отличается ровно на два. Примеры: для Са  $m = 2$  и  $m = 0$ , для Сг  $m = 6$  и  $m = 4$ , для Мп  $m = 7$  и  $m = 5$ .

Не пытаясь входить в детали внутреннего механизма, можно истолковать его следующим образом. Максимальное число магнетонов в атоме равно числу его внешних электронов и соответствует вращению всех этих электронов в одном и том же направлении. Если же один из электронов станет вращаться в обратном направлении, то его магнитное поле нейтрализует поле одного из прямых электронов и результирующий магнитный момент атома уменьшается на два. Пример: Са обладает двумя валентными электронами; при противоположном направлении вращения обоих электронов  $m = 2$ , при противоположном направлении вращения  $m = 0$ . Другой пример: у Fe'' 6 электронов, а  $m = 4$ ; стало быть, один из электронов вращается в обратном направлении. Этот обратный электрон, очевидно, наименее прочно связан с атомом и поэтому первым отрывается при дальнейшей ионизации. Таким образом, ионизация Fe'' ведет не к уменьшению, а к увеличению результирующего магнитного момента атома: у Fe'''  $m = 5$  (все 5 оставшихся электронов вращаются в одну сторону).

В атоме может быть, очевидно, не один, а несколько обратных электронов. Например у Ni'' общее число внешних электронов

<sup>28</sup> Прямая эта на диаграмме Зоммерфельда отсутствует, но излагаемые мною соображения развиты Зоммерфельдом в последних его статьях.

равно 8, а  $m = 2$ ; нужно думать, что у него три «обратных» электрона нейтрализовали три «прямых».

Во всяком случае, как ни относиться к этим попыткам наглядного истолкования, из рассмотренной диаграммы с несомненностью вытекает следующее положение: *число магнетонов в атоме может либо равняться числу его внешних электронов, либо быть меньше него на четное число единиц* (взаимно компенсирующиеся электроны выпадают попарно). Следствие — в атомах с четным числом электронов число магнетонов тоже четно, и наоборот.

Единственное исключение из этого правила ион  $\text{Co}''$ , обладающий 25 электронами и 4 магнетонами. Следует также отметить, что величина магнитного момента иона  $\text{Ni}''$  может быть приравнена к двум магнетонам лишь при известной натяжке (см. табл. 4).

За этими исключениями приведенное правило подтверждается не только на элементах группы железа, но и на всем вообще известном материале по магнетизму ионов и одноатомных газов. Мы можем упомянуть, например, диамагнетизм благородных газов, результат опыта Штерна и Герлаха над серебром, спектроскопические закон сдвига и закон перемен<sup>29</sup> (*Verschiebungssatz* und *Wechselsatz*) и т. д.

Резко выраженный парамагнетизм встречается только в определенных местах периодической системы элементов (триады 8-й группы и редкие земли); другими словами, только в этих местах встречаются максимально возможные числа магнетонов, равные числу внешних электронов атома. Вероятно, это находится в связи с тем обстоятельством, что именно в этих местах периодической системы происходит пополнение новыми электронами внутренних слоев атома. Вообще же говоря, внутреннее состояние атома устанавливается на минимально возможную для него величину магнитного момента (один магнетон в нечетных и нуль магнетонов в четных столбцах периодической системы).

Итак, если оставить в стороне вопрос о  $\text{Co}''$ , то все остальные опытные данные целиком укладываются в стройную схему Зоммерфельда, поражающую и подкупающую своей крайней простотой. И все-таки именно благодаря своей простоте схема эта представляется совершенно непонятной.

В самом деле, правило Зоммерфельда о числе магнетонов в атоме кажется таким убедительным потому, что оно невольно связывается с представлением о чрезвычайно простом внутриатомном механизме. Правило это, очевидно, следует понимать так, что в нормальном состоянии атома все его внешние электроны движутся по одноквантовым орбитам (одноквантовым в смысле азимутального числа орбиты  $n_1$ ), так что каждому электрону соответствует один магнетон. Кроме того, орбиты всех электронов

<sup>29</sup> Об этих законах см., например, у Зоммерфельда, «*Atomabau*», 3 Aufl., т. 6, § 6.

расположены в одной плоскости так, что геометрическое сложение магнитных моментов отдельных электронов заменяется арифметическим. Однако ни одно из этих предположений не выдерживает ни малейшей критики с точки зрения современных наших сведений о строении атома; наоборот, крайняя сложность орбит валентных электронов может считаться твердо установленной; плоскости этих орбит, во всяком случае, не параллельны; наконец, некоторые из валентных электронов движутся безусловно не по одноквантовым орбитам.

Тем не менее нельзя, однако, считать правило Зоммерфельда о числе магнетонов в атоме чисто мнемоническим правилом без всякого физического содержания. Крайняя простота и убедительность схемы Зоммерфельда и полное подтверждение ее опытом служат порукой тому, что в этой схеме нашла себе выражение некая новая существенная закономерность атомного строения. Понять эту квантовую, по существу своему дискретную закономерность мы не можем только потому, что в современном своем состоянии теория квантов покоится на внутренне противоречивом фундаменте. Разыскание закономерностей, подобных тем, которые рассматриваются Зоммерфельдом, и должно создать возможность подвести под теорию квантов некое новое и прочное обоснование.

## 8. Трудности квантовой теории магнетизма

Современная теория квантов несет на себе печать внутренней противоречивости; всякий успех ее порождает для нее новые трудности. Такова, в частности, судьба и теории магнетизма. Мы уже имели случай упоминать о теоретических затруднениях, возникших в связи с успехом опыта Штерна и Герлаха. Обратимся теперь к затруднениям другого рода.

Мы до сих пор обходили молчанием следующий факт. По общепринятой теперь модели гелия («скрещенная» модель Ланде) атом гелия должен обладать магнитным моментом, а стало быть, и парамагнитными свойствами. Между тем в действительности гелий отличается резко выраженным диамагнетизмом. Как выйти из этого противоречия? Для этого есть два пути. Во-первых, можно допустить, что в противность всем законам электродинамики атом гелия магнитным моментом все же не обладает; так, например, Бор высказывает мысль о возможности орбит электронов, «мертвых» в магнитном отношении (*magnetisch tot*). К этому в сущности сводится и формальная теория Зоммерфельда, приписывающая гелию внутреннее квантовое число  $j$ , равное нулю (момент вращения равен нулю).

С другой стороны, не отрицая наличности магнитного момента в атоме гелия, можно предположить, что в магнитном поле ось атома гелия устанавливается не по полю, а *перпендикулярно* полю (предположение это, конечно, тоже противоречит законам

электродинамики). На этой точке зрения стоит Ланде, к краткому рассмотрению теории которого мы теперь и перейдем (см. [11]).

В разделе 6 мы говорили о том, что из измеряемой спектроскопически величины магнитного расщепления уровней энергии атома

$$\Delta E = -mH \cos(\mathbf{m}, \mathbf{H}) \quad (11)$$

можно определить магнитный момент атома  $m$ . Однако решение этого уравнения не однозначно. Из опыта можно непосредственно найти только

$$m \cos(\mathbf{m}, \mathbf{H}) = -\Delta E/H,$$

способ же разложения произведения  $m \cos(\mathbf{m}, \mathbf{H})$  на множители остается произвольным; определить величину  $m$  можно только путем применения правил о квантовании ориентации. Как раз формулировкой этих правил теория Ланде и отличается от теории Зоммерфельда. Не входя в подробности, отметим только некоторые из конечных выводов теории Ланде.

По теории Ланде при пространственном квантовании ориентация оси по полю запрещена, так что ось атома всегда наклонена к направлению поля. Для атома гелия (для которого, по Ланде, внутреннее квантовое число  $j = 1/2$ ) оказывается возможным только одно-единственное положение, а именно перпендикулярное, что, таким образом, находится в полном согласии с диамагнетизмом этого газа<sup>30</sup>. Опыт Штерна и Герлаха толкуется Ланде следующим образом: атом серебра обладает не одним, а двумя магнетонами ( $j = 1$ ,  $g = 2$ ,  $m = gj = 2$ ); в магнитном поле ось атома устанавливается под углом  $60^\circ$ , так что  $\cos \varphi = \pm 1/2$ . Следовательно, проекция магнитного момента на направление поля оказывается равной

$$m \cos \varphi = 2 \cdot (\pm 1/2) = \pm 1,$$

что вполне согласуется с результатами опыта Штерна и Герлаха. Любопытно, что, таким образом, даже этот чрезвычайно простой опыт нуждается, по мнению одного из лучших знатоков этой области, в довольно сложном и малоубедительном толковании. Если по теории Ланде рассчитать, какое число  $k$  «кажущихся» вейссовских магнетонов соответствует одному, двум и т. д. боровским магнетонам, то получатся те же самые значения 8,7; 13,7 и т. д., как и по теории Паули—Зоммерфельда (табл. 5). Как мы видели, это предсказание обеих теорий хорошо подтверждается опытом. Единственная разница теорий в этом вопросе проверке

<sup>30</sup> Согласно устному сообщению П. С. Эренфеста, Оскар Клайн (O. Klein), вычисляя воздействие магнитного поля на атом водорода, пришел к выводу, что ось атома водорода всегда устанавливается перпендикулярно полю. Если вычисления Клайна окажутся правильными, то они явятся серьезным аргументом в пользу взглядов Ланде.



опытом не поддается; разница эта состоит в различном характере соответствия между числами  $k$  и  $n$  и легко усматривается из табл. 5.

Т а б л и ц а 5

Истинное число боровских магнетонов $n$	0	1	2	3	4
Кажущееся число вейссовских магнетонов $k$ , по Паули	0	8,7	13,7	18,7	23,7
Кажущееся число вейссовских магнетонов $k$ , по Ланде	0	0	8,7	13,7	18,7

Вообще нужно сказать, что, несмотря на разное истолкование опытных фактов, все они одинаково хорошо объясняются обеими теориями. Experimentum crucis между ними невозможен, ибо теории эти являются пока, в сущности, только весьма плодотворными *формальными* схемами, систематизирующими опытный материал.

По сравнению с теорией Ланде первоначальная теория Паули—Зоммерфельда отличалась большей простотой, однако впоследствии оказалось необходимым внести и в эту теорию некоторые усложняющие ее поправки.

Дело в том, что в разделе 3 при выводе формулы (3b) и при вычислении табл. 3 мы основывались на равенстве (в рациональных единицах)

$$m = j. \quad (6a)$$

Между тем в разделе 6 мы познакомились с необходимостью усложнить эту формулу введением фактора расщепления  $g$ :

$$m = gj. \quad (12)$$

Это усложнение ведет за собой необходимость соответствующего изменения формулы (3b), ибо квантованию ориентации подлежит вектор  $j$ , а не вектор  $m$ . Поясним это на примере.

Предположим, что  $m = 3$ ; тогда по первоначальной теории Паули также  $j = 3$  и для оси атома возможны шесть различных ориентаций, соответствующих

$$\cos \varphi = \pm 1, \quad \pm 2/3, \quad \pm 1/3.$$

Поэтому

$$\overline{\cos^2 \varphi} = 14/27 = 0,52.$$

При пользовании исправленной формулой нужно предварительно сделать определенное допущение относительно  $g$ . Если атом находится в нормальном  $S$ -состоянии, то, как мы уже знаем,  $g = 2$ ; поэтому при  $m = 3$   $j = 3/2$ . Стало быть, для оси атома возможны четыре различные ориентации, соответствующие

$$j_H = j \cos \varphi = \pm 3/2, \quad \pm 1/2, \text{ т. е. } \cos \varphi = \pm 1, \quad \pm 1/3,$$

ибо по правилу квантования проекция  $j_n$  должна либо равняться  $j$ , либо отличаться от него на целое число единиц<sup>31</sup>. Следовательно,

$$\overline{\cos^2 \varphi} = 5/9 = 0,56.$$

Таким образом, результаты исправленной и первоначальной теорий весьма близки между собой. Для более полного сравнения обеих теорий приводим табл. 6.

Сравнивая числа табл. 6 с экспериментальными данными, приведенными в табл. 2, легко заметить, что согласие теории с опытом не только не нарушается внесением в нее указанной поправки, но, пожалуй, даже улучшается.

В настоящее время внесение этой поправки в первоначальную теорию признается необходимым как Зоммерфельдом, так и самим Паули.

Таблица 6

Число боровских магнетонов $n$	1	2	3	4	5
Кажущееся число вейссовских магнетонов $k$ по первоначальной теории	8,7	13,7	18,7	23,7	28,7
То же, по исправленной теории (при $g = 2$ )	8,7	14,1	19,2	24,4	29,4

Таким образом, успех первоначальной теории объясняется лишь более или менее случайным обстоятельством: малым влиянием поправочного фактора  $g$  на окончательный результат вычисления.

Итак, квантовая теория магнетизма испытала судьбу всех квантовых (да и не только квантовых) теорий: первоначально простая мысль необычайно усложняется, загромождается обилием деталей и оговорок. Но еще несравненно серьезнее тот факт, что теория эта оказывается раздираемой *внутренними* противоречиями. Ведь вся квантовая теория атома, вычисление стационарных орбит, самое вычисление величины боровского магнетона покоятся на применении классической электродинамики к стационарным состояниям атома. Отказываясь от соотношения  $m = j$ , вводя совершенно непонятный, классически недопустимый фактор расщепления  $g$ , мы тем самым лишаем всю теорию всякого теоретического обоснования. Недостаток места не позволяет мне, к сожалению, остановиться на еще более серьезных парадоксах, по сравнению с которыми даже «аномалия фактора расщепления

<sup>31</sup> Современная теория, в отличие от первоначальной, допускает перпендикулярную полю установку ( $\cos 2 \varphi = 0$ ) в том случае, если  $j$  цело (см. примечание на стр. 264), что вполне согласуется с указанным в тексте правилом квантования.

g представляется лишь незначительным нарушением законов механики»<sup>32</sup> [17].

Как же отнестись к этой сложной и внутренне противоречивой теории? Полвека тому назад такая теория не могла бы себе найти ни признания, ни отклика. Но с тех пор многое переменилось. Тогда господствовала горделивая уверенность в том, что основные контуры физической картины мира известны, что остается только эту картину детализировать. Естественно, что главным критерием пригодности новой теории являлась тогда ее логическая стройность и простота. *Теперь* мы убедились, что законы, управляющие элементарными, внутриатомными процессами, нам еще совершенно неизвестны. Запутанность и противоречивость современных теорий — вспомним принцип соответствия Бора (Korrespondenzprinzip), вспомним приложение астрономической теории возмущений к вычислению орбит электронов — сложность этих теорий объясняется тем, что мы пытаемся истолковать атомные процессы микрокосма на основе чуждых ему «классических» законов макрокосма. К теориям этим нужно подходить прежде всего не с точки зрения внутренней стройности и законченности, ибо все равно эти теории обречены на снос, а главным образом с точки зрения их плодотворности в разыскании новых *простых* фактов и закономерностей, которые послужат фундаментом для *простой* и стройной теории будущего; я говорю «простой» потому, что убеждение в простоте законов природы всегда лежало в основе всей научной деятельности. С этой точки зрения квантовая теория атомного магнетизма, как мы видели, имеет в своем активе такие крупные завоевания, как опыт Штерна и Герлаха; простое толкование опытного магнитометрического материала; простая схема Зоммерфельда, связующая между собой химические и магнитные свойства элементов; наконец, не поддающаяся еще толкованию, но по сути чрезвычайно простая и стройная схема, охватывающая воедино три магнитных «аномалии» (кратность спектральных линий, эффект Зеемана, магнитомеханический эффект). Все эти завоевания являются неоспоримыми и непреходящими ценностями, которые не только оправдывают самое существование теории, но позволяют надеяться, что в ее основе лежит правильная идея и что дальнейшее ее развитие поведет к новым успехам и поможет созданию принципиально новой, стройной теории внутриатомных процессов.

---

<sup>32</sup> А. Ланде дал очень интересный обзор тех принципиальных трудностей, с которыми приходится встречаться в современной теории атомного магнетизма [18].

## ЛИТЕРАТУРА

Обзоры: а) *W. Gerlach*. Magnetismus und Atombau. — В сб. «*Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften*», Bd. II, 1923, S. 124.  
б) *A. Landé*. Fortschritte beim Zeemaneffekt. *Ibid.*, S. 147.

Статьи:

1. *P. Weiss*. *Phys. Z.*, 1911, **12**, 935; *Arch. Elektrotechnik*, 1913, **2**, 1.
2. *P. Cabrera*. *J. Phys.*, 1922, **3**, 413.
3. *A. Landé*. *Phys. Z.*, 1919, **20**, 228; *Verh. Deutsche Phys. Ges.*, 1919, **21**, 585.
4. *W. Pauli*. *Phys. Z.*, 1920, **21**, 615.
5. *O. Stern*. *Z. Phys.*, 1921, **7**, 249.
6. *W. Gerlach*, *O. Stern*. *Z. Phys.*, 1921, **8**, 110; 1922, **9**, 349, 353.
7. *A. Einstein*, *P. Ehrenfest*. *Z. Phys.*, 1922, **11**, 31.
8. *A. Sommerfeld*. *Ann. Phys.*, 1923, **70**, 32.
9. *P. Epstein*. *Science*, 1923, p. 532.
10. *W. Gerlach*. *Phys. Z.*, 1923, **24**, 275.
11. *A. Landé*. *Z. Phys.*, 1921, **5**, 231; 1923, **15**, 192; 1923, **19**, 112.
12. *A. Sommerfeld*. *Ann. Phys.*, 1920, **63**, 112; *Z. Phys.*, 1922, **8**, 257; *Ann. Phys.*, 1923, **70**, 132; 1924, H. 3/4.
13. *W. Heisenberg*. *Z. Phys.*, 1922, **8**, 273.
14. *A. Sommerfeld*. *Phys. Z.*, 1923, **24**, 360; *Ann. Phys.*, 1924, H. 3/4.
15. *A. Sommerfeld*. *Z. Phys.*, 1923, **19**, 221.
16. *H. Gieseler*, *W. Grotrian*. *Z. Phys.*, 1924, **22**, 245.
17. *A. Landé*. *Naturwissenschaften*, 1923, S. 725.
18. *A. Landé*. *Phys. Z.*, 1923, **24**, 441.

## НОВЫЕ ПРИНЦИПЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ БОЗЕ — ЭЙНШТЕЙНА В СВЯЗИ С ВОПРОСОМ О ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЕ МАТЕРИИ <sup>1</sup>

§ 1. Введение. § 2. Некоторые основные положения классической статистической механики. § 3. Критическое уточнение принципов статистической механики. § 4. Законы идеальных газов. § 5. Законы квантового, или светового, газа. § 6. Физический смысл теории Бозе—Эйнштейна. § 7. Интерференция молекул и теория де Бройля. § 8. Некоторые следствия интерференции молекул.

### § 1. Введение

Летом 1924 г. появились две работы индусского физика Бозе, вслед за которыми последовали работы Эйнштейна, существенно углубившие идеи Бозе и значительно расширившие область их применения. Работы эти вносят существенно новую струю в развитие термодинамики и статистической механики. Хотя выдвинутые Бозе и Эйнштейном новые принципы статистической механики находятся в настоящее время в процессе интенсивной разработки и далеко еще не приняли стройной, законченной формы, однако они привели уже к ряду важных результатов, которые, по всей вероятности, станут прочным достоянием теоретической физики. Главные из этих результатов сводятся к следующему:

1) вскрыт ряд противоречий, к которым приводит статистическая механика в ее прежней классической форме, и указан способ их устранения;

2) на основании новых принципов исчисления термодинамической вероятности внесены поправки в классические формулы кинетической теории газов и предсказан ряд новых явлений, могущих подвергнуться опытной проверке;

3) выяснена глубокая физическая связь между новыми принципами исчисления вероятностей и одной из интереснейших новых квантовых теорий — теорией де Бройля, обещающей пролить неожиданный свет на физическую природу материи;

4) впервые дан хотя и чисто формальный, но зато свободный от внутренних противоречий вывод знаменитой формулы Планка для спектра черного тела, являющейся краеугольным камнем всей квантовой теории.

В настоящей статье, не следуя исторической последовательности развития идей, мы постараемся вкратце очертить физи-

<sup>1</sup> УФН, 1926, 6, 112.

ческий смысл и основные выводы теории Бозе—Эйнштейна и вместе с тем постараемся показать, что необходимость устранить накопившиеся в классической физике противоречия почти неизбежно приводит к основным положениям новой теории.

## § 2. Некоторые основные положения классической статистической механики

Почти во всем дальнейшем изложении мы ограничимся рассмотрением идеального одноатомного газа, т. е. газа, состоящего из тождественных одноатомных молекул, между которыми отсутствуют силы сцепления или отталкивания, так что взаимодействие их ограничивается упругими соударениями. Состояние газа характеризуется заданием для каждой из его молекул трех координат положения ( $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$ ) и трех слагающих скорости ( $v_1 = v_x, v_2 = v_y, v_3 = v_z$ ). Вместо слагающих скорости удобно ввести слагающие  $p_\alpha = mv_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) импульса (или количества движения) молекулы, чем достигается значительное упрощение последующих вычислений<sup>2</sup>. Изложение теории чрезвычайно упрощается введением геометрической терминологии. Назовем фазовым пространством пространство шести измерений, оси которого соответствуют трем координатам положения молекулы  $q_\alpha$  и трем «координатам импульса»  $p_\alpha$ , так что положение и скорость каждой молекулы отображаются определенной точкой фазового пространства. Для краткости будем говорить, что молекула *находится* в данной точке фазового пространства, если ее координаты  $q_\alpha$  и  $p_\alpha$  совпадают с координатами этой точки.

Нам недоступно точное познание состояния газа, т. е. точное познание координат каждой молекулы в фазовом пространстве. Путем наблюдений мы можем определить только *макроскопическое* состояние газа, т. е. распределение его молекулы по отдельным участкам или *ячейкам* фазового пространства. Разобьем все фазовое пространство на отдельные параллелепипеды и будем говорить, что *макроскопическое* состояние газа вполне определено, если известно число молекул  $n_k$ , находящихся в каждой из ячеек фазового пространства ( $n_k$  есть число молекул в  $k$ -й ячейке).

Состояние газа было бы определено гораздо более точно, если нам было бы известно не только общее число  $n_k$  молекул, находящихся в каждой ячейке, но и то, какие именно молекулы газа находятся в данной ячейке. Если эти данные известны, т. е. если известно, в какой именно ячейке находится каждая из молекул газа, то мы будем говорить, что известно *микроскопическое* состояние газа. Стало быть, перемещение молекулы внутри занимаемой ею ячейки не меняет микроскопического состояния газа;

---

<sup>2</sup> Упрощение обуславливается равновероятностью равных объемов фазового пространства; см. примечание 5.

в дальнейшем мы перемещения эти будем считать несущественными<sup>3</sup>.

Каждое макроскопическое состояние газа, характеризуемое совокупностью чисел  $n_k$ , может быть осуществлено  $W$  существенно различными способами, где

$$W = \frac{N!}{\prod_k n_k!}, \quad (1)$$

а  $N = \sum_k n_k$  есть общее число всех молекул газа<sup>4</sup>. Действительно, макроскопическое состояние газа не изменится при осуществлении произвольной перестановки молекул одной на место другой. Число таких перестановок равно  $N!$ . Из числа этих перестановок нужно исключить все те перестановки, при которых обмениваются своими местами молекулы, находящиеся в одной и той же ячейке, ибо эти перестановки согласно нашему допущению несущественны. В результате приходим к формуле (1).

Формула эта играет основную роль в классической статистической механике, ибо она определяет собой термодинамическую *вероятность* данного макроскопического состояния газа: термодинамической вероятностью  $W$  состояния и называется именно числом существенно различных способов его осуществления. Необходимо, конечно, чтобы каждый из способов осуществления был равновероятен. Это требование будет удовлетворено, если мы раз навсегда условимся разбивать фазовое пространство на ячейки равного объема<sup>5</sup>.

Основная термодинамическая величина — энтропия  $S$  — связана с термодинамической вероятностью известным Больцмановским соотношением

$$S = k \lg W, \quad (2)$$

где  $k$  — универсальная постоянная Больцмана:

$$k = 1,372 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град.}$$

Физический смысл этого уравнения заключается в сведении второго принципа термодинамики, согласно которому физические процессы связаны с увеличением энтропии, к почти самоочевид-

<sup>3</sup> Обоснование этого допущения можно найти, например, у Эренфеста [3], § 12.

<sup>4</sup> Напомним, что  $\prod_k n_k!$  означает произведение всех членов типа  $n_k!$

для всех значений индекса  $k$ .

<sup>5</sup> Согласно известной теореме Лиувилля (о ней см., например, в [3]) ячейки равного объема могут считаться равновероятными только в том случае, если за координаты фазового пространства приняты слагающие импульса, а не слагающие скорости. В случае однородного идеального газа это различие несущественно, но уже для квантового газа (см. дальше) оно имеет коренное значение.

ному утверждению, что в громадном большинстве случаев физические процессы связаны с переходом тел от менее вероятных к более вероятным состояниям.

### § 3. Критическое уточнение принципов статистической механики

Уравнения (1) и (2) служат основанием всей классической статистической теории идеального газа; однако, как выяснилось в последнее время, они нуждаются в существенных дополнениях и изменениях.

Прежде всего, вводя понятие фазовой ячейки, мы оставили открытым вопрос о ее размерах <sup>6</sup>, потребовав только, чтобы все ячейки были равновелики. Между тем изменение величины ячеек ведет за собой изменение чисел  $n_k$ , а стало быть, и вероятности  $W$  и энтропии  $S$  газа. Чтобы придать энтропии вполне определенное значение, необходимо, стало быть, точно фиксировать величину ячеек. Классическая теория не могла решить этой задачи и нашла выход из затруднения в том обстоятельстве, что если объем ячеек не превышает известного максимального предела, то дальнейшее дробление ячеек ведет только к изменению *аддитивной постоянной* в выражении энтропии <sup>7</sup>. Поскольку классическая термодинамика рассматривает лишь *изменения* величины энтропии при физических процессах и абсолютную величину энтропии считает определенной лишь до некоторой аддитивной постоянной, постольку классическая статистическая механика могла ограничиться требованием, чтобы при исчислении термодинамической вероятности размер ячеек не превышал упомянутого предела. Однако развитие термодинамики в начале нынешнего столетия и, в частности, установление знаменитого постулата Нернста, гласящего, что при абсолютном нуле температуры энтропия всякого однородного тела <sup>8</sup> равна нулю, привело к необходимости фиксировать абсолютное значение энтропии, а стало быть, и размеры фазовых ячеек. Это было осуществлено путем перенесения в теорию идеального газа некоторых положений, к которым пришла квантовая теория при рассмотрении со-

<sup>6</sup> Мы не затрагиваем вопроса о форме и расположении ячеек, так как, представляя большой принципиальный интерес, он не влияет на ход последующих рассуждений.

<sup>7</sup> Доказательство см., например, у Хвольсона. «Курс физики», 2-е изд., т. V, стр. 631.

<sup>8</sup> Постулат этот относится, в сущности, лишь к конденсированным, т. е. не газообразным, телам, ибо газообразные тела при абсолютном нуле существовать не могут. Из справедливости этого постулата вытекает, однако, требование, чтобы выражение энтропии *идеального* газа тоже сводилось к нулю при температуре, равной нулю, ибо хотя при  $T=0$  идеальный газ и конденсируется, однако к нему, очевидно, остаются применимыми все статистические рассуждения, справедливые при температуре, большей нуля, а стало быть, остается применимым и полученное путем этих рассуждений выражение для энтропии.



вокупностей периодических систем. В настоящее время может считаться общепринятым следующий постулат квантовой теории: фазовое пространство идеального газа (как и всякого другого тела) имеет дискретное, а не непрерывное строение и распадается на ряд элементарных ячеек. Понятие элементарной ячейки имеет реальное физическое значение и вовсе не является условным термином, введенным лишь для удобства вычислений, как это представлялось с точки зрения классической теории. В случае идеального газа объем этих ячеек равен  $h^3$ , где  $h$  — универсальная постоянная Планка.

Фиксировав, таким образом, размеры ячеек, мы, однако, не устранили еще всех недостатков того определения термодинамической вероятности, которое заключается в формуле (1). Дело в том, что из уравнений (1) и (2) вытекает физически недопустимое следствие, что при достаточно высокой температуре энтропия газа в его равновесном состоянии достигает постоянной величины и затем уже не меняется при дальнейшем повышении температуры. Действительно, при повышении температуры газа, т. е. при повышении энергии, а стало быть, и импульса его молекул, увеличивается объем той области фазового пространства, по которой распределяются его молекулы. При достаточно большой температуре число ячеек в этой области становится столь большим, что в равновесном, т. е. наиболее вероятном, состоянии газа на каждую из этих ячеек приходится не больше одной молекулы. Таким образом, число молекул в каждой ячейке становится равным либо нулю, либо единице, и, стало быть, по формуле (1)  $W$  принимает постоянное значение  $^9 W = N!$

Чтобы устранить это затруднение, необходимо видоизменить самое определение термодинамической вероятности, заключающееся в формуле (1) <sup>10</sup>. При выводе этой формулы мы исходили из того, что макроскопическое состояние газа определяется распределением его молекул по элементарным ячейкам, т. е. заданием чисел  $n_k$ . Очевидно, что мы слишком точно фиксировали состояние газа. Действительно, наблюдению недоступно исследование распределения молекул по отдельным ячейкам; опытным путем распределение молекул по фазовому пространству может быть определено лишь в гораздо более грубых и приближенных пределах. Разобьем же фазовое пространство на *участки*, в каждом из которых заключается большое число элементарных ячеек объема  $h^3$ . Пусть  $Z_i$  — число ячеек в  $i$ -м участке, границы которого определяются пределами координат: от  $q_{ai}$  до  $q_{ai} + \Delta q_{ai}$  и от  $p_{ai}$  до  $p_{ai} + \Delta p_{ai}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ); объемы различных участков могут быть неодинаковыми. Отныне будем считать состояние газа макроскопически определенным в том случае, если известно распределение его

<sup>9</sup> Факториал нуля  $0!$  принимается равным единице, как это следует из вывода формулы (1).

<sup>10</sup> Указание литературы по этому вопросу см. у Шредингера [4].

молекул по участкам (а не ячейкам) фазового пространства, т. е. если для каждого участка известно число  $N_i$  находящихся в нем молекул (прописное  $N_i$  относится к распределению по участкам, строчное  $n_k$  — к распределению по ячейкам). Тогда термодинамическая вероятность макроскопически определенного состояния газа выразится формулой [2]

$$W = \frac{N! \prod_i (Z_i^{N_i})}{\prod_i N_i!}, \quad (3)$$

которая должна заменить собой формулу (1). Действительно, формула (3) определяет собой число возможных способов осуществления макроскопического состояния газа, т. е. число микроскопических состояний, соответствующих данному распределению молекул по фазовым участкам, ибо  $N_i$  молекул могут быть распределены по отдельным участкам  $\frac{N_i}{\prod_i (N_i!)}$  различными способами;

кроме того, каждая из  $N_i$  попавших в данный участок молекул может находиться в любой из  $Z_i$  заключающихся в нем ячеек, т. е. может занимать в нем  $Z_i$  существенно различных положений.

Так как в формулу (3) входит ряд множителей типа  $Z_i^{N_i}$  и так как размеры участков, в отличие от размеров элементарных ячеек, произвольны, то к этой формуле неприменимо возражение, выдвинутое против уравнения (1).

На первый взгляд может показаться, что, заменив уравнение (1) уравнением (3), нам придется внести изменения и во все те положения и выводы, к которым, исходя из формулы (3), пришла классическая статистическая механика и которые, как известно, вполне согласуются с фактами. Это, однако, не так: прежние результаты остаются в силе, устраняется лишь ошибочное предположение, применявшееся при выводе их из уравнения (1). Дело в том, что при выводе законов идеальных газов из формулы (1) всегда делалось далеко не всегда справедливое предположение<sup>11</sup>, что числа  $n_k$  столь велики, что факториал их может быть с достаточной точностью выражен приближенной формулой Стирлинга:

$$n_k! = \left(\frac{n_k}{e}\right)^{n_k}, \quad \lg n_k = n_k \lg n_k - n_k. \quad (4)$$

Можно показать, что если это предположение верно, то формула (1) сводится к формуле (3)<sup>12</sup>. Таким образом, при выводе законов

<sup>11</sup> Так, например, при высоких температурах, как мы видели,  $n_k$  равны либо 0, либо 1.

<sup>12</sup> Пусть  $i$ -й участок включает в себе  $Z_i$  ячеек с номерами от  $k=r$  до  $k=r+Z_i-1$ , или, что практически то же самое, до  $k=r+Z_i$ , причем в каждой из этих ячеек находится по  $N_i/Z_i$  молекул. Соответствующие члены фор

идеальных газов формула (1) путем введения необоснованного допущения всегда незаметно подменялась формулой (3); ошибочный ход рассуждений исправлял недостатки ошибочной исходной формулы.

Однако у обеих формул для  $W$  — (1) и (3) — есть еще один чрезвычайно существенный общий недостаток: обе они противоречат постулату об аддитивности энтропии. Представим себе, что к данному объему газа мы присоединяем совершенно тождественный второй объем того же газа равной температуры, равного числа молекул, с одинаковым равновесным распределением их по фазовому пространству и т. д., а стало быть, и равной энтропии. Объединяя оба эти объема газа в один (удаляя, например, разделяющую их перегородку), мы получим удвоенный объем газа, обладающий, согласно основным законам термодинамики, удвоенным значением энтропии. Между тем из уравнения (3) и уравнения (2) следует, что

$$S = k \left\{ \lg N! + \sum_i \lg \left( \frac{Z_i^{N_i}}{N_i!} \right) \right\},$$

где сумма распространена по всем участкам фазовой области. Удваивая объем газа, мы действительно удваиваем значение этой суммы, ибо при этом к каждому члену суммы присоединяется равный ему добавочный член, относящийся к соответственно расположенному фазовому участку присоединяемого объема. Однако первый член правой части приведенного выражения вовсе не удваивается при удвоении объема, ибо при удвоении числа молекул  $\lg N!$  возрастает больше, чем вдвое. Стало быть, определение энтропии, заключающееся в уравнениях (2) и (3), противоречит постулату об аддитивности энтропии. Замена уравнения (3) формулой (1) этого противоречия не устраняет.

В последние годы возникла целая литература, посвященная вопросу о путях к устранению этого противоречия (Сакур, Планк, Тетроде, Нордгейм, Эренфест и Тркал, Шредингер и др.; краткий обзор литературы см. в работах последних двух авторов [5] и [4]). По существу дело сводится к тому, чтобы устранить из приведенного выражения энтропии первый член, равный  $k \lg N!$ , т. е. устранить из выражения вероятности  $W$  сомножитель  $N!$ , и найти обоснование этому устранению<sup>13</sup>.

Мулы (1) могут быть с помощью уравнения (4) представлены в следующем виде:

$$\prod_{k=r}^{k=r+Z_i} (n_k!) = \frac{1}{\left( \frac{N_i}{Z_i} \right)^{Z_i}} = \frac{1}{\left( \frac{N_i}{eZ_i} \right)^{N_i}} = \frac{Z_i^{N_i}}{\left( \frac{N_i}{e} \right)^{N_i}} = \frac{Z_i^{N_i}}{N_i!},$$

что совпадает с соответствующим членом формулы (3).

<sup>13</sup> Устранение сомножителя  $N$  необходимо также потому, что лишь при этом условии энтропия насыщенного газа при низких температурах  $T$  (при

Часть упомянутых авторов мотивирует устранение сомножителя  $N!$  просто необходимостью устранить отмеченные противоречия, и мы здесь не станем касаться их работ; другие же исследователи, и в частности Планк [6], пытаются дать этому шагу статистическое обоснование. Сущность рассуждений Планка может быть изложена следующим образом. Все молекулы идеального газа совершенно тождественны и неотличимы друг от друга. Между тем при выводе формул (1) и (3) мы считали, что при перестановке двух молекул друг на место друга микроскопическое состояние газа, вообще говоря, изменяется. Планк предлагает отказаться от индивидуализации молекул и считать, что перестановка тождественных молекул никакого значения не играет; оказывается, что этим путем можно устранить указанные противоречия с постулатами термодинамики. При этом, однако, Планк по некоторым принципиальным соображениям отказывается от того метода статистической механики, которым мы пользовались во всем предыдущем, и прибегает к рассмотрению воображаемой совокупности тождественных объемов газа (метод Гиббса).

Мы, однако, не пойдем за Планком по этому пути<sup>14</sup>, а, оставаясь на почве нашего способа расчета термодинамической вероятности, покажем, что последовательное применение идеи Планка об отказе от индивидуализации молекул с неизбежностью приводит к теории Бозе—Эйнштейна [4].

Как видоизменяется формулы (1) и (3), если мы откажемся от индивидуализации молекул? Может показаться, что так как в этом случае перестановка молекул друг на место друга не должна считаться меняющей состояние газа, то подсчитанную нами ранее величину вероятности  $W$  нужно будет просто разделить на число возможных перестановок  $N$  молекул, т. е. на  $N!$ , что устранило бы противоречия с постулатами термодинамики. Дело, однако, обстоит не совсем так просто, что явствует хотя бы из следующих соображений, которые мы для простоты применим к формуле (1); сущность этих соображений в несколько измененной форме применима и к формуле (3). Заменим, как это предлагают некоторые из вышеупомянутых авторов, формулу (1)

$$W = \frac{N!}{\prod_k n_k!} \quad (1)$$

формулой

$$W = \frac{1}{\prod_k n_k!}, \quad (1a)$$

получающейся из (1) делением на  $N!$ . По определению, термодинамическая вероятность  $W$  есть число возможных способов осу-

которых можно пренебречь теплоемкостью конденсата) становится равной  $r/T$ , как того требует термодинамика ( $r$  — удельная теплота испарения) [4].  
<sup>14</sup> Критика теории Планка у Шредингера [4].

щественности данного состояния газа, т. е. есть число целое и не меньшее единицы, тогда как формула (1а) дает для  $W$  дробное выражение! Противоречие это объясняется тем, что, отказываясь от индивидуализации молекул, мы разделили число возможных способов осуществления данного состояния  $W$  на общее число возможных перестановок молекул  $N!$ , забывая, что при выводе выражения для  $W$  уже были исключены те перестановки молекул друг на место друга, которые по нашей прежней терминологии не создают существенно нового распределения. Число таких перестановок, сводящихся к перестановке молекул, находящихся в одной и той же ячейке, равно  $\prod_k n_k!$ . Стало быть, при отказе от

индивидуализации молекул выражение (1) должно быть разделено не на  $N!$ , а на  $\frac{N!}{\prod_k n_k!}$ , что приводит к равенству  $W = 1$ . Дей-

ствительно, если не индивидуализировать молекул, то очевидно, что состояние, определенное заданием числа молекул  $n_k$  в каждой из фазовых ячеек, может быть осуществлено только одним-единственным образом.

Конечно, и в том случае, если исходить из выражения для  $W$ , даваемого уравнением (3), а не (1), тоже нельзя при отказе от индивидуализации молекул делить это выражение просто на  $N!$ . В этом случае проще, однако, не вносить необходимых изменений в уравнение (3), а заново произвести подсчет термодинамической вероятности  $W$ , как это делает Эйнштейн [2].

Итак, откажемся от индивидуализации молекул и соответственно этому, в отличие от прежнего, будем считать, что *микроскопическое* состояние газа вполне определяется заданием для каждой ячейки общего числа находящихся в ней молекул  $n_k$ , вне зависимости от того, какие именно молекулы в ней находятся. *Макроскопическое* же состояние газа, как и при выводе формулы (3), будет определяться заданием для каждого фазового участка числа находящихся в нем молекул  $N_i$ . Термодинамическая вероятность  $W$  макроскопического состояния равна числу соответствующих ему микроскопических состояний, т. е. числу таких способов размещения  $N$  тождественных молекул по ячейкам фазового пространства, при котором на каждый фазовый участок  $i$ , т. е. на каждую группу  $Z_i$  ячеек, приходится заданное число молекул  $N_i$ . Число возможных размещений  $N_i$  тождественных молекул по  $Z_i$  ячейкам, как известно, равно <sup>15</sup>  $\frac{(N_i + Z_i - 1)!}{N_i! (Z_i - 1)!}$ . Осуществляя все-

<sup>15</sup> *Доказательство.* Расположим в произвольном порядке в один ряд  $Z_i$  коробочек (соответствующих ячейкам) и  $N_i$  шариков (соответствующих молекулам). Число молекул в фазовой ячейке номер  $n$  будем считать равным числу шариков, следующих непосредственно вправо за  $n$ -й от начала ряда коробочкой. Осуществляя всевозможные перестановки коробочек и шариков, получим все возможные размещения молекул по фазовым ячейкам. При этом нужно следить за тем, чтобы слева ряд всегда начинался коробоч-

возможные размещения молекул в каждом из фазовых участков, мы получим общее число возможных размещений. Стало быть,

$$W = \prod_i \frac{(N_i + Z_i - 1)!}{N_i! (Z_i - 1)!}. \quad (5)$$

Это и есть искомая формула Бозе—Эйнштейна, лежащая в основе новой статистической механики и, по-видимому, свободная от всех внутренних противоречий<sup>16</sup>.

Итак, с чисто формальной стороны новая статистика Бозе—Эйнштейна характеризуется отказом от индивидуализации молекул, к которому неизбежно приводит необходимость устранения ряда накопившихся в статистической механике противоречий. Однако это только чисто формальная сторона дела. Как мы увидим в § 6, новая статистика имеет глубокий физический смысл и принятие формулы (5) влечет за собой необходимость коренного пересмотра основных воззрений на природу материи.

В заключение отметим, что не только классические методы исчисления статистической вероятности, но и некоторые положения самой термодинамики требуют пересмотра и исправления. Так, например, энтропия грамм-молекулы идеального газа согласно классической термодинамике выражается следующим образом:

$$S = c_v \lg T + R \lg v + \text{const.}$$

Принципиально всегда возможно сделать удельный объем  $v$  газа столь малым, чтобы  $S$  приняло отрицательное значение. Между тем согласно уравнению Больцмана (2) энтропия есть величина существенно положительная, ибо, по определению,  $W$  не может быть меньше единицы. Очевидно, что законы классической термодинамики идеальных газов, как и термодинамики излучения, справедливы лишь при больших  $T$  и  $v$ , при низких же температурах и больших плотностях они нуждаются в существенных изменениях.

#### § 4. Законы идеальных газов

Исходя из формулы Бозе—Эйнштейна (5) и из определения энтропии (2), можно вывести новые законы идеальных газов совершенно таким же путем, как это делается в классической теории. С этой целью нужно прежде всего определить, каково

---

кой, ибо если слева стоит шарик, то это значит, что он ни в одну из коробочек не попал. Итак, мы должны осуществить все возможные перемещения  $N_i + Z_i - 1$  элементов (крайняя левая коробочка остается на месте), делящихся на две группы тождественных между собой элементов из  $N_i$  и  $Z_i - 1$  экземпляров. Число таких перестановок равно приведенному в тексте выражению.

<sup>16</sup> Она впервые была применена С. Бозе [1] для случая квантового (светового) газа (см. дальше), затем А. Эйнштейн [2] перенес ее и в теорию материальных газов.

будет в равновесном состоянии газа распределение его молекул по участкам фазового пространства.

Ясно, что в равновесном состоянии молекулы газа будут равномерно распределены по занимаемому им объему и что все направления скорости молекул будут равновероятны. Поэтому наша задача сведется к определению распределения молекул по энергии. До сих пор форма и размер введенных нами в рассмотрение участков фазового пространства оставались неопределенными, и задача наша может быть облегчена надлежащим выбором участков. Объем  $\Omega$  каждого шестимерного фазового участка

$$\Omega = \iiint \iiint dx dy dz dp_x dp_y dp_z$$

зависит от пределов интегрирования, т. е. от положения границ участка. Условимся выбирать границы участков так, чтобы точки соответствовали всем тем состояниям молекул, кинетическая энергия  $\epsilon$  которых лежит в определенных пределах от  $\epsilon$  до  $\epsilon + \Delta\epsilon$ . Соответственно этому в состав каждого участка мы включим весь занимаемый газом объем  $V$ , так что выражение для  $\Omega$  примет вид

$$\Omega = V \iiint dp_x dp_y dp_z.$$

Переходя к определению протяженности фазовых участков по осям импульса  $p_x$ ,  $p_y$  и  $p_z$ , заметим, что молекулы, обладающие одинаковой энергией  $\epsilon_i$ , обладают также и одинаковым по численной величине импульсом  $p_i$ ; стало быть, отображающие их точки фазового пространства лежат на поверхности шара, проведенного из начала координат радиусом  $p_i$  ( $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ ). Молекулы, энергия которых лежит в пределах от  $\epsilon_i$  до  $\epsilon_i + \Delta\epsilon_i$ , отображаются фазовыми точками, лежащими между двумя концентрическими шаровыми поверхностями радиуса  $p_i$  и  $p_i + \Delta p_i$ . Объем этого шарового слоя равен  $4\pi p_i^2 \Delta p_i$ .

Итак, объем шестимерного фазового участка, включающего в себя все точки, соответствующие состояниям молекул с энергией от  $\epsilon_i$  до  $\epsilon_i + \Delta\epsilon_i$  (или импульсом от  $p_i$  до  $p_i + \Delta p_i$ ), равен

$$\Omega_i = V \iiint dp_x dp_y dp_z = V \cdot 4\pi p_i^2 \Delta p_i.$$

Так как объем каждой элементарной фазовой ячейки равен  $h^3$ , то, стало быть, в этом фазовом участке заключается  $Z_i$  ячеек, причем

$$Z_i = \frac{\Omega_i}{h^3} = \frac{4\pi V p_i^2 \Delta p_i}{h^3}. \quad (6)$$

Так как  $p = mv$ , а  $\epsilon = mv^2/2$ , где  $m$  — масса, а  $v$  — скорость молекулы, то

$$p^2 = 2m\epsilon \quad \text{и} \quad p \Delta p = m \Delta \epsilon. \quad (7)$$

Внося это в уравнение (6), получим окончательно

$$Z_i = \frac{4\pi V \sqrt{2m^3 \varepsilon_i}}{h^3} \Delta \varepsilon_i. \quad (8)$$

Таким образом, фазовое пространство разбито нами на участки так, что в каждом  $i$ -м участке, заключающем в себе  $Z_i$  ячеек, лежат все фазовые точки, соответствующие значениям энергии от  $\varepsilon_i$  до  $\varepsilon_i + \Delta \varepsilon_i$ . Поставим теперь себе задачу определить число молекул  $N_i$ , находящихся в этом участке (т. е. обладающих энергией  $\varepsilon_i$ ) при установившемся термодинамическом равновесии газа. Равновесное состояние есть состояние наиболее вероятное и, стало быть, соответствует максимальному значению вероятности  $W$ , или, что то же самое, энтропии  $S$ .

Из уравнений (2) и (5) получим

$$S = k \sum_i \{ \lg(N_i + Z_i - 1)! - \lg N_i! - \lg(Z_i - 1)! \}.$$

Ввиду того, что  $N_i \gg 1$  и  $Z_i \gg 1$ , можем заменить  $Z_i - 1$  на  $Z_i$  и применить формулу Стирлинга (4), в результате чего получим

$$S = k \sum_i \{ (N_i + Z_i) \lg(N_i + Z_i) - N_i \lg N_i - Z_i \lg Z_i \}. \quad (9)$$

Определяя значения чисел  $N_i$ , соответствующих максимуму энтропии  $S$ , нужно помнить, что общее число молекул

$$N = \sum_i N_i \quad (10)$$

и общая энергия газа

$$E = \sum_i \varepsilon_i N_i \quad (11)$$

суть величины заданные. Как известно, при наложении условий (10) и (11) максимум  $S$  определяется уравнением

$$\frac{1}{k} \delta S - \alpha \delta N - \beta \delta E = 0, \quad (12)$$

где  $\delta$  — знак вариации, а  $\alpha$  и  $\beta$  суть постоянные лагранжевы множители, значения которых определяются в дальнейшем ходе вычислений<sup>17</sup>.

Варьируя уравнения (9), (10) и (11), получим

$$\delta S = k \sum_i \{ \lg(N_i + Z_i) - \lg N_i \} \delta N_i = k \sum_i \lg \left( \frac{N_i + Z_i}{N_i} \right) \delta N_i,$$

$$\delta N = \sum_i \delta N_i \quad \text{и} \quad \delta E = \sum_i \varepsilon_i \delta N_i.$$

<sup>17</sup> Постоянный коэффициент  $1/k$  перед  $\delta S$  введен нами в уравнение (21) для удобства вычислений.



Вставляя эти значения в уравнение (12), получим

$$\sum_i \left\{ \lg \left( \frac{N_i + Z_i}{N_i} \right) - \alpha - \beta \varepsilon_i \right\} \delta N_i = 0,$$

или, приравнявая нулю коэффициенты при  $\delta N_i$ ,

$$\lg \left( \frac{N_i + Z_i}{N_i} \right) = \alpha + \beta \varepsilon_i,$$

откуда

$$N_i = \frac{Z_i}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} - 1}. \quad (13)$$

Чтобы определить значение постоянной  $\beta$ , вставим (13) в уравнение (9)

$$\begin{aligned} S &= k \sum_i \left\{ N_i \lg \left( \frac{N_i + Z_i}{N_i} \right) + Z_i \lg \left( \frac{N_i + Z_i}{Z_i} \right) \right\} = \\ &= k \sum_i \left\{ N_i (\alpha + \beta \varepsilon_i) - Z_i \lg (1 - e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i}) \right\} = \\ &= k \left\{ \alpha N + \beta E - \sum_{i=1} Z_i \lg (1 - e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i}) \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

и воспользуемся известным термодинамическим соотношением, определяющим собой понятие абсолютной температуры  $T$ ,

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V=\text{const}},$$

которое в данном случае принимает вид

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} + \frac{\partial S}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial E} + \frac{\partial S}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial E}.$$

Легко показать на основании уравнений (10), (11) и (14), что

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0$$

и что, таким образом,

$$1/T = k\beta$$

или

$$\beta = 1/kT. \quad (15)$$

Что же касается значения постоянной  $\alpha$ , то она является функцией от  $T$ ,  $N$  и  $V$  (посредством  $Z_i$ ; см. уравнение (8)) и определяется уравнением (10) по вставлении в него уравнений (13) и (15):

$$N = \sum_i \frac{Z_i}{e^{\alpha + \frac{\varepsilon_i}{kT}} - 1}. \quad (16)$$

Наконец, общая энергия газа в зависимости от температуры, объема и числа молекул определяется уравнением (11) по

вставлении в него уравнений (13) и (15):

$$E = \sum_i \frac{\varepsilon_i Z_i}{e^{\alpha + \frac{\varepsilon_i}{kT}} - 1}. \quad (17)$$

Выведенная нами система уравнений (14), (17) и (18), к которой мы присоединим еще формулу, определяющую давление газа<sup>18</sup>,

$$p = \frac{2}{3} \frac{E}{V}, \quad (18)$$

вполне достаточна для изучения всех макроскопических свойств газа, находящегося в термодинамическом равновесии. Как легко заметить, уравнения эти по своей форме существенно отличны от соответствующих уравнений классической теории<sup>19</sup>. Однако в *количественном* отношении они в большинстве случаев приводят к результатам, лишь чрезвычайно незначительно отличающимся от привычных законов идеальных газов. В этом отношении можно провести известную аналогию между новой статистикой и теорией относительности: обе теории в методологическом и принципиальном отношениях знаменуют собой существенный прогресс, устраняя ряд накопившихся в классической физике внутренних противоречий и неувязок, между тем как в количественном отношении изменения, вносимые ими в классические законы, сводятся в большинстве случаев к незначительным поправкам.

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, запишем уравнение (16) в следующей форме:

$$N = \sum_i \frac{Z_i e^{-\alpha - (\varepsilon_i/kT)}}{1 - e^{-\alpha - (\varepsilon_i/kT)}}. \quad (19)$$

<sup>18</sup> Для вывода этого уравнения исходим из термодинамического определения давления

$$p = T (\partial S / \partial V)_{E=\text{const.}}$$

Дифференцируя уравнение (14) по  $V$ , убедимся, что коэффициенты при  $\partial z_i / \partial V$  и  $\partial p / \partial V$

тождественно обращаются в нуль и что, таким образом,

$$\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_E = -k \sum_i \frac{\partial Z_i}{\partial V} \lg (1 - e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i}) = -\frac{k}{V} \sum_i Z_i \lg (1 - e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i}).$$

Заменяя суммирование по  $i$  интегрированием по  $\varepsilon$  и выполняя интегрирование по частям, убедимся, что

$$\sum_i Z_i \lg (1 - e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i}) = -\frac{2}{3} \frac{E}{kT}.$$

<sup>18</sup> Из приведенных уравнений непосредственно вытекает формула (18).

<sup>19</sup> Кроме уравнения (18), вполне совпадающего с соответствующим уравнением классической теории.

$e^{-\epsilon}$  должно быть меньше единицы, ибо в противном случае, как явствует из уравнения (13), число молекул в первом фазовом участке с энергией  $\epsilon_i=0$  оказалось бы числом отрицательным<sup>20</sup>. Введем обозначение  $\lambda=e^{-\alpha}$  и вместе с Эйнштейном назовем  $\lambda$  «мерой вырождения газа»; смысл этого термина выяснится в дальнейшем. Так как  $\lambda < 1$ , то уравнение (19) может быть разложено в ряд по степеням  $\lambda$ :

$$N = \sum_i \lambda Z_i e^{-\epsilon_i/kT} (1 + \lambda e^{-\epsilon_i/kT} + \dots). \quad (20)$$

Приняв во внимание уравнение (8), убедимся, что при малых  $\lambda$ , при которых можно ограничиться первым членом разложения, распределение молекул по энергии (или по скоростям) соответствует обычному экспоненциальному закону Максвелла.

Ограничиваясь в уравнении (20) первым членом разложения и заменяя суммирование по  $i$  интегрированием по  $\epsilon$ , получим

$$\lambda = \frac{N}{V} \left( \frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2}. \quad (21)$$

Выражая отношение  $N/V$  через молекулярную концентрацию  $\eta$  ( $\eta$  есть число грамм-молекул в 1 см<sup>3</sup>) и массу молекулы  $m$  через молекулярный вес газа  $M$  ( $M=N_0 m$ , где  $N_0$  — постоянная Авогадро) и вставляя в уравнение (21) числовые значения универсальных постоянных, получим

$$\lambda = 3,16 \cdot 10^3 \frac{\eta}{(MT)^{3/2}}. \quad (21a)$$

При атмосферном давлении и  $T=273^\circ \text{K}$

$$\eta = 1/22,4 \cdot 10^3;$$

при этих условиях для наиболее легкого газа — водорода ( $M=2$ ) получим  $\lambda=1,1 \cdot 10^{-5}$ ; для более тяжелых газов  $\lambda$  будет еще меньше, так что действительно при нормальных условиях  $\lambda \ll 1$ .

Аналогичным путем, ограничиваясь первыми членами разложения в ряд, можно получить формулу, представляющую собой видоизмененный закон Клапейрона,

$$p = \eta kT (1 - 0,1768\lambda) \quad (22)$$

и выражение для средней энергии молекулы

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT (1 - 0,1768\lambda). \quad (23)$$

<sup>20</sup> Собственно говоря, возможен также и предельный случай  $\lambda=1$ , по терминологии Эйнштейна соответствующий состоянию «насыщения» идеального газа. Случай этот имеет большой принципиальный интерес; он подробно исследован Эйнштейном [2], указавшим, между прочим, на возможность приложения теории насыщенного идеального газа к электронной теории металлов. Для краткости, однако, мы этого предельного случая рассматривать не будем.

Как явствует из приведенных формул <sup>21</sup>, поправки, вводимые новой теорией в законы идеальных газов, действительно, при нормальных условиях исчезающе малы; влияние «вырождения», характеризуемого параметром  $\lambda$ , достигает сколько-нибудь значительной величины лишь для легких газов при низких температурах и больших давлениях. Так, например, для гелия в критической точке величина  $\lambda$  достигает порядка одной десятой; однако в этой критической области гелий не может уже почитаться идеальным газом и влияние вырождения маскируется более значительным влиянием молекулярных сил сцепления.

## § 5. Законы квантового, или светового, газа

При рассмотрении формулы для энергии идеального газа (17), к которой приводит новая теория, бросается в глаза сходство ее с известной формулой Планка, определяющей распределение энергии в спектре «черного излучения», т. е. в спектре излучения, находящегося в термодинамическом равновесии. Сходство это не случайно, и изложенная в предыдущем параграфе теория идеальных газов, как оказывается, может быть непосредственно перенесена в теорию излучения.

Действительно, с точки зрения теории световых квантов пространство, заполненное лучистой энергией, должно рассматриваться как пространство, заполненное «атомами света», или световыми квантами, беспорядочно движущимися по всем направлениям со скоростью света  $c$ . Каждый световой «атом», или квант, представляет собой локализованную в чрезвычайно малом объеме порцию энергии  $\varepsilon$ , причем каждому кванту соответствует световая волна с частотой колебаний  $\nu$ , определяемой известным соотношением

$$\varepsilon = h\nu, \quad (24)$$

где  $h$  — постоянная Планка. Таким образом, излучение может рассматриваться как «квантовый», или «световой», газ, к которому можно попытаться применить законы идеальных газов. Рассмотрим же, какие видоизменения необходимо внести с этой целью в формулу предыдущего параграфа.

Формула (6) применима, очевидно, и к световому газу с одним лишь видоизменением: в то время как состояние молекулы идеального материального газа вполне определяется заданием трех координат положения и трех слагающих импульса, световые кванты могут отличаться еще и своей поляризацией, т. е. поляризацией соответствующей им световой волны. Соответственно тому, что поляризация может быть либо правой круговой, либо левой круговой <sup>22</sup>, нам придется удвоить число элементарных ячеек

<sup>21</sup> У А. Эйнштейна [2] формулы (22) и (23) приведены с иными числовыми коэффициентами при  $\lambda$ , по-видимому, из-за опечатки.

<sup>22</sup> Прямолинейно-поляризованный свет есть результат сложения правого и левого кругового.

в фазовой области, отображающей состояние светового газа, и положить

$$Z_i = \frac{8\pi V p_i^3 \Delta p_i}{h^3}. \quad (6a)$$

Формула (7) нуждается в более существенном видоизменении. Прежде всего, что понимать под массой светового кванта? Согласно теории относительности, энергии  $\epsilon = h\nu$  соответствует масса  $m = \frac{\epsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$ , где  $c$  — скорость света. Так как кванты движутся с той же скоростью  $c$ <sup>23</sup>, то количество движения их, или их импульс,  $p$  равен  $p = mc = h\nu/c$ . Стало быть, в рассматриваемом случае уравнение (7) примет вид

$$p = h\nu/c, \quad \Delta p = h\Delta\nu/c. \quad (7a)$$

Вставляя в уравнение (6a), получим

$$Z_i = \frac{8\pi V \nu_i^3 \Delta \nu_i}{c^3}. \quad (8a)$$

Переходя к последующим формулам, убедимся, что уравнения (9) и (11) остаются в силе и для квантового газа, уравнение же (10) вовсе отпадает, ибо число квантов в поле излучения при наличии материи не является постоянным: при поглощении и последующем излучении квантов атомами число и размеры квантов могут произвольным образом изменяться. Итак, при разыскании максимума энтропии  $S$  условие (10) отпадает, соответственно чему в уравнении (12) и во всех последующих формулах нужно положить

$$\alpha = 0. \quad (25)$$

В частности, уравнение (17) на основании (24), (25) и (8a) примет вид

$$E = \sum_i \frac{8\pi V h}{c^3} \frac{\nu_i^3 \Delta \nu_i}{e^{h\nu_i/kT} - 1}, \quad (17a)$$

что полностью совпадает с формулой Планка.

Изложенный вывод формулы Планка, принадлежащий Бозе [1], знаменует собой крупный успех теории квантов: до Бозе все выводы этой квантовой формулы страдали внутренним противоречием, ибо все они в той или иной мере основывались на резуль-

<sup>23</sup> Это не противоречит теории относительности, согласно которой движение с предельной скоростью  $c$  невозможно лишь для материальных тел, обладающих определенной массой также и в состоянии покоя. Все отличия световых квантов от электронов сводится к тому, что последние являются порциями энергии, связанными с субстанциальными носителями, и как таковые продолжают существовать и в состоянии покоя, тогда как кванты представляют собой чистую форму движения, с субстанциальными носителями не связанную и существующую лишь постольку, поскольку существует движение (масса кванта в состоянии покоя равна нулю).

татах классической *неквантовой* теории излучения. Вместе с тем все изложенное выявляет глубокую, донныне не подозревавшуюся аналогию между свойствами газов и свойствами излучения <sup>24</sup>.

## § 6. Физический смысл теории Бозе—Эйнштейна

Непосредственно за появлением первых работ Бозе—Эйнштейна со стороны Эренфеста и других физиков последовал ряд возражений против новой теории. Первое из них сводится к тому, что, как было ранее доказано самим Эйнштейном на основе теории флуктуаций [7], справедливость формулы черного излучения Планка неразрывно связана с наличием взаимодействия световых квантов, аналогичного интерференции световых волн. Между тем только что изложенный вывод формулы Планка, по-видимому, базируется на предположении об отсутствии взаимодействия световых квантов. Второе, не менее существенное возражение я позволю себе в применении к данному выше изложению, несколько отличающемуся от изложения Бозе—Эйнштейна, сформулировать следующим образом.

Отказ от индивидуализации молекул не может быть обоснован тем, что нашими грубыми методами наблюдения мы не можем отличать молекул друг от друга, ибо он влечет за собой чрезвычайно серьезные, физически недопустимые последствия. Ведь признать, что расположение, при котором молекула *a* находится в 1-й ячейке, а молекула *b* — во 2-й ячейке, *принципиально* неотлично от обратного расположения (*b* в 1-й ячейке, а *a* во 2-й), — это значит, в *сущности*, отказаться от принципа отождествляемости элементов материи, т. е. отказаться от применения к материи понятия субстанции.

В чем же выход из этих противоречий? В том, что, хотя это и не было выявлено в предшествующем изложении, теория Бозе—Эйнштейна фактически предполагает существование особого рода взаимодействия между молекулами идеального газа (а значит, и между световыми квантами); учтя это взаимодействие, по-видимому, можно обычным, классическим путем, не отказываясь от индивидуализации молекул, получить все результаты теории Бозе—Эйнштейна. Другими словами, отказ от индивидуализации молекул характеризует эту теорию лишь с чисто формальной стороны. Последующие рассуждения помогут нам убедиться в справедливости этих утверждений.

До сих пор мы рассматривали только *макроскопическое* распределение молекул идеального газа по *участкам* фазового пространства, определяемое числами  $N_i$ . Перейдем теперь к рассмотре-

<sup>24</sup> В частности, закон Максвелла распределения молекул по энергии, как и вполне аналогичный ему, следующий из классической теории закон Рэлея—Джинса распределения энергии в спектре излучения, приобретает характер предельного закона, справедливого лишь при известных условиях ( $\lambda \ll 1$ ).

нию *микроскопического* распределения молекул по элементарным фазовым ячейкам, определяемого числами  $n_i$ , причем без ущерба для общности рассуждений ограничимся рассмотрением группы ячеек, входящих в состав  $i$ -го участка фазовой области.

Характер микроскопического распределения станет нам известным, если мы определим, сколько ячеек рассматриваемого участка заключают в себе по нулю, по одной, по две и т. д. молекул; другими словами, если мы определим значение чисел  $p_i^r$ , где  $p_i^r$  есть число ячеек  $i$ -го фазового участка, заключающих в себе по  $r$  молекул. Очевидно, что

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} p_i^r = Z_i \quad (26)$$

и

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} r p_i^r = N_i. \quad (27)$$

Вероятность данного состояния, определяемого системой чисел  $p_i^r$ , равна, очевидно <sup>25</sup>,

$$W_i = \frac{Z_i!}{\prod_r p_i^r!}. \quad (28)$$

Действительно, задать числа  $p_i^r$  — это значит разбить  $N_i$  молекул на  $Z_i$  групп так, чтобы каждые  $p_i^r$  из этих групп содержали в себе по  $r$  молекул. Всевозможные микроскопические распределения, соответствующие заданной системе чисел  $p_i^r$ , получатся путем осуществления всех возможных  $Z_i!$  перестановок этих  $Z_i$  групп молекул по  $Z_i$  ячейкам. Приняв во внимание, что каждые  $p_i^r$  из этих групп тождественны между собой <sup>26</sup>, получим формулу (28).

Наиболее вероятная система чисел  $p_i^r$  соответствует максимуму вероятности  $W_i$ , или, что то же, максимуму  $\lg W_i$ . Предположим, что большинство чисел  $p_i^r$  так велико, что их факториалы с достаточной точностью могут быть представлены с помощью формулы Стирлинга (4). Тогда

$$\lg W_i = Z_i \lg Z_i - \sum_r p_i^r \lg p_i^r$$

и условие максимума запишется следующим образом:

$$\delta \lg W_i = - \sum_r (\lg p_i^r + 1) \delta p_i^r = 0.$$

Так как  $Z_i$  и  $N_i$  суть заданные числа, то из уравнений (26) и (27)

<sup>25</sup> Отмечу, что в работах Бозе и в первой работе Эйнштейна формула (28) являлась исходной для построения всей теории. Макроскопическое состояние считалось определенным заданием чисел  $p_i^r$ . Сравни определение макроскопического состояния в конце § 3 (дано Эйнштейном в его второй работе).

<sup>26</sup> Группы с равным числом молекул могут считаться тождественными между собой лишь постольку, поскольку мы не индивидуализируем молекул. Поэтому формула (28) не применима в классической теории.

получим дополнительные условия

$$\delta Z_i = \sum_r \delta p_i^r = 0$$

и

$$\delta N_i = \sum_r r \delta p_i^r = 0.$$

Стало быть, условие максимума в окончательной форме примет следующий вид (сравни уравнение (12)):

$$-\delta \lg W_i + \alpha_i \delta Z_i + \gamma_i \delta N_i = \sum_r (\lg p_i^r + 1 + \alpha_i + \gamma_i r) \delta p_i^r = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при  $\delta p_i^r$  и вводя обозначение

$$a_i = e^{-(\alpha_i + 1)},$$

получим

$$p_i^r = a_i e^{-r\gamma_i}. \quad (29)$$

Чтобы определить значение постоянных  $a_i$  и  $\gamma_i$ , вставим это выражение в уравнения (26) и (27) и применим известную формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$Z_i = a_i \sum_r e^{-r\gamma_i} = \frac{a_i}{1 - e^{-\gamma_i}}, \quad N_i = a_i \sum_r r e^{-r\gamma_i} = \frac{a_i e^{-\gamma_i}}{(1 - e^{-\gamma_i})^2},$$

откуда

$$a_i = Z_i (1 - e^{-\gamma_i}) \quad (30)$$

и

$$N_i = \frac{Z_i e^{-\gamma_i}}{1 - e^{-\gamma_i}} = \frac{Z_i}{e^{\gamma_i} - 1}.$$

Сравнивая последнее выражение с уравнениями (13) и (15), убедимся, что

$$\gamma_i = \alpha + \frac{\varepsilon_i}{kT}. \quad (31)$$

Уравнения (29)—(31) дают исчерпывающий ответ на вопрос о характере наиболее вероятного распределения молекул по фазовым ячейкам и заслуживают самого пристального внимания.

По классической теории наиболее вероятное распределение молекул по отдельным ячейкам каждого фазового участка есть распределение равномерное (т. е. все  $p_i^r = 0$ , кроме  $p_i^r$  с индексом  $r = N_i/Z_i$ ). Между тем по теории Бозе—Эйнштейна наибольшая группа ячеек вовсе лишена молекул (максимум  $p_i^r$  при  $r=0$ ), зато сравнительно многочисленны ячейки, заключающие в себе число молекул, значительно превышающее среднее значение  $r$ , равное  $N_i/Z_i$ . Все обстоит так, как если бы между молекулами идеального газа существовали силы взаимодействия и притяжения, способствующие сближению молекул и скоплению их внутри отдельных ячеек. Однако, чтобы убедиться в том, что отказ от индивидуализации молекул, которым с *формальной* стороны



характеризуется теория Бозе—Эйнштейна, физически действительно сводится к введению особого рода междумолекулярного взаимодействия, необходимо обратиться к теории флуктуаций.

Согласно кинетической теории материи молекулы газа никогда не распределяются по всему объему газа с полной равномерностью; в отдельных, достаточно малых участках газа по случайным причинам временами возникает избыток молекул, в других участках — недостаток, которые постепенно сглаживаются, чтобы вновь возникнуть в других местах, и т. д. Эти случайные, но неизбежные отклонения от среднего равномерного распределения и носят название флуктуаций.

Подобно этим флуктуациям распределения, имеют место также и аналогичные флуктуации температуры, химического состава (в смеси газов) и т. д.

Если известно выражение энтропии газа (или его термодинамической вероятности), то можно рассчитать среднюю величину флуктуаций. Отметим, что согласно классической теории идеальных газов средняя квадратичная величина относительного отклонения  $\delta N/N$  числа молекул в данном объеме<sup>27</sup> от нормального (среднего) числа молекул в этом объеме равна [7]

$$\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2 = \frac{1}{N}. \quad (32)$$

С другой стороны, исходя из формулы Планка, можно показать путем чисто термодинамических рассуждений, что величина флуктуаций энергии  $\delta E_i$  в поле равновесного («черного») излучения определяется следующим уравнением:

$$\left(\frac{\delta N_i}{N_i}\right)^2 = \left(\frac{\delta E_i}{E_i}\right)^2 = \frac{1}{N_i} + \frac{1}{Z_i}. \quad (33)$$

Здесь  $E_i$  — среднее значение энергии, заключающейся в рассматриваемом объеме  $V$  и соответствующей излучению определенной частоты  $\nu_i$ ;  $N_i$  — среднее число квантов этой частоты ( $N_i = E_i/h\nu_i$ ), а  $Z_i$  численно равно числу соответствующих элементарных фазовых ячеек, определяемому уравнением (8а). Характерно, что флуктуация энергии излучения складывается из двух составных частей: первый член формулы (33) соответствует случайным изменениям числа квантов в объеме  $V$  и вполне аналогичен флуктуации числа молекул идеального газа (уравнение (32)). Второй же член формулы (33) обуславливается «интерференцией световых квантов», т. е. интерференцией соответствующих им световых волн. Действительно, на основании волновой теории света непосредственным расчетом можно показать, что интерференция волн частоты  $\nu_i$ , результат которой зависит от случайной разности фаз

<sup>27</sup> Уравнения (32) и (34) справедливы только в том случае, если рассматриваемый объем  $V$  составляет лишь чрезвычайно малую часть общего объема газа.

между интерферирующими волнами, влечет за собой флуктуацию энергии излучения, средняя квадратичная величина которой равна  $1/Z_i$  [7].

Чрезвычайно знаменательно, что, как вытекает [2] из основных формул теории Бозе—Эйнштейна, флуктуация распределения молекул (и энергии) идеального газа с точки зрения этой теории определяется не классической формулой (32), а формулой (33), выведенной первоначально для флуктуации *излучения*. Применяя эту формулу к газу, мы должны лишь соответственно видоизменить значения входящих в нее величин:  $N_i$  будет означать среднее число молекул газа, заключающихся в рассматриваемом объеме  $V$  и обладающих определенной энергией движения  $\epsilon_i$ ,  $Z_i$  — соответствующее число элементарных фазовых ячеек, определяемое уравнением (8), и, наконец,  $E_i$  — среднюю энергию в объеме  $V$ , соответствующую молекулам  $N_i$  ( $E_i = \epsilon_i N_i$ ). Таким образом, флуктуация числа молекул по новой теории складывается из двух составных частей совершенно так же, как и флуктуация энергии излучения. Если бы взаимодействие молекул отсутствовало, то  $(\overline{\delta N_i / N_i})^2$  было бы равно  $1/N_i$ , как это имеет место по классической теории (см. уравнение (32)); добавочный же член  $1/Z_i$  вполне аналогичен интерференционным флуктуациям излучения. Единственно возможное истолкование этого добавочного члена заключается в предположении, что между молекулами идеального газа действительно существует взаимодействие и что взаимодействие это по характеру своему таково, как если бы оно обуславливалось интерференцией особого рода волн, неразрывно связанных с молекулами идеального газа.

Какова же природа этих таинственных волн? Да и вообще, можно ли и нужно ли вводить в физику совершенно новое представление об особом рода волнах, неразрывно связанных с каждой материальной частицей? Самое сопоставление взаимодействия молекул с интерференцией волн не носит ли характер чисто формальной аналогии?

## § 7. Интерференция молекул и теория де Бройля

Представление об интерференции волн, неразрывно связанных с материальными частицами, или, как мы будем говорить для краткости, представление об интерференции этих частиц, совершенно чуждо классической физике. Однако в самые последние годы зародилась многообещающая теория де Бройля <sup>28</sup> (наиболее полное изложение см. в [8]), которая, исходя из совершенно других оснований, приводит к тем же представлениям о «волновом поле» материальных частиц, как и теория Бозе—Эйнштейна.

Де Бройль исходит из предположения, что с каждой материальной частицей (т. е. с каждым электроном или протоном) нераз-

<sup>28</sup> Реферат его работ см. Я. И. Френкель. УФН, 1924, 4, вып. 4-5.

ривно связан колебательный процесс, частота которого  $\nu$  зависит от энергии  $\varepsilon$  частицы и определяется боровским условием

$$h\nu = \varepsilon.$$

Вводя массу частицы  $m$  и вспоминая, что, согласно теории относительности

$$\varepsilon = mc^2,$$

получим

$$h\nu = mc^2, \quad (34)$$

причем масса частицы, как известно, следующим образом зависит от ее скорости  $v$ :

$$m = m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Де Бройль предполагает, что, с точки зрения наблюдателя, покоящегося относительно частицы, колебания частоты  $\nu_0 = m_0 c^2 / h$  происходят внутри и вблизи частицы синхронно (аналогично системе стоячих волн). Если принять это предположение, то можно показать, что для наблюдателя, относительно которого частица движется со скоростью  $v$ , колебательный процесс этот представится в форме волны частоты

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

распространяющейся по направлению движения фазовой частицы со скоростью

$$V = c^2/v$$

(так как  $v < c$ , то  $V > c$ ). Волна эта не несет с собой никакой энергии и поэтому не может быть воспринята никаким физическим прибором. Существование этой волны проявляется, однако, в том обстоятельстве, что волны различных частиц одинаковой частоты  $\nu$  и скорости  $V$  могут интерферировать между собой, причем каждая частица будет двигаться по ортогональной траектории (т. е., употребляя оптический термин, по лучу) результирующего волнового поля. Таким образом, интерференция волн влечет за собой отклонение частиц от прямолинейного пути, т. е. проявляется в особом рода взаимодействии частиц<sup>29</sup>.

Крупнейшая заслуга де Бройля заключается в том, что на основе своей теории ему впервые удалось дать удачную и чрезвычайно остроумную попытку рационального истолкования основного постулата квантовой теории периодических систем (постулат стационарных состояний). В то же время Эйнштейн [2] отмечает, не приводя соответствующих вычислений, что теория де Бройля приводит к тому же выражению для флуктуации числа молекул в за-

<sup>29</sup> В случае наличия обычного взаимодействия между частицами (электродинамического и гравитационного) на это взаимодействие накладывается взаимодействие интерференционное.

данном объеме идеального газа, которое было им ранее получено на основании соображений совершенно другого рода (уравнение (33)). Это совпадение результатов двух совершенно различных теорий несомненно является веским подтверждением правильности основных положений как теории де Бройля, так и статистической механики Бозе—Эйнштейна.

Таким образом, мы можем считать доказанным первое из высказанных нами в начале предыдущего параграфа утверждений, что физической основой статистики Бозе—Эйнштейна является предположение об интерференционном взаимодействии молекул идеального газа. В высшей степени вероятно, что и второе из высказанных нами утверждений также окажется вполне справедливым и что, стало быть, при учете интерференционного взаимодействия молекул результаты теории Бозе—Эйнштейна будут получены на основе классической статистики без отказа от индивидуализации молекул. Поручкой этому служит хотя бы только что упомянутый вывод формулы флуктуаций (33) из теории де Бройля. К сожалению, общего доказательства этого утверждения пока еще никем не было дано; однако очень интересный шаг в этом направлении удалось недавно сделать Ланде [9], к краткому изложению работы которого мы теперь и перейдем.

Как известно, общая энергия системы интерферирующих волн не равна сумме энергий каждой из этих волн, взятой в отдельности. Если  $\varepsilon_i$  есть та энергия, которую имела бы каждая из волн в отсутствие интерференции, то, чтобы определить общую энергию  $u_i$  системы волн, нужно от энергии  $\varepsilon_i$  перейти к амплитудам  $\sqrt{\varepsilon_i}$ , сложить амплитуды, учитывая при этом фазу каждой отдельной волны, и затем уже вычислить общую энергию  $u_i$ . Ланде исходит из предположения, что аналогичная зависимость существует также и между общей энергией  $u_i$  группы молекул (или световых квантов), находящихся в одной и той же фазовой ячейке<sup>30</sup>, и той энергией  $\varepsilon_i$ , которую имела бы каждая молекула в отдельности при отсутствии интерференции. Иными словами, Ланде вводит понятие об «амплитуде»  $\sqrt{\varepsilon_i}$  молекулы (или кванта) и об ее «фазе»  $\varphi$ . Все молекулы, находящиеся в одной и той же ячейке, обладают одинаковой амплитудой, фазы же их распределяются по закону случая. Результирующая амплитуда группы молекул равна

$$\sqrt{\varepsilon_i} (e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} + \dots),$$

общая же энергия их  $u_i$  равна квадрату модуля амплитуды:

$$u_i = \varepsilon_i \left| \sum_{\alpha} e^{i\varphi_{\alpha}} \right|^2. \quad (35)$$

<sup>30</sup> По Ланде, интерферируют между собой лишь те молекулы, которые заключены в одной и той же ячейке. Заметим также, что волновое поле молекул, в отличие от волнового поля световых квантов, носит скалярный характер (амплитуда молекулы есть скаляр, а не вектор), что согласуется и с теорией де Бройля.

Рассмотрим участок фазовой области, соответствующий молекулам с энергией<sup>31</sup>  $\epsilon_i$ . Пусть общее число молекул в этом участке равно  $N_i$ , число ячеек —  $Z_i$ , и пусть, согласно законам классической статистики, эти молекулы в равновесном состоянии равномерно распределяются по всем  $Z_i$  ячейкам, так что на каждую ячейку приходится по  $N_i/Z_i$  молекул. Общая энергия молекул, заключающихся в каждой отдельной ячейке, определится по формуле (35), причем входящая в эту формулу сумма будет состоять из независимых слагаемых типа

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Вероятность того, что абсолютная величина суммы  $N_i/Z_i$  независимых величин  $e^{i\varphi_a}$  будет лежать в пределах от  $R$  до  $R+dR$ , равна<sup>32</sup>

$$d\Omega = 2Ce^{-\mu R^2} R dR = Ce^{-\mu R^2} d(R^2), \quad (36)$$

где

$$R = \left| \sum_{\alpha} e_i \varphi_{\alpha} \right|,$$

а  $C$  и  $\mu$  суть постоянные параметры.

Мы, однако, откажемся вместе с Ланде от представления о непрерывном многообразии возможных значений величин  $R$  и внесем добавочное, характерное для квантовой теории условие, предположив, что энергия каждой ячейки  $u_i$  может равняться только целому числу порций  $\epsilon_i$ . Иными словами, предположим (см. уравнения (35)), что  $R^2$  может принимать только целые значения. Кроме того, предположим, как это всегда делается в аналогичных случаях, что вероятность  $\Omega(r)$  целого значения  $R^2$ , равного  $r$ , равна вычисленной из обычной «неквантовой» формулы (36) вероятности всех значений  $R$ , лежащих в пределах от  $r$  до  $r+1$ :

$$\Omega(r) = C \int_{R^2=r}^{R^2=r+1} e^{-\mu R^2} d(R^2) = \frac{C}{\mu} (e^{-\mu r} - e^{-\mu(r+1)}) = \frac{C}{\mu} e^{-\mu r} (1 - e^{-\mu}).$$

Принимая во внимание, что  $\sum_{r=0}^{r=\infty} \Omega(r)$  должно равняться единице, найдем, что  $C/\mu = 1$  и что, стало быть,

$$\Omega(r) = e^{-\mu r} (1 - e^{-\mu}).$$

Такова, следовательно, вероятность того, чтобы  $R^2=r$  или согласно уравнению (35), чтобы  $u_i=r\epsilon_i$ . Обозначив через  $p_i^r$  число всех ячеек в рассматриваемом фазовом участке, энергия которых равна  $r\epsilon_i$ , получим

$$p_i^r = Z_i \Omega(r) = Z_i e^{-\mu r} (1 - e^{-\mu}). \quad (37)$$

<sup>31</sup>  $\epsilon_i$  есть та энергия, которой обладала бы каждая находящаяся в этом участке молекула при отсутствии интерференции.

<sup>32</sup> См. А. А. Марков. Исчисление конечных разностей, § 33. Одесса, Mathesis, 1910.

Равенство это по своей форме совершенно аналогично равенствам (29) и (30) и полностью совпадает с ними, если положить

$$\mu = \gamma_i = \alpha + \frac{\varepsilon_i}{kT}. \quad (38)$$

Равенства (29) и (30), по теории Бозе—Эйнштейна, определяют собой число  $p_i^r$  ячеек, заключающих в себе по  $r$  молекул; отождествляя их с уравнением (37), мы тем самым утверждаем, что  $r$  — только кажущееся число молекул в этих ячейках, что, фактически, в каждой из  $p_i^r$  ячеек, как и в прочих ячейках рассматриваемого фазового участка, находится по  $N_i/Z_i$  молекул, но что общая энергия этих молекул в каждой из  $p_i^r$  ячеек благодаря интерференции равна не  $\varepsilon_i N_i/Z_i$ , а  $\varepsilon_i r$ . Таким образом, по Ланде,  $r$  есть не число молекул в ячейке, а мера общей энергии этих молекул.

Мы не станем останавливаться на не вполне удавшихся попытках Ланде обосновать уравнение (38); отметим только, что хотя приведенные рассуждения далеко не достаточны для построения рациональной статистической механики интерферирующих между собой молекул и квантов, однако они несомненно указывают правильный путь к разрешению этой задачи. Основываясь на сходстве уравнения (37) с уравнением (29), мы с возросшей уверенностью можем повторить утверждение, что все отличие положений и выводов новой статистической механики от классической теории полностью заключается в учете интерференции молекул. К этому новому и на первый взгляд парадоксальному представлению об интерференции молекул, совершенно независимо от теории де Бройля, привела нас необходимость устранить целый ряд накопившихся в классической теории внутренних противоречий.

## § 8. Некоторые следствия интерференции молекул

Итак, с движением материальных частиц неразрывно связаны особого рода волны, подобно тому как с движением светового кванта связаны световые волны: между материей и светом существует гораздо более глубокое сходство, чем это можно было предполагать до последнего времени. Каковы же условия, в которых можно непосредственно наблюдать интерференцию или дифракцию «молекулярных» волн?

Исходя из уравнения (34), можно показать, что длина «молекулярных» волн  $\lambda$  убывает с возрастанием скорости молекулы и при нормальных температурных условиях чрезвычайно мала — меньше диаметра молекулы  $\sigma$ . Так как дифракция волн становится заметной лишь при отверстиях или экранах, размеры которых сравнимы с  $\lambda$ , то очевидно, что с помощью искусственных экранов дифракция «молекулярных» волн наблюдаема быть не может. Однако при низких температурах (около  $56^\circ \text{K}$  для  $\text{H}_2$  и  $40^\circ \text{K}$  для  $\text{He}$ )  $\lambda$  становится сравнимой с  $\sigma$  и поэтому должна наблюдаться дифракция «молекулярных» волн на смежных частицах газа, иг-

рающих роль маленьких экранов. Другими словами, если группа прямолинейно движущихся молекул встретит на своем пути другую молекулу, которую для простоты будем считать неподвижной, то волны движущихся молекул испытают отклонение в сторону, подобное отклонению световых волн при дифракции их на малом экране диаметра  $\sigma$ . Так как молекулы в своем движении следуют направлению «молекулярных» волн, то, стало быть, движущиеся молекулы, помимо отклонений под влиянием соударений с неподвижной молекулой, будут также испытывать отклонения под влиянием дифракции «молекулярных» волн. Таким образом, дифракция этих волн должна вызывать уменьшение длины свободного пути молекул и, стало быть, уменьшение вязкости газа (которая, как известно, пропорциональна длине свободного пути). Этот вывод вполне согласуется с тем экспериментальным фактом, что вязкость водорода резко падает при низких температурах, при которых длина «молекулярных» волн становится сравнимой с диаметром молекул [2].

С точки зрения теории «молекулярных» волн легко также разъясняется физический смысл известного «парадокса Гиббса»<sup>33</sup>. Как известно, взаимная диффузия двух химически разнородных газов влечет за собой увеличение их энтропии, причем величина приращения энтропии зависит только от числа грамм-молекул каждого из диффундирующих газов и вовсе не зависит от того, насколько эти газы отличаются друг от друга по своей химической природе. Если, однако, перейти к пределу и предположить, что оба диффундирующих газа совершенно тождественны между собой, то приращение энтропии при диффузии, как известно, сведется к нулю, ибо в этом случае диффузия никакого изменения состояния газа не вызывает. Таким образом, мы приходим к парадоксальному выводу, что при сравнении химической природы двух газов или вообще двух каких-либо веществ нет и *не может быть* места непрерывным соотношениям, так что можно говорить либо об их полной тождественности, либо о нетождественности.

Совершенно не вяжущееся с привычными физическими воззрениями обстоятельство это становится, однако, совершенно понятным с точки зрения излагаемой нами теории. Действительно, интерференция двух систем волн может иметь место только при условии полной (или почти полной) тождественности длины этих волн и скорости их распространения. «Молекулярные» волны удовлетворяют этому условию только в том случае, если они принадлежат молекулам тождественной массы и одинаковой скорости. Стало быть, интерференционное взаимодействие имеет место только между тождественными молекулами и совершенно исчезает даже при чрезвычайно малом отличии природы взаимодействующих молекул. В этом факте коренится физическая причина парадокса Гиббса.

<sup>33</sup> А. Эйнштейн в своих работах [2], не упоминая об этом парадоксе, рассматривает аналогичный парадокс, к которому приводит излагаемая им теория.

В заключение упомянем еще об интересной работе Иордана [10], который показал, что новая статистическая теория влечет за собой необходимость видоизменить наши представления о законах соударений молекул, о законах излучения, поглощения и рассеяния света атомами и т. д. Ограничимся рассмотрением первого из упомянутых явлений и рассмотрим совокупность таких соударений, при которых сталкиваются две молекулы, обладающие скоростью  $v_1$  и  $v_2$ , причем после соударения скорости их приобретают значения  $u_1$  и  $u_2$ . Иордан показывает, что в противность общепринятому до сих пор взгляду число соударений рассматриваемого рода должно зависеть на основании изложенных представлений не только от числа молекул в начальном состоянии (скорости  $v_1$  и  $v_2$ ), но также и от того, сколько именно молекул находится в данный момент в конечном состоянии (со скоростями  $u_1$  и  $u_2$ ). Паули [11] уже несколько лет тому назад на основании совершенно иных рассуждений пришел к аналогичному выводу в отношении числа столкновений световых квантов со свободными электронами<sup>34</sup>.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bose. Z. Phys., 1924, 26, 178; 27, 384.
2. A. Einstein. Berlin. Ber., 1924, S. 261; 1925, S. 3, 18.
3. P. u. T. Ehrenfest. Encykl. math. Wissensch., IV, 2, 11, H. 6.
4. E. Schrödinger. Berlin. Ber., 1925, S. 434.
5. P. Ehrenfest, V. Trkal. Ann. Phys., 1921, 65, 609.
6. M. Planck. Ann. Phys., 1921, 66, 365; Berlin. Ber., 1925, S. 49.
7. H. Lorentz. Théories statistiques en thermodynamique, 1916.
8. L. de Broglie. Ann. phys., 1925, 3, 22.
9. A. Landé. Z. Phys., 1925, 33, 571.
10. P. Jordan. Z. Phys., 1925, 33, 563.
11. W. Pauli. Z. Phys., 1923, 18, 272.
12. W. Westphal. Z. Phys., 1925, 33, 557.
13. A. Smekal. Z. Phys., 1925, 33, 613.

---

<sup>34</sup> В подготовляемой к печати работе автор настоящей статьи предполагает изложить общий метод, с помощью которого упомянутые выводы могут быть обоснованы строже, чем это сделано В. Паули и П. Иорданом.



**РУКОВОДЯЩИЕ ИДЕИ В ТВОРЧЕСТВЕ ФАРАДЕЯ**  
 (22 сентября 1791 г.—25 августа 1867 г.)  
 (К столетию открытия электромагнитной индукции) <sup>1</sup>

Несмотря на обилие посвященной Фарадею литературы (лишь незначительная часть которой охвачена помещенным в конце статьи списком), творчество Фарадея представляет собой обширное и благодарное поле для исследований. Основные проблемы, характеризовавшие собой развитие физики в XIX в., в значительной своей части — за исключением, быть может, только проблем статистической физики — восходят своими истоками к творчеству Фарадея. Однако до сих пор еще нет достаточно полного и исчерпывающего анализа эволюции основных идей Фарадея, руководивших им в его исследованиях, эволюции созданной им концепции электромагнитных сил, роли, которую эти идеи и концепции сыграли в открытиях Фарадея, анализа его непревзойденной методики эксперимента, наконец, взаимодействия творчества Фарадея с современным ему развитием техники. Между тем и многочисленные научные работы Фарадея, написанные с необыкновенной полнотой, шаг за шагом ведущие читателя по всем этапам его исследований, и обильное литературное наследие в форме дневников, писем, записей, лекций, речей и т. д. представляют собой благодарнейший материал как для решения этих вопросов, так и для исследования механизма и особенностей научного творчества вообще. С начала 20-х до 60-х годов прошлого столетия включительно Фарадей вел подробнейшие лабораторные записи или «Дневник», куда заносил все детали своих опытов, планы и предположения для будущих работ, анализ результатов, обсуждение встретившихся трудностей и надежды на будущее. Отдельные листы, на которые заносились эти записи, были затем переплетены — большей частью руками самого Фарадея — мастера-переплетчика — в 8 томов *in folio* и 2 тома *in quarto*. В литературе до сих пор опубликованы лишь отдельные выдержки из «Дневника», но в связи с празднованием юбилея закона индукции предпринято наконец полное издание этого ценного материала.

Начало второго, наиболее плодотворного периода деятельности Фарадея, которого мы только и будем касаться в настоящей статье, совпадает с сороковым годом его жизни <sup>2</sup> и с началом публикации

<sup>1</sup> УФН, 1932, 12, 1.

<sup>2</sup> Таким образом, Фарадей представляет собой сравнительно редкий пример поздно развившегося гения, и представляется спорным, объясняется ли это главным образом особенностями его психической организации, или тем,

знаменитых «Experimental Researches in Electricity» («Экспериментальных исследований в электричестве»). С 1831 по 1855 г. регулярно появлялись эти «Исследования» в «Philosophical Transactions». Изложенные в форме коротких параграфов, число которых в 30 «сериях» или статьях достигло 3362, не содержащие ни одной математической формулы или математической выкладки, но с чрезвычайной тщательностью описывающие детали экспериментов, заключающие в себе исчерпывающий, исключительно ясный и глубокий анализ физических явлений и понятий, исследования эти представляют собой квинтэссенцию научного наследства Фарадея.

Пользуясь главным образом этими «Исследованиями»<sup>3</sup> и не претендуя на какую бы то ни было полноту изложения, мы попытаемся в настоящей статье в самых общих чертах рассмотреть важнейшие открытия Фарадея в связи с вопросом о том, какую роль в этих открытиях в качестве направляющего элемента играла общая методологическая установка Фарадея, и прежде всего две основные руководившие им идеи — идея единства сил природы и новая, созданная им концепция электромагнитных явлений. Такого рода общие установки играли чрезвычайно важную роль в большинстве крупных открытий того класса, для которого в немецком языке существует столь удачный термин «epochenmachend» («делающие эпоху»). Такие открытия, как, например, открытие рентгеновых лучей, происшедшее случайно, представляют в этом отношении исключение, лишь подтверждающее общее правило. Когда дело идет об исследовании явлений, основные свойства и законы которых уже известны, или о приложении известных законов к новым явлениям, общая методологическая, философская установка исследователя не играет столь существенной роли. Но когда дело идет об открытии новых явлений и законов, ими управляющих, об открытии новых свойств природы, то успех может быть обеспечен только при наличии определенной руководящей нити. И если Колумб не имел, конечно, точного представления о том, что ждет его впереди, то у него, во всяком случае, была твердая уверенность в том, куда именно нужно держать путь, чтобы достигнуть новой земли.

Эта убежденность в правильности избранного пути, поразительное упорство, с которым Фарадей вновь и вновь возвращался к обманувшим его ожидания опытам, всеми возможными способами варьируя их условия, чрезвычайно характерны для Фара-

---

что, будучи рабочим-самоучкой, он не имел в детстве и юношестве достаточно благоприятных условий для развития. Этапы первого периода его деятельности до 1831 г. — первая научная работа его опубликована в 1816 г. — характеризуются рядом работ по аналитической и технической химии, по сжижению хлора и других газов, исследованиями по акустике, осуществлением непрерывного вращения обтекаемого током проводника в поле магнитов (Фарадеево колесо). Значение этих работ не может идти ни в какое сравнение с открытиями второго периода его деятельности.

<sup>3</sup> В дальнейшем ссылки на них будут даваться в форме «Exp. Res.» с указанием номера соответствующего параграфа.

дея. Ограничимся одним из многих примеров — открытием вращения плоскости поляризации света в магнитном поле. Вот что он сам писал по этому поводу в 1845 г.: «Я давно держался мнения, достигавшего почти степени убеждения, что различные формы, в которых проявляются силы материи, имеют одно общее происхождение, или, другими словами, столь непосредственно связаны и зависимы друг от друга, что они как бы могут превращаться друг в друга, и что существуют эквиваленты их действия. Это твердое убеждение, примененное к действиям света, привело меня в прошлом ко многим попыткам, имевшим целью открытие непосредственной связи между светом и электричеством и их взаимодействия при совместном действии их на тела; однако результаты оказались отрицательными. Эти безуспешные старания и многие другие, о которых никогда ничего не было опубликовано, не могли устранить моего твердого убеждения, вытекавшего из философских соображений. Поэтому я недавно возобновил тщательнейшие исследования путем эксперимента, и мне наконец удалось намагнитизировать и наэлектризовать луч света и осветить магнитные линии сил»<sup>4</sup>. О безуспешных предварительных попытках, упоминаемых Фарадеем в 1845 г., имеются записи в его рабочем дневнике, относящиеся к 10 сентября 1822 г. и к 2 и 6 мая 1833 г. И, наконец, последний опыт его жизни (запись 12 марта 1862 г.) также был поставлен с целью обнаружить новые формы связи между светом и магнетизмом, и только несовершенство имевшихся в его распоряжении приборов помешало Фарадею открыть в этот день эффект Зеемана, успешно повторившего этот опыт с лучшими экспериментальными средствами в 1896 г. Таким образом, в течение 40 лет Фарадей вновь и вновь возвращался к тому же самому вопросу о связи между светом и электромагнетизмом, невзирая ни на неудачу, ни на частичные успехи.

Убеждение в единстве сил природы, столь ярко выраженное в приведенных словах Фарадея, руководило им в течение всей его деятельности. Чтобы оценить важность этой идеи, необходимо припомнить положение физики в ту эпоху. К концу XVIII—началу XIX в. область известных физических явлений значительно расширилась, однако явления эти изучались вне связи друг с другом, и для объяснения каждой группы явлений прибегали к гипотезе особого «флюида» (субстанции) — электрический флюид, магнитный флюид, теплород, наконец, световые частицы, вводившиеся для объяснения световых явлений. В виде реакции против этого обилия разнотипных сил и разнородных флюидов и возникла идея об единстве сил природы. Господствовавшая в начале XIX в. идеалистическая философия Шеллинга заключала в себе здоровое ядро учения об единстве всех сил природы и оказала в этом направлении значительное воздействие на развитие науки. Так, например, Эрстед был убежденным шеллингианцем и пришел к знаме-

нито му открытию воздействия электрического тока на магнитную стрелку вовсе не случайно, как это иногда излагается, а в результате многолетних упорных поисков взаимодействия электричества и магнетизма, в существовании которого он был убежден на основании философских соображений. Венцом этого периода развития физики, характеризовавшегося идеей единства сил природы, было установление закона сохранения энергии Робертом Майером, Джоулем и Гельмгольцем.

Рассмотрим же с точки зрения развития этой идеи некоторые из основных работ Фарадея, не придерживаясь при этом строго хронологического порядка.

В те времена различалось по крайней мере пять различных видов электричества по способу их получения, а именно: а) электричество «обыкновенное», к которому причислялось в первую очередь электричество трения, затем атмосферное, пьезо- и пироэлектричество; б) электричество гальваническое — токи, создаваемые гальванической батареей; в) электричество магнитное — открытые Фарадеем индукционные токи; г) термоэлектричество и д) животное электричество, вырабатываемое специальными органами некоторых животных (электрические скаты, угри и т. п.). Хотя в то время была уже распространена мысль о тождестве всех этих видов электричества, однако, например, Др. Дэви (брат знаменитого химика Гемфри Дэви) еще в 1832 г. писал в «*Phil. Trans. Roy. Soc.*»: «Не можем ли мы предположить, по аналогии с солнечным лучом, что электричество. . . представляет собой не простую силу, а сочетание различных сил, могущих встречаться в различных комбинациях и давать в результате все разновидности электричества, с которыми мы знакомы?»

Доложенная в январе 1833 г. работа Фарадея окончательно устранила все эти сомнения и установила путем образцово продуманных и проведенных опытов, что все известные действия электричества — физиологические, тепловые, химические, магнитные, механические и световые — могут быть получены с помощью электричества любого происхождения и что, таким образом, все виды электричества тождественны, а разница в их действиях сводится к разнице, во-первых, в количестве электричества и, во-вторых, в его напряжении (потенциале).

Еще большее значение имело, конечно, основное открытие Фарадея — открытие электромагнитной индукции. Открытие пондеромоторных сил взаимодействия токов и магнитов Эрстедом и Ампером в 1819—1821 гг. и изобретение электромагнитов заставляли Фарадея предполагать, что если ток может возбуждать магнетизм, то и магнетизм вообще и магнитное поле самих токов в частности, в свою очередь, должны обладать способностью возбуждать токи. С другой стороны, и аналогия с электростатической индукцией зарядов подкрепляла убеждения Фарадея в существовании индукции токов: статическое электричество индуцирует заряды противоположного знака на соседних телах; не обладают ли

и токи аналогичным свойством? Еще в 1822 г. он заносит в свою записную книжку: «Превратить магнетизм в электричество». Первая запись об опытах, поставленных с целью выполнения этой программы, относится к 28 декабря 1824 г., и с тех пор с характерной для Фарадея настойчивостью он неоднократно возвращается к ним в течение семи лет (в 1825, 1828 и 1831 гг.).

Длительная серия неудач объяснялась тем, что Фарадей в начале предполагал, что постоянный ток должен индуцировать постоянный же ток в смежных проводниках и что помещение неподвижного магнита внутри обтекаемой током катушки должно влиять на силу этого тока. Лишь 29 августа 1831 г., экспериментируя с прототипом современного трансформатора (две обмотки, навитые рядом друг с другом на железное кольцо), он обнаружил индукцию токов в одной из обмоток при замыкании-размыкании тока в другой. Таким образом, Фарадей действительно нашел связь электричества с магнетизмом, но не совсем в той форме, как предполагал. В весьма короткое время после этого открытия он тщательнейшим образом исследовал как индукцию токов переменными токами, так и индукцию их при относительном движении проводника в поле магнитов и установил, что индукция токов зависит от пересечения проводником магнитных силовых линий. Полное же выяснение точных количественных соотношений потребовало значительно большего времени, и лишь в 1851 г. мы находим законченную формулировку закона индукции: «Пересекает ли провод силовые линии перпендикулярно или под углом, в одном или в другом направлении, он суммирует силы, соответствующие пересеченным им линиям», так что «количество приведенного в движение (thrown in the current) электричества прямо пропорционально числу пересеченных линий»<sup>5</sup>.

От исследования связи между магнетизмом и электричеством Фарадей перешел к исследованию связи между химическими и электрическими явлениями. Убеждение в единстве этих явлений было широко распространено в ту эпоху, и сам Фарадей ссылается на «замечательную теорию, предложенную сэром Гемффри Дэви и развитую (illustrated) Берцелиусом и другими выдающимися учеными, согласно которой обычное химическое сродство является простым результатом электрического притяжения частиц материи»<sup>6</sup>. Однако лишь Фарадею удалось установить точные количественные законы электрохимических явлений, и поныне носящие его имя. Доказав в упомянутой работе 1832 г. о тождестве различных видов электричества, что при электролизе количество разложенного вещества пропорционально количеству протекшего через электролит электричества<sup>7</sup>, Фарадей подвергнул в 1833 г. явления электролита тщательному и исчерпывающему исследова-

<sup>5</sup> Exp. Res., № 3082 и 3115.

<sup>6</sup> Exp. Res., № 703.

<sup>7</sup> Exp. Res., № 377.

нию, в результате которого было установлено, что количества различных веществ, выделяющихся из различных электролитов при заданной силе тока, пропорциональны химическим эквивалентам этих веществ. Открытие этого закона, конечно, чрезвычайно укрепило позицию сторонников электрической теории химического сродства и позволило Фарадею следующим образом сформулировать основы этой теории: «(Химически) эквивалентные веса различных тел попросту равны количествам этих тел, обладающим равными количествами электричества или равными электрическими силами; электричество определяет эквивалентные числа, потому что оно определяет силы сродства» (№ 869). «Силы, именуемые химическим сродством и электричеством, тождественны» (№ 918). Эти факты и положения вовсе не являются само собой разумеющимися следствиями основного представления об электрической природе химических сил; наоборот, они оказались в непримиримом противоречии со взглядами современного Фарадею крупнейшего представителя этой точки зрения — знаменитого Берцелиуса, согласно которым каждый атом обладает как положительными, так и отрицательными полюсами, причем лишь соотношение между силами этих полюсов различно в атомах различных веществ. Не имея возможности вдаваться подробнее в изложение этих вопросов, напомним только, что учение об электрической природе химических явлений было совершенно оставлено во второй половине XIX в., с тем чтобы вновь возродиться к концу столетия в связи с изучением электролитической диссоциации и электронных явлений. Однако прочную базу для этого учения создало лишь современное развитие квантовой механики, впервые давшее возможность объяснить химические связи неполярного (гомеополярного) характера с помощью обменных сил между электронами (*Austauschkräfte*), т. е. сил специфически квантового происхождения.

Все эти замечательные исследования и открытия были сделаны Фарадеем в течение трех лет, в 1831—1834 гг. Напряженнейшая работа подорвала его здоровье, и в 1835—1836 гг. наступил один из тех периодов упадка сил, которые и в дальнейшем со все возрастающей интенсивностью и уменьшающимися промежутками прерывали его творческую деятельность. Следующая работа Фарадея (о свойствах диэлектриков, 1837 г.) относится скорее ко второму, чем к первому из упомянутых выше основных циклов его работ. Оставаясь же пока в круге вопросов об единстве сил природы, мы должны остановиться еще раз на упомянутом уже открытии вращения плоскости поляризации света при прохождении луча вдоль силовых линий магнитного поля (1845) и на выводах, делавшихся Фарадеем из этого открытия.

В одной из лекций, прочитанных Фарадеем в 1816 г., встречается следующее место: «В настоящее время пользуется, по-видимому, всеобщим признанием положение, что свет состоит из мельчайших атомов вещества октаэдрической формы (*sic!* — *И. Т.*), обладающих полярностью и различающихся по своим размерам

или скорости»<sup>8</sup>. Какая дистанция от этих взглядов до следующего, например, утверждения (1846): «Согласно взгляду, который я осмеливаюсь высказать, излучение представляет собой высшую форму колебаний линий сил, как известно, соединяющих между собой частицы, а также и массы вещества. Этот взгляд пытается устранить эфир, но не колебания»<sup>9</sup>. Существенным является здесь не столько устранение понятия эфира, сколько предствление о том, что те же силовые линии, которыми, согласно взглядам Фарадея, обуславливаются электрические, магнитные и гравитационные явления, представляют собой носителей и световых явлений. И несколькими годами позже (в 1851 г.) Фарадей, рассматривая вопрос о передаче магнитных сил на расстояние, высказывает мысль, что эта передача может осуществляться световым эфиром, ибо, говорит он, «вовсе не невероятно, если (световой) эфир вообще существует, что он имеет и другие функции, помимо простого переноса излучения»<sup>10</sup>.

Конечно, это еще очень далеко от законченной электромагнитной теории света, но все же Фарадеем совершенно отчетливо выражено убеждение не только во влиянии магнетизма на световые явления, которое в результате длительных поисков и было им установлено, но и в гораздо более глубоком родстве этих явлений по существу.

Однако, пытаясь открыть взаимодействия и установить единство сил природы, Фарадей не ограничился электричеством, магнетизмом, химическими силами, светом; в последние десятилетия своей жизни он все больше и больше внимания уделял силам тяготения. «Давнишнее и постоянное убеждение в том, что все силы природы зависят друг от друга и имеют одно общее происхождение, или, вернее, представляют собой различные проявления одной фундаментальной силы, часто приводило меня к размышлениям о возможности экспериментально установить связь между тяготением и электричеством и, таким образом, включить тяготение в группу столь многочисленных и столь разнообразных проявлений сил, обнимающую также магнетизм, химическую силу и теплоту и связующую их общими соотношениями» (№ 2702, 1850 г.). С этой целью Фарадей пытался обнаружить возникновение токов в проволочной катушке, падающей с большой высоты, или в длинной катушке, внутри которой падает постороннее тело, и т. д.; однако все наблюдавшиеся им эффекты, как он сам доказал, обуславливались лишь побочными обстоятельствами. И Фарадей заканчивает свою статью следующими характерными словами: «На этом пока кончаются мои опыты. Результаты их отрицательны. Они не колеблют моего глубокого убеждения в существовании связи между тяготением и электричеством, хотя и не дают доказательства существования подобной связи» (№ 2717).

<sup>8</sup> *Bence Jones. Life and Letters of Faraday, v. 1, p. 216.*

<sup>9</sup> «Thoughts on ray vibrations». *Phil. Mag.*, 1846, 28, 3.

<sup>10</sup> *Exp. Res.*, N 3075.

Эта задача отыскания связи между тяготением и электричеством, поставленная Фарадеем, и по сей час еще остается актуальной; об этом свидетельствует хотя бы то, что Эйнштейн последние десять лет почти целиком посвятил попыткам ее разрешения, попыткам установления единой теории поля.

Период развития физики, характеризовавшийся развитием идеи о единстве сил природы, увенчался установлением закона сохранения энергии Робертом Майером, Джоулем и Гельмгольцем в 1842—1847 гг. Весьма интересно, что Фарадей совершенно независимо от этих ученых и еще до опубликования ими своих открытий совершенно ясно сознавал и фактически пользовался в своих рассуждениях и аргументации если не самим законом сохранения энергии в точной, количественной его формулировке, то, во всяком случае, одной из существеннейших его частей — принципом невозможности *perpetuum mobile* и взаимной превращаемостью сил природы в эквивалентных соотношениях. Так, в 1837 г. он заносит в свой рабочий дневник: «Нужно сравнить количества материальных сил, т. е. сил электричества, тяготения, химического сродства, сцепления и т. д., и, где возможно, дать выражения для их эквивалентов в той или другой форме»<sup>11</sup>.

В 1839 г. он написал работу о теории гальванических элементов. В то время одно из центральных мест в поле зрения физиков и химиков занимал многолетний ожесточенный спор сторонников контактной и химической теории гальванизма: первые утверждали, что причиной тока в гальванической цепи является самый факт соприкосновения различных проводников, вторые же видели источник тока в химических реакциях, происходящих в цепи. В работе 1839 г. Фарадей, являвшийся сторонником химической теории, изложив мастерски проведенное им экспериментальное исследование вопроса, приводит в заключение в качестве решающего аргумента следующее соображение: «Контактная теория полагает, что сила может возникнуть из ничего, что ток может быть порожден без какого-либо изменения в действующей материи или без затраты производящей силы, причем ток этот будет действовать, непрерывно преодолевая постоянное сопротивление. Это было бы на самом деле созданием силы, и этим ток отличался бы от всякой другой силы. Мы знаем много процессов, благодаря которым форма силы так изменяется, что происходит видимое превращение одной силы в другую. Так, мы можем химическую силу превратить в электрический ток, а электрический ток в химическую силу. Прекрасные опыты Зеебека и Пельтье доказывают превратимость теплоты в электричество, а опыты Эрштедта и мои — превратимость электричества в магнетизм. Но никогда не происходит создания силы, возникновения силы без соответствующей затраты того, что питает эту силу»<sup>12</sup>.

<sup>11</sup> Цитировано по книге В. Оствальда «Великие люди», стр. 128.

<sup>12</sup> *Exp. Res.*, № 2071; цитировано по переводу в книге Оствальда.



Таким образом, Фарадей действительно являлся провозвестником закона сохранения энергии. Замечательно, однако, что Фарадей до конца своей жизни так и не смог достичь правильного понимания этого закона, не смог осознать разницу между понятием силы и понятием энергии или работы. Ибо закон сохранения энергии вовсе не сводится к простому утверждению, что ничто не возникает из ничего. Среди великого многообразия физических величин, свойств и качеств необходимо отыскать ту именно величину, то всеобщее мерило физических явлений, которое остается количественно постоянным во всех процессах. Основная трудность, стоявшая на пути разрешения этой уже давно назревшей во времена Фарадея задачи, как и на пути разрешения целого ряда других фундаментальных задач физики в другие эпохи ее развития, заключалась в оперировании, казалось бы, простыми, но в действительности недостаточно ясно очерченными и определенными физическими понятиями. Самым трудным шагом к установлению специального принципа относительности был анализ понятия одновременности, а к установлению принципов квантовой механики — анализ понятия измерения. Знаменитый мемуар Гельмгольца озаглавлен «О сохранении силы»; под словом «сила» понималось тогда и то, что мы теперь называем силой, и то, что мы теперь называем работой. Правильный анализ этого сложного понятия и является одной из важнейших заслуг основоположников закона сохранения энергии.

Этот анализ остался, однако, непонятым Фарадеем. Вот что говорит он, например, в одной статье 1857 г. по вопросу о силе тяжести: «Этот (обычный) взгляд на силу тяжести кажется мне противоречащим принципу сохранения силы; это противоречие представляет следующая часть определения силы тяжести: (сила тяжести) изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния. . . Возьмем в пустом пространстве две массы  $A$  и  $B$ , между которыми от одной к другой действует сила, благодаря которой они взаимно притягиваются, причем эта сила. . . изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния. . . Пусть при расстоянии между массами, равном 10 единицам длины, сила равна 1; тогда при расстоянии 1, т. е. в 10 раз меньшем, сила будет равна 100. Допустим, что между массами находится упругая пружина, служащая мерой действующей между ними силы; тогда во втором случае натяжение, испытываемое пружиной, будет в 100 раз больше, чем в первом случае. Но каким образом произошло это громадное приращение силы? Если мы скажем, что это своеобразная особенность этой силы, и удовлетворимся таким ответом, то, кажется мне, мы предположим создание силы, создание в таком громадном количестве, и притом благодаря простому и столь незначительному изменению состояния, что даже самый недисциплинированный ум не будет считать это достаточной причиной. . . Мы упразднили бы высший закон физических наук — закон сохранения силы. Допустим теперь, что массы  $A$  и  $B$  снова удалены

на прежнее расстояние друг от друга; тогда притяжение будет составлять уже всего одну сотую долю прежнего, согласно закону, что сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния. Мы снова получили бы изумительный результат, так как это означало бы уничтожение силы, явление, сопутствующее всегда созданию новой силы и происходящее только с тем, что порождает эту новую силу».

Вот что говорит Оствальд по этому поводу: «В настоящее время нам кажется поразительным, что такой ясный и глубокий ум, как Фарадей, не мог разрешить недоразумения, вытекающего из того, что слову «сила» придавались тогда различные значения. Фарадей цитирует даже монографию Гельмгольца о сохранении силы. . . У него перед глазами несомненно уже было решение этой загадки, но он его не видел».

Объяснение этому замечательному явлению нелегко найти. Старческое самомнение при открытом и скромном характере Фарадея совершенно исключается. В состоянии умственного переутомления, в каком он впоследствии почти непрерывно находился, возможна еще в редкие часы, следующие за продолжительным отдыхом, самостоятельная работа мысли; эта работа будет доставлять даже приятные ощущения; но усвоению чужих мыслей ум в таком состоянии сопротивляется гораздо сильнее: на каждую такую попытку он реагирует пассивным сопротивлением. Поэтому мы можем предположить, что так как Фарадей сам более не в состоянии был выяснить ошибку, вытекающую из употребления одного и того же слова в различном значении и скрывшую от него сущность, то он вообще никем уже не мог быть направлен на истинный путь, так как его ум сопротивлялся восприятию чужого объяснения. И в этом замечательном случае перед нами снова выступает в самой жестокой форме ограниченность человеческих способностей даже у наших величайших представителей, к которым Фарадей несомненно принадлежит».

Перейдем теперь к рассмотрению эволюции воззрений Фарадея на природу электромагнитных сил. В то время как в вопросе об единстве сил природы Фарадей являлся только одним из лучших выразителей господствовавших идей своего времени, в вопросе о природе электромагнитных сил он явился смелым новатором. Блестящие экспериментальные открытия Фарадея немедленно находили всеобщее признание; теоретические же его воззрения по упомянутому вопросу, служившие ему надежной путеводной нитью в этих открытиях, остались, в сущности, непонятыми современниками; к ним относились, как к странным туманным спекуляциям, порой почти презрительно, как к чудачествам человека, не смогшего овладеть истинной теорией действия на расстоянии<sup>13</sup>.

<sup>13</sup> Вот, например, цитата из письма такого крупного ученого, как Эри (Airy), датированного 1855 г. (цитировано по книге Vence Jones'a, т. II, стр. 353): «Я заявляю, что я с трудом могу себе представить, чтобы кто-нибудь, кто практически и количественно знает совпадение наблюдений и вычислений,

Понадобилась творческая работа родственного гения Максвелла, облекшего идеи Фарадея в точную математическую форму, чтобы сделать содержание этих идей доступным большому кругу ученых.

В начале XIX в. закон всемирного тяготения Ньютона рассматривался как образец для всех законов сил. Законы Кулона имели ту же форму. И не случайно Ампер тотчас же после открытия механического взаимодействия токов облек законы этого взаимодействия в классическую форму законов действия на расстоянии, обратного пропорционального квадрату этого расстояния и направленного по прямой, соединяющей взаимодействующие тела. Правда, при этом Амперу, в отличие от классического образца, пришлось принять за взаимодействующие элементы не точки, а отрезки линий (элементы тока). А сколько труда и остроумия потратили впоследствии Франц Нейман, Вебер и другие для того, чтобы и открытый Фарадеем закон индукции токов облечь в ту же форму закона дальнего действия!

Фарадею же сама гипотеза действия на расстоянии представлялась непонятной и неудовлетворительной. Аналитическому уму Ампера или Вебера доставляло удовлетворение сведение законов электромагнетизма к классическим формам элементарных взаимодействий; синтетическому же уму Фарадея, мыслившему наглядными геометрическими образами, всегда чуждавшемуся математического анализа, это сведение, помимо всех принципиальных соображений, не могло не представляться искусственным. Существенные свойства явлений, как они даются нам в опыте, естественнее и непосредственнее могут быть описаны с помощью понятия магнитных силовых линий, «под которыми я понимаю линии магнитных сил. . . как они могут быть очерчены железными опилками, или линии, к которым очень маленькая магнитная стрелка становится в касательное положение»<sup>14</sup>. И Фарадей в первой же работе об индукции токов формулирует законы этой индукции с помощью представления о пересечении проводником этих магнитных линий. Но раз пересечение линий в среде, скажем между полюсами магнита, возбуждает токи, то не значит ли это, что магнитные линии в среде не только умственный образ, но имеют и реальное существование?

В статье Фарадея 1833 г. есть известное место, где электрический ток определяется как «ось действия (power), обладающая противоположными силами, точно равными по величине, но противоположными по направлению»<sup>15</sup>. Через 19 лет мы встречаем следующее пояснение: смысл этого определения «совершенно точен и означает, что силы противоположны не потому, что они имеют

---

основанных на законе действия на расстоянии, мог хотя бы одно мгновение колебаться в выборе между этим простым и точным действием, с одной стороны, и чем-то столь неясным и неопределенным, как линии сил, с другой стороны».

<sup>14</sup> Exp. Res., N 114, 1831.

<sup>15</sup> Exp. Res., N 517.

противоположные направления, а что они противоположны по своей природе; поверните одну из сил (на  $180^\circ$ ), и она от этого не станет подобной первой» (№ 3265). Этот пример может служить иллюстрацией того, насколько иногда действительно трудно понять мысль Фарадея. И в речи, посвященной его памяти, Гельмгольц вспоминает о том, как часто он сидел, безнадежно пытаясь отыскать смысл подобных утверждений Фарадея.

Для нас же сейчас существеннее всего, что определение тока как оси действия совершенно соответствует позднейшим воззрениям Фарадея на природу сил. Сила не действует непосредственно между двумя удаленными точками; во всяком действии силы принимает участие все промежуточное пространство между этими точками. Ось действия есть в сущности то же, что впоследствии обозначается термином «силовая линия»<sup>16</sup>.

В упомянутой статье 1833 г. Фарадей критикует теории Гротгуса, Дэви и Де-ла-Рива, согласно которым вещества, выделяющиеся при электролизе на электродах, притягиваются электродами из раствора силами, обратно пропорциональными квадрату расстояния от электродов. Ибо, говорит Фарадей, согласно этому утверждению интенсивность электролитического разложения и сила тока должны были бы убывать при удалении от электродов, что, однако, противоречит результатам специально поставленной им серии опытов.<sup>17</sup>

Отрицая, таким образом, определяющую роль электродов, Фарадей приходит к заключению, что ток в электролите обуславливается не внешними силами притяжения электродов, а внутренними силами взаимодействия смежных частиц электролита, причем при наличии тока силы обычного химического средства ослабляются в одном и усиливаются в противоположном направлении; поэтому составные части молекул переходят от молекулы к молекуле, пока не достигнут электрода (№ 518-519, 524).

Таким образом, представление о силовых линиях и о роли взаимодействия смежных частиц среды с полной ясностью выражено уже в первых мемуарах серии «Experimental Researches».

Плодотворность этих представлений разительным образом подтвердилась в 1837 г. открытием поляризации диэлектриков, диэлектрической постоянной, зависимости емкости конденсатора от промежуточной среды и т. д. Как и большинство открытий Фарадея, эти открытия были далеко не случайны, а явились результатом упорных поисков в вполне определенном направлении, и сам Фарадей в первых параграфах мемуара 1837 г. устанавливает

<sup>16</sup> Ср. *F. Rosenberger*, т. II, стр. 284.

<sup>17</sup> Наиболее убедительный из этих опытов почему-то реже всего упоминается в литературе. Фарадей показал, что в случае электролита постоянного сечения, находящегося между двумя плоскими параллельными электродами того же сечения, падение потенциала на единицу длины (мы пользуемся топерешней терминологией) не зависит от расстояния от электродов (*Exp. Res.*, N 502).

связь этих открытий со взглядами, выработанными им на природу тока. Электролиты в твердом состоянии (например, лед), как открыл Фарадей в 1833 г., не проводят тока, но не препятствуют электростатическому взаимодействию (по терминологии Фарадея — индукции) разделенных ими тел. Следовательно, индукция является первичной стадией, а электролитическое разложение (после плавления электролита) — вторичной. И поскольку ток в электролите сводится к взаимодействию смежных частиц, постольку «я начал подозревать, что и обычная индукция во всех случаях является действием смежных частиц и что электрическое действие на расстоянии (т. е. обычное индуктивное действие) всегда происходит только через посредство промежуточного вещества» (№ 1164).

В примечании к этому параграфу Фарадей замечает, что термин «смежный» «не совсем точен, поскольку частицы не соприкасаются друг с другом. . . Под смежными частицами я понимаю ближайшие друг к другу частицы». А несколько дальше он подробнее рассматривает вопрос о передаче сил через абсолютный вакуум. «Допустим, что положительно заряженная частица может находиться в центре пустоты диаметром в 1 дюйм. Согласно моим теперешним взглядам, ничто не препятствует тому, чтобы эта частица действовала на расстоянии в полдюйма на все частицы, образующие внутреннюю поверхность граничной сферы, с силами, согласующимися с известным законом квадратов расстояния. Но предположим, что эта сфера в 1 дюйм была бы заполнена изолирующим веществом; тогда, согласно моим представлениям, электризованная частица не действовала бы непосредственно на отдаленные частицы, а лишь на непосредственно прилегающие к ней (*those in immediate association with it*), затрачивая всю свою силу на их поляризацию»<sup>18</sup>. Дальнейшие пояснения Фарадея могут быть вкратце переданы так: все силовые линии, исходящие из центральной электризованной частицы, заканчиваются на смежных частицах, которые при этом поляризуются, так что из обращенных наружу участков их, в свою очередь, исходят силовые линии, заканчивающиеся на частицах следующего слоя, и т. д. В результате удаленные на 1 дюйм частицы, подвергавшиеся в случае вакуума прямому действию центральной частицы, подвергаются не прямому действию той же величины и направления, передаваемому промежуточными частицами среды.

Таким образом, теория Фарадея, по крайней мере в рассматриваемой ее стадии, являлась не последовательной теорией близкого действия, а скорее теорией «ограниченного дальнего действия» между смежными частицами. Однако в дальнейшем представление о силовых линиях, пронизывающих вакуум, приобретало все большую определенность и осязательность. Уже в упомянутом мемуаре 1837 г. содержится замечательное рассуждение о наличии бокового

<sup>18</sup> Exp. Res., N 1616.

давления между смежными силовыми линиями. Даже сейчас, в свете столетнего развития и популяризации идей Фарадея, крайне трудно понять ход мысли Фарадея, который, изложив опытные доказательства искривления линий сил при внесении в поле проводников, приходит к заключению: «Ничто не может лучше этого доказать как искривление линий или путей индуктивного действия. . . , так и, так сказать, боковое давление этих линий друг на друга»<sup>19</sup>. Все значение этого трудно понятного хода мыслей становится ясным только в свете последующих изысканий Максвелла, который путем сложного математического анализа доказал, как известно, что система механических сил в электрическом поле может быть полностью сведена к натяжениям вдоль силовых линий и перпендикулярным к ним давлениям. Совершенно исключительная глубина интуиции Фарадея, по-видимому, позволила ему непосредственно усмотреть эти соотношения в результатах первой же серии опытов!

Доказав влияние среды на электрические действия, проверив на этом правильность и плодотворность своих представлений, Фарадей уже в следующем 1838 г. производит ряд опытов для того, чтобы выяснить, не оказывает ли среда влияния и на магнитные действия и не передается ли магнетизм на расстояние действием промежуточных частиц<sup>20</sup>.

Первые опыты дают отрицательные результаты, и серия неудач долго еще преследует Фарадея. С этим временем совпал второй, весьма острый период упадка деятельности и полного истощения, вызванного предельным напряжением творчества. За шесть лет (1839—1844) Фарадей опубликовал только четыре мемуара — столько же, сколько за один 1838 г., и притом сравнительно второстепенного значения. В течение четырех лет, за исключением одной серии, он не производил никаких экспериментов по электричеству. Ему пришлось лечиться отдыхом в Швейцарии и на море, пришлось совершенно сознательно жестко сократить или совсем прекратить лекции, заседания, консультации, отклонять приглашения в общество, на обеды и т. д. В феврале 1843 г. он пишет Маттеучи (Matteucci): «Вчера я получил ваше письмо и тронут вашим дружеским проявлением интереса к человеку, который чувствует, что его цель на этом свете уже позади. . . Здоровье и настроение у меня, правда, хороши, но память исчезла». Полтора года спустя он пишет в другом письме: «В моих мыслях бродит много прекрасных открытий, которые я раньше надеялся и теперь еще желаю осуществить; но когда я обращаюсь к работе, я теряю всякую надежду, ибо вижу, как медленно она подвигается вперед за недостатком времени и сил; я чувствую, что эта работа, быть может, осуществляет последнюю из всех тех мыслей, которые я мог бы практически осуществ-

<sup>19</sup> Exp. Res., N 1224, см. также N 1297 и 1304.

<sup>20</sup> Exp. Res., N 1662, 1710.

вить. Я не говорю, что ум отказывается работать; я говорю только, что психофизические функции, координирующие работу ума и тела, слабеют, в особенности память. Отсюда — значительное сокращение количества производимой мною работы. В силу этого я должен был значительно изменить характер своей жизни и работы: я прекратил сношения с товарищами по специальности, ограничил число своих исследований, которые, быть может, привели бы к открытиям. Я часто должен обращаться к своему домашнему врачу с жалобами на головную боль, головокружение и т. д., и он часто приказывает мне бросить беспокойные мысли и умственную работу и отправляться на море, чтобы ничего не делать»<sup>21</sup>.

Только в 1845 г., в возрасте 54 лет, Фарадей оправился настолько, что вновь мог приступить к работе. Этот 1845 год сразу приносит два фундаментальных открытия: открытие вращения плоскости поляризации света магнитным полем, о котором мы уже упоминали, и открытие всеобщности магнитных свойств вещества — явлений диамагнетизма. Характерно заглавие первого мемуара — «О намагничивании света и об освещении магнитных силовых линий». Силовые линии, о которых Фарадей в 1837 г. определенно говорил: «Эти линии воображаемы» (№ 1304), за это время приобрели в его представлении гораздо большую конкретность. В примечании к упомянутому мемуару Фарадей замечает, что его заглавие было неправильно истолковано некоторыми в смысле желания Фарадея сказать, что он заставил силовые линии светиться. «Это не входило в мое намерение. Я хотел выразить, что линия магнитной силы была освещена так, как Земля освещается Солнцем или как сотканная пауком паутина освещается лампой астронома. Пользуясь лучом света . . . мы можем по оптическому действию луча на глаз видеть путь магнитных линий так же, как мы можем видеть путь (положение) стеклянной нити или любого другого прозрачного вещества, становящегося видимым при свете» (№ 2146). И умственному взору Фарадея эти линии действительно представлялись сложной паутиной, связующей отдельные частицы вещества в единую всеобъемлющую систему.

Последовавшее в том же году открытие диамагнетизма решило поставленную в 1838 г. задачу — доказать влияние среды на магнитные явления. Впрочем, Фарадей считал, что в вопросе о передаче сил на расстояние частицами промежуточной среды открытые и исследованные им явления диамагнетизма не обладают той степенью доказательности в отношении магнитных сил, какой, по его мнению, обладают явления в электролитах и диэлектриках в отношении сил электрических.

Мы лишены возможности с той же подробностью следить за дальнейшим развитием идей Фарадея, так же как лишены воз-

---

<sup>21</sup> Цитировано по В. Оствальду, стр. 116.

возможности касаться его исследований в области электрических разрядов в газах («фарадеево пространство»), электризации и сжижении паров и газов, земного магнетизма, магнитокристаллических эффектов и т. д. Коснемся в заключение лишь взглядов Фарадея на вопрос о физической реальности силовых линий.

Созданный Фарадеем в противовес господствовавшим теориям дальнего действия представление о силовых линиях полностью оправдало себя на деле: оно оказалось верным руководителем Фарадея на пути многочисленных блестящих открытий; с помощью тех же представлений ему удалось сформулировать все известные и вновь открытые законы электромагнетизма. Различные диэлектрики, так же как и различные магнетики, отличаются своей проницаемостью для силовых линий. Если поместить более проницаемое тело в менее проницаемой среде, большее число силовых линий изберет путь через это тело, что, в свою очередь, обусловит появление тяги, стремящейся переместить тело в область большей густоты силовых линий. На поверхности уединенной заряженной сферы концы силовых линий распределены равномерно, так что силы тяги со стороны этих линий взаимно компенсируются. Если же к этой сфере приблизить другое заряженное тело, то силовые линии перераспределятся определенным образом в пространстве, а концы их — на поверхности сферы, и результирующая сила тяги этих линий, испытываемых поверхностью сферы, станет отличной от нуля. При больших размерах заряженных тел по сравнению с их расстоянием результирующая эта оказывается обратно пропорциональной квадрату расстояния.

На фоне этих успехов представляется совершенно естественным, что Фарадей приходит к такому заключению: «Я могу только сказать, что ни в каком участке пространства, будь оно (пользуясь обычной фразеологией) лишено материи или заполнено ею, я не могу себе представить ничего, кроме сил и линий, вдоль которых они действуют». Эта фраза взята из статьи «Thoughts on Ray Vibrations» в «Phil. Mag.» 1846 г., которую Фарадей не включил в серию «Экспериментальных исследований» благодаря ее «спекулятивному характеру». В ней он высказывает предположение, что элементарнейшие частицы вещества могут представлять собой, быть может, только силовое поле — электрическое, магнитное и гравитационное, — окружающее точечный центр. Согласно этому взгляду, совпадающему по существу со взглядами Босковича, атом не обладает определенным размером, а скорее должен считаться вполне проницаемым и распространяющимся по всему пространству и молекулы химических соединений должны состоять не из группы соприкасающихся атомов, а из «взаимно проникающих друг в друга сфер действия, центры которых могут даже совпадать»<sup>22</sup>. Наконец, свет и лучистое тепло могут представлять собой поперечные колебания, распространяющиеся вдоль

<sup>22</sup> Цит. по *Vence Jones*, I. c., т. II., стр. 178.



силовых линий, заполняющих все пространство. И Фарадей предлагает, как мы уже упоминали, устранить, таким образом, понятие эфира (*dismiss the aether*), или, вернее, заменить его совокупностью силовых линий, связующих между собой центры сил.

Впрочем, Фарадей всегда в высшей степени скрупулезно отличал гипотезы от фактов и всегда настойчиво подчеркивал, что возможность правильного и точного описания электромагнитных явлений с помощью представления о силовых линиях еще вовсе не решает вопроса об истинной природе этих явлений. Склоннаясь, естественно, к взгляду, что силовые линии обладают физической реальностью, Фарадей в конце 40-х и начале 50-х годов посвящает этому вопросу несколько статей, всякий раз оговаривая при этом, что статьи эти носят «в высшей степени гипотетический и спекулятивный характер».

Три главных аргумента приводит Фарадей в защиту физической реальности электрических и магнитных силовых линий, тогда как тяготение он считает действующим на расстоянии.

1. Полярность электричества и магнетизма, в отличие от действующего на расстоянии тяготения, которое полярностью не обладает (ибо не существует отрицательных масс). В случае полярных сил «одна сила находит или возбуждает вблизи себя противоположную силу и поэтому не может распространяться вдаль»<sup>23</sup>. И далее: «В отличие от тяготения (электрическая) сила ограничена (по величине). Данная электрочастица не может действовать на вторую, третью и четвертую частицы так же, как и на первую; чтобы действовать на последующие, ее сила должна быть в соответствующей части отнята от предшествующих частиц» (№ 3248). Смысл этого рассуждения (ср. стр. 22) сводится, по-видимому, к утверждению, что от каждого заряда исходит вполне определенное число силовых линий, концы которых лишь перераспределяются между смежными зарядами противоположного знака. Нам, однако, трудно усмотреть в этом отношении какое-либо различие сил электромагнитных от тяготения.

2. В отличие от тяготения электрические и магнитные взаимодействия зависят от промежуточной среды.

3. Наконец, электрические и магнитные силовые линии искривлены, тогда как тяготение действует прямолинейно: «Я не могу представить себе искривленные линии сил вне условия физического существования (их) в промежуточном пространстве»<sup>24</sup> (№ 3258, см. также № 3254).

Ни один из этих аргументов не является для нас теперь решающим. Мы знаем, что в области статических и квазистационарных электромагнитных явлений, изучением которых в сущности только и ограничивался Фарадей, теория силовых линий, как в первоначальной, так и в современной своей форме (теория поля),

<sup>23</sup> Ср. *E. T. Whittaker*, стр. 217.

<sup>24</sup> Цит. по *F. Rosenberger*, стр. 296.

и теория дальнего действия совершенно эквивалентны: каждая из них способна вполне правильно описать всю совокупность явлений, отличаясь только сосредоточением внимания, выдвиганием на первый план одной определенной группы их многообразных свойств. В частности, влияние среды объясняется современной электронной теорией способом, в сущности вполне соответствующим чистой кулоновой теории дальнего действия, причем она пользуется такими представлениями о поляризации диэлектриков и намагничивании магнетиков, которыми пользовался часто и сам Фарадей.

Единственным же решающим аргументом в пользу физической реальности поля является для нас конечность скорости распространения электромагнитных полей в сочетании с законом сохранения энергии. Ибо из этих двух законов следует, что электромагнитное поле и в отсутствие весомой материи может являться носителем электромагнитной энергии. Сам Фарадей вполне отчетливо сознавал решающее значение элемента времени в вопросе о физической реальности силовых линий, но не располагал, конечно, соответствующими опытными данными.

Однако и в области стационарных электромагнитных явлений представления Фарадея оказались весьма плодотворными, ибо, отличаясь чрезвычайной наглядностью, сосредоточивали внимание как раз на тех сторонах явлений, позволяли охватить одним взглядом как раз те соотношения, которые при пользовании теорией дальнего действия оставались в тени и требовали значительно более сложного анализа.

Современная электронная теория представляет собой в сущности своеобразный синтез воззрений Фарадея и теорий дальнего действия. Теориям дальнего действия соответствуют такие черты современных воззрений, как кардинальная роль, отводимая электрическим зарядам, представление об их субстанциальности, современная электронная теория сложных явлений, происходящих в проводниках, диэлектриках и магнетиках, наконец, сведение электромагнитных явлений к «запаздывающему дальнему действию» зарядов (запаздывающие потенциалы). С другой стороны, воззрения Фарадея соответствует признание физической реальности электромагнитного поля как носителя электромагнитной энергии и самая идея близкого действия, согласно которой все явления в данной пространственно-временной точке полностью определяются состояниями смежных с нею пространственно-временных точек <sup>25</sup>.

---

<sup>25</sup> Во всей статье мы последовательно пользуемся исключительно классическими, т. е. доквантовыми, представлениями. Известно, что как раз на проблеме поля (электродинамика) в настоящее время сосредоточено внимание квантовой теории и что решение этой проблемы, возможное лишь на основе физического, а не формального только синтеза квантовой теории и теории относительности, несомненно будет сопряжено с коренной перестройкой ряда основных наших физических воззрений.

Конечно, самая идея близкодействия испытала за истекшее столетие существенную эволюцию. Представление о силовых линиях всегда сохранит свое значение как позволяющее чрезвычайно просто и наглядно разобраться в целой области довольно сложных явлений. Однако мы знаем теперь, что область его применимости ограничена, что в других областях электромагнитных явлений, и прежде всего в быстро-переменных полях, оно только затемняет сущность дела или вовсе отказывается служить и ведет к противоречиям. Но именно из представления о силовых линиях выкристаллизовалось понятие поля, имеющее столь фундаментальное значение для всей современной физики.

Современное понятие поля вполне соответствует сущности воззрений Фарадея. И совершенно прав историк физики Розенбергер в своем утверждении, что Фарадей «в конце концов пришел к совсем радикальному представлению о материальности непрерывного пространства»<sup>26</sup>. При этом дело идет вовсе не о механистических теориях эфира, сторонником которых Фарадей никогда не был. Полная несостоятельность столь характерных для физики XIX в. стремлений свести электромагнитные явления к механике гипотетической среды — эфира — с совершенной определенностью выяснилась еще до того, как теория относительности устранила всякую возможность возврата к этим стремлениям. Столь частое злополучное смешение вопроса о материальности пространства, или эфира, с механистическими теориями эфира основано в значительной мере на смешении двух смыслов, в которых употребляется слово «материя».

Физик обычно употребляет это слово в узком смысле, соответствующем в основном понятию весомых тел и понятию субстанции. В этом смысле слова свет, например (хотя он и обладает в сущности весом), или электромагнитное поле вообще не являются материей<sup>27</sup>. В более же широком, философском смысле слова материей является всякая объективная физическая реальность, существующая во времени и пространстве. И в этом смысле не только свет, но и эфир — носитель физических свойств пространства — несомненно, является материальным. Ибо физическое пространство вовсе не представляет собой лишь «пустой» протяженности, в которую как бы вложены материальные тела. Нет, пространство обладает сложными физическими свойствами, — оно является носителем полей электромагнитных и гравитационных, носителем энергии. Состояния и свойства пространства, до свойств геометрических включительно (общая теория относи-

<sup>26</sup> *F. Rosenberger*, l. c., т. II, стр. 305.

<sup>27</sup> С современной точки зрения отличительной характеристикой материи в этом узком смысле слова является не вес или масса, которыми обладают все формы энергии, а 1) наличие электрического заряда (электрон, протон, атом, молекула и т. д.) и 2) наличие отличной от нуля массы покоя в смысле теории относительности.

тельности!), определяются расположенными в нем телами и, в свою очередь, воздействуют на эти тела <sup>28</sup>.

И это представление о пространстве, как о живой физической реальности, находящейся в непрерывном взаимодействии со всеми расположенными в нем телами, одним из главных своих истоков восходит, несомненно, к Михаилу Фарадею.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Faraday*. Experimental Researches in Electricity. London, 1839—1855, 3 тома. Есть немецкий перевод в серии «Ostwald's Klassiker».
2. *M. Faraday*. Experimental Researches in Chemistry and Physics. London, 1859.
3. *Bence Jones*. Life and Letters of Faraday. London, 1870. 2 тома. Наиболее обстоятельная биография Фарадея, содержащая, помимо переписки Фарадея, также выдержки из его дневников, записных книжек, речей и лекций.
4. *E. T. Whittaker*. History of the theories of aether and electricity. Dublin, 1910. Прекрасная книга, 6-я глава которой посвящена воззрениям Фарадея.
5. *F. Rosenberger*. Geschichte der Physik. Braunschweig, 1887—1890. 3 тома (есть русский перевод). Одна из лучших историй физики. Фарадею непосредственно посвящено около 40 стр. в III томе.
6. *В. Оствальд*. Великие люди. Перев. Кваши. СПб., 1910. Четвертая лекция содержит очень интересный анализ психофизиологических особенностей дарования и личности Фарадея.
7. *H. H. Helmholtz*. Die neuere Entwicklung von Faraday's Ideen über Elektrizität. Речь, произнесенная в 1881 г. и перепечатанная в «Naturwissenschaft», 1931, 19, 793. Особенное внимание уделено теории электролитов и гальванической батареи.

Кроме того, в связи с празднованием юбилея Фарадея в ряде журналов («Nature» (англ.), «Reviews of Modern Physics» и т. д.) появилось большое количество посвященных ему статей.

---

<sup>28</sup> Однако величайшей ошибкой является представление об эфире, как о непрерывной жидкости или о совокупности мельчайших атомов, как и вообще всякое представление о пространственных перемещениях «элементов» эфира.

ПРОБЛЕМА АТОМНОГО ЯДРА <sup>1</sup>

Еще лет пять тому назад среди большинства физиков господствовали очень пессимистические настроения относительно того, можно ли в ближайшем будущем ожидать существенных успехов в области физики атомного ядра. Очень многим казалось, что для того, чтобы сколько-нибудь существенно продвинуться вперед в этом трудном вопросе, необходимо такое развитие техники физического эксперимента, какое может быть осуществлено только в течение длинного ряда лет. Блестящие открытия последних лет показали, однако, что в пределах досягаемости современного физического эксперимента лежит громадная неизведанная область явлений, которая только сейчас начинает перед нами раскрываться и значение которой трудно переоценить.

Как от всякого проникновения в новую область, как от всякого действительно принципиального шага вперед, от развития физики ядра можно ожидать не только новых сведений о новых областях явлений, но совершенно несомненно, что эти новые знания позволят увидеть в новом свете и тот круг фактов, который относится к, казалось бы, хорошо изученным областям физики, и приведут к пересмотру и существенному расширению физических понятий и представлений вообще.

Вместе с тем, как и со всяким крупным принципиально важным успехом науки, с развитием ядерной физики несомненно будут связаны практические применения, причем есть основание думать, что как раз в области физики ядра будущее сулит очень большие технические и практические перспективы.

Я позволю себе прежде всего кратко охарактеризовать основные особенности этой области физического исследования. К числу основных ее характеристик относится, с одной стороны, чрезвычайная малость геометрических размеров объекта исследования: по своим линейным размерам ядро составляет примерно лишь одну стотысячную долю атома. Изучение таких малых объектов представляет громадные трудности, но эти трудности, к счастью, частично компенсируются другой характерной особенностью этого круга явлений, а именно огромной величиной энергии, с которой сопряжены явления ядерной физики. Энергия элементарных

---

<sup>1</sup> Изв. АН СССР, ОМОН, серия физ., 1936, № 1-2, 301. Доклад на Сессии Академии наук СССР 14—20 марта 1936 г.

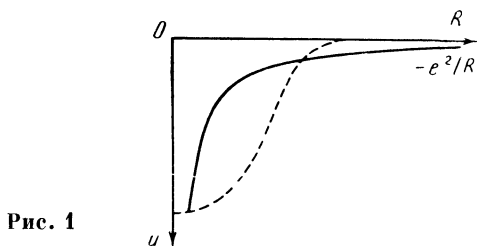
ядерных процессов примерно в миллион раз превышает энергию обычных физических и химических процессов. Это обстоятельство, с одной стороны, облегчает исследования ядерных процессов, с другой стороны, оно обуславливает важные практические перспективы, о которых я буду говорить несколько позже.

Сейчас я хотел бы только отметить, что это сочетание малых размеров и громадности энергий вовсе не случайно и находит свое объяснение в современной квантовой механике. Дело в том, что согласно квантовой механике, в частности согласно принципу неопределенности, если какая-нибудь частица, например, под влиянием каких-либо сил принуждена находиться в малом участке пространства, то она не может не иметь большой кинетической энергии. Можно сказать, что если вы каким-либо образом сужаете, ограничиваете объем, внутри которого может находиться частица, то этим самым вы неизбежно повышаете ее кинетическую энергию. На основании квантовой механики можно вычислить, что кинетическая энергия частицы, находящейся в объеме столь малом, как объем ядра, не может быть меньше десятков и даже сотен миллионов электронвольт. Но раз кинетическая энергия движения частиц в ядре столь велика и раз они при этом все же из ядра не вылетают, значит, они удерживаются внутри какими-то очень большими силами. Таким образом, мы приходим к оценке энергии ядерных процессов, согласующейся с данными опыта и раскрывающей нам внутренние причины этого замечательного сочетания малости геометрических размеров с громадностью энергии.

Позвольте мне перейти к вопросу о строении ядра. Надо сказать, что в этом вопросе еще до 1932 г., который во многих отношениях является рубежом в развитии ядерной физики, господствовали совершенно неправильные представления. Считалось, что ядро состоит из протонов и электронов, и, хотя представление о наличии в ядре этих двух сортов частиц наталкивалось на целый ряд непреодолимых противоречий, тем не менее не было видно никакого выхода из этих затруднений. Совершенно неожиданно в 1932 г. было открыто существование нейтрона — частицы, масса которой примерно равна массе протона и которая с точки зрения атомных и ядерных масштабов относится, таким образом, к числу тяжелых частиц, ибо как протон, так и нейтрон примерно в 2000 раз тяжелее электрона. Однако, в отличие от протона и электрона, нейтрон не имеет электрического заряда. Открытие этой новой, незаряженной частицы явилось совершенно неожиданным, совершенно противоречащим электрической картине строения вещества, которая укрепилась в течение последних десятилетий.

Как только нейтрон был открыт, Д. Д. Иваненко была высказана мысль о том, что ядра состоят только из протонов и нейтронов. Эта гипотеза легла в основу чрезвычайно важных работ ряда физиков, особенно Гейзенберга, и в настоящее время весьма хо-

рошо обоснована, так что вряд ли может существовать сомнение в том, что ядра состоят только из протонов и нейтронов. Нейтрон представляет собой совершенно своеобразную частицу. Будучи лишен электрического заряда, он, насколько мы знаем, практически не взаимодействует с электроном. С другой стороны, существуют чрезмерно большие силы взаимодействия протона с нейтроном, и именно этими силами обуславливается устойчивость и строение атомных ядер. Дело в том, что между входящими в состав ядра протонами существует электрическое отталкивание



одноименных зарядов. Но несомненно, что на малых расстояниях ядерного масштаба эти силы отталкивания, преобладающие на больших расстояниях, играют совершенно второстепенную роль по сравнению с силами притяжения между протонами и нейтронами. Природа этих сил притяжения между протонами и нейтронами совершенно своеобразна. Эти силы не относятся ни к числу электрических или электромагнитных сил, ни к числу сил тяготения, т. е. не принадлежат ни к одному из классов сил, бывших нам ранее известными. Наши сведения о притяжении между нейтронами и протонами еще очень скудны. Я отмечу здесь только своеобразную зависимость этих сил от расстояния. Если по горизонтали откладывать расстояния между двумя частицами, а вниз откладывать ту энергию притяжения между частицами, которая соответствует силам взаимодействия между ними, то сплошная кривая на рис. 1 будет соответствовать обыкновенному кулоновому притяжению противоположно заряженных частиц  $-e^2/R$ , в то время как штриховая кривая в самом грубом приближении дает представление о зависимости специфических сил притяжения между протоном и нейтроном от расстояния. Видно, что на больших расстояниях эти силы не играют никакой роли по сравнению с силами электрическими, тогда как на малых расстояниях, внутри ядра, силы притяжения между нейтронами и протонами, наоборот, существенно превышают силы кулонового отталкивания протонов друг от друга. Замечу, что выдержать на чертеже правильный масштаб невозможно, так что приведенный чертеж дает только очень грубое качественное представление о соотношении этих двух классов сил.

То обстоятельство, что специфические силы взаимодействия нейтронов и протонов до последнего времени нам были неиз-

вестны, отчасти обуславливается именно тем, что они действуют только на весьма коротких расстояниях, при непосредственном сближении протона и нейтрона.

Надо сказать, что между частицами, входящими в состав ядра, вероятно, существуют и другие силы, помимо притяжения между протонами и нейтронами и помимо электрического отталкивания между протонами. Так, между протонами существуют, по-видимому, также еще силы неэлектрического происхождения, вероятно, того же происхождения, что и силы, действующие между протонами и нейтронами. На это указывают последние опыты по аномальному рассеянию быстрых протонов в водороде. Возможно, далее, что существуют силы взаимодействия между нейтронами. Однако, во всяком случае, можно сказать, что основную роль во всех процессах, идущих в ядре, играют силы притяжения рис. 1 и что именно ими обуславливается устойчивость ядер.

С точки зрения принципиальной открытие нейтрона имеет чрезвычайно большое значение. Оно показало несостоятельность электрической картины строения вещества, которая еще очень недавно безраздельно господствовала в физике, вернее, оно установило границы круга применимости соответствующих представлений. Конечно, в той области, на основе изучения которой создавалась электрическая картина строения вещества, — в области атомных и электронных явлений, — в этой области она продолжает сохранять свою значимость, ибо взаимодействие электронов с ядром, так же как и электронов друг с другом, целиком определяется электрическими силами. Более того, ввиду малости размеров ядра по сравнению с размерами атомов при рассмотрении большинства физических и химических процессов ядро можно трактовать просто как электрический заряд, ибо структура ядра в большинстве случаев на этих процессах не сказывается.

Резкое противоречие между существованием незаряженного нейтрона и установившимися взглядами на электрическое строение вещества привело к тому, что в первое время после открытия нейтрона высказывалось предположение, что нейтрон представляет тесное объединение протона с электроном. В настоящее время можно быть убежденным, что это предположение неправильно и что нейтрон является столь же элементарной частицей, как и протон. В конце доклада я к этому вернусь и остановлюсь на некоторых фактах, доказывающих это положение.

Одним из наиболее важных способов изучения строения ядра несомненно является изучение ядерных реакций, т. е. таких реакций, в которых происходят не перегруппировки атомов, а превращения атомных ядер, превращения химических элементов. Хотя искусственное расщепление ядра было впервые осуществлено еще 15 лет тому назад Резерфордом, только в самые последние годы началось обильное накопление нового фактического ма-



териала. В настоящее время число ядерных реакций, известных нам, превышает 150.

Характерной особенностью этих реакций пока что является чрезвычайно ничтожная их эффективность. Для осуществления большинства реакций приходится бомбардировать какое-нибудь вещество потоком быстро движущихся заряженных частиц — протонов,  $\alpha$ -частиц, дейтронов и т. д., причем очень небольшая доля частиц, которыми бомбардируется данное вещество, вступает в реакцию с ядрами данного вещества. Эта доля колеблется от одной стотысячной до одной миллиардной. Эта малая эффективность обуславливается прежде всего малостью размеров ядра, малой вероятностью того, что данная быстролетящая частица как раз попадет в одно из ядер бомбардируемого вещества, занимающих столь малую долю объема всего вещества. Помимо этого, существенную роль играет также тот факт, что все тяжелые заряженные частицы бомбардировки, которыми вызывают ядерные реакции, обладают, как и все атомные ядра, положительным электрическим зарядом и потому на сравнительно больших расстояниях весьма сильно отталкиваются ядрами. И только при непосредственном соприкосновении частиц друг с другом вступают в игру специфические силы притяжения между протоном и нейтроном, преодолевающие силы электрического отталкивания.

Правда, если бомбардировать вещество не заряженными частицами, а нейтронами, эффективность реакций может стать сравнительно очень большой. Однако само получение нейтронов связано с реакциями первого типа, с малоэффективными реакциями, осуществляемыми или путем бомбардировки ядер заряженными частицами, или путем освещения  $\gamma$ -лучами. Поэтому практического значения ядерные реакции и превращения химических элементов пока не могут иметь, хотя в некоторых специальных случаях они могут приобрести практическое значение уже в ближайшие годы. Так, например, не исключена возможность, что в ближайшее время изготовление искусственных радиоактивных веществ путем соответствующих ядерных реакций окажется возможным в достаточно больших масштабах и что эти вещества будут широко применены в медицине.

Реакции, происходящие при бомбардировке различных веществ нейтронами, отличаются рядом интересных и своеобразных особенностей. Так, например, оказывается, что в случае бомбардировки медленными нейтронами выход реакции бывает чрезвычайно большой, во много раз — иногда в тысячи раз — превышающий тот полезный выход реакции, который можно было предвидеть, исходя из простого подсчета вероятности попадания нейтрона в какое-либо из атомных ядер бомбардируемого вещества. Иными словами, число вступивших в реакцию нейтронов существенно превышает число попаданий нейтронов в ядра, которое можно рассчитать на основе простых геометрических соображе-

ний. Этот факт, совершенно непопятный с точки зрения классической физики, становится понятным, если принять во внимание волновые свойства нейтрона и учесть, что согласно квантовой механике в известных случаях мерой эффективных размеров частицы является длина волны, соответствующей этой частице, и что при малых скоростях частицы эта длина волны может быть очень велика.

Но если факты чрезвычайно большого выхода продуктов реакции при бомбардировке медленными нейтронами и находят принципиальное объяснение в волновой механике, то до самого последнего времени чрезвычайно трудность представляло объяснение некоторых особенностей этих реакций. В частности, нельзя не упомянуть о замечательном явлении так называемого селективного поглощения нейтронов, заключающемся в том, что при бомбардировке медленными нейтронами различных веществ весьма малые изменения скорости нейтронов в некоторых случаях приводят к колоссальному изменению вероятности захвата нейтронов ядрами бомбардируемого вещества, к колоссальному изменению количества вещества, прореагировавшего в результате бомбардировки. Интервалы скоростей, внутри которых нейтроны являются исключительно активными в смысле возбуждения реакции, оказываются весьма узкими, причем положение этих узких интервалов скоростей самым причудливым образом зависит от природы бомбардируемого вещества.

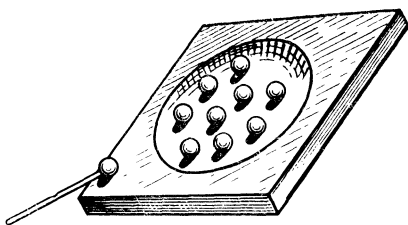
Эти явления представлялись чрезвычайно загадочными, и только около  $2\frac{1}{2}$  недель тому назад появилась замечательная статья Бора, которая открыла возможность их объяснения. В этой статье Бору впервые удалось выяснить целый ряд характерных особенностей строения атомных ядер и связанных с этим особенностей ядерных реакций. Чтобы пояснить особенности строения ядер, Бор сравнивает его с хорошо известным строением атома, или, вернее, со строением внешней электронной оболочки атома, которая окружает центральное ядро атома и в которой протекает большинство физико-химических процессов. Теория строения атома, строения электронной оболочки атома, представляет чрезвычайно трудную хотя бы потому, что, подобно теории ядра, она связана с проблемой движения большого числа взаимодействующих тел — десятков электронов, которые не только притягиваются ядром, но и отталкиваются друг от друга.

Известно, что в классической механике даже проблема движения трех тел, взаимно притягивающих друг друга, представляет уже весьма серьезные затруднения. Понятно, насколько усложняется эта задача, когда взаимодействуют не три, а десять, иногда сотни тел. Для того чтобы разобраться в сложном движении такой сложной системы, совершенно необходимо прибегнуть к приближенным способам.

В вопросах строения атома пригодным первым приближением оказалось следующее: в известных случаях можно считать задан-

ным движением всех электронов в атоме, кроме одного, и затем исследовать движение этого одного электрона, который нас в данный момент интересует, в зависимости от заданного движения других электронов. Другими словами, проблему многих тел приближенно можно заменить проблемой одного тела, пренебрегая в первом приближении обратным действием выделенного нами электрона на движение остальных электронов. Этот приближенный способ позволил нам разобраться в строении атома. Бор подчеркивает в своей статье, что такого рода привычное нам приближение совершенно неприменимо в случае ядра ввиду того, что

Рис. 2



взаимная связь, взаимодействие частиц, входящих в состав ядра, чрезвычайно велики. В ядре нельзя выделить движение одной частицы из сложного движения всей системы, ибо движение каждой частицы существенно влияет на движение всех остальных частиц, т. е. нельзя заменить проблему многих тел проблемой одного тела, движущегося в заданном поле сил. Это, с одной стороны, чрезвычайно усложняет теорию ядра, с другой стороны, учет этого обстоятельства позволяет разобраться в ряде характерных особенностей ядерной реакции. Чтобы пояснить свою мысль, Бор прибегает к следующей иллюстрации.

Представим себе (рис. 2) доску с чашеобразным углублением и шарик, который катится по доске и попадает в чашу. Если бы эта чаша была пуста, то шарик пробежал бы по дну чаши и затем снова вылетел бы наружу, на поверхность доски. Но если в чаше находится большое количество других шариков, то первый шарик, попав в чашу, столкнется с каким-нибудь из находящихся в ней шариков и передаст ему свою энергию. В свою очередь и этот шарик, соударяясь с другими, передаст часть своей энергии соседям и т. д. В результате энергия движения первого шарика весьма быстро распределится между шариками, находящимися в чаше, и шарики придут в состояние беспорядочного движения. При этом ни один из находящихся в чаше шариков не будет иметь достаточно энергии для того, чтобы выскочить из чаши и подняться вверх на поверхность доски, до тех пор, пока под влиянием случайных столкновений избыточная энергия, принесенная первым шариком, вновь не сконцентрируется случайно в одном из них, так что этот шарик сможет вылететь на-

ружу. Таким образом, существует такое полустойчивое состояние этой системы, когда избыточная энергия первого шарика, достаточная по своей величине для вылета его или другого шарика наружу, распределяется малыми порциями на все шарики, вследствие чего ни один из шариков в течение известного времени не может вылететь из чаши и вся система продолжает находиться в состоянии полустационарного движения.

Нечто аналогичное происходит в случае ядерных реакций. Если представить себе вместо шарика нейтрон, то этот нейтрон, попадая в ядро, застревает в нем и передает ему свою энергию. При этом принесенная влетевшим в ядро нейтроном избыточная энергия передается не одному какому-нибудь определенному нейтрону или протону ядра, а благодаря чрезвычайно сильной связи, взаимодействию частиц в ядре, распределяется малыми порциями по всем частицам ядра. Поэтому должно пройти довольно значительное время, пока эта избыточная энергия не сконцентрируется опять на какой-либо одной частице или группе частиц, которая получит, таким образом, достаточно энергии, чтобы вылететь наружу из ядра.

Таким образом, становится понятным существование промежуточных полустойчивых состояний ядра, отделяющих момент проникновения в ядро нейтрона от момента вылета из ядра этой же или какой-либо другой частицы. Этот латентный период аналогичен своего рода радиоактивности, потому что энергия полустойчивого довольно длительного состояния ядра достаточно велика для того, чтобы мог произойти распад ядра. Вылет из ядра в конце латентного периода одной или нескольких частиц и является таким распадом ядра, аналогичным радиоактивному распаду. Этот тип полустойчивых состояний совершенно не встречается в электронной оболочке атома. Если влетевший в атом электрон ударом передаст свою энергию одному из электронов атома, то этот второй электрон, вообще говоря, со всей этой энергией вылетит из атома, ибо взаимодействие между электронами в атоме сравнительно настолько слабо, что обмен энергии между ними произойти не успеет.

Хотя в теории сложных молекул и приходится встречаться с полустойчивыми состояниями, аналогичными только что описанным, однако в большинстве случаев в основе таких состояний лежит совершенно другой механизм. Нам были известны такие полустойчивые состояния ядер, когда система (ядро) имеет достаточно энергии для того, чтобы произошел ее распад, сопровождающийся вылетом наружу частей или осколков этой системы ( $\alpha$ -радиоактивность), однако существование этих состояний объясняется наличием сил отталкивания между частями, входящими в состав системы. Эти силы создают вокруг ядра так называемый потенциальный барьер, препятствующий вылету  $\alpha$ -частиц из ядра наружу. Таким образом, наличие потенциального барьера также создает возможность существования полустойчивых

состояний ядер с избыточной энергией, но природа этих состояний в этом случае совершенно иная.

Теория Бора, основную мысль которой я изложил, дала ему возможность впервые объяснить и избирательное поглощение нейтронов и целый ряд других особенностей ядерных реакций. Можно не сомневаться, что эта теория будет иметь очень большое значение для всей ядерной физики. Бору мы были обязаны выяснением строения атома и теорией строения периодической системы элементов. По-видимому, теперь тому же Бору удалось выяснить основные особенности строения ядра.

Я хотел бы теперь после вопроса о строении ядра остановиться на другом замечательном открытии, тоже относящемся к 1932 г., — на открытии позитрона. Хотя позитрон и не входит в состав ядра, однако открытие его существования имело громадное значение для всей ядерной физики.

История открытия позитрона совершенно отлична от истории открытия нейтрона. В то время как нейтрон был открыт совершенно неожиданно, существование позитрона было предсказано теоретически.

В 1930 г. Дирак, исходя из анализа основных положений квантовой механики в сочетании с основными положениями теории относительности, исходя, в частности, из собственных своих работ, в которых впервые был дан известный синтез этих двух независимо друг от друга развивавшихся теорий, пришел к парадоксальному выводу, что если основы этих теорий — квантовой механики, с одной стороны, и теории относительности, с другой, — верны, то в природе должны существовать частицы положительного электрического заряда, отличающиеся от электрона только знаком своего заряда и имеющие ту же массу, что и электрон. В отличие от протонов, тоже обладающих положительным зарядом, но обладающих массой в 2000 раз большей, чем электрон, эти частицы были названы позитронами.

В первых работах Дирака по этому вопросу имелись некоторые неправильные положения: не было ясно, что масса положительных частиц должна быть равна массе электрона, но это недоразумение скоро разъяснилось.

Согласно теории Дирака, эта гипотетическая частица — позитрон — должна была обладать в высшей степени поразительными свойствами. При соударении позитрона с электроном обе эти противоположно заряженные частицы могут взаимно нейтрализоваться и исчезнуть, причем энергия этой «пары» частиц — электрона и позитрона — переходит в иную форму энергии, например в энергию света. Возможен и обратный процесс, когда при известных условиях свет очень большой частоты ( $\gamma$ -лучи или очень жесткие рентгеновы лучи) может исчезнуть при одновременном возникновении за счет его энергии «пары» противоположно заряженных частиц — электрона и позитрона. Эти процессы получили весьма неудачные названия аннигиляции материи и мате-

риализации энергии, которые совершенно не соответствуют смыслу философского понимания термина «материя». Благодаря процессам исчезновения (нейтрализации) «пары» с переходом ее энергии в энергию света длительность существования позитронов в земных условиях чрезвычайно мала, потому что за очень короткое время каждый позитрон наверное столкнется с каким-либо электроном, которые всюду на земле присутствуют в избытке, и при этом соударении нейтрализуется и исчезнет.

Эта теория Дирака казалась настолько парадоксальной, что никому не пришла мысль проверить ее экспериментально. Впрочем, и сам автор считал ее слишком парадоксальной, чтобы доверять ее выводам, хотя в исходных положениях теории нельзя было найти каких-либо уязвимых мест. Совершенно независимо от этой теории в 1932 г. позитрон был неожиданно открыт американцем Андерсоном при исследовании космических лучей. Вскоре после этого открытия было установлено, что с помощью  $\gamma$ -лучей можно легко получать позитроны в лабораторных условиях. В настоящее время получение позитронов не представляет трудности. Замечательно, что не только самое существование позитрона, но и различные его свойства: вероятность нейтрализации позитрона при соударении его с электроном, вероятность возникновения «пары» за счет энергии света — все эти явления и факты, как оказалось, находятся в полном соответствии с теорией Дирака. Несомненно, что в истории физики едва ли можно указать другой столь блестящий пример полностью подтвердившегося на опыте научного предсказания, как триумф теории Дирака.

Надо сказать, однако, что, несмотря на несомненную ценность и замечательный успех теории Дирака, теория эта все же имеет уязвимые места. С одной стороны, в ней имеются трудности скорее более формального характера, связанные с разделением уровней отрицательной и положительной энергии при наличии силовых полей, но есть и некоторые недостатки более глубокого, принципиального характера.

Дело в том, что теория Дирака оперирует представлениями о существовании бесконечного числа электронов, заполняющих все пространство и находящихся в так называемых состояниях отрицательной энергии, но благодаря равномерности, с которой они заполняют все пространство, недоступны нашему наблюдению. Только тогда, когда равномерность заполнения пространства электронами отрицательной энергии нарушается, это отклонение от равномерности (так называемая дырка) проявляется в виде появления положительного электрического заряда — позитрона. Введение в рассмотрение такого недоступного наблюдению фона электронов отрицательной энергии представляется с общей точки зрения мало удовлетворительным, и я не думаю, чтобы оно могло надолго удержаться в науке. В настоящее время мы не знаем, каким образом можно было бы видоизменить теорию

Дирака, имеющую громадные заслуги и несомненно отражающую существенную долю истины. Но мне все же представляется, что современная ее форма претерпит в будущем существенные изменения.

Для пояснения своей мысли напомним, например, что так называемые преобразования Лоренца были впервые получены Лоренцом на основе представления о существовании неподвижного и недоступного наблюдению эфира. Впоследствии теория относительности отбросила это совершенно неудовлетворительное предположение, но полностью сохранила самые преобразования Лоренца, имеющие для нее совершенно фундаментальное значение.

Открытие позитрона нарушило сложившееся за последние 50 лет глубокое убеждение в вечности и неразрушимости электрона. Когда был открыт закон сохранения электричества, который и поныне представляется совершенно незыблемым, то этот закон вначале понимался в том смысле, что алгебраическая сумма электрических зарядов ни в каких процессах не может изменяться. Возникновение же и исчезновение в равном количестве положительного и отрицательного электричества (например, при электризации трением) при этом считалось вполне возможным. Однако с конца прошлого века успехи электронной теории привели к тому, что эта общая формулировка закона сохранения электричества была постепенно вытеснена более узким утверждением, согласно которому не только алгебраическая сумма зарядов сохраняется неизменной, но и каждый отдельный элемент заряда — электрон или протон — является неизменной и вечной частицей. Открытие позитрона и явлений нейтрализации позитрона и электрона, с одной стороны, и возникновения «пар» — с другой, ведет к тому, что мы от этого представления о вечности электрона вынуждены отказаться и должны вернуться к исходной форме закона сохранения электричества, относящейся лишь к алгебраической сумме зарядов. Правда, современная диракова теория позитрона формально основывается на представлении о сохранении числа электронов, но это достигается лишь введением в рассмотрение ненаблюдаемого фона электронов отрицательной энергии — представления, которое носит формальный характер и которое вряд ли надолго сохранится в науке.

Когда были открыты существование позитрона и явления образования и исчезновения «пар», то сразу удалось ответить на один важный недоуменный вопрос, возникавший в связи с явлениями радиоактивного  $\beta$ -распада. При  $\beta$ -распаде из ядра вылетает электрон (в отличие от  $\alpha$ -распада, когда из ядра вылетает тяжелая положительная  $\alpha$ -частица). Факт вылета электрона из ядра считался до последнего времени несомненным доказательством того, что электроны всегда имеются в ядре, хотя это представление и приводило к неразрешимым противоречиям. Сейчас можно быть убежденным, что ядра состоят только из протонов

и нейтронов и что никаких электронов в ядре не существует, причем при  $\beta$ -распаде электроны возникают в самый момент вылета из ядра за счет соответствующего уменьшения энергии ядра и соответствующего изменения его заряда, так же как при излучении света атомом фотон, или световой квант, возникает в момент вылета из атома в самом акте излучения. Заряд, который уносит с собой электрон, компенсируется соответствующим изменением заряда ядра, так что общая сумма зарядов не изменяется при  $\beta$ -распаде.

В настоящее время нам известны не только явления радиоактивного  $\beta$ -распада, в которых из ядер вылетают электроны, но и явления позитронного распада, в которых из ядер вылетают позитроны. Путем различных ядерных реакций удастся изготовлять неустойчивые, так называемые искусственно радиоактивные ядра, которые потом распадаются по законам радиоактивного распада и выбрасывают из себя в некоторых случаях электроны, в некоторых же случаях позитроны. Эти явления позитронного распада представляют чрезвычайно большой интерес. Ввиду того что законы обоих явлений весьма сходны между собой, оба эти явления часто называются  $\beta$ -распадом. Приведем два наудачу взятых примера искусственной радиоактивности. Например, помимо устойчивого, известного всем азота  $N_7^{14}$  с атомным весом 14 и порядковым номером 7, имеются два неустойчивых изотопа азота, т. е. два сорта ядер, с тем же зарядом 7, но с различной массой: в одном случае 16 ( $N_7^{16}$ ), в другом случае 13 ( $N_7^{13}$ ), которые получаются искусственно в результате некоторых ядерных реакций. Азот  $N_7^{16}$ , распадаясь, дает кислород  $O_8^{16}$ , причем из него вылетает электрон. Сумма зарядов, так как заряд ядра кислорода равен 8, сохраняется при этом распаде ( $7=8-1$ ).

С другой стороны, азот  $N_7^{13}$ , распадаясь, дает позитрон и ядро углерода  $C_6^{13}$  с зарядом 6, правда, не обычного углерода с массой 12, а изотопа углерода с массой 13, но это несущественно.

Можно толковать такого рода процессы как превращение одного из внутриядерных протонов в нейтрон или, наоборот, нейтрона в протон. Например, в азоте  $N_7^{16}$  имеется 7 протонов с положительным зарядом и 9 нейтронов без зарядов (общая масса равна 16). При распаде этого ядра из него вылетает электрон, причем один из его нейтронов превращается в протон. Таким образом, получается ядро кислорода, в котором имеется 8 протонов вместо 7 и 8 нейтронов вместо 9.

Наоборот, при распаде азота  $N_7^{13}$  происходит сопровождаемое вылетом позитрона превращение одного из протонов в нейтрон. Таким образом, можно сказать, что в первом примере радиоактивного распада ( $N_7^{16}$ ) мы имеем случай превращения нейтрона в протон и электрон, а во втором примере ( $N_7^{13}$ ) — превращение протона в нейтрон и позитрон.

Возможность такого рода превращения тяжелых частиц — нейтронов и протонов — друг в друга при одновременном вылете



соответствующих легких частиц — электронов и позитронов — является чрезвычайно важным фактом. В частности, этот факт является одним из подтверждений того, что нейтрон и протон являются равноправными частицами. Если бы имели место только превращения одного типа, например только превращения нейтрона в протон и электрон, то можно было бы утверждать, что протон является элементарной частицей, тогда как нейтрон состоит из протона и электрона. Но поскольку протон также может превращаться в нейтрон и позитрон, то нужно считать эти превращения переходом тяжелой частицы из заряженного состояния (протон) в незаряженное (нейтрон) и обратно, причем эти переходы сопровождаются излучением соответствующей энергии и заряда.

Надо сказать, что когда говорят о наличии определенного числа протонов и нейтронов в ядре, то это надо понимать с известной осторожностью. Дело в том, что взаимодействие протонов и нейтронов внутри ядра настолько сильно, силы, действующие на эти частицы, настолько велики, что нельзя считать, что электрические и магнитные свойства протонов и нейтронов в ядре таковы же, как и свойства свободных нейтронов и протонов вне ядра.

Несомненно, дело обстоит не так просто. В частности, несомненно, что нельзя указать, является ли данная внутриядерная тяжелая частица протоном или нейтроном, потому что внутри ядра происходит постоянное превращение нейтронов в протоны и обратно.

Исследование радиоактивного  $\beta$ -распада имело чрезвычайно большое значение для всей области ядерных явлений. Рассказывая здесь о  $\beta$ -распаде, я пользовался вполне естественным представлением, что если электроны вылетают из ядра, то уносимая ими энергия берется из запаса внутриядерной энергии. Однако при экспериментальной проверке это естественное, казалось бы, предположение не подтвердилось. Дело в том, что можно измерить баланс энергии при радиоактивном  $\beta$ -распаде. Сделать это экспериментально не так просто, но все же возможно. И вот оказалось, что этот баланс энергии не сходится.

Когда лет 6—8 тому назад это обстоятельство стало известным, то с самого начала в среде физиков образовалось два течения. Одна группа физиков считала это нарушение закона сохранения энергии вполне реальным и считалась с ним как с определенным фактом. Другая же группа физиков, прежде всего Паули, высказывала предположение, что это несохранение энергии может объясняться просто тем, что при  $\beta$ -распаде часть энергии ядра уносится в форме, которая пока не может быть обнаружена нашими измерительными приборами. Было высказано предположение, что одновременно с электроном вылетает из ядра некоторая иная, гипотетическая частица, которая была названа нейтрино. Эта частица, как и нейтрон, лишена заряда, но, в отличие от ней-

трона, обладает очень малой массой; может быть, даже ее масса, как и масса светового кванта, целиком сводится к массе движения. Предполагалось, что при  $\beta$ -распаде часть энергии уносится этой частичкой — нейтрино, вылетающей одновременно с электроном из ядра, но ускользающей пока от непосредственного наблюдения.

Существенный успех этой гипотезы относится к 1934 г., когда Ферми удалось построить настоящую теорию  $\beta$ -распада, основанную на законе сохранения энергии и на предположении о вылете нейтрино из ядра одновременно с вылетом электрона. На основе этой теории удалось объяснить ряд особенностей  $\beta$ -распада. Например, при радиоактивном распаде электроны вылетают из ядра с самыми разнообразными энергиями. Ферми удалось объяснить, по крайней мере в общих чертах, количественное распределение этих электронов по энергиям. Также удалось объяснить экспериментальный факт определенной зависимости между скоростью распада радиоактивных элементов, т. е. тем, что называется периодом распада, и той максимальной энергией, с которой могут вылетать электроны при распаде данного элемента.

Неудивительно, что теория Ферми получила весьма широкое признание. Нужно сказать, что убедительность этой теории в значительной степени связана с тем, что, как показал Ферми, гипотеза об одновременном с электроном вылете из ядра еще одной частицы — нейтрино — не является просто гипотезой, специально придуманной только для спасения закона сохранения энергии. Почему, собственно говоря, электрон не может вылететь из ядра без партнера, без этой гипотетической частицы нейтрино. Анализ закона сохранения момента количества движения показал, что вылет одного электрона при распаде ядра невозможен. Из закона сохранения момента количества движения в его квантовомеханической уточненной форме следует, что превращение нейтрона в протон и электрон невозможно, если одновременно с этим не зарождается еще одна частица — нейтрино. Подобно этому, и превращение протона в нейтрон и позитрон обязательно должно сопровождаться вылетом нейтрино. Это обстоятельство существенно повышает убедительность теории Ферми. Вместе с тем теория Ферми позволила существенно продвинуться вперед в вопросе о природе сил взаимодействия между протонами и нейтронами, в вопросе, который сыграет столь важную роль для всей ядерной физики.

Как только был открыт нейтрон, Гейзенберг сразу же высказал определенную гипотезу о природе своеобразных неэлектрических сил взаимодействия между протоном и нейтроном, которая по необходимости сводилась в то время к довольно расплывчатому указанию на связь этих сил с возможностью обмена зарядами между нейтроном и протоном, т. е. с возможностью превращения протона в нейтрон одновременно с превращением другого нейтрона в протон.

Так как такая возможность обмена зарядами между протоном и нейтроном непосредственно заключена в теории Ферми, то, естественно, возникает мысль построить на основе теории  $\beta$ -распада теорию ядерных сил взаимодействия.

В 1934 г., около двух лет тому назад, я высказал гипотезу, что таким образом можно связать две совершенно разнородные области явлений:  $\beta$ -распад, с одной стороны, и силы связи ядерных частиц — с другой, — и подвергнул эту гипотезу количественной обработке. Одновременно со мной эта мысль была высказана также Д. Д. Иваненко.

Идея тех расчетов, которые мной были произведены, заключается в следующем. Нам хорошо известны явления электромагнитные, связанные с существованием электрических зарядов, т. е. электронов и протонов. В электромагнитных явлениях мы, с одной стороны, встречаемся с излучением энергии зарядами в форме света и других электромагнитных волн, или (с точки зрения гипотезы световых квантов) в форме фотонов, или световых квантов. Таким образом, электрические заряды характеризуются, во-первых, способностью излучать энергию в форме света. Во-вторых, они характеризуются тем, что между ними имеются определенные электрические силы взаимодействия, так называемые нуклоновые силы. Эти два круга явлений, излучение света и взаимодействие зарядов, не являются независимыми друг от друга, а органически между собой связаны. И кулоновы силы зависят от величины заряда, которым характеризуется данная частица, и излучение света данной частицей зависит от той же величины ее заряда. И если знать законы взаимодействия заряженных частиц, то на основании этого можно теоретически определить законы излучения света. Обратно, если знать законы излучения света электрическими зарядами, то отсюда можно теоретически вывести силы взаимодействия этих зарядов. Так что, повторяю, эти два круга явлений между собой тесно связаны.

Перейдем теперь к нейтронам и протонам. Они также характеризуются способностью излучать энергию, но только не в форме световой, а в форме пары частиц, состоящей либо из электрона и нейтрино, либо из позитрона и нейтрино, т. е. в форме того самого излучения, которое проявляется в явлениях  $\beta$ -распада. И также между нейтронами и протонами существуют определенные силы взаимодействия. Эти два круга явлений должны быть связаны между собой внутренней связью, подобно тому как это имеет место в электромагнитных явлениях.

Эта мысль может быть облечена в количественную форму. Исходя из теории  $\beta$ -распада, данной Ферми, и из экспериментальных данных относительно быстроты протекания радиоактивного  $\beta$ -распада, можно теоретически вычислить силу взаимодействия между протоном и нейтроном. Когда я впервые произвел эти вычисления около двух лет назад, результаты оказались в высшей степени неудовлетворительными. Величина сил взаимодействия

между протонами и нейтронами, вычисленная на основании данных о  $\beta$ -распаде, оказалась чуть ли не в 10—12 раз меньше величины, непосредственно определяемой из опытных данных. Эта неудача привела к тому, что я отбросил эту гипотезу, как не согласующуюся с опытом, и пришел к мысли о некоторой иной возможной природе сил взаимодействия между нейтроном и протоном. На разработку этой второй гипотезы я затратил около полутора лет и только в конце прошлого года убедился в ее несостоятельности.

Между тем первая моя гипотеза за это время получила существенное развитие.

Во-первых, Бете и Пайерлс показали, что в принципе возможно, не нарушая физического содержания теории Ферми, так изменить математическую форму законов излучения легких частиц (электронов, позитронов, нейтрино), сопровождающего превращение нейтрона в протон и обратно, чтобы эти законы излучения соответствовали нашим сведениям о  $\beta$ -распаде и чтобы вместе с тем из них вытекали по указанной мной схеме силы взаимодействия тяжелых частиц правильной величины. Иными словами, они показали, что трудности, с которыми встретилась моя гипотеза и которые меня лично испугали, могут быть устранены некоторым математическим видоизменением теории, не нарушающим ее физической сущности.

Во-вторых, Вик в Риме указал, что, основываясь на моей гипотезе, возможно, хотя бы качественно, по порядку величины, объяснить некоторые аномальные свойства тяжелых частиц, которые до последнего времени представлялись весьма загадочными; а именно: протон, как и электрон, помимо заряда, обладает и магнитным моментом, т. е. в известном отношении эквивалентен магнитной стрелке. Опыт показал, что этот магнитный момент протона имеет аномальную величину, т. е. не ту величину, которую нужно было ожидать согласно теории Дирака, тогда как магнитный момент электрона согласуется с этой теорией. Еще более поразительно, что, как вытекает из совокупности наших сведений о нейтроне, и нейтрон, не обладая электрическим зарядом, по-видимому, все же обладает некоторым магнитным моментом, тогда как с точки зрения современной теории все магнитные свойства и явления связаны с движением электрических зарядов. Этот парадоксальный факт с точки зрения развитой выше концепции также находит свое объяснение по крайней мере с качественной стороны.

Наконец, Гейзенберг указал, что в рамках этих представлений оказывается возможным понять качественно величину массы протона и нейтрона. Подобно тому как масса электрона является массой электромагнитного происхождения, так масса протона и нейтрона в основном связана со специфическими силами взаимодействия тяжелых частиц неэлектрического происхождения, так же как масса электрона связана с кулоновыми силами.

Надо сказать, что в настоящее время ни в коей мере нельзя считать, что изложенная теория уже достигла удовлетворительного состояния. Если оказывается возможным качественно охватить разнообразный круг явлений, то в количественном развитии теории встречаются большие трудности. Если между вычисленной и наблюдаемой величиной сил взаимодействия тяжелых частиц и нет столь большого разрыва, как казалось вначале, то все же сколько-нибудь удовлетворительное количественное объяснение всего интересующего нас круга явлений пока оказывается невозможным, так что теория несомненно нуждается в дальнейшей разработке. Трудности, связанные с количественной формулировкой теории, могут иметь разнообразные причины. Во-первых, эти трудности могут быть связаны с основной гипотезой о существовании нейтрино, которая до сих пор является частицей гипотетической, в отличие от нейтрона и позитрона, существование которых не подлежит сомнению. Во-вторых, если нейтрино и существует, то могут быть сомнения в том, что уравнения движения нейтрино, которыми мы пользуемся при построении теории, соответствуют действительности.

И, наконец, третья причина может лежать в том, что для развития количественной стороны нашей теории необходимо знание свойств электронов, которые, с одной стороны, являются промежуточным звеном в механизме сил взаимодействия и, с другой — возникают в результате  $\beta$ -излучения. При этом существенную роль играют электроны чрезвычайно больших энергий, таких энергий, при которых современная теория электрона заведомо перестает быть применимой. Весьма возможно, что более точная теория электронов больших энергий внесет изменения в количественные результаты современной теории взаимодействия тяжелых частиц.

Повторяю, что в количественном отношении современная теория очень далека от совершенства. Однако она позволяет охватить единым образом очень разнообразный круг явлений  $\beta$ -распада, силы взаимодействия, определяющие строение атомных ядер, величину магнитных моментов и величину массы тяжелых частиц; она получила в настоящее время широкое признание, и пока не существует никакой другой теории, которая позволила бы иным образом объяснить известные нам факты.

Я хотел бы теперь очень кратко коснуться того вопроса, который уже дебатировался в прениях по предыдущим докладам в связи с недавно появившейся работой Шенклэнда. Результаты этой работы, относящейся к области рассеяния  $\gamma$ -лучей, области, очень тесно связанной с кругом явлений ядерной физики, противоречат закону сохранения энергии. Эти результаты не могут считаться пока окончательными, необходима их тщательная проверка и повторение, и трудно сказать, к чему эта проверка приведет. С другой стороны, эти опыты никак нельзя сбросить со счетов. Если проверка подтвердит результаты опытов Шенклэнда,

то очень трудно предвидеть те изменения, которые в связи с этим придется внести в современную физическую теорию.

Я хотел бы в связи с этим остановиться на тех недоразумениях, которые часто встречаются, когда поднимается вопрос о несохранении энергии. А надо сказать, что экспериментальные исследования интересующего нас круга явлений не в первый раз ставят нас перед этим вопросом: вспомним сказанное выше о балансе энергии при  $\beta$ -распаде.

Прежде всего, не может быть никакого сомнения в справедливости закона сохранения энергии в отношении громадного круга большинства обычных физических и химических явлений и даже в отношении большинства ядерных реакций. Сомнения в справедливости этого закона могут относиться только к специальным случаям, когда мы имеем дело с частицами, обладающими колоссально большой скоростью движения, близкой к скорости света. Далее, если закон сохранения энергии не выполняется в элементарных процессах этого рода, то совершенно несомненно, что он должен выполняться статистически, в среднем за большое число отдельных элементарных процессов.

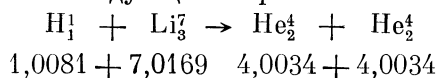
Хотя я вовсе не думаю, что в настоящий момент, пока опыты Шенкленда не проверены и не уточнены, имеется почва для плодотворного обсуждения возможности несохранения энергии, все же, поскольку перед нами за последнее время этот вопрос вставал неоднократно, мне хочется внести ясность в самую постановку вопроса. Необходимо строго отличать вопрос о справедливости данного конкретного физического закона сохранения энергии от вопроса о справедливости гораздо более общих и глубоких философских положений. Несомненно, что научное познание не может не базироваться на положениях о вечности и неразрушимости материи и движения в общем, философском смысле этих терминов. Эта необходимая общая предпосылка всякого научного познания в частной области науки, в физике, находила свое выражение в том, что физика всегда основывалась и будет основываться на тех или иных законах сохранения. Но вопрос о том, имеет ли данный частный вид закона сохранения (закон сохранения энергии) всеобщую значимость или же применимость этого закона сохранения ограничена определенным кругом явлений, причем он сам является пригодным для данного ограниченного круга явлений, следствием некоего более общего закона сохранения, содержание которого мы пока не можем предвидеть, — этот вопрос может решить только опыт.

Я уже указывал, что не может быть никакого сомнения в применимости закона сохранения энергии к большому кругу ядерных процессов, не говоря уже об обычных химических и физических процессах. Этот закон, во всяком случае, применим ко всем тем процессам, в которых скорости частиц не слишком велики, т. е. к большинству ядерных реакций. В последнее время изучение ядерных реакций привело к блестящему подтверждению закона

сохранения энергии и того закона пропорциональности энергии и массы, который является одним из наиболее важных выводов теории относительности Эйнштейна. Согласно этому закону Эйнштейна, всякое изменение массы сопровождается соответствующим изменением энергии, и, наоборот, всякое изменение энергии связано с соответствующим изменением массы. Это положение до последнего времени нельзя было подвергнуть непосредственной опытной проверке, потому что преобразования энергии в обычных физико-химических процессах слишком малы, чтобы можно было заметить соответствующие им чрезвычайно малые изменения массы. Поэтому приходилось обращаться главным образом к соображениям астрофизического порядка. Только в области ядерных процессов, где мы имеем дело с громадными энергиями, изменение массы, соответствующее данному изменению энергии, становится доступным для измерения и, как оказывается, полностью соответствует предсказаниям теории.

Позвольте привести конкретный пример. Одна из наиболее хорошо изученных ядерных реакций происходит при бомбардировке лития быстрыми ядрами водорода. Конечно, водород нужно предварительно ионизировать, что может быть осуществлено, например, помещением в водород накаленной металлической нити. Получаются голые ядра водорода, которые ускоряются электрическим полем до больших скоростей и затем падают на пластинку, содержащую литий. В результате соударения ядер водорода и лития получаются два ядра гелия ( $\alpha$ -частицы), которые разлетаются в противоположные стороны с очень большой кинетической энергией, существенно превышающей кинетическую энергию исходных частиц водорода и лития. Можно наблюдать эти разлетающиеся  $\alpha$ -частицы самыми разнообразными методами: например, можно видеть вспышки, получающиеся при ударе  $\alpha$ -частиц о фосфоресцирующий экран.

На этой реакции можно проверить закон сохранения массы. Можно измерить массы всех входящих в реакцию атомов и записать значения масс следующим образом:



Сумма масс слева равна 8,0250, сумма масс справа равна 8,0068: таким образом, в этой реакции масса продукта на 0,0182 единицы меньше исходной массы. Это кажущееся нарушение закона сохранения массы объясняется тем, что в данной реакции выделяется очень большая энергия. Действительно, энергия разлетающихся в результате ядер гелия, как показывает непосредственное измерение их скорости, на  $2,72 \cdot 10^{-5}$  эрг превышает начальную энергию движения ядра водорода (ядро лития до реакции заметной скорости не имеет). Согласно теории относительности этому количеству энергии соответствует определенная масса, численно равная энергии, деленной на квадрат скорости света. Выразив эту

массу в атомных единицах, получаем 0,0182, т. е. как раз разницу между исходной массой и массой продуктов реакции.

Таким образом, непосредственные измерения полностью подтверждают закон сохранения энергии и закон сохранения массы в той обобщенной их форме, которая следует из теории относительности. Приведенные данные о массах и энергии рассматриваемой реакции можно истолковать так, что при проверке закона сохранения масс нужно принимать во внимание зависимость массы частицы от скорости. Когда скорость разлетающихся ядер гелия постепенно уменьшается благодаря соударениям со встречающимися на их пути атомами, их масса соответственно уменьшается, причем избыток массы вместе с энергией передается окружающим телам (например, в форме тепловой энергии).

Экспериментальная проверка закона сохранения энергии и соотношения Эйнштейна в области ядерной физики сыграла весьма положительную роль в смысле улучшения техники экспериментирования. Дело в том, что массы ядер непосредственно измеряются специальными приборами, в частности масс-спектрографом Астона. Когда были изучены первые ядерные реакции, то было проверено соотношение Эйнштейна, с одной стороны, на основе данных о массах ядер, полученных Астоном, а с другой — на основе прямых измерений кинетической энергии ядер до и после реакции. Результаты измерений подтверждали законы сохранения. Однако в дальнейшем, по мере увеличения точности изучения ядерных реакций, обнаружилось расхождение между данными опытов и законами сохранения. Вскоре было высказано предположение, что дело здесь не в том, что основные положения теории не верны, а в том, что в экспериментальные измерения Астона вкралась экспериментальная ошибка.

Действительно, наметившиеся расхождения побудили Астона проконтролировать свои измерения, в результате чего он нашел в своей установке определенный источник экспериментальных ошибок. Устранение этих недостатков привело к полному экспериментальному подтверждению как закона сохранения энергии, так и закона эквивалентности массы и энергии.

Позвольте еще раз повторить, что справедливость закона сохранения энергии в такого рода ядерных процессах ни в коей мере не связана с вопросом о нарушении закона сохранения в опытах Шенклэнда. Если даже окажется после соответствующей проверки, что Шенклэнд прав, т. е. что есть круг явлений, к которым закон сохранения энергии неприменим, то это не имеет никакого отношения к вопросу о балансе энергии в большинстве ядерных реакций. Мы заведомо знаем и наблюдаем на опыте выделение ядерной энергии, хотя бы в рассмотренном только что случае бомбардировки лития водородными ядрами. Мы заведомо знаем, что энергия движения получающихся в результате реакции частиц очень велика, чрезвычайно велика, т. е. что выделение энергии в этих реакциях чрезвычайно велико. В своих тезисах я привел



пример, что если бы удался синтез гелия из водорода, а исходя из наших современных знаний этот синтез надо считать принципиально возможным, то путем осуществления этого синтеза из водорода, содержащегося в стакане воды, можно было бы получить около 4 млн. *квт-час* энергии, т. е. столько, сколько дает ДнепрогЭС за 6 часов работы. Это наиболее выгодная ядерная реакция. Но ядерные реакции могут идти с выделением энергии при самых разнообразных исходных материалах.

Внутри ядер таится совершенно неисчерпаемый запас энергии. Если человечество овладеет этим запасом, а рано или поздно это должно случиться, то это будет иметь решающее значение для всей нашей техники и экономики. Однако в настоящее время всякие предсказания о возможном сроке, когда практическое овладение ядерной энергией станет возможным, были бы совершенно беспочвенными. Из истории физики хорошо известно, что при оценке срока, отделяющего фундаментальное научное открытие, открытие новой области физических явлений, от практического использования этого открытия, самые лучшие умы человечества нередко впадали в грубейшие ошибки, да и не могли не впасть. Когда Герц открыл электромагнитные волны, ему был направлен специальный запрос: можно ли применить это открытие для беспроволочного телеграфирования? Он ответил, что нельзя. А через очень короткое время, лет через 8, беспроволочное телеграфирование было осуществлено Поповым и Маркони. С другой стороны, бывали ошибки и противоположного характера. После изобретения радиотелеграфии Поповым и Маркони в конце прошлого столетия очень многим казалось, что дальнейшее применение электромагнитных волн для передачи энергии без проводов на расстояние не представит особых затруднений. Однако до сих пор эта проблема остается в таком же неутешительном положении, как 30—35 лет назад, и разрешение ее представляется нам безнадежным.

В настоящее время мы только начинаем проникать в совершенно новую область явлений. Наши знания о ядре находятся в столь зачаточном состоянии, что мы даже не можем разумно поставить самый вопрос о практических путях к овладению запасами ядерной энергии. Вопрос этот практического значения в настоящее время не имеет. Для того чтобы вопрос об овладении ядерными явлениями приобрел практическое значение, нужно прежде всего познать эти явления. В этом отношении перед физикой раскрываются громадные перспективы, и можно надеяться, что чисто научные исследования рано или поздно откроют возможность практического овладения ядерной энергией.

Я закончил обзорную часть своего доклада и хотел бы еще сказать несколько слов по двум вопросам.

Во-первых, что касается развития работ по ядерной физике у нас в Союзе, то здесь в связи с докладом А. Ф. Иоффе уже говорилось об имеющихся у нас в этом отношении успехах. Действи-

тельно, как наиболее сильную нашу ядерную лабораторию необходимо в первую очередь отметить лабораторию Ленинградского физико-технического института, работы которой имеют очень ценный характер и которая за последние годы развивается весьма успешно. Из работ этой лаборатории прежде всего нужно отметить исследования Д. В. Скобельцына. В первой группе исследований Д. В. Скобельцыным был выработан метод измерения энергии заряженных частиц путем помещения камеры Вильсона в магнитное поле. Это один из самых ценных методов всей этой области физики, в настоящее время получивший всеобщее распространение. Этот метод, в частности, позволил Д. В. Скобельцыну первому обнаружить пути космических лучей в камере Вильсона и лег в основу целого ряда его исследований. В самые последние годы Д. В. Скобельцын получил чрезвычайно интересные результаты при изучении рассеяния и поглощения быстрых электронов при прохождении их через вещество. Результаты получились совершенно неожиданные, противоречащие ожиданиям современной теории электрона. Нужно отметить, что противоречия между опытом и современной теорией возникают в последнее время в разнообразных областях ядерной физики, и возможно, что существует внутренняя связь между многократно упоминавшимися данными опытов Шенкленда и новыми результатами Д. В. Скобельцына. Я думаю, что Д. В. Скобельцын в своем выступлении в дискуссии подробнее коснется этих исследований, а также остановится на проблеме космических лучей. Изучение космических лучей имеет чрезвычайно важное значение для всей ядерной физики, но за недостатком времени я принужден был опустить этот вопрос в своем докладе.

В том же Ленинградском физико-техническом институте ведутся чрезвычайно ценные, большого научного значения работы братьями Алихановыми, которые выработали новый, очень точный метод исследования  $\beta$ -радиоактивности и определения энергии электронов и позитронов. Экспериментальные данные братьев Алихановых являются основным материалом, имеющимся в настоящее время по этому вопросу. В частности, полученные ими в последнее время данные о  $\beta$ -спектре  $\text{RaE}$  имеют очень большое значение для всей теории вопроса.

Чрезвычайно интересны и ценны также работы И. В. Курчатова в том же институте по свойствам нейтрона и по изучению ряда ядерных реакций.

В Харьковском физико-техническом институте приближается к завершению постройка и освоение специальной высоковольтной лаборатории, которая открывает очень широкие перспективы перед экспериментаторами-ядерниками. Нужно отметить также очень многообещающую работу А. И. Лейпунского, который предполагает использовать в Харькове недавно разработанный им новый, очень остроумный и тонкий метод, открывающий совершенно новые возможности в области исследования  $\beta$ -радиоактив-

ности. Можно рассчитывать, что результаты этих исследований будут иметь большое значение для вопроса о существовании нейтрино.

У нас в Москве имеется Физический институт Академии наук, в котором есть ядерная лаборатория. Эта лаборатория является, может быть, одной из наиболее молодых ядерных лабораторий в Союзе, но в ней имеется ряд работников, очень удачно работающих в области изучения позитронов и нейтронов. Нужно надеяться, что эта ядерная лаборатория Физического института Академии наук будет успешно развиваться, укрепляться и расти.

Я далеко не охватил всех тех мест, в которых у нас в Союзе ведутся работы по ядру; например, я не коснулся работ Радиевого института и Физического института Ленинградского университета. Было бы неправильно, если бы вся работа по ядру полностью была сосредоточена только в немногих лабораториях, но мне представляется, что основная работа по физике атомного ядра у нас в Союзе должна быть сосредоточена в трех институтах: Ленинградском физико-техническом, Харьковском физико-техническом и Московском Физическом институте Академии наук.

В заключение я хочу заметить, что в настоящее время я считаю неудачной и не совсем правильной формулировку того из моих тезисов к докладу, в котором говорится относительно необходимости передачи установки Лоуренса из Радиевого института в ЛФТИ. Мне представляется, что нужно говорить не о передаче установки в другой институт, а о создании таких условий, при которых установка Лоуренса, несомненно имеющая всесоюзное значение, могла бы наиболее целесообразным образом использоваться нашими крупнейшими научными силами, работающими в области ядерной физики.

Позвольте на этом закончить свой доклад, с тем чтобы вопрос относительно тех теоретических проблем, которые я считал наиболее актуальными в области физики ядра и которых я кратко коснулся в своих тезисах, отнести к своему заключительному слову.

---

*Примечание.* В этой и двух последующих статьях, имеющих в значительной мере историческую ценность, отражено состояние физики атомного ядра и ядерных сил, а также частично физики космических лучей в последние предвоенные годы.

## ЯДЕРНЫЕ СИЛЫ <sup>1</sup>

В докладе, с одной стороны, подводятся итоги твердо установленным характеристикам ядерных сил, с другой — подвергается критике ряд методов расчета этих сил, весьма распространенных в современной литературе, но лишенных какой бы то ни было доказательности. В заключение рассматривается положение вопроса о природе ядерных сил.

Я хотел бы свой обзорный доклад о состоянии наших сведений о ядерных силах разбить на две неравные части: в первой и большей части речь будет идти о тех сведениях о ядерных силах, которые получаются из экспериментальных данных с применением лишь основных положений теоретической физики, но без каких бы то ни было специальных гипотез и допущений о природе и характере ядерных сил; вторая же часть будет посвящена гипотезам о природе этих сил.

Позвольте прежде всего напомнить, что из всей совокупности наших сведений о ядерных силах вытекает ряд хорошо известных положений:

1) ядерные силы являются силами не электрического происхождения, а силами некоей совершенно особой, неизвестной нам природы;

2) силы эти короткодействующие, они проявляются на расстояниях порядка  $10^{-13}$  см, т. е. на расстояниях порядка электронного радиуса;

3) ядерные силы на малых расстояниях очень велики, причем глубина соответствующей им потенциальной ямы достигает, во всяком случае, десятков  $eMV^2$ ;

4) сравнительно недавно было выяснено, что силы взаимодействия между протонами и нейтронами довольно существенно зависят от относительной ориентации их спинов. Сначала эта зависимость не принималась во внимание, но целый ряд фактов, в особенности относящихся к захвату медленных нейтронов протонами, оказался в полном противоречии с выводами, полученными из представления о том, что ядерные силы не зависят от ориентации спинов.

<sup>1</sup> Изв. АН СССР, ОМОН, серия физ., 1938, № 1-2, 209. Доклад на II Всесоюзной конференции по атомному ядру. Москва, 20—26 сентября 1937 г.

<sup>2</sup> Сейчас применяется термин «мегаэлектронвольт», Обозначение  $MeV$  или  $Mэв$ . — Прим. ред.

Это представление приводит к совершенно неправильной зависимости эффективного сечения для захвата нейтронов протонами от скорости нейтронов, в частности, к выводу, что эффективное сечение захвата должно стремиться к нулю при уменьшении скорости нейтронов, в то время как экспериментально эффективное сечение с уменьшением скорости возрастает до бесконечности.

Это противоречие привело Ферми к представлению о том, что ядерные силы зависят от спина; при учете этой зависимости оказывается возможным объяснить захват нейтронов протонами за счет перекидки спина, сопровождаемой магнитным излучением, и вообще целый ряд фактов о захвате и об упругом рассеянии нейтронов оказывается в согласии с теорией. Таким образом, можно считать установленной существенную зависимость ядерных сил от ориентации спинов взаимодействующих частиц.

Наконец, пятое общее положение, которое можно считать установленным, вытекает из прошлогодних опытов американцев по рассеянию протонов протонами. Из этих опытов явствует, что силы неэлектрического взаимодействия между двумя протонами, по крайней мере по порядку величины, равны силам взаимодействия между протоном и нейтроном. Правда, опытами по рассеянию протонов протонами величина этих сил определяется лишь для таких случаев, когда спины протонов имеют противоположное направление, потому что принцип Паули препятствует сближению протонов с параллельными спинами.

Следовательно, общие положения таковы: неэлектрическая природа ядерных сил; силы эти являются короткодействующими, глубина потенциальной ямы достигает десятков  $eMV$ , существует определенная зависимость сил взаимодействия между протонами и нейтронами от ориентации спинов, и, наконец, между двумя протонами имеются неэлектрические силы того же порядка величины, как между нейтронами и протонами.

Какие способы существуют для того, чтобы уточнить наши знания о ядерных силах? Прежде всего, позвольте рассмотреть проблему двух тел, которая единственно допускает строго математическое решение. Большинство опытных фактов не дает возможности сделать более детальные заключения о ядерных силах, чем только что перечисленные общие соображения. Дело в том, что при обычных скоростях нейтронов, не превышающих нескольких  $eMV$ , длина волны нейтрона еще очень велика по сравнению с радиусом действия ядерных сил. Поэтому детальный ход потенциальной кривой не может быть прощупан нейтронами этих скоростей. Для того чтобы получить более точные сведения о ходе потенциала, нужно было бы воспользоваться нейтронами более короткой длины волны, т. е. большей энергии, порядка 20 и больше  $eMV$ .

Таким образом, основных успехов, в смысле экспериментального выяснения зависимостей сил от расстояния, мы должны ожидать от работ с очень быстрыми нейтронами, порядка 20  $eMV$ .

До той же поры, пока мы имеем дело с более медленными нейтронами, порядка 5—6  $eMV$ , почти все доступные эксперименту явления зависят не от детального хода потенциальной кривой, а от некоторого среднего значения потенциала. В сущности, эти опыты дают возможность определить лишь величину  $Ca^2$ , где  $C$  — глубина потенциальной ямы, а  $a$  — ее радиус.

Помимо использования нейтронов и протонов больших скоростей, есть еще другая возможность более детального исследования ядерных сил, которая в последнее время была в особенности рассмотрена и разработана Теллером и Швингером. Предложенный ими метод основан на использовании интерференции и на том факте, что расстояние между атомами в водородной молекуле — 0,75Å — очень близко подходит к длине волны нейтрона при температуре жидкого воздуха, которая примерно равна 0,9 Å.

Все дело в том, что при опытах с рассеянием медленных нейтронов на молекуле водорода существенным является сравнимость длины волны нейтронов не с радиусом действия ядерных сил, а с гораздо большим расстоянием между атомами в молекуле водорода. Волны, рассеянные каждым отдельным водородным атомом, будут складываться, причем их разность фаз будет зависеть от размера молекулы. Получающиеся в результате такой интерференции явления оказываются весьма чувствительными к целому ряду свойств ядерных сил.

Прежде всего, таким путем можно непосредственно решить спорный вопрос о том, имеется ли устойчивое сингулетное состояние дейтрона, т. е. такое устойчивое состояние, при котором спины обеих входящих в его состав частиц противоположны, или же это сингулетное состояние дейтрона является лишь виртуальным. Собственно говоря, применение термина «виртуальный» к этому сингулетному состоянию неудачно, потому что в данном случае под ним понимается просто утверждение, что такое состояние вообще не существует, как показывает теория. В том случае, если стационарное сингулетное состояние дейтрона не существует, волны, рассеянные протонами с противоположными спинами, имеют фазы, отличающиеся на  $180^\circ$ . Стало быть, в случае параводорода, где спины протонов противоположны, рассеянные волны будут иметь противоположные фазы, если сингулетное состояние не существует, и одинаковые фазы, если оно существует. Можно вычислить, что благодаря этому обстоятельству эффективное сечение рассеяния медленных нейтронов на ортоводороде должно в 300 раз превышать эффективное сечение рассеяния на параводороде, если сингулетное состояние виртуально, и должно быть величиной того же порядка, если оно действительно устойчиво.

В самое последнее время Штерн произвел соответствующие эксперименты и действительно установил, что ортоводород рассеивает медленные нейтроны гораздо больше, чем параводород. Таким образом, можно считать установленным, что устойчивого

сингулетного состояния дейтрона не существует. Уточнение этих измерений может дать нам также сведения о радиусе действия ядерных сил. Эффективное сечение  $Q$  рассеяния нейтрона на протонах определяется следующим образом:

$$Q = \frac{\pi}{4} (3a_t^2 + a_s^2),$$

где  $a_t$  можно назвать радиусом эффективного сечения для рассеяния нейтрона на протонах того же направления спина, а  $a_s$  — радиусом эффективного сечения для рассеяния нейтрона на протонах противоположного спина. С другой стороны, эту величину  $a_t$  можно вычислить как функцию энергии дейтрона, скорости налетающего нейтрона и радиуса действия ядерных сил.

Надо заметить, что зависимость этого эффективного радиуса  $a_t$  от радиуса действия сил  $R$  весьма слаба; помимо этого, нам непосредственно неизвестна величина  $a_s$ . Поэтому опыты с рассеянием нейтронов на протонах сами по себе не дают возможности определить  $R$ . Если же, однако, произвести измерения, которыми сейчас занят Штерн, над рассеянием медленных нейтронов в пара- и ортоводороде, то результаты этих измерений дают возможность определить значение других комбинаций величин  $a_t$  и  $a_s$ , помимо  $Q$ , например  $(3a_t + a_s)^2$ , причем эта величина оказывается весьма чувствительной по отношению к изменению радиуса действия сил  $R$ . Так, например, по подсчетам Теллера и Швингера изменение  $R$  от нуля до  $2 \cdot 10^{-13}$  см влечет за собой уменьшение эффективного сечения для рассеяния медленных нейтронов параводородом в 7 раз.

Комбинируя результаты опытов по рассеянию нейтронов протонами, с одной стороны, и пара- ортоводородом — с другой, можно определить радиус действия ядерных сил  $R$ . Таким образом, этот метод позволяет определить радиус действия сил с гораздо большей точностью, чем все другие способы, не использующие интерференции нейтронных волн.

От этих опытов можно ожидать существенного уточнения наших сведений о ядерных силах. Правда, надо относиться к этому с известной осторожностью, потому что, оперируя понятием «радиус действия сил», мы должны помнить, что это понятие не всегда может быть точно определено (например, в случае сил, убывающих обратно пропорционально какой-нибудь степени расстояния). Кроме того, рассеяние нейтронов водородом зависит также в известной степени не только от радиуса действия сил, но и от формы потенциальной ямы, хотя эта зависимость выражена не особенно резко.

Укажем теперь на другой возможный подход к вопросу о ядерных силах, основанный на вычислении энергии связи легких ядер, в первую очередь тяжелых изотопов водорода  $^3\text{H}$  и гелия с атомным весом 3 и 4. Этому вопросу посвящены десятки работ, причем вся трудность заключается в том, что строгое математиче-

ское решение даже проблемы трех тел, как известно, невозможно и приходится идти путем приближений. Обычно применяется вариационный метод Рунда, который заключается в том, что, не зная волновой функции системы, стараются ее угадать и возможно лучше подобрать близкую к истинной волновую функцию. Эту функцию выражают в зависимости от координат частиц  $R_1, R_2, R_3, \dots$  и некоторых постоянных  $C_1, C_2, C_3, \dots$ . Затем с помощью этой волновой функции вычисляется энергия, скажем, триплона<sup>3</sup>, в зависимости, с одной стороны, от глубины потенциальной ямы  $C$  и ее ширины  $a$  и, с другой, от неопределенных постоянных  $C_1, C_2, \dots$ .

Далее, методом варьирования подбираются такие значения этих постоянных  $C_1, C_2, \dots$ , чтобы энергия связи триплона приобрела возможно большее значение. Приравнивая это значение экспериментально измеренной энергии связи триплона, получаем определенную связь между глубиной ямы  $C$  и шириной ее  $a$ . Сопоставляя эту связь со связью между  $C$  и  $a$ , полученной из рассмотрения дейтрона, можно порознь определить как глубину ямы  $C$ , так и ее ширину  $a$ . Таким образом, успех этого метода зависит от удачного выбора формы варьируемой функции. Надо сказать, что в области ядра этот вариационный метод приводит к значительно менее хорошим результатам, чем в случае атомов. Так, например, этим методом, как известно, вычисляется энергия электронной оболочки гелия с двумя электронами, причем уже первое приближение дает результаты, отличающиеся от экспериментальных только на 6%. Однако при применении этого вариационного метода к легким ядрам мы встречаемся со следующими обстоятельствами, которые существенно усложняют задачу по сравнению с атомной проблемой: во-первых, в проблемах ядра мы имеем дело не с обычными силами, а с силами обменного характера, кроме того, зависящими от ориентации спинов; во-вторых, в ядерных проблемах силы взаимодействия между всеми частицами имеют величину одного порядка, тогда как, например, в атоме гелия сила притяжения ядра в два раза превышает силу отталкивания электронов; наконец, в-третьих, все частицы внутри ядра обладают одинаковой массой, в то время как в атомных проблемах центральное ядро благодаря его большой массе можно считать неподвижным.

Для того чтобы иллюстрировать те трудности, с которыми встречается в ядерных проблемах метод Рунда, я сначала рассмотрю упрощенную проблему, а именно, я отвлекусь от обменного характера сил, от зависимости их от спинов и, наконец, буду считать, что сил между нейтронами не существует. В этом случае проблема триплона существенно упрощается, ибо все дело сводится к притяжению каждого отдельного нейтрона протоном.

---

<sup>3</sup> Сейчас применяется термин «трифон». — *Прим. ред.*



Если бы протон был неподвижен, то эта задача допускала бы чрезвычайно простое общее решение. Однако благодаря сравнимости масс протонов и нейтронов получается существенное усложнение. Чтобы выяснить характер этого усложнения, рассмотрим, например, случай двух частиц, связанных квазиупругой силой, — это будет соответствовать дейтрону, и затем случай трех частиц, в котором первая и вторая частицы связаны такой же квазиупругой силой с третьей частицей. Пусть этот случай соответствует триплону. Если бы одна из частиц была закреплена, то энергия второй системы была бы ровно в два раза больше, чем энергия первой системы. Если же все частицы свободны и обладают одинаковой массой, то, как показывает простой расчет, энергия второй системы превышает энергию первой системы только в 1,93 раза. Это понижение энергии связано с тем, что для движения системы существенна величина так называемой приведенной массы.

В случае, если силы между частицами не носят квазиупругого характера, а являются короткодействующими, энергии систем с закрепленной и незакрепленной центральной частицей еще значительно отличаются друг от друга. До последнего времени именно этим «кинетическим эффектом» и пытались объяснить тот факт, что энергия связи триплона превышает энергию дейтрона не в два, а почти в четыре раза. Действительно, Томасом была доказана общая теорема, согласно которой при уменьшении радиуса действия сил до нуля энергия триплона из-за одного только этого кинетического эффекта должна возрастать до бесконечности, если, конечно, глубина ямы подбирается для каждого значения радиуса сил так, чтобы для дейтрона получилось правильное значение энергии.

Пытаясь решить эту задачу вариационным методом, Финберг в результате вычислений нашел, что при уменьшении радиуса действия сил энергия триплона, в противоположность общей теореме Томаса, не только не возрастает до бесконечности, а, наоборот, падает и даже меняет знак. Эти результаты Финберг объясняет исключительно только плохим подбором формы варьируемой функции, и, конечно, никаких физических выводов из его расчетов сделать нельзя. Между тем этими результатами широко пользуются в литературе по ядру, а Бете подробно излагает расчеты Финберга в своей известной обзорной статье о ядрах и пытается обосновать на них разного рода следствия.

Этот пример я привел потому, что в громадной литературе по энергии связи легких ядер, насчитывающей десятки статей, на каждом шагу приходится встречаться с подобными рода несостоятельными вычислениями, засоряющими в настоящее время некоторые физические журналы.

Упомяну для сравнения результаты расчета Массей и Мора, которые несколько изменили форму варьируемой функции и получили несколько лучшие результаты, впрочем также противоречащие теореме Томаса.

Наконец, Презент вычислил энергию связи триплона в тринадцатом приближении. Можно себе представить, какой громадный труд составляет такого рода вычисление. Результаты тринадцатого приближения Презента очень близко совпадают с кривой, полученной года полтора тому назад Головиным. Головин, по моему предложению, произвел вычисления с функцией, выбранной так, чтобы она имела правильное поведение как в нуле, так и в бесконечности, и уже в первом приближении получил результат, находящийся в согласии с теоремой Томаса и не уступающий результату тринадцатого приближения Презента.

Все это приводится мною только в качестве иллюстрации того, насколько существенно результаты всех подобных вычислений зависят от правильного выбора варьируемой функции.

Совершенно ясно, что вычисления такого рода, вообще говоря, никакой доказательной силы иметь не могут.

Все это относится к упрощенной модели триплона, в которой учитывается только «кинетический эффект». Если же принять во внимание зависимость сил от спинов, их обменный характер и, наконец, наличие сил взаимодействия между одинаковыми частицами, то проблема, естественно, становится еще гораздо более сложной и результаты соответственных вычислений — еще менее убедительными. Между тем этим вычислениям приписывают зачастую совершенно несоответствующие значения. Так, в последней книжке «Physical Review» Брейт совершенно серьезно говорит о том, что ввиду противоречия между результатами вычисления энергий триплона, проведенными Презентом с учетом всех отмеченных выше усложняющих обстоятельств в пятнадцатом приближении, и между измерениями длительности жизни медленных нейтронов в парафине он, Брейт, готов усомниться в виртуальности сингулетного состояния дейтрона и готов допустить реальность этого состояния.

Мне очень трудно понять, как столь мало доказательные вычисления могут побудить кого бы то ни было к столь далеко идущим выводам. Впрочем, в той же самой книжке «Physical Review», где появилась эта статья Брейта, опубликовано и сообщение об измерениях Штерна, окончательно установившего виртуальность сингулетного состояния дейтрона, несмотря на несоответствие этого факта вычислениям Презента.

В заключение я хотел бы отметить, что немецкие физики, занимавшиеся той же самой проблемой, — Дольх, Флюге и другие — в некоторых отношениях даже ухудшают метод расчета американцев, о котором я только что говорил. Они вычисляют энергию связи дейтрона как функцию  $C$  и  $a$  и затем — вариационным методом — энергию связи триплона как функцию тех же величин. Пересечение этих кривых должно соответствовать действительному значению глубины и ширины потенциальной ямы. Однако получаемые ими кривые вообще не пересекаются. Тогда они нарочито портят кривую для дейтрона, т. е. вместо элементарного

точного расчета проводят для дейтрона приближенный, и притом более сложный, расчет вариационным методом, и таким образом добиваются пересечения обеих кривых. Они пытаются приписать этой точке пересечения какой-то физической смысл. К счастью, в последнее время Флюге сам отметил несостоятельность этого метода и, в частности, указал на то, что малые изменения в выборе приближенной функции дейтрона чрезвычайно сильно смещают точку пересечения кривых дейтрона и триплтона, так что положение этой точки не может служить основанием для каких бы то ни было физических заключений.

Резюмируя, я должен сказать, что громадная литература по энергии связи легких ядер, в сущности, не дает оснований ни для каких выводов, кроме, может быть, только очень приближенного определения границ, в которых должна лежать глубина потенциальной ямы (примерно  $20-120 \text{ eMV}$ ) и ее ширина (примерно от  $0,5 \cdot 10^{-13}$  до  $2 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ ).

Впрочем, я должен сознаться, что у нас в Москве под моим руководством ведутся аналогичные расчеты энергии связи и что мы надеемся получить несколько более доказательные результаты.

Перехожу теперь к вопросу о тяжелых ядрах.

Энергия связи тяжелых ядер подсчитывается в настоящее время приближенными статистическими методами (метод Томаса—Ферми и аналогичные). Этим подсчетам посвящено также очень большое количество —  $15-20$  — работ. Эти методы основаны на двоякого рода упрощениях: во-первых, пренебрегают атомизмом вещества, т. е. ядро заменяется непрерывно распределенной жидкостью, и, во-вторых, считается, что каждая частица движется в заданном поле остальных частиц. Легко указать приближенный критерий того, когда эти упрощенные расчеты применимы.

Обозначим через  $a$  радиус действия сил между частицами, а через  $R$  — среднее расстояние между частицами. Если отношение  $a$  к  $R$  очень велико, то в сфере действия каждой частицы находится много других частиц, и в этом случае указанное упрощение можно считать дозволенным. Таково положение дела, например, в электронной оболочке атомов, где метод Томаса и Ферми действительно оказался весьма полезным. Если же отношение  $a$  к  $R$  порядка единицы или меньше, то в сфере действия каждой частицы находится в среднем только одна соседняя частица, и в этом случае, конечно, нельзя пренебрегать атомизмом вещества и нельзя рассматривать движение частиц как движение в заданном поле сил. Поскольку радиус действия ядерных сил вряд ли превышает  $2 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ , а среднее расстояние между частицами в ядре больше этой величины ( $2,5 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ ), совершенно очевидно, что приближенные статистические методы Ферми—Томаса, Хартри, Фока и т. д. к ядру совершенно неприменимы. Это обстоятельство стало особенно ясным после прошлогодней фундаментальной работы Бора.

С другой стороны, совершенно ясно, что ядро нельзя рассматривать как кристаллическую решетку. Таким образом, ядро более всего может быть уподоблено жидкости, для сил сцепления в которой мы в настоящее время не имеем сколько-нибудь разумной квантовой теории. Поэтому мы и не можем в настоящее время ожидать, что рассмотрение энергии связи тяжелых ядер даст нам сколько-нибудь достоверные сведения о величине и характере ядерных сил.

Есть лишь одно общее свойство тяжелых ядер, из которого можно даже качественно сделать некоторые важные выводы о характере ядерных сил. Именно, известно, что энергия связи отдельной частицы в ядре и объем, занимаемый ею, почти не зависят от атомного веса тяжелого ядра. Это обстоятельство указывает, что ядерные силы обладают так называемым свойством насыщения. Обыкновенные силы взаимодействия между частицами, монотонно зависящие от их расстояния, привели бы, как это хорошо известно, к существенному возрастанию энергии связи частиц с уменьшением атомного веса ядра и к существенному уменьшению приходящегося на одну частицу объема, ибо потенциальная энергия этих сил пропорциональна квадрату числа частиц, и принцип Паули, противодействующий сближению частиц, недостаточен, чтобы обеспечить постоянство расстояния между частицами.

Каковы же должны быть силы, если они обладают этим свойством насыщения? Во-первых, подобно силам между молекулами, они могут быть не монотонными, и притяжение на больших расстояниях может смениться на малых расстояниях отталкиванием. Однако это предположение представляется весьма неудовлетворительным в применении к силам, действующим между элементарными частицами. В случае же молекул отталкивание на малых расстояниях может быть объяснено, исходя из обычных монотонных кулоновых сил между элементарными частицами, входящими в состав молекулы.

Насыщение было бы обеспечено также, если бы силы между ядерными частицами обладали полярным характером, т. е. если бы одинаковые частицы отталкивались и только различные притягивались. Однако заведомо известно, что между одинаковыми частицами также существует притяжение, а не отталкивание. Наконец, остается возможность, что частицы в ядре образуют нечто вроде молекул, т. е., точнее говоря,  $\alpha$ -частицы лишь слабо связаны между собой, подобно молекуле в кристаллах некоторых тел. Однако такая картина также является неудовлетворительной, ибо, как известно, силы, связывающие  $\alpha$ -частицы, вовсе не велики по сравнению с энергией связи частиц внутри ядра.

Единственный известный нам класс сил, против которого нельзя выставить подобные возражения и который обеспечивает насыщение, это есть класс обменных сил. В настоящее время предположение о том, что силы между частицами в ядре носят обмен-

ный характер, является наиболее распространенным. Однако, конечно, нельзя считать исключенным, что эти силы носят не обменный, а какой-то иной характер. Во всяком случае, каков бы ни был характер этих сил, они должны обладать свойством насыщения. Это есть единственный обоснованный вывод, как мне кажется, который можно сделать относительно характера ядерных сил на основе всей обширной литературы о строении тяжелого ядра.

В заключение этой части я хотел бы еще отметить гипотезу американцев Брейта, Кондона и других о том, что силы между одинаковыми частицами в точности равны силам между протонами и нейтронами. Единственным экспериментальным фактом, говорящим в пользу этой гипотезы, является установленное опытами по рассеянию протонов протонами приблизительное равенство сил между двумя протонами противоположных спинов и между протоном и нейтроном противоположных спинов. Об экспериментальном установлении строгого равенства этих сил, конечно, нельзя говорить, ибо, как я уже отметил, непосредственно поддается измерению, в сущности, только произведение глубины потенциальной ямы на квадрат ее ширины, и мы очень мало можем сказать о величине отдельных факторов, входящих в это произведение. Во всяком случае, существующие экспериментальные данные если и не доказывают правильности гипотезы о независимости ядерных сил от электрического заряда частиц, то хорошо с нею согласуются, а самая гипотеза эта является весьма соблазнительной по своей простоте. Нужно, однако, заметить, что эта гипотеза ведет к следующему усложнению наших представлений о ядерных силах.

Общепринято считать, что между протоном и нейтроном действует, во-первых, обменная сила типа Майораны

$$V(r_1 r_2) P(r_1 r_2),$$

(где  $V(r_1 r_2)$  — обыкновенная функция координат  $r_1$  и  $r_2$  и  $P(r_1 r_2)$  — оператор перестановки координат) и, кроме того, сила типа Гейзенберга

$$V(r_1 r_2) P(r_1 r_2) \pi(\sigma_1 \sigma_2),$$

где  $\pi(\sigma_1 \sigma_2)$  — оператор перестановки спинов.

Если между одинаковыми частицами действуют точно такие же силы, то нужно иметь в виду, что для случая взаимодействия одинаковых частиц сила Гейзенберга сводится к обыкновенной силе. Действительно, согласно принципу Паули, перестановка координат и спинов одинаковых частиц равносильна изменению знака волновой функции, поэтому сила Гейзенберга эквивалентна силе  $V(r_1)$ . Таким образом, если бы между всеми частицами действовали силы Майораны и Гейзенберга, это было бы равносильно наличию обычных сил между одинаковыми частицами и, стало быть, не могло бы приводить к явлениям насыщения. В связи с этим обстоятельством в настоящее время распространено пред-

положение, что, помимо майорановой и гейзенберговой сил, между частицами в ядре действуют также как обыкновенная сила, так и сила типа Бартлетта:

$$V(r_1 r_2) \pi(\tau_1 \sigma_2).$$

Ряд авторов пытаются подобрать относительную величину всех этих четырех типов сил так, чтобы, с одной стороны, была удовлетворена гипотеза американцев, а с другой — было бы обеспечено насыщение сил. Так, например, Флюге получает, что силы эти должны относиться друг к другу, как  $7/6 : 7/12 : 5/12 : 5/6$ .

Однако не нужно переоценивать убедительности такого рода выводов. Во-первых, они основаны на применении к тяжелым ядрам приближенных статистических методов, что, как мы видим, никак не может считаться обоснованным; во-вторых, ничто не исключает возможности существования между ядерными частицами не только указанных сил, но и сил другого типа, например:

$$V(r_1 r_2)(r_1 \tau_1)(r_2 \sigma_2).$$

Позвольте резюмировать эту часть моего доклада.

Дальнейшего углубления наших сведений о ядерных силах можно ожидать, во-первых, от опытов с очень быстрыми нейтронами и протонами и, во-вторых, от интерференционных опытов, подобных тем, которые сейчас проводятся Штерном на пара- и ортоводороде.

Что же касается теоретического изучения легких ядер, то большинство написанных по этому поводу работ лишено физического значения, и всякое продвижение в этом вопросе связано с очень большими математическими трудностями.

Наконец, изучение тяжелых ядер вряд ли может дать в ближайшее время какие-либо дополнительные сведения о природе и характере ядерных сил, помимо совершенно качественного утверждения, что эти силы должны приводить к насыщению. Этим я вовсе не хочу сказать, что теоретическое изучение тяжелых ядер в настоящее время бесплодно и бесцельно. Напротив, фундаментальная работа Бора открыла чрезвычайно широкие перспективы, и теоретические исследования свойств тяжелых ядер, идущие в этом направлении, представляют чрезвычайно большой интерес и являются весьма плодотворными.

Все, что я хочу сказать, сводится к тому, что именно в вопросе о характере и величине ядерных сил изучение тяжелых ядер не может дать, как мне кажется, сколько-нибудь ценных результатов в ближайшее время.

Позвольте теперь перейти ко второй части моего доклада, к вопросу о возможной природе ядерных сил.

Непосредственно после открытия нейтрона Гейзенберг высказал предположение об обменном характере сил между протонами и нейтронами, связанных с переходом заряда от одной из этих частиц к другой. Всем здесь, конечно, известны попытки по-

строить последовательную теорию этих сил, основанную на фермиевской теории  $\beta$ -распада. Эти попытки казались весьма многообещающими: представлялось возможным связать воедино столь разнообразные явления, как  $\beta$ -распад, ядерные силы, магнитный момент тяжелых частиц и т. д. Я могу быть кратким в этом вопросе, потому что в докладах В. Паули и Р. Пайерлса подробно рассматривались те трудности, с которыми встречается современная теория  $\beta$ -распада. В частности, Паули показал, что пользование вторым, третьим и последующими приближениями в этой теории приводит к противоречию и поэтому является незаконным. С другой стороны, гипотеза о связи ядерных сил с явлением  $\beta$ -распада может привести к силам нужной величины только при включении в оператор взаимодействия производных старшего порядка, что, как было отмечено в докладе Пайерлса, также является незаконным. Наконец, эта гипотеза была бы в состоянии объяснить сравнимость сил между одинаковыми частицами с силами между протонами и нейтронами только при обращении к незаконному, как я только что упомянул, пользованию высшими приближениями. Таким образом, эта казавшаяся столь заманчивой попытка объяснить природу ядерных сил в настоящее время должна быть признана неудавшейся.

Помимо этой гипотезы, мне известна еще только одна заслуживающая упоминания гипотеза о природе ядерных сил, а именно гипотеза Гамова и Теллера, с одной стороны, и независимо от них — Венцеля. Они предполагают, что тяжелые частицы могут испускать и поглощать не только электрон и нейтрон или позитрон и нейтрино, как это необходимо для объяснения  $\beta$ -распада, но также и пару — электрон с позитроном или пару нейтрино. Это процессы, связанные с излучением и поглощением пары нейтрино или же пары электрон—позитрон, должны приводить к взаимодействию между тяжелыми частицами, которым указанные авторы и пытаются объяснить ядерные силы.

В этом отношении их теория весьма напоминает гипотезу о связи между  $\beta$ -распадом и ядерными силами. Однако при этом вводится в рассмотрение некая новая универсальная постоянная, определяющая вероятность указанных процессов. Поскольку эти процессы нами непосредственно не наблюдаются, естественно, имеется возможность подобрать эту постоянную так, чтобы получить силы надлежащей величины. В связи с этим теряется одна из наиболее соблазнительных черт первоначальной гипотезы о природе ядерных сил, а именно возможность связать эти силы с другими известными нам физическими явлениями.

Есть, однако, более веское возражение против этой новой гипотезы. Поскольку при излучении двух нейтрино или пары электрон—позитрон заряд излучающей частицы не изменяется, связанные с этим излучением силы не носят обменного характера.

Иными словами, гипотеза Гамова, Теллера и Венцеля приводит к силам обычного характера, монотонно зависящим от рас-

стояния. Между тем, как я уже подчеркнул, силы этого рода никак не могут быть согласованы с известным фактом о независимости энергии связи частицы от атомного веса ядра. Таким образом, мне представляется, что эта гипотеза является неудовлетворительной.

Никаких других разумных гипотез о природе ядерных сил мне неизвестно. Таким образом, в настоящее время вопрос о природе ядерных сил является совершенно открытым. Единственное, что мы о них можем сказать с большой степенью уверенности, — это то, что ядерные силы являются силами особого рода и не носят электромагнитного характера.

Надо надеяться, что природа этих сил выяснится как в результате дальнейшего исследования быстрых нейтронов и протонов, так и в результате дальнейшего изучения космических лучей, которое в самое последнее время привело, по-видимому, к столь существенному явлению, как открытие новой «полутяжелой» частицы.

*Москва, Физический институт  
Академии наук СССР*



## ТЕОРИЯ МЕЗОТРОНА И ЯДЕРНЫЕ СИЛЫ <sup>1</sup>

Как известно, предположение о существовании мезотронов — тяжелых частиц с массой, в несколько сотен раз большей массы электрона, — было впервые высказано Юкавой еще задолго до их экспериментального обнаружения. К этому предположению Юкава пришел после неудачи многочисленных попыток построения теории ядерных сил, т. е. сил, действующих между тяжелыми частицами (протоны, нейтроны). В основе этих теорий лежало предположение, что ядерные силы возникают потому, что тяжелые частицы обмениваются легкими частицами (электронами и позитронами). Самый факт, что существование мезотронов пришлось постулировать еще до их обнаружения, уже свидетельствует о необычайно важной роли мезотронов в теории ядерных сил.

С другой стороны, в области космических лучей накопилось большое число фактов, указывающих на существенную роль, которую играют мезотроны в процессах, происходящих при прохождении космических лучей через вещество. Например, столь фундаментальный факт, как наличие вблизи поверхности Земли космических лучей значительной интенсивности, не может быть понят без учета роли мезотронов. В сущности, только с открытием мезотронов сделались возможными попытки построения стройной картины прохождения космических лучей в атмосфере. Правда, в настоящий момент построение этой картины еще не закончено, есть еще много неясных и неисследованных вопросов, однако центральная роль мезотронов во всех вопросах физики космических лучей видна уже с полной отчетливостью.

В настоящее время установлено, что заряд мезотрона по абсолютной величине равен элементарному заряду и может иметь как положительный, так и отрицательный знак. Масса мезотрона составляет примерно 200 электронных масс.

Помимо заряда и массы, третьей основной величиной, характеризующей частицу, является ее спин. До настоящего времени определить спин мезотрона экспериментальным путем не удалось. В теории Юкавы предполагается, что спин мезотрона равен единице. Это предположение принимается как некоторая рабочая

<sup>1</sup> Изв. АН СССР, ОМЕН, серия физ., 1941, № 4-5, 555. Доклад на Совещании по физике атомного ядра. Москва, 20—26 ноября 1940 г. Доклад печатается по записи, сделанной т. Левичем и просмотренной докладчиком.

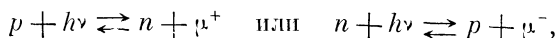
гипотеза почти всеми исследователями, хотя прямых подтверждений ее пока нет.

Изучение свойств мезотронов в космических лучах показало, что мезотроны являются неустойчивыми и спонтанно распадаются, по-видимому, на электрон и нейтрино (или позитрон и нейтрино). Время распада покоящегося мезотрона составляет примерно  $2 \cdot 10^{-6}$  сек, при движении же время распада мезотронов растёт, как  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Произведенные эксперименты приводят к весьма существенной трудности в вопросе о распаде мезотрона. Именно, в большей части произведенных до настоящего времени измерений не обнаружены в должном количестве электроны распада. Однако ни один из произведенных опытов не является окончательным и вопрос о механизме и продуктах распада мезотронов требует дальнейших, более точных исследований. Несомненно, что вопрос о распаде мезотронов является одним из наиболее важных и актуальных вопросов физики космических лучей.

Из того факта, что мезотроны оказываются неустойчивыми и спонтанно распадаются, вытекает непосредственно, что они не могут приходить на Землю из мирового пространства, так как при этом все они успевали бы распасться по пути. Поэтому необходимо принять, что они образуются в верхних слоях атмосферы другими частицами или  $\gamma$ -лучами, входящими в состав космического излучения. Непосредственные измерения широтной зависимости проникающей компоненты космических лучей подтверждают предположение об образовании мезотронов в верхних слоях атмосферы.

Вопрос об образовании мезотронов является в настоящее время центральной проблемой физики космических лучей. Механизм генерации мезотронов еще не исследован. Одним из вероятных процессов, приводящих к образованию мезотронов, следует, по-видимому, считать процессы типа



где  $h\nu$  —  $\gamma$ -квант,  $p$  — протон,  $n$  — нейтрон и  $\mu^+$  и  $\mu^-$  — соответственно положительный и отрицательный мезотроны.

Однако такой механизм приводит к следующей трудности: если определить из известного для верхних слоев атмосферы числа фотонов, протонов и нейтронов и из числа образующихся в этих слоях мезотронов эффективное поперечное сечение этого процесса, то с помощью принципа детального равновесия можно найти также и поперечное сечение обратного процесса. Обратный процесс представляет, очевидно, захват мезотронов тяжелыми частицами. При этом оказывается, что полученное эффективное поперечное сечение захвата слишком велико и приводило бы к значительно большему поглощению мезотронов при прохождении их через вещество, чем это имеет место в действительности. По-

этому вопрос о механизме генерации мезотронов является еще открытым и требует дальнейшего изучения.

Следующей важной проблемой физики космических лучей является изучение ионизационных толчков, вызываемых мезотронами, а также состав и энергетический спектр космических лучей на больших глубинах. Особенный интерес представляет вопрос о генерации легких частиц (электронов, позитронов) или фотонов быстрыми мезотронами.

Как показывает теория, вероятность образования легких частиц и фотонов при прохождении мезотронов через вещество существенно зависит от спина мезотрона. Характерной особенностью частиц со спином 1 является их способность передать в одном акте значительную долю своей энергии легким частицам. Существующие экспериментальные данные как будто бы благоприятствуют предположению о том, что спин мезотрона равен 1. Именно, существует, по-видимому, ряд процессов (как, например, ионизационные толчки Гофмана), в которых мезотрон передает огромную энергию электрону или фотону, образуя затем большой ливень, содержащий несколько сотен частиц. Далее, о том же свидетельствует, по-видимому, рост доли мягкой компоненты на больших глубинах. Однако степень точности полученных данных еще очень невелика, и экспериментальное уточнение их чрезвычайно желательно.

В ядерной физике мезотрон играет не меньшую роль, чем в космических лучах. Это связано с тем, что согласно теории ядерных сил, впервые предложенной Юкавой и развитой затем работами Гайтлера, Кеммера, Баба и ряда других, взаимодействие тяжелых частиц в ядре осуществляется с помощью «мезотронного поля», подобно тому как электрическое (кулоново) взаимодействие частиц осуществляется с помощью «поля фотонов».

Согласно теории Юкавы, протон может превращаться в нейтрон, испуская положительный или поглощая отрицательный мезотрон, а нейтрон может превращаться в протон с помощью обратного процесса. Взаимодействие тяжелых частиц друг с другом, по Юкаве, связано с рядом последовательных превращений протона в нейтрон и обратно: протон, испуская положительный мезотрон, превращается в нейтрон и т. д. При испускании отрицательных мезотронов превращения идут в обратном порядке.

Так как с переносом мезотронов от одной ядерной частицы к другой связан также и перенос энергии, то такой обмен мезотронами приводит к энергетическому взаимодействию между тяжелыми частицами. Процесс этот формально совершенно аналогичен процессу обмена фотонами, приводящему к кулонову взаимодействию между заряженными легкими частицами.

Как показывают теоретические расчеты, потенциальная энергия обменного взаимодействия в самом общем случае имеет вид

$$U \sim e^{-r/\lambda_0}/r^n,$$

где  $r$  — расстояние между частицами,  $n$  — целая степень, а  $\lambda_0$  — комптоновская длина волны частицы, переносящей взаимодействие,

$$\lambda_0 = \hbar/\mu c$$

( $\mu$  — покоящаяся масса частицы).

В частности, для взаимодействия двух электрических зарядов, осуществляемого обменом фотонов,  $\mu=0$ ,  $\lambda_0=\infty$  и  $n=1$ ; так что

$$U \sim 1/r.$$

Для взаимодействия двух магнитных диполей, также осуществляемого фотонами,  $\mu=0$ ,  $\lambda_0=\infty$ , но  $n=3$  и т. д.

В случае тяжелых частиц энергия взаимодействия очень быстро убывает с расстоянием. Действие ядерных сил простирается на расстояния порядка размеров ядра  $r_0$ , т. е.  $10^{-13}$  см. Чтобы взаимодействие обрывалось на расстоянии порядка  $r_0$ , необходимо, чтобы  $\lambda_0$  было порядка  $r_0$ . При этом для массы частицы, переносящей взаимодействие, получается значение  $\mu \sim 200 m$ , где  $m$  — масса электрона. Такая оценка массы мезотрона находится в хорошем согласии с опытом.

В теории Юкавы радиоактивный  $\beta$ -распад связывается с распадом мезотронов.  $\beta$ -распад, по теории Юкавы, протекает по следующей схеме: тяжелая частица, например нейтрон, испускает отрицательный мезотрон, превращается при этом в протон, тогда как испущенный мезотрон распадается на электрон и нейтрино. Поскольку все ядра при  $\beta$ -распаде изменяют спин на целое число единиц, спин мезотрона должен быть целым.

Далее, чтобы объяснить экспериментально установленную зависимость ядерных сил протон—нейтрон от спинов обеих частиц, необходимо допустить, что спин мезотрона отличен от нуля. Поскольку спин целый, естественно допустить, что он равен единице (предположение, что спин равен 2, повело бы к существенным осложнениям).

Теория Юкавы, усовершенствованная другими авторами, дает весьма ценные качественные результаты и правильно передает качественный ход ядерных процессов. Однако уже сейчас ясно, что в количественном отношении теория Юкавы ни в какой мере не согласуется с опытом. Уже сейчас эта теория приводит к ряду затруднений, заставляющих ставить вопрос о полном пересмотре ее. В качестве примера подобного рода затруднений можно указать следующие.

Теория не может объяснить существования сил притяжения протон—протон, реальность которых была доказана экспериментально. Для объяснения сил протон—протон приходится постулировать существование нового вида частиц — нейтральных мезотронов, представляющее существенный недостаток теории.

Далее, взаимодействие ядерных частиц, осуществляемое обменом мезотронов со спином 1, аналогично взаимодействию магнитных диполей. Поэтому показатель степени  $n$  в выражении для потенциальной энергии ядерных частиц равен трем, так что

$$U \sim e^{-r/\lambda_\mu}/r^3,$$

где  $\lambda_\mu$  — комптоновская длина волны мезотрона.

Однако такой вид потенциальной энергии не может быть справедлив вплоть до  $r=0$ . Можно показать, что возрастание потенциальной энергии по этому закону при  $r \rightarrow 0$  привело бы к падению тяжелых частиц друг на друга. Поэтому необходимо допустить, что при малых расстояниях, т. е. при  $r$ , меньших некоторого критического расстояния  $r_{\text{крит}}$ , современная теория более не справедлива и что при  $r < r_{\text{крит}}$  рост потенциальной энергии прекращается. Величина  $r_{\text{крит}}$  должна быть введена в теорию как некоторая постоянная. Кроме того, в закон взаимодействия мезотрона с тяжелыми частицами входят еще четыре произвольные постоянные. Значения этих пяти постоянных могут быть выбраны так, чтобы теория давала наилучшее объяснение известных опытных фактов. Однако и этой широты произвола оказывается недостаточно для объяснения всех наблюдаемых явлений. Поэтому производятся многочисленные попытки «подправки» теории. Самый характер этих «подправок» указывает на чрезвычайно неблагоприятное положение в теории. Например, Бете предлагает объяснять ядерные силы с помощью одних лишь нейтральных мезотронов, не имеющих ничего общего с заряженными мезотронами, наблюдающимися в космических лучах. При этом, в частности, остается совершенно непонятным существование магнитного момента у нейтрона. Гайтлер предлагает постулировать существование протонов с различными зарядами:  $+2$ ,  $+1$ ,  $-1$  и различными спинами:  $1/2$ ,  $3/2$ ,  $5/2$  и т. д. Меллер и Розенфельд предлагают допустить существование двух сортов мезотронов с различными уравнениями движения и различными периодами распада и т. д. Однако даже с помощью таких произвольных и далеко идущих предположений удается количественно объяснить лишь ограниченный круг фактов, относящихся к космическим лучам и ядерным силам.

Все эти трудности, стоящие перед теорией мезотрона, имеют своим источником специфические свойства частиц со спином 1. В связи с этим докладчик исследовал особенности поведения частицы со спином, равным 1. Для этого было проведено точное решение уравнений движения частицы со спином 1 (уравнение Прока) в поле кулоновского центра, т. е. была решена задача, аналогичная задаче об атоме водорода для электрона.

Это исследование привело к совершенно неожиданному результату: оказалось, что частица со спином 1 движется в кулоновом поле с потенциалом  $1/r$  так, как частица со спином  $1/2$  или 0

двигалась бы в поле с потенциалом  $1/r^3$ . Именно, оказалось, что в кулоновом поле для частицы со спином 1 наряду со стационарными состояниями обычного типа существуют также «аномальные» решения уравнений движения, соответствующие либо «падению» частиц на заряд, создающий кулоново поле, либо «излучению» частиц этим зарядом.

Причина, приводящая к такому различию в поведении частиц со спином 1 и  $1/2$  в кулоновом поле, заключается в следующем. В теории Дирака при нерелятивистских скоростях электрон движется, как частица с зарядом и собственным («спиновым») магнитным моментом. Однако при больших скоростях электрон в теории Дирака ведет себя, как точечный заряд без всякого собственного магнитного момента. В отличие от электрона частица со спином 1 и в релятивистской области движется, как частица, обладающая собственным моментом. В этом смысле ее можно уподобить истинному магнитному диполю.

Согласно известному соотношению теории относительности частица с магнитным моментом  $m$  приобретает при движении также и определенный электрический момент  $p$ , равный

$$p = \frac{[vm]}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где  $v$  — скорость частицы.

При больших скоростях частицы, близких к скорости света, ее электрический момент быстро растет, и частица притягивается кулоновым полем к центру вплоть до падения ее на протон (или выталкивается полем в зависимости от направления магнитного момента и направления скорости  $v$ ). Так как падение мезотрона на протон физически абсурдно, то отсюда следует, что для заряженной частицы со спином 1 закон Кулона должен терять смысл при малых расстояниях. Этой специфической особенностью частицы со спином 1 Ландау и докладчик воспользовались для того, чтобы предложить новую теорию ядерных сил.

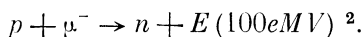
Л. Ландау обратил внимание на то, что если закон Кулона справедлив вплоть до очень малых значений  $r$ , то энергия связи мезотрона и протона может быть весьма велика. При этом протон и отрицательный мезотрон могут образовывать квазиводородный атом с огромной энергией связи.

Если закон Кулона обрывается при достаточно малых значениях радиуса, то энергия связи  $E$  может достигнуть величины порядка  $\mu c^2$ , где  $\mu$  — масса мезотрона. В этом случае масса квазиводородного атома будет равна

$$M_n \sim M_p + \mu - \frac{E}{c^2} \sim M_p,$$

где  $M_p$  — масса протона, а  $M_n$  — масса нейтрона.

Согласно теории, предложенной Ландау и докладчиком, такой квазиводородный атом отождествляется с нейтроном. Таким образом, нейтрон рассматривается как сложное образование, которое можно изобразить схемой



При этом, в отличие от прежней теории ядерных сил, в этой теории не постулируется существование каких-либо специальных сил взаимодействия между протоном и нейтроном. Единственным предположением теории является то, что спин мезотрона равен 1, а единственным неизвестным параметром, фигурирующим в теории, является то критическое значение радиуса, на котором обрывается закон Кулона.

На первый взгляд новая гипотеза противоречит приближенной равноправности нейтронов и протонов, проявляющейся, например, в приближенной независимости сил взаимодействия между ядерными частицами от заряда этих частиц. Однако это противоречие устраняется, если учесть релятивистские эффекты — образование мезотронных пар и их аннигиляцию, а также так называемую поляризацию вакуума. Так, например, захват отрицательного мезотрона протоном ведет к образованию нейтрона и выделению энергии  $E = \mu c^2$  (равной 100 eMV). Возможен, однако, также и захват положительного мезотрона нейтроном, в результате которого этот мезотрон аннигилируется с имевшимся в нейтроне отрицательным мезотроном. В результате останется протон и выделится энергия, равная разности между энергией аннигилировавших мезотронов и энергией связи отрицательного мезотрона в нейтроне  $E = \mu c^2$ . Таким образом, выделяющаяся в этом процессе энергия также равна  $\mu c^2$ :



Таким образом, процессы образования  $p$  из  $n$  и  $\mu^+$ , образования  $n$  из  $p$  и  $\mu^-$  в энергетическом отношении равноправны. Есть основание ожидать, что последовательное применение релятивистской теории приведет к равноправию нейтронов и протонов также и в других отношениях, например в отношении сил взаимодействия между ними.

Согласно новой гипотезе для объяснения ядерных сил нет необходимости постулировать существование специфических ядерных сил. Силы эти являются своеобразным проявлением обычных электромагнитных сил, специфические же их особенности объясняются своеобразием законов движения мезотронов. Мезотроны так же обуславливают сцепление протонов в атомном ядре, как электроны обуславливают сцепление атомов в молекуле. Вообще можно установить некоторую аналогию между ядерными силами

<sup>2</sup> Сейчас применяется термин «мегаэлектронвольт». Обозначение MeV или Мэв. — Прим. ред.

и обычными химическими силами. Например, силы притяжения между нейтроном и протоном аналогичны химическим силам в системе атом водорода + протон, а силы нейтрон—нейтрон подобны силам, связывающим два атома водорода в молекуле.

В теории Ландау и докладчика отпадает необходимость предположений о новом законе взаимодействия, фигурирующих во всех прежних теориях ядерных сил. По существу, единственное произвольное предположение, которое делается в новой теории, — это предположение о том, что спин мезотрона равен 1.

При современном состоянии теории трудно еще говорить о количественной ее проверке. Произведенные авторами оценки дают весьма удовлетворительные результаты для ряда различных величин, как, например для магнитных моментов тяжелых частиц. Однако для построения законченной теории, которую можно было бы непосредственно сравнить с экспериментальными данными, необходимо преодолеть еще ряд весьма значительных трудностей, частью чисто расчетных, частью же связанных с тем, что в общей релятивистской теории частиц с целым спином до сих пор еще остался не рассмотренным ряд вопросов общего принципиального характера, например вопрос о релятивистском взаимодействии частиц с целым спином.

*Москва, Физический институт им. П. П. Лебедева  
Академии наук СССР*



## О РАБОТАХ Л. И. МАНДЕЛЬШТАМА В ОБЛАСТИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ <sup>1</sup>

В предшествовавших докладах уже был упомянут обширный цикл теоретических работ Л. И., относящихся к теории колебаний, к оптике и к молекулярной физике, и я поэтому о них говорить не буду. Наряду с этими отделами физики Л. И. особенно интересовали принципиальные основы теории относительности и квантовой механики, а также пограничные с физикой проблемы теории познания. В особенности последние два круга проблем (квантовая механика и теория познания) в последний период деятельности Л. И., пожалуй, больше всего остального привлекали к себе его внимание. К сожалению, усугублявшаяся с годами почти болезненная нелюбовь Л. И. к публикации особенно сильно сказалась как раз на этом цикле его работ, из числа которых только очень немногие вышли в свет при его жизни.

Однако в какой-то мере этот пробел можно и должно будет восполнить: остались записи двухгодичных лекций Л. И. по основам теории относительности, записи лекций по основам квантовой механики <sup>2</sup>, подготовленная к печати рукопись статьи о соотношении неопределенности между временем и энергией <sup>3</sup>, и, кроме того, есть все основания рассчитывать, что в бумагах Л. И. будет найден еще целый ряд материалов, которые можно будет готовить к печати. Надо сказать, что упомянутые лекции Л. И. отнюдь не являлись обычными университетскими курсами, посвященными — хотя и очень удачному — изложению уже известного, а содержат в себе несравненный по ясности, глубине и тонкости анализ основ теории относительности и в особенности квантовой механики, по-новому освещающий ряд фундаментальных проблем и дающий решение ряда спорных вопросов.

Одна из основных особенностей научного дарования Л. И., сообщавшая ему особую силу, заключалась, как мне кажется, в редчайшем сочетании в одном человеке ума конкретного, геометрически пластичного и ума абстрактного, логически аналитического. С одной стороны, способность единым взглядом охватить сложное многообразие разнородных явлений, с предельной чет-

<sup>1</sup> Изв. АН СССР, ОМЭН, серия физ., 1945, 9, № 1-2, 57. Доклад на совместном заседании Академии наук СССР и МГУ, посвященном памяти Л. И. Мандельштама. Москва, 22 декабря 1944 г.

<sup>2</sup> Изданы в «Собрании трудов Л. И. Мандельштама», т. V. М., Изд-во АН СССР, 1950. — *Прим. ред.*

<sup>3</sup> См. т. I, работу 20. — *Прим. ред.*

костью усмотреть в них черты схождения и различия и воссоздать все существенное в простой и наглядной модели; с другой стороны, острый интерес к конкретной индивидуальности физического явления, порождавший те чувства непосредственного наслаждения, которые испытывал Л. И. при экспериментировании. В этом истоки и необычайного искусства Л. И. в постановке экспериментов, и его исключительно плодотворной деятельности в области технической физики. И вот с этими свойствами ума «широкого» и «английского», по терминологии Дюгема, в Л. И. сочеталась необычайная сила и тонкость абстрактной логической мысли и необычайная глубина анализа принципиальных основ физической теории, восходящего к основным категориям мышления.

Это счастливое сочетание разнородных складов ума ярко отразилось в теоретических работах Л. И. В частности, А. А. Андронов уже говорил здесь о характерной для Л. И. широте охвата, так ярко проявившейся в том направлении, которое Л. И. придал развитию теории колебаний. Что же касается роли моделей в научном творчестве Л. И., то, к сожалению, почти невозможно дать представление о неподражаемой виртуозности, с которой Л. И. умел уяснять и разъяснять сущность разнообразнейших явлений на простейших моделях вроде модели осциллятора или маятника на упругой нити. В сущности, родственным этому широкому использованию моделей было и постоянное стремление Л. И. выделить в квантовой теории те ее стороны и результаты, которые по крайней мере качественно могут быть интерпретированы в наглядных представлениях классической физики. Так, например, все наиболее существенные результаты квантовой теории комбинационного рассеяния света Л. И. весьма просто и наглядно получал путем рассмотрения классической модели явления: колебания атомов или ионов в молекулах и кристаллах, т. е. периодические изменения расстояний между атомами вызывают периодические изменения поляризуемости их электронных оболочек, а тем самым модулируют рассеиваемый атомами свет. Вместе с тем это выделение из квантовой теории положений, допускающих наглядную классическую интерпретацию, всегда использовалось Л. И. для того, чтобы тем резче оттенить основные особенности и чуждые классике результаты квантовой механики.

Я хотел бы еще коснуться несколько подробнее одной работы Л. И., опубликованной в 1941 г. и посвященной вопросу о показателе преломления сред со связанными и со свободными электронами.

Известно, что при вычислении показателя преломления обыкновенных диэлектриков необходимо учитывать разницу между средним электрическим полем в диэлектрике и средним эффективным полем, действующим на его молекулы (так называемая поправка Лорентц—Лоренца). В связи с исследованиями распространения радиоволн стал актуальным вопрос о том, нужно ли

применять эту поправку и к свободным электронам в ионосфере. Вопрос этот вызвал много споров в литературе; ему посвящено много работ, некоторые из коих были математически очень сложны, но все же не внесли в него ясности.

Зато полную ясность вносит в этот запутанный вопрос Л. И. Он рассматривает его на упрощенном примере газа, состоящего не из реальных, а из «томсоновских» атомов (положительно заряженные шарики, внутри которых могут двигаться электроны), и показывает, как применимость поправки Лоренца зависит от отношения средних времен пребывания электронов внутри и вне атома (т. е. от степени ионизации газа). Удачная модель Л. И. позволила ему провести все расчеты крайне просто и, по его любимому выражению, «прозрачно» и вместе с тем вполне отразила существо дела.

Перехожу к работам Л. И. по квантовой механике, в которых особенно ярко проявилась вторая из отмеченных выше особенностей его научного дарования. Л. И. любил подчеркивать, что для развития науки важна не только работа пионеров, создающих новые концепции, в свете которых становится различным скрывавшееся во мраке неизвестное, но и последующий критический анализ этих новых концепций, очищающий их от случайного и неверного и вносящий в них стройность, ясность и прозрачность, без которых невозможно дальнейшее продвижение. Только критическая эпоха Вейерштрасса, внесшая ясность в содержание и область применимости понятий и операций анализа, бурно развившегося в эпоху Бернулли и Эйлера, создала предпосылки для дальнейшего развития математики. Л. И. был пионером в теории колебаний и в ряде отделов оптики; в области же квантовой механики он прежде всего стремился внести максимальную ясность в основные понятия и положения теории.

Характерна для Л. И. постановка вопроса уже его первой работы по квантовой механике, опубликованной им совместно с М. А. Леонтовичем в начале 1928 г. Шредингер только за год-полтора до этого показал, что допустимые решения его волнового уравнения определяются так называемыми естественными условиями, в частности условием, чтобы волновая функция оставалась конечной в бесконечности. С другой стороны, поведение волновой функции в бесконечности (при  $x \rightarrow \infty$ ) определяется поведением в бесконечности потенциальной энергии системы  $V(x)$ . Так, например, осциллятор, характеризуемый заданием потенциальной энергии в форме  $V(x) = \alpha x^2$ , обладает дискретными энергетическими уровнями; если же потенциальная энергия системы сначала возрастает пропорционально  $x^2$ , но затем, как угодно далеко от начала координат вновь начинает падать и стремится при  $x \rightarrow \infty$  к нулю, то энергия такой системы, как впервые отметил Л. И., может принимать любое положительное значение. С другой стороны, говорит Л. И., физически ясно, что поведение потенциальной энергии в бесконечности в этом случае не может быть су-

щественным для частицы, не обладающей очень большой энергией. Более того, физическая теория только в том случае может применяться к действительности, если ее результаты не зависят существенно от того, как мы экстраполируем на бесконечность, например, зависимость потенциальной энергии от координаты (ибо реальное значение этой энергии на больших расстояниях зависит от случайного положения посторонних тел).

Л. И. дал исчерпывающее разъяснение этого кажущегося противоречия. Я не могу здесь останавливаться на этом подробнее, отмечу только, что в статье Л. И. и Леонтовича содержатся, в сущности, все основы теории прохождения частицы через потенциальный барьер, представляющей собой одно из самых замечательных достижений квантовой механики. Авторы не применили своей теории к конкретным физическим явлениям, но Гамов сам рассказывал мне в 1928 г., что он целиком основывался на этой именно работе Мандельштама и Леонтовича при построении принесшей ему широкую известность теории  $\alpha$ -распада радиоактивных ядер.

На этой работе Л. И. в известной степени отразился острый интерес его к кажущимся парадоксам физических теорий. Л. И. даже посвятил в свое время специальный семинар рассмотрению целого ряда парадоксов из самых разнообразных областей физики. Его мастерский анализ кажущихся противоречий теории был всегда необычайно поучителен и плодотворен. Недаром Л. И. любил говорить, что полное понимание физической теории достигается только тогда, когда в ней не остается места для неразрешенных парадоксов. К такому пониманию Л. И. всегда стремился, и, действительно, не было вопроса в громадном большинстве областей физики, который мог бы поставить его в тупик. Очень характерен, в частности, интерес Л. И. к квантовым парадоксам Эйнштейна. Эйнштейн не приемлет принципов квантовой механики и в 1927—1935 гг. неоднократно указывал в печати на различные парадоксы, к которым, по его мнению, приводит квантовая механика. Каждый из этих кажущихся парадоксов впоследствии разъяснялся; последние два, например, разъяснены Нильсом Бором. Л. И., по свойствам своего характера, ничего не опубликовал в печати о парадоксах Эйнштейна, но нам, своим ученикам, он сообщал полное разрешение этих парадоксов часто через день-два после получения журнала с очередной статьей Эйнштейна.

В последние дни своей жизни Л. И. собирался отослать в печать замечательную работу о квантовом соотношении неопределенности между временем и энергией, в которой я принимал некоторое участие. Смысл и содержание соотношения неопределенности между координатой и импульсом в настоящее время хорошо известны. Совсем иначе обстоит дело с соотношением неопределенности между временем и энергией: до сих пор в литературе нет ни строго количественного вывода его из общих положений теории, ни полной и ясной формулировки физического смысла и содержа-

ния этого фундаментального соотношения квантовой механики. Высказывания виднейших теоретиков по этому вопросу часто прямо противоположны по своему содержанию. Так, одни (например, Крамерс) утверждают, что квантовая система в фиксированный момент времени вообще не может быть охарактеризована определенной энергией, другие (например, Паули) утверждают прямо противоположное.

Л. И. впервые дает точное, ясное и последовательное решение этого вопроса, играющего весьма важную роль для всего построения квантовой механики. Он исходит из известного факта, что замкнутая квантовая система со строго определенной энергией находится в стационарном состоянии: математические ожидания и статистические распределения всех физических величин, относящихся к такой системе, не меняются со временем. Какие бы то ни было изменения в системе могут происходить только в том случае, если ее энергия не имеет вполне определенного значения, т. е. если ее состояние представляет собой наложение двух или нескольких стационарных состояний. Чем больше неопределенность энергии системы, тем быстрее изменяются во времени значения характеризующих ее величин (например, значение математического ожидания координаты), или, другими словами, тем меньше время  $\Delta t$ , требуемое для того, чтобы значения этих величин заметно изменились. Условимся считать изменение какой-либо величины  $x$  заметным, если оно превышает неопределенность  $\Delta x$  математического ожидания этой величины. Тогда можно строго доказать, основываясь на общем формализме теории, что минимальное время  $\Delta t$ , за которое хотя бы одна из характеризующих систему величин может заметно измениться, связано с неопределенностью  $\Delta E$  энергии системы соотношением

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{h}{4\pi}.$$

В этом и состоит истинное и весьма простое и ясное содержание соотношения неопределенности между временем и энергией.

Перехожу к лекциям, прочитанным Л. И. в 1939 г., в которых он дал чисто мандельштамовский по тонкости, глубине и ясности анализ основ квантовой механики. Лекции были озаглавлены «Теория косвенных измерений», и вопрос об измерении по праву играл в них центральную роль. Из богатого содержания этих лекций я лишь упомяну о глубоком анализе различия понятий координаты и импульса в классической и квантовой теории (различия как в самом содержании, так и в определении этих понятий) и выделю для рассмотрения только один вопрос. Л. И., насколько я знаю, впервые провел в своих лекциях весьма важную дилекцию между прямыми и косвенными измерениями над квантовыми системами. Последнее звено всякого измерения любой квантовой системы неизбежно носит макроскопический характер. Прямыми Л. И. называет такие измерения, в которых первый же

шаг измерения макроскопичен. Пример: падающий на фотопластинку электрон вызывает ее почернение. Макроскопическая координата почерневшего пятнышка, по определению, есть координата электрона в момент его удара о пластинку. Весьма существенно, что прямые измерения возможны только над свободными или почти свободными частицами в слабых полях. Например, невозможно определить координату электрона в водородном атоме, поместив внутрь атома фотопластинку.

Наряду с прямыми измерениями возможны и косвенные. Они состоят в том, что квантовую систему, над которой мы хотим произвести измерение, мы заставляем взаимодействовать с другой микросистемой, над которой возможны прямые измерения. Данные этих прямых измерений над второй системой мы используем для теоретического вычисления значений величин, относящихся к первой системе. Пример: измерив распределение по углам свободных электронов, рассеянных данным атомом, мы можем вычислить распределение связанных электронов в этом атоме.

Как я уже упоминал, лекции Л. И. были посвящены теории этих косвенных измерений. Я не могу здесь подробно излагать их содержание; скажу только, что Л. И. уже в лекциях 1939 г., подчеркивал, что прямые измерения в квантовой системе являются исключением, причем их исключительность не случайна, а имеет глубокий принципиальный смысл. Дальнейшее развитие этих идей привело Л. И. в последние годы к весьма радикальным выводам. Поскольку прямые измерения возможны только над свободными частицами, постольку последовательная физическая теория микромира должна сводиться к установлению закономерных связей между результатами измерений координат и импульсов свободных частиц. Современная же квантовая механика дает с помощью волновых функций и уравнения Шредингера весьма детальное описание не поддающегося прямому измерению поведения связанных электронов внутри атомов и т. п. При этом существенную роль в логической схеме квантовой механики играет допущение о возможности измерения любого так называемого самосопряженного оператора, действие которого на волновые функции системы может быть произвольно задано. Таким образом, схема современной квантовой механики, широко оперирующей с ненаблюдаемыми понятиями, принципиально неудовлетворительна и должна быть переработана так, чтобы освободить теорию от этих понятий.

Весьма примечательно, что к тем же, в сущности, выводам, только в менее радикальной и последовательной форме, пришел в 1942 г. и один из основоположников квантовой механики — Гейзенберг. Однако Гейзенберг пришел к этим выводам не путем анализа физических основ квантовой теории, как Л. И., а в поисках выхода из тех затруднений, к которым приводит релятивистское обобщение квантовой механики, в частности квантовая теория взаимодействия элементарных частиц. Корни этих затруднений,

как мне представляется, лежат во вскрытой Л. И. недостаточной последовательности основ исходной нерелятивистской формы теории.

Как Гейзенберг, так и Мандельштам только наметили программу дальнейшего развития и переработки квантовой теории, но не смогли ее пока осуществить. Однако правильно наметить путь в вопросах столь фундаментального характера — дело первойшей важности, значение которого трудно переоценить.

Я попытался на материале теоретических работ Л. И. дать некоторое представление об исключительной многогранности его научного дарования, о редчайшем сочетании в нем обычно исключаяющих друг друга свойств. Счастлирое сочетание таких свойств вообще было одной из характернейших особенностей Л. И. и проявлялось в самых различных сторонах его личности. Так, например, непередаваемая доброта и чуткость, любовная мягкость в обращении с людьми сочетались в Л. И. с непреклонной твердостью во всех вопросах, которым он придавал принципиальное значение, с полной непримиримостью к компромиссам и соглашательству. Невозможно сказать, кого мы больше оплакиваем в Леониде Исааковиче — мыслителя или человека.

## ПРОБЛЕМА МЕЗОНА И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УЧЕНИЯ О КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧАХ <sup>1</sup>

§ 1. Мезонами или мезотронами (эти термины равнозначны и равноупотребительны) принято называть элементарные частицы, обладающие так называемой промежуточной массой, т. е. частицы, более тяжелые, чем электроны, и вместе с тем более легкие, чем протоны. По-видимому, не все мезоны обладают одной и той же массой и спином; представляется более вероятным, что существует несколько различных видов мезонов.

В настоящее время с полной достоверностью установлено существование заряженных (положительных и отрицательных) мезонов с массой, близкой к  $200 m$  ( $m$  — масса электрона). Однако есть также убедительные данные о существовании заряженных мезонов с другой массой; наконец, есть веские теоретические доводы в пользу предположения о существовании нейтральных мезонов (которые иногда называют «нейтретто»).

Вопрос о свойствах мезонов, несомненно, является одним из самых важных и центральных вопросов современной экспериментальной и теоретической физики. Это обуславливается не только тем естественным интересом, который возбуждает каждый вновь открытый вид основных «кирпичей мироздания» — элементарных частиц, но и целым рядом других причин.

Во-первых, мезоны входят в состав космических лучей, составляя на уровне моря около 70% этих лучей; поэтому разнообразные процессы, происходящие при прохождении космических лучей через земную атмосферу, в существенной своей части определяются свойствами мезонов. В связи с этим вопрос о природе и свойствах мезонов является в настоящее время центральным для физики космических лучей, т. е. для той области физики, которая вызывает особый интерес потому, что в космических лучах встречаются частицы, энергия которых на несколько порядков превосходит энергию всех известных нам частиц другого происхождения.

Во-вторых, насколько можно судить в настоящее время, с проблемой мезонов теснейшим образом связана важнейшая проблема современной физики — проблема ядерных сил, т. е. сил сцепления между нуклонами (протонами и нейтронами) в атомных ядрах. По-видимому, соотношение между ядерными силами и ме-

<sup>1</sup> Вводная статья к сборнику «Мезон». Под ред. И. Е. Тамма. М.—Л., Гостехиздат, 1947, ст. также УФН, 1947, 31, вып. 2, 157.



зонами соответствует примерно соотношению между электромагнитными силами взаимодействия заряженных частиц и световыми квантами (фотонами). Из свойств фотонов и из законов их излучения и поглощения заряженными частицами можно определить силы электромагнитного взаимодействия зарядов; подобно этому, из свойств мезонов и из законов их излучения и поглощения нуклонами можно будет, по всей вероятности, определить ядерные силы.

Наконец, третья причина, обуславливающая особый интерес проблемы мезона, заключается в следующем. Современная квантовая механика, несомненно, правильно и последовательно описывает громадный круг физических явлений, в частности законы движения и взаимодействия нерелятивистских частиц (т. е. частиц, скорость которых мала по сравнению со скоростью света). В противоположность этому релятивистская квантовая теория, в частности теория силовых полей (электромагнитного поля, мезонного поля, или поля ядерных сил, и т. д.), находится в весьма неудовлетворительном состоянии. Это проявляется в том, что вычисление по современной теории целого ряда физических величин приводит к бесконечным, т. е. физически бессмысленным выражениям. Некоторые из этих так называемых бесконечностей связаны с тем, что в релятивистской теории мы не можем инвариантным образом приписать элементарной частице конечные размеры, а должны трактовать ее как материальную точку. Между тем собственная энергия точечной частицы, например электрическая энергия *точечного* электрического заряда, бесконечна как в квантовой, так и в классической теории. Помимо этих так называемых классических бесконечностей есть и бесконечности существенно квантового происхождения; так, например, квантовые флуктуации напряженности электромагнитного поля оказываются бесконечно большими даже в отсутствие электрических зарядов. Как классические, так и квантовые бесконечности приводят, в частности, к тому, что при пользовании теорией возмущения высшие приближения оказываются не только не малыми, но даже бесконечными и т. д.

Несмотря на эти серьезные недостатки современной релятивистской квантовой теории, существует довольно обширная область явлений, к которой мы научились с успехом применять эту теорию. Так, например, теория процессов, происходящих при прохождении релятивистских электронов и позитронов через вещество (рассеяние их, ионизация вещества, тормозное излучение и последующее образование  $\gamma$ -квантами пар электронов и позитронов, эффект Комптона и т. д.), прекрасно подтверждается опытом.

Напротив, область применимости современной релятивистской теории к свободным мезонам и к мезонным полям ядерных сил гораздо уже, чем применимость ее к электронам, позитронам и электромагнитному полю. Это обуславливается двумя причинами. Во-первых, применимость современной теории к электромагнит-

ным явлениям существенно связана с малостью постоянной тонкой структуры  $\alpha = e^2/\hbar c$ , благодаря чему в большинстве случаев оказывается достаточным ограничиться одним лишь первым приближением теории возмущений, в которой разложение ведется по степеням  $\alpha$ . Напротив, величина  $g^2/\hbar c$ , соответствующая в мезонной теории постоянной тонкой структуры  $\alpha$  ( $g$  означает «мезонный» заряд нуклона), в десятки раз больше, чем  $\alpha$ , и поэтому теория возмущения плохо применима (а может быть, и вовсе неприменима) к мезонным полям. Во-вторых, для того чтобы объяснить существенную зависимость ядерных сил от спина нуклонов и большую величину поперечного сечения для образования мезонов быстрыми протонами в верхних слоях атмосферы, обычно предполагают, либо что спин мезонов равен 1, либо что взаимодействие нуклонов с мезонами, обладающими спином 0, аналогично взаимодействию электрических и магнитных диполей (а не взаимодействию электрических зарядов). Оба эти предположения приводят, однако, к тому, что современная квантовая теория оказывается в сущности вовсе не применимой к мезонам <sup>2</sup>.

Именно эта неприменимость или плохая применимость современной теории к мезонам и является одной из причин особого интереса к проблеме мезона. Можно надеяться, что как раз изучение мезонов создаст необходимую экспериментальную базу для построения будущей релятивистской теории элементарных частиц, способной устранить из нее те фундаментальные трудности, с которыми в менее резкой форме мы сталкиваемся и в квантовой теории электромагнитного поля.

§ 2. В настоящее время единственным источником мезонов являются космические лучи. Источник этот обладает ничтожной интенсивностью (на 1 см<sup>2</sup> земной поверхности падает примерно один мезон в минуту) и не поддается контролю; космические мезоны распределены по очень широкому интервалу энергий и сопровождаются быстрыми частицами другой природы. Поэтому изучение космических мезонов является крайне трудной экспериментальной задачей. Вместе с тем мезоны крайне недолговечны и самопроизвольно распадаются на один электрон или позитрон и на одно нейтрино (средняя длительность жизни нерелятивистского мезона  $2,15 \cdot 10^{-6}$  сек)<sup>3</sup>. Поэтому решительных успехов в изучении мезонов можно ожидать только тогда, когда удастся генерировать мезоны в лабораторных условиях, подобно тому как генерируются позитроны путем облучения вещества  $\gamma$ -квантами. Ведь и мезоны, входящие в состав космических лучей, генерируются в земной

<sup>2</sup> См. об этом статью В. Л. Гинзбурга «Теория мезотрона», стр. 174 (в сб. «Мезон», в котором напечатана настоящая статья И. Е. Тамма. — Прим. ред.).

<sup>3</sup> Сообщение М. Шейна и группы его сотрудников (Phys. Rev., 1946, 70, 435) о том, что в опытах с генерируемыми бетатроном  $\gamma$ -квантами  $10^8$  эв им удалось в трех случаях наблюдать возникновение мезонов, опровергается экспериментами Фридендера с сотрудниками (Phys. Rev., 1946, 70, 790).

атмосфере, ибо самопроизвольный распад мезонов устраняет возможность прихода их на Землю из удаленных областей пространства.

Так как масса мезонов (по крайней мере того сорта мезонов, который преобладает в космических лучах на уровне моря) примерно в 200 раз больше массы электрона, то энергия покоящегося мезона равна приблизительно  $10^8$  эв. Для генерации мезонов нужно облучать вещество  $\gamma$ -квантами или, что, по всей вероятности, окажется более эффективным, протонами или нейтронами, энергия которых превышает этот предел. Быстрые успехи техники получения сверхбыстрых частиц (циклотрон, бетатрон, синхротрон и т. д.) позволяют рассчитывать, что в самое ближайшее время удастся «изготавливать мезоны» в лабораторных условиях<sup>3</sup>. Это обусловит настоящий переворот в состоянии физики элементарных частиц.

§ 3. Чтобы уяснить особенности теперешнего этапа развития физики космических лучей, необходимо напомнить историю этой крайне быстро эволюционирующей области физики за последнее десятилетие. К началу 1937 г. состояние вопроса было примерно следующим.

Были обнаружены и исследованы различные геомагнитные эффекты, в частности широтный геомагнитный эффект, т. е. зависимость интенсивности космических лучей от геомагнитной широты. Эффекты эти обусловлены отклонением заряженных первичных космических частиц (т. е. частиц, падающих на Землю из мирового пространства) магнитным полем Земли (практически все отклонение космической частицы происходит на той части ее траектории, которая лежит далеко за пределами земной атмосферы). Таким образом, было установлено, что если не все первичные частицы, то, во всяком случае, существенная их часть заряжена. По величине геомагнитного эффекта было установлено, что энергия первичных частиц достигает десятков миллиардов электрон-вольт. Далее было установлено, что интенсивность космических лучей быстро возрастает с высотой над уровнем моря и на высоте 20—30 км превышает интенсивность у поверхности Земли в сотни раз. Число отрицательных и положительных частиц в космических лучах оказалось примерно одинаковым.

Что касается массы частиц, входящих в состав космических лучей, то надо иметь в виду, что надежно измерить массу можно только у сравнительно медленных частиц, кинетическая энергия которых существенно меньше их массы покоя. Измерения массы космических частиц, производившиеся на уровне моря, показали, что многие из этих частиц несомненно являются электронами и позитронами и лишь очень небольшой процент — протонами.

В связи с этим широко было распространено представление, что заряженные частицы космического излучения на всем протяжении земной атмосферы в преобладающей своей части являются электронами и позитронами. Те же нередкие случаи, когда из-

мерения массы частиц приводили к значениям, промежуточным между массой электрона и протона, приписывались в то время неправильности теории, привлекавшейся для вычисления массы.

Вообще многие процессы, происходящие при прохождении космических частиц через земную атмосферу и другие среды, в первую очередь поглощение этих частиц и образование ливней космических лучей, казались в то время резко противоречащими теории.

Как известно, не очень быстрые заряженные частицы при прохождении через вещество теряют свою энергию главным образом на ионизацию и возбуждение атомов среды. Наряду с этими «ионизационными» потерями существуют также потери энергии на тормозное излучение. Когда электрон или позитрон пролетает вблизи атомного ядра, он под влиянием кулонового взаимодействия с ядром испытывает ускорение, а всякий неравномерно движущийся заряд (если  $\ddot{d}v/dt^2 \neq 0$ ) излучает электромагнитные волны. Интенсивность излучения пропорциональна квадрату ускорения, т. е. пропорциональна  $(Ze^2/m)^2$ , где  $Ze$  — заряд атомного ядра, а  $m$  — масса пролетающей около него частицы. Таким тормозным излучением является, например, сплошной рентгеновский спектр, испускаемый электронами при торможении их в антикатоде рентгеновской трубки. При не очень больших энергиях частиц потери энергии на излучение гораздо меньше потерь на ионизацию. Однако по мере роста энергии заряженной частицы соотношение между этими двумя видами потерь меняется на обратное и потери на излучение, растущие пропорционально кинетической энергии  $E$  тормозящейся частицы, далеко обгоняют потери на ионизацию, которые достигают минимума при  $E \sim mc^2$  и лишь незначительно возрастают при дальнейшем увеличении энергии  $E$ . То значение энергии частицы  $E$ , при котором потери обоих видов становятся одинаковыми, называется критической энергией  $E_{cr}$ . Так как (как только что указывалось) тормозное излучение пропорционально  $Z^2$ , где  $Z$  — порядковый номер атомов среды, а потери на ионизацию пропорциональны числу электронов в атоме, т. е. пропорциональны  $Z$  (мы отвлекаемся здесь от учета множителей, зависящих от  $Z$  логарифмически), то относительная роль тормозного излучения тем больше и соответственно этому значение  $E_{cr}$  тем меньше, чем больше порядковый номер атомов среды: для воздуха  $E_{cr} \sim 80 \text{ Мэв}$ , для свинца  $E_{cr} \sim 7 \text{ Мэв}$ .

Надо иметь в виду, что тормозное излучение обратно пропорционально квадрату массы тормозящейся частицы, а потери на ионизацию крайне релятивистских частиц (т. е. частиц, скорость которых  $v$  удовлетворяет требованию  $1 - \frac{v}{c} \ll 1$ ) от их массы практически не зависят; поэтому критическая энергия пропорциональна квадрату массы тормозящейся частицы. Приведенные только что числа относятся к электронам и позитронам. Так как свойства очень быстрых электронов и позитронов почти тождест-

венны, то в дальнейшем часто термином «электрон» будут обозначаться электроны обоих знаков заряда (т. е. как собственно электроны, так и позитроны).

Пробегом частицы данной энергии называется средняя длина пути частицы в данном веществе, на котором частица растрчивает всю свою начальную кинетическую энергию. Теоретически вычисленные длины пробегов быстрых электронов и позитронов оказались гораздо меньше определенных на опыте пробегов космических частиц. Так, например, при прохождении электрона через толщу земной атмосферы он должен, согласно теории, потерять энергию порядка  $10^{13}$  эв, тогда как широтный геомагнитный эффект свидетельствует, что первичные космические частицы обладают энергией порядка  $10^{10}$  эв, т. е. в тысячу раз меньшей.

Вторая фундаментальная трудность состояла в том, что теория была бессильна объяснить механизм образования ливней космических лучей. Электрон или позитрон большой энергии, падая, скажем, на свинцовую пластину, порождает в ней целый пучок вторичных электронов и позитронов, летящих приблизительно в том же направлении, как и первичная частица<sup>4</sup>. Такой пучок генетически связанных между собой электронов и позитронов и называется ливнем. Ливни могут порождаться также и фотонами; возникают они и в земной атмосфере. Число частиц в ливне может варьировать от 2—3 до сотен и даже тысяч. Наконец, в 1938 г. Оже установил существование, правда относительно весьма малочисленных, так называемых широких атмосферных ливней, или ливней Оже, горизонтальное сечение которых достигает десятков тысяч квадратных метров, а число частиц в них может исчисляться миллионами.

Как большая проникающая способность космических лучей, так и существование ливней представлялись столь противоречащими теории, что было широко распространено убеждение в неприменимости дираковской теории электрона к электронам и позитронам больших энергий; предполагалось, что границы ее применимости близки к  $137 mc^2$  ( $m$  — масса электрона,  $137 = \frac{1}{\alpha} = \frac{hc}{e^2}$ ).

§ 4. 1937 год был переломным для физики космических лучей. По одному из тех случайных совпадений, которые встречаются иногда в истории науки, в первой половине этого года независимо друг от друга появились три работы, разъяснившие основные трудности теории. В самом начале 1937 г. были опубликованы две теоретические работы — одна Баба и Гайтлера, другая Карлсона и Оппенгеймера, объяснившие механизм образования ливней космических лучей. В мае того же года Неддермайер и Андерсон сообщили об открытии ими в космических лучах новой проникающей частицы — мезона.

<sup>4</sup> Чем больше энергия вторичной частицы, тем меньше отклоняется ее направление полета от направления первичной частицы.

Мы не можем останавливаться здесь на том, сопоставление каких экспериментальных данных привело Неддермайера и Андерсона к их фундаментальному открытию; отметим только, что в цепи их рассуждений решающее значение имел тот факт, что проникающая способность релятивистской заряженной частицы данной энергии должна быть тем больше, чем больше ее масса покоя. Действительно, тормозное излучение, как уже указывалось выше, обратно пропорционально квадрату массы тормозящейся частицы. Так как масса мезонов примерно в 200 раз больше массы электрона, то потери мезонов на излучение примерно в  $200^2 = 4 \cdot 10^4$  раз меньше потерь электронов той же энергии. Таким образом, оказывается, что вплоть до очень больших энергий (порядка  $3 \cdot 10^{11}$  эв в свинце и  $4 \cdot 10^{12}$  эв в воздухе) мезоны при прохождении через вещество практически не дают тормозного излучения, а тратят энергию только на ионизацию среды. Эти потери составляют лишь малую долю потерь на излучение, испытываемых быстрыми электронами. Так, например, быстрая заряженная частица (независимо от ее массы) при прохождении толщи земной атмосферы тратит на ионизацию всего около  $2 \cdot 10^9$  эв, тогда как благодаря потерям на излучение минимальная энергия, потребная электрону для прохождения сквозь толщу атмосферы, достигает  $5 \cdot 10^{12}$  эв. Таким образом, большая масса мезонов обеспечивает их большую проникающую способность<sup>5</sup>. Мы знаем теперь, что энергия первичных космических лучей, падающих на поверхность атмосферы, переносится к поверхности Земли в основном не мало проникающими электронами и позитронами, а проникающими мезонами. Подавляющее большинство электронов и позитронов, входящих в состав космических лучей у поверхности моря, зарождаются не у поверхности атмосферы, а в ее нижних слоях, причем порождаются они проникшими в эти слои мезонами.

Принято различать две основные компоненты космических лучей — жесткую, или проникающую, и мягкую. Компоненты эти разграничены не очень четко; экспериментаторы обычно считают мягкими те космические лучи, которые поглощаются примерно 10 см свинца, а жесткими те, которые проходят через такой слой свинца. Так называемая ионизирующая (т. е. состоящая из заряженных частиц) часть жесткой компоненты состоит из быстрых мезонов и протонов; в нижних слоях атмосферы протонов мало, в самых же верхних слоях они, вероятно, составляют преобладающую часть космических лучей. Мягкая же ионизирующая компонента космических лучей состоит на уровне моря в основном из электронов и позитронов, малая проникающая способность которых обу-

<sup>5</sup> При прохождении через вещество мезоны могут растрчивать свою энергию не только на ионизацию и излучение, но и на специфические мезонно-ядерные процессы. Однако эти специфические потери не играют существенной роли для мезонов с энергией порядка  $10^9$  эв, преобладающих в нижних слоях атмосферы. О поведении мезонов очень больших энергий мы знаем очень мало.

словливается потерями на излучение. Кроме того, в состав мягкой ионизирующей компоненты входят относительно медленные мезоны и протоны, число которых быстро возрастает при подъеме от уровня моря к большим высотам.

Помимо ионизирующих (т. е. заряженных) частиц, в состав космических лучей входят и нейтральные (неионизирующие) частицы. Проникающая неионизирующая компонента состоит из нейтронов и, вероятно, из нейтральных мезонов; мягкая же неионизирующая компонента состоит в основном из фотонов.

Малая проникающая способность фотонов тесно связана с механизмом образования ливней космических частиц. Как было впервые установлено работами Баба и Гайтлера и Карлсона и Опленгеймера, механизм этот состоит в следующем. Быстрый электрон или позитрон, пролетая вблизи ядра какого-либо атома среды, с большой вероятностью «материализуется», т. е. порождает пару электрон—позитрон (сам фотон при этом, конечно, исчезает). Каждая частица такой вторичной пары, так же как и первичная, излучает тормозные фотоны большой энергии, которые, в свою очередь, образуют пары, и т. д. Получается лавинообразно нарастающий пучок электронов, позитронов и фотонов, летящих (если их энергия достаточно велика) примерно по направлению полета первичной частицы. Энергия первичной частицы распределяется между частицами такого ливня, число которых продолжает нарастать, пока средняя энергия ливневых частиц не упадет настолько, что ионизационные потери энергии заряженных ливневых частиц не начнут преобладать над потерями на излучение. В этой стадии и на этом расстоянии от места зарождения ливня число частиц  $N$  в нем достигает максимума и (при условии  $E \gg \gg E_{cr}$ ) равно  $N = \frac{0,3E/E_{cr}}{\sqrt{\ln E/E_{cr}}}$ , где  $E$  — энергия первичной частицы, а  $E_{cr}$  — критическая энергия вещества, в котором образуется ливень. Далее происходит постепенное поглощение ливня — размножение ливневых частиц постепенно прекращается, а потери на ионизацию понижают их энергию до предела, ниже которого эти частицы уже не регистрируются измерительными приборами.

Понятно, что ливень может порождаться и фотонами, а не только электронами или позитронами. Малая проникающая способность фотонов большой энергии обуславливается именно большой вероятностью их материализации в пару. Длина пути в данном веществе, на котором быстрый электрон или позитрон в среднем излучает один фотон большой энергии (так называемая ливневая единица длины <sup>6</sup>), примерно равна (точнее, на одну треть меньше) средней длине пути, которую проходит в том же веществе фотон большой энергии до того, пока он превращается в пару.

<sup>6</sup> Точнее, на одной ливневой единице длины электрон, энергия которого много больше, чем  $137 mc^2/Z^{1/3}$ , в среднем излучает один фотон, энергия которого превышает  $1/e=1/2,7$  энергии электрона, и, кроме того, фотоны меньших энергий.

Ливневая единица длины в свинце равна 0,5 см, в воздухе — около 300 м.

Электронно-позитронно-фотонные ливни, о которых все время шла речь, входят, естественно, в состав мягкой компоненты космических лучей, которой они и порождаются. Как раз ливнеобразование и обуславливает малую проникающую способность мягкой компоненты в отличие от не дающих тормозного излучения (а потому и не ливнеобразующих и, стало быть, проникающих) мезонов. В настоящее время одним из главных экспериментальных критериев того, является ли данная заряженная частица (столь быстрая, что ее массу нельзя оценить по вызываемой ею ионизации среды) мезоном или электроном, служит следующий признак: если эта частица, проходя через слой свинца 2—3 см, не порождает в нем ливень, то она — мезон или протон, а не электрон.

Создание каскадной теории ливней, результаты которой прекрасно согласуются с экспериментом, и открытие проникающей космической частицы — мезона — устранили прежние сомнения в применимости дираковской релятивистской теории к электронам очень большой энергии.

§ 5. Как уже отмечалось, преобладающая часть мягкой компоненты космических лучей в нижних слоях атмосферы не приходит сверху, а порождается в этих же слоях жесткой компонентой — мезонами. Существуют три основных способа генерации мягкой компоненты мезонами.

Во-первых, быстрый мезон выбивает электроны из внешних электронных оболочек атомов среды, лежащих на его пути. Большинство электронов этого происхождения медленны, и лишь небольшую долю их составляют быстрые. Если они обладают энергией порядка 1 Мэв и выше, то их называют  $\delta$ -электронами. Если энергия  $\delta$ -электрона превышает критическую энергию для данной среды, то этот  $\delta$ -электрон порождает ливень.

Во-вторых, мезоны очень большой энергии (порядка  $10^{11}$  эв) дают заметное тормозное излучение, т. е. порождают фотоны большой энергии, которые, в свою очередь, порождают ливни. В негазообразных средах образование  $\delta$ -электронов является основным механизмом генерации мягкой компоненты. Но при генерации этой компоненты в воздухе преобладающее значение имеет третий механизм — *распад мезона*.

Уже довольно давно было известно, что космические лучи поглощаются в атмосфере значительно больше, чем в эквивалентном по массе слое твердых или жидких веществ. Согласно теории, развитой Гейзенбергом и Эйлером в 1938 г., эта аномалия объясняется спонтанным распадом мезонов, аналогичным радиоактивному распаду тяжелых ядер. Впоследствии распад мезонов был доказан непосредственными измерениями средней длительности жизни медленных мезонов (см. статью Е. Л. Фейнберга в сборнике «Мезон»), которая оказалась равной  $\tau_0 = 2,15 \cdot 10^{-6}$  сек; при распаде мезон превращается в один электрон или позитрон (в зависимости от знака



заряда мезона) и одно нейтрино <sup>7</sup>. Если мезон движется с большой скоростью, то время его жизни  $\tau$ , измеренное движущимся вместе с ним наблюдателем, будет иметь ту же длительность  $\tau_0$ ; однако благодаря релятивистскому эффекту замедления хода движущихся часов время жизни  $\tau$  мезона, измеренное «неподвижным» наблюдателем, будет равно  $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tau_0 E}{\mu c^2}$ , где  $v$  — скорость,  $E$  — энергия и  $\mu$  — масса мезона. Чем быстрее мезон, тем дольше он живет.

Если мезон не очень медленен (так что скорость его сравнима со скоростью света), то он пролетает сравнительно тонкие слои твердых или жидких веществ столь быстро, что практически не успевает в них распасться. Напротив, пути мезонов в атмосфере исчисляются километрами и время, потребное для прохождения таких расстояний со световой скоростью, велико по сравнению с  $\tau_0$ ; поэтому значительная часть мезонов распадается при прохождении сквозь земную атмосферу. Возникновение при распаде мезонов, электронов и позитронов (так называемых *электронов распада*) является главным механизмом генерации мягкой компоненты в атмосфере.

Аномальное поглощение космических лучей в атмосфере объясняется, во-первых, тем, что распад проникающих мезонов превращает их в сильно поглощаемую мягкую компоненту, и, во-вторых, тем, что половина энергии распадающегося мезона передается нейтрино <sup>8</sup> и поэтому вовсе теряется для наблюдения, так как нейтрино не вызывают никаких доступных экспериментальному обнаружению эффектов.

Так как мезоны самопроизвольно распадаются, то они не могут приходиться из космических пространств, а должны генерироваться первичными космическими лучами в верхних слоях земной атмосферы. Что же нам известно о *первичных* космических лучах? Анализ данных по широтному геомагнитному эффекту показывает, что около 60% энергии космических лучей, падающих на поверхность земной атмосферы, приходится на первичные заряженные частицы, кинетическая энергия которых не превышает  $1,7 \cdot 10^{10}$  эв. Предполагается, что и остальные 40% общей энергии космических лучей тоже в основном приносятся заряженными частицами столь большой энергии ( $> 1,7 \cdot 10^{10}$  эв), что широтный эффект на них не сказывается. Далее, анализ данных по азимутальному геомагнитному эффекту (т. е. разницы в интенсивности космических лучей, падающих с востока и с запада под данным углом к вертикали) показывает, что космические лучи, доходящие до нижних слоев атмосферы, порождаются в основном *положительно* заряженными первичными частицами.

<sup>7</sup> Не исключено, хотя и маловероятно, что при распаде мезона получается не одно, а несколько нейтрино.

<sup>8</sup> Мезоны, о которых здесь идет речь, —  $\mu$ -мезоны — как выяснилось впоследствии, распадаются на электрон и два нейтрино. — *Прим. ред.*

Наиболее распространенная в настоящее время точка зрения состоит в том, что подавляющее большинство первичных космических частиц является положительно заряженными протонами<sup>9</sup>. Эта точка зрения основывается на опытах М. Шейна и его сотрудников, обнаруживших почти полное отсутствие быстрых электронов и позитронов в самых верхних слоях атмосферы (на высоте 25—35 км). Результаты Шейна, по-видимому, подтверждаются недавними, еще не опубликованными измерениями С. Н. Вернова.

Таким образом, наиболее вероятная схема прохождения космических лучей через атмосферу состоит в следующем: первичные протоны со средней энергией порядка  $10^{10}$  эв генерируют в верхних слоях атмосферы мезоны, которые частью проникают в нижние слои атмосферы, составляя собой жесткую компоненту космических лучей, частью распадаются по пути. Мягкая же компонента, состоящая из электронов и фотонов, является третичной и генерируется вторичной (т. е. мезонами) как при распаде мезонов, так и путем образования  $\delta$ -электронов (и в гораздо меньшей степени путем тормозного излучения мезонов)<sup>10</sup>.

§ 6. Схема эта, по всей вероятности, в общих чертах соответствует действительности. Однако экспериментальное изучение многих процессов, связанных с прохождением космических лучей через вещество, находится еще в самом начале и таит в себе, по-видимому, столь много неожиданностей, что, как мне кажется, в настоящее время начинается новая фаза в развитии учения о космических лучах.

Действительно, процессы в космических лучах могут быть разделены на три класса: к первому относятся электромагнитные процессы — ионизация и возбуждение атомов среды заряженными частицами, выбивание ими  $\delta$ -электронов и излучение ими тормозных фотонов под воздействием кулоновых сил атомных ядер и атомных электронов, образование фотонами электронно-позитронных пар, эффект Комптона, резерфордско-рассеяние заряженных частиц на атомных ядрах и т. д. Ко второму классу относится спонтанный распад мезонов и, наконец, к третьему классу — процессы, которые можно назвать мезонно-ядерными или просто ядерными, потому что они определяются ядерными силами или тесно с ними связаны. К таким ядерным процессам относится

<sup>9</sup> Тот факт, что в верхних слоях атмосферы азимутальный эффект отсутствует, может объясняться тем, что в этих слоях образуется очень много медленных мезонов, которые, во-первых, сами сильно рассеиваются и, во-вторых, при своем распаде испускают электроны более или менее изотропно по всем направлениям. (На отсутствие азимутального эффекта в атмосфере в то время указывали наблюдения, оказавшиеся ошибочными; упомянутые в тексте измерения С. Н. Вернова и других подтвердили его существование. — *Прим. ред.*.)

<sup>10</sup> Впоследствии выяснилось, что мюоны, о которых идет речь в этом месте, генерируются не непосредственно первичной компонентой, а возникают от распада  $\pi$ - и  $K$ -мезонов, генерируемых в соударениях первичной компоненты с ядрами атомов воздуха. — *Прим. ред.*

в первую очередь генерация мезонов протонами, нейтронами и мезонами же, а также расщепление атомных ядер космическими лучами<sup>11</sup>.

Современная теория электромагнитных процессов не внушает сомнений и хорошо подтверждается опытом. Поэтому свойства и поведение мягкой компоненты космических лучей (вернее, электронно-фотонной части этой компоненты) нам известны сравнительно хорошо. То же относится и к электромагнитным процессам (ионизация, образование  $\delta$ -электронов и т. д.), возбуждаемым мезонами.

Все же и в этом круге вопросов остается ряд неясностей. Во-первых, если спин мезона равен не 0 или  $\frac{1}{2}$ , а 1, то при очень больших энергиях мезонов (порядка  $10^{11}$  эв) тормозное излучение их и вероятность образования ими  $\delta$ -электронов должны настолько возрасти, что к этим процессам не может быть применима современная теория (см. статью В. Л. Гинзбурга «Теория мезона»). Впрочем, предположение о том, что мезон обладает спином 1, которое одно время было широко распространено, по-видимому, опровергается опытом.

Во-вторых, в своеобразном положении находится теория широких атмосферных ливней — так называемых *ливней Оже*, число которых быстро нарастает с высотой над уровнем моря. Современные представления об этих ливнях сводятся к следующему. Ливни эти создаются первичными частицами сверхвысоких энергий, порядка  $10^{14}$ — $10^{16}$  эв, составляющими незначительную часть первичного излучения. Эти частицы либо сами являются электронами или фотонами, либо создают таковые в верхних слоях атмосферы. Электрон или фотон сверхвысокой энергии создает в земной атмосфере мощный ливень, в максимуме которого число ливневых частиц доходит до  $10^4$ — $10^6$ . Этот ливень представляет собой идущий приблизительно в вертикальном направлении снап частиц; в самой верхней части ливня сечение его растет, а затем начинает уменьшаться обратно пропорционально плотности воздуха; в нижних слоях атмосферы радиус ливня должен быть порядка 100 м. Такая геометрическая форма ливня получается на основании следующих соображений. Направление полета тормозных фотонов и электронно-позитронных пар большой энергии, генерируемых в ливне, весьма мало отклоняется от направления полета генерирующих их частиц. Только ливневые частицы сравнительно малых энергий летят под значительным углом к оси ливня. Пробегом этих частиц и определяется ширина ливня. Так как пробег частицы в воздухе обратно пропорционален его плотности, то и ширина ливня должна изменяться в том же соотношении.

На этих представлениях основывается теория ливней Оже, в развитии которой выдающаяся роль принадлежит советским тео-

---

<sup>11</sup> Можно указать и процессы смешанного характера, например возможное образование пар мезонов фотонами.

ретикам (Л. Д. Ландау, Ю. Б. Румер, И. Я. Померанчук, С. З. Беленький, А. Б. Мигдал). До самого последнего времени согласие этой теории с опытом казалось настолько хорошим, что в этом согласии усматривали прямое подтверждение применимости современной теории электромагнитных процессов вплоть до грандиозных энергий в  $10^{14}$ — $10^{16}$  эв. Однако в последнее время, по-видимому, выясняется, что в образовании ливней Оже существенную роль играют не только электромагнитные процессы, учитываемые каскадной теорией ливней, но и процессы мезонно-ядерные<sup>12</sup>.

На это указывает, во-первых, связь с ливнями Оже так называемых широких проникающих ливней. Проникающие ливни, т. е. ливни проникающих частиц, по всей вероятности мезонов, резко отличаются от обычных электрон-позитронных ливней. Они могут быть разделены на два класса — узкие проникающие ливни, радиус которых равен примерно  $\frac{1}{2}$  м и о которых речь будет впереди, и широкие проникающие ливни, радиус которых неизвестен, но, во всяком случае, не меньше нескольких метров. Установленная на опыте корреляция этих широких проникающих ливней с ливнями Оже, по-видимому, объясняется тем, что фотоны или электроны больших энергий могут генерировать мезоны — процесс, не учитываемый современной теорией ливней Оже.

В гораздо большей мере неправильность этой теории выявляется последними измерениями Г. Зацепина и других на Памире. Эти измерения установили, что радиус ливней Оже на высоте 3860 м над уровнем моря, во всяком случае, существенно превышает 600 м, что никак нельзя согласовать с теоретическим значением радиуса 100 м. Причины этого расхождения теории с опытом неясны; возможно, что они связаны опять-таки с неучитываемой теорией генерацией мезонов фотонами и электронами большой энергии.

Хотя, таким образом, свойства и поведение фотонов и электронов сверхвысоких энергий в ряде отношений остаются неясными, все же, как уже говорилось, процессы электромагнитного характера в космическом излучении известны нам сравнительно хорошо.

Что касается распада мезона, то известна длительность жизни мезонов с массой порядка 200 *m*, несомненно преобладающих в нижних слоях атмосферы. Гипотетично, но весьма правдоподобно, что эти мезоны распадаются на один электрон или позитрон и на одно нейтрино. Это все, что требуется знать о распаде. Однако, вероятно, в верхних слоях атмосферы существуют мезоны другой массы<sup>13</sup>, о распаде которых мы в сущности ничего не знаем.

Наиболее скудны наши сведения о третьем классе процессов — о процессах мезонно-ядерных. Сколько-нибудь надежной теории

<sup>12</sup> Это и подтвердилось впоследствии; см. сноску 10 на стр. 396. — *Прим. ред.*

<sup>13</sup> Последующие наблюдения подтвердили это предположение. — *Прим. ред.*

этих процессов пока не существует, экспериментальное же их изучение находится в самом начале.

Начнем с генерации мезонов первичными частицами. Средняя энергия мезонов на уровне моря равна примерно  $2 \cdot 10^9$  эв; при прохождении через атмосферу каждый мезон теряет примерно столько же энергии ( $\sim 2 \cdot 10^9$  эв) на ионизацию. Стало быть, если даже, как это принято считать (правда, по не очень убедительным мотивам), преобладающая часть мезонов зарождается в самом верхнем слое атмосферы, масса которой составляет около  $1/10$  всей массы атмосферы, то средняя начальная энергия мезонов, доходящих до уровня моря, равна в месте их зарождения примерно  $4 \cdot 10^9$  эв. Между тем анализ широтного геомагнитного эффекта на уровне моря показывает, что преобладающая часть этих мезонов генерируется первичными частицами, энергия которых превышает  $1,7 \cdot 10^{10}$  эв. Таким образом, средняя энергия мезонов существенно меньше энергии генерирующих их первичных частиц. Если учесть, что в верхних слоях атмосферы, по всей вероятности, резко возрастает число медленных мезонов, не доходящих до уровня моря, а распадающихся по дороге, то оказывается, что энергия первичной частицы (допустим, что она является протоном) распределяется в среднем между десятком вторичных мезонов.

В столбе земной атмосферы сечением  $1 \text{ см}^2$  содержится  $4,3 \times 10^{25}$  атомов N и O. Эффективный поперечник сечения для взаимодействия быстрых протонов с атомными ядрами не может превышать площади геометрического сечения этих ядер, равного в случае N и O примерно  $4,2 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$ . Следовательно, быстрый протон на протяжении  $1/10$  земной атмосферы не может испытать больше  $1/10 \times 4,3 \cdot 10^{25} \times 4,2 \cdot 10^{-25} \sim 2$  столкновений. Если протон действительно генерирует на этом протяжении около десятка мезонов, то в каждом акте столкновения с атомами воздуха он должен создавать в среднем около пяти мезонов. Подобная генерация многих частиц в одном акте не имеет места в электромагнитных процессах.

Хотя, вероятно, не все сделанные выше предположения верны<sup>14</sup>, но, во всяком случае, из приведенных оценок явствует, что вероятность генерации мезонов при соударении первичной космической частицы с атомами воздуха должна быть весьма велика (порядка геометрического сечения этих атомов).

Если и верно, что преобладающая доля мезонов генерируется в самых верхних слоях атмосферы, то все же, как выяснилось в самые последние годы, несомненно, что в промежуточных слоях атмосферы интенсивно происходят процессы «ядерного» характера,

<sup>14</sup> Возможно, что генерация мезонов интенсивно происходит не на  $1/10$  атмосферы, а на большем протяжении. Возможно, что первичные протоны при прохождении через атомное ядро выбивают из него по несколько протонов и нейтронов, которые уже в дальнейшем генерируют мезоны. Вообще, наши сведения о процессах, происходящих в высших слоях атмосферы, настолько скудны, что они не исключают целого ряда мыслимых возможностей.

по нашей классификации, почти совершенно отсутствующие у поверхности моря. Важнейшими из такого рода процессов являются генерация мезонных ливней, с одной стороны, и расщепление атомных ядер, с другой стороны.

Мезонные ливни наблюдаются на высоте 3—4 км над уровнем моря непосредственно в камере Вильсона. По всей вероятности, и так называемые узкие атмосферные (т. е. зарождающиеся в атмосфере) ливни, наблюдающиеся в большом количестве на тех же высотах с помощью счетчиков Гейгера, также состоят в основном из мезонов. Эти ливни, в обнаружении и изучении которых выдающаяся роль принадлежит советским ученым (высотные космические станции на Алагезе — руководители А. И. Алиханов и А. И. Алиханян и на Памире — руководители Д. В. Скобельцын и В. И. Векслер), резко отличаются от обычных атмосферных ливней мягкой компоненты (ливни Оже) тем, что радиус их горизонтального сечения равен примерно  $1/2$  м, тогда как радиус ливней Оже не меньше нескольких сотен метров. Теоретические подсчеты показывают, что электронно-фотонные ливни никак не могут быть столь узкими; большая проникающая способность частиц в узких ливнях указывает на то, что они состоят из мезонов; наконец, не опубликованные пока непосредственные измерения массы частиц, входящих в состав узких ливней, с помощью большого магнита Алагезской высотной космической станции, по-видимому, окончательно доказывают, что масса этих частиц равна примерно 200 *m*.

Узость ливней может быть объяснена только тем, что они зарождаются на сравнительно небольшой высоте над измерительным устройством, а относительно большое число их свидетельствует, что процессы генерации мезонов на высоте порядка 4 км происходят несравненно интенсивнее, чем это предполагалось еще несколько лет тому назад<sup>15</sup>.

На тех же высотах 3—4 км резко возрастает также число ядерных расщеплений, вызываемых космическими лучами. Одним из наиболее удобных способов наблюдения этих расщеплений является изучение так называемых звезд, т. е. звездообразных следов (треков), оставляемых в фоточувствительном слое фотопластины протонами и  $\alpha$ -частицами, разлетающимися из расщепившихся ядер атомов этого слоя. Определенная часть этих расщеплений несомненно производится мезонами. Это подтверждается, в частности, не опубликованными пока результатами измерений треков частиц в звездах, произведенными П. И. Лукирским и Н. А. Перфиловым. Измерения эти позволяют вычислить общую энергию и общий импульс протонов и  $\alpha$ -частиц в звезде; оценивая, кроме того, энергию и импульс вылетающих при расщеплении ядра нейтронов, не оставляющих следов в фотопластинке, можно вычис-

---

<sup>15</sup> В отличие от широких проникающих ливней, о которых упоминалось выше, узкие ливни не коррелируют с ливнями Оже.

лить энергию и массу частицы, вызывающей расщепление. По данным П. И. Лукирского, эта масса, определенная по измерениям звезд некоторого определенного типа, лежит в пределах между 140  $m$  и 200  $m$ .

Вместе с тем несомненно, что значительная, а возможно и преобладающая, часть ядерных расщеплений производится сравнительно медленными (с энергией в несколько сотен миллионов электронвольт) протонами и в особенности нейтронами. Число таких протонов и нейтронов быстро возрастает с высотой над уровнем моря; роль их в космических лучах и характер и закономерность процессов, производимых ими при прохождении через вещество, изучены еще совершенно недостаточно.

§ 7. В нашем кратком обзоре современного положения учения о космических лучах мы отнюдь не стремились к исчерпывающей полноте. Мы совершенно не затронули не только вопросов, не существенных для нашей основной темы<sup>16</sup>, но и таких важных, хотя и мало еще изученных, вопросов, как, например, состав и свойства космического излучения на больших глубинах под поверхностью Земли, выяснение которого должно дать очень существенные сведения о свойствах мезонов большой энергии и, быть может, о нейтральных мезонах. Нам представляется, однако, что наш обзор может дать правильное представление об основных задачах, стоящих в настоящее время перед физикой космических лучей. Подведем же некоторые итоги.

В настоящее время сравнительно хорошо изучены и теоретически объяснены состав и свойства космических лучей вблизи от уровня моря. Происходящие на этих высотах процессы относятся, по нашей классификации, главным образом к процессам электромагнитным и к распаду мезонов массы 200  $m$ . Поэтому изучение космических лучей вблизи от уровня моря дает мало сведений о специфически мезонно-ядерных процессах (генерация мезонов, расщепление ядер мезонами и нуклонами и т. д.). Таким образом, существенного прогресса в наших сведениях об ядерных процессах можно ожидать только от дальнейшего развития и расширения экспериментальных работ по космическим лучам на средних и больших высотах.

При этом необходимо отметить, что, как показали работы последних лет, отнюдь нельзя считать, что процессы в космических лучах на средних высотах (начиная примерно с 3 км), по крайней мере качественно, не отличаются от процессов на уровне моря. Напротив, мезонно-ядерные процессы (в число которых, по нашей классификации, входят, например, все процессы генерации мезонов) играют существенную роль не только в высших слоях атмосферы, но и на средних высотах. На этих же высотах заметную

---

<sup>16</sup> Например, вопроса о происхождении космических лучей, о котором мы знаем в сущности только то, что ряд простейших положений о происхождении космических лучей не выдерживает критики.

роль, согласно неопубликованным пока данным А. И. Алиханяна, начинает играть тяжелый вид мезонов с массой порядка 500—1000 *m*. Свойства этих мезонов нам пока еще совершенно неизвестны.

Вместе с тем необходимо отметить, что пока нет убедительных экспериментальных данных ни в пользу, ни против предположения о существовании в космических лучах нейтральных мезонов (нейтретто). Вопрос этот чрезвычайно важен, ибо в пользу этого предположения говорят веские соображения, основанные на современных представлениях о природе ядерных сил.

Быстрое развитие прерванных войной высотных космических исследований и, в особенности, вполне обоснованные надежды осуществить генерацию мезонов в лабораторных условиях, о которых говорилось в начале этой статьи, позволяют рассчитывать, что в ближайшее время будет создана экспериментальная основа для построения рациональной теории мезонов.



## А. ЭЙНШТЕЙН И СОВРЕМЕННАЯ ФИЗИКА <sup>1</sup>

Настоящая сессия Отделения физико-математических наук Академии наук отмечает собой два события: во-первых, 50-летие со времени выхода в свет статьи Эйнштейна «Электродинамика движущихся тел», в которой были заложены основы теории относительности, и, во-вторых, кончину Эйнштейна, последовавшую 18 апреля этого года.

Эйнштейн, которого Ленин назвал одним из великих преобразователей естествознания, по праву сопоставляется с Ньютоном. Это сопоставление справедливо, по-моему, не только в том смысле, что Ньютон и Эйнштейн знаменуют собой вершины человеческих достижений в познании природы, вершины, доминирующие над 300-летним периодом развития точных наук и непосредственно перекликающиеся друг с другом на этом громадном расстоянии. Эйнштейна и Ньютона можно, по-моему, сопоставить и в том смысле, что Ньютон заложил основы современного естествознания, а творение Эйнштейна — теория относительности — увенчало собой здание классической физики. Надо сказать, что часто под классической физикой понимают физику дорелятивистскую и доквантовую. Несмотря на всю глубину преобразования, совершенного теорией относительности в физике, мне кажется более правильным понимать под классической физикой физику макрокосма, включая и теорию относительности, в отличие от квантовой физики микрокосма. Несомненно, что дух мышления теории относительности есть дух мышления классической физики и что теория относительности увенчала собой здание классической физики, что только она придала классической физике необходимую последовательность, стройность и полноту. Таким образом, Эйнштейн завершил дело, начатое Ньютоном.

Наряду с этим создание теории относительности имело громадное значение для дальнейшего этапа развития физики. Еще во второй половине прошлого века в трудах Максвелла и Больцмана зародилась та концепция статистической физики, которая в наше время привела к созданию квантовой механики. Основы этой физики микрокосма глубоко отличны от основ физики макрокосма, увенчанного созданием теории относительности. Эйнштейн способствовал созданию квантовой механики не только тем, что

<sup>1</sup> УФН, 1956, 59, вып. 1. Вступительное слово на заседании Отделения физико-математических наук АН СССР, посвященном 50-летию теории относительности. Москва, 30 ноября 1955 г. См. также «Культура и жизнь», 1960, № 5, 36.

в том же знаменательном 1905 г., в котором им были заложены основы теории относительности, он впервые выдвинул радикально новую гипотезу световых квантов (именно за эту работу ему была в 1921 г. присуждена Нобелевская премия). Эйнштейн сделал для создания квантовой физики, быть может, больше, чем кто-либо из непосредственных ее творцов, потому что само создание теории относительности проложило путь для новых фундаментальных преобразований физики.

Для материалистов-диалектиков всегда было в принципе ясно, что, с одной стороны, наши человеческие представления и понятия не априорны, а являются обобщением опыта человечества, что, с другой стороны, природа неисчерпаема и что поэтому наши понятия и представления имеют ограниченную применимость. Поэтому всякий раз, когда мы проникаем в круг новых, неизведанных явлений, оказывается необходимым видоизменить и обобщить основные научные понятия и представления для того, чтобы с их помощью стало возможным охватить и этот новый круг явлений. Тем не менее к концу прошлого века среди физиков распространилась известная самоуверенность и самодовольство — преобладало мнение, что основные физические закономерности уже выяснены, остались доделки — пусть существенные, но все же не выходящие за рамки твердо установленных основ. Такой выдающийся физик, как В. Томсон (лорд Кельвин), выступил именно с такого рода заявлением в речи, произнесенной при наступлении нашего столетия. При этом он, правда, оговорился, что на ясном и спокойном физическом небосклоне пока еще не рассеялись два облачка — одно, связанное с опытом Майкельсона, другое — с так называемой ультрафиолетовой катастрофой, возникающей при рассмотрении теплового равновесия между веществом и излучением. Из первого «облачка» возникла впоследствии теория относительности, из второго — квантовая теория.

Создание теории относительности в корне разрушило это неправильное научное умонастроение, создало понимание того, что каждый новый этап развития физики неизбежно требует коренного пересмотра, обновления и расширения самых фундаментальных ее основ и понятий, таких, например, как понятия пространства и времени.

Это новое научное умонастроение проложило путь и для создания квантовой физики. Оно же, несомненно, сыграет решающую роль при разрешении тех фундаментальных проблем, которые возникли в настоящее время в теории элементарных частиц и теории явлений, протекающих при экстремально больших энергиях, проблем, решение которых, по моему убеждению, поднимет физику на новую ступень еще при жизни всех нас, здесь находящихся. Можно не сомневаться, что это новое научное умонастроение окажет существеннейшее влияние и на развитие других естественных наук.

Необходимо отметить и другую сторону дела. Развитие теории

относительности не только оказало революционизирующее влияние на всю физику, но наряду с этим подчеркнуло и преемственность в развитии науки. На примере теории относительности особенно выпукло выявился тот факт, что каждый новый этап развития науки не перечеркивает и не отвергает предшествующий, а включает его в себя в качестве частного случая более общих закономерностей. Так, классическая <sup>2</sup> механика является частным случаем релятивистской механики при скоростях, малых по сравнению со скоростью света.

По общепринятой, хотя, быть может, и не совсем удачной, терминологии говорят о специальной и об общей теориях относительности. Большинство докладов на нашей сессии посвящено развитию общей теории относительности, только в первых двух обзорных докладах будет идти речь и о специальной теории относительности. Объясняется это тем, что специальная теория достигла такой степени законченности, что в настоящее время речь может идти не столько об ее дальнейшем развитии, сколько об ее применениях к различным физическим явлениям. Справедливость специальной теории относительности не может вызывать сомнений. Она подтверждена не только опытами, специально поставленными для ее проверки, но и, что еще важнее, совпадением с опытом всей совокупности следствий современной физической теории, одной из важнейших основ которой она является. Больше того, специальная теория относительности вошла в современную технику и служит основой не только для конструкции ускорителей, но и для многих важнейших технических расчетов, связанных с применением атомной энергии. Поэтому я ограничусь только одним замечанием по поводу специальной теории относительности.

Эта теория не только коренным образом видоизменила наши представления о пространстве и времени, но и выявила зияющую логическую недостаточность прежних представлений. Так, например, теперь стало очевидным, что важнейшее понятие одновременности или, говоря общее, понятие последовательности во времени двух событий, пространственно удаленных друг от друга, в дорелятивистской физике вообще не имело никакого однозначного, определенного смысла. Опирируя этим понятием, в дорелятивистской физике неявно предполагали существование сигналов и действий, мгновенно распространяющихся на любые расстояния, тогда как на самом деле в природе таких сигналов и действий не существует. Эта логическая несостоятельность старых представлений представляется нам теперь почти самоочевидной.

Все научное творчество Эйнштейна с необычайной выпуклостью показывает, что коренные успехи в познании природы достигаются глубоким логическим анализом некоторых немногих основных узловых опытных фактов и закономерностей, которые нужно уметь выделить из колоссального количества сведений и фактов, давя-

---

<sup>2</sup> Ньютоновская. — Прим. ред.

щих своей огромной массой на исследования в любой отрасли современной науки.

Особенно характерна в этом отношении история создания общей теории относительности. К созданию этой теории привел Эйнштейна анализ простейшего, давно уже хорошо известного факта: отношение инерциальной массы тела к его весовой массе одинаково для всех тел. Принцип эквивалентности ускорения и поля тяготения, лежащий в основе общей теории относительности, является в сущности непосредственным обобщением этого давно известного простейшего факта.

Я не могу удержаться, чтобы не упомянуть в связи с этим о замечании, сделанном Эйнштейном лет 15 тому назад. Шел разговор о том, что в связи с открытием большого числа элементарных частиц, в частности мезонов, назрела проблема построения теории элементарных частиц. Эйнштейн всегда считал, что уже электрон — атом электричества — является чужеземцем в стране классической электродинамики. В этом упомянутом мною разговоре он сказал, что, казалось бы, уже факт существования электрона должен был быть достаточным для построения основ общей теории элементарных частиц. Это, несомненно, гипербола, но она очень характерна для Эйнштейна, и поучительно противопоставить ее широко распространенной точке зрения, что решению фундаментальных проблем науки необходимо должно предшествовать накопление огромного количества экспериментальных данных. В действительности пример как специальной, так в особенности общей теории относительности показывает, что решающую роль для построения фундаментально новой теории играет глубокий логический анализ *узловых* опытных фактов. Конечно, следствия из теории должны быть проверены затем на максимально обширном опытном материале.

Общая теория относительности, как известно, включает в себя рациональную теорию тяготения. Эта теория тяготения находится в таком же отношении к ньютоновской теории тяготения, в каком современная электродинамика относится к теории электричества, основанной на применении одного лишь кулоновского закона взаимодействия зарядов. Вместе с этим общая теория относительности решила вопрос, который пытался разрешить еще наш Лобачевский путем измерения суммы углов большого треугольника: она показала, что наше реальное физическое пространство не евклидово, а обладает кривизной. Наконец, решив проблему геометрии в обычных человеческих масштабах и в малых астрономических масштабах — я имею в виду масштабы солнечной системы или нашей Галактики, — теория относительности впервые создала теоретическую базу для исследования геометрии и больших астрономических масштабов — масштабов космологических. Теперь, когда новейшие телескопы проникают в глубь Вселенной на миллиарды световых лет, проблемы космологии стали доступными экспериментальному исследованию, и можно не сомневаться, что эйнштейнов-

ская теория относительности явится надежной руководящей нитью при проникновении человека в этот новый, неизведанный круг явлений, подобно тому как классическая физика, атомная физика и электронная теория сыграли руководящую роль при проникновении в глубь микрокосма. Конечно, так же как изучение микрокосма привело нас к новому этапу физики — квантовой теории, которая неожиданным для всех образом видоизменила исходные физические представления, так и будущая космология, при создании которой общая теория относительности будет играть несомненно решающую роль, может оказаться очень далекой от той, какой мы ее себе сейчас можем представить.

Я хотел бы сделать еще одно последнее замечание. 101 год тому назад Риман в своей диссертации, представленной для получения звания доцента, высказал глубочайшую мысль. Рассматривая метрику, или мероопределение, пространств, он отметил, что существуют две и только две возможности: либо пространство дискретно, тогда его метрика заложена в нем самом, она дается простым счетом дискретных элементов, либо пространство непрерывно, тогда его метрика не может быть заключена непосредственно в нем самом, а должна обуславливаться извне, т. е. должна определяться, по тогдашней терминологии Римана, внешними связующими силами — *bindende Kräfte*.

Эйнштейн доказал созданием своей теории, что метрика нашего реального мира — четырехмерного пространства-времени — относится ко второму из указанных Риманом типов, а именно, что она определяется находящимися в пространстве массами (включая и массу, несомую, например, светом и другими формами энергии). Однако в последнее время развитие квантовой физики поставило по-новому вопрос о пространстве и времени в микрокосме. Пока можно, конечно, только гадать о том, как разрешится этот вопрос, но мне представляется весьма вероятным, что в микрокосмических масштабах пространство дискретно, т. е. что в микрокосме осуществляется первая из указанных Риманом возможностей. Отмечу при этом, что в рамках классических представлений дискретное пространство, т. е. нечто вроде совокупности узлов кристаллической решетки, не может не быть анизотропным, т. е. что оно несовместимо с требованием равноправия всех пространственных направлений. Однако квантовые представления, как показал Снайдер, открывают возможность совместить дискретность пространства с его изотропией и однородностью.

Никто не может, конечно, предсказать, каким будет дальнейшее развитие физики, но одно, мне кажется, можно утверждать с несомненностью: идеи Эйнштейна, его анализ понятий пространства и времени и взаимосвязи пространственно-временных соотношений с находящейся в пространстве и времени материей могут претерпеть в дальнейшем глубокие изменения, но именно они несомненно послужат отправной точкой целой исторической эпохи дальнейшего развития физики.

ПАМЯТИ Г. С. ЛАНДСБЕРГА <sup>1</sup>

Всякий раз, когда от нас уходит крупный человек, внесший много существенного и важного в ту область деятельности, которой он посвятил свою жизнь, поразительным образом выясняется, что очень многие, даже лично знавшие и высоко ценившие этого человека, в сущности, весьма мало представляли себе весь масштаб его деятельности, весь его облик в целом. Часто отдельные стороны его деятельности, более близкие данному кругу лиц, некоторые второстепенные черты и подробности заслоняли его общий облик, так что основные его черты не столько были ясно понимаемы, сколько чувствовались ими более или менее подсознательно.

Все знают, что Григорий Самуилович вместе с Леонидом Исааковичем Мандельштамом открыл комбинационное рассеяние света и что это одно из самых крупных открытий, а может быть, и самое крупное физическое открытие, которое было сделано советской физикой за все 40 лет ее существования. Но далеко не все представляют себе масштаб деятельности Григория Самуиловича в других областях физики: в разнообразных разделах физической оптики (где им, в частности, было открыто селективное рассеяние света и впервые выделено истинно молекулярное рассеяние света в твердых телах), в молекулярной физике, в частности в области изучения молекулярных связей, и т. д., т. е. во всех тех областях физики, в которые Григорий Самуилович внес чрезвычайно существенный, широкий и большой вклад в науку.

Опять-таки все знают, что Григорий Самуилович руководил работами по прикладной спектроскопии. Но некоторые, вероятно, смотрели на это так, что, мол, у Григория Самуиловича, помимо лаборатории в ФИАН, была еще «нагрузка» — председательствование в спектральной комиссии. Этот взгляд до смешного неправильно характеризует истинное положение дел.

Конечно, громадная армия спектроскопистов, работающих

<sup>1</sup> УФН, 1957, <sup>58</sup>, 287. Вступительное слово на объединенном заседании Отделения физико-математических наук АН СССР, Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР, Комиссии по спектроскопии при ОФМН АН СССР и Московского физико-технического института МВО, посвященном памяти Г. С. Ландсберга. Москва, 25 марта 1957 г.

в научно-исследовательских институтах и в заводских лабораториях, видела в Григории Самуиловиче своего учителя, вдохновителя и руководителя, но среди остальных физиков благодаря исключительной скромности Григория Самуиловича было не так уже широко известно, что он был инициатором и основоположником широкого внедрения спектральных методов в нашу промышленность, создал это дело, сделал его делом большой государственной важности и отдавал ему вплоть до самого конца своей жизни очень много сил и внимания.

Все, кто соприкасался с Григорием Самуиловичем, знали необычайно развитое у него чувство ответственности за выполнение любого взятого им на себя дела, даже небольшого, необычайную его добросовестность во всяком деле. Он просто органически не мог относиться небрежно ни к какому серьезному делу, будь это дело такого масштаба, как открытие комбинационного рассеяния, или отзыв о чьей-либо диссертации, или план учебника по физике для техникумов и средней школы. Ни одно дело не выпускал он из своих рук до тех пор, пока не приходил к твердо обоснованным, проверенным суждениям, надежным выводам. Это знали все, кто соприкасался с Григорием Самуиловичем, но не все ощущали, что в этом проявлялся характерный стиль его творчества, который, так же как и его необычайная душевная чистота и глубокая принципиальность, так роднил его с Л. И. Мандельштамом, с которым он совместно проработал почти 20 лет.

Вот, например, как этот стиль творчества проявился в открытии комбинационного рассеяния. В наше время нередко встречаешься с нездоровым ажиотажем, связанным с погоней за научным приоритетом, с научным самолюбием. Недаром сейчас среди ученых имеет такое широкое хождение выражение «поставить заявочный столб», т. е. опубликовать какую-нибудь заметку, «застолбить» какой-нибудь участок научной работы еще задолго до того, пока станет ясным, находится ли там песок чистого золота или песок тривиальности. И я думаю, что трудно найти за последние 50 лет какое-либо другое физическое открытие такого значения, как комбинационное рассеяние, первое появившееся в печати сообщение о котором уже включало в себя строгую и полную количественную проверку вновь открытого явления.

Между тем именно такой была первая же публикация Григория Самуиловича и Леонида Исааковича о комбинационном рассеянии; в ней излагались результаты всех мыслимых контролей правильности экспериментальных измерений, устранялись все сомнения в их реальности и надежности.

В этой первой публикации не только был правильно описан и количественно охарактеризован сам эффект, но было дано и его теоретическое правильное истолкование.

Наше собрание посвящено обзору научной деятельности Григория Самуиловича, но нельзя пройти мимо его человеческих свойств.

Григорий Самуилович был человеком редкой душевной чистоты, принципиальности и морального мужества. Не только те, кто непосредственно с ним работал, остро ощущают непоправимую утрату, но и во всех областях научной жизни, к которым он имел то или иное отношение — не только в созданных под его влиянием научных коллективах, но и во всей научно-общественной жизни физиков, от академических органов до редколлегий научных журналов, — долго будет чувствоваться отсутствие его морального влияния.

Я был знаком и дружил с Григорием Самуиловичем почти 35 лет. Прожито было много хорошего и много очень тяжелого. И я могу засвидетельствовать, что всегда и неизменно вся его жизнь и деятельность были в подлинном смысле слова безупречными.



## РЕЧЬ, ПРОИЗНЕСЕННАЯ НА ТРАУРНОМ МИТИНГЕ НА ПОХОРОНАХ АКАД. Г. С. ЛАНДСБЕРГА

(Новодевичье кладбище, 4 февраля 1957 г.)<sup>1</sup>

Мы провожаем в последний путь замечательного ученого и замечательного человека Григория Самуиловича Ландсберга. Сейчас не время сколько-нибудь подробно говорить о научном творчестве Григория Самуиловича, но несколько слов об этом я не могу не сказать.

Все мы понимаем значимость блестящего открытия комбинационного рассеяния света Григорием Самуиловичем Ландсбергом и Леонидом Исааковичем Мандельштамом, которое привело к созданию совершенно новых разделов оптики и молекулярной физики. Редко кому из крупнейших ученых выпадает счастье сделать открытие такого значения. И я знаю, что по сравнению с этим счастьем совершенно второстепенной была для Григория Самуиловича та вопиющая несправедливость, вследствие которой только из-за дискриминации советских ученых Нобелевская премия не была присуждена Григорию Самуиловичу и Леониду Исааковичу, — несправедливость, вызвавшая протесты ряда зарубежных физиков и, в частности, демонстративный выход Макса Борна из состава Нобелевского комитета.

Открытие комбинационного рассеяния явилось только началом многолетних напряженных и плодотворных исследований Григория Самуиловича в различных областях оптики и молекулярной физики. Нет возможности их здесь сколько-нибудь охарактеризовать, но нельзя не упомянуть о деятельности Григория Самуиловича в области технической физики.

Еще четверть века тому назад Григорий Самуилович полностью оценил значимость методов спектрального анализа для металлургии и взял на себя инициативу широкой разработки и внедрения этих методов в нашу металлургическую промышленность. В дальнейшем к этому присоединились разработка и внедрение в нефтеперерабатывающую промышленность спектральных методов, основанных на открытом им же комбинационном рассеянии света. В том, как Григорий Самуилович взялся за это дело, проявился его подлинный патриотизм. Без всякой помпы и шумихи, но в высшей степени эффективно он уделял этому делу очень много своих сил до самого последнего времени. Ему удалось достичь таких результатов, которые, даже независимо от его чисто научных работ, для всякого другого ученого, не обладавшего такой скром-

<sup>1</sup> Труды ФИАН СССР, 1958, 9, 7.

ностью и исключительной требовательностью к себе, как Григорий Самуилович, явились бы вполне достаточным основанием для полной самоудовлетворенности. Внедренные им методы анализа играют важнейшую роль в нашей современной промышленности, а огромная армия работников заводских спектральных лабораторий была создана и выросла под его непосредственным руководством.

Я специально отмечаю этот факт потому, что он менее широко известен, чем то, что Григорий Самуилович воспитал многочисленные кадры физиков в МГУ и в Физико-техническом институте.

Я говорил до сих пор о Григории Самуиловиче как об ученом, но я думаю, что для всех, кто не только тесно общался с Григорием Самуиловичем, но просто имел случай наблюдать его научную или общественно-научную деятельность, самое глубокое и дорогое воспоминание будет связано с его духовным обликом.

Когда пытаешься охарактеризовать облик Григория Самуиловича, то, к сожалению, оказывается, что самые точные характеристики звучат избито и напыщенно. И все же я их использую, потому что совершенно искренне ощущаю их подлинную правдивость в отношении Григория Самуиловича. Во всей своей жизни — в личной, в научной, в общественной — Григорий Самуилович всегда и неизменно был рыцарем без страха и упрека.

Я подружился с ним 34 года тому назад, все эти годы мы не только дружили, но и работали рука об руку, и нет ни одного, ни одного-единственного случая за все это долгое и часто трудное время, когда бы Григорий Самуилович сделал что-либо заслуживающее упрека. Он был поразительно мужественный человек, и его глубокая принципиальность не допускала ни малейших компромиссов с совестью.

И еще одна черта — праведники часто становятся, особенно с возрастом, жесткими и суровыми. Григорий Самуилович был по-настоящему, от сердца, добрым человеком, в лучшем смысле этого слова.

## СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ СЛАБОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ<sup>1</sup>

### Введение

Слабое взаимодействие элементарных частиц (в дальнейшем мы будем сокращенно обозначать его буквами СВ) за последние два-три года привлекало и привлекает к себе особое внимание физиков. Объясняется это в первую очередь, конечно, открытием того факта, что СВ могут изменять четность состояния системы частиц. Это означает, что к СВ неприменимо одно из основных положений современной физики, считавшееся почти самоочевидным, а именно, положение об инвариантности законов физики при инверсии пространственных координат (или, что то же, при зеркальном отражении).

Нарушение этой инвариантности, казалось бы, означает, что в некоторых законах физики отдается предпочтение, скажем, правовинтовой нарезке буравчика по сравнению с левовинтовой. Наличие такой дискриминации резко противоречило бы лежащему в основе современной науки представлению об изотропии и однородности пространства.

Выход из этой драматической ситуации заключается, по-видимому, в предложенной Л. Д. Ландау гипотезе об инвариантности всех законов природы по отношению к «комбинированной инверсии», т. е. по отношению к инверсии пространственных координат, сопровождающейся заменой всех элементарных частиц соответствующими им античастицами.

Необходимо также отметить, что на базе отрицания сохранения четности впервые удалось сформулировать универсальную теорию СВ, единым образом количественно описывающую все многочисленные виды этих взаимодействий. В сентябре-октябре 1957 г., когда эту теорию предложили Фейнман и Гелл-Манн и независимо от них — Сударшан и Маршак, ряд экспериментальных данных находился в резком противоречии с теорией. Авторы теории настолько в нее верили, что, подчеркивая эти противоречия с экспериментом, стояли на позиции «тем хуже для фактов» и выражали надежду, что при проверке противоречащие теории эксперименты окажутся ошибочными. Поразительно, что за истекшие 7—8 месяцев эта надежда, по-видимому, уже оправдалась по отношению к большинству противоречивших теории экспериментов.

<sup>1</sup> В сб. «Исследования по экспериментальной и теоретической физике». Памяти Г. С. Ландсберга, М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 218.

В настоящем обзоре мы сначала остановимся на общей характеристике слабых взаимодействий элементарных частиц (§ 1). Затем рассмотрим различные формулировки закона сохранения четности (§ 2), эксперименты, доказывающие нарушение этого закона в СВ (§ 3), и, наконец, гипотезу Ландау о «комбинированной инверсии» (§ 4). Последующие параграфы будут посвящены теории ФГСМ, как мы кратко будем называть упомянутую выше теорию четырех авторов.

## § 1. Общая характеристика слабых взаимодействий

Согласно современным воззрениям все физические силы и взаимодействия (за исключением гравитации) сводятся к четырем классам взаимодействий: два сильных, электромагнитное и слабое. К сильным взаимодействиям относятся, с одной стороны, взаимодействие  $\pi$ -мезонов с нуклонами и гиперонами, лежащее в основе ядерных сил и тем самым определяющее свойства атомных ядер, и, с другой стороны, взаимодействия, происходящие через посредство  $K$ -мезонов и приводящие к взаимным превращениям различных барионов (т. е. нуклонов и гиперонов), сопровождающимся изменением их странности.

Мерой силы взаимодействий какого-либо класса служит безразмерное число типа постоянной тонкой структуры  $\alpha = e^2/\hbar c$ . Для характеристики сильных взаимодействий достаточно электрический заряд  $e$  заменить соответствующей константой взаимодействия  $g$  или  $g'$ . Однако в случае СВ соответствующая константа  $G$  имеет размерность, отличную от размерности постоянных  $e$ ,  $g$  и  $g'$ . Чтобы образовать безразмерную величину, пропорциональную  $G^2$ , нужно, помимо универсальных констант  $\hbar$  и  $c$ , помножить  $G^2$  на  $M^4$ , где  $M$  должно иметь размерность массы. Если в качестве  $M$  выбрать максимальную (по порядку величины) массу элементарных частиц, т. е. массу нуклона, то мы получим следующую таблицу<sup>2</sup>

Тип взаимодействия	Константа взаимодействия
I. Сильные взаимодействия	
а) $\pi$ -мезоны + барионы	$\frac{g^2}{\hbar c} = 14 \pm 3$
б) $K$ -мезоны + барионы	$\frac{g'^2}{\hbar c} \sim 1$
II. Электромагнитные взаимодействия	$e^2/\hbar c = \frac{1}{137}$
III. Слабые взаимодействия	$\frac{G^2 M^4 c^2}{\hbar^6} = (1,02 \pm 0,02) \cdot 10^{-10}$

<sup>2</sup> Точное определение смысла постоянной  $G$  будет дано в § 5.

Как видно из этой таблицы, СВ отделены поистине гигантским расстоянием (по шкале интенсивностей) от тесной группы сильных и электромагнитных взаимодействий. Будущая рациональная теория элементарных частиц обязана будет объяснить и этот примечательный факт.

СВ проявляется почти исключительно в распаде элементарных частиц ( $\beta$ -распад радиоактивных ядер, распад  $\mu$ -,  $\pi$ - и  $K$ -мезонов, распад гиперонов). Этими взаимодействиями могут, конечно, обуславливаться и другие процессы, например поглощение и рассеяние частиц. Однако эффективные сечения этих процессов столь малы (порядка  $10^{-43}$  см<sup>2</sup>), что до настоящего времени удалось экспериментально обнаружить только два такого рода процесса — поглощение в веществе мощного потока антинейтрино, испускаемых атомным реактором, и поглощение атомным ядром отрицательного  $\mu$ -мезона, захваченного этим ядром на  $K$ -орбиту.

Почти все элементарные частицы нестабильны и распадаются (в изолированном состоянии) на более легкие частицы. Стабильность же имеет место только в том случае, если она обеспечена законами сохранения. Поэтому стабильны только а) частицы нулевой массы покоя (фотон и нейтрино); б) заряженные частицы минимальной массы (электрон и позитрон); в) барион и антибарион минимальной массы (протон и антипротон), т. е. частицы минимальной массы, обладающие ядерным зарядом (положительным или отрицательным).

## § 2. Различные формулировки закона сохранения четности

Поучительно сопоставить несколько различных формулировок, эквивалентных по своему содержанию закону сохранения четности.

Первая формулировка: правовинтовые и левовинтовые спирали (а стало быть, например, и движение вдоль этих спиралей и т. д.) эквивалентны друг другу во всех отношениях, кроме того отличия в их конфигурации, которое не дает возможности совместить их друг с другом.

Вторая формулировка: правые и левые системы пространственных координат равноправны; другими словами, законы физики инвариантны по отношению к переходу от правой системы к левой или наоборот.

При отражении в зеркале правые системы координат и правовинтовые спирали переходят в левые, и наоборот. Поэтому последняя из приведенных формулировок эквивалентна следующей: законы физики инвариантны по отношению к зеркальному отражению. Другими словами, Алиса, проникшая в известном рассказе Кэрола «по ту сторону зеркала», должна была подчиниться там тем же законам физики, как и в нашем мире.

Переход от правой системы координат к левой может быть осуществлен также инверсией пространственных координат, т. е.

преобразованием  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow -z$ . Отсюда еще одна формулировка: инвариантность законов физики относительно упомянутой инверсии.

Это сопоставление различных формулировок отчетливо иллюстрирует фундаментальный и, казалось бы, почти самоочевидный характер интересующего нас закона. Однако во всех этих формулировках пока не было и речи о «четности». Дело в том, что понятие четности возникает лишь в квантовой теории, а приведенные выше формулировки носили классический характер.

В квантовой теории состояния системы описывается волновой функцией. Волновая функция называется четной (или соответственно нечетной), если она при инверсии всех пространственных координат <sup>3</sup> не испытывает изменения (или соответственно изменяет свой знак). Благодаря принципу суперпозиции всякая волновая функция может быть представлена как сумма одной четной и одной нечетной функций. Как легко показать, из инвариантности законов физики относительно инверсии координат вытекает следствие: четность волновой функции, описывающей состояние изолированной физической системы, не изменяется во времени, т. е. не изменяется при любых возможных взаимодействиях частиц и полей, образующих эту систему. В этом и заключается закон сохранения четности.

### § 3. Несохранение четности в СВ

Как известно, гипотеза о несохранении четности в СВ была впервые предложена двумя работающими в Америке китайскими физиками Ли и Янгом весной 1956 г. Они указали, что эта гипотеза могла бы наиболее естественным образом объяснить некоторые представлявшиеся тогда парадоксальными особенности распада  $K$ -мезонов.

Подчеркнув, что сохранение четности в сильных и электромагнитных взаимодействиях проверено на опыте с громадной степенью точности, Ли и Янг предложили ряд конкретных экспериментов, которые позволяли бы проверить сохранение четности в СВ. Мы остановимся здесь только на двух из предложенных ими экспериментов.

Сосредоточим внимание на трех параметрах, характеризующих акт распада  $\beta$ -радиоактивного ядра: вектор скорости  $v$  испущенной  $\beta$ -частицы, направление ее спина  $s$  и, наконец, вектор  $S$  спина исходного ядра. Вектор  $v$  — полярный, тогда как спин (т. е. момент количества движения) характеризуется аксиальным вектором. Направление аксиальных векторов (в отличие от направления полярных векторов) определяется опытом лишь с точностью до знака; знак же этот условен, так что направление аксиальных

<sup>3</sup> Т. е. при инверсии координат всех частиц, образующих рассматриваемую систему.

векторов изменяется на обратное при переходе от правой системы координат к левой или наоборот<sup>4</sup>.

Стало быть, если угол между полярным вектором  $v$  и аксиальным вектором  $s$  (или  $S$ ) в правой системе координат равен  $\theta$ , то в левой системе этот угол окажется равным  $\theta' = \pi - \theta$ , так что  $\cos \theta' = -\cos \theta$ .

По предложению Ли и Янга экспериментаторы стали измерять направление спина  $\beta$ -электронов. Оказалось, что для всех исследованных радиоактивных ядер в пределах ошибок результаты этих измерений описываются формулой

$$dN = \text{const} \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) d\Omega, \quad (1)$$

где  $\theta$  — угол между  $v$  и  $s$ , а  $dN$  — число электронов, направление которых лежит в пределах телесного угла  $d\Omega$ . Формула эта имеет приведенный вид в правой системе координат; при переходе же к левой, согласно сказанному выше, нужно изменить знак перед  $\cos \theta$ . Тем самым доказано несохранение четности в  $\beta$ -распаде.

Другой вариант опыта состоит в измерении вероятности вылета  $\beta$ -частиц под различными углами  $\theta$  к направлению спина  $S$  исходного ядра. Для этих измерений необходимо предварительно ориентировать спины ядер радиоактивного вещества. Это можно осуществить при очень низких температурах с помощью очень сильного магнитного поля. Впервые эти измерения были проведены китайской женщиной-физиком Ву с сотрудниками в США в конце 1956 г. В их опытах спины ядер радиоактивного  $\text{Co}^{60}$  были поляризованы на 60%. При этом число  $\beta$ -частиц, испускаемых ядрами под тупым углом к направлению их спина ( $\cos \theta < 0$ ), было в 1,5 раза больше, чем число испускаемых под острым углом ( $\cos \theta > 0$ ). Таким образом, и эта зависимость оказалась инвариантной по отношению к инверсии координат, при которой  $\cos \theta$  изменяет знак.

Несохранение четности в СВ было в течение 1956—1957 гг. столь надежно доказано многочисленными экспериментами, что Ли и Янгу за высказанную ими гипотезу была присуждена Нобелевская премия за 1957 г.

#### § 4. Комбинированная инверсия

Согласно уравнению (1) электроны, испускаемые при  $\beta$ -распаде, преимущественно вращаются «влево». Это условное выражение означает, что спин этих электронов (определенный в правой

<sup>4</sup> Так, например, ось вращения твердого тела определяется однозначно; но направление, по которому откладывается вдоль этой оси вектор момента количества движения, может быть определено только при помощи правил, прибегающих к сопоставлениям рассматриваемого вращения с произвольно выбранными движениями или объектами, как, например, движение часовой стрелки, пальцы правой руки и т. п.

системе координат) преимущественно направлен против их направления движения.

Означает ли этот факт (и ряд других аналогичных фактов), что физическое пространство, как таковое, обладает определенной «спиральностью», или, другими словами, что дискриминация между правовинтовым и левовинтовым движением определяется свойствами самого пространства?

Этот вывод, к которому на первый взгляд приводит факт несохранения четности в СВ, резко противоречит духу современной физической теории. Весьма привлекательная возможность другого истолкования фактов была впервые указана Л. Д. Ландау.

Еще до первых экспериментов по несохранению четности Ландау высказал гипотезу, что античастицы всегда обладают «спиральностью», противоположной «спиральности» соответствующей частицы. Все имеющиеся к настоящему времени опытные данные согласуются с этой гипотезой. В частности, позитроны, испускаемые при  $\beta$ -распаде, вращаются противоположно  $\beta$ -распадным электронам, т. е. «вправо»<sup>5</sup>.

Так как частицы и античастицы совершенно равноправны друг другу, то гипотеза Ландау восстанавливает равноправие «правых» и «левых» вращений. Точная ее формулировка гласит: законы физики инвариантны по отношению к комбинированной инверсии. Этим последним термином обозначается совокупность двух операций: инверсия пространственных координат и так называемое зарядовое сопряжение, т. е. замена всех частиц соответствующими античастицами и обратно.

В отличие от СВ, сильные и электромагнитные взаимодействия инвариантны по отношению к каждой из этих двух операций в отдельности, а не только к их совокупности.

## § 5. Теория ФГСМ — универсальное $V-A$ ферми-взаимодействие

Ферми-взаимодействием называется непосредственное взаимодействие четырех фермионов друг с другом. К числу таких взаимодействий принадлежат  $\beta$ -распад нуклонов и распад  $\mu$ -мезонов; в этих процессах исчезновение одного фермиона сопровождается возникновением трех других.

Гипотеза о существовании универсального ферми-взаимодействия была впервые высказана Пушпи в 1948 г. В современной формулировке эта гипотеза гласит: а) фермионы всех видов взаимодействуют друг с другом по одному и тому же универсальному закону, причем сила этого взаимодействия характеризуется единой константой  $G$ ; б) все СВ сводятся к этому универсальному ферми-взаимодействию, причем в случае распада бозонов ( $\pi$ - и  $K$ -мезо-

<sup>5</sup> Другими словами, к позитронам применима формула (1), но с изменением знака «минус» перед  $\cos \theta$  на «плюс».



нов) предварительным этапом является превращение бозона в пару виртуальных фермионов путем сильного взаимодействия.

Вплоть до самого последнего времени все многочисленные попытки конкретизировать эту гипотезу и установить вид универсального закона взаимодействия оканчивались неудачей. Вместе с тем вполне вероятно, что то решение этой проблемы, которое осенью 1957 г. было предложено четырьмя американскими физиками (ФГСМ, см. введение), окажется правильным.

Мы сформулируем гипотезу ФГСМ в следующей форме<sup>6</sup>. Пусть  $\psi_a$  и  $\psi_b$  — соответственно волновые функции фермиона вида  $a$  и фермиона вида  $b$ . Образованный из них вектор

$$K_{\mu}^{ab} = \bar{\psi}_b \gamma_{\mu} \left( \frac{1 + \gamma_5}{\sqrt{2}} \right) \psi_a, \quad (2)$$

где  $\gamma_{\mu}$  и  $\gamma_5$  — дираковские матрицы<sup>7</sup>, мы назовем плотностью «слабого тока» частиц  $a$  и  $b$ . Этот вектор соответствует исчезновению частицы  $a$  и возникновению частицы  $b$ . По своей форме он отличается от обычного вектора плотности электрического тока множителем  $(1 + \gamma_5)/\sqrt{2}$ .

Наложим следующие ограничения на выбор видов частиц  $a$  и  $b$ .

1) Обе частицы  $a$  и  $b$  должны обладать одинаковым ядерным зарядом, т. е. либо они обе барионы, либо обе лептоны.

2) Электрический заряд частиц  $a$  и  $b$  отличается на единицу, т. е. одна из них должна быть нейтральной, а другая положительно или отрицательно заряженной.

Гипотеза ФГСМ гласит: лагранжиан четырехфермионного слабого взаимодействия имеет вид

$$L = \sqrt{2}G \sum_{a, b, c, d} \sum_{\mu} K_{\mu}^{ab} K_{\mu}^{cd} + \text{эрмит. сопряж.} \quad (3)$$

Суммирование должно производиться по всем возможным комбинациям сортов фермионов  $a, b, c, d$ , удовлетворяющим указанным выше ограничениям, а также следующим условиям:

3) Суммарный электрический заряд исчезающих частиц ( $a$  и  $c$ ) должен равняться заряду возникающих частиц ( $b$  и  $d$ ).

4) В процессе  $(a, c) \rightarrow (b, d)$  должна измениться природа хотя бы одного из фермионов, т. е. фермионы  $b$  и  $d$  не должны быть тождественными фермионам  $a$  и  $c$ .

Каждый такой возможный процесс фигурирует в лагранжиане (3) только один раз. Некоторые возможные дополнения к этим

<sup>6</sup> В отличие от Сударшана и Маршака, пришедших к своей гипотезе путем анализа эмпирических данных, Фейнман и Гелл-Манн приводят в обоснование той же в сущности гипотезы некоторые теоретические соображения. Эти соображения не представляются нам убедительными, и мы их рассматривать не будем.

<sup>7</sup> Матрица  $\gamma_5$  антикоммутирует с каждой из четырех матриц  $\gamma_{\mu}$  ( $\mu=1, 2, 3, 4$ ). Мы пользуемся таким представлением, в котором  $\gamma_5$  является эрмитовой матрицей.

ограничениям, а также к правой части уравнения (3), будут указаны в § 7 и 8.

Известно, что при инверсии пространственных координат матрица  $\gamma_5$  переходит в  $(-\gamma_5)$ . Поэтому как выражение (2) для «слабого тока», так и лагранжиан СВ (3) изменяют свой вид при этой инверсии: входящий в них сомножитель  $(1 + \gamma_5)$  переходит в  $(1 - \gamma_5)$ . Это влечет за собой несохранение четности в СВ. Вместе с тем лагранжиан (3) инвариантен по отношению к комбинированной инверсии.

Вектор «слабого тока»  $K_\mu^{ab}$  согласно (2) представляет собой сумму (полярного) вектора  $\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_b \gamma_\mu \psi_a$  и аксиального вектора  $\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_b \gamma_\mu \gamma_5 \psi_a$ .

Поэтому постулированное ФГСМ взаимодействие часто называется « $V-A$ -взаимодействием» — читай «векторное минус аксиальное»<sup>8</sup>.

В последние годы неоднократно высказывалась мысль, что нарушение четности в СВ обусловлено специфическими свойствами нейтрино («двухкомпонентное нейтрино»). В отличие от этой не оправдавшейся на опыте гипотезы, все виды фермионов входят в лагранжиан (3) совершенно равноправным образом.

Заметим, что из приведенного на стр. 419 ограничения 1) на вид  $\gamma$ -вектора  $K$  непосредственно следует закон сохранения числа лептонов (или, точнее, разности между числом лептонов и числом антилептонов). Этот закон, по-видимому, согласуется с данными опыта.

## § 6. Экспериментальная проверка универсального $V-A$ -взаимодействия

Рассмотрим сначала те из экспериментальных данных, свидетельствующих в пользу теории ФГСМ, которые были известны к моменту создания этой теории, т. е. к осени 1957 г.

В отношении  $\beta$ -распада эта теория дает нужные правила отбора и правильную форму разрешенных спектров  $\beta$ -частиц<sup>9</sup>. Далее, она приводит к формуле (1) для продольной поляризации  $\beta$ -электронов и к аналогичной формуле с обратным знаком при  $\cos \theta$  для  $\beta$ -позитронов, т. е. к формулам, выражающим одну из наиболее надежно установленных на эксперименте закономерностей  $\beta$ -распада.

Фейнман и Гелл-Манн определили из данных по  $\beta$ -распаду значение константы  $G$ , входящей в формулу (3), и получили значение, приведенное в таблице на стр. 414. Воспользовавшись этим значением постоянной, они вычислили время жизни  $\mu$ -мезона,

<sup>8</sup> Знак «минус» фигурирует потому, что в теории  $\beta$ -распада аксиальный вектор принято было определять как

$$\bar{\psi}_b \gamma_5 \gamma_\mu \psi_a = -\bar{\psi}_b \gamma_\mu \gamma_5 \psi_a.$$

<sup>9</sup> Запрещенные спектры еще недостаточно изучены.

распадающегося согласно (3) на электрон, нейтрино и антинейтрино. Вычисленное ими время жизни равно

$$\tau_{\text{теор}} = (2,26 \pm 0,04) 10^{-6} \text{ сек}, \quad (4)$$

тогда как экспериментальное значение  $\tau$  равно

$$\tau_{\text{эксп}} = (2,22 \pm 0,02) 10^{-6} \text{ сек}. \quad (4a)$$

Теория в этом случае настолько близко совпадает с экспериментом, что из этого факта, если он не случаен, вытекают далеко идущие следствия (см. § 7).

Форму энергетического спектра электронов, образующихся при распаде  $\mu$ -мезонов, принято характеризовать так называемым параметром Мишеля  $\rho$ . Из теории следует, что  $\rho=0,75$ , что неплохо совпадает с экспериментальными данными.

Перейдем теперь к экспериментальным данным, которые осенью 1957 г. не укладывались или не полностью укладывались в теорию ФГСМ.

Большинство надежных измерений анизотропии пространственного распределения  $\beta$ -частиц, испускаемых ориентированными ядрами, в том числе опыты Ву с  $\text{Co}^{60}$ , описанные в § 3, согласовались с теорией. Только измерения анизотропии электронов, испускаемых поляризованными нейтронами, противоречили теории. Однако за последние месяцы авторы этих измерений (Теллегди и др.) уточнили их, причем значение коэффициента анизотропии уменьшилось при этом уточнении в 2,5 раза и пришло к согласию с теорией!

Наиболее запутанным является вопрос о корреляции между направлениями вылета электрона (или позитрона) и нейтрино (или антинейтрино) в акте  $\beta$ -распада, т. е. относительная вероятность различных значений угла  $\alpha$  между этими направлениями.

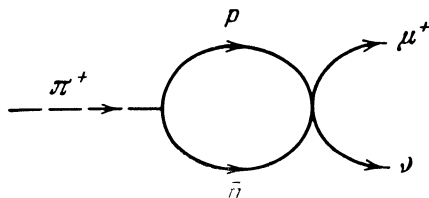
Надо отметить, что совокупность имеющихся экспериментальных измерений этой корреляции не укладывается ни в какой из возможных вариантов современной теории  $\beta$ -распада. Естественнее всего предположить, что это объясняется ошибочностью некоторых измерений, тем более что измерения эти крайне трудны. Направление вылета нейтрино, конечно, не может быть измерено непосредственно и вычисляется по данным измерений, производимых над  $\beta$ -электроном и над атомным ядром, испытывавшим отдачу при испускании электрона и нейтрино. Трудность измерений обусловлена тем, что кинетическая энергия ядер отдачи очень мала.

Из всех измерений  $e-\nu$ -корреляции наиболее точными считались измерения, относящиеся к  $\text{He}^6$ , проведенные двумя различными группами исследователей. Результаты этих измерений не могут быть согласованы с  $V-A$ -взаимодействием<sup>10</sup>. С другой стороны,

<sup>10</sup> Это обстоятельство являлось одним из главных оснований того, что до последнего времени СВ считались относящимися не к  $(V, A)$  типу, а к типу  $(S, T)$  (скаляр + тензор).

$e-\nu$ -корреляция у других исследованных ядер ( $\text{Ar}^{35}$  и  $\text{Ne}^{19}$ ) в пределах ошибок опыта укладывается в это взаимодействие. Указав на это обстоятельство, авторы теории высказали предположение, что, несмотря на кажущуюся надежность, измерения, относящиеся к  $\text{He}^6$ , являются ошибочными. И вот в декабре 1957 г. одна из участниц этих измерений, проф. Ву, сообщила на заседании Американского физического общества, что она нашла в постановке этих измерений источник экспериментальных ошибок. Таким образом, вопрос о  $e-\nu$ -корреляции у  $\text{He}^6$  нужно считать открытым впредь до проведения более надежных измерений.

Итак, в области  $\beta$ -распада сейчас не осталось явных противоречий теории с опытом. То же относится к распаду  $\mu^+$ -мезона: одно время казалось, что продольная поляризация позитронов, образующихся при этом распаде, не согласуется с теорией (т. е. с формулой (1) с измененным для позитронов знаком перед  $\cos \theta$ ), но уточнение измерений привело их к согласию с теорией. В настоящее время единственное явное противоречие теории ФГСМ с опытом относится к распаду  $\pi^+$ -мезона. Считается, что первой стадией этого распада является превращение  $\pi^+$ -мезона (под влиянием сильного взаимодействия) в виртуальную пару протон+антинейтрон, которая затем путем универсального ферми-взаимодействия распадается на  $\mu^+$ -мезон и нейтрино (см. рисунок).



Промежуточной стадией может являться не пара нуклон—antinуклон, а какая-либо пара гиперон-антигиперон, например  $\Sigma^+$  и анти- $\Lambda$ . Далее, рисунок можно усложнить процессами, при которых нуклон и антинуклон обмениваются  $\pi$ -мезонами и т. п. Все эти возможные осложнения картины распада никак не скажутся на результате следующего рассуждения.

Ввиду универсальности ферми-взаимодействия наряду с наблюдаемым на опыте распадом  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$  должен был бы существовать и распад  $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu$ . Вычисляя относительную вероятность этих типов распада  $\pi$ -мезона на основании формулы (3), получаем<sup>11</sup>

$$(W_{e+\nu}/W_{\mu+\nu})_{\text{теор}} = 13,6 \cdot 10^{-5}. \quad (5)$$

Между тем на опыте, несмотря на все поиски, вообще не удалось обнаружить распада  $\pi$ -мезона на позитрон и нейтрино, при-

<sup>11</sup> Подробнее об этом см. §7.

чем из опыта следует, что верхний возможный предел относительной вероятности позитронного распада равен

$$(W_{e+\nu}/W_{\mu+\nu})_{\text{экс}} \leq 10^{-5}. \quad (5a)$$

Хотя теоретическое значение этой вероятности тоже очень мало, все же тот факт, что оно на порядок больше экспериментального верхнего предела, является самой существенной трудностью теории. Возможно, конечно, что со временем выяснится ошибочность соответствующих измерений; более вероятно, однако, что причина противоречия не столь тривиальна.

Недавно Юань и Лоу указали, что если к универсальному  $V-A$ -взаимодействию (3) прибавить (с надлежащим знаком) очень малую примесь (порядка  $1/2000$ ) так называемого  $P$ -взаимодействия<sup>12</sup>, то эта добавка сведет к нулю вероятность позитронного распада  $\pi^+$ -мезона, не изменив при этом никаких других проверенных на опыте выводов теории.

Такое усложнение теории мало привлекательно a priori; однако возможно, что оно автоматически возникнет, когда будет найдено теоретическое обоснование гипотезы ФГСМ.

## § 7. Распады странных частиц

В настоящее время неясно, в какой мере фермионы, обладающие «странностью» (т. е. гипероны), участвуют в универсальном ферми-взаимодействии (3). Фейнман и Гелл-Манн склонны дополнить ограничения на выбор фермионов  $a$  и  $b$ , могущих образовать «слабый ток»  $K_{\mu}^{ab}$ , требованием, чтобы разность странностей фермионов  $a$  и  $b$  равнялась либо нулю, либо разности электрических зарядов этих частиц. Сударшан же и Маршак полагают, что в СВ непосредственно участвует только один сорт гиперонов, а именно  $\Lambda$ -частицы.

Существенно, однако, что вне зависимости от правильности того или иного из этих предположений, гипотеза  $V-A$ -взаимодействия дает качественно правильное описание распада как гиперонов, так и другой странной частицы —  $K$ -мезона. Мы покажем это на двух примерах, рассмотренных И. Ю. Кобзаревым и автором настоящей статьи<sup>13</sup>.

Известны пять типов распада  $K^+$ -мезона: распады на два и на три  $\pi$ -мезона и следующие распады с участием лептонов:

$$\begin{aligned} K_{\mu 2} &\rightarrow \mu + \nu, & K_{\mu 3} &\rightarrow \mu + \nu + \pi^0, \\ K_{e 3} &\rightarrow e + \nu + \pi^0. \end{aligned} \quad (6)$$

Возникает вопрос: почему  $\mu 3$ - и  $e 3$ -распады примерно равновероятны, тогда как из распадов на две частицы наблюдается

<sup>12</sup> Это псевдоскалярное взаимодействие описывается членами вида  $(\bar{\Psi}_b \gamma_5 \Psi_a)$   
 $(\bar{\Psi}_d \gamma_5 \Psi_c)$ .

<sup>13</sup> См. наст. том, работу 48. — Прим. ред.

только  $\mu 2$ -распад, но не  $e 2$ ? Теория ФГСМ дает на это очень убедительный ответ.

Согласно этой теории матричный элемент распада бозона ( $\pi$ -или  $K$ -мезона) как на две, так и на три частицы пропорционален следующей величине:

$$\xi = 1 + \frac{v}{c} \cos \theta, \quad (7)$$

где  $v$  — скорость заряженного фермиона ( $\mu$  или  $e$ ) в системе покоя бозона, а  $\theta$  — угол между направлениями вылета нейтрино и этого заряженного фермиона в той же системе отсчета. В случае распада бозона на два фермиона ( $e 2$ - и  $\mu 2$ -распады) эти два направления, очевидно, взаимно противоположны, поэтому

$$\cos \theta = -1, \quad \xi = 1 - \frac{v}{c}.$$

При  $e 2$ -распаде как  $\pi$ -, так и  $K$ -мезона электрон приобретает энергию, по крайней мере в 130 раз превышающую его массу покоя, поэтому для него  $v \sim c$  и  $\xi \sim 0$ . Напротив, при  $\mu 2$ -распаде обладающий большей массой  $\mu$ -мезон приобретает существенно меньшую скорость, так что  $v$  заметно отлично от  $c$ , а  $\xi$  от нуля. По этой причине теоретическая вероятность  $e 2$ -распада гораздо меньше вероятности  $\mu 2$ -распада: для распада  $\pi$ -мезона соотношение этих вероятностей дается формулой (5), а для  $K$ -мезона это соотношение еще меньше.

В случае же распада  $K$ -мезона на три тела ( $e 3$ - и  $\mu 3$ -распады) направления движения нейтрино и заряженного фермиона отнюдь не обязаны быть противоположными друг другу.

Поэтому, вообще говоря,  $\cos \theta \neq -1$  и поэтому даже в случае  $e 3$ -распада, когда  $v/c$  практически равно единице,  $\xi$  отнюдь не близко к нулю. Поэтому фактор  $\xi^2$ , который подавляет распад  $e 2$  по сравнению с  $\mu 3$ , имеет примерно одинаковое значение для распада  $e 3$  и  $\mu 3$  и эти распады оказываются равновероятными по порядку величины, что соответствует эксперименту.

Обратимся к распаду  $\Lambda$ -гиперона на протон и  $\pi^-$ -мезон. Несохранение четности в этом распаде обнаружено в экспериментах, в которых  $\Lambda$ -частицы получались в реакции



Это несохранение четности проявляется в том, что  $\pi^-$ -мезоны, возникающие при распаде  $\Lambda$ , движутся преимущественно под острым углом к аксиальному вектору  $[\mathbf{v}_\pi \mathbf{v}_\Lambda]$ , где  $\mathbf{v}_\pi$  и  $\mathbf{v}_\Lambda$  означают соответственно скорость первичного  $\pi^-$ -мезона, реагирующего с  $p$ , и начальную скорость  $\Lambda$ -частицы.

Анизотропия такого рода может быть обусловлена только совокупным действием двух факторов: 1)  $\Lambda$ -частицы, образующиеся в реакции (8), поляризованы перпендикулярно «плоскости рождения», проходящей через  $\mathbf{v}_\pi$  и  $\mathbf{v}_\Lambda$ ; 2) относительная вероятность раз-

личных направлений вылета  $\pi$ -мезона, возникающего при распаде  $\Lambda$ -частицы, существенно зависит от угла между этим направлением и направлением спина материнской  $\Lambda$ -частицы<sup>14</sup>.

Обработка данных эксперимента приводит к выводу, что эта вероятность должна (в системе покоя  $\Lambda$ -частицы) определяться формулой типа

$$dN = \text{const} (1 + \alpha \cos \theta) d\Omega \quad (9)$$

(ср. формулу (1)), где  $\alpha \geq 0,45 \pm 0,09$ .

Столь большое значение коэффициента анизотропии поразительно по следующей причине. В отличие от возникающих в  $\beta$ -распаде электрона и нейтрино, продукты распада  $\Lambda$ -частицы ( $p$  и  $\pi^-$ ) обладают малыми, нерелятивистскими скоростями. С другой стороны, известно, что в нерелятивистском приближении матричные элементы от выражений, содержащих матрицу  $\gamma_5$ , стремятся к нулю. Поэтому можно было бы ожидать, что в распаде  $\Lambda$ -частицы роль аксиально-векторного взаимодействия, пропорционального  $\gamma_\mu \gamma_5$ , исчезающе мала по сравнению с ролью векторного взаимодействия, пропорционального  $\gamma_\mu$ . Так как характеризуемая коэффициентом  $a$  анизотропия распределения продуктов распада обусловлена интерференцией четного векторного и нечетного аксиально-векторного взаимодействий, то в этом случае коэффициент  $a$  был бы близок к нулю.

В действительности, однако, как показывают вычисления, матричный элемент  $\Lambda$ -распада пропорционален следующей величине:

$$\bar{\Psi}_\Lambda \{ (M_\Lambda - M_p) + \gamma_5 (M_\Lambda + M_p) \} \psi_p. \quad (10)$$

Нечетный матричный элемент  $\bar{\Psi}_\Lambda \gamma_5 \psi_p$  действительно очень мал по сравнению с четным элементом  $\bar{\Psi}_\Lambda \psi_p$ , но он помножается в (10) на сумму масс  $\Lambda$ -частицы и протона, тогда как  $\bar{\Psi}_\Lambda \psi_p$  помножается на относительно малую разность этих масс. В результате четный и нечетный члены в выражении (10) оказываются одного порядка и их интерференция приводит к резкому нарушению изотропии.

Таким образом, и распады странных частиц, по крайней мере в качественном отношении, хорошо согласуются с теорией.

## § 8. Перенормировка СВ и возможность прямого СВ $\pi$ -мезонов

В § 6 уже отмечалось, что поразительное совпадение измеренного на опыте и теоретически вычисленного времени жизни  $\mu$ -мезонов (ср. (4) и (4а)) нуждается в специальном объяснении. Дело

<sup>14</sup> Анизотропия распада  $\Sigma$ -гиперонов существенно меньше анизотропии распада  $\Lambda$ -частиц и, быть может, даже вообще отсутствует. Пока неизвестно, какой из перечисленных двух фактов ослаблен или даже отсутствует в случае распада  $\Sigma$ -гиперонов.

в том, что все расчеты СВ проводятся в первом приближении теории возмущений. В отношении самого СВ применимость этой теории не возбуждает сомнений, однако в процессе, например,  $\beta$ -распада принимают участие сильно взаимодействующие частицы — нуклоны. Поэтому при расчете  $\beta$ -распада необходимо учитывать возможность образования в промежуточных стадиях, например, виртуальных  $\pi$ -мезонов, что должно влиять на результат расчетов. Это обстоятельство и имеется в виду, когда говорят о перенормировке константы слабого взаимодействия  $G$ .

С другой стороны, в процессе распада  $\mu$ -мезона принимают участие только лептоны, между которыми нет сильных взаимодействий, так что в этом случае перенормировка константы  $G$  будет обуславливаться лишь гораздо более слабыми электромагнитными взаимодействиями. Стало быть, следовало бы ожидать, что эффективное или, как говорят, перенормированное значение константы  $G$  будет различным для  $\beta$ -распада и для  $\mu$ -распада. Однако в действительности эффективное значение в обоих случаях одинаково, что следует из совпадения значений (4) и (4а) для  $\tau_\mu$ , при вычислении первого из которых использовалось значение константы  $G$ , определенное по данным для  $\beta$ -распада.

Возможное разрешение этого парадокса было указано Фейнманом и Гелл-Манном в их первой работе и в последнее время уточнено и развито Гелл-Манном. Известно, что хотя перенормировки и влияют на электромагнитные процессы, однако полный заряд  $e$  одинаков (по абсолютной величине) для всех заряженных элементарных частиц, как для электронов, так и для сильно взаимодействующих протонов.

Тот факт, что перенормировки не влияют на полную величину заряда частицы, вытекает из закона сохранения электрического заряда, или, что то же самое, из замкнутости электрических токов, математически выражающейся формулой

$$\partial j_\mu / \partial x^\mu = 0, \quad (11)$$

где  $j_\mu$  — плотность электрического тока. Если бы плотность слабого тока  $K_\mu$  удовлетворяла аналогичному закону сохранения

$$\partial K_\mu / \partial x^\mu = 0, \quad (12)$$

то тем самым была бы обеспечена независимость эффективного значения константы СВ  $G$  от возможных перенормировок. Конечно, при этом под  $K_\mu$  нужно понимать сумму плотностей слабых токов, соответствующих всем разрешенным попарным комбинациям фермионов  $a$  и  $b$  (2).

Фейнман и Гелл-Манн указали, что для объяснения точного совпадения значений (4) и (4а) времени жизни  $\mu$ -мезона достаточно допустить, что закон сохранения (12) справедлив не для всего «слабого тока»  $K_\mu$ , а лишь для его векторной компоненты  $\bar{\psi}_b \gamma_\mu \psi_a$ . Далее они указали, что сильные взаимодействия барионов с  $\pi$ -ме-



зонами не будут нарушать сохранения этой компоненты, если определить плотность слабого тока  $K_\mu$  (2) и некоторого  $\pi$ -мезонного слабого тока  $K'_\mu$ . Подобно тому как компоненты тока  $K_\mu$  соответствуют исчезновению фермиона  $a$  и возникновению фермиона  $b$ , так компоненты тока  $K'_\mu$  соответствуют уничтожению одного  $\pi^0$ -мезона и возникновению одного заряженного  $\pi$ -мезона или наоборот. Эта гипотеза Фейнмана—Гелл-Манна означает, что, помимо универсального  $V-A$ -взаимодействия фермионов, существует также непосредственное СВ  $\pi$ -мезонов. Из этой гипотезы вытекает ряд интересных выводов, которые пока еще не проверены на опыте.

Нельзя забывать, что совокупность наших экспериментальных сведений о СВ во многих отношениях еще противоречива и ненадежна.

И все же из изложенного, как мне кажется, явствует, что на наших глазах теория СВ начинает приобретать такую степень общности и универсальности, которая сближает ее с электродинамикой<sup>15</sup>.

Москва, Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила  
25 апреля 1958 г.

---

*Примечание.* Последующее развитие физики слабого взаимодействия отражено, например, в книге *Ц. Ву* и *Ц. Ли*. Слабое взаимодействие. М., «Мир», 1968. В самое последнее время наметился важный прогресс в теории слабого и электромагнитного взаимодействия (единая перенормируемая калибровочная теория слабого и электромагнитного взаимодействия), действительно обещающий вывести эту теорию на уровень квантовой электродинамики. Эксперимент указывает на наличие нейтральных токов, т. е. использование векторов типа (2) допустимо и в случае, когда электрические заряды частиц  $a$  и  $b$  одинаковы.

---

<sup>15</sup> Поразительным образом и последнее противоречие между теорией ФГСМ и опытом тоже оказалось связанным с неточностью эксперимента. Осенью 1958 г. уточненные измерения, проведенные в Женеве Топеманом, Мориссоном и др. и подтвержденные измерениями в США, показали, что прежние данные (уравнение (5а)) ошибочны и что предсказанный теорией электронный распад  $\pi$ -мезона существует, причем относительная его вероятность близка к теоретическому соотношению (5). — *Примечание при корректуре.*

## НИЛЬС БОР И СОВРЕМЕННАЯ ФИЗИКА <sup>1</sup>

### Памяти великого ученого

Нильс Бор и Альберт Эйнштейн — это, несомненно, два величайших физика XX в. Бор не только был основателем квантовой теории, которая открыла человечеству путь к познанию нового мира — мира атомов и элементарных частиц — и тем самым проложила путь в атомный век и позволила овладеть атомной энергией. Труды Бора наряду с работами Эйнштейна оказали решающее влияние не только на физику нашего века, но и на современное научное мировоззрение в целом.

Ведь именно торжество теории относительности и теории квантов, основателями которых были Эйнштейн и Бор, на блестящих примерах продемонстрировали общие закономерности развития научного познания. Так как наши знания не априорны, а вытекают из анализа и обобщения всего человеческого опыта, то всякое проникновение человека в новую, ранее неизведанную область явлений с неизбежностью влечет за собой необходимость коренного пересмотра и обобщения самых основных наших понятий и представлений, даже таких, как время, пространство, как само понятие физической закономерности.

Это, конечно, отнюдь не означает, что каждый новый этап развития науки отменяет все прежнее. Все дело в том, что с каждым новым шагом выявляются границы применимости тех понятий и тех законов, которые ранее считались универсальными, и вскрываются закономерности более общего характера. Требования к каждой новой теории становятся все более жесткими — ведь она не только должна объяснять вновь открытые факты, но и включать в себя в качестве частного случая все ранее открытые закономерности, указывая точные границы их применимости. Так, все основы классической физики содержатся в более общих законах теории относительности и теории квантов, из которых они вытекают в условиях, когда скорости тел малы по сравнению со скоростью света, а пространственно-временные масштабы явлений и массы тел таковы, что так называемое действие велико по сравнению с квантовой постоянной  $h$ .

<sup>1</sup> Выступление на вечере памяти Н. Бора в Политехническом музее в Москве 16 декабря 1962 г.: Природа, 1963, № 5, 44. См. также УФН, 1963, 80, вып. 2, 191; Вопросы истории естествознания и техники, 1964, вып. 17, 3; Развитие современной физики. М., «Наука» 1964, стр. 7; Пути в неизвестное. Сб. 5. М., «Советский писатель», 1965.



И. Е. Тамм и Н. Бор в Физическом институте АН СССР

Однако еще в начале нашего века были широко распространены воззрения, что незыблемые и нерушимые основы науки уже созданы. Такой крупный физик, как лорд Кельвин (В. Томсон), в речи, произнесенной по случаю наступления нового, двадцатого века, сожалел о последующих поколениях физиков, которым остались лишь сравнительно мелкие доделки в воздвигнутом уже и в основном завершенном здании науки. Правда, в этой речи Кельвин проявил и необычайную проницательность, сказав, что на чистом и ясном небосводе физики осталось только два «облачка»: одно, связанное с опытом Майкельсона, другое — с излучением черного тела и законом Планка. Как известно, именно из этих «облачков» и возникли теория относительности и квантовая теория, и, в свою очередь, именно благодаря торжеству этих теорий воззрения, типа высказанных в начале века даже таким крупным ученым, как Кельвин, в настоящее время встречаются только среди ретроградов (которых, впрочем, и сейчас не так уже мало). Именно благодаря этому мы подходим ныне без предубеждений, а, наоборот, с энтузиазмом к *новому*, пока еще только намечающемуся этапу развития физической теории, необходимость в котором выявилась при изучении свойств и взаимодействий элементарных частиц высоких энергий и который по своей новизне и фундаментальности, несомненно, будет сравним с теорией относительности и квантовой теорией.

Этим отношением к новому, пониманием того, что, идя вперед, мы должны менять многое в самых основах наших воззрений, мы обязаны в значительной степени трудам Нильса Бора.

Такая эволюция физики оказала большое влияние и на другие отрасли естествознания. И можно только присоединиться к мечтаниям видного немецкого физико-химика Хавемана (ГДР) о том времени, когда и философы будут почитать величайшим счастьем для себя появление новых открытий, противоречащих самым основным нашим понятиям и представлениям.

### Вся жизнь — в поисках нового

Но перейдем к более конкретным вещам. В 1912 г. двадцатипятилетний Нильс Бор после окончания Копенгагенского университета работает в Манчестере у Резерфорда, которого он считал своим учителем и высоко ценил как человека и ученого. С этого времени проблемы атома и атомного ядра стали основным интересом Бора, сохранившимся до конца его жизни.

До последнего времени было недостаточно известно, что именно молодой Бор впервые или, во всяком случае, независимо ни от кого со всей определенностью сформулировал такое основное понятие, как понятие атомного номера элемента, понял, что величина заряда ядра определяет строение его электронной оболочки и что сходство химических свойств изотопов обусловлено одинаковостью заряда их ядер, и осмыслил закон радиоактивного смещения ядер при  $\alpha$ - и  $\beta$ -распаде. Тот же интерес к атомному ядру привел его через 24 года (в 1936 г.) к созданию представления о компаунд-ядре, образующемся при захвате ядром нейтрона, к представлению, которое играет столь фундаментальную роль во всей нейтронной физике.

Первая знаменитая работа Бора, в которой сформулированы основы его теории, относится к 1913 г. В ней был не только объяснен спектр водорода, но и спектр ионизированного гелия. Весьма интересно, что, хотя спектр ионизированного гелия и наблюдался ранее Пикерингом в спектрах звезд, а Фаулером — в спектре электрического разряда в смеси водорода и гелия, однако он приписывался не гелию, а водороду. Это недоразумение было разрешено только опытами Ивенса (Evans), который под непосредственным влиянием Бора стал изучать электрический разряд в чистом гелии. Но при этом, как рассказал Бор в лекции, посвященной памяти Резерфорда, возникла драматическая ситуация: оказалось, что формула Бора для спектра водорода не дает при замене в ней заряда ядра с 1 на 2 точного совпадения со спектром ионизированного гелия. Однако Бор вскоре объяснил это расхождение, указав на необходимость учитывать движение ядра, что сводится к тому, что в его формулу нужно вставлять не массу  $m$  свободного электрона, а его приведенную массу  $mM/(m+M)$  (где  $M$  — масса ядра), которая имеет различные значения для водорода и для гелия.

Бор с самого начала осознавал всю значимость его квантовых постулатов. Уже в 1913 г. в одном из своих докладов он сказал: «Я надеюсь, что говорил достаточно ясно для того, чтобы вы поняли, насколько сильно приведенные рассуждения отклоняются от той замечательно последовательной системы понятий, которую по праву называют классической электродинамической теорией. . . Я пытался дать вам почувствовать, что со временем все-таки можно будет привести новые понятия в какую-то систему».

Всем известно, что боровская теория проложила путь к созданию последовательной квантовой механики. Однако не всем ясна вся значимость роли Бора в этом дальнейшем развитии его идей. Она двояка.

Никак нельзя переоценить, во-первых, непосредственного решающего влияния Бора на новое творческое поколение теоретиков и, во-вторых, всей значимости данного им глубокого анализа принципиальных основ теории.

Что касается первой стороны дела, то в течение многих лет большинство крупнейших молодых теоретиков того времени: Гейзенберг, Паули, Дирак, Ландау, Пайерлс, Клейн, Крамерс, Блох, Вейскопф и многие другие — регулярно собирались в Копенгагене для творческих дискуссий, проходивших под сильнейшим влиянием Бора.

Мне хочется напомнить, что когда Бор был в последний раз в Советском Союзе в мае 1961 г., то после его доклада на семинаре у П. Л. Капицы Л. Д. Ландау задал ему вопрос: «Каким Вы обладали секретом, который позволил Вам в такой степени концентрировать вокруг себя творческую теоретическую молодежь?». На это Бор ответил: «Никакого особого секрета не было, разве только то, что мы не боялись показаться глупыми перед молодежью».

Это очень характерное высказывание Бора, остро ненавидевшего всяческое чванство, зазнайство, высокомерие и отличавшегося поразительной скромностью. Вместе с тем, действительно, никакая дискуссия не может быть плодотворной, если ее участники боятся задавать вопросы, которые могут обнаружить пробелы в их осведомленности, и показаться «глупыми».

Что касается анализа основ теории, то хотя основное для квантовой механики соотношение неопределенности было впервые сформулировано Гейзенбергом в 1927 г., однако законченная формулировка этого соотношения — принципа дополнительности, исчерпывающий анализ его физического содержания, анализ возможностей измерения и наблюдения микрообъектов, взаимная исключаемость постановки опытов, в которых измеряются такие дополняющие друг друга величины, как, например, импульс и координата или время и энергия, — всем этим мы обязаны Бору.

В этой связи интересно отметить, что Бор всегда особенно подчеркивал ту роль, какую сыграло в развитии основ квантовой механики скептическое отношение к ней Эйнштейна. В частности, Бор очень подробно писал об этом в сборнике статей, посвящен-

ных Эйнштейну<sup>2</sup>. Он подчеркивает, что самому Эйнштейну принадлежат фундаментальные идеи, сыгравшие очень большую роль в развитии квантовой теории: теория фотоэффекта, в которой впервые было введено понятие световых квантов (1905), теория излучения и поглощения света, включающая рассмотрение как спонтанного, так и вынужденного излучения (1918), и т. д. Тем не менее до конца своих дней Эйнштейн не мог примириться со статистическим характером квантовых закономерностей, считая, что недетерминистическое, квантовое описание явлений не может быть полным, исчерпывающим и окончательным. Характерно, что когда Эйнштейн ознакомился с первой работой Бора 1913 г., то, как сообщил Бору Хэвешы, Эйнштейн сказал: «Такую работу, может быть, мог бы сделать и я сам, но если она правильна, то это означает конец физики как науки».

К сожалению, не так уж редки случаи, когда даже подлинно гениальные ученые с какого-то момента своей жизни уже больше не приемлют нового. Вспомните Фарадея, который, находясь под влиянием шеллингианской философии, учившей, что все сущее едино, всю жизнь искал взаимосвязи различных физических явлений. Так, в поисках связи между светом и магнетизмом он открыл эффект Фарадея (вращение плоскости поляризации света в намагниченных телах). Он ставил эксперименты, оставшиеся, правда, безуспешными, чтобы обнаружить связь между тяготением и электричеством. Больше того, он писал, что «различные формы, в которых проявляются силы материи, . . . как бы могут превращаться друг в друга и существуют эквиваленты их действия». И вот, наконец, был открыт фактически предвиденный Фарадеем закон сохранения энергии, и Фарадей познакомился со знаменитым мемуаром Гельмгольца «О сохранении силы». Но Фарадей не смог разобраться в том, что под словом «сила» понималось тогда и то, что мы теперь называем силой, и то, что мы называем работой; он отверг закон сохранения энергии, потому что, как он писал в своем дневнике, «как можно говорить о сохранении силы, если она меняется в 4 раза, когда расстояние меняется в два раза».

Такого с Бором никогда не случалось. До самого конца своих дней он интересовался новым, искал новое. Еще около четырех лет назад в Принстоне на докладе Паули, излагавшего основы новой теории Гейзенберга, пытавшегося при помощи единого спириного поля объяснить свойства всех элементарных частиц, Бор высказался следующим образом: «Для подлинно новой теории Гейзенберга недостаточно сумасшедшая!»

Конечно, это высказывание надо понимать так, что подлинно новая теория бывает, как правило, «сумасшедшей» не в смысле

---

<sup>2</sup> Статья эта, относящаяся к 1949 г., напечатана в УФН, 1958, 66, 571 и в сборнике статей Н. Бора «Атомная физика и человеческое познание». ИЛ, 1961. — *Прим. ред.*

своей нелогичности, непоследовательности или внутренней противоречивости, а в смысле ее непривычности, новизны и кажущейся парадоксальности.

### Дискуссии с Эйнштейном

Вернемся, однако, к тому, что говорил Бор о дискуссиях с Эйнштейном, о его скептическом отношении к квантовой механике, которое так способствовало прояснению ее основных понятий.

В течение ряда лет Эйнштейн выступал с изложением разного рода «парадоксов», которые, по его мнению, доказывали несостоятельность квантовой механики. Именно анализ этих парадоксов, как говорит Бор, и помог существенно выяснению основ теории.

Вот как, например, Эйнштейн пытался опровергнуть утверждение, что нельзя одновременно точно фиксировать время и энергию. Он предлагал воспользоваться законом эквивалентности энергии и массы и провести такой мысленный эксперимент. Рассмотрим закрытый ящик, в котором находится свет (фотоны) и точные часы, в заданный момент открывающие отверстие в ящике на такой короткий промежуток времени, за который из него может вылететь только один фотон. Таким образом, момент вылета фотона из ящика точно известен. Вместе с тем если ящик подвешен в поле тяжести на пружине, то по его смещению можно определить изменение его полной массы, вызванное вылетом фотона, откуда точно определяется энергия этого фотона.

Ошибочность этого рассуждения заключается в том, что в нем не учтено изменение хода времени (или хода часов) при смещении системы отсчета (т. е. ящика с часами в поле тяжести). Напомню, что эта зависимость хода времени от поля тяготения проявляется в известном смещении к красному концу спектра излучения тел большой массы (Солнца и звезд). В данном случае, как показал Бор, зависимость хода часов от их положения в поле тяжести внесит неопределенность в их показания, вполне соответствующую принципам квантовой механики, так что «парадокс» Эйнштейна полностью разрешается.

Хотел бы в этой связи заметить, что в это самое время Л. И. Мандельштам тоже очень интересовался «парадоксами» Эйнштейна. Как только появлялась статья Эйнштейна с очередным парадоксом, он сразу же ее изучал и уже через несколько дней в частной беседе разъяснял содержащуюся в ней ошибку рассуждения.

Я и другие товарищи говорили ему: «Почему Вы это не публикуете?». Он отвечал: «Эйнштейн такой крупный человек, что все эти соображения должны быть ему известны. Вероятно, что-то существенное в его рассуждениях ускользает от меня». Проходило некоторое время, и появлялась работа Бора, точно соответство-

вавшая тому, что говорил Л. И. Мандельштам. Я рассказываю об этом не к умалению Бора, а к возвеличению Леонида Исааковича.

В последнее посещение Бором СССР мы много разговаривали с ним в дружеской обстановке в ФИАНе<sup>3</sup>. Он, в частности, рассказывал нам, что во время одной из первых его встреч-дискуссий с Эйнштейном примерно в 1920 г. Эйнштейн в конце концов задал ему вопрос: «Скажите, что же такое свет?» Бор ему ответил: «Обратитесь к немецкому правительству, и пусть оно либо издаст постановление, что свет — это волна, и запретит пользоваться фотоэлементами, или же, что свет — это корпускулы, и тогда запретит пользоваться дифракционными решетками».

Эти споры теперь уже в прошлом. Правда, встречаются еще отголоски таких рассуждений у де Бройля, Бома и др. Однако совершенно ясно, в основном благодаря анализу Бора, что механический детерминизм классической физики несовместим с многогранностью и вместе с тем с целостностью реальных объектов; что и электроны и свет в одно и то же время и корпускулы и волны, т. е. обладают свойствами, совершенно несовместимыми с точки зрения классической физики. Хотя с релятивистской квантовой механикой пока еще во многих отношениях дело обстоит неблагоприятно и мы лишь надеемся, что в обозримом будущем новые идеи исправят существующее положение, однако нерелятивистская квантовая механика представляет собой вполне последовательную, логически стройную теорию, своей законченностью не уступающую, а может быть, и превосходящую механику Ньютона. И этим в основном мы обязаны Бору.

Долгое время у нас говорили о копенгагенской школе, о копенгагенской интерпретации квантовой теории, наконец, о том, что Бор в последнее время изменил свою первоначальную точку зрения. Несомненно, что не существует сколько-нибудь правомерных интерпретаций квантовой теории, отличных от так называемой копенгагенской. Что же касается последнего вопроса, то в ФИАНе мы его задали Бору, и он с полной определенностью и четкостью сказал: «Я не менял в своих взглядах ни единого слога (*not a single syllable*). Просто некоторые нас раньше не понимали, а потом поняли и согласились».

При этом надо отметить, что Бор отнюдь не упорствовал в своих взглядах, если возникали основания для их пересмотра. Для иллюстрации этого обратимся к биологии

### Интерес к биологии

Бор всегда очень интересовался биологией, не раз писал о применении принципов неопределенности и дополнительности к биологии. В этой связи он указывал, например, на то, что если

<sup>3</sup> Физический институт им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР.



при изучении психических явлений вы начнете анализировать свои собственные ощущения и эмоции, то тем самым вы неизбежно их видоизмените.

Но сейчас нас непосредственно интересует то, что у Бора произошло очень интересная эволюция взглядов на природу жизни. Я процитирую его высказывания, относящиеся к 1937 г.

«Мы вынуждены принять, что собственно биологические закономерности представляют законы природы, дополнительные к тем, которые пригодны для объяснения свойств неодушевленных тел. В этом смысле существование самой жизни следует рассматривать как в отношении ее определения, так и наблюдения, как основной постулат биологии, не поддающийся дальнейшему анализу».

Но вот в 1959 г. Бор пишет следующее: «Совсем новые перспективы постепенного разъяснения биологических закономерностей на основе прочно установленных принципов атомной физики появились за последние годы. Это произошло благодаря открытию поразительно устойчивых структур специального назначения, несущих генетическую информацию, а также благодаря все более полному проникновению в процессы, которыми эта информация передается. Таким образом, у нас нет причин ожидать какого-либо внутреннего ограничения для применимости элементарных физических и химических понятий к анализу биологических явлений».

### Непреклонный борец за мир

В заключение несколько слов об общественных взглядах и личном обаянии Нильса Бора. Начну с одного воспоминания, глубоко врезавшегося в мою память.

В 1934 г., когда Бор впервые посетил Советский Союз, мне посчастливилось довольно много с ним общаться. Мы были в Харькове у Ландау, и я возвращался вместе с Бором и его женой в Москву. Как-то вечером в поезде мы разговорились, в частности, о встречавшихся тогда высказываниях, отвергавших возможность нашего сотрудничества с социал-демократами в едином фронте против реакции.

По этому поводу Бор с большой страстностью сказал: «Ну как люди не понимают, что самая главная опасность для человечества сейчас — это Гитлер и фашистская Германия. Это та угроза, против которой должны сплотиться все — от коммунистов и социалистов до радикалов и либералов».

Только через несколько лет я осознал всю глубину его прозорливости.

Известно, что во время войны Бор некоторое время находился в Дании, когда она была оккупирована гитлеровскими войсками. В свой последний приезд в 1961 г. Бор поделился с нами в ФИАНе двумя интересными воспоминаниями об этом периоде. Он расска-

зал, как один из его видных учеников-физиков специально приезжал из Германии в Копенгаген, когда войска Гитлера стояли под Москвой, уговаривать его, чтобы он, Бор, не придерживался такой непримиримой к фашизму позиции, потому что, мол, все равно победа фашизма на земном шаре обеспечена и что физикам нужно как-то проявить свою полезность в деле достижения победы, ибо только так они смогут обеспечить свое положение в будущем гитлеровском рейхе. По словам Бора, это был очень хороший человек, который, однако, впоследствии забыл обо всем этом, и Бор закончил замечательными словами: «Поразительно, как даже хорошие люди забывают о взглядах, которых они ранее придерживались, если эти взгляды менялись у них постепенно».

В оккупированной Дании у Бора скоро начала гореть земля под ногами. Осенью 1943 г. датская организация сопротивления помогла ему бежать вместе с сыном на лодке через пролив из Дании в Швецию, откуда их должны были перевезти в Англию на самолете-бомбардировщике. Но каждый самолет брал только одного человека в бомбовом отсеке. Первым улетал Бор. Нужно было надеть шлем с радионаушниками. Через них ему должны были подать сигнал, когда нужно включить кислород. Но у Бора была такого крупного размера голова, что наушники не доходили до ушей, так что сигнала о включении кислорода он не услышал. По прибытии в Англию его сняли с самолета в бессознательном состоянии. Когда я, выслушав Бора, сказал, что «это ужасно», он ответил, что ужасно было не это, а то, что, когда он ожидал следующего самолета, на котором должен был лететь его сын, стало известно, что немцы сбили этот самолет. Это было ужасно. И только через несколько часов выяснилось, что перед отлетом во второй самолет вместо его сына посадили другого пассажира, а сын прилетел позже.

Примечательно открытое письмо Бора Объединенным Нациям, опубликованное в 1950 г. В нем он рассказывает, что по приезде в Англию в 1943 г. его посвятили в «атомные проекты», т. е. в исследование по овладению атомной энергией и созданию атомного оружия. Переехав в США, Бор принимал в них участие вплоть до июня 1945 г., когда он еще до первого испытания атомной бомбы переехал из США в Англию, и с тех пор, как он пишет, «не имел никакой связи с какими-либо секретными, военными или промышленными исследованиями в области атомной энергии».

В этом открытом письме Бор приводит большие выдержки из двух меморандумов, переданных им президенту Рузвельту при разговоре с ним в августе 1944 г. и государственному секретарю США в мае 1948 г. Уже в меморандуме 1944 г. Бор высказывает опасение, что единство союзников, сложившееся в борьбе с фашизмом, может нарушиться после конца войны, и настаивает ввиду этого на необходимости еще во время войны провести мероприятия, которые обеспечили бы после нее всеобщую безопасность, полное запрещение пользования атомным оружием и надлежащий

международный контроль, который предотвратил бы возможное нарушение этого запрещения. При этом Бор настаивал, чтобы сразу же после войны результаты военных исследований, делающие возможным мирное применение атомной энергии, стали доступными для всех стран, чтобы всем странам была предоставлена полная возможность использования атомной энергии в мирных целях и чтобы всякая монополия на нее была исключена. Вся значимость этого замечательного меморандума становится ясной, только если вспомнить, что в 1944 г. США обладали абсолютной монополией на «атом».

В 1950 г. в письме Объединенным Нациям Бор настаивает на необходимости создания «открытого мира» (open world), в котором были бы обеспечены мир и мирное сотрудничество (cooperation) всех государств, свободное общение между ними и свободный обмен информацией, устранены все источники взаимного недоверия и в котором «каждая нация могла бы выделяться (assert itself) только в той мере, в какой она может способствовать росту общей культуры и в какой она может помочь другим странам своими ресурсами и своим опытом».

Все приведенное — это только иллюстрация того, что Бора всегда глубоко волновали не только судьбы науки, но и судьбы человечества, что он остро чувствовал ответственность ученых, открывших путь в атомный век, за то, чтобы завоевания науки были использованы не для взаимного уничтожения, а для всеобщего благополучия.

В заключение я хотел бы особо подчеркнуть, что Нильс Бор был не только гениальным ученым, не только передовым человеком, но и поистине обаятельным человеком. Всякий, кто имел счастье с ним встречаться, неизменно бывал очарован и покорен его личностью, его совершенно необыкновенной простотой, искренностью, общительностью и доброжелательностью, сочетавшейся с твердостью и непреклонностью убеждений.

Бор был подлинным воплощением человечности и доброты в самом возвышенном смысле этих слов.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ <sup>1</sup>

Когда я начинал заниматься физикой, около 50 лет назад, всем казалось несомненным, что есть две и только две элементарные частицы, два кирпича мироздания, из которых построены все вещества, — электрон и протон. Соответственно этому считалось, что все силы природы сводятся в конечном счете к электромагнитным и гравитационным (т. е. к силам тяготения).

## Что называется элементарной частицей

Сейчас число элементарных частиц возросло примерно до 30, причем трудно указать критерий того, что мы называем «элементарной» частицей. Раньше этот критерий был чрезвычайно простым — ни электрон, ни протон нельзя было изменить путем какого бы то ни было химического или физического воздействия; отсюда вытекало убеждение, что эти частицы действительно элементарные. Однако не только большинство вновь открытых «элементарных» частиц через короткое время после возникновения самопроизвольно распадается, но и «стабильные» частицы, соударяясь друг с другом с достаточно большой энергией, могут превращаться в другие частицы или полностью аннигилировать (т. е. исчезать), переходя, например, в свет.

Могло бы показаться соблазнительным считать самопроизвольно распадающиеся частицы сложными и только нераспадающиеся — элементарными. Однако этот критерий явно непригоден. Так, например, нейтрон стабилен, когда он связан ядерными силами внутри (нерадиоактивного) атомного ядра, но в свободном состоянии нейтрон в среднем за 17 мин распадается на протон, электрон и нейтрино. Предположить, что протон, электрон и нейтрино предсуществовали в «недрах» нейтрона до акта распада, было бы столь же абсурдно, как считать, что электрон, который при своем движении может (например, при соударениях с другими частицами) излучать сколь угодно большое количество световых квантов, заранее содержит их внутри себя. Несомненно, что световые кванты рождаются в момент соударения электрона с другими

<sup>1</sup> «Глазами ученого». М., Изд-во АН СССР, 1963, стр. 175. Этот текст является переработанным и дополненным вариантом статьи, опубликованной в журнале «Природа» № 8 за 1960 г. См. также «Вестник АН СССР», 1960, 10, 10; «В глубь атома». М., «Наука», 1964, стр. 7. — *Прим. ред.*

частицами или при переходе его из одного энергетического состояния в другое. И хотя нейтрон распадается самопроизвольно, а не при столкновениях, возникающие при этом новые частицы несомненно рождаются только в момент распада. Таким образом, стабильность не может служить критерием элементарности частицы.

Есть ряд различных схем, пытающихся отобрать некоторое небольшое число «истинно элементарных» частиц и построить из них все остальные. Но пока ни одну из этих схем нельзя считать безусловно убедительной.

Однако мы принципиально не можем примириться с таким большим количеством независимых «элементарных» частиц. Мы убеждены, что будет найден общий закон, который позволит нам понять, почему в природе существует такое количество «элементарных» частиц, понять, чем обусловлены их разнообразные свойства и их взаимные превращения друг в друга. Другими словами, мы уверены, что появится единая теоретическая система, в которую четко уложатся известные уже частицы и которая сможет предсказать существование еще неоткрытых частиц или доказать, что таких частиц не должно быть. Но такой системы пока еще нет, и поиски ее сопряжены с трудностями фундаментального характера, непосредственно связанными с общими затруднениями современной релятивистской квантовой теории.

М. А. Марков в недавней статье<sup>2</sup> отметил парадоксальность того факта, что физики испытывают глубокую неудовлетворенность современным состоянием основ физической теории, хотя нет ни одного экспериментального факта, который бы противоречил существующей теории. Ни одного! Более того, ряд важнейших фактов был правильно предсказан теорией. Это показывает, что в современной теории несомненно существует здоровое ядро.

Чем же не удовлетворяет нас современная релятивистская квантовая теория? Почему физики считают необходимым создание новой теории и ищут пути к ней?

### Точечные или протяженные частицы

В нерелятивистской квантовой теории все абсолютно ясно, замкнуто и последовательно. Напротив, если мы, пользуясь релятивистской (т. е. учитывающей требования теории относительности) квантовой теорией, вычисляем значения каких-либо физических величин (например, энергию взаимодействия частиц, положение спектральных линий и т. п.), то, как правило, получаем в результате вычислений бесконечно большую величину, что, безусловно, нелепо.

Причина этого частично заключается в специфических квантовых эффектах, частично же связана с предположением о точеч-

<sup>2</sup> Вопросы философии, 1958, № 4.

ности элементарных частиц. Так, потенциал электрического поля точечного заряда обратно пропорционален расстоянию от него и стремится к бесконечности при приближении к заряду. Энергия этого поля равна бесконечности. В классической теории избавиться от этой бесконечности очень легко. Для этого достаточно представить себе заряд не сосредоточенным в одной точке, а распределенным по сфере или шару конечного радиуса. Этот радиус можно выбрать так, чтобы вся масса электрона определялась энергией создаваемого электроном электромагнитного поля. Но по самой сути релятивистской теории такого рода предположение встречается с серьезнейшими трудностями. В самом деле, электрон конечных размеров (или любая другая элементарная частица) должен быть либо абсолютно жестким (и, следовательно, его радиус должен оставаться совершенно неизменным), либо деформируемым телом. Первая возможность противоречит теории относительности. Ведь при столкновении двух абсолютно жестких тел толчок по всей «толще» каждого из этих тел должен был бы передаваться мгновенно, т. е. быстрее скорости света, что невозможно. Если же действие передается только с конечной скоростью, хотя бы и равной скорости света, то электрон должен быть деформируемым телом, так как близкие к месту соударения его части уже приобретут скорость под влиянием толчка, в то время как более отдаленные еще останутся в покое. Следовательно, электрон конечных размеров должен представлять собой некую упругую среду, обладающую более или менее сложными механическими свойствами. Однако такого рода усложнение понятия элементарной частицы принципиально недопустимо хотя бы потому, что свойства макроскопических упругих тел объясняются, в свою очередь, взаимодействием электронов и атомных ядер, образующих собой эти тела.

### Метод перенормировок

Выход из трудностей с бесконечностями был найден лет 15 назад, когда был развит так называемый метод перенормировки. Это своего рода рецепт, по которому из получающейся в результате вычислений бесконечной величины вычитается другая бесконечная величина так, чтобы их разность была конечной и равнялась наблюдаемой величине.

Несмотря на все остроумие этого способа, результаты которого к тому же в ряде случаев прекрасно согласуются с опытом, он встречает ряд возражений. Во-первых, по-видимому, существуют такие типы взаимодействия частиц, к которым метод перенормировки неприменим. Помимо этого, крайняя искусственность этого метода явно не удовлетворительна уже по одному тому, что он оперирует рядом принципиально ненаблюдаемых, выпадающих из конечных результатов понятий и величин. Никогда нельзя безнаказанно вносить в теорию не соответствующие реаль-

ности понятия. Вспомним хотя бы, как мучительно освобождалась теория света от понятия материального, но принципиально ненаблюдаемого светового эфира.

Совершенно ясно, что мы находимся накануне нового этапа развития физики, что те принципиальные трудности, которые стали возникать перед физической теорией по мере проникновения человека в новый, неизведанный мир элементарных частиц больших энергий, их взаимодействий и взаимных превращений, будут преодолены только на основе пересмотра и обобщения основных физических понятий и представлений. Этот пересмотр будет несомненно не менее радикальным, чем тот, который в начале нашего века привел к созданию теории относительности и квантовой теории.

### Три вида взаимодействий

Сейчас известны три типа взаимодействия элементарных частиц<sup>3</sup>: сильное, электромагнитное и так называемое слабое, или распадное, взаимодействие. Сильное взаимодействие известно также под названием ядерных сил; эти силы, в частности, связывают между собой протоны и нейтроны, входящие в состав атомных ядер. Каждому типу взаимодействия соответствует свое поле и свои кванты этого поля. Электромагнитному взаимодействию соответствует электромагнитное поле и электромагнитные (световые) кванты — фотоны.

В 1934 г. я впервые указал на то, что всем типам взаимодействий, в том числе и ядерным, должны соответствовать определенные кванты поля, которые, подобно фотонам в электромагнитном случае, могут излучаться взаимодействующими частицами. Вместе с тем я показал, что единственно известные в то время (помимо фотонов) легкие частицы — электрон и нейтрино — не могут быть квантами поля ядерных сил. В следующем году Юкава в работе, начинающейся со ссылки на мою статью, не только предсказал существование своеобразных частиц — мезонов, являющихся квантами этого поля, но и правильно оценил их массу. В настоящее время известны уже два типа квантов, соответствующие сильному взаимодействию, —  $\pi$ - и  $K$ -мезоны.

Возникает вопрос, почему так долго эти ядерные силы не были обнаружены? Да просто потому, что, в отличие от электромагнитных сил, у них очень малый радиус действия. Электромагнитные силы убывают, как квадрат расстояния между частицами, и ни о каком определенном радиусе действия для них, естественно, не приходится говорить. В то же время экспоненциальный<sup>4</sup>

<sup>3</sup> Если не считать ультраслабого гравитационного взаимодействия, о котором здесь говорить не будет.

<sup>4</sup> Экспоненциальная функция — то же, что показательная функция типа  $y = e^x$ , где  $e$  — основание натуральных логарифмов.

характер зависимости ядерных сил от расстояния (расстояние входит в показатель степени) позволяет определить радиус их действия, который оказывается порядка  $10^{-13}$  см. Именно по причине малости этого радиуса действия ядерные силы, несмотря на то, что они в тысячи раз интенсивнее электромагнитных, проявляются только на незначительных расстояниях и поэтому были обнаружены сравнительно недавно, когда эксперимент позволил нам заглянуть внутрь атомного ядра.

Что касается третьего класса взаимодействия — слабого, которое проявляется главным образом при распаде частиц, то оно в  $10^{11}$  раз слабее ядерных сил; вместе с тем очень мал и радиус действия этих сил.

Из экспериментальных данных его можно приблизительно определить примерно в  $10^{-22}$  см (табл. 1). Вопрос же о природе квантов этого поля до сих пор дискуссионный. Существует гипотеза, что ими являются еще не обнаруженные на опыте так называемые векторные мезоны.

Т а б л и ц а 1  
Виды взаимодействий

Вид взаимодействия	Кванты поля	Константа взаимодействия	Радиус действия, см
Сильное (ядерные силы)	$\pi$ -мезоны $K$ -мезоны	$g^2 \sim 14$ $g'^2 \sim 1$	$\sim 10^{-13}$ $\sim 10^{-14}$
Электромагнитное	Фотоны	$e^2/\hbar c = 1/137$	$\infty$
Слабое (распадное)	(?)	$G^2 \frac{M^4 c^2}{\hbar^6} = 1,0 \cdot 10^{-10}$	$10^{-22} *$

\* По современным представлениям, величина, которую целесообразно рассматривать как радиус сил, — это константа размерности длины, входящая в теорию  $[l \sim \sqrt{G} \frac{\hbar}{c} \sim 10^{-18}$  см.] — Прим. ред.

### Законы сохранения

Большую роль в систематике элементарных частиц играют законы сохранения, которые удобно разделить на строго соблюдающиеся, «строгие» (к которым относятся законы сохранения энергии и импульса, электрического заряда ( $e$ ), ядерного заряда ( $N$ ) и закон комбинированной инверсии), и на законы, нарушающиеся при некоторых типах взаимодействия, «приближенные» (табл. 2).

В число строгих законов прежде всего входит известный закон сохранения энергии и импульса, а также закон сохранения электрического заряда. Несколько менее известен третий закон — закон сохранения ядерного заряда. Мы приписываем ядерным частицам, т. е. протонам, нейтронам и гиперонам, определенный



Таблица 2

## Приближенные законы сохранения

Закон	В каких взаимодействиях нарушается
Мир $\leftarrow \rightarrow$ антимир (зарядовое сопряжение) Зеркальная инвариантность Сохранение странности Изотопическая инвариантность	Только в слабых В слабых и электромагнитных

ядерный заряд <sup>5</sup>, которым не обладают другие частицы — фотоны, нейтрино, электроны и мезоны. Закон сохранения ядерного заряда гарантирует стабильность ядерных частиц. При любых превращениях элементарных частиц общая величина ядерного заряда должна сохраняться. Это одна из причин того, что, например, электрон (ядерный заряд нуль) и протон (ядерный заряд +1) не могут аннигилировать (превратившись, например, в фотоны, ядерные заряды которых равны нулю), хотя закон сохранения суммарного электрического заряда при этом не нарушался бы.

Четвертый закон сохранения — закон комбинированной инверсии — сформулирован впервые Л. Д. Ландау. Надо, однако, отметить, что этот закон пока проверен на опыте не столь исчерпывающим образом, как другие строгие законы сохранения <sup>6</sup>.

Для того чтобы понять комбинированную инверсию, обратимся сначала к приближенным законам сохранения, нарушающимся в слабых взаимодействиях. Прежде всего рассмотрим так называемый закон зарядового сопряжения, или закон эквивалентности мира и антимира.

## Частицы и античастицы

Наряду с каждой элементарной частицей существует соответствующая ей античастица с такой же точно массой, спином <sup>7</sup> и величиной электрического и ядерного зарядов, но с противоположным знаком этих зарядов. Электрону с отрицательным зарядом соответствует антиэлектрон с положительным зарядом, носящий название *позитрон*. Протону с положительными электри-

<sup>5</sup> Сейчас используется термин «барионный заряд». — *Прим. ред.*

<sup>6</sup> Закона сохранения лептонного заряда мы здесь касаться не будем.

<sup>7</sup> Наглядно (хотя отнюдь не строго) спин можно представить себе как вращение частицы вокруг оси, проходящей через ее центр (подобно суточному вращению Земли). Количественно спин равен моменту количества движения этого «внутреннего» вращения частицы. Спин элементарной частицы каждого вида имеет строго постоянную величину; может изменяться только направление ее спина (т. е. направление ее оси вращения).

ческим и ядерным зарядом соответствует отрицательно заряженный антипротон. Нейтрон не имеет электрического заряда, но, так же как и протон, имеет ядерный, и ему соответствует антинейтрон с противоположным знаком этого заряда. Самое существенное заключается в том, что при соударении любой частицы с соответствующей ей античастицей они могут аннигилировать, т. е. исчезнуть, причем их энергия и масса переходят, например, в излучение без нарушения законов сохранения.

Существование античастиц было предсказано Дираком, причем, по моему мнению, это один из самых замечательных в истории науки примеров научного предсказания. В качестве образца научного предвидения часто приводят открытие Леверрье и Адамсом планеты Нептун «на кончике пера», т. е. при помощи математического анализа неправильностей движения планеты Уран. Но при этом была открыта всего лишь новая планета, т. е. объект, вполне подобный ранее известным планетам. Когда же в 1931 г. выяснилось, что из электронной теории Дирака вытекает существование антиэлектрона, т. е. того, что мы теперь называем позитроном, то никто не верил вначале, что такой принципиально новый тип вещества может реально существовать. Даже сам автор теории Дирак считал, что, если теория приводит к такому выводу, значит, она неверна. Но через год позитрон был открыт экспериментально, и его свойства оказались точно такими, как предсказывала теория!

Сейчас античастицы известны почти для всех элементарных частиц. Исключением являются только фотоны и нейтральные  $\pi^0$ -мезоны. Они тождественны своим античастицам. Закон зарядового сопряжения заключается в том, что если исключить из рассмотрения слабое взаимодействие, то мир и антимир тождественны по своим свойствам, т. е. если все частицы заменить античастицами, то закономерности физических явлений не изменятся.

Как уже упоминалось, при взаимодействии частицы с соответствующей ей античастицей может произойти их аннигиляция, что и наблюдается на опыте. Если при ядерных превращениях (реакциях) выделение энергии на единицу массы в миллионы раз превосходит выделение энергии при обычных химических реакциях, то при аннигиляции вещества и антивещества выделение энергии (например, в форме излучения), в свою очередь, в миллионы раз превышает ее выделение в ядерных реакциях. Поскольку при аннигиляции вся энергия реагирующих частиц полностью переходит в другие формы энергии, то аннигиляция есть максимально интенсивный из всех возможных источников энергии. Использовать эти процессы для практических целей мы пока не умеем. Но в астрономии теперь дискутируется вопрос о том, не состоят ли некоторые галактики из антивещества. При сближении какой-нибудь галактики с такой антигалактикой произойдет их бурная аннигиляция, причем их энергия и масса выделяется в форме излучения колоссальной интенсивности.

Высказывались предположения, что именно такого рода процессы происходят в созвездии Лебедя, однако в этом конкретном случае гипотеза не подтвердилась. Весь этот вопрос крайне спорный, и я упомянул о нем только в качестве иллюстрации того значения, которое приобретает для астрономии теория элементарных частиц.

### Нарушение закона четности

Однако закон эквивалентности мира и антимира, другими словами, — закон зарядового сопряжения, нарушается при слабых взаимодействиях, что, как мы увидим, тесно связано с нарушением в этих взаимодействиях другого приближенного закона сохранения — закона зеркальной инвариантности (в квантовой теории его часто называют законом сохранения четности).

До самого последнего времени справедливость этого закона считалась самоочевидной. Ведь его можно свести, например, к утверждению, что законы вращения тела по часовой стрелке ничем не отличаются от законов вращения против часовой стрелки. Этому утверждению эквивалентно утверждение, что нет никакого объективного различия в свойствах (кроме чисто геометрических) буравчика с правовинтовой нарезкой и буравчика левовинтового. Ведь охарактеризовать, предположим, нарезку, которую мы условно называем правовинтовой, можно только путем демонстрации соответствующего образца или чертежа или путем сопоставления этой нарезки с каким-либо конкретным движением (например, с движением Солнца по небосводу).

Это равноправие «правого» и «левого» проявляется и в геометрии, когда мы, к примеру, вводим в ней три взаимно перпендикулярные оси координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Мы называем систему координат правой, если с направлением ее осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  можно (в том же порядке) совместить (не согнутые, а распрямленные) большой, указательный и средний пальцы правой руки. Посредством левой руки определяются левые системы координат. Очевидно, что никаким поворотом правую систему координат нельзя совместить с левой и что вместе с тем обе эти системы совершенно равноправны.

Утверждение о равноправности «правого» и «левого» называется законом зеркальной инвариантности (или зеркальной симметрии) потому, что, рассматривая изображения предметов в зеркале, мы увидим, что часовая стрелка изменяет свое движение на обратное, правовинтовой буравчик становится левым и, наоборот, правая система координат тоже становится левой и т. д. Поэтому утверждение о равноправности правого и левого эквивалентно утверждению, что для мира, отраженного в зеркале, т. е. для мира, в котором правое и левое направления изменялись на обратные, действуют те же законы, что и для нашего мира, и нет возможности, находясь в каком-либо из миров, определить,

прямой он или зеркальный. Иначе говоря, если вместо правой системы координат мы выберем левую (для этого нужно переменить условное направление одной из трех пространственных координатных осей на обратное), то в новой координатной системе все физические законы будут выражаться точно в такой же форме, как и в исходной. Это казалось настолько очевидным, что совершенно парадоксальным явился тот факт, что при слабых взаимодействиях закон зеркальной инвариантности нарушается, как было обнаружено в 1956 г.

В чем же выражается это нарушение?

Рассмотрим какое-нибудь вращающееся тело. Мы характеризуем его вращение вектором момента количества движения, направленным по оси вращения. Ось вращения определена однозначно. Однако оба взаимно противоположных направления вдоль нее совершенно равноправны. Поэтому направление момента вращения условно и зависит от произвольного выбора системы координат. Мы выбираем это направление по правилу правого буравчика; иначе говоря, так, чтобы при совмещении оси  $z$  правой системы координат с направлением вектора момента количества движения тела его вращение соответствовало повороту от (положительной) оси  $x$  к (положительной) оси  $y$ . Поэтому условное направление вектора момента изменяется на прямо противоположное при переходе от правой системы координат к левой или наоборот. Так как правые и левые системы координат равноправны, то отсюда следует, что в физических явлениях не может быть никакой корреляции (соотношения) между условным направлением вектора момента вращения частицы и, например, направлением вектора ее скорости, которое от выбора системы координат никак не зависит.

Однако корреляция именно такого рода была обнаружена в слабых взаимодействиях. Простейший пример: спин (т. е. внутренний момент вращения) электронов, испускаемых при радиоактивном  $\beta$ -распаде, направлен преимущественно противоположно их скорости. Такова корреляция в правых системах координат, в левых же системах вектор спина имеет противоположное направление и направлен по скорости электрона. Следовательно, правые и левые системы координат оказываются неравноправными. Между ними имеется объективное различие (характер корреляции между спином и скоростью  $\beta$ -электронов).

### Комбинированная инверсия

Этот факт парадоксален — казалось бы, что он свидетельствует о внутренней анизотропии пространства. Из числа различных попыток найти выход из этого положения несомненно наиболее удачна гипотеза Л. Д. Ландау о комбинированной инверсии, которую он предложил еще до того, как было экспериментально обнаружено несохранение четности.

Принцип комбинированной инверсии заключается в том, что, хотя взятые порознь законы эквивалентности мира и антимира и закон зеркальной инвариантности и не выполняются в слабых взаимодействиях, законы всех вообще физических явлений инвариантны по отношению к комбинированной инверсии, т. е. при переходе от мира к антимирю и одновременном зеркальном отражении.

Действительно, опыт показывает, что (в среднем) спин позитронов, испускаемых при  $\beta$ -распаде атомных ядер, направлен по их скорости, т. е. обратно спину электронов.

	Правая система	Левая система
$\beta$ -электрон	$\left\{ \begin{array}{l} s \leftarrow \\ v \rightarrow \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} \rightarrow s \\ \rightarrow v \end{array}$
$\beta$ -позитрон	$\left\{ \begin{array}{l} s \leftarrow \\ v \leftarrow \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} s \leftarrow \\ \rightarrow v \end{array}$

Поэтому, как видно из приведенной схемы, при комбинированной инверсии корреляция между спином  $s$  и скоростью  $v$  частиц не изменяется. Действительно, характер корреляции у электрона (частица) в правых системах координат такой же, как у позитрона (античастица) в левых системах, и наоборот. Заметим, что электрон и позитрон (как вообще частица и античастица) — совершенно равноправные частицы: заряды у них противоположного знака, но, какой из них считать положительным, а какой отрицательным, совершенно безразлично, — это вопрос терминологии. Поэтому если действительно существует строгая инвариантность относительно комбинированной инверсии, то о внутренней анизотропии пространства говорить не приходится.

Эта гипотеза Л. Д. Ландау уже нашла себе подтверждение в большом числе разнообразных экспериментов. Но из осторожности надо отметить, что пока еще не все типы слабых взаимодействий достаточно полно исследованы <sup>8</sup>.

### Систематика частиц

На основе этих законов можно перейти к систематике элементарных частиц (табл. 3 и 4). Все эти частицы делятся на два резко различных класса — фермионы, или частицы с полуцелым спином <sup>9</sup>, и бозоны, или частицы с целым спином (в том числе и со

<sup>8</sup> В 1964 г. было обнаружено, что при распаде  $K^0$ -мезонов на  $\pi$ -мезоны комбинированная четность нарушается. Это фундаментальное явление остается пока не понятным и не разъясненным. — *Прим. ред.*

<sup>9</sup> Полуцелый спин — это спин, который, будучи выражен в долях постоянной Планка, равен целому числу с половиной.

Таблица 3

## Частицы, не обладающие ядерным зарядом

Частицы	Символ	Масса покоя *	Спин и статистика	Частицы и анти-частицы	Электрический заряд	Время жизни, сек **	Странность	Примечание
Фотон	$\gamma$	0	1, Бозе	Анти-частицы нет	0	$\infty$	0	
Лейтоны	Нейтрино	0	$1/2$ , Ферми	$\nu$ и $\bar{\nu}$	0	$\infty$	0	
	Электрон	1	$1/2$ , Ферми	$e^-$ и $e^+$ (позитрон)	$\pm 1$	$\infty$	0	
	$\mu$ -мезон	207	$1/2$ , Ферми	$\mu^-$ и $\mu^+$	$\pm 1$	$2 \cdot 10^{-6}$	0	
Мезоны	$\pi$ -мезон	$\sim 270$	0, Бозе	$\pi^-$ и $\pi^+$ $\pi^0$ (нет анти-частиц)	$\pm 1$ 0	$2,5 \cdot 10^{-8}$ $2 \cdot 10^{-16}$	0	Изотопический триплет
	$K$ -мезон **	$\sim 970$	0, Бозе	$K^+$ и $K^-$ $K^0$ и $\bar{K}^0$	$\pm 1$ 0	$10^{-8}$ $6 \cdot 10^{-8}$ и $1,3 \cdot 10^{-10}$	$\pm 1$ $\pm 1$	Изотопический дублет

Всего 14 видов

\* Масса электрона принята за единицу (спин измеряется в единицах  $\hbar$ , электрический заряд — в зарядах протона. — Прим. ред.).

\*\* Два различных времени жизни, указанных для  $K^0$ , относятся не порознь к  $K^0$  и анти- $K^0$ , а к двум определенным комбинациям этих состояний.

спином нуль). В отличие от бозонов, фермионы подчиняются принципу Паули, согласно которому два одинаковых фермиона не могут находиться в одном и том же состоянии (например, два электрона с одинаково направленными спинами не могут находиться на одной и той же орбите внутри атома). Совокупности фермионов и бозонов подчиняются различным статистическим закономерностям: в случае фермионов — так называемой статистике Ферми, а в случае бозонов — статистике Бозе.

Другой важнейшей характеристикой элементарной частицы является наличие или отсутствие у нее ядерного заряда, возбуждающего поля ядерных сил. Все известные нам частицы с ядерным зарядом обладают большей массой, чем любая известная нам частица, лишенная этого заряда. Неизвестно, принципиально ли это различие, но все же частицы, обладающие ядерным зарядом, принято называть барионами (что значит тяжелые).

В табл. 3 приведены данные о всех известных нам частицах, за исключением барионов, помещенных в табл. 4. Эти частицы

Таблица 4

## Барионы \*

Частицы	Символ	Масса **	Частица и анти-частица	Электрический заряд	Время жизни, сек	Странность	Изотопический мультиплет
Нуклоны	протон	$p$	$p$ и $\bar{p}$	$\pm 1$	8	0	Дублет
	нейтрон	$n$	$n$ и $\bar{n}$	0	$10^3$	0	
Гипероны	$\Lambda^0$	2183	$\Lambda^0$ и $\bar{\Lambda}^0$	0	$3 \cdot 10^{-10}$	$\pm 1$	Синглет
	$\Sigma$	$\sim 2310$	$\Sigma^+$ и $\bar{\Sigma}^+$	$\pm 1$	$\sim 10^{-10}$	$\pm 1$	Триплет
			$\Sigma^-$ и $\bar{\Sigma}^-$	$\mp 1$			
	$\Xi$	$\sim 2650$	$\Sigma^0$ и $\bar{\Sigma}^0$	0	$< 10^{-11}$	$10^{-10}$	$\pm 2$
$\Xi^+$ и $\bar{\Xi}^+$			$\pm 1$				
			$\Xi^0$ и $\bar{\Xi}^0$	0			

Всего 16 видов

\* Все они фермионы и имеют ядерный заряд  $\pm 1$  и спин  $1/2$ .\*\* Масса электрона принята за единицу (спин измеряется в единицах  $\hbar$ , электрический заряд — в зарядах протона. — Прим. ред.).

подразделяются на три класса — фотоны, лептоны, или легкие фермионы (нейтрино, электрон и  $\mu$ -мезон), и бозоны, переносящие ядерное взаимодействие ( $\pi$ - и  $K$ -мезоны).

У двух частиц — фотона и нейтрино — масса покоя равна нулю. Поэтому они могут двигаться только со скоростью света. У двух частиц — фотона и нейтрального  $\pi^0$ -мезона — нет античастиц; точнее, они тождественны своим античастицам.

В табл. 3 и 4 указано время жизни различных частиц, точнее, время, за которое распадается в среднем половина наличных частиц данного сорта; приведено время жизни свободных частиц <sup>10</sup>.

В связанном же состоянии время жизни частиц изменяется; так, например, нейтроны, входящие в состав атомного ядра, вообще не распадаются, пока они под влиянием какого-либо внешнего воздействия не высвободятся из ядра.

Общее количество частиц и античастиц, представленных в обеих таблицах, равняется 30, из них 16 барионов. Нет никакой уверенности в том, что этим исчерпываются все существующие в природе элементарные частицы. Более того, уже в настоящее время имеются указания на то, что существует не один, а два вида нейтрино, отличающихся друг от друга по характеру их взаимодействия

<sup>10</sup> Конечно, и  $\gamma$ -стабильные частицы (фотон, нейтрино, электрон, протон), время жизни которых в свободном состоянии бесконечно, могут исчезать, поглощаться или превращаться в другие частицы при соударениях друг с другом или с другими частицами.

с другими частицами<sup>11</sup>. Есть также некоторые основания предполагать существование и ряда других видов частиц.

Еще более существен тот факт, что в самое последнее время — в 1961 и начале 1962 г. — открыт ряд так называемых резонансов, в которых, по сути дела, проявляется существование нового класса элементарных частиц, обладающих несравненно более коротким временем жизни, чем те гораздо лучше изученные частицы, которые приведены в табл. 3 и 4. Время жизни этих частиц (за исключением  $\pi^0$ -мезона и  $\Sigma^0$ -гиперона) не меньше  $10^{-10}$  сек, тогда как вновь открытым «резонансам» соответствуют частицы, получившие название « $\omega$ -мезон», « $\rho$ -мезон», « $\phi$ -мезон» и т. д., которые самопроизвольно распадаются на два или три  $\pi$ -мезона за время порядка  $10^{-23}$  сек.

Я не имею возможности входить здесь в более подробное рассмотрение этих новых частиц. Замечательно, что самый факт их существования, а также их свойства, по-видимому, могут быть поняты и объяснены на основании той теории  $S$ -матрицы, о которой будет речь идти в конце этой статьи.

### Новая теория Гейзенберга

Но и тех частиц, которые нам уже хорошо известны, — великое изобилие. Как уже было сказано вначале, главная задача физики элементарных частиц — отыскание общих принципов, определяющих собой спектр элементарных частиц, их свойства и взаимодействия. Попыток в этом направлении делается много, но я рассмотрю только одну из наиболее интересных, принадлежащую одному из крупнейших современных физиков — Вернеру Гейзенбергу.

Известно, что классическому понятию электромагнитного поля в квантовой теории соответствуют фотоны, т. е. световые кванты. Подобно этому в современной теории каждому виду элементарных частиц соответствует свое «волновое поле», описываемое некоторыми «волновыми функциями»  $\varphi(x, y, z, t)$ . Гейзенберг же исходит из концепции единого (спинорного) поля, лежащего в основе всех физических явлений и, так сказать, порождающего элементарные частицы всех сортов.

В качестве иллюстрации укажу только на то, что, например,  $\pi$ -мезон считается состоящим из пары «истинно элементарных» частиц — одного нуклона и одного антинуклона. Этой концепции отнюдь не противоречит тот факт, что масса  $\pi$ -мезона равна всего лишь 270 (считая массу электрона за единицу), тогда как масса нуклона и антинуклона, вместе взятых, равна 3700. Этот огромный

<sup>11</sup> В 1962 г. со значительной степенью убедительности было экспериментально доказано существование двух видов нейтрино; испускание или поглощение нейтрино первого вида происходит при рождении или исчезновении электрона, тогда как нейтрино второго вида взаимодействует не с электроном, а с  $\mu$ -мезоном.



«дефект массы» попросту характеризует величину энергии связи частиц в  $\pi$ -мезоне: при образовании этого мезона из нуклона и антинуклона должна выделяться энергия, связанная с дефектом массы соотношением Эйнштейна (энергия равна массе, помноженной на квадрат скорости света).

Почему единое, основное поле может «порождать» многочисленные волновые поля, соответствующие различным видам элементарных частиц? Это обусловлено тем, что в основном дифференциальное уравнение, определяющее это поле, волновая функция входит не в первой степени, т. е. линейно, а в более высоких степенях. Отсюда появилось название теории Гейзенберга — «нелинейная теория поля».

В работах Гейзенберга содержится много очень интересных качественных соображений, а также ряд математических расчетов, подкрепляющих эти соображения. Однако необходимо иметь в виду, что в работах до сих пор нет ничего твердо доказанного, нет, собственно говоря, никакой завершенной теории. Правильнее было бы говорить не о теории Гейзенберга, а о предложенной им, безусловно заманчивой, программе построения будущей теории. Правда, Гейзенбергу удалось получить из своей теории поразительные результаты; задавшись массой нуклона, он теоретически рассчитал массы почти всех остальных барионов и массы мезонов в хорошем согласии с данными эксперимента. Однако в эти расчеты не только входят некоторые дополнительные, произвольно фиксируемые параметры, но вызывает сомнение как правомерность применяемого им приближенного метода расчета<sup>12</sup>, так и последовательность и внутренняя непротиворечивость самых основ теории. Кроме того, отнюдь не ясно, удастся ли, идя по намеченному Гейзенбергом пути, справиться с главной трудностью, стоящей перед всякой релятивистской квантовой теорией, — с устранением из нее бесконечностей. Кстати, для теории Гейзенберга эта задача представляет особые трудности; это явствует из того, что общепринятый (хотя и неудовлетворительный в принципиальном отношении) метод перенормировки, о котором я упоминал вначале, вообще к этой теории неприменим.

Гейзенберг надеется устранить бесконечности из своей теории путем введения в нее так называемой индефинитной метрики. Это означает следующее. Квантовая теория оперирует вероятностями различных событий; например, она позволяет определить, с какой вероятностью при известных условиях опыта электрон окажется находящимся в данном участке пространства. Вероятность — это положительная величина, лежащая в пределах от 0 до 1. В случае же индефинитной метрики те величины, которым в обычной квантовой теории приписывается смысл вероятности,

<sup>12</sup> Я имею основание говорить о неприменимости к рассматриваемым Гейзенбергом проблемам используемого им метода расчета, так как этот метод был разработан мною (он известен в науке под названием метода Тамма—Данкова; Данков независимо от меня предложил его на 5 лет позже).

могут приобретать и отрицательные значения. В связи с этим и некоторые из бесконечных величин, возникающих в процессе вычислений, приобретают знак, обратный обычному, и, таким образом, возникает возможность, что все эти бесконечности взаимно скомпенсируются. Однако далеко еще не ясно, совместима ли такого рода компенсация бесконечностей с тем совершенно необходимым требованием, чтобы вероятности всех реально наблюдаемых физических событий приобретали только положительное значение. Я сам тоже занимался этой проблемой, но мне не удалось получить каких-либо положительных результатов.

Хочу отметить, что когда Паули в 1958 г., приехав в США, докладывал о теории Гейзенберга, то присутствовавший на докладе Нильс Бор сказал: «Для подлинно новой теории теория Гейзенберга недостаточно сумасшедшая (crazy)!»

Конечно, термин «сумасшедшая» нужно при этом понимать не в том смысле, что новая теория будет непоследовательной и нелогичной. Напротив, она должна быть безупречно последовательной и логичной, а ее «сумасшедшинка» должна заключаться только в новизне ее идей, в их непривычности, вызывающей впечатление парадоксальности. Ведь и теория относительности и квантовая теория в свое время казались «сумасшедшими».

Я согласен с Бором, что заключающаяся в теории Гейзенберга «сумасшедшинка» — индефинитная метрика и отрицательные вероятности — действительно недостаточно радикальна и недостаточно для построения новой фундаментальной теории.

Тем не менее я сравнительно подробно остановился на теории Гейзенберга, во-первых, потому, что мне импонирует его идея об едином физическом поле, и, во-вторых, потому, что рассмотрение его теории дает известное представление об общем положении современной теории элементарных частиц.

### **Пересмотр пространственно-временных представлений**

Я глубоко убежден, что создание новой фундаментальной теории потребует коренного пересмотра наших представлений о пространстве и времени в применении их к ультрамалым масштабам, пересмотра и видоизменения не менее радикального, чем то принципиально новое, что принесли с собой теория относительности и квантовая теория.

Еще Л. И. Мандельштам подчеркивал, что в атомарных масштабах понятия расстояния, измеряемого линейкой, и времени, измеряемого часами, неприменимы. В настоящее время становится все более вероятным, что даже при использовании любых косвенных методов измерения пространственное положение и момент времени принципиально не могут быть измерены с точностью, превышающей некоторый определенный предел. Конечно, с точки зрения наших обычных масштабов этот предел ничтожно мал; так, предел точности пространственных измерений никак не может

превышать миллионной доли размера атома. Однако все же какой-то определенный предел, по-видимому, существует. Но раз так, то самые понятия точной координаты и точного момента времени становятся ненаблюдаемыми, т. е. фиктивными и, стало быть, не могут быть положены в основу изучения реального мира. Между тем современная физика оперирует этими, видимо фиктивными, понятиями, целиком базируется на них.

Можно следующим образом пояснить содержание этих утверждений. Известно, что в основе квантовой теории лежит принцип неопределенности. Обычно его формулируют так: невозможно в одно и то же время измерить, определить или вообще как-либо фиксировать и координату и импульс произвольного тела (для определенности в дальнейшем будем говорить о произвольной частице). Точнее говоря, благодаря тому, что любая частица обладает как корпускулярными, так и волновыми свойствами, она никогда не может находиться в состоянии, характеризуемом одновременно и вполне определенной точной координатой и вполне определенным импульсом; произведение неточности координаты на неточность импульса не может быть меньше постоянной Планка. Однако согласно современной теории точность значения каждой из этих величин — координаты и импульса, рассматриваемых порознь, — ничем не лимитирована; частица, например, может находиться в состоянии со сколь угодно фиксированной координатой, только в этом состоянии значение ее импульса будет соответственно весьма неопределенным.

В основе же новой теории, по моему мнению, будет лежать принципиальное ограничение возможной точности значения координаты, взятой самой по себе, вне зависимости от импульса, а также, возможно, и точности значения импульса тоже самого по себе.

Конечно, я вполне понимаю, что это только догадка, и хотя я мог бы привести ряд доводов в пользу нее, но шанс правильно угадать новое, очевидно, ничтожен.

Я говорю обо всем этом в статье, посвященной элементарным частицам, потому, что принципиальный предел точности измерений должен в первую очередь проявиться именно при исследовании элементарных частиц высоких энергий, их свойств и взаимодействий, их взаимных превращений. Представляется вероятным, что те основные проблемы теории элементарных частиц, о которых говорилось выше, могут быть разрешены только на основе новой физической теории.

Существует довольно много, правда большей частью весьма предварительных, попыток пересмотра наших пространственно-временных представлений. Так, например, ряд физиков (в частности, Снайдер, 1947; Койш, 1959; Кадышевский, 1961) считает, что в ультрамалых масштабах пространство окажется не непрерывным, как мы всегда его себе представляем, а дискретным, т. е. состоящим из отдельных, четко разграниченных точек. Я по-

нимаю, что такого рода предположение должно на первый взгляд представляться нелепым, но пояснить его за недостатком места не могу.

Довольно долгое время я увлекался этим направлением исследования, но в настоящее время я склоняюсь к мысли, что решение вопроса будет найдено на другом пути, о котором я кратко расскажу.

### Дисперсионные соотношения и теория $S$ -матрицы

То направление, которое в настоящее время доминирует в теоретической физике, — это исследование так называемых дисперсионных соотношений. Оно основано на исследовании математических свойств различных функций, описывающих физические явления, при продолжении этих функций в комплексную область. Это значит, что хотя физический смысл имеют только вещественные (а не мнимые) значения таких величин, как энергия или скорость частицы, тем не менее анализируется поведение частиц при (конечно, никогда в действительности не реализуемых) комплексных значениях этих величин. На этом пути получены очень ценные результаты, относящиеся непосредственно к реальным процессам.

Однако в оценке перспектив дисперсионной теории мнения физиков расходятся и сейчас. В последние 3—4 года Л. Д. Ландау был одним из наиболее ярких проводников идеи, что на основе аппарата дисперсионных соотношений может возникнуть новая фундаментальная физическая теория. Я же вместе с рядом других теоретиков считал, что дисперсионная теория носит в значительной мере феноменологический характер, что каждый ее шаг требует введения в нее все новых параметров, значения которых не предсказываются теорией, а берутся из опыта, и что поэтому ее несомненные успехи отнюдь не решают основной задачи — создания новой, последовательной, внутренне замкнутой физической теории, базирующейся на ограниченном числе общих принципов и постулатов.

Однако в 1961—начале 1962 г. появился ряд очень важных работ, весьма существенно подкрепивших концепцию Л. Д. Ландау. Эти успехи связаны в первую очередь с именами И. Я. Померанчука и В. Н. Грибова в нашей стране и с именами Редже, Чью, Гелл-Манна и другими за рубежом.

Я не имею возможности излагать те новые (очень сложные в математическом отношении) методы и новые результаты, которые пробудили надежду, что, наконец, найден правильный путь, который, как можно рассчитывать, приведет физику к желанной цели. Ограничусь только самыми общими замечаниями<sup>13</sup>.

<sup>13</sup> В 1962—начале 1963 г. произошли драматические события: сначала некоторые парадоксальные предсказания этой теории (о рассеянии быстрых

Переход от классической физики к квантовой был связан с уяснением того факта, что хотя и можно наблюдать траекторию движения быстрого свободного электрона (например, в камере Вильсона), однако самое понятие траектории электрона теряет смысл при рассмотрении электронов, находящихся в электронной оболочке атомов (как известно, это связано с наличием у электрона наряду с корпускулярными свойствами также и волновых свойств).

Подобно тому как квантовая теория ограничила применимость понятия классической траектории частиц, так находящаяся в стадии становления новая теория базируется на предположении, что и представления современной квантовой теории (в частности, описание явлений с помощью так называемых волновых функций и операторов) не применимы к соударениям и взаимодействиям частиц очень высоких энергий. Точнее говоря, предполагается, что детали поведения частиц при их сближении до очень малых расстояний принципиально не наблюдаемы. Единственно с чем должна оперировать теория взаимодействия частиц больших энергий — это так называемая  $S$ -матрица, определяющая вероятность того или иного результата соударения частиц, т. е. позволяющая вычислить вероятность того, какие именно частицы, с какими энергиями и направлениями движения возникнут в результате соударения частиц заданной начальной энергии и с заданными направлениями движения. При этом структура  $S$ -матрицы в существенной мере определяется требованиями, вытекающими из дисперсионных соотношений.

Несмотря на несомненную обоснованность оптимистических надежд, связанных с развитием новой теории, эта теория находится еще в начальной стадии развития и, что важнее всего, в ней еще пока не сделано главное — не найдена система тех общих принципов (подобных аксиомам Ньютона в классической механике или уравнениям Максвелла в электродинамике), из которых однозначно вытекают бы все положения теории.

Нельзя предсказать, когда и как будет создана новая последовательная физическая теория, включающая в себя в качестве частных случаев и квантовую теорию и классическую физику. Но тот факт, что громадная армия экспериментаторов и теоретиков во всем мире работает на этом передовом для физики фронте, позволяет надеяться, что это время не за горами.

---

протонов под малыми углами) были подтверждены на опыте, а затем выяснилось, что в других процессах (рассеянии  $\pi$ -мезонов на протонах) предсказания теории не подтверждаются. Как бы дальше ни развивались события, но даже установление противоречия между теоретическими предсказаниями и экспериментом (которых, как я говорил в начале статьи, нам так долго не хватало) оказывает все же плодотворное влияние на развитие теории, указывает путь дальнейших поисков — ведь, например, теория относительности возникла на основе анализа противоречия между результатами опыта Майкельсона и предсказаниями классической теории.

## ХАРАКТЕРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ТВОРЧЕСТВА ЛЕОНИДА ИСААКОВИЧА МАНДЕЛЬШТАМА <sup>1</sup>

Пятого мая этого (1964) года исполнилось 85 лет со дня рождения Леонида Исааковича Мандельштама, а сегодня, 27 ноября, — 20 лет со дня его смерти.

Леонид Исаакович внес непреходящий творческий вклад в развитие физики и оказал огромное влияние на ее развитие в нашей стране. Обладая исключительным педагогическим дарованием, он уделял очень много труда и времени преподавательской деятельности. Он создал блестящую школу советских физиков: достаточно из числа его учеников упомянуть А. А. Андронova, Г. С. Ландсберга, М. А. Леонтовича, С. М. Рытова, С. Э. Хайкина; я тоже горжусь тем, что был его учеником.

Из истории науки мы знаем, что по ряду привходящих обстоятельств некоторые ученые приобретают известность, превышающую их истинные заслуги, другие же, наоборот, недооцениваются современниками и потомством. Несмотря на то, что имя Леонида Исааковича пользуется широкой известностью, все же несомненно, что значимость его творчества не получила адекватного признания. Одной из причин этого была его необычайная скромность и самокритичность. Приведу в качестве иллюстрации один пример.

В последние годы перед смертью Н. Бор неоднократно подчеркивал в своих статьях и устных докладах, какую важную роль для развития основ квантовой механики сыграло критическое отношение к ней Эйнштейна. На протяжении многих лет Эйнштейн периодически публиковал статьи, в которых пытался опровергнуть принципы квантовой механики на основе анализа «мысленных экспериментов», приводивших, по его мнению, к парадоксам. Столь же регулярно Н. Бор публиковал ответные статьи, в которых эти парадоксы опровергались и разъяснялись. Конечно, для этого требовался очень глубокий анализ и проникновение в сущность явлений, что и способствовало в существенной мере прояснению основ квантовой механики. Но никому, кроме ближайших учеников Леонида Исааковича, не известно, что он сам сразу же проводил анализ и находил опровержение каждой очередной критической статьи Эйнштейна. Когда мы просили его опубликовать свои соображения, он всегда отказывался на том основании, что, мол, Эйнштейн такой великий человек, что, наверное, знает что-то,

<sup>1</sup> УФН, 1965, 87, вып. 1, 3. Вступительное слово на заседании Ученого совета Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР 27 ноября 1964 г.

чего он сам, Леонид Исаакович, не знает. Проходило несколько месяцев, появлялась ответная статья Н. Бора, и всегда оказывалось, что ее доводы совпадали с соображениями Леонида Исааковича.

Из весьма многостороннего творчества Леонида Исааковича можно выделить несколько основных направлений — оптику, радиофизику, теорию нелинейных колебаний и, в последний период деятельности, квантовую механику. Я коснусь вкратце только двух из этих направлений.

Многообразные явления, связанные с рассеянием света, всю жизнь привлекали внимание Леонида Исааковича. Уже в своей профессорской диссертации 1907 г. он вскрыл ошибочность господствовавших в то время теорий Планка и Рэлея, согласно которым рассеяние света в средах может обуславливаться просто их молекулярной структурой, и показал как теоретически, так и экспериментально, что однородные среды света не рассеивают и что рассеяние обуславливается неоднородностью среды. Последующие работы М. Смолуховского, А. Эйнштейна и самого Леонида Исааковича показали, что эти неоднородности обуславливаются статистическими флуктуациями плотности среды.

В процессе этих исследований Леонид Исаакович предсказал, что при рассеянии света упругой средой должно наблюдаться расщепление длины волны рассеянного света, обусловленное своеобразным доплер-эффектом: ведь свет рассеивается на тепловых упругих волнах в среде, движущихся со скоростью звука. Некоторое указание на это явление заключалось в более ранней работе Бриллюэна, почему оно и получило наименование дублета Бриллюэна — Мандельштама. В частности, Леонид Исаакович рассчитал зависимость смещения частоты света от угла его рассеяния и в середине 20-х годов совместно с Г. С. Ландсбергом поставил эксперименты для обнаружения этого эффекта. В ходе этих исследований оба ученых сделали замечательное открытие — открытие комбинационного рассеяния света. Оно дает гораздо большее смещение частоты рассеянного света, чем доплер-эффект, и обусловлено наложением на частоту света частоты изменения показателя преломления среды, вызванного ее упругими тепловыми колебаниями. На квантовом языке это означает, что при своем рассеянии фотон может либо поглотить, либо испустить фотон, т. е. квант, соответствующий упругим волнам в среде.

Комбинационное рассеяние имеет очень широкий круг применений, но Нобелевская премия за открытие этого явления, к сожалению, была присуждена не Л. И. Мандельштаму и Г. С. Ландсбергу, а индусскому физика Раману. Объясняется это, по-видимому, главным образом политическими соображениями, отчасти же необычайной самокритичностью Леонида Исааковича и Г. С. Ландсберга. Явление было открыто ими в конце 1927 г., однако они многократно его перепроверяли, добились высокой точности измерений и опубликовали первое сообщение только весной 1928 г.,

когда они смогли дать в этом сообщении и точную, подтвержденную измерениями теорию нового явления. У Рамана же к этому времени было опубликовано несколько очень коротких сообщений, содержащих качественное указание на аналогичное явление, открытое им в жидкостях (Л. И. и Г. С. экспериментировали на кристаллах), к тому же содержащих неправильную его интерпретацию.

Заметим, что и дублет Бриллюэна—Мандельштама, поиски которого привели к описанному открытию, также был экспериментально обнаружен. В Московском университете, где в то время работал Леонид Исаакович, тогда не было достаточно хорошей оптической аппаратуры, и он предложил проф. Д. С. Рождественскому в Ленинграде, в распоряжении которого такая аппаратура была, провести соответствующие измерения. Рождественский поручил их своему ученику Е. Ф. Гроссу, который поставил эксперимент и впервые обнаружил искомое расщепление линий в рассеянном свете. В предстоящем сегодня докладе И. Л. Фабелинского<sup>2</sup> будут продемонстрированы сделанные с помощью лазера снимки дублета Мандельштама—Бриллюэна, отличающиеся поразительной четкостью. Докладчик расскажет и о том, как по измерениям этого дублета можно определять вязкость среды и дисперсию звука в ней. Все это — дальнейшее развитие идей Леонида Исааковича.

Хотя Леониду Исааковичу принадлежат основополагающие работы по теории нелинейных колебаний, а также очень важные работы по радиофизике, выполненные частично совместно с Н. Д. Папалекси, я не буду их касаться, так как у меня нет достаточной компетентности в этой области, а перейду сразу к квантовой теории.

Боровская теория атомов, носившая в значительной мере феноменологический характер, была по своему духу чужда Леониду Исааковичу, и он специально ею не занимался. Но уже через 1,5—2 года после появления первой работы Шредингера по «волновой механике» Леонид Исаакович опубликовал совместно с М. А. Леонтовичем очень важную работу, посвященную уравнению Шредингера. Очень характерна для Леонида Исааковича общность и глубина постановки проблемы, которая привела его к этой работе. Известно, что в квантовой механике возможные состояния элементарной частицы, например электрона, определяются граничными условиями, наложенными на волновую функцию, например, требованием, чтобы на бесконечности эта волновая функция оставалась конечной. Леонид Исаакович сразу обратил внимание на то, что это требование нуждается в дополнительном анализе и уточнении; при этом он исходил из того соображения, что изменение условий, например, на Марсе не может влиять на поведение электрона в оболочке атома, находящегося на Земле. В ходе этого анализа Леонидом Исааковичем и М. А. Леонтовичем была впервые

<sup>2</sup> См. УФН, 1965, 87, 9.



развита теория того явления, которое в настоящее время широко известно под названием «прохождение частицы через потенциальный барьер». В дальнейшем Г. Гамову понадобилось только приложить эту теорию к конкретному физическому явлению радиоактивного  $\alpha$ -распада, чтобы получить свои результаты, ставшие классическими.

Внимание Леонида Исааковича в квантовой теории, как и в других разделах физики, всегда привлекали наиболее глубокие, принципиальные проблемы. Я уже упоминал о его — параллельных с Н. Бором, но оставшихся неопубликованными — работах по анализу и опровержению парадоксов, выдвигавшихся Эйнштейном с целью опровержения основ квантовой механики. Сейчас я хочу обратиться к его заключительным лекциям по основам квантовой механики, читанным им в 1939 г., полностью сохранившим свое значение и в настоящее время.

Замечу попутно, что в конце 30-х и в начале 40-х годов Леонид Исаакович прочел в Московском университете несколько циклов лекций, не входивших в учебный план университета, очень широко посещавшихся не только студентами и аспирантами, но и всеми преподавателями физики университета и многих московских вузов. Эти лекции были посвящены избранным принципиальным проблемам оптики, теории колебаний, теории относительности и квантовой механики. Все они отличались чрезвычайной ясностью, четкостью и глубиной. Я уверен, что было бы весьма полезно их переиздать, они помещены в полном собрании трудов Леонида Исааковича и давно уже стали библиографической редкостью.

Я коснусь здесь только его лекций по основам квантовой механики, носивших характерное название «Теория косвенных измерений», в которых он в значительной мере предвосхитил дальнейшие этапы развития квантовой теории. Леонид Исаакович исходил из того, что физические величины, с которыми оперирует теория, имеют смысл только при условии, если указаны вполне определенные рецепты измерения их на опыте. Для макротел это измерение реализуется просто; например, координата  $x$  тела может быть измерена линейкой, принятой в качестве масштаба. «Поскольку, однако, речь идет о молекулярных вопросах, — говорил Леонид Исаакович, — такие рецепты невыполнимы принципиально, а не только практически. . . Поэтому, назвав  $x$  координатой, я не установил связи с природой, я только сделал вид, что установил эту связь, сославшись на макромир. С такими «определениями» теория еще висит в воздухе. Правильнее было бы даже и называть  $x$  не координатой, а например, квазикоординатой»<sup>3</sup>. Далее Леонид Исаакович подчеркивает, что последнее звено необходимых нам измерительных рецептов обязательно макроскопическое и что поэтому прямые измерения возможны лишь для

---

<sup>3</sup> Л. И. Мандельштам. Полное собрание трудов, т. 5. М., Изд-во АН СССР, 1950, стр. 354—355.

свободных или почти свободных частиц в слабых полях. Для исследования же связанных или взаимодействующих частиц необходимы косвенные измерения. «Принцип косвенного измерения состоит в том, что данную систему, в которой мы хотим измерить величину  $A$ , мы заставляем взаимодействовать с другой микросистемой, для которой уже возможно прямое измерение, и потом теоретически заключаем о значении  $A$ »<sup>4</sup>. При этом волновая механика оперирует с  $\psi$ -функциями, определяющими относительные вероятности тех или иных величин, характеризующих данную систему. Но говорить о вероятностях можно только в применении к совокупности или «коллективу», который должным образом определен или выделен. «Мы подошли к тому, — говорил Леонид Исаакович, — что я считаю наиболее существенным и важным. А именно, волновая механика утверждает, что для определения микромеханического коллектива, к которому и относится  $\psi$ -функция, достаточно указать (фиксировать) макроскопические параметры»<sup>5</sup>.

Я вкратце изложил содержание только вводных лекций из цикла, прочитанного Леонидом Исааковичем, но уже из приведенного, как мне кажется, можно видеть, насколько полно он предвосхитил последующие этапы развития теории. Так, в его идеях была предвосхищена развитая спустя 20 лет теория  $S$ -матрицы (т. е. матрицы рассеяния); эта теория утверждает, что при исследовании акта соударения элементарных частиц физическая теория должна ограничиваться описанием только реально наблюдаемых явлений, т. е. связи параметров, характеризующих свободные соударяющиеся частицы, с параметрами свободных частиц, разлетающихся после акта соударения, вовсе не входя в детальное пространственно-временное описание самого этого акта в малом. Столь же близки идеи Леонида Исааковича и к последующим теориям, исходящим из принципиальной неопределенности координат элементарных частиц в ультрамалых масштабах, отражающейся в некоммутативности операторов координат.

Я отнюдь не ставил перед собой задачи хотя бы в самых общих чертах обозреть вклад Леонида Исааковича в науку. Я хотел только на нескольких примерах проиллюстрировать характерные особенности его творчества.

Заканчивая, я не могу не коснуться личных свойств Леонида Исааковича. К сожалению, все меньше остается людей, лично его знавших, ощущавших неотразимое обаяние его личности, его необыкновенно внимательное отношение к ученикам, всячески поощрявшее их личную инициативу, его человеческую доброту в самом высоком смысле этого слова, сочетававшуюся со строгой принципиальностью и негибкостью. Это поистине был Человек с большой буквы.

<sup>4</sup> Там же, стр. 360.

<sup>5</sup> Там же, стр. 356.

НА ПОРОГЕ НОВОЙ ТЕОРИИ <sup>1</sup>

Очень трудно вкратце рассказать о современном состоянии и перспективах физики элементарных частиц: в этой области совершаются все новые и новые открытия, иногда предсказанные, иногда совершенно неожиданные, происходит бурное возникновение новых идей, новых представлений.

Я буду говорить в основном об экспериментальных открытиях и их толковании. Но начну с того, что кратко расскажу о положении в теории.

В конце прошлого и в начале этого века было широко распространено представление о том, что мы уже познали основные законы природы и остается только применять их к новым явлениям. Даже такой крупный физик, как Кельвин, в своей речи, приуроченной к началу нашего столетия, сочувствовал последующим поколениям физиков, сказав, что на их долю не осталось ничего существенного. Правда, он проявил прозорливость, указав, что на ясном горизонте физики имеются лишь два маленьких облачка: одно — связанное с опытом Майкельсона, а другое — с равновесным тепловым излучением света. Из одного «облачка» вскоре выросла теория относительности, а из другого — квантовая теория.

На опыте этих новых революционных теорий мы поняли, что развитие науки не имеет предела. Сущность в том, что наши понятия и представления не априорны, а являются результатом анализа, квинтэссенцией человеческого опыта. Такой анализ позволяет нам создать понятия, представления, теории, адекватные известному нам кругу явлений. Но каждый раз, когда мы проникаем в существенно новую область физических явлений, будь то область очень высоких скоростей (специальная теория относительности и космология) либо микрокосм, мир атомов и элементарных частиц (квантовая теория), нам приходится кардинально менять сложившиеся понятия и представления.

Это отнюдь не означает, что предыдущие представления каждый раз отменяются. Наоборот, они остаются полностью справедливыми для той области явлений, на основе изучения которой возникли. Однако прежние теории, ранее считавшиеся универсальными, оказываются имеющими лишь определенную, ограниченную область применимости. Более того, они содержатся в качестве

<sup>1</sup> Вестник АН СССР, 1965, № 4, 30; Природа, 1965, № 6, 6; сб. «Будущее науки». М., «Знание», 1966, стр. 7; «Наука и жизнь», 1967, № 1, 7.

частного случая в более новых, более общих теориях, причем последние точно указывают область их применимости. Например, механика Ньютона останется навсегда применимой к медленно движущимся сравнительно со светом макроскопическим телам, и она вытекает в качестве частного случая как из теории относительности, так и из квантовой механики.

В последнее время у физиков становится все более явным ощущение, что мы находимся накануне фундаментальной революции в теории, которая приведет к не менее серьезному пересмотру представлений и понятий, чем это было сделано теорией относительности и квантовой теорией.

Такое убеждение основывается на двух обстоятельствах. Прежде всего, современное состояние релятивистской квантовой теории явно неудовлетворительно. В этом она резко отличается от нерелятивистской квантовой теории, в которой речь идет о не очень больших скоростях и энергиях. Нерелятивистская квантовая теория — абсолютно прозрачная, последовательная, законченная теория, которая так же незыблема в своей области применимости, как для макроскопических явлений, не связанных с большими скоростями, незыблема теория Ньютона. Но когда мы переходим к большим энергиям, к очень малым пространственным масштабам, оказывается, что современной теории уже недостаточно, что она внутренне непоследовательна.

Приведу пример. При вычислении в соответствии с релятивистской квантовой теорией любой конкретной величины, например длины волны излучения или массы частицы, получается бесконечность, т. е. абсурд. Правда, мы имеем весьма остроумный рецепт, как из бесконечности вычесть другую бесконечность, чтобы оставшаяся конечная разность их точно соответствовала эксперименту. И в ряде случаев действительно получается прекрасное согласие с измерениями — с точностью до пяти знаков. Но, во-первых, это не универсальный способ — есть случаи, когда такие методы неприменимы, а во-вторых, в теорию приходится вводить принципиально ненаблюдаемые величины и притом так, чтобы они не входили в конечный результат. Совершенно необходимо построение новой последовательной теории, свободной от этих недостатков.

Ряд обстоятельств приводит к убеждению, разделяемому, по видимому, большинством физиков, в частности мною, что на новом этапе квантовой теории существенную роль будет играть расширенный принцип неопределенности. Современная квантовая механика основана на принципе неопределенности между координатой и импульсом частицы, т. е. произведением ее массы на скорость. Часто этот принцип формулируют так: хотя порознь координату и импульс частицы можно измерить сколь угодно точно, но одновременно этого сделать нельзя. Вернее, суть не только в измерении — сама частица не может находиться в состоянии, в котором и ее координаты и ее импульс имели бы точно определенные

Значения. Таким образом, дело не в ограниченности нашего познания, а в том, что классические понятия — частица, волна — слишком узки, что элементарная частица более богата содержанием. Нет классического объекта, который одновременно обладал бы свойствами и частицы и волны, а элементарная частица одновременно обладает этими свойствами. И естественно, что обычные наши представления к ней неприменимы.

Так обстоит дело в существующей квантовой теории. Есть все основания думать, что на новом этапе теории станет неопределенным самое понятие координат частицы. Другими словами, точное одновременное определение всех трех координат положения частицы окажется принципиально невозможным, и наши обычные пространственные представления станут неприменимы в области ультрамалых масштабов.

Вопрос о построении новой теории крайне актуален. В каком направлении пойдет ее развитие — пока совершенно неизвестно, поскольку выдвигается и исследуется очень много различных идей. У каждого работающего в этой области есть своя излюбленная дорожка. Я сам последние полтора года запоем работаю над увлекшей меня идеей, работаю с переменным успехом. Может случиться и так (это бывало в истории науки), что направления, которые кажутся сейчас резко различными, синтезируются впоследствии в единую общую картину. Мы не знаем, когда это произойдет, но, повторяю, необходимость в создании такой теории назрела. Я не согласен с американским теоретиком Дайсоном, который сравнительно недавно высказал предположение, что это произойдет только в следующем, XXI столетии. Трудности построения новой теории, которая должна включить в себя как частный случай все, что нам известно до сих пор, очевидны. Тем не менее Дайсон не учитывает экспоненциального роста науки в наше время, не учитывает, что все большее количество людей занимается физикой. Эйнштейн — редкая флуктуация, но на фоне чрезвычайно возросшего сейчас числа специалистов появление нового гения становится гораздо более вероятным.

Перейду теперь к экспериментальным открытиям в физике элементарных частиц. Прежде всего, краткое историческое введение.

Когда я начинал заниматься физикой, было известно всего два элементарных кирпича мироздания — электрон и протон, из которых, как считали, построены все тела, и только два вида сил — силы тяготения и электромагнитные, на основе которых объяснялись все явления природы. Просто, ясно и хорошо. Но скоро эта простая картина начала нарушаться. С начала 30-х годов стал быстро расти поток открытий так называемых элементарных частиц. Достаточно сказать, что за последние пять лет число их выросло с 32 примерно до 200, и, без сомнения, эта цифра будет быстро увеличиваться.

Таким образом, перед нами раскрывается совершенно новый мир, требующий изучения. При этом весьма существенно, что почти

каждое открытие новой частицы было связано с открытием принципиально нового круга физических явлений.

Первыми были найдены нейтрон и позитрон. Позитрон — античастица по отношению к электрону: он во всем подобен ему, за исключением того, что обладает положительным, а не отрицательным электрическим зарядом. При соударении электрона с позитроном (как и при соударении любой частицы с соответствующей ей античастицей) может произойти их аннигиляция, т. е. исчезновение частиц, причем их энергия превращается в другие формы, например в излучение.

Предсказание о существовании позитрона вытекало из теории Дирака. Сейчас такие понятия, как античастица, антивещество, аннигиляция, широко известны, но в те времена предположение о существовании античастиц представлялось столь парадоксальным, что, как одно время считал сам Дирак, этот вывод из его теории указывал на ее несостоятельность. Но позитрон был экспериментально обнаружен, и его свойства оказались в полном соответствии с предсказаниями теории.

Тогда же, в начале 30-х годов, было открыто кажущееся нарушение закона сохранения энергии в радиоактивном распаде, и некоторые физики, исходя из этого факта, пытались перестроить теорию. Но вскоре выяснилось, что закон сохранения энергии не нарушается, а попросту часть энергии уносит излучаемая при радиоактивном распаде ранее неизвестная элементарная частица — нейтрино.

Надо сказать, что обнаружить и исследовать нейтрино чрезвычайно трудно, поскольку оно крайне слабо взаимодействует с другими частицами. Можно привести такой пример. Даже если нейтрино, обладающее максимальной энергией, которая может быть получена с помощью современных ускорителей, пройдет сквозь всю толщу Земли, то вероятность того, что оно хотя бы один раз прореагирует по пути с какой-либо частицей, равняется всего  $1/250\ 000$ . Следовательно, для того, чтобы заведомо произошло поглощение такого нейтрино, нужно сделать экран, состоящий из четверти миллиона земных шаров, поставленных друг за другом.

Года три назад было сделано еще одно очень интересное открытие: оказалось, что существуют два различных вида нейтрино. Один вид взаимодействует только с электроном, а другой — только с  $\mu$ -мезоном. Для того чтобы это обнаружить, пришлось построить очень сложные, точные аппараты — искровые камеры весом 25 т.

Сейчас нейтринная физика приобретает все большее значение в астрономии. Во-первых, есть основания думать, что значительная часть всей массы и энергии Вселенной находится в состоянии нейтрино, ибо нейтрино, раз возникнув, очень долго путешествует по Вселенной, прежде чем будет поглощено и перейдет в другую форму энергии. Во-вторых, изучение нейтрино может дать нам

информацию о явлениях, происходящих внутри Солнца и других звезд: при ядерных реакциях, служащих источником энергии звезд и происходящих в их глубинах, излучаются нейтрино, которые благодаря своей громадной проникающей способности, почти не поглощаясь, проходят сквозь толщу Солнца или звезды наружу и несут с собой информацию о характере породивших их реакций.

В тот же период — 30-е годы — были открыты и мезоны — «промежуточные» частицы, более легкие, чем протон, но более тяжелые, чем электрон. При этом произошла драматическая история. Дело в том, что мезон был теоретически предсказан японским физиком Юкавой в 1935 г. как частица, которая связана с взаимодействием ядерных частиц в таком же смысле, в каком фотон связан с взаимодействием электрически заряженных частиц. В 1937 г. была действительно открыта частица с массой, соответствующей оценкам Юкавы. Казалось, теория торжествовала. Но вскоре возникло недоумение, так как обнаруженные в космических лучах мезоны очень слабо взаимодействовали с ядрами атомов, что противоречило исходным положениям теории. Это был парадокс, который всячески пытались объяснить. В конце концов оказалось, что в 1937 г. был действительно открыт мезон, но не тот. Этот мезон, получивший название  $\mu$ -мезона, не имеет отношения к ядерному взаимодействию. И только в 1947 г. был обнаружен так называемый  $\pi$ -мезон, свойства которого действительно соответствуют предсказаниям теории. Затем последовал цикл новых открытий и неожиданностей, на которых я не могу останавливаться.

В 1956 г. было обнаружено несохранение четности. Смысл этого малопонятного выражения в следующем. Всегда казалось очевидным, что отличие между «правым» и «левым» — чисто условное, пояснить его можно, только сославшись на собственные руки, никакого объективного значения оно не имеет. И если наблюдать движение тел в зеркале, то переход от «правого» к «левому» ничего в законах движения не изменит. Но неожиданно оказалось, что это не так. Например, электрон, который всегда вращается вокруг собственной оси (спин-вращение), при  $\beta$ -распаде, т. е. при радиоактивном распаде атомного ядра, вылетает из ядра всегда в таком состоянии, что ось его вращения противоположна направлению его движения. Это значит, что если смотреть на излученный при  $\beta$ -распаде электрон по направлению его движения, то он всегда вращается справа налево. Это открытие вызвало ряд парадоксальных предположений, пока Л. Д. Ландау не предложил свою известную гипотезу комбинированной инверсии, сводящуюся к тому, что различие между правым и левым связано с различием между миром, состоящим из обычных элементарных частиц, и антимиром, состоящим из античастиц.

Различие между левым и правым чисто условно (ведь левое можно назвать правым и наоборот), и так же условно различие между миром и антимиром. Электрону с отрицательным электри-



И. Е. ТАММ  
(60-е годы)



ческим зарядом соответствует в антимире античастица — позитрон с положительным зарядом, но ведь различие между положительными и отрицательными зарядами тоже условно, и их можно переименовать. Гипотеза комбинированной инверсии сводится к утверждению, что все законы природы остаются неизменными, если перейти не просто к зеркальному изображению (при котором правое и левое взаимозаменяются) или к антимиру, но одновременно от правого к левому и от вещества к антивеществу.

Результаты экспериментального изучения свойств различных античастиц оказались в полном соответствии с гипотезой комбинированной инверсии. Правда, в прошлом году были получены новые данные, подвергающие ее сомнению. Эксперименты эти тонкие и требуют дальнейшей проверки. В связи с ними сейчас в литературе появился целый поток самых разнообразных предположений и соображений, авторы которых пытаются теоретически осмыслить полученные результаты вплоть до предположения о существовании так называемого пятого взаимодействия, т. е. исключительно слабых сил, создаваемых галактиками за счет имеющих в них «странных» частиц. По-видимому, самые последние экспериментальные данные (еще не опубликованные) опровергают некоторые следствия, вытекающие из предположения о существовании таких сил. Но за короткое время появилось очень много различных гипотез, и невозможно предвидеть, какая из них в конечном свете окажется правильной.

Я позволю себе высказать по этому поводу свое личное мнение. Естественно, сейчас сопоставляют возможное нарушение комбинированной инверсии, чаще называемой физиками *CP*-четностью, с тем нарушением четности, о котором я говорил выше и которое, несомненно, имеет место. Может быть, нарушение *CP*-четности и является фундаментальным фактом. Но я лично склонен думать, что такое нарушение правильнее сопоставить с обнаруженным около 35 лет назад и опровергнутым впоследствии нарушением закона сохранения энергии при радиоактивном  $\beta$ -распаде, о котором я уже упоминал. В конце концов выяснилось, что энергия сохраняется, но при  $\beta$ -распаде излучается нейтрино — ранее неизвестная частица. Возможно, что и закон комбинированной инверсии в конечном счете окажется неизбежным.

Надо отметить, что и это предполагаемое нарушение *CP*-четности, так же как и несомненно имеющее место несохранение обычной четности, проявляется только в так называемых слабых взаимодействиях. Дело в том, что сейчас, помимо тех сил, которые были известны давно, — сил тяготения и электромагнитных, — нам стали известны два принципиально новых класса сил. Одни из них — так называемые сильные взаимодействия. Это, в частности, те ядерные силы, которые удерживают нейтроны и протоны в атомном ядре. При малых расстояниях они в сотни раз сильнее, чем электромагнитные, и не были обнаружены вплоть до недавних лет просто потому, что очень быстро (экспоненциально) уменьша-

ются при увеличении расстояния между взаимодействующими частями.

Другой класс — слабые взаимодействия. Они примерно в  $10^{14}$  раз слабее сильных. Эти взаимодействия обуславливают явления распада частиц, прежде всего радиоактивный распад атомных ядер и элементарных частиц.

Замечу мимоходом, что, по некоторым предположениям, так называемые слабые взаимодействия могут играть фундаментальную роль и лежат в основе вообще всех физических взаимодействий. Эти предположения связаны с тем, что обычные рецепты устранения бесконечностей из современной квантовой теории к слабым взаимодействиям неприменимы. Однако пока это только предположения. Во всяком случае, несохранение четности, т. е. неравноправие «правого» и «левого», имеет место только при слабых взаимодействиях. В электромагнитных и сильных взаимодействиях, а также в явлениях, связанных с тяготением, это равноправие никогда не нарушается.

Другое нарушение, характерное только для слабых взаимодействий, — нарушение так называемой странности. Дело в том, что в физику пришлось ввести новое понятие — «странность частицы». Это было связано с наблюдениями рождения элементарных частиц. Оказалось, что некоторые сорта частиц никогда не рождаются поодиночке, а всегда парами. Это аналогично тому, что благодаря закону сохранения электрического заряда в акте соударения не может никогда родиться одна заряженная частица: всегда положительно заряженная частица рождается совместно с отрицательно заряженной, так что суммарный электрический заряд остается неизменным. По аналогии с этим и было введено новое квантовое число — странность. Те частицы, которые рождаются парами, обладают отличной от нуля странностью; частица со странностью  $+1$  рождается совместно с частицей со странностью  $-1$ , так что суммарная странность частиц остается неизменной. Это сохранение странности имеет место при всех взаимодействиях, кроме слабых, в которых нарушаются и четность и странность.

Приведенные примеры показывают, как в последнее время открытие почти каждой новой элементарной частицы влекло за собой выявление новых фундаментальных законов природы. Напомню еще раз, что число известных элементарных частиц растет чрезвычайно быстро. Очевидно, в связи с этим само понятие «элементарность» потеряло свой первоначальный смысл. Сейчас мы не можем отличить истинно элементарных частиц от составных. Поэтому я старался пореже употреблять слово «элементарные», так как неизвестно, что именно элементарно. Пока еще нельзя указать определенного критерия элементарности частицы. Казалось бы естественным выделить устойчивые, стабильные частицы, которые могут превращаться в другие частицы только при соударениях, а все самораспадающиеся, нестабильные частицы считать неэлементарными. Однако стабильных частиц очень мало — всего

четыре вида, и из них никак нельзя построить все другие частицы.

Дело в том, что стабильными являются лишь те частицы, которые по законам сохранения не могут распасться на более легкие. Стабильных частиц, обладающих массой покоя, только две — протон и электрон. Электрон не может распасться потому, что это легчайшая из всех частиц, обладающая электрическим зарядом, и она не может превратиться в другие частицы без нарушения законов сохранения энергии и заряда. Подобно этому, протон — легчайшая из частиц, обладающих так называемым ядерным, или барионным, зарядом. Как электрическим зарядом определяются электрические силы взаимодействия частиц, так ядерным зарядом определяются ядерные силы. И поскольку существует закон сохранения ядерного заряда, протон не может распасться. Кроме протона и электрона, стабильны фотон и два вида нейтрино, у которых масса покоя равна нулю, поэтому ни на что более легкое они распасться не могут.

Все остальные частицы нестабильны, они самопроизвольно распадаются. Но считать, что они построены из тех частиц, на которые могут распасться, т. е. что возникающие при их распаде частицы в них предсуществуют, — невозможно. В ряде случаев эти вновь рожденные частицы безусловно возникают в самом акте распада. Достаточно отметить, что многие виды частиц могут распадаться не каким-либо одним определенным образом, а по-разному. Например, при распаде заряженного  $\pi$ -мезона может родиться либо  $\mu$ -мезон вместе с нейтрино, либо нейтральный  $\pi$ -мезон вместе с позитроном и нейтрино, причем нейтральный  $\pi$ -мезон сам в дальнейшем распадается на два  $\gamma$ -кванта. Какие же из этих частиц предсуществовали в  $\pi$ -мезоне?

Можно провести некоторую аналогию между рождением новых частиц в акте распада нестабильной частицы и, например, рождением фотонов, излучаемых электроном при соударении его с другими частицами или при отклонении его магнитным полем.

Мы уже привыкли к тому, что элементарные частицы в большинстве своем нестабильны, но еще более малым временем жизни отличаются частицы нового класса, впервые открытые в конце 1960 г. и получившие название резонансов.

Действительно, те нестабильные частицы, которые были известны раньше, имеют разные времена жизни, начиная от 17 мин для свободного нейтрона и до  $10^{-16}$  сек для нейтрального  $\pi$ -мезона. Но так называемые резонансы обладают гораздо меньшими временами жизни — порядка  $10^{-23}$  сек. Однако даже за такое малое время жизни можно не только экспериментально обнаружить резонансы, но и изучить некоторые их свойства. Вместе с тем, несмотря на резкую разницу во времени жизни, не удается найти никакого принципа, который позволил бы отличать элементарные частицы от неэлементарных на этой основе.

В последнее время, особенно в минувшем году, чрезвычайно широко стало развиваться новое направление — так называемое изучение симметрий частиц, которое пытается внести порядок в открывшийся перед нами мир частиц, найти в нем закономерности. Основываются эти исследования на применении методов математической теории групп.

Не входя в детали, очень коротко расскажу, в чем тут дело.

В этих исследованиях изучается не движение частиц в пространстве, а их, так сказать, внутренние свойства, например заряд, масса и т.п. При этом рассматриваются только сильно взаимодействующие частицы, т. е. все вновь обнаруженные частицы, за исключением второго вида нейтрино.

Эти частицы могут быть электрически заряженными или незаряженными, они могут обладать или не обладать ядерным (или барионным) зарядом, обуславливающим ядерное взаимодействие, они могут обладать или не обладать странностью, о которой я упоминал выше. Кроме того, существенное значение имеет так называемый изотопический спин частицы. Каким же образом применяется понятие симметрии к свойствам частиц? Чтобы пояснить это, я обращаюсь к другим, хорошо известным свойствам симметрии частиц, относящимся не к изотопическому, а к обычному, или так называемому угловому, спину.

Сначала об орбитальном моменте. Наглядно (правда, крайне упрощенно) можно представить, что электрон, например в атоме водорода, движется по определенной круговой или эллиптической орбите. В отсутствие внешних полей ориентация орбиты электрона, т. е. направление оси его вращения, конечно, совершенно произвольна. При наличии же внешнего магнитного поля направление оси вращения электрона, движущегося по данной орбите, зависит от ориентации оси орбиты относительно магнитного поля. По законам квантовой механики ось вращения может быть направлена только под некоторыми, точно фиксированными углами к магнитному полю. Например, когда орбитальный момент вращения электрона равен 1 (если его выразить в некоторых рациональных единицах измерения), то возможны только три ориентации оси вращения: по полю, противоположно направлению поля и перпендикулярно полю. Если момент вращения равен 2, то возможны пять различных ориентаций и т. д. Поскольку энергия электрона зависит от угла между направлением оси его вращения и направлением магнитного поля, то в результате энергетический уровень электрона расщепляется на несколько близких уровней, число которых равно числу возможных направлений оси вращения. Этим и объясняется эффект Зеемана — расщепление в магнитных полях спектральных линий света, излучаемого атомами и молекулами.

Аналогичное расщепление уровней связано и со спином электрона. Наглядно спин можно себе представить как вращение частицы вокруг некоторой оси, проходящей через ее центр (по-

добно суточному вращению Земли). Спином обладают многие элементарные частицы — электрон, протон, нейтрон и т. д. Существенно, что величина спина, т. е. момент внутреннего вращения (или, грубо говоря, скорость этого вращения), имеет строго определенное и неизменное значение для каждого сорта частиц.

Подобно моменту орбитального движения, спин электрона также может быть ориентирован по отношению к внешнему полю только строго определенным образом, а именно — либо по полю, либо противоположно ему. Так как энергия электрона зависит от ориентации его спина по отношению к внешнему магнитному полю, то в магнитном поле каждый энергетический уровень электрона соответственно расщепляется на два близких уровня.

Для дальнейшего существенно, что расщепление энергетического уровня на систему близких друг к другу подуровней (так называемое расщепление мультиплетов) не только происходит под воздействием внешних полей, но может обуславливаться и некоторыми типами взаимодействия частиц. Например, так называемое спин-орбитальное взаимодействие электрона и протона в атоме водорода, которое очень слабо и в первом приближении не учитывается теорией, приводит к так называемой сверхтонкой структуре спектра водорода.

Я напомнил эти известные факты потому, что в новых теориях симметрии элементарных частиц для описания их внутреннего строения используются аналогичные методы. Упомянутый выше изотопический спин никак не связан с обычным спином, характеризующим внутреннее вращение частиц, и вообще не имеет отношения к реальному пространству — это вектор в некотором вспомогательном пространстве. Однако он подобен обычному спину в том отношении, что может быть ориентирован в изотопическом пространстве только в нескольких строго фиксированных направлениях и что внутренняя энергия частицы зависит от ориентации ее изотопического спина. Как и в случае обычного спина, это приводит к расщеплению возможных состояний частицы на систему близких друг к другу подуровней. В результате получаются мультиплеты, или группы элементарных частиц, относительно близких друг к другу по внутренней энергии (по массе), причем расщепления уровня, т. е. разницы масс частиц, входящих в один мультиплет, имеют строго определенные значения. Возможные значения других параметров, характеризующих внутреннее состояние частицы, например ее электрического и барионного зарядов, странности и т. д., систематизируются аналогичным образом и также могут быть вычислены для всех частиц, входящих в состав одного мультиплета.

Такова в самых общих чертах структура современных теорий симметрии элементарных частиц. В великом многообразии этих частиц удалось выделить ряд мультиплетов, объединяющих близкие по своим свойствам частицы, причем в некоторых случаях вычисленные значения разниц масс частиц, входящих в один

и тот же мультиплет, их электрических зарядов, магнитных моментов и т. д. оказались в прекрасном согласии с опытом.

Одну группу известных частиц удалось, например, объединить в декаплет, т. е. в мультиплет, состоящий из десяти частиц. Но было известно только девять членов этого декаплета, не хватало десятого. Были предсказаны его существование и свойства, в частности, масса его была оценена 1652 *Мэв*. И вот в прошлом году эта частица была действительно обнаружена экспериментально, причем ее масса совпала с предсказанным значением с точностью до 0,1%!

Таким образом, уже удалось внести некоторый порядок в многообразие элементарных частиц. Мы, несомненно, ухватили некоторое зерно истины. В этом направлении идет буквально лихорадочная работа, новые идеи и гипотезы возникают ежемесячно, но мы пока очень далеки от окончательного решения проблемы систематики частиц.

Я упомяну еще в качестве примера о некоторых гипотезах, предложенных в рамках применения метода групп и теории симметрии.

Год назад на всех произвела большое впечатление выдвинутая известным американским физиком Гелл-Манном и одновременно и независимо немецким физиком Цвейгом теория кварков. Что означает это слово, никто понять не мог. Оказалось, что оно заимствовано из фантастического романа Джойса. И это не случайно, так как гипотетическим подлинно элементарным частицам — кваркам приписываются довольно-таки фантастические свойства. Авторы этой теории предполагают, что каждая сильно взаимодействующая частица состоит из трех кварков, каждый из которых обладает большой массой. Благодаря очень сильному взаимодействию кварков при их соединении в частицу выделяется очень большая энергия и масса частицы оказывается меньше массы исходных кварков на величину, пропорциональную количеству выделившейся энергии. Парадоксально то, что кваркам приходится приписать дробный электрический заряд, равный одной трети или двум третям заряда электрона, и эти заряды могут быть как отрицательными, так и положительными. Дробных электрических зарядов мы никогда не наблюдали в природе — заряды любой частицы всегда составляют целое кратное заряда электрона (или протона).

Не исключено, что кварки действительно существуют. Чтобы их обнаружить, были поставлены эксперименты на ускорителях, но в пределах достижимых на них энергий ничего найти не удалось. Возможно, таких энергий недостаточно для того, чтобы раздробить известные нам частицы на составляющие их кварки.

Сейчас американские и советские ученые начинают искать кварки на поверхности Земли. Ведь наша планета подвергалась облучению космическими лучами на протяжении миллиардов лет. При этом благодаря большим энергиям космических лучей

некоторое количество известных нам частиц должно было раздробиться на кварки. Правда, обнаружить эти кварки, даже если они действительно существуют, очень трудная задача.

Хотя теория кварков позволяет объяснить ряд закономерностей в свойствах элементарных частиц, она все еще носит крайне гипотетический характер.

Существуют и другие конкурирующие с ней теории, в частности тоже постулирующие существование подлинно элементарных частиц, из которых построены все остальные, но так, чтобы отпала необходимость приписывать этим частицам дробный электрический заряд. С этой целью вводят, например, новую внутреннюю степень свободы частицы и соответствующее ей новое квантовое число, получившее название «шарм» (по-русски — «очарование», «волшебство»). В такой «очаровательной» теории элементарные частицы типа кварков обладают целыми электрическими зарядами. Однако эти теории тоже сталкиваются с рядом трудностей, которые пока не удалось преодолеть.

Упомяну еще об одном интенсивно развивающемся направлении поисков, имеющих своей целью создание теории, которая объединила бы уже достигнутые успехи в анализе закономерностей, относящихся к внутренним степеням свободы частицы, с релятивистскими законами ее движения в пространстве. Подобное объединение совершенно необходимо, поскольку существуют непосредственные связи между внутренними степенями свободы частицы и ее движением в пространстве. Они проявляются, например, в так называемом спин-орбитальном взаимодействии между спином частицы (внутренняя степень свободы) и ее движением по орбите, т. е. в пространстве.

Интересна в этом отношении работа В. Г. Кадышевского, выполненная им совместно с рядом других физиков Объединенного института ядерных исследований в Дубне. Есть интересная мысль и у члена-корреспондента АН СССР В. Л. Гинзбурга. Мы с ним еще в 1944 г. разработали релятивистскую теорию частиц, обладающих внутренними степенями свободы. Она оказалась довольно сложной, и было неясно, к чему ее приложить. А сейчас внутренние степени свободы частиц приходится увязывать с релятивистскими требованиями, и некоторые наши результаты могут оказаться полезными.

Заканчивая, я хочу отметить, что в настоящее время направление, связанное с анализом симметрии частиц и применением методов теории групп, пользуется очень большой популярностью и привлекло значительное число теоретиков. Несомненно, это очень важное и нужное направление, но оно все-таки носит феноменологический характер. Здесь, по моему мнению, можно провести аналогию с периодической системой Менделеева. Она сыграла исключительно важную роль в химии и физике, без нее их развитие было бы невозможно. Но Менделеев создал ее на основании общей систематики химических свойств атомов,

не понимая механизма, который лежит за этой систематикой. Такое понимание было достигнуто лишь полвека спустя: оно пришло с квантовой механикой, которая раскрыла строение атомов и объяснила периодичность их свойств.

Теории симметрии элементарных частиц находятся сейчас на той же стадии, что и периодическая система элементов Менделеева, когда велись ее поиски. Сегодняшние исследования отнюдь не решают фундаментальной проблемы понимания законов явлений, протекающих в ультрамалых масштабах и при экстремально высоких энергиях. Именно эти законы, несомненно, лежат в основе симметрии частиц, и они будут поняты только после преодоления трудностей современной теории и появления новой физической теории, которую мы все так ждем.

Когда создавалась квантовая теория, критерием ее правильности была возможность объяснить спектр водорода. Только после того, как Бор дал вытекавшую из его теории формулу для водородной серии Бальмера, все поверили в эту теорию, которая стала затем чрезвычайно быстро развиваться. Подобным же образом, мне кажется, критерием правильности новой физической теории будет возможность, исходя из общих принципов, объяснить многообразие так называемых элементарных частиц.

В заключение я хотел бы еще раз подчеркнуть, что физика элементарных частиц — исключительно тонкая и трудная в экспериментальном отношении область, требующая чрезвычайно высокой техники эксперимента. Достаточно вспомнить уже упоминавшиеся мной трудности исследования нейтрино, обладающих колоссальной проникающей способностью. В качестве второго примера я приведу работу Ю. Д. Прокошкина и его группы, имеющую большое значение для теории слабых взаимодействий.

Открытие несохранения четности привело к построению универсальной теории слабых взаимодействий. Эта теория универсальна потому, что, во-первых, почти все частицы обладают слабым взаимодействием и могут распадаться, а во-вторых, в нее входит одна-единственная универсальная константа.

Очень важно было экспериментально подтвердить вытекающее из теории предсказание о распаде  $\pi$ -мезона. Распад  $\pi$ -мезона на  $\mu$ -мезон и нейтрино был хорошо известен. Но теория предсказывала, что наряду с ним должен иметь место также распад заряженного  $\pi$ -мезона на нейтральный  $\pi$ -мезон, позитрон и нейтрино. Обнаружить этот новый тип распада было крайне трудно, так как он происходит в 50 000 000 раз реже, чем распад на  $\mu$ -мезон и нейтрино. Чтобы оценить всю сложность задачи, надо еще учесть, что жизнь самого  $\pi$ -мезона до его распада длится всего лишь две стомиллионные доли секунды. Группе физиков, возглавляемой Ю. Д. Прокошкиным, удалось не только обнаружить новый тип распада, но и измерить его количественно, выявить экспоненциальную зависимость его от времени и т. д.



Естественно, что для таких экспериментов требуется высококачественное техническое оснащение. В частности, в последнее время все большее значение приобретает применение специализированных электронных вычислительных машин для обработки результатов наблюдений. Привожу пример. В 50-х годах очень большую роль в развитии физики элементарных частиц сыграла серия замечательных фотографий, сделанных на ускорителе в Калифорнии Альваресом и его группой (в частности, они впервые экспериментально изучили свойства так называемых  $K$ -мезонов, казавшиеся тогда чрезвычайно парадоксальными). Однако анализ снимков, обнаружение среди их громадного количества тех немногих случаев, когда частица распадается интересующим исследователей образом, занимали колоссальное время. Поэтому обработку снимков пришлось проводить не только очень большой группе сотрудников лаборатории в Калифорнии и не только в других американских лабораториях, но и в лабораториях многих стран Европы (Италии, Англии, Франции, Польши, Нидерландов), куда часть снимков была разослана и где их коллективная обработка продолжалась в течение 4—5 лет после того, как сам эксперимент на ускорителе был закончен. Сейчас за границей при ускорителях имеются мощные специализированные вычислительные машины, на которые непосредственно поступают данные наблюдений и которые почти сразу выдают результаты их обработки. Ждать 4—5 лет сейчас невозможно.

Если бы даже физика элементарных частиц не сулила никаких практических приложений, познавательный интерес этой области науки настолько велик, что полностью оправдывает затраты труда и средств на ее развитие. Ведь мы находимся на пороге нового этапа познания фундаментальнейших законов природы, которые не только охватят вновь открывающийся перед ними круг явлений, но включают в себя в качестве частного случая все, что нам известно доньше.

Однако, несомненно, можно рассчитывать и на практические приложения новой физики. Правда, многие как у нас, так и за границей проявляют в этом отношении пессимизм и противопоставляют ядерную физику, которая привела к имеющему огромное практическое значение освоению атомной энергии, физике элементарных частиц и высоких энергий, не сулящей, по их мнению, никаких выходов в практику. Я с этим совершенно не согласен. Вся история развития науки показывает, что овладение всякой новой областью явлений природы всегда приводит к практическим применениям, часто совершенно неожиданно. Напомню, что когда Герц, проверяя предсказания теории Максвелла, впервые экспериментально обнаружил электромагнитные волны, его спросили, не могут ли эти волны быть применены для практических целей. Герц ответил: «Нет, они никогда никакого практического значения иметь не будут». А уже через 5—6 лет первая, правда примитивная, беспроводная связь была осуществлена.

То же произошло и с проблемой ядерной энергии. Ведь еще в 20-х годах нашего века многие крупные ученые, даже такие выдающиеся, как Резерфорд, отрицали возможность того, что когда бы то ни было ядерная энергия будет использоваться человеком.

Мы не можем предсказать сейчас, к каким именно практическим результатам приведет проникновение человека в мир элементарных частиц, но мы знаем общую закономерность: овладение новым кругом физических явлений всегда открывало возможности использования их человеком.

В настоящее время кое-что в этом плане уже намечается. Упомяну только о возможных применениях элементарных частиц в области медицины. Первым, кто занялся разработкой этого вопроса, был английский исследователь Пауэлл, потом этим начали заниматься в Америке, и там, по-видимому, уже получены крупные результаты. Речь идет об облучении злокачественных опухолей и других вредных образований в организме. При облучении опухоли рентгеновскими лучами они неизбежно, и притом весьма сильно, поражают также здоровые ткани тела, окружающие опухоль. Это вредно и, кроме того, ограничивает допустимые дозы облучения.

Пауэлл предложил употреблять вместо рентгеновских лучей  $\pi$ -мезоны. Заряженные  $\pi$ -мезоны, в отличие от рентгеновских лучей, обладают довольно определенной длиной пробега. В любой данной среде длина пробега  $\pi$ -мезонов определяется их энергией, и, фиксируя ее, можно сделать их пробег равным заданному числу миллиметров, сантиметров или метров. На протяжении своего пути мезоны выделяют сравнительно мало энергии на ионизацию, но в конце пробега останавливаются и поглощаются ядрами атомов среды, причем в один прием выделяют огромную энергию — вся масса каждого мезона превращается в энергию, и выделяется 140 Мэв энергии на каждый  $\pi$ -мезон.

Это позволяет «сфокусировать» почти всю дозу излучения в нужном месте, в десятки и даже в сотни раз усилить облучение больной ткани, не поражая окружающей ее здоровой.

В августе 1964 г. на Международной конференции в Дубне один американский физик рассказывал мне, что в США в самое последнее время получены блестящие результаты при лечении заболеваний центральной нервной системы путем облучения совершенно определенного участка коры мозга пучком частиц, полученных на ускорителе.

Другое возможное, чрезвычайно интересное применение элементарных частиц, которое сейчас только обрисовывается, — это использование  $\mu$ -мезонов в химии. Оно основано на двух фактах. Во-первых,  $\mu$ -мезоны получают на ускорителях в поляризованном состоянии. Это значит, что их спин определенным образом ориентирован относительно направления их движения. Во-вторых, если пропустить пучок  $\mu$ -мезонов через какое-либо вещество, то степень деполяризации пучка будет весьма существенным

образом зависеть от химического строения этого вещества. Если в веществе происходит химическая реакция, изменяющая его молекулярное строение, то изменяется и степень деполяризации пучка мезонов, прошедших сквозь вещество. По-видимому, это явление можно использовать для измерения скорости химических реакций. Если при обычных методах на проведение всех экспериментов, необходимых для измерения скорости химических реакций, требуется год-полтора, то с помощью  $\mu$ -мезонов можно, по крайней мере в ряде случаев, надеяться сделать это за один-два дня.

Я отнюдь не могу ручаться, что приведенные мною примеры возможного практического применения элементарных частиц увенчаются успехом. Но я убежден, что наиболее важные практические применения всегда возникают, и притом часто совершенно неожиданно, в результате каждого крупного продвижения в познании природы.

Что же касается перспектив успеха в этом направлении, то я, повторяю, не верю в предсказание американского физика Дайсона, что мы сможем дождаться новой теории только в следующем столетии. Глубочайшее мое желание состоит в том, чтобы дожить до момента, когда будет создана новая физическая теория, и быть при этом еще в состоянии ее понять.

## ЭВОЛЮЦИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ <sup>1</sup>

Всем хорошо известно, что в развитии физики в нашем столетии было два важнейших этапа — создание теории относительности и создание квантовой теории. Они послужили основой дальнейших успехов: например, современная ядерная физика целиком базируется на квантовой теории.

В развитии этих теорий особенно ярко проявились общие закономерности развития не только физики, но и вообще всех естественных наук. Я буду говорить только о физике. Изучая физические явления и процессы, мы создаем адекватные им физические понятия, а также теории этих явлений и процессов. Если такие теории не только правильно описывают известные нам явления и процессы, но и правильно предсказывают ранее неизвестные, мы убеждаемся в их справедливости и придаем им универсальное значение. Однако по мере развития науки мы проникаем в новые области, и при этом всегда оказывается, что пригодность считавшихся универсальными понятий и теорий весьма ограничена и они должны быть радикально обобщены. Это вполне естественно, так как наши понятия и теории не априорны, а основаны на анализе известных нам явлений. Но вера в установившуюся и блестяще подтвержденную на опыте теорию бывает столь сильна, что зачастую новое сначала кажется абсурдным, парадоксальным и встречается в штыки. Недаром Нильс Бор сказал в 1957 г. по поводу предложенной В. Гейзенбергом теории: «Для новой теории она недостаточно сумасшедшая».

Наиболее показателен в этом отношении тот факт, что создатель теории относительности гениальнейший физик А. Эйнштейн, очень много сделавший для развития квантовой теории, до конца своей жизни так и не признал некоторые ее принципиальные основы. Причина здесь ясна. До квантовой теории в основе физики лежала уверенность в строгом детерминизме физических явлений, согласно которой состоянием физической системы в данный момент времени точно и однозначно определяется вся ее дальнейшая эволюция, ход всех происходящих в ней процессов. Квантовая же теория показала, что в субмикроскопическом мире элементарных частиц ряд закономерностей носит лишь веро-

<sup>1</sup> Вестник АН СССР, 1968, № 9, 22. Доклад на Торжественном общем собрании Академии наук СССР по поводу вручения И. Е. Тамму Золотой медали им. М. В. Ломоносова за 1967 г. Доклад был написан, когда И. Е. Тамм был уже прикован к постели тяжелой болезнью. Был зачитан по поручению Игоря Евгеньевича на торжественном заседании. См. также «Природа», 1968, 11, 17; «Научная мысль», 1968, № 9, 1.

ятностный, статистический характер, что состояние системы определяет лишь относительную вероятность того, какие именно процессы произойдут в дальнейшем.

В этом нет противоречия с тем, что законы природы в доступных нашему непосредственному восприятию макроскопических явлениях детерминистичны — в таких явлениях участвуют мириады элементарных частиц, и из вероятностных закономерностей для отдельных частиц непосредственно вытекает с громадной точностью классический детерминизм макроявлений.

Однако отказ от применимости классического детерминизма в микромире был неприемлем для Эйнштейна. Надо сказать, что, несмотря на вероятностный характер многих закономерностей квантовой теории, в ней имеются, во-первых, ряд строгих законов сохранения и, во-вторых, своеобразный, отличный от классического детерминизм: изменение во времени волновой функции, описывающей состояние системы, подчиняется уравнениям столь же строгим, что и действующие в классической физике. Но даже точное знание волновой функции позволяет определить лишь относительную вероятность происходящих в системе процессов.

Существенно, что статистический характер законов микромира отнюдь не плод неполноты нашего познания этих законов, как предполагалось некоторыми исследователями, а лежит в природе вещей. Действительно, обратимся к одному из основных принципов квантовой теории — так называемому принципу неопределенности. Он гласит, что нет и не может быть таких состояний элементарной частицы, в которых одновременно и ее координаты (т. е. ее положение), и ее скорость имели бы точно определенные значения. Если координаты имеют точно определенные значения, то скорость частицы неопределенна и существуют лишь определенные вероятности различных значений ее скорости, и, наоборот, если скорость имеет определенное значение, то для координат имеет место статистический разброс.

Причина этого коренится в том, что физические понятия, выработанные путем анализа явлений окружающего нас макромира, далеко не полностью применимы для описания явлений в микромире. Так, у нас есть понятия частицы и волны — волны на воде или волны звуковой, световой, т.е. упорядоченного движения в среде. Очевидно, что не может существовать объекта, который одновременно являлся бы и частицей и волной. Между тем в микромире дело обстоит именно так: элементарная частица, например электрон или протон, обладает одновременно свойствами и частицы и волны. Следовательно, эти классические понятия имеют лишь очень ограниченную применимость, из чего вытекает принцип неопределенности и вероятностный характер закономерностей.

Квантовая теория радикально изменила принципиальные основы физической теории. Она не только впервые, и притом точно, объяснила оптические спектры атомов, строение и свой-

ства их электронных оболочек и ядер, но очень многие из сделанных на ее основе предсказаний были впоследствии блестяще подтверждены на опыте.

Я ограничусь тем, что приведу один пример такого подтверждения, которым мы обязаны проф. С. В. Пауэллу. В начале нашего века были известны только два типа взаимодействий тел — электромагнитное и тяготение (гравитация). Квантовая теория в начале своего развития применялась лишь в электродинамике. Около 1930 г. было установлено существование нового типа сильных взаимодействий (так называемых ядерных) между нуклонами, т. е. между протонами и нейтронами. В 1934 г. в одной своей статье я утверждал, что, подобно тому как электромагнитные взаимодействия передаются элементарными частицами — фотонами, так и ядерные силы должны передаваться какими-то элементарными частицами. Вместе с тем в этой статье было показано, что никакие известные в то время частицы (в том числе и только что открытые нейтрино) не могут обуславливать ядерные силы. Примерно через полтора года японский физик Х. Юкава в работе, начинавшейся ссылкой на мою статью, высказал гипотезу, что ядерные взаимодействия обуславливаются особыми частицами с массой, промежуточной между массами протона и электрона (поэтому названными мезонами), и предсказал ряд их характеристик. Частицы такой приблизительно массы были действительно открыты в космических лучах К. Андерсоном и С. Неддермайером уже в 1936 г., но это открытие вызвало сначала восторг, а потом смятение: в противоположность предсказаниям Х. Юкавы мезоны очень слабо взаимодействовали с ядерными частицами. Все разъяснилось только в 1947 г., когда С. В. Пауэлл открыл другие мезоны, в отличие от открытых ранее  $\mu$ -мезонов, названные  $\pi$ -мезонами. Последние действительно обуславливают взаимодействие ядерных частиц, и их свойства соответствуют предсказаниям Х. Юкавы.

Это только один из большого числа имеющихся примеров. Во всяком случае ясно, что квантовая теория правильно и точно описывает и объясняет огромный круг явлений. Но она нуждается в обобщении, ибо, как и для классической физики, существуют границы ее применимости. Ее неполнота проявляется при ультрамалых пространственных расстояниях и при больших энергиях. В сущности, это не два различных критерия, а один, поскольку большим энергиям согласно квантовой теории соответствуют большие частоты волн, а им, в свою очередь, соответствуют малые длины волн, т. е. малые пространственные расстояния. Так вот, незавершенность квантовой теории сказывается прежде всего в том, что релятивистская квантовая теория (а при больших энергиях обязательно необходимо учитывать теорию относительности) при расчете подавляющей части процессов и характеристик элементарных частиц дает в результате бесконечность, т. е. приводит к абсурду. Квантовая механика

была создана во второй половине 20-х годов, а эта фундаментальная трудность выявилась в начале 30-х. Уже тогда В. Гейзенберг указал, что необходимо радикальное обобщение теории и что, подобно тому как теория относительности и квантовая теория ввели в физику две фундаментальные постоянные (скорость света в вакууме  $c$  и планковскую постоянную  $h$ ), которыми определяются границы применимости прежних, классических теорий, так и в новую теорию должна войти новая фундаментальная постоянная размерности длины, определяющая границы применимости современной квантовой механики.

С тех пор прошло больше 30 лет, а новой теории все еще нет. Крупнейший американский физик Ф. Дайсон в одной своей статье высказал убеждение, что новая теория, потребность в которой назрела крайне остро, появится не ранее следующего, XXI в. Его довод: каждый новый принципиальный шаг в теоретической физике гораздо труднее предшествующего, ибо новая теория должна не только объяснить новый круг явлений, но и включить в себя как частный случай при определенных условиях все предшествующие теории (разумеется, подтвержденные опытом). Я не согласен с Дайсоном — ведь хотя трудности теории нарастают, исключительно быстро растет и число физиков-теоретиков.

Поиски такой теории в очень широком и все усиливающемся масштабе ведутся уже несколько десятилетий. Но меня поражает, что в большинстве случаев выдвигаются не какие-либо принципиальные основы новой теории, а феноменологические теории, касающиеся отдельных, частных проблем. Так, для преодоления самой основной трудности, заключающейся в том, что современная теория приводит к бесконечностям, во второй половине 40-х годов Р. Фейнманом, Г. Бете, С. Томонагой, Ю. Швингером и другими учеными была предложена так называемая теория перенормировок. В сущности, она сводится к рецепту, как из полученной в результате вычислений бесконечной величины вычесть другую бесконечную величину так, чтобы их разность была конечной и совпадала с опытными данными.

Теория перенормировок имела известные успехи. Например, в электродинамике ее результаты прекрасно совпадали с данными опыта. Однако в целом эту теорию нельзя считать удовлетворительной. Во-первых, нет общего принципа перенормировок, и для разных взаимодействий приходится специально подбирать различные их схемы. Во-вторых, существуют так называемые перенормируемые взаимодействия, к которым обычные принципы перенормировки неприменимы, и потому для них приходится изыскивать совершенно новые подходы. В-третьих, и, с моей точки зрения, это самое главное, принципиально неудовлетворительна теория, в которую вводятся принципиально ненаблюдаемые величины, затем искусственно из нее устраняемые. Мне это напоминает существовавшую до теории относительности теорию мирового эфира — всепроникающей среды, непосредственно

ненаблюдаемой, но колебания которой воспринимаются нами как электромагнитные (в частности, световые) волны. Чтобы проиллюстрировать, к каким нелепостям приходилось прибегать для устранения противоречий в этой теории, приведу только один пример: такой крупнейший физик, как Макс Планк, года за три до возникновения теории относительности предлагал для устранения противоречий допустить, что вблизи планет, в частности вблизи Земли, плотность мирового эфира в  $10^{49}$  раз больше, чем в мировом пространстве! Теория относительности устранила само понятие ненаблюдаемого материального эфира, и все стало прозрачно ясным.

Помимо основной проблемы — устранения бесконечностей, назрела также проблема элементарных частиц. В 20-х годах были известны только две элементарные частицы — электрон и протон — и считалось, что все вещество состоит из них. Затем были открыты нейтрон, позитрон, нейтрино, упоминавшиеся выше  $\pi$ - и  $\mu$ -мезоны, а в последнее время число сортов так называемых элементарных частиц нарастает потрясающе быстро и уже перевалило за 300. Естественно, что перед теорией назрела задача, исходя из общих принципов, понять и предвычислить все многообразие сортов частиц.

Значительные успехи в систематике «элементарных» частиц были достигнуты на основе использования математической теории групп, однако это лишь феноменологическая систематика, а не следствие из общих положений теории. В последнее время широко распространение получила гипотеза, согласно которой все многочисленные так называемые элементарные частицы состоят из истинно элементарных частиц — кварков. Пока кварки обнаружить не удалось, но, возможно, эта гипотеза верна. Мне представляется, что новая теория элементарных частиц не будет похожа на современную теорию атомов или атомных ядер, в которой эти объекты составляются из элементарных частиц — электронов, протонов и нейтронов. Я думаю, что введение в теорию новой универсальной постоянной размерности длины позволит предвычислить массы всех частиц, исходя из общих принципов теории, так как из трех универсальных постоянных — скорости света  $c$ , постоянной Планка  $h$  и постоянной размерности длины — можно составить выражение размерности массы (используя только  $c$  и  $h$ , этого сделать нельзя).

Итак, остро необходим новый принципиальный шаг в развитии квантовой теории. Между тем громадное большинство работ по теоретической физике посвящено отдельным, частным гипотезам феноменологического характера. Конечно, многие из этих работ очень полезны и разъясняют важные вопросы. Таковы, например, работы по дисперсионной теории, по так называемой алгебре токов, по применению математической теории групп к систематике элементарных частиц и др., но, повторяю, все они носят частный характер и не касаются основной проблемы.



Более принципиален подход к ней в так называемой аксиоматической теории. Однако лично мне представляется наиболее обещающим направление работ, предложенное в 1947 г. американским физиком Г. Снайдером. Физическую сущность этого направления можно сформулировать следующим образом: обобщение лежащего в основе квантовой теории принципа неопределенности, гласящего, что невозможны состояния частицы, при которых и координаты и скорости ее имеют точно фиксированные значения. Обобщение это заключается в том, что и четыре координаты частицы не могут одновременно иметь точно фиксированные значения; точно определенной может быть лишь одна из них.

В пользу подобного ограничения можно привести такое соображение, не являющееся, конечно, доказательством. Точность измерения координат ограничена благодаря следующему обстоятельству. Мы измеряем положение частицы, направляя на нее пучок света (т.е. пучок фотонов) или каких-либо элементарных частиц, например электронов, и определяя направление полета рассеянных на этой частице фотонов или электронов. Максимальная точность измерения координаты рассеивающей частицы определяется длиной волны рассеивающихся частиц. Но длина волны обратно пропорциональна ее частоте, т.е. энергии. Таким образом, чем точнее нужно измерить координату, тем больше должна быть энергия рассеиваемых частиц. Однако при росте энергии к простому их рассеиванию, т.е. к изменению направления полета, примешивается еще одно явление — соударение двух частиц большой энергии (рассеивающей и рассеиваемой), которое порождает новые частицы, разлетающиеся в разные стороны. Чем больше энергия, тем больше рождается новых частиц. Но не только это чрезвычайно усложняет измерения. Дело в том, что многие из народившихся при соударении частиц очень недолго «живут» и сами распадаются на две-три другие частицы, пролетев расстояние порядка  $10^{-10}$ — $10^{-11}$  см и даже меньше. Эти продукты распада, не отличимые от частиц, порожденных в самом акте соударения, вылетают не из местонахождения рассеивающей частицы, а из ее окрестности, и это обстоятельство, по-видимому, принципиально ограничивает точность измерения координат.

Сам Г. Снайдер такого физического обоснования своей гипотезы не давал, за это обоснование ответствен я. Он просто постулировал кривизну импульсного пространства, считая, что тем самым устраняются бесконечности. Разъясняя смысл этой гипотезы, нужно отметить, что в современной квантовой теории совершенно эквивалентны описания состояния частиц и происходящих с ними процессов в координатном и в импульсном пространстве. В первом случае волновая функция частицы или системы частиц, дающая о них максимально полную информацию, рассматривается как функция четырех координат — трех простран-

ственных и временной. Во втором же случае волновая функция является функцией четырех компонент импульса частицы — трех пространственных, соответствующих произведению массы частицы на компоненты ее скорости, и временной, равной энергии частицы. Зная волновую функцию как функцию координат, можно путем фурье-преобразования превратить ее в функцию импульсов, и наоборот. Таким образом, оба пространства равноправны. Обычно они считаются плоскими; Снайдер же выдвинул гипотезу, что импульсное пространство искривлено. Наглядно представить себе кривое четырехмерное (и даже трехмерное) пространство мы не можем, но в двумерном случае это просто — кривая поверхность, например шара, противопоставляется плоскости. Кривое четырехмерное пространство (координат, а не импульсов) впервые было введено в физику в общей теории относительности: силы тяготения объясняются в ней искривлением пространства, вызываемым находящимися в нем массами. Такая геометрическая интерпретация сил тяготения чрезвычайно привлекательна и полностью оправдалась. Столь же привлекательна и гипотеза Снайдера. Однако он опубликовал в 1947 г. только две небольшие работы и в дальнейшем к этому вопросу не возвращался. Почему? Я думаю, он сам убедился, что его гипотеза может устранить лишь часть бесконечностей, возникающих в квантовой теории. В снайдеровской теории бесконечности, возникающие при интегрировании по импульсам, устраняются тем, что в кривом импульсном пространстве в интегралах появляются знаменатели, растущие с ростом квадрата импульса. Бесконечности, возникающие при интегрировании по стремящимся к бесконечности импульсам, устраняются этим знаменателем. Однако остаются так называемые угловые расходимости, обусловленные интегрированием по области пространства бесконечного объема, в которой квадрат импульса равен нулю или близок к нему. Это область импульсного пространства, прилегающая к так называемому световому конусу.

По моему мнению, именно этот дефект гипотезы Снайдера был причиной того, что она не получила распространения. Помимо двух публикаций самого Снайдера, его гипотезе были, насколько мне известно, посвящены лишь работы в очень малораспространенном издании одного американского университета и работы двух наших теоретиков — Ю. А. Гольфанда и В. Г. Кадышевского. Я им очень обязан, ибо они привлекли мое внимание к гипотезе Снайдера.

Вышеупомянутый дефект этой гипотезы, я считаю, обусловлен тем, что Снайдер ограничился рассмотрением импульсного пространства постоянной кривизны. Напомню, что двумерная поверхность постоянной кривизны — это шар, тогда как, например, эллипсоид и седлообразная поверхность имеют различную кривизну в различных своих точках. Я должен извиниться перед слушателями за то, что мне придется в дальнейшем ограничиться

кратким изложением, мало понятным для неспециалистов в физике, но подробные разъяснения никак не уложились бы в отведенное мне время.

Я думаю, что Г. Снайдер ограничился постоянной кривизной импульсного пространства по аналогии с координатным пространством, в котором постоянство кривизны (при отсутствии расположенных в нем тел) вытекает с необходимостью из так называемой трансляционной инвариантности, или, иначе говоря, из равноправия всех точек пространства. Однако это равноправие отнюдь не имеет места для импульсного пространства: легко показать, что если сместить начало импульсных координат (т.е. слагающих импульса), то массы всех частиц изменятся, причем это изменение будет зависеть от скорости частицы в исходной системе координат, в результате чего массы данного сорта частиц (например, электронов или протонов) перестанут быть равными друг другу. Таким образом, требование трансляционной инвариантности не относится к импульсному пространству, и оно вполне может иметь непостоянную кривизну.

Я показал, что если соответственным образом обобщить гипотезу Снайдера, то можно устранить из квантовой теории и угловые бесконечности. Не имея возможности входить здесь в математические подробности, скажу только, что устранение угловых расходимостей обуславливается не знаменателем в выражении элемента объема интегрирования, как у Снайдера, а связано с особенностью выражения суммы двух импульсов в кривом импульсном пространстве. Дело в том, что при отсутствии трансляционной инвариантности необходимо каким-то образом постулировать закон сложения векторов. С этой целью можно обобщить обычный закон сложения векторов, определяя сумму двух векторов как диагональ построенного на них параллелограмма. В плоском пространстве противоположные стороны параллелограмма равны по длине и параллельны друг другу. В кривом пространстве эти два требования несовместимы; я оставляю второе. Конечно, в кривом пространстве стороны параллелограмма являются не прямыми линиями, а геодезическими.

Существенно, что такой метод построения параллелограмма не всегда применим: в некоторых кривых пространствах встречаются случаи, когда геодезические линии, параллельные двум заданным векторам и проведенные через их конечные точки, вообще не пересекаются друг с другом, т.е. не образуют параллелограмма.

Меня крайне обрадовало, когда выяснилось, что требованием устранения всех бесконечностей, в том числе угловых, и требованием, чтобы для двух любых векторов всегда была определена их сумма, т.е. чтобы проведенные указанным образом геодезические линии всегда пересекались друг с другом, однозначно определяется геометрия кривого пространства и вблизи точки начала отсчета импульсов, и в бесконечном удалении от нее.

Построение теории ведется следующим образом. Исходные постулаты обычной квантовой теории формируются в импульсном пространстве (конечно, плоском), а затем инвариантно обобщаются на случай кривого импульсного пространства. Не входя в детали, я просто упомяну еще одно важное требование: так называемое упорядочение по времени должно быть произведено не в координатном пространстве с перепиской потом результата в импульсном представлении, а сформулировано сразу же в импульсном представлении с помощью некоторой функции.

Я упорно работаю над этой теорией уже пятый год. Много раз сменялись взлеты и падения. Чрезвычайно большую помощь оказали мне критика и советы ряда членов нашего коллектива, в особенности Д. А. Киржница и В. Я. Файнберга. Около двух лет очень плодотворно работает вместе со мной В. Б. Вологодский. В настоящее время я полон оптимизма. Однако теория оказалась математически чрезвычайно громоздкой — не в принципиальном отношении: исходные положения формулируются очень просто; сложность и громоздкость чисто вычислительные. Возможно, это объясняется тем, что мы не используем уже разработанных в математике адекватных, но неизвестных нам методов.

Конкретная проблема, над которой мы сейчас работаем, — точное определение метрики пространства, исходя из упомянутых выше требований и из принципа соответствия, т. е. из требования, чтобы для величин, для которых современная теория дает не бесконечные, а конечные выражения, в кривом пространстве получались бы те же самые выражения.

Несомненно, тот факт, что из теории удалось устранить бесконечности, отнюдь не гарантирует ее правильности. Решающим будет сравнение вытекающих из нее предсказаний с данными опытов. Одним из важных будет проверка предсказания, что при очень больших энергиях сталкивающихся частиц (таких, как встречаются в космических лучах) нарушаются привычные релятивистские законы сохранения энергии и импульса и что для таких энергий эти законы нужно изменить. Далее, важной проверкой будет также сравнение с опытными данными теоретически вычисленных масс нуклонов и мезонов. В дальнейшем, конечно, потребуются теоретически вычислить массы всех «элементарных» частиц.

Но эти проверки — дело будущего, предстоит еще преодолеть не только экспериментальные, но и вычислительные трудности. Кроме того, остаются принципиальные проблемы, связанные с переходом от теории элементарных частиц к макрофизике.

Даст ли проверка теории положительный или отрицательный результат, конечно, неизвестно. Но одно мне кажется несомненным: остро необходимо радикальное обобщение основ квантовой теории, и, в отличие от упомянутого выше пессимистического утверждения Дайсона, я надеюсь, что мы с вами доживем до нового этапа теории, в чем бы он ни заключался.

# СОДЕРЖАНИЕ

## V

### Теория элементарных частиц и взаимодействий при высоких энергиях

34. К электродинамике вращающегося электрона, 1929 . . . . .	5
35. О взаимодействии свободных электронов с излучением по дираковской теории электрона и по квантовой электродинамике, 1930 . .	24
36. Замечания к дираковской теории рассеяния света и дисперсии, 1930 . . . . .	46
37. О формулировке принципа запрета в дираковской теории позитрона, 1934 . . . . .	50
38. К теории элементарных частиц, 1934 . . . . .	53
39. Проникающие частицы в космических лучах и ядерные силы, 1938 . . . . .	56
40. О мягкой компоненте космических лучей на уровне моря ( <i>совместно с С. З. Беленьким</i> ), 1939 . . . . .	61
41. Движение мезонов в электромагнитных полях, 1940 . . . . .	95
42. Релятивистское взаимодействие элементарных частиц, 1945 . . .	100
43. Энергетический спектр каскадных электронов ( <i>совместно с С. З. Беленьким</i> ), 1946 . . . . .	116
44. К релятивистской теории взаимодействия нуклонов ( <i>совместно с В. П. Силиным и В. Я. Файнбергом</i> ), 1953 . . . . .	124
45. Полуфеноменологическая теория взаимодействия $\pi$ -мезонов с нуклонами. I. Рассеяние $\pi$ -мезонов нуклонами ( <i>совместно с Ю. А. Гольфандом, В. Я. Файнбергом</i> ), 1954 . . . . .	136
46. Метод усеченных уравнений поля и его применение к рассеянию мезонов нуклонами ( <i>совместно с В. П. Силиным и В. Я. Файнбергом</i> ), 1955 . . . . .	158
47. О структуре нуклонов, 1957 . . . . .	175
48. Распады странных частиц в теории Фейнмана и Гелл-Манна ( <i>совместно с И. Ю. Кобzareвым</i> ), 1958 . . . . .	179

## VI

### Фундаментальные проблемы

49. О связи эйнштейновской единой теории поля с квантовой теорией, 1929. . . . .	184
50. Новая теория Эйнштейна и теория квантов, 1929 . . . . .	188
51. Замечания к эйнштейновской единой теории поля ( <i>совместно с М. А. Леонтовичем</i> ), 1929 . . . . .	191
52. Эйнштейновская единая теория поля и квантовая теория, 1929 . .	202
53. К теории спина ( <i>совместно с В. Л. Гинзбургом</i> ), 1947 . . . . .	205
54. О кривом импульсном пространстве, 1965 . . . . .	218
55. Об использовании кривого импульсного пространства при построении нелокальной квантовой теории поля ( <i>совместно с В. Б. Вологодским</i> ), 1972. . . . .	226

## VII

### Разное

(Обзоры, выступления, Personalia,  
научно-популярные работы и т. п.)

56. Магнетизм и строение атомов, 1925 . . . . .	254
57. Новые принципы статистической механики Бозе—Эйнштейна в связи с вопросом о физической природе материи, 1926 . . . . .	287
58. Руководящие идеи в творчестве Фарадея, 1932 . . . . .	315
59. Проблема атомного ядра, 1936 . . . . .	335
60. Ядерные силы, 1938 . . . . .	358
61. Теория мезотрона и ядерные силы, 1941 . . . . .	371
62. О работах Л. И. Мандельштама в области теоретической физики, 1945 . . . . .	379
63. Проблема мезона и современное состояние учения о космических лучах, 1947 . . . . .	386
64. А. Эйнштейн и современная физика, 1956 . . . . .	403
65. Памяти Г. С. Ландсберга, 1957 . . . . .	408
66. Речь, произнесенная на траурном митинге на похоронах акад. Г. С. Ландсберга, 1958 . . . . .	411
67. Современное состояние теории слабого взаимодействия элементарных частиц, 1959 . . . . .	413
68. Нильс Бор и современная физика, 1963 . . . . .	428
69. Элементарные частицы, 1964 . . . . .	438
70. Характерные особенности творчества Леонида Исааковича Мандельштама, 1965 . . . . .	456
71. На пороге новой теории, 1965 . . . . .	461
72. Эволюция квантовой теории, 1968 . . . . .	478

## ИГОРЬ ЕВГЕНЬЕВИЧ ТАММ

### Собрание научных трудов. Том II

*Утверждено к печати Отделением ядерной физики  
Академии наук СССР*

Редактор *Б. М. Болотовский*. Художник *Л. Ф. Шканов*.

Художественный редактор *Н. Н. Власик*. Технический редактор *П. С. Кашина*

Сдано в набор 16/IX 1974 г. Подписано к печати 11/II 1975 г. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага № 1. Усл. печ. л. 30,5. Уч.-изд. л. 30,6. Тираж 4100. Т-02049. Тип. зак. № 1456.  
Цена 2 р. 40 к.

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21  
1-я типография издательства «Наука». 199034, Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12