

Э. Ф. Тейлор, Дж. А. Уилер

# **ФИЗИКА ПРОСТРАНСТВА- ВРЕМЕНИ**

Перевод с английского  
Н. В. Мицкевича

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ДОПОЛНЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •  
МОСКВА 1971



Э. Ф. Тейлор, Дж. А. Уилер

# **ФИЗИКА ПРОСТРАНСТВА- ВРЕМЕНИ**

Перевод с английского  
Н. В. Мицкевича

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ДОПОЛНЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •  
МОСКВА 1971

УДК 530.12 (07)

*Редакция космических исследований, астрономии и геофизики*

**Инд. 2-6-2, 2-3-2**  
**102-71**



## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Предлагаемая вниманию читателей книга — учебник по частной теории относительности<sup>1)</sup> для студентов-физиков младших курсов и школьников старших классов, написанный в том новом стиле, который, получив заслуженное признание, успешно пробивает себе дорогу в современных вузах и, будем надеяться, в скором времени завоеует также среднюю школу. Эта книга — учебник для начинающих физиков, а так как идеи теории относительности стали в наши дни краеугольным камнем общечеловеческой культуры, это и учебник для всех молодых людей, интересующихся естественными науками. Он написан просто и скрупулезно строго: его авторы — крупные физики и отличные педагоги. Особенно хорошо известно имя Джона Арчибалда Уилера, «старожила» Принстона, одного из патриархов ядерной физики. Того самого Уилера, который вместе с Нильсом Бором является автором знаменитой теории деления атомных ядер, открывшей эпоху технических приложений ядерной энергии; ядерщика, «на старости лет» (да простит мне эти слова Уилер, который всегда остается молодым) переключившегося на гравитацию. Именно участие Уилера в создании этой книги наложило на нее отпечаток специфической деловитости и вместе с тем непринужденности, наглядного и творческого в своей основе подхода к самым сокровенным и глубоким «тайнам» теории относительности. Профессор Эдвин Ф. Тейлор известен больше как педагог. Следует сказать, однако, что и Уилер много внимания уделил преподаванию, и его ученики добились больших успехов: достаточно назвать Ричарда П. Фейнмана, лауреата Нобелевской премии по физике.

Безусловно, на характер изложения теории относительности в книге Тейлора и Уилера наложили отпечаток программы американских (и вообще западных) вузов. Программы английской и американской систем вузов построены более утилитарно, чем наши. Это естественно: многие студенты кончают университет, проучившись всего три года, т. е. пройдя курс усиленного техникума (степень бакалавра — *bachelor*); другие остаются еще на два-три года и получают степень магистра (*master*). Чтобы примирить оба эти варианта, приходится разобщать концентры обучения (до некоторой степени аналогичные нашим) в большей степени, чем это имеет место в наших вузах. В этих условиях теоретическая подготовка оказывается менее суще-

<sup>1)</sup> Часто говорят: «специальная теория относительности», отдавая тем самым дань буквальному (но не всегда буквальному) совпадению английского слова «special» — специальный, частный (например, «special case» — частный случай), и русского слова «специальный», имеющего чаще всего иной оттенок. Как известно, Эйнштейн творил на немецком языке (если не считать интернационального языка формул, где впервые и прозвучало в данном контексте слово «speziell»). Заметим, что французы говорят «relativité restreinte» — именно *частная* теория относительности. Неискушенному читателю иногда даже кажется, что «общая» теория относительности предназначена «для всех», для широкого круга людей, а «специальная» — лишь для избранных специалистов, тогда как дело обстоит фактически наоборот! Читатель может убедиться, что специальную теорию относительности именуют частной не один лишь переводчик этой книги, — для этого достаточно прочесть полезную во всех отношениях статью академика В. Л. Гинзбурга в журнале «Наука и жизнь» (№№ 1—3 за 1968 г.).

ственным вопросом, и, например, принципы теоретической механики либо вовсе не читаются, либо читаются уже после курса квантовой механики. Однако в курсе общей физики больший удельный вес приобретают теоретические вопросы; в ряде западных учебников для первых курсов университетов петитом даются детали, подлежащие обычно освещению лишь в курсе теоретической физики. Поскольку в американских и английских вузах больший упор в преподавании делается на демонстрационный эксперимент и запоминание фактического материала, советским студентам оказывается легче усваивать абстрактную сторону теории в книгах типа той, что вы держите сейчас в руках: авторы предельно разжевывают теоретические вопросы. Поэтому нашим студентам *следует рекомендовать решать больше упражнений в этой книге*, чем предлагают ее авторы. Для них будут достаточно простыми и упражнения, помеченные одной звездочкой.

Вообще при чтении этой книги необходимо выработать и соблюдать строгую систему (которую не мешает перенести и на работу с другими книгами!). Изложение сплошь и рядом может показаться слишком простым, если не примитивным, но в действительности авторы очень глубоко продумали все средства воздействия (в том числе эмоционального) на читателя, так что нельзя оставлять без внимательных размышлений ни одной притчи в этой книге. Таким образом, важно несколько раз возвращаться к одной и той же теме, и вы каждый раз будете находить в ней что-нибудь новое и содержательное, что прежде ускользало от вашего внимания, и вместе с тем такое, что должно играть принципиальную роль в понимании явлений. Книги такого рода полезно читать в два-три, а то и более приемов: сначала как увлекательный роман, а затем как запутанную детективную повесть, в которой нужно разобраться до конца, и знание дальнейшего развития «фабулы» здесь может лишь помочь лучше понять суть дела. Решать же упражнения следует всегда в одной тетради или на собираемых в папке листах, уж во всяком случае не на каких-нибудь обрывках. Эти советы ясны для любого студента (хотя он и не всегда им, к сожалению, следует), но их полезно повторить специально для школьников, которые очень много выиграют, если возьмутся осилить эту книгу. Они получают большое удовольствие и еще большую реальную пользу. Заметим, что *многие упражнения без звездочек составлены вполне на школьном уровне!*

Теория относительности — довольно разнородная как по составу, так и по своему состоянию область науки. Частная теория уже практически устоялась, и в ней возможны главным образом чисто методические усовершенствования. Общая теория, напротив, если и достаточно полна по своей общей геометрической формулировке, но в физическом отношении пока еще туманна и не завершена (на это жаловался уже сам Эйнштейн). Тейлор и Уилер лишь слегка касаются в своей книге общей теории относительности, стараясь сделать акцент на геометрической концепции Вселенной (позиции чисто уилеровские!), и здесь полезно сделать некоторые оговорки.

Уилер уже много лет (см. его книгу «Гравитация, нейтрино, Вселенная», ИЛ, 1962) провозглашает и проводит в жизнь программу построения «физики как геометрии», противопоставляя ей *динамическую* теорию полей и частиц. Этот подход логически вполне последователен, лишь его выражение страдает определенными пороками. Уилер, провозглашая первенствующую роль геометрии, забывает, что *геометрия* (в его же концепции!) — *опытная наука*, а не априорная, т. е. *это та же физика*, но выраженная специфическим языком. Именно поэтому и все понятия физики сохраняют жизненность и ценность, подвергаясь диалектическому переосмыслению в общей теории относительности. Именно поэтому слова Уилера о «массе без массы» и о «материи без материи» остаются лишь словами, ибо в современной физике уже давно под массой понимают отнюдь не только массу механических образований, но и массу поля. Что же касается материи,

то можно с уверенностью утверждать, что и электромагнитное, и гравитационное, и все другие физические поля — это разные конкретные виды материи. Заметим при этом, что сведение всего к полям — программа привлекательная, но, увы, по сей день она остается лишь программой.

Стремясь избавиться от динамической трактовки явлений, авторы призывают отказаться от термина «гравитационное поле», вводя вместо него «приливное поле», и тут же поясняют, что оба термина — синонимы. Трудно ожидать, что этот новый термин привьется, так как его преимущества сомнительны даже в чисто методическом отношении. Главное в их аргументации — факт отсутствия «гравитационной силы» в локально инерциальной системе отсчета. Если наш читатель в дальнейшем познакожится с общей теорией относительности детальнее (например, по отличной стандартной книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Теория поля», изд-во «Наука», 1967), то он заметит, что на пробную частицу, конечно, вообще не действует никакая *ковариантная* (т. е. в данном случае 4-векторная) гравитационная сила. Однако достаточно взять две пробные массы, столь малые, чтобы их взаимодействием можно было пренебречь, и тогда «разность» этих, «равных нулю», гравитационных векторных сил, действующих со стороны на наши частицы, окажется *отличной от нуля*, если в данной четырехмерной области пространство-время искривлено, т. е. если здесь объективно присутствует гравитация. Читателю предлагается поразмыслить над тем, насколько эта ситуация (эффект девиации геодезических) напоминает приведенную в книге притчу о двух путешественниках.

Однако есть (очень немногие) пункты, касающиеся и частной теории относительности, когда авторы оказываются в плену традиционных не вполне точных представлений. Таков вопрос о соотношении между преобразованием Галилея и преобразованием Лоренца. Эти преобразования действительно отличаются друг от друга не только по форме записи; различие между ними сводится к тому, что второе из них относится к классу ортогональных преобразований, первое же — нет, если рассматривать его с 4-мерной точки зрения. Теория относительности доказывает *не безусловную непригодность* преобразования Галилея при больших скоростях, а несостоятельность подхода к нему как к 3-мерному преобразованию. Если же последовательно учитывать, что преобразование Галилея есть 4-мерное преобразование координат пространства-времени, то отсюда автоматически следует лишь недекларативный характер системы координат, к которой оно приводит (вспомним, например, недекларативные координаты в случаях сферической или полярной систем, сравнительно простые ввиду своей ортогональности и 3-мерности).

Как показал Мёллер в своей книге (C. Møller, *The Theory of Relativity*, Oxford, 1952), единственным отличием системы координат, к которой приводит преобразование Галилея, от декартовой (получаемой при преобразовании Лоренца) является *неортогональность оси времени к пространственным осям*, причем здесь применим стандартный метод ортогонализации, и тогда в совокупности преобразование Галилея и преобразование, ортогонализирующее все 4 координатные оси, автоматически дает обычное преобразование Лоренца! Это преобразование ортогонализации уже не затрагивает системы отсчета, так что преобразования Галилея и Лоренца физически эквивалентны. И можно без труда показать, что первое приводит в точности к тем же релятивистским эффектам, к каким приводит второе. Все дело в том, что не всякое координатное время тождественно физическому (наблюдаемому) времени, и физическим является только то время, которое ортогонально пространственным измерениям. Итак, в ряде случаев переход к физическому времени в теории сводится к стандартным математическим вычислениям, и его можно совершить, используя так называемый формализм хронометрических инвариантов Зельманова [А. Л. З е л ь м а н о в, Доклады АН СССР, 107, 815 (1956)].

Кстати сказать, этот формализм позволяет исследовать уже в рамках частной теории относительности физические эффекты в неинерциальных системах отсчета, вопреки широко распространенному противоположному взгляду, разделяемому, очевидно, и авторами этой книги. Но в монографии В. А. Фока «Теория пространства, времени и тяготения» (Физматгиз, 1961) частная теория относительности уже была сформулирована в произвольных (в том числе ускоренно движущихся) системах координат и, следовательно, в неинерциальных системах отсчета. Если теперь к подходу Фока добавить аппарат формализма Зельманова, то мы непосредственно придем к связи между математическим выражением теории в неинерциальных системах отсчета и физическими наблюдаемыми величинами, так что синтез этих двух формулировок дает все эффекты неинерциальных систем наряду с обычными «инерциальными» релятивистскими эффектами. Однако детальное изложение вопроса требует более мощного математического аппарата, чем используемый в книге Тейлора и Уилера, и мы не будем здесь касаться его подробнее, отсылая читателя к нашей книге «Физические поля в общей теории относительности» («Наука», 1969), где наряду с другими вопросами излагаются основы формализма Зельманова и некоторые его применения.

Тем не менее факт применимости частной теории относительности к описанию неинерциальных систем отсчета не следует понимать как *полное приравнивание* неинерциальных систем к инерциальным. Следует помнить, что в неинерциальных системах отсчета физические законы специфически видоизменяются. Этот факт играет определяющую роль при переходе к общей теории относительности, где инерциальную систему отсчета можно вводить лишь локально (*неголономность* инерциальных систем в присутствии истинной гравитации, т. е. искривления пространства-времени).

Если это предисловие прочтет начинающий физик, студент или школьник (правда, предисловиям редко выпадает такая честь), пусть он не думает, что переводчик решил подавить его своей ученостью. Мои цели совсем иные. Я не сомневаюсь, что яркая, оригинальная книга Тейлора и Уилера произведет большое впечатление, вдохновляющее молодого читателя на изучение физики; надеюсь, что она и после прочтения много лет не будет сдана им в макулатуру. Иными словами, пусть читатель возвращается к этому учебнику вновь и вновь; может быть, прочтя тогда сделанные в предисловии замечания, он задумается над путями развития теории относительности и — кто знает? — возможно, из-под его пера выйдет еще более совершенный учебник. А пока для него главное — читать эту книгу и систематически решать упражнения.

\* \* \*

Второе издание книги дополнено ответами на упражнения, присланными авторами. Читателя, таким образом, ожидает искушение сразу заглянуть в эти ответы, не утруждая себя решением упражнений. Если он пойдет на это — тем хуже для него. Напротив, уже решив упражнение, полезно посмотреть ответ и сравнить свой метод решения с предлагаемым авторами.

В этом издании мы добавили новую задачу, по духу близкую к составленным самими авторами и касающуюся одного визуально наблюдаемого эффекта, где наряду с обычной релятивистской кинематикой важную роль играют законы распространения света (задача № 54а).

Редакция и переводчик благодарят авторов книги за любезную присылку ответов на упражнения.

*Н. Мицкевич*

---

# 1.

## ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА- ВРЕМЕНИ

### 1. ПРИТЧА О ЗЕМЛЕМЕРАХ

Жили-были в тридевятом царстве два племени — дневное и ночное, и правил ими король. Королевские земли для нужд дневного племени мерил дневной землемер. Направления на север и на восток он определял по магнитной стрелке компаса. Работая, он откладывал к востоку от центра столичной площади расстояния в метрах ( $x$  в метрах), а расстояния в северном направлении, которые считались священными, он измерял в других единицах — милях ( $y$  в милях). Он делал свое дело аккуратно и добросовестно, так что люди его племени часто пользовались записями своего землемера.

---

*Дневной землемер ориентировался  
на магнитный северный полюс*

Люди ночного племени пользовались услугами другого землемера, который определял направления на север и на восток по Полярной звезде. И этот землемер отсчитывал расстояния к востоку от центра столичной площади в метрах ( $x'$  в метрах), а священные расстояния к северу — в милях ( $y'$  в милях). Он тоже делал свое дело аккуратно и добросовестно. Все углы земельных участков характеризовались в его реестре значениями двух координат:  $x'$  и  $y'$ .

---

*Ночной землемер ориентировался  
на Полярную звезду*

Однако настал день, когда в землемерном училище появился студент, лишенный предрассудков. Вопреки установившейся традиции он стал посещать занятия, которые вели и дневной, и ночной землемеры — главы обоих соперничающих направлений. Первый из них научил нашего студента на дневных занятиях, как определять положение городских ворот и углов земельных участков по своему методу. На ночных занятиях студент изучил метод другого землемера. Шли дни и ночи, и наш студент все больше задумывался над тем, как привести в разумное соответствие оба эти метода определения местоположения объектов. Он произвел сравнение данных о поло-

Таблица 1. Две разные системы данных, характеризующие одну и ту же точку

Точка (место)	Данные, взятые относительно координатных осей дневного землемера, ориентированных по магнитному компасу ( $x$ в метрах, $y$ в милях)		Данные, взятые относительно координатных осей ночного землемера, ориентированных по Полярной звезде ( $x'$ в метрах, $y'$ в милях)	
	$x$	$y$	$x'$	$y'$
Городская площадь	0	0	0	0
Ворота $A$	$x_A$	$y_A$	$x'_A$	$y'_A$
Ворота $B$	$x_B$	$y_B$	$x'_B$	$y'_B$
Прочие ворота	...	...	...	...

жении городских ворот относительно центра столичной площади, полученных обоими землемерами, и получил табл. 1.

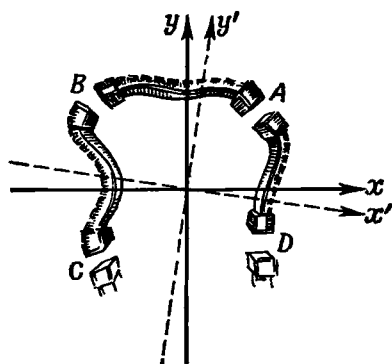
В нарушение всех традиций студент сделал смелый и еретический шаг и перевел результаты измерений в северном направлении, прежде всегда выражавшиеся в милях, в метры с помощью постоянного множителя перевода  $k$ . Тогда он обнаружил, что величина  $\sqrt{(x_A)^2 + (ky_A)^2}$ , вычисленная по данным дневного землемера о положении ворот  $A$ , численно в точности равна величине  $\sqrt{(x'_A)^2 + (ky'_A)^2}$ , вычисленной по данным ночного землемера для тех же ворот  $A$ . Проведя эти операции с данными о положении ворот  $B$ , студент и для них нашел полное согласие. Возбуждение студента достигло предела, когда он испробовал свой метод на данных о всех других городских воротах и во всех случаях получил подтверждение своей догадки. Он решил дать имя новооткрытой величине и назвал

$$\sqrt{(x)^2 + (ky)^2} \quad (1)$$

расстоянием точки  $(x, y)$  от центра города. Он заявил, что им открыт принцип инвариантности расстояния, т. е. что расстояния, вычисленные с помощью координат дневного и ночного землемеров, в точности совпадают, хотя сами значения этих координат совершенно различны.

*Открытие: расстояние инвариантно*

Эта притча иллюстрирует то примитивное состояние, в котором находилась физика до того, как Эйнштейн в Берне, Лоренц в Лейдене и Пуан-



Р и с. 1. Схема города и городских ворот с нанесенными на нее осями координат, используемыми двумя разными землемерами.

каре в Париже открыли *частную теорию относительности*. Насколько примитивное?

1. Землемеры мифического королевства измеряли расстояния в северном направлении в священных единицах — милях, иных, чем единицы, в которых они измеряли расстояния в восточном направлении. Аналогично люди, занимавшиеся физикой, измеряли время в священных единицах — секундах, иных, чем единицы, в которых они измеряли пространство. Никому не приходило в голову применить и здесь и там одни и те же единицы или попытаться комбинировать друг с другом возведенные в квадрат пространственную и временную координаты, выраженные в метрах. Множитель перехода между секундами и метрами, а именно скорость света  $c = 2,997925 \times 10^8$  метра в секунду, считался священным числом. Никто не считал его просто множителем перехода, подобным множителю перехода между милями и метрами, т. е. множителем, который возник лишь благодаря исторической случайности и лишен глубокого физического смысла.

2. В нашей притче северные координаты  $y$  и  $y'$ , определенные разными землемерами, не очень сильно отличались друг от друга, потому что соответствующие направления на север были разделены лишь малым углом  $10^\circ$ . Наш мифический студент сначала думал, что малое различие между  $y$  и  $y'$  вызвано просто ошибками в геодезической съемке. Аналогично этому люди думали, что время между взрывами двух хлопучек будет одним и тем же, кто бы его ни измерял. И лишь в 1905 г. мы узнали, что разница во времени между двумя событиями (первое из которых берется в качестве начала отсчета — «опорное событие») в действительности неодинакова (равна  $t$  и  $t'$ ) для наблюдателей, находящихся в разных состояниях движения. Пусть первый наблюдатель неподвижен относительно лаборатории, а второй наблюдатель пролетает мимо в сверхскоростной ракете. Ракета влетает через парадный вход, проносится через длинный коридор и вылетает в дверь черного хода. В коридоре взрываются сначала первая хлопучка («опорное событие»), а затем вторая («событие А»). Оба наблюдателя уславливаются между собой, что опорное событие определяет начало отсчета времени и начало отсчета расстояния.

Пусть второй взрыв произошел, например, через 5 сек после первого по данным лабораторных часов и на 12 м дальше по коридору. Тогда его временная координата равна  $t_A = 5$  сек, а пространственная  $x_A = 12$  м.

Дальнейшие взрывы и события также происходят по длине коридора. Данные обоих наблюдателей представлены в табл. 2.

Таблица 2. Пространственные и временные координаты одних и тех же событий, получаемые двумя наблюдателями, движущимися относительно друг друга. Для простоты значения координат  $y$  и  $z$  приняты равными нулю, а ракета считается движущейся в направлении оси  $x$

Событие	Значения координат, измеренные наблюдателем, находящимся			
	в покое в лаборатории ( $x$ в метрах, $t$ в секундах)		в ракете (движущийся с нею) ( $x'$ в метрах, $t'$ в секундах)	
Опорное событие	0	0	0	0
Событие А	$x_A$	$t_A$	$x'_A$	$t'_A$
Событие В	$x_B$	$t_B$	$x'_B$	$t'_B$
Прочие события	...	...	...	...

*Первый наблюдатель использует лабораторную систему отсчета  
Второй наблюдатель использует систему отсчета ракеты*

3. Открытие понятия расстояния мифическим студентом подобно открытию в 1905 г. Эйнштейном и Пуанкаре понятия *интервала*. Интервал, вычисленный по данным измерений одного наблюдателя,

$$\text{Интервал} = \sqrt{(ct_A)^2 - (x_A)^2} \quad (2)$$

в точности равен интервалу, вычисленному по данным измерений другого наблюдателя,

$$\text{Интервал} = \sqrt{(ct'_A)^2 - (x'_A)^2}, \quad (3)$$

даже если фигурирующие в этих вычислениях координаты *по отдельности не равны друг другу*. Два наблюдателя припишут пространственным и временным координатам событий  $A, B, C, \dots$  относительно одного и того же опорного события разные значения, но, вычислив эйнштейновские *интервалы* между этими событиями, они обнаружат, что соответствующие величины совпадают. Эта *инвариантность интервала* (его независимость от выбора системы отсчета) вынуждает признать, что время невозможно отделить от пространства. Пространство и время — части единого целого, которое называется *пространством-временем*. Геометрия пространства-времени в действительности характеризуется четырьмя измерениями. Можно сказать, что «направление временной оси» зависит от состояния движения наблюдателя точно так же, как направление оси  $y$  землемера зависело от его метода ориентации на «север».

*Открытие: интервал инвариантен*

В остальной части этой главы мы будем заниматься развитием аналогии между снятием планов в пространстве и взаимным сопоставлением событий в пространстве-времени. Обзор, предвосхищающий наши выводы, представлен в табл. 3. Для того чтобы почувствовать единство пространства и времени, мы обращаемся к способу, помогающему лучше разглядеть ландшафт; для

Таблица 3. Детализация притчи о землемерах, предвосхищающая дальнейший анализ

<i>Притча о землемерах — геометрия пространства</i>	<i>Физическая параллель—геометрия пространства-времени</i>
Задача землемера — определить положение точки (ворот $A$ ), пользуясь одной из двух систем координат, повернутых относительно друг друга	Задача физика — определить положение в пространстве и времени события (взрыв хлопушки $A$ ), пользуясь одной из двух движущихся относительно друг друга систем отсчета
Две системы координат — ориентированная по магнитному компасу и ориентированная по Полярной звезде	Две системы отсчета — лабораторная система отсчета и система отсчета ракеты
Для удобства все землемеры условились измерять положения относительно общего начала (центр городской площади)	Для удобства все физики условились измерять положения событий в пространстве и во времени относительно общего опорного события (взрыв опорной хлопушки)



*Притча о землемерах—геометрия пространства*

*Физическая параллель—геометрия пространства-времени*

Анализ результатов, полученных землемером, упрощается, если координаты точки  $x$  и  $y$  измерены в одинаковых единицах — метрах

Взяты по отдельности, координаты  $x_A$  и  $y_A$  ворот  $A$  имеют разные значения в двух системах координат, повернутых относительно друг друга

*Инвариантность длины.* Расстояние (длина)  $(x_A^2 + y_A^2)^{1/2}$  от ворот  $A$  до городской площади получается одинаковым, если его вычислять по результатам измерений в любой из двух повернутых относительно друг друга систем ( $x_A$  и  $y_A$  измерены в метрах)

*Преобразование поворота.* Пользуясь евклидовой геометрией, землемер может решить следующую задачу: по данным значениям координат  $x'_A$  и  $y'_A$  ворот  $A$  в системе ночного землемера и относительноному наклону соответствующих осей найти координаты  $x_A$  и  $y_A$  тех же самых ворот в системе дневного землемера

Анализ результатов, полученных физиком, упрощается, если координаты события  $x$  и  $t$  измерены в одинаковых единицах — метрах

Взяты по отдельности, координаты  $x_A$  и  $t_A$  события  $A$  имеют разные значения в двух системах отсчета, равномерно движущихся относительно друг друга

*Инвариантность интервала.* Интервал  $(t_A^2 - x_A^2)^{1/2}$  между событием  $A$  и опорным событием получается одинаковым, если его вычислять по результатам измерений в любой из двух систем отсчета, движущихся относительно друг друга ( $x_A$  и  $t_A$  измерены в метрах)

*Преобразование Лоренца.* Пользуясь лоренцевой геометрией, физик может решить следующую задачу: по данным значениям координат  $x'_A$  и  $t'_A$  события  $A$  в системе ракеты и скорости ракеты относительно лабораторной системы отсчета найти координаты того же самого события  $x_A$  и  $t_A$  в лабораторной системе

этого нужно посмотреть на него под разными углами. Поэтому мы сравниваем пространственную и временную координаты одного и того же события в двух *разных* системах отсчета, движущихся относительно друг друга.

Притча о землемерах подсказывает нам, что было бы полезно перейти к одинаковым единицам для измерения как пространства, так и времени. Поэтому возьмем в качестве такой единицы метр. В метрах можно измерять и время. Если установить на обоих концах полуметрового стержня по зеркалу, то между этими зеркалами может отражаться взад и вперед луч световой вспышки. Такое устройство представляет собой *часы*. Можно сказать, что эти часы издадут «тик-так» каждый раз, когда свет возвращается к первому зеркалу. Между всеми последовательными возвращениями свет вспышки проходит путь, в общей сложности равный *1 метру*. Мы назовем поэтому промежуток времени между двумя последовательными «тик-так» таких часов *1 метром светового времени* или, проще, *1 метром времени*. (Проверьте, что *1 секунда* приблизительно равна  $3 \cdot 10^8$  *метрам* светового времени.)

*Время измеряется в метрах*

Одна из целей физики — отыскание простых взаимосвязей между событиями. В нашем случае для этого целесообразно выбрать специальную систему отсчета, относительно которой законы физики имеют простую форму. Заметим, что вблизи Земли все предметы подвержены действию силы тяжести. Это действие усложняет известные нам по обыденному опыту законы движения. Чтобы исключить подобные усложняющие обстоятельства, мы сконцентрируем наше внимание в следующем параграфе на свободно



Р и с. 2. Рисунок из первых изданий «Из пушки на Луну» Ж. Верна. Кличка бедного пса была Спутник.

падающей вблизи Земли системе отсчета. В такой системе отсчета сила тяжести не ощущается, и мы назовем эту лишенную тяготения систему отсчета *инерциальной*. В частной теории относительности исследуются классические законы физики, взятые относительно инерциальной системы отсчета.

---

*Упрощение: переход к свободно падающей лаборатории*

Принципы частной теории относительности замечательно просты. Они много проще аксиом геометрии Евклида или правил управления автомобилем. Однако и геометрия Евклида, и автомобиль были созданы поколениями обыкновенных людей, даже не испытывшими в полной мере удивления, которого заслуживали плоды их творчества. Некоторые из лучших умов XX в. выступали против идей теории относительности, и не потому, что их природа темна, а по той простой причине, что человеку трудно преодолеть установившийся взгляд на вещи. Теперь относительность уже выиграла сражение. Мы уже можем выразить ее понятия так просто, что правильный взгляд на вещи устанавливается сам собой, — это значит «делать плохое трудным, а хорошее — простым»<sup>1)</sup>. Понимание теории относительности отныне не есть проблема *обучения*, а просто дело *интуиции* — практикуемого подхода к вещам. При таком подходе громадное число прежде непостижимых опытных данных становятся совершенно естественными и понятными<sup>2)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Высказывание Эйнштейна по аналогичному поводу в письме архитектору Корбюзье.

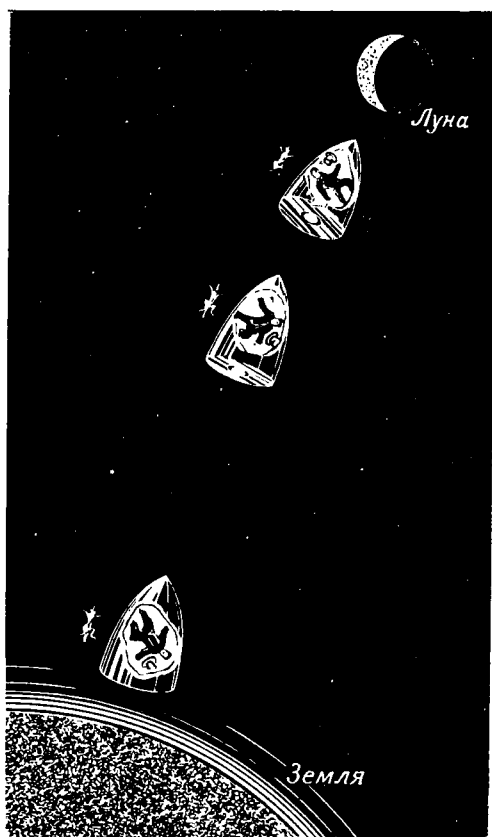
<sup>2)</sup> Исчерпывающий список литературы по частной теории относительности для начинающих, а также ряд оттисков работ см. в книге *Special Relativity Theory, Selected Reprints*, опубликованной Американским институтом физики для Американской ассоциации учителей физики в 1963 г. [В советском издании обширную библиографию по частной теории относительности см. в книге: У. И. Ф р а н к ф у р т, *Очерки по истории специальной теории относительности*, Изд-во АН СССР, М., 1961. — *Прим. перев.*]

## 2. ИНЕРЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА

Менее чем через месяц после того, как капитуляцией при Аппоматоксе закончилась гражданская война в Америке (1861—1865), французский писатель Жюль Верн начал писать свой роман «Из пушки на Луну». В этом романе рассказывалось о том, как выдающиеся американские артиллерийские инженеры отлили в специальной шахте во Флориде гигантскую пушку, направленную жерлом в небо. Из этой пушки был выпущен десятитонный снаряд, в котором находились трое людей и несколько животных. Когда снаряд устремился в свободный полет к Луне, покинув канал ствола пушки, его пассажиры могли, как обычно, ходить внутри снаряда по дну, расположенному ближе к Земле (см. рис. 3а). При дальнейшем полете пассажиры чувствовали, что их все меньше и меньше прижимает к полу космического корабля, пока, наконец, в той точке, где Земля и Луна притягивают к себе тела с равной силой, но в противоположных направлениях, эти пассажиры стали свободно парить, оторвавшись от пола. Затем, приближаясь к Луне,



Р и с. 3а. Неправильное предсказание. Жюль Верн полагал, что пассажир свободно летящего снаряда будет стоять на том дне снаряда, которое ближе к Земле или к Луне, в зависимости от того, притяжение которой из них сильнее, но что собака будет парить рядом со снарядом в течение всего путешествия.



Р и с. 3б. Правильным было бы предсказание, что и пассажир будет парить внутри снаряда в течение всего путешествия. Жюль Верн прав, описывая движение собаки.

они снова смогли ходить, но теперь уже по противоположной стороне своего корабля, обращенной к Луне. В начале полета одна из находившихся в снаряде собак погибла от ран, полученных при запуске. Пассажиры выбросили ее труп в люк на дне снаряда, но обнаружили, что он следует за снарядом в течение всего путешествия.

---

*Пассажиры жюльверновского космического корабля ощущали свой вес*

Этот рассказ приводит к парадоксу, играющему решающую роль для теории относительности. Жюль Верн считал возможным, что гравитационное притяжение со стороны Земли способно прижимать пассажира к стороне снаряда, обращенной к Земле, на первоначальном этапе путешествия. Он считал также естественным, что труп собаки будет все время оставаться вблизи снаряда, так как и снаряд, и собака независимо друг от друга движутся по одной и той же траектории в пространстве. Но если собака летит *снаружи* рядом с космическим кораблем в течение всего путешествия, то почему бы и пассажиру не парить свободно *внутри* космического корабля? Ведь если бы мы распилили снаряд на две части, не стал ли бы пассажир, оказавшийся теперь «снаружи», свободно парить над полом?

---

*Парадокс пассажира и собаки*

Наш опыт в области реальных космических полетов позволяет разрешить этот парадокс. Жюль Верн ошибался, описывая состояние пассажира внутри космического корабля. Подобно находящейся снаружи корабля собаке, пассажир внутри корабля совершает тот же путь в пространстве, что и космический корабль. Поэтому он должен свободно парить относительно корабля в течение всего путешествия (рис. 36). Конечно, гравитационное поле Земли действует на пассажира. Но оно действует и на космический корабль. В самом деле, относительно Земли *ускорение космического корабля* под действием ее гравитационного поля *в точности равно ускорению пассажира* под действием этого поля. Ввиду равенства этих ускорений между пассажиром и космическим кораблем не будет существовать *относительного* ускорения. Итак, космический корабль служит системой отсчета («инерциальной системой отсчета»), по отношению к которой пассажир не испытывает ускорения.

---

*Пассажир реального космического корабля испытывает состояние невесомости*

Утверждение о том, что ускорение пассажира относительно космического корабля равно нулю, вовсе не равносильно утверждению, что их относительная скорость обязательно равна нулю. Пассажир может отталкиваться от пола или стен, в результате чего он пролетит внутри корабля и ударится о стену. Но если его начальная скорость относительно корабля была равна нулю, то этот случай будет самым интересным, так как равная нулю скорость будет постоянно сохраняться и в дальнейшем. И пассажир, и космический корабль будут следовать в пространстве одним и тем же путем. Как это замечательно, что пассажир, даже лишенный возможности взглянуть наружу, тем не менее следует строго предопределенной орбите! Лишенный возможности двигаться, он даже с закрытыми глазами не касается стен. Можно ли в большей степени исключить влияние тяготения?!

Пусть современный космический корабль с пассажиром на борту запускается вертикально вверх с Земли, поднимается и падает обратно (рис. 4). (Пассажир в лифте испытывает близкое подобие этого падения, когда обрывается трос лифта.) Выберем такой свободно падающий космический корабль в качестве наилучшей возможной системы отсчета для физических опытов. Эта система отсчета является самой лучшей, потому что наряду со всем прочим законы движения частиц имеют наиболее простой вид в свободно падающем корабле. В таком корабле свободная частица, находившаяся первоначально в покое, сохранит состояние покоя. Если легким толчком придать этой частице скорость, она будет двигаться в корабле по прямой линии с постоянной скоростью. Другие опыты подтверждают, что *все* законы механики имеют простое выражение, если их выразить относительно свободно падающего корабля. Такой свободно поднимающийся или свободно падающий (а вообще говоря, свободно движущийся в пространстве) космический корабль мы называем *инерциальной системой отсчета*.

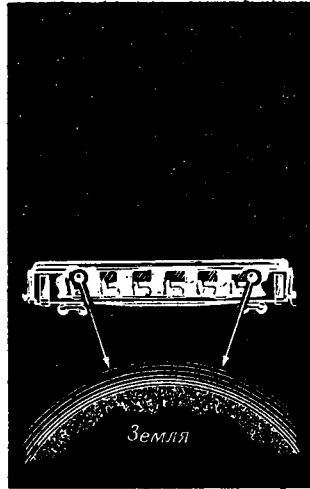
### Понятие инерциальной системы отсчета

Взглянем на свободно падающий космический корабль с поверхности Земли. Мы увидим, как проста причина того, что первоначально покоившаяся свободная частица сохраняет свое состояние покоя относительно корабля. Причина эта в том, что по отношению к поверхности Земли как корабль, так и частица падают с одним и тем же ускорением (рис. 4). Именно благодаря такому равенству ускорений *относительные* положения частицы и космического корабля не меняются, если наша частица первоначально покоилась относительно корабля.

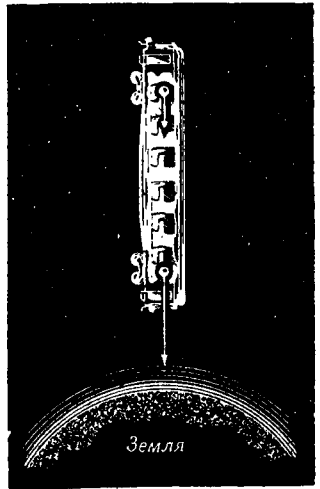
В определении инерциальной системы отсчета содержится требование, чтобы в ней *не ощущались гравитационные силы*. Если в качестве такой системы взят космический корабль, находящийся вблизи Земли, то он не должен быть очень большим, так как помещенные в него на большом расстоянии друг от друга частицы будут испытывать разное воздействие со стороны *неоднородного* гравитационного поля Земли. Так, если двум



Р и с. 4. Космический корабль, свободно падающий вблизи Земли.



Р и с. 5. Железнодорожный вагон, свободно падающий в горизонтальном положении вблизи Земли.



Р и с. 6. Железнодорожный вагон, свободно падающий в вертикальном положении вблизи Земли.

частицам с разных концов корабля предоставить возможность свободно падать, каждая из них будет притягиваться к центру Земли, и они будут сближаться друг с другом в ходе падения (рис. 5). В качестве другого примера возьмем две частицы, раздвинутые в вертикальном направлении, строго одна над другой (рис. 6). Их ускорение под действием силы тяжести будет иметь одно и то же направление, но более близкая к Земле частица будет мало-помалу оставлять другую позади, и по мере падения космического корабля расстояние между частицами будет увеличиваться. В обоих случаях законы механики не будут простыми в очень большом космическом корабле — большой космический корабль не представляет собой инерциальной системы отсчета.

---

*Земное притяжение неоднородно, и большой космический корабль не может служить инерциальной системой отсчета*

Однако нам нужно, чтобы законы механики имели в космическом корабле простой вид. Поэтому необходимо устранить все относительные ускорения, вызванные внешними факторами, «устранить» в том смысле, чтобы сделать величину этих ускорений ниже обнаружимого предела, когда они уже не будут искажать картины более важных ускорений, подлежащих изучению (например, возникающих при столкновении частиц). Это может быть достигнуто при выборе достаточно малого космического корабля. Чем меньше космический корабль, тем меньше и величина относительных ускорений объектов в разных точках этого корабля. Пусть мы располагаем приборами, измеряющими относительные ускорения с любой заданной степенью точности. Как бы высока ни была точность (чувствительность) этих приборов, мы можем всегда взять космический корабль настолько малых размеров, что эти паразитные относительные ускорения окажутся ниже предела чувствительности приборов. В рамках выбранной точности такой космический корабль можно считать *инерциальной системой отсчета*.

---

*Пример космического корабля, имеющего достаточно малые размеры, чтобы быть пригодным в качестве инерциальной системы отсчета*

Когда можно сказать, что космический корабль или другая лаборатория имеет размеры достаточно малые, чтобы его можно было назвать инерциальной системой отсчета? Иначе говоря, когда относительные ускорения свободных частиц, помещенных в разных концах лаборатории, слишком малы, чтобы быть наблюдаемыми? Разбор ситуации в какой-то одной лаборатории послужит иллюстрацией для наших рассуждений. Допустим, что железнодорожный вагон 25 м длины в горизонтальном положении сброшен с высоты 250 м на поверхность Земли (рис. 5). Время, прошедшее от начала до конца падения, будет равно приблизительно 7 сек, т. е. около  $21 \cdot 10^8$  м светового времени. Пусть в первый момент падения в воздухе в противоположных концах вагона будут предоставлены самим себе два маленьких шарика от подшипника. За время падения они приближаются друг к другу на  $10^{-3}$  м (толщина 10 страниц этой книги) под действием различия в направлениях действующей на них силы земного притяжения (см. упражнение 32). В другом случае предположим, что тот же вагон сбрасывается в вертикальном положении, причем нижний его конец вначале находится на высоте 250 м над поверхностью Земли (рис. 6). Винов освободим при этом в противоположных концах вагона два шарика от подшипника. Теперь за время падения шарики удалятся друг от друга на  $2 \cdot 10^{-3}$  м, так как нижний из них испытывает большее гравитационное ускорение, чем верхний. В как-

дом из этих примеров будем считать, что используемые в вагоне измерительные приборы не обладают достаточной чувствительностью, чтобы зафиксировать относительное движение шариков. Тогда, пользуясь приборами указанной степени чувствительности и в указанные ограниченные сроки наблюдения, мы можем принять наш железнодорожный вагон (или рассмотренный прежде свободно падающий космический корабль) в качестве инерциальной системы отсчета. Повысив чувствительность измерительного оборудования, мы уже не сможем использовать данный космический корабль в качестве инерциальной системы отсчета, если не изменим постановку опыта. Для этого следует либо укоротить 25-метровый отрезок, на котором проводились наблюдения, либо сократить длительность последних во времени. Лучше всего, однако, сократить в некоторой согласованной комбинации как пространственные, так и временные размеры исследуемой области. Наконец, как последнюю альтернативу можно предложить отправить с помощью ракеты (часть «в» упражнения 32) всю систему в такую область пространства, где невозможно измерить «дифференциал гравитационного ускорения» между двумя противоположными концами вагона. Эту же мысль можно выразить иначе: ускорение частиц *относительно вагона* должно стать нечувствительно малым. Эти относительные ускорения могут быть измерены внутри вагона без привлечения каких-либо внешних наблюдений. И только если эти относительные ускорения слишком малы, чтобы быть замеченными, существует система отсчета, относительно которой законы движения имеют простой вид, — *инерциальная система отсчета*.

---

#### *Определение инерциальной системы отсчета*

*Система отсчета называется инерциальной в некоторой области пространства и времени, если во всей этой области пространства-времени с некоторой данной степенью точности любая первоначально покоившаяся пробная частица сохраняет свое состояние покоя, а любая пробная частица, первоначально двигавшаяся, продолжает свое движение без изменения величины и направления своей скорости. Инерциальную систему отсчета называют также лоренцевой системой отсчета. При таком определении инерциальные системы всегда с необходимостью локальны, т. е. инерциальны лишь в ограниченной области пространства-времени.*

---

#### *Определение области пространства-времени*

«Область пространства-времени» — каков точный смысл этого понятия? Длинный и узкий железнодорожный вагон, использованный в нашем примере, служил средством для исследования пространства-времени на ограниченном отрезке времени и в том или ином пространственном направлении. Его можно было направить с севера на юг, с востока на запад либо сверху вниз. При каждой ориентации могло быть измерено относительное ускорение двух маленьких шариков от подшипника, освобожденных в противоположных концах вагона. Как можно показать с помощью вычислений, во всех трех направлениях (как и в промежуточных) относительный «дрейф» этих двух пробных частиц составлял половину (или менее) минимальной поддающейся обнаружению величины. Тогда во всем кубе с ребрами 25 м пространства и на протяжении 7 сек времени всевозможными способами движущиеся пробные частицы отклоняются от прямолинейного движения на не поддающуюся обнаружению величину. Другими словами, данная система отсчета является инерциальной в области пространства-времени

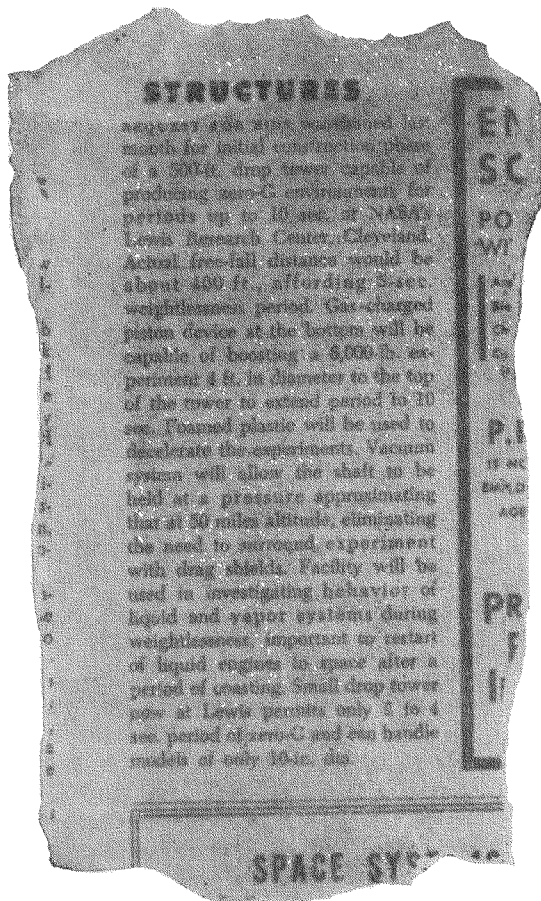
с размерами

(25 м × 25 м × 25 м пространства) × (21 · 10<sup>8</sup> м времени).

Обсуждение областей пространства-времени, размеры которых превышают размеры таких локальных инерциальных систем, см. в гл. 3.

### Определение пробной частицы

«Пробная частица». Насколько мала должна быть частица для того, чтобы ее можно было принять за пробную? Ее масса должна быть настолько малой, чтобы присутствие этой частицы в пределах некоторой заданной степени точности не влияло на движение других близких к ней частиц. На языке ньютоновской механики это означает, что гравитационное притяжение между пробной частицей и другими частицами должно быть пренебрежимо малым (с заданной степенью точности). Рассмотрим, например, частицу с массой 10 кг. Если поместить другую частицу с меньшей массой в  $\frac{1}{40}$  м от нее, то первоначальное состояние покоя этой второй частицы нарушится настолько, что она сдвинется менее чем за 3 мин на 10<sup>-3</sup> м. Итак, 10-килограммовый объект не есть пробная частица в этой смысле. Пробная частица подвергается действию гравитационных сил, но сама не вызывает появления сколько-нибудь заметной гравитационной силы.



### СТРОИТЕЛЬСТВО

В прошлом месяце был предложен проект на строительство нулевого цикла 500-футовой башни свободного падения, обеспечивающей условия невесомости на период до 10 сек, в Льюисовском исследовательском центре НАСА в Кливленде. Пролет свободного падения высотой около 400 футов обеспечит пятисекундный период невесомости. Пневматическое поршневое устройство на дне шахты позволит подбрасывать образцы в 6000 фунт весом и 4 футов в диаметре до вершины башни, продлевая тем самым период невесомости до 10 сек. Для торможения образцов будет использован пенопласт. Система вакуумных насосов позволит поддерживать в шахте давление, соответствующее высоте около 50 миль, так что отпадает необходимость окружать образец экранами, компенсирующими сопротивление воздуха. Сооружение будет использовано для исследований жидких и газообразных систем в условиях невесомости в рамках проблемы запуска жидкостных двигателей в условиях космоса в ходе орбитальных полетов. Функционирующая в настоящее время в Льюисе малая башня свободного падения обеспечивает невесомость лишь на период от 2 до 4 сек и допускает испытания образцов лишь 10 дюйм в диаметре.

Р и с. 7. Новейшая инерциальная система отсчета. Вырезка из журнала Engineering Opportunities за март 1964 г.



*Инерциальную систему удастся ввести, потому  
что все тела падают с одним  
и тем же ускорением*

Инерциальную систему отсчета было бы невозможно определять, если бы не существовало замечательного природного феномена. Все частицы различных размеров, формы и состава падают в одном и том же месте с *одним и тем же ускорением* относительно Земли. Если бы кто было не так, наблюдатель внутри падающего космического корабля заметил бы относительное ускорение у разных частиц, даже когда эти частицы находятся вблизи друг друга. По крайней мере некоторые из частиц, покоившихся первоначально, вышли бы из состояния покоя, что означало бы непригодность космического корабля как инерциальной системы отсчета согласно определению последней. В какой мере мы уверены в том, что все частицы *в одном и том же месте, но разные по своему составу* падают на Землю с одним и тем же ускорением? Как говорит легенда, Галилей бросал для проверки этого предположения с «Падающей башни» в Пизе шары, сделанные из разных веществ<sup>1)</sup>. В 1922 г. барон Роланд фон Этвэш установил с точностью  $5 : 10^9$ , что дерево и платина испытывают одинаковое ускорение со стороны Земли. Недавно Роберт Дикке указал, что Солнце является более удобным источником гравитационного ускорения для измерений (см. упражнение 35). Изменение каждые 12 час направления солнечного притяжения на противоположное позволяет производить фантастически большое усиление путем резонанса. Цилиндры из алюминия и золота подвергались ускорению со стороны Солнца ( $0,59 \cdot 10^{-2}$  м/сек<sup>2</sup>), одинаковому с точностью  $3 : 10^{11}$ , как показали Р. Дикке и Питер Ролл<sup>2)</sup>. Это была одна из наиболее чувствительных проверок фундаментальнейшего физического принципа: тождества ускорения, вызванного силой тяжести у пробной частицы любой природы.

Из этого принципа вытекает, что для выяснения, является ли данная система отсчета инерциальной, в качестве пробной частицы может быть использована частица, состоящая из *любого* вещества. Система отсчета, инерциальная для пробных частиц одного вида, будет также инерциальной для пробных частиц любых других видов.

### 3. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Мы описываем движение пробных частиц по отношению к некоторой системе отсчета, с тем чтобы выяснить, является ли эта система инерциальной. Движения тех же пробных частиц, а также их столкновения (если таковые происходят) могут быть описаны и по отношению более чем к одной инерциальной системе.носителем одной системы отсчета может быть космический корабль, выполненный в форме полого цилиндра (рис. 8, а), тогда как носителем другой системы отсчета может быть подобная же конструкция с несколько меньшим диаметром, таким, чтобы при встрече с первой она могла пролететь внутри нее (рис. 8, б). При этом существует область пространства-времени, общая для внутренней части обоих кораблей во время их взаимного совмещения. Множество пробных частиц могут пролетать в том или ином произвольно выбранном направлении через эту область. Путь каждой из них будет прямолинейным, если изобразить его в координатах одной из систем отсчета, а также в координатах другой, так как они обе являются *инерциальными* системами отсчета. Такая прямолинейность путей возможна лишь благодаря тому, что *любые две перекрывающиеся друг с другом*

<sup>1)</sup> О том, производил ли в действительности Галилей этот эксперимент, см. книгу Lloyd W. Taylor, *Physics the Pioneer Science*, Vol. 1, Dover Publications, New York, 1959, p. 25.

<sup>2)</sup> См. главу по эксперименту в теории относительности, написанную Дикке в книге *Relativity, Groups, and Topology*, ed. by C. and B. DeWitt, Gordon and Breach, New York, 1964, p. 173—177, или в книге R. H. Dicke, *The Theoretical Significance of Experimental Relativity*, Gordon and Breach, New York, 1964.

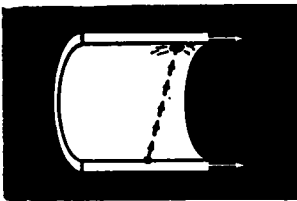
*Перекрывающиеся инерциальные системы отсчета движутся относительно друг друга прямолинейно и равномерно*

*инерциальные системы отсчета движутся друг относительно друга равномерно.* Напротив, если второй космический корабль включает двигатели и ускоряется во время прохождения сквозь первый (рис. 8, в), то по наблюдениям с этого второго корабля траектории пробных частиц будут искривлены. Если имеющееся оборудование позволяет заметить кривизну таких траекторий, то эту ускоренную систему отсчета нельзя считать инерциальной.

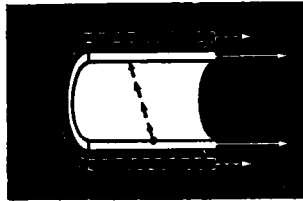
Если даны две *инерциальные системы отсчета*, равномерно движущиеся друг относительно друга, то любая находящаяся в движении пробная частица будет относительно них сохранять величину и направление скорости своего движения неизменными, хотя бы даже эти величина и направление ее скорости были совершенно различными в каждой из двух систем. В самом деле, ведь мы *определили* понятие инерциальной системы отсчета так, чтобы в любой инерциальной системе был справедлив следующий закон механики (первый закон Ньютона): «*Всякое тело сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения, пока и поскольку оно не понуждается внешними силами изменить это состояние*». Кроме этого закона механики, существуют и другие. Каждый из них также будет справедлив в любой инерциальной системе отсчета, о чем свидетельствует эксперимент.

*Относительность: законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета*

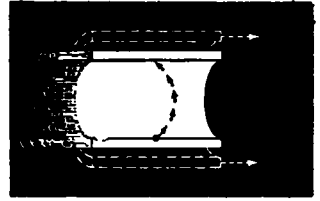
Сохраняют ли справедливость во всех инерциальных системах отсчета и другие законы физики? Должен ли инженер-электротехник, рассчитывая электрические цепи для реактивного самолета, применять иные законы электротехники на том основании, что самолету предстоит двигаться? Не придется ли пользоваться иными законами электромагнитного излучения при расчете радиопередатчика для космического корабля, потому что этот корабль будет двигаться? Не придется ли применять новые законы для истолкования экспериментов по столкновениям протонов с атомами мишени, если и компактный протонный ускоритель, и мишень, и счетчики частиц установлены на равномерно движущейся железнодорожной платформе? Насколько нам известно, ответом на эти три вопроса, как и на другие, подоб-



а) Движение типичной пробной частицы, наблюдаемое в первой инерциальной системе.



б) Движение той же частицы, наблюдаемое во второй инерциальной системе отсчета, движущейся относительно первой.



в) Движение той же пробной частицы, наблюдаемое в ускоренной, а потому *неинерциальной* системе отсчета.

Р и с. 8. Сравнение инерциальных систем отсчета с ускоренной системой.

ные им, является «нет». Несмотря на самые усердные поиски, никто никогда не обнаружил каких-либо нарушений следующего принципа:

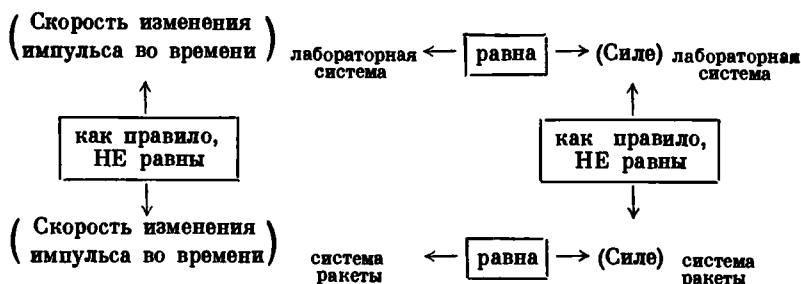
*Все законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.*

Это утверждение мы будем называть *принципом относительности*. Принцип относительности утверждает, что, установив законы физики в одной инерциальной системе отсчета, мы можем применять их без всякого изменения в любой другой инерциальной системе отсчета. В любой инерциальной системе отсчета одинаковы как *форма* законов физики, так и *численные значения физических констант*, фигурирующих в этих законах. Все инерциальные системы эквивалентны с точки зрения любого закона физики. Выражая это утверждение негативно, можно сказать, что принцип относительности утверждает *полную невозможность отличить одну инерциальную систему отсчета от другой с помощью законов физики*, точно так же, как измерительная рулетка и уровень землемера не могут показать, используем ли мы направление на север по Полярной звезде или по магнитной стрелке компаса!

*О чем нам НЕ говорит принцип относительности?*

Отметим, о чем нам *не* говорит принцип относительности. Он не говорит, что промежуток времени между событиями *A* и *B* будет одним и тем же, если его измерять в разных инерциальных системах отсчета. Не говорит он и о том, что расстояние в пространстве между этими двумя событиями будет одним и тем же в этих двух системах. Как правило, ни промежутки времени, ни расстояния не будут одинаковыми в двух разных инерциальных системах, точно так же как разности северных и восточных координат ворот *A* и *B* не совпадают при их определении дневным и ночным землемерами. В результате импульс данной частицы в одной системе будет иметь другое значение, чем ее же импульс во второй системе. Даже скорость изменения импульса во времени будет, как правило, различной в разных системах отсчета, и то же относится к величине силы. Поэтому при изучении движения заряженной частицы два движущихся относительно друг друга наблюдателя не обязательно определяют одни и те же величины напряженностей электрического и магнитного полей, действующих на эту частицу. Полная сила, вызванная совместным действием электрического и магнитного полей, будет разной в каждой инерциальной системе отсчета.

И тем не менее, несмотря на всю свою специфичность в разных системах отсчета, физика в них будет одна и та же! Физические величины в разных системах отличаются по своим *численным значениям*, но удовлетворяют одним и тем же *законам*. Скорость изменения импульса во времени, взятая в одной системе, равна полной силе, измеренной в этой же системе (второй закон Ньютона). Скорость изменения импульса во времени, взятая во второй системе, равна полной силе, измеренной во второй же системе:



И не только законы механики, но и законы электромагнетизма и все прочие законы физики, выполняющиеся в одной инерциальной системе отсчета, точно так же строго выполняются и в любой другой инерциальной системе отсчета. Именно этот факт мы имеем в виду, когда говорим, что «принцип относительности утверждает полную невозможность отличить одну инерциальную систему отсчета от другой с помощью законов физики».

Законы электродинамики (электромагнетизма), выполняющиеся в одной инерциальной системе отсчета, точно так же строго выполняются и в любой другой инерциальной системе отсчета. Численное значение величины скорости света ( $c = 2,997925 \cdot 10^8$  м/сек) является одной из постоянных, фигурирующих в законах электродинамики. Согласно принципу относительности, это экспериментальное значение должно быть одинаковым в любой из двух инерциальных систем отсчета, равномерно движущихся друг относительно друга. Подтверждается ли это на опыте? Ответ на этот вопрос: ДА, хотя современные эксперименты страдают совершенно неудовлетворительной чувствительностью для того, чтобы решить столь важный вопрос. Давайте поэтому, подобно плитке, «втянем рога» и сосредоточимся на более простом вопросе, на который можно дать окончательный ответ. В законах электродинамики нет выражений, которые зависели бы от направления. Поэтому следует ожидать, что скорость распространения вспышки света по замкнутому пути будет одинакова, когда свет распространяется по линии север — юг или восток — запад, т. е. скорость света *изотропна*. Пусть, однако, те же самые вспышки света наблюдаются с равномерно движущейся ракеты. Не окажется ли, что скорость света на замкнутом пути по отношению к этой ракете будет различной в зависимости от направления прямой, вдоль которой распространяется свет? На это принцип относительности отвечает НЕТ: скорость света, будучи изотропной в одной инерциальной системе отсчета, сохранит свою изотропность в любой другой инерциальной системе, охватывающей прежнюю пространственно-временную область.

---

*Опыт Майкельсона — Морли: скорость света изотропна во всех инерциальных системах отсчета*

Этот результат поистине удивителен. Мы знаем, что скорость звука в воздухе одинакова во всех направлениях, когда воздух неподвижен. Но достаточно подуть сильному ветру или, с тем же успехом, поехать при спокойном воздухе на автомобиле, чтобы «скорость звука по течению» оказалась больше, чем «скорость звука против течения» (в случае автомобиля берется «течение» воздуха относительно него.) Элементарный расчет показывает, что обе эти скорости отличаются от скорости звука, измеренной поперек течения. Скорость распространения звука по замкнутому пути, измеренная относительно автомобиля, будет различной в различных направлениях. Этот вывод верен и для любого другого вида волнового движения, *но не для света!* Почему же мы настолько уверены, что подобного результата не дадут опыты со светом? Наша уверенность основывается на ряде тончайших экспериментов, начиная с классического опыта А. Майкельсона и Е. Морли <sup>1)</sup>, сделанных с 1880 г. В них в качестве движущейся системы отсчета была использована сама Земля. (Напомним, что Земля практически является инерциальной системой отсчета при локальных опытах со светом; см. упражнение 31.) Земля движется со скоростью около 30 км/сек по своей орбите вокруг Солнца. По существу Майкельсон и Морли сравнивали скорость распространения света по замкнутому пути вдоль направле-

---

<sup>1)</sup> A. A. Michelson, E. W. Morley, American Journal of Science, 34, 333 (1887).

ния движения Земли и поперек этого направления. Этот опыт они повторяли в разное время года, когда Земля двигалась в различных направлениях относительно неподвижных звезд. При этом не было обнаружено никакого воздействия движения Земли на относительную скорость света в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Степень точности опыта позволила им определить, что измеряемая скорость света в двух взаимно перпендикулярных направлениях одинакова с точностью до  $\frac{1}{6}$  величины скорости движения Земли по орбите (см. упражнение 33). Более новые опыты снизили эту неопределенность до 3% величины скорости движения Земли по орбите <sup>1)</sup>. Из опыта Майкельсона — Морли и его последних улучшенных вариантов следует, что в любой инерциальной системе отсчета скорость распространения света по замкнутому пути одинакова во всех направлениях, т. е. скорость света *изотропна* как в лабораторной системе отсчета, так и в системе ракеты в согласии с утверждением принципа относительности. Однако утверждения принципа относительности этим не исчерпываются. Скорость света должна быть не только изотропна и в лабораторной системе отсчета, и в системе ракеты, но также, если этот принцип верен, в этих обеих системах отсчета должно быть одинаково и *численное значение* величины изотропной скорости света:  $c = 2,997925 \cdot 10^8$  м/сек. Поддается ли экспериментальной проверке и это утверждение? Да, такая проверка была произведена Кеннеди и Торндайком примерно через 50 лет после того, как Майкельсон и Морли поставили свой опыт <sup>2)</sup>. Подобно Майкельсону и Морли, Кеннеди и Торндайк

---

*Эксперимент Кеннеди и Торндайка: скорость света имеет одну и ту же численную величину во всех инерциальных системах отсчета*

использовали в качестве движущейся системы отсчета Землю. Они пытались обнаружить хоть какое-нибудь изменение величины скорости распространения света по замкнутому пути, когда Земля в разное время года двигалась в различных направлениях вокруг Солнца. Их результат был отрицательным, и из степени его точности можно заключить, что нет никакого изменения величины скорости света, по крайней мере большего 2 м/сек, когда свет распространяется по замкнутому пути в двух системах отсчета, движущихся с относительной скоростью 60 км/сек (удвоенная скорость движения Земли по орбите; см. упражнение 34). В эксперименте Кеннеди — Торндайка эталоном длины было плечо самого интерферометра — цельный кусок плавленого кварца, находящегося в вакууме при температуре, постоянной с точностью около одной тысячной градуса. В качестве эталона времени был взят собственный период колебаний, связанный с зеленой линией в спектре атома ртути. Единственной и важнейшей трудностью в этом эксперименте, проводившемся в Пасадене (Калифорния), было поддержание постоянных условий в течение ряда месяцев, тогда как в опыте Майкельсона — Морли в Кливленде (Огайо) каждая серия сравнений (в разных направлениях) могла проводиться за один день. В этом же состояло и различие между обоими экспериментами. Их результаты сопоставлены в табл. 4 на следующей странице.

Хотя ни один из этих экспериментов не обладал чувствительностью экспериментов Этвёша и Дикке ( $3 : 10^{11}$ ), их результаты тем не менее изумительно точно подтвердили принцип относительности. К тому же

<sup>1)</sup> T. S. J a s e j a, A. J a v a n, J. M u r r a y, C. H. T o w n e s, Physical Review, 133, A1221 (1964).

<sup>2)</sup> R. J. K e n n e d y, E. M. T h o r n d i k e, Physical Review, 42, 400 (1932).

Таблица 4. Современные критерии для решения вопроса: «Различна ли скорость света на замкнутом пути в разных системах отсчета?»

---

ДВЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

---

Первая система отсчета

Земля при ее движении в одном направлении относительно Солнца, например в январе

Вторая система отсчета

Земля при ее движении в противоположном направлении (по отношению к неподвижным звездам) в июле

---

РЕЗУЛЬТАТЫ ОПЫТОВ

---

Результаты опыта Майкельсона — Морли

*Первоначальный вариант*

Ни в какой системе отсчета наблюдатели (может быть, *один и тот же* наблюдатель на Земле, повторяющий свой опыт спустя 6 месяцев) не могут заметить разницы в скорости света на замкнутом пути в любых двух взаимно перпендикулярных направлениях, большей чем  $1/6$  скорости движения Земли по орбите

*Модернизированный вариант*

Ни в какой системе отсчета наблюдатели не могут заметить разницы в скорости света на замкнутом пути в любых двух взаимно перпендикулярных направлениях, большей чем 3% скорости движения Земли по орбите

Результаты эксперимента Кеннеди — Торндайка

Скорость света на замкнутом пути одинакова в любой из определенных выше «сезонных» систем отсчета с точностью приблизительно до 2 м/сек

---

ИСТОЛКОВАНИЕ ОПЫТНЫХ ФАКТОВ

---

Модернизированный вариант опыта Майкельсона — Морли

Скорость Земли по ее орбите вокруг Солнца равна

$$30 \text{ км/сек} = 1/10\,000 \text{ скорости света}$$

Тогда *разница* в величине скорости света на замкнутом пути, измеренной в двух взаимно перпендикулярных направлениях,

меньше  $3/100$  от  $1/10\,000$  скорости света,

т. е. меньше  $3/1\,000\,000$  скорости света

Итак, *принцип относительности* подтверждается этим модернизированным вариантом опыта с точностью

$$3 : 1\,000\,000$$

Эксперимент Кеннеди — Торндайка

*Разница* в величине скорости света на замкнутом пути, измеренной в двух системах отсчета,

меньше приблизительно 2 м/сек,

т. е. меньше  $1/100\,000\,000$  скорости света

Итак, *принцип относительности* подтверждается этим экспериментом с точностью

$$1 : 100\,000\,000$$

---

планируется повысить чувствительность эксперимента Кеннеди—Торндайка<sup>1)</sup>. Такое повышение чувствительности очень важно. Ведь принятие метра в качестве единицы времени имеет смысл, лишь если свет проходит один метр длины за одно и то же время во всех системах отсчета. Равенство скорости света в системе отсчета ракеты и в лабораторной системе допускает простой способ сравнения часов в этих системах (разд. 5). Возможность такого сравнения решающим образом зависит от отрицательного результата эксперимента Кеннеди—Торндайка.

В 1905 г. принцип относительности был явной ересью, открытым вызовом интуиции и восприятию природы в рамках «здорового смысла», свойственных большинству тогдашних физиков. Потребовались долгие годы, чтобы привыкнуть к нелепой на первый взгляд мысли о том, что некоторая конкретная скорость обладает одной и той же величиной, в какой бы из двух перекрывающихся и движущихся относительно друг друга инерциальных систем отсчета ее ни измеряли. Теперь принцип относительности применяется ежедневно во множестве областей физики, и там он непрерывно и строго проверяется. Например, Станфордский линейный ускоритель электронов (приблизительная стоимость 300 миллионов долларов) должен иметь длину в 2 мили для того, чтобы разогнать электроны до скорости, почти равной скорости света (разница в скоростях всего лишь  $8 : 10^{11}$ ). Если бы были спра-

---

*Структура пространства-времени приводит к тому, что Станфордский ускоритель стоит 300 миллионов долларов*

ведливы доэйнштейновские, ньютоновские законы механики, то для такого ускорения было бы достаточно длины менее чем в один дюйм (см. упражнение 55)!

#### 4. КООРДИНАТЫ СОБЫТИЯ

---

*Почему мы используем координаты?*

Для студента-физика инерциальная система отсчета представляет собой то же, что сетка линий с севера на юг и с востока на запад на местности для землемера. Землемер изучает положение объектов в пространстве. Студент-физик изучает положение событий в пространстве и во времени. Дневной и ночной землемеры могли отказаться от использования координат в направлениях север—юг и восток—запад и попросту измерять расстояния между каждыми двумя городскими воротами, хотя сначала они даже не подозревали о существовании такой величины, как расстояние. Подобным же образом мы могли бы в этой главе ограничиться при определении положений событий в пространстве-времени измерением интервалов между любыми двумя событиями, не рассматривая по отдельности «пространственных» и «временной» координат<sup>2)</sup>. Однако следует начать с положения физики

---

<sup>1)</sup> См. J a s e j a, J a v a n, M u g g a y, T o w n e s, *Physical Review*, 133, A1221 (1964). Подробный анализ экспериментальных оснований частной теории относительности см. в статье Робертсона «Сравнение постулатов и наблюдений в частной теории относительности», H. P. R o b e r t s o n, *Reviews of Modern Physics*, 21, 378 (1949).

<sup>2)</sup> Такой подход сформулирован Робертом Ф. Марцке и Джоном А. Уилером в сборнике *Gravitation and Relativity*, eds. H.-Y. Chiu and W. F. Hofmann, W. A. Benjamin, New York, 1964. (Имеется русский перевод: Гравитация и относительность, под ред. X. Цзю и В. Гофмана, изд-во «Мир», М., 1965, стр. 107.— *Прим. перев.*)

до 1905 г., совершенно не опираясь на понятие интервала. Это понятие само привлечет наше внимание подобно тому, как понятие расстояния привлекло к себе внимание землемера. Так, два человека измеряли координаты в направлениях север — юг и восток — запад в двух разных системах координат, и лишь позднее они заметили взаимосвязь между совсем разными числами в своих записях («инвариантность расстояния»). Мы начнем подобным же образом с пространственных и временных координат событий в лабораторной системе отсчета и с пространственных и временных координат тех же событий в системе отсчета ракеты. И тогда у нас будут солидные основания для вывода о тождественном равенстве друг другу интервала между двумя событиями, вычисленного из лабораторных координат, и интервала между теми же двумя событиями, вычисленного из совсем других чисел — значений координат, полученных при измерениях в системе отсчета ракеты («инвариантность интервала»).

---

### Определение понятия события

В геодезии основным понятием является *место*. В физике основное понятие — *событие*. Событие характеризуется не только местом, но и моментом времени, в который оно произошло. Вот примеры событий: испускание частицы или световой вспышки (взрывы); отражение или поглощение частиц или световых вспышек; столкновения и почти столкновения, именуемые *совпадениями*.

Как определить место и время, где и когда происходит событие в данной инерциальной системе отсчета? Представим себе, что мы построили тело отсчета, собрав из метровых стержней кубическую решетку, вроде того подобия «шведских стенок», которые стоят на детских площадках (рис. 9).

---

### Решетка из часов

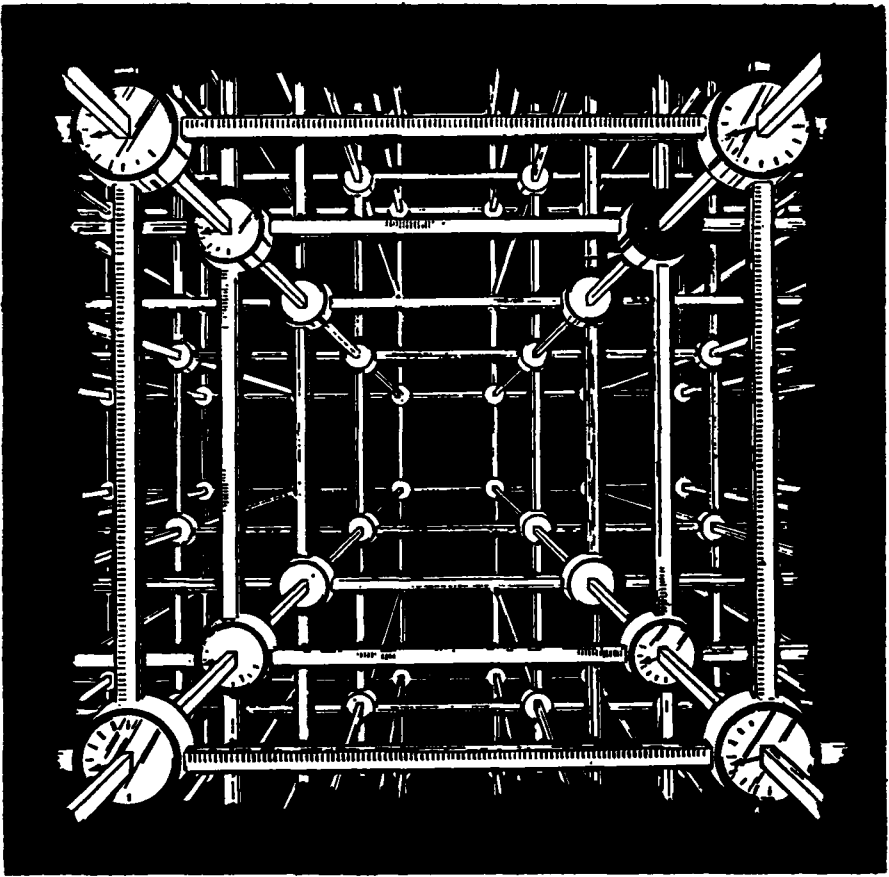
Закрепим в каждом узле этой решетки часы. Часы могут быть любой конструкции, но они *проградуированы* в метрах времени. Возможность такой градуировки обсуждалась в разд. 1, когда мы заставляли световую вспышку бегать, отражаясь между двумя зеркалами, отстоящими друг от друга на полметра. Мы говорили, что такие часы издадут «тик-так» каждый раз, когда свет возвращается к первому зеркалу. Между соседними «тик-так» свет проходит замкнутый путь  $1\text{ м}$ , и мы условились называть полученную таким образом единицу времени *1 метром светового времени* или, проще, *1 метром времени*. В обычных единицах скорость света имеет измеренную величину  $c = 2,997925 \cdot 10^8\text{ м/сек}$ . Путь  $1\text{ м}$  свет проходит за время, равное  $1\text{ метр}/c = 3,335640 \cdot 10^{-9}\text{ сек}$ . Значит, *1 метр светового времени равен  $3,335640 \cdot 10^{-9}$  секунд* или около  $3,3\text{ наносекунд}$ , если говорить на языке электроники сверхвысоких частот. Итак, мы полагаем, что все часы решетки, какова бы ни была их конструкция, проградуированы в метрах светового времени.

---

### Синхронизация часов решетки

Каким образом *синхронизовать* друг с другом разные часы в решетке? Это можно сделать так: примем одни из этих часов за стандартные и перенесем в них *начало системы координат*  $x, y, z$ . Начнем на этих опорных часах отсчет времени с  $t = 0$  и пошлем из них в этот момент световой сигнал во всех направлениях. Будем называть такой сигнал также *опорным*. Когда





Р и с 9 Решетка из метровых стержней и часов. Опорные часы выделены.

опорный сигнал достигает часов, находящихся на расстоянии 5 м, мы считаем, что эти часы должны показывать 5 метров светового времени. Пусть тогда находящийся при них ассистент еще до начала эксперимента *поставит* стрелки этих часов на 5 метров времени, *установит* их в 5 м расстояния от опорных часов и *запустит*, лишь когда до него дойдет опорный сигнал. Когда все приставленные к часам решетки ассистенты проделают аналогичную процедуру, т. е. каждый поставит стрелки своих часов на время в метрах, равное своему расстоянию от опорных часов, и запустит их, когда до него дойдет опорный сигнал, то часы решетки будут *синхронизованы* между собой.

Возможны и другие способы синхронизации часов. Например, можно установить по опорным часам в начале координат переносные часы, а затем пронести их по решетке и поставить по ним остальные часы. Эта процедура, однако, предполагает *передвижение* часов. Мы увидим позже, что движущиеся часы обладают другой скоростью хода, если ее контролировать с помощью часов решетки, чем часы, оставленные в покое в начале координат. Переносные часы даже перестанут согласоваться с этими последними, когда мы вернем их снова в начало координат! (См. парадокс часов; упражнение 27). Правда, следя за тем, чтобы скорость движения переносных часов составляла лишь *весьма малую* долю скорости света, мы почти избавимся

от этой ошибки, и второй метод синхронизации по своему результату будет очень близок к первому методу, стандартному. Более того, ошибку можно сделать сколь угодно малой, если передвигать переносные часы достаточно медленно.

---

### *Использование решетки для измерения всех 4 координат событий*

Решетка с синхронизованными часами может использоваться для определения положения в пространстве и времени любого события. За *положение* события в пространстве принимается положение часов, ближайших к этому событию. Его *положение во времени* принимается равным времени, которое при этом показывают часы, ближайšie к событию. Итак, *координаты* события — это набор 4 чисел: 3 из них характеризуют *положение в пространстве* часов, ближайших к этому событию, а четвертое равно *времени* (в метрах), когда по этим часам произошло это событие. Если часы установил предусмотрительный экспериментатор, то это *хронографы*, и каждый из них может отметить возникновение события (например, приход светового сигнала или частицы). Каждый из них отпечатывает на карточке сущность явления, его время и положение часов. Затем эти карточки можно собрать со всех часов и проанализировать — возможно, на электронной машине.

---

### *Шаг решетки зависит от масштабов изучаемых физических явлений*

Почему решетка строилась из стержней, каждый из которых был длиной 1 метр? По выданной часами карточке мы не сможем в этом случае установить, произошло ли зафиксированное событие на 0,4 м левее часов или, например, на 0,2 м правее их. Местоположение события будет неопределенным с точностью до заметной доли метра. Время события также будет известно лишь с точностью до заметной доли метра светового времени. Но такой точности вполне достаточно при наблюдении прохождения ракеты. Ее куда более чем достаточно, если мы измеряем положение планет на орбитах, — было бы даже разумным увеличить шаг решетки с 1 м до сотен метров. Но ни шаг в 100 м, ни шаг в 1 м не пригодны для решетки, с помощью которой мы изучаем траектории частиц, полученных на мощном ускорителе. Здесь уместнее считать на сантиметры или миллиметры. Итак, положение события в пространстве и во времени можно найти с любой требуемой степенью точности, построив решетку, обладающую достаточно малым шагом.

---

### *Определение понятия «наблюдатель»*

В теории относительности часто идет речь о «наблюдателе». Где он расположен? В каком-то одном месте или сразу во всем пространстве? Слово «наблюдатель» — это сокращение, которым обозначается вся система часов-хронографов, связанных с данной инерциальной системой отсчета. Ни один реальный наблюдатель не справился бы в одиночку с обязанностями того «идеального наблюдателя», которого мы используем при анализе теории относительности. Поэтому лучше представлять себе наблюдателя как человека, совершающего обход всех порученных ему хронографов и собирающего на них свои перфорированные карточки. Таков смысл фразы «наблюдатель обнаруживает то-то и то-то», которой мы будем пользоваться в дальнейшем.

---

*Показания часов характеризуют движение частицы сквозь решетку*

Движение частицы сквозь решетку обнаруживается с помощью часов: каждые часы, мимо которых пролетает частица, отпечатывают как время ее пролета, так и пространственную координату этого события. Как охарактеризовать числами «путь» (мировую линию) частицы? Для этого следует вдоль мировой линии проставить координаты событий. По разностям координат последовательных событий находится скорость частицы. Такая скорость  $v$  обычно измеряется в метрах в секунду ( $м/сек$ ). Однако, когда время измеряется в метрах светового времени, скорость должна быть выражена в метрах пути, пройденного за 1 метр времени. Во избежание недоразумений мы будем обозначать скорость, измеренную в  $м/м$ , греческой буквой «бета» ( $\beta$ ). Световой сигнал проходит 1  $м$  пути за 1  $м$  светового времени, т. е.  $\beta_{\text{свет}} = 1$ . Скорости частиц, измеренные в  $м/м$ , представляют собой отношения их скоростей в  $м/сек$  к скорости света; иными словами,  $\beta = v/c$ . Здесь, как и далее, через  $c$  обозначена скорость света.

---

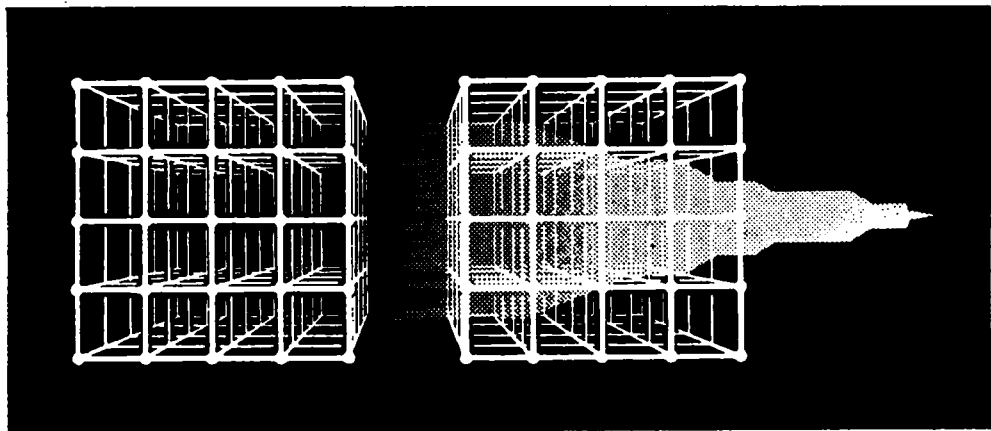
*Проверка инерциальности системы отсчета, образованной данной решеткой*

По движению пробных частиц сквозь решетку часов, а говоря точнее, по регистрациям совпадений, отпечатанным нашими хронографами, мы можем выяснить, представляет ли собой эта решетка инерциальную систему отсчета. Если зарегистрировано, что: а) пробная частица (с некоторой заданной точностью) последовательно проходит мимо часов, расположенных на прямой линии; б) скорость  $\beta$  пробной частицы, вычисленная по этим же записям, постоянна (вновь с некоторой заданной степенью точности) и в) такие выводы получаются для стольких мировых линий пробных частиц, сколько их сможет проследить в данной области пространства и времени самый трудолюбивый наблюдатель, то эта решетка часов образует в данной области пространства-времени инерциальную систему отсчета.

---

*Лабораторная система отсчета и система ракеты при совпадении  $x$ -осей*

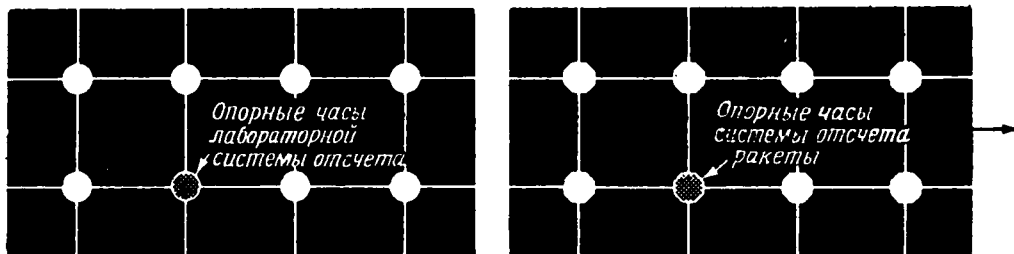
Мы снова описали движение пробных частиц относительно конкретной системы отсчета с целью определить, является ли данная система инерциальной. Одни и те же пробные частицы, а в случае их столкновений одни и те же акты соударения могут быть описаны как по отношению к одной инерциальной системе отсчета, так и по отношению к другой. Пусть две системы отсчета реализуются двумя разными решетками из метровых стержней и часов, так что одна система движется относительно другой равномерно, а оси  $x$  обеих систем совпадают. Назовем одну из этих систем отсчета *лабораторной*, а другую, движущуюся относительно первой в положительном направлении оси  $x$ , — *системой отсчета ракеты* (рис. 10 и 11). Ракета летит с *выключенным двигателем* с постоянной скоростью относительно лаборатории. Пусть решетки ракеты и лаборатории *перекрываются* в том смысле, что имеется область пространства, общая для обеих систем отсчета (как это описано в разд. 3 и показано на рис. 8). В этой общей области пространства-времени движутся пробные частицы. По их движению, зарегистрированному часами данного наблюдателя, этот наблюдатель удостоверяется в том, что его система отсчета *инерциальна*; пусть это имеет место для наблюдателей в обеих системах отсчета.



Р и с. 10. Лабораторная система отсчета и система ракеты. Соответствующие им решетки были наложены друг на друга секунду назад.

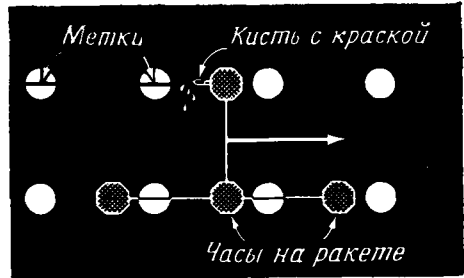
*Наблюдатели в лаборатории и на ракете фиксируют одно и то же событие*

Взорвем хлопучку. Ее взрыв будет зарегистрирован ближайшими к нему часами лабораторной решетки; он будет также зарегистрирован ближайшими к месту взрыва часами решетки ракеты. Как связаны между собой записи о координатах взрыва у часов-хронографов в лаборатории и на ракете? Частично на этот вопрос сразу же отвечает принцип относительности: в записях часов в лаборатории и на ракете будет указано одно и то же значение координаты  $y$ . Для доказательства предположим, что часы-хронограф на ракете снабжены кистью, смоченной в краске, и делают отметки на лабораторной решетке при своем движении. Это изображено на рис. 12 для случая, когда  $y = 1$  м. Эти отметки на лабораторной решетке служат для нахождения лабораторной координаты  $y$ , соответствующей  $y = 1$  у часов на ракете. Эти отметки ложатся на лабораторные часы с  $y = 1$ , не выше и не ниже их. Ведь если бы краска ложилась на стержни решетки ниже лабораторных часов с  $y = 1$ , то оба наблюдателя заключили бы, что часы на ракете с  $y = 1$  прошли «ниже» лабораторных часов с  $y = 1$ . Цепочка отметок краской сделала бы этот факт очевидным для всех. Аналогично, если бы эти отметки ложились на стержни выше лабораторных часов с  $y = 1$ , то оба наблюдателя заключили бы, что часы на ракете с  $y = 1$  прошли «над» лабораторными часами с  $y = 1$ . В обоих случаях имелась бы возможность экспериментально отличить друг от друга



Р и с. 11. Лабораторная система отсчета (слева) и система ракеты (справа) — дальнейшая схематизация рис. 10. В обеих системах заштрихованы центральные опорные часы.

Р и с. 12. Доказательство того, что координата  $y$  любого события одинакова в лабораторной системе отсчета и в системе ракеты.



эти две системы отсчета. Но ведь отличить эти системы друг от друга с помощью какого-либо *другого* эксперимента было невозможно — в принципе относительности содержится утверждение, что такого экспериментально находимого различия между инерциальными системами отсчета вообще не может быть. Отсюда мы заключаем, что отличить эти две системы отсчета невозможно и с помощью *этого* эксперимента. Поэтому координата  $y$  любого события, и в том числе взрыва, с которого мы начали этот абзац, будет одной и той же как в системе отсчета ракеты, так и в лабораторной системе.

---

*Координата  $y$  события одинакова как в лабораторной системе отсчета, так и в системе ракеты*

Из аналогичных доводов следует, что и координата  $z$  любого события одинакова как в системе отсчета ракеты, так и в лабораторной системе. Заметим, что обе эти координаты события — и  $y$ , и  $z$  — отсчитываются в направлении, *перпендикулярном* направлению относительного движения наших систем отсчета. Тот факт, что длины, измеренные поперек направления отно-

---

*Координата  $z$  события одинакова как в лабораторной системе отсчета, так и в системе ракеты*

сительного движения систем отсчета, одинаковы, сразу же дает возможность сравнивать ход часов в обеих решетках. Пусть световая вспышка бежит, отражаясь между двумя зеркалами, установленными в системе отсчета ракеты на опорных часах и на часах, расположенных в точке с координатой  $y = 1$  точно над опорными часами. Такая вспышка будет возвращаться в исходную точку через  $2m$  светового времени системы ракеты. Траекторию этого светового луча можно проследить и в лабораторной системе вверх до того же самого значения координаты  $y$  и снова вниз до опорных часов. Учитывая, что скорость света в обеих системах одинакова, можно вычислить лабораторное время, соответствующее времени распространения света по двухметровому замкнутому пути в системе отсчета ракеты. В следующем параграфе этот расчет приведет к заключению об инвариантности интервала.

## 5. ИНВАРИАНТНОСТЬ ИНТЕРВАЛА

---

*Какая мера характеризует относительное расположение событий  $A$  и  $B$  и одинакова во всех инерциальных системах отсчета?*

Расстояние между двумя городскими воротами определяется по значениям разностей координат  $x$  этих ворот и по значениям разностей их коор-

динат  $y$ . Как определить аналогичную физическую величину — пространственно-временной интервал между двумя событиями? Между какими двумя событиями определяется такой интервал?

Пусть событие  $A$  — акт излучения световой вспышки. Пусть событие  $B$  — акт приема этой вспышки после того, как она была отражена другим объектом. Эти два акта можно назвать парой событий. Нас не интересуют сами по себе ни свет, ни отражающий его объект. Однако анализ траектории светового луча в пространстве-времени позволяет легко и быстро найти величину (тот самый интервал), которая связана с этой парой событий и значение которой одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

*Событие  $A$  — акт излучения вспышки*

*Событие  $B$  — акт приема вспышки*

*Событие  $A$  — лампа дает вспышку. Ее свет распространяется к отражателю  $R$  (рис. 13), от которого он снова идет вниз. Событие  $B$  — прием вспышки. Рассмотрим теперь подробности согласно рис. 13.*

*Лампа дает вспышку в лабораторной системе в нулевой момент времени в начале системы координат  $x, y, z$  (на рисунке заштриховано). Пролет ракеты мимо этого места приурочен к такому времени, что и для ракеты вспышка имеет место также в начале координат (заштриховано снова) и в нулевой момент. Подытожим данные о координатах события  $A$  (акт излучения):*

*Подробности о координатах событий*

*$A$  и  $B$  в лабораторной системе отсчета*

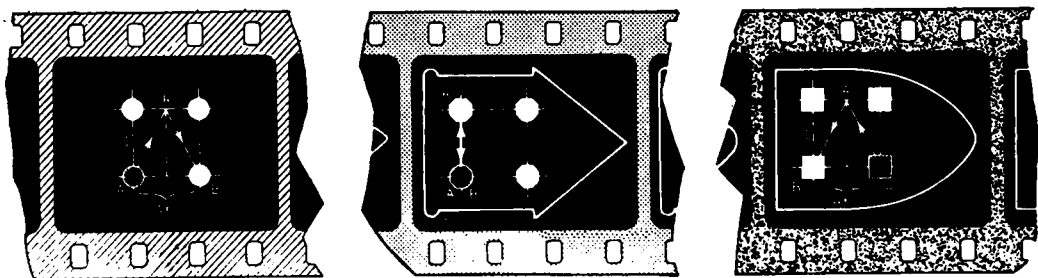
*и в системе ракеты*

$$x_A = 0, \quad y_A = 0, \quad t_A = 0 \quad (\text{в лабораторной системе}),$$

$$x'_A = 0, \quad y'_A = 0, \quad t'_A = 0 \quad (\text{в системе ракеты}).$$

Отражатель укреплен на часах ракеты на расстоянии 1 м прямо над началом координат.

В системе ракеты прием вспышки осуществляется в том же месте, где произошло ее излучение. Свет вспышки прошел замкнутый путь длиной 2 м, и на этот путь потребовалось 2 м светового времени. Поэтому координаты



а) Путь светового луча, наблюдаемый в лабораторной системе отсчета.

б) Путь светового луча, наблюдаемый в системе отсчета ракеты.

в) Путь светового луча, наблюдаемый в системе отсчета сверхракеты.

Р и с. 13. Испускание, отражение и прием опорной вспышки (прием происходит в начале координат в системе отсчета ракеты).

события  $B$  (акт приема вспышки) в системе отсчета ракеты равны:

$$x'_B = 0, \quad y'_B = 0, \quad t'_B = 2 \text{ м.}$$

Более содержательны не абсолютные значения координат, а разности координат событий  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} \Delta x' &= x'_B - x'_A = 0, \\ \Delta y' &= y'_B - y'_A = 0, \\ \Delta t' &= t'_B - t'_A = 2 \text{ м.} \end{aligned}$$

В лабораторной системе отсчета прием вспышки происходит не в начале координат, а на расстоянии  $\Delta x$  вправо от него. Если скорость ракеты велика, то велико и расстояние  $\Delta x$ ; если скорость мала, то мало и  $\Delta x$ . (На рисунке это расстояние равно 1 м, однако дальнейшие расчеты справедливы для любого расстояния.) В лабораторной системе отсчета свет распространяется по гипотенузам двух прямоугольных треугольников, основание каждого из которых равно  $\Delta x/2$ , а высота 1 м. Полная длина пути поэтому получается равной

$$2 \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2}.$$

Вспомним теперь, что скорость света одинакова как в лабораторной системе отсчета, так и в системе отсчета ракеты (что хотя и неправдоподобно, но является законом природы!). Поэтому разность времен акта излучения и акта приема вспышки в лабораторной системе отсчета выражается такой же формулой

$$\Delta t = t_B - t_A = 2 \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2} \quad (4)$$

(в метрах светового времени).

*Промежуток времени между событиями  
A и B неодинаков для наблюдателей  
в лаборатории и на ракете*

Почему этот промежуток времени превышает 2 м? Дело в том, что гипотенуза прямоугольного треугольника на рис. 13,а больше, чем его высота. Поэтому невозможно избежать заключения о том, что *промежуток времени между актами излучения и приема вспышки неодинаков в двух инерциальных системах отсчета.*

В табл. 5 сведены разности как пространственных, так и временной координат событий  $A$  и  $B$ . Промежуток времени различен в разных инерциальных

Таблица 5. Разности координат событий приема и послышки сигнала

Лабораторная система отсчета	Система отсчета ракеты
$x_{\text{прием}} - x_{\text{излуч}} = \Delta x$	$x'_{\text{прием}} - x'_{\text{излуч}} = \Delta x' = 0$
$t_{\text{прием}} - t_{\text{излуч}} = \Delta t = 2 \sqrt{1 + (\Delta x/2)^2}$	$t'_{\text{прием}} - t'_{\text{излуч}} = \Delta t' = 2 \text{ м}$

системах отсчета; различен и промежуток, разделяющий события в пространстве, — картина аналогична той, когда разности координат  $\Delta x$  и  $\Delta y$  для двух городских ворот были разными для дневного и ночного землемеров! Но для

этих землемеров существовала комбинация координат (квадрат *расстояния* между воротами), одинаковая для них обоих:

$$(\text{Расстояние})^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2.$$

Есть ли подобная комбинация координат наших двух событий, которая была бы одинаковой в лабораторной системе отсчета и в системе ракеты? Ответ на этот вопрос: да! Квадрат *интервала*

$$(\text{Интервал})^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (2 \text{ м})^2 \quad (5)$$

— именно такая величина, как можно проверить путем непосредственной подстановки величин, фигурирующих в табл. 5.

*Интервал между событиями А и В имеет одну и ту же величину как для наблюдателя в лаборатории, так и на ракете*

Взятая нами для исследования двух событий система отсчета ракеты является довольно-таки специальной, так как и акт излучения, и акт приема сигнала происходят в ней в одной и той же точке. На рис. 13, *в* изображен путь отраженного луча в системе отсчета второй ракеты (система «сверхракеты»), движущейся относительно лабораторной системы отсчета еще быстрее, чем первая ракета. В системе этой второй ракеты разность координат  $x$  двух событий — актов излучения и приема вспышки (дважды штрихованные величины)  $x_B'' = x_A'' - \Delta x''$  — отрицательна, ибо акт приема осуществляется в этой системе отсчета на отрицательной оси  $x$ . Тем не менее  $(-\Delta x'')^2 = (\Delta x'')^2$ , и к тому же можно использовать свойства прямоугольных треугольников на рис. 13, *в*, из всего этого следует, что полная длина пути светового луча в системе отсчета второй ракеты дается выражением  $2\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x''}{2}\right)^2}$ , которое имеет тот же вид, что и в лабораторной системе. Величина скорости света в системе отсчета второй ракеты должна быть равна  $c$ , как и в системе первой ракеты. Отсюда найдем время, прошедшее между актами излучения и приема вспышки:

$$t_B'' - t_A'' = \Delta t'' = 2 \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x''}{2}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$(\Delta t'')^2 - (\Delta x'')^2 = (2 \text{ м})^2,$$

так что вообще

$$(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (\Delta t'')^2 - (\Delta x'')^2 = (2 \text{ м})^2. \quad (6)$$

*Интервал АВ имеет одну и ту же величину в системах всех ракет!*

Забудем теперь о посланной вспышке, отражателе и о возвращении этой вспышки. Ведь это лишь средства для достижения цели. Они помогли выяснить, какая величина имеет одно и то же значение в различных системах отсчета. Теперь сосредоточим внимание на этой величине — интервале, оставив в стороне подробности ее вывода.



Что одинаково в двух инерциальных системах отсчета?

Что в них почти одинаково?

Что различно?

Что мы выяснили? Два события,  $A$  и  $B$ , происходят в одном и том же месте в системе отсчета ракеты ( $\Delta x' = 0$ ), но в разное время ( $\Delta t' = 2 \text{ м}$ ). В лабораторной системе отсчета эта же пара событий происходит в пространстве на расстоянии  $\Delta x$ , и, чем быстрее движется ракета, тем больше это расстояние. Этот вывод никого не удивит, и многие с полным правом скажут: «Да это же более чем очевидно!». Удивительно другое. Во-первых, *промежуток времени*  $\Delta t$  между двумя событиями, зарегистрированный в лабораторной системе отсчета, *имеет другую величину, чем зарегистрированный в системе ракеты*. Во-вторых, промежуток времени между событиями  $A$  и  $B$  по данным, отпечатанным соответствующими двумя хронографами в лаборатории, *превышает* промежуток времени между теми же двумя событиями, зарегистрированный такими же часами в ракете:  $\Delta t \geq \Delta t'$ . В-третьих, пропорция

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2},$$

в которой оказался увеличенным промежуток времени (см. табл. 5), близка к единице (увеличение очень мало), если мало расстояние, которое прошла ракета в промежутке между событиями  $A$  и  $B$ . Но если ракета движется очень быстро, разность  $\Delta x$  очень велика и пропорция, характеризующая несоответствие двух времен, может быть громадной. В-четвертых, несмотря на эту только что обнаруженную разницу во времени, зарегистрированном в двух разных системах отсчета, и несмотря на давно уже известную разницу в *пространственном* расстоянии между событиями в разных системах отсчета ( $\Delta x \neq \Delta x' = 0$ ), существует тем не менее величина, действительно равная в лабораторной системе отсчета тем же двум метрам промежутка светового времени между событиями  $A$  и  $B$ , которые были зарегистрированы в системе отсчета ракеты. Эта величина — интервал

$$(\text{Интервал}) = \sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}.$$

У ракеты может быть очень большая скорость, и тогда  $\Delta x$  тоже будет очень большим. Но и  $\Delta t$  в этом случае будет очень большим. Более того, величина  $\Delta t$  оказывается в точности «подогнанной» к величине  $\Delta x$ , так что выражение  $(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$  равно  $(2 \text{ м})^2$  вне зависимости от того, чему именно равны порознь  $\Delta x$  и  $\Delta t$ .

*Все четыре замечательные идеи частной теории относительности иллюстрируются одной и той же диаграммой*

Все перечисленные отношения можно увидеть, взглянув на рис. 13, а. Длина гипотенузы первого прямоугольного треугольника равна  $\Delta t/2$ , а его основание имеет длину  $\Delta x/2$ . Утверждение, что выражение  $(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$  обладает универсальной величиной (или, иначе, что  $\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 - \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2$  обладает универсальной величиной), значит лишь, что высота этого прямоугольного треугольника строго фиксирована (равна на нашей диаграмме  $1 \text{ м}$ ), с какой бы скоростью ни летела ракета. Но что именно лежало в основе доказательства того, что  $(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$  рав-

няется ( $2 м$ )<sup>2</sup> независимо от скорости полета ракеты? В основе лежал принцип относительности, согласно которому законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Мы воспользовались здесь этим принципом двумя совершенно различными способами. Во-первых, мы вывели из него заключение, что длины, перпендикулярные направлению относительного движения систем, получаются одинаковыми при измерении в этих системах (лабораторной системе и системе отсчета ракеты). В противном случае одну систему было бы можно отличить от другой по более коротким поперечным масштабам. Во-вторых, из принципа относительности мы заключили, что скорость света должна быть одинаковой как в лабораторной системе отсчета, так и в системе ракеты (этот вывод подтверждается экспериментом Кеннеди — Торндайка). А если эта скорость одинакова, то из факта большей длины траектории световой вспышки в лабораторной системе (сумма длин гипотенуз двух треугольников), чем в системе отсчета ракеты, где свет совершает простое движение взад и вперед (сумма высот двух треугольников:  $1 м$  вверх и столько же вниз), мы непосредственно заключаем, что *время* между событиями  $A$  и  $B$  в лабораторной системе больше, чем в системе отсчета ракеты.

Короче говоря, один элементарный треугольник на рис. 13, *a* изображает сразу 4 замечательные идеи, лежащие в основе всей частной теории относительности: инвариантность длин, поперечных движению; инвариантность величины скорости света; зависимость пространственной и *временной* координат от выбора системы отсчета; инвариантность интервала.

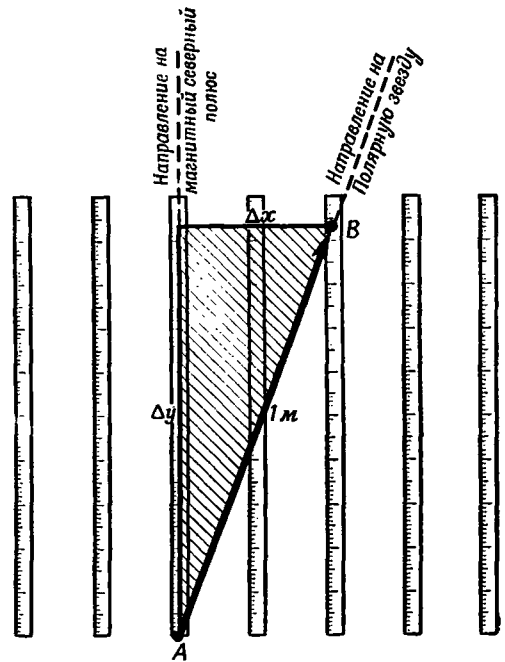
*Парадоксально ли различие между промежутками времени, прошедшего в лабораторной системе и в системе отсчета ракеты?*

Итак, в рис. 13, *a* вкратце содержится вся частная теория относительности в легко запоминающемся виде. Однако проделанный анализ приводит к тому, что на первый взгляд кажется нелепостью. Какой смысл можно вообще усмотреть в том, что промежуток времени между двумя событиями больше в лабораторной системе отсчета, чем в системе ракеты? Разве мы не приводили уже в качестве довода, что «длины, перпендикулярные направлению относительного движения систем», одинаковы, «в противном случае одну из систем было бы можно отличить от другой по более коротким поперечным масштабам?» Как же быть в этом случае с разными промежутками *времени* в двух системах отсчета? Разве это различие не даст возможности физически провести различие между той и другой системами? И разве возможность такого различия не исключена принципом относительности, утверждающим, что одна инерциальная система отсчета нисколько не хуже другой?

*Сравнение относительности времени (Лоренц) с относительностью выбора направления на «север» (Евклид)*

Чтобы ответить на эти вопросы, вернемся к притче о землемерах. Возьмем точку  $B$  на рис. 14. Она расположена на  $1 м$  прямо к северу от другой точки  $A$  согласно построениям ночного землемера (определение направления на север по Полярной звезде). Рассмотрим теперь положение точки  $B$  с позиций дневного землемера (ориентация на север по магнитной стрелке). Будет ли разность координат  $\Delta y$  между  $A$  и  $B$  (на языке землемеров — *северное склонение*) также равна  $1 м$  в дневной системе? Нет,  $\Delta y$  здесь *меньше*, чем  $1 м$ ! Почему же? Дело в том, что высота ( $\Delta y$ ) прямоугольного треугольника короче, чем его гипотенуза ( $1 м$ ). Значит ли это, что правила триангуляции

Р и с. 14. Удаленность точки  $B$  от точки  $A$  по координате «север—юг» («северное склонение  $B$  относительно  $A$ ») зависит от выбора направления на север.



в дневной системе координат отличаются от этих правил в ночной системе координат? Конечно, нет! Точно так же нет дефектов в конструкции и ходе лабораторных часов, на которые можно было бы списать бóльшую длительность промежутка времени  $AB$ . Это «расхождение» в показаниях лабораторных часов и часов на ракете обусловлено лишь самой природой геометрии пространства-времени. Так уж устроен мир! В табл. 6 проведена параллель между геометрией пространства-времени по Лоренцу и евклидовой геометрией мира землемеров.

Таблица 6. Различие «северного склонения» (координата  $y$ ) точек  $A$  и  $B$  в дневной и ночной системах координат и различие времени между событиями  $A$  и  $B$  в лабораторной системе отсчета и системе ракеты. Сравнительный анализ

Вопросы	Ответы студента-геодезиста о различии «северного склонения» между точками $A$ и $B$ (см. рис. 14)	Ответы студента-физика о различии времени между событиями $A$ и $B$ (см. рис. 13)
В какой системе отсчета имеет самый простой вид взаимная удаленность $A$ и $B$ ?	В системе координат ночного землемера, ориентированной на Полярную звезду	В системе отсчета ракеты
Какое обстоятельство упрощает картину в этой системе отсчета?	Обе точки обладают одинаковым значением координаты $x'$ , т. е. $\Delta x' = 0$	Оба события обладают одинаковым значением координаты $x'$ , т. е. $\Delta x' = 0$
Почему это обстоятельство упрощает измерение удаленности $AB$ ?	Достаточно единственного метрового стержня, ориентированного на Полярную звезду, чтобы: 1) удостовериться, что координата $x'$ обеих точек <i>одинакова</i> , и 2) непосредственно измерить «северное склонение» точки $B$ относительно точки $A$	Достаточно одних часов-хронографа, связанных с системой отсчета ракеты, чтобы: 1) удостовериться, что координата $x'$ обоих событий <i>одинакова</i> , и 2) непосредственно измерить запаздывание во времени события $B$ относительно события $A$

Вопросы	Ответы студента-геодезиста о различии «северного склонения» между точками A и B (см. рис. 14)	(ответы студента-физика о различии времени между событиями A и B (см. рис. 13)
Назовите другую систему, в которой исследуется удаленность A и B	Система координат дневного землемера, сориентированная по магнитному компасу	Лабораторная система отсчета
Какое усложнение возникает в этой системе при анализе удаленности?	Ни один из метровых стержней, ориентированных по направлению на магнитный полюс, не может сам по себе указать относительное положение точек A и B	Ни один часы-хронограф в лаборатории не могут в отдельности измерить положение как A, так и B
Как преодолевается эта трудность?	Необходимы два ориентированных по направлению на север метровых стержня, один из которых сдвинут на $\Delta x$ м вправо от другого	Необходимы двое таких лабораторных часов, один из которых сдвинут на $\Delta x$ м вправо от других
Какие данные фиксирует первый из этих измерительных приборов?	Точку A при $y = 0$	Событие A при $t = 0$
Укажите данные второго измерительного прибора	Точка B расположена на $\Delta y$ м к северу	Событие B запаздывает на $\Delta t$ сек
Измеряется ли удаление B от A непосредственно найденной этим путем координатой B?	Нет. «Северное склонение» меньше, чем расстояние AB. Точнее:	Нет. Запаздывание $\Delta t$ больше, чем интервал AB. Точнее:
	$\Delta y = [(AB)^2 - (\Delta x)^2]^{1/2}$	$\Delta t = [(AB)^2 + (\Delta x)^2]^{1/2}$
Как же тогда найти удаление AB из измерений в этой системе?	По формуле для расстояния: (Расстояние) <sup>2</sup> = $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ . (Проверьте, подставив сюда выражение для $\Delta y$ , данное в предыдущем ответе!)	По формуле для интервала: (Интервал) <sup>2</sup> = $(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ . (Проверьте, подставив сюда выражение для $\Delta t$ , данное в предыдущем ответе!)
	Δy меньше, чем Δy' (=AB)	Δt больше, чем Δt' (=AB)
Как различаются данные в штрихованной и нештрихованной системах в этих приборах?	В том смысле, что одинаковые метровые стержни дают неодинаковое «северное склонение»?	В том смысле, что одинаковые часы указывают неодинаковое время?
Нет ли в этих выводах чего-нибудь нелепого?	Нет. Расстояние AB можно измерить одним стержнем, ориентированным «по-ночному». Но нет такого индивидуального метрового стержня, ориентированного «по-дневному», который дал бы (меньшее) магнитное «северное склонение» B относительно A. Поэтому нельзя сказать, что какой-либо из «дневных» метровых стержней противоречит «ночному» метровому стержню	Нет. Интервал AB прямо дают одни часы на ракете. Но нет таких индивидуальных часов, связанных с лабораторией, которые показали бы (большее) запаздывание события B относительно A. Поэтому нельзя сказать, что какие-либо из лабораторных часов противоречат часам на ракете

Продолжение табл. 6

Вопросы	Ответы студента-геодезиста о различии «северного склонения» между точками A и B (см. рис. 14)	Ответы студента-физика о различии времени между событиями A и B (см. рис. 13)
Вызвана ли такая несимметричная разница между значениями координат в штрихованной и нештрихованной системах отсчета каким либо фундаментальным различием между этими системами?	Из-за $\Delta y < \Delta y'$ ? Нет!	Из-за $\Delta t > \Delta t'$ ? Нет!
Что же тогда ответственно за такую асимметрию?	Просто то стечение обстоятельств, что точка B взята на одной прямой север — юг, что и точка A, при ориентации по Полярной звезде, но не на одной прямой север — юг при ориентации по магнитному компасу	Просто то стечение обстоятельств, что событие B произошло в системе отсчета ракеты в одном месте с A, но не в одном месте с A в лабораторной системе отсчета
Чем можно здесь проиллюстрировать полное физическое равноправие этих двух систем?	Нужно рассмотреть точку C, обладающую такой же x-координатой, что и A (т. е. взять C на одной линии север — юг с A при ориентации по магнитному компасу)	Нужно рассмотреть событие C, обладающее такой же x-координатой, что и A (т. е. взять C в том же месте в лабораторной системе, что и A, но позднее во времени)
Как будут различаться результаты измерений в штрихованной и нештрихованной системах при таком выборе точки C?	$\Delta y (= AC)$ будет больше, чем $\Delta y'$	$\Delta t (= AC)$ будет меньше, чем $\Delta t'$
Как вы подытожите это обсуждение?	Нет никакого парадокса в том, что компонента север — юг для AB имеет разные значения в двух разных системах координат. Это различие — не следствие неисправности метровых стержней и даже вообще не порок. «Расхождение» в выводах обусловлено внутренней природой евклидовой геометрии	Нет никакого парадокса в том, что время, прошедшее между A и B, различно в двух разных системах отсчета. Это различие — не следствие неисправности часов и даже вообще не порок. «Расхождение» в выводах обусловлено внутренней природой геометрии пространства-времени, в котором реализуется вся физика

## 6. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ДИАГРАММЫ <sup>1)</sup>. МИРОВЫЕ ЛИНИИ

*Пространственно-временные диаграммы как удобный способ изображения событий*

Удобно рассматривать события предыдущего параграфа (акты излучения и приема световой вспышки), изображая положение события в пространстве

<sup>1)</sup> Пространственно-временные диаграммы обычно называют *диаграммами Минковского*. — *Прим. перев.*

на горизонтальной оси, а время события — на вертикальной оси *диаграммы пространства-времени* (рис. 15). Свет был *излучен* лампой-вспышкой, закрепленной на опорных часах первой ракеты. Эта лампа дала вспышку в тот момент, когда часы пролетали мимо опорных часов лаборатории. И те и другие часы в это время показывали нуль времени. Поэтому событие — акт излучения — располагается в начале координат диаграммы пространства-времени, построенной наблюдателем на ракете:

$$x'_{\text{излуч}} = 0, \quad t'_{\text{излуч}} = 0.$$

Это событие располагается также в начале координат диаграммы пространства-времени наблюдателя в лаборатории:

$$x_{\text{излуч}} = 0, \quad t_{\text{излуч}} = 0.$$

Дальнейшая история испущенного светового луча выглядит по-разному на диаграммах пространства-времени лаборатории и обеих ракет. В первой ракете прием отраженного луча происходит в точке  $x' = 0$  на 2 м времени позже опорного события

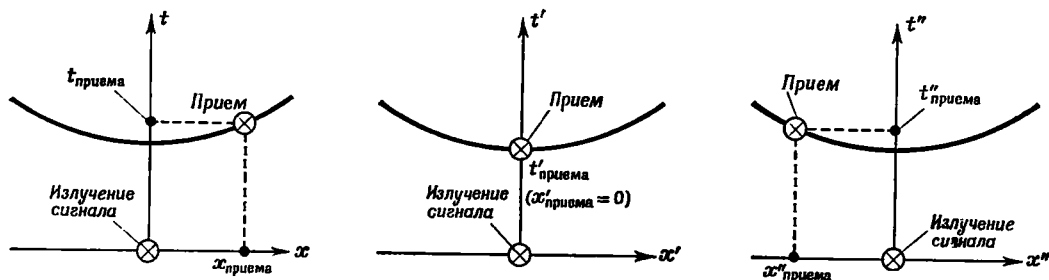
$$x'_{\text{прием}} = 0, \quad t'_{\text{прием}} = 2 \text{ м},$$

как это уже отмечено в табл. 5 и как можно непосредственно увидеть на рис. 15, б. В лабораторной системе отсчета событие — акт приема — происходит справа от начала координат:

$$\begin{aligned} x_{\text{прием}} &= \text{Положительная величина,} \\ t_{\text{прием}} &= \sqrt{(2 \text{ м})^2 + (x_{\text{прием}})^2} = \\ &= \text{Момент времени, больший } 2 \text{ м,} \end{aligned}$$

что изображено на рис. 15, а. В системе отсчета второй ракеты (которая летит быстрее, чем первая!) событие — акт приема — происходит слева от начала координат (рис. 15, в).

$$\begin{aligned} x''_{\text{прием}} &= \text{Отрицательная величина,} \\ t''_{\text{прием}} &= \sqrt{(2 \text{ м})^2 + (x''_{\text{прием}})^2} = \\ &= \text{Момент времени, больший } 2 \text{ м (снова!).} \end{aligned}$$



а) Диаграмма пространства-времени в лабораторной системе отсчета.

б) Диаграмма пространства-времени в системе отсчета ракеты.

в) Диаграмма пространства-времени в системе отсчета сверхракеты.

Р и с. 15. Диаграммы пространства-времени, описывающие излучение опорной вспышки и ее прием после отражения. Дуга гиперболы, изображенной на каждой диаграмме, описывается уравнениями

$$(\text{Интервал})^2 = t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2 = t''^2 - x''^2.$$

Различные точки, помеченные на разных диаграммах пространства-времени как акт приема, относятся к *одному и тому же событию*. Событие одно, но его координаты в разных системах отсчета различны. Что же объединяет между собой эти разные координаты одного и того же события? Все они удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} (\text{Разница во времени})^2 - (\text{Расстояние в пространстве})^2 &= (\text{Интервал})^2 = \\ &= \text{Постоянная величина.} \end{aligned}$$

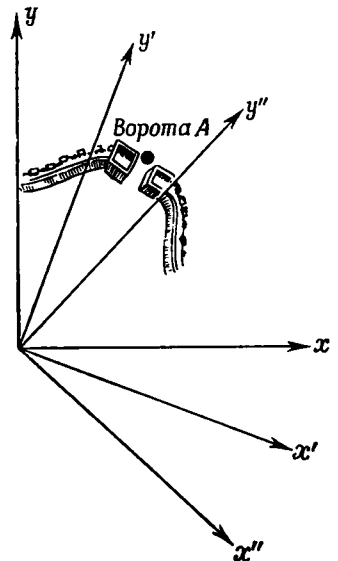
Но это — уравнение *гиперболы*. Итак, *событие, изображенное на гиперболе  $t^2 - x^2 = (\text{постоянная величина})$  диаграммы пространства-времени некой лаборатории или ракеты, будет изображаться также на гиперболе, описываемой тем же уравнением, диаграммы пространства-времени любой другой лаборатории или ракеты.*

*На диаграмме пространства-времени инвариантный интервал соответствует гиперболе*

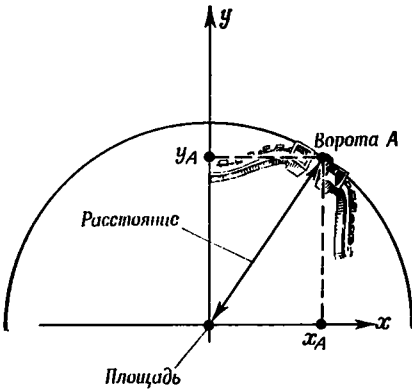
Существует ли аналогичная кривая, сопоставляющая разные значения координат, получаемые для одних и тех же ворот дневным и ночным землемерами? Координаты  $x$  и  $y$ , скажем, ворот  $A$  относительно городской площади определяются в зависимости от выбора направления на север (рис. 16). Дневной и ночной планы этих ворот изображены на рис. 17, *а* и *б*. Сделаем еще один, третий (отличающийся от двух первых), выбор координатных осей, повернутых еще больше, чем ночные оси относительно дневных. Для землемера, пользующегося этим третьим выбором координатных осей, координата  $x''$  ворот  $A$  может оказаться отрицательной (рис. 17, *в*).

*Инвариантное расстояние соответствует окружности на диаграмме  $xu$*

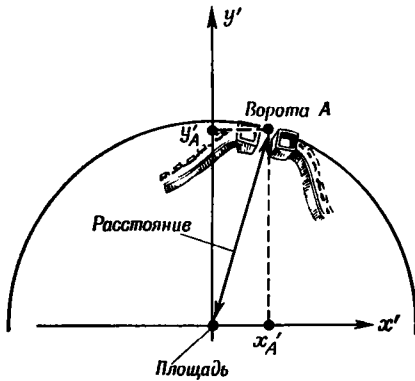
Различные точки, помеченные на разных чертежах как «ворота  $A$ », относятся к *одним и тем же воротам*. Ворота одни, но их координаты на разных



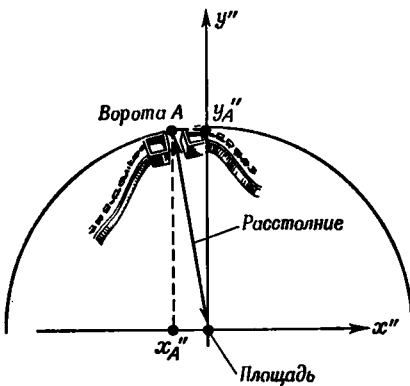
Р и с. 16. Относительное расположение координатных осей, соответствующее выбору направления на север дневного, ночного и некоего третьего землемеров.



а) Чертеж дневного землемера.



б) Чертеж ночного землемера.



в) Чертеж третьего землемера.

Р и с. 17. Координаты ворот А, измеренные соответственно дневным, ночным и третьим землемерами. Дуга окружности, изображенная на каждой схеме, описывается уравнениями

$$(\text{Расстояние})^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2.$$

планах различны. Что же объединяет между собой эти разные координаты одних и тех же ворот? То, что все они удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} (\text{Разность координат } x)^2 + (\text{Разность координат } y)^2 = \\ = (\text{Расстояние})^2 = \text{Постоянная величина.} \end{aligned}$$

Но это — уравнение *окружности*. Итак, *точка, изображенная на окружности  $x^2 + y^2 = (\text{постоянная величина})$  в системе координат любого землемера, будет изображаться также на окружности, описываемой тем же уравнением, в системе координат любого другого землемера.*



Это — основное различие между школьной евклидовой геометрией и реальной лоренцевой геометрией пространства-времени. В евклидовой геометрии инвариантно *расстояние* между парами точек, и поэтому для всех землемеров ворота  $A$  будут изображаться где-либо на *окружности* (плоскости  $xy$ ) с центром в городской площади. В лоренцевой геометрии инвариантен *интервал* между событиями, и поэтому для всех наблюдателей в лабораториях и ракетах данное событие будет изображаться где-либо на *гиперболе* (на диаграмме пространства-времени) по отношению к опорному событию.

В евклидовой геометрии длина (или ее квадрат) всегда *положительна*:

$$(\Delta x^2) + (\Delta y)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 \geq 0.$$

Напротив, квадрат интервала в лоренцевой геометрии

$$(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

может быть *положительным*, *отрицательным* или *равным нулю* в зависимости от того, какая составляющая в нем преобладает — временная или пространственная. Более того, к какому бы из этих типов ни принадлежал интервал в одной системе отсчета, он останется того же типа и в *любой другой* системе отсчета, так как величина интервала одинакова во всех системах. Значит, мы обнаружили, что в природе существует фундаментальный способ

Таблица 7. Классификация взаимной упорядоченности пар событий

Характер описания	Величина квадрата интервала	Наименование
Временная часть интервала преобладает по сравнению с пространственной	Положительна	Временноподобный интервал
Временная часть интервала равна его пространственной части	Равна нулю	Светоподобный (изотропный) интервал
Пространственная часть интервала преобладает по сравнению с временной	Отрицательна	Пространственноподобный интервал

классифицировать порядок событий. Мы назовем интервал между двумя событиями *временноподобным*, *светоподобным* или *пространственноподобным* в зависимости от того, положителен, равен нулю или отрицателен его квадрат (см. табл. 7) <sup>1)</sup>.

*Три типа интервалов между парами событий:*  
*временноподобный, светоподобный*  
*и пространственноподобный*

В зависимости от того, временноподобный он или пространственноподобный, интервал между двумя событиями обозначается по-разному. Временно-

<sup>1)</sup> В отечественной литературе чаще говорят не «светоподобный», а «изотропный», иногда — «нулевой», однако термин «светоподобный» вполне отвечает существу дела, и мы его сохранили в переводе. Довольно употребительный термин «временноподобный», кажущийся на первый взгляд менее двусмысленным, чем «временноподобный», едва ли может быть предпочтен последнему ввиду законов словоупотребления русского языка. Отметим, что ряд авторов используют определенные квадраты интервала, отличающиеся от принятых в этой книге знаком, ввиду чего временноподобный квадрат интервала у них отрицателен, а пространственноподобный — положителен. — *Прим. перев.*

подобный интервал записывается с помощью греческой буквы «тау» ( $\tau$ ) и называется также *инвариантным временноподобным расстоянием* или *собственным временем* (иногда — *локальным временем*) между двумя событиями:

$$\Delta\tau = \sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}. \quad (7)$$

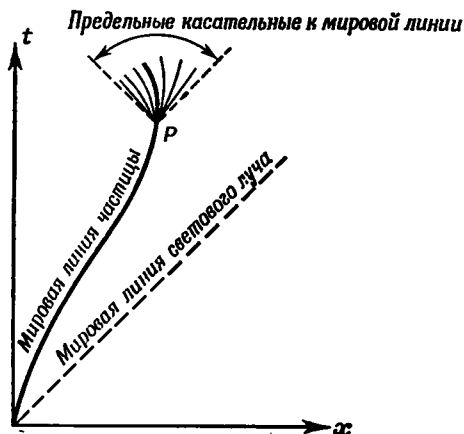
### *Собственное время и собственное расстояние*

Пространственноподобный интервал обозначается с помощью греческой буквы «сигма» ( $\sigma$ ) и называется *инвариантным пространственноподобным расстоянием* или *собственным расстоянием* между двумя событиями:

$$\Delta\sigma = \sqrt{(\Delta x)^2 - (\Delta t)^2}. \quad (8)$$

### *Мировая линия частицы*

На рис. 18 изображено положение частицы в пространстве в функции времени в предположении, что частица в момент  $t = 0$  находилась в начале координат и затем двигалась вдоль оси  $x$ . Такой график зависимости положения в пространстве от времени на пространственно-временной диаграмме, называется *мировой линией* частицы. Каждые встречающиеся с частицей часы решетки регистрируют время встречи, так что мировая линия частицы в некотором смысле есть сумма таких отдельных событий-встреч. Никто никогда не наблюдал частиц, движущихся быстрее света. Поэтому любая частица всегда проходит за 1 м светового времени *менее* 1 м пути. Это значит, что разница во времени между всеми событиями на мировой линии частицы больше, чем расстояние между ними в пространстве, т. е. мировая линия частицы складывается из событий, *временноподобных* по отношению к исходному событию и по отношению друг к другу. Иначе говоря, *мировая линия частицы должна быть временноподобной*. Временноподобная мировая линия характеризуется в каждой точке  $P$  касательной к ней в этой точке, лежащей где-то между мировыми линиями световых лучей, испущенных в той же точке. Эти световые лучи распространяются за 1 м светового времени на 1 м длины. События, лежащие на мировой линии светового луча, одинаково отстоят друг от друга в пространстве и во времени. Поэтому мировая линия светового луча складывается из событий, *светоподобных* по отношению к исходному событию и друг к другу. Иначе говоря, *мировая линия светового луча должна быть светоподобной*.

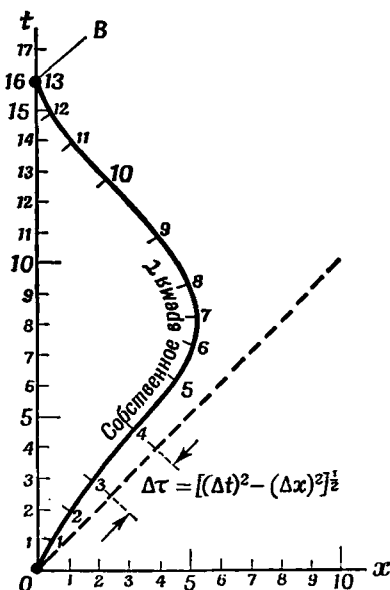
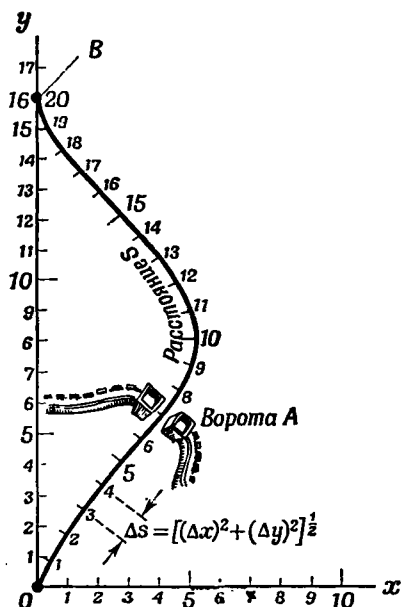


Р и с. 18. Временноподобная мировая линия частицы.

*Путь в пространстве обладает длиной*

Центральным в евклидовой геометрии является понятие расстояния. Например, пользуясь гибкой измерительной рулеткой, легко найти расстояние  $s$  вдоль пути, начинающегося на городской площади и идущего по кривой через городские ворота  $A$  (рис. 19а). Расстояние  $\Delta s$  между двумя любыми близкими точками на этом пути (например, теми, что обозначены на рисунке как 3 и 4) можно также *вычислить* исходя из разностей координат  $\Delta x$  и  $\Delta y$  этих точек в каждой из систем координат. Ввиду инвариантности расстояния оно будет для этой пары точек одним и тем же в любой из систем координат, хотя сами разности координат  $\Delta x$  и  $\Delta y$  будут различны в разных системах. Также и расстояния между всеми другими парами соседних точек на этом пути не будут зависеть от выбранной для расчетов системы координат. Значит, это заключение справедливо и в отношении *суммы* всех отрезков данного пути! Итак, разные землемеры, пользующиеся различными системами координат, найдут, что длина данного пути от определенной начальной точки  $O$  до определенной конечной точки  $B$  для всех них одинакова.

Но от  $O$  до  $B$  можно пройти и по совершенно другому пути, например по прямой  $OB$  (рис. 19а). Этот новый путь, очевидно, обладает другой длиной, чем старый. Такое различие в длинах разных путей между  $O$  и  $B$  — настолько общеизвестный факт в евклидовой геометрии, что не требует никаких комментариев и уж, конечно, не вызывает удивления. В евклидовой геометрии путь по кривой между заданными двумя точками *длиннее*, чем прямолинейный путь между этими же двумя точками. Различие же длин для разных



Р и с. 19а. Расстояние вдоль искривленного пути, начинающегося на городской площади. Заметим, что полное *расстояние* вдоль *искривленного* пути от точки  $O$  до точки  $B$  *больше*, чем *расстояние* по *прямому* пути (ось  $y$ ) от точки  $O$  до точки  $B$ .

Р и с. 19б. Собственное время вдоль искривленной мировой линии на диаграмме пространства-времени. Заметим, что полное *собственное время* вдоль *искривленной* мировой линии от события  $O$  до события  $B$  *меньше*, чем *собственное время* по *прямой* оси  $t$  от события  $O$  до события  $B$ .

путей не приводит ни к каким противоречиям, и никто не станет заявлять, будто измерительная рулетка дает неверный результат, если ее протянуть в соответствии с кривизной пути.

---

*Прямой путь обладает наименьшей длиной*

Собственное время играет ту же роль для мировой линии в лоренцевой геометрии, какую играла длина для пути в евклидовой геометрии. Пусть началом мировой линии служит событие  $O$ , а концом — событие  $B$ . Существует бесконечное множество разных мировых линий, соединяющих события  $O$  и  $B$ . Соответствующий каждой из них промежуток собственного времени определен вполне однозначно, но различен для разных мировых линий. Удивительно ли это? Если да, то следует подробнее рассмотреть определение собственного времени и методику его измерения.

---

*Протяженность мировой линии измеряется собственным временем*

Рассмотрим частицу, движущуюся от  $O$  к  $B$  по искривленной мировой линии (рис. 196)<sup>1)</sup>. В этом случае частица движется реально вдоль оси  $x$  с переменной скоростью. Пусть эта частица посылает световой сигнал через каждый метр времени по часам, движущимся вместе с частицей. Собственное время  $\Delta t$ , прошедшее между каждыми двумя последовательными вспышками (например, обозначенными на рисунке через 3 и 4), можно вычислить, исходя из разностей координат  $\Delta x$  и  $\Delta t$  этих событий, измеренных в некоторой инерциальной системе отсчета. Ввиду инвариантности этого интервала промежуток собственного времени между двумя данными событиями будет одним и тем же, в какой бы инерциальной системе отсчета мы его ни вычисляли, хотя сами разности пространственных и временных координат  $\Delta x$  и  $\Delta t$  будут различны в разных системах отсчета. Интервалы между всеми другими парами последовательных событий-вспышек на этой мировой линии не будут зависеть от выбранной для вычисления величины интервала системы отсчета. Значит, это заключение справедливо и в отношении суммы интервалов собственного времени между всеми событиями-вспышками на данной мировой линии! Итак, разные наблюдатели в различных инерциальных системах отсчета найдут, что промежуток собственного времени между определенным начальным событием  $O$  и определенным конечным событием  $B$  вдоль данной мировой линии для всех них одинаков.

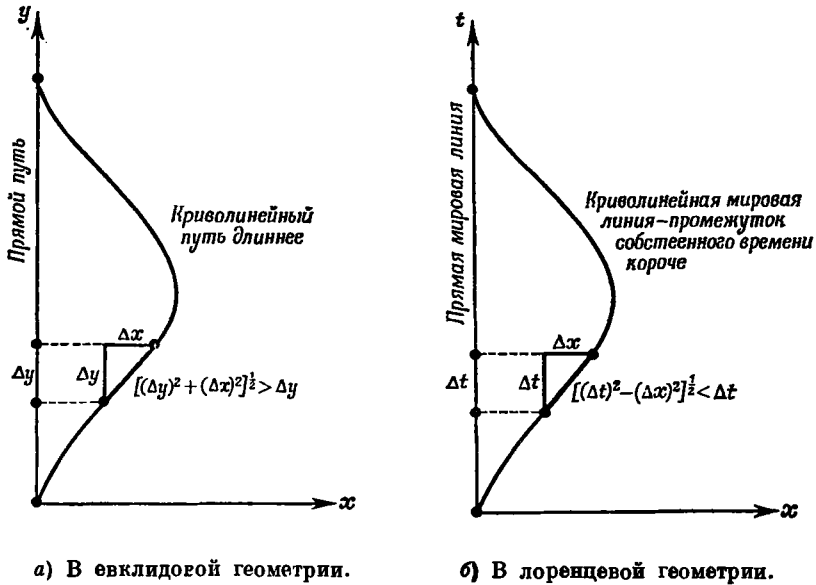
---

*Прямая мировая линия соответствует наибольшему промежутку собственного времени*

Но от события  $O$  до события  $B$  можно «пройти» и по совершенно другой мировой линии, например по прямой  $OB$  (рис. 196). Этой новой мировой линии, очевидно, соответствует другой промежуток собственного времени, чем старой мировой линии. В лоренцевой геометрии искривленная мировая

---

<sup>1)</sup> Конечно, движения вдоль мировой линии реально не происходит, как это и подчеркивается в следующей фразе. Авторы очень удачно охарактеризовали ранее мировые линии на диаграммах Минковского как изображение функциональной зависимости пространственной координаты  $x$  материального объекта от времени. Поэтому читатель, встречая употребляемое для краткости выражение «движение по мировой линии», должен сопротивляться искушению понимать его буквально. — *Прим. перев.*



а) В евклидовой геометрии.

б) В лоренцевой геометрии.

Р и с. 20. Противоположность между геометриями Евклида и Лоренца. В лоренцевой геометрии *искривленная* мировая линия соответствует движению за *меньшее* собственное время.

линия между двумя заданными событиями *короче*, чем прямая мировая линия между теми же двумя событиями, — *короче* в смысле соответствующего ей промежутка собственного времени (рис. 20). *Расстояние* между двумя соседними точками по кривому пути всегда равно или *больше* разности координат  $y$  этих точек. Напротив, *промежуток собственного времени* между двумя соседними событиями по кривой мировой линии всегда равен или *меньше* соответствующего времени по прямой мировой линии. Фундаментальным способом сравнения различных мировых линий между двумя событиями является определение собственного времени.

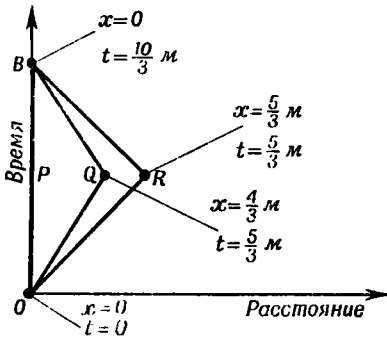
Разный наклон мировой линии в разных ее точках (на рис. 19б и 20,б) означает, что движущиеся по ней часы меняют скорость — *ускоряются*. При ускорении разные часы будут вести себя по-разному, если только эти часы не будут достаточно малыми. Как правило, часы могут выдерживать большие ускорения, лишь если они достаточно компактны. Чем меньше часы, тем большие ускорения они смогут выдерживать и тем резче могут быть изгибы их мировых линий. На всех диаграммах (например, на рис. 19б и 20, б) мы рассматриваем предельный случай бесконечно малых часов.

Теперь мы можем рассматривать такое движение частиц и часов, при котором они испытывают большие ускорения. Рассмотрим, в частности, простой частный случай, изображенный на рис. 19б.

---

*Промежуток собственного времени между событиями  $O$  и  $B$  с точки зрения трех мировых линий*

Мировая линия на этом рисунке постепенно меняет свой наклон по мере ускорения и замедления частицы. Будем делать все *короче* период ускорения (приложение большой движущей силы!) и период замедления. При этом часть времени, проведенная при равномерном движении с большой скоростью, становится все продолжительнее. В конце



Р и с. 21. Сравнение трех разных мировых линий, связывающих события  $O$  и  $B$ . Резкие изменения скорости в событиях  $Q$  и  $R$  изображают предельный случай использования малых («протударных») часов.

концов мы приходим к предельному случаю, когда периоды ускорения и торможения будут слишком короткими для того, чтобы быть различимыми на диаграмме пространства-времени (мировая линия  $OQB$  на рис. 21). В этом простом предельном случае вся история движения определяется: 1) исходным событием  $O$ , 2) конечным событием  $B$  и 3) координатой  $x$  точки поворота  $Q$ , расположенной на полпути между  $O$  и  $B$ . На этом примере особенно просто понять, как величина промежутка собственного времени между  $O$  и  $B$  зависит от величины координаты  $x$  точки поворота, и на этом основании сравнить три мировых линии  $OPB$ ,  $OQB$  и  $ORB$ .

Прямая  $OPB$  изображает мировую линию неподвижной частицы:  $x = 0$  в течение всего времени. Собственное время, прошедшее от события  $O$  до события  $B$  по мировой линии, проходящей через  $P$ , очевидно, равно времени, измеренному в инерциальной системе отсчета:

$$\tau_{OPB} = \frac{10}{3} \text{ м светового времени.}$$

Напротив, на мировой линии, соединяющей  $O$  и  $B$  через  $R$ , каждая часть — светоподобная, так как для каждого ее отрезка разности пространственной и временной координат равны друг другу, и поэтому

$$\tau_{ORB} = (\text{Удвоенное собственное время на отрезке } OR) = 2 [(\text{Время})^2 - (\text{Расстояние})^2]^{1/2} = 0.$$

Конечно, со скоростью света не могут двигаться никакие часы, и мировая линия  $ORB$  не может реализоваться в действительности. Тем не менее она представляет собой предельное положение реально осуществимых мировых линий. Иными словами, можно найти такую скорость, которая будет достаточно близкой к скорости света, хотя и меньше ее, что путешествие с этой скоростью сначала в одну, а затем в другую сторону вернет идеальные часы назад в точку  $x = 0$  по прошествии столь короткого промежутка собственного времени, какой нам потребуется.

В отличие от предельного случая линии  $ORB$  мировая линия  $OQB$  соответствует промежутку собственного времени:

$$\begin{aligned} \tau_{OQB} &= (\text{Удвоенное собственное время на отрезке } OQ) = \\ &= 2 \left[ \left( \frac{5}{3} \right)^2 - \left( \frac{4}{3} \right)^2 \right]^{1/2} = \\ &= 2 \sqrt{\frac{25-16}{9}} = 2 \text{ м светового времени.} \end{aligned}$$

Этот промежуток собственного времени *короче*, чем  $\tau_{OPB} = 10/3$  м по «прямой» мировой линии  $OPB$ !

Как мы видим, *собственное* время реального физического мира (пространства-времени) существенно отличается от понятия *расстояния* в школьной евклидовой геометрии. Самое короткое расстояние — по прямому пути, и поэтому определяют: «Прямая линия есть кратчайший путь между двумя точками». Наоборот, промежуток собственного времени *короче* для того путешественника, который улетел, ускорившись до огромной скорости, а затем повернул и вернулся назад, чем для человека, оставшегося у себя дома. (См. упражнения 27 и 49, посвященные парадоксу часов.) *Короче*

говоря, собственное время — это подходящее мерило для времени, наблюдаемого частицей, движущейся по мировой линии. Точно так же деления на гибкой рулетке оказываются подходящими для измерения расстояния, пройденного путешественником по криволинейному пути.

## 7. ПОДРАЗДЕЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

### *Включение координат $y$ и $z$ в интервал*

До сих пор, рассматривая интервал между двумя событиями  $A$  и  $B$ , мы ограничивались тем случаем, когда координаты  $y$  и  $z$  этих событий одинаковы. Тогда расстояние между событиями в пространстве измерялось величиной

$$\text{Расстояние} = \Delta x,$$

а интервал задавался выражением

$$\sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}.$$

Однако ясно, что ориентация осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  может быть выбрана произвольно. При другой ориентации этих осей компонента  $\Delta x$  радиуса-вектора между двумя событиями, вообще говоря, окажется совсем другой, чем прежде. Лишь расстояние в пространстве между двумя событиями никак не зависит от выбора ориентации осей и задается выражением

$$(\text{Расстояние})^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Другими словами, это и есть та величина, которую следует взять вместо  $(\Delta x)^2$  в общей формуле для интервала. Итак, общая формула для интервала между событиями

$$A \text{ с координатами } (t, x, y, z)$$

и

$$B \text{ с координатами } (t + \Delta t, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} (\text{Интервал собственного времени})^2 &= (\text{Время})^2 - (\text{Расстояние})^2 = \\ &= (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

для временноподобного интервала и

$$\begin{aligned} (\text{Интервал собственной длины})^2 &= (\text{Расстояние})^2 - (\text{Время})^2 = \\ &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

для пространственноподобного интервала.

Как понимать эту новую геометрию, основанную на выражении для «интервала собственной длины», в котором три знака «плюс», как и в обычной евклидовой геометрии, но, кроме того, еще и один знак «минус»? Следуя Минковскому (1908), можно ввести для измерения времени новую величину  $w$ , задан ее как

$$w = \sqrt{-1} \cdot t$$

или

$$\Delta w = \sqrt{-1} \cdot \Delta t. \quad (11)$$

Тогда выражение для интервала собственной длины примет вид

$$(\text{Интервал собственной длины})^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta w)^2.$$

### *Минковский о единстве пространства-времени*

Все слагаемые теперь берутся со знаком «плюс». Внешне соответствующая геометрия представляется евклидовой, хотя и в четырех, а не в трех измерениях. Под впечатлением этой формулы Минковский написал ставшее знаменитым изречение: «Отныне пространство и время, взятые по отдельности, обречены влачить лишь призрачное существование, и только единство их обоих сохранит реальность и самостоятельность»<sup>1)</sup>. В наши дни это единство пространства и времени называют «пространством-временем». Пространство-время — эта та арена, на которой живут, движутся и вообще существуют звезды, атомы и люди. Для разных наблюдателей пространство различно. Время также различно для разных наблюдателей. Но пространство-время одинаково для всех!

Подход Минковского — залог понимания физического мира. Он концентрирует внимание на величинах, одинаковых во всех системах отсчета, таких, как интервал. Он выясняет относительный характер величин, зависящих от выбора системы отсчета, таких, как скорость, энергия, время и расстояние.

### *Различие между временем и пространством*

Но теперь уже понимают, что не следует преувеличивать роли утверждений Минковского. Совершенно справедливо, что время и пространство — неразделимые части единого целого. Однако неверно, что время качественно то же самое, что пространство. Почему же это неверно? Разве время не измеряется в метрах, точно так же как расстояние? Разве координаты  $x$  и  $y$  у землемера — не величины одной и той же физической природы? И, по аналогии, разве координаты  $x$  и  $t$  на диаграмме пространства-времени не являются также величинами одинаковой природы? Какой же еще может быть к ним законный подход, кроме равноправного, в формуле  $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta t)^2}$  для пространственноподобного интервала? Равноправный подход — конечно, но одинаковая природа — никак нет! В этой формуле есть знак *минус*, и его не изгнать оттуда никакими уловками. *Знак «минус» отражает разную природу пространства и времени.* Перейти к мнимому числу  $\Delta w = \sqrt{-1} \cdot \Delta t$  — вовсе не значит избавиться от этого «минуса». Это случилось бы, если бы величина  $w$  была реальной, но она мнимая. Нет часов, которые показывали бы  $\sqrt{-1}$  секунд или  $\sqrt{-1}$  метров. Реальные часы показывают реальное время, например  $\Delta t = 7$  сек. Поэтому член  $-(\Delta t)^2$  всегда противоположен по знаку члену  $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$  (расстоянию). Никакими закручиваниями и поворотами никогда не удастся заставить оба знака совпасть друг с другом.

Разница в знаках временного и пространственного членов в выражении для интервала является специфическим свойством лоренцевой геометрии, совершенно новым и не похожим ни на что присущее евклидовой геометрии. В евклидовой геометрии расстояние  $AB$  между двумя точками никак не может быть равно нулю, если только не равны нулю сразу все три величины  $\Delta x$ ,

<sup>1)</sup> См. сб. «Принцип относительности», Г. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, Г. Минковский, Сборник работ классиков релятивизма, Л., ОНТИ, 1935.— *Прим. перев.*



$\Delta y$  и  $\Delta z$ . Напротив, интервал  $AB$  между двумя событиями может оказаться равным нулю, даже если разности пространственных и временных координат  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  и  $\Delta t$  для  $B$  и  $A$  по отдельности велики.

---

### Случай равенства нулю интервала

При каких условиях интервал  $AB$  равен нулю? *Интервал равен нулю, когда разность временных координат для  $A$  и  $B$  совпадает по величине с пространственным расстоянием:*

$$\Delta t = \pm \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}. \quad (12)$$

Как это условие может быть истолковано физически? Выражение, стоящее справа,— расстояние между двумя точками. При этом свет проходит 1 м расстояния за 1 м светового времени. Поэтому выражение, стоящее справа, представляет собой время, *необходимое* свету, чтобы покрыть расстояние между  $A$  и  $B$ . С другой стороны,  $\Delta t$  — это то время, которое *дано* для того, чтобы пройти этот путь. Другими словами, условие (12) выполняется, и интервал  $AB$  обращается в нуль, если световой сигнал, исходящий из события  $A$ , приходит в пространственную точку события  $B$  как раз в момент совершения события  $B$  (либо если сигнал, происходящий из  $B$ , попадает в  $A$ ). *Интервал между двумя событиями равен нулю, если эти события могут быть связаны между собой одним световым лучом.*

Интересно изобразить на соответствующей диаграмме положение *всех* событий  $B$ , которые могут быть связаны с одним данным событием  $A$  световым лучом. Пусть событие  $A$  для простоты произошло в начале координат диаграммы пространства-времени.

Возьмем произвольные координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  события  $B$ . Тогда временная координата события  $B$  может иметь либо величину

$$t_{\text{будущ}} = + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (13)$$

либо величину

$$t_{\text{прошл}} = - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (14)$$

Изобразить графически эти формулы проще всего, если ограничиться теми событиями  $B$ , координата  $z$  которых равна нулю. Тогда следует построить диаграмму пространства-времени с двумя пространственными координатами  $x$  и  $y$  и временной координатой  $t$  (рис. 22). На этой диаграмме любое событие  $B$ , отделенное от  $A$  нулевым (светоподобным) интервалом, лежит либо на «световом конусе будущего» [знак «плюс» в уравнении (13)], либо на «световом конусе прошлого» [знак «минус» в уравнении (14)] относительно  $A$ .

---

### Световые конусы разграничивают пространство-время

Рассмотрим на рис. 22 все события, временная координата которых превышает на 7 м временную координату вспышки  $A$ . Эти события лежат в плоскости, находящейся на 7 м выше плоскости  $xy$  и параллельной этой последней. Те из этих событий, которые при этом лежат и на световом конусе с вершиной в  $A$ , образуют окружность. Радиус этой окружности 7 м. Эта

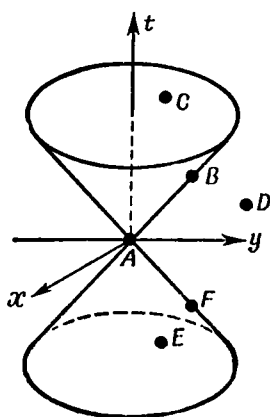


Рис. 22. Диаграмма пространства-времени, изображающая координаты  $x$ ,  $y$  и  $t$  событий, для которых  $z = 0$ .

окружность (являющаяся окружностью на данной диаграмме для  $x$ ,  $y$ ,  $t$ , но сферой на полной диаграмме для  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ ) представляет собой геометрическое место точек распространяющейся энергии излучения, отправленного из  $A$ . В более поздний момент этот импульс распространится на окружность еще большего радиуса. Итак, световой конус будущего изображает эволюцию расходящегося сферического светового импульса, отправленного из  $A$ . Аналогично световой конус прошлого изображает эволюцию сходящегося импульса излучения, настолько искусно сфокусированного, что он собирается в точку в начале координат в нулевой момент времени.

Световой конус специфичен для лоренцевой геометрии; в евклидовой геометрии ничего подобного нет. Более того, существование в лоренцевой геометрии светового конуса — факт огромного значения для структуры физического мира. Он приводит к следующему упорядочению всех событий по их причинным связям с любым заданным событием  $A$  (см. рис. 22).

#### *Подразделение пространства-времени на 5 областей относительно события $A$*

1. Может ли *частица*, испущенная в  $A$ , повлиять на то, что *должно произойти* в  $C$ ? Если да, то  $C$  лежит *внутри* светового конуса будущего с вершиной в  $A$ .

2. Может ли *свет*, испущенный в  $A$ , повлиять на то, что *должно произойти* в  $B$ ? Если да, то  $B$  лежит *на* световом конусе будущего с вершиной в  $A$ .

3. Может ли быть, что *ничто, происходящее* в  $A$ , не способно повлиять на то, что происходит в  $D$ ? Если да, то  $D$  лежит *вне* светового конуса с вершиной в  $A$ .

4. Может ли *частица*, испущенная в  $E$ , повлиять на то, что *происходит* в  $A$ ? Если да, то  $E$  лежит *внутри* светового конуса прошлого с вершиной в  $A$ .

5. Может ли *свет*, испущенный в  $F$ , повлиять на то, что *происходит* в  $A$ ? Если да, то  $F$  лежит *на* световом конусе прошлого с вершиной в  $A$ . Но световой конус с вершиной в событии  $A$ , как и в любом другом событии, существует в пространстве-времени совершенно независимо от того, в каких координатах мы пожелаем его описывать. Поэтому возможности, отмеченные в наших пяти вопросах и касающиеся влияния одного события на другое, не зависят от системы отсчета, в которой наблюдается эта взаимосвязь между

событиями. В этом смысле *причинная связь между двумя событиями одинакова в любой системе отсчета* <sup>1)</sup>.

На рис. 23 (на следующей странице) дана сводка взаимоотношений между выделенным событием *A* и всеми другими событиями в пространстве-времени.

## 8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА

*Движение  $\mu$ -мезона удобнее описывать с помощью координат, а не интервала*

На высотах от 10 до 30 км над поверхностью Земли космические лучи постоянно бомбардируют ядра атомов кислорода и азота, вызывая появление заряженных и нейтральных  $\mu$ -мезонов. Проследим движение одного такого  $\mu^+$ -мезона вниз, к Земле (рис. 24). В связанной с ним системе отсчета (назовем ее «системой ракеты») среднее время жизни мезона равно  $2,55 \times 10^{-8}$  сек. Примем в такой системе отсчета ракеты координаты события — рождения мезона — равными  $x' = 0$ ,  $t' = 0$  (см. рис. 25, б). Запишем координаты события — распада  $\mu$ -мезона на  $\mu$ -мезон и нейтрино — в виде

$$x'' = 0, t'' = \tau_{\mu}.$$

Как воспримет эти события наблюдатель в лаборатории? Сколько времени проживет  $\mu$ -мезон с момента своего рождения до смерти по его часам, т. е. чему равен промежуток лабораторного времени  $t$ ? Какое расстояние пройдет  $\mu$ -мезон за период своей жизни, т. е. чему равно лабораторное расстояние  $x$  от точки его образования в верхних слоях атмосферы до той точки внизу, где он распался? Короче говоря, пусть некоторое событие *E* определяется в системе ракеты заданными значениями координат  $x'$  и  $t'$  относительно начала *O*. Как определить тогда координаты  $x$  и  $t$  того же самого события относительно того же самого начала в лабораторной системе отсчета (рис. 25, а)?

Такой вопрос для нас нов. До сих пор мы рассматривали при описании относительного положения событий лишь инвариантный интервал. Величина такого интервала не зависит от выбора системы отсчета, причем

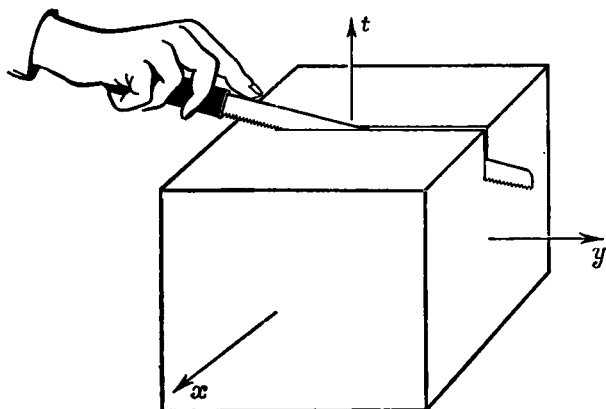
$$\begin{aligned} (\text{Пространственноподобный интервал})^2 &= -(\text{Временноподобный интервал})^2 = \\ &= x^2 - t^2 = (x')^2 - (t')^2. \end{aligned} \quad (15)$$

*В разных системах отсчета координаты события различны*

Сосредоточим теперь наше внимание на самих координатах как характеристике расположения события *E* относительно начала *O*. Мы сделаем это, заранее признавая, что они зависят от выбора системы отсчета. В этом отношении положение координат гораздо менее универсально, чем положение инвариантного интервала как меры взаимного разделения событий. Пусть так. Физика должна приладиться к тому, что есть в мире. Описывать удаленность событий друг от друга следует тем методом, который лучше соответствует обстоятельствам. Бывает, что торпедному катеру полезнее указать,

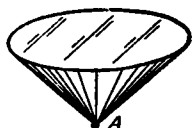
<sup>1)</sup> Пространства такого типа носят название *частично упорядоченных пространств*, так как в них наряду с абсолютными отношениями «раньше» и «позднее» существует и отсутствие определенного отношения между событиями (*абсолютно безразличная область*). В этой абсолютно безразличной области любое событие может быть «сделано» путем простого выбора системы отсчета более ранним или более поздним (по желанию!), чем опорное событие, лежащее в вершине светового конуса. — *Прим. перев.*

**Р и с. 23. Наглядное разбиение пространства-времени на 5 областей соответственно классификации событий относительно некоторого опорного события  $A$ .**



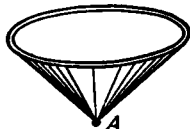
**КУБИК ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ С ЦЕНТРОМ В СОБЫТИИ  $A$ .**

Представлять себе распространённым до бесконечности во всех направлениях в последующих схемах.



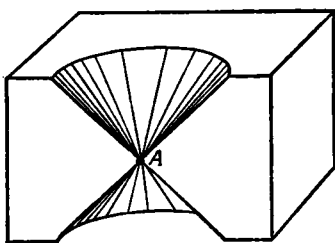
**АБСОЛЮТНОЕ БУДУЩЕЕ.**

События, происходящие позже  $A$  и отделенные от  $A$  временноподобным интервалом.



**СВЕТОВОЙ КОНУС ВУДУЩЕГО.**

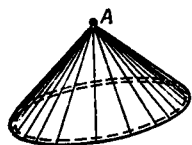
События, происходящие позже  $A$  и отделенные от  $A$  изотропным (светоподобным) интервалом.



**«НЕЙТРАЛЬНАЯ» ИЛИ «НЕДОСТИЖИМАЯ» ОБЛАСТЬ («АБСОЛЮТНО БЕЗРАЗЛИЧНАЯ»).**

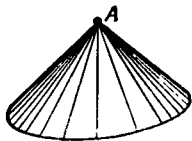
События, отделенные от  $A$  пространственноподобным интервалом.

Каждое такое событие может быть сделано происходящим либо раньше  $A$ , либо позже  $A$  посредством выбора подходящей системы координат.



**СВЕТОВОЙ КОНУС ПРОШЛОГО.**

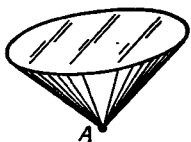
События, происшедшие раньше  $A$  и отделенные от  $A$  изотропным (светоподобным) интервалом.



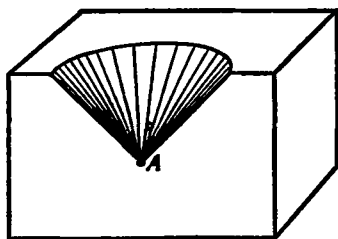
**АБСОЛЮТНОЕ ПРОШЛОЕ.**

События, происшедшие раньше  $A$  и отделенные от  $A$  временноподобным интервалом.

**ОДИН ИЗ СПОСОВОВ ЧАСТИЧНОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ РАСЧЛЕНЕННОЙ КАРТИНЫ.**

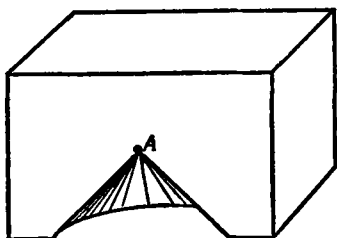


События, на которые наблюдатель в  $A$  может активно влиять своими теперешними или будущими действиями.

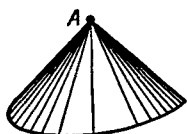


События, которых уже не может изменить наблюдатель после того, как он оказался в мировой точке  $A$ .

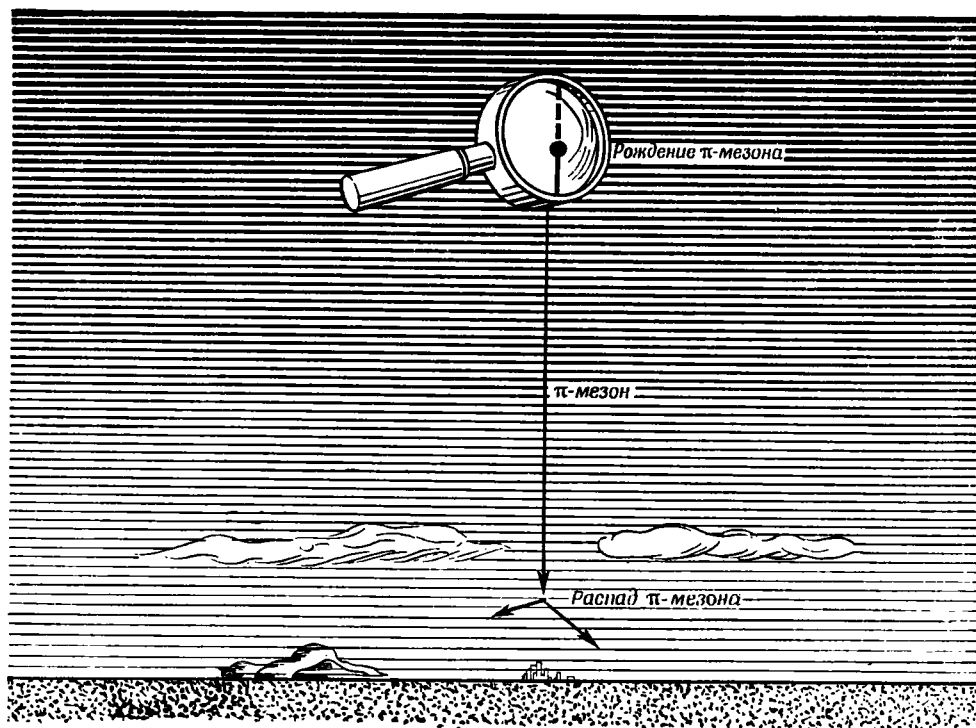
**ДРУГОЙ СПОСОБ ЧАСТИЧНОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ РАСЧЛЕНЕННОЙ КАРТИНЫ.**



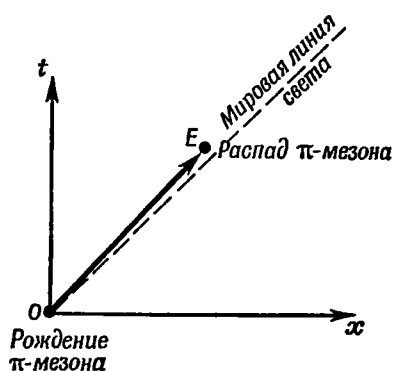
События, информацию о которых наблюдатель еще может узнать, если ничто их не заслонит.



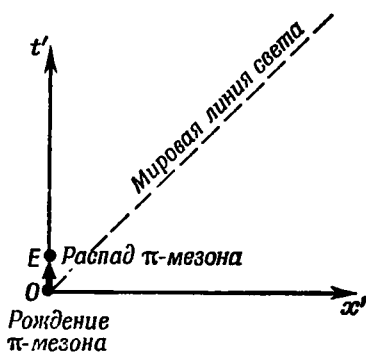
События, участником которых наблюдатель в  $A$  уже был (активно участвуя в них или просто наблюдая их) или следствия которых и информацию о которых он мог получать раньше.

Р и с. 24. Рождение и распад  $\pi$ -мезона.

что расстояние между носом и кормой атакуемого судна 50 м. Но в другом случае может быть, что ему гораздо важнее указать, что положение носа судна относительно кормы 40 м к северу и 30 м к востоку. В той задаче, которая нас занимает, нам не интересно, что мировая точка распада  $\pi$ -мезона отстоит от мировой точки его образования на величину инвариантного интервала  $\tau$ , равную около  $10^{-8}$  сек. Нам нужно охарактеризовать удаленность этих событий друг от друга самими координатами  $x$  и  $t$ .



а) Диаграмма пространства-времени лабораторной системы отсчета.



б) Диаграмма пространства-времени системы отсчета ракеты.

Р и с. 25. Координаты точек рождения (точка  $O$ ) и распада (точка  $E$ )  $\pi$ -мезона, изображенные на диаграммах пространства-времени лабораторной системы и системы отсчета ракеты.

### Преобразование Лоренца для координат

Как бы сильно ни различались координаты  $(x', t')$  события  $E$  в системе отсчета ракеты от его координат  $(x, t)$  в лабораторной системе, эти два набора координат связаны друг с другом вполне определенным и простым законом. Этот закон выражается через преобразование Лоренца

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{\sqrt{1-\beta_r^2}} + \frac{\beta_r t'}{\sqrt{1-\beta_r^2}}, \\ t &= \frac{\beta_r x'}{\sqrt{1-\beta_r^2}} + \frac{t'}{\sqrt{1-\beta_r^2}}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\beta_r$  — скорость системы отсчета ракеты относительно лабораторной системы отсчета. Ввиду выполнения этого закона говорят, что координаты обеспечивают *ковариантное* описание взаимной удаленности событий в пространстве-времени в противоположность *инвариантному* описанию этой удаленности, обеспечиваемому *интервалом*. Корень «вари» в слове *ковариантный*

### Определение понятия «ковариантность»

указывает, что координаты изменяются (варьируют) при переходах от одной системы отсчета к другой. Приставка «ко» означает, что преобразование координат всех событий производится по одному и тому же закону (координированно). Итак, для разных событий различны как координаты  $x'$  и  $t'$ , так и координаты  $x$  и  $t$ , но четверка коэффициентов

$$\begin{aligned} (1 - \beta_r^2)^{-1/2}, & \quad \beta_r \cdot (1 - \beta_r^2)^{-1/2}, \\ \beta_r \cdot (1 - \beta_r^2)^{-1/2}, & \quad (1 - \beta_r^2)^{-1/2}, \end{aligned}$$

связывающая эти два набора координат, обладает значениями, не зависящими от того, какое событие рассматривается.

В этом разделе мы будем обсуждать вывод формул преобразования Лоренца, их использование и их сходство с известными формулами преобразований евклидовой геометрии, иллюстрируемыми на примере притчи о землемерах.

### Три принципа, на которых основано преобразование Лоренца

Вывод преобразования Лоренца основывается на трех принципах, которые мы уже можем сформулировать:

- 1) Коэффициенты преобразования не должны зависеть от того, какое событие рассматривается («ковариантность преобразования»).
- 2) Выбор коэффициентов преобразования должен соответствовать тому, что точка, фиксированная в системе отсчета ракеты, движется в лабораторной системе отсчета со скоростью  $\beta_r$  в положительном направлении оси  $x$ .
- 3) Коэффициенты преобразования должны быть такими, чтобы любой интервал имел одно и то же значение в лабораторной системе и в системе отсчета ракеты.

Эти три принципа легко применить к случаю распада  $\pi$ -мезона. В лабораторной системе отсчета это событие имеет координаты  $(x, t)$  относительно события — рождения мезона, и эти координаты должны быть выражены через скорость  $\beta_r$  системы отсчета ракеты, в которой  $\pi$ -мезон покоится. Эту ско-

рость непосредственно дает отношение координат  $x$  и  $t$ ,

$$\frac{x}{t} = \beta_r,$$

так что

$$x = \beta_r t$$

или

$$x^2 = \beta_r^2 \cdot t^2. \quad (17)$$

### Первый этап вывода преобразования Лоренца

Временноподобный интервал, образованный  $x$  и  $t$ , определяется временем жизни  $\pi$ -мезона в системе отсчета ракеты (где мезон покоится в точке  $x' = 0$ ):

$$t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2 = t'^2 - 0 = \tau_\pi^2.$$

Подставим в эту формулу  $\beta_r^2 t^2$  вместо  $x^2$  на основании уравнения (17). Получим

$$t^2 - \beta_r^2 t^2 = t'^2 = \tau_\pi^2,$$

или

$$t^2 = \frac{t'^2}{1 - \beta_r^2} = \frac{\tau_\pi^2}{1 - \beta_r^2},$$

или

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta_r^2}} = \frac{\tau_\pi}{\sqrt{1 - \beta_r^2}}.$$

(Численный пример: положим  $\beta_r = 12/13$  скорости света; тогда  $1 - \beta_r^2 = 1 - 144/169 = 25/169$  и  $(1 - \beta_r^2)^{-1/2} = 13/5 = 2,6$ . Следовательно, время жизни  $\pi$ -мезона, измеренное в лаборатории, в 2,6 раза длиннее «собственного времени жизни», т. е. оно в 2,6 раза длиннее, чем время жизни, измеренное в системе отсчета, связанной с самим мезоном.) Расстояние, пройденное  $\pi$ -мезоном, равно времени движения, умноженному на скорость, так что

$$x = \beta_r t = \frac{\beta_r t'}{\sqrt{1 - \beta_r^2}}.$$

### Решение задачи о $\pi$ -мезоне

Этим расчетом завершается решение поставленной задачи (найти координаты мировой точки распада  $\pi$ -мезона относительно мировой точки его рождения в лабораторной системе координат).

Задача о  $\pi$ -мезоне служила введением к общей задаче — найти координаты данного события в лабораторной системе, если заданы его координаты в системе ракеты. Если мы покажем, что эта задача равнозначна выводу формул преобразования Лоренца, значит, мы пришли к методу вывода этого преобразования, исходя из простейших предположений. На самом деле, мы уже нашли два коэффициента из четырех в формулах преобразования Лоренца:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta_r^2}} + Ax',$$

$$x = \frac{\beta_r t'}{\sqrt{1 - \beta_r^2}} + Bx'.$$

Что касается остальных двух коэффициентов, временно обозначенных через  $A$  и  $B$ , то о них мы ничего не узнали просто потому, что  $\pi$ -мезон все время покоился в точке  $x' = 0$  в системе ракеты. Благодаря этому коэффициенты  $A$  и  $B$  могли иметь любые конечные значения при одном и том же решении



---

### Конечный этап вывода преобразования Лоренца

задачи о мезоне. Чтобы найти значения этих коэффициентов, мы перейдем от специального случая (события — распада  $E$ ) к более общему случаю — событию, происходящему в точке с произвольными координатами  $x'$  и  $t'$ . Мы вновь потребуем, чтобы величина интервала была одинаковой в лабораторной системе и в системе отсчета ракеты. Другими словами, потребуем выполнения равенства

$$t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2,$$

или

$$\left[ \frac{t'}{\sqrt{1-\beta_r^2}} + Ax' \right]^2 - \left[ \frac{\beta_r t'}{\sqrt{1-\beta_r^2}} + Bx' \right]^2 = t'^2 - x'^2,$$

или

$$t'^2 + \frac{2(A-\beta_r B)x't'}{\sqrt{1-\beta_r^2}} + (A^2 - B^2)x'^2 = t'^2 - x'^2. \quad (18)$$

Это равенство не может выполняться для всевозможных  $t'$  и  $x'$ , если только коэффициенты  $A$  и  $B$  не выбраны вполне определенным образом. Во-первых, эти коэффициенты должны быть такими, чтобы в левой части равенства (18) обратился в нуль множитель при  $x't'$  (так как в правой части подобного члена нет). Тогда

$$A = \beta_r B.$$

Во-вторых, множители при  $(-x'^2)$  в левой и правой частях равенства (1) должны совпадать. Поэтому

$$B^2 - A^2 = 1.$$

Мы получили два уравнения для двух неизвестных  $A$  и  $B$ ; решая их, найдем

$$A = \frac{\beta_r}{\sqrt{1-\beta_r^2}}$$

и

$$B = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_r^2}}.$$

Этим вычислением и завершается вывод формул преобразования Лоренца (16).

---

### Роль преобразования Лоренца

Новый — ковариантный — подход имеет дело с компонентами пространственно-временного интервала — координатами  $x, t$  (16), а не с величиной самого интервала (15). Язык интервалов подобен универсальному языку: любой интервал одинаков для наблюдателей во всех системах отсчета. Напротив, компоненты взаимного удаления событий в пространстве-времени, измеренные в одной системе отсчета, — это весьма частный язык для выражения такого удаления. По своей форме этот язык похож на тот частный язык, с помощью которого та же удаленность описывается в другой системе отсчета. Ведь в обоих языках фигурируют «пространственные» и «временная компоненты». Но само по себе это обстоятельство еще ничего не дает для сравнения информации, которой располагают разные группы наблюдателей. Когда англичанин берет турецкую газету, ему не легче от знания того, что в турецком языке, как и в английском, есть глаголы и существительные! Ему нужен

еще и словарь. Так вот для перевода на свой язык информации о пространственных и временных координатах событий из других систем отсчета наблюдателю тоже требуется словарь. Этот словарь — формулы преобразования Лоренца (16).

*Аналогия: землемеры пользуются преобразованием евклидова пространства*

Подобный же словарь необходим и при гораздо более обычных обстоятельствах. Дневной землемер, определяющий север по магнитному компасу, может перевести на свой язык измерения северной и восточной координат, сделанные ночным землемером, ориентирующимся по Полярной звезде. Но не потребуются никакого словаря, если они будут сравнивать свои результаты, выраженные на универсальном языке расстояний. Бросается в глаза различие между двумя методами — исходящим из инвариантов (расстояния — универсальный язык) и использующим компоненты (северную и восточную координаты, величины которых, определенные разными наблюдателями, различны). Эту противоположность инвариантных и ковариантных величин иллюстрирует рис. 26.

В притче о землемерах студент сделал, как теперь обнаруживается, лишь полдела. Он выяснил, как должен каждый землемер переводить свои результаты на универсальный язык расстояний:

$$(\text{Расстояние})^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2.$$

Однако он не сформулировал того словаря, который необходим для перевода с дневного на ночной язык и обратно величин *компонент*. Конечно, выводы студента были ценными, но ведь случается же, когда дневной землемер должен знать не только величину расстояния  $OA$ , но и конкретные координаты  $(\Delta x, \Delta y)$  этого отрезка. При этом может оказаться, что по воле судеб ему недоступно прямое измерение этих компонент. Тогда в его распоряжении будут лишь данные о компонентах  $(\Delta x', \Delta y')$ , полученные при измерении  $OA$

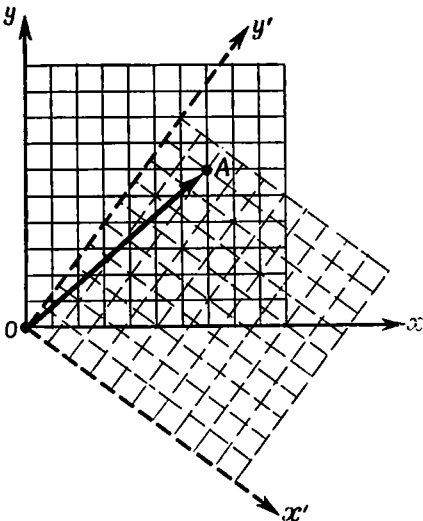


Рис. 26. Ковариантный подход к геометрии использует компоненты величин, например компоненты вектора  $OA$ . (Напротив, в инвариантном подходе используются длины, например длина  $OA$ . Такие длины имеют численные значения, не зависящие от выбора системы отсчета. Иначе говоря, любая длина одинакова независимо от того, кто ее определяет — землемер, определяющий направление на север по Полярной звезде, или землемер, пользующийся магнитным компасом.)

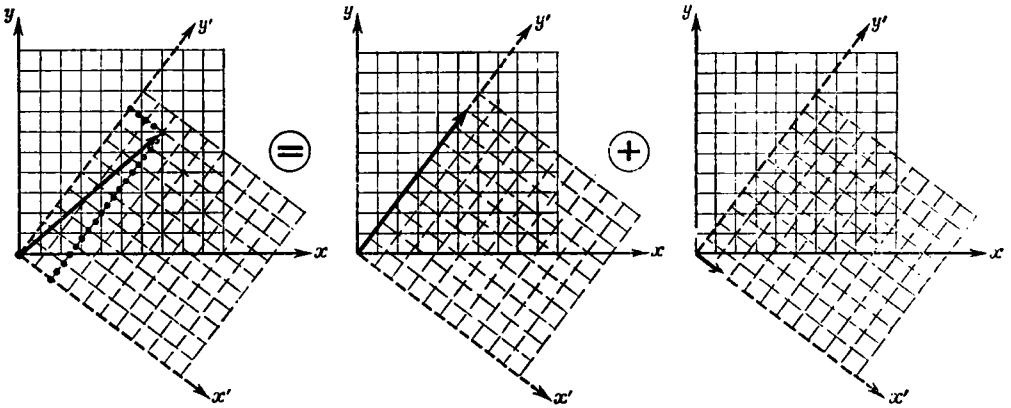
Пусть в одной системе значения компонент равны  $(x, y) = (7, 6)$ , а в другой системе —  $(x', y') = (2, 9)$ . (Эти числа соответствуют нашему чертежу.) Очевидно, что значения компонент в двух системах отсчета различны. В самом деле, они связаны законом «ковариантного преобразования»

$$x = (4/5)x' + (3/5)y', \quad y = -(3/5)x' + (4/5)y',$$

который в частном случае вектора  $OA$  записывается в виде

$$7 = (4/5) \cdot 2 + (3/5) \cdot 9, \quad 6 = -(3/5) \cdot 2 + (4/5) \cdot 9.$$

Приведенные здесь конкретные численные значения коэффициентов в законе преобразования связаны с тем конкретным поворотом, который изображен на чертеже.



Р и с. 27. Представление произвольного вектора как геометрической суммы двух векторов, направленных соответственно вдоль осей  $y'$  и  $x'$ . Это представление использовано при выводе уравнений (19) закона преобразования поворота (см. текст).

его коллегой — ночным землемером. Как же ему перевести имеющиеся в его распоряжении числа  $(\Delta x', \Delta y')$  на его «язык» и получить требуемые  $(\Delta x, \Delta y)$ ? Каким должен быть словарь? И что должен он знать, чтобы быть в состоянии этот словарь составить? Вот ответ. Подобно тому, как для построения формул

#### Евклидово преобразование поворота координатных осей

преобразования Лоренца, переводящих  $(\Delta x', \Delta t')$  в  $(\Delta x, \Delta t)$ , необходимо знать *относительную скорость* движения двух систем отсчета  $\beta_r$ , для перевода компонент  $(\Delta x', \Delta y')$  в  $(\Delta x, \Delta y)$  требуется знать величину *наклона*  $S_r$  прямой  $Oy'$  относительно прямой  $Oy$ . В примере, изображенном на рис. 26, наклон оси  $Oy'$  к оси  $Oy$  равен  $S_r = 3/4$ . Это значит, что при перемещении вверх по оси  $y$  на 4 единицы необходимо сдвинуться от нее вправо на 3 единицы, чтобы оказаться на оси  $y'$ . Если выразить через величину наклона  $S_r$  формулу преобразования поворота, мы получим

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta x'}{\sqrt{1+S_r^2}} + \frac{S_r \Delta y'}{\sqrt{1+S_r^2}}, \\ \Delta y &= -\frac{S_r \Delta x'}{\sqrt{1+S_r^2}} + \frac{\Delta y'}{\sqrt{1+S_r^2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

#### Доказательство.

1. Произвольный вектор  $(\Delta x', \Delta y')$  может рассматриваться (см. рис. 27) как сумма вектора  $(\Delta x', 0)$ , направленного вдоль оси  $x'$ , и вектора  $(0, \Delta y')$ , направленного вдоль оси  $y'$ . Для общего доказательства справедливости формул (19) достаточно удостовериться в том, что они верны по отдельности для этих двух векторов.

2. Вектор, направленный вдоль оси  $y'$  и имеющий длину  $\Delta y'$ , обладает относительно осей  $x$  и  $y$  компонентами, относящимися друг к другу как  $S_r$ , по определению «наклона». Итак,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = S_r,$$

или

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = S_r^2,$$

или

$$(\Delta x)^2 = S_r^2 \cdot (\Delta y)^2.$$

3. Расстояние от начала координат до конца вектора имеет одну и ту же величину в обеих системах координат:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2,$$

или

$$S_r^2 (\Delta y)^2 + (\Delta y)^2 = 0 + (\Delta y')^2,$$

или

$$(\Delta y)^2 = \frac{(\Delta y')^2}{1 + S_r^2},$$

или, наконец,

$$\Delta y = \frac{\Delta y'}{\sqrt{1 + S_r^2}},$$

так что

$$\Delta x = S_r \Delta y = \frac{S_r \Delta y'}{\sqrt{1 + S_r^2}}.$$

Сравнивая эти результаты с формулами преобразования поворота (19), мы убеждаемся в правильности коэффициентов при  $\Delta y'$ .

4. Аналогично рассмотрим вектор, направленный вдоль оси  $x'$  и имеющий компоненты  $(\Delta x', 0)$ . Его компоненты вдоль осей  $y$  и  $x$  находятся друг к другу в отношении

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -S_r.$$

Это равенство вместе с фактом инвариантности длины

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x')^2 + 0$$

приводит в ходе рассуждений, аналогичных предыдущим, к соотношениям

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 + S_r^2}}, \\ \Delta y &= -\frac{S_r \Delta x'}{\sqrt{1 + S_r^2}}. \end{aligned}$$

Тем самым мы проверили остальные два коэффициента в формулах (19) евклидова преобразования поворота.

*Относительный наклон осей  $S_r$  в геометрии Евклида аналогичен относительной скорости  $\beta_r$  в геометрии Лоренца*

Подводя итоги, можно сказать, что ковариантное преобразование в геометрии Евклида от  $(\Delta x', \Delta y')$  к  $(\Delta x, \Delta y)$  с очевидностью аналогично преобразованию от  $(\Delta x', \Delta t')$  к  $(\Delta x, \Delta t)$  в лоренцевой геометрии реального физического мира. Величина наклона  $S_r$  осей одной системы координат относительно соответствующих осей другой системы аналогична скорости  $\beta_r$  одной инерциальной системы отсчета относительно другой. Отношения катетов прямоугольного треугольника к его гипотенузе в евклидовой геометрии

$$\frac{1}{\sqrt{1 + S_r^2}} \text{ и } \frac{S_r}{\sqrt{1 + S_r^2}}$$

заменяются в лоренцевой геометрии, выражениями

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta_r^2}} \text{ и } \frac{\beta_r}{\sqrt{1-\beta_r^2}}.$$

Противоположны лишь знаки при  $S_r^2$  и  $\beta_r^2$  в знаменателях этих выражений. Знак «минус» в лоренцевой геометрии связан с минусом в выражении для квадрата интервала.

## 9. ПАРАМЕТР СКОРОСТИ

*Аддитивность углов подсказывает возможность определения аддитивного параметра скорости*

Все ли исчерпано? Мы выяснили, как перейти от компонент взаимной удаленности событий, известных в одной системе отсчета, к аналогичным компонентам в другой системе отсчета. Короче, мы записали ковариантный закон, связывающий компоненты в разных системах, как для преобразования Лоренца («преобразование в плоскости  $x, t$ »), так и для поворота («преобразование в плоскости  $x, y$ »). В первом случае формулы содержат параметр  $\beta_r$  (относительную скорость систем), а во втором — параметр  $S_r$  (относительный наклон осей). Однако ни один из этих параметров не позволяет еще получить самое простое описание взаимоотношения рассматриваемых систем координат. Было бы желательно заменить как  $\beta_r$ , так и  $S_r$  более естественными параметрами. Оказывается, найти такой более удобный способ описания движения и поворота систем можно. Лучшей характеристикой поворота является *угол*. Аналогично самой удобной характеристикой движения систем вместо скорости является некоторый *параметр скорости*  $\theta$ , который еще должен быть найден. Лучше всего можно понять смысл и значение этого параметра скорости при описании относительного движения систем отсчета, если сначала выяснить, почему угол — более удобный параметр, чем наклон при описании поворота.

Ответ таков: потому что *углы аддитивны, а наклоны — нет*. Что означает это утверждение? Взглянем на рис. 26. Вектор  $OA$  имеет наклон относительно оси  $y'$ . Этот наклон можно описать величиной  $S'$  (отношением числа единиц длины в направлении оси  $x'$ , приходящегося на единицу расстояния в направлении оси  $y'$ ). В данном случае мы имеем

$$S' = \frac{2}{9}.$$

Вместе с тем вектор  $OA$  имеет наклон к оси  $y$ , равный

$$S = \frac{7}{6},$$

а ось  $y'$  в свою очередь обладает относительно оси  $y$  наклоном

$$S_r = \frac{3}{4}.$$

*Вопрос:* выполняется ли следующий закон для наклонов:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Наклон } OA \\ \text{относительно} \\ \text{оси } y \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Наклон } OA \\ \text{относительно} \\ \text{оси } y' \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Наклон оси } y' \\ \text{относительно} \\ \text{оси } y \end{array} \right)?$$

*Наклоны в евклидовой геометрии не аддитивны*

*Проверка («экспериментальная математика»):*

$$\frac{7}{8} = \frac{2}{9} + \frac{3}{4} ?$$

$$\frac{42}{36} = \frac{8}{36} + \frac{27}{36} ?$$

$$42 = 8 + 27 = 35?! \quad \text{Неверно!}$$

*Вывод:* наклоны не аддитивны! *Вопрос:* раз наклоны не аддитивны, т. е.  $S$  не равняется сумме  $S'$  и  $S_r$ , то как же найти правильно наклон  $S$  из наклонов  $S'$  и  $S_r$ ? *Ответ:*

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{l} \text{Наклон } OA \\ \text{относительно} \\ \text{оси } y \end{array} \right) &= S = \frac{\Delta x}{\Delta y} = && \text{(по определению наклона)} \\ &= \frac{(1 + S_r^2)^{-1/2} \Delta x' + S_r \cdot (1 + S_r^2)^{-1/2} \Delta y'}{-S_r (1 + S_r^2)^{-1/2} \Delta x' + (1 + S_r^2)^{-1/2} \Delta y'} = && \text{[из (19)]} \\ &= \frac{\Delta x' + S_r \Delta y'}{-S_r \Delta x' + \Delta y'} = && \text{[сокращение числителя и} \\ & && \text{знаменателя на } (1 + S_r^2)^{-1/2}] \\ &= \frac{(\Delta x' / \Delta y') + S_r}{-S_r (\Delta x' / \Delta y') + 1} \cdot && \text{(деление числителя и зна-} \\ & && \text{менателя на } \Delta y') \end{aligned}$$

Окончательный вывод:

$$S = \frac{S' + S_r}{1 - S' S_r}. \quad (20)$$

Иными словами, наклоны  $S'$  и  $S_r$  могут считаться аддитивными, лишь если произведением  $S' \cdot S_r$ , стоящим в знаменателе, можно пренебречь по сравнению с единицей.

### *Аддитивны углы наклона*

Так как наклоны не аддитивны, а значит, неудобны для описания относительного поворота двух систем координат, то как же выбрать лучшую характеристику этого поворота? Ответ: взять *угол* между осями  $y$  и  $y'$ . Почему? Потому что углы подчиняются простому закону сложения (рис. 28):

$$\left( \begin{array}{l} \text{Угол между } OA \\ \text{и осью } y \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{Угол между } OA \\ \text{и осью } y' \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Угол между осями} \\ y' \text{ и } y \end{array} \right),$$

или

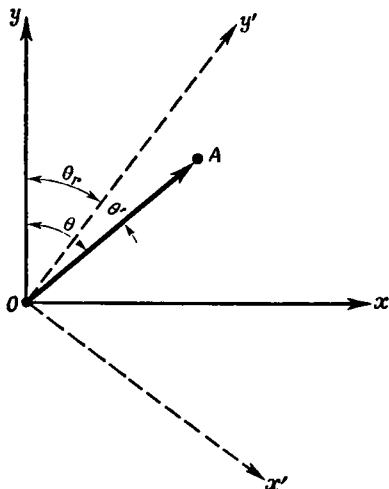
$$\theta = \theta' + \theta_r. \quad (21)$$

Благодаря выполнению этого соотношения угол является простейшей характеристикой наклона.

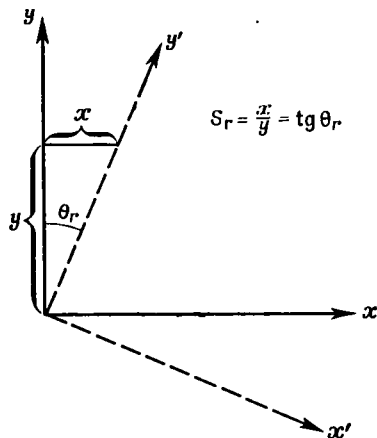
Как связаны между собой новая и старая характеристики наклона — угол  $\theta$  и наклон  $S_r$  оси  $y'$  относительно оси  $y$ ? Ответ:

$$S_r = \operatorname{tg} \theta_r. \quad (22)$$

(по тригонометрическому определению функции тангенса; см. рис. 29).



Р и с. 28. Угол — удобная мера наклона оси  $y'$  относительно оси  $y$ . Удобство здесь в том, что углы подчиняются простому правилу сложения:  $\theta = \theta' + \theta_r$ .



Р и с. 29. Связь между взаимным наклоном  $S_r$  осей  $y'$  и  $y$  двух евклидовых систем координат и углом  $\theta_r$  между этими осями.

### Закон сложения величин наклона в евклидовой геометрии

**Вопрос:** как можно расшифровать закон сложения величин наклона, если исходить из того, что эти величины суть тангенсы углов? **Ответ:**

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \operatorname{tg} (\theta' + \theta_r) = \quad (\text{аддитивность углов}) \\ &= \frac{\operatorname{tg} \theta' + \operatorname{tg} \theta_r}{1 - \operatorname{tg} \theta' \cdot \operatorname{tg} \theta_r}, \quad (\text{тригонометрия}) \end{aligned} \quad (23)$$

или

$$S = \frac{S' + S_r}{1 - S' \cdot S_r}. \quad (\text{тангенсы заменены на величины наклонов})$$

Сравнивая сложный закон сложения тангенсов (величин наклона) с простым законом сложения углов ( $\theta = \theta' + \theta_r$ ), мы убеждаемся в том, что угол — простейшая характеристика поворота.

### Закон сложения скоростей

Что же будет простейшей характеристикой движения? Во всяком случае, не сама скорость, так как она не подчиняется простому закону сложения. Определим этот закон сложения скоростей. Пусть в системе отсчета ракеты будет в направлении вперед по ее движению выстрелена пуля со скоростью  $\beta'$  в этой системе (рис. 30):

$$\beta' = \frac{\left( \begin{array}{c} \text{Число метров, пройденных в направлении} \\ \text{оси } x' \text{ за каждый} \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{c} \text{Метр времени } t', \text{ прошедший} \\ \text{по часам на ракете} \end{array} \right)} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}.$$

Относительно лаборатории ракета движется со скоростью  $\beta_r$ . Чему равна скорость  $\beta$  пули относительно лаборатории, измеренная по решетке часов лабораторной системы отсчета? Ответ: эта скорость равна

$$\beta = \frac{\left( \begin{array}{c} \text{Число метров, пройденных в направлении} \\ \text{оси } x \text{ за каждый} \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{c} \text{Метр времени } t, \text{ прошедший} \\ \text{по часам в лаборатории} \end{array} \right)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} =$$

$$= \frac{(1 - \beta_r^2)^{-1/2} \Delta x' + \beta_r (1 - \beta_r^2)^{-1/2} \cdot \Delta t'}{\beta_r (1 - \beta_r^2)^{-1/2} \Delta x' + (1 - \beta_r^2)^{-1/2} \cdot \Delta t'} = [\text{преобразование Лоренца; формулы (16)}]$$

$$= \frac{\Delta x' + \beta_r \Delta t'}{\beta_r \Delta x' + \Delta t'} = \quad [\text{в числителе и знаменателе произведено сокращение на множитель } (1 - \beta_r^2)^{-1/2}]$$

$$= \frac{(\Delta x' / \Delta t') + \beta_r}{\beta_r (\Delta x' / \Delta t') + 1}. \quad (\text{числитель и знаменатель разделены на } \Delta t')$$

Окончательно

$$\beta = \frac{\beta' + \beta_r}{1 + \beta' \beta_r} \quad (24)$$

(закон сложения скоростей). Иными словами, скорости не аддитивны. Лишь в предельном случае, когда скорости малы, две скорости  $\beta'$  и  $\beta_r$  могут рассматриваться как аддитивные (с определенной степенью точности), если в знаменателе закона (24) произведением  $\beta' \beta_r$  можно пренебречь по сравнению с единицей (с той же степенью точности, например 1 : 10 или 1 : 10<sup>6</sup>). *Пример неаддитивности скоростей*: пусть в момент выстрела ракета обладает скоростью, равной 3/4 скорости света; пусть пуля движется относительно ракеты со скоростью, равной 3/4 скорости света. Чему будет равна скорость пули относительно лаборатории? Ответ: не  $3/4 + 3/4 = 1,5$  скорости света, а

$$\beta = \frac{3/4 + 3/4}{1 + (3/4) \cdot (3/4)} = \frac{3/2}{25/16} = \frac{24}{25} = 0,96$$

(в метрах лабораторного расстояния за метр светового времени по лабораторным часам). Таким образом, релятивистский закон сложения скоростей (24) гарантирует, что никакой объект не может быть приведен в движение со скоростью света.

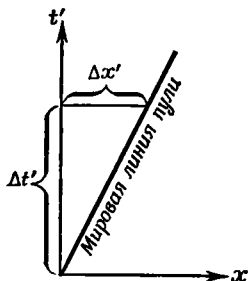


Рис. 30. Мировая линия пули, изображенная на диаграмме пространства-времени системы отсчета ракеты. Пуля была выпущена вперед по движению ракеты со скоростью  $\beta' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$  в системе отсчета ракеты,



*Определим параметр скорости таким образом, чтобы он был аддитивным!*

Выяснив, что скорость сама по себе не аддитивна, мы предлагаем найти новую меру движения — «параметр скорости»  $\theta$ , который должен быть аддитивным, т. е.

$$\left( \begin{array}{c} \text{Параметр скорости} \\ \text{пули относительно} \\ \text{лаборатории} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Параметр скорости} \\ \text{пули относительно} \\ \text{ракеты} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Параметр скорости} \\ \text{ракеты относительно} \\ \text{но лаборатории} \end{array} \right)$$

или

$$\theta = \theta' + \theta_r. \quad (25)$$

Смысл этого параметра  $\theta$  будет совершенно иным, чем смысл угла, описывающего поворот. Ни на какой диаграмме параметр скорости нельзя изобразить в виде обычного угла, и вот по какой простой причине. Расстояния между точками на листе бумаги подчиняются законам евклидовой геометрии. Напротив, интервалы между событиями в физическом мире определяются лоренцевой геометрией пространства-времени. Но если невозможно запечатлеть движущиеся пули и идущие часы на листе бумаги, то это никоим образом не лишает реальности указанные функционирующие объекты. Так и невозможность изобразить на листе бумаги аддитивность параметра скорости  $\theta$  не сможет нас смутить, но скорее заставит взглянуть на действительный мир быстрых частиц и физики высокой энергии с тем, чтобы увидеть там активное проявление закона сложения параметра скорости. Этот закон сложения параметра скорости,  $\theta = \theta' + \theta_r$ , во всех отношениях столь же реален, как и закон сложения углов поворота.

*Скорость равна тангенсу гиперболическому от параметра скорости*

Как же связаны между собой скорость  $\beta$  и параметр скорости  $\theta$ ? Соответствующая формула аналогична формуле, выражающей связь между наклоном и углом наклона (через тангенс угла), и имеет вид

$$\beta = \text{th } \theta. \quad (26)$$

Обозначение  $\text{th}$  означает «тангенс гиперболический». Функция гиперболического тангенса, как и гиперболических синуса и косинуса ( $\text{sh } \theta$  и  $\text{ch } \theta$ ), причем  $\text{th } \theta = \text{sh } \theta / \text{ch } \theta$ , обычны в математическом анализе. Таблицы всех этих трех функций можно найти в любом хорошем математическом справочнике. Их формальное определение дано в табл. 8. Тем не менее нам нет необходимости обращаться к этой таблице и к справочникам; ведь все, что нам требуется знать о функции  $\text{th } \theta$ , можно без труда получить уже из ее определения. А определяется она следующими двумя свойствами:

а) Эта функция должна правильно описывать закон сложения скоростей. Тогда из соотношения

$$\beta = \frac{\beta' + \beta_r}{1 + \beta' \beta_r}$$

и требования аддитивности  $\theta = \theta' + \theta_r$ , мы получаем закон сложения

$$\text{th } \theta = \text{th } (\theta' + \theta_r) = \frac{\text{th } \theta' + \text{th } \theta_r}{1 + \text{th } \theta' \cdot \text{th } \theta_r} \quad (27)$$

[см. определение (26)].

б) При малых скоростях параметр  $\theta$  должен переходить в обычную характеристику движения — скорость  $\beta$ . Это требование означает, что функция  $\text{th } \theta$  должна становиться сколь угодно близка к  $\theta$  при стремлении  $\theta$  к нулю. Вспомним, что обычный тангенс обычного угла стремится по величине к этому углу в пределе малых углов, если углы измеряются в радианах. Если измерять углы в градусах, то следует ввести поправочный множитель  $\pi/180^\circ$ . Здесь подобным же образом было бы можно измерять параметр скорости и в единицах, аналогичных градусам и минутам, но проще всего те единицы, при которых

$$\text{th } \theta \xrightarrow{\text{малые } \theta} \theta.$$

Назовем эти единицы «гиперболическими радианами»; они безразмерны.

Как можно найти связь между параметром скорости и скоростью из свойств (а) (аддитивность) и (б) (равенство  $\text{th } \theta = \theta$  для малых значений параметра скорости)?

### *Построение таблицы для тангенса гиперболического*

*Ответ.* 1) Начнем со столь малого параметра скорости  $\theta$ , что его  $\text{th } \theta$  может быть приравнен  $\theta$  с требуемой степенью точности. Примем, например,

$$\text{th } 0,01 = 0,01$$

в качестве первого шага для построения таблицы тангенса гиперболического.

2) Следующий шаг состоит в использовании закона сложения (27):

$$\begin{aligned} \text{th } 0,02 &= \text{th } (0,01 + 0,01) = \\ &= \frac{\text{th } 0,01 + \text{th } 0,01}{1 + \text{th } 0,01 \cdot \text{th } 0,01} = \frac{0,01 + 0,01}{1 + 0,0001}. \end{aligned} \quad (28)$$

3) На этом этапе следует условиться о том, с какой степенью точности мы будем брать численные значения. Почему бы, например, не принять  $\text{th } 0,02$  равным  $0,02$  точно так же, как мы приняли  $\text{th } 0,01$  равным  $0,01$ ? Однако в знаменателе формулы (28) стоит слагаемое  $0,0001$ ! Его наличие означает, что число  $0,02$  отличается от величины  $\text{th } 0,02$  приблизительно на  $1 : 10^4$ . Условимся же теперь вычислять все значения  $\text{th } \theta$  с точностью до  $1 : 10^4$ . Поэтому нам потребуется учесть поправку  $0,0001$ , стоящую в знаменателе. Но если нам понадобилось учитывать такую поправку при вычислении  $\text{th } 0,02$ , почему бы не учесть ее и в  $\text{th } 0,01$ ? Потому что там она была бы еще меньше. Иными словами, разница между  $\text{th } 0,01$  и  $0,01$  равна величине, которой можно пренебречь, если условиться брать результаты с точностью лишь до  $1 : 10^4$ . С этой точностью мы получим в конце концов

$$\text{th } 0,02 = \frac{0,020000}{1,0001} = 0,019998.$$

4) Найдем теперь значение  $\text{th } 0,04$ :

$$\text{th } 0,04 = \text{th } (0,02 + 0,02) = \frac{\text{th } 0,02 + \text{th } 0,02}{1 + \text{th } 0,02 \cdot \text{th } 0,02} = \frac{2 \cdot 0,019998}{1 + (0,019998)^2} = 0,039980.$$

Поправка в знаменателе изменяет теперь численную величину результата примерно на  $4 : 10^4$ . Тем не менее этот результат верен с точностью около  $1 : 10^4$ . Он получен на основании точной формулы (27) в применении к значениям гиперболического тангенса, которые сами были верны с точностью  $1 : 10^4$ .

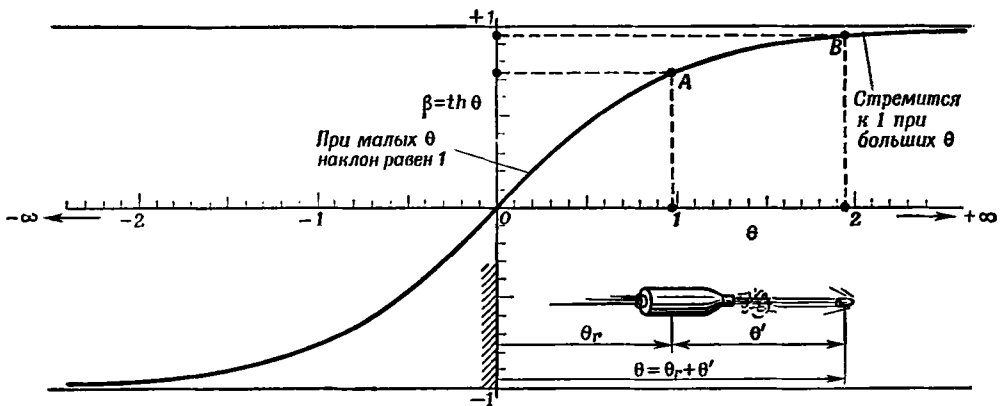
5) Дальнейшие шаги при построении таблицы значений гиперболического тангенса аналогичны предыдущим. Так, зная  $\text{th } 0,04$  и  $\text{th } 0,01$ , мы можем вычислить  $\text{th } 0,05 = \text{th } (0,04 + 0,01)$ . Мы получим далее  $\text{th } 0,1$ ;  $\text{th } 0,2$  и  $\text{th } 0,4$ , а затем  $\text{th } 0,5 = \text{th } (0,4 + 0,1)$ . Аналогично мы вычислим  $\text{th } 1$ ,  $\text{th } 2$  и все прочие значения  $\text{th } \theta$ , которые нам потребуются. Так мы получим результаты, подытоженные на рис. 31.

### Различие между параметром скорости и обычным углом

Из рис. 31 сразу же видны два свойства параметра скорости, никак не связанные с конкретным выбором чисел. Во-первых, наклон кривой функции  $\text{th } \theta$  относительно  $\theta$  стремится к единице при малых  $\theta$ . Это — новое выражение того факта, что скорость  $\beta = \text{th } \theta$  и параметр скорости  $\theta$  стремятся друг к другу при стремлении  $\theta \rightarrow 0$ . Во-вторых, когда параметр скорости стремится к бесконечно большому положительному (или отрицательному) значению, то скорость  $\beta = \text{th } \theta$  стремится к плюс (или минус) единице. Другими словами, допустимы любые значения параметра скорости на всем интервале значений от  $\theta = -\infty$  и до  $\theta = +\infty$ . Различие между «гиперболическими углами» или параметром скорости, область изменения которого неограниченна, и обычными углами очевидно. Обычный угол не приводит ни к чему новому, когда он превысит конечный интервал от 0 до  $2\pi$  радиан.

### Параметр скорости и постоянство скорости света

Как связаны представления о параметре скорости и о законе сложения скоростей с тем элементарным физическим опытным фактом, который привел



Р и с. 31. Связь между параметром скорости  $\theta$  и самой скоростью  $\beta = \text{th } \theta$ , получаемая непосредственно из закона сложения

$$\text{th } (\theta_1 + \theta_2) = \frac{\text{th } \theta_1 + \text{th } \theta_2}{1 + \text{th } \theta_1 \cdot \text{th } \theta_2},$$

как это описано в тексте. Например, пусть пуля выпускается со скоростью  $\beta' = 0,75$  из ракеты, движущейся со скоростью  $\beta_r = 0,75$ . Требуется найти скорость пули  $\beta$  относительно лабораторной системы. Мы знаем, что аддитивны не скорости, а параметры скорости. По графику для точки  $A$  находим  $\theta' = \theta_r = 0,973$ . Сложение дает  $\theta = \theta' + \theta_r = 1,946$ . Для этого значения параметра скорости находим по графику точку  $B$  и величину скорости  $\beta = 0,96$ . Тот же результат получен другим способом в тексте (стр. 68).

физику к пространственно-временной точке зрения? Вот самая непосредственная из возможных связей. Из результатов наблюдений и всего того, что уже в 1905 г. было известно об электромагнитных волнах, Эйнштейн был вынужден заключить, что скорость света одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Это же можно сказать иначе, переводя на язык мысленных опытов: фотон, выстреленный со скоростью света из быстро движущейся ракеты, движется относительно лаборатории со скоростью, *равной все той же скорости света*.

На языке параметра скорости можно сказать, что ракета обладает конечным параметром скорости  $\theta_r$ , тогда как величина параметра скорости фотона ( $\beta' = 1$ ) бесконечна ( $\theta' = \infty$ ; см. асимптотическую часть кривой в верхней правой части рис. 31). Прибавьте к бесконечности конечное число, и вы получите снова бесконечность в качестве суммы  $\theta = \theta' + \theta_r$ . Поэтому скорость фотона в лабораторной системе отсчета равна  $\beta = \text{th } \theta = \text{th } \infty = 1$ . т. е. это снова скорость света. Мы замкнули круг, вновь вернувшись к идее, лежащей в основании теории относительности: скорость света имеет одну и ту же величину во всех системах отсчета.

---

*Простота описания движения  
с помощью параметра скорости*

Мы пришли к заключению, что естественной характеристикой движения является параметр скорости, подчиняющийся простому закону сложения:  $\theta = \theta' + \theta_r$ . Но почему же наша интуиция не подсказала нам сразу идеи введения этого параметра? Почему гиперболические углы не знакомы всякому школьнику так же хорошо, как обычные углы? Ответ на это прост. Обыденный опыт сталкивает нас со всякими углами — и большими, и малыми. Поэтому не найдется простачка, который стал бы, складывая наклоны  $S' = 1$  (угол в  $45^\circ$ ) и  $S_r = 1$  (еще раз  $45^\circ$ ), утверждать, что он получит наклон, равный  $S = S' + S_r = 2$  (т. е. угол в  $63^\circ 26'$ , что неверно!). Все знают, что правильный путь — это складывать углы (сумма в нашем примере равна  $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ , чему соответствует наклон  $S = \infty$ ). Но обыденный опыт не сталкивает нас со скоростями, близкими к скорости света. Автомобили, реальные ракеты и реальные пули движутся со скоростями, крайне малыми по сравнению со скоростью света. Поэтому и потребовалось долгое время, пока люди не узнали истинной физики пространства-времени. Но теперь, наконец, мы поняли разницу природы закона сложения скоростей [громоздкое уравнение (24)] и закона сложения параметров скорости [простое уравнение (21):  $\theta = \theta' + \theta_r$ ]. Более того, те наблюдения, которые прежде обескураживали (например, равенство величины скорости света во всех системах отсчета), стали описываться очень просто на языке параметра скорости. К тому же этот параметр, как и все, что входит вместе с ним в пространственно-временную структуру физики, совершенно необходим. Если вы хотите описать природу физического мира такой, какая она на самом деле у этого четырехмерного мира, то у вас нет никакого другого выбора, кроме описанных выше идей. Эта железная необходимость становится все очевиднее по мере того, как в обиход нашей цивилизации, нашей индустрии входят электронные и ядерные установки, а вместе с ними — сверхбыстрые частицы.

Обходного пути нет! Параметр скорости — такой же простой способ для описания скорости движения, как обычный угол — для описания наклона. Но, согласившись с этим выводом, какую выгоду извлечем мы, попытавшись упростить формулы преобразования Лоренца?

*Упрощение евклидова преобразования поворота путем введения угла*

Для того чтобы сориентироваться в этом вопросе, рассмотрим сначала аналогичную задачу в евклидовой геометрии на плоскости  $xy$ . Станет ли формула (19), выражающая одну систему координат через другую,

$$\begin{aligned}\Delta x &= (1 + S_r^2)^{-1/2} \Delta x' + S_r \cdot (1 + S_r^2)^{-1/2} \Delta y', \\ \Delta y &= -S_r (1 + S_r^2)^{-1/2} \Delta x' + (1 + S_r^2)^{-1/2} \Delta y',\end{aligned}$$

менее сложной, если выразить относительный наклон  $S_r$  осей  $y$  и  $y'$  через обычный угол  $\theta_r$ ? Ответ: коэффициенты в преобразовании поворота принимают вид

$$(1 + S_r^2)^{-1/2} = (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_r)^{-1/2} = \left( \frac{\cos^2 \theta_r + \sin^2 \theta_r}{\cos^2 \theta_r} \right)^{-1/2} = \left( \frac{1}{\cos^2 \theta_r} \right)^{-1/2} = \cos \theta_r,$$

и

$$S_r (1 + S_r^2)^{-1/2} = \operatorname{tg} \theta_r \cdot \cos \theta_r = \frac{\sin \theta_r}{\cos \theta_r} \cdot \cos \theta_r = \sin \theta_r.$$

Поэтому формулы преобразования переходят в

$$\begin{aligned}\Delta x &= \Delta x' \cdot \cos \theta_r + \Delta y' \cdot \sin \theta_r, \\ \Delta y &= -\Delta x' \cdot \sin \theta_r + \Delta y' \cdot \cos \theta_r,\end{aligned}\tag{29}$$

и мы можем заключить, что связь между старыми и новыми координатами приобретает наипростейший вид, если коэффициенты в ковариантных преобразованиях выразить через «тригонометрические», или «круговые», функции угла поворота.

*Упрощение формул преобразования Лоренца путем введения параметра скорости*

Обратимся теперь к формулам преобразования Лоренца, записанным через относительную скорость:

$$\begin{aligned}\Delta x &= (1 - \beta_r^2)^{-1/2} \Delta x' + \beta_r (1 - \beta_r^2)^{-1/2} \Delta t', \\ \Delta t &= \beta_r (1 - \beta_r^2)^{-1/2} \Delta x' + (1 - \beta_r^2)^{-1/2} \Delta t'.\end{aligned}$$

Как станет выглядеть эта пара уравнений, если мы выразим в ней скорость  $\beta_r$  через «улучшенную» характеристику движения  $\theta_r$ ? Ответ таков. Вспомним, что скорость и параметр скорости связаны между собой соотношением

$$\beta_r = \operatorname{th} \theta_r.$$

Отметим, что коэффициенты в формулах преобразования Лоренца зависят от  $\beta_r$  и тем самым от  $\theta_r$ . Эти коэффициенты равны

$$(1 - \beta_r^2)^{-1/2} = (1 - \operatorname{th}^2 \theta_r)^{-1/2}\tag{30}$$

и

$$\beta_r (1 - \beta_r^2)^{-1/2} = \operatorname{th} \theta_r \cdot (1 - \operatorname{th}^2 \theta_r)^{-1/2}.\tag{31}$$

Полученные выражения на первый взгляд довольно сложны. Тем не менее они вполне определены. Мы знаем, как найти величину  $\operatorname{th} \theta_r$  для любого заданного значения  $\theta_r$  (см. рис. 31 и сопровождающие его рассуждения). Знание величины  $\operatorname{th} \theta_r$  позволяет нам вычислить выражения (30) и (31) с любой желаемой степенью точности для любого наперед заданного значения параметра скорости. Эти две функции  $\theta_r$  настолько важны, что каждая из них

получила свое собственное название в теории гиперболических функций. Если мы примем стандартные названия для этих функций, то это никоим образом не повлияет на наши возможности определять величины этих функций в любом интересующем нас случае без использования каких-либо руководств или справочников, своими собственными силами. Поэтому мы примем и будем в дальнейшем употреблять следующие стандартные названия:

$$(1 - \text{th}^2 \theta_r)^{-1/2} = \text{ch } \theta_r = (\text{Косинус гиперболический } \theta_r),$$

$$\text{th } \theta_r \cdot (1 - \text{th}^2 \theta_r)^{-1/2} = \text{sh } \theta_r = (\text{Синус гиперболический } \theta_r).$$

Это названия, и не более чем названия! Используя их, мы найдем, что формулы преобразования Лоренца принимают вид

$$\Delta x = \Delta x' \cdot \text{ch } \theta_r + \Delta t' \cdot \text{sh } \theta_r,$$

$$\Delta t = \Delta x' \cdot \text{sh } \theta_r + \Delta t' \cdot \text{ch } \theta_r. \quad (32)$$

### *Преобразование Лоренца, выраженное через параметр скорости*

Отсюда мы заключаем, что связь между старыми и новыми координатами приобретает наиболее простой вид, когда коэффициенты преобразования выражаются как гиперболические функции параметра относительного движения  $\theta_r$  систем отсчета. Более того, будучи выражены с помощью гиперболических синуса и косинуса, формулы преобразования Лоренца еще больше, чем ранее, напоминают стандартный тригонометрический вид (29) формул преобразования поворота.

Как можно лучше уяснить себе и прочувствовать свойства фигурирующих в преобразовании Лоренца гиперболических функций? Два самых интересных и существенных их свойства вытекают непосредственно из определенных (30) и (31). Во-первых, отношение

$$\frac{\text{sh } \theta_r}{\text{ch } \theta_r} = \text{th } \theta_r, \quad (33)$$

совершенно аналогично соответствующему отношению для тригонометрических функций. Во-вторых, разность квадратов двух гиперболических функций равна

$$\text{ch}^2 \theta_r - \text{sh}^2 \theta_r = \frac{1}{1 - \text{th}^2 \theta_r} - \frac{\text{th}^2 \theta_r}{1 - \text{th}^2 \theta_r} = \frac{1 - \text{th}^2 \theta_r}{1 - \text{th}^2 \theta_r} = 1. \quad (34)$$

Сопоставьте эту формулу с аналогичным соотношением для тригонометрических функций:

$$\cos^2(\text{угол}) + \sin^2(\text{угол}) = 1. \quad (35)$$

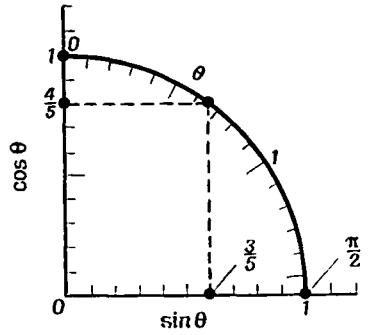
### *Сравнение тригонометрических и гиперболических функций <sup>1)</sup>*

Уравнения (34) и (35) допускают простую геометрическую интерпретацию. Отложим на рис. 32 по вертикальной оси функцию «косинус», а по

<sup>1)</sup> Авторы здесь и в других местах вместо термина «тригонометрический» говорят «круговой». Действительно, тригонометрические функции, как это видно из дальнейшего обсуждения, тесно связаны с простейшей кривой второго порядка — окружностью, тогда как гиперболические функции связаны со свойствами другой кривой второго порядка, гиперболы. Поэтому между ними много общего. Однако в переводе мы пользуемся более принятым в отечественной литературе термином «тригонометрический». — *Прим. перев.*

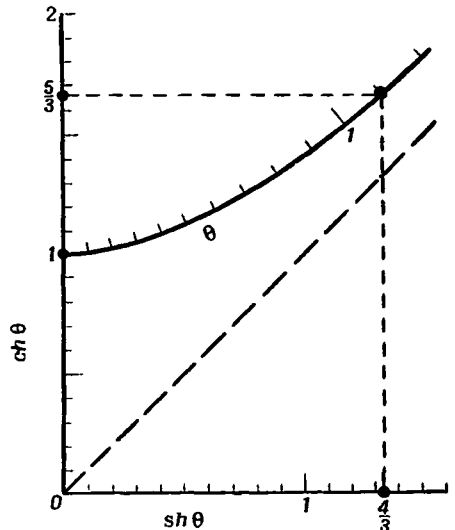
Р и с. 32. Тригонометрические функции: график связи между косинусом и синусом — окружность. Пример:

$$(3/5)^2 + (4/5)^2 = 1$$



$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

горизонтальной оси — функцию «синус» (одного и того же аргумента). Уравнение (35) тогда описывает окружность единичного радиуса, и поэтому тригонометрические функции можно называть «круговыми». Напротив, уравнение (34) описывает при аналогичном построении гиперболу (рис. 33), и поэтому мы говорим о «гиперболических функциях». Знак «плюс» в соотношении  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  происходит оттого, что для получения квадрата длины вектора нужно сложить его  $x$ - и  $y$ -компоненты, возведенные в квадрат. Почему же в соотношении  $\text{ch}^2 \theta - \text{sh}^2 \theta = 1$  фигурирует знак «минус»? Потому, что квадрат пространственно-временного интервала определяется как *разность* квадратов удаленностей событий во времени и в пространстве.



$$\text{ch}^2 \theta - \text{sh}^2 \theta = 1$$

Р и с. 33. Гиперболические функции: график связи между гиперболическими косинусом и синусом — гипербола. Пример:

$$(5/3)^2 - (4/3)^2 = 1.$$

*Проверка того факта, что преобразование поворота в евклидовой геометрии оставляет неизменной длину*

Разные знаки в соотношениях  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  и  $\operatorname{ch}^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \theta = 1$  связаны с различием между понятиями длины в евклидовой геометрии и интервала в лоренцевой геометрии. Рассмотрим по очереди более подробно и ту и другую геометрии с этой точки зрения. Удостоверимся вновь в том факте, что в евклидовой геометрии *ковариантное* преобразование *координат* (29), выраженное теперь не через величину наклона, а через тригонометрические функции, обеспечивает выполнение *инвариантности длины*. Для этого вычислим в штрихованных координатах квадрат длины:

$$\begin{aligned} (\text{Длина})^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \\ &= (\Delta x' \cos \theta_r + \Delta y' \sin \theta_r)^2 + (-\Delta x' \sin \theta_r + \Delta y' \cos \theta_r)^2 = \\ &= (\Delta x')^2 \cos^2 \theta_r + 2 \underbrace{(\Delta x') (\Delta y') \cos \theta_r \sin \theta_r}_{\text{}} + (\Delta y')^2 \sin^2 \theta_r + \\ &+ (\Delta x')^2 \sin^2 \theta_r - 2 \underbrace{(\Delta x') (\Delta y') \sin \theta_r \cos \theta_r}_{\text{}} + (\Delta y')^2 \cos^2 \theta_r = \\ &= [(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2] \cdot (\cos^2 \theta_r + \sin^2 \theta_r) = \\ &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 \text{ (подчеркнутые члены сокращаются).} \end{aligned}$$

Тем самым мы провели инвариантность выражения для длины. Отметим, что соотношение

$$\cos^2 \theta_r + \sin^2 \theta_r = 1$$

играет важную роль, связывая понятия ковариантности (преобразование координат, сводящееся к изменению ориентаций координатных осей) и инвариантности (неизменность длины при переходах между системами координат).

*Проверка того факта, что преобразование Лоренца оставляет неизменным интервал*

Ясно, что связь между ковариантностью и инвариантностью в лоренцевой геометрии основывается на соотношении

$$\operatorname{ch}^2 \theta_r - \operatorname{sh}^2 \theta_r = 1.$$

Это видно из вычисления квадрата интервала (как пространственноподобного, так и временноподобного) в штрихованных координатах:

(Интервал собственной длины)<sup>2</sup> =

$$\begin{aligned} &= -(\text{Интервал собственного времени})^2 = \\ &= (\text{Удаленность в пространстве})^2 - (\text{Удаленность во времени})^2 = \\ &= (\Delta x)^2 - (\Delta t)^2 = \\ &= (\Delta x' \operatorname{ch} \theta_r + \Delta t' \operatorname{sh} \theta_r)^2 - (\Delta x' \operatorname{sh} \theta_r + \Delta t' \operatorname{ch} \theta_r)^2 = \\ &= (\Delta x')^2 \operatorname{ch}^2 \theta_r + 2 \underbrace{(\Delta x') (\Delta t') \operatorname{ch} \theta_r \operatorname{sh} \theta_r}_{\text{}} + (\Delta t')^2 \operatorname{sh}^2 \theta_r - \\ &- [(\Delta x')^2 \operatorname{sh}^2 \theta_r + 2 \underbrace{(\Delta x') (\Delta t') \operatorname{sh} \theta_r \operatorname{ch} \theta_r}_{\text{}} + (\Delta t')^2 \operatorname{ch}^2 \theta_r] = \\ &= [(\Delta x')^2 - (\Delta t')^2] (\operatorname{ch}^2 \theta_r - \operatorname{sh}^2 \theta_r) = \\ &= (\Delta x')^2 - (\Delta t')^2. \end{aligned}$$

Так мы вновь проверили (простейшим возможным способом) тот факт, что преобразование Лоренца оставляет неизменным выражение для интервала.



### Обратное преобразование Лоренца

Как мы уже вполне убедились, преобразование Лоренца служит для перевода информации с языка системы координат ракеты ( $x'$ ,  $t'$ ) на язык лабораторной системы координат ( $x$ ,  $t$ ). Кроме того, этот «словарь» во всех отношениях согласуется с универсальным языком интервалов (непротиворечивость ковариантного и инвариантного описаний в физике пространства-времени). Но мы нуждаемся в большем — ведь турецко-английский словарь можно купить в одном переплете с англо-турецким. Так где же этот второй «словарь теории относительности»? Как совершить обратный переход от  $x$  и  $t$  к  $x'$  и  $t'$ ? Если первый словарь соответствовал формулам

$$\begin{aligned}x &= x' \operatorname{ch} \theta_r + t' \operatorname{sh} \theta_r, \\t &= x' \operatorname{sh} \theta_r + t' \operatorname{ch} \theta_r,\end{aligned}\tag{36}$$

то какие формулы будут служить для обратного перехода от лабораторных к ракетным данным? *Ответ:* преобразование Лоренца, обратное преобразованию (36), задается формулами

$$\begin{aligned}x' &= x \operatorname{ch} \theta_r - t \operatorname{sh} \theta_r, \\t' &= -x \operatorname{sh} \theta_r + t \operatorname{ch} \theta_r.\end{aligned}\tag{37}$$

*Доказательство.* Подставьте последние выражения для  $x'$  и  $t'$  в формулы (36) и покажите, что получаются тождества (т. е. если перевести английское слово на турецкий язык, а затем снова на английский, то мы снова придем к исходному слову, если только каждый из словарей действительно является обратным по отношению к другому!).

В табл. 8 формальные определения гиперболических функций и некоторые соотношения для них записаны параллельно аналогичным определениям и соотношениям для тригонометрических функций. Здесь через  $e$  обозначено основание натуральных логарифмов, численно равное 2,718281..., а через  $i$  обозначен квадратный корень из минус единицы (мнимая единица), так что  $i^2 = -1$ . Обычные правила сложения и умножения экспонент справедливы и для экспонент, содержащих  $i$ . Угол  $\theta$  берется в обычных или гиперболических радианах, но не в градусах. Выражения типа  $4!$  обозначают *факториал*; так, «четыре факториал» =  $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ . Чтобы разобраться в этих соотношениях, получите равенства 7—13 из определений 1—6 на обеих сторонах таблицы и качественно покажите, как из них вытекают графики на рис. 32 и 33. Особо отметьте различия в *знаках* в левой и правой сторонах таблицы.

Таблица 8. Тригонометрические и гиперболические функции

ОПРЕДЕЛЕНИЯ	
Тригонометрические функции	Гиперболические функции
1. $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$	1. $\operatorname{sh} \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$
2. $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$	2. $\operatorname{ch} \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$
3. $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	3. $\operatorname{th} \theta = \frac{\operatorname{sh} \theta}{\operatorname{ch} \theta}$
4. $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$	4. $\operatorname{sh} \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \dots$

$$5. \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$6. \operatorname{tg} \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2}{15} \theta^5 + \dots$$

$$5. \operatorname{ch} \theta = 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$6. \operatorname{th} \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{2}{15} \theta^5 - \dots$$

## СООТНОШЕНИЯ

$$7. \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$8. \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$9. \operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg} \theta$$

$$10. \boxed{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1}$$

$$11. \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

$$12. \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$13. \operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2}{1 - \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2}$$

$$7. \operatorname{sh}(-\theta) = -\operatorname{sh} \theta$$

$$8. \operatorname{ch}(-\theta) = \operatorname{ch} \theta$$

$$9. \operatorname{th}(-\theta) = -\operatorname{th} \theta$$

$$10. \boxed{\operatorname{ch}^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \theta = 1}$$

$$11. \operatorname{sh}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sh} \theta_1 \operatorname{ch} \theta_2 + \operatorname{ch} \theta_1 \operatorname{sh} \theta_2$$

$$12. \operatorname{ch}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{ch} \theta_1 \operatorname{ch} \theta_2 + \operatorname{sh} \theta_1 \operatorname{sh} \theta_2$$

$$13. \operatorname{th}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\operatorname{th} \theta_1 + \operatorname{th} \theta_2}{1 + \operatorname{th} \theta_1 \operatorname{th} \theta_2}$$

## СПОСОБЫ БЫСТРОЙ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРОСТЫХ СМЕРТНЫХ

При малых  $\theta$

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$\operatorname{tg} \theta \approx \theta$$

Пример:  $\theta = 0,1$

Быстрая оценка:

$$\sin \theta \approx 0,1$$

$$\operatorname{tg} \theta \approx 0,1$$

Точные значения:

$$\sin \theta = 0,0998$$

$$\operatorname{tg} \theta = 0,1003$$

При малых  $\theta$

$$\operatorname{sh} \theta \approx \theta$$

$$\operatorname{th} \theta \approx \theta$$

Пример:  $\theta = 0,1$

Быстрая оценка:

$$\operatorname{sh} \theta \approx 0,1$$

$$\operatorname{th} \theta \approx 0,1$$

Точные значения:

$$\operatorname{sh} \theta = 0,1002$$

$$\operatorname{th} \theta = 0,0997$$

При больших  $\theta$

$$\operatorname{sh} \theta \approx e^{\theta}/2$$

$$\operatorname{ch} \theta \approx e^{\theta}/2$$

Пример:  $\theta = 3, e^{\theta} \approx 20.$

Быстрая оценка:

$$\operatorname{sh} \theta \approx 10$$

$$\operatorname{th} \theta \approx 10$$

Точные значения:

$$\operatorname{sh} \theta = 10,018$$

$$\operatorname{th} \theta = 10,068$$

---

## Упражнения к главе 1

### ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Можно без труда проанализировать важные направления современных исследований, если опираться на теорию относительности. Такой анализ решающим образом зависит от физической интуиции, которая развивается на основе опыта. Опыт же не может быть теперь приобретен в лаборатории, так как даже простые эксперименты по теории относительности очень сложны и дороги ввиду громадной величины скорости света. Альтернативой этим простым экспериментам должны послужить следующие упражнения, в которых обсуждаются разнообразные следствия структуры пространства-времени. Эта структура вновь и вновь проявляется, когда мы обсуждаем разные вопросы:

- парадоксы;
- загадки;
- выводы соотношений;
- практические приложения;
- оценки эффектов;
- их точный расчет;
- трудности интерпретации.

Эта глава содержит все необходимые формальные данные для того, чтобы найти ответ в каждом упражнении, однако лучший путь развития интуиции (практического понимания явлений) — это работа без поспешности. Поэтому вы убедитесь, что лучше всего продолжать возвращаться к этим упражнениям, даже когда эта книга будет для вас пройденным этапом. Те, кто хочет пройти основной материал за возможно кратчайшее время, могут ограничиться упражнениями, названия которых напечатаны курсивом в помещенном ниже списке.

Математические преобразования при решении этих упражнений очень кратки, и лишь немногие расчеты займут в записи более пяти строк. Но с другой стороны, упражнения потребуют времени на «разжевывание». Меньше всего времени отнимут упражнения, не помеченные звездочкой; труднее упражнения с одной звездочкой; упражнения же, помеченные двумя звездочками, предназначены для студентов старших курсов и аспирантов.

**Основное правило Уилера.** *Никогда не начинай вычислений, пока не знаешь ответа.* Каждому вычислению предпосылай оценочный расчет; привлеки простые физические соображения (симметрию! инвариантность! сохранение!) до того, как начинать подробный вывод; продумай возможные ответы на каждую загадку. Будь смелее, ведь никому нет дела до того, что именно ты предположил. Поэтому делай предположения быстро, интуитивно. Удачные предположения укрепляют эту интуицию. Ошибочные предположения дают

полезную встряску. Во всяком случае жизнь как практическая проверка пространственно-временных идей оказывается наиболее забавной шуткой, хотя и достаточно продолжительной!

#### **А. Интервал пространства-времени (разд. 5—7)**

1. Пространство и время—подробный пример
2. Практическая синхронизация часов
3. Соотношения между событиями
4. Одновременность
5. Временной порядок событий
- 6\*. Расширяющаяся Вселенная
7. Собственное время и связь
8. Время на сбор информации и на принятие решения

#### **Б. Преобразование Лоренца (разд. 8 и 9)**

9. *Лоренцево сокращение* — подробный пример
10. *Замедление хода часов*
11. *Относительная синхронизация часов*
12. Евклидовы аналогии
13. Лоренцево сокращение. II
14. Замедление хода часов. II
15. Формулы преобразования Лоренца со временем в секундах
- 16\*. Вывод формул преобразования Лоренца
- 17\*. Собственная длина и собственное время
- 18\*. Плоскость обоюдного согласия
- 19\*. Преобразование углов
- 20\*. Преобразование скорости вдоль оси  $y$
- 21\*\*. Преобразование направлений скоростей
- 22\*\*. Эффект «прожектора»

#### **В. Загадки и парадоксы**

23. Парадокс эйнштейновского поезда — подробный пример
24. Загадка Эйнштейна
- 25\*. Парадокс шеста и сарая
- 26\*\*. Война в космосе
- 27\*. Парадокс часов
- 28\*. Предметы, движущиеся быстрее света

#### **Г. Основания теории**

29. Синхронизация движущимися часами — подробный пример
30. Конструкция часов и замедление их хода
31. Инерциальные системы отсчета, связанные с Землей
- 32\*. Размеры инерциальной системы
- 33\*. Опыт Майкельсона — Морли
- 34\*. Эксперимент Кеннеди — Торндайка
- 35\*. Эксперимент Дикке
- 36\*. Долой теорию относительности!

#### **Д. Приближение малых скоростей**

37. Евклидова аналогия — подробный пример
38. Преобразование Галилея
- 39\*. Пределы применимости преобразования Галилея
- 40\*. Столкновения в теории Ньютона и в теории относительности. Область, в которой обе теории совпадают друг с другом с точностью до 1%
- 41\*. Примеры предельных переходов к механике Ньютона

**Е. Физика пространства-времени. Новые факты**

42. Замедление времени для  $\mu$ -мезона — подробный пример  
 43. Замедление времени для  $\pi^+$ -мезона  
 44\*. Аберрация света звезд  
 45. Опыт Физо  
 46. Черенковское излучение  
 47\*. Искривление лучей света звезд Солнцем

**Ж. Геометрическое истолкование**

48. Геометрическое истолкование  
 49. Парадокс часов. II — подробный пример

**З. Винегрет**

50. Сокращение или поворот?  
 51\*\*. Парадокс часов. III  
 52\*. Наклонный стержень  
 53\*. Парадокс метрового стержня  
 54\*\*. Тонкий человек на решетке

**А. ИНТЕРВАЛ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ (РАЗД. 5—7)****1. Пространство и время — подробный пример**

Два события происходят в лабораторной системе отсчета в одном и том же месте, но отстоят во времени на 3 сек.

а) Чему равно расстояние в пространстве между этими событиями в системе отсчета ракеты, если промежуток времени между событиями равен в ней 5 сек?

б) Чему равна скорость  $\beta$ , ракеты относительно лабораторной системы отсчета?

*Решение*

а) *Интервал* пространства времени между этими двумя событиями имеет одну и ту же величину в обеих системах отсчета:

$$(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2.$$

Запишем содержание задачи так:

$$\Delta x = 0,$$

$$\Delta t = 3 \text{ (сек)} \times c \text{ (м/сек)} = 9 \cdot 10^8 \text{ м},$$

$$\Delta x' \text{ требуется определить,}$$

$$\Delta t' = 5 \text{ (сек)} \times c \text{ (м/сек)} = 15 \cdot 10^8 \text{ м}.$$

Подставим эти данные в выражения для интервала:

$$81 \cdot 10^{16} - 0 = 225 \cdot 10^{16} - (\Delta x')^2.$$

Решаем полученное уравнение:

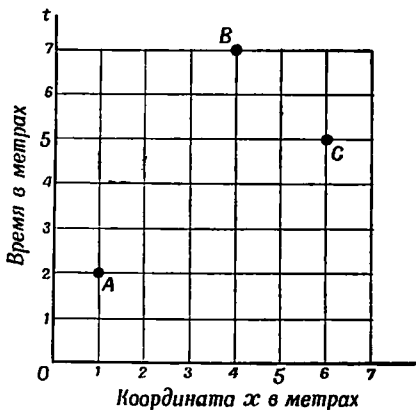
$$(\Delta x')^2 = 144 \cdot 10^{16} \text{ м}^2,$$

или

$$\Delta x' = 12 \cdot 10^8 \text{ м}.$$

б) В лабораторной системе отсчета оба события произошли в одном и том же месте. В системе отсчета ракеты это «место» лаборатории сдвинулось на  $12 \cdot 10^8 \text{ м}$  за 5 сек (или за  $15 \cdot 10^8 \text{ м}$  светового времени). Поэтому относительная скорость двух систем отсчета равна

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{12 \cdot 10^8}{15 \cdot 10^8} = \frac{4}{5}.$$



Р и с. 34. Как связаны между собой события  $A$ ,  $B$  и  $C$ ?

## 2. Практическая синхронизация часов

Вы — наблюдатель, находящийся в покое вблизи часов с пространственными координатами  $x = 6$  м,  $y = 8$  м,  $z = 0$  м в лабораторной системе отсчета. Вы хотите синхронизовать свои часы с часами, находящимися в начале координат, используя опорный сигнал. Подробно опишите количественно, как вы сделаете это.

## 3. Соотношения между событиями

На рис. 34 изображены на диаграмме пространства-времени лабораторной системы отсчета события  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Ответьте на следующие вопросы, касающиеся пары событий  $A$  и  $B$ :

а) Какой интервал лежит между этими событиями — временноподобный, светоподобный или пространственноподобный?

б) Чему равно собственное время (или собственное расстояние) между этими событиями?

в) Могло ли одно из этих событий быть причиной другого?

Ответьте на такие же вопросы о паре событий  $A$  и  $C$ .

Ответьте на такие же вопросы о паре событий  $C$  и  $B$ .

## 4. Одновременность

« $A$  сталкивается с  $B$ ; одновременно на расстоянии миллиона миль от них  $C$  сталкивается с  $D$ ». Выразите одной или двумя фразами, как требует частная теория относительности переформулировать или охарактеризовать это утверждение.

## 5. Временной порядок событий

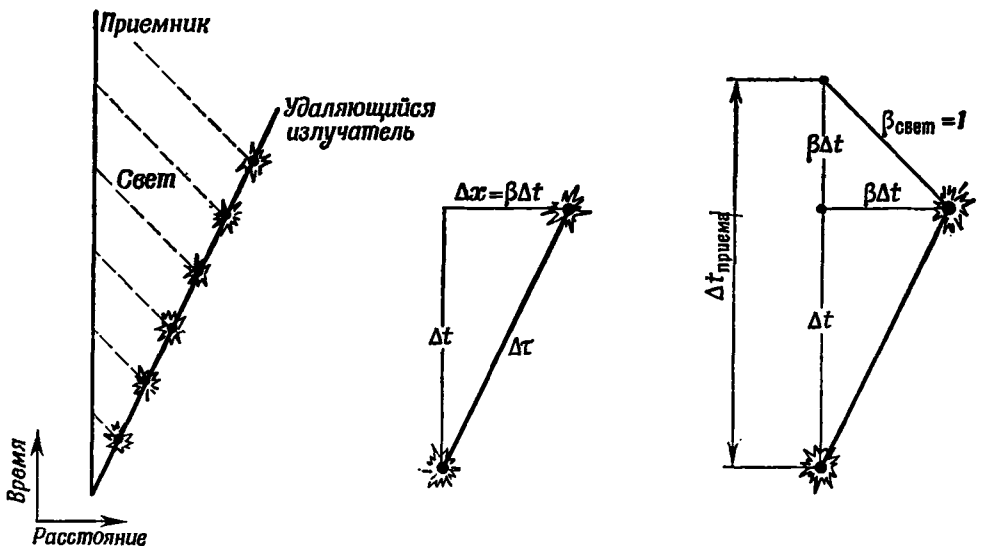
«Событие  $G$  произошло до события  $H$ ». Покажите, что порядок во времени этих двух событий в лабораторной системе отсчета будет тем же, что и в системе отсчета ракеты, тогда и только тогда, когда события будут разделены временноподобным или светоподобным интервалом.

## 6\*. Расширяющаяся Вселенная

а) Гигантская бомба разрывается в окружающем ее пустом пространстве. По какому закону будут двигаться друг относительно друга ее осколки? Как может быть обнаружено их относительное движение? *Обсуждение:* Представим себе, что каждый осколок снабжен источником света, посылающим сигналы через известные равные друг другу промежутки времени  $\Delta t$  в его системе отсчета (собственное время!). Зная эти интервалы между вспышками, каким путем может наблюдатель определить на одном осколке относитель-

ную скорость движения  $\beta$  любого другого осколка? Предположим, что он может при этом пользоваться: 1) известным значением интервала собственного времени  $\Delta t$  между вспышками и 2) *измеряемым им временем*  $\Delta t_{\text{прием}}$  между приходом к нему последовательных сигналов. (Замечание. Последнее не равно промежутку времени  $\Delta t$  между последовательными вспышками на удаляющемся передатчике в системе отсчета этого наблюдателя. См. рис. 35.) Предлагается выразить  $\beta$  через  $\Delta t$  и  $\Delta t_{\text{прием}}$ . Как будет зависеть измеряемая скорость удаления от расстояния между осколком, на котором находится наблюдатель, и другим осколком? (Замечание. В каждый данный момент в каждой данной системе отсчета осколки, очевидно, улетят от места взрыва на расстояния, прямо пропорциональные их скоростям в этой системе отсчета!)

б) Как можно заключить по наблюдению света, испускаемого звездами, что Вселенная расширяется? Обсуждение: В раскаленных звездах атомы испускают свет различных характерных для этих атомов частот («спектральные линии»). Мы можем измерять на Земле *наблюдаемый период* колебаний для каждой спектральной линии приходящего от звезд света. По *расположению* этих спектральных линий мы можем установить, с излучением какого элемента мы имеем дело. Атомы этого же элемента можно возбуждать в лабораторных условиях, где они в состоянии покоя излучают свет, спектральные линии которого характеризуются *собственным периодом*, и мы можем его измерить. Используйте теперь результаты части (а) этого упражнения и опишите, как сравнение *наблюдаемого периода* колебаний для спектральных линий приходящего от звезд света с *собственным периодом* колебаний для спектральных линий света, излучаемого покоящимися атомами в лаборатории, дает *величину скорости удаления* звезд, излучающих свет. Это наблюдаемое изменение периода, обусловленное движением источника, называется доплеровским смещением (*эффектом Доплера*). (Более подробное описание его см. в упражнении 75 гл. 2 и последующих упражнениях.) Если началом Вселенной был гигантский взрыв, как должны быть связаны друг с другом наблюдаемые скорости разбегания различных звезд, находящихся на разных расстояниях? Здесь следует пренебречь замедлением скоростей за время разбегания (под действием гравитационного притяжения и пр.), однако мы рассмотрим такое замедление при более полном анализе (упражнение 80).



Р и с. 35. Вычисление времени  $\Delta t_{\text{прием}}$ , прошедшего между поступлением двух последовательных сигналов от удаляющегося излучателя к наблюдателю.

### 7. Собственное время и связь

Пусть Солнце испустило световую вспышку, которая была поглощена Луной. Собственное время между моментами испускания и поглощения этой вспышки равно нулю, — верно или ложно это утверждение? Будет ли равно нулю собственное время между двумя событиями (излучением и поглощением), если вспышка подвергалась отражению зеркалами на Луне, прежде чем была поглощена? (Внимание!) Пусть световая вспышка была излучена на Земле и распространяется *в воздухе* по прямой до другого места на Земле, где она поглощается. (Скорость света в воздухе немного меньше, чем  $c$ .) Будет ли равен нулю промежуток собственного времени между излучением и поглощением этой вспышки?

### 8. Время на сбор информации и на принятие решения

При описании событий мы использовали сеть часов-хронографов. Расположение события отождествляется с расположением ближайших к событию часов, а время события — с тем временем, которое зафиксировали эти часы. Предмет физики — изучение *взаимных отношений* между событиями. Если аналитико-координационный центр расположен в начале координат сети часов, чему будет равно (в его системе отсчета) время запаздывания между получением данных для анализа и регистрацией данных на часах на расстоянии  $R$  от центра? Пусть часы с координатами  $x = 6 \cdot 10^9$  м,  $y = 8 \cdot 10^9$  м и  $z = 0$  м регистрируют прохождение метеорита в момент  $41 \cdot 10^9$  м времени. Часы с координатами  $x = 3 \cdot 10^9$  м,  $y = 4 \cdot 10^9$  м и  $z = 0$  м регистрируют прохождение этого же метеорита в момент  $47 \cdot 10^9$  м времени. Наблюдателю в аналитико-координационном центре для принятия мер защиты требуется *3 секунды*. Если приведенные выше данные передаются ему световыми сигналами и анализируются сразу же при получении, успеет ли наблюдатель принять меры защиты?

## Б. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА (РАЗД. 8 И 9)

### 9. Лоренцево сокращение — подробный пример

Пусть ракета снабжена метровым стержнем, который наблюдается в лабораторной системе отсчета (лабораторной системе стержней и часов). В чем будет состоять отличие заключений наблюдателя в лаборатории относительно длины метрового стержня от того, что предсказывала дорелятивистская физика? Мы разобьем этот обширный вопрос на четыре части.

а) Как поставленный здесь вопрос *о длине* может быть переформулирован в вопрос о разделении двух *событий*? *Замечание.* Оба конца метрового стержня прочерчивают в пространстве-времени свои мировые линии. Однако каждая мировая линия — это последовательность бесконечного числа событий. Как же разумным образом выбрать именно ту пару событий, которая дает необходимую информацию о наблюдаемой длине метрового стержня?

*Решение.* Выберем эти два заслуживающих внимания события таким образом. *A:* Один конец метрового стержня пролетает мимо некоторых лабораторных часов в тот момент, когда они показывают полдень. *B:* Другой конец метрового стержня пролетает мимо других лабораторных часов, когда они тоже показывают полдень. *Обсуждение.* Положения концов движущегося метрового стержня необходимо измерять в один и тот же момент времени в лабораторной системе отсчета. В противном случае мы не смогли бы разумно определить ту пару точек в лаборатории, длину расстояния между которыми мы измеряем. Итак, оба события должны быть одновременными в лабораторной системе отсчета ( $\Delta t = 0$ ). Они могут быть одновременными, а могут и не быть в системе отсчета ракеты ( $\Delta t'$  может равняться или не



равняться нулю) — это там несущественно! Ведь в системе отсчета ракеты метровый стержень неподвижен, и там положение его концов можно определить в любое время.

б) Пусть метровый стержень ориентирован вдоль оси  $x$  (направления движения) ракеты, так что в системе отсчета ракеты расстояние между его концами равно  $\Delta x' = 1$  м. Чему будет равна его наблюдаемая длина в лабораторной системе отсчета?

*Решение.* Искомая длина — это разделение в пространстве пары событий  $A$  и  $B$  в лабораторной системе отсчета:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\text{ch } \theta_r} = \Delta x' \cdot (1 - \beta_r^2)^{1/2}. \quad (38)$$

Эта длина меньше 1 м. Такое укорачивание называется *лоренцевым сокращением*. *Обсуждение.* Преобразование Лоренца (37) связывает между собой разности координат событий в лабораторной системе отсчета и в системе ракеты:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \Delta x \text{ ch } \theta_r - \Delta t \text{ sh } \theta_r, \\ \Delta t' &= -\Delta x \text{ sh } \theta_r + \Delta t \text{ ch } \theta_r, \\ \Delta y' &= \Delta y, \\ \Delta z' &= \Delta z. \end{aligned} \quad (39)$$

Наши события одновременны в лабораторной системе отсчета ( $\Delta t = 0$ ). Отсюда  $\Delta x' = \Delta x \text{ ch } \theta_r$ , что и дает приведенный ответ. Заметим, что  $\Delta t'$  не равняется нулю, т. е. события  $A$  и  $B$  не одновременны, если их рассматривать в системе отсчета ракеты. Эта разница во времени между двумя событиями на концах метрового стержня не вызывает недоумения у работников на ракете относительно значения длины их метрового стержня: для них он покоится, и длина его 1 м. Их не удивляет и тот факт, что наблюдатели в лаборатории регистрируют укорочение этой длины («лоренцево сокращение»). Они скажут: «А почему бы и нет? Ведь наблюдатели в лаборатории измеряют положения концов метрового стержня во времена  $t'_A$  и  $t'_B$ , а мы знаем, что эти времена различные. Интересно, как бы им удалось при этом заключить, что длина равна 1 м?»

в) Пусть метровый стержень направлен вдоль оси  $y$  (перпендикулярно направлению движения) в системе отсчета ракеты, так что расстояние между его концами в этой системе равно  $\Delta y' = 1$  м. Чему равна длина стержня, наблюдаемая в лабораторной системе отсчета?

*Решение.* Длина есть величина пространственного удаления друг от друга двух событий ( $A$  и  $B$ ) в лабораторной системе; при этом

$$\Delta y = \Delta y'.$$

Эта длина равна 1 м. В направлениях, перпендикулярных движению, размеры тел не сокращаются. *Обсуждение.* Отметим, что оба события теперь одновременны не только в лабораторной системе отсчета ( $\Delta t = 0$ ), но и в системе отсчета ракеты ( $\Delta t' = 0$ ), согласно соотношениям (39). Для работников на ракете поэтому нет ничего странного в том, что наблюдатели в лаборатории будут согласны с ними относительно длины метрового стержня.

г) Вернемся еще раз к вопросу (б). Как можно принять тот вывод, что метровый стержень, летящий с ракетой, представляется короче одного метра длины в лаборатории находящимся там наблюдателям? Если бы этот вывод был верен, не получили бы мы возможности различать по физическим законам систему отсчета ракеты (в которой метровые стержни сохраняют свою стандартную длину) от лабораторной системы отсчета (где те же самые стержни регистрируются как укороченные)? Но если это так, то не разрушает ли логика рассуждений теории относительности того принципа, который

лежит в ее же основе? Этот принцип утверждает, что между двумя инерциальными системами отсчета нельзя провести никаких различий на основании физических наблюдений в этих системах? Но разве мы не обнаружили в высшей степени замечательное физическое различие между такими двумя системами?

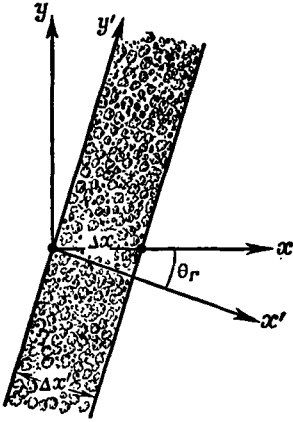
*Решение.* Да, различие между размерами предметов в направлении оси  $x$ , зарегистрированными в этих двух системах отсчета, существует. Однако физика явлений в обеих системах ничем не отличается. Метровый стержень, покоящийся относительно ракеты и направленный по ее движению, оказывается короче длины 1 м в лаборатории. Но и метровый стержень, покоящийся в лаборатории и параллельный направлению движения, окажется укороченным при его измерении работниками на ракете. «Что за нелепица! — возразите вы. — Мне стоит только привлечь элементарную логику, и вся эта релятивистская бессмыслица рухнет. Вы говорите, что метровый стержень на ракете может при измерении из лаборатории оказаться длиной всего в полметра, но тогда вы должны согласиться, что длина в полметра в лаборатории регистрируется на ракете как полный метр. Итак, размеры тел в системе отсчета ракеты больше, чем их размеры в лабораторной системе (направлении движения). Значит, там различна сама физика — почему бы ей не быть разной в двух разных системах отсчета. И я без труда определю, в какой системе отсчета нахожусь — в лабораторной системе или в системе ракеты. А принцип относительности?! Это же просто выдумка!» Мы ответим на это возражение так. Вероятно, каждый из нас при первом знакомстве с идеями Эйнштейна и Лоренца находит их обескураживающими; ведь мы так мало имели дела с предметами, двигающимися по-настоящему быстро. Может быть, принцип относительности покажется вам немного уютнее, если вы познакомитесь с его аналогом в евклидовой геометрии. Конечно, между формулами  $(\Delta L)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$  в евклидовой геометрии и  $(\Delta \tau)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$  в лоренцевой геометрии есть некоторая разница. Но ясно, что вас больше волнует вопрос о том, могут ли расстояния в одной системе отличаться от расстояний в другой, чем то, меньше ли расстояния в новой системе, чем в старой (лоренцево сокращение в лоренцевой геометрии), или то, больше ли они в новой системе, чем в старой (возрастание длин в евклидовой геометрии). Взглянем же на рис. 36. Там изображено поле, протяженность которого в направлении оси  $x$  явно превышает протяженность в направлении оси  $x'$ :

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\cos \theta_r}. \quad (40)$$

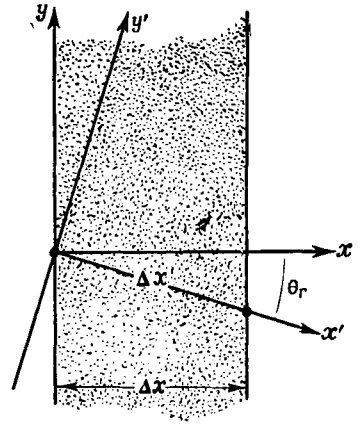
С другой стороны, взглянем на рис. 37 (в упражнении 48 вы найдете пространственно-временные аналоги рис. 36 и 37). Здесь изображено другое поле, которое простирается в направлении оси  $x$  на то же расстояние  $\Delta x$ . Однако его протяженность в направлении оси  $x'$  больше, чем  $\Delta x$ :

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\cos \theta_r}. \quad (41)$$

Вы безусловно согласитесь с этими выводами. У вас даже не зародится сомнения, будто формулы (40) и (41) противоречат друг другу. Ведь вы понимаете, что величина  $\Delta x$  в этих формулах каждый раз относится к *другому измерению другого поля*. Может быть, теперь вы будете готовы поверить, что длина метрового стержня, покоящегося относительно ракеты, будет зарегистрирована в лаборатории как отрезок меньше одного метра длины, тогда как метровый стержень, покоящийся в лаборатории, окажется короче одного метра при измерении с ракеты? Вы скажете: «Я согласен теперь, что в ваших утверждениях нет логических противоречий. Но, может быть, вы не остановитесь на том, что сказали, и по-настоящему докажете мне справедли-



Р и с. 36. Поле, простирающееся на большее расстояние в направлении  $x$ , чем в направлении  $x'$ .



Р и с. 37. Другое поле, простирающееся на большее расстояние в направлении  $x'$ , чем в направлении  $x$ .

вость сказанного только что, а именно что метровый стержень, покоящийся в лабораторной системе, будет короче одного метра с точки зрения системы отсчета ракеты». Ответ таков: разрешим формулы преобразования Лоренца (39) относительно координат лабораторной системы отсчета, выразив их через координаты в системе ракеты. Иначе говоря, поменяем местами штрихованные и нештрихованные координаты в этих формулах и заменим знак скорости на обратный. Или же просто перейдем к уравнениям (36), обратным по отношению к (39). В любом случае запишем соотношения

$$\begin{aligned}\Delta x &= \Delta x' \operatorname{ch} \theta_r + \Delta t' \operatorname{sh} \theta_r, \\ \Delta t &= \Delta x' \operatorname{sh} \theta_r + \Delta t' \operatorname{ch} \theta_r, \\ \Delta y &= \Delta y', \\ \Delta z &= \Delta z'.\end{aligned}\quad (42)$$

Новый метровый стержень покоится в лабораторной системе отсчета. Если смотреть из системы отсчета ракеты, он находится в движении. Поэтому при определении его длины в системе отсчета ракеты мы должны исходить из двух отправных точек в этой системе, а именно из положений концов нашего метрового стержня в один и тот же момент времени в системе отсчета ракеты. Итак,  $\Delta t' = 0$ . Первое из соотношений (42) сразу же дает

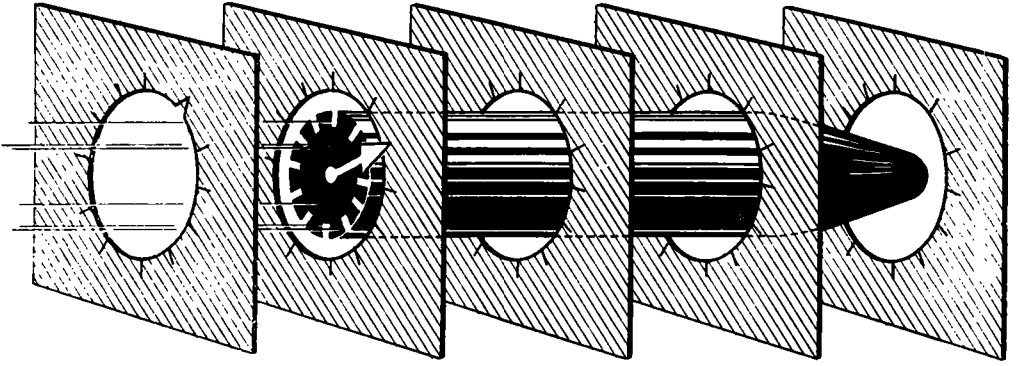
$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\operatorname{ch} \theta_r} = \Delta x \cdot \sqrt{1 - \beta_r^2}.\quad (43)$$

Длина, зарегистрированная в системе отсчета ракеты, короче одного метра, если метровый стержень покоится относительно лаборатории, что и требовалось доказать.

## 10. Замедление хода часов

Пусть часы движутся вместе с ракетой (рис. 38) и наблюдаются из лабораторной системы отсчета (лабораторная решетка стержней и часов). В чем будет состоять отличие заключений наблюдателя в лаборатории относительно времени, показываемого движущимися часами, от того, что предсказывала дорелятивистская физика? Разобьем этот вопрос на 4 части.

а) Как этот вопрос о ходе времени может быть переформулирован в вопрос о разделении двух *событий*?



Р и с. 38. Способ сравнивать показания одних часов на ракете с показаниями нескольких лабораторных часов.

б) Пусть между двумя событиями, выбранными в части (а), часы на ракете отсчитали  $1 \text{ м}$  светового времени, т. е. в системе отсчета ракеты зарегистрирован интервал времени  $\Delta t' = 1 \text{ м}$ . Покажите, что соответствующий промежуток времени, зарегистрированный в лабораторной системе отсчета, определяется соотношением

$$\Delta t = \Delta t' \cdot \text{ch } \theta_r = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta_r^2}}. \quad (44)$$

Этот промежуток времени превышает  $1 \text{ м}$  светового времени. Такое удлинение называется *замедлением хода часов* (замедлением времени).

в) Как можно согласиться с выводом, полученным в части (б), о том, что  $1 \text{ м}$  времени, прошедший в системе отсчета ракеты, оказывается больше, чем  $1 \text{ м}$  времени для наблюдателя в лаборатории? Не позволит ли этот вывод различать, исходя из физических законов, систему отсчета ракеты (в которой часы идут с их стандартной скоростью) и лабораторную систему отсчета (где те же самые часы отстают)? Не будет ли, таким образом, этот вывод противоречить *принципу относительности* (разд. 3), на котором основана вся теория относительности?

г) Пойдем еще дальше и покажем, что  $1 \text{ м}$  времени, прошедший по часам, покоящимся в лабораторной системе отсчета ( $\Delta t = 1 \text{ м}$ ), будет зарегистрирован как интервал времени больше одного метра наблюдателями в системе отсчета ракеты согласно формуле

$$\Delta t' = \Delta t \text{ch } \theta_r = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta_r^2}}. \quad (45)$$

Каким образом этот вывод подтверждает симметрию между обеими системами отсчета (ракеты и лаборатории), требуемую принципом относительности?

## 11. Относительная синхронизация часов

а) Покажите, что если два события происходят одновременно *и в одном и том же месте* в лабораторной системе отсчета, они будут одновременными в системе отсчета любой ракеты. Покажите, что если два события происходят одновременно, но *не в одной и той же точке* на оси  $x$  в лабораторной системе отсчета, они *не будут* наблюдаться как одновременные ни в одной системе отсчета ракеты. Тот факт, что движущиеся относительно друг друга наблюдатели не всегда будут соглашаться друг с другом, одновременны или нет два события, носит название *относительности одновременности*.

б) Два события происходят одновременно и имеют одно и то же значение координаты  $x$  в лабораторной системе отсчета, но разница в значениях координат  $y$  и  $z$  для них равна  $\Delta y$  и  $\Delta z$ . Покажите, что эти два события будут одновременными и в системе отсчета ракеты.

в) Пользуясь формулами преобразования Лоренца, покажите, что в момент  $t = 0$  в лабораторной системе отсчета часы в системе отсчета ракеты на положительной части оси  $x$  оказываются позади лабораторных часов, а на отрицательной части оси  $x$  — впереди лабораторных часов, причем разница во времени, показываемом часами в лабораторной системе отсчета и системе ракеты, возрастает по мере удаления от начала координат по закону

$$t' = -x \operatorname{sh} \theta_r = -x \frac{\beta_r}{\sqrt{1-\beta_r^2}}. \quad (46)$$

г) Пользуясь формулами преобразования Лоренца, покажите, что в момент  $t' = 0$  в системе отсчета ракеты часы в лабораторной системе отсчета на положительной части оси  $x$  оказываются впереди часов ракеты, а на отрицательной части оси  $x$  — позади часов ракеты, причем разница во времени, показываемом часами в системе отсчета ракеты и в лабораторной системе, возрастает по мере удаления от начала координат по закону

$$t = +x' \cdot \operatorname{sh} \theta_r = +x' \frac{\beta_r}{\sqrt{1-\beta_r^2}}. \quad (47)$$

Тот факт, что никто из двух наблюдателей, движущихся относительно друг друга, не согласится, что время опорного события и времена, когда все часы в системе отсчета *другого* наблюдателя показывают нулевой момент, одновременны, носит название *относительной синхронизации* часов.

д) Казалось бы, что разные знаки в законах (46) и (47) приводят к асимметрии между системами отсчета, позволяющей провести различие между этими системами, что противоречило бы принципу относительности. Покажите, что если наблюдатель в *каждой* системе отсчета ориентирует положительное направление своей оси  $x$  в направлении движения другой системы относительно него, то все физические измерения, связанные с синхронизацией часов, дадут в каждой системе совершенно тождественные результаты. Иначе говоря, системы отсчета нельзя различить с помощью и этого метода. Разница в знаках в приведенных выше уравнениях вызвана произвольным (и асимметричным) выбором *общего* для обеих осей  $x$  положительного направления.

е) Полученные выводы иногда выражаются в виде утверждения, что «наблюдатель на ракете обнаруживает рассинхронизованность разных лабораторных часов между собой». Объясните, в чем ошибочность этой формулировки. Покажите, что для необходимых при этом измерений недостаточно одного-единственного наблюдателя на ракете. Как выразить полученные выше выводы безупречно корректно, четко и ясно (хотя бы это оказалось значительно длиннее)?

## 12. Евклидовы аналогии

а) Пусть в плоскости  $xu$  евклидовой системы координат лежит прямой стержень. Начертите диаграмму, изображающую этот стержень в плоскости  $xu$ ; постройте проекции стержня на оси  $x$ ,  $u$  и  $x'$ ,  $u'$ . Разберите аналогию между различием в значениях  $x$ -компонент длины стержня, измеренных в двух повернутых относительно друг друга евклидовых системах координат, и различием в длине движущегося стержня, наблюдаемого в лабораторной системе отсчета, и покоящегося в системе ракеты стержня.

б) Разберите аналогию между замедлением времени и изменением длины  $u$ -компоненты стержня при переходе между повернутыми друг относи-

тельно друга евклидовыми системами координат [см. часть (а)]. Назовите инварианты геометрии Евклида и геометрии Лоренца.

в) Разберите аналогию между относительной синхронизацией часов и случаем двух повернутых друг относительно друга евклидовых систем координат, когда точки на положительной части оси  $x$  в *одной* системе координат будут иметь, скажем, отрицательные значения координаты  $y$  в *другой* системе (и тем более отрицательные, чем дальше мы будем уходить от пачала координат).

### 13. Лоренцево сокращение. II

Пусть метровый стержень, покоящийся в системе отсчета ракеты, направлен вдоль оси  $x'$ . Покажите, что наблюдатель в лабораторной системе заключит, что стержень претерпел лоренцево сокращение, если измерит время, за которое этот стержень пролетает мимо одних из часов лабораторной системы, и умножит его на величину относительной скорости движения систем.

### 14. Замедление хода часов. II

Два события происходят в одном и том же месте, но в разные моменты времени в системе отсчета ракеты. Покажите, что наблюдатель в лабораторной системе заключит, что промежуток времени между этими двумя событиями будет больше в его системе, если измерит расстояние между событиями в лабораторной системе и разделит его на величину относительной скорости движения систем.

### 15. Формулы преобразования Лоренца со временем в секундах

Пусть время измеряется в секундах (поемим это индексом:  $t_{сек}$ ), а  $v_r$  — относительная скорость лабораторной системы отсчета и системы ракеты, выраженная в  $м/сек$ . Покажите, что формулы преобразования Лоренца принимают тогда вид

$$\begin{aligned} x' &= x \operatorname{ch} \theta_r - ct_{сек} \operatorname{sh} \theta_r = \frac{x - v_r t_{сек}}{\sqrt{1 - (v_r^2/c^2)}}, \\ t'_{сек} &= -\frac{x}{c} \operatorname{sh} \theta_r + t_{сек} \operatorname{ch} \theta_r = \frac{t_{сек} - \frac{v_r}{c^2} x}{\sqrt{1 - (v_r^2/c^2)}}, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\frac{v_r}{c} = \operatorname{th} \theta_r.$$

Запишите в тех же обозначениях и *обратное* преобразование Лоренца.

### 16\*. Вывод формул преобразования Лоренца

Воспользуйтесь следующим новым методом (принадлежащим Эйнштейну) для вывода формул преобразования Лоренца. Пусть ракета равномерно движется со скоростью  $\beta_r$  в направлении оси  $x$  в лабораторной системе отсчета. Координаты  $x', y', z', t'$  произвольного события (например, взрыва) в системе отсчета ракеты взаимно однозначно связаны с координатами  $x, y, z, t$  этого же события, измеренными в лабораторной системе. При этом  $y = y'$  и  $z = z'$  (расстояния в направлениях, перпендикулярных движению, совпадают в обеих системах). Что же касается связи между  $x, t$  и  $x', t'$ , то предположим существование *линейной* зависимости

$$\begin{aligned} x &= ax' + bt', \\ t &= ex' + ft'. \end{aligned}$$

Здесь четверка коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $e$  и  $f$  1) неизвестна, 2) не зависит ни от  $x$ ,  $t$ , ни от  $x'$ ,  $t'$  и 3) зависит лишь от относительной скорости  $\beta$ , движения этих двух систем отсчета.

Найдите отношения  $b/a$ ,  $e/a$ ,  $f/a$  как функции скорости  $\beta$ , исходя лишь из следующих трех предположений: 1) световая вспышка, происшедшая в  $x = 0$ ,  $t = 0$  ( $x' = 0$ ,  $t' = 0$ ), распространяется *вправо* со скоростью света в *обеих* системах отсчета ( $x = t$ ,  $x' = t'$ ); 2) световая вспышка, происшедшая в  $x = 0$ ,  $t = 0$  ( $x' = 0$ ,  $t' = 0$ ), распространяется *влево* со скоростью света в *обеих* системах отсчета ( $x = -t$ ,  $x' = -t'$ ); 3) точка  $x' = 0$  обладает в лабораторной системе отсчета скоростью  $\beta$ .

Теперь используйте четвертое предположение — инвариантность интервала (разд. 5): 4)  $t^2 - x^2 = (t')^2 - (x')^2$  и найдите с его помощью величину постоянной  $a$ , а тем самым значения всех 4 коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $e$  и  $f$ . Сходятся ли полученные таким путем результаты с лоренцевыми значениями коэффициентов преобразования?

### 17\*. Собственная длина и собственное время

а) Пусть два события  $P$  и  $Q$  разделены пространственноподобным интервалом. Покажите, что можно найти такую систему отсчета ракеты, в которой оба события произошли *одновременно*. Покажите также, что в этой системе отсчета ракеты расстояние между данными событиями равно собственному расстоянию  $\sigma$  между ними. (Один из путей: предположим, что такая система отсчета действительно существует, а затем с помощью формул преобразования Лоренца покажем, что относительная скорость этой системы меньше скорости света ( $\beta < 1$ ), что и оправдывает сделанное предположение).

б) Пусть два события  $P$  и  $R$  разделены временноподобным интервалом. Покажите, что можно найти такую систему отсчета ракеты, в которой оба события произошли *в одном и том же месте*. Покажите также, что в этой системе отсчета ракеты промежуток времени между данными событиями равен промежутку собственного времени  $\tau$  между ними.

### 18\*. Плоскость обоюдного согласия

В каждый момент имеется лишь одна плоскость, на которой показания часов лаборатории и ракеты совпадают. Покажите, что скорость движения этой плоскости в лабораторной системе отсчета равна  $\tanh(\theta_r/2)$ , где  $\theta_r$  — параметр относительной скорости лабораторной системы отсчета и системы ракеты.

### 19\*. Преобразование углов

Метровый стержень покоится в системе отсчета ракеты под углом  $\phi'$  с осью  $x'$ . Под каким углом  $\phi$  ориентирован тот же метровый стержень к оси  $x$  лабораторной системы отсчета? Чему равна *длина* этого стержня, наблюдаемая в лабораторной системе отсчета? *Предположим* теперь, что направления электрических силовых линий вокруг точечного заряда преобразуются так же, как направление метрового стержня, направленного вдоль той же линии. Качественно изобразите электрические силовые линии изолированного точечного положительного заряда, покоящегося в системе отсчета ракеты, если их рассматривать: а) в системе отсчета ракеты и б) в лабораторной системе отсчета. Какие отсюда можно получить выводы о силах, действующих в лабораторной системе отсчета на покоящиеся в этой системе пробные заряды, окружающие наш движущийся заряд?

### 20\*. Преобразование скорости вдоль оси $y$

Пусть частица движется с постоянной скоростью  $\beta y' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}$  в направлении оси  $y'$  в системе отсчета ракеты. Преобразуйте компоненты ее смещения  $y$  и  $t$ , пользуясь формулами преобразования Лоренца. Покажите, что  $x$ - и  $y$ -компоненты скорости этой частицы выражаются в лабораторной

системе отсчета как

$$\begin{aligned}\beta^x &= \operatorname{th} \theta_r, \\ \beta^y &= \frac{\beta^{y'}}{\operatorname{ch} \theta_r}.\end{aligned}\quad (49)$$

### 21\*\*. Преобразование направлений скоростей

Пусть частица движется со скоростью  $\beta'$  в плоскости  $x'y'$  в системе отсчета ракеты, и направление ее движения образует угол  $\varphi'$  с осью  $x'$ . Найдите угол, который образует направление скорости этой частицы с осью  $x$  в лабораторной системе отсчета. (*Совет:* преобразовать не скорости, а смещения.) Почему получаемый угол будет иным, чем найденный в упражнении 19? Сравните эти результаты в предположении, что скорость ракеты относительно лабораторной системы отсчета весьма велика.

### 22\*\*. Эффект «прожектора»

Световая вспышка испущена под углом  $\varphi'$  к оси  $x'$  в системе отсчета ракеты. Показать, что угол  $\varphi$  направления распространения этой вспышки по отношению к оси  $x$  в лабораторной системе отсчета дается уравнением

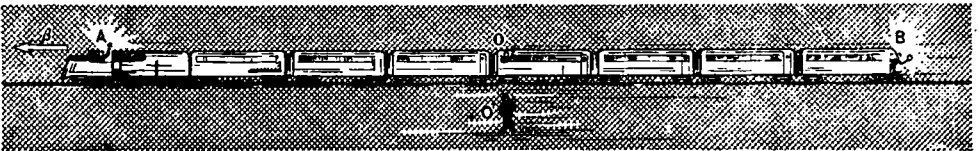
$$\cos \varphi = \frac{\cos \varphi' + \beta_r}{1 + \beta_r \cos \varphi'}.\quad (50)$$

Показать, что этот результат можно получить из решения предыдущего упражнения, положив в нем скорость  $\beta'$  равной единице. Рассмотрите затем частицу, покоящуюся в системе отсчета ракеты и равномерно излучающую свет во всех направлениях. Рассмотрите те 50% света, которые эта частица излучает в *переднюю* полусферу в системе отсчета ракеты. Примите также, что ракета движется относительно лабораторной системы отсчета весьма быстро. Требуется показать, что в лабораторной системе отсчета этот свет сконцентрируется в *узкий конус, направленный вперед* по движению, с осью, совпадающей с направлением движения частицы. Это явление называется *эффектом «прожектора»*.

## В. ЗАГАДКИ И ПАРАДОКСЫ

### 23. Парадокс эйнштейновского поезда — подробный пример

Пусть на поезде, движущемся со скоростью  $\beta_r$ , близкой к единице, едут три человека ( $A$ ,  $O$  и  $B$ ).  $A$  едет в голове поезда,  $O$  в середине, а  $B$  — в хвосте (рис. 39). На земле около железнодорожного пути стоит четвертый человек,  $O'$ . В тот самый момент, когда  $O$  проезжает мимо  $O'$ , сигналы ламп вспышек от  $A$  и  $B$  достигают  $O$  и  $O'$ . Кто первым послал сигнал? Пользуясь *только* тем фактом, что скорость света конечна и не зависит от скорости движения его источника, покажите, что  $O$  и  $O'$  ответят на этот вопрос поразному. Найдя качественное решение задачи, вычислите количественно разницу между моментами времени, когда послали сигналы  $A$  и  $B$ , наблюдаемую в системе отсчета поезда ( $\Delta t_{BA}$ ) и в системе отсчета  $O'$  ( $\Delta t'_{BA}$ ), пользуясь преобразованием Лоренца или другим путем.



Р и с. 39. Кто подал сигнал первым — путешественник  $A$  или путешественник  $B$ ?



*Решение.* Наблюдатели  $A$  и  $B$  покоятся относительно наблюдателя  $O$ . К тому же они находятся на равных расстояниях от  $O$ , что последний может не спеша проверить, пользуясь своей линейкой. Следовательно, сигналы от  $A$  и от  $B$  требуются *одно и то же время*, чтобы достигнуть  $O$ . Эти сигналы принимаются наблюдателем  $O$  одновременно. Поэтому наблюдатель  $O$  заключает, что наблюдатели  $A$  и  $B$  послали свои сигналы в один и тот же момент:  $\Delta t_{BA} = 0$ .

Наблюдатель  $O'$ , стоящий рядом с железнодорожными путями, делает совершенно иные выводы. Его рассуждения таковы: «Две вспышки пришли ко мне, когда середина поезда проходила мимо меня. Значит, обе эти вспышки должны быть испущены *до того*, как середина поезда поравнялась со мной. А до этого момента наблюдатель  $A$  был ко мне ближе, чем наблюдатель  $B$ . Поэтому свет от  $B$  должен был пройти до меня более длинный путь и затратить на это большее время, чем свет от  $A$ . Но оба сигнала *поступили* ко мне одновременно. Следовательно, наблюдатель  $B$  должен был послать свой сигнал *раньше*, чем наблюдатель  $A$ » ( $\Delta t'_{BA} = t'_B - t'_A < 0$ ). Итак, наблюдатель  $O'$ , стоящий рядом с железнодорожными путями, делает заключение, что *сначала* послал свой сигнал  $B$ , а *потом уже*  $A$ , тогда как едущий на поезде наблюдатель  $O$  заключает, что оба наблюдателя,  $A$  и  $B$ , послали сигналы *в одно и то же время*.

Чему равен промежуток времени между посылкой сигналов наблюдателями  $A$  и  $B$ ? В нештрихованной системе отсчета (поезд) эти сигналы были отправлены одновременно, так что  $\Delta t = 0$ . Расстояние между точками посылки сигналов равно  $\Delta x = \Delta x_{BA} = x_B - x_A = L$ , где  $L$  — длина поезда. Поэтому в штрихованной системе отсчета (движущейся *вправо* по отношению к нештрихованной системе, то есть поезду, как это бывает обычно при использовании штрихованных и нештрихованных обозначений) промежуток времени между посылкой сигналов  $A$  и  $B$  можно найти по формулам преобразования Лоренца:

$$\Delta t' = -\Delta x \operatorname{sh} \theta_r + \Delta t \operatorname{ch} \theta_r,$$

$$\Delta t' = -L \operatorname{sh} \theta_r = -\frac{L\beta_r}{\sqrt{1-\beta_r^2}}.$$

Знак «минус» показывает, что наблюдатель  $B$ , находящийся на положительной части оси  $x'$ , отправил свой сигнал *раньше* по «ракетному» времени (более отрицательное время!), чем наблюдатель  $A$ .

#### 24. Загадка Эйнштейна

Когда Эйнштейн был ребенком, он ломал голову над такой загадкой: пусть бегун смотрит на себя в зеркало, которое он держит перед собой в вытянутой руке; если он бежит почти со скоростью света, сможет ли он увидеть себя в зеркале? Разберите этот вопрос в рамках теории относительности.

#### 25\*. Парадокс шеста и сарая

Возволнованный студент пишет: «Теория относительности — наверняка недоразумение. Возьмем шест длиной 20 м и будем двигать его в направлении его длины с такой скоростью, чтобы в лабораторной системе отсчета он оказался длиной всего 10 м. Тогда в некоторый момент этот шест можно целиком спрятать в сарае, длина которого также 10 м (рис. 40). Но рассмотрим то же самое в системе отсчета бегуна с шестом. Для него наполовину сократившимся в длину оказывается *сарай*. Как же можно спрятать 20-метровый шест в 5-метровом сарае?! Разве этот невероятный вывод не доказывает, что в основе теории относительности где-то есть противоречие?»

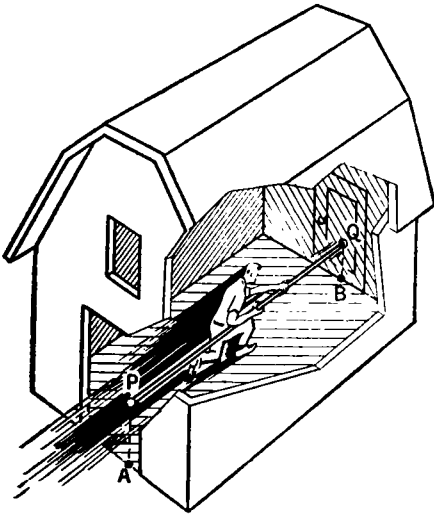


Рис. 40. Бегун быстро мчится с «20-метровым шестом», помещающимся в «10-метровом сарае». В следующее мгновение он выскочит в заднюю дверь, сделанную из бумаги.

Напишите ответ возбужденному студенту, ясно и подробно объяснив в нем, как шест и сарай должны без противоречий рассматриваться в теории относительности. (Развенчайте парадокс, начертив две диаграммы пространства-времени, соблюдая масштабы, одну на «плоскости»  $xt$ , а другую — на «плоскости»  $x't'$ . Примите, что в начале координат обеих диаграмм «событие»  $Q$  совпадает с  $A$ . На обеих диаграммах проведите мировые линии точек  $A$ ,  $B$ ,  $P$  и  $Q$ . Следите за соблюдением масштабов! На обеих диаграммах пометьте время (в метрах) совпадения  $Q$  и  $B$ ,  $P$  и  $B$ . Для определения этого времени воспользуйтесь формулами преобразования Лоренца или иными методами.)

### 26\*. Война в космосе

Две ракеты, обладающие равными длинами покоя, проходят мимо друг друга с релятивистскими скоростями на встречных курсах. Наблюдатель  $O$  располагает в хвостовой части своей ракеты орудием, ствол которого направ-

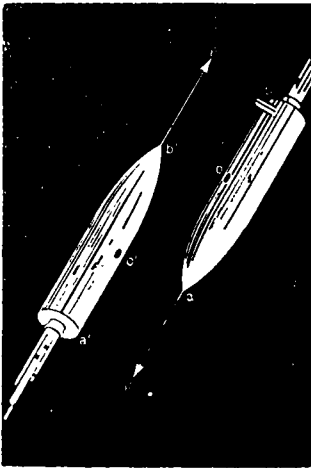


Рис. 41. Два ракетных корабля пролетают мимо друг друга с огромными скоростями.

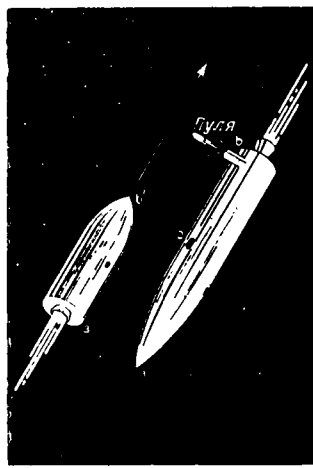


Рис. 42. Наблюдатель в системе  $O$  ожидает, что снаряд, выпущенный, когда точки  $a$  и  $a'$  совпали, не попадет в другой корабль.

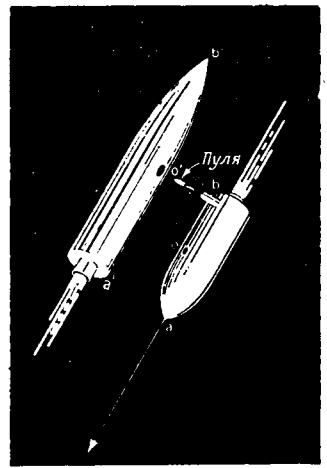


Рис. 43. Наблюдатель в системе  $O'$  ожидает, что снаряд, выпущенный, когда точки  $a$  и  $a'$  совпали, попадет в другой корабль.

лен поперек относительного движения ракет. В тот момент, когда точка  $a$  и  $a'$  поравнялись друг с другом, она стреляет из своего орудия (рис. 42). В системе отсчета  $O$  лоренцеву сокращению подвергается пролетающая мимо ракета, так что наблюдатель  $O$  ожидает, что его снаряд не попадет в нее. Но в системе отсчета другого наблюдателя  $O'$  лоренцевски сокращенной представляется ракета  $O$ . Поэтому в тот момент, когда точки  $a$  и  $a'$  поравнялись друг с другом, наблюдатель  $O'$  отмечает картину (рис. 43). Попадает ли на самом деле снаряд в ракету или пролетит мимо? Дайте подробный ответ, укажите некорректности в постановке задачи и ошибку в одной из диаграмм.

### 27\*. Парадокс часов <sup>1)</sup>

(Первый вариант: см. также упражнения 49, 51 и 81.)

Близнецы Петр и Павел расстались в тот день, когда им исполнилось по 21 году. Петр отправился в направлении оси  $x$  на 7 лет своего времени ( $2,2 \cdot 10^8$  сек, или  $6,6 \cdot 10^{16}$  м времени) со скоростью  $24/25 = 0,96$  скорости света, после чего сменил скорость на обратную и за 7 лет вернулся назад, тогда как Павел оставался на Земле. а) В каком возрасте вернулся Петр? б) Начертите диаграмму пространства-времени, изображающую движение Петра. Укажите на ней  $x$ - и  $t$ -координаты точек поворота и встречи. Для простоты прибегните к идеализации, приняв Землю за инерциальную систему отсчета, к которой и приурочьте вашу диаграмму, выбрав за начало координат событие отлета Петра. в) Сколько лет было Павлу в момент встречи?

### 28\*. Предметы, движущиеся быстрее света <sup>2)</sup>

Формулы преобразования Лоренца теряют смысл, если принять величину относительной скорости движения двух систем отсчета больше скорости света. Считается, что вследствие этого масса, энергия и информация (сообщения) не могут передаваться от точки к точке быстрее света. Проверьте этот вывод на следующих примерах.

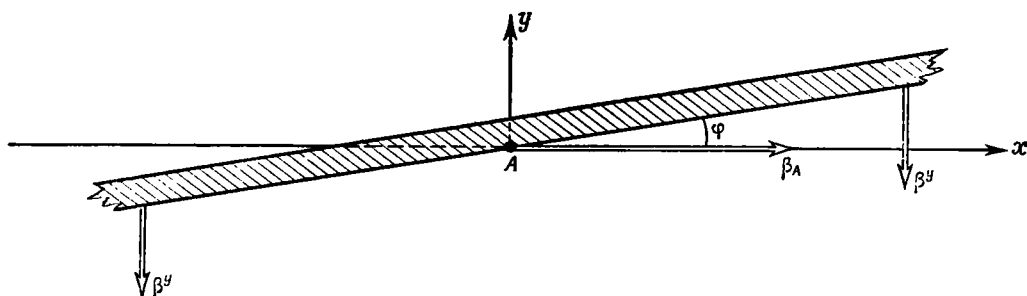
а) **П а р а д о к с н о ж н и ц.** Очень длинный прямой стержень, наклоненный под углом  $\varphi$  к оси  $x$ , движется вниз с постоянной скоростью  $\beta v$  (рис. 44). Найдите скорость  $\beta_A$ , с которой движется точка пересечения  $A$  нижней грани стержня и оси  $x$ . Может ли эта скорость превзойти скорость света? Можно ли использовать движение точки  $A$  для передачи сообщения из начала координат наблюдателю, расположенному далеко на оси  $x$ ?

б) Предположим, что тот же стержень первоначально покоился, а точка пересечения  $A$  совпала с началом координат. Затем та область стержня, которая находилась в начале координат, подверглась удару молотом, пославшему ее вниз. Точка пересечения двинулась вправо. Можно ли было использовать такое движение точки пересечения для передачи сообщения со скоростью, превышающей скорость света?

в) Будем быстро вращать мощный прожектор таким образом, чтобы его луч двигался в одной плоскости. Пусть в этой же плоскости на равных расстояниях от прожектора, но вдали друг от друга находятся два наблюдателя —  $A$  и  $B$ . Как далеко они должны расположиться от прожектора, чтобы его луч пробежал от  $A$  до  $B$  быстрее, чем мог бы пройти световой

<sup>1)</sup> Ряд статей, в которых разбирается парадокс часов, вместе с упоминаниями о многих других публикациях см. в сборнике *Special Relativity Theory, Selected Reprints, published for the American Association of Physics Teachers by the American Institute of Physics, 335 East 45th Street, New York 17, New York, 1963.* [Парадокс часов часто называют «парадоксом близнецов». — *Прим. перев.*]

<sup>2)</sup> См. Milton A. R o t h m a n, *Things that go Faster than Light, Scientific American, 203, 142 (July, 1960).*



Р и с. 44. Может ли точка пересечения  $A$  двигаться со скоростью, превышающей скорость света?

сигнал от  $A$  до  $B$ ? Перед тем как занять свои места, наблюдатели получили следующие инструкции:

Инструкция для  $A$ : Увидев луч прожектора, немедленно выстрелить в  $B$ .

Инструкция для  $B$ : Увидев луч прожектора, немедленно пригнуться, чтобы избежать пули, посланной  $A$ .

Не передается ли при таких обстоятельствах предупреждение от  $A$  к  $B$  со скоростью, большей скорости света?

г) В некоторых руководствах к осциллографам пишется, что скорость луча на экране превышает скорость света. Возможно ли это?

## Г. ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ

### 29. Синхронизация движущимися часами — подробный пример

Мистер Энгельсберг не признает нашего метода синхронизации часов световыми сигналами (разд. 4). Он заявляет: «Я могу синхронизовать свои часы тем способом, какой мне понравится». Прав ли он? Мистер Энгельсберг хочет синхронизовать пару тождественных часов (назовем их Биг Бен и Литтл Бен), расположенных в миллионе миль друг от друга (чуть больше, чем в  $1,5 \cdot 10^9$  м), относительная скорость которых равна нулю. Он берет для этого третьи часы той же конструкции что двое первых, и заставляет их двигаться с постоянной скоростью между ними. При прохождении мимо Биг Бена эти часы устанавливаются на то время, которое он показывает в этот момент. Когда движущиеся часы проходят мимо Литтл Бена, этот последний ставится по времени, которое показывают движущиеся часы. «Вот теперь Биг Бен и Литтл Бен синхронизованы», — объявляет мистер Энгельсберг. Прав ли он? Насколько именно рассинхронизованы при этом Биг Бен и Литтл Бен, если это проверить по решетке часов, покоящейся относительно их и синхронизованной обычным методом световых сигналов? Подсчитайте величину рассинхронизованности, если мистер Энгельсберг пользуется третьими часами, движущимися со скоростью сто тысяч миль в час ( $4,5 \cdot 10^4$  м/сек). Есть ли какая-нибудь причина (не считая субъективного предпочтения), почему никто из нас не пользуется методом синхронизации, предлагаемым мистером Энгельсбергом?

*Решение.* Проведем сначала количественный расчет. Для наблюдения за движущимися (третьими) часами можно воспользоваться решеткой часов, покоящейся относительно Биг Бена и Литтл Бена, которую мы синхронизовали стандартным методом световых сигналов. Относительно этой решетки третьи часы движутся со скоростью  $v = 4,5 \cdot 10^4$  м/сек, т. е.

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{4,5 \cdot 10^4 \text{ м/сек}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м длины за } 1 \text{ м светового времени.}$$

При такой скорости третьи часы покрывают расстояние между Биг Беном и Литтл Беном за срок  $\Delta t = 10^{13}$  м светового времени. Сравнивая показания стрелок движущихся часов и часов решетки, мимо которых они поочередно проходят, мы сталкиваемся с эффектом *замедления времени* (упражнение 10). По отношению к часам решетки движущиеся часы будут идти медленнее в  $(\sqrt{1 - \beta^2})^{-1}$  раз. Поэтому эти *движущиеся* (третьи) часы зарегистрируют в качестве срока путешествия от Биг Бена до Литтл Бена время

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} = \Delta t \cdot (1 - 2,25 \cdot 10^{-8})^{1/2}.$$

Воспользуемся разложением для биннома

$$(1 - \delta)^{1/2} = 1 - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta^2}{8} \dots \approx 1 - \frac{\delta}{2},$$

(так как величина  $\delta$  мала) и получим приближенный ответ

$$\Delta t' \approx \Delta t - \frac{1}{2} \cdot 2,25 \cdot 10^{-8} \Delta t,$$

или

$$\Delta t' - \Delta t = -1,12 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{13} = -1,12 \cdot 10^5 \text{ м} = -0,4 \cdot 10^{-3} \text{ сек.} \quad (51)$$

Поставим стрелки Литтл Бена по движущимся часам, а затем сверим их с соседними часами решетки. Литтл Бен будет *отставать* от часов решетки на *0,4 миллисекунд (мсек)*.

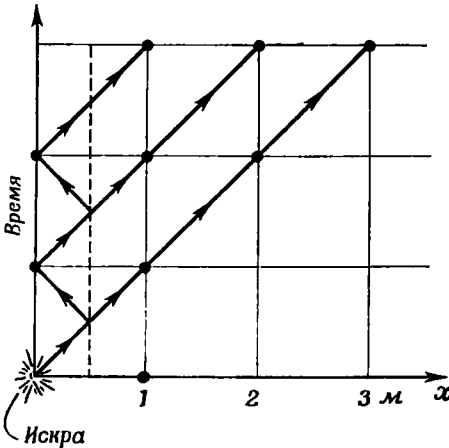
Промежуток времени для движущихся часов, равный  $\Delta t'$  на пути между Биг Беном и Литтл Беном, можно определить и более непосредственным путем. Часы движутся по прямой. Интервал прошедшего времени, зарегистрированный ими на соответствующей мировой линии, равен поэтому собственной длине этой мировой линии между данными двумя событиями, т. е. он равен *интервалу* между прохождениями мимо Биг Бена и Литтл Бена:

$$\Delta t' = \Delta (\text{собственное время}) = (\text{Интервал}) = \sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}.$$

Вычисленная отсюда величина расхождения показаний лабораторных и движущихся часов в полном соответствии с результатом (51) равна

$$\Delta t' - \Delta t = \sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2} - \Delta t.$$

Обратимся теперь к вопросу о пригодности метода движущихся часов для процедуры синхронизации. Мистер Энгельсберг волен определять синхронизацию как ему будет угодно. Однако, используя метод движущихся часов для синхронизации Биг Бена и Литтл Бена, он натолкнется на следующие трудности: 1) Время, которое будет поставлено на лабораторных часах при такой синхронизации, окажется зависящим от *скорости* движущихся часов. Возьмем, например, часы, летящие в десять раз быстрее, чем в разобранный выше случае. Тогда расхождение между Литтл Беном и соседними с ним часами решетки составит уже не 0,4, а 40 *мсек*. Два Литтл Бена, стоящие рядом друг с другом, будут показывать разное время, если их синхронизовать с Биг Беном с помощью разных часов (движущихся с различными скоростями)! 2) Даже если условиться всегда использовать движущиеся часы, летящие с некоторой данной скоростью, результат синхронизации при таком методе будет зависеть от *пути* движущихся часов. Чем длиннее будет путь, пройденный движущимися часами с постоянной скоростью, тем



Р и с. 45. Измерение времени без помощи часов. Пунктирной прямой обозначена мировая линия полупрозрачного зеркала.

больше будут отставать часы Литтл Бен по сравнению с соседними часами решетки. 3) Если движущиеся часы вернуться к Биг Бену, совершив путешествие по замкнутому маршруту, они окажутся рассинхронизованными с Биг Беном по возвращении! (См. парадокс часов; упражнение 27.) Метод синхронизации мистера Энгельсберга приводит и к другим неприятностям, но уже приведенных вполне достаточно, чтобы показать его непригодность для составления простого описания явлений, протекающих в пространстве-времени.

### 30. Конструкция часов и замедление их хода

При описании явления замедления времени (хода часов) в упражнении 10 мы не делали различия между пружинными часами, часами на кварцевом кристалле, биологическими часами (старение), атомными часами, радиоактивными часами или часами, в которых периодический процесс состоит в последовательном отражении светового импульса между двумя параллельными зеркалами. Предположим, что все эти часы отрегулированы таким образом, что идут совершенно одинаково, покоясь в системе отсчета ракеты. Покажите, что явления замедления хода этих часов (упражнение 10) протекают совершенно одинаково, вне зависимости от их внутреннего механизма, когда они пролетают мимо стандартных часов, покоящихся в лабораторной системе отсчета. (Обсуждение. Как получилось, что мы до сих пор ни разу не обратили внимания на конструкцию часов? Нужно ли в действительности вводить в рассмотрение какой-либо конкретный механизм часов, если рассматриваются световые сигналы, путешествующие взад и вперед между часами в целях синхронизации? Требуется ли вообще что-либо еще, кроме начальной световой вспышки (например, от электрической искры) и полупрозрачных посеребренных зеркал, установленных в точках наблюдения (рис. 45), для того чтобы получить стандартные отрезки времени?)

### 31. Инерциальные системы отсчета, связанные с Землей

Система отсчета будет инерциальной в некоторой области пространства и времени, если первоначально покоившаяся пробная частица будет сохранять свое состояние покоя с некоторой данной степенью точности во всей этой области пространства-времени. Как было показано, свободно падающий вблизи Земли космический корабль эффективно является инерциальной системой отсчета на протяжении периода времени в несколько секунд. Многие опыты, касающиеся быстро движущихся частиц и собственно света, проводятся в лабораториях, жестко связанных с Землей, а не находящихся в состоянии свободного падения! В таких связанных с Землей лабораториях действует сила тяжести. Но тем не менее для проведения некоторых опытов

требуется так мало времени, что пробная частица, высвобождаемая в начале опыта, не успевает до его конца пройти в своем падении сколько-нибудь значительный путь. Поэтому для многих экспериментальных целей жестко связанная с Землей лаборатория с достаточной степенью точности может быть принята за инерциальную систему отсчета.

а) Пусть элементарная частица, движущаяся со скоростью, равной 0,96 скорости света, проходит через кубическую искровую камеру, сторона которой равна 1 м. Какое расстояние прошла бы в своем падении под действием гравитационного поля Земли за это время отдельная пробная частица, первоначально находившаяся в покое? Сравните полученную длину с поперечником атомного ядра (несколько превышающего  $10^{-15}$  м). Подытожьте результат, указав размеры пространственно-временной области, в которой жестко связанную с Землей лабораторию можно идеализированно считать инерциальной, и приведя взятую степень точности. Какими размерами должна обладать искровая камера, чтобы, пока элементарная частица со скоростью 0,96 скорости света пересекает ее, отдельная пробная частица могла пройти в своем падении из состояния покоя заметное расстояние?

б) В опыте Майкельсона — Морли (упражнение 33) луч света претерпевает отражения между парами зеркал, удаленных друг от друга на 2 м, так что луч проходит в целом путь, равный 22 м. Какое расстояние пройдет в своем падении из состояния покоя в гравитационном поле Земли пробная частица за то время, пока данный фотон проходит через установку Майкельсона — Морли? С какой степенью точности является инерциальной жестко связанная с Землей система отсчета в той области пространства-времени, где проводится опыт Майкельсона — Морли?

### 32.\* Размеры инерциальной системы

Насколько велика может быть данная область пространства ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z = L$  в метрах), насколько долго ее можно исследовать ( $\Delta t$  в метрах) и насколько близко она может быть расположена к центру гравитационного притяжения, чтобы еще нельзя было заметить существенного отличия  $\epsilon$  этой области от идеальной инерциальной системы отсчета?

а) *Отличие первого рода: относительное ускорение перпендикулярно направлению притяжения.*

1) Частный случай. Два массивных шарика высвобождаются в состоянии покоя; оба находятся на высоте 250 м над поверхностью Земли; расстояние между ними — 25 м (рис. 46). Покажите, что расстояние между ними уменьшится примерно на  $10^{-3}$  м, прежде чем они упадут на Землю. (Воспользуйтесь методом подобных треугольников или каким-нибудь близким методом. Этот пример обсуждался нами на стр. 19.) Время падения с высоты 250 м с ускорением  $9,8 \text{ м/сек}^2$  равно приблизительно 7 сек, или  $21 \cdot 10^8$  м светового времени. Итак, падающий железнодорожный вагон может рассматриваться как инерциальная система отсчета при условиях, что:

$\epsilon$ (наименьшее отличие, доступное обнаружению при помощи данных приборов)	Условия, соответствующие тому, что отличие от идеальной инерциальной системы отсчета ненаблюдаемо			
	$r$ (расстояние от центра Земли)	$\Delta x$ (расстояние по горизонтали)	$\Delta y$ и $\Delta z$ (протяженность области в двух других направлениях)	$\Delta t$ (время наблюдения)

$\epsilon \geq 1 \cdot 10^{-3}$  м     $r \geq r_0 = 6,4 \cdot 10^8$  м     $\Delta x = L \leq 25$  м    При обсуждении взяты равными нулю; мы их приравняем нулю и здесь, так как в дальнейшем они не рассматриваются [часть (в)]

$\Delta t \leq 21 \cdot 10^8$  м (7 сек)

2) Более общий случай. Пробная частица  $B$  отстоит на расстоянии  $\Delta z$  от пробной частицы  $A$ . Обе они находятся на одинаковом расстоянии  $r$  от центра притяжения и рассматриваются в течение времени  $\Delta t$ . Обозначим через  $a$  общую величину ускорения этих частиц под действием притягивающего центра (в  $м/сек^2$ ), а через  $a^* = a/c^2$  — величину того же ускорения, измеренную в метрах расстояния за квадратный метр времени. Показать, что ускорение частицы  $B$  относительно  $A$ ,  $(\Delta a^x)^*$  (в метрах расстояния на квадратный метр времени), дается формулой

$$(\Delta a^x)^* = -\frac{\Delta z}{r} a^*. \quad (52)$$

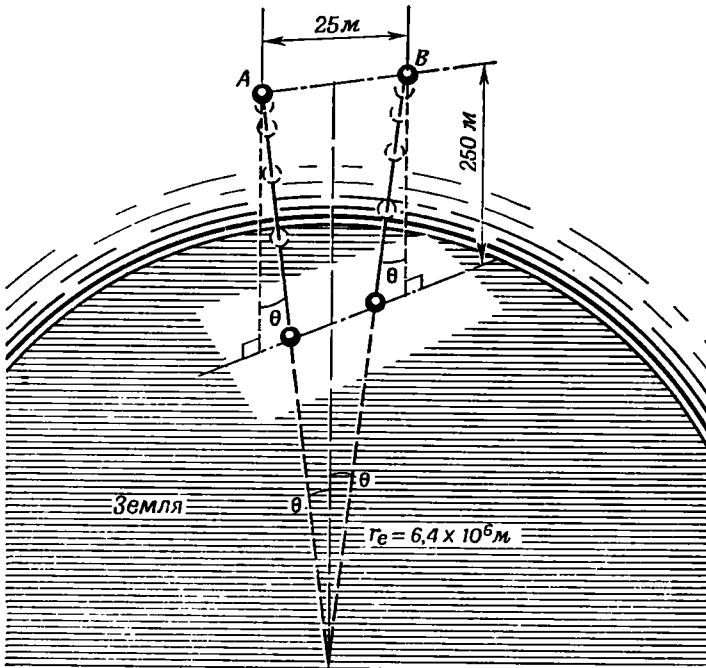
(Считать входящие в рассмотрение углы настолько малыми, что их синусы и тангенсы можно приравнять друг другу.)

б) Отличие второго рода: относительное ускорение параллельно направлению притяжения.

1) Общий случай. Пробная частица  $B$  отстоит на расстоянии  $\Delta z$  от пробной частицы  $A$ , и на одной прямой с ними на расстоянии  $r$  находится притягивающий центр. Таким образом, частица  $B$  находится дальше от центра, чем  $A$ , и на нее действует меньшая сила. Поэтому  $B$  отстает в своем падении от  $A$ , а наблюдатель, расположенный на  $A$ , найдет, что на  $B$  действует ускорение в положительном направлении оси  $z$ . Показать, что это относительное ускорение (выраженное в метрах расстояния за квадратный метр времени) равно

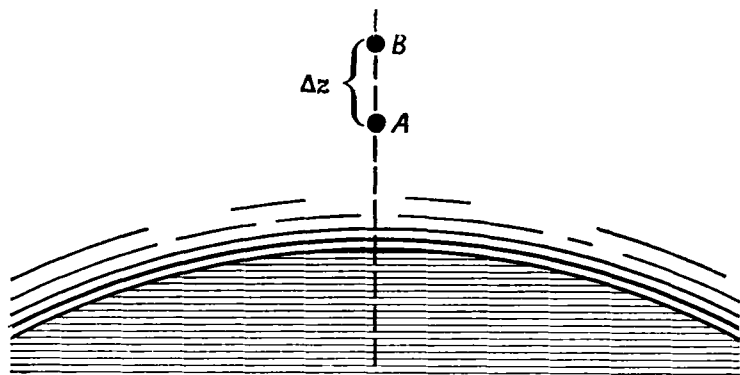
$$(\Delta a^z)^* = +2 \frac{\Delta z}{r} a^*. \quad (53)$$

(Совет: воспользуйтесь тем фактом, что величина  $a^*$  убывает обратно пропорционально квадрату расстояния по закону всемирного тяготения Ньютона:  $a^* = \text{const}/r^2$ . Возьмите разность сил на расстояниях  $r$  и  $r + \Delta z$ . Восполь-



Р и с. 46. Освобожденные на одинаковой высоте (лежащие на одной горизонтали) грузы приближаются друг к другу в процессе падения. (Масштабы не выдержаны).





Р и с. 47. Освобожденные на одной вертикали, но на разных высотах грузы удаляются друг от друга в процессе падения. (Масштабы не выдержаны).

зуйтесь чрезвычайной малостью  $\Delta z$  (каких-нибудь несколько метров) по сравнению с  $r$  (тысячи километров) и упростите результат.)

2) Ч а с т н ы й с л у ч а й (см. стр. 17). Пусть одна пробная частица находится на высоте 250 м над поверхностью Земли, а другая — на высоте 275 м. Насколько увеличится разность высот (25 м) этих частиц за те (приблизительно) 7 сек, пока они не упадут на Землю? [Наводящий вопрос: во сколько раз различаются численные значения для  $\Delta a^z$  в (61) и для  $\Delta a^x$  в (a2)?] Дополните (или, если угодно, пересмотрите) на основании этого результата таблицу на стр. 99.

в) Случай, когда исследуемая область далека от центра Земли.

Агентство космических исследований расширяет опыты над пробными частицами и космическими лучами. Исследовательская группа приходит к заключению, что использовавшаяся в прежних исследованиях область недостаточно обширна для проведения новых программ, а время 7 сек недостаточно велико. Руководство утверждает их заявку на размеры области  $\Delta x = 200$  м,  $\Delta y = 200$  м,  $\Delta z = 100$  м и время 100 сек с тем же допуском, что и раньше ( $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$  м = 1 мм). На расстояние скольких земных радиусов от центра Земли нужно забросить с помощью ракет оборудование, чтобы отклонение системы отсчета от идеальной инерциальной было менее приемлемого нижнего предела? (Некоторые возможные попутные вопросы: как изменяется в зависимости от расстояния  $r$  от центра Земли величина  $a^*$ ? Как зависят от  $r$  величины  $(\Delta a^x)^*$  и  $(\Delta a^z)^*$ ? Как зависят  $\Delta x$  и  $\Delta z$  от  $(\Delta a^x)^*$ ,  $(\Delta a^z)^*$  и от времени  $\Delta t$ ?)

### 33\*. Опыт Майкельсона — Морли <sup>1)</sup>

а) Пусть самолет движется относительно воздуха со скоростью  $c$  (не скорость света!) из пункта  $A$  в пункт  $B$ . В направлении от  $B$  к  $A$  дует со скоростью  $v$  сильный ветер. Показать, что время полета по замкнутому маршруту от  $A$  до  $B$  и обратно до  $A$  превышает в этом случае время такого же полета по замкнутому маршруту в условиях безветрия в  $1/[1 - (v^2/c^2)]$  раз. Парадокс: Казалось бы, ветер должен был бы ускорить полет в одну сторону и замедлять — в другую в равной мере. Почему же тогда время полета по замкнутому маршруту различно в зависимости от того, дует ветер или нет? Дайте этому простое физическое объяснение. Что произойдет в том случае, когда скорость ветра близка к скорости самолета?

<sup>1)</sup> А. А. Michelson, E. W. Morley, American Journal of Science, 34, 333 (1887). Логическое место этого опыта в теории относительности разобрано в статье: Н. Р. Robertson, Reviews of Modern Physics, 21, 378 (1949). (См. историю опыта Майкельсона — Морли в книге: Б. Д ж е ф ф, Майкельсон и скорость света, ИЛ, М., 1963. — Прим. перев.)

б) Пусть теперь тот же самолет летит по замкнутому маршруту между  $A$  и  $C$ . Расстояние между этими пунктами то же, что между  $A$  и  $B$ , но направление  $AC$  перпендикулярно направлению  $AB$ , так что при полете между  $A$  и  $C$  самолет движется *поперек* ветра. Показать, что время полета по замкнутому маршруту между  $A$  и  $C$  превышает в этом случае время такого же полета по замкнутому маршруту в условиях безветрия в  $1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$  раз.

в) Пусть из пункта  $A$  одновременно с одинаковой скоростью относительно воздуха вылетают два самолета. Один летит из  $A$  в  $B$  и назад в  $A$  сначала против ветра, а затем по ветру (скорость ветра равна  $v$ ). Другой самолет летит из  $A$  в  $C$  и назад в  $A$  все время поперек ветра. Какой из них вернется первым в  $A$  и чему будет равен промежуток времени между моментами их возвращения? Покажите с помощью формулы разложения бинома, что при  $v \ll c$  этот промежуток времени можно приближенно выразить как

$$\Delta t = \frac{L}{2c} \frac{v^2}{c^2}$$

где  $L$  — длина пути по замкнутому маршруту между  $A$  и  $B$  (и между  $A$  и  $C$ ).

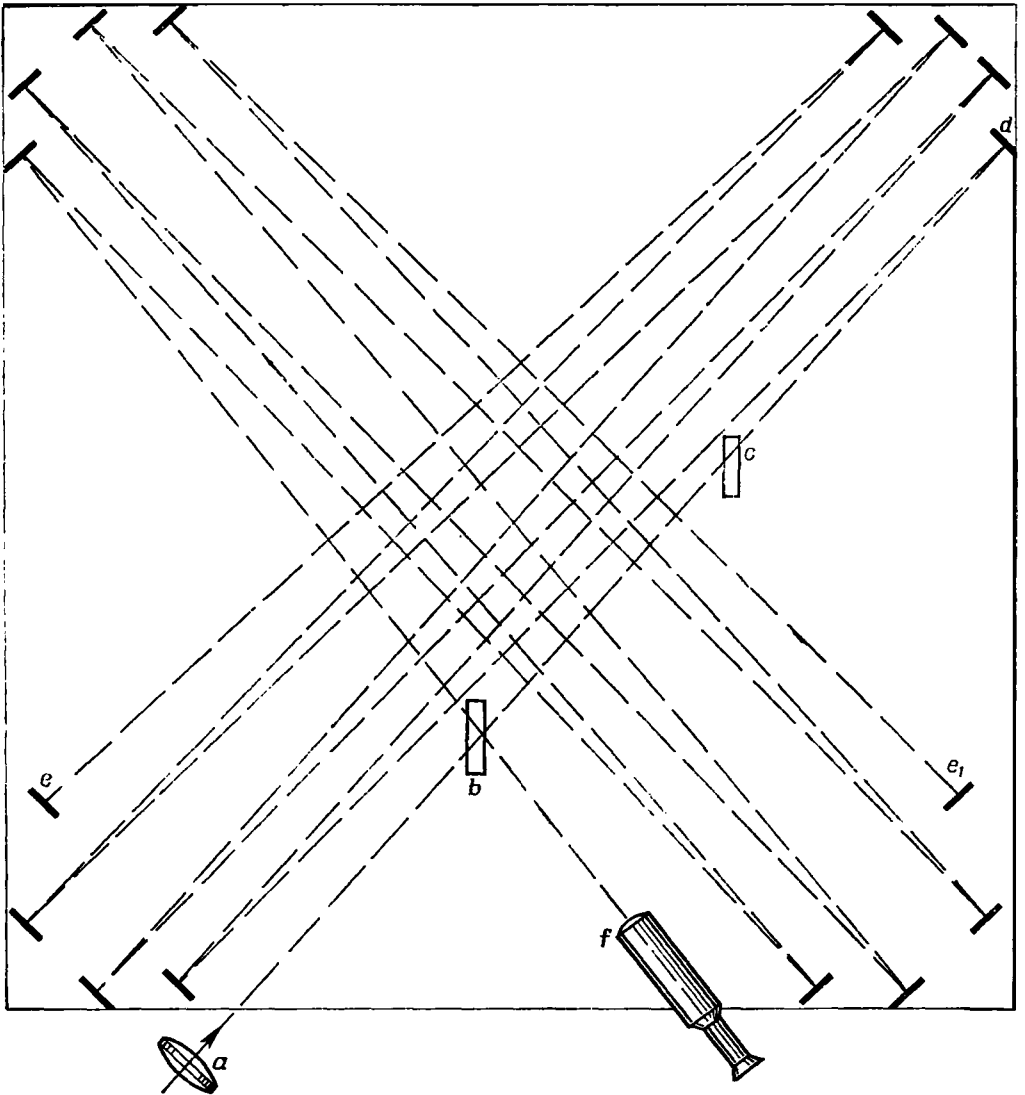
г) Пусть на Южном полюсе находится Центр снабжения исследовательских станций, расположенных на окружности радиуса 300 км с центром в полюсе. Каждый понедельник множество грузовых самолетов одновременно вылетает из Центра и летит по радиусам во всех направлениях на одной и той же высоте. Каждый самолет сбрасывает над своей станцией грузы и сразу же направляется обратно на базу. На холме, с которого удобно обозревать Центр снабжения, стоит распорядитель с секундомером в руках. Он обнаруживает, что не все самолеты возвращаются на базу одновременно. Его ставит в тупик такой разницей, ибо по точным замерам он знает, что: 1) расстояния от базы до всех станций одинаковы, 2) каждый самолет его эскадрильи летит относительно воздуха с одной и той же скоростью, а именно 300 км/час, и 3) путь каждого самолета относительно поверхности Земли представляет собой прямую, соединяющую Центр со станцией (как туда, так и обратно). В конце концов наш распорядитель решает, что разброс во времени возвращения самолетов связан с ветром, дующим на той высоте, где летят самолеты. По своему секундомеру он обнаруживает, что интервал времени между моментами возвращения первого и последнего самолетов равен 4 сек. Чему равна тогда скорость, с которой дует ветер на той высоте, где летят самолеты? И что может сказать распорядитель о *направлении* этого ветра?

д) В своем знаменитом опыте Майкельсон и Морли пытались обнаружить так называемый *эфирный ветер* — эффект движения Земли относительно эфира, причем в этом последнем свет, как считалось, распространяется со скоростью  $c$ . Они произвели сравнение интервалов времени, за которые свет проходит замкнутые пути («туда и обратно») параллельно направлению движения Земли вокруг Солнца и перпендикулярно этому направлению. В их опыте свет многократно отражался между почти параллельными зеркалами [что соответствовало многократным полетам самолетов взад и вперед в примере (в)]. Таким способом удалось добиться, чтобы полная длина замкнутого пути распространения света составила 22 м. Если эфир неподвижен относительно Солнца, а Земля движется по своей орбите со скоростью  $30 \cdot 10^3$  м/сек, то чему будет приблизительно равна разница во времени возвращения световых импульсов, испущенных одновременно, но распространявшихся по двум взаимно перпендикулярным путям? Эта разница оказывается недоступной прямому измерению ввиду своей малости даже для современных приборов, и поэтому предсказания гипотезы эфирного ветра проверялись с помощью следующего косвенного метода.

е) Конструкция собственно *интерферометра* Майкельсона — Морли схематически представлена на рис. 48. Почти монохроматический свет

(содержащий лишь одну частоту) входит в прибор через линзу  $a$ . Часть его отражается полупрозрачным посеребренным зеркалом  $b$ , а часть продолжает распространяться до зеркала  $d$ . Оба получившихся луча многократно отражаются взад и вперед, пока они не доходят соответственно до зеркал  $e$  и  $e_1$ , которые направляют их назад, и оба луча в конце концов снова попадают на зеркало  $b$ . На этом последнем зеркале часть каждого луча вместе с частью другого, объединяясь, направляется в телескоп  $f$ . Прозрачная стеклянная пластина  $c$ , размеры которой совпадают с размерами полупрозрачного зеркала  $b$ , включена для того, чтобы каждый луч прошел одно и то же число раз (а именно три) сквозь данную толщину стекла на своем пути к телескопу  $f$ .

Предположим, что длины взаимно перпендикулярных путей в точности одинаковы, а вся установка покоится относительно эфира. Тогда монохроматический свет, разделенный зеркалом  $b$  на два луча, при некоторой разности фаз между ними вернется к зеркалу  $b$  с той же самой разностью фаз.



Р и с. 48. Схема интерферометра Майкельсова — Морли, установленного на вращающейся мраморной плите.

В этом случае световые волны, входящие в телескоп  $f$ , будут *складываться*, и поле зрения мы увидим *ярко освещенным*. Если бы, напротив, один из лучей отстал во времени на величину, соответствующую половине периода колебаний этого света, то он пришел бы вновь к зеркалу  $b$  на эти полпериода позже другого луча; волны, входящие в телескоп, *вычитались бы друг из друга*, и поле зрения оказалось бы *темным*. Если бы относительное запаздывание луча составило целый период, то поле зрения в телескопе снова было бы ярко освещено, и так далее. Чему равен промежуток времени, соответствующий одному периоду колебаний световой волны? Майкельсон и Морли пользовались спектральной линией натрия с длиной волны 5890 *ангстрем* ( $A$ ) ( $1 A = 10^{-10}$  м). Ввиду равенств  $v\lambda = c$  и  $v = 1/T$  видно, что период для этой спектральной линии натрия равен примерно  $2 \cdot 10^{-15}$  сек.

Но ведь невозможно «выключить» предполагаемый эфирный ветер, отъюстировать установку и после этого вновь «включить» этот эфирный ветер. Вместо этого Майкельсон и Морли пустили свой интерферометр плавать в бассейне, наполненном ртутью, и медленно вращали его вокруг центра, как грампластинку, непрерывно наблюдая яркость поля зрения телескопа (рис. 48). В этом случае, если свет на каком-то пути тратит больше времени при некоторой данной ориентации установки, то при ее повороте на  $90^\circ$  такой же задержке во времени подвергнется свет, идущий по *другому* пути. Значит, *полное изменение запаздывания света*, когда он распространяется по двум разным путям, должно быть при повороте интерферометра *вдвое больше* того, что мы вычислили бы с помощью формулы в примере (в).

Усовершенствовав свой метод, Майкельсон и Морли сумели доказать, что изменение времени распространения света по двум путям при повороте установки соответствовало *менее чем*  $1/100$  сдвига от одного потемнения поля зрения телескопа до следующего потемнения. Покажите, что этот вывод свидетельствует о том, что движение эфира у поверхности Земли (если оно вообще имеет место) происходит со скоростью менее  $1/6$  скорости движения Земли по ее орбите. Для того чтобы исключить возможность такого совпадения, что в этот момент эфир «дул» относительно Солнца с той же скоростью, с какой движется по своей орбите Земля, они повторяли свой опыт каждые три месяца — и каждый раз с отрицательным результатом.

ж) (Проверяет ли сам по себе опыт Майкельсона — Морли теорию распространения света в эфире? Можно ли так видоизменить эту теорию, чтобы она пришла в согласие с результатами этого опыта? Как это сделать? Какой новый опыт можно было бы привлечь для проверки такой модифицированной теории?)

### 34\*. Эксперимент Кеннеди — Торндайка <sup>1)</sup>

Целью постановки опыта Майкельсона — Морли было обнаружение любого возможного движения Земли относительно гипотетической жидкости, эфира, — той среды, в которой свет, как предполагалось, распространяется со специфической для него скоростью  $c$ . Но такого относительного движения Земли и эфира обнаружить не удалось. Результаты этого опыта отчасти сыграли впоследствии свою роль в ниспровержении понятия эфира. Согласно современным взглядам, для распространения света вообще не требуется никакой среды.

Какое значение имеет отрицательный результат опыта Майкельсона — Морли для нас, людей, не признающих теории эфира как среды, в которой распространяется свет? Просто-напросто: 1) Скорость света по замкнутому

<sup>1)</sup> Сообщение об оригинальной постановке эксперимента можно найти в статье R. J. K e n n e d y, E. M. T h o r n d i k e, Physical Review, 42, 400 (1932). Место эксперимента в логической структуре теории относительности проанализировано в работе H. P. R o b e r t s o n, Reviews of Modern Physics, 21, 378 (1949).

пути, измеренная на Земле, одинакова во всех направлениях, т. е. скорость света *изотропна*. 2) Скорость света изотропна не только тогда, когда Земля при движении вокруг Солнца летит в одном каком-то направлении, например, в январе (назовем этот случай движения «лабораторной системой отсчета»), но и когда Земля движется в *противоположном* направлении в июле (уйдя вокруг Солнца в противоположную часть своей орбиты; назовем Землю в этот период ее движения «системой отсчета ракеты»). 3) Обобщение этого вывода на любые пары инерциальных систем, находящихся в движении относительно друг друга, приводит к утверждению, что *скорость света на замкнутом пути изотропна как в лабораторной системе отсчета, так и в системе ракеты*.

Полученный вывод оставляет без ответа один важный вопрос, а именно: обладает ли скорость света, распространяющегося по замкнутому пути, которая изотропна как в лабораторной системе, так и в системе отсчета ракеты, еще и *одинаковым численным значением* в обеих этих системах отсчета? Предположение о том, что эта скорость численно одна и та же во всех инерциальных системах отсчета, является центральным фактом при доказательстве инвариантности интервала (разд. 5). Но верно ли это предположение?

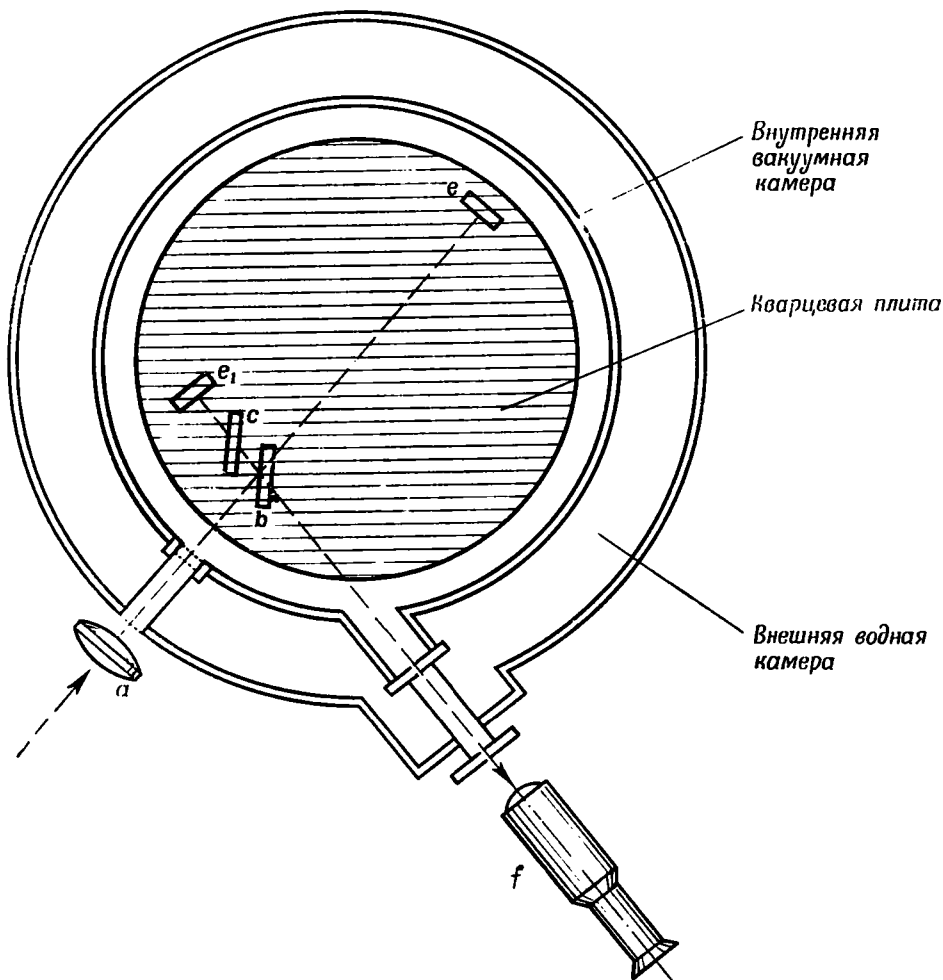
а) Эксперимент для проверки предположения о равенстве скорости света, распространяющегося по замкнутому пути, в двух движущихся относительно друг друга инерциальных системах отсчета был предпринят в 1932 г. Роем Дж. Кеннеди и Эдуардом М. Торндайком. В этом эксперименте был применен интерферометр, плечи которого были *не равны* друг другу (рис. 49). Допустим, что разность длин плеч этого интерферометра равна  $\Delta l$ . Покажите, что световой импульс, поступающий в установку, затрачивает для обхода замкнутого пути по длинному плечу на  $2\Delta l/c$  больше времени, чем для обхода замкнутого пути по короткому плечу. Используемая Кеннеди и Торндайком разность длин  $\Delta l$  равнялась приблизительно 16 см. Чему равна приблизительно разность во времени, за которое свет завершает обход двух неодинаковых замкнутых путей в этом интерферометре?

б) Кеннеди и Торндайк в действительности использовали не импульс света, а непрерывный монохроматический свет, колебания волн которого обладали периодом  $T = 1,820 \cdot 10^{-15}$  сек ( $\lambda = 5461 \text{ \AA}$ ), излучавшийся атомами ртути. Определите, сколькими периодами позже «приходит к финишу» свет по длинному плечу интерферометра, чем по короткому плечу? (Разность периодов обозначим через  $n$ .) Если это число периодов оказывалось целым, то суперпозиция лучей, приходящих по обоим плечам, приводила к *сложению* волн, и экспериментаторы видели *ярко освещенное* поле зрения телескопа. Наоборот, если это число периодов оказывалось полуцелым, то волны, приходящие по обоим плечам, *вычитались*, гасились, и экспериментаторы видели *темное* поле зрения телескопа.

в) Но Земля все время движется по своей орбите вокруг Солнца. Каждые шесть месяцев ее скорость движения относительно неподвижных звезд изменяет свой знак. Будет ли и в такой новой системе отсчета скорость распространения света по замкнутому пути иметь ту же самую численную величину  $c$ , что и в исходной системе отсчета? Ответ на вопрос (б), касающийся этой исходной системы отсчета, можно переписать в виде

$$c = \frac{2}{n} \frac{\Delta l}{T}. \quad (54)$$

Здесь  $\Delta l$  — разность длин плеч интерферометра,  $T$  — величина периода волн, испускаемых светящимися атомами, а  $n$  — число периодов, на которое различаются моменты возвращения света по длинному и короткому путям. Предположим теперь, что в ходе обращения Земли вокруг Солнца в поле зрения нашего телескопа не обнаруживается изменения яркости (например, перехода от света к темноте). Это значит, что наблюдаемая вели-



Р и с. 49. Схематическое изображение установки, использованной в эксперименте Кеннеди — Торридайка.

Детали этого интерферометра помечены теми же буквами, что и соответствующие детали интерферометра Майкельсона — Морли в упражнении 33. Экспериментаторы остановились на больших размерах плеч прибора с тем, чтобы обеспечить его оптическую и механическую стабильность. Интерферометр смонтирован на плите из кварца, который почти не изменяет своих размеров при колебаниях температуры. Кроме того, он помещен в вакуумную камеру, так что колебания атмосферного давления не отражаются на длине оптического пути в плечах интерферометра (разным значениям давления воздуха соответствует несколько различная величина скорости света!). Вакуумная камера окружена камерой, наполненной водой, температура которой поддерживалась постоянной с точностью до  $\pm 0,001^\circ\text{C}$ . Вся эта установка была помещена в небольшой темной комнате (не изображенной на рисунке), где температура поддерживалась постоянной с точностью до нескольких сотых градуса. Эта темная комната в свою очередь была окружена большей темной комнатой, где температура поддерживалась постоянной с точностью до нескольких десятых градуса. Размеры всей установки в целом можно охарактеризовать тем, что разность длин двух плеч интерферометра (то есть отрезков  $be$  и  $be_1$ ) равна 16 см.

чина  $n$  неизменна. Что можно было бы заключить из этого гипотетического результата о численном значении  $c$  скорости света? Укажите, какие стандарты длины и времени были привлечены для вывода этого результата (54). Наибольшей стабильностью в сохранении своих размеров из всех известных материалов обладает кварц. Самый надежный механизм для измерения времени, который мы можем построить на Земле, — это атомные стандарты времени.

г) Для того чтобы осуществить эксперимент, описанный в предыдущих пунктах, Кеннеди и Торндайк должны были обеспечить безупречную работу своего интерферометра в течение полугода непрерывных наблюдений яркости поля зрения телескопа. Но столь длительные непрерывные наблюдения были невозможны, так что на самом деле продолжительность их наблюдений колебалась от восьми дней до одного месяца. С интервалами в три месяца имело место по несколько таких периодов наблюдения. Данные, полученные по этим наблюдениям, дали возможность Кеннеди и Торндайку установить, что за срок непрерывных наблюдений в течение 6 месяцев число периодов  $n$  относительного отставания одного луча от другого смогло бы составить лишь менее чем  $3/1000$  одного периода. Возьмите дифференциал выражения (54) для того, чтобы определить наибольшее относительное изменение скорости света по замкнутому пути в двух разных системах отсчета, которое могло бы согласоваться с данной оценкой изменения  $\frac{dc}{c}$  (здесь первая система отсчета — «лабораторная», и вторая, система отсчета ракеты, — просто сама наша планета, взятая в два момента, разделенные шестью месяцами времени; относительная скорость движения этих двух систем равна удвоенной скорости движения Земли по ее орбите —  $2 \cdot 30$  км/сек).

*Историческая справка.* Во времена, когда в 1887 г. был проделан опыт Майкельсона — Морли, никто еще не был готов к восприятию той идеи, что законы физики (не исключая и самой величины скорости света) одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. С точки зрения стандартного в наши дни эйнштейновского подхода просто очевидно, что и опыт Майкельсона — Морли, и эксперимент Кеннеди — Торндайка должны были привести к негативному результату. Но когда Кеннеди и Торндайк предприняли в 1932 г. свои измерения, кроме теории Эйнштейна продолжали еще обсуждаться две ее альтернативы — назовем их теориями  $A$  и  $B$ . В этих обеих незйнштейновских теориях принимались старые представления о некотором абсолютном пространстве, или «эфире», в котором свет распространяется со скоростью  $c$ . И теория  $A$ , и теория  $B$  объясняли отсутствие сдвига интерференционных полос в опыте Майкельсона — Морли, утверждая, что все, что движется со скоростью  $v$  относительно «абсолютного пространства», сокращает свою пространственную длину в направлении движения до величины, равной этой старой длине, помноженной на  $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$  («гипотеза сокращения Лоренца — Фитцджеральда»). Разница между этими двумя теориями состояла в подходе к влиянию «движения сквозь абсолютное пространство» на скорость хода часов. Теория  $A$  отвергала возможность такого эффекта, а согласно теории  $B$ , величина 1 секунды на стандартных часах, движущихся через абсолютное пространство со скоростью  $v$ , должна была становиться равной  $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$  секунды. В теории  $B$  величина отношения  $\Delta l/T$  не должна была зависеть от скорости движения часов, и она предсказывала негативный результат эксперимента Кеннеди — Торндайка, что он и дал в действительности («сложное объяснение простого эффекта»). Согласно теории  $A$ , отношение  $\Delta l/T$  в выражении (54) должно было умножиться на величину  $\sqrt{1 - (v_1^2/c^2)}$  в то время года, когда «скорость Земли относительно абсолютного пространства» равна  $v_1$ , и на величину  $\sqrt{1 - (v_2^2/c^2)}$  в то время года, когда эта скорость равна  $v_2$ . Поэтому интерференционные полосы

должны были бы сдвигаться между двумя моментами года (соответствующими скоростям  $v_1 = v_{\text{орбит}} + v_{\text{Солнце}}$  и  $v_2 = v_{\text{орбит}} - v_{\text{Солнце}}$ ), если бы только по чистой случайности Солнце не было «в покое относительно абсолютного пространства» — случайности настолько маловероятной, что ее невозможно было бы рассматривать как причину наблюдаемого негативного результата эксперимента. Итак, эксперимент Кеннеди — Торндайка заставил отвергнуть теорию А (признававшую лишь сокращение длин), но оставил допустимой теорию В (сокращение длин плюс замедление времени), равно как и намного более простую теорию Эйнштейна, утверждающую равноправность всех инерциальных систем отсчета.

«Степень чувствительности» эксперимента Кеннеди — Торндайка зависит от того, о какой теории идет речь. С точки зрения теории А наблюдения могут обнаружить «скорость Солнца относительно абсолютного пространства», если она не менее  $15 \text{ км/сек}$  (именно так оценивали чувствительность своего опыта сами Кеннеди и Торндайк в своей статье). С точки зрения же теории Эйнштейна эти наблюдения показали, что скорость распространения света по замкнутому пути имеет одинаковую численную величину (с ошибкой около  $2 \text{ м/сек}$ ) в двух инерциальных системах отсчета, скорость относительного движения которых составляет  $60 \text{ км/сек}$ .

### 35\*. Эксперимент Дикке <sup>1)</sup>

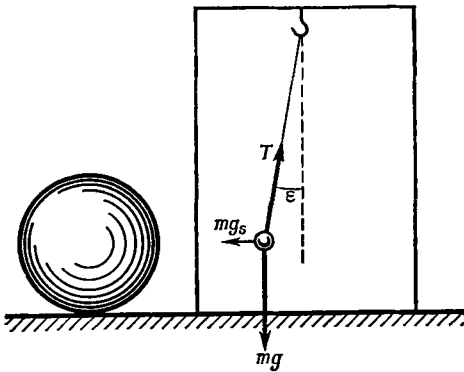
а) Высота пизанской «Падающей башни» составляет около  $55 \text{ м}$ . Галилей пишет: «Скорости падения в воздухе шаров из золота, свинца, меди, порфира и прочих тяжелых веществ различаются настолько мало, что при падении с высоты  $100 \text{ локтей}$  (около  $46 \text{ м}$ ) шар из золота наверняка не обгонит шара из меди более чем на  $4 \text{ пальца}$ . Проведя это наблюдение, я пришел к выводу, что в среде, где исключено всякое сопротивление, все тела падали бы с одинаковой скоростью» <sup>2)</sup>. Приняв « $4 \text{ пальца}$ » равными  $7 \text{ см}$ , найдите наибольшее относительное различие ускорения силы тяжести  $\Delta g/g$  для шаров из золота и меди, соответствующее результатам опытов Галилея. Результат новейшего эксперимента Дикке: это отношение не превышает  $3 \cdot 10^{-11}$ . Приняв, что это отношение дается таким новейшим результатом, вычислите, насколько разойдутся при своем падении с вершины  $46\text{-метровый}$  вышки в вакууме одновременно брошенные два таких шара, когда первый из них достигнет поверхности Земли. С какой высоты при тех же условиях нужно было бы сбросить шары из разных веществ, чтобы при падении в вакууме в однородном гравитационном поле с напряженностью  $10 \text{ м/сек}^2$  они разошлись один от другого на расстояние в  $1 \text{ мм}$ ? Сравните эту высоту с расстоянием между Землей и Луной ( $3,8 \cdot 10^8 \text{ м}$ ), и вы увидите, почему эксперимент Дикке не мог состоять в сбрасывании шаров!

б) Гирия отвеса массы  $m$  подвешена на конце длинной нити, закрепленной на потолке герметически закрытой комнаты (рис. 50). Шар очень большой массы, помещенный сбоку от этой комнаты, действует на груз с силой гравитационного происхождения  $mg_s$ , направленной по горизонтали. Здесь  $g_s = GM/R^2$ ,  $M$  — масса шара, а  $R$  — расстояние между грузом отвеса и центром шара. Эта горизонтальная сила вызывает статическое отклонение нити отвеса от вертикали на малый угол  $\epsilon$ . (Аналогичный пример из практики: на севере Индии масса Гималайских гор приводит к неболь-

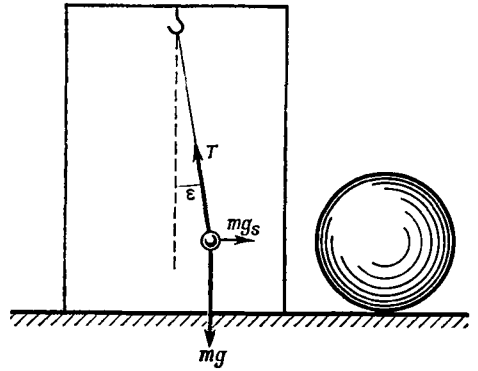
<sup>1)</sup> См. R. H. Dicke, The Eötvös Experiment, Scientific American, 205, 84 (December 1961), а также P. G. Roll, R. Krotkov, R. H. Dicke, Annals of Physics, 26, 442 (1964). Первая из этих статей представляет собой популярный обзор, написанный еще в начале проведения эксперимента. Вторая статья сообщает окончательные результаты эксперимента и тем более интересна, что в ней описаны те тонкие предосторожности, которые потребовалось предпринять для обеспечения исчерпывающего учета всех приходящих влияний, могущих подействовать на течение опыта.

<sup>2)</sup> Галилео Галилей, Диалоги о двух новых науках. Соч., т. I, ГТТИ, М.—Л., 1934.





Р и с. 50. Массивный шар, помещенный вблизи груза, вызывает статическое отклонение отвеса от вертикали.



Р и с. 51. Расположение шара по другую сторону отвеса приводит к статическому отклонению его от вертикали в противоположном направлении.

шому отклонению линии отвеса, что затрудняет прецизионные геодезические промеры). Переместим теперь массивный шар так, чтобы он оказался у противоположной стены комнаты (рис. 51), и тогда статическое отклонение нити подвеса от вертикали, сохранив ту же величину угла, изменит свое направление на противоположное. Но ведь угол  $\epsilon$  чрезвычайно мал (массив Гималаев вызывает отклонение нити подвеса всего на 5 дуговых секунд, т. е. на  $0,0014^\circ$ ). Однако, если все время перемещать массивный шар вокруг герметически закрытой комнаты, наблюдатель в комнате сможет измерить обусловленное им гравитационное поле — для этого ему нужно со все большей и большей степенью точности измерять полный угол, на который изменяется отклонение нити подвеса,  $2\epsilon \approx 2 \sin \epsilon$ . Выведите уравнение, необходимое для вычисления величины  $g_s$  с помощью этого угла.

в) Мы, жители Земли, располагаем огромным шаром, эффективно совершающим ежедневный обход вокруг нас каждый день. Этот шар — самое массивное тело Солнечной системы — само Солнце! Чему равняется гравитационное ускорение  $g_s = GM/R^2$ , обусловленное Солнцем в окрестностях Земли? (Некоторые из постоянных, которые вам понадобятся при вычислениях, можно найти в конце этой книги.)

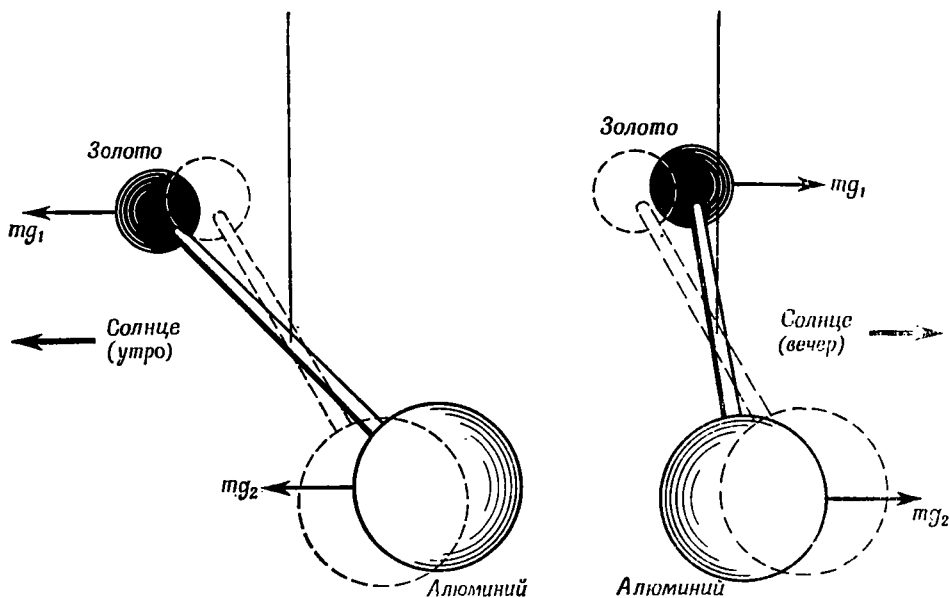
г) Необходимо учесть еще одно ускорение, которое, однако, не будет фигурировать при окончательном сравнении величины гравитационного ускорения  $g_s$  для различных веществ. Таким дополнительным ускорением будет центробежное ускорение, вызванное движением Земли вокруг Солнца. Когда ваш автомобиль поворачивает, то вас прижимает к той его стороне, которая является внешней относительно направления поворота. Эта отбрасывающая сила, именуемая *центробежной фиктивной силой* или *центробежной силой инерции*, обусловлена ускорением вашей системы отсчета (автомобиля) относительно центра дуги поворота. Величина этой центробежной силы инерции равна  $mv^2/r$ , где  $v$  — скорость движения автомобиля, а  $r$  — радиус дуги поворота. Наша Земля движется вокруг Солнца по приблизительно круговой орбите. Сила гравитационного притяжения Солнца  $mg_s$  действует на груз отвеса в направлении к Солнцу, центробежная же сила инерции  $mv^2/R$  стремится отбросить груз в сторону от Солнца. Сравните величину «центробежного ускорения»  $v^2/R$  в окрестностях Земли с вычисленной вами в пункте (в) величиной гравитационного притяжения  $g_s$ , имеющего противоположное направление. Чему равно результирующее ускорение (в направлении к Солнцу или от него), действующее на частицу, летящую вместе с Землей, если его наблюдать в (ускоренно движущейся) системе отсчета Земли?

д) Какова цель проведенного обсуждения? На груз отвеса, расположенный поблизости от поверхности Земли, действуют гравитационное ускорение  $g_s$ , направленное к Солнцу, и равное ему по абсолютной величине, но противоположное по направлению центробежное ускорение  $v^2/R$  (от Солнца). В результате в ускоренно движущейся системе отсчета Земли действующая на груз результирующая сила, в целом обусловленная существованием Солнца, оказывается равной нулю. Но именно так мы и строили с самого начала инерциальную систему (разд. 2), положив, что эта система отсчета находится в состоянии свободного падения к центру гравитационного притяжения. Покоящаяся на земной поверхности частица находится в состоянии свободного падения относительно Солнца, и поэтому результирующая сила, действующая на нее со стороны последнего, просто равна нулю. Какое же тогда может иметь отношение все это к установлению равенства гравитационного ускорения, действующего на частицы различного состава, т. е. к предмету эксперимента Дикке? *Ответ.* Наша цель — обнаружить разницу (если таковая имеется) в гравитационном ускорении  $g_s$ , действующем со стороны Солнца на различные вещества. Предполагается, что центробежное ускорение  $v^2/R$  при движении вокруг Солнца по данной круговой орбите одно и то же для всех веществ и поэтому выйдет из игры *при сравнении их ускорений.* Рассмотрим крутильные весы, подвешенные за центр масс на кварцевой нити (рис. 52, а). На концах легкого стержня длины  $l$  две равные массы из разных веществ (например, из алюминия и из золота). *Предположим* теперь, что величина гравитационного ускорения  $g_1$ , действующего на золото со стороны Солнца, несколько превышает ускорение  $g_2$ , действующее на алюминий со стороны Солнца. Тогда влияние Солнца выразится в форме слабого результирующего закручивающего момента, действующего на крутильные весы. Покажите, что в случае расположения Солнца, изображенного на рис. 52, а, этот закручивающий момент действует *против часовой стрелки*, если смотреть сверху. Покажите также, что его абсолютная величина дается выражением

$$\text{Закручивающий момент} = mg_1 \frac{l}{2} - mg_2 \frac{l}{2} = m(g_1 - g_2) \frac{l}{2} = mg_s \frac{\Delta g}{g_s} \frac{l}{2}. \quad (55)$$

Предположим, что отношение  $\Delta g/g_s$  равно максимальной величине ( $3 \cdot 10^{-11}$ ), не противоречащей результатам последних экспериментов, длина  $l$  равна 0,06 м, а масса каждого груза составляет по 0,03 кг. Чему равна тогда величина результирующего закручивающего момента? Сравните эту величину с тем закручивающим моментом, который дает бактерия (масса  $10^{-15}$  кг), если ее посадить на конец метрового стержня, уравновешенного относительно его середины в гравитационном поле Земли.

е) С Земли мы видим, как Солнце движется по небу. По прошествии 12 час расположение Солнца станет таким, как это изображено на рис. 52, б. Покажите, что в этой новой конфигурации результирующий закручивающий момент будет иметь то же численное значение, которое вы вычислили раньше, но направлен он будет теперь уже *по часовой стрелке*, если смотреть сверху, т. е. прямо противоположно случаю, рассмотренному в пункте (д)! Такое изменение закручивающего момента, происходящее каждые 12 час, делает возможным зарегистрировать, пользуясь крутильными весами, малую разность  $\Delta g = g_1 - g_2$  ускорений, которым подвергаются золотой и алюминиевый образцы. Так как крутильные весы подвергаются различным вибрациям, вызванным флуктуациями, движением транспорта, движениями земной коры и пр., необходимо учитывать лишь те отклонения, которые происходят в фазе с изменением положения Солнца.



а) Предполагаемый эффект утром.

б) Предполагаемый эффект вечером.

Р и с. 52. Схематическое изображение эксперимента Дикке.

Различие величин гравитационного ускорения золота и алюминия, вызванного Солнцем, привело бы к изменению знака результирующего закручивающего момента от утра к вечеру. Большой алюминиевый шар обладает такой же массой, как и маленький шар из золота, имеющего более высокую плотность.

ж) Действующий на стержень закручивающий момент приводит к повороту кварцевой нити на угол  $\theta$  рад по формуле

$$\text{Закручивающий момент} = k\theta,$$

где  $k$  — константа жесткости нити по отношению к закручиванию. Показать, что максимальный размах поворотов крутильных весов за время одного поворота Земли вокруг оси выражается формулой

$$\theta_{\text{полн}} = \frac{m g_s l}{k} \frac{\Delta g}{g}.$$

з) Реальный вариант крутильных весов Дикке состоит из золотого и алюминиевого грузов массой по  $0,030$  кг, укрепленных на концах спицы длиной  $6 \cdot 10^{-2}$  м. Эта спица подвешивалась в вакууме на кварцевой нити, константа жесткости которой по отношению к кручению равна  $2 \cdot 10^{-8}$  ньютон·м/радиан ( $\text{н} \cdot \text{м}/\text{рад}$ ). Статистическая обработка данных по угловым смещениям таких крутильных весов за продолжительные интервалы времени привела к заключению, что отношение  $\Delta g/g$  для пары золото — алюминий менее чем  $3 \cdot 10^{-11}$ . Какому среднему максимальному размаху поворотов за время одного обращения Земли вокруг оси соответствует эта величина? Случайные движения (флуктуации) крутильных весов, т. е. шумы, обладают намного большей амплитудой, и поэтому требуется статистическая обработка данных с помощью электронной вычислительной машины.

### 36\*. Долой теорию относительности!

Мистер Большой Скептик — человек образованный, логически мыслящий и даже окончивший школу. Но он выдвигает ряд возражений против теории относительности. Дайте же ответ на каждое возражение так, чтобы

камня на камне от него не оставить, *но при этом не критикуя его!* Если хотите, составьте просто связный единый рассказ о том, как и почему физик приходит к релятивистскому мирозерцанию, и ответьте в этом рассказе на все возражения мистера Большого Скептика.

а) «Наблюдатель  $A$  говорит, что часы отстают у наблюдателя  $B$ , тогда как  $B$  говорит, что часы отстают у  $A$ . В этом — нарушение логики. Поэтому от теории относительности следует отказаться».

б) «Наблюдатель  $A$  говорит, что метровые стержни наблюдателя  $B$  укоротились, тогда как  $B$  говорит, что укоротились метровые стержни наблюдателя  $A$ . В этом — нарушение логики. Поэтому от теории относительности следует отказаться».

в) «Теория относительности не допускает даже *однозначного определения* пространственных и временной координат. Поэтому все, что утверждается в ней о скоростях (а значит, и о движении вообще), лишено смысла».

г) «В теории относительности постулируется, что свет распространяется с универсальной скоростью, не зависящей от того, в какой системе отсчета мы исследуем его распространение. Этот постулат никак не может быть верным. Всякий здравомыслящий человек знает, что, полетев с большой скоростью в сторону, куда от него удаляется световой импульс, он тем самым снизит скорость удаления этого импульса от себя. Значит, свет *не может* обладать одной и той же скоростью для наблюдателей, движущихся друг относительно друга. Такое опровержение основного постулата подрывает в корне всю теорию относительности».

д) «Нет ни единого опытного подтверждения *результатов* теории относительности».

е) «Теория относительности не может предложить никакого способа описывать событие, не привлекая координат, и никакого способа говорить *о координатах*, не связывая себя с той или иной конкретной *системой отсчета*. Но ведь физические события существуют *независимо* от какого бы то ни было выбора систем координат или выбора систем отсчета. Таким образом, теория относительности со своими координатами и системами отсчета не может дать полноценного описания этих событий».

ж) «Теория относительности говорит лишь о том, как мы *наблюдаем* события, а не о том, что *реально происходит*. Значит, это не научная теория, так как наука имеет своим предметом *объективную реальность*».

## Д. ПРИБЛИЖЕНИЕ МАЛЫХ СКОРОСТЕЙ

### 37. Евклидова аналогия — подробный пример

Пусть угол между соответствующими осями двух повернутых друг относительно друга евклидовых (декартовых) систем,  $\theta_r$ , весьма мал. Пользуясь приведенными в табл. 8 разложениями в ряды, найдите приближенный вид формул преобразования, связывающих значения координат некоторой данной точки в этих двух системах. Пренебрегите степенями  $\theta_r$  выше первой.

*Решение.* При малых  $\theta_r$  табл. 8 дает

$$\sin \theta_r \approx \theta_r,$$

$$\cos \theta_r \approx 1.$$

Поэтому формулы преобразования в евклидовой геометрии, обратные формулам (29), приобретают вид

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta_r - y \sin \theta_r \approx x - \theta_r y, \\ y' &= x \sin \theta_r + y \cos \theta_r \approx \theta_r x + y. \end{aligned} \tag{56}$$

Эти приближенные формулы преобразования могут быть сделаны сколь угодно точными, для чего достаточно взять соответственно малый угол  $\theta_r$ .

### 38. Преобразование Галилея

Предположим, что величина  $\beta_r$  весьма мала. Тогда  $\beta_r = \text{th } \theta_r \approx \theta_r$ . Пользуясь приведенными в табл. 8 разложениями в ряды и пренебрегая степенями  $\theta_r$  выше первой, покажите, что формулы преобразования Лоренца принимают вид ( $\beta_r \ll 1$ )

$$x' = x - \beta_r t \quad (57)$$

и

$$t' = -\beta_r x + t. \quad (58)$$

Теперь, исходя из обычных нерелятивистских ньютоновских соображений, выведите формулы преобразования, связывающие между собой две системы отсчета. Это преобразование называется *преобразованием Галилея* и выражается формулами

$$x' = x - v_r t_{\text{сек}} \quad (59)$$

(собственно преобразование Галилея) и

$$t'_{\text{сек}} = t_{\text{сек}}. \quad (60)$$

Здесь  $v_r$  — скорость относительного движения двух систем отсчета, выраженная в метрах в секунду.

Может показаться, что формулы (57) и (58) и формулы (59) и (60) полностью противоречат друг другу. *Справедливо ли это первое впечатление, а если нет, то почему?* [Обсуждение. Почему в преобразовании Галилея (59) скорость  $v_r$  заменяет величину  $\beta_r$ , из формулы (57)? Какой вид принимает формула (58), если подставить в нее величины  $v_r$  и  $t_{\text{сек}}$ ? Как соотносятся друг с другом обычные скорости и скорость света?]

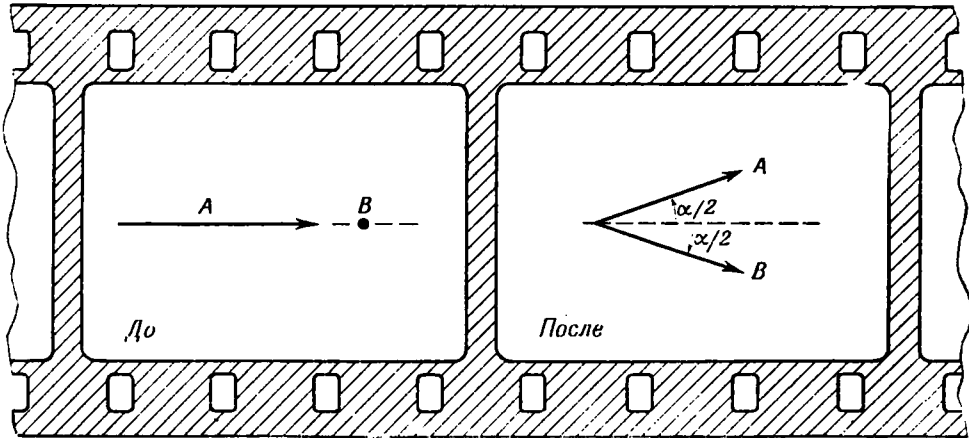
### 39\*. Примеры применимости преобразования Галилея

Перейдите к более точному приближению в записи формул преобразования Лоренца при малых относительных скоростях, сохранив члены порядка  $\theta_r^2$ , но продолжая пренебрегать членами более высоких порядков. (Это — *второе приближение* по  $\theta_r$ ). Обратите внимание на то, что, согласно табл. 8, разложение  $\text{th } \theta_r$  даже во втором порядке по  $\theta_r$  дает  $\beta_r \approx \theta_r$ .) Покажите, что и в этом улучшенном втором приближении коэффициенты при  $x$  и  $t$  согласуются с соответствующими коэффициентами в формулах (57) и (58) с точностью, превышающей 1%, если скорости  $\beta_r$  ниже чем  $1/7$ .

Если гоночный автомобиль может при постоянном ускорении с места набрать за 7 сек скорость 60 миль/час (около 27 м/сек), то за сколько дней (приблизительно) он достигнет при том же ускорении скорости  $\beta = 1/7$ ? За сколько дней можно достичь этой скорости при наивысшем ускорении, переносимом человеческим организмом в течение длительных периодов времени (около 7 g, т. е. при семикратном ускорении свободного падения)?

### 40\*. Столкновения в теории Ньютона и в теории относительности. Область, в которой обе теории совпадают друг с другом с точностью до 1%

Пусть протон  $A$  подвергается упругому столкновению с протоном  $B$ , первоначально находившимся в покое. Результат такого столкновения невозможно предсказать, так как мы не указали, насколько протоны сблизились при столкновении (а от этого зависит исход). При большинстве столкновений протон  $A$  отклонится от первоначального пути лишь на малый угол  $\alpha_A$ , а протон  $B$  при этом ощутит лишь слабый толчок в сторону под углом  $\alpha_B$  (относительно направления движения протона  $A$ ), близким к  $90^\circ$ . Но может произойти и очень тесное сближение протонов, когда почти вся энергия передается протону  $B$ , и он вылетает под весьма малым углом  $\alpha_B$



Р и с. 53. Изображение симметричного упругого рассеяния в лабораторной системе отсчета. (Обратите внимание на разную штриховку кадров в лабораторной системе отсчета и системе отсчета ракеты!).

к направлению «вперед» (первоначальному пути  $A$ ). Промежуточными случаями по отношению к этим двум крайностям являются происходящие время от времени столкновения с «симметричным рассеянием», когда обе (тождественные) частицы разлетаются с одинаковыми скоростями в направлениях, образующих равные углы,  $\alpha_A = \alpha_B = \alpha/2$ , с направлением «вперед» (рис. 53). *Вопрос: чему равен угол отклонения частиц при симметричном рассеянии? Обсуждение.* По механике Ньютона полный угол разлета одинаковых частиц равен  $90^\circ$  при всяком упругом столкновении (будь то симметричное рассеяние или нет!). То, что этот угол при столкновениях быстрых частиц оказывается менее  $90^\circ$ , есть одно из самых интересных и доказательных предсказаний теории относительности. На рис. 54б дана фотография «медленного» столкновения, при котором, в согласии с теорией Ньютона, угол разлета равен  $90^\circ$ . Напротив, на рис. 54а представлен случай «быстрого» столкновения, при котором угол разлета частиц явно меньше  $90^\circ$ . Этот факт означает, что отличие угла разлета от  $90^\circ$  дает хороший критерий отклонения законов движения от ньютоновских. Рассмотрим, например, такой вопрос: ниже какого значения должна быть скорость частицы в подобном опыте по рассеянию, для того чтобы величина угла разлета частиц отклонялась от  $90^\circ$  менее чем на  $1/100$  радиана? Решение этой задачи значительно упрощается, если подойти к случаю описанного выше симметричного рассеяния, выбрав систему отсчета таким образом, чтобы можно было максимально воспользоваться *соображениями симметрии*. Сядем для этого в ракету и полетим направо как раз с такой скоростью, которая равна компоненте «вперед» скорости каждой из частиц после рассеяния. Тогда при наблюдении с этой ракеты частицы  $A$  и  $B$  не будут испытывать движения в направлении движения ракеты после столкновения. Что же касается боковых компонент скорости частиц  $A$  и  $B$  (в направлениях вверх и вниз), то заметим, что эти скорости были равны по абсолютной величине и противоположны по направлению в лабораторной системе отсчета. Но ведь такая симметрия скоростей не может измениться, если мы наблюдаем теперь столкновение с ракеты, летящей вправо. Поэтому и при наблюдении в системе отсчета ракеты скорости частиц  $A$  и  $B$  после столкновения будут равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Это тот вывод № 1, которым мы обязаны *соображениям симметрии*. Вывод № 2 из соображений симметрии также может быть получен при анализе столкновения в системе отсчета ракеты. Он гласит, что в этой системе *до столкновения* скорости

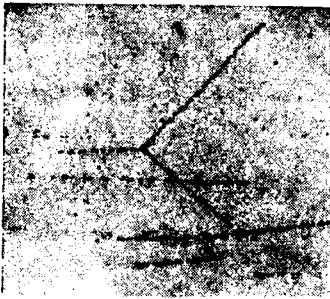
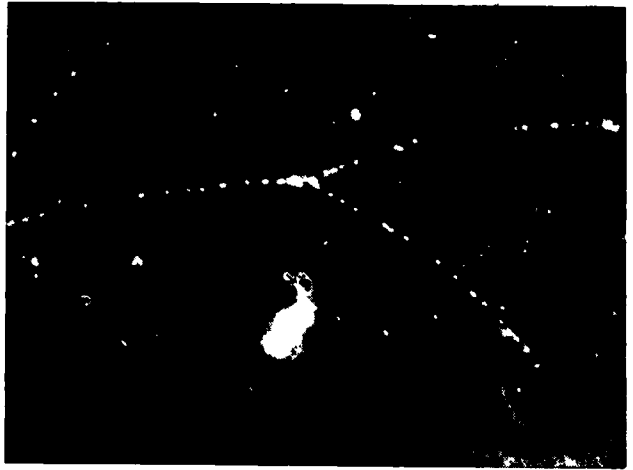
частиц  $A$  и  $B$  также были равны по абсолютной величине и противоположны по направлению. Почему? Какое противоречие ожидало бы нас, если бы эти скорости *не были равными*? — Да просто нарушилась бы сама *симметрия*, что легко усмотреть из следующего.

Схема скоростей в системе отчета ракеты *после* столкновения характеризуется *симметрией между правым и левым направлениями*. Иными словами, глядя на частицы, разлетающиеся после столкновения, невозможно сказать, из каких направлений пришли эти частицы в точку соударения. С равным успехом частица  $A$  могла прийти слева, а  $B$  — справа, или частица  $A$  — справа, а  $B$  — слева (например, наблюдатель мог обойти арену и посмотреть с другой стороны). Но ведь участвующие в столкновении частицы тождественны друг другу, и ничего не должно измениться, если их взаимно переименовать.

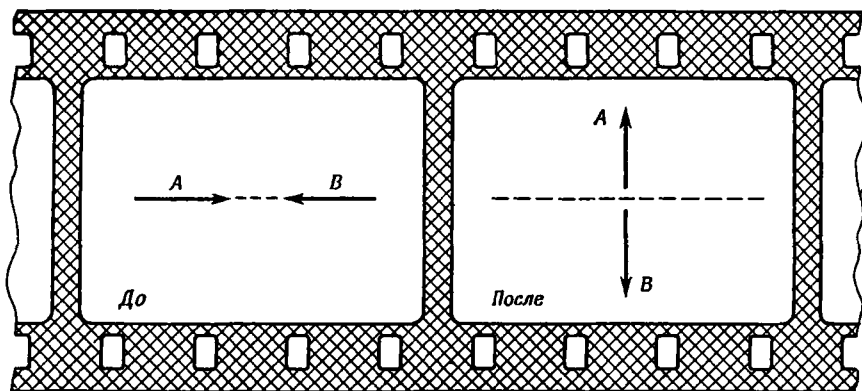
Заметим теперь, что на рис. 56 и 58 мы имеем две разные начальные ситуации, приведшие к одному и тому же исходу (см. рис. 53). Более того, эти начальные ситуации отличаются друг от друга лишь тем, что путем некоторого увеличения скорости ракеты, с которой проводятся наблюдения, ситуация на рис. 56 переходит в ситуацию на рис. 58. Но *результат столкновения*, начальная ситуация которого изображена на рис. 56, уже не будет сохранять вида результата столкновения, начавшегося, как на рис. 58, если мы так ускорим движение наблюдателя. Значит, в нашем первоначальном предположении, что рис. 56 и рис. 58 различны, *содержится противоречие*, и, чтобы его избежать, необходимо признать, что в системе

Р и с. 54а. Сделанная в камере Вильсона фотография релятивистского и почти симметричного рассеяния, когда первоначально один электрон двигался, а другой покоился.

Начальная скорость первого электрона около  $\beta = 0,97$ . Угол между треками разлетающихся электронов много меньше, чем предсказывавшиеся ньютоновской механикой  $90^\circ$ . Искривление треков электронов как заряженных частиц вызвано присутствием магнитного поля, с помощью которого определялись импульсы электронов.



Р и с. 54б. Фотография нерелятивистского симметричного упругого рассеяния, когда первоначально один протон двигался, а другой покоился. Начальная скорость первого протона около  $\beta = 0,1$ . Угол между треками разлетающихся протонов равен  $90^\circ$  в согласии с ньютоновской механикой.

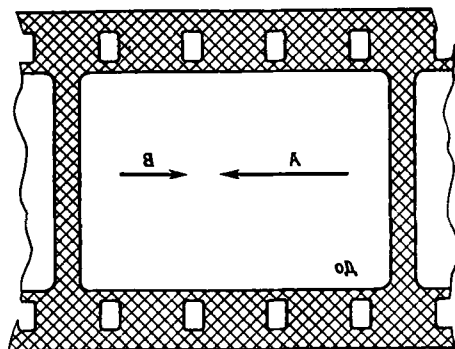
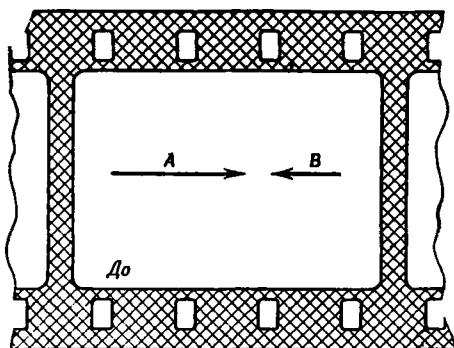


Р и с. 55. Изображение симметричного упругого рассеяния в системе отсчета ракеты (ср. с рис. 53). Была выбрана скорость ракеты, при которой горизонтальные компоненты скоростей частиц после столкновения равны нулю.

отсчета ракеты частицы  $A$  и  $B$  имели до столкновения одинаковые скорости, как это и изображено на рис. 55.

Но скорости частиц  $A$  и  $B$  были попарно равны не только до (и после) столкновения, — величина скорости каждой из них при столкновении вообще не изменилась. Если бы это было не так, то возникла бы следующая трудность. (Третье использование соображений симметрии — теперь уже не симметрии в пространстве, а симметрии во времени!) Снимем кинофильм об этом столкновении частиц, проявим его и отпечаатаем, а затем просмотрим в обратном направлении. Если прежде частицы *теряли* скорость при столкновении, то теперь они будут *приобретать* ее. Такое различие двух направлений течения времени — типичный признак так называемых *необратимых процессов*, например: 1) переноса тепла от нагретого объекта к охлажденному; 2) старения живого организма; 3) разбивания яйца или 4) неупругого столкновения. Но ведь мы ограничивались здесь рассмотрением лишь *упругих* столкновений! Значит, мы должны говорить теперь только о таких процессах, которые являются *обратимыми*, а обратимость определяется следующим образом:

*Обратимым* называется такой процесс, в ходе которого оба направления времени невозможно отличить друг от друга, если рассматривать

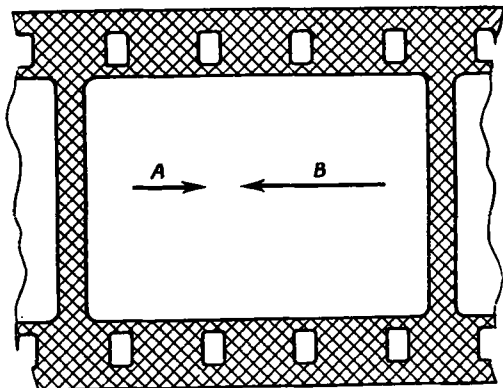


Р и с. 56. Так рассеяние изображалось бы в системе отсчета ракеты, если бы частицы  $A$  и  $B$  до рассеяния обладали неравными скоростями. (Ошибочное предположение.)

Р и с. 57. Рисунок 56 (в системе отсчета ракеты), если его рассматривать на про- свет.



Р и с. 58. Рисунок 57 (в системе отсчета ракеты), если поменять местами обозначения  $A$  и  $B$  для тождественных частиц.



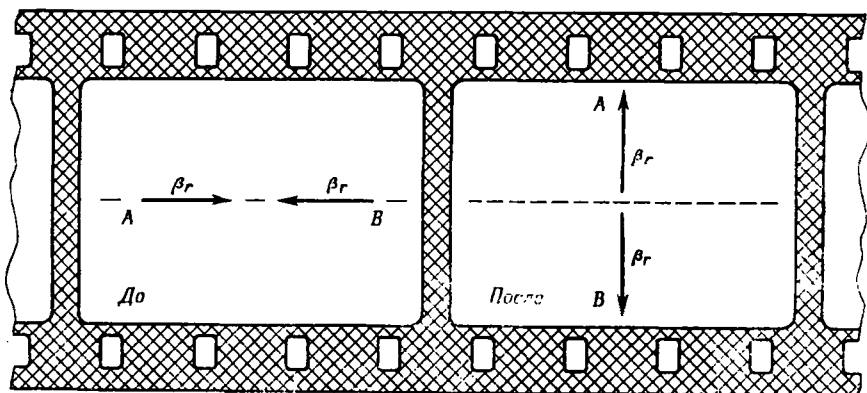
кинохронику этого процесса, пропуская фильм через проектор в любом направлении.

Так как столкновение двух протонов является *упругим*, все четыре скорости, изображенные на рис. 59, *одинаковы*.

Эти выводы весьма просты и емки. Все рассуждение, приводящее к данному заключению, тоже может быть выражено просто и емко — тремя словами: «из соображений симметрии». Опираясь подобным образом на соображения симметрии, мы упрощаем исследование громадного множества физических задач.

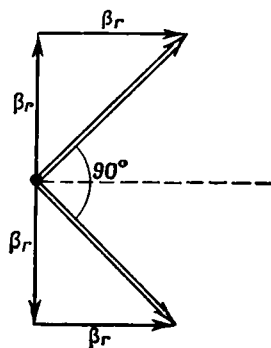
Пока что наши рассуждения, основывавшиеся на соображениях симметрии, в равной мере относились как к ньютоновской, так и к релятивистской механике. Различия проявляются, когда мы переходим от полностью завершенной диаграммы в системе отсчета ракеты к исходной диаграмме в лабораторной системе отсчета. В механике Ньютона *сложение скоростей осуществляется по векторному правилу*. Поэтому, чтобы найти скорости частиц  $A$  и  $B$  в лабораторной системе отсчета после столкновения, нам оставалось лишь добавить к горизонтальной компоненте их скоростей скорость движения ракеты  $\beta_r$  (см. рис. 60). Тогда очевидно, что угол разлета частиц в механике Ньютона всегда равен  $90^\circ$  — независимо от их скоростей. Но в теории относительности это не так!

Покажите, что налетающий протон может обладать скоростями вплоть до  $\beta = 2/7$ , и тем не менее угол между скоростями  $v_A$  и  $v_B$  при симметрич-



Р и с. 59. Завершение анализа, основанного на соображениях симметрии. В системе отсчета ракеты, где горизонтальные компоненты скоростей частиц после столкновения равны нулю, абсолютные значения всех скоростей как до, так и после столкновения *одинаковы*.

Р и с. 60. Исследование скоростей частиц в лабораторной системе отсчета после столкновения в ньютоновской (нерелятивистской) теории.



Вм рассеянии будет отличаться от  $90^\circ$  (своего значения в теории Ньютона) не более чем на  $0,01 \text{ рад}$ . Иными словами, покажите, что ньютоновская механика с хорошей точностью описывает столкновение частицы, летящей со скоростью  $(\frac{2}{7}) \cdot c$ , с покоящейся частицей (или столкновение двух частиц, летящих со скоростями  $(\frac{1}{7}) \cdot c$  каждая). При этом вам могут пригодиться выводы из упражнения 20.

#### 41\*. Примеры предельных переходов к механике Ньютона

Примем в качестве приблизительного верхнего предела применимости механики Ньютона скорость частиц  $\beta = \frac{1}{7}$  (см. упражнение 39). Заполните клетки в нижеследующей таблице по аналогии с верхней графой, которую мы уже заполнили.

Пример движения	$\beta$	Корректно ли в этом примере использование механики Ньютона?
Спутник, обращающийся вокруг Земли со скоростью $30\,000 \text{ км/час}$	$\frac{1}{36\,000}$	Да, так как $\beta < \frac{1}{7}$
Земля, обращающаяся вокруг Солнца по орбите со скоростью $30 \text{ км/сек}$		
Электрон, обращающийся вокруг протона (атом водорода) по орбите с минимальным радиусом. (Указание. Скорость электрона при его движении на основной орбите атома с атомным номером $Z$ , где $Z$ — число протонов в ядре, выведена для случая малых скоростей в упражнении 101 гл. 2 и равна		
$v = \frac{Z}{137} \cdot c;$		
для водорода $Z = 1$ .)		
Электрон на основной орбите атома золота ( $Z = 79$ )		
Электрон, движущийся с кинетической энергией $5000 \text{ эв}$ . (Указание: $1 \text{ эв} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ . Проведите оценку, исходя из пьютоновского выражения для кинетической энергии.)		
Протон или нейтрон, движущийся с кинетической энергией $10 \text{ Мэв}$ (миллионов электронвольт) в атомном ядре		

## Е. ФИЗИКА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ. НОВЫЕ ФАКТЫ

### 42. Замедление времени для $\mu$ -мезона — подробный пример

Мю-мезоны ( $\mu$ -мезоны) — элементарные частицы, образующиеся при некоторых ядерных реакциях. Если взять некоторое число этих мезонов, то через 1,5 микросекунды (*мксек*) (время измеряется в той системе отсчета, в которой  $\mu$ -мезоны покоятся) половина из них распадается на другие элементарные частицы. Половина оставшихся  $\mu$ -мезонов распадается в следующие 1,5 *мксек* и т. д.

а) Рассмотрим  $\mu$ -мезоны, образовавшиеся при бомбардировке атомных ядер атмосферных газов космическими лучами на высоте 60 км над поверхностью Земли. Пусть эти  $\mu$ -мезоны летят вертикально вниз со скоростью, близкой к скорости света. Приблизительно за сколько времени они достигнут поверхности Земли (время измеряется наблюдателем, покоящимся относительно Земли)? В случае если бы не происходило замедления хода времени, какая (приблизительно) часть общего числа мезонов, образовавшихся на высоте 60 км, достигла бы поверхности Земли, еще не претерпев распада?

б) Представим довольно сложную ситуацию, имеющую место при реальных экспериментах, в виде идеализированной схемы, в общем ей равнозначной. Пусть все мезоны образуются на одной и той же высоте (60 км); пусть все они обладают одинаковой скоростью; пусть они летят вертикально вниз; наконец, пусть  $1/8$  от их общего числа достигает уровня моря, не успев распасться. *Вопрос:* что может быть причиной такого большого расхождения между предсказанием в п. (а) и приведенными данными наблюдений? *Насколько отличается* при этом скорость данных  $\mu$ -мезонов от скорости света? <sup>1)</sup>

*Решение:* Рассматриваемые  $\mu$ -мезоны летят со скоростью, близкой к скорости света. Поэтому они проходят 60 км примерно за

$$\frac{60 \cdot 10^3 \text{ м}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ сек.}$$

«Половинное время жизни» (период полураспада)  $\mu$ -мезонов в той системе отсчета, где они покоятся, равно  $1,5 \cdot 10^{-6}$  сек. Если бы замедления хода времени не было, время полета мезонов до поверхности Земли равнялось бы  $2 \cdot 10^{-4} / 1,5 \cdot 10^{-6} = 133$  периодам полураспада. По прошествии каждого периода полураспада число  $\mu$ -мезонов уменьшается вдвое, так что после 133 периодов должна была бы остаться «в живых» лишь

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^{133} \approx 10^{-40}$$

часть их первоначального числа. На самом же деле осталось  $1/8 = (1/2)^3$ , как показал эксперимент в п. (б). Значит, в системе отсчета ракеты, в которой  $\mu$ -мезоны покоятся, прошло время, равное лишь 3 периодам полураспада:

$$\Delta t' = 3 \cdot (1,5 \cdot 10^{-6} \text{ сек}) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}) = 1,35 \cdot 10^3 \text{ м.}$$

Путь, пройденный мезоном в системе, связанной с ним самим, естественно, равен нулю:

$$\Delta x' = 0.$$

<sup>1)</sup> Существует кинофильм, посвященный этому эксперименту. См. статью «Измерение релятивистского эффекта замедления хода времени с помощью  $\mu$ -мезонов», David H. Frisch, James H. Smith, American Journal of Physics, 31, 342 (May, 1963). Оригинальный эксперимент был описан в статье B. Rossi, D. B. Hall, Physical Review, 59, 223 (1941).

Поэтому интервал собственного времени между событием «образование мезонов» и событием «достижение ими поверхности Земли» равен

$$\Delta\tau = \sqrt{(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2} = 1,35 \cdot 10^8 \text{ м.}$$

Но численное значение этого интервала одинаково как в лабораторной системе отсчета, так и в системе самих мезонов; поэтому

$$\Delta\tau = \sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2} = 1,35 \cdot 10^8 \text{ м}$$

или

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\beta}\right)^2 - (\Delta x)^2} = 1,35 \cdot 10^8 \text{ м.} \quad (61)$$

Нам известен тот путь, который прошли мезоны в лабораторной системе отсчета:  $\Delta x = 6 \cdot 10^4 \text{ м}$ . Тогда мы можем найти и скорость  $\beta$  по формуле (61). Возводя обе части этой формулы в квадрат и деля их на  $(\Delta x)^2$ , получим

$$\frac{1}{\beta^2} - 1 = [1,35 \cdot 10^8 / 6 \cdot 10^4]^2,$$

или

$$\frac{1 - \beta^2}{\beta^2} = 5,06 \cdot 10^{-4}.$$

Очевидно, что  $\beta$  мало отличается от единицы. Поэтому примем

$$1 - \beta^2 = (1 + \beta)(1 - \beta) \approx 2(1 - \beta),$$

откуда

$$\frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \approx \frac{2(1 - \beta)}{\beta^2} \approx 2(1 - \beta) \approx 5 \cdot 10^{-4}$$

или

$$1 - \beta \approx 2,5 \cdot 10^{-4}.$$

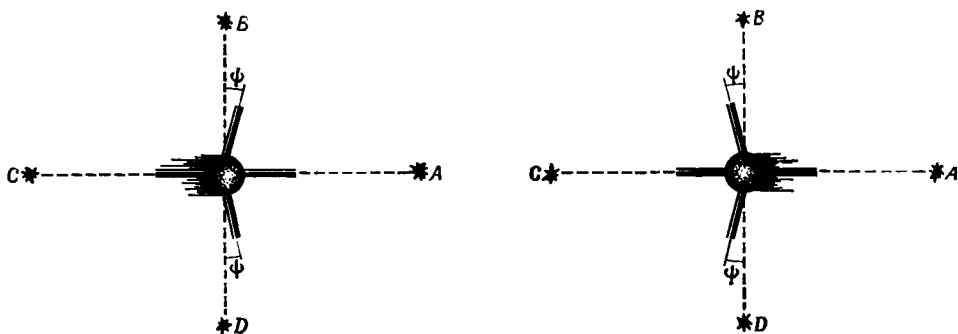
Эта малая величина, стоящая в правой стороне полученного равенства, и определяет отличие скорости  $\mu$ -мезонов от скорости света.

#### 43. Замедление времени для $\pi^+$ -мезона

Как видно из нижеследующей таблицы, в лабораторных условиях гораздо проще исследовать распад  $\pi$ -мезонов, чем  $\mu$ -мезонов:

Частица	Период полураспада (измеренный в системе покоя частицы)	«Характерная длина» (период полураспада, умноженный на скорость света)
$\mu$ -мезон (масса в 207 раз превышает массу электрона)	$1,5 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$	450 м
$\pi$ -мезон (масса в 273 раза превышает массу электрона)	$18 \cdot 10^{-9} \text{ сек}$	5,4 м

Из данного числа  $\pi^+$ -мезонов половина распадется на другие элементарные частицы за 18 наносекунд [ $1 \text{ нсек} = 10^{-9} \text{ сек}$ ] (если измерять время в той системе отсчета, где  $\pi^+$ -мезоны покоятся). Половина оставшихся распадется за следующие 18 нсек и т. д. В Пенсильванско-Принстонском протонном синхротроне  $\pi^+$ -мезоны получают, обстреливая пучком протонов алюминиевую мишень, помещенную внутри ускорителя. Мезоны вылетают тогда из мишени со скоростью, приближающейся к скорости света. Если бы замедления хода времени не было и не было также отсева мезонов из полу-



Наблюдатель, быстро движущийся в один из дней года в некотором данном направлении вместе с планетой, должен, чтобы увидеть четыре далекие звезды, направить свои телескопы так, как показано на рисунке.

Наблюдатель, быстро движущийся через полгода в противоположном направлении.

Р и с. 61. Аберрация света звезд. На обеих схемах представлена ситуация, наблюдаемая в той системе отсчета, где Солнце покоится.

чающего пучка за счет столкновений, то чему было бы равно наибольшее расстояние от мишени, на котором половина мезонов оставалась бы еще не распавшейся? Интересующие нас в данном эксперименте  $\pi$ -мезоны обладают параметром скорости, соответствующим  $\text{sh } \theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 15$ . Во сколько раз предсказываемое таким образом расстояние от мишени, на которое мезоны успевают улететь за время полураспада, *увеличивается* за счет замедления хода времени, т. е. во сколько раз эффект замедления времени позволяет увеличить расстояние между регистрирующей аппаратурой и мишенью?

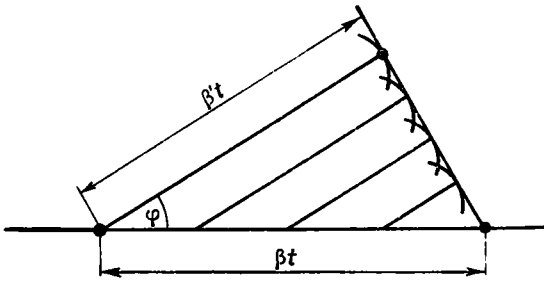
#### 44\*. Аберрация света звезд

Угловое расстояние между одной *далекой* звездой ( $B$ ) и другими *далекими* звездами ( $A, C$ ) меняется в зависимости от времени года, так как в течение 6 месяцев Земля изменяет свою скорость на  $2 \cdot 30 \text{ км/сек} = 60 \text{ км/сек}$ . Показать, что этот угол аберрации, обозначаемый через  $\psi$  (по отношению к углам, которые регистрировал бы наблюдатель на Солнце), определяется равенством  $\sin \psi = \beta$ . Здесь  $\beta$  — скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца. Хотя эффект аберрации света звезд и поддается экспериментальному обнаружению, угол аберрации  $\psi$  настолько мал, что наблюдения не смогли до настоящего времени дать здесь решающего подтверждения приведенной выше релятивистской формулы, так как теория Ньютона дает очень близкое предсказание, а именно  $\text{tg } \psi = \beta$ .

#### 45. Опыт Физо

Распространение света сквозь прозрачную материальную среду происходит медленнее, чем через вакуум. Обозначим скорость света в среде через  $\beta'$  ( $\beta' < 1$ ). Рассмотрим идеализированный случай, когда скорость  $\beta'$  не зависит от длины волны. Поместим среду в ракету, летящую со скоростью  $\beta$ , вправо относительно лабораторной системы отсчета, и направим в эту среду пучок света, распространяющийся также вправо. Исходя из закона сложения скоростей, найдем величину скорости света  $\beta$  в лабораторной системе отсчета. Требуется показать, что при малых относительных скоростях ракеты и лабораторной системы отсчета скорость света в лабораторной системе приближенно дается выражением

$$\beta \approx \beta' + \beta \cdot [1 - (\beta')^2]. \quad (62)$$

Р и с. 62. Нахождение черенковского угла  $\varphi$ .

Это выражение для скорости было проверено Физо, который воспользовался водой, текущей в противоположных направлениях в двух плечах интерферометра, подобного (но не тождественного) интерферометру Майкельсона и Морли (см. упражнение 33)<sup>1)</sup>.

#### 46. Черенковское излучение<sup>2)</sup>

Никто и никогда не наблюдал того, чтобы частицы двигались *быстрее скорости света в вакууме*. Однако в материальной среде наблюдалось движение частиц со скоростями, превышающими скорость света *в этой среде*. Когда заряженная частица движется в среде со скоростью, превышающей скорость света в этой среде, она создает *когерентное* световое излучение в форме конуса, ось которого совпадает с направлением движения частицы. (Вспомните подобные волны, образуемые моторным катером, мчащимся по спокойной воде!) Это излучение называется черенковским. Пусть  $\beta$  — скорость движения частицы в материальной среде, а  $\beta'$  — скорость света в этой среде. Приняв эти обозначения, воспользуйтесь рис. 62 и покажите, что половинный угол раствора конуса света  $\varphi$  дается выражением

$$\cos \varphi = \frac{\beta'}{\beta}. \quad (63)$$

В качестве среды возьмите оргстекло люцит, в котором  $\beta' = 2/3$ . Чему должна быть равна та минимальная скорость заряженной частицы, при которой она еще производит черенковское излучение, двигаясь в люците? Чему равен *максимальный* угол  $\varphi$ , под которым может происходить черенковское излучение в люците? Измерение этого угла — хороший способ определения скорости частицы<sup>3)</sup>.

#### 47\*. Искривление лучей света звезд Солнцем

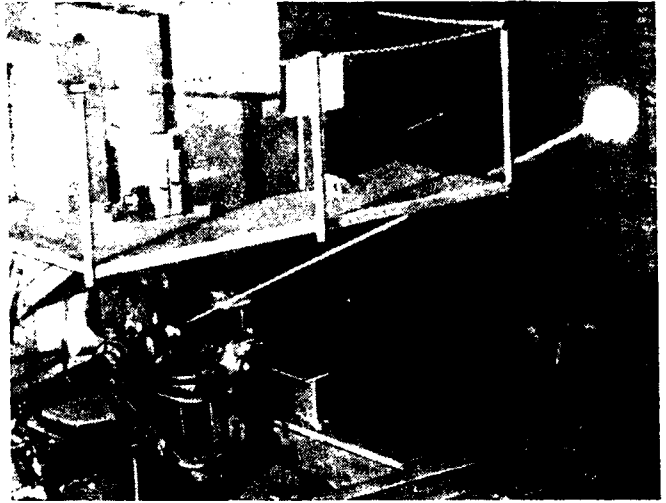
Оцените степень отклонения лучей света звезд Солнцем, исходя из простейших соображений. *Обсуждение.* Рассмотрим сначала упрощенный пример. Кабина лифта ширины  $L$  начинает свободно падать из состояния покоя вблизи поверхности Земли. В момент начала падения от одной стены кабины в горизонтальном направлении к другой стене направляется узкий

<sup>1)</sup> H. F i z e a u, Comptes Rendus, 33, 349 (1851). В этой статье (на французском языке) дано превосходное обсуждение некоторых центральных вопросов теории относительности, и притом более чем за 50 лет до первой работы Эйнштейна.

<sup>2)</sup> Это весьма важно как с принципиальной, так и прикладной точек зрения излучение было открыто П. А. Черенковым в 1934 г., когда он был аспирантом С. И. Вавилова и работал в лаборатории последнего; ввиду важной роли самого С. И. Вавилова в открытии черенковского излучения оно иногда называется *излучением Вавилова — Черенкова*. Теоретически оно было впервые истолковано и детально изучено И. Е. Таммом и И. М. Франком в 1937 г. В 1958 г. П. А. Черенков, И. Е. Тамм и И. М. Франк были удостоены Нобелевской премии по физике за открытие и исследование черенковского излучения. — *Прим. перев.*

<sup>3)</sup> Подробности об экспериментальном применении черенковского излучения см. в гл. 7 сборника Techniques of High Energy Physics, ed. David M. Ritson, Interscience Publishers, New York, 1961.

луч света. Свободно падающая кабина лифта реализует инерциальную систему отсчета. Следовательно, световой луч пересечет кабину по линии, представляющей собой прямую относительно кабины. Но относительно Земли световой луч будет падать, так как падает кабина. Значит, световой луч должен падать в гравитационном поле. Другой пример: луч света от звезды, проходя по касательной мимо земной поверхности, должен подвергнуться гравитационному отклонению (независимо и в дополнение к явлению рефракции в атмосфере). Однако срок, за который луч пробегает



Р и с. 63. Черенковское излучение, генерируемое пучком электронов, движущихся в воздухе при энергии 700 Мэв.

Пучок электронов намного уже, чем круг черенковского излучения, видимый на экране. Пучок генерируется слева внизу линейным ускорителем электронов Станфордского университета и выходит в воздух из вакуумной камеры через тонкую алюминиевую фольгу. Сам пучок становится видимым, как это показано на фотографии, благодаря возбуждению и ионизации молекул газов, вызываемым им при прохождении в воздухе. Наряду с таким возбуждением молекул электроны дают черенковское излучение, сосредоточенное в узком конусе, направленном по их движению. Конус света, излученный электронами в начале пучка (его левая часть), дает на экране светлое кольцо, образующее внешнюю часть освещенного круга. Подлетая ближе к экрану, электроны продолжают генерировать черенковское излучение все под тем же углом, так что кольцо становится все уже, и в целом мы имеем систему налагающихся концентрических колец света. Эти кольца от всех электронов в пучке сливаются в один сплошной круг света. Черенковский угол  $\varphi$  для электронов в начале пучка (наиболее удаленных от экрана) равен половине угла, под которым виден этот освещенный круг из закрытого фольгой окошечка вакуумной камеры, откуда поступают электроны. Скорость  $\beta$  электронов с энергией 700 Мэв отличается от единицы (скорости света) менее чем на  $1/1\,000\,000$ , как это видно из формул гл. 2. Поэтому мы можем с хорошей точностью положить  $\beta = 1$ . Скорость света в воздухе  $\beta'$  можно вычислить из величины наблюдаемого коэффициента преломления света в воздухе:  $n = 1/\beta' = 1,00029$ . Тогда черенковский угол определяется из формулы

$$\cos \varphi = \beta'/\beta \approx \beta' = 1/n = 1/1,00029.$$

Для малых углов  $\varphi$  можно применить разложение

$$\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2 = (1 + 2,9 \cdot 10^{-4})^{-1} = 1 - 2,9 \cdot 10^{-4}.$$

Отсюда получим теоретическое значение черенковского угла

$$\varphi_{\text{теор}} = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Расстояние от окошечка в вакуумной камере до экрана приблизительно равно 12 м, а радиус светового круга составляет около 26,5 см, так что наблюдаемый черенковский угол равен

$$\varphi_{\text{эксп}} = 26,5/1200 = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$$

в хорошем согласии с предсказанием теории.

мимо Земли, настолько краток, что это отклонение крайне незначительно и не могло быть до сих пор обнаружено в земных условиях. Но вблизи поверхности Солнца ускорение силы тяжести много больше, чем на Земле, и достигает  $275 \text{ м/сек}^2$ . К тому же свет тратит много больше времени при прохождении мимо Солнца ввиду его огромного диаметра —  $1,4 \cdot 10^9 \text{ м}$ . Исходя из этого диаметра и из величины скорости света, определите «эффективное время падения» луча. Пользуясь полученным временем падения, вычислите полную *скорость* по направлению к Солнцу, приобретенную лучом за весь период гравитационного взаимодействия. [Максимальное ускорение, действующее в течение этого «эффективного времени», дает тот же суммарный эффект (проверьте это вычислениями!), что и реально действующее ускорение, переменное по абсолютной величине и по направлению в течение всего периода прохождения луча в гравитационном поле Солнца.] Сравнивая эту поперечную скорость с продольной для светового луча, определите *угол его отклонения*. Строгий расчет в частной теории относительности приводит к *тому же результату*. Однако общая теория относительности, созданная Эйнштейном в 1915 г., предсказала не учитывавшийся прежде эффект, связанный с *изменением длин* в поле тяготения и приводящий к подобию (дополнительного) *преломления* света в этом поле, что *удваивает* величину предсказанного отклонения лучей. [Наблюдаемая величина отклонения: во время солнечного затмения 1947 г. —  $(9,8 \pm 1,3) \cdot 10^{-6} \text{ рад}$ ; 1952 г. —  $(8,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-6} \text{ рад}$ .]

## Ж. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ

### 48. Геометрическое истолкование

Постройте геометрическое истолкование преобразования Лоренца по следующей схеме:

а) Покажите, что на лабораторной диаграмме пространства-времени мировая линия начала пространственной системы координат системы отсчета ракеты изображается прямой  $t'$  на рис. 64. Это — геометрическое место всех событий, происходящих в начале пространственных координат системы отсчета ракеты, т. е. это *ось  $t'$  системы отсчета ракеты*. Покажите, что геометрическое место событий, происходящих в точке  $x' = 1 \text{ м}$  в системе отсчета ракеты, — это прямая, параллельная оси  $t'$  на рис. 64; аналогичные заключения следуют о точках  $x' = 2, 3, 4$  и т. д. метров.

б) Покажите, что наклон оси  $t'$  по отношению к оси  $t$  на рис. 64 определяется выражением

$$\frac{\text{Число метров пройденного пути}}{\text{Число метров прошедшего времени}} = \beta_r = \text{th } \theta_r.$$

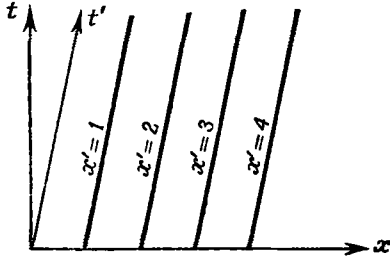
Как меняется этот наклон  $\beta_r$  в следующих двух случаях:

- 1) когда ракета движется очень медленно;
- 2) когда ракета летит со скоростью, очень близкой к скорости света?

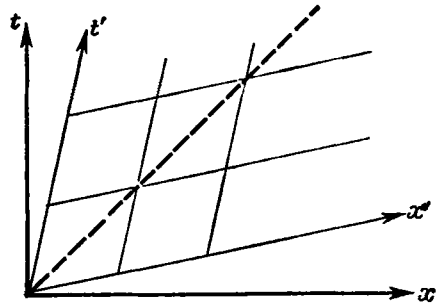
в) Сделаем теперь решающий шаг! Как провести в диаграмме пространства-времени лабораторной системы отсчета ось  $x'$  ракеты? Принцип относительности утверждает, что измеряемое значение скорости света должно быть одинаково в обеих системах отсчета. На рис. 65 пунктиром проведена мировая линия вспышки света. Покажите, что на основании принципа относительности ось  $x'$  системы отсчета ракеты должна подниматься вправо с тем же наклоном, с каким ось  $t'$  системы отсчета ракеты отклоняется вправо же. Покажите, что геометрические места событий, происходящих в моменты времени  $t' = 1, 2, 3$  и т. д. метров в системе отсчета ракеты, являются прямыми, лежащими параллельно оси  $x'$ .

г) Проградуируйте оси координат системы отсчета ракеты! Проведите гиперболу  $t'^2 - x'^2 = 1$  (рис. 66). В той точке, где эта гипербола пересекает





Р и с. 64. Положение на диаграмме пространства-времени в лабораторной системе отсчета оси времени системы отсчета ракеты.

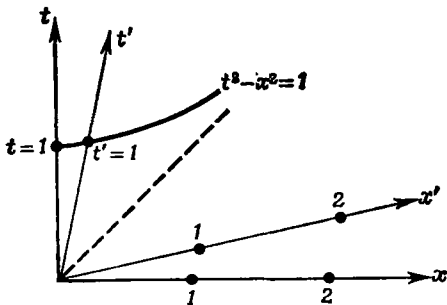


Р и с. 65. Положение на диаграмме пространства-времени в лабораторной системе отсчета пространственной оси системы отсчета ракеты.

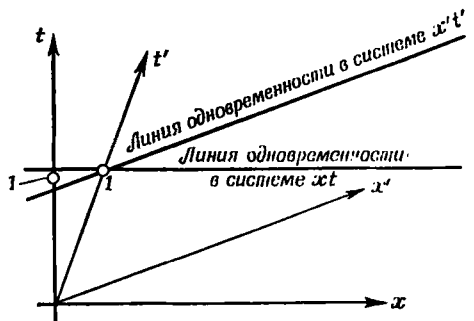
ось  $t$  лабораторной системы отсчета (где  $x = 0$ ), мы имеем момент времени  $t = 1$ . Однако интервал  $t^2 - x^2$  инвариантен, так что при этом мы получим также  $(t')^2 - (x')^2 = 1$ . Следовательно, в точке пересечения гиперболой оси  $t'$  системы отсчета ракеты (где  $x' = 0$ ) мы имеем момент времени  $t' = 1$ . Из соображений симметрии и ввиду линейности уравнений преобразования отрезок оси  $t'$  от точки  $t' = 0$  до точки  $t' = 1$  можно использовать в качестве единицы масштаба, откладываемого как вдоль оси  $t'$ , так и вдоль оси  $x'$ . Тем самым схема построения завершена. Реализуйте ее!

д) Покажите, что если два события одновременны в лабораторной системе отсчета, они будут лежать на прямой, параллельной оси  $x$  лабораторной системы на диаграмме пространства-времени (рис. 67). Покажите, что, если два события одновременны в системе отсчета ракеты, они будут лежать на прямой, параллельной оси  $x'$  системы ракеты на диаграмме пространства-времени. Поэтому два наблюдателя не обязательно считают одновременными одни и те же пары событий. Это и есть *относительная синхронизация часов*.

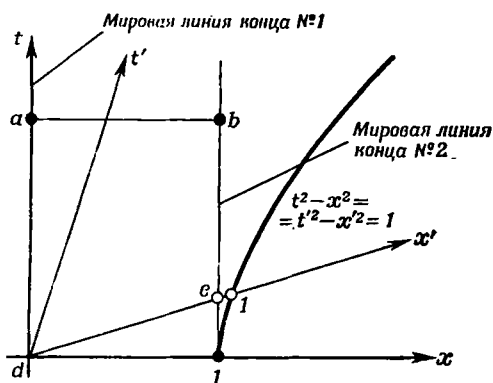
е) Используя линии одновременности на рис. 67, покажите, что для наблюдателя в системе отсчета ракеты часы, расположенные в начале лабораторной системы пространственных координат, еще не показывают 1 м времени, когда  $t' = 1$  м (т. е. лабораторные часы отстают). Вместе с тем для наблюдателя в лабораторной системе отсчета часы, расположенные в начале лабораторной системы пространственных координат, уже показывают больше 1 м времени (т. е. отстают часы на ракете). Это и есть замедление хода времени.



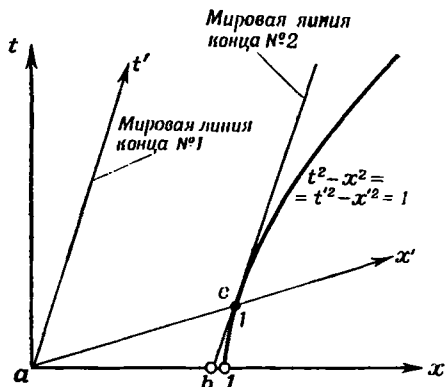
Р и с. 66. Градуирование пространственной и временной осей системы отсчета ракеты.



Р и с. 67. Эффект замедления хода времени.



Р и с. 68. Метровый стержень, покоящийся в лабораторной системе отсчета, подвергается лоренцеву сокращению при наблюдении из системы отсчета ракеты.



Р и с. 69. Метровый стержень, покоящийся в системе отсчета ракеты, подвергается лоренцеву сокращению при наблюдении из лабораторной системы отсчета.

ж) Пусть метровый стержень покоится в лабораторной системе отсчета, причем одним концом упирается в начало ее пространственных координат (рис. 68). Если измерять его длину в лабораторной системе отсчета, то мы получим результат типа  $ab$  на рис. 68. Измеряя его длину *в системе отсчета ракеты* (т. е. регистрируя положения его концов «в один и тот же момент времени»), мы получим результат типа  $de$  на том же рисунке. Покажите, что эти результаты измерений дают наблюдаемый эффект *лоренцева сокращения* в системе отсчета ракеты. Переходя к рис. 69, покажите, что метровый стержень, покоящийся в системе отсчета ракеты и упирающийся одним концом в начало ее пространственных координат, подвергается лоренцеву сокращению при наблюдении из лабораторной системы отсчета.

з) Нарисуйте диаграммы пространства-времени, иллюстрирующие относительность одновременности, замедление хода времени и лоренцево сокращение длин для тех предельных случаев, когда скорость ракеты относительно лабораторной системы отсчета очень мала или очень велика.

и) Вернемся к рис. 22 (стр. 54), где на диаграмме пространства-времени описано движение частиц и световых вспышек в двух измерениях. Покажите, что «плоскость одновременности» системы отсчета ракеты наклонена относительно «плоскости одновременности» лабораторной системы отсчета. Разберитесь, какую роль играет этот наклон для факта относительности одновременности событий, происходящих в разных точках оси  $x$  диаграммы пространства-времени лабораторной системы отсчета и для факта относительности одновременности событий, происходящих в разных точках оси  $y$  диаграммы пространства-времени лабораторной системы.

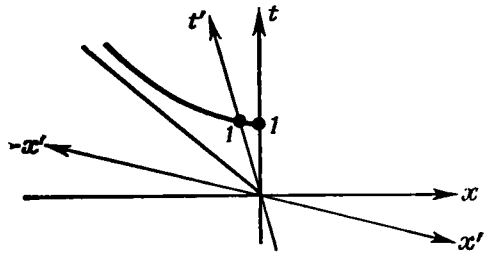
к) Рассмотрите системы отсчета ракеты, движущейся в *отрицательном* направлении оси  $x$  лабораторной системы отсчета. Проверьте выводы из диаграммы на рис. 70, в частности *обратный знак* для эффекта относительной синхронизации часов, но *один и тот же* характер эффекта замедления хода времени (по сравнению со случаем ракеты, движущейся в положительном направлении оси  $x$ ).

#### 49. Парадокс часов. II — подробный пример <sup>1)</sup>

Вернувшись из своего 14-летнего путешествия, Петр (см. упражнение 27) еще достаточно молод для того, чтобы взяться за изучение теории относи-

<sup>1)</sup> E. L o w r y, American Journal of Physics, 31, 59 (1963).

Р и с. 70. Положение пространственной и временной осей системы отсчета ракеты, движущейся в отрицательном направлении оси  $x$  лабораторной системы отсчета.



тельности. Но чем больше он ей занимается, тем сильнее запутывается. Поскольку как он, так и его брат Павел находились в относительном движении друг относительно друга, то оба должны наблюдать замедление хода часов друг друга. Будучи вложено в уста Павла, это простое утверждение позволяет без труда понять, почему часы Петра, как и процесс старения организма Петра, шли замедленно, так что Петр оказался моложе своего брата-близнеца после возвращения. Но ведь если это утверждение справедливо, — рассуждает Петр, — то почему не я, когда я провожу исследование, обнаруживаю, что часы Павла идут замедленно? Как же это он смог постареть сильнее, чем я? *Вопрос:* как разрешить затруднения Петра?

*Решение.* По мере того как Петр, обуреваемый сомнениями, все глубже изучал теорию, он обнаруживал, что такие слова, как «наблюдатель» и «наблюдаемый интервал времени», не сводятся к тем простым понятиям, к которым он сводил их первоначально. Он не думал раньше о том, как он мог бы непосредственно день за днем контролировать процесс старения Павла, оставшегося на Земле, используя для этого радиопередачи или иные способы. Петр обнаружил, что, хотя эта процедура и выполнима, ее анализ отнюдь не прост. Он обнаружил, что в теории относительности «наблюдателя» следует понимать как целую систему стержней и хронометров, движущуюся с постоянной скоростью — в данном случае с той же, с какой сам Петр удаляется от Земли ( $\beta_r = 24/25 = 0,96$ ). Эта непрерывная цепочка часов («часы Петра и система отсчета Петра») все время пролетает мимо Земли. Каждые часы, пролетая мимо Павла, регистрируют: 1) показания часов Павла и 2) свои собственные показания и положение. Когда мы говорим скороговоркой, что «Петр наблюдает Павла», это значит, что Петр собирает когда-то позднее все эти зарегистрированные данные.

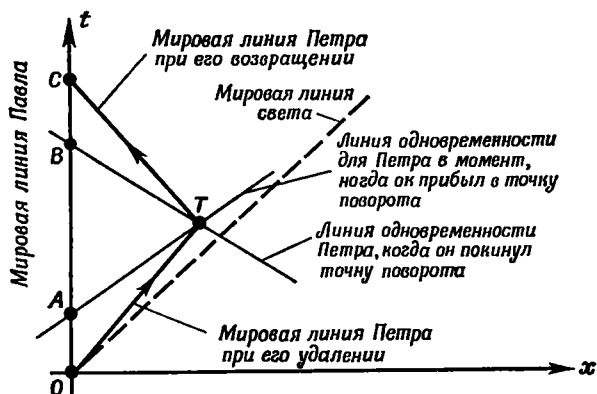
«Ну, и что же? — спрашивает сам себя Петр на этом этапе. — Я так или иначе знаю, что показания часов Павла изменяются между каждыми двумя последующими регистрациями только на  $\sqrt{1 - \beta_r^2} = 7/25$  той величины, на которую изменяются показания моих часов. Значит, именно Павел должен был оказаться моложе в конце путешествия, а не я. Но вы посмотрите только, как он поседел! Значит, я в чем-то ошибаюсь...»

Мысленно перебирая вновь этапы своего путешествия, Петр не мог не вспомнить того момента, когда он перестал удаляться от Земли и когда началось его возвращение. «Я остановился; я начал двигаться назад, но... — внезапно спросил он сам себя, — но моя инерциальная система отсчета?! Как могла полететь назад инерциальная система?» И он начал придирчиво разбираться в этом вопросе. Для него стала ясной необходимость признать, что использовавшаяся в первой части его путешествия система отсчета (и, в частности, его сетка часов, регистрировавшая информацию в течение всех семи лет удаления от Земли) должна была продолжать свое стремительное движение, подобно потоку машин на автостраде, когда всего один автомобиль разворачивается и направляется назад. При возвращении домой Петра сопровождал другой поток часов — вторая инерциальная система отсчета. Все семь лет обратного пути рядом с ним летели одни и те

же часы этого второго потока. Когда эти часы приняли эстафету, на них было поставлено время (7 лет), которое показывали улетевшие часы. И они показали 14 лет в тот момент, когда Петр вновь встретил Павла.

Возвращавшаяся цепочка часов пролетала мимо Земли все эти семь лет. Одни за другими они регистрировали свои собственные показания и показания часов Павла. Отпечатанные этими последними часами регистрационные карточки ложились все более и более высокой кучей у ног Павла. И на протяжении всех этих семи лет возвращения карточки показывали, что часы Павла регистрируют лишь  $7/25$  проходящего времени. А  $7/25$  от семи лет — это 1,96 года.

«Что за чертовщина в этих рассуждениях? — возопил тут Петр. — Теперь получается, что Павел должен был постареть на 1,96 года за время моего путешествия туда и на 1,96 года за время моего путешествия обратно, т. е. в общем на 3,92 года. И при этом я *знаю*, что я постарел на 14 лет, и я *знаю*, что он постарел еще больше на самом деле! Что же я упустил из виду?» При этом он нарисовал диаграмму пространства-времени (рис. 71), и вот тут-то разрешилось его противоречие — он заметил, что до сих пор не учитывал отрезка времени  $AB$ . Петр обнаружил, что учет этого времени соответствует поправке, необходимой при переходе между системами одновременности в удаляющейся и возвращающейся системах отсчета. Отдельный расчет, базирующийся на выводах из упражнения 11, дает для этого отрезка времени значение в 46,08 года. Такую поправку следует добавить к времени, прошедшему у Павла, которое было измерено двумя последовательными системами хронографов Петра. Тогда Петр смог окончательно вычислить



Р и с. 71. Как Петр проводит учет процесса старения Павла.

В период удаления Петра (отрезок  $OT$  на диаграмме) его часы показали, что прошло семь лет. Его сопровождала цепочка синхронизованных часов, каждые из которых дали сигнал конца седьмого года полета в соответствующем пункте «линии одновременности»  $AT$ , отметив это на своей регистрационной карточке. Те часы системы отсчета Петра, которые дали этот сигнал в мировой точке  $A$ , зафиксировали, что там часы Павла показали лишь 1,96 года («замедление хода часов, наблюдаемое из движущейся системы отсчета»). На обратном пути Петра сопровождала другая цепочка синхронизованных часов («вторая инерциальная система отсчета»). Каждые из них на линии одновременности  $BT$  показывали время 7 лет. Те часы, которые двигались вместе с Петром, отсчитали на мировой линии  $TC$  еще семь лет, так что последний год был четырнадцатым годом путешествия Петра, в конце которого он встретился с Павлом в мировой точке  $C$ . На участке  $BC$ , когда часы в связанной с Петром системе отсчета показали, что прошло 7 лет, Павел снова состарился лишь на 1,96 года (снова «замедление хода часов, наблюдаемое из движущейся системы отсчета»). Но учет, проделанный до сих пор из двух инерциальных систем Петра, еще не полон. Ни в одной из этих систем не учтен отрезок  $AB$ , также соответствующий прошедшему времени. Этот отрезок составляет 46,08 года («поправка на изменение линии одновременности» для двух систем отсчета Петра — удаляющейся и возвращающейся вместе с ним). Итак, замедление хода часов Павла, наблюдаемое двумя системами хронографов Петра, никак не мешает Петру вернуться к Павлу более молодым, чем окажется этот последний.

возраст Павла (включая 21 год — возраст последнего к началу путешествия):

$$21 + 1,96 + 46,08 + 1,96 = 71 \text{ год.}$$

Сам же он мог радоваться своей относительной молодости:

$$21 + 14 = 35 \text{ лет}$$

(без поправки на то время, которое понадобилось ему, чтобы разобраться в теории относительности!).

Приведенные рассуждения не претендуют на то, чтобы их считали простейшим способом вычисления возраста близнецов. Проще всего — это вернуться к рассуждениям Павла, изложенным в упражнении 27. В них достаточно рассматривать одну-единственную инерциальную систему отсчета, а именно ту, в начале пространственных координат которой расположен Павел. Новые рассуждения иллюстрируют лишь, как *любой* корректный путь расчета приводит к одному и тому же корректному результату.

### 3. ВИНЕГРЕТ

#### 50. Сокращение или поворот <sup>1)</sup>?

Рассмотрим куб, покоящийся в системе отсчета ракеты, каждое ребро которого в этой системе имеет длину 1 м. В лабораторной системе отсчета этот куб подвергается лоренцеву сокращению, как показано на рис. 72. Обнаружить такое лоренцево сокращение можно, например, определяя положение четырех часов, которые покоятся в лабораторной системе отсчета и синхронизованы в ней, причем четыре угла куба, *E*, *F*, *G* и *H*, совпадают с соответствующими часами, *когда все четверо часов показывают одно и то же время*. При этом процесс наблюдения не осложняется учетом времени, которое требуется свету, чтобы пройти пути от разных углов куба. Рассмотрим теперь другой способ наблюдения!

Встанем в лабораторной системе отсчета и будем *смотреть* на куб одним глазом в то время, когда куб пролетает перед нами (рис. 72). Что мы видим в каждый данный момент времени? — *Тот свет, который приходит в наш глаз в этот момент, даже если этот свет вышел из разных углов куба в разное время*. Значит, то, что человек наблюдает *визуально*, может быть совсем иным, чем то, что он наблюдает *с помощью часовой сети*. Если мы посмотрим на куб снизу, то расстояние *GO* равно расстоянию *HO*, так что свет, одновременно вышедший из точек *G* и *H*, одновременно достигнет и глаза *O*. Поэтому, глядя на куб снизу, мы увидим лоренцево сокращение дна куба.

а) Свет из точки *E*, приходящий в *O* одновременно со светом из *G*, должен быть испущен из *E* раньше, чем свет из *G*. Насколько раньше? Какой путь пройдет куб за это время? Чему равно расстояние *x* на рис. 73?

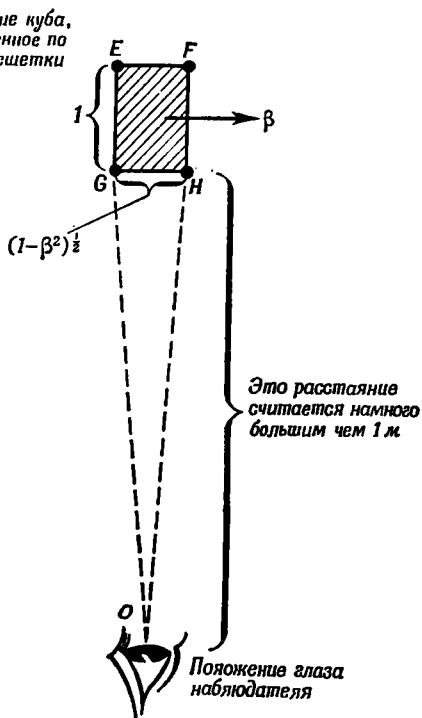
б) Предположим, что некто решил столкновать видимую проекцию куба на рис. 73 как его поворот, а не лоренцево сокращение. Найдите выражение, описывающее угол такого кажущегося поворота *φ* не подвергнутого сокращению куба на рис. 74. Исследуйте это выражение в двух предельных случаях:  $\beta \rightarrow 0$  и  $\beta \rightarrow 1$ .

в) Соответствует ли выражение «на самом деле» *реальному положению вещей* в следующих высказываниях:

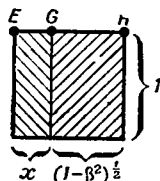
- 1) Наблюдатель в системе отсчета ракеты говорит: «Мой куб на самом деле не подвергся ни повороту, ни сокращению».
- 2) Наблюдатель, пользующийся часовой сеткой лабораторной системы

<sup>1)</sup> Более подробный анализ этой проблемы, а также ссылки на литературу можно найти в книге Edwin F. Taylor, *Introductory Mechanics*, John Wiley and Sons, New York, 1963, p. 346.

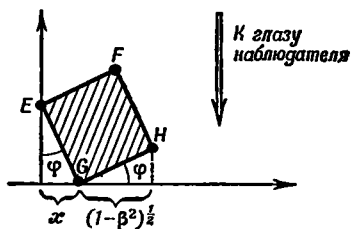
Положение куба,  
определенное по  
часам решетки



Р и с. 72. Положение глаза наблюдателя, визуально исследующего пролетающий мимо него «куб».



Р и с. 73. Что видит наблюдатель, смотря снизу вверх.



Р и с. 74. Как этот наблюдатель может истолковать свои визуальные наблюдения (проекцию рис. 73).

отсчета, говорит: «Этот куб *на самом деле* подвергся лоренцеву сокращению, а не повороту».

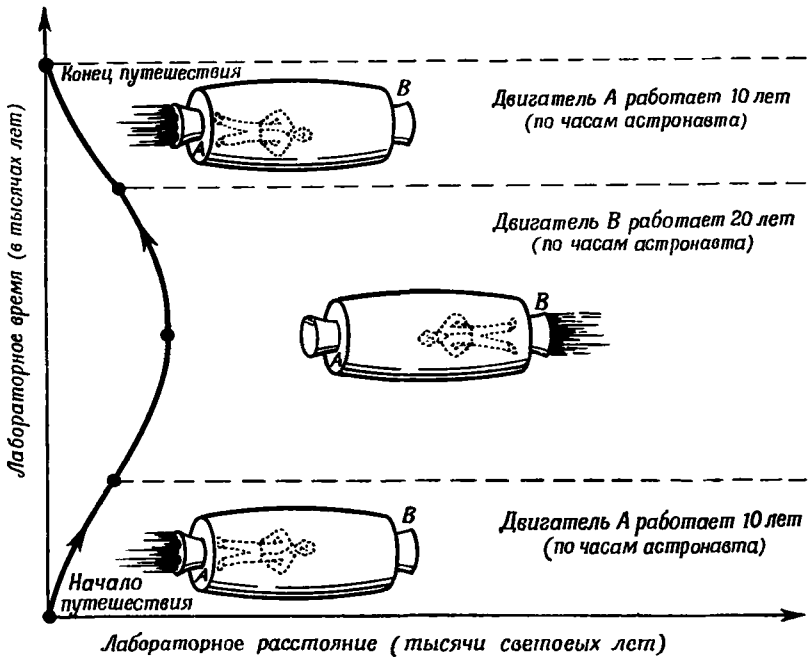
3) Зритель, визуально проводящий наблюдения в лабораторной системе отсчета, утверждает: «Куб *на самом деле* повернулся, а не претерпел лоренцево сокращение».

Как сформулировать в одной или двух фразах корректное высказывание, которое показало бы каждому из этих наблюдателей, что его партнеры должны были прийти к иным заключениям, чем он?

### 51\*\*. Парадокс часов. III

Можно ли улететь в место, удаленное на 7000 световых лет, и *вернуться назад*, постарев не более чем на 40 лет? «Да!» — к такому выводу пришел инженер в правлении некой большой авиационной фирмы в своем последнем отчете. Он рассмотрел путешественника, подвергающегося постоянному ускорению  $1 g$  (или такому же торможению, в зависимости от этапа полета; см. диаграмму пространства-времени на рис. 75). Верен ли его вывод при сделанных им предположениях? (Ради простоты, ограничьтесь анализом первого этапа путешествия, когда действует двигатель  $A$ , т. е. первыми десятью годами во времени астронавта, а затем удвойте пройденное при этом расстояние, чтобы узнать, какой путь проделан до самой дальней точки, достигнутой в путешествии.)

а) Ускорение *не равно*  $g = 9,8 \text{ м/сек}^2$  относительно лабораторной системы отсчета. Если бы оно было таким, то во сколько раз быстрее света двигался бы космический корабль к концу десятилетнего полета? ( $1 \text{ год} = = 31,6 \cdot 10^6 \text{ сек.}$ ) Если мы определяем ускорение не по отношению к лабора-



Р и с. 75. Мировая линия ракеты, движущейся по замкнутому пути с постоянным ускорением или торможением.

торной системе отсчета, то по отношению к чему же мы его определяем? Обсуждение. Взглянем на медицинские весы, на которых стоит астронавт. Двигатели корабля пусть будут давать такую тягу, чтобы весы все время показывали правильный вес. При этих условиях астронавт все время подвергался ускорению  $g = 9,8 \text{ м/сек}^2$  по отношению к такому космическому кораблю, который: 1) был бы мгновенно сопутствующим первому, так чтобы их скорости в этот момент совпадали, однако 2) не подвергался бы ускорению и поэтому 3) мог бы быть принят за инерциальную (мгновенную) систему отсчета, ускорение относительно которой равняется  $g$ . (Начиная с этого места, мы переходим от  $g$ , выраженного в  $\text{м/сек}^2$ , к  $g^* = gc^2$ , выраженному в метрах пути за квадрат метров времени.)

б) Какую скорость разовьет космический корабль за данный промежуток времени? Но мы сразу же подвергнем этот вопрос критике и перефразируем его. Дело в том, что скорость  $\beta$  — недостаточно простая для исследования величина. Простым является параметр скорости  $\theta$ , и его простота состоит в аддитивности. Смысл же аддитивности в том, что, если параметр скорости космического корабля на рис. 76 относительно воображаемой мгновенно сопутствующей инерциальной системы отсчета меняется от 0 до  $d\theta$  за время  $d\tau$  по часам астронавта, то параметр скорости этого корабля по отношению к лабораторной системе отсчета за тот же промежуток времени по часам астронавта изменится от своего первоначального значения  $\theta$  до значения  $\theta + d\theta$ . Свяжем теперь величину  $d\theta$  с ускорением  $g^*$  в мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчета. В этой системе

$$g^* d\tau = d\beta = \text{th } d\theta \approx d\theta,$$

так что

$$d\theta = g^* d\tau. \quad (64)$$

По прошествии каждого интервала времени  $d\tau$  по часам астронавта происходит соответствующее увеличение параметра скорости космического

корабля на  $d\theta = g^* dt$ . Полная величина параметра скорости космического корабля в лабораторной системе отсчета просто-напросто равна сумме всех этих последовательных увеличений параметра скорости. Пусть вначале космический корабль покоился. Тогда его параметр скорости линейно возрастает пропорционально величине истекшего времени *по часам астронавта* согласно уравнению

$$\theta = g^* \tau. \quad (65)$$

Так определяется параметр скорости  $\theta$  космического корабля в лабораторной системе отсчета в любой момент времени  $\tau$  в системе отсчета астронавта.

в) *Какое расстояние в лабораторной системе отсчета  $x$  покрывает космический корабль за данный промежуток времени  $\tau$  в системе отсчета астронавта?* В каждый момент скорость космического корабля в лабораторной системе отсчета связана с его параметром скорости уравнением  $\frac{dx}{dt} = th \theta$ , так что расстояние  $dx$ , пройденное за лабораторное время  $dt$ , равно

$$dx = th \theta dt.$$

Вспомним, что соответствующие промежутки времени по часам астронавта  $d\tau$  представляются как более длинные промежутки  $dt$  в лабораторной системе отсчета (замедление хода времени), и между ними существует связь

$$dt = ch \theta d\tau.$$

Отсюда расстояние в лабораторной системе отсчета  $dx$ , пройденное за время  $d\tau$  по часам астронавта, равно

$$dx = th \theta ch \theta d\tau = sh \theta d\tau.$$

Подставляя сюда выражение  $\theta = g^* \tau$  из пункта (б), найдем

$$dx = sh(g^* \tau) d\tau.$$

Просуммируем (проинтегрируем) все эти малые перемещения  $dx$ , начиная с момента «нуль» во времени астронавта и до конечного момента по этому времени; мы получим

$$x = \frac{1}{g^*} [ch(g^* \tau) - 1]. \quad (66)$$

Так выражается расстояние  $x$  в лабораторной системе отсчета, покрытое космическим кораблем за любое данное время  $\tau$  в системе отсчета астронавта.

г) Переведем  $g^*$  (в  $м/м^2$ ) в  $g = g^* c^2$  (в  $м/сек^2$ ) и  $\tau$  (в  $м$ ) в  $\tau_{сек} = \tau/c$  (в  $сек$ ) в формуле (66). Выясним, был ли прав инженер, заключив в своем

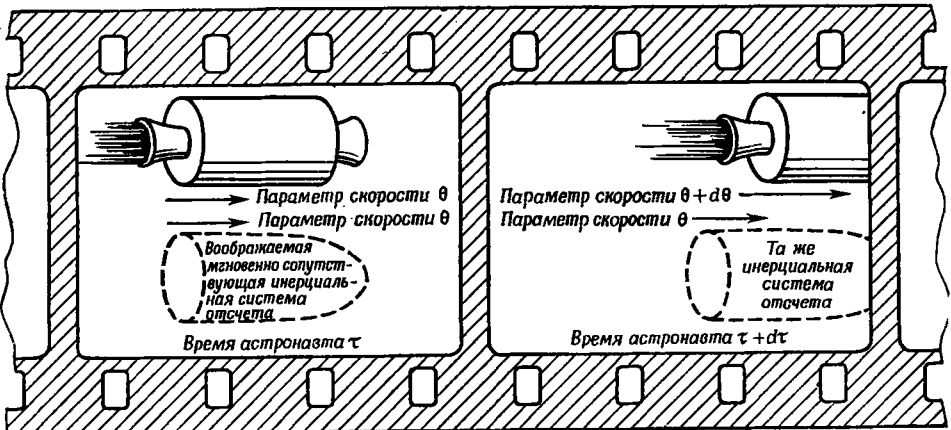
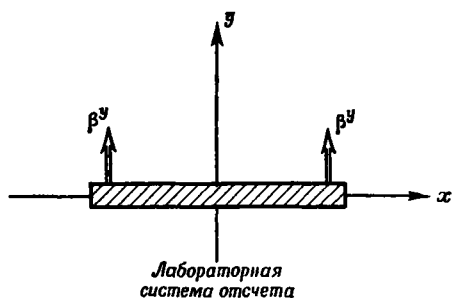
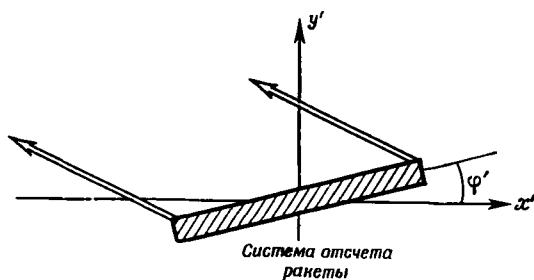


Рис. 76. Регистрация ускоренного движения ракеты в лабораторной системе отсчета.





Р и с. 77а. Метровый стержень движется перпендикулярно самому себе (наблюдение в лабораторной системе отсчета).



Р и с. 77б. Движение метрового стержня, наблюдаемое в системе отсчета ракеты.

отчете о возможности полета, упомянутого в начале этого упражнения (1 год =  $31,6 \cdot 10^8$  сек).

### 52\*. Наклонный стержень

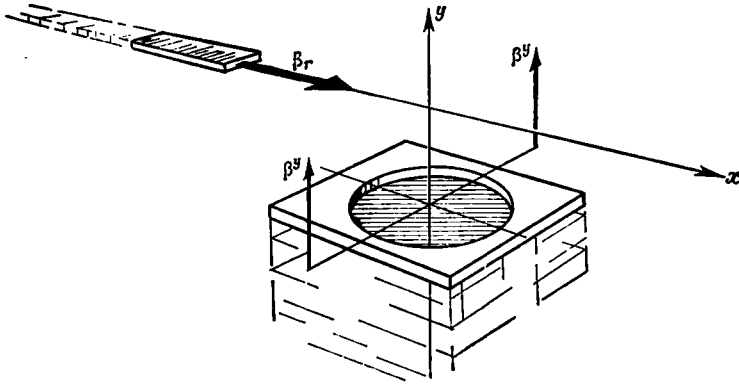
Метровый стержень, параллельный оси  $x$ , движется в положительном направлении оси  $y$  в лабораторной системе отсчета со скоростью  $\beta^y$ . В системе отсчета ракеты этот стержень несколько наклонен вверх в положительном направлении оси  $x'$ . Объясните, почему это так, причем сначала не пользуясь уравнениями. Пусть центр метрового стержня проходит через точку  $x = y = x' = y' = 0$  в момент  $t = t' = 0$ , как это изображено на рис. 77а и 77б. Вычислите затем величину угла  $\theta'$ , образованного метровым стержнем и осью  $x'$  в системе отсчета ракеты. *Обсуждение.* Где и когда пересекает правый конец метрового стержня ось  $x$  с точки зрения лабораторной системы отсчета? Где и когда пересекает правый конец метрового стержня эту ось с точки зрения системы отсчета ракеты? Экспериментально наблюдаемая томасовская прецессия электрона в атоме (см. упражнение 103) может быть объяснена тем же самым путем, что и явление наклона метрового стержня.

### 53\*. Парадокс метрового стержня<sup>1)</sup>

*Замечание.* До того как приступить к упражнению 53, следует разобратся в упражнении 52.

Метровый стержень, параллельный оси  $x$  лабораторной системы отсчета, движется в ней по направлению к началу координат со скоростью  $\beta_x$ . Очень тонкая пластинка, параллельная плоскости  $xz$  в лабораторной системе отсчета, движется в ней вверх в направлении оси  $y$  со скоростью  $\beta^y$ . В пластинке имеется круглое отверстие диаметром 1 м, в центре которого проходит ось  $y$ . Центр метрового стержня оказывается в начале пространственных координат лабораторной системы отсчета в тот момент, когда движущаяся вверх пластинка достигает плоскости  $y = 0$ . Так как метровый стержень претерпел лоренцево сокращение в лабораторной системе отсчета, то он без труда проходит сквозь отверстие в пластинке. Поэтому в ходе движения метрового стержня и пластинки между ними не произойдет соударения. Однако кто-нибудь может выдвинуть возражение против этого вывода и аргументировать его следующим образом: в системе отсчета ракеты, где метровый стержень покоится, он не подвергнут сокращению, но зато в этой системе лоренцево сокращение испытывает отверстие в пластине. Поэтому невозможно, чтобы сохраняющий свою полную длину метровый стержень прошел через сжавшееся отверстие в пластинке. Таким образом, соударение между метровым стержнем и пластинкой неизбежно. Разрешите этот пара-

<sup>1)</sup> См. R. S h a w, American Journal of Physics, 30, 72 (1962).



Р и с. 78. Смогут ли метровый стержень пройти без соударения сквозь отверстие диаметром 1 м?

докс, используя ответ, полученный в предыдущем упражнении. Ответьте без всяких оговорок на вопрос: произойдет соударение метрового стержня с пластинкой или нет?

#### 54\*\*. Тонкий человек на решетке <sup>1)</sup>

Некто имеет обыкновение ходить крайне быстро — настолько быстро, что релятивистское сокращение длин делает его очень тонким. Когда он идет по улице, ему нужно пройти по канализационной решетке. Человек, стоящий рядом с решеткой, не сомневается, что быстро идущий топкий человек провалится в отверстие решетки. Однако с точки зрения быстрого ходока он сам обладает обычными размерами, а релятивистское сокращение претерпевает *решетка*. Для него отверстия в решетке много уже, чем для спокойно стоящего человека, и, конечно, он не думает о возможности провалиться. Кто же здесь прав? Ответ связан с относительностью свойства жесткости.

Идеализируем эту задачу: пусть метровый стержень скользит вдоль самого себя по гладкому столу. Пусть на пути этого стержня имеется отверстие шириной 1 м. Если лоренцево сокращение уменьшает длины в 10 раз, то в системе отсчета стола (лаборатория) стержень имеет в длину 10 см и явно провалится в метровое отверстие. Предположим, что в лабораторной системе отсчета метровый стержень движется настолько быстро, что в ходе падения в отверстие сохраняет горизонтальную ориентацию (наклона в лабораторной системе нет). Запишите в лабораторной системе отсчета уравнение движения нижнего края метрового стержня, приняв, что  $t = t' = 0$  в тот момент, когда *задний конец* метрового стержня пересекает край отверстия, вступая в него. При малых значениях вертикальной составляющей скорости стержень будет падать с обычным ускорением  $g$ . В системе отсчета метрового стержня (ракеты) этот стержень имеет длину 1 м, тогда как отверстие подверглось лоренцеву сокращению в 10 раз. Теперь ширина отверстия 10 см, и стержень никак не может упасть в него. Произведите преобразование, переведя уравнения движения из лабораторной системы в систему отсчета ракеты, и покажите, что стержень «перегнется» в этой последней системе через край отверстия, иначе говоря, он не будет жестким (твердым). Упадет ли в конце концов стержень в отверстие в обеих системах отсчета? Будет ли стержень *на самом деле* твердым или деформируемым в ходе этого опыта? Можно ли найти какие-либо физические характеристики этого стержня (например, степень его гибкости или сжимаемости), исходя из того описания его движения, которое дает нам теория относительности?

<sup>1)</sup> W. R i n d l e r, American Journal of Physics, 29, 365 (1961).

#### 54а. Измерение скорости стандартного объекта одиночным наблюдателем — подробный пример <sup>1)</sup>

Построение системы отсчета при помощи решетки с часами — почти всегда умозрительная операция. Более того, мы вынуждены описывать множество объектов и происходящие с ними процессы, не приходя с этими объектами в прямой контакт. Так, например, астрономические наблюдения дают информацию о чрезвычайно далеких звездах и галактиках, которые не только нам никогда не удастся посетить (см. упражнение 104), но даже луч радиолокатора, посланный из Солнечной системы, не смог бы вернуться к нам за исторически разумные сроки, отразившись от этих удаленных объектов (мы уже не говорим об интенсивности отраженного луча). Все человечество в астрономических масштабах — это одна мировая линия (двойная планетная система Земля — Луна не более чем типографская точка, если изобразить на листе бумаги Солнечную систему). Поэтому рассмотрим такого одиночного наблюдателя, получающего всю возможную информацию из внешнего мира через проходящий к нему, независимо от его воли, свет — через *световой конус прошлого*. Понятие одновременности для такого наблюдателя представляет лишь академический интерес, гораздо важнее для него понятие «одновременно наблюдаемого». Один из кинематических эффектов, проявляющихся при наблюдениях с помощью светового конуса прошлого, рассмотрен в упражнении 50. Здесь мы рассмотрим вопрос о том, чему равна «одновременно наблюдаемая» скорость объекта, летящего вдоль луча зрения наблюдателя.

Пусть стандартный предмет (например, пятикопеечная монета) равномерно и прямолинейно движется вдоль луча зрения наблюдателя. Сначала предмет летит на наблюдателя; в момент встречи наблюдатель может быстро пригнуться <sup>2)</sup>, чтобы пропустить предмет; затем предмет удаляется от наблюдателя. Так как размеры предмета стандартные, наблюдатель может по углу зрения, под которым виден предмет, определить расстояние до него. По изменению этого «одновременно наблюдаемого» расстояния со временем можно определить «одновременно наблюдаемую» скорость движения объекта.

а) Требуется показать, что эта скорость равна

$$\bar{\beta}_{до} = \frac{\beta}{1 - \beta}$$

до встречи объекта с наблюдателем и

$$\bar{\beta}_{после} = \frac{\beta}{1 + \beta}$$

после встречи. Здесь  $\beta$  — обычная скорость объекта, выраженная в единицах скорости света (так как движение происходит по лучу зрения, достаточно ограничиться ее абсолютной величиной), а  $\bar{\beta}$  — «одновременно наблюдаемая» скорость. Попутно следует обосновать возможность находить расстояние до объекта по угловым размерам.

б) Требуется наглядно показать, рассматривая движение предмета с околосветовой скоростью (в обычном смысле), почему возникает асимметрия в «одновременно наблюдаемой» скорости между случаями *до* и *после* встречи. Нельзя ли в качестве объекта взять сам свет?

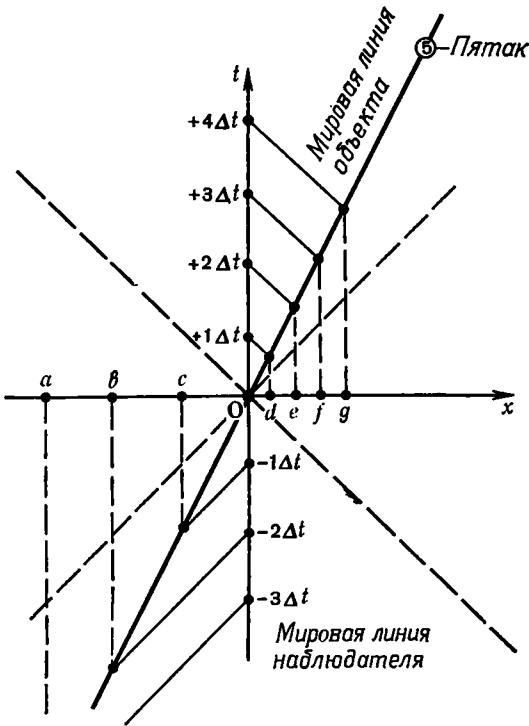
*Решение.*

а) Так как «одновременно наблюдаемую» скорость предмета требуется выразить через обычную скорость  $\beta$ , предполагается, что мы знаем больше, чем наш наблюдатель, и стоим, так сказать, над ним. Поэтому мы можем

<sup>1)</sup> Упражнение добавлено переводчиком. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Для человечества «пригнуться» было бы затруднительно.

Р и с. 78а.



изобразить рассматриваемую ситуацию на диаграмме пространства-времени (рис. 78а), где наблюдатель покоится, — его мировая линия совпадает с осью времени. Наблюдения проводятся регулярно, через  $\Delta t$  метров светового времени (таким образом, речь идет не о периодически вспыхивающем объекте, как в упражнении 6, а о постоянно светящемся). Объект движется по лучу зрения (ось  $x$ ), и наблюдатель видит лишь его поперечное сечение, а так как лоренцево сокращение происходит в направлении движения объекта, видимое сечение не зависит от скорости движения. Поэтому, зная абсолютный поперечник объекта, наблюдатель по его угловым размерам без труда определит расстояние: оно равно отношению линейных размеров объекта к его угловым размерам, выраженным в радианах. Чему же соответствует это расстояние на диаграмме пространства-времени? По методу определения оно должно совпадать с расстоянием от наблюдателя до другого такого же стандартного объекта, который покоился бы относительно наблюдателя и находился в том месте, где пролетал движущийся объект в момент, когда он излучил принятый при измерении углов свет. Поперечные сечения обоих объектов, очевидно, совпадают. Иначе говоря, мировые линии вспомогательного покоящегося объекта и основного движущегося объекта должны пересекаться в мировой точке испускания светового луча, по которому производилось измерение расстояния. Итак, искомое расстояние должно быть равно расстоянию до определенного таким образом вспомогательного объекта (ведь он все время покоится!). Это расстояние по построению равно координате  $x$  мировой точки испускания «измерительного» луча. Проведем вычисления отдельно для наблюдений до встречи с движущимся объектом и после этой встречи.

1) *До встречи.* Рассматривается левая ветвь светового конуса прошлого. Ее уравнение на плоскости  $t, x$  имеет вид

$$t = x + n\Delta t.$$

Здесь  $n = -1, -2, -3, \dots$ , и уравнение описывает световой луч, проходящий через точку  $n\Delta t$  на оси  $t$ . В свою очередь мировая линия движущегося объекта описывается уравнением

$$t = \frac{x}{\beta}.$$

Исключая из этих двух уравнений  $t$ , найдем

$$\frac{x}{\beta} = x + n\Delta t.$$

Поскольку теперь  $x$  полностью определяется выбором числа  $n$  (обычная скорость  $\beta$  и периодичность наблюдений  $\Delta t$  считаются уже заданными), естественно принять  $x = x_n$ . Тогда

$$x_n \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) = n\Delta t$$

или

$$x_n = \frac{\beta}{1-\beta} \Delta t n.$$

Отсюда

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{\beta}{1-\beta} \Delta t,$$

и искомая «одновременно наблюдаемая» скорость до встречи равна

$$\bar{\beta}_{\text{до}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{1-\beta},$$

что и требовалось получить.

2) *После встречи.* В этом случае берется правая ветвь светового конуса прошлого, уравнение которой записывается в виде

$$t = -x + n\Delta t.$$

Подставляя сюда  $t$  из уравнения мировой линии стандартного объекта, получим

$$\frac{x_n}{\beta} = -x + n\Delta t,$$

откуда

$$x_n = \frac{\beta}{1+\beta} \Delta t n$$

и

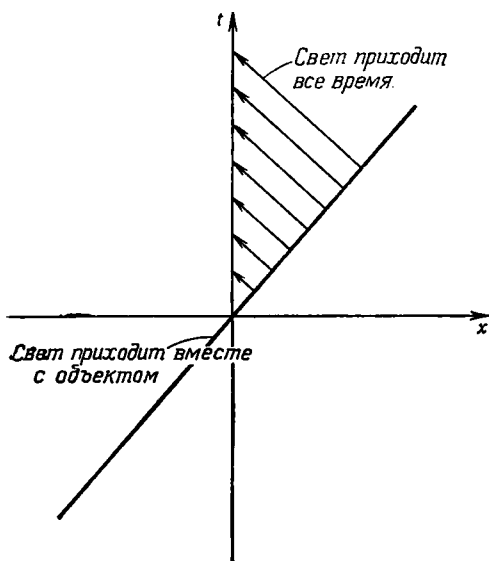
$$\bar{\beta}_{\text{после}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{1+\beta},$$

т. е. искомая «одновременно наблюдаемая» скорость после встречи. Так как  $\beta < 1$ , то очевидно, что  $\bar{\beta}_{\text{после}} < \beta < \bar{\beta}_{\text{до}}$ .

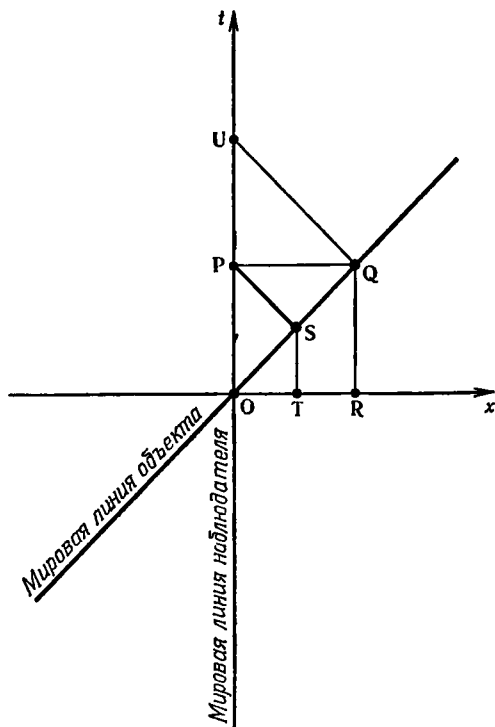
б) Исследуем поведение «одновременно наблюдаемых» скоростей при  $\beta \rightarrow 1$ :

$$\bar{\beta}_{\text{до}} \rightarrow \infty, \quad \bar{\beta}_{\text{после}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

На рис. 78б показано наблюдение объекта, движущегося практически со скоростью света. Мы видим, что свет приходит к наблюдателю вместе с объектом, т. е., с точки зрения одиночного наблюдателя, объект «мгновенно» пришел из точки своего «рождения». При удалении объекта свет от него продолжает все время поступать к наблюдателю, так как скорость распространения света не зависит от скорости движения его источника. При этом, конечно, мы не учитываем тонкостей, связанных с интенсивностью света, о которых говорилось в упражнении 22. Детализируя рис. 78б (см. рис. 78в), нетрудно получить непосредственно предельное значение «одновременно наблюдаемой» скорости после встречи. Вспомним, что эта скорость опре-



Р и с. 78б.



Р и с. 78в.

деляется как отношение изменения  $x$ -координаты точки излучения света объектом к соответствующему изменению  $t$ -координаты точки приема этого света (момент измерения):

$$\bar{v}_{\text{после}} = \frac{OT}{\Delta t}$$

(см. обозначения на рис. 78в). Теперь  $\Delta t = OP = PU$ . Так как в пределе скорость объекта принимается равной скорости света ( $\beta = 1$ ), то

$$OR = \beta \Delta t = \Delta t;$$

отсюда и из подобия треугольников  $OTS$ ,  $ORQ$ ,  $OSP$  и  $OQU$  следует

$$\bar{v}_{\text{после}} = \frac{OT}{\Delta t} = \frac{OT}{OR} = \frac{OS}{OQ} = \frac{OP}{OU} = \frac{1}{2},$$

что уже было получено выше. Такой пример движения объекта с около-световой скоростью, как и всякий гротеск, делает очевидными специфические заключения: в данном случае это вывод о неодинаковом впечатлении наблюдателя о скорости приближающегося и удаляющегося объекта.

Казалось бы, в данном пределе наилучшим «объектом» был бы сам свет; это, однако, не так. Прежде всего, свет не может сам «светиться», т. е. улетающий от нас фотон в принципе не может (если он не рассеивается на некой среде) испускать фотоны в сторону или назад (см. упражнение 68), так что «одновременно наблюдаемой» скорости уходящего от нас света попросту не существует. Что же касается такой скорости *приходящего* к нам света, то она неинтересна, так как равна бесконечности для одиночного наблюдателя не по каким-либо физическим причинам, а по самому своему *определению*! Кроме того, свет нельзя назвать «стандартным объектом», так как для него нет такого понятия, как *видимый поперечник*, и поэтому бессмысленно определять «расстояние» до него с помощью угловых измерений.

## 2.

# ИМПУЛЬС И ЭНЕРГИЯ

## 10. ВВЕДЕНИЕ. ИМПУЛЬС И ЭНЕРГИЯ, ВЫРАЖЕННЫЕ В ЕДИНИЦАХ МАССЫ

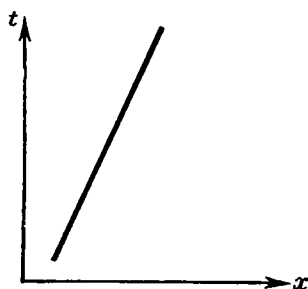
Физика изучает материю, ее движение и те силы, которые вызывают это движение. Как связаны между собой сила и движение? В этом кратком вступлении нет нужды заниматься систематизацией сил — электрических, магнитных и прочих. Напротив, стоящая перед нами задача является еще более насущной. Как можно вообще узнать, действует ли какая бы то ни было сила на частицу? А если сила на нее действует, то чем в поведении мировой линии этой частицы характеризуется наличие силы? И наконец, как можно измерить величину такой силы по изменениям энергии и импульса частицы?

---

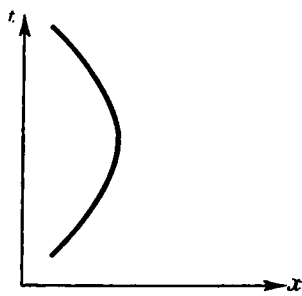
*Изменение импульса одного объекта как признак его взаимодействия с другим объектом*

Чтобы разобраться в сущности понятия «силы», попытайтесь представить себе, как можно было бы обойтись без него! Наиболее очевидное применение «силы» состоит в том, чтобы объяснить, почему частица ускоряет или замедляет свое движение. Пробная частица в отсутствие действующих на нее сил просто по определению не ускоряется и не замедляется. По отношению к инерциальной системе отсчета она сохраняет свое состояние покоя или движения с постоянной скоростью. Она «прочерчивает» прямую мировую линию. На рис. 79 такая мировая линия изображена для частного случая частицы, движущейся в направлении оси  $x$ . Напротив, на рис. 80 дана мировая линия частицы, которая, очевидно, *изменяет* свою скорость и поэтому *должна быть* подвержена действию силы. Никто и никогда не наблюдал, чтобы изменение скорости происходило без определенной причины, и обычно это — столкновение с соседними частицами либо сила, обусловленная удаленной частицей. Поэтому силу можно охарактеризовать как форму *взаимодействия* (рис. 81). Эта мысль подкрепляется еще более следующими двумя соображениями: 1) Если присутствие  $A$  вызывает изменение скорости  $B$ , то присутствие  $B$  также вызывает изменение скорости  $A$ . 2) Когда взаимодействие прекращается, а частицы удаляются друг от друга, происшедшее изменение *импульса* одной из них равно по модулю и противоположно по направлению изменению импульса другой. Поэтому вместо того, чтобы говорить о силах, действующих между частицами, мы можем говорить об изменении их импульсов. И уж явно усложненным подходом был бы учет сразу *и импульса, и силы* в рамках теории относительности. Поэтому мы будем говорить лишь об одном импульсе.

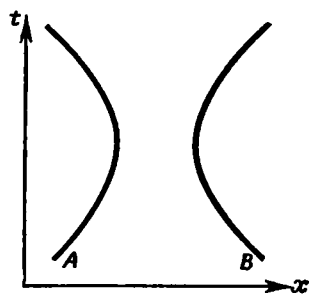
Как следует определить импульс? Первые исследователи, развивавшие ньютоновскую механику, определяли импульс как произведение массы частицы на ее скорость. Определенный таким образом импульс хорош тем,



Р и с. 79. Мирровая линия частицы, на которую не действует никаких сил.



Р и с. 80. Мирровая линия частицы, на которую действует сила.



Р и с. 81. Мирровые линии двух взаимодействующих частиц.

что сохраняется при соударениях частиц малой энергии. Однако опыт показал, что импульс, определенный по ньютоновскому рецепту как произведение массы на скорость, *не* сохраняется, когда сталкивающиеся частицы обладают большими скоростями. Итак, перед нами стоит выбор — отказаться *либо* от ньютоновского определения импульса, *либо* от закона сохранения этой величины. Закон сохранения импульса стал для нас настолько существенным, что мы примем за фундаментальный именно его. Мы будем *исходить* из закона сохранения импульса, а уж отсюда *выводить* выражение для *импульса*, *определенного как векторная величина, сохраняющаяся во всех системах отсчета*.

---

*Импульс определяется так, чтобы он сохранялся*

Требование, чтобы импульс сохранялся во всех системах отсчета, будет использовано в этой главе *трижды*, и всякий раз обращение к нему будет производить революцию в нашем понимании природы. В следующем параграфе это требование будет использовано при анализе в двух измерениях лобового упругого столкновения шаров, и в результате мы выведем *релятивистское выражение для импульса частицы*. В разд. 12 мы выведем *релятивистское выражение для энергии частицы*, исходя из требования сохранения при столкновении частиц в одномерном случае. В разд. 13 мы применим требование сохранения к случаю неупругого столкновения частиц для того, чтобы вывести *закон эквивалентности энергии и массы покоя*. Может возникнуть вопрос: как же закон сохранения импульса может представлять какую-либо ценность, если и импульс, и энергия *определены* именно так, чтобы они сохранялись? Этот вопрос приводит нас к самой сущности физических законов и физической теории <sup>1)</sup>. Чтобы на него ответить, рассмотрим объект, который, катаясь, подобно бильярдному шару, сталкивается с различными телами. Рассматривая первые столкновения, мы найдем (или определим) с помощью закона сохранения неизвестные импульсы отдельных объектов. Но при последующих столкновениях положение изменится. Ведь мы уже будем знать значения импульса участвующих в этих столкновениях тел! И теперь закон сохранения импульса будет выполняться уже не по определению, а в силу глубинных законов природы. Все физические законы и физические теории обладают именно этим глубоким и тонким свойством, а именно они одновременно и дают нам определение требующихся

---

<sup>1)</sup> См. Henri Poincaré, *The Foundations of Science*, translated by G. B. Halsted, Science Press, Lancaster, Pennsylvania, 1946, p. 310, 333.



понятий, и позволяют нам сделать выводы, следующие из их использования. И наоборот, если у нас нет объектов, которыми занимается теория, для которых выводится закон или формулируется принцип, то само их отсутствие лишает нас возможности применять или даже формулировать физические понятия. Как безнадежно устарел лозунг старой теории: «Не начиная исследования, не сформулировав понятий!». Истинно творческая сущность любого продвижения вперед в человеческом познании состоит в том, что теория, понятие, закон и метод измерения, навеки неотъемлемые друг от друга, *возникают* в неразрывном единстве друг с другом.

---

*Многочисленные примеры подтверждают, что законы сохранения — это не порочный круг утверждений*

Таким образом, физика дает способ *установить гармонию* в опытных фактах. Для того чтобы установить закон сохранения, недостаточно какого-то одного эксперимента. Их должно быть по меньшей мере два; в первом мы находим определение сохраняющейся величины, а второй проверяет, действительно ли эта величина сохраняется. В этой главе мы займемся экспериментами первого типа, т. е. необходимыми для формулирования определений величин. Проверка же работы этих определений — процесс, протекающий ежедневно и ежечасно в ходе постоянного развития экспериментальной физики.

В механике Ньютона импульс частицы определяется как произведение массы на скорость. В гл. 1 мы измеряли скорость  $\beta$  в метрах расстояния, пройденного за метр светового времени. При таком определении скорости ньютоновское выражение для импульса имеет вид  $m\beta$ . Здесь не утверждается ничего нового об импульсе (и это *не* релятивистское выражение для импульса!), лишь подчеркивается, что время измеряется в метрах. *Но когда время измеряется в метрах, импульс имеет размерность массы.* Для того чтобы перейти к обычным единицам (например, кг·м/сек), требуется лишь домножить этот импульс на коэффициент перевода  $c$  (скорость света), чтобы перейти от  $\beta$  к  $v$ , так что

$$(\text{Ньютоновский импульс в обычных единицах}) = m\beta c = mv.$$

---

*Импульс и энергию удобнее всего выражать в единицах массы*

Подобным же образом в ньютоновской механике кинетическая энергия частицы определяется как произведение массы на квадрат скорости, разделенное на два. Взяв скорость  $\beta$ , измеряемую в м/м, получим ньютоновское выражение для кинетической энергии в виде  $\frac{1}{2} m\beta^2$ . Здесь не утверждается ничего нового об энергии (и это *не* релятивистское выражение для энергии!), лишь подчеркивается, что время измеряется в метрах. *Но когда время измеряется в метрах, энергия имеет размерность массы;* и энергия, и импульс обладают одной и той же размерностью. Для того чтобы перейти к обычным единицам (например, джоулям), требуется лишь домножить эту энергию на коэффициент перевода  $c^2$  (квадрат скорости света), чтобы перейти от  $\beta^2$  к  $v^2$ , так что

$$(\text{Ньютоновская кинетическая энергия в обычных единицах}) = \\ = \frac{1}{2} m\beta^2 c^2 = \frac{1}{2} mv^2.$$

Мы будем обозначать импульс ( $p$ ) и кинетическую энергию ( $T$ ), выраженные в единицах массы, без дополнительных значков. Итак, в ньютонов-

ском пределе малых скоростей

$$\left. \begin{aligned} p &= m\beta \\ T &= \frac{1}{2} m\beta^2 \end{aligned} \right\} \text{(малые скорости, размерность массы)}. \quad (67)$$

При этом мы снабдим обозначения для импульса и энергии в обычных единицах индексом «обычн», подчеркнуто громоздким, чтобы вызвать неприязнь к использованию обычных единиц. Тогда в ньютоновском пределе малых скоростей

$$\left. \begin{aligned} p_{\text{обычн}} &= mv \\ T_{\text{обычн}} &= \frac{1}{2} mv^2 \end{aligned} \right\} \text{(малые скорости, обычные единицы)}. \quad (68)$$

В этой главе мы выведем релятивистские выражения для энергии и импульса в единицах массы. Энергия и импульс, выраженные в единицах массы, могут быть просто переведены в величины обычной размерности путем умножения соответственно на  $c$  и  $c^2$ . Эти результаты подытожены (в обеих системах единиц) на внутренней стороне обложки книги.

## 11. ИМПУЛЬС

Много ли можно узнать об импульсе, не обращаясь к эксперименту, а просто из сведений, которыми мы располагаем о структуре пространства-времени? В частности, если вообще существует для каждой частицы такая векторная величина, которую мы называем «импульс», причем сумма этих величин для всех частиц при взаимодействиях последних сохраняется, то как должен импульс любой частицы зависеть от ее скорости? Так как импульс — величина векторная, нам следует прежде всего выяснить *направление* этого вектора для данной частицы и уже затем найти зависимость его *модуля* от ее скорости. Начнем с обоснования того, что вектор импульса

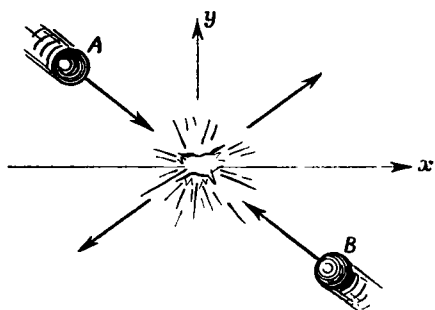
---

*Из соображений симметрии следует, что импульс параллелен скорости*

частицы ориентирован по направлению ее движения. Этот вывод можно получить из *соображений симметрии* — мощного метода физического анализа — следующим образом. В инерциальной системе отсчета пространство одинаково во всех направлениях, так что мы называем его *изотропным*. Раз это так, то одним-единственным направлением, связанным с движением прямолинейно летящей частицы, может быть лишь то направление, в котором происходит это движение. Если бы вектор импульса частицы не был направлен в точности по ее движению, а составлял, скажем, угол  $30^\circ$  с направлением движения частицы, то существовало бы громадное множество векторов, все повернутые на  $30^\circ$  по отношению к направлению движения и совершенно равноправные, каждый из которых мог бы изображать импульс. Но ведь пространство изотропно! Поэтому мы не могли бы предпочесть ни одного из этих векторов остальным. Но, однако, мы предположили, что импульс определяется однозначно как по своему модулю, так и по направлению, если задана скорость. Значит, мы столкнулись с противоречием, от которого можно избавиться, лишь приняв, что вектор импульса должен лежать вдоль направления движения частицы. Но это значит, что можно выбрать его как параллельным, так и антипараллельным этому направлению, и мы произвольно выбираем направление вектора импульса,

Р и с. 82. Скользящее упругое столкновение, наблюдаемое в системе отсчета, которая движется таким образом, что оба шара имеют до столкновения одинаковые скорости, но движутся во взаимно противоположных направлениях.

Рассуждения, приведенные в тексте, показывают, что *после* упругого столкновения оба шара движутся вновь с их первоначальными скоростями, а направления их движения снова взаимно противоположны, если их наблюдать в той же системе отсчета.



*совпадающее* с направлением скорости частицы <sup>1)</sup>. Итак, можно окончательно сказать, что *вектор импульса частицы совпадает по направлению с ее скоростью*.

*Нахождение зависимости импульса от скорости на основании закона сохранения импульса*

Итак, мы знаем уже, как *направлен* вектор импульса частицы. Вторым этапом исследования будет определение *абсолютной величины* (модуля) этого вектора. Это можно сделать, потребовав, чтобы полный импульс сохранялся при упругих столкновениях. Вместе со свойством инвариантности интервала в лоренцевой геометрии это требование окажется достаточным для того, чтобы показать, что ньютоновское выражение для импульса

$$p = m\beta (= m \operatorname{th} \theta) = m \cdot (\text{Смещение за единицу времени})$$

должно быть заменено релятивистской формулой

$$p = m \operatorname{sh} \theta = \frac{m\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = m \cdot (\text{Смещение за единицу собственного времени}). \quad (69)$$

Если скорость  $\beta$  мала (т. е. мал параметр  $\theta$ ), точное релятивистское выражение (69) приближенно совпадает с ньютоновским выражением.

*При соответствующем выборе системы отсчета полный импульс до столкновения равен нулю*

Возьмем в качестве сталкивающихся объектов два одинаковых шара *A* и *B* и предположим, что между ними происходит не лобовое (редкое) столкновение, а скользящее (типичное). Всегда можно найти систему отсчета, движущуюся с такой скоростью, что скорости шаров *до* столкновения равны и противоположны по направлению (рис. 82). В этой системе отсчета *полный* импульс двух одинаковых шаров равен нулю.

Заключение о равенстве нулю полного импульса следует из таких соображений симметрии: допустим, что полный импульс в этой симметричной по скоростям системе отсчета отличен от нуля. Тогда, как мы сейчас увидим, возникает противоречие. Если

<sup>1)</sup> Мы могли бы, конечно, выбрать направление вектора импульса частицы *противоположным* (антипараллельным) направлению ее движения. Такой выбор соответствовал бы симметрии данной задачи и не приводил бы ни к каким физическим противоречиям, если его распространить на все частицы. В таком случае импульсы отдельных частиц и полный импульс системы обладали бы направлениями, противоположными направлениям соответствующих импульсов, определенных выше. Однако по традиции мы ориентируем вектор импульса частицы *в том же* направлении, какое имеет ее скорость.

другие два шара начинают двигаться в точности так же, как  $A$  и  $B$  на рис. 82, причем они отличаются лишь тем, что на место шара  $A$  помещен шар  $B$ , а на место  $B$  —  $A$ , ситуация не может измениться. Поэтому полный импульс должен остаться тем же самым как по величине, так и по направлению, что и полный импульс системы на рис. 82 (мы не изобразили его там, потому что на самом деле он равен нулю!). Но ведь изображение нового столкновения можно получить, если рассматривать рис. 82, повернув книгу вверх ногами (поворот на  $180^\circ$  в ее собственной плоскости). А это приводит к изменению направления полного импульса на обратное. Следовательно, полный вектор импульса не должен изменяться при повороте на  $180^\circ$ ! Это противоречие исчезает, лишь если полный вектор импульса по модулю равен нулю. Итак, до столкновения две тождественные частицы обладают равными и противоположно направленными импульсами.

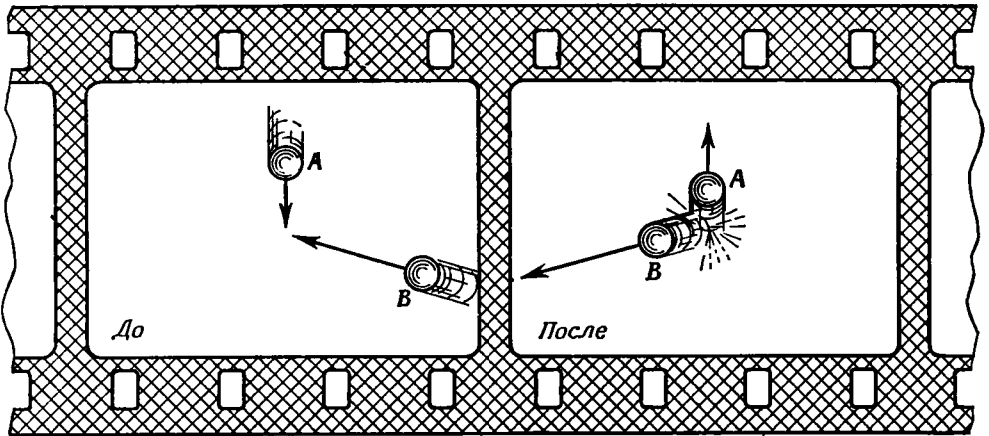
Что же произойдет *после* столкновения? Шары должны и тогда двигаться во взаимно противоположных направлениях с равными скоростями. Если бы это было не так, то сумма их импульсов не была бы равна нулю и полный импульс не сохранялся бы при соударении в нарушение принятого требования. Ограничимся (лишь временно) анализом соударений, являющихся *упругими* по следующему определению. Если просматривать кинофильм, изображающий процесс столкновения, в обратном порядке, то в этом процессе не произойдет никаких изменений, кроме того, что частица  $A$  стала двигаться теперь справа налево, а частица  $B$  — слева направо, тогда как раньше все было наоборот. В этом смысле упругое соударение — это такое соударение, которое *обратимо*. Если изображенное на рис. 82 соударение является в этом смысле упругим, то каждый шар изменяет лишь направление своего движения, но не абсолютную величину скорости (не считая момента удара), и в результате эффект соударения сводится к простому повороту векторов скорости обеих частиц. В этой системе отсчета можно выбрать направления осей  $x$  и  $y$  таким образом, что  $x$ -компоненты скоростей обеих частиц не изменятся при столкновении, тогда как их  $y$ -компоненты просто изменят знак.

---

#### *Описание столкновения в трех разных системах отсчета*

Нас интересует анализ  $y$ -компоненты полного импульса и сохранение этой компоненты при таком столкновении. Для этого проще всего рассмотреть столкновение в такой системе отсчета, где шар  $A$  движется только в направлении оси  $y$ . Это система отсчета ракеты, летящей вправо по отношению к системе, в которой изображен рис. 82, со скоростью, равной  $x$ -компоненте скорости шара  $A$ . Наблюдаемое в такой системе отсчета столкновение изображено на рис. 83. Имеется также система отсчета, в которой шар  $B$  движется только в направлении оси  $y$ . Это лабораторная система отсчета, движущаяся влево по отношению к системе, в которой изображен рис. 82, со скоростью, равной  $x$ -компоненте скорости шара  $B$ . Наблюдаемое в такой системе отсчета столкновение изображено на рис. 84.

Мы стремимся узнать все, что только можно, об импульсе частицы (скорость которой может быть очень близка к скорости света), исходя из данных ньютоновской физики об импульсе частицы с очень малой скоростью. Для этих целей анализ скользящего соударения подходит идеально. Мы можем подобрать такое столкновение, при котором частица-мишень обладает сколь угодно малой скоростью не только до соударения, но и после него (частица  $B$  на рис. 84). Тогда импульс частицы-мишени может быть получен по ньютоновской формуле  $p = mv$  как до, так и после соударения. Исходя из этого, легко определить изменение импульса медленной частицы ( $B$ ) в процессе соударения, что позволит нам найти изменение



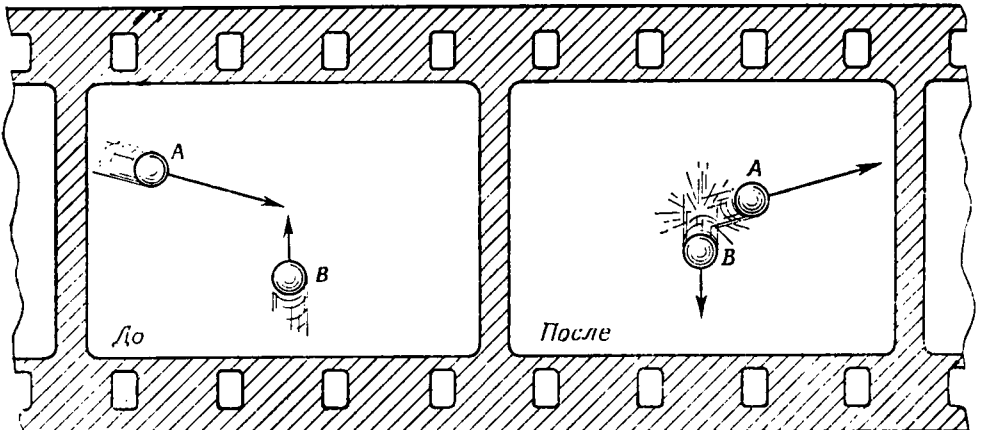
Р и с. 83. То же столкновение, что на рис. 82, но наблюдаемое в системе отсчета ракеты.

импульса и даже самый импульс быстрой частицы (А). Исходя из симметрии схемы столкновения, очевидно, что приобретенный частицей В импульс вдвое превышает величину ее импульса до соударения, так что

$$\frac{1}{2} \cdot (\text{Изменение импульса } B) = m \frac{dy}{dt}.$$

*Импульс пропорционален величине перемещения частицы за единицу собственного времени*

Частица А передает часть импульса частице В, но не за счет изменения абсолютной величины своего импульса, а за счет изменения *направления* своего вектора импульса. Иными словами, переданный импульс составляет меньшую и известную нам сторону треугольника импульсов. Другие две (равные друг другу) стороны этого треугольника являются большими и неизвестны нам. Однако мы знаем, чему равны как длинные, так и короткая стороны подобного треугольника — треугольника перемещений. Из пропорциональности соответствующих сторон подобных треугольников мы



Р и с. 84. То же столкновение, что на рис. 82, но наблюдаемое в лабораторной системе отсчета.

сразу же получаем (см. рис. 85) выражение для импульса быстро движущейся частицы  $A$ :

$$p = m \frac{dr}{d\tau} = m \cdot (\text{Перемещение за единицу собственного времени}). \quad (70)$$

Компоненты этого вектора по отдельности<sup>1)</sup> равны:

$$p^x = m \frac{dx}{d\tau}, \quad p^y = m \frac{dy}{d\tau}, \quad p^z = m \frac{dz}{d\tau} \quad (71)$$

в лабораторной системе отсчета.

В системе отсчета ракеты компоненты импульса даются выражениями, аналогичными формулам (71) с той лишь разницей, что в них фигурируют  $dx'$ ,  $dy'$  и  $dz'$  — компоненты перемещения, измеренные в системе отсчета ракеты. Интервал собственного времени  $d\tau'$  между двумя близкими событиями на мировой линии частицы обладает одним и тем же значением при вычислении исходя из данных, полученных на ракете, и при вычислении на основании лабораторных измерений («инвариантность интервала»). Поэтому излишне различать  $d\tau$  и  $d\tau'$ . Кроме того, величина  $dy'$  (в системе отсчета ракеты) равна величине  $dy$  (в лабораторной системе отсчета), а также  $dz = dz'$ . Следовательно, компоненты импульса  $p^y = m \frac{dy}{d\tau}$  и  $p^z = m \frac{dz}{d\tau}$ , перпендикулярные к направлению движения ракеты относительно лабораторной системы отсчета, не зависят от скорости этого движения.

Импульс аналогичен перемещению в том отношении, что поперечные компоненты этих обоих векторов не зависят от скорости движения наблюдателя. Такая аналогия этих двух векторов имеет очень простую причину: импульс получается из перемещения ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ) путем умножения на величину  $m/\Delta\tau$ , одинаковую во всех инерциальных системах отсчета!

*Массу наиболее целесообразно определять как не зависящий от скорости коэффициент в выражении для импульса*

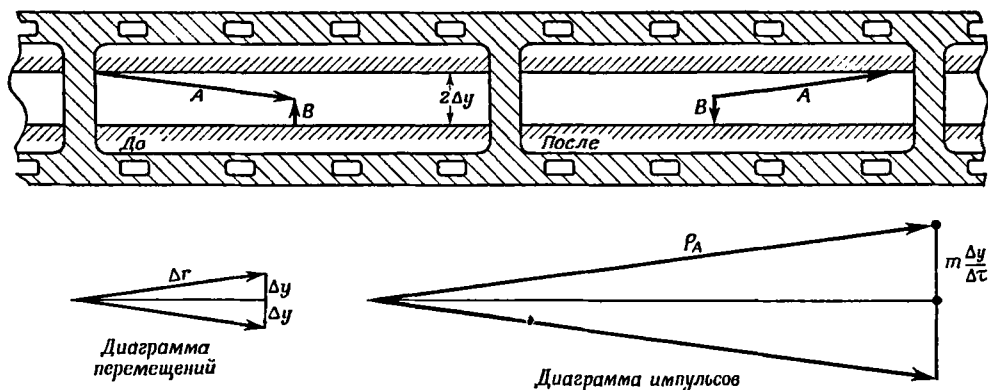
Из исследования импульса, проделанного на рис. 85, ясно, что величина  $m$  — это масса в том смысле, в каком ее понимают в ньютоновской механике. Поэтому  $m$  есть величина постоянная, одинаковая для всех скоростей, всех положений и всех моментов времени. Все различие между релятивистской формулой для импульса (например,  $m \cdot \frac{dx}{d\tau}$ ) и соответствующей ньютоновской формулой ( $m \cdot \frac{dx}{dt}$ ) сводится поэтому к различию между собственным и лабораторным временем, а не к различию в  $m$  при этих двух описаниях природы. В некоторых прежних изложениях теории относительности ньютоновское выражение для импульса ( $m \cdot \frac{dx}{dt}$ ) исправлялось не путем простой замены  $dt$  на  $d\tau$ , принятой сейчас, а путем введения «массы движения», зависящей от скорости таким образом, чтобы можно было продолжать пользоваться формулами типа Ньютона, например:

$$p^x \text{ (релятивистская величина)} = m_{\text{движения}} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Эта масса движения должна тогда быть равна

$$m_{\text{движения}} = m \frac{dt}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (72)$$

<sup>1)</sup> Почему не  $p_x$ , а  $p^x$ ? В четырехмерной геометрии пространства-времени в отличие от евклидовой геометрии пространства существенно расположение индекса (см. подробности относительно стандартных обозначений в примечании на стр. 157).



Р и с. 85. Вывод релятивистского выражения для импульса из закона сохранения импульса в случае скользящего соударения.

Частица  $B$  движется настолько медленно, что ньютоновское выражение для импульса представляет собой сколь угодно хорошее приближение для ее импульса: (Импульс)  $= m \cdot \Delta y_B / \Delta t_B$ . Здесь  $\Delta t_B$  — время, за которое частица  $B$  пролетает расстояние  $\Delta y_B$  от нижней границы рисунка до точки соударения. Это лабораторное время по своей величине сколь угодно близко к собственному времени полета  $\Delta \tau_B$  по той же причине, а именно потому, что скорость  $B$  может быть выбрана сколь угодно малой. (Пример: при  $\beta = 0,01$  относительное различие величин  $\Delta t$  и  $\Delta t$  составляет  $5 \cdot 10^{-5}$ .) Поэтому импульс  $B$  можно записать как  $m \cdot \Delta y_B / \Delta \tau_B$ . Зная величину импульса  $B$ , можно найти величину импульса  $p_A$  частицы  $A$ , сравнивая изображенные здесь диаграммы для импульса и для перемещения  $A$  (правило подобных треугольников). Для частицы  $A$   $y$ -компонента перемещения может быть сделана равной  $y$ -компоненте перемещения частицы  $B$  (симметричное расположение «пола» и «потолка», о которые ударяются соответственно  $A$  и  $B$ ):  $\Delta y_A = \Delta y_B = \Delta y$ . Промежутки собственного времени между моментами соударения и удара об пол (потолок) также один и тот же для  $A$  и  $B$ :  $\Delta \tau_A = \Delta \tau_B$ .

**Доказательство.** 1) Движение частицы  $A$  в системе отсчета ракеты совпадает с движением частицы  $B$  в лабораторной системе отсчета (ср. рис. 83 и 84). Поэтому собственные времена полета равны одно другому:

$$(\Delta \tau_A)_{\text{система ракеты}} = (\Delta \tau_B)_{\text{лабораторная система}}$$

2) Но собственное время между двумя событиями (столкновение и удар) одинаково во всех системах отсчета, т. е.

$$(\Delta \tau_A)_{\text{лабораторная система}} = (\Delta \tau_A)_{\text{система ракеты}}$$

3) Следовательно,

$$(\Delta \tau_A)_{\text{лабораторная система}} = (\Delta \tau_B)_{\text{лабораторная система}}$$

что и требовалось доказать. Конечно, лабораторные часы показывают совершенно разные продолжительности полетов частиц  $A$  и  $B$ , если  $A$  обладает скоростью, близкой к скорости света:

$$\begin{aligned} (\Delta t_A)^2_{\text{лабораторная система}} &= (\Delta \tau_A)^2_{\text{лабораторная система}} + (\Delta x_A)^2_{\text{лабораторная система}} \gg \\ &\gg (\Delta \tau_A)^2_{\text{лабораторная система}} = (\Delta \tau_B)^2_{\text{лабораторная система}} = (\Delta t_B)^2_{\text{лабораторная система}} \end{aligned}$$

Поэтому импульс частицы  $A$  в конце концов выражается непосредственно через величины, которые относятся лишь к движению  $A$ :

$$p_A = m (\Delta r_A / \Delta \tau_A).$$

Переходя от конечных разностей к производным и вспоминая, что импульс и перемещение обладают одним и тем же направлением, получим

$$p = m (dr/d\tau).$$

Это и есть релятивистская формула для импульса, справедливая для частицы, обладающей сколь угодно высокой энергией.

Такое обозначение еще можно иногда встретить. Однако в физических рассуждениях полезнее всего использовать величины, одинаковые во всех системах отсчета, такие, как  $m$  и  $d\tau$ . Этот факт сейчас получает все более широкое признание. Поэтому мы будем обычно понимать под термином «масса» не зависящую от скорости величину  $m$ .

*Релятивистский импульс сводится к ньютоновскому в пределе малых скоростей*

Насколько велико различие между релятивистским и ньютоновским выражениями для импульса? Релятивистское выражение для импульса должно сводиться к ньютоновскому, когда скорости частиц малы. Такие медленные частицы проходят путь, много меньший одного метра за один метр времени ( $dr/dt$ ). Тогда собственное время  $d\tau = \sqrt{(dt)^2 - (dr)^2} = \sqrt{1 - \beta^2} \cdot dt$  при любом перемещении медленной частицы очень мало отличается от координатного времени  $dt$ :

$$d\tau \approx dt \text{ (для медленной частицы),}$$

причем для  $\beta = 0,01$  это равенство справедливо с точностью до 5 : 100 000 и стремится к тождественному совпадению при  $\beta \rightarrow 0$ . При этом релятивистское выражение для импульса  $p = m \frac{dr}{d\tau}$  совпадает с ньютоновским выражением  $p = m \frac{dr}{dt}$ , где величина  $m$  одна и та же (инвариант  $m!$ ).

В некоторых случаях удобнее выражать импульс через параметр скорости частицы  $\theta$ , а иногда через ее скорость  $\beta = \text{th } \theta$ . Тогда

$$\begin{aligned} p &= m \frac{dr}{d\tau} = m \frac{dr}{\sqrt{(dt)^2 - (dr)^2}} = \frac{m \frac{dr}{dt}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}} = \frac{m\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{m \text{ th } \theta}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \theta}} = \\ &= \frac{m \text{ th } \theta}{\sqrt{\frac{\text{ch}^2 \theta}{\text{ch}^2 \theta} - \frac{\text{sh}^2 \theta}{\text{ch}^2 \theta}}} = \frac{m \text{ th } \theta \text{ ch } \theta}{\sqrt{\text{ch}^2 \theta - \text{sh}^2 \theta}} = m \text{ sh } \theta, \end{aligned}$$

так что

$$p = m \text{ sh } \theta = \frac{m\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ (релятивистский импульс, размерность массы)}. \quad (73)$$

Другой вид имеет ньютоновское выражение для импульса:

$$p = m\beta = m \text{ th } \theta \text{ (ньютоновский импульс, размерность массы)}. \quad (74)$$

Эти два выражения для импульса различаются множителем

$$\frac{dt'}{d\tau} = \text{ch } \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

который определяет отношение между лабораторным временем и собственным временем, регистрируемым часами, летящими вместе с частицей. Этот множитель совпадает с коэффициентом в формуле замедления хода времени (см. упражнение 10). Присутствие такого множителя в релятивистской формуле для импульса показывает, что частица способна нести с собой в процессах столкновений сколь угодно большой импульс, если только она движется со скоростью, близкой к скорости света. Этого никак нельзя было ожидать, опираясь на неверную в этом случае ньютоновскую формулу для импульса  $p = m\beta$ , где  $m$  — постоянная, а  $\beta$  не может превышать единицы.

Таким образом, выражение для импульса быстро движущихся частиц существенно отличается от предсказываемого теорией Ньютона. Однако



процедура определения массы некоторой новой частицы, принявшей участие в процессе столкновения, в принципе одна и та же как в релятивистской, так и в ньютоновской механике. Ее суть может быть выражена по-разному: 1) как принцип действия и противодействия; 2) как принцип, связывающий отдачу ружья с импульсом пули; 3) как закон сохранения импульса.

*Определение массы неизвестной частицы по упругому столкновению ее со стандартной частицей*

Рассмотрим специально лобовое упругое столкновение: 1) стандартной частицы массы  $m_1$  (пусть величина этой массы произвольно устанавливается Международным комитетом мер и весов) и 2) исследуемой частицы, обладающей пока неизвестной массой  $m_2$ , величину которой нам нужно определить. Говоря, что столкновение является лобовым и упругим, мы имеем в виду существование такой системы отсчета, в которой зарегистрированные до и после соударения данные о скоростях частиц обнаруживают симметрию, изображенную на рис. 86. Эта симметрия состоит в том, что полный импульс меняет свой знак на обратный в результате соударения. Но ведь полный импульс при соударении сохраняется! Значит, этот полный импульс должен быть равен нулю. Итак, импульсы наших двух частиц после столкновения должны удовлетворять условию

$$m_1 \left( \frac{dx}{d\tau} \right)_1 + m_2 \left( \frac{dx}{d\tau} \right)_2 = 0.$$

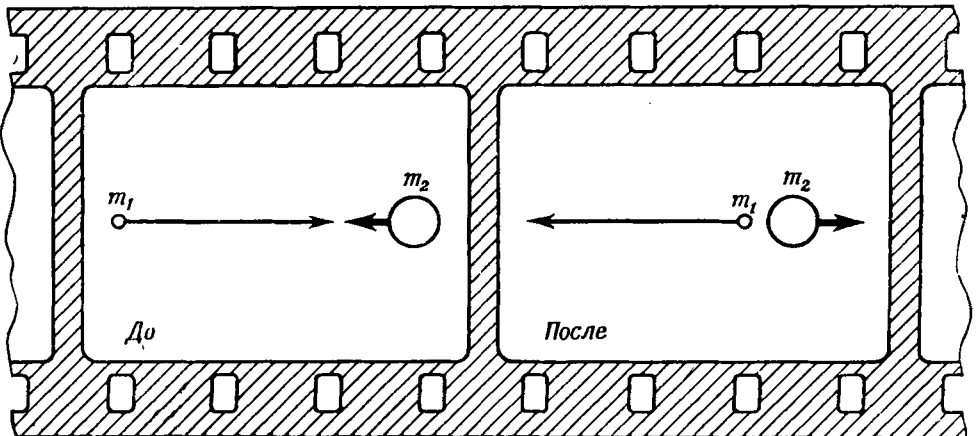
Из этого соотношения можно получить выражение неизвестной массы в единицах известной массы стандартной частицы:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{(-dx/d\tau)_1}{(dx/d\tau)_2} = \frac{-\Delta x_1}{\sqrt{(\Delta t_1)^2 - (\Delta x_1)^2}} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta t_2)^2 - (\Delta x_2)^2}}{\Delta x_2}. \quad (75)$$

Здесь  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$  — расстояния, пройденные каждой из двух частиц из точки соударения до точек наблюдения, а  $\Delta t_1$  и  $\Delta t_2$  — соответствующие времена движения. В случае упругого столкновения нерелятивистских частиц правая сторона равенства (75) принимает ньютоновский вид

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{-\Delta x_1/\Delta t_1}{\Delta x_2/\Delta t_2} \quad (\text{ньютоновский предел}). \quad (76)$$

Простота релятивистского определения импульса не может быть вполне оценена, пока импульс не рассматривается как пространственная часть



Р<sub>г</sub> и с. 86. Скорости до и после лобового упругого столкновения, наблюдаемые в той системе отсчета, где полный импульс равен нулю.

4-вектора энергии-импульса. И только тогда становится ясно, что баланс энергии в процессах столкновения может служить косвенной проверкой закона сохранения импульса, так что к бесчисленному множеству непосредственных экспериментальных способов проверки закона сохранения импульса добавляется еще этот косвенный способ.

## 12. 4-ВЕКТОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Для того чтобы представить себе импульс и энергию как части более обширного единого целого, полезно вспомнить, как пространство и время объединяются, становясь частями также более обширного единого целого. Рассмотрим переход частицы из мировой точки (события)  $A$  в пространстве-времени в соседнюю мировую точку  $B$ . Идея объединения пространства и времени состоит в том, чтобы рассматривать *4-вектор*, соединяющий  $A$  и  $B$ <sup>1)</sup>. Компоненты этого 4-вектора (смещения  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и  $dt$ ) имеют разные значения в зависимости от того, в какой системе отсчета рассматривается этот 4-вектор. Несмотря на произвольный способ описания 4-вектора  $AB$ , который мы выберем, этот 4-вектор оказывается вполне строго определен. Не только интервал имеет одну и ту же величину во всех системах отсчета! Что еще более важно, *расположение* самих событий  $A$  и  $B$ , а значит, и положение 4-вектора  $AB$  в пространстве-времени определяются так же строго, как положение двух городских ворот, независимо от того, какие координаты мы используем, и даже независимо от того, используем ли мы вообще какие бы то ни было координаты.

---

### *Энергия как четвертая компонента 4-вектора энергии-импульса*

Мы ожидаем, что подобным же образом можно будет понять смысл импульса и энергии частицы на любом заданном этапе ее истории, понять их как компоненты и не более как компоненты 4-вектора, существующего независимо от всякого выбора координат. Более того, связь такого «4-вектора энергии-импульса» с 4-вектором смещения  $AB$  не будет ни косвенной, ни далекой. Разве может быть что-либо более последовательным и прямым, чем следующая цепочка рассуждений:

1) Берется 4-вектор смещения  $AB$  с компонентами

$$dt, \quad dx, \quad dy, \quad dz$$

(см. рис. 87).

2) С помощью 4-вектора  $AB$  строится единичный касательный вектор путем деления его на интервал собственного времени

$$d\tau = \sqrt{(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2},$$

---

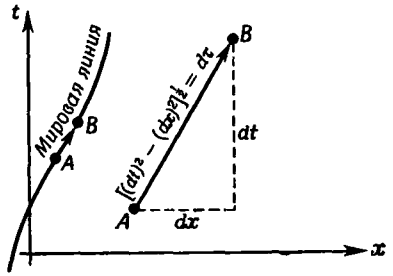
<sup>1)</sup> В 1872 г. в своей лекции в ознаменование вступления в должность профессора Эрлангенского университета Феликс Клейн провозгласил новую точку зрения на геометрию, что оказало решающее влияние на современную геометрию. Ключевой пункт его идеи состоял в проведении различия между геометриями разного рода, исходя из *законов преобразования компонент* величин. Например, можно с полной ясностью увидеть различие между евклидовой геометрией и лоренцевой геометрией реального физического мира на основании используемого ныне определения вектора:

*4-вектор определяется* заданием в каждой инерциальной системе отсчета четырех чисел (различных в разных системах!), причем эти числа преобразуются при переходах между системами отсчета по формулам преобразования Лоренца (32).

*3-вектор определяется* заданием в каждой евклидовой системе координат трех чисел (компонент, различных в разных системах координат!), причем эти числа преобразуются при переходах между системами координат по соответствующим формулам преобразования поворота геометрии Евклида (29).

Зная, что некоторая величина — вектор, и зная значения ее компонент лишь в одной системе отсчета, можно сразу же *найти* значения ее компонент в любой другой системе отсчета, используя соответствующий 3- или 4-мерный закон преобразования компонент.

Р и с. 87. 4-вектор перемещения  $AB$ , соединяющий события  $A$  и  $B$  на мировой линии частицы. Он изображен здесь для частного случая, когда  $y$ - и  $z$ -компоненты перемещения  $dy$  и  $dz$  одновременно равны нулю.



взятый между мировыми точками  $A$  и  $B$ ; компоненты этого касательного вектора

$$\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}$$

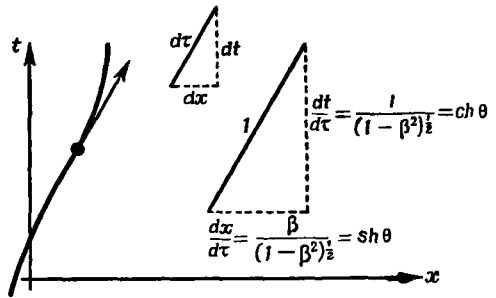
изображены на рис. 88.

3) 4-вектор энергии-импульса получается при умножении этого единичного вектора на постоянную  $m$ ; его компоненты равны

$$E = p^t = m \frac{dt}{d\tau}, \quad p^x = m \frac{dx}{d\tau}, \quad p^y = m \frac{dy}{d\tau}, \quad p^z = m \frac{dz}{d\tau} \quad (77)$$

(см. рис. 89).

Подробности хода этих рассуждений и различные формы записи пространственных и временных компонент всех этих трех 4-векторов приведены



Р и с. 88. Единичный касательный вектор к мировой линии частицы, полученный делением 4-вектора перемещения  $AB$  (рис. 87) на инвариантный интервал собственного времени  $d\tau$ . Временная и пространственная компоненты единичного вектора касательной равны

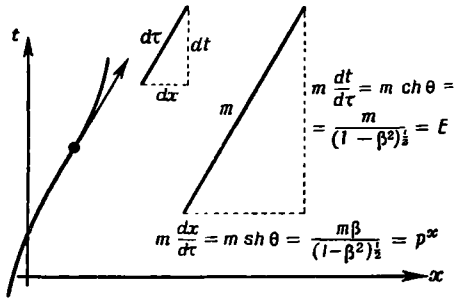
$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= \frac{dt}{\sqrt{(dt)^2 - (dx)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (dx/dt)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \theta}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\text{ch}^2 \theta}{\text{ch}^2 \theta} - \frac{\text{sh}^2 \theta}{\text{ch}^2 \theta}}} = \frac{\text{ch } \theta}{\sqrt{\text{ch}^2 \theta - \text{sh}^2 \theta}} = \text{ch } \theta \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{dx}{\sqrt{(dt)^2 - (dx)^2}} = \frac{dx/dt}{\sqrt{1 - (dx/dt)^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\text{th } \theta}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \theta}} = \\ &= \frac{\text{th } \theta}{\sqrt{\frac{\text{ch}^2 \theta}{\text{ch}^2 \theta} - \frac{\text{sh}^2 \theta}{\text{ch}^2 \theta}}} = \frac{\text{th } \theta \text{ ch } \theta}{\sqrt{\text{ch}^2 \theta - \text{sh}^2 \theta}} = \text{sh } \theta. \end{aligned}$$

(В приведенном здесь частном случае полная пространственная компонента перемещения  $dr$  равна  $x$ -компоненте перемещения  $dx$ . В более общем случае пространственная часть перемещения имеет вид  $dr = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ , и тогда она дает пространственную компоненту единичного вектора касательной, равную

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{sh } \theta.)$$



Р и с. 89. 4-вектор энергии-импульса, полученный при умножении единичного вектора касательной (рис. 88) на постоянную массу  $m$  частицы. Временная компонента его называется «релятивистской энергией» и обозначается через  $E$ .

на рисунках. Не может быть никакого сомнения в том, что 4-вектор  $(dt, dx, dy, dz)$  остается 4-вектором после деления его на величину  $d\tau$  и умножения на величину  $m$ , которые обе остаются одинаковыми во всех системах отсчета.

*Сохранение энергии  $E$  в одной системе отсчета следует из сохранения импульса во всех системах отсчета*

Этим и исчерпывается краткое введение во взаимосвязь между импульсом и энергией. Перейдем теперь к важному вопросу: почему временную компоненту получившегося 4-вектора можно называть *энергией*? Причины две. Во-первых, потому что эта компонента имеет правильную размерность — она выражается в единицах массы. Во-вторых, и это важнее всего, потому что полная величина этой компоненты сохраняется при всех столкновениях. Доказательство того, что сумма значений  $E$  для всех частиц подчиняется закону сохранения, базируется на простом соображении: *если три компоненты какого-либо 4-вектора сохраняются во всех системах отсчета, то четвертая компонента также должна сохраняться* (см. табл. 9). Мы знаем, что три (пространственные) компоненты полного импульса физической системы сохраняются во всех системах отсчета. Поэтому полная временная компонента его тоже сохраняется. Подробности этого доказательства см. ниже.

Формулы преобразования Лоренца для элементов смещения при переходе между лабораторной системой отсчета и системой ракеты можно записать в виде (37):

$$\begin{aligned} dt' &= -dx \operatorname{sh} \theta_r + dt \operatorname{ch} \theta_r, & dx' &= dx \operatorname{ch} \theta_r - dt \operatorname{sh} \theta_r, \\ dy' &= dy, & dz' &= dz. \end{aligned}$$

Эти равенства не нарушатся, если их разделить с обеих сторон на инвариантный интервал  $d\tau = d\tau'$  и умножить на инвариантную массу  $m$ :

$$\begin{aligned} m \frac{dt'}{d\tau'} &= -m \frac{dx}{d\tau} \operatorname{sh} \theta_r + m \frac{dt}{d\tau} \operatorname{ch} \theta_r, & m \frac{dx'}{d\tau'} &= m \frac{dx}{d\tau} \operatorname{ch} \theta_r - m \frac{dt}{d\tau} \operatorname{sh} \theta_r, \\ m \frac{dy'}{d\tau'} &= m \frac{dy}{d\tau}, & m &= \frac{dz'}{d\tau'} = m \frac{dz}{d\tau}. \end{aligned}$$

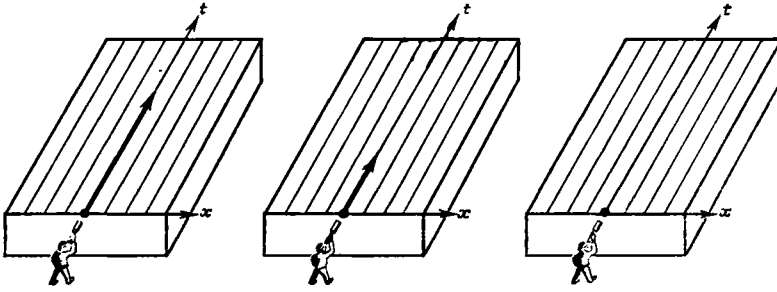
Но  $m \frac{dx}{d\tau}$ ,  $m \frac{dy}{d\tau}$  и  $m \frac{dz}{d\tau}$  — компоненты релятивистского импульса, а  $m \frac{dt}{d\tau}$  — временная компонента нового 4-вектора, т. е. та самая величина, которую мы решили назвать «релятивистской энергией  $E$ ». Мы пришли, таким образом, к следующим важным соотношениям, связывающим импульс и новую величину  $E$  в одной системе отсчета с импульсом и  $E'$  — в другой инерциальной системе отсчета:

$$E' = -p^x \operatorname{sh} \theta_r + E \operatorname{ch} \theta_r, \quad p'^x = p^x \operatorname{ch} \theta_r - E \operatorname{sh} \theta_r, \quad p'^y = p^y, \quad p'^z = p^z. \quad (78)$$

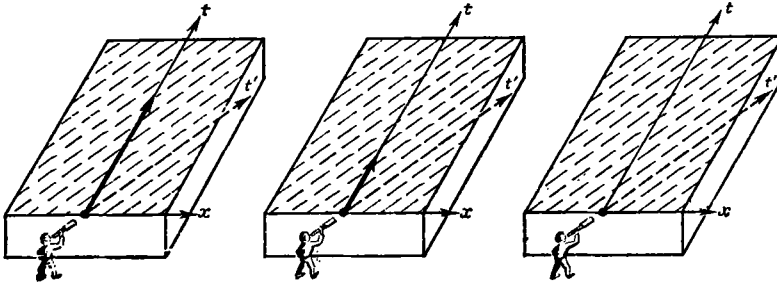
### Преобразования Лоренца для энергии и импульса

Рассмотрим теперь столкновение двух частиц; пусть  $p_1^x$  и  $p_2^x$  будут соответственно  $x$ -компонентами импульса этих частиц до столкновения, измеренными в лабораторной системе отсчета, а  $E_1$  и  $E_2$  — их «релятивистскими энергиями» в этой же системе. Пусть аналогично  $p_1'^x$  и  $p_2'^x$  будут  $x$ -компонентами импульса этих частиц до столкновения, измеренными в системе отсчета ракеты. Для того чтобы записать  $x$ -компоненту полного импульса в системе отсчета ракеты до столкновения, следует сложить друг с другом два выражения  $x$ -компоненты импульса (для каждой частицы),

Таблица 9. Неизменность импульса в двух системах отсчета гарантирует неизменность энергии в обеих системах



Равенство нулю  $x$ -компоненты вектора в одной системе отсчета никак не облегчает исследование поведения  $t$ -компоненты этого вектора. Здесь изображены три вектора, обладающие разными абсолютными величинами (и один из них вообще равен нулю), которые все кажутся одинаковыми для исследователя, знающего лишь величину  $x$ -компонент.



Взглянуть на этот же вектор из другой системы отсчета — значит сразу же обнаружить разницу между векторами, казавшимися одинаковыми в прежней системе отсчета. Допустим, что, как мы знаем, пространственная компонента некоторого 4-вектора равна нулю в двух разных системах отсчета. Тогда можно быть уверенным, что этот 4-вектор вообще равен нулю (случай, изображенный справа).

### СВЯЗЬ С ОБСУЖДЕНИЕМ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ

Закон сохранения импульса утверждает, что полная сумма импульсов после столкновения равна полной сумме импульсов до столкновения. Или, что то же самое, имеется определенная величина — изменение полного импульса при столкновении, о которой мы знаем, что она равна нулю. Но это еще не все. Нам нужна вся информация о полном 4-векторе (равном изменению полного 4-вектора энергии-импульса при столкновении). Рассматривая одну только пространственную компоненту (или, на нашей диаграмме, удостоверявшись только в равенстве нулю  $x$ -компоненты этого 4-вектора), мы никак не можем здесь показать, что равна нулю и временная компонента (иначе говоря, что равно нулю изменение энергии).

Равенство нулю пространственной компоненты («импульсной компоненты») определенного 4-вектора (который и есть разность полных 4-векторов энергии-импульса до и после столкновения) в двух различных системах отсчета гарантирует, что все компоненты этого 4-вектора вообще равны нулю. Значит, из того факта, что импульс сохраняется как в лабораторной системе отсчета, так и в системе отсчета ракеты, можно заключить, что и энергия сохраняется в обеих системах.

фигурирующие как второе уравнение в системе (78):

$$(p'_1{}^x + p'_2{}^x) = (p_1^x + p_2^x) \operatorname{ch} \theta_r - (E_1 + E_2) \operatorname{sh} \theta_r.$$

Такое же уравнение можно записать для этих частиц и после столкновения (две отдельные частицы после упругого столкновения; одна объединенная частица при неупругом ударе и много частиц, если неупругий удар сопровождался дроблением). Можно следующим образом сопоставить эти уравнения *до* и *после* столкновения:

$$\left( \begin{array}{l} \text{До столкнове-} \\ \text{ния: полная} \\ x\text{-компонента им-} \\ \text{пульса, наблю-} \\ \text{даемая в систе-} \\ \text{ме отсчета ра-} \\ \text{кеты} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{До столкнове-} \\ \text{ния: полная} \\ x\text{-компонента им-} \\ \text{пульса, наблю-} \\ \text{даемая в лабо-} \\ \text{раторной систе-} \\ \text{ме отсчета} \end{array} \right) \operatorname{ch} \theta_r - \left( \begin{array}{l} \text{До столкнове-} \\ \text{ния: полная} \\ \text{релятивистская} \\ \text{энергия, наблю-} \\ \text{даемая в лабо-} \\ \text{раторной} \\ \text{системе отсчета} \end{array} \right) \operatorname{sh} \theta_r \quad (79)$$

↑  
1-й этап: эти члены равны друг другу ввиду закона сохранения импульса!

↑  
2-й этап: эти члены равны друг другу ввиду закона сохранения импульса!

↑  
Вывод: эти члены равны друг другу, что доказывает сохранение релятивистской энергии!

$$\left( \begin{array}{l} \text{После столкнове-} \\ \text{ния: полная} \\ x\text{-компонента} \\ \text{импульса, наблю-} \\ \text{даемая в систе-} \\ \text{ме отсчета ракеты} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{После столкнове-} \\ \text{ния: полная} \\ x\text{-компонента} \\ \text{импульса, наблю-} \\ \text{даемая в лабо-} \\ \text{раторной} \\ \text{системе отсчета} \end{array} \right) \operatorname{ch} \theta_r - \left( \begin{array}{l} \text{После столкнове-} \\ \text{ния: полная} \\ \text{релятивистская} \\ \text{энергия, наблю-} \\ \text{даемая в лабо-} \\ \text{раторной} \\ \text{системе отсчета} \end{array} \right) \operatorname{sh} \theta_r \quad (80)$$

Второй раз в этой главе мы *потребуем*, чтобы импульс сохранялся при столкновениях как в лабораторной системе отсчета, так и в системе отсчета ракеты. Ввиду этого требования каждая из скобок, обозначающая импульс в уравнении (79), будет равна соответствующей скобке, обозначающей импульс в уравнении (80). Если справедливы оба уравнения, причем соответствующие скобки для импульсов равны друг другу, то скобки, обозначающие энергию, также должны быть равны. Поэтому в лабораторной системе отсчета полная релятивистская энергия одинакова до и после столкновения: *полная релятивистская энергия при столкновениях сохраняется.*

### Свойства полной релятивистской энергии

Из этих рассуждений мы получаем три вывода. Во-первых, мы можем сопоставить каждой частице массы  $m$  «релятивистскую энергию»

$$E = m \frac{dt}{d\tau}.$$

Во-вторых, если имеется несколько свободно движущихся частиц, то релятивистская энергия этой системы равна сумме релятивистских энергий отдельных частиц. В-третьих, когда эти частицы разлетаются друг от друга после соударений и энергии отдельных частиц изменяются, полная релятивистская энергия системы остается той же, какой она была до столкновения (сохранение релятивистской энергии).

Свойство аддитивности, когда энергия системы свободных частиц равна сумме энергий отдельных частиц системы, знакомо нам на примере импуль-

са, когда полный импульс физической системы складывается из импульсов входящих в нее частиц. Факт такой аддитивности говорит о том, что для нахождения энергии системы частиц достаточно вычислить энергии всех входящих в нее частиц по отдельности.

### Другие способы выразить энергию

Выражение для релятивистской энергии частицы может быть записано множеством способов, причем целесообразность использования каждого из них зависит от обстоятельств. Так, согласно рис. 89, мы получим

$$E = m \frac{dt}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = m \operatorname{ch} \theta. \quad (81)$$

Какие можно сделать заключения о связи между релятивистской энергией  $E$  и скоростью из этого соотношения? Какие заключения можно сделать отсюда о связи между  $E$  и энергией в ньютоновской теории? Между энергией и импульсом? При очень малых скоростях  $\beta$  можно разложить выражение для релятивистской энергии в ряд по степеням  $\beta$ , пользуясь формулой бинома или каким-либо другим методом:

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = m \cdot (1 - \beta^2)^{-1/2} = m \left( 1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{8} \beta^4 + \dots \right).$$

Если скорость  $\beta$  достаточно мала, в этом разложении можно ограничиться с любой желаемой степенью точности первыми двумя членами:

$$E \approx m \left( 1 + \frac{\beta^2}{2} \right) = m + \frac{m\beta^2}{2} \quad (\text{малые скорости}). \quad (82)$$

Но здесь  $\frac{1}{2} m\beta^2$  — обычное ньютоновское выражение для кинетической энергии, взятое в единицах массы. Значит, релятивистская энергия *имеет отношение* к кинетической энергии частицы, хотя она (величина  $E$ ) и *не равна* этой кинетической энергии ввиду наличия добавочного члена  $m$ . Этот добавочный член сохраняется, даже если частица находится в состоянии покоя, т. е. вообще лишена кинетической энергии. Поэтому член  $m$  называют *энергией покоя*  $E_{\text{покоя}}$  частицы,

$$E_{\text{покоя}} = m \quad (\text{энергия покоя в единицах массы}). \quad (83)$$

Выражение для энергии покоя частицы в обычных единицах  $E_{\text{покоя}}$  *обычн* можно получить из выражения для энергии покоя в единицах массы, умножая последнее на множитель перевода  $c^2$ . Мы приходим тогда к знаменитому выражению

$$E_{\text{покоя}} \text{обычн} = mc^2 \quad (\text{энергия покоя в обычных единицах}). \quad (84)$$

### Включение энергии покоя существенно для выполнения закона сохранения

Невозможно удовлетворить требованию сохранения импульса и энергии во всех инерциальных системах отсчета, если не учитывать во всех системах энергию покоя в составе полной энергии. Этот урок, преподнесенный нам физикой пространства-времени, никак не предполагался в ньютоновской физике. Механика Ньютона не знает выражения для энергии покоя частицы, хотя, правда, в ней допускается добавление к энергии частицы любой постоянной добавочной энергии без нарушения законов, описывающих движение этой частицы. Предельное значение релятивистского выражения для энергии в случае малых скоростей можно рассматривать как нахождение величины этой ранее произвольной постоянной.

### Релятивистское выражение для кинетической энергии

Можно считать, что релятивистская энергия частицы в любой системе отсчета складывается из двух частей: энергии покоя частицы  $m$  плюс дополнительной энергии, которой обладает частица благодаря своему движению. Этот добавок и есть кинетическая энергия частицы. Тогда релятивистское выражение для кинетической энергии имеет вид

$$T = E - E_{\text{покоя}} = m \operatorname{ch} \theta - m = m (\operatorname{ch} \theta - 1) = \\ = m \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \text{ (кинетическая энергия в единицах массы)}. \quad (85)$$

Это выражение для релятивистской кинетической энергии справедливо для частиц, движущихся с любыми скоростями. Напротив, *ньютоновская формула для кинетической энергии  $1/2m\beta^2$  верна лишь для медленных частиц.*

При возрастании скорости и ее стремлении к скорости света энергия возрастает безгранично. Поэтому, если бы мы даже располагали неограниченными энергетическими ресурсами, нам все равно не удалось бы разогнать частицу до скорости света. Таблица 10 иллюстрирует это быстрое возрастание энергии, необходимой для ускорения частицы по мере приближения ее скорости к скорости света.

Энергию как временную компоненту 4-вектора энергии-импульса или как сторону треугольника на рис. 90, направленную вдоль оси времени,

Таблица 10. Энергия, которую должен получить атом водорода ( $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг) для того, чтобы приобрести скорость, близкую к скорости света

$\beta$	Расстояние, пройденное световой вспышкой от линии старта при составлении за время, пока частица не отстанет на 1 см	$\frac{E_{\text{обычн}}}{\text{тс}^2}$	$\frac{T_{\text{обычн}}}{\text{тс}^2}$	$\frac{T_{\text{обычн}}}{\text{джоули}}$	Обыденный эквивалент этой энергии
0,5	2 см	1,15	0,15	$2 \cdot 10^{-11}$	—
0,99	1 м	7,1	6,1	$10^{-9}$	—
0,99999	1 км	222	221	$3 \cdot 10^{-8}$	Кинетическая энергия одной крупинки поваренной соли, упавшей с высоты 1 см
0,999...99 (13 девяток)	$10^{11}$ м <sup>1)</sup>	$2,2 \cdot 10^8$	$\sim 2,2 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^{-4}$	Кинетическая энергия одной крупной дробинки, упавшей с высоты 1 см
0,9999...99 (18 девяток)	$10^{16}$ м <sup>2)</sup>	$7,1 \cdot 10^8$	$\sim 7,1 \cdot 10^8$	$10^{-1}$	Кинетическая энергия одной крупной дробинки, упавшей из окна третьего этажа
0,9999...999 (28 девяток)	$10^{26}$ м <sup>3)</sup>	$7,1 \cdot 10^{13}$	$7,1 \cdot 10^{13}$	$10^4$	Кинетическая энергия мотоцикла, движущегося со скоростью 40 км/час

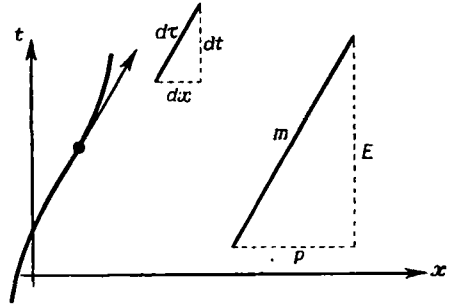
1) Около  $2/3$  расстояния от Солнца до Земли.

2) Около одного светового года.

3) Приблизительное расстояние до самой далекой сфотографированной в настоящее время галактики.



Р и с. 90. 4-вектор энергии-импульса.



можно вычислить по методам, обычно применяемым для нахождения сторон любого треугольника. В двух основных методах используются *пропорциональность* и *теорема Пифагора*. Чтобы найти энергию как функцию скорости, мы пользовались подобием треугольника  $mEr$  и треугольника  $d\tau dt dx$  (см. рис. 87). Из пропорциональности их сторон мы нашли соотношение

$$\frac{E}{m} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Теперь же нас интересует зависимость энергии от импульса. Чтобы найти ее, достаточно проанализировать один лишь треугольник  $mEr$ , но при этом необходимо иметь в виду, что для него справедлива не евклидова, а лоренцева геометрия. Квадрат гипотенузы определяется тогда не как сумма, а как разность квадратов катетов, так что

$$m^2 = E^2 - p^2 \quad (\text{в единицах массы}). \quad (86)$$

#### Масса как абсолютная величина 4-вектора энергии-импульса

Но так определяется квадрат «длины» 4-вектора энергии-импульса<sup>1)</sup>. Эта формула совершенно аналогична выражению для квадрата четырехмер-

<sup>1)</sup> По ряду причин удобно выражать квадрат абсолютной величины 4-вектора через все четыре компоненты этого вектора, однако при этом следует быть несколько более внимательным, чем при записи квадрата 3-мерного вектора в евклидовом пространстве. В этой книге, как и в большей части современной литературы, 4-векторы записываются через их компоненты с *верхними индексами* (контравариантные компоненты):

$$[p^t = E = m \frac{dt}{d\tau}, \quad p^x = m \frac{dx}{d\tau}, \quad p^y = m \frac{dy}{d\tau}, \quad p^z = m \frac{dz}{d\tau}.$$

В другом представлении используются *нижние индексы* (ковариантные компоненты), однако *все пространственные компоненты при этом меняют знак*:

$$p_t = m \frac{dt}{d\tau}, \quad p_y = -m \frac{dy}{d\tau}, \quad p_x = -m \frac{dx}{d\tau}, \quad p_z = -m \frac{dz}{d\tau}.$$

Эти два альтернативных представления, использующие контравариантные и ковариантные компоненты (верхние и нижние индексы), применимы не только к  $p$ , но и к другим 4-векторам, например к радиусу-вектору  $R$ , соединяющему начало координат некоторой инерциальной системы отсчета с каким-либо данным событием (мировой точкой), так что

$$R^t = t, \quad R^x = x, \quad R^y = y, \quad R^z = z$$

и

$$R_t = t, \quad R_x = -x, \quad R_y = -y, \quad R_z = -z.$$

В этих обозначениях инвариантный квадрат интервала для события, отделенного от начала временноподобным интервалом, имеет стандартный вид

$$\tau^2 = R_t R^t + R_x R^x + R_y R^y + R_z R^z = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Если же интервал является пространственноподобным, его квадрат следует записывать как

$$\sigma^2 = -(R_t R^t + R_x R^x + R_y R^y + R_z R^z) = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

ного пространственно-временного интервала между соседними мировыми точками на мировой линии частицы

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - (dr)^2.$$

В обеих формулах слагаемые, стоящие справа, зависят от состояния движения частицы или той системы отсчета, в которой производится наблюдение. Иными словами, отдельные компоненты 4-вектора энергии-импульса (энергия частицы  $E$  и ее импульс  $p$ ) обладают разными значениями в лабораторной системе отсчета и в системе отсчета ракеты. Левые части каждого из этих соотношений (масса покоя  $m$  и интервал  $\tau$ ), напротив, одинаковы во всех системах отсчета.

Явное выражение для энергии через импульс можно получить из формулы (86), разрешая ее относительно  $E$ :

$$E = \sqrt{m^2 + p^2}. \quad (87)$$

Это выражение справедливо в равной мере как при больших, так и при малых импульсах, причем его можно упростить для обоих предельных случаев.

*Выражение энергии через импульс:  
ньютоновский и ультрарелятивистский  
предельные случаи*

Когда импульс  $p$  мал по сравнению с  $m$  (т. е. когда скорость  $\beta$  весьма мала по сравнению с единицей — «нерелятивистский предел»), выражение (87) можно разложить, пользуясь формулой для бинома или каким-

4-вектор энергии-импульса является временноподобным 4-вектором по весьма простой причине: ведь две последовательные мировые точки на мировой линии одной и той же частицы разделены временноподобным интервалом. Поэтому квадрат абсолютной величины этого вектора следует вычислять по формуле, аналогичной формуле для  $\tau^2$ , т. е.

$$\begin{aligned} (\text{Квадрат абсолютной величины}) &= p_t p^t + p_x p^x + p_y p^y + p_z p^z = \\ &= \frac{m^2 [(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2]}{d\tau^2} = m^2. \end{aligned}$$

В геометрии Евклида, где векторы обладают лишь пространственными компонентами, такое различие между верхними и нижними индексами несущественно, и там часто используются лишь нижние индексы, причем в евклидовой геометрии знак пространственных контравариантных и ковариантных компонент берется один и тот же. Однако в геометрии пространства-времени, где существует разница в знаке пространственных компонент, взятых с верхними или с нижними индексами, необходимо явно учитывать контравариантность и ковариантность компонент. Кроме того, обычно удобнее работать с контравариантными компонентами 4-векторов (верхние индексы!), так как именно эти компоненты часто бывают непосредственно связаны с координатами мировых точек, дифференциалы радиусов-векторов которых являются контравариантными по определению в произвольных системах координат (не только в декартовых).

[В оригинале книги это примечание имело несколько иной вид, а именно авторы приняли, что при переходе от контравариантных к ковариантным компонентам изменяют знак не пространственные, а временная компонента 4-векторов, что позволяет проще увязать изложение с евклидовой геометрией для 3-мерных векторов. Однако в современной литературе, особенно по общей теории относительности, преобладает противоположный выбор сигнатуры, так что многие авторы перешли к принятой нами здесь записи компонент векторов и в частной теории относительности, например Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц в последнем издании (1967 г.) «Теории поля». Для того чтобы стандартизировать изложение, переводчику пришлось несколько изменить данное примечание, сохранив общий стиль авторов. Следует отметить, что здесь, как и в других частях книги, они предполагают, что используются лишь декартовы системы координат; если бы мы не ограничивались здесь декартовыми координатами (перейдя, например, к сферическим координатам), нам пришлось бы явно проводить различие между ковариантными и контравариантными компонентами векторов уже в 3-мерном евклидовом пространстве. Тогда радиус-вектор не был бы истинным вектором: свойствами вектора обладали бы лишь его бесконечно малые приращения. — *Прим. перев.*]

либо иным способом, и получить

$$E = m \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m}\right)^2} = m + \frac{p^2}{2m} + \frac{p^4}{8m^3} + \dots (\text{малые } p).$$

При достаточно малых значениях импульса  $p$  этот ряд можно с любой степенью точности приравнять его первым двум членам

$$E \approx m + \frac{p^2}{2m} \quad (\text{малые } p). \quad (88)$$

Первое слагаемое имеет здесь смысл энергии покоя, а второе представляет собой ньютоновское выражение для кинетической энергии частицы с импульсом  $p$ .

Если же импульс  $p$  очень велик по сравнению с  $m$  («ультрарелятивистский предел»), то точное выражение (87) снова может быть разложено в степенной ряд, на этот раз в виде

$$E = p \sqrt{1 + \left(\frac{m}{p}\right)^2} = p + \frac{m^2}{2p} + \frac{m^4}{8p^3} + \dots (\text{большие } p).$$

Если импульс достаточно велик, этот ряд можно с любой желаемой степенью точности приравнять его первому слагаемому:

$$E \approx p \quad (\text{ультрарелятивистский предел}). \quad (89)$$

В этом предельном случае масса покоя не играет роли во взаимной связи импульса и энергии.

Правдоподобно ли, что катеты  $E$  и  $p$  треугольника на рис. 90 могут неограниченно возрастать, в то время как гипотенуза  $m$  остается постоянной и оказывается меньше любого из катетов? Возможно ли, чтобы в прямоугольном треугольнике гипотенуза сохраняла постоянную длину, в то время как катеты неограниченно удлинялись? Такое поведение длин гипотенузы и катетов в корне противоречит законам евклидовой геометрии. Однако рассматриваемая нами геометрия не является евклидовой, а в лоренцевой геометрии пространства-времени квадрат гипотенузы равен *разности* квадратов катетов. Поэтому сочетание не изменяющейся в длине гипотенузы с неограниченно растущими и в пределе равными друг другу катетами,  $E$  и  $p$ , отнюдь не парадоксально.

### *Импульс как мера скорости переноса массы-энергии*

Можно и иначе убедиться в том, что энергия должна приближаться по величине к импульсу, когда каждая из этих величин становится много больше, чем масса покоя. В самом общем случае, без каких бы то ни было приближений, из формул

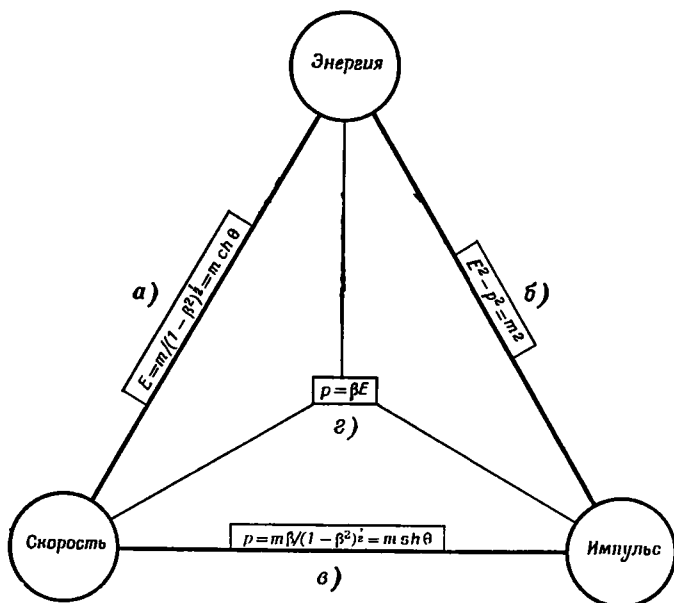
$$p = \frac{m\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{и} \quad E = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

следует результат

$$p = \beta E \quad (\text{для всех скоростей}). \quad (90)$$

Из этого равенства следует, что импульс  $p$  неограниченно приближается по своей величине к энергии  $E$ , когда скорость становится сколь угодно близкой к скорости света.

Существует очень наглядная интерпретация равенства (90). Здесь  $E$  описывает массу-энергию частицы, а  $\beta$  — скорость, с которой движется эта масса-энергия. Поэтому их произведение, *импульс  $p$ , является мерой скорости переноса массы-энергии*. Любопытно, что множитель, описывающий в этой формуле массу-энергию [величина  $E$  в равенстве (90)], не равен



Р и с. 91. Решать, какая из релятивистских формул удобна для анализа экспериментальных данных, следует исходя из величин, измеряемых на опыте:

а) Скорость определяется по времени полета, энергия — из закона сохранения, примененного к предыдущим или последующим столкновениям.

б) Полезна при анализе столкновений, когда нас не интересует скорость, а внимание сосредоточено на проверке или применении законов сохранения.

в) Скорость определяется по времени полета, импульс — по искривлению трека частицы в магнитном поле.

г) Для нахождения  $p$ , или  $\beta$ , или  $E$ , когда две из величин известны;  $m$  не представляет интереса.

той массе  $m$ , появления которой можно было бы ожидать из теории Ньютона. За перенос массы-энергии ответственна не одна лишь масса покоя, но сумма массы покоя с массовым эквивалентом кинетической энергии, иными словами, полная масса-энергия  $E$ .

Масса покоя непосредственно не представлена в равенстве  $p = \beta E$ . Мы помещаем это равенство поэтому в центр рис. 91 и размещаем вокруг него прочие ключевые формулы, связывающие энергию, импульс и скорость. Связи между каждой из них обладают своими специфическими областями применения, как это указано в подписи к рисунку.

Мы ничего не говорили в нашем исследовании импульса и энергии о внутренней структуре (если таковая имеется) объекта — носителя этих характеристик. Этот объект может быть ракетой, сложной органической молекулой, элементарной частицей или даже фотоном — элементарным квантом света. Во всех случаях движение такого объекта совершается со скоростью, меньшей скорости света, за исключением, конечно, самого света. Для света, распространяющегося в вакууме, скорость  $\beta$  в точности равна единице. В этом случае формулы

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{и} \quad p = \frac{m\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

с очевидностью теряют всякий смысл, но зато равенство (90) приобретает исключительную простоту:

$$p = E \quad (\text{для любого вида энергии, распространяющегося со скоростью света}). \quad (91)$$

Кроме того, из соотношения  $m^2 = E^2 - p^2$  мы видим, что в этом случае масса покоя равна нулю. Следовательно, *любой объект, переносящий энергию по прямолинейному пути со скоростью света, характеризуется нулевой массой покоя*. В настоящее время известны лишь три механизма переноса энергии со скоростью света — электромагнитное излучение, гравитационное излучение и нейтрино, причем экспериментально из них наблюдались пока лишь первый и последний <sup>1)</sup>.

*Любой сгусток энергии, движущийся со скоростью света, имеет нулевую массу покоя*

Равенство  $p = E$  выполняется со стопроцентной точностью лишь для излучения с нулевой массой покоя, но оно является сколь угодно точным приближением для любой частицы, если ее энергия достаточно велика по сравнению с массой покоя частицы. Поэтому в таком ультрарелятивистском пределе частица с массой покоя  $m$  ведет себя практически так же, как фотон, с точки зрения законов сохранения энергии и импульса.

### 13. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЭНЕРГИИ И МАССЫ ПОКОЯ

*Масса покоя конечного состояния системы при неупругом соударении больше, чем масса покоя начального состояния*

Полный импульс всех частиц системы сохраняется при столкновении; сохраняется и их полная энергия (сумма энергий покоя и кинетических энергий). Этим принципом мы руководствовались, изучая столкновения частиц. Но будет ли верным придерживаться этого принципа, перейдя от упругих столкновений к *неупругим*? Пусть пластилиновый шарик с большой скоростью налетает на другой пластилиновый шарик, покоящийся на поверхности катка. При столкновении они слипаются и вместе скользят по льду. Мы с готовностью примем, что к такому столкновению применим закон сохранения импульса, но есть ли основания думать, что здесь имеет смысл применять и закон сохранения энергии? При таком столкновении часть энергии превратится в теплоту, а другая часть первоначальной энергии превратится во вращательную энергию крутящейся вокруг своего центра масс гантели, образованной слипшимися шариками. Как описать адекватно этот более сложный случай, если при характеристике системы мы ограничимся лишь двумя величинами,  $E$  и  $p$ , связанными между собой элементарной формулой  $E^2 - p^2 = m^2$ ?

*Ответ:* следует признать, что масса покоя конечного состояния системы превышает сумму масс покоя объектов до столкновения. Это — новое утверждение физики пространства-времени, которого не знала и о котором вообще не могла догадываться ньютоновская механика. Возрастание массы покоя измеряет как раз ту энергию, которая перешла в теплоту и в энергию вращения, а также в прочие формы внутреннего возбуждения конечного состояния системы. Если не учитывать того изменения массы покоя, которое происходит при многих столкновениях, мы столкнемся с кажущимися парадок-

<sup>1)</sup> По поводу обнаружения нейтрино см. C. L. Cowan, F. Reines, F. V. Harrison, H. W. K. Guise, A. D. McGuire, Science, 124, 103 (1956).

Относительно реализуемых в настоящее время попыток обнаружить гравитационное излучение, приходящее от космических источников, см. J. Weber, Gravitational Waves, in Gravitation and Relativity, ed. H.-Y. Chiu and W. F. Hoffman, New York, 1964. [Имеется русский перевод: сб. «Гравитация и относительность», изд-во «Мир», М., 1965, стр. 179. — *Прим. перев.*]

ниями закона сохранения энергии, либо закона сохранения импульса, либо обоих этих законов.

Как производить учет этого изменения массы покоя? В примере с двумя пластилиновыми шарами следует применить:

1) закон сохранения энергии

$$E_{\text{конечная}} = E_{\text{начальная}} = E_1 + m_2;$$

2) закон сохранения импульса

$$P_{\text{конечный}} = P_{\text{начальный}} = P_1 + P_2 = P_1$$

и 3) соотношение

$$(m_{\text{конечная}})^2 = (E_{\text{конечная}})^2 - (P_{\text{конечный}})^2.$$

Мы получим тогда

$$\begin{aligned} (m_{\text{конечная}})^2 &= (E_1 + m_2)^2 - p_1^2 = E_1^2 + 2E_1m_2 + m_2^2 - p_1^2 = \\ &= (E_1^2 - p_1^2) + 2E_1m_2 + m_2^2 = m_1^2 + 2(m_1 + T_1)m_2 + m_2^2 = \\ &= (m_1 + m_2)^2 + 2T_1m_2. \end{aligned} \quad (92)$$

*Законы сохранения справедливы во всех случаях столкновений — упругих, неупругих и сверхупругих*

Очевидно, что масса покоя объединившихся шаров больше, чем сумма масс покоя первоначальных объектов 1 и 2. Кроме того, эта добавочная масса покоя тем больше, чем больше кинетическая энергия соударения  $T$ . Из этого примера мы заключаем, что *законы сохранения энергии и импульса в равной мере справедливы (и равно полезны) как при упругих, так и при неупругих столкновениях.*

Как же реализуется это неожиданное «бесплатное приложение» к законам сохранения? Что оно говорит нам об эквивалентности энергии и массы покоя? Эти вопросы требуют более детального обсуждения.

«Энергия сохраняется в каждой системе отсчета, если импульс сохраняется как в лабораторной системе отсчета, так и в системе ракеты». При доказательстве этой теоремы на основании уравнений (79) и (80) не имело значения, один ли объект получался в результате столкновения, или разлетались тысячи осколков, или между двумя частицами происходило упругое соударение. Физика знает множество реакций, при которых изменяется число частиц. Одной из самых драматических является рождение пары электронов, один из которых имеет отрицательный, а другой — положительный заряд (электрон и позитрон), когда в пустом пространстве сталкиваются два носителя энергии, например при столкновении двух электронов:

$$e^- (\text{быстрый}) + e^- (\text{покоящийся}) = e^- + e^- + e^- + e^+.$$

Такой процесс называется неупругим, так как кинетическая энергия превращается в массу покоя. Существуют также сверхупругие процессы, при которых часть массы покоя объекта (законсервированная внутренняя энергия) превращается в энергию кинетическую:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} \text{Медленный} \\ \text{электрон} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Атом, содержащий энергию} \\ \text{внутреннего возбуждения} \end{array} \right) = \\ = \left( \begin{array}{c} \text{«Разрядившийся»} \\ \text{атом} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Быстрый} \\ \text{электрон} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Наконец, происходят процессы распада, когда одна частица превращается в две частицы с меньшей суммарной массой покоя:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0;$$

положительный  $K$ -мезон (масса 967 масс электрона) распадается за  $10^{-8}$  сек

на положительный пи-мезон (масса 273 массы электрона) и нейтральный пи-мезон (масса 264 массы электрона).

Все усложнения, происходящие в теории вследствие изменения числа частиц, никоим образом не сказываются на справедливости законов сохранения импульса и энергии. К счастью, продукты реакции и частицы, вступающие в реакции, вместе с их энергиями и импульсами, могут быть определены и исследованы независимо от того, является ли упругой или неупругой реакция, которая только что произошла с ними или которая должна вскоре произойти. Каждая частица всегда несет с собой свой 4-вектор энергии-импульса. При этом она не знает о том, предстоит ли ей испытать упругое или неупругое столкновение. Она неизбежно должна всегда располагать всей бухгалтерией, необходимой для возможного *упругого* столкновения. Поэтому независимо от того, предстоит ли упругое или неупругое столкновение, до этого столкновения импульс и энергия каждой частицы являются вполне определенными. Следовательно, определенными являются и *полные* импульс и энергия всей системы до столкновения. Подобным же образом известны *полные* импульс и энергия и после столкновения. Поэтому можно говорить об *изменении* (если таковое происходит) полных энергии и импульса в ходе столкновения. Это изменение при упругом столкновении равно нулю. Изменение энергии отсутствует также и в неупругих столкновениях ввиду того, что изменение полного *импульса* равно нулю как в лабораторной системе отсчета, так и в системе ракеты; поруча тому — наши прежние рассуждения [см. уравнения (79) и (80)]. Мы никогда не имели никаких серьезных оснований для сомнения в том, что импульс, а значит, и энергия сохраняются в неупругих соударениях.

Что можно сказать теперь о подтверждении законов сохранения импульса и энергии в неупругих процессах данными наблюдений? Импульс и энергия были определены таким образом, чтобы они сохранялись при простейших упругих столкновениях. Поэтому уже невозможно изменить их определения с тем, чтобы привести в соответствие с более широким кругом процессов столкновения. Значит, либо измеренные в любых экспериментах изменения импульса и энергии равны нулю, и тогда законы сохранения импульса и энергии образуют фундаментальный принцип, либо изменение импульса и энергии *отлично от нуля*, и в этом случае данные опыта привели бы к революции, опрокинув принципы теории относительности. Результаты наблюдений показывают, что изменение равно нулю. Такая проверка повторяется ежедневно и ежечасно в ходе постоянной регистрации столкновений частиц высоких энергий в лабораториях всего мира.

---

*Мы располагаем бесчисленными данными наблюдений, подтверждающими выполнение законов сохранения*

Анализ экспериментов по проверке законов сохранения и обсуждение нашего опыта в их истолковании см. в упражнениях 90—100.

Энергия, высвобождающаяся при сгорании угля или газа, при взрыве дипамита, представляется нам в масштабах повседневного опыта громадной. Однако, если перевести ее величину на язык эквивалентной массы, мы обнаруживаем, что перешедшая в энергию часть массы не составляет и  $10^{-9}$  от полной величины массы покоя (см., например, упражнение 63), а такое изменение массы слишком мало для того, чтобы его можно было обнаружить с помощью приборов, которыми мы сейчас располагаем. Поэтому в поисках той области, где было бы возможно досконально проверить законы сохранения, мы вынуждены обращаться к миру физики элементарных частиц и к миру ядерной физики.

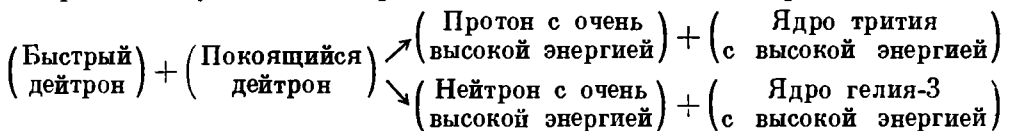
Таблица 11. Сколько проверок геометрии Евклида и геометрии Лоренца производится каждый год?

Проверки евклидовой геометрии	Проверки лоренцевой геометрии
42 000 геодезистов (согласно статистическим данным США за 1963 г.), каждый из которых производит по 20 съезок в год, определяя при каждой по $n$ вершин ограничивающего многоугольника, измеряя внутренний угол при каждой вершине, складывая углы и сравнивая полученную сумму с величиной $(n - 2) \cdot 180^\circ$ , предсказываемой евклидовой геометрией	50 ускорителей элементарных частиц (ориентировочно), дающих частицы с энергией выше 100 Мэв, каждый из которых работает по 100 дней в году и каждый регистрирует по 200 столкновений в день, в которых должны были бы чувствоваться отклонения от релятивистских законов сохранения
Результат: 840 000 проверок в год, каждая с относительной точностью $1 \cdot 10^{-4}$ или выше	Результат: 1 000 000 проверок в год, каждая с относительной точностью $1 \cdot 10^{-4}$ или выше

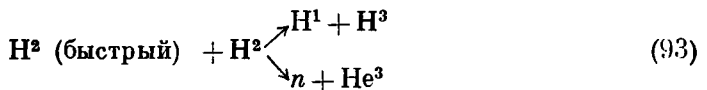
В ядерной физике многие объекты исследования живут лишь очень короткое время. Нелегко точно определить значения масс таких короткоживущих частиц с помощью обычных масс-спектрометров. Вместо этого их массы определяются с помощью законов сохранения импульса и энергии, применяемых к процессам столкновений или превращений частиц, массы одной или более из которых нам уже известны. Уже при таких расчетах можно проверять законы сохранения, так как интересующая нас частица часто образуется в ходе нескольких различных реакций. Однако для того, чтобы непосредственно проверить равенство энергии, выделяющейся при превращениях, и энергии, вычисляемой по изменению величины массы покоя, лучше обратиться к миру ядерной физики. Там величины массы определяются непосредственно и с высокой степенью точности как для стабильных ядер, так и для некоторых нестабильных.

*Ядерная физика предоставляет особенно благоприятные возможности для точной проверки законов сохранения*

Возможности точного сравнения величины выделяющейся энергии и изменения массы наиболее благоприятны в случае легких ядер, так как при этом изменение массы в ходе рядовой ядерной реакции составляет более значительную часть полной массы и, следовательно, может быть более точно определено, чем в случае тяжелых ядер. Мы рассмотрим поэтому реакцию между двумя самыми легкими атомными ядрами, — ту реакцию, которая к тому же имеет громадное значение в наш ядерный век:



или



Обе альтернативные реакции, описываемые схемой (93), происходят со сравнимыми частотами при взрыве водородной бомбы (или «термоядерного оружия»). Они приводят к высвобождению значительной энергии, что характерно для устройств, использующих дейтерий («тяжелый водород»  $\text{H}^2$ ). Кинетическая энергия продуктов такой термоядерной реакции в сотни раз превышает кинетическую энергию первоначальных дейтронов.



*Масса ядра трития, определенная из законов сохранения, согласуется с его массой, измеренной с помощью спектрометра*

Реакция, приводящая к возникновению ядра трития [первая из двух альтернативных реакций (93)], служит наиболее точным самостоятельным методом проверки законов сохранения, какой только возможно найти в физике вообще. Реализация этого метода возможна потому, что с помощью масс-спектрометра удается независимым образом точно определять массы покоя всех частиц, принимающих участие в этой реакции (дейтрона, протона и ядра трития).

Но массу покоя нейтрона невозможно определить независимым образом столь же точно. Поэтому мы не концентрируем внимания на второй реакции (93), приводящей к образованию нейтрона. Она непригодна для проведения наиболее точных проверок эквивалентности массы и энергии. Нейтрон — нестабильная частица (со средним временем жизни около 17 мин), а что важнее всего, он безразличен к воздействию электрического и магнитного полей в масс-спектрометре (электрически нейтрален!). Такая безразличность является препятствием для прецизионного независимого определения массы нейтрона.

Допустим, что мы сосредоточили бы здесь свое внимание не на ядре трития, а на нейтроне. На что могли бы мы надеяться, не располагая независимо определенным *точным* значением массы нейтрона? Нам пришлось бы отказаться от попыток *проверки* законов сохранения, и вместо этого мы могли бы *использовать* законы сохранения для определения массы нейтрона с относительной точностью около  $10^{-5}$ . Что же может гарантировать нам, что законы сохранения дают в применении ко второй реакции средство для надежного определения массы нейтрона? Дело в том, что законы сохранения, если применить их к первой реакции, дают такое значение массы ядра трития, что оно согласуется с данными масс-спектрометрии даже лучше, чем до  $10^{-5}$  своей величины. (См. на стр. 166—167 «Анализ реакции  $\text{H}^2 + \text{H}^2 \rightarrow \text{H}^3 + \text{H}^3$ ».) Как эта последняя проверка законов сохранения, обладающая наивысшей точностью, так и множество других экспериментов в прочих областях физики, проводимых с несколько меньшей прецизионностью, убедительно говорят о полноценности принципа сохранения.

Необходимо сделать оговорку о тех единицах, в которых проведены расчеты на стр. 166—167. В принципе было бы естественно выразить все значения энергии и импульса в килограммах по аналогии с предыдущими расчетами в этой главе. Однако для этого пришлось бы перевести все величины, измеренные с помощью масс-спектрометра, из «атомных единиц массы» (АЕМ — новая шкала, выбранная в 1961 г., когда перешли от  $\text{O}^{16} = 16,000$  к  $\text{C}^{12} = 12,000$ ) в килограммы, одновременно переводя значения кинетической энергии, измеряемые физиками-ядерщиками в электронвольтах, в килограммы. Удобнее выражать энергию в единицах АЕМ, избегая расчетов, в ходе которых АЕМ переводятся в килограммы. К тому же все используемые нами формулы справедливы при любом выборе единиц для массы-энергии, лишь бы только эти единицы последовательно использовались от начала и до конца. Но тогда будет нужно перейти от электронвольт к АЕМ. Как это сделать? К счастью, для этого нет необходимости знать число килограммов, содержащихся в 1 АЕМ, или, что то же, не надо знать, сколько атомов содержится в одном грамм-атоме (число Авогадро  $N = (6,02252 \pm \pm 0,00028) \cdot 10^{23}$ ). Та неопределенность, с которой в настоящее время известна эта величина ( $5 \cdot 10^{-5}$ ), повлияла бы на все наши выводы, если бы мы захотели совершить переход к килограммам. Множитель перехода от электронвольт к АЕМ вычислен на стр. 168.

АНАЛИЗ <sup>1</sup>) РЕАКЦИИ  $\text{H}^2$  (БЫСТРЫЙ) +  $\text{H}^2 \rightarrow \text{H}^1 + \text{H}^3$ 

Законы сохранения импульса и энергии:

$$E_2 + m_2 = \bar{E}_1 + \bar{E}_3 \quad (\text{сохранение энергии}), \quad (94)$$

$$p_2^x + 0 = 0 + \bar{p}_3^x \quad (\text{сохранение компоненты } x \text{ импульса}), \quad (95)$$

$$0 + 0 = \bar{p}_1^y + \bar{p}_3^y \quad (\text{сохранение компоненты } y \text{ импульса}), \quad (96)$$

$$0 + 0 = 0 + \bar{p}_3^z \quad (\text{сохранение компоненты } z \text{ импульса}). \quad (97)$$

Нижние индексы указывают здесь массовое число изотопа, а черта над символом означает, что эта величина взята после реакции.

Любое из четырех уравнений (94) — (97) может рассматриваться как независимый источник информации о ядре трития — либо относительно его энергии, либо о соответствующей компоненте его импульса. Но нас интересует не вся совокупность этой информации — мы хотим найти одну простую характеристику ядра трития, не совпадающую ни с одной из этих четырех величин, а именно его массу покоя. К счастью, эта масса покоя определяется как абсолютная величина 4-вектора энергии-импульса:

$$m_3^2 = \bar{E}_3^2 - (\bar{p}_3^x)^2 - (\bar{p}_3^y)^2 - (\bar{p}_3^z)^2. \quad (98)$$

Подставим в эту формулу величины компонент из уравнений (94) — (97); мы получим тогда

$$\begin{aligned} m_3^2 &= (E_2 + m_2 - \bar{E}_1)^2 - (p_2^x + 0 - 0)^2 - (0 + 0 - \bar{p}_1^y)^2 - (0 + 0 - 0)^2 - \\ &= \bar{E}_1^2 - 0 - (\bar{p}_1^y)^2 - 0 + \underbrace{E_2^2 - (p_2^x)^2 - (0 - 0 + m_2^2 - 2m_2\bar{E}_1 + 2m_2\bar{E}_2 - 2E_2\bar{E}_1)}_{m_1^2} = \\ &= m_1^2 + 2(m_2 + E_2)(m_2 - \bar{E}_1), \\ m_3^2 &= m_1^2 + 2(m_2 + m_2 + T_2)(m_2 - m_1 - \bar{T}_1). \end{aligned} \quad (99)$$

Мы воспользовались здесь соотношениями вида  $E = m + T$ , связывающими кинетическую и полную энергии.

Нам известны значения всех величин в правой части уравнения (99). Таким образом, с помощью этого уравнения можно предвычислить величину массы ядра трития  $m_3$ . Численные значения масс, фигурирующих в правой части уравнения (99), находятся из опытов с масс-спектрометром и выражаются в «атомных единицах массы», АЕМ, где за основу взята масса изотопа углерода  $\text{C}^{12}$ , принятая за 12,0000...АЕМ. Эти массы равны

$$m_2 = 2,0141019 \pm 0,0000003 \text{ АЕМ}; \quad (100)$$

$$m_1 = 1,0078252 \pm 0,0000003 \text{ АЕМ}. \quad (101)$$

Кинетические энергии были измерены в опытах с ядерными реакциями (см. рис. 92):

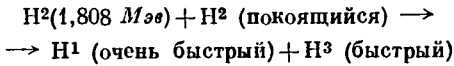
$$\begin{aligned} (\text{Кинетическая энергия первоначального дейтрона}) &= \bar{T}_2 = \\ &= (1,808 \pm 0,002 \text{ Мэв}) \cdot (1,073562 \cdot 10^{-3} \text{ АЕМ/Мэв}) = \\ &= 0,001941 \pm 0,000002 \text{ АЕМ} \end{aligned} \quad (102)$$

(вывод множителя перехода от единиц Мэв к атомным единицам массы см. стр. 168);

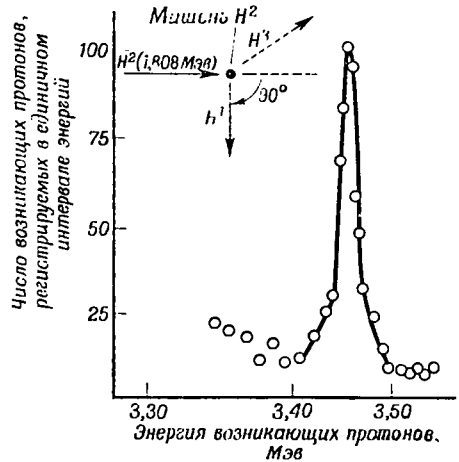
$$\begin{aligned} (\text{Кинетическая энергия полученного протона}) &= \bar{T}_1 = \\ &= (3,467 \pm 0,0035 \text{ Мэв}) \cdot (1,073562 \cdot 10^{-3} \text{ АЕМ/Мэв}) = \\ &= 0,003722 \pm 0,000004 \text{ АЕМ}. \end{aligned} \quad (103)$$

<sup>1</sup>) Приведенные здесь экспериментальные данные были опубликованы в статье E. N. Strait, D. M. Van Patter, W. W. Buchner, A. Spurduto, Physical Review, 81, 747 (1951). Авторы выражают признательность Бюхнеру и Спердугу за дополнительную информацию и за обсуждение последовательной интерпретации этих данных.

Рис. 92. Доказательство того, что протоны ( $H^1$ ), образуемые в реакции



под углом  $90^\circ$  к направлению движения первоначального дейтрона ( $H^2$ ), обладают энергией  $3,467 \text{ Мэв}$ . (Значение  $3,467 \text{ Мэв}$  было получено при сравнении приведенных здесь результатов с данными ряда аналогичных промеров.) Число протонов, вылетающих с энергиями в интервале от  $E - 0,1 \text{ Мэв}$  до  $E + 0,1 \text{ Мэв}$ , изображено как функция  $E$ . Разброс энергий вызван конечной толщиной мишени; конечной шириной щели, выделяющей пучок; неоднородностями магнитного поля и т. д. Экспериментальная кривая взята из D. M. Van Patter, W. W. Buchner, Physical Review, 87, 51 (1952).



Подставим эти значения в равенство (99), используя лишь шесть значащих цифр соответственно точности измерений кинетической энергии. Два члена в правой части этого равенства оказываются равны

$$\begin{aligned} m_1^2 &= 1,015712 \text{ АЕМ}^2 \\ 2(2m_2 + T_2)(m_2 - m_1 - \bar{T}_1) &= 8,080881 \pm 0,00003 \text{ АЕМ}^2 \\ (\text{Сумма этих членов}) = m_3^2 &= 9,096593 \pm 0,00003 \text{ АЕМ}^2. \end{aligned}$$

Квадратный корень этой величины и есть масса ядра трития, предсказываемая при анализе данной ядерной реакции:

$$m_3 = 3,016056 \pm 0,000015 \text{ АЕМ}. \quad (104)$$

Сравним это значение массы ядра трития со значением, измеренным с помощью масс-спектрометра<sup>1)</sup>:

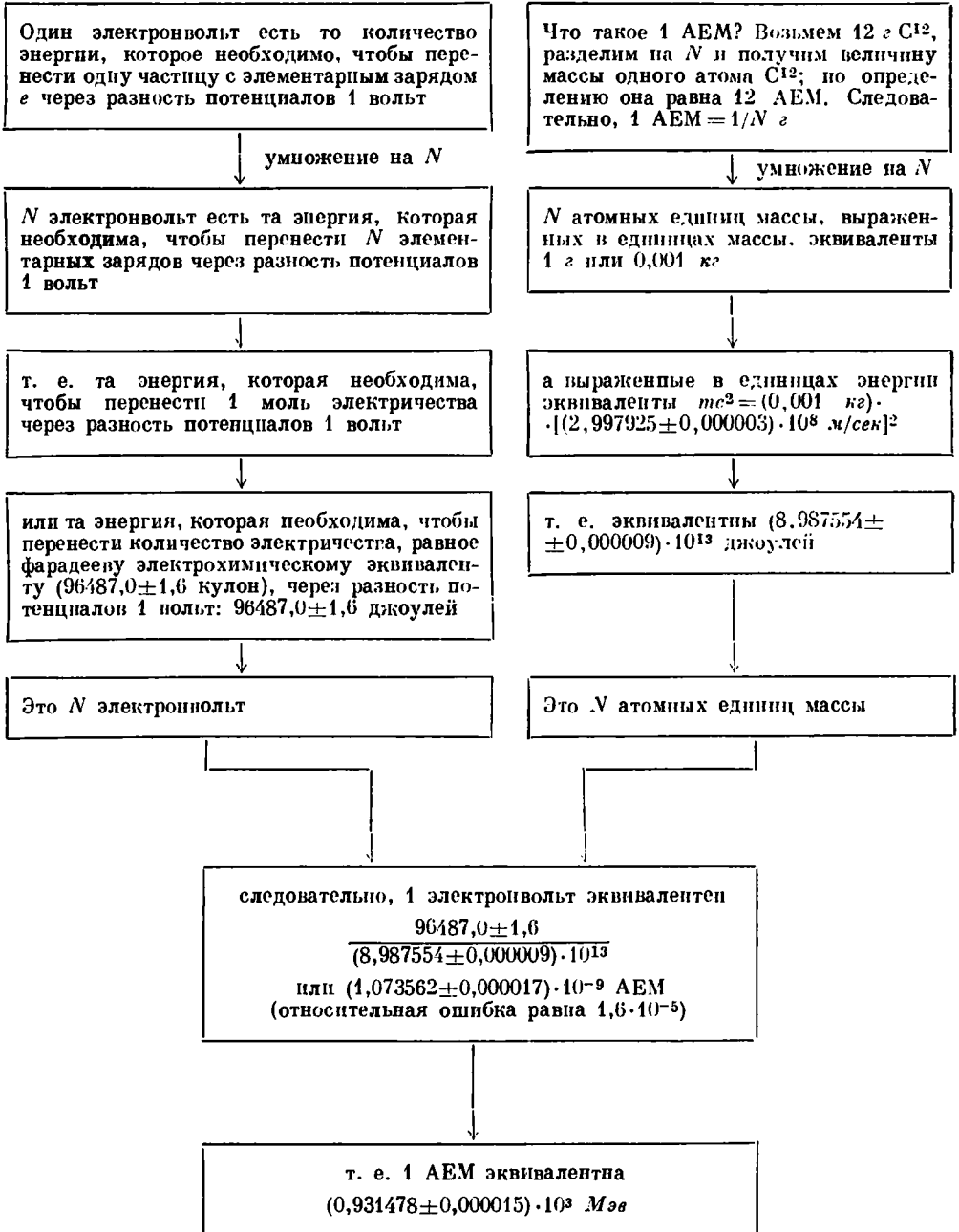
$$m_3 = 3,0160494 \pm 0,0000007 \text{ АЕМ}. \quad (105)$$

Относительная разница между этими двумя результатами составляет около  $2 \cdot 10^{-6}$  и меньше, чем величина ошибки в результате, полученном при анализе опыта по ядерным реакциям. Такое точное предсказание величины массы ядра трития, исходя из релятивистских законов сохранения, представляет собой отличное подтверждение справедливости этих законов сохранения.

<sup>1)</sup> Приведенные ниже спектрометрические величины для масс были определены по работе F. Everling, L. A. König, J. H. E. Mattauch, A. H. Wapstra, Nuclear Phys., 25, 177 (1961). Вместо этого можно было бы взять значения масс из стандартных таблиц масс ядер, однако значения масс, приведенные в этих таблицах, представляют собой «наилучший компромисс» между разного рода данными, включая не только результаты опытов по масс-спектрометрии, но анализ ядерных реакций, подобных рассматриваемой здесь нами. При составлении стандартных таблиц анализ данных, полученных при экспериментальном исследовании ядерных реакций, производится на основании релятивистских законов сохранения. Поэтому значения масс, взятые из стандартных таблиц, не могут служить для независимой проверки этих законов сохранения, которая нас здесь интересует. Это побуждает нас ограничиться пока масс-спектрометрическими значениями масс ядер. Когда же данный анализ и прочие исследования подтвердят законы сохранения, мы предпочтем основываться на данных стандартных таблиц, при составлении которых эти законы были использованы для определения наиболее надежных значений масс, исходя из всевозможных доступных данных. В качестве стандартной таблицы можно указать: L. A. König, J. H. E. Mattauch, A. H. Wapstra, Nuclear Phys., 31, 18 (1962).

*Множитель перехода от электронвольт к атомным единицам массы (АЕМ)*

Искомый множитель перехода использован при вычислениях, проведенных на стр. 166—167, для перевода величин наблюдаемых кинетических энергий дейтрона и ядра трития из электронвольт в АЕМ, что потребовалось в целях окончательной проверки законов сохранения.



В этих вычислениях масса ядра трития выступает как вывод, полученный при анализе законов сохранения, сопоставленный и подтвержденный методами масс-спектрологии. Этот пример подтверждения физики пространства-времени впечатляет, и после него невозможно уже сомневаться в том, что энергия массы покоя способна превращаться в кинетическую энергию.

Тем не менее все еще может быть непонятным, как это такой простой принцип смог породить столь сложное равенство, как (99), которое мы применили для вывода массы ядра трития. Почему мы не взяли просто определенные спектрометрическим путем массы реагентов, такие же массы продуктов реакции и не сравнили их с балансом кинетической энергии при этом превращении? Что могло бы быть проще этого?!

Реагенты:	$H^2$	2,0141019 АЕМ	
	$H^2$	2,0141019 АЕМ	
	Сумма:		4,0282038 АЕМ
Продукты реакции:	$H^1$	1,0078252 АЕМ	
	$H^3$	3,0160494 АЕМ	
	Сумма:		<u>4,0238746 АЕМ</u>
	Разность:		<u>0,0043292 АЕМ</u>
	Энергетический эквивалент:		4,0322546 Мэв

Трудность возникает лишь на следующем этапе, когда требуется определить из наблюдений полный выход кинетической энергии. Кинетическая энергия дейтрона, находившегося до реакции в движении, известна и равна 1,808 Мэв, тогда как кинетическая энергия протона после реакции равна 3,467 Мэв.

Однако при этом затруднительно измерять кинетическую энергию получающегося ядра трития, и эта энергия не измерялась. Но если известна кинетическая энергия одного из продуктов реакции, то это значит, что не проводилось непосредственного измерения полного выхода кинетической энергии. Как же можно тогда сопоставить выход энергии при реакции с изменением масс покоя реагентов? Сводится ли на самом деле такое сравнение к какому-то непосредственному сопоставлению двух энергий? — Нет.

---

*Измеряются кинетические энергии  
не всех частиц.*

*Простое сравнение энергий невозможно*

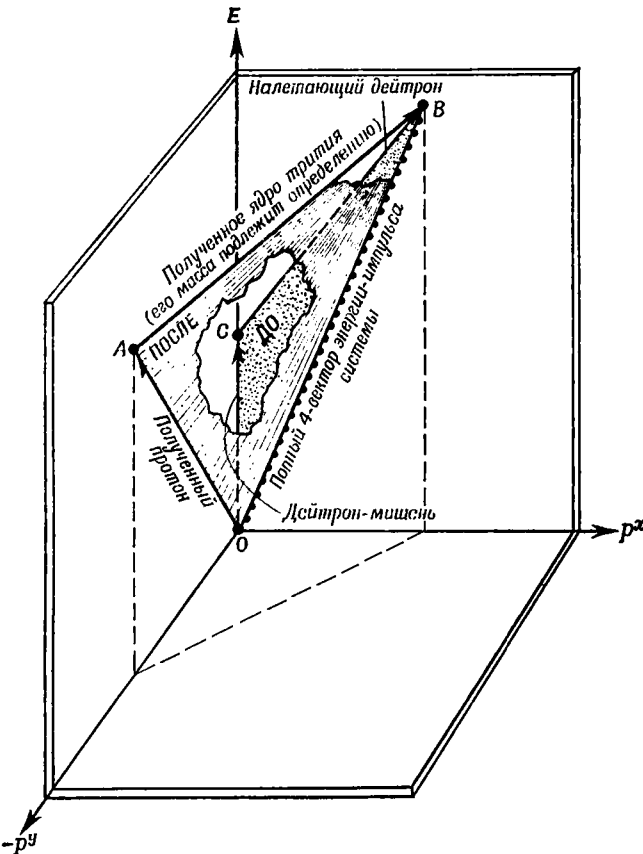
Можно составить ложное представление о происходящих явлениях, если думать, что они исчерпываются энергетическими переходами. При геодезической съемке возможна столь же ошибочная концепция. Так, земельный план является многоугольником хитрой формы, наложенным на поверхность, которая не является плоской. Требуется найти длину прямолинейной границы  $AB$ , а землемер измерил лишь разность координат по линии север — юг для  $A$  и  $B$ . Если его воображение неспособно на большее, то он встанет в тупик! Подобным же образом безнадежно определять массу ядра трития из приведенных выше данных для дейтрон-дейтронной реакции, основываясь лишь на энергиях. Необходимо учесть также баланс импульсов.

*Определение массы ядра трития аналогично определению длины наклонной стороны многоугольника*

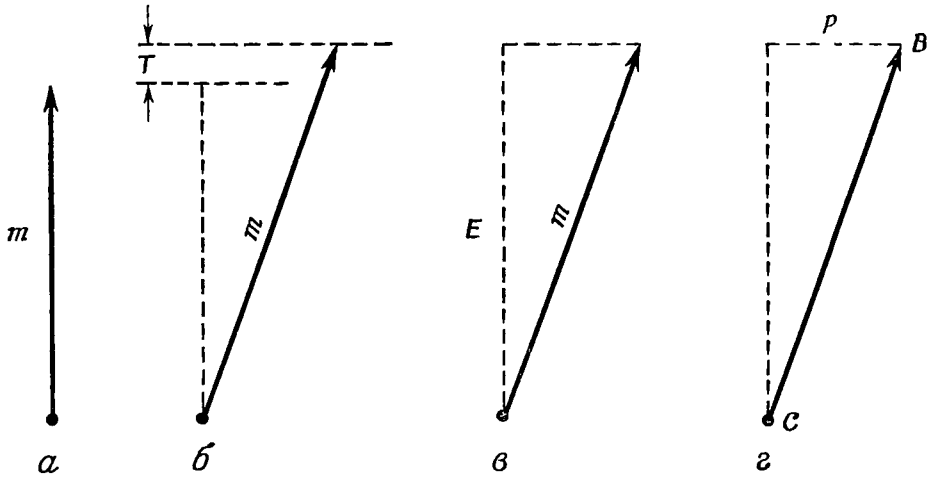
Массу ядра трития находят, пользуясь законами сохранения, подобно тому как землемер находит длину стороны многоугольника из ряда измерений на этом многоугольнике, пользуясь евклидовой геометрией (рис. 93). Между этими двумя случаями имеется лишь одно существенное различие — в физике необходимо исходить из лоренцевой геометрии. Поэтому мы получим

$$(m_3)^2 = (E\text{-компонента } AB)^2 - (p\text{-компонента } AB)^2.$$

Энергетическая и импульсная компоненты стороны  $AB$  в этой формуле определяются по энергетическим и импульсным компонентам других трех сторон многоугольника, т. е. по данным о других трех частицах. Как найти значения  $E$  и  $p$  для одной из этих частиц, например для налетающего дейтрона? Ответ: с помощью процедуры, изображенной на рис. 94 и не похожей на обычно используемую при съемках земельных планов! Предположим, что от землемера требовалось бы использовать метод, аналогичный примененному в опыте с реакцией  $H^2 + H^2 \rightarrow H^1 + H^3$ . Сделать это он мог бы, лишь воспользовавшись следующей необычной процедурой для нахождения компонент граничной прямой  $CB$  в направлениях север — юг и восток — запад (см. рис. 94, переводя его с языка физики частиц на язык геодезии!): 1) Измерение длины прямой  $CB$ . 2) и 3) Измерение компоненты



Р и с. 93. Определение массы ядра трития с помощью законов сохранения, рассматриваемое как геометрическая задача. Учтите: точки  $O$ ,  $B$ ,  $C$  лежат в плоскости чертежа; точка  $A$  лежит выше плоскости чертежа ( $y$ -компонента импульса).



Р и с. 94. Экспериментальное определение энергии и импульса как компонент 4-вектора энергии-импульса в опыте по соударению дейтронов,  $\text{H}^2 + \text{H}^2 \rightarrow \text{H}^1 + \text{H}^3$ . (Обозначение концов вектора через B и C — использование тех же обозначений, что и на рис. 93.)

a — масса покоя (определенная с помощью масс-спектрометра);

б — кинетическая энергия (определяемая разностью потенциалов, через которую пропущены бомбардирующие дейтроны);

в — сумма энергии покоя и кинетической энергии (из соотношения  $E = m + T$ );

г — импульс (из соотношения  $p^2 = E^2 - m^2$ ).

этого отрезка в направлении север — юг. 4) Использование теоремы Пифагора для нахождения компоненты отрезка CB в направлении восток — запад.

Теперь мы разобрали, как определяются компоненты векторов энергии-импульса дейтрона-мишени (на рис. 93 отрезок OC), налетающего дейтрона (CB) и выбитого протона (OA). Компоненты неизвестной четвертой стороны многоугольника (отрезок AB, соответствующий ядру трития) могут быть тогда найдены путем простого комбинирования трех других известных 4-векторов — вычисления, начинающегося магической формулой «применим законы сохранения импульса и энергии»:

$$\bar{p}_3^k = p_2^k + p_0^k - \bar{p}_1^k \quad (k = x, y, z, t).$$

Индексом «нуль» обозначен первоначально покоявшийся дейтрон. «Длина» искомой четвертой стороны многоугольника сразу же дает требуемую массу

$$(m_3)^2 = (\bar{p}_3^t)^2 - (\bar{p}_3^x)^2 - (\bar{p}_3^y)^2 - (\bar{p}_3^z)^2.$$

*Использование законов сохранения всегда связано с многоугольником, построенным из 4-векторов*

Продоланный анализ показывает, что определение массы ядра трития, исходя из реакции  $\text{H}^2 + \text{H}^2 \rightarrow \text{H}^1 + \text{H}^3$ , имеет в высшей степени геометрический характер. Этим примером иллюстрируется общий принцип: *используя законы сохранения энергии и импульса, мы всегда говорим о многоугольнике, построенном в пространстве-времени из 4-векторов*. Если не считать различия между геометриями Лоренца и Евклида, расчеты здесь не отличаются от проводимых в геодезии, тригонометрии или любых других исследованиях треугольников и многоугольников. Из этого сравнения физики

**Таблица 12.** Нахождение массы, энергии или другой физической величины с помощью законов сохранения аналогично нахождению длины одной из сторон многоугольника, угла или другой геометрической величины с помощью теорем евклидовой геометрии

Физика частиц		
процесс	задача	Аналог в геометрии Евклида
<p><math>A</math> (быстрая) + <math>B</math> (мишень) <math>\rightarrow C</math> (наблюдаемая) + <math>D</math> (ненаблюдаемая)</p>	<p>Известны: <math>m_A, m_B, m_C</math> Измеряются: <math>E_A, E_C</math> и направление <math>p_C</math> относительно <math>p_A</math> Вычисляются: неизвестная масса <math>m_D</math></p>	<p>Даны (для неправильного четырехугольника, стороны которого не компланарны): длины трех сторон, компоненты этих трех сторон в направлении север — юг и угол между двумя из этих сторон с точки зрения наблюдателя, который смотрит вдоль третьей стороны <b>Найти:</b> длину четвертой стороны</p>
<p>Фотон (с импульсом <math>p</math>) + Электрон (покоящийся) <math>\rightarrow</math> Электрон (движущийся) + Фотон (с импульсом <math>\bar{p}</math>)</p>	<p>Даны: масса покоя электрона, начальный импульс (или энергия, <math>E = p</math>) фотона и направление вылета конечного фотона Вычислить: импульс (или энергию <math>\bar{E} = \bar{p}</math>) этого фотона («эффект Комптона», см. упражнение 70)</p>	<p>Даны (для неправильного четырехугольника, стороны которого не компланарны): длины всех четырех сторон, компоненты двух сторон в направлении север — юг (аналог «энергии фотона и электрона до столкновения») и угол между двумя из сторон («фотон до и после рассеяния») с точки зрения наблюдателя, смотрящего вдоль третьей стороны («электрон-мишень») <b>Найти:</b> компоненту одной неизвестной стороны в направлении восток — запад</p>
<p><math>{}_{84}^{239}\text{Pu}</math> (покоящийся) <math>\rightarrow</math> <math>{}_{56}^{144}\text{Ba}</math> + <math>{}_{38}^{95}\text{Sr}</math> (спонтанный распад ядра плутония на два фрагмента)</p>	<p>Измеряются: скорости тяжелого и легкого фрагментов в опытах по времени полета, а также масса <math>\text{Pu}^{239}</math> с помощью масс-спектрометра <b>Найти:</b> массы покоя обоих фрагментов</p>	<p>Даны: большая сторона треугольника («масса покоя плутония») и два прилежащих угла («параметры скорости <math>\theta</math>, связанные со скоростью по формуле <math>\beta = \tanh \theta</math>) <b>Найти:</b> две другие стороны</p>
<p>Тот же процесс, что в предыдущем примере</p>	<p>Даны: данные измерений предыдущего примера <b>Найти:</b> кинетическую энергию, высвобождающуюся при распаде</p>	<p>Даны: данные предыдущего примера <b>Найти:</b> разность между большей стороной и суммой двух других сторон треугольника</p>
<p><math>\mu</math> (покоящийся мю-мезон) <math>\rightarrow e</math> (быстрый электрон) + <math>\nu</math> (нейтрино; скорость света) (Мю-мезон спонтанно распадается за <math>\sim 10^{-6}</math> сек)</p>	<p>Известны: масса покоя электрона Измеряются: кинетическая энергия электрона, порожденного при этом превращении <b>Найти:</b> массу покоя мю-мезона</p>	<p>Известны: две меньшие стороны треугольника («масса покоя электрона <math>m</math> и масса покоя нейтрино <math>0</math>») и один угол («параметр скорости <math>\theta</math> электрона, найденный по его энергии, <math>E = m c \text{th } \theta</math>) <b>Найти:</b> большую сторону треугольника</p>



элементарных частиц и геодезии, как ни из какого иного подхода, следует полный охват ситуаций, с которыми можно столкнуться при анализе экспериментов. Нет ни одной задачи из области столкновений частиц, реакций между ними и процессов их превращений, которая не имела бы своего аналога в элементарной геометрии. В табл. 12 подобраны и обсуждены некоторые примеры таких задач и их соответствующих аналогов.

Здесь так же невозможно дать рецепты для анализа всех типов столкновений и превращений, которые могут иметь место в физике и происходят на самом деле, как было бы нелепо пытаться в кратком учебнике по основам евклидовой геометрии перечислить и решить все множество задач, которые могут быть поставлены там. Сущность типичной задачи можно сформулировать, обобщая аналогии табл. 12. Пусть даны такие-то и такие-то стороны многоугольника, а также такие-то и такие-то проекции их на направления север — юг, восток — запад и верх — низ, а также такие-то и такие-то углы. *Требуется определить* такие-то и такие-то длины («массы покоя»), проекции («энергии или импульсы») или углы («скорости относительно других частиц или относительно лаборатории»). Углубляться в разнообразные вычисления, необходимые для решения таких задач, — вовсе не значит прояснить основные идеи. В физике частиц эти «идеи» сводятся в конце концов к двум очень простым свойствам геометрии пространства-времени: 1) векторная сумма 4-векторов энергии-импульса всех участвующих в реакции частиц равна нулю (если брать 4-векторы *продуктов* реакции с обратным знаком) и 2) инвариантная абсолютная величина каждого 4-вектора равна массе покоя соответствующей частицы.

---

#### *Применение законов сохранения к исследованию столкновений и превращений.*

##### *Известные и неизвестные величины*

Применение этих идей регулируется стандартными правилами алгебры.

1) Чтобы найти  $n$  различных неизвестных, нужно иметь  $n$  независимых уравнений, в которых все прочие величины известны. 2) Если мы располагаем лишь  $n - r$  независимыми уравнениями, то  $r$  неизвестных величин останутся неопределенными. (Примером служит столкновение дейтрона заданной энергии с покоящимся дейтроном, приводящее к образованию ядра трития и протона. Если бы даже были заданы массы покоя всех четырех частиц, было бы все равно невозможно предсказать исход этой реакции. Причина проста: протон может вылететь в любом из бесчисленного множества направлений, в каком ему заблагорассудится. В этой задаче *угол вылета* протона является *неопределенным*. Если задать этот угол как одно из условий задачи (в нашем примере  $\theta = 90^\circ$ ), то можно вычислить энергию. Наоборот, задавая энергию, можно предсказать величину угла вылета протона.) 3) Если мы имеем  $n + s$  независимых уравнений для нахождения  $n$  неизвестных, то нам достаточно для этого ограничиться первыми  $n$  уравнениями. Остальные  $s$  уравнений будут служить для *проверки* точности измерений или выполнения физических законов. Используя эти принципы, часто берут в качестве основных величин значения компонент  $E$ ,  $p^x$ ,  $p^y$  и  $p^z$  различных частиц как для удобства их учета, так и ради систематического контроля числа известных и неизвестных величин.

Примером подсчета числа известных и неизвестных служит реакция: (Дейтрон) + (Дейтрон)  $\rightarrow$  (Протон) + (Ядро трития), используемая для нахождения массы ядра трития. Этот пример проанализирован в табл. 13.

«Масса покоя может быть превращена в энергию, а энергия может быть превращена в массу покоя», — так можно не совсем точно подытожить некоторые следствия двух фундаментальных и уже строгих принципов:

1) полный 4-вектор энергии-импульса системы не изменяется в ходе реакции и 2) инвариантная абсолютная величина 4-вектора энергии-импульса любой данной частицы равна массе покоя этой частицы. Какую разумную информацию о физических законах можно извлечь из этих основных принципов? К каким затруднениям приводит иногда использование слишком нестрогой формулировки «принципа эквивалентности массы и энергии»? Некоторые ответы на эти вопросы даны в табл. 14.

Таблица 13. Учет известных и неизвестных величин, характеризующих реакцию  $H^2 + H^2 \rightarrow H^1 + H^3$

*Комментарий.* Как и в тексте, здесь принято, что отсутствуют масс-спектрографические данные о массе  $H^3$  в тот момент, когда эта масса определяется из баланса импульса и энергии в данной реакции. В таблице измеряемые величины обозначены через «ДА», те же, которые не измерены, — через «НЕТ».

Каждая из четырех частиц характеризуется пятью символами (четыре компоненты энергии-импульса и масса покоя), так что в целом мы имеем 20 величин. Из них известны 10 (помеченные в таблице через «ДА») и 10 неизвестны. Для определения этих десяти неизвестных мы имеем ровно десять уравнений. Поэтому не удивительно, что информацию, содержащуюся в этих 10 уравнениях, можно скомбинировать таким образом, что получается одно уравнение (99), выражающее искомую массу ядра трития через измеряемые величины.

		$E = p^t$	$p^x$	$p^y$	$p^z$	Инвариантная абсолютная величина 4-вектора
Реагенты (все компоненты 4-вектора энергии-импульса проставить в таблице с положительным знаком)	$H^2$ (мишень)	НЕТ (измеряется $m_2$ , а не непосредственно $E_2$ )	ДА (нуль!)	ДА (нуль)	ДА (нуль)	$m_2$ — ДА, ур. (100) (спектрометр)
	$H^2$ (быстрый)	НЕТ (измеряется $KE$ , см. ниже)	НЕТ	ДА (нуль)	ДА (нуль)	$m_2^* = m_2$ — ДА (спектрометр)
Продукты реакции (все компоненты проставить в таблице с обратным знаком)	$H^1$ (измерено)	НЕТ (измеряется $KE$ , см. ниже)	ДА (нуль)	НЕТ	ДА (нуль)	$m_1$ — ДА, ур. (101) (спектрометр)
	$H^3$ (не измерено)	НЕТ	НЕТ	НЕТ	НЕТ	$m_3$ — «НЕТ», ур. (105) (требуется найти)
Сумма, дающая измерение полного 4-вектора энергии-импульса системы, должна быть равна нулю, чтобы 4-векторы образовали замкнутый четырехугольник («закон сохранения»)		0 ур. (94)	0 ур. (95)	0 ур. (96)	0 ур. (97)	

ПОЛУЧАЮТСЯ  
ЧЕТЫРЕ УРАВНЕНИЯ

*Дополнительная информация.* ПОЛУЧАЕТСЯ ЕЩЕ ШЕСТЬ УРАВНЕНИЙ:

- $E_3^* - m_3^* = 1,808 \text{ Мэв}$  (кинетическая энергия падающего дейтрона), уравнение (102).  
 $E_2 - m_2^* = 0$  (кинетическая энергия дейтрона-мишени, принимаемого покоящимся).  
 $E_1 - m_1 = 3,467 \text{ Мэв}$  (кинетическая энергия полученного протона), уравнение (103).  
 $E_3^* - p_3^* = m_3^*$  (4-вектор энергии-импульса полученного ядра трития), уравнение (98).  
 $E_1^* - p_1^* = m_1^*$  (4-вектор энергии-импульса полученного протона).  
 $(E_2^*)^2 - (p_2^*)^2 = (m_2^*)^2 = m_2^2$  (4-вектор энергии-импульса падающего дейтрона).

**Таблица 14.** Плюсы и минусы понятия массы

Одинакова ли величина массы покоя во всех инерциальных системах отсчета?

Да. В одной системе отсчета она выражается через энергию  $E$  и импульс  $p$  как  $m^2 = E^2 - p^2$ , а в другой системе — как  $m^2 = (E')^2 - (p')^2$ . Поэтому масса покоя является инвариантом

Одинакова ли величина энергии во всех инерциальных системах отсчета?

Нет. Энергия выражается как  $E = \sqrt{m^2 + p^2}$ , либо как  $E = m \operatorname{ch} \theta = m/\sqrt{1 - \beta^2}$ , либо как  $E = (\text{Масса покоя}) + (\text{Кинетическая энергия}) = m + T$ , и ее величина зависит от выбора системы отсчета, в которой рассматривается частица (или система частиц). Эта величина минимальна в той системе отсчета, где импульс частицы (системы частиц) равен нулю (в случае системы частиц равен нулю полный импульс). Лишь в этой системе отсчета энергия равна массе покоя

Равна ли нулю энергия объекта с нулевой массой покоя? (Фотон: квант света, рентгеновские лучи, гамма-излучение.)

Нет. Энергия равна тогда  $E = \sqrt{0^2 + p^2} = p$  (в обычных единицах  $E_{\text{обычн}} = c p_{\text{обычн}}$ ). Формально можно сказать иначе, что вся энергия представлена в виде кинетической энергии (в этом специальном случае нулевой массы покоя  $T = p$ ) и вообще отсутствует форма энергии покоя. Итак,  $E = (\text{Масса покоя}) + (\text{Кинетическая энергия}) = 0 + T = T = p$  (лишь в случае нулевой массы покоя!)

Означает ли инвариантность массы покоя, что эта масса не может изменяться при столкновениях?

Нет. Масса покоя часто изменяется при неупругих соударениях. *Пример 1:* столкновение двух пластинчатых шаров — нагревание и увеличение вследствие этого массы после столкновения. *Пример 2:* столкновение двух электронов ( $e^-$ ) достаточной энергии порождает новую пару, состоящую из одного обычного электрона и одного положительного электрона (позитрона) ( $e^+$ ):  $e^-$  (быстрый) +  $e^-$  (покоящийся)  $\rightarrow e^+ + 3e^-$

Как величина может быть инвариантной и тем не менее изменяться в результате столкновения?

Инвариантность означает «неизменность величины, определяемой в различных инерциальных системах отсчета», а не «неизменность при столкновениях или при воздействии внешних сил»

Изменяется ли масса покоя при всяком неупругом столкновении?

Нет. *Пример:* в столкновении  $e^-$  (быстрый) +  $e^-$  (покоящийся)  $\rightarrow$   
 $\rightarrow 2 \left( \begin{array}{l} \text{Эл-ны с} \\ \text{умер. ск.} \end{array} \right) +$   
 $+ \left( \begin{array}{l} \text{Электромагнитная энергия, или фотоны,} \\ \text{порожденные в процессе столкновения} \end{array} \right)$

массы покоя электронов остались после столкновения такими же, какими они были до этого

Изменяется ли когда-нибудь масса покоя при упругих столкновениях?

Нет — по определению упругого столкновения! *Пример:*

$e^-$  (быстрый) +  $e^-$  (покоящийся)  $\rightarrow$   
 $\rightarrow 2 \left( \begin{array}{l} \text{Электроны, движущиеся с} \\ \text{умеренной скоростью} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Никакого} \\ \text{излучения} \end{array} \right)$

Дана система, состоящая из нескольких ( $n$ ) свободнодвижущихся частиц. Равна ли масса покоя такой системы сумме масс покоя отдельных входящих в нее частиц?

Нет. Масса покоя  $M$  системы превышает сумму масс покоя частиц, если только все частицы по чистой случайности не движутся с одной и той же скоростью в одну сторону. Аддитивной является не масса покоя, а энергия и импульс:

*Пример:* ящик с нагретым газом.

$$E_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^n E_i, \quad p_{\text{системы}}^x = \sum_{i=1}^n (p^x)_i.$$

На основании этих сумм может быть вычислена и масса покоя системы:

$$M^2 = (E_{\text{сист}})^2 - (p_{\text{сист}}^x)^2 - (p_{\text{сист}}^y)^2 - (p_{\text{сист}}^z)^2.$$

Упрощается ли это соотношение, когда полный импульс системы равен нулю?

*Пример 1.* Ящик с нагретым газом покоится в лаборатории

*Пример 2.* Любая система свободно движущихся частиц, рассматриваемая в инерциальной системе отсчета, *выбранной* таким образом, чтобы полный импульс оказался равным нулю

Да. В этом случае масса покоя системы выражается в виде суммы энергий отдельных частиц:

$$M = E_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^n E_i.$$

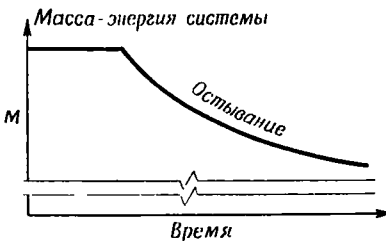
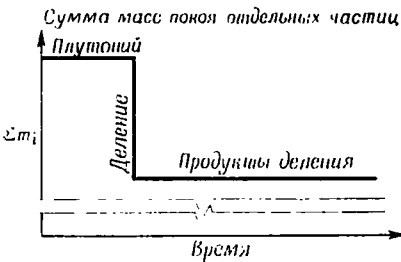
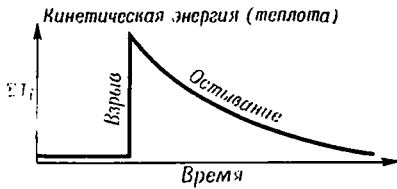
Более того, энергия каждой частицы всегда может быть выражена как сумма энергии покоя и кинетической энергии:

$$E_i = M_i + T_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Итак, масса покоя системы превосходит сумму масс покоя входящих в нее отдельных частиц на величину, равную полной кинетической энергии всех этих частиц (взятую в системе отсчета, где полный импульс равен нулю!):

$$M = \sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=1}^n T_i$$

Обладает ли хоть каким-нибудь значением для эксперимента понятие «массы покоя физической системы»?



Да. Масса покоя системы определяет ее инертность, т. е. сопротивление ускорению, вызываемому силой, действующей на систему в целом. (*Пример.* Ящик с нагретым газом в принципе больше сопротивляется ускорению, чем этот же ящик, если газ в нем охладить.) Масса покоя системы определяет также то гравитационное притяжение, с которым эта система действует на пробные частицы. (*Пример 1.* Горячая звезда, содержащая определенные количества атомов данных типов, в принципе сильнее притягивает свои планеты, чем такая же комбинация атомов, если их охладить. *Пример 2.* Облако электромагнитного излучения состоит из фотонов, масса покоя каждого из которых равна нулю, а «кинетическая энергия» положительна. Поэтому масса покоя облака излучения положительна. Облако оказывает гравитационное притяжение на удаленный объект, например Солнце, и в свою очередь подвержено гравитационному притяжению со стороны Солнца.)



Р и с. 95. Полная кинетическая энергия, сумма масс покоя отдельных частиц и масса покоя системы как функции времени, в течение которого взрывается ядерное устройство и остывают продукты взрыва.

В космическом пространстве взрывается 20-мегатонная водородная бомба. Переводится ли при этом 0,93 кг массы в энергию?

$$[\Delta t = \Delta E/c^2 = (20 \cdot 10^6 \text{ т}) \cdot (10^8 \text{ г/т}) \times (10^3 \text{ кал/г} - \text{эквивалент тринитротолуола}) \cdot (4,18 \text{ дж/кал})/c^2 = (8,36 \times 10^{16} \text{ дж})/(9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{сек}^2) = 0,93 \text{ кг}]$$

И да, и нет: необходима более корректная постановка вопроса. Масса покоя системы расширяющегося газа, осколков и излучения сохраняет ту же величину, какая была до взрыва, — масса покоя системы  $M$  не изменяется. Однако произошло превращение водорода в гелий, а также произошли и другие ядерные превращения. В результате произошла «перекачка» величин между различными частями в формуле массы покоя системы:

$$M = \sum m_i + \sum T_i.$$

Первый член справа — сумма масс покоя отдельных составных частей системы — уменьшился на 0,93 кг:

$$\left(\sum m_i\right)_{\text{конечн}} = \left(\sum m_i\right)_{\text{начальн}} - 0,93 \text{ кг.}$$

Второй член — сумма кинетических энергий, включая «кинетическую энергию» появившихся фотонов и нейтрино, — увеличился на столько же:

$$\left(\sum T_i\right)_{\text{конечн}} = \left(\sum T_i\right)_{\text{начальн}} + 0,93 \text{ кг.}$$

первоначальное содержание тепловой энергии в бомбе, практически равно нулю по сравнению с 0,93 кг

Таким образом, часть массы покоя *составных частей системы* превратилась в энергию, но масса покоя *системы в целом* не изменилась

Пусть ядерный взрыв будет произведен в подземной полости, а затем его продукты будут охлаждены, собраны и взвешены. Окажется ли тогда их масса меньше, чем масса первоначального ядерного устройства?

Да. Решающим является здесь период ожидания, за который теплота и излучение успеют удалиться, так что продукты взрыва снова будут содержать такое же количество теплоты, какое было сначала в бомбе. Тогда в выражении для массы покоя системы

$$M = \sum m_i + \sum T_i$$

второй член, величина которого резко возросла в момент взрыва, но понизилась за время охлаждения, в конечном итоге, после взрыва и последующего охлаждения, окажется прежним. Напротив, сумма масс покоя  $\sum m_i$  все время уменьшалась, а вместе с ней уменьшилась и величина массы  $M$  того, что мы взвешиваем (после периода охлаждения); см. рис. 95

Означает ли эйнштейновское утверждение об эквивалентности массы и энергии, что энергия — это то же самое, что масса?

Нет. Величина энергии зависит от того, в какой инерциальной системе отсчета мы рассматриваем частицу (или систему частиц). Величина же массы покоя не зависит от выбора инерциальной системы отсчета. Энергия — всего лишь временная компонента 4-вектора, тогда как масса определяется как полная абсолютная величина этого 4-вектора (см. также упражнение 67). Временная компонента 4-вектора совпадает с его абсолютной величиной лишь в том частном случае, когда пространственные компоненты этого 4-вектора равны нулю, т. е. когда равен нулю импульс частицы (или полный импульс системы частиц). Лишь тогда величина энергии совпадает с величиной массы покоя

Если говорить без всякого крочествова, является ли равенство  $E_{\text{обычн}} = mc^2$  именно тем, что на самом деле существенно в законе эквивалентности массы и энергии?

Исторически — да, в наше время — нет! В прежние времена не признавали, что и джоули и килограммы — это две единицы, различные лишь вследствие исторической случайности, но измеряющие одну и ту же величину — массу-энергию. Подобным же образом одну и ту же массу-энергию можно измерять и в других разных единицах — в эргах и в граммах. Множитель перехода  $c^2$ , подобно множителю перехода от секунд к метрам или от миль к футам, в наше время можно рассматривать, если угодно, как условность, но не как новую принципиальную величину

Если основным во взаимосвязи массы и энергии является не множитель  $c^2$ , что же тогда будет там основным?

Различие между массой и энергией в том, что масса характеризует абсолютную величину 4-вектора, а энергия — временную компоненту этого же 4-век-

Масса покоя  $M$  системы свободно движущихся частиц определяется не как сумма масс покоя  $m_i$  отдельных частиц системы, но как сумма их энергий  $E_i$  (при этом — только в той системе отсчета, где полный импульс системы равен нулю). Почему бы тогда не дать величинам  $E_i$  новое название, а именно не назвать их «релятивистскими массами» отдельных частиц? При таком обозначении

$$(m_i)_{\text{релят}} = E_i = \begin{cases} = m_i + T_i, \\ = \sqrt{m_i^2 + p_i^2}, \\ = \frac{m_i}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}, \end{cases}$$

и можно записать

$$M = \sum_{i=1}^n (m_i)_{\text{релят}}$$

Может ли это различие между массой и энергией быть проиллюстрировано на какой-то простой диаграмме?

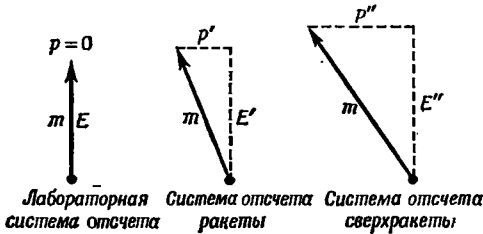
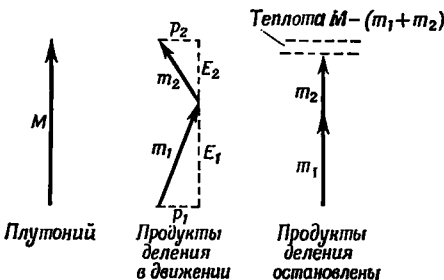


Рис. 96. 4-вектор энергии-импульса одной и той же частицы в трех различных системах отсчета.

Существует ли столь же простая диаграмма, иллюстрирующая превращение части массы покоя ядра плутония в энергию в процессе деления?



тора. Все соображения, подчеркивающие это различие, идут на пользу пониманию взаимосвязи массы и энергии. Любая расплывчатость в терминологии, затушевывающая это различие, является потенциальным источником ошибок и недоразумений

Понятие «релятивистской массы» (массы движения) приводит к недоразумениям, и мы его здесь не используем. 1) Оно применяет термин «масса», принадлежащий абсолютной величине 4-вектора, к совершенно другому понятию — временной компоненте 4-вектора. 2) При его использовании казалось бы, что увеличение энергии частицы при росте ее скорости или импульса связано с какими-то изменениями во внутренней структуре этой частицы. На самом же деле увеличение энергии с ростом скорости заложено в геометрических свойствах самого пространства (преобразование Лоренца!)

Да! На рис. 96 4-вектор энергии-импульса одной и той же частицы изображен в разных системах отсчета. Энергия в разных системах различна, но масса покоя (абсолютная величина 4-вектора) имеет во всех системах одно и то же значение  $m$ . (Кажущееся различие между значениями  $m$  в трех изображенных здесь системах вызвано тем, что мы пытались изобразить лоренцеву геометрию на евклидовой плоскости. В лоренцевой геометрии квадрат гипотенузы равен разности квадратов катетов  $E'$  и  $p'$  или  $E''$  и  $p''$ )

Да, см. рис. 97. Векторная сумма двух временноподобных 4-векторов есть 4-вектор с абсолютной величиной  $M$  (масса покоя  $Pu^{239}$  до деления), превышающей сумму абсолютных величин  $m_1$  и  $m_2$  обоих 4-векторов-слагаемых (масс покоя продуктов деления). В противоположность евклидовой геометрии, где длина третьей стороны треугольника всегда меньше суммы длин двух других сторон, здесь  $M > m_1 + m_2$

Рис. 97. Сумма масс покоя продуктов деления ядра плутония меньше, чем масса покоя исходного ядра.

## Упражнения к главе 2

Скорость частицы  $\beta$  и параметр скорости  $\theta$  почти никогда не используются при решении задач, касающихся импульса и энергии частиц, движущихся с релятивистскими скоростями. С одной стороны, величиной  $\beta$  неудобно пользоваться, так как она входит в выражения для импульса и энергии под знаком квадратного корня:  $\sqrt{1 - \beta^2}$ . С другой стороны, и это существеннее, очень малое изменение скорости  $\beta$  может соответствовать огромному изменению импульса и энергии, если частица двигалась со скоростью, близкой к скорости света. Если, например, частица первоначально двигалась со скоростью  $\beta = 0,99$ , а затем ее скорость увеличилась на  $0,01$ , то это соответствует увеличению импульса и энергии этой частицы в бесконечное число раз. Обычно в задачах, касающихся быстро движущихся частиц, пользуются их кинетической энергией или полной энергией. Тогда импульс каждой частицы можно найти по формулам (85) и (86):

$$\begin{aligned} E^2 - p^2 &= m^2, \\ T &= E - m. \end{aligned}$$

При этом удобнее всего вообще не говорить о скорости и не пользоваться формулами, содержащими скорость или параметр скорости.

Если же требуется явно выразить величину скорости, ее можно найти из соотношения

$$\beta = \text{th } \theta = \frac{\text{sh } \theta}{\text{ch } \theta} = \frac{m \text{ sh } \theta}{m \text{ ch } \theta} = \frac{p}{E}. \quad (106)$$

В таких случаях часто бывает достаточно (например, в упражнении 55) найти величину *разности*  $1 - \beta$  скорости света и скорости частицы  $\beta$ . Подставляя  $p = \beta E$  в уравнение

$$E^2 - p^2 = m^2,$$

получим

$$\frac{m^2}{E^2} = 1 - \beta^2 = (1 - \beta)(1 + \beta).$$

При скорости  $\beta$ , очень близкой к единице,  $1 + \beta \approx 2$ , и тогда

$$1 - \beta \approx \frac{m^2}{2E^2}, \quad \beta \approx 1. \quad (107)$$

В задачах на столкновения (упражнение 90 и последующие) удобно поставить черточки над величинами, взятыми «после столкновения» (например,  $\bar{p}$ ,  $\bar{E}$ ).

*Число звездочек при номерах упражнений соответствует возрастанию трудности этих упражнений. Номера в скобках, стоящие после названия упражнений, указывают, какие упражнения необходимо решить, прежде чем приступить к данному*

### **А. Общие задачи**

- 55. Быстрые электроны
- 56\*. Космические лучи
- 57. Границы ньютоновской механики
- 58\*. Релятивистская ракета
- 59\*. Парадокс центра масс
- 60\*. Второй вывод релятивистского выражения для импульса
- 61\*. Второй вывод релятивистского выражения для энергии

### **Б. Эквивалентность энергии и массы покоя**

- 62. Задачи на пересчет
- 63. Релятивистская химия
- 64\*\*. Релятивистский осциллятор
- 65\*\*. Импульс без массы?

### **В. Фотоны**

- 66. Частицы нулевой массы покоя
- 67. Эйнштейновский вывод принципа эквивалентности энергии и массы покоя — подробный пример
- 68\*. Устойчивость фотона (66)
- 69\*. Давление света (66)
- 70\*. Эффект Комптона (66)
- 71\*\*. Измерение энергии фотона
- 72\*\*. Энергия и частота фотона (66)
- 73\*. Гравитационное красное смещение (66)
- 74\*. Плотность спутника Сириуса (73)

### **Г. Доплеровское смещение**

- 75. Формулы Доплера (66, 22)
- 76. Распад  $\pi^0$ -мезона; подробный пример
- 77. Полет неоновой лампочки (75)
- 78. Физик и светофор (75)
- 79. Доплеровское смещение на краю диска Солнца (73, 75)
- 80. Расширяющаяся Вселенная (75)
- 81\*. Анализ парадокса часов с помощью эффекта Доплера (75)
- 82\*. «Не превышайте скорости» (75)
- 83\*. Доплеровское уширение спектральных линий (75)
- 84\*. Изменение энергии фотона вследствие отдачи излучателя (83)
- 85\*. Эффект Мессбауэра (84)
- 86\*\*. Резонансное рассеяние (85)
- 87\*\*. Измерение доплеровского смещения по резонансному рассеянию (86)
- 88\*\*. Проверка эффекта гравитационного красного смещения с помощью эффекта Мессбауэра (73, 87)
- 89\*\*. Проверка парадокса часов с помощью эффекта Мессбауэра (87)

### **Д. Столкновения**

- 90. Симметричное упругое столкновение
- 91. Давид и Голиаф — подробный пример



92. Абсолютно неупругое столкновение  
 93\*. Порождение частиц протонами  
 94\*. Порождение частиц электронами  
 95\*. Фоторождение пары одиночным фотоном (66, 93)  
 96\*\*. Фоторождение пары двумя фотонами (95)  
 97\*\*. Аннигиляция электрон-позитронной пары  
 98\*. Проверка принципа относительности (97)  
 99\*. Отождествление частиц по трекам в пузырьковой камере  
 100\*. Накопительные кольца и встречные пучки (93)

### Е. Атомная физика

- 101\*. Де Бройль и Бор (72)  
 102\*. Видение посредством электронов (101)  
 103\*\*. Прецессия Томаса (52, 101)

### Ж. Межзвездные полеты

- 104\*. Трудности межзвездных полетов (58)

## А. ОБЩИЕ ЗАДАЧИ

### 55. Быстрые электроны

Станфордский линейный ускоритель сконструирован для ускорения электронов вплоть до кинетической энергии  $40 \text{ Бэв}$  (40 миллиардов электронвольт;  $1 \text{ эв} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ) для экспериментов с элементарными частицами. Ускоритель имеет в длину  $10\,000 \text{ фут}$  (приблизительно  $3000 \text{ м}$ ) и напоминает по виду трубу; электроны ускоряются в нем электромагнитными волнами, генерирующимися в огромных «радиолампах» — клистронах.

а) С точки зрения лабораторной системы отсчета возрастание энергии электрона на каждом метре пути, пройденного в трубе ускорителя, приблизительно одинаково. Чему равна энергия, которую каждый электрон приобретает на  $1 \text{ м}$  пути (в  $M\text{эв}$ )? Допустим, что справедливо ньютоновское выражение для кинетической энергии. Какой путь должен был бы проделать электрон в трубе ускорителя, чтобы его скорость сравнялась со скоростью света? (Ответ на этот вопрос был предвосхищен в тексте, см. стр. 27.)

б) На самом же деле, конечно, даже электроны с энергией  $40 \text{ Бэв}$ , выходящие из ускорителя, обладают скоростью  $\beta$ , меньшей, чем скорость света. Чему равна разность  $1 - \beta$  между скоростью света и скоростью этих электронов? Устроим состязания на скорость полета между электронами с энергией  $40 \text{ Бэв}$  и световой вспышкой в эвакуированной трубе длиной  $1000 \text{ км}$ . Насколько свет опередит электроны в конце дистанции? Выразите ответ в миллиметрах.

в) Чему равна длина трубы « $3000 \text{ м}$ » (длина ускорителя), если ее измерять в системе отсчета ракеты, движущейся вместе с электронами энергии  $40 \text{ Бэв}$ , которые дает ускоритель?

### 56\*. Космические лучи

а) В космических лучах наблюдалась (косвенными методами) по меньшей мере одна частица, энергия которой была оценена в  $16 \text{ Дж}$  ( $1,0 \cdot 10^{20} \text{ эв}$ )<sup>1</sup>. Если носителем этой энергии был протон ( $mc^2 \approx 1 \text{ Бэв}$ ), то сколько времени потребовалось бы ему, чтобы пересечь нашу Галактику (диаметром  $10^5$  световых лет), если измерять время по часам, летящим вместе с этим протоном? Ответ выразите в секундах ( $1 \text{ год} \approx 32 \cdot 10^6 \text{ сек}$ ). (В системе отсчета Земли такой протон, движущийся почти со скоростью света, совершит этот перелет немногим более чем за  $10^6$  лет!)

<sup>1</sup>) John Linsley, Physical Review Letters, 10, 146 (1963).

б) Во сколько раз энергия частицы должна превышать ее энергию покоя, чтобы диаметр нашей Галактики в результате лоренцева сокращения оказался равным диаметру этой частицы (около 1 ферми, что равно  $10^{-15}$  м)? Какое количество массы потребовалось бы превратить в энергию, чтобы придать требуемую скорость протону?

### 57. Границы ньютоновской механики

а) Один электронвольт (1 эв) равен тому изменению, которое претерпевает кинетическая энергия частицы, несущей единичный элементарный заряд, когда она проходит через разность потенциалов 1 в. 1 эв =  $1,60 \times 10^{-19}$  дж. Чему равны энергии покоя электрона и протона (их массы указаны в конце книги), выраженные в миллионах электронвольт (Мэв)?

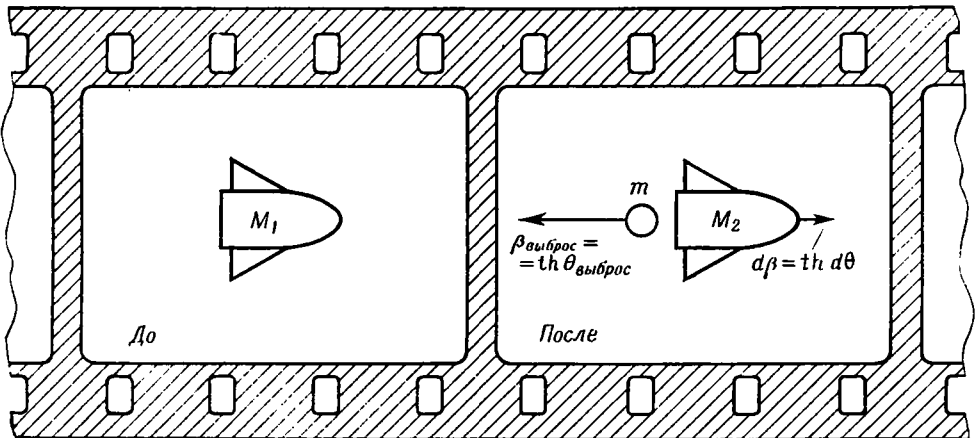
б) Кинетическая энергия частицы, движущейся с данной скоростью  $\beta$ , дается выражением  $\frac{1}{2} m\beta^2$  неточно. Относительная ошибка,

$$\frac{\left( \begin{array}{l} \text{Релятивистское выражение} \\ \text{для кинетической энергии} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{Ньютоновское выражение} \\ \text{для кинетической энергии} \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{l} \text{Ньютоновское выражение} \\ \text{для кинетической энергии} \end{array} \right)},$$

равна 1% при достижении ньютоновской кинетической энергией величины, составляющей определенную часть энергии покоя. Чему равна эта часть? [Можно ограничиться приблизительным ответом, полученным из анализа следующего члена разложения по формуле бинома (или в степенной ряд) точной формулы для энергии как функции скорости  $\beta$ , либо из других четко сформулированных рассуждений.] Назовем этот случай (когда ошибка составляет 1%) совершенно произвольно «границей ньютоновской механики». При какой кинетической энергии достигает этой границы протон (выразите энергию в Мэв)? При какой — электрон?

### 58\*. Релятивистская ракета

Какие ограничения накладывает теория относительности на летные качества и скорость ракеты? Будем схематически представлять действие двигателя как последовательные выбросы одинаковых шариков, имеющих одну и ту же массу  $m$ . Каждый выброс тогда можно рассматривать как «неупругое столкновение наоборот». Пусть каждый выброс осуществляется на ракете одним и тем же способом. Тогда разумно предположить, что скорость удаления одинакова для любого шарика, если ее рассматривать в инерциальной системе отсчета, в которой ракета покоится (она изображена на рис. 98 в «лабораторной системе отсчета», связанной с ракетой до выброса). Назовем эту скорость удаления шарика *скоростью выброса*  $\beta_{\text{выброс}}$ .



Р и с. 98. Исследование движения релятивистской ракеты.

а) Используя обозначения рис. 98, запишите уравнения сохранения импульса и сохранения энергии. Не забудьте учесть начальную энергию покоя  $M_1$ , но *не считайте*, что масса покоя сохраняется — ведь речь идет о «неупругом столкновении наоборот!» Исключите из этих уравнений  $t$  и найдите таким образом приращение  $d\theta$ ,

$$d\theta = \beta_{\text{выбр}} \left( \frac{M_1 - M_2}{M_2} \right),$$

где  $\beta_{\text{выбр}}$  — скорость выброса относительно первоначальной системы ракеты. Так как  $M_2 - M_1 = dM$  — изменение массы ракеты, то

$$d\theta = -\beta_{\text{выбр}} \frac{dM}{M},$$

где  $M$  — масса ракеты в любой данный момент времени. Если мы рассмотрим теперь новую систему отсчета («систему ракеты»), в которой ракета покоится, выброс следующей порции массы со скоростью  $\beta_{\text{выбр}}$  в этой системе приведет к дальнейшему изменению параметра скорости на  $d\theta$ . Однако, согласно уравнению (25), новое значение параметра скорости ракеты в первоначальной системе отсчета равно просто сумме всех изменений параметра скорости (сами скорости не аддитивны, но *параметры скорости аддитивны*). К тому же массы покоя (и изменения массы покоя) инвариантны, одинаковы во всех системах отсчета. Поэтому окончательное значение параметра скорости в первоначальной системе отсчета может быть получено путем суммирования (интегрирования) приращений параметра скорости:

$$\int_0^\theta d\theta = -\beta_{\text{выбр}} \int_{M_1}^M \frac{dM}{M}.$$

Интеграл справа равен натуральному логарифму, так что

$$\theta = \beta_{\text{выбр}} \cdot \ln \frac{M_1}{M} \quad (\text{релятивистская ракета}), \quad (108)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Величина параметра скорости,} \\ \text{достигнутая после сжигания} \\ \text{любой данной массы горючего} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{Скорость выброса} \\ \text{продуктов сгорания} \end{array} \right) \cdot \ln \left( \frac{\text{Начальная масса} \\ \text{покоя ракеты}}{\text{Конечная масса} \\ \text{покоя ракеты}} \right).$$

Это и есть уравнение движения релятивистской ракеты.

б) *Нерелятивистской* называется такая ракета, которая движется со скоростью, много меньшей скорости света. Покажите, что приведенное выше уравнение движения релятивистской ракеты в нерелятивистском пределе принимает вид обычного уравнения движения нерелятивистской ракеты:

$$v = v_{\text{выбр}} \ln \frac{M_1}{M} \quad (\text{нерелятивистская ракета}). \quad (109)$$

в) Покажите, исходя из основных законов сохранения, что масса покоя в случае релятивистской ракеты *не сохраняется*. Куда же она девается? Покажите, что масса покоя (приблизительно) сохраняется в предельном случае нерелятивистской ракеты.

г) Покажите, что скорость релятивистской ракеты может приближаться сколь угодно близко к скорости света, но не превосходить ее.

д) Рассмотрите частный случай, когда скорость выброса очень велика. Покажите, что при  $\beta_{\text{выбр}}$ , стремящейся к скорости света (т. е. при очень больших  $\theta_{\text{выбр}}$ ), необходимая для достижения данного значения параметра скорости ракеты выбрасываемая масса покоя стремится к нулю. Из этого следует что использование света для создания тяги ракеты соответствует полному переводу массы покоя топлива в энергию излучения; уравнение

движения тогда принимает вид

$$\theta = \ln \frac{M_1}{M} \quad (\text{для ракеты с фотонными двигателями}). \quad (110)$$

е) Иногда высказывают следующее обобщающее заключение: «Наиболее экономична ракета с фотонной тягой». Покажите, что это утверждение и верно, и ошибочно одновременно. *Обсуждение.* Найдите «коэффициент полезного действия» для двигателей, тягу которых создают световые вспышки. Насколько экономично продолжать ускорять «шлак» (использованные элементы) вместе с полезным грузом? Существует ли хоть один тип *взаимодействия элементарных частиц*, при котором вообще не остается «шлака» и образуется лишь свет (т. е. гамма-лучи)? См. стр. 162 и упражнение 97.

ж) Чему равно наименьшее *отношение масс* (отношение начальной массы к конечной, когда горючее исчерпано) для идеальной ракеты, в которой масса полностью превращается в свет, при котором ракета ускоряется из состояния покоя до такой скорости, при которой течение времени замедляется в десять раз? Чему равно это отношение масс в случае наибольшей скорости выброса, достижимой в ракетах с *химическими* двигателями (около 4000 м/сек)? *Замечание.* В технической литературе часто говорится об «удельном импульсе» (обозначаемом через  $I$ ) ракетного горючего; например,  $I = 260$  сек для керосина с жидким кислородом и 350 сек для жидкого водорода с жидким кислородом. Умножьте эти величины на 9,8 м/сек<sup>2</sup>, чтобы перейти к физическим единицам (скорости выброса в м/сек или к импульсу в кг·м/сек, сообщаемому ракете каждым килограммом отработавшего топлива). Последний способ выражения через *импульс* в противоположность использованию единиц времени применим и на Луне, где  $g \approx (1/6) \cdot 9,8$  м/сек<sup>2</sup>, и на Земле, где  $g = 9,8$  м/сек<sup>2</sup>.

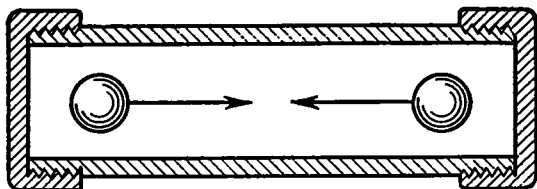
### 59\*. Парадокс центра масс

Пусть в системе отсчета *ракеты* вдоль оси  $x$  в состоянии покоя закреплена длинная труба. С двух противоположных концов в нее одновременно и с одинаковой скоростью (с точки зрения системы отсчета ракеты) выстреливаются два одинаковых пушечных ядра. Эти ядра упруго сталкиваются в середине трубы и разлетаются вновь к ее концам. До того как ядра достигают этих концов, их наглухо закрывают, и в дальнейшем ядра все время движутся взад и вперед в трубе без трения.

а) Опишите движение центра масс этих двух ядер в системе отсчета *ракеты*.

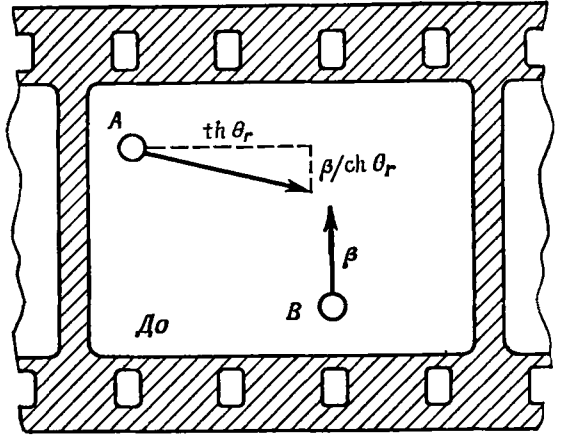
б) Одновременно ли производятся в *лабораторной* системе отсчета выстрелы, посредством которых ядра вводятся в трубу? Опишите движение центра масс ядер в лабораторной системе отсчета. При этом удобно воспользоваться диаграммой пространства-времени. *Инвариантно* ли положение центра масс в теории относительности?

в) Предположим теперь, что в системе отсчета ракеты труба не закреплена, а лежит на абсолютно гладкой поверхности. Рассмотрите движение центра масс *трубы* в обеих системах отсчета. Как движется в каждой из систем отсчета центр масс системы, включающей трубу плюс оба пушечных ядра?



Р и с. 99. Пушечные ядра, летящие навстречу друг другу.

Р и с. 100. Компоненты скорости шаров *A* и *B* в лабораторной системе отсчета до столкновения.



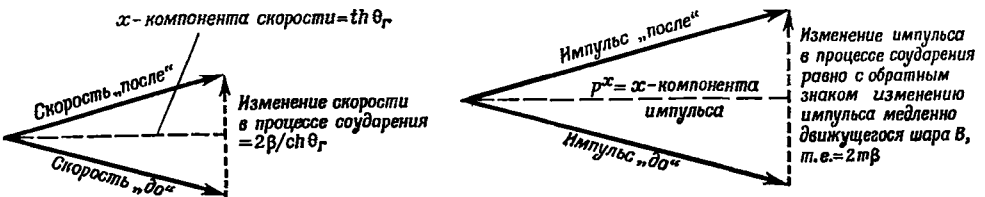
**60\*. Второй вывод релятивистского выражения для импульса**

а) На рис. 85 в системе отсчета ракеты между моментами столкновения двух шаров и попадания шара *A* в верхнюю стенку проходит интервал времени  $\Delta t'$ . В лабораторной системе отсчета этот промежуток времени равен  $\Delta t$ . Пользуясь формулами преобразования Лоренца, найдите связь между этими двумя промежутками времени,  $\Delta t'$  и  $\Delta t$ . Найдите связь между значениями *y*-компоненты скорости шара *A* в обеих системах (см. упражнение 20). Приняв за  $\beta$  скорость шара *A* в системе отсчета ракеты, покажите, что *y*-компонента скорости шара *A* в лабораторной системе отсчета  $\beta_{A, \text{лаб}}^y$  определяется выражением

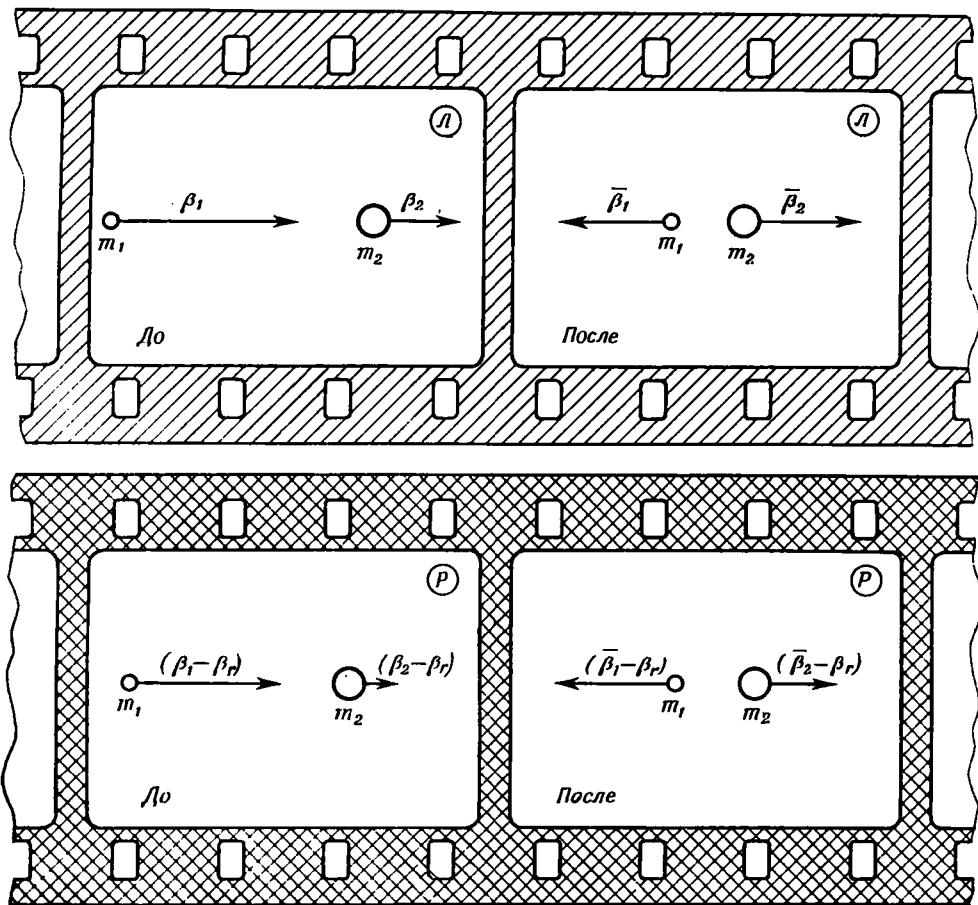
$$\beta_{A, \text{лаб}}^y = \frac{\beta}{\text{ch } \theta_r}.$$

б) Проанализируйте теперь это столкновение в лабораторной системе отсчета. На основании его симметрии в лабораторной системе и в системе отсчета ракеты проверьте правильность данных о компонентах скоростей, приведенных на рис. 100. Вспомните, что импульс частицы должен быть направлен вдоль ее движения (разд. 11). Поэтому треугольник векторов скорости шара *A* до и после столкновения подобен треугольнику векторов импульса шара *A* до и после столкновения (рис. 101). Предположим, что шар *B* в лабораторной системе отсчета движется настолько медленно, что его импульс можно определять по ньютоновской формуле  $m\beta$ . Потребуем теперь, чтобы изменение импульса шара *A* в процессе столкновения было равно по величине и противоположно по направлению изменению импульса шара *B*. Пропорциональность соответственных сторон подобных треугольников дает равенство:

$$\frac{\text{(Горизонтальный пунктирный отрезок на диаграмме импульса)}}{\text{(Вертикальный пунктирный отрезок на диаграмме импульса)}} = \frac{\text{(Горизонтальный пунктирный отрезок на диаграмме скорости)}}{\text{(Вертикальный пунктирный отрезок на диаграмме скорости)}}.$$



Р и с. 101. Диаграммы скорости и импульса шара *A* в лабораторной системе отсчета.



Р и с. 102. Анализ упругого лобового столкновения частиц разных масс в ньютоновской механике. Скорости частиц до и после соударения в лабораторной системе отсчета (верхний рисунок) и в системе отсчета ракеты (нижний рисунок), найденные по ньютоновскому закону сложения скоростей.

Покажите, что отсюда следует выражение

$$p^x = m \operatorname{sh} \theta,$$

для  $x$ -компоненты импульса быстро движущегося шара  $A$ .

в) В пределе малых  $y$ -компонент скоростей величина  $p^x$  становится равной полному импульсу  $p$  шара  $A$ , а параметр относительной скорости  $\theta$ , становится равным параметру  $\theta$  шара  $A$ . Отсюда следует выражение для релятивистского импульса частицы

$$p = m \operatorname{sh} \theta.$$

### 61\*. Второй вывод релятивистского выражения для энергии

а) *Сохранение ньютоновского импульса.* Рассмотрим лобовое упругое соударение частиц *различных* масс покоя ( $m_1$  и  $m_2$ ). Частица 1 отскакивает от частицы 2, потеряв часть своей скорости и передав часть импульса частице 2. Рассмотрите это столкновение с ньютоновских позиций. Основываясь на рис. 102, покажите, что в лабораторной системе отсчета из ньютоновского закона сохранения импульса следует уравнение

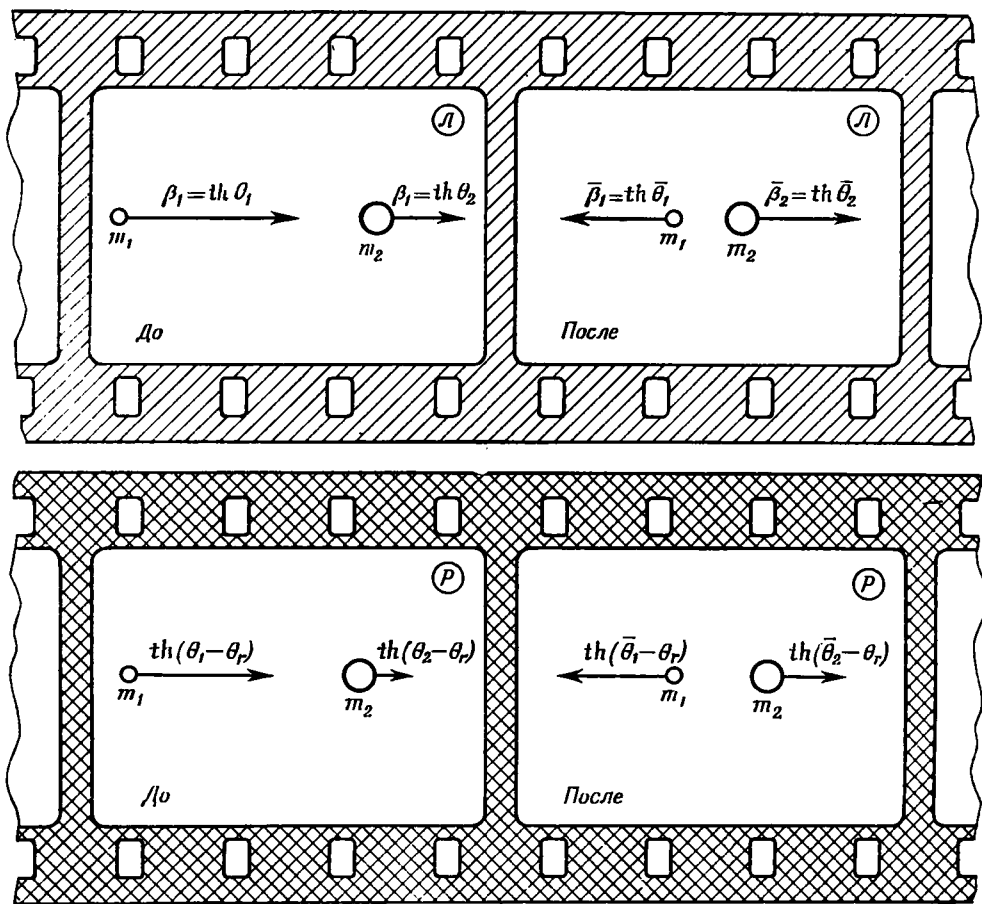
$$m_1 \beta_1 + m_2 \beta_2 = m_1 \bar{\beta}_1 + m_2 \bar{\beta}_2,$$

в котором величина  $\bar{\beta}_1$  отрицательна в случае указанных на этом рисунке направлений движения. Черточки над буквами означают, что соответствующие величины взяты после соударения. Рассмотрим теперь этот же процесс в системе отсчета ракеты. При малой относительной скорости движения ракеты  $\beta_r$  скорость каждой частицы в системе отсчета ракеты находится путем простого вычитания  $\beta_r$  из скорости этой частицы в лабораторной системе отсчета. Примените ньютоновский закон сохранения импульса к столкновению с точки зрения системы отсчета ракеты. Покажите, что если ньютоновский импульс сохраняется в лабораторной системе отсчета, он будет автоматически сохраняться и в системе отсчета ракеты, движущейся с малой скоростью относительно лабораторной системы отсчета.

б) Из сохранения релятивистского импульса следует сохранение релятивистской энергии. Рассмотрим теперь то же столкновение с релятивистской точки зрения. Покажите, что закон сохранения релятивистского импульса в лабораторной системе отсчета выражается уравнением

$$m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 = m_1 \operatorname{sh} \bar{\theta}_1 + m_2 \operatorname{sh} \bar{\theta}_2. \quad (111)$$

При этом массы обеих частиц остаются неизменными, так как столкновение является упругим. В случае указанных на рис. 103 направлений движения



Р и с. 103. Анализ упругого лобового столкновения частиц разных масс в релятивистской механике. Скорости частиц до и после соударения в лабораторной системе отсчета (верхний рисунок) и в системе отсчета ракеты (нижний рисунок), найденные по релятивистскому закону сложения параметров скорости.

величина  $\bar{\theta}_1$  отрицательна. В релятивистской механике скорости частиц в системе отсчета ракеты могут быть найдены путем вычитания *параметра относительной скорости*  $\theta_r$  из *параметра скорости* этих частиц в лабораторной системе отсчета (см. стр. 69). Примените закон сохранения импульса к этому столкновению, рассматриваемому в системе отсчета ракеты. Используйте данные табл. 8 (стр. 77—78) для того, чтобы преобразовать все гиперболические синусы, зависящие от разностей параметров скорости. В полученном уравнении перегруппируйте члены, объединяя те из них, которые содержат  $\text{ch } \theta_r$  или  $\text{sh } \theta_r$ :

$$(\text{Скобка № 1}) \cdot \text{ch } \theta_r - (\text{Скобка № 2}) \cdot \text{sh } \theta_r = 0. \quad (112)$$

Величины, стоящие в скобках, уже не зависят от параметра относительной скорости  $\theta_r$ . Если теперь потребовать, чтобы импульс сохранялся в системе отсчета *любой* ракеты, то полученное уравнение должно выполняться *при всех* значениях параметра относительной скорости  $\theta_r$ . Мы можем взять систему ракеты с любым значением параметра скорости — от нуля (когда  $\text{ch } \theta_r = 1$  и  $\text{sh } \theta_r = 0$ ) и до бесконечности (когда  $\text{ch } \theta_r$  равняется  $\text{sh } \theta_r$ ). Но полученное уравнение может выполняться *при всех* значениях  $\theta_r$  в указанных пределах, лишь если каждая из скобок *по отдельности* равна нулю. Покажите, что скобка № 1 равняется нулю, если импульс сохраняется в лабораторной системе отсчета. Покажите, что скобка № 2 равняется нулю, если

$$m_1 \text{ch } \theta_1 + m_2 \text{ch } \theta_2 = m_1 \text{ch } \bar{\theta}_1 + m_2 \text{ch } \bar{\theta}_2. \quad (113)$$

Уравнение (112) выражает закон сохранения импульса в системе отсчета ракеты. Очевидно, что импульс сохраняется в системах отсчета всех возможных ракет тогда и только тогда, когда в лабораторной системе одновременно выполняются уравнения (111) и (113). Уравнение (111) выражает закон сохранения импульса в лабораторной системе отсчета. Какой же закон сохранения выражает уравнение (113)? Выясните смысл величины  $m \text{ch } \theta$  и назовите новый закон сохранения.

в) Останется ли справедливым приведенный вывод, если обозначить массы покоя частиц после столкновения через  $\bar{m}_1$  и  $\bar{m}_2$  и допустить, что они отличны от масс покоя частиц до столкновения? Будет ли оставаться верным закон сохранения релятивистской энергии и в этом случае? Сохраняется ли при таких столкновениях релятивистская *кинетическая энергия*?

## Б. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЭНЕРГИИ И МАССЫ ПОКОЯ

### 62. Задачи на пересчет

а) Сколько массы излучает 100-ваттная электрическая лампочка (в форме теплоты и света) в течение года?

б) В Соединенных Штатах в год вырабатывается около  $10^{12}$  *квт-час* электроэнергии. Чему равен массовый эквивалент этой энергии? В самом ли деле это количество массы превращается в энергию в процессе генерирования электроэнергии? Может быть, превращается меньшее или большее количество массы? Мотивируйте свой ответ.

в) Когда студент изо всех сил крутит педали велосипеда, он производит  $\frac{1}{2}$  лошадиной силы *полезной* мощности (1 л. с. = 746 вт). Коэффициент полезного действия человеческого организма составляет около 25%; это значит, что 75% пищи сгорает, превращаясь в теплоту, и лишь 25% пищи при сгорании переводится в полезную работу. Сколько времени должен ехать студент на велосипеде, чтобы потерять 1 кг массы за счет ее превращения в энергию? Почему же для уменьшения веса полезна физкультура?



г) На квадратный метр поверхности, перпендикулярной направлению солнечных лучей, вблизи Земли, но вне ее атмосферы, от Солнца приходит около  $1,4 \text{ кэт}$  световой энергии. (Эти  $1,4 \text{ кэт/м}^2$  носят название *солнечной постоянной*.) Какое количество массы излучает Солнце в форме света в одну секунду? Сколько массы с Солнца поступает в форме света на Землю в год?

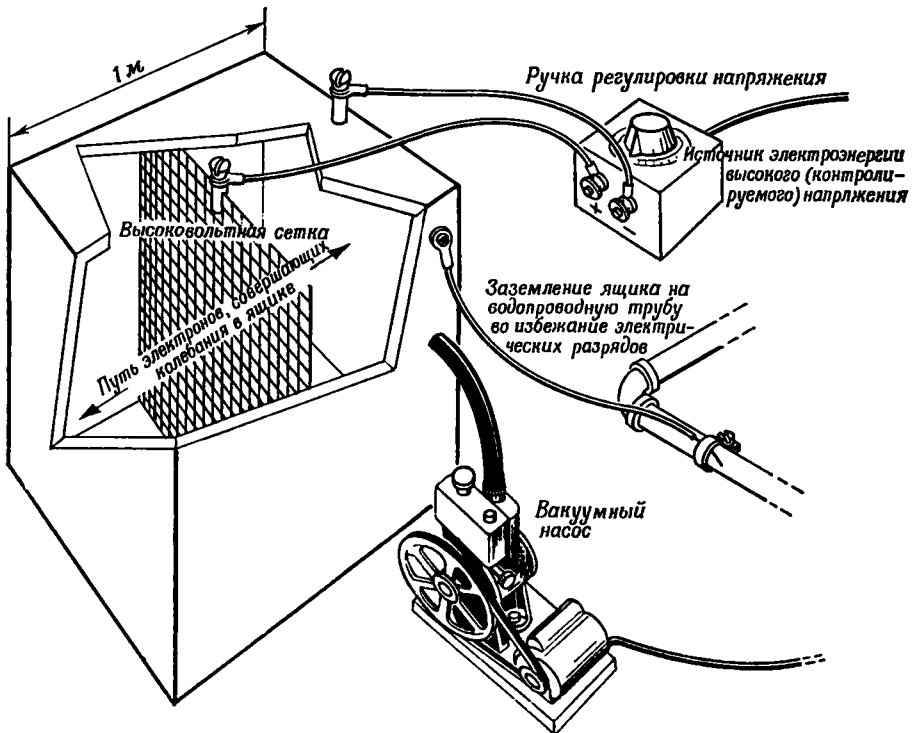
д) Два товарных поезда, каждый массой  $10^6 \text{ кг}$ , движутся друг другу навстречу по одному и тому же пути с одинаковыми скоростями  $45 \text{ м/сек}$  (примерно  $160 \text{ км/час}$ ). При столкновении они останавливаются. Масса покоя поездов в сумме с массами покоя рельсов и насыпи сразу же после столкновения возрастает; сколько микрограмм составляет это возрастание? Пренебрегите потерями энергии в форме звука и света.

### 63. Релятивистская химия

При соединении  $1 \text{ кг}$  водорода с  $8 \text{ кг}$  кислорода выделяется около  $10^8 \text{ Дж}$  энергии. Очень хорошие химические весы могут обнаружить относительное изменение массы, равное  $10^{-7}$ . Во сколько раз такая чувствительность больше (или меньше) необходимой для обнаружения относительного изменения массы в данной реакции?

### 64\*\*. Релятивистский осциллятор

Для того чтобы проверить законы теории относительности, некий инженер решил построить осциллятор с очень легким колеблющимся грузом, способным очень быстро двигаться взад и вперед. Самым легким из известных грузов с ненулевой массой покоя является электрон. Инженер взял кубический ящик из металла, каждое ребро которого равно  $1 \text{ м}$ , и слегка его подогрел, чтобы из стенок «испарилось» небольшое число электронов (рис. 104). Поперек ящика в середине его помещена электрически изолированная от стенок металлическая сетка, к которой от генератора подведено



Р и с. 104. Электрон в качестве колеблющегося груза в релятивистском осцилляторе.

высокое положительное напряжение. Ручку регулятора напряжения можно поворачивать, чтобы менять постоянную разность потенциалов  $V_0$  между стенками ящика и сеткой.

Вакуумный насос выкачивает воздух из ящика, чтобы электроны могли свободно двигаться внутри него, не сталкиваясь с молекулами воздуха. Пусть испарившийся с внутренней части стенки ящика электрон первоначально обладает весьма малой скоростью (примем эту начальную скорость равной нулю). Положительно заряженная сетка притягивает этот электрон; он ускоряется в ее направлении, проходит сквозь отверстие в ней, замедляется по мере удаления от нее, так как его тормозит притяжение сетки, на мгновение останавливается и снова летит к сетке. В результате он колеблется взад и вперед между стенками ящика.

а) Насколько малым может быть сделан период колебаний электрона  $T$  (время одного замкнутого колебательного движения туда и обратно между стенками)? Конструировавший эту установку инженер утверждает, что при соответствующем повороте ручки регулятора напряжения можно получить по желанию сколь угодно высокую частоту колебаний  $\nu = 1/T$ . Прав ли он?

б) Когда напряжение достаточно мало, электрон остается нерелятивистским, и его движение можно описывать законами ньютоновской механики. Во сколько раз при этом увеличивается частота колебаний электрона при удвоении напряжения на сетке? (*Обсуждение.* Во сколько раз различается до и после удвоения напряжения ньютоновская кинетическая энергия электрона в соответствующих точках его траектории? Во сколько раз изменяется при этом его скорость?)

в) Как выглядит окончательная формула для частоты  $\nu$  как функции напряжения в нерелятивистском случае?

г) Чему равна частота в крайнем ультрарелятивистском случае, когда электрон большую часть своего времени движется... (конец фразы не будем договаривать!)...?

д) Начертите на одном и том же графике две зависимости частоты  $\nu$  от напряжения на сетке  $V_0$ : 1) нерелятивистскую кривую из пункта (в), проведенную *жирно* там, где ей можно пользоваться с *уверенностью*, и пунктиром в других местах; 2) ультрарелятивистское значение из пункта (г). По этому графику количественно определите, при каком напряжении поведение электрона *переходит* из нерелятивистского в релятивистское. По возможности дайте простое объяснение того, как ваши выводы учитывают *порядок величины* (т. е. отбрасывают множители типа 2,  $\pi$  и т. д.).

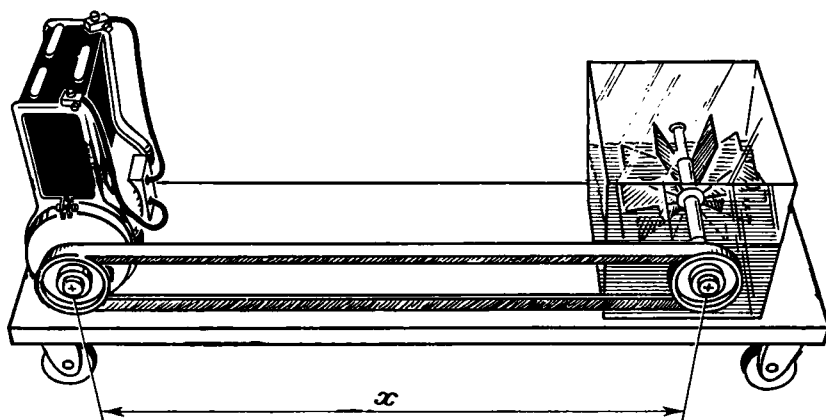
## 65\*\*. Импульс без массы?

На рис. 105 изображен миниатюрный мотор, установленный на платформе и питаемый от аккумулятора, поставленного на него. С помощью ременной передачи мотор приводит во вращение колесико с лопатками, «гребущее» по воде. Устройство с гребным колесиком смонтировано на той же платформе, что и мотор. Мощность мотора равна  $dE/dt$ .

а) Какое количество массы переносится в секунду с одного конца платформы на другой от мотора к гребному колесу?

б) Масса переносится на расстояние  $x$  со скоростью, найденной вами в пункте (а). Какой *импульс* связан с этим переносом массы? Так как этот импульс мал, применимы ньютоновские представления об импульсе.

в) Пусть платформа первоначально покоится и стоит на горизонтальной поверхности стола на колесах, лишенных трения. Платформа начнет двигаться! В каком направлении? Что произойдет с этим движением, когда истощится заряд аккумулятора? Насколько продвинется платформа за это время?



Р и с. 105. Перенос массы, не сопровождаемый переносом частиц или излучения.

г) Покажите, что наблюдатель на платформе наблюдал бы перенос энергии лишь ременной передачей; наблюдатель на столе наблюдал бы перенос энергии отчасти ременной передачей, а отчасти самой платформой; наблюдатель же, движущийся по ременной передаче в одну сторону, наблюдал бы перенос энергии отчасти ременной передачей (отрезком ремня, движущимся в сторону, противоположную ему), а отчасти платформой. Очевидно, что не всегда можно сделать заключение, удовлетворяющее всех наблюдателей, о путях, по которым энергия передается с одного места на другое, или о скорости, с которой эта энергия переносится!

## В. ФОТОНЫ

### 66. Частицы нулевой массы покоя

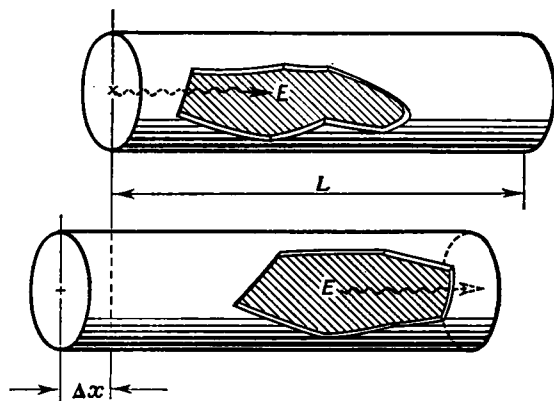
На чем основывается вывод важного соотношения  $E^2 - p^2 = m^2$ ? Получите из него соотношение между энергией и импульсом, справедливое для случая *нулевой* массы покоя (фотоны, гравитоны, нейтрино). Что можно заключить из этого соотношения относительно наклона мировой линии такой частицы (а следовательно, о ее скорости)? Как зависят ваши результаты от равенства  $sh \theta$  и  $ch \theta$  друг другу в случае больших  $\theta$ , если их рассматривать как предельный случай? Существует ли для частиц с нулевой массой покоя «сопутствующая система отсчета» («система покоя»)?

### 67. Эйнштейновский вывод принципа эквивалентности энергии и массы покоя — подробный пример

*Задача.* Исходя из того, что свет переносит энергию и оказывает давление на тела, показать, что его энергия эквивалентна массе, и тем самым, обобщая, доказать, что всякая энергия эквивалентна массе. *Комментарий.* Эквивалентность энергии и массы является настолько фундаментальным следствием теории, что Эйнштейн, получив это следствие собственно из теории относительности, сразу же продолжил свои рассуждения и нашел альтернативный подход, приводящий к тому же выводу, но опирающийся на элементарную физику<sup>1)</sup>. Он рассмотрел первоначально покоившийся закрытый ящик массы  $M$  (рис. 106). Из его левой стенки вправо излучается направленный сгусток электромагнитной энергии, проходящий через весь ящик длины  $L$

<sup>1)</sup> А. Einstein, Annalen der Physik, 20, 627 (1906).

Р и с. 106. Перенос массы излучением.



и поглощающийся в противоположном его конце. Это излучение переносит энергию  $E$ . Но оно несет также импульс — это видно из следующих соображений. Излучение оказывает давление на левую стенку ящика, когда оно покидает ее. В результате ящик испытывает толчок влево и приобретает импульс  $-p$ . Но ведь импульс системы в целом первоначально был равен нулю, значит излучение несет импульс  $p$ , противоположный импульсу, полученному ящиком. Как воспользоваться этими данными о переносе энергии и импульса излучением для нахождения *массового эквивалента* этого излучения? Эйнштейн получил ответ, исходя из того, что центр масс системы не двигался до того, как начался процесс переноса, и поэтому не мог начать двигаться во время его протекания. Но очевидно, что масса ящика передвинулась влево. Значит, *излучение должно перемещать массу вправо*. Это были общие идеи, которыми руководствовался Эйнштейн, детали же состояли в следующем.

Из теории относительности Эйнштейн знал, что импульс  $p$  направленного пучка излучения равен его энергии  $E$  (как  $p$ , так и  $E$  измеряются в единицах массы; см. разд. 10). Однако, чтобы освободить рассуждения от всякого прямого использования принципа относительности, он получил соотношение  $p = E$  из следующих элементарных соображений. Давление, оказываемое на идеальный излучатель или поглотитель со стороны пучка, равно плотности энергии в этом пучке. Это известно как из теории электромагнитного излучения Максвелла, так и из непосредственных измерений давления, оказываемого светом на подвешенное в вакууме зеркальце. Такие измерения были впервые успешно произведены Е. Ф. Николсом и Дж. Ф. Халлом около 1901—1903 г. <sup>1)</sup> В настоящее время эти эксперименты были настолько упрощены, а их чувствительность так повышена, что они могут производиться в учебной лаборатории <sup>2)</sup>.

$$\left( \begin{array}{l} \text{Плотность энергии излучения} \\ \text{в единицах энергии, содержа-} \\ \text{щаяся в единице объема} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{Давление, оказываемое направленным} \\ \text{излучением на идеальный излучатель} \\ \text{или поглотитель в единицах силы} \\ \text{на единицу площади} \end{array} \right).$$

Взяв этот вывод, умножим обе стороны равенства на величину площади  $A$  излучающей стенки и длину  $l$  сгустка радиации (которая должна быть

<sup>1)</sup> П. Н. Лебедев произвел прецизионные опыты по измерению давления света в 1900 г. (см. П. Н. Лебедев, Избранные сочинения, М.—Л., 1949).— *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> См. R. P o l l o c k, American Journal of Physics, 31, 901 (1963). Метод Поллока измерения давления света состоит в использовании явления резонанса для усиления слабых эффектов, так что их величина достигает легко поддающихся измерению значений. Поллок разработал этот эксперимент в сотрудничестве с той же самой группой первокурсников, с которой авторы этой книги имели удовольствие выработать это изложение теории относительности. Авторы особенно признательны Марку Вассерману, члену этой группы, сделавшему ряд полезных замечаний по поводу некоторых дальнейших схем.

по крайней мере короче длины  $L$  ящика). Заметим, что  $l$  равняется времени действия давления излучения, умноженному на скорость света. Поэтому наш множитель имеет вид

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\text{Объем, занятый сгустком}}{\text{энергия излучения}} \right) = \\ & = \left( \frac{\text{Площадь излучающей}}{\text{поверхности}} \right) \cdot \left( \frac{\text{Время действия давления}}{\text{на поверхность}} \right) \cdot \left( \frac{\text{Скорость}}{\text{света}} \right). \end{aligned}$$

Перемножая соответственные стороны двух последних равенств, найдем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\text{Энергия, переносимая}}{\text{излучением}} \right) &= \left( \frac{\text{Сила, действующая}}{\text{со стороны излуче-}} \right) \cdot \left( \frac{\text{Время}}{\text{действия}} \right) \cdot \left( \frac{\text{Скорость}}{\text{света}} \right) = \\ &= \left( \frac{\text{Импульс, переданный излучением}}{\text{стенке, т. е. величина импульса,}} \right) \cdot \left( \frac{\text{Скорость}}{\text{света}} \right). \end{aligned}$$

То же самое в единицах массы:

$$E = \left( \frac{\text{Энергия направленного}}{\text{сгустка излучения}} \right) = \left( \frac{\text{Импульс направленного}}{\text{сгустка излучения}} \right) = p. \quad (114)$$

Итак, излучение переносит импульс и энергию вправо, тогда как ящик переносит импульс и массу влево. Но центр масс этой системы (ящик + излучение) не может двигаться. Значит, излучение должно переносить вправо не только энергию, но и массу. Чему равна эта масса? Чтобы ответить на этот вопрос, сначала зададимся другими вопросами:

а) Чему равна скорость ящика в то время, когда в нем распространяется излучение?

б) Когда излучение поглощается в противоположном конце ящика, вся система снова приходит в состояние покоя. На какое расстояние сдвинется ящик за время распространения излучения?

в) Потребуем теперь, чтобы центр масс системы сохранял положение одно и то же как до, так и после распространения излучения. Чему на основании этих соображений равен массовый эквивалент энергии, перенесенной из одного конца ящика в другой?

*Ответы.* а) В период, пока излучение распространяется, импульс ящика должен быть равен по абсолютной величине и противоположен по направлению импульсу  $p$  излучения. Ящик движется с очень малой скоростью  $\beta$ , так что для нахождения его импульса достаточно применить ньютоновскую формулу  $M\beta$ :

$$M\beta = -p = -E.$$

Отсюда находим величину скорости ящика:

$$\beta = -\frac{E}{M}.$$

б) Время распространения фотона практически равно  $t = L$  метрам светового времени. За этот срок ящик проходит расстояние

$$\Delta x = \beta t = -\frac{EL}{M}.$$

в) Если бы излучение не несло с собой массы и ящик был единственным объектом, наделенным массой, то этот сдвиг  $\Delta x$  представлял бы собой полное перемещение центра масс системы влево. Но Эйнштейн утверждал, что если центр масс изолированной системы первоначально покоился, то он не может прийти в движение или изменить свое положение. Поэтому, заключил Эйнштейн, должно произойти уравновешивающее смещение части масс

системы. Этот перенос массы вправо можно понять лишь как новое свойство самого излучения. Значит, в то время, как ящик двигался влево, излучение должно было перенести вправо некоторую массу  $m$ , величина которой пока неизвестна, но такова, что обеспечивает неподвижность центра масс системы в целом. Длина пути переноса равна полной длине ящика  $L$  минус то расстояние  $\Delta x$ , на которое ящик сдвинулся за это время влево. Однако величина  $\Delta x$  меньше, чем  $L$ , в пропорции  $E/M$ . Это отношение может быть сделано сколь угодно малым при любой данной величине перенесенной энергии излучения  $E$ , если взять ящик достаточно большой массы  $M$ . Поэтому мы имеем право принять пройденное излучением расстояние равным самой величине  $L$ . Итак, со сколь угодно высокой степенью точности условие неподвижности центра масс можно записать в виде

$$M\Delta x + mL = 0.$$

Отсюда, подставляя величину  $\Delta x$ , найденную в пункте (б), определим значение массы  $m$ :

$$m = -\frac{\Delta x M}{L} = -\left(-\frac{EL}{M}\right) \cdot \frac{M}{L}.$$

Окончательно:

$$m = E.$$

Мы пришли к выводу, что процесс излучения, распространения и поглощения энергии  $E$  эквивалентен переносу массы  $m = E$  из одного конца ящика в другой его конец. Элементарность этого вывода и фундаментальность результата делают приведенные рассуждения одними из самых интересных в физике.

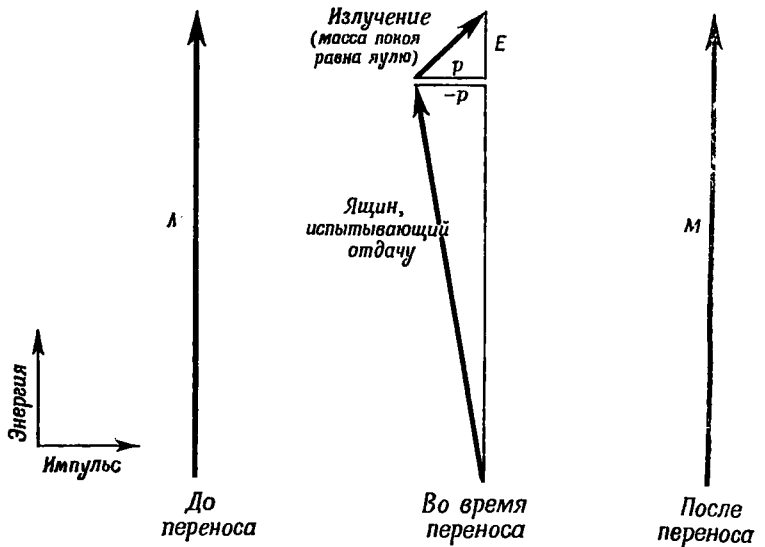
*Обсуждение.* Существование масс-эквивалента для энергии излучения влечет за собой существование масс-эквивалента тепловой энергии и, далее, всех прочих форм энергии, как показывает следующее рассуждение. Та энергия, которая была излучена из левой стенки ящика, могла до этого существовать там в форме тепловой энергии. Эта тепловая энергия могла перевести рядовой атом поверхности стенки в возбужденное состояние, а затем этот атом мог вернуться с этого более высокого энергетического уровня на более низкий и в результате излучить разность энергий этих уровней в виде радиации. Этот поток энергии затем пересекает ящик, поглощается и в конце концов снова принимает форму тепловой энергии. Каким бы ни был механизм излучения и поглощения света в деталях, *конечным результатом* является перенос тепловой энергии из одного конца ящика в другой его конец. Говорить, что масса должна была переместиться из конца в конец ящика при соответствующем распространении в нем излучения, значит поэтому утверждать, что масса перемещается при изменении места локализации *тепловой* энергии. Тепловая энергия, в свою очередь, может быть получена из химической энергии, или из энергии ядерных превращений, или из электрической энергии. Более того, образовавшаяся в правом конце ящика тепловая энергия может быть вновь превращена в любую из этих форм энергии. Поэтому все эти формы энергии, равно как и вообще все прочие ее формы, эквивалентны при их переносе перемещению количества массы

$$m = E.$$

Как можно подтвердить еще идею переноса массы сгустком излучения? Мы уже знаем, что масса покоя фотона равна нулю вследствие соотношения

$$(\text{Масса покоя})^2 = (\text{Энергия})^2 - (\text{Импульс})^2 = 0$$

(вернитесь к анализу в этом упражнении, а также в предыдущем; см., кроме того, разд. 12). Далее, то, что верно для индивидуального фотона, остается верным и для сгустка излучения, состоящего из множества фотонов:



Р и с. 107. Излучение приводит к переносу массы покоя из точки в точку, несмотря на то что масса покоя самого излучения равна нулю!

энергия и импульс по абсолютной величине равны друг другу, так что масса покоя излучения с необходимостью равна нулю. Нет ли противоречия в самой основе наших рассуждений, когда мы говорим, что масса покоя сгустка равна нулю, и тут же добавляем, что этот сгусток с энергией  $E$  переносит массу  $m = E$  из одного места в другое? Источником трудности является смешение двух совершенно различных понятий: 1) энергии — временной компоненты 4-вектора энергии-импульса и 2) массы покоя — абсолютной величины этого вектора. Когда система делится на две части (распространяющееся вправо излучение и получивший отдачу влево ящик), компоненты 4-векторов энергии-импульса излучения и ящика в сумме тождественно равны соответствующим компонентам первоначального 4-вектора энергии-импульса системы до генерации излучения (рис. 107). Но при этом абсолютные величины 4-векторов (а масса покоя и есть абсолютная величина!) не аддитивны. Работа в евклидовой геометрии, никто ведь не требует, чтобы длина одной стороны треугольника была равна сумме длин двух других его сторон. То же самое верно и в лоренцевой геометрии. Масса покоя системы ( $M$ ) не может приниматься равной сумме масс покоя излучения (равной нулю) и ящика, получившего отдачу (меньшей, чем  $M$ ). Но компоненты 4-векторов энергии-импульса аддитивны, например

$$\left( \begin{array}{l} \text{Энергия} \\ \text{системы} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{Энергия} \\ \text{излучения} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Энергия ящика,} \\ \text{получившего отдачу} \end{array} \right).$$

Мы видим отсюда, что энергия ящика, получившего отдачу, равна  $M - E$ . Уменьшилась не только энергия ящика, когда излучение отделилось от его стенки, уменьшилась также его масса покоя (см. укоротившуюся длину 4-вектора на диаграмме). Значит, излучение унесло часть массы покоя стенки ящика, хотя само это излучение и не имеет массы покоя. Результат,

$$\left( \begin{array}{l} \text{Масса покоя} \\ \text{системы} \end{array} \right) \neq \left( \begin{array}{l} \text{Масса покоя излучения} \\ \text{(нуль)} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Масса покоя ящика,} \\ \text{получившего отдачу} \end{array} \right),$$

в геометрии пространства-времени настолько же естествен, как и неравенство  $5 \neq 3 + 4$  в евклидовой геометрии.

Как же обстоит дело с гравитационным притяжением, действующим со стороны нашей системы на некий пробный объект? Конечно, перераспреде-

ление масс, когда излучение распространяется слева направо, приводит к изменению такого притяжения. Но пусть пробный объект находится от системы на расстоянии  $r$ , столь значительном, что подобное перераспределение пренебрежимо мало влияет на характер притяжения. Иными словами, пусть притяжение пробного объекта единичной массы определяется только той полной массой системы  $M$ , которая фигурирует в ньютоновской формуле тяготения:

$$\left( \begin{array}{l} \text{Сила, действующая} \\ \text{на единичную массу} \end{array} \right) = \frac{GM}{r^2}.$$

Если так, то не ощутит ли наш удаленный приемник мгновенного уменьшения силы гравитационного притяжения в тот момент, когда излучение распространяется через ящик? Разве масса покоя излучения не равна нулю, тогда как масса покоя ящика, испытавшего отдачу, стала меньше первоначальной массы покоя  $M$  системы? Не стала ли, таким образом, полная тяготеющая масса меньше, чем вначале, вследствие протекающего процесса переноса? Нет! Масса покоя системы — и мы повторим это — не равна сумме масс покоя ее отдельных частей. Вместо этого она равна абсолютной величине полного 4-вектора энергии-импульса системы. Но ни полный импульс системы (равный в нашем случае нулю!), ни ее полная энергия ни в какой момент времени не изменяются: ведь наша система изолирована. Поэтому не меняется и абсолютная величина  $M$  полного 4-вектора энергии-импульса (рис. 107). А это в конце концов значит, что не изменяется и гравитационное притяжение.

Во всем этом анализе была, однако, одна небольшая подтасовка: ящик в действительности не может двигаться как твердое тело. Если бы он мог так двигаться, то информация об отделении излучения от *левой* стенки могла бы быть получена по наблюдению движения противоположной — *правой* — стенки задолго до прихода к ней самого излучения, т. е. эта информация была бы передана с большей скоростью, чем распространяется свет! На самом же деле толчок отдачи, вызванный генерацией излучения, распространяется по боковым стенкам ящика в виде *волны колебания*, т. е. со скоростью звука, и эта волна достигает противоположного конца намного позднее, чем туда приходит излучение. Тем временем акт поглощения излучения в правом конце ящика возбуждает другую *волну колебания*, которая движется *назад* по боковым стенкам ящика. Добавить к нашей задаче исследование колебаний ящика значило бы усложнить анализ, но не изменить сколько-нибудь существенно полученные выше выводы.

### 68\*. Устойчивость фотона

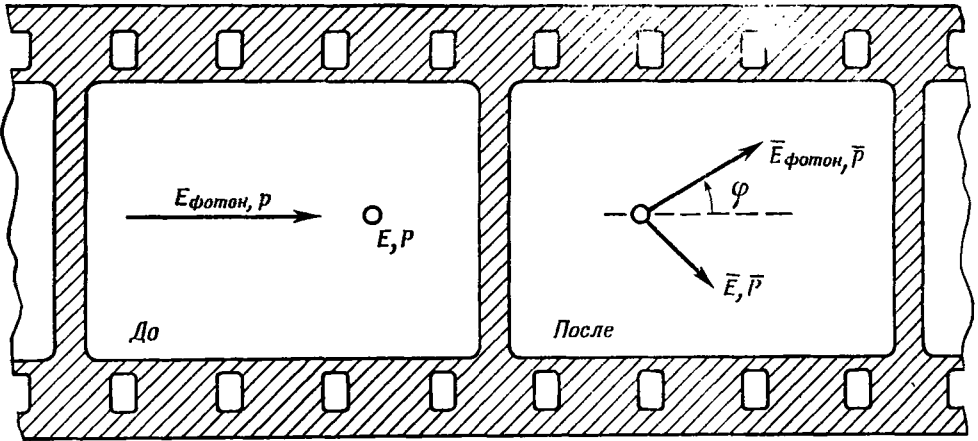
Покажите, что изолированный фотон не может раздробиться на два фотона, распространяющихся в направлениях, не совпадающих с направлением распространения первоначального фотона. (*Указание.* Используйте законы сохранения импульса и энергии и тот факт, что третья сторона треугольника короче, чем сумма двух других сторон. О каком треугольнике идет речь?)

### 69\*. Давление света

а) Вычислите полную силу, с которой действует луч одноваттного фонарика.

б) Основываясь на значении солнечной постоянной ( $1,4 \text{ квт/м}^2$ ; см. упражнение 62), вычислите величину давления солнечного света на спутник Земли. Рассмотрите как отражающие, так и поглощающие поверхности, а также «реальные» поверхности (с частичным поглощением). Почему несуществен цвет падающего света?



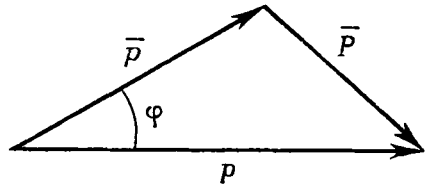


Р и с. 108. Комptonовское рассеяние фотона на электроне.

в) Частицы, размеры которых *меньше* некоторых критических, могут быть вытолкнуты из солнечной системы давлением солнечного света. Критические размеры определяются равенством выталкивающей силы и силы гравитационного притяжения частиц Солнцем. Оцените эти размеры, сделав все необходимые предположения. Перечислите в своем ответе сделанные предположения. Зависят ли полученные критические размеры от расстояния частиц от Солнца?

### 70\*. Эффект Комптона

В 1923 г. Артур Комpton показал, что рассеянные на свободных электронах рентгеновские лучи (фотоны) имеют после рассеяния меньшую энергию, чем до рассеяния <sup>1)</sup>. Этот эксперимент расценивается многими как



Р и с. 109. Диаграмма сохранения импульса при комptonовском рассеянии. Вспомните закон косинусов:

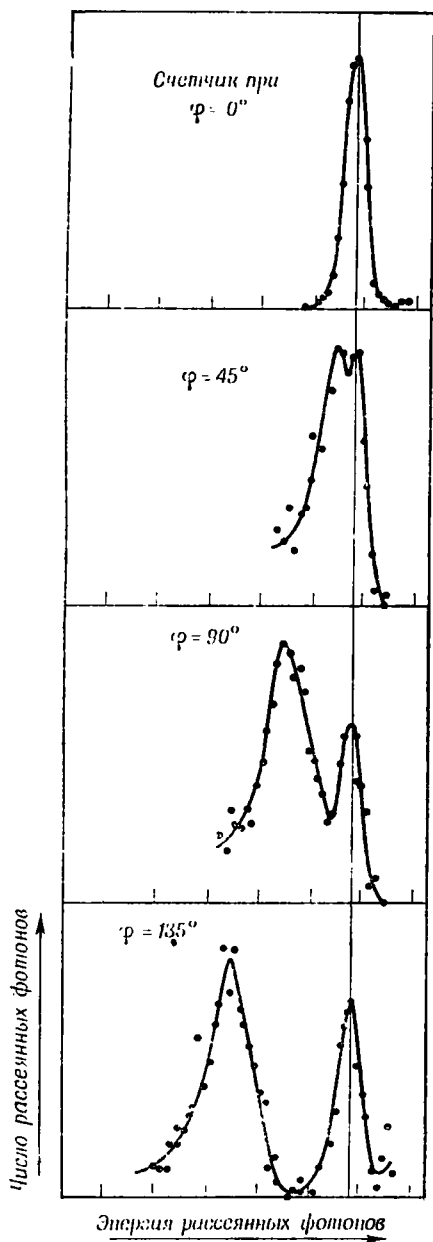
$$\bar{P}^2 = p^2 + \bar{p}^2 - 2p\bar{p} \cos \varphi.$$

самое ценное достижение физического опыта 20-х годов. Рассмотрим столкновение фотона с энергией  $E_\phi$  и электрона, который первоначально покоился; определим энергию фотона после рассеяния под углом  $\varphi$  к направлению своего падения. Угол  $\varphi$  носит название *угла рассеяния*. Мы примем следующие обозначения:

	До рассеяния	После рассеяния
Электрон	$E, P$	$\bar{E}, \bar{P}$
Фотон	$E_\phi, p$	$\bar{E}_\phi, \bar{p}$

*Не пользуйтесь* в своих рассуждениях ни  $h$ , ни  $\nu$ , ни  $\beta$ , ни  $\theta$ , ни  $\lambda$ , а *только* одними законами сохранения импульса и энергии да уравнениями

<sup>1)</sup> А. Н. С о m p t o n, Physical Review, 22, 411 (1923).



Р и с. 110. Результаты эксперимента Комптона, в котором фотоны рассеивались на электронах в графитовой мишени.

При расположении детектора на всех углах, кроме  $\varphi = 0$ , наблюдаются фотоны, рассеянные с потерей энергии (электроны испытывают отдачу), наряду с теми фотонами, которые почти или вообще не потеряли энергии (отдачу испытывает система электрон + атом как целое).

$$E^2 - P^2 = m^2 \quad \text{для электрона,}$$

$$E_{\phi}^2 - p^2 = 0 \quad \text{для фотона.}$$

Начертите график выраженной в единицах энергии покоя электрона энергии рассеянного фотона в функции угла рассеяния  $\varphi$  для того случая, когда энергия падающего фотона вдвое превышает энергию покоя электрона ( $2 \cdot 0,511 \text{ Мэв}$ ).

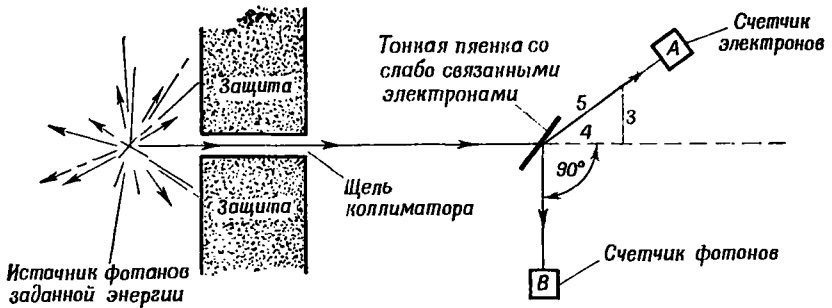
Собственно, опыты Комптона показали, что некоторые фотоны рассеиваются без заметного изменения энергии (рис. 110). Это были фотоны, рассеивавшиеся на электронах, связь которых в атоме оказалась настолько крепкой, что отдача передавалась атому как целому. Покажите, что для фотонов, рассеивающихся на крепко связанных в атомах средней массы [например,  $10 \cdot 2000 \cdot (\text{масса электрона})$ ] электронах, изменение энергии пренебрежимо мало.

#### 71\*. Измерение энергии фотона

Пусть некий данный радиоактивный источник испускает фотоны высокой энергии (рентгеновские лучи), характерной для соответствующих радиоактивных ядер. Поэтому точные измерения энергии часто могут быть использованы для выяснения состава даже мельчайшего образца. В установке, схема которой дана на рис. 111, регистрируются лишь такие события, когда срабатывание счетчика *A* (попадание в него электрона) сопровождается срабатыванием счетчика *B* (попадание рассеянного фотона). Чему равна энергия падающих фотонов, детектируемых таким способом (в единицах энергии покоя электрона)?

#### 72\*. Энергия и частота фотона

В 1900 г. Макс Планк открыл, что свет частоты  $\nu$  (число колебаний в секунду) с необходимостью следует признать состоящим из квантов (выражение Планка) или фотонов (более позднее выражение Эйнштейна), каждый из которых обладает энергией  $E = h\nu/c^2$  (выраженной здесь в единицах массы), где  $h$  — универсальный коэффициент пропорциональности, именуемый *постоянной Планка*. Но как может быть правильной формула Планка, если, как мы теперь знаем, не только  $E$ , но и  $\nu$  зависит от выбора системы отсчета, в которой мы наблюдаем свет?



Р и с. 111. Измерение энергии фотона.

а) Как изменяется энергия фотона при преобразовании Лоренца? Возьмем фотон с энергией  $E$  (и импульсом  $p = E/c$ ), движущийся в положительном направлении оси  $x$  в лабораторной системе отсчета. Требуется с помощью закона преобразования 4-вектора энергии-импульса найти выражение для энергии  $E'$  этого фотона в системе отсчета ракеты через одни только величины  $E$  и  $\theta_r$ .

б) Определите, как изменяется частота света  $\nu$  при преобразовании Лоренца. Говоря конкретнее, пусть отрезок синусоиды («серия вспышек») света распространяется в положительном направлении оси  $x$ , так что в течение одного метра светового времени мимо начала лабораторной системы отсчета проходит  $\nu/c$  горбов волны. Имеется в виду, что нулевой или «опорный» горб (или вспышка) проходит мимо начала в нулевой момент времени и что начало системы отсчета ракеты совпадает с началом лабораторной системы в этот же момент. Требуется показать, что координата  $x$  горба №  $n$  связана с моментом наблюдения (в метрах) соотношением

$$n = \frac{\nu}{c} (t - x).$$

На том же основании в системе отсчета ракеты получается соотношение

$$n = \frac{\nu'}{c} (t' - x').$$

Выразите последнюю формулу через лабораторные координаты, пользуясь преобразованием Лоренца (введя параметр относительной скорости  $\theta_r$ ). Насколько можно, упростите полученное выражение, пользуясь формулой

$$\operatorname{ch} \theta \pm \operatorname{sh} \theta = e^{\pm \theta}$$

из табл. 8, где  $e$  — основание натуральных логарифмов:  $e = 2,718281\dots$  Сравните полученное выражение для  $n$  с формулой для  $n$  в лабораторной системе отсчета и, пользуясь тем, что обе формулы зависят от  $x$  и  $t$ , найдите простое выражение для  $\nu'$  через  $\nu$  и  $\theta_r$ .

в) Сравните выводы, полученные вами в пунктах (а) и (б). Покажите, что в случае света, распространяющегося в направлении относительного движения двух систем отсчета, преобразование энергии фотона при переходе между этими системами совпадает с аналогичным преобразованием частоты световой волны. Этот вывод справедлив для произвольного направления распространения света (см. упражнение 75). Итак, если мы связали фотоны со световой волной в одной системе отсчета, эта связь сохранится во всех других системах. Из теории относительности не следует определенного численного значения постоянной Планка  $h$  в формуле, связывающей энергию (в единицах массы) и частоту;  $E = (h/c^2) \nu$ . Из опыта следует, что

постоянная Планка  $h$  равна  $6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·сек<sup>1</sup>). Покажите, что, если энергия измеряется в обычных единицах, связь между энергией и частотой принимает вид

$$E_{\text{обычн}} = h\nu \text{ (энергия в обычных единицах)}. \quad (115)$$

г) Покажите, что формула, описывающая эффект Комптона (упражнение 70), принимает при этом вид

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{mc^2} (1 - \cos \varphi)}. \quad (116)$$

Идея о том, что рассеивающая (перезлученная) волна обладает пониженной частотой, когда электрон получает электрический удар от поля волны фотона, встречала сильное сопротивление в 20-х годах нашего века.

### 73\*. Гравитационное красное смещение

Следующие две задачи предполагают некоторое знакомство с определенными элементарными фактами теории тяготения:

I. Очень малый объект (либо сферически симметричный объект произвольного радиуса) с массой  $m_1$  притягивает объект с массой  $m_2$  (также малый либо сферически симметричный) с силой  $F = Gm_1m_2/r^2$ . Здесь  $r$  — расстояние между центрами этих объектов, а  $G$  — ньютоновская гравитационная постоянная:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{сек}^2 \cdot \text{кг} = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{сек}^2 \cdot \text{г}.$$

II. Работа, необходимая для перенесения пробной частицы единичной массы из точки  $r$  в точку  $r + dr$  против сил гравитационного притяжения, вызываемых наличием закрепленной массы  $m$ , равна

$$Gm \cdot \frac{dr}{r^2}.$$

Переходя от обычных единиц энергии к единицам размерности массы, запишем эту работу как

$$dW = \frac{Gm}{c^2} \cdot \frac{dr}{r^2} = m^* \cdot \frac{dr}{r^2} \quad (117)$$

(работа, отнесенная к единице массы пробной частицы).

III. В этой формуле первый множитель,  $m^* = Gm/c^2$ , имеет очевидный смысл — это масса притягивающего центра, выраженная не в килограммах, а в метрах. Например, масса Земли ( $m = 5,983 \cdot 10^{24}$  кг) равна в единицах длины  $m_{\text{земля}}^* = 4,44 \cdot 10^{-3}$  м, тогда как масса Солнца ( $m = 1,987 \cdot 10^{30}$  кг) равна  $m_{\text{солнце}}^* = 1,47 \cdot 10^3$  м.

IV. Пусть пробная частица находится сначала на расстоянии  $r$  от притягивающего центра, а затем уносится на бесконечность. Необходимая для этого работа равна

$$W = \frac{m^*}{r} \quad (118)$$

из расчета на единицу массы, содержащейся в пробной частице.

а) Какая часть вашей энергии покоя перейдет в потенциальную энергию, если вы подниметесь на высоту памятника Вашингтону (555 фут, или 170 м)? Пусть

$$g^* = \frac{Gm_{\text{З}}}{c^2} \cdot \frac{1}{r_{\text{З}}^2} = \frac{m_{\text{З}}^*}{r_{\text{З}}^2}$$

<sup>1</sup>) Более привычны единицы — грамм, сантиметр и секунда, в которых  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек,  $h = 6,63 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек, а  $g = 980$  см/сек<sup>2</sup>. — Прим. перев.

есть ускорение силы тяжести на поверхности Земли (радиус  $R$ ), выраженное в  $m/m^2$ .

б) Какая часть вашей энергии покоя перейдет в потенциальную энергию, когда вы подниметесь за пределы действия гравитационного поля Земли? Допустим, что, кроме Земли, во Вселенной ничего нет. Зависит ли *доля* энергии, теряемой в пункте (а) или (б), от вашей первоначальной массы?

в) Используйте результат, полученный в пункте (а), для нахождения относительного изменения энергии фотона, поднимающегося вертикально на высоту  $z$  в однородном гравитационном поле  $g^*$ . Масса покоя фотона равна нулю, и формально можно сказать, что фотон обладает кинетической энергией  $E = T$ . Поэтому фотон располагает лишь одним источником, а именно своей кинетической энергией, за счет которого он может компенсировать возрастание потенциальной энергии при подъеме в гравитационном поле. Световая волна с частотой  $\nu$  состоит из фотонов энергии  $E = h\nu/c^2$  (см. упражнение 72). Требуется показать, что относительная потеря энергии фотонами, поднимающимися в гравитационном поле, соответствует следующему относительному изменению их частоты:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -g^*z \text{ (однородное гравитационное поле).}$$

г) Вывод, полученный в пункте (б), используйте для нахождения величины относительной потери энергии *фотоном* при его удалении на бесконечность. (Применение этого вывода является хорошим приближением с точностью до 1%, если сама величина относительной потери энергии не превышает 2%.) Пусть, например, фотон испускается из какой-то точки на поверхности астрономического объекта массы  $M$  ( $\kappa g$ ) или  $M^*$  ( $m$ ) и радиуса  $r$ . Исходя из величины относительной потери энергии, покажите, что относительное изменение частоты определяется формулой

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{M^*}{r}. \quad (119)$$

Такое уменьшение частоты называется *гравитационным красным смещением*, потому что в видимом свете смещение состоит в сдвиге линий к низкочастотному (красному) концу спектра. Найдите величину относительного гравитационного красного смещения для света, испускаемого с поверхности Земли, и для света, испускаемого с поверхности Солнца.

#### 74\*. Плотность спутника Сириуса

Сириус (Альфа созвездия Большого Пса) — самая яркая звезда неба. Сириус и его маленький спутник обращаются один вокруг другого. Анализируя это обращение с помощью ньютоновской механики, астрономы смогли определить, что масса спутника Сириуса приблизительно равна массе нашего Солнца ( $m \approx 2 \cdot 10^{30} \kappa g$ ,  $m^* \approx 1,5 \cdot 10^3 m$ ).

Излучение спутника Сириуса было исследовано спектроскопически. Отождествленные по своему взаимному расположению спектральные линии некоторого химического элемента оказались сдвинутыми по своей частоте на  $7 \cdot 10^{-4}$  от величины частоты тех же спектральных линий того же элемента в лаборатории. (Эти опытные данные верны с точностью до первой значащей цифры.) Интерпретируя это красное смещение как гравитационное (см. формулу в конце упражнения 73), найдите среднюю плотность спутника Сириуса в граммах на кубический сантиметр. Этот тип звезд носит название *белых карликов*.

## Г. ДОПЛЕРОВСКОЕ СМЕЩЕНИЕ

## 75. Формулы Доплера

Пусть фотон движется в лабораторной системе отсчета в плоскости  $xу$  в направлении, образующем угол  $\varphi$  с осью  $x$ , так что он обладает компонентами импульса  $p^x = p \cos \varphi$ ,  $p^y = p \sin \varphi$  и  $p^z = 0$ .

а) Используйте формулы преобразования Лоренца для 4-вектора энергии-импульса и соотношение  $E^2 - p^2 = 0$ , справедливое для фотона, чтобы показать, что в системе отсчета ракеты фотон обладает энергией  $E'$ ,

$$E' = E \operatorname{ch} \theta_r \cdot (1 - \beta_r \cos \varphi), \quad (120)$$

и движется в направлении, образующем с осью  $x'$  угол  $\varphi'$ , причем

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \beta_r}{1 - \beta_r \cos \varphi}. \quad (121)$$

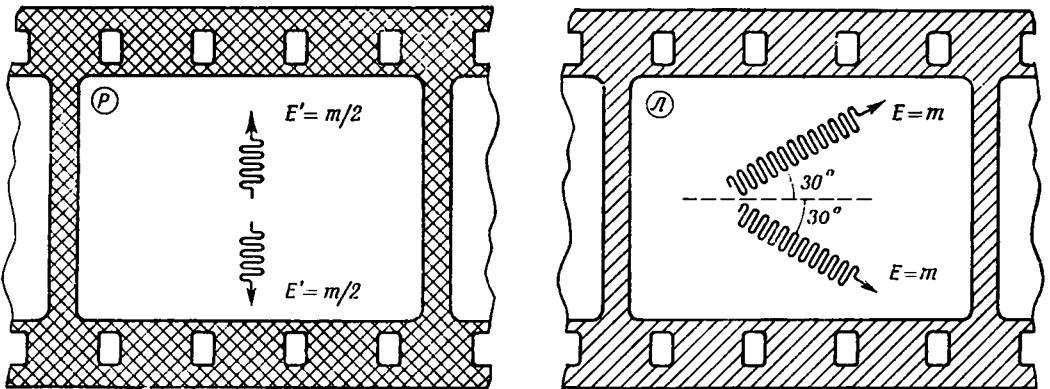
б) Найдите обратные уравнения, выражающие  $E$  и  $\cos \varphi$  через  $E'$ ,  $\cos \varphi'$  и  $\beta_r$ . Сравните эти обратные уравнения с полученными в упражнении 22 («эффekt прожектора»).

в) Если частота света в лабораторной системе отсчета равна  $\nu$ , то чему равна частота этого света  $\nu'$  в системе отсчета ракеты? Такое различие частот, обусловленное относительным движением, носит название *релятивистского эффекта Доплера* (упражнение 6). Позволяют ли полученные уравнения определить, в какой системе отсчета покоится источник фотонов?

76. Распад  $\pi^0$ -мезона; подробный пример

Нейтральный пи-мезон ( $\pi^0$ -мезон), движущийся в лабораторной системе отсчета в направлении оси  $x$  и обладающий кинетической энергией, равной его энергии покоя, распадается на два фотона. В системе отсчета ракеты, где мезон покоится, эти фотоны разлетаются в положительном и отрицательном направлениях оси  $y'$ . Определите энергии фотонов в системе отсчета ракеты (в единицах энергии покоя мезона) и энергии и направления вылета фотонов в лабораторной системе отсчета.

*Решение.* В системе отсчета ракеты  $\pi^0$ -мезон до своего распада покоился (импульс равен нулю). Он никак не мог распасться на *один* фотон, не нарушив сохранения импульса. При распаде на *два* фотона импульс сохранится, если: а) фотоны разлетаются в *противоположных* направлениях в той системе



отсчета, где мезон до своего распада покоился, и б) импульсы этих фотонов в такой системе равны по абсолютной величине, так что фотоны обладают одинаковыми энергиями (для фотонов  $E' = p'$ ). Таким образом, в системе отсчета ракеты задача имеет следующее решение: каждый фотон уносит *половину* энергии покоя мезона,  $E' = m/2$ . Кроме того, эти фотоны по условию должны разлетаться в положительном и отрицательном направлениях оси  $y'$  ( $\varphi' = \pm 90^\circ$ , так что  $\cos \varphi' = 0$ ).

Энергия и направление вылета каждого из фотонов в *лабораторной* системе отсчета могут быть найдены по формулам, полученным в упражнении 75:

$$E = E' \operatorname{ch} \theta_r \cdot (1 + \beta_r \cos \varphi'),$$

$$\cos \varphi = \frac{\cos \varphi' + \beta_r}{1 + \beta_r \cos \varphi'}.$$

Прежде всего необходимо найти величины  $\theta_r$  и  $\beta_r$ . Согласно условию задачи, кинетическая энергия мезона в лабораторной системе отсчета до его распада была равна массе покоя; тогда

$$E_\pi \equiv m \operatorname{ch} \theta_r \equiv T + m = 2m,$$

откуда

$$\operatorname{ch} \theta_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_r^2}} = 2,$$

так что

$$\beta_r = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставьте теперь эти данные и величину  $E' = m/2$  в уравнения преобразования, и вы получите

$$E = m,$$

$$\cos \varphi = \beta_r = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

так что  $\varphi = 30^\circ$ . Величину энергии можно было бы найти непосредственно по симметрии распада и по равенству полной энергии мезона до распада  $2m$ . Выводы подытожены на рис. 112. *Проверьте*, что в лабораторной системе отсчета *импульс* сохраняется, как и энергия.

### 77. Полет неоновой лампочки

Неоновая лампочка, которая в своей системе покоя изотропно во всех направлениях излучает красный свет, приближается к наблюдателю с очень большого расстояния, двигаясь со скоростью, близкой к скорости света, по прямолинейному пути, отстоящему от наблюдателя на расстоянии  $l$  по перпендикулярю. С течением времени изменяются как цвет излучения, так и число фотонов, приходящих к наблюдателю от лампочки. Качественно опишите эти изменения на различных этапах движения. Рассмотрите как эффект Доплера, так и «эффект прожектора» (упражнения 75 и 22).

### 78. Физик и светофор

Физика задержался за то, что он поехал на красный свет. На суде он заявил, что приближался к перекрестку на скорости, при которой красный свет казался ему зеленым. Судья, получивший в свое время физическое образование, обвинил тогда физика в превышении предельной скорости и присудил его к уплате одного доллара за превышение местного предела скорости 20 *миль/час* на каждую милю в час. Чему равна сумма штрафа?

Примите длину волны зеленого света равной  $5300 \text{ \AA}$  ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ ), а длину волны красного света —  $6500 \text{ \AA}$ . Учтите, что свет распространялся в *отрицательном* направлении оси  $x$  ( $\varphi = \varphi' = \pi$ ).

### 79. Доплеровское смещение на краю диска Солнца

Солнце совершает один оборот вокруг своей оси за 24,7 суток. Радиус Солнца составляет около  $7,0 \cdot 10^8 \text{ м}$ . Вычислите величину доплеровского смещения, которое должно наблюдаться для света с длиной волны  $5000 \text{ \AA}$  ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ ) на одном из краев диска Солнца вблизи его экватора. Происходит ли это смещение в стороны красного или синего конца видимого спектра? Сравните величину смещения Доплера с величиной гравитационного красного смещения для поверхности Солнца (упражнение 73).

### 80. Расширяющаяся Вселенная. (Вспомните упражнение 6)

а) Производится спектрометрическое исследование света, приходящего от далекой галактики. Спектральную линию с длиной волны  $7300 \text{ \AA}$  удается отождествить (по ее положению в общей картине линий) со спектральной линией водорода, обладающей для излучения водорода в условиях лаборатории длиной волны  $4870 \text{ \AA}$ . Если изменение длины волны обусловлено эффектом Доплера, то с какой скоростью должна двигаться относительно Земли исследуемая галактика? Заметьте, что свет распространяется в направлении, противоположном направлению движения галактики ( $\varphi = \varphi' = \pi$ ).

б) Полученные независимым путем данные говорят о том, что исследуемая галактика находится от нас на расстоянии 5 миллиардов световых лет. Оцените время, прошедшее с момента, когда эта галактика отделилась от нашей Галактики (Млечного Пути), приняв для простоты, что в прошлом скорость удаления была всегда постоянной (не замедлялась под действием взаимного притяжения галактик). Астроном Эдвин Хаббл обнаружил в 1929 г. <sup>1)</sup>, что это время (обратная которому величина носит название *постоянной Хаббла*, так что его можно называть хаббловским временем) приблизительно одинаково для всех галактик, расстояния до которых и скорости которых удалось измерить. Отсюда возникло представление о *расширяющейся Вселенной* <sup>2)</sup>. Приведет ли к *увеличению* или *уменьшению* в оценке времени, прошедшего с начала расширения, учет влияния тяготения в прошлом, приводящий к замедлению этого расширения?

### 81\*. Анализ парадокса часов с помощью эффекта Доплера <sup>3)</sup>

Проблема парадокса часов (см. упражнения 27 и 49) может быть изящно разрешена с помощью учета эффекта Доплера. Вспомним, что Павел оставался на Земле, тогда как Петр летал с огромной скоростью  $\beta$ , до далекой звезды и обратно на Землю. Пусть они оба наблюдали удаленную переменную звезду, яркость которой попеременно ослабевает и увеличивается с частотой  $\nu$  в системе отсчета Земли ( $\nu'$  в системе отсчета ракеты). Предположим, что расстояние до этой переменной звезды намного превышает длину пути Петра, а направление на нее в системе отсчета Земли перпендикулярно направлению движения Петра. Оба наблюдателя регистрируют одно и то же общее число пульсаций переменной в течение всего путешествия Петра от его вылета до возвращения. Исходя из этого факта и из формулы для доплере-

<sup>1)</sup> E. H u b b l e, Proc. U. S. National Acad. Sci., 15, 168 (1929).

<sup>2)</sup> Дальнейшие подробности см., например, в книге Hermann B o n d i, Cosmology, Cambridge University Press, Second Edition, 1960. [Теоретически возможность расширяющейся модели Вселенной была предсказана еще в 1921 г. А. А. Фридманом; см. его работы, перепечатанные в *Успехах физических наук*, 86, № 3 (1963). — *Прим. перев.*]

<sup>3)</sup> E. F e e n b e r g, American Journal of Physics, 27, 190 (1959).



ровского смещения (упражнение 75)

$$v' = v \operatorname{ch} \theta_r \cdot (1 - \beta_r \cos \varphi) \quad (122)$$

при данном угле наблюдения  $\varphi = 90^\circ$  в лабораторной системе отсчета, проверьте утверждение, что к концу путешествия, описанного в упражнении 27, Петр постареет всего на 14 лет, тогда как Павел — на все 50.

### 82\*. «Не превышайте скорости»

На автострате установлен стационарный радиолокатор, сдвиг частоты луча которого, отраженного от едущей навстречу ему машины, используется для измерения скорости ее. Одна из таких установок, используемых полицией в штате Нью-Джерси, работает на частоте 2455 Мгц. Насколько сдвигается частота отраженного луча, если приближающаяся к радиолокатору машина имеет скорость 80 миль/час (1 миля/час = 0,447 м/сек). (Произведите приближенный расчет, предполагая, что автомашина служит источником той же частоты, какой обладает излучение, падающее на нее в ее системе покоя. Для того чтобы решить эту задачу, необходимо произвести два преобразования: от системы отсчета автостраты к системе отсчета машины, а затем от системы отсчета машины вновь к системе отсчета автостраты.) Допустим, что радиолокационная установка способна различать скорости, разность между которыми составляет не менее 10 миль/час. Какое относительное изменение частоты может зарегистрировать эта установка?

### 83\*. Допплеровское уширение спектральных линий

Средняя кинетическая энергия атома газа при температуре  $T^\circ\text{K}$  (шкала Кельвина) равна  $\frac{3}{2} kT$ . (Константа  $k$  называется *постоянной Больцмана* и равна  $1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/град.) Определите относительное изменение частоты, обусловленное доплеровским смещением, которое будет наблюдаться в излучении атомов газа при температуре  $T$ . Используйте в качестве приближения для малых скоростей ньютонову механику. Будет ли наблюдаемая частота больше или меньше вследствие эффекта Доплера? Это явление — причина того, почему любая данная спектральная линия газа, возбужденного электрическим разрядом, состоит из узкой полосы частот вокруг некоторой центральной частоты. Оно называется *доплеровским уширением спектральных линий*.

### 84\*. Изменение энергии фотона вследствие отдачи излучателя

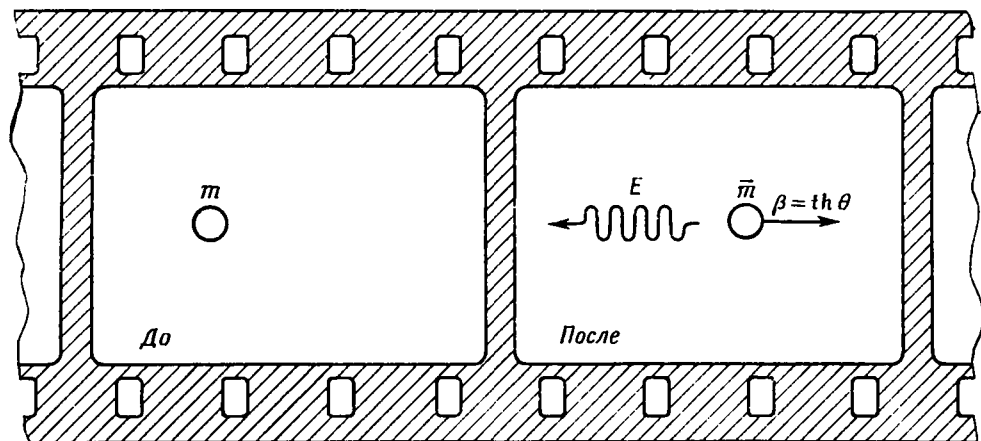
а) Свободная частица, первоначально покоившаяся и обладавшая массой покоя  $m$ , излучает фотон с энергией  $E$ . Эта частица (ее масса покоя стала равна  $\bar{m}$ ) испытывает отдачу, и ее параметр скорости становится равен  $\theta$  (рис. 113).

Сформулируйте законы сохранения таким образом, чтобы в них не фигурировала ни скорость, ни параметр скорости. Рассмотрите тот случай, когда относительное изменение массы покоя в процессе излучения намного меньше единицы. Покажите, что энергия фотона равна  $E_0 = m - \bar{m}$ . Покажите также, что в общем случае

$$E = E_0 \left( 1 - \frac{E_0}{2m} \right)$$

или

$$\frac{E - E_0}{E_0} = \frac{\Delta E}{E_0} = - \frac{E_0}{2m} \quad (123)$$



Р и с. 113. Отдача, испытываемая частицей при испускании фотона.

б) Покажите, что такое изменение энергии в области *видимого* света ( $E_0$ , обычн  $\approx 3$  эв), излучаемого *атомами* газа ( $mc^2 \approx 10 \cdot 10^9$  эв), намного меньше, чем обусловленное эффектом Доплера, вследствие теплового движения атомов (упражнение 83) даже при таких низких температурах, как комнатные ( $kT \approx 1/40$  эв).

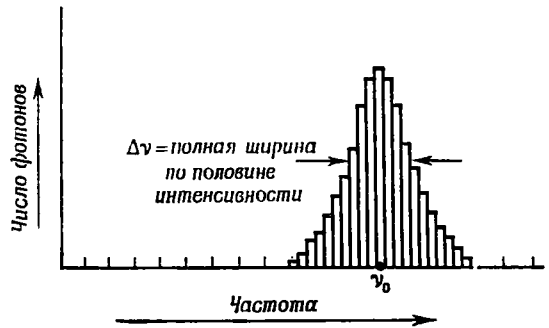
### 85\*. Эффект Мессбауэра

а) Свободный атом железа  $Fe^{57}$ , образовавшийся в так называемом «возбужденном состоянии» при радиоактивном распаде кобальта  $Co^{57}$ , при переходе в «нормальное состояние» атома  $Fe^{57}$  излучает из ядра гамма-квант (фотон высокой энергии) с энергией 14,4 кэв. Чему будет равно относительное изменение энергии гамма-кванта, вызванное эффектом отдачи атома? Масса атома  $Fe^{57}$  составляет около 57 масс протона.

б) В 1958 г. 29-летний Р. Л. Мессбауэр сделал важное открытие, что *не все* излучаемые гамма-кванты испытывают такой сдвиг частоты<sup>1)</sup>. Исходя из квантовой механики, он доказал теоретически, подтвердив свой вывод экспериментальной проверкой, что когда атомы железа включены в твердое тело (поскольку атомы железа образовались при радиоактивном распаде атомов кобальта, первоначально включенных в это твердое тело), значительная часть этих атомов железа *не испытывает отдачи*, свойственной свободным атомам в момент излучения. Напротив, они ведут себя так, как если бы их жестко связали с покоящимся твердым телом. Импульс отдачи передается при этом всему телу как целому. Но масса тела превышает массу отдельного атома на много порядков (степеней 10), и в этом случае мы имеем явление, названное *процессом без отдачи*. (Излучение фотонов ядрами атомов, связанных и *твердом теле*, не сопровождающееся эффектом отдачи, напоминает один из фактов, обнаруженных Комптоном, а именно что некоторые из фотонов, *рассеянных* крепко связанными в *атоме* электронами, приобретают очень малое изменение энергии, так как *атом* испытывает отдачу как единое целое; см. упражнение 70.) Для гамма-лучей, испускаемых в процессах без отдачи, в упражнении 84 в качестве  $m$  следует взять массу всего куска металла, в которой заключены атомы железа. Если эту массу принять равной 1 г, чему будет равен относительный сдвиг частоты гамма-кванта в процессе «без отдачи»?

<sup>1)</sup> За это открытие немецкий ученый был удостоен Нобелевской премии 1961 г.; подробности см. в статье S. De Benedetti, The Mössbauer Effect, Scientific American, 202, 72 (April, 1960).

Р и с. 114. Естественная ширина линии для фотона, испущенного ядром  $\text{Fe}^{57}$ .



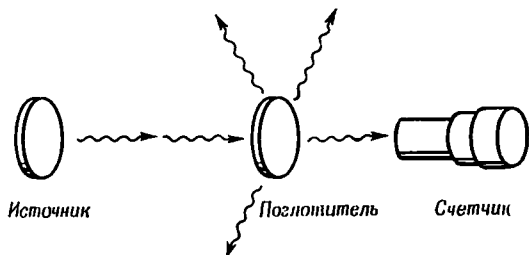
в) Испущенные возбужденными ядрами  $\text{Fe}^{57}$  гамма-лучи не состоят из квантов, несущих в точности одну и ту же энергию; их энергии сосредоточены в узком диапазоне (это же касается и их частот), обусловливающим *естественную ширину линии*. Практически из тысячи или более фотонов можно выделить несколько классов. Любой данный фотон принадлежит к тому или другому классу в зависимости от того, в каком из многих равных по ширине интервалов лежит его частота. Число фотонов в каждом классе как функция частоты изображается графически и образует колоколообразную кривую (рис. 114). Ширина этой кривой на высоте половины ее максимума обозначается через  $\Delta\nu$ . Для гамма-квантов, излучаемых  $\text{Fe}^{57}$  и обладающих энергией  $14,4 \text{ кэВ}$ , отношение  $\Delta\nu/\nu_0$  весьма мало и равно  $3 \cdot 10^{-13}$ . Чему равна естественная ширина линии  $\Delta\nu$  излучения ядер  $\text{Fe}^{57}$  в герцах? Сравните естественную относительную ширину линии с относительным сдвигом частоты, вызываемым отдачей свободного атома железа. Сравните ее также с относительным сдвигом частоты гамма-лучей в процессе без отдачи.

Открытие Мессбауэром процессов «без отдачи» сделало, таким образом, возможным распоряжаться источниками излучения, частота которых имеет фантастически узкий разброс порядка  $3 \cdot 10^{-13}$ . В одном из следующих упражнений (в 87) говорится о применении для регулируемого изменения относительной эффективной частоты источника излучения, приемника или обоих вместе на величины порядка  $10^{-13}$ , вызванные движением (доплеровское смещение). Какие применения может найти излучение строго определенной частоты? Их множество. Эффект Мессбауэра является, например, основой важных новых методов в физике твердого тела, молекулярной физике и биофизике. Можно обнаружить изменения естественной частоты излучения ядер  $\text{Fe}^{57}$ , обусловленные влиянием других соседних атомов или внешними магнитными полями, и изучить таким образом взаимодействие между атомами железа и окружающим его веществом кристалла (пример: различие частот излучения  $\text{Fe}^{57}$  в железном образце и в кристаллической решетке карбида железа); изучить взаимодействие между атомом железа в молекуле с остальной частью последней (пример: сдвиг частоты  $\text{Fe}^{57}$  для атомов железа, связанных в молекулах гемоглобина).

### 86\*\*. Резонансное рассеяние

Ядра железа  $\text{Fe}^{57}$  в основном (нормальном) состоянии *поглощают* гамма-лучи с резонансной энергией  $14,4 \text{ кэВ}$  значительно сильнее, чем гамма-лучи с несколько иными энергиями. Поглощаемая при этом энергия переходит во внутреннюю энергию ядер, переводя  $\text{Fe}^{57}$  в «возбужденное состояние». По истечении некоторого времени такие возбужденные ядра вновь излучают гамма-лучи в некотором случайном направлении и вновь возвращаются

Р и с. 115. Резонансное рассеяние фотонов.



в основное состояние. Итак, гамма-лучи, поглотившись из первоначального направленного пучка, испускаются вновь во всех направлениях. Поэтому число гамма-квантов, прошедших сквозь тонкую пластинку, содержащую  $\text{Fe}^{57}$ , будет при резонансной энергии  $14,4 \text{ кэв}$  меньше, чем при любых соседних значениях энергии. Такой процесс называют *резонансным рассеянием*. Покажите, что при попадании гамма-кванта с *резонансной энергией*  $E_0$  в первоначально покоившийся *свободный* атом железа этот гамма-квант не может быть поглощен его ядром, так как тогда не могут выполняться одновременно закон сохранения импульса и закон сохранения энергии. Покажите, что оба закона сохранения выполняются, если атом железа принадлежит кристаллу с массой  $1 \text{ г}$  и поглощает резонансный гамма-квант в ходе процесса без отдачи, когда импульс падающего гамма-кванта распределяется по всему кристаллу. («Выполняются»? Для импульса — да, для энергии — нет. Однако относительное несоответствие энергий, эквивалентное относительному несоответствию частот, меньше  $3 \cdot 10^{-13}$ , т. е. достаточно мало, чтобы ядро атома железа «не заметило» этого несоответствия и поэтому поглотило падающий гамма-квант.)

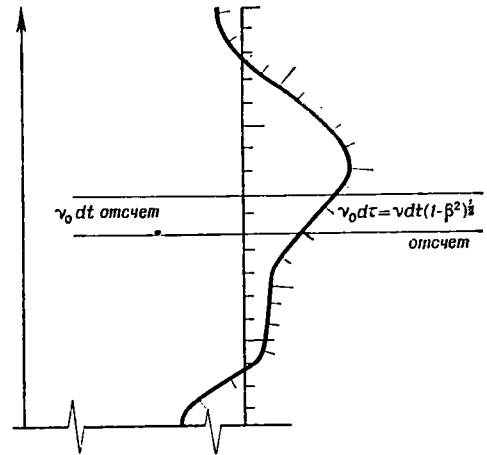
### 87\*\*. Измерение доплеровского смещения по резонансному рассеянию

В экспериментальной установке, изображенной на рис. 115, источник, содержащий возбужденные ядра  $\text{Fe}^{57}$ , испускает (наряду с прочими формами излучения) гамма-кванты с энергией  $E_0$  без отдачи. Поглотитель, содержащий ядра  $\text{Fe}^{57}$  в основном состоянии, поглощает часть этих гамма-квантов также в процессе без отдачи, вновь испуская их затем во всех направлениях. Поэтому счетчик гамма-лучей, расположенный, как это изображено на рисунке, регистрирует *уменьшение* потока гамма-квантов в случае поглотителя, содержащего  $\text{Fe}^{57}$  в основном состоянии, по сравнению со случаем поглотителя без таких ядер  $\text{Fe}^{57}$ . Пусть теперь источник движется в сторону поглотителя со скоростью  $\beta$ . Какой должна быть его скорость, чтобы на поглотитель попадали гамма-лучи с частотой, относительный сдвиг которой равен  $3 \cdot 10^{-13}$ , что соответствует широте резонансной линии? Выразите ответ в *см/сек*. *Увеличится* или *уменьшится* число зарегистрированных счетчиком гамма-квантов при этих условиях? Что произойдет с этим числом, если источник будет *удаляться* от поглотителя с той же скоростью? Сделайте примерный чертёж зависимости числа зарегистрированных гамма-квантов от скорости источника. Позволяет ли этот метод измерять *абсолютную* скорость источника в нарушение принципа относительности?

### 88\*\*. Проверка эффекта гравитационного красного смещения с помощью эффекта Мессбауэра

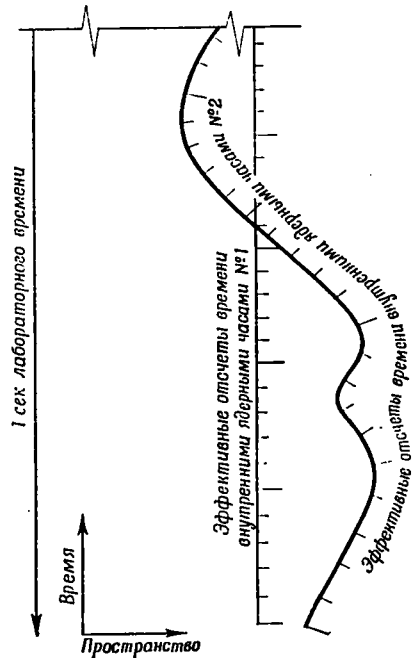
Гамма-квант с энергией  $14,4 \text{ кэв}$ , испущенный ядром  $\text{Fe}^{57}$  без отдачи, летит вертикально вверх в однородном гравитационном поле. Чему будет равно относительное уменьшение энергии этого фотона при подъеме его на высоту  $z$  (упражнение 73)? С какой скоростью и в каком направлении должен двигаться расположенный на такой высоте поглотитель, содержащий  $\text{Fe}^{57}$ , чтобы этот гамма-квант мог быть рассеян им без отдачи? Вычислите.

чему равна такая скорость при высоте 22,5 м. Постройте чертеж зависимости числа зарегистрированных в единицу времени гамма-квантов от скорости движения поглотителя в двух предположениях: а) существования гравитационного красного смещения и б) отсутствия гравитационного красного смещения. В эксперименте, произведенном Паундом и Ребкой<sup>1)</sup>, из очень большого числа показаний счетчика фотонов был получен после статистического анализа результат: относительный сдвиг частоты при данных условиях  $\Delta\nu/\nu_0 = (2,56 \pm 0,26) \cdot 10^{-15}$ .



### 89\*\*. Проверка парадокса часов с помощью эффекта Мессбауэра

История с Петром, оставившим своего брата-близнеца Павла в земной лаборатории, улетевшим с огромной скоростью и обнаружившим по возвращении, что Павел стал старше его, так противоречит нашему житейскому опыту, что для нас будет полной неожиданностью узнать, что такой опыт уже проделан, а предсказания теории полностью подтвердились! Чалмерс Шервин заметил, что в качестве близнецов можно взять два одинаковых атома железа с тем же успехом, как два живых существа<sup>2)</sup>. Пусть один из этих атомов все время покоится, а другой движется по замкнутому пути, совершая, возможно, несколько кругов. *Относительное* различие в старении атомов-близнецов будет одним и тем же после миллиона кругов, как и после одного круга, но тогда его будет легче измерить. Как же заставить второй атом проделать множество круговых путешествий? Включим его в *горячий* кусок железа, где он будет колебаться взад и вперед вокруг положения равновесия (тепловое возбуждение!). Как теперь *измерить* разницу в темпах старения? В истории с Петром и Павлом можно считать число праздничных хлопушек, которые каждый из них взрывал в свои дни рождения в период, пока они были разлучены друг с другом. В эксперименте с атомами железа сравнивается не число вспышек хлопушек между моментами расставания и встречи, а частота фотонов, испущенных в процессах



Р и с. 116. Сравнение хода покоящихся ядерных часов с ходом ядерных часов, совершающих тепловое движение.

<sup>1)</sup> R. V. P o u n d, G. A. R e b k a, Physical Review Letters, 4, 337 (1960).

<sup>2)</sup> Chalmers S h e r w i n, Physical Review, 120, 17 (1960).

без отдачи, т. е. фактически число «тик-так», сосчитанных двумя тождественными ядерными часами в течение одной лабораторной секунды. Иными словами, сравнивались *эффективные частоты ВНУТРЕННИХ ядерных колебаний* (не путать с колебаниями взад и вперед атома железа как целого!) для наблюдаемых в лаборатории: а) покоящегося ядра железа и б) ядра железа в горячем образце.

Покоящееся ядро железа получить трудно. Поэтому в реальном эксперименте сравнивались *эффективные внутренние ядерные частоты*, не для (а) и (б), а для (б) и (б'): двух кристаллов железа при *разных температурах*  $T$  и  $T + \Delta T$ . Паунд и Ребка <sup>1)</sup>, произведя измерения, нашли, что более теплый образец ( $\Delta T = 1^\circ \text{K}$ ) обладает относительным изменением эффективной частоты

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = (-2,09 \pm 0,24) \cdot 10^{-16}$$

(меньшее число колебаний; меньшее число «тик-так»; меньшее число дней рождения; замедление старения!).

Чтобы было проще понять этот эксперимент, возвратимся к идее покоящегося атома железа и атома-близнеца, подвергнутого тепловому возбуждению при температуре  $T$ . *Предскажите относительное уменьшение числа внутренних колебаний в горячем образце за лабораторную секунду и сравните предсказание с данными опыта.*

*Обсуждение.* На рис. 116 дано сравнение числа эффективных «тик-так» двух «внутренних ядерных часов» за интервал лабораторного времени  $dt$ . Имейте в виду, что скорость атомов при тепловом возбуждении составляет около  $10^{-5}$  от скорости света. Как можно приближенно представить коэффициент расхождения частот  $1 - \sqrt{1 - \beta^2}$ ? Насколько уменьшается число «тик-так» горячего атома по сравнению с холодным, приходящееся на интервал лабораторного времени  $dt$ ? Покажите, что накапливающийся дефект числа «тик-так» для горячего атома составляет в  $1 \text{ сек}$

$$\nu_0 \left( \frac{\beta^2}{2} \right)_{\text{средн}} (1 \text{ сек}),$$

где через  $(\beta^2)_{\text{средн}}$  обозначена «средняя квадратичная величина скорости атома» (в единицах скорости света). Заметьте, что средняя кинетическая энергия теплового возбуждения горячего атома железа (масса  $m_{\text{Fe}} = 57m_{\text{протон}}$ ) дается классической кинетической теорией газов в виде

$$\frac{1}{2} m_{\text{Fe}} (\beta^2)_{\text{средн}} = \frac{3}{2} kT.$$

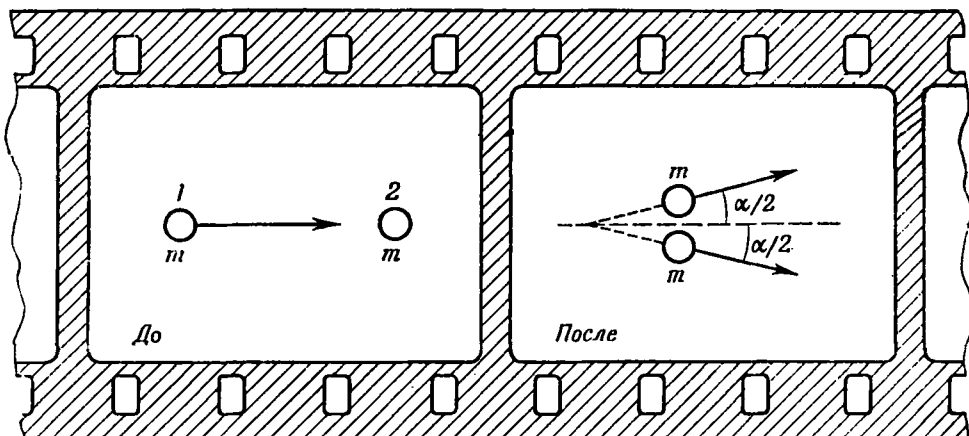
Здесь  $k$  — постоянная Больцмана — множитель перехода между двумя единицами энергии, градусами и джоулями (или градусами и эргами);  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/град}$  ( $k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град}$ ). Как согласуется результат эксперимента Паунда и Ребки с результатом вашего исчисления?

## Д. СТОЛКНОВЕНИЯ

### 90. Симметричное упругое столкновение

При упругом столкновении частицы с массой  $m$  и кинетической энергией  $T$  с частицей той же массы, находившейся в состоянии покоя, направления скоростей частиц после столкновения образуют *разные углы* с первоначальным направлением движения первой частицы, если *энергии* частиц после рассеяния *различны*. Однако ньютоновская механика предсказывает, что угол  $\alpha$

<sup>1)</sup> R. V. Pound, G. A. Rebka, Physical Review Letters, 4, 274 (1960).



Р и с. 117. Симметричное упругое столкновение тождественных частиц.

между векторами скорости частиц после рассеяния всегда равен  $90^\circ$ . Иное предсказание делает механика теории относительности: согласно ей этот угол должен быть меньше  $90^\circ$  (см. упражнение 40). Вопрос: насколько меньше  $90^\circ$  должен быть угол  $\alpha$  в простейшем случае симметричного упругого столкновения, когда частицы после рассеяния обладают одинаковыми энергиями и разлетаются под одинаковыми углами к первоначальному направлению движения первой частицы (рис. 117)? Определите угол, исходя лишь из законов сохранения импульса и энергии в релятивистской форме.

*Обсуждение.* Чему равна полная энергия системы до столкновения? Какой должна быть поэтому полная энергия каждой из двух частиц после столкновения? Чему должен быть поэтому равен импульс частицы? (См. введение к упражнениям на стр. 179, где сказано о взаимосвязи между импульсом и энергией и о том, почему следует избегать всякого упоминания или использования скорости в задачах, относящихся лишь к импульсу и энергии.) Каков был начальный импульс системы? Покажите, что искомый угол определяется выражением

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{T+2m}{T+4m}.$$

Отсюда с помощью тригонометрического тождества

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha)$$

получите выражение

$$\cos \alpha = \frac{T}{T+4m}. \quad (124)$$

Чему равен полный угол  $\alpha$ : 1) для ньютоновского упругого столкновения при малой скорости и 2) для ультрарелятивистского столкновения с очень большой величиной  $T$ ?

### 91. Давид и Голиаф — подробный пример

Какой минимальной кинетической энергией должен обладать электрон для того, чтобы передать половину своей кинетической энергии первоначально покоившемуся протону при упругом лобовом соударении? Проведите свои вычисления таким образом, чтобы в конце концов прийти к одному-единственному уравнению, решая которое можно (и должно) определить одну безразмерную неизвестную величину  $T_e/m_p$ , где  $T_e$  — кинетическая энер-

гия налетающего электрона, а  $m_p$  — масса покоя протона. Определите величину  $T_e$ , обычно в  $Mэв$ , приближенно принимая  $m_p c^2 \approx 1000 Mэв$ . (Если вы будете решать это уравнение приближенно, дайте оценку погрешности.)

*Решение.* Эта задача сводится к алгебраическим преобразованиям, и главное в ней — избежать ненужных алгебраических преобразований! Столкновение предполагается упругим, так что электрон и протон не уничтожаются в результате его и не возникает никакого излучения. В этом случае закон сохранения энергии сводится к сохранению кинетической энергии. Обозначим через  $T_e$  кинетическую энергию налетающего электрона. В условии сказано, что после столкновения протон обладает половиной энергии налетающего электрона:  $\bar{T}_p = T_e/2$ . Поэтому и электрон уносит также половину своей первоначальной кинетической энергии:  $\bar{T}_e = T_e/2$ .

Столкновение является лобовым, так что все движения происходят вдоль оси  $x$ , а импульсы складываются как скаляры с учетом лишь их знаков. Электрон отскочит от протона, и поэтому его импульс после столкновения будет отрицательным. Из закона сохранения импульса следует

$$p_e = \bar{p}_p - \bar{p}_e.$$

Чтобы связать импульс с энергией, воспользуемся общей формулой

$$E^2 - p^2 = m^2,$$

откуда

$$p^2 = E^2 - m^2 = (T + m)^2 - m^2 = T^2 + 2mT + \underline{m^2} - \underline{m^2} = T^2 + 2mT,$$

подчеркнутые члены взаимно уничтожаются, так что

$$p = \sqrt{T^2 + 2mT}.$$

Поэтому закон сохранения импульса можно переписать в виде

$$\sqrt{T_e^2 + 2m_e T_e} = \sqrt{\bar{T}_p^2 + 2m_p \bar{T}_p} - \sqrt{\bar{T}_e^2 + 2m_e \bar{T}_e}.$$

Подставляя сюда следствие закона сохранения энергии

$$\bar{T}_p = \bar{T}_e = \frac{T_e}{2},$$

получаем

$$\sqrt{T_e^2 + 2m_e T_e} = \sqrt{\frac{T_e^2}{4} + m_p T_e} - \sqrt{\frac{T_e^2}{4} + m_e T_e}.$$

Деление этого соотношения с обеих сторон на  $\sqrt{T_e m_p}$  дает

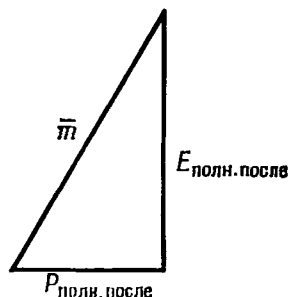
$$\sqrt{\frac{T_e}{m_p} + \frac{2m_e}{m_p}} = \sqrt{\frac{T_e}{4m_p} + 1} - \sqrt{\frac{T_e}{4m_p} + \frac{m_e}{m_p}}.$$

Как и требовали условия задачи, в этом уравнении имеется лишь одна неизвестная величина  $T_e/m_p$ . Мы решим его приближенно, исходя из того факта, что масса покоя электрона приблизительно в 2000 раз меньше массы покоя протона, т. е.  $m_e/m_p \ll 1$ . Пренебрежем этим отношением в только что полученном выражении и найдем

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{T_e}{m_p}} &\approx \sqrt{\frac{T_e}{4m_p} + 1} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_e}{m_p}}, \\ \frac{3}{2} \sqrt{\frac{T_e}{m_p}} &\approx \sqrt{\frac{T_e}{4m_p} + 1}. \end{aligned}$$



Р и с. 118. 4-вектор энергии-импульса составной частицы после абсолютно неупругого соударения.



Возводя обе стороны в квадрат, найдем

$$\frac{9}{4} \frac{T_e}{m_p} \approx \frac{T_e}{4m_p} + 1,$$

$$\frac{T_e}{m_p} \approx \frac{1}{2}.$$

Правильный ответ может отличаться от этого на часть или кратное величины  $m_e/m_p = 1/2000$ . Умножая решение с обеих сторон на  $m_p c^2$ , получим

$$T_{e, \text{обычн}} = T_e c^2 = \frac{m_p c^2}{2} = \frac{1000 \text{ Мэв}}{2} = 500 \text{ Мэв}.$$

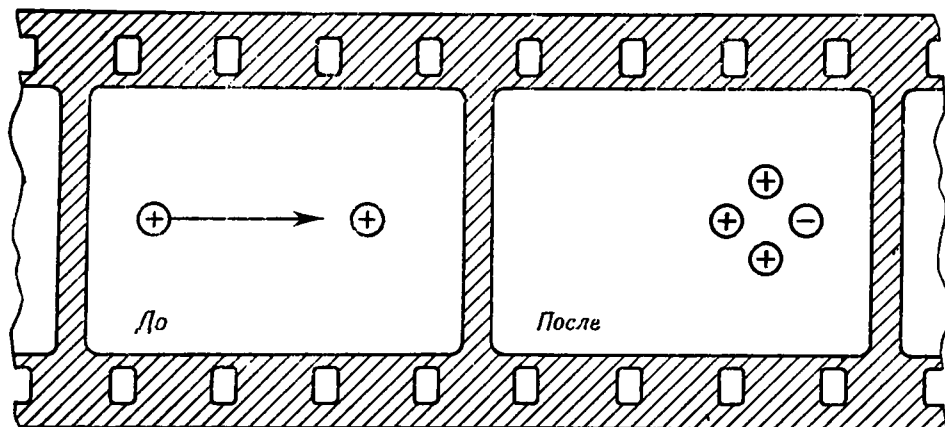
## 92. Абсолютно неупругое столкновение

На первоначально покоившуюся свободную частицу массы  $m_1$  налетает вторая частица с кинетической энергией  $T$  и другой массой покоя  $m_2$ . При столкновении частицы слипаются и в дальнейшем движутся вместе. Чему равна масса покоя  $\bar{m}$  составной частицы после столкновения? При каких условиях масса покоя составной частицы сводится к ньютоновской величине  $\bar{m} = m_1 + m_2$ ? Какой может быть с точки зрения этих условий максимальная величина кинетической энергии  $T$  налетающей частицы, когда ньютоновский подход приблизительно справедлив? *Обсуждение.* Чему равен импульс системы до столкновения? Чему равен он после столкновения? Какие величины, изображенные на рис. 118, известны, а какие требуется определить, если дан импульс системы? Применима ли теорема Пифагора к «гипотенузе» этого «треугольника»?

## 93\*. Порождение частиц протонами

Ускорители для получения частиц высоких энергий строятся, в частности, для того, чтобы создавать в больших количествах для исследовательских целей некоторые из частиц с коротким временем жизни, которые в обычных условиях попадают в лаборатории лишь случайно как результат воздействия космических лучей. В процессе их порождения часть кинетической энергии частиц высокой энергии, полученных в ускорителе, превращается в массу покоя этих новых частиц. В 1955 г. Сегре с сотрудниками получил в Калифорнийском университете, Беркли, антипротоны (частицы той же массы, что протоны, но с отрицательным зарядом), бомбардируя пучком протонов покоящуюся мишень, содержащую водород (протоны)<sup>1)</sup>. Ряд законов сохранения, действующих в физике элементарных частиц (сохранение заряда, сохранение числа барионов — тяжелых частиц), требует одновременного создания вместе с антипротоном и обычного протона. Таким образом, налетающий протон и протон мишени должны сохраниться после столкновения,

<sup>1)</sup> O. Chamberlain, E. Segrè, C. Wiegand, T. Ypsilantis, *Physical Review*, 100, 947 (1955).



Р и с. 119. Ошибочная диаграмма порогового порождения протон-антипротонной пары в лабораторной системе отсчета.

во плюс к этому возникает протон-антипротонная пара. Вопрос: *чему равна та минимальная кинетическая энергия налетающего протона, которая способна вызвать образование пары?* Эту минимальную кинетическую энергию называют *пороговой энергией*.

а) *Первый (некорректный) подход.* Проанализируем столкновение, изображенное на рис. 119, когда вся кинетическая энергия налетающего протона превращается в массу покоя, и все четыре присутствующие в конце процесса частицы покоятся. Удовлетворяет ли эта реакция одновременно закону сохранения энергии и закону сохранения импульса?

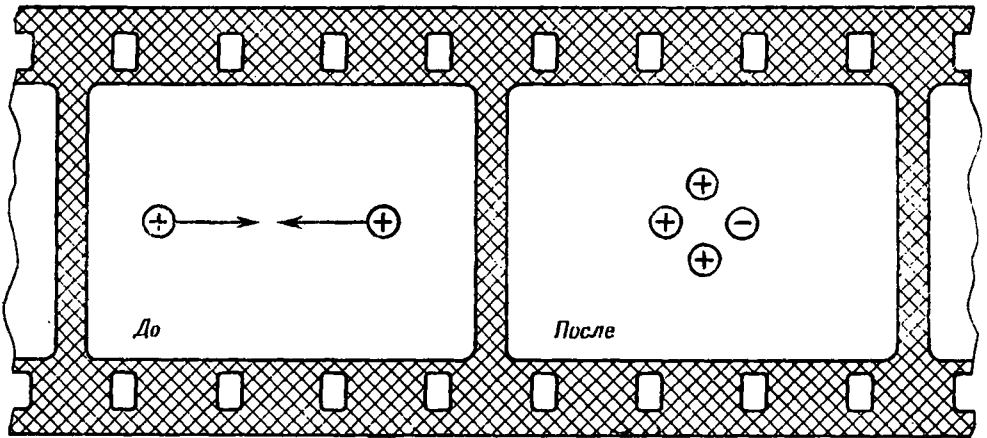
б) *Второй подход.* Найдите систему отсчета, в которой все четыре частицы конечного состояния *могут* покоиться, но процесс совместим с законом сохранения импульса. *Обсуждение.* Система отсчета, в которой полный импульс равен нулю, называется *системой центра масс*<sup>1)</sup>. В системе центра масс столкновение протекает так, как это изображено на рис. 120. Полная энергия сталкивающихся протонов может быть взята меньшей в том случае, когда все четыре частицы конечного состояния покоятся, чем когда эти четыре частицы разлетаются друг от друга. Почему? (Рассмотрите столкновение в системе центра масс. Пренебрегите электрическим взаимодействием между частицами, так как его роль ничтожно мала при интересующих нас здесь высоких энергиях.)

в) *Третий подход.* Из анализа второго подхода мы узнали, что наиболее эффективный перевод кинетической энергии в массу покоя, совместимый с законом сохранения импульса, имеет место, когда образующиеся частицы не разлетаются друг от друга. Значит, в лабораторной системе отсчета все они будут двигаться вместе с одной и той же скоростью (рис. 121). Исходя теперь из этой схемы и пользуясь лишь законами сохранения импульса и энергии, выраженными в *лабораторной* системе отсчета, определите пороговую кинетическую энергию  $T_{\text{порог}}$  порождения протон-антипротонной пары. Выразите свой результат в единицах энергии покоя протона и в *Бэв*.

г) Чему равна энергия каждой частицы после столкновения?

д) Покажите, что пороговая энергия, найденная в пункте (в), может быть получена из результатов упражнения 92. Примите, что *каждая* из начальных

<sup>1)</sup> Авторы употребляют здесь изобретенный ими термин *система центра импульса*, что конечно, соответствует их стремлению развить новую терминологию и связано с отказом пользоваться понятием «масса покоя», однако едва ли он сможет укорениться. Вероятно, было бы лучше говорить о *системе нулевого импульса*; в переводе был восстановлен традиционный термин «система центра масс». — *Прим. перев.*



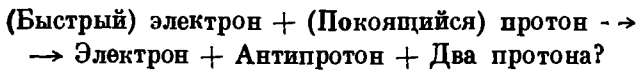
Р и с. 120. Правильная диаграмма порогового порождения протон-антипротонной пары в системе отсчета ракеты.

частиц в этом упражнении обладает массой протона и что конечная масса  $\bar{m}$  равна учетверенной массе протона.

е) Почему протон-антипротонные пары могут порождаться при более низкой пороговой энергии налетающего протона, если вместо водорода в качестве мишени использовать тяжелые ядра?

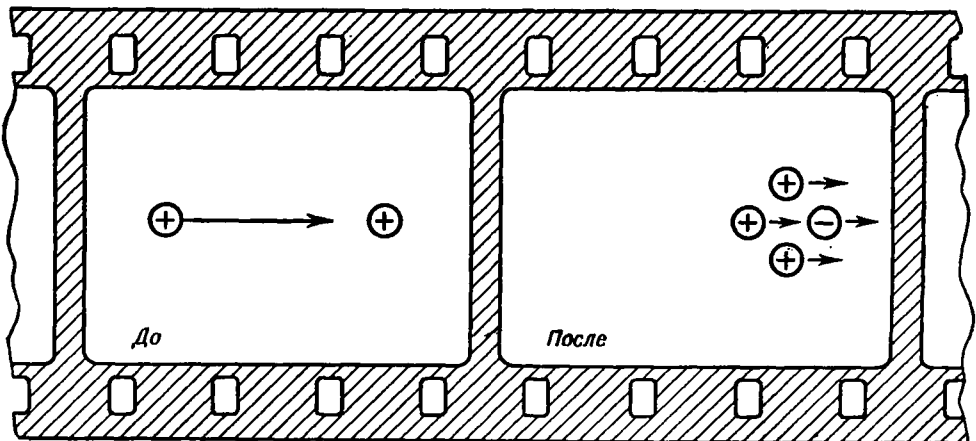
#### 94\*. Порождение частиц электронам.

Какова пороговая кинетическая энергия  $T_{\text{порог}}$  налетающего электрона для процесса



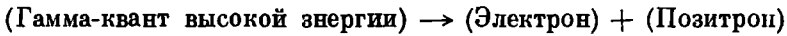
#### 95\*. Фоторождение пары одиночным фотоном

а) Гамма-квант (фотон высокой энергии, масса покоя равна нулю) может обладать энергией, превышающей энергию покоя электрон-позитронной пары. (Вспомним, что позитрон обладает той же массой покоя, что



Р и с. 121. Исправленная диаграмма порогового порождения протон-антипротонной пары в лабораторной системе отсчета.

и электрон, но положительным зарядом.) Тем не менее процесс



не может протекать в отсутствие дополнительного вещества или излучения. *Докажите*, что этот процесс несовместим с законами сохранения импульса и энергии, записанными в лабораторной системе отсчета. Рассмотрите самый общий случай, когда траектории образующихся (предположительно) электрона и позитрона *не образуют* одинаковых углов с продолжением траектории первоначального гамма-кванта. Повторите доказательство (тогда оно станет максимально убедительным) в системе центра масс предполагаемой пары (т. е. в системе отсчета, где полный импульс двух образующихся частиц равен нулю).

б) В присутствии дополнительного вещества гамма-квант *способен* породить пару электрон — позитрон. Чему равна пороговая энергия  $T_{\text{порог}}$ , при которой гамма-квант оказывается способен вызвать часто наблюдаемый процесс



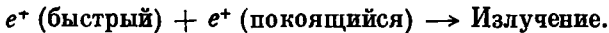
Энергия покоя электрона, как и позитрона, составляет около половины мегаэлектронвольт.

### 96\*\*. Фоторождение пары двумя фотонами

Два гамма-кванта разных энергий сталкиваются в вакууме и исчезают, порождая электрон-позитронную пару. В каком диапазоне энергий гамма-квантов и в каком диапазоне углов между направлениями их первоначального распространения может реализоваться такая реакция?

### 97\*\*. Аннигиляция электрон-позитронной пары

Позитрон  $e^+$  с кинетической энергией  $T$  аннигилирует на мишени, содержащей практически покоящиеся в лабораторной системе отсчета электроны  $e^-$ :



а) В системе отсчета центра масс (где полный импульс первоначальных частиц равен нулю) покажите, что при такой аннигиляции с необходимостью образуются как минимум *два* гамма-кванта (а не один).

б) Выведите формулу для энергии одного из образующихся гамма-квантов в лабораторной системе отсчета как функции угла между направлением вылета этого гамма-кванта и направлением движения позитрона до его аннигиляции. Пусть в вашей формуле никак не фигурирует скорость или параметр скорости — оба они в этой задаче излишни.

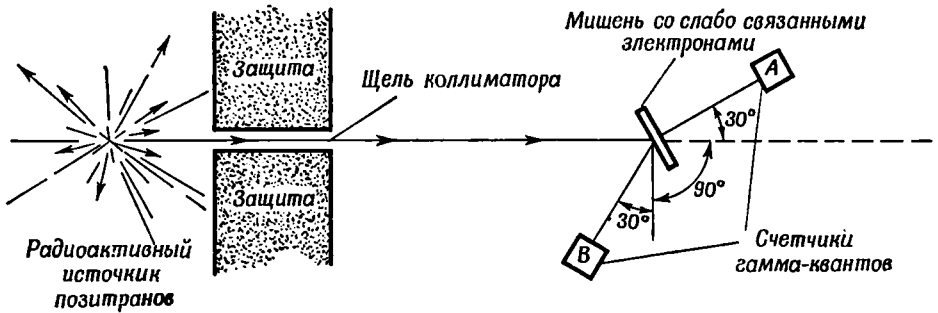
в) Чему равны максимальная и минимальная энергии гамма-кванта, возможные в лабораторной системе отсчета?

г) С помощью простого приближенного метода выразите результат пункта (в) в предельных случаях: 1) очень малых  $T$  и 2) очень больших  $T$ .

### 98\*. Проверка принципа относительности

а) В установке, изображенной на рис. 122, регистрируются лишь те события, при которых счетчики гамма-лучей  $A$  и  $B$ , расположенные на одинаковых расстояниях от мишени, *одновременно* реагируют на гамма-кванты, т. е. включены в «схему совпадений». Чему равны энергия и скорость налетающего позитрона, регистрируемого таким способом?

б) Принцип относительности (разд. 3) утверждает, что скорость света одинакова во всех инерциальных системах отсчета независимо от движения источника этого света. Напротив, много лет назад В. Ритц пытался доказать, что свет, излучаемый источником вперед по направлению его движения,



Р и с. 122. Схема постановки эксперимента для проверки принципа относительности.

распространяется быстрее, чем свет, излученный против его движения. Если бы описанная выше установка срабатывала и в отсутствие совпадения, как было бы можно использовать измерение времени, прошедшего между попаданием гамма-квантов в счетчики *A* и *B*, для выяснения того, какая из гипотез о поведении скорости света правильна? Результаты такого опыта изображены на рис. 123<sup>1)</sup>.

#### 99\*. Отождествление частиц по трекам в пузырьковой камере

Движущиеся *заряженные* частицы могут оставлять наблюдаемые визуально следы в камере Вильсона, пузырьковой камере и искровой камере, так как заряд частицы взаимодействует на расстоянии с электронами в атомах, вызывая образование ионов. Эти ионы детектируются различными способами в указанных трех видах камер. Пузырьковые камеры заполняются жидким водородом, готовым закипеть (перегретым водородом). Возникающие при прохождении заряженных частиц высокой энергии ионы играют роль точек образования пузырьков («центров закипания»). На рис. 124 изображена картина, заснятая в пузырьковой камере. Там видно четыре разных  $\pi^+$ -мезона, проникающих в камеру, которые все *останавливаются* в жидком водороде. Сначала происходит реакция распада  $\pi^+$ -мезона на  $\mu^+$ -мезон, трек которого виден на снимке, и на нейтральную частицу, не оставляющую следа. Затем каждый  $\mu^+$ -мезон останавливается и распадается на положительный электрон (позитрон,  $e^+$ ) и две нейтральные частицы. Спиральный трек одного из позитронов, движущихся в наложенном извне магнитном поле, занимает центр фотографии.

Сосредоточим внимание на первой реакции,

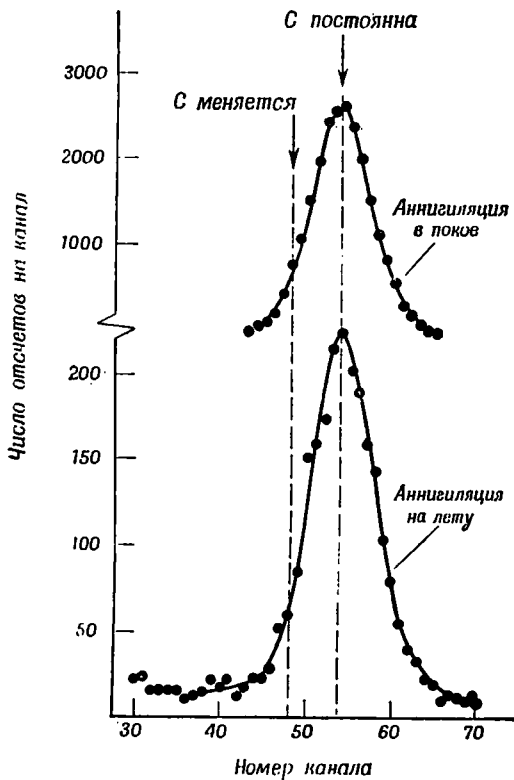


где  $x$  — неизвестная нейтральная частица. По радиусу кривизны трека  $\mu^+$ -мезона в магнитном поле можно найти импульс этого мезона, оказывающийся равным  $p_\mu = 58,2 m_e$  в единицах массы покоя электрона.

а) Пользуясь законами сохранения, найдите массу покоя нейтральной частицы  $x$  ( $m_{\pi^+} = 273,2 m_e$  и  $m_{\mu^+} = 206,8 m_e$ ).

б) *Что это за нейтральная частица? Обсуждение.* Самой легкой из известных частиц с ненулевой массой покоя является электрон. Приближенный расчет в (а) приводит к предположению, что масса покоя частицы  $x$  равна нулю. Может быть, это фотон? Такая возможность исключается другим законом сохранения — для момента импульса. Существовавший сначала  $\pi^+$ -мезон обладал моментом импульса, равным нулю. Если потребовать выполнения закона сохранения момента импульса, то следует заключить что суммарный момент частиц — продуктов реакции — равен нулю. Возник-

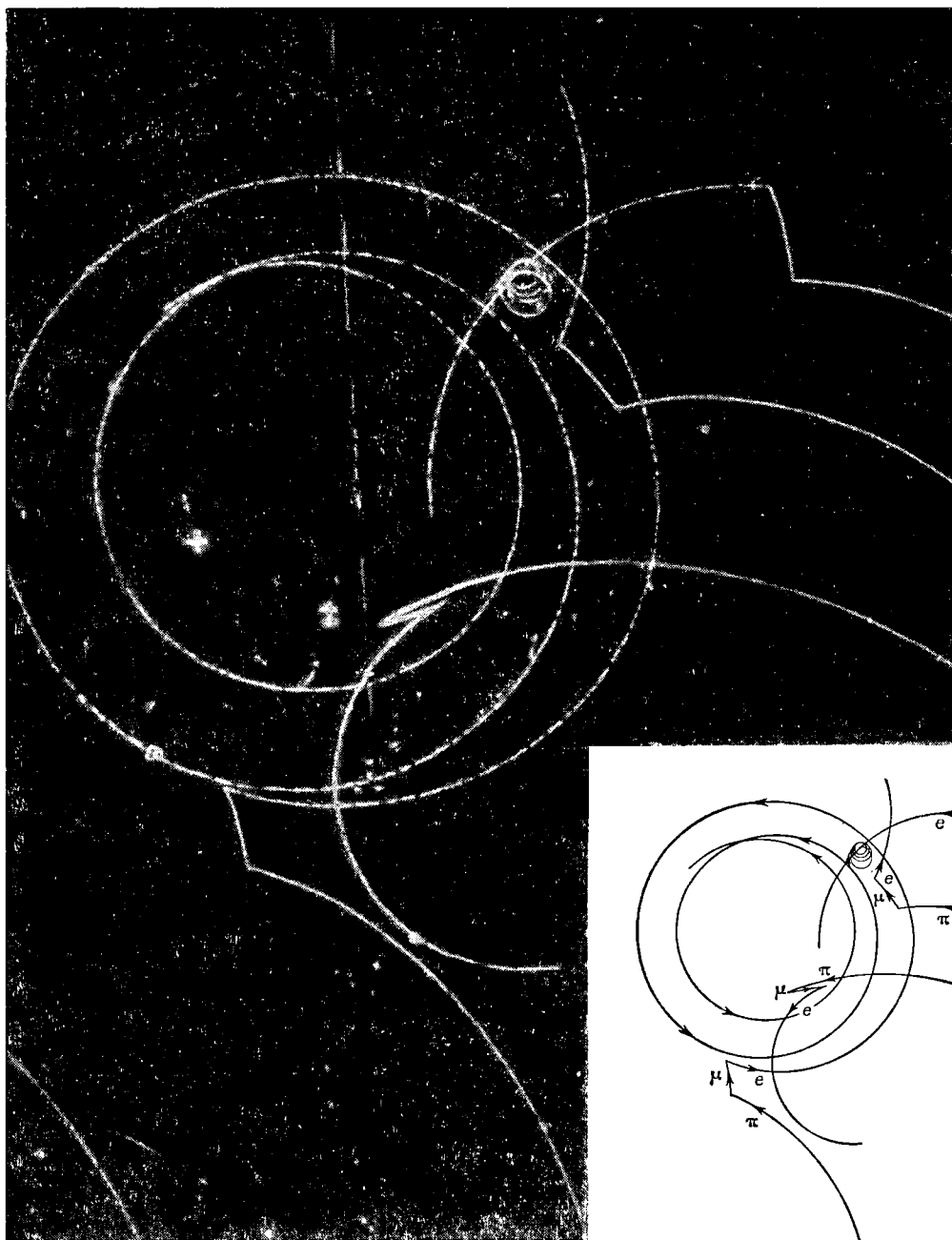
<sup>1)</sup> D. S a d e h, Physical Review Letters, 10, 271 (April, 1963).



Р и с. 123. Результаты эксперимента по проверке постоянства скорости света, выполненного Д. Саде.

Промежуток времени между регистрациями фотонов счетчиками *A* и *B* был измерен для множества пар таких событий. Промежутки различной длительности автоматически отводились в разные «каналы» многоканальной электронной вычислительной машины. В результате на горизонтальной оси (названной «номер канала») откладывалась относительная мера времени между попаданиями гамма-квантов в счетчики *A* и *B*. На вертикальной оси откладывались количества пар гамма-квантов, соответствующих данному промежутку времени, разделявшему моменты их регистрации. Нижняя кривая изображает результаты эксперимента на установке, подобной изображенной на рис. 122, где на лету аннигилировали позитроны заданной энергии. Верхняя кривая была получена при перенесении счетчика *A* в положение, составляющее  $180^\circ$  относительно счетчика *B*. В этом случае регистрировались только те пары гамма-квантов, для которых позитрон перед аннигиляцией останавливался (при этом лабораторная система отсчета являлась системой центра масс, в которой фотоны испускаются в двух взаимно противоположных направлениях). Вершины верхней и нижней кривой соответствуют одному и тому же промежутку времени, откуда видно, что свет (гамма-кванты) распространяется от мишени до счетчика *A* с одинаковой скоростью независимо от того, двигался или покоился испустивший его позитрон. Если бы скорость гамма-кванта складывалась со скоростью летящего позитрона, вершина нижней кривой совпала бы с левой пунктирной линией.

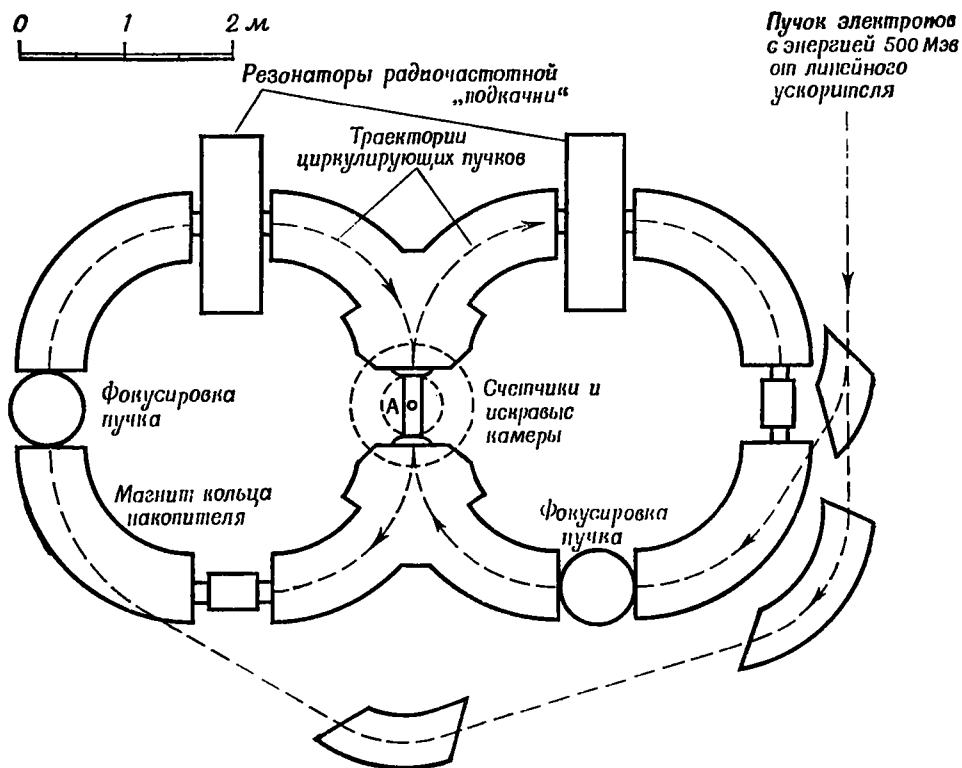
ший  $\mu^+$ -мезон имеет спиновый момент импульса, равный  $\frac{1}{2} \hbar = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$ , где  $h$  — постоянная Планка. Мы знаем к тому же, что спиновый момент импульса фотона равен  $\hbar$ . Невозможно, чтобы два момента, соответственно равные  $\frac{1}{2} \hbar$  и  $\hbar$ , при какой-либо их ориентации в сумме дали полный момент импульса равный нулю. Значит, частица  $x$  не может быть фотоном. Определите, чему равен ее спиновый момент импульса? Мы называем частицу  $x$  нейтрино. Здесь вы определили два основных свойства нейтрино, даже вообще не увидев его наблюдаемых следов!



Р и с. 124. На снимке в пузырьковой камере заснят распад четырех различных  $\mu^+$ -мезонов. Из книги R. D. Hill, *Tracking Down Particles*, W. A. Benjamin, New York, 1963.

### 100\*. Накопительные кольца и встречные пучки

Насколько «энергичнее» окажется столкновение, если два соударяющиеся электрона движутся навстречу друг другу, по сравнению со столкновением, когда один электрон налетает на другой электрон, который покоится? *Обсуждение.* Когда движущаяся частица налетает на покоящуюся, то энергия, которая может пойти на порождение новых частиц, на нагрев или на иные взаимодействия, меньше, чем начальная энергия (сумма энергий покоя и кинетических энергий обеих начальных частиц). См. по этому поводу упражнение 93. Причина состоит в том, что система частиц после реакции в целом сохраняет движение «вперед» (закон сохранения импульса!), соответствующая которому кинетическая энергия не может пойти ни на придание этим частицам скорости *относительно* друг друга, ни на порождение новых частиц. Поэтому значительная часть энергии, сообщаемой частицам в ускорителях, не может быть использована для изучения взаимодействий и «выбрасывается» в форме кинетической энергии продуктов столкновения. Но *в системе центра масс* (определенной как система отсчета, в которой полный импульс системы взаимодействующих частиц равен нулю) равенство полного импульса нулю имеет место как до, так и после столкновения. Поэтому *в* системе центра масс участвующая во взаимодействии энергия равна всей полной энергии первоначальных частиц. Можно ли как-то достигнуть того, чтобы лабораторная система отсчета стала одновременно системой центра масс? Одним из способов является постройка двух ускорителей элементарных частиц,



Р и с. 125. Пристонско-станфордский эксперимент по встречным электронным пучкам.

Электроны инжектировались в каждое кольцо примерно по 10 мин. Когда оба кольца были таким образом заполнены, линейный ускоритель был отключен, и в течение 30 мин снимались данные. Потери энергии электронами, излучавшими из-за ускоренного движения по круговым орбитам, компенсировались радиоволновым методом в резонаторах радиочастотной «подкачки».



создающих два пучка частиц, направленных «в лоб» один другому. Если энергии и массы покоя частиц в обоих пучках одинаковы, то наша лабораторная система отсчета *будет* и системой центра масс, и тогда при каждом столкновении *вся* энергия сможет быть реализована в столкновении для взаимодействия. Но проще и дешевле можно добиться того же результата, используя *всего один* ускоритель плюс накопительные кольца, в которых частицы сохраняются после того, как они достигнут своей максимальной энергии (рис. 125). Магнитное поле удерживает частицы (в данном случае — электроны) на круговых орбитах. Пучок частиц впрыскивается из ускорителя таким образом, чтобы в обоих кольцах направление циркуляции частиц было взаимно противоположным. Между частицами из двух пучков происходят столкновения в точке *A*, где пучки пересекаются (поэтому говорят о *встречных пучках*). Одним из преимуществ накопительных колец является сохранение в пучках тех электронов, которые не провзаимодействовали при одной встрече, но могут принять участие в столкновении при одной из последующих.

В каждом из колец «законсервированы» электроны с кинетической энергией 500 *Мэв*. Чему равна в лабораторной системе отсчета полная величина энергии, которая может реализоваться во взаимодействии? Чему должна была бы быть равна кинетическая энергия электрона, налетающего на покоящийся электрон, из которой для взаимодействия можно было бы получить такую же энергию? (Когда пишутся эти строки, наибольшая энергия, которую может сообщить электрону одиночный ускоритель, равна 6 *Бэв*.) Какую кинетическую энергией должны обладать *протоны*, «консервируемые» в накопительных кольцах, чтобы они дали эквивалент полезной энергии протона 1000 *Бэв*, налетающего на покоящийся протон? (Когда пишутся эти строки, наибольшая энергия, которую может сообщить протону одиночный ускоритель, равна 35 *Бэв*.)<sup>1)</sup>

## Е. АТОМНАЯ ФИЗИКА

### 101\*. Де Бройль и Бор

Покажите, что результаты упражнения 72 приводят к соотношению  $p = h/\lambda$  для импульса фотона, выраженного в единицах массы. Рассмотрите следующий интуитивный довод (основанный на удивительном выводе де Бройля<sup>2)</sup>, который был неполным, но исторически важным, так как привел к весьма плодотворным исследованиям, а в конце концов — и к окончательному выводу и последующему развитию *квантовой механики*). Предположим, что длина волны  $\lambda = h/p$  может ассоциироваться и с частицей *ненулевой* массы покоя, например с электроном. Пусть этот электрон движется по круговой орбите вокруг неподвижного ядра. Для того чтобы волна, описывающая электрон, была везде однозначной, необходимо потребовать равенства длины орбиты  $2\pi r$  некоторому целому числу  $n$  длин волн  $\lambda$ , уместающихся на протяжении этой орбиты. Покажите, что отсюда следует соотношение

$$r p_{\text{обычн}} = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3 \dots), \quad (125)$$

где  $r p_{\text{обычн}}$  — величина импульса электрона в обычных единицах. Какая величина *момента импульса* электрона, находящегося на такой орбите, следует из соотношения (125)? В пределе малых скоростей ньютоновская механика

<sup>1)</sup> Новейший ускоритель протонов в Серпухове под Москвой дает протоны с энергией 76 *Бэв*. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Louis de Broglie, Comptes Rendus (Paris), 177, 507 (1923).

говорит, что радиус орбиты дается соотношением

$$r = \frac{(4\pi\epsilon_0) n^2 \hbar^2}{4\pi^2 Z e^2 m} \quad (126a)$$

( $e$  в кулонах,  $4\pi\epsilon_0 = 1,113 \cdot 10^{-10}$  (кулон·сек)<sup>2</sup>/кг·м<sup>3</sup>;  $\hbar$ ,  $m$  и  $r$  в системе СИ — кг, м, сек), или

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{Z e^2 m} \quad (126b)$$

( $e$  в CGSE;  $\hbar$ ,  $m$  и  $r$  в системе CGS — г, см, сек), где  $Z$  — атомный номер ядра (число протонов в нем),  $m$  — масса и  $e$  — заряд электрона. Это формула радиуса орбит атома Бора. Покажите, что скорость электрона на орбите равна (в приближении малых скоростей)

$$\beta = \frac{\alpha Z}{n}, \quad (127)$$

где

$$\alpha = \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0) \frac{\hbar}{2\pi} \cdot c} = \frac{1}{137}$$

— безразмерная постоянная, называемая *постоянной тонкой структуры*. [Эта формула верна, когда  $e$  выражается в кулонах,  $4\pi\epsilon_0 = 1,113 \cdot 10^{-10}$  (кулон·сек)<sup>2</sup>/кг·м<sup>3</sup>,  $\hbar$  и  $c$  — в кг, м, сек. Если ее выразить в системе г, см, сек, причем  $e$  взять в единицах CGSE, то  $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ .] Полученное выражение для  $\beta$  использовалось в упражнении 41.

### 102\*. Видение посредством электронов

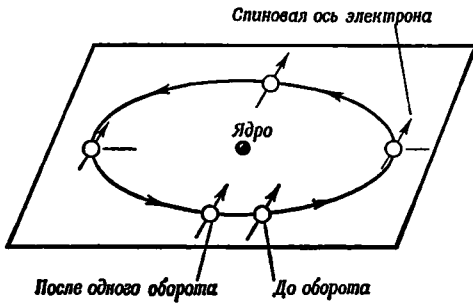
Из общих принципов физической оптики следует невозможность получить изображение таких деталей объекта, которые меньше длины волны света, с помощью которого получают это изображение. Предположим, что это утверждение верно и в применении к волнам вещества, обсуждавшимся в предыдущем упражнении. Через какую разность потенциалов должны быть пропущены (ускорены) электроны, чтобы с их помощью было можно получить изображение бактерии (размером около 1 мк, т. е.  $10^{-6}$  м) в электронном микроскопе? Какой энергией (в Мэв) должны обладать электроны, чтобы с их помощью можно было исследовать структуру протонов и нейтронов (диаметр которых равен около 1 ферми, т. е.  $10^{-16}$  м)?

### 103\*\*. Прецессия Томаса

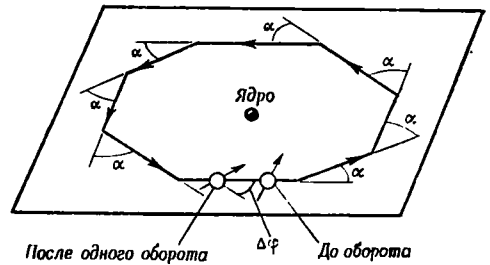
Представьте себе электрон как отрицательно заряженный шарик, вращающийся вокруг своей оси, подобно гироскопу. Эта грубая классическая модель не соответствует действительности, но приемлема для некоторых целей, например для следующей. Ньютоновская механика предсказывает, что электрон в атоме должен вращаться по некоторой орбите вокруг ядра и сохранять при этом неизменным направление оси своего вращения относительно инерциальных систем отсчета точно так же, как это происходит с гироскопом, перемещаемым по окружности.

Однако, как открыл в 1927 г. Л. Х. Томас<sup>1)</sup>, теория относительности удивительным образом утверждает, что если электрон вращается вокруг ядра, вектор его спина направлен по-разному после каждого оборота. Такая прецессия, названная *прецессией Томаса*, приводит к наблюдаемому эффекту в спектральных линиях излучения некоторых атомов. Объяснение этой прецессии связано с эффектом наклонного метрического стержня (упражнение 52) и основывается на *относительности одновременности*. Проанали-

<sup>1)</sup> L. H. T h o m a s, Philosophical Magazine, (7) 3, 1 (1927).



Р и с. 126. Ньютоновская механика утверждает, что при обороте электрона вокруг ядра ориентация его спина не изменится.

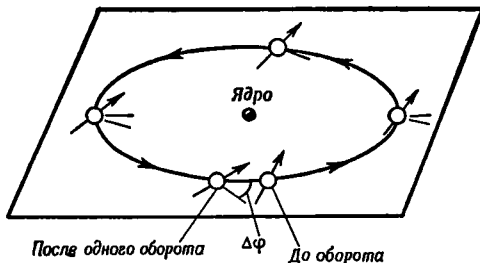


Р и с. 127. Теория относительности предсказывает прецессию оси вращения электрона на угол, обозначенный здесь через  $\Delta\varphi$ , за один оборот вокруг ядра.

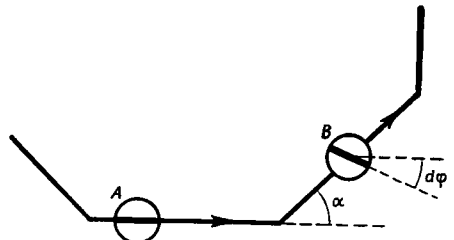
зируйте эффект прецессии Томаса для электрона по следующей схеме (или другим способом).

Что заставляет ось вращения электрона принимать новое направление после того, как электрон опишет полный круг? Двигаясь по окружности, электрон испытывает *ускорение*, направленное к ее центру. Но, к сожалению, частная теория относительности неспособна описывать действие *ускорения* на ориентацию векторов. Поэтому мы поступим так, как это часто делается в физике: если данная проблема не поддается непосредственному решению, следует найти более простую, но аналогичную ей задачу, решить которую мы *сумеет*! В данном случае приближенно представим круговой путь классического электрона как правильный многоугольник с  $n$  сторонами. Для того чтобы совершить один полный оборот по орбите, электрон должен пройти теперь по ряду прямолинейных отрезков, испытав между ними  $n$  резких изменений направления движения, каждый раз на угол  $\alpha = 2\pi/n$ . *План штурма задачи*: исследовать, как изменится направление спина электрона при прохождении *одного* из таких углов [пункты от (а) до (в)]; затем устремить число сторон  $n$  к бесконечности так, чтобы угол  $\alpha$ , на который *всякий раз* меняется направление движения электрона, стремился к нулю, пока не получится в качестве предельного случая классическая *круговая* орбита [пункты от (г) до (д)].

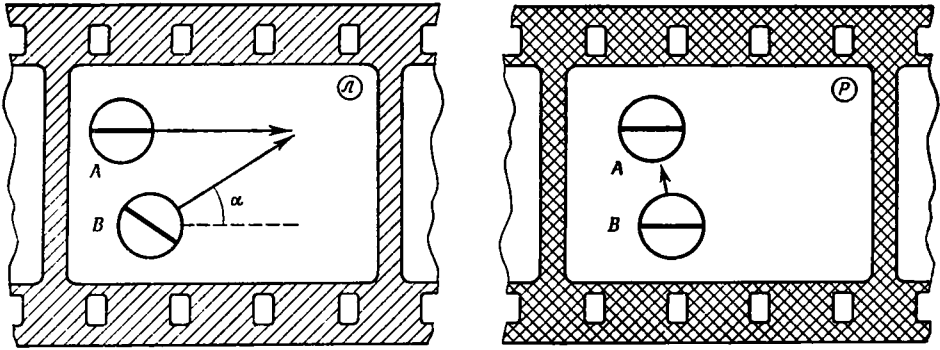
а) На рис. 129 электрон изображен до (А) и после (В) того, как он изменил направление своего движения на угол  $\alpha$ . Жирная черта, пересекающая в каждом случае электрон, — *проекция* направления спина на плоскость орбиты (плоскость  $xy$ ). На рисунке представлен тот *частный случай*, когда эта проекция была направлена вдоль оси  $x$  до изменения электроном его направления движения. Когда же *произошло* это изменение направления



Р и с. 128. Правильный многоугольник как приближенное описание ньютоновской круговой орбиты электрона в атоме.



Р и с. 129. Частный случай изменения ориентации оси вращения электрона при изменении направления его движения.



Р и с. 130. Заменяем одиночный электрон, огибающий угол, двумя электронами,  $A$  и  $B$ , движущимися по пересекающимся прямым путям. Потребуем, чтобы ориентация спина у  $A$  и у  $B$  была одинаковой в системе отсчета, где  $A$  покоится.

движения электрона как целого, *ориентация* спина должна была также измениться на некоторый малый угол  $d\varphi$ , и это изменение нельзя понять в рамках механики Ньютона! Чем оно вызвано? Его причиной является относительность одновременности.

Огибая угол, электрон испытывает сильное и резкое ускорение. К счастью, мы можем анализировать по отдельности шарики  $A$  и  $B$ , движущиеся с одинаковыми по модулю скоростями в направлениях, образующих в лабораторной системе отсчета угол  $\alpha$ , как это изображено на рис. 130. Ни один из этих шариков пусть не ускоряется, но в момент их встречи наблюдатели, движущиеся вместе с ними, могут зарегистрировать одинаковое направление осей вращения шариков  $A$  и  $B$ . Рисунок в системе отсчета ракеты изображает относительную ориентацию спинов в той системе отсчета, где шарик  $A$  покоится. Именно в этой системе отсчета ракеты наблюдатель на  $A$  производит сравнение ориентаций векторов спина. (*Вопрос:* какой наблюдатель проводит сравнение —  $A$  или  $B$ ? В том случае, когда угол  $\alpha$  весьма мал, наблюдатель  $A$  и наблюдатель  $B$  будут *почти покоиться* друг относительно друга, так что в пределе *все равно, кто из них производит сравнение!*) Так как мы заменяем одиночный шарик, огибающий угол, двумя шариками  $A$  и  $B$ , мы требуем, чтобы *в системе отсчета ракеты* проекции спина для  $A$  и для  $B$  были взаимно параллельны. Главное здесь в том, что хотя эти проекции и параллельны в системе отсчета *ракеты*, они *непараллельны в лабораторной системе отсчета*. В результате направление вектора спина электрона изменяется, когда электрон огибает угол, при наблюдении в лабораторной системе отсчета.

На рис. 131 в крупном масштабе изображен шарик  $B$ . Обозначим, согласно этой схеме, концы проекции спиновой оси через  $P$  и  $Q$ . Выберем начала координат в лабораторной системе отсчета и в системе отсчета ракеты так, чтобы в момент  $t = t' = 0$  эти начала совпадали с точкой  $P$ . Тогда в системе отсчета ракеты точка  $Q$  пересечет ось  $x$  в *этот же момент*  $t' = t'_Q = 0$ . Но в лабораторной системе отсчета это будет не так! На рис. 131 показан электрон  $B$  в момент времени  $t = 0$  в лабораторной системе отсчета. Пусть  $x_Q$  и  $t_Q$  будут соответственно *другой* точкой и *более поздним* моментом времени в лабораторной системе отсчета, при которых точка  $Q$  пересекает ось  $x$ . Пользуясь формулами преобразования Лоренца и полагая  $t'_Q = 0$ , покажите, что

$$\begin{aligned} x_Q &= x'_Q \operatorname{ch} \theta_r, \\ t_Q &= x'_Q \operatorname{sh} \theta_r. \end{aligned} \quad (128)$$

**Вопрос:** где находилась точка  $Q$  в момент времени  $t = 0$  в лабораторной системе отсчета? К моменту  $t_Q$  точка  $Q$  прошла расстояние  $\beta_r t_Q$ , как это показано на рисунке. *Покажите*, исходя из него, что за это время координаты  $x$  и  $y$  точки  $Q$  изменились на величины

$$\begin{aligned}\Delta x &= \beta_r t_Q \cos \alpha = \beta_r x'_Q \operatorname{sh} \theta_r \cos \alpha, \\ \Delta y &= \beta_r t_Q \sin \alpha = \beta_r x'_Q \operatorname{sh} \theta_r \sin \alpha,\end{aligned}\quad (129)$$

где на последнем этапе были использованы соотношения (128). Это значит, что в момент  $t = 0$  лабораторной системы отсчета точка  $P$  была (по определению) в начале координат, а точка  $Q$  имела координаты  $x_Q = \Delta x$  и  $-\Delta y$ . Поэтому угол наклона  $d\varphi$  отрезка  $PQ$  к горизонтали, найденный в лабораторной системе отсчета в момент  $t = 0$ , т. е. изменение ориентации вектора спина после того, как электрон обогнул угол, дается выражением

$$\operatorname{tg} d\varphi = \frac{-\Delta y}{x_Q - \Delta x}.\quad (130)$$

Подставляя сюда  $x_Q$ ,  $\Delta x$  и  $\Delta y$  из соотношений (128) и (129) и производя упрощения, найдем

$$\operatorname{tg} d\varphi = \frac{-\beta_r^2 \sin \alpha}{1 - \beta_r^2 \cos \alpha}.$$

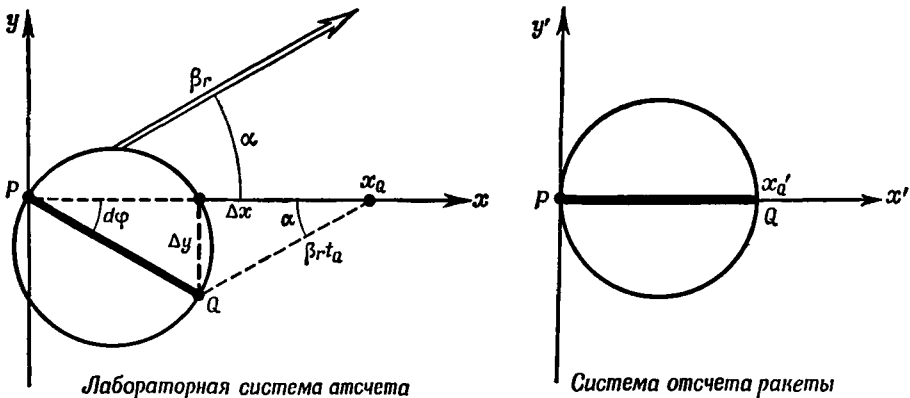
В атоме  $\beta_r \ll Z/137$  (см. упражнение 101), так что при малых  $Z$   $\beta_r \ll 1$ . Поэтому

$$\operatorname{tg} d\varphi \approx d\varphi \approx -\beta_r^2 \sin \alpha.$$

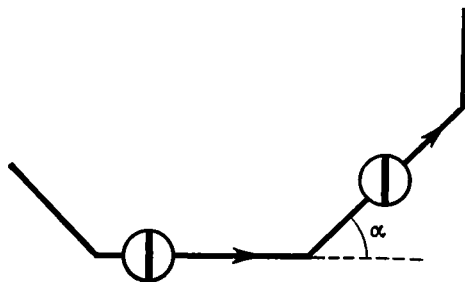
Это и есть тот угол, на который спиновая ось электрона поворачивается при огибании электроном угла  $\alpha$  в том *частном случае*, когда проекция этой оси на плоскость орбиты электрона направлена первоначально вдоль его движения.

б) Возьмем другой частный случай, на этот раз когда проекция оси вращения параллельна оси  $x$  ( $xy$  — плоскость орбиты). Покажите, что теперь наблюдатели в лабораторной системе отсчета и в системе отсчета ракеты будут согласны между собой в том, что точки  $P$  и  $Q$  пересекают ось  $y$  одновременно. Поэтому в данном случае при огибании электроном угла в лабораторной системе отсчета будет отсутствовать поворот оси вращения электрона.

в) В процессе движения электрона по орбите проекция его оси вращения на плоскость  $xy$  (рис. 127) будет иногда *параллельна* направлению его движе-



Р и с. 131. Исследование ориентации оси вращения шарика  $B$  в лабораторной системе отсчета и в системе отсчета ракеты; схема начерчена для того, чтобы получить ответы на вопросы: где и когда точка  $Q$  пересекает ось  $x$ ? Где вследствие этого расположена точка  $Q$  в момент времени  $t = 0$  в лабораторной системе отсчета?



Р и с. 132. Частный случай, когда электрон не изменяет ориентации своей оси при изменении направления движения.

ния (случай (а)), а иногда — *перпендикулярна* этому направлению (случай (б)). В общем случае она будет составлять некоторый угол  $\varphi$  с направлением движения электрона, меняющийся на  $d\varphi$ , когда электрон огибает угол. *Чему может быть равна величина этого изменения,  $d\varphi$ ?* При  $\varphi = 0$  [случай (а)]  $d\varphi = -\beta_r^2 \sin \alpha$ ; при  $\varphi = 90^\circ$  [случай (б)]  $d\varphi = 0$ . В общем случае изменение должно лежать между нулем и  $-\beta_r^2 \sin \alpha$ . Исходя из рис. 133, проведем следующие рассуждения, чтобы показать, что при малых  $\alpha$  и  $\beta_r^2$  искомое изменение равно  $-\beta_r^2 \sin \alpha \cos^2 \varphi$ . Дополним первоначальную линию  $PQ$  ее горизонтальной и вертикальными составляющими  $PR$  и  $QR$ . Из пунктов (а) и (б) мы знаем, что вертикальный отрезок  $QR$  не подвергнется повороту, когда электрон обогнет угол, тогда как горизонтальный отрезок  $PR$  повернется *по часовой стрелке* на угол  $\beta_r^2 \sin \alpha$ . Покажите, что при малых углах  $\alpha$  это приводит к неизменности  $x$ -компоненты  $PQ$  и уменьшению  $y$ -компоненты на величину  $(L \cos \varphi) \cdot (\beta_r^2 \sin \alpha)$ . Поэтому тангенс нового угла  $\varphi + d\varphi$  равен

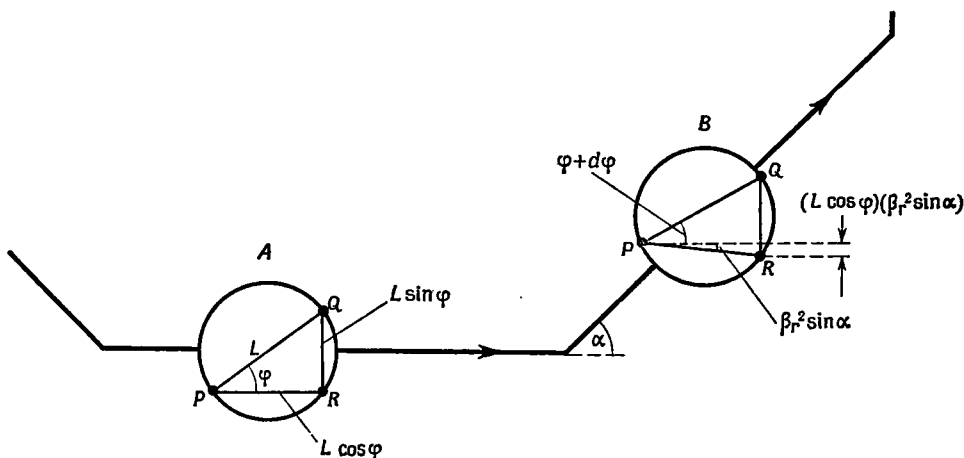
$$\operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) \approx \frac{L \sin \varphi - (L \cos \varphi)(\beta_r^2 \sin \alpha)}{L \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi - \beta_r^2 \sin \alpha. \quad (131)$$

Требуется найти  $\operatorname{tg} d\varphi \approx d\varphi$ ; согласно табл. 8,

$$\operatorname{tg} d\varphi = \operatorname{tg} [(\varphi + d\varphi) - \varphi] = \frac{\operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) \operatorname{tg} \varphi}.$$

Используя равенство (131), получим

$$\operatorname{tg} d\varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \beta_r^2 \sin \alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + (\operatorname{tg} \varphi - \beta_r^2 \sin \alpha) \operatorname{tg} \varphi} = \frac{-\beta_r^2 \sin \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi - \beta_r^2 \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi}.$$



Р и с. 133. Общий случай изменения ориентации оси вращения электрона, когда последний меняет направление своего движения.

При очень малых  $\alpha$  можно пренебречь последним слагаемым в знаменателе, где останется тогда сумма

$$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = 1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi},$$

так что

$$\operatorname{tg} d\varphi \approx d\varphi = -\beta_r^2 \sin \alpha \cos^2 \varphi. \quad (132)$$

Это и есть тот угол, на который поворачивается (прецессирует) ось вращения электрона, когда последний огибает угол, изменяя направление своего движения на  $\alpha$ , в общем случае ориентации проекции этой оси вращения на плоскость орбиты под углом  $\varphi$  к направлению движения электрона.

г) Из уравнения (132) видно, на какой угол  $d\varphi$  поворачивается вектор спина электрона, когда электрон изменяет направление своего движения на  $\alpha$ , один раз огибая угол. Чему будет тогда равен полный угол прецессии  $\Delta\varphi$  при обходе электроном всей замкнутой орбиты? (См. рис. 127 и 128.) В замкнутой орбите содержится  $n$  поворотов, каждый из которых происходит на угол  $\alpha = 2\pi/n$ . При больших  $n$  (малых  $\alpha$ )  $\sin \alpha \approx \alpha$ , так что полный угол прецессии спина при одном обороте электрона вокруг ядра составляет

$$\Delta\varphi \approx -\beta_r^2 (n\alpha) \langle \cos^2 \varphi \rangle_{\text{cp}} \approx -2\pi\beta_r^2 \langle \cos^2 \varphi \rangle_{\text{cp}}.$$

Чему равен множитель  $\langle \cos^2 \varphi \rangle_{\text{cp}}$ ? Предположим, что полный угол прецессии  $\Delta\varphi$  за один оборот является малым (скорость  $\beta_r$  мала!). Тогда при обходе электроном его орбиты угол  $\varphi$  между переменным направлением движения и проекцией оси вращения на плоскость орбиты пробежит все значения от 0 до  $2\pi$ . Покажите, что в этом случае

$$\langle \cos^2 \varphi \rangle_{\text{cp}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2}.$$

Поэтому полный угол прецессии спина электрона за один полный оборот по орбите равен

$$\Delta\varphi = -\pi\beta_r^2 \quad (\text{угол прецессии за один оборот}). \quad (133)$$

д) Электрон, двигающийся со скоростью  $\beta = \beta_r$ , за один полный оборот по орбите прецессирует на угол  $\Delta\varphi = -\pi\beta_r^2 = -\pi\beta^2$ . Покажите, что электрону требуется совершить  $2\pi/\Delta\varphi = 2/\beta^2$  оборотов вокруг ядра, чтобы прецессия возвратила его в прежнее положение (прецессия на  $2\pi$  рад). Примем теперь боровскую частоту обращения электрона вокруг ядра за  $\nu_B$ . Покажите, что частота прецессии Томаса  $\nu_T$  (частота прецессии спина электрона) выражается через боровскую частоту как

$$\frac{\nu_T}{\nu_B} \approx \frac{1}{2} \beta^2 \quad (\text{частота прецессии Томаса}). \quad (134)$$

Мы знаем из упражнения 101, что скорость движения электрона на орбите в элементарной теории Бора равна  $\beta = \frac{\alpha Z}{n} = \frac{Z}{137n}$ . Здесь  $Z$  — число элементарных зарядов в ядре, а  $n$  — номер энергетического уровня электрона, причем низший (основной) уровень соответствует  $n = 1$ . Отсюда следует, что частота прецессии Томаса для электрона в атоме определяется выражением

$$\frac{\nu_T}{\nu_B} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{Z}{137n} \right)^2 \quad (\text{частота прецессии Томаса}). \quad (135)$$

(Замечание. В некоторых атомах имеет место дополнительная прецессия спина электрона, обусловленная моментом силы, возникающим при взаимодействии магнитного момента электрона с магнитным полем ядра. Для элект-

рона находящегося на внутренней орбите атома водорода, такая магнитная прецессия имеет *обратное* направление и *вдвое* превышает по абсолютной величине прецессию Томаса. Поэтому полный эффект состоит в прецессии с *вдвое меньшей* частотой по сравнению с тем, что предсказывает один лишь учет магнитного взаимодействия без анализа эффектов частной теории относительности.)

## Ж. МЕЖЗВЕЗДНЫЕ ПОЛЕТЫ

### 104\*. Трудности межзвездных полетов <sup>1)</sup>

Игнорируя полностью все технические затруднения, *рассмотрим лишь те трудности полетов в межзвездные просторы, которые вызываются самой теорией относительности.* Пусть имеется (в 1989 г.?) ракетный двигатель, обладающий ничтожной массой. В нем можно регулировать соединение материи и антиматерии, поступающей из баков, причем возникают одни лишь фотоны, и двигатель направляет *все* это излучение в нужную сторону. Этот двигатель ускоряет космический корабль, величина массы всех конструкций которого, включая защиту, ничтожно мала. Условия контракта таковы: нужно ускорить полезный груз до скорости, при которой коэффициент замедления времени равен 10, произвести торможение для посещения планет около далекой звезды (предполагается, что она покоится относительно нашего Солнца), а затем вернуться на Землю с такой же скоростью. Полезный груз, включая пассажиров, который требуется доставить по замкнутому маршруту, равен  $100\text{ т}$  ( $100 \cdot 10^3\text{ кг}$ ).

а) Воспользуйтесь результатами упражнения 58 для определения полной массы топлива, необходимого для путешествия по замкнутому маршруту. (*Но не* учетверенной величины массы того топлива, которое необходимо для единичного акта ускорения ракеты из состояния покоя до ее максимальной скорости!)

б) Чему равно расстояние (в световых годах) до самой далекой звезды, которой можно достигнуть за время жизни астронавта (предполагаемая продолжительность жизни человека в 1989 г. 100 лет)? (Для простоты пренебрегите временем работы двигателей ракеты по сравнению со значительно более длительным сроком полета с постоянной скоростью.) Какой (приблизительно) промежуток времени пройдет на Земле в течение этого полета?

в) Приняв плотность межзвездной среды равной одному атому водорода на кубический сантиметр, укажите, чему равна кинетическая энергия этих атомов (в *Бэв*) в системе отсчета ракеты, движущейся с максимальной скоростью? Сколько таких частиц будет попадать на  $1\text{ м}^2$  лобовой поверхности ракеты в секунду и насколько велико это число по сравнению с мощностью пучка протонов высокой энергии от ускорителя (около  $10^{12}$  протонов в секунду, каждый с энергией порядка  $10\text{ Бэв}$ )? Для защиты работников от чрезмерного облучения на таком ускорителе устанавливают щит из железобетона толщиной 3—4 м. Оцените теперь возможности межзвездных космических путешествий!

<sup>1)</sup> См. Edward Purcell, in *Interstellar Communication*, ed. A. G. W. Cameron, Benjamin, New York, 1963. [Русский перевод: Межзвездная связь, изд-во «Мир», М., 1966.]



### 3.

## ФИЗИКА ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА- ВРЕМЕНИ

*Только исторический подход освобождает дух от засилья прошлого; он поддерживает его самостоятельность и стремится лишь внести ясность.*  
Бенедетто Кроче

Для того чтобы понять нынешнее значение физики пространства-времени, едва ли не лучше всего вспомнить, как она выковывалась тружениками науки в прошлом. Рассказ о том, как она продвигалась вперед, постоянно проводя разведку боем, никак нельзя полностью вместить в несколько десятков страниц; но вместе с тем нельзя и обойти несколько великих имен и поворотных пунктов, предопределивших ее развитие. Приступая к рассказу о ее истории, мы надеемся разобраться — по крайней мере в общих чертах — во взаимоотношении физики локальных лоренцевых систем отсчета и физики в более обширных областях пространства-времени, таких, как околоземное космическое пространство или солнечная система в целом.

---

#### *Изменение духа физики при расширении пространственно-временных масштабов*

Галилей и Ньютон считали, что движение можно адекватно описать в жесткой евклидовой системе отсчета, распространенной на все пространство и сохраняющейся неизменной во все времена. Такая система остается вне изменений, происходящих с веществом и с энергией. В этом идеальном пространстве Галилея и Ньютона действует таинственная сила тяготения, контрабандой занесенная из мира физики, чуждое влияние, не описываемое геометрией. Напротив, Эйнштейн утверждает, что нет никакого таинственного тяготения — налицо лишь структура самого пространства-времени.

---

#### *Эйнштейн против Ньютона — множество инерциальных систем отсчета, каждая из которых локальна, против единой глобальной системы*

Он говорит: садьте в космический корабль, и вы убедитесь, что там нет тяжести. Локально физика лишена тяготения (разд. 2 гл. 1). Все свободные частицы движутся прямолинейно с постоянными скоростями, и в инерциальной системе отсчета физика проста. Однако такие системы инерциальны лишь в ограниченной области пространства-времени, и этот факт мы подчеркивали, постоянно называя инерциальные системы отсчета *локальными*. Трудности возникают, когда мы описываем связь между направлением движения частицы, наблюдаемым из двух соседних локальных систем отсчета. Согласно Эйнштейну, все различия в направлениях в данной системе и соседней локаль-

ной системе отсчета характеризуются «кривизной пространства-времени». Факт существования этой кривизны делает невозможным описание движения в единой идеальной евклидовой системе отсчета, охватывающей пространство. Геометрия проста лишь в областях, достаточно малых для того, чтобы они казались плоскими. Короче говоря, Эйнштейн пользуется множеством локальных областей, в каждой из которых геометрия лоренцева («частная теория относительности»), и законы тяготения проистекают от неидеального соответствия между одной локальной областью и соседней с ней (гравитация как кривизна пространства-времени — «общая теория относительности»). У Ньютона была единая глобальная система отсчета, но в этой системе нет ни одного спутника, на котором отсутствовала бы тяжесть, и ни одна частица не может двигаться там прямолинейно и равномерно.

Как развивались воззрения Галилея, Ньютона и Эйнштейна? И в чем, собственно, смысл странного выражения «кривизна пространства-времени»?

Общезвестно глубочайшее противоречие между результатами опытов Галилея по свободному падению и утверждением Аристотеля о том, что «нисходящее движение масс золота, или свинца, или любых иных весомых тел происходит тем быстрее, чем больше их вес». За несколько лет до опытов Галилея Молетти в Падуе утверждал, что свинцовые и деревянные грузы падают одинаково быстро, но этого утверждения было недостаточно, чтобы опровергнуть взгляд Аристотеля. Для окончательного доказательства потребовалось вмешательство Галилея. Неясно, бросал ли Галилей свинцовые и деревянные грузы с «Падающей башни» в Пизе, но он определенно провел более убедительные эксперименты с потенциально более высокой степенью точности, чем опыт с «Падающей башни»<sup>1)</sup>.

Кто, вступая на путь первооткрывателя закона ускоренного падения, мог обойти исследование полета снаряда? Изучая этот полет и стремясь описать его простейшим образом, Галилей должен был прийти к мысли о сложении движений — движения по вертикали с постоянным направленным вниз ускорением и горизонтального движения с постоянной скоростью (равномерного переноса). Отсюда оставался всего лишь шаг до принципа относительности в первой из его известных формулировок. Вот что говорят действующие лица в книге Галилея<sup>2)</sup>:

---

*Галилей: первая из известных формулировок принципа относительности*

Сальввати, Запритесь с кем-нибудь из друзей в кают-компании под палубой большого корабля, взяв с собой мух, бабочек и других небольших летающих животных. Возьмите и большой сосуд с водой, в котором плавают рыбы. Подвесьте бутылку, из которой капля по капле вытекает вода в широкий сосуд внизу. Пока ваше судно стоит на месте, внимательно наблюдайте, как насекомые летают по помещению с одинаковыми скоростями во все стороны. Рыбы плавают как угодно, не предпочитая какого-либо особого направления. Капли падают в сосуд под бутылку. Если же вы бросите что-нибудь вашему другу, то вы приложите одинаковое усилие, в каком бы направлении ни бросали, если расстояния одинаковы. Прыгая обеими ногами сразу, вы будете пролетать одинаковые расстояния в любом направлении. Тщательно пронаблюдав все это

---

<sup>1)</sup> Подробности см. в книге Галилео Галилея «Диалоги о двух новых науках», впервые опубликованной в марте 1638 г. [Русский перевод: Г а л и л е й, Диалоги о двух новых науках, ОНТИ, М., 1937.]

<sup>2)</sup> Книга Галилео Галилея «Диалоги о двух главнейших системах мира — птоломеевой и коперниканской» впервые опубликована в феврале 1632 г. [Русский перевод: Г а л и л е й, Диалоги о двух главнейших системах мира, Гостехиздат, М., 1947.] Сочинения Галилея, как и сочинения Данте, по своей силе и насыщенности — сокровища человеческой мысли, и учащиеся средних школ Италии изучают их как часть великого литературного наследия.



## ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЙ

*Пиза, 14 февраля 1564 г. — Арчетри, близ Флоренции, 8 января 1642 г.*

«Мой портрет уже закончен, сходство очень хорошее, рука отличного мастера». 22 сентября 1635 г.

\* \* \*

«Если кто-либо и когда-либо мог претендовать на то, чтобы быть выделенным из числа других людей за свой разум, так это Птоломей и Коперник, заслуга которых в том, что они дальше всех заглянули в Систему Мира и наиболее глубоко ее исследовали».

\* \* \*

«Дорогой мой Кеплер, что мы сделаем со всем с этим? Будем ли смеяться или плакать?»

\* \* \*

«Когда же я перестану удивляться?»

(хотя вы и не сомневались, что все будет происходить именно так, пока корабль стоит на месте), отдайте команду, чтобы корабль начал двигаться с любой скоростью, лишь бы его движение было равномерным и не подвергалось каким бы то ни было возмущениям. Ни в одном из указанных процессов вы не обнаружите ни малейшего изменения и не сможете ни по одному из них узнать, движется ли ваш корабль или стоит на месте. Прыгая, вы будете пролетать над полом те же расстояния, что раньше, и ваши прыжки в сторону кормы не окажутся длиннее прыжков в сторону носа корабля несмотря на то, что, пока вы находились в воздухе, пол под вами двигался в направлении, противоположном вашему. Для того чтобы перебросить какой-нибудь предмет вашему другу, вам не понадобится затратить большее усилие, если ваш друг стоит ближе к носу корабля, а не к корме, когда вы расположились против него. Капли будут продолжать падать в стоящий внизу сосуд, не отклоняясь к корме, хотя, пока они летят в воздухе, судно успевает передвинуться на несколько пядей. Рыбы будут плавать в воде в своем сосуде с одинаковой легкостью во все стороны и в равной мере хватать приманку, в какой бы угол сосуда мы ее ни поместили. Наконец, бабочки и мухи будут совершать полеты равно во всех направлениях, и вы никогда не обнаружите, что они скопились у кормы, как бы устав поспевать за ходом корабля, от которого они были отделены, находясь длительное время в воздухе...

Сагредо. Хотя мне и не приходилось в моих странствиях проводить таких наблюдений, я убежден, что все будет происходить именно так, как вы описали. Для меня служит подтверждением то, что я, помнится, сидя в своей каюте, часто не мог понять, идет наш корабль или стоит на месте; случалось, я думал, что он идет в одну сторону, тогда как мы двигались в противоположную...

Принцип относительности Галилея в этой первоначальной формулировке хотя и прост, но не настолько, насколько мог бы быть. В чем состоит его простота? Физические процессы выглядят одинаково в равномерно движущемся корабле и в корабле, стоящем на месте. Равномерное относительное движение кораблей не сказывается на законах движения, описываемых в каждом из них. В каждом корабле мы видим, что изолированное тело совершает равномерное прямолинейное движение в горизонтальном направлении и подвержено равноускоренному движению в вертикальном направлении. Ядро, падающее вертикально вниз на одном корабле, при наблюдении с другого корабля описывает параболическую кривую; ядро, падающее вертикально вниз на этом втором корабле, также описывает параболическую кривую, если его наблюдать с первого корабля. Простота принципа относительности Галилея кроется во взаимной эквивалентности двух находящихся на Земле систем отсчета и в симметрии между ними. В каком же смысле эта простота не так велика, как она могла бы быть?

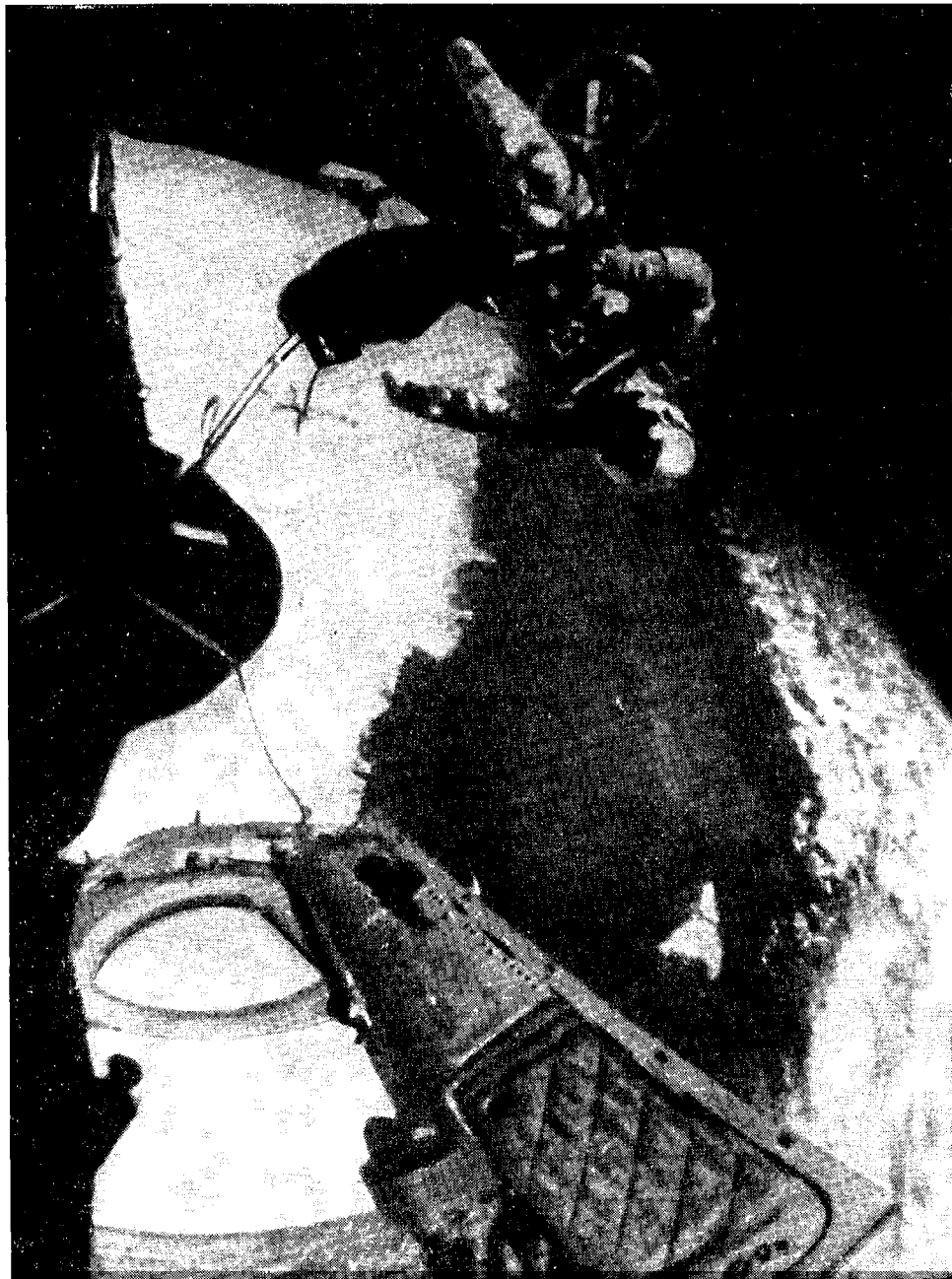
---

#### *Распространение рассуждений Галилея с обычного корабля на космический*

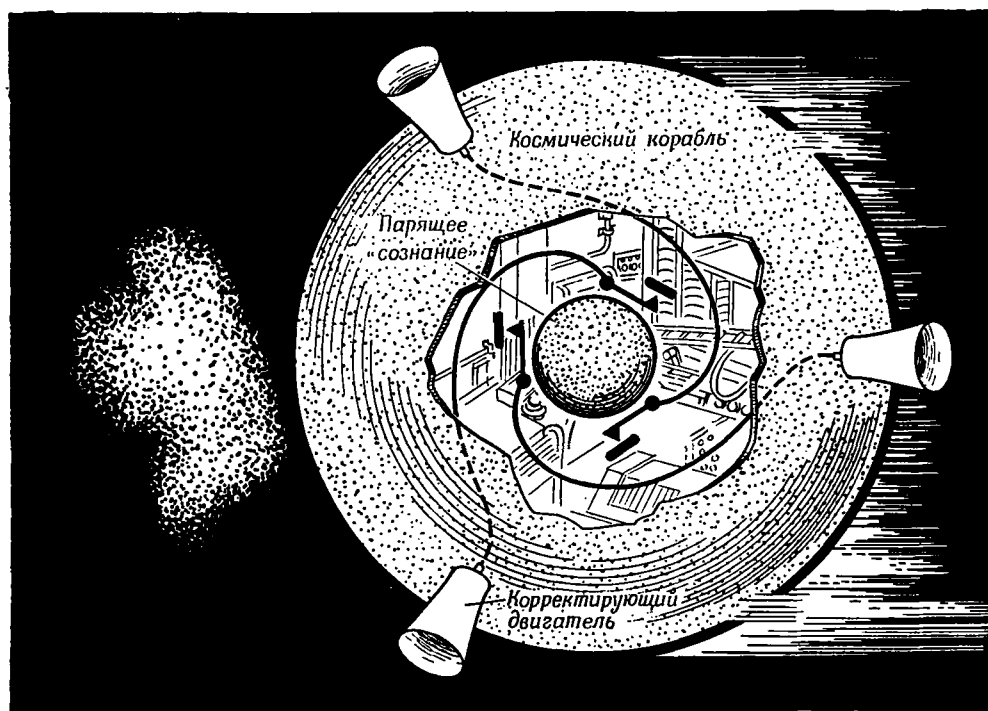
Системы отсчета в определении Галилея еще не являются инерциальными. Чтобы получить последние, требуется лишь небольшая замена понятий — переход от морского корабля к космическому. Тогда совершенно одинаковыми становятся все направления — вверх и вниз, на восток и на запад, на север и на юг. Тело, не подвергающееся воздействию сил, не испытывает ускорения, и его движение будет равномерным как с точки зрения одного космического корабля, так и другого. Сегодня под галилеевым принципом относительности понимают именно это тождество выражений закона свободного движения во всех инерциальных системах отсчета.

Как бы Галилей ни изоцрял свою фантазию, он не мог в 1632 г. предложить своим читателям поместиться в космическом корабле.

И все же он смог бы описать ту большую простоту физических явлений, которая проявляется при наблюдении с таких преимущественных позиций.



Р и с. 134. Майор Эдвард Уайт не испытывает никакого ускорения относительно космического корабля, в котором находится майор Джеймс Макдивитт, кроме тех моментов, когда он выбрасывает струю кислорода из двигателя, находящегося в его правой руке. В 100 милях вверху видна Калифорния. Полет космического корабля «Джемини 3» — 7 июня 1965 г.



Р и с. 135. «Наделенный сознанием» космический корабль. Любое нарушение его свободного движения, например встреча с газовым облаком слева, связано с изменением скорости. Парящий в середине космического корабля маленький спутник — «сознание» — защищен от столкновения с газовым облаком. Он продолжает свое движение по-прежнему. Наблюдая это «сознание» с помощью чувствительных датчиков (схематически изображенных здесь в виде контактных переключателей), космический корабль получает информацию о том, что он движется иначе, чем требует этого внутренний спутник. Потрясенный переключатель приводит в действие противоположную ему корректирующую ракету как раз на тот срок, в течение которого она приводит движение корабля в согласие с его «сознанием».

Бутили, капли воды и все прочие пробные объекты сохраняют состояние покоя или движения с постоянной скоростью. Отсутствие ускорения всех соседних объектов относительно космического корабля было бы понятно галилеям всех эпох. Кто выразил яснее, чем Галилей, совпадение величины ускорения всех соседних объектов относительно Земли? И разве смог бы удивить Галилея тот факт, что астронавт может парить рядом со своим космическим кораблем (рис. 134)?

Исследования последнего времени придали новый драматизм галилеевскому принципу универсальности свободного падения, не изменив самого принципа. Ролл, Кротков и Дикке <sup>1)</sup> доказали равенство величины ускорения для алюминия и золота с относительной точностью  $10^{-11}$ .

*«Наделенный сознанием» космический корабль. Что управляет его сознанием?*

Мартин Шварцшильд предложил конструкцию «наделенного сознанием» космического корабля, обеспечивающую одинаковый характер его движения как при наличии сопротивления со стороны разреженных газов или

<sup>1)</sup> P. G. Roll, R. Krotkov, R. H. Dicke, *Annals of Physics*, 26, 442 (1964).



### ИСААК НЬЮТОН

*Вулсторп, 25 декабря 1642 г. — Кенсингтон (Лондон), 20 марта 1727 г.*

**«Бестрепетный ума посланец одинокий,  
Скиталец вечный в странных океанах дум».**

*Водсворт.*

\*\*\*

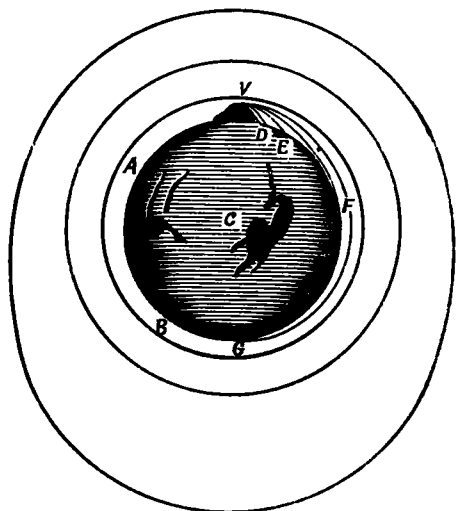
**«Не знаю, каким представляет себе меня мир, но самому себе я кажусь просто ребенком, который играет на морском берегу и забавляется, отыскивая лучше обкатанные камешки или более красивые, чем обычно, ракушки, в то время как великий океан истины лежит передо мной, еще девственно непознанный».**

*Ньютон.*

\*\*\*

**«Почему я называю его волшебником? — Потому, что он видел во Вселенной и всем, что в ней есть, загадку — секрет, который можно прочесть, если старательно поразмыслить над некоторыми фактами, некоторыми таинственными ключами, которые дает нам Бог к разгадке мира, дозволив братству посвященных поиск некоего философического сокровища. Он верил, что найти эти ключи к истине можно отчасти в свидетельстве небес и строения элементов (что и приводит к ложной мысли, будто он был натурфилософом-экспериментатором), но отчасти и в известных писаниях и традициях, пришедших к нам от собратьев по неразрывной цепи, начиная с первого таинственного откровения в Вавилоне. Он видел во Вселенной зашифрованное послание Всемогущего, подобное той криптограмме, в которой он сообщал Лейбницу свое открытие математического анализа. И он верил, что только сама мысль и концентрация ума смогут раскрыть эту загадку для посвященных».**

*Кейнс.*



Р и с. 136. В ньютоновской механике разные частицы, движущиеся с различными скоростями, отклоняются от идеально прямого пути с одним и тем же ускорением. В этом смысле не существует принципиального различия между падением снаряда и движением спутника. На этом рисунке Ньютона, опубликованном в 1686 г., пушка достаточно большой мощности, установленная на вершине горы, горизонтально выпускает свои снаряды. Самый мощный выстрел запускает тогда на орбиту спутник. Две внешние кривые изображают другие возможные орбиты спутников.

Нигде, кроме книги А. Койре [Alexander Koyré, *A Documentary History of the Problem of Fall from Kepler to Newton*, Transactions of the American Philosophical Society, 45, part 4 (1955)], не рассказано с таким стремлением к замечательной документальности, как Ньютон лишь постепенно пришел к решению задачи о свободном падении. Рисунок взят из книги Ньютона, *Newton's Principia Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Joseph Streater, London, July 5, 1686; моттовский перевод ее на английский язык, пересмотренный и отредактированный Флорианом Каджори, был опубликован в двух томах (University of California Press, Berkeley, 1962). [Перевод на русский язык см. в Собрании трудов акад. А. Н. Крылова, т. 7, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1936; И. Ньютон, Математические начала натуральной философии.— *Прим. перев.*]

солнечного ветра, так и при движении в абсолютном вакууме. Роль «сознания» выполняет второй корабль (спутник), парящий внутри первого, большего корабля (рис. 135). Пока космический корабль совершает свободное движение, спутник не испытывает ускорения относительно него, но когда такое ускорение возникает, вся ответственность за появление ускорения лежит на космическом корабле, и последний с помощью небольших ракет кратковременно ускоряется, делает рывок и вновь приводится в соответствие со своим внутренним «сознанием». Хотя на корабль может влиять сопротивление внешней среды, оно преодолевается мощностью ракет. Космический корабль тогда сохраняет такое движение, какое имело бы место при одновременном отсутствии как внешнего сопротивления, так и влияния двигателей.

Когда космический корабль со своим «сознанием» выходит в пустоту, он летит по идеальному пути без помощи ракет и чувствительных датчиков. Посмотрите, какая замечательная гармония! Внутренний спутник не видит внешнего мира. Он не осязает, не чувствует, не видит корабля, окружающего его со всех сторон. И тем не менее он добросовестно идет в пространстве-времени тем же путем, что и корабль. Более того, его абсолютная добросовестность не зависит от того, из чего он сделан, будь то алюминий или золото. Откуда же такие «сознания», независимо от своего химического состава и конструкции вообще, черпают все данные о верном пути? Где источник, управляющий массой в ее движении?



«Там же, где масса,— локально»,— отвечает Эйнштейн. «Источник действует на расстоянии»,— отвечает Ньютон.

Эйнштейн утверждает, что спутник получает информацию самым простым из возможных способом. Он реагирует на структуру пространства-времени в непосредственной близости от него самого. Он движется по прямой в своей локальной инерциальной системе отсчета. Невозможно вообразить более простого и более прямолинейного движения.

Ньютон утверждает, что информацию о том, как ему двигаться, спутник получает на расстоянии, через «силу тяготения». Двигаться — по относительно чего? Относительно идеальной, богом данной и неизменной евклидовой системы отсчета, заполняющей все пространство и охватывающей все времена! Ньютон говорит, что спутник двигался бы по идеальной прямой в этой глобальной системе отсчета, если бы его не отклоняла Земля. Но как увидеть эту идеальную прямую? Какая жалость — не существует ничего, абсолютно ничего, что двигалось бы когда-нибудь по этой идеальной прямой. Эта прямая — плод чистейшего воображения. И тем не менее, как утверждает Ньютон, ее определение просто: спутник любой природы,двигающийся с любой скоростью, отклоняется от этой идеальной прямой с одним и тем же ускорением (рис. 136).

---

*Физика проста, лишь если ее рассматривать локально*

Эйнштейн говорит: Взгляните в лицо фактам. Никакого фона в виде идеальной евклидовой системы отсчета, охватывающей все пространство, не существует. И ее незачем постулировать, ведь, согласно самому Ньютону, никакая частица, включая даже луч света, никогда не двигается по прямой линии в этой идеальной системе отсчета. Зачем же говорить, что пространство-время евклидово в больших масштабах, если *ничто* не подтверждает эту гипотезу непосредственно? Попытаться установить всеобъемлющую евклидову систему отсчета и относить к ней движение — это ложный путь в физике. Не пытайтесь описывать движение относительно удаленных объектов. *Физика проста, лишь если ее рассматривать локально.* А локально и мировая линия спутника уже не менее пряма, чем любая другая мировая линия. Забудем все эти разговоры об «отклонении» и «силе тяготения». Вот я внутри космического корабля или парю рядом с ним снаружи. Ощущаю ли я хоть что-нибудь вроде «силы тяготения»? Отнюдь нет. «Ощущает» ли такую силу космический корабль? Нет. Зачем же тогда говорить о ней? Примем же, что космический корабль и я движемся оба в некоторой области пространства-времени в отсутствие любых сил. Примем, что движение в этой области уже само по себе идеально прямолинейно.

Как можно выразить прямолинейность этого движения? Построим локальную решетку метровых стержней и часов — локальную инерциальную систему отсчета, называемую также лоренцевой системой отсчета (разд. 2). Как узнать, инерциальна ли эта система отсчета? Проследите движение каждой частицы, каждого луча света, проверьте, что все они движутся прямолинейно и равномерно в этой системе. Убедившись таким образом в инерциальности системы отсчета, заметьте, что и космический корабль движется также с постоянной скоростью и по прямой (либо покоится) относительно этой локальной инерциальной системы отсчета. «Двигайся по прямой в своей локальной инерциальной системе отсчета»,— какой другой приказ массе от «источника», управляющего ее движением, мог бы быть проще? Должен ли спутник, прежде чем узнать, как ему двигаться, выяснить расположение Земли, Луны и Солнца? Во все нет. Со всех сторон окруженный черными стенами космического корабля, он должен лишь чувствовать локальную структуру

пространства-времени там, где он находится, для того чтобы следовать верному пути.

Великолепно! И просто к тому же! Но не *слишком* ли прост взгляд Эйнштейна на движение? Мы начали с того, что заинтересовались движением космического корабля вокруг Земли и «в гравитации». А в конце концов мы, кажется, стали говорить только о движении космического корабля (или спутника) относительно строго локальной инерциальной системы отсчета, о тривиально простом прямолинейном движении. Можно ли здесь усмотреть хоть следы «гравитации»? Нет. Это и есть великое открытие Эйнштейна: *пространство-время всегда и всюду локально евклидово*<sup>1)</sup>. Исследуя движение одной отдельно взятой частицы, невозможно обнаружить никаких признаков существования гравитации.

---

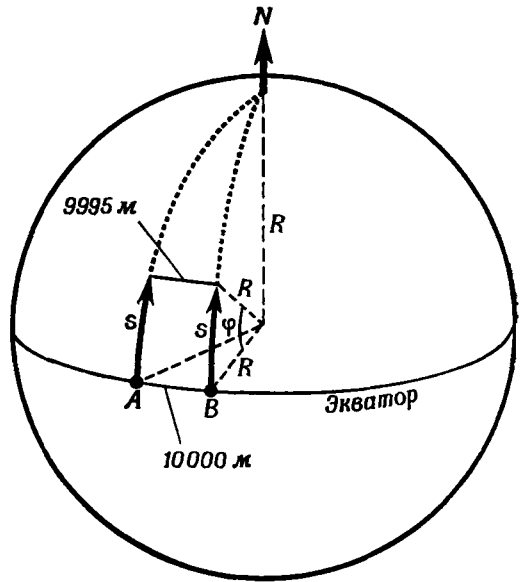
*Критерием наличия гравитации является относительное движение двух частиц, но не движение одной частицы*

Для адекватного измерения гравитационного воздействия необходимо наблюдать *относительное* ускорение двух частиц, лишь незначительно удаленных друг от друга. Насколько же удаленных? Это зависит от степени чувствительности измерительных приборов. Два массивных шарика, удаленных друг от друга по горизонтали на 25 м, будучи брошены с высоты 250 м с нулевой относительной скоростью, ударяются о землю спустя 7 сек ( $21 \cdot 10^8$  м светового времени), и расстояние между ними в этот момент будет меньше начального на  $10^{-3}$  м (см. разд. 2 и рис. 5, расчеты в упражнении 32). Два массивных шарика, удаленных друг от друга *по вертикали* на 25 м, будучи брошены с высоты 250 м с нулевой относительной начальной скоростью, за те же 7 сек удалятся друг от друга на  $2 \cdot 10^{-3}$  м (рис. 6). Если наши измерительные приборы не способны обнаружить такие малые относительные смещения, можно считать, что массивные шарики двигались в одной и той же инерциальной системе отсчета, где гравитация никак себя не проявляет. Более чувствительные измерительные приборы отметят «приливное воздействие» тяготения — все ускоряющееся сокращение удалений в направлениях, параллельных поверхности Земли, и ускоряющееся увеличение вертикальных удалений. Каждый маленький массивный шарик будет продолжать двигаться по прямой в своей собственной локальной инерциальной системе отсчета, но теперь уже, при повышенной степени точности, область применимости одной инерциальной системы отсчета не простирается столь далеко, чтобы адекватно описывать движение другого груза. «Тяжесть» проявляет себя в расхождениях на миллиметр-другой.

Пока что гравитация рассматривалась как явление локальное. Мы даже не упоминали ни о расстояниях грузовиков от центра Земли, ни об ускорении относительно этого центра! Единственным ускорением, которое принималось во внимание, было ускорение соседних частиц друг относительно друга («приливные ускорения» — то же, что относительные ускорения, описанные на стр. 17). Эти относительные ускорения удваиваются при удвоении удалений. Истинная мера «приливногo воздействия» имеет поэтому характер «ускорения на единицу взаимного удаления». Пусть ускорение измеряется в метрах пути на квадрат метров светового времени, т. е. в единицах  $м/м^2$  или  $1/м$ . Тогда мерой приливногo воздействия (различного в разных направлениях) будет величина размерности ускорение/удаление или  $1/м^2$ . В нашем

---

<sup>1)</sup> Здесь авторы часто называют пространство-время для простоты «евклидовым». Читателя должен иметь в виду, что речь идет на самом деле о *псевдоевклидовости*, т. е. что *геометрия пространства-времени (локально) лоренцева* (по терминологии авторов). — *Прим. перев.*



Р и с. 137. Путешественники *A* и *B*, начав двигаться параллельно друг другу и не отклоняясь ни влево, ни вправо, обнаруживают тем не менее, что приближаются друг к другу, пройдя некоторое расстояние. *Истолкование 1*: действует какая-то таинственная сила «тяготения». *Истолкование 2*: движение происходит на искривленной поверхности.

примере в горизонтальных направлениях (*x* и *y*) эта величина равна

$$\frac{-0,001 \text{ м}}{(21 \cdot 10^8 \text{ м})^2} \cdot \frac{1}{25 \text{ м}} = -9 \cdot 10^{-24} \text{ м}^{-2},$$

а в вертикальном направлении (*z*) она вдвое больше и имеет противоположный знак:  $+18 \cdot 10^{-24} \text{ м}^{-2}$ . Это приливное воздействие мало, но это реальный и наблюдаемый эффект. Кроме того, это локально определенная величина, а Эйнштейн как раз говорил, что мы должны сконцентрировать свое внимание на локально определенных величинах, если хотим найти простое описание природы.

Эйнштейн говорит к тому же, что это «приливное воздействие» не требует для своего объяснения какой-то таинственной силы тяготения, распространяющейся через пространство-время и дополняющей структуру последнего. Напротив, «приливное воздействие» может и должно быть описано на языке геометрии самого пространства-времени как *кривизны пространства-времени*. Хотя Эйнштейн говорил о 4-мерном пространстве-времени, его понятие кривизны можно проиллюстрировать с помощью 2-мерной геометрии на поверхности сферы (рис. 137).

## Притча о двух путешественниках

Первый путешественник *A* стоит на экваторе, готовый отправиться прямо на север. Его приятель *B*, стоявший плечом к плечу с *A*, поворачивается на  $90^\circ$  и направляется прямо на восток, проходит расстояние  $(\Delta x)_0 = 10 \text{ км}$  по экватору, снова поворачивается на  $90^\circ$  и останавливается лицом к северу. После этого оба, и *A*, и *B*, начинают идти к северу и проходят по  $200 \text{ км}$  (рис. 137). Сначала их пути строго параллельны; более того, оба путешественника уверены, что каждый из них абсолютно точно выдер-

живает взятое по направлению. Они не отклоняются ни вправо, ни влево. И тем не менее судья, посланный измерить расстояние между ними после того, как они прошли по 200 км, обнаруживает, что оно стало меньше первоначальных 10 км. Почему? Мы это прекрасно знаем: дело в том, что поверхность Земли искривленная. Путешественники встретятся в конце концов на Северном полюсе. Обозначим широту через  $\varphi$  ( $\varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$  на экваторе,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\cos \varphi = 0$  на Северном полюсе). Тогда удаление одного путешественника от другого на некоторой промежуточной широте равно  $10 \text{ км} \cdot \cos \varphi$ . Для близких к экватору широт достаточно взять первые два члена разложения функции косинуса по степеням угла  $\varphi$ . Тогда мы получим для расстояния между путешественниками выражение

$$\Delta x = (\Delta x)_0 \cdot \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right).$$

При этом угол  $\varphi$  определяется как отношение длины дуги  $s$ , пройденной с юга на север, к радиусу  $R$  земного шара:  $\varphi = s/R$ . Таким образом, уменьшение первоначального расстояния  $(\Delta x)_0$  определяется выражением

$$(\Delta x)_0 - (\Delta x) = (\Delta x)_0 \cdot \frac{\varphi^2}{2} = (\Delta x)_0 \cdot \frac{s^2}{2R^2}.$$

Если сначала это расстояние было равно  $(\Delta x)_0 = 10 \text{ км}$ , длина  $s = 200 \text{ км}$ , а радиус  $R = 6371 \text{ км}$ , то сокращение расстояния должно составить 0,005 км, или 5 м. Эта величина производит впечатление, однако не своим численным значением (что значит 5 м по сравнению с 10 000 м?), а принципиальным фактом существования такого расхождения. Ведь никакого расхождения не было бы, если бы охваченная движением путешественников область  $10 \text{ км} \cdot 200 \text{ км}$  была плоской. Существование этого расхождения — самое непосредственное свидетельство того, что используемая при описании 2-мерной поверхности земного шара геометрия должна быть геометрией искривленного пространства.

*Измерение кривизны по изменению удаления друг от друга двух первоначально параллельных идеальных линий<sup>1)</sup>*

Как же можно адекватно описать и количественно измерить эту кривизну? Как можно прийти к числу, не зависящему от длины пути и расстояния между путешественниками, — к числу, описывающему саму локальную кривизну, а не путешественников? Заметим сначала, что расстояние между  $A$  и  $B$  уменьшается в ускоряющемся темпе, так что целесообразно говорить именно об этом ускорении. Как можно оценить его величину? Воспользуемся тем фактом, что относительное ускорение есть скорость изменения относительной скорости, а относительная скорость в свою очередь есть скорость изменения расстояния. Поэтому начнем именно с расстояния (удаления)

$$\Delta x = (\Delta x)_0 - (\Delta x)_0 \frac{s^2}{2R^2}.$$

Пройдем дополнительно еще небольшой путь, так что вместо  $s$  получим  $s + ds$ , где величина  $ds$  весьма мала по сравнению с другими интересующими нас величинами. В результате такого дополнительного сдвига расстояние сокращается до величины

$$(\Delta x)_{\text{нов}} = (\Delta x)_0 - (\Delta x)_0 \frac{(s + ds)^2}{2R^2}.$$

Имея в виду, что квадратом малой величины  $ds$  можно пренебречь, получим

$$(\Delta x)_{\text{нов}} = (\Delta x)_0 - (\Delta x)_0 \frac{(s^2 + 2s ds)}{2R^2}.$$

Возьмем разность между новым и старым удалением, разделим ее на дополнительный

<sup>1)</sup> Здесь большей частью под «идеальными линиями» и «мировыми линиями» авторы понимают не любые мировые линии, а экстремальные, т. е. геодезические линии. — *Прим. перев.*

путь  $ds$  и найдем тем самым скорость изменения удаления — «скорость удаления»:

$$\begin{aligned} \text{«Скорость удаления»} &= \frac{\text{(Изменение удаления)}}{\text{(Дополнительный путь, пройденный путешественниками)}} = \\ &= \frac{(\Delta x)_{\text{нов}} - \Delta x}{ds} = -(\Delta x)_0 \frac{s}{R^2}. \end{aligned} \quad (136)$$

Скорость удаления равна нулю, когда  $A$  и  $B$  начинали свой путь от экватора ( $s = 0$ ), и причина этого была проста — пути  $A$  и  $B$  были тогда в точности параллельными. Но чем дальше к северу они продвигались, т. е. чем больше становилась величина  $s$  в уравнении (136), тем быстрее начинали приближаться друг к другу  $A$  и  $B$ . Такое «ускорение удаления» измеряется отношением

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{l} \text{«Ускорение} \\ \text{удаления»} \end{array} \right) &= \frac{\text{«Скорость удаления»}}{\left( \begin{array}{l} \text{Расстояние от места, где скорость} \\ \text{удаления была равна нулю} \end{array} \right)} = \frac{- (\Delta x)_0 \frac{s}{R^2}}{s} = - \frac{(\Delta x)_0}{R^2}. \end{aligned} \quad (137)$$

Если бы наши путешественники начали свой путь при вдвое большем расстоянии друг от друга, чем в этом примере  $[(\Delta x)_0]$ , то «ускорение удаления» возросло бы в два раза согласно уравнению (137). Другими словами, истинная мера кривизны поверхности земного шара определяется не самим «ускорением удаления», но «ускорением удаления на единицу первоначального удаления»:

$$\text{(Мера кривизны)} = \frac{\text{«Ускорение удаления»}}{\text{(Первоначальное удаление)}} = \frac{- (\Delta x)_0 / R^2}{(\Delta x)_0} = - \frac{1}{R^2}.$$

Хотя эта величина и малá, но она доступна измерению — она равна  $-1/(6,371 \cdot 10^6 \text{ м})^2 = -2,5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^{-2}$ . Как это похоже на «приливное воздействие» (стр. 239)! Даже размерность одна и та же! Эта аналогия геометрического понятия «кривизны» и гравитационного понятия «приливного воздействия» и предвосхищает эйнштейновское геометрическое истолкование гравитации.

*Приливное относительное ускорение в физике тяготения истолковывается как кривизна пространства-времени (геометрия)*

Начав так добросовестно двигаться параллельно друг другу и не отклоняясь ни влево, ни вправо, наши путешественники обнаружили по нарушению постоянства расстояния между ними, что они теперь поемному сближаются друг с другом. Они приписывают это явление существованию некой таинственной «силы тяжести», искривляющей их пути. Они исследуют природу этой «силы тяжести». Повторяя свое путешествие на велосипедах, мотоциклах, легковых автомобилях, грузовиках, они всякий раз обнаруживают одно и то же сокращение первоначального расстояния между друг другом. Им знакомо уравнение Ньютона

$$\text{(Сила)} = \text{(Масса)} \cdot \text{(Ускорение)}.$$

По совпадению относительных ускорений для всех видов транспорта они заключают, что сила, обусловленная «тяготением», должна быть прямо пропорциональна массе экипажа.

Но другие исследователи включаются в обсуждение, заранее предупредив, что они проявят гораздо больше осторожности. Они говорят, что гравитационную силу следует записать как произведение:

$$\begin{aligned} &\text{(Сила тяжести)} = \\ &= \left( \begin{array}{l} \text{Гравитационная масса объекта,} \\ \text{подвергающегося воздействию} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{l} \text{Напряженность гравитационного} \\ \text{поля} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Они подставляют эту силу в ньютоновское уравнение движения, всячески подчеркивая, что фигурирующая там масса — это «инертная масса» подвергающегося воздействию объекта. И они приходят к уравнению

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{l} \text{Инертная масса объекта,} \\ \text{подвергающегося воздействию} \end{array} \right) \cdot \text{(Ускорение)} = \\ &= \left( \begin{array}{l} \text{Гравитационная масса объекта,} \\ \text{подвергающегося воздействию} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{l} \text{Напряженность гравитационного} \\ \text{поля} \end{array} \right) \end{aligned}$$

или

$$\left( \text{Ускорение} \right) = \frac{\left( \text{Гравитационная масса} \right)}{\left( \text{Инертная масса} \right)} \cdot \left( \frac{\text{Напряженность гравитационного поля}}{\text{поля}} \right).$$

Эти исследователи говорят: «Посмотрите, вы получили одинаковое ускорение для всякого вида транспорта, с которым работали. Это означает, что отношение гравитационной и инертной масс одинаково для всех объектов. Вы сделали великое открытие, касающееся массы».

Все это время с высоты на них глядел космический путешественник. Он видел все эти автопробеги, следил за множеством измерений сокращения расстояния и слушал по своей системе дальней связи все солидные дискуссии о «гравитации». Он улыбался. Он ведь знал, что речь-то шла не о «гравитации», а о геометрии искривленного пространства, и все разговоры о равенстве «гравитационной массы» и «инертной массы» — сплошной туман. Ничего, кроме понятия кривизны, не требуется для описания все увеличивающейся скорости, с которой приближаются друг к другу *A* и *B*.

---

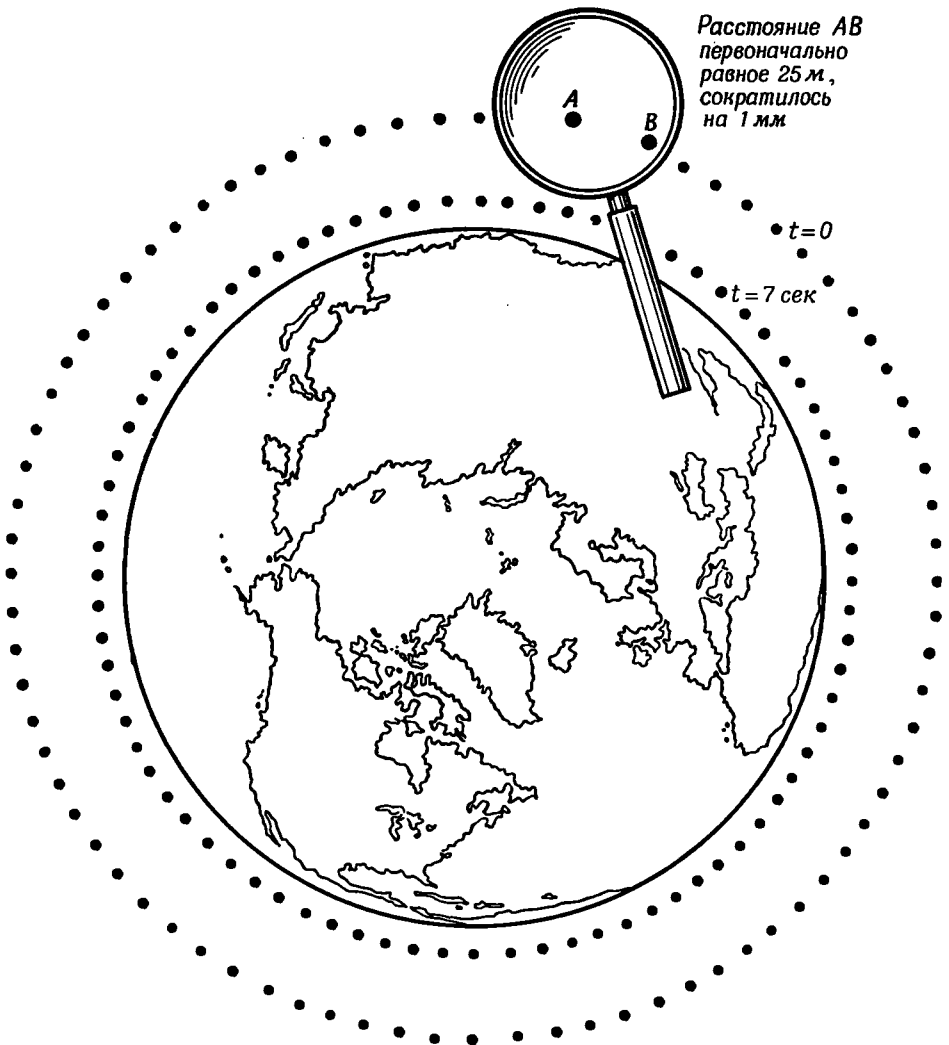
*Если Землю окружить цепочкой пробных частиц, то их ускорение в направлении Земли следует понимать как интегральный эффект относительных ускорений всех соседних частиц по направлению друг к другу*

Эйнштейн тоже улыбался. Он сказал нам, что ничего, кроме кривизны пространства-времени, не требуется для описания того изменения на один-два миллиметра расстояния между двумя грузиками, расположенными первоначально вокруг Земли с интервалом 25 м и предоставленных самим себе с нулевыми относительными скоростями. Более того, эта кривизна полностью характеризует гравитацию. «Что за нелепое утверждение! — такова бывает первая реакция. — Как могут ничтожные и медленные изменения расстояний между соседними шариками привести к пониманию тех громадных скоростей, с которыми падающие массы ударяются о Землю?» Ответ прост: глобальная структура пространства-времени складывается из множества пригнанных друг к другу локальных инерциальных систем отсчета. Можно считать, что в начале каждой из этих локальных лоренцевых систем находится по одному из массивных шариков. При одновременном сближении всех соседних грузиков («кривизна») сжимается и общая структура пространства-времени — она стягивается ближе к Земле (рис. 138). Так суммарный эффект множества локальных проявлений кривизны принимает вид гравитации, возбуждаемой в больших масштабах Землей как целым.

---

*Эйнштейн: Все качества гравитации происходят исключительно из локальных эффектов, из локальной кривизны пространства-времени*

Короче говоря, для описания движения в любой локальной инерциальной системе отсчета используется лоренцева геометрия («частная теория относительности»). Относительно такой локальной инерциальной системы отсчета любая близкая к ней электрически нейтральная пробная частица движется по прямой и с постоянной скоростью. Движение немного более удаленных частиц наблюдается происходящим с изменяющимися скоростями или направлениями их мировых линий в пространстве-времени. Такие изменения описываются как «приливные воздействия тяготения». Их понимают как проявления локальной кривизны пространства-времени. С точки зрения изучающего локальную физику, гравитация вовсе не проявляет себя в движении одной пробной частицы, но лишь в изменении взаимного удаления.

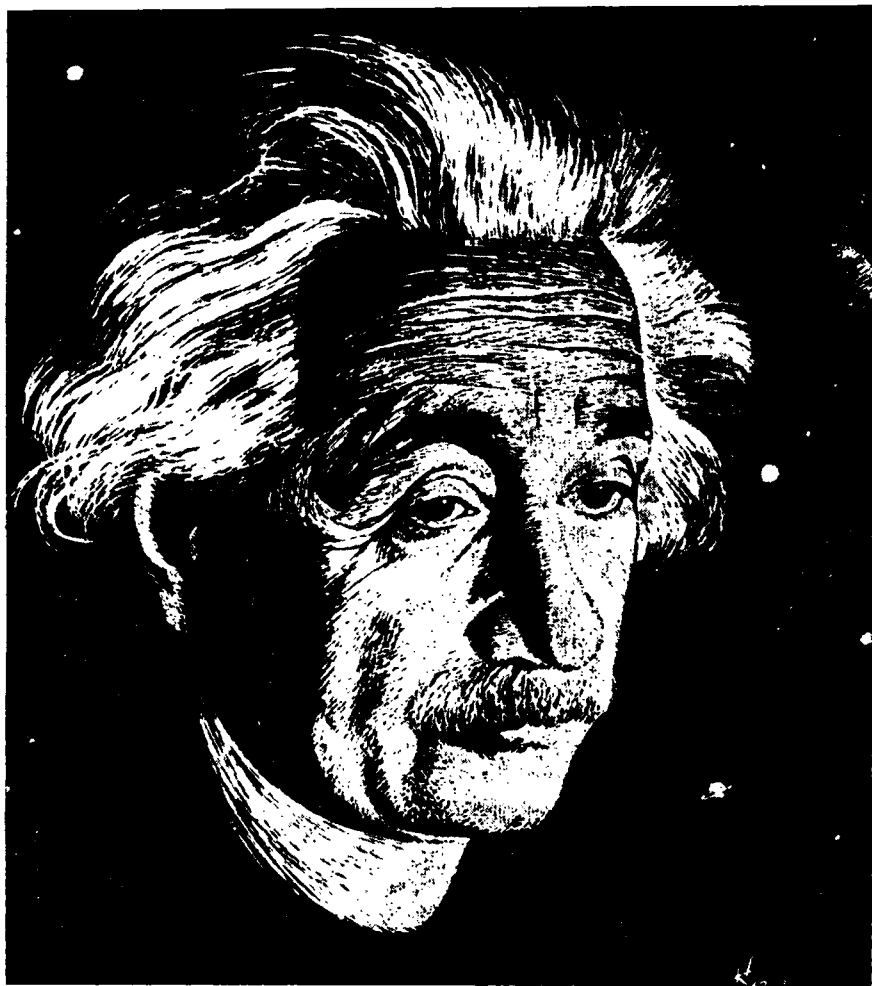


Р и с. 138. Локальные кривизны складываются и дают эффект тяготения на больших протяжениях. В инерциальной системе отсчета, связанной с грузом А, другой груз В за срок 7 сек сокращает первоначальное расстояние до А (25 м) на 1 мм (локальная кривизна пространства вблизи АВ). Аналогичное сокращение происходит во всех соседних парах грузов. В результате вся образуемая ими окружность стягивается за 7 сек в отношении  $1 \text{ мм}/25 \text{ м} = 1/25\ 000$  по сравнению с ее первоначальными размерами (относительное изменение длины). Расстояние до центра Земли уменьшается с той же быстротой, т. е.

на величину  $\frac{1}{25\ 000} \cdot 6\ 371\ 000 \text{ м} = 250 \text{ м}$ . Этот, очевидно, крупномасштабный эффект обусловлен, по толкованию Эйнштейна, сложением множества эффектов мелкого масштаба — изменений локальных размеров, связанных с кривизной пространства (невозможность для В оставаться в состоянии покоя с точки зрения инерциальной системы отсчета, связанной с А).

двух или более близких друг к другу пробных частиц. Однако эти изменения локального значения складываются в эффект глобальной структуры пространства-времени, обыденные проявления которой истолковывают как «гравитацию».

Напротив, Ньютон предполагал, что существует одна идеальная всеобщая система отсчета:



### АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН

Ульм, Германия, 14 марта 1879 г. — Принстон, США, 18 апреля 1955 г.

«Ньютон сам лучше знал слабые места своих умственных построений, чем поколения, наследовавшие ему. Это восхищало меня всегда».

\* \* \*

«Только гений Римана, одинокий и непостижимый, уже в середине прошлого века достиг нового понимания пространства, и это была конденция пространства, лишенного жесткости, способность которого участвовать в физических явлениях была признана возможной».

\* \* \*

«Все эти попытки происходили из веры в то, что сущее должно обладать вполне гармоничной структурой. Сегодня мы имеем менее, чем когда-либо, оснований позволить увести себя от этой замечательной веры»<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Эти три цитаты взяты из книги Albert Einstein, *Essays in Science*, Philosophical Library, New York, 1934.



«Абсолютное пространство в силу своей природы, безотносительно к чему-либо внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным».

«Абсолютное, истинное или математическое время само по себе и в силу своей внутренней природы течет одинаково, безотносительно к чему-либо внешнему...»<sup>1)</sup>

Ньютон считает, что массивный шарик или космический корабль действительно ускорены относительно этой идеальной системы отсчета. Производящая ускорение «сила» таинственным образом действует через пространство и возбуждается удаленными объектами. С точки зрения Ньютона, тот факт, что человек, помещенный в космический корабль, не замечает ни ускорения, ни самой силы, является просто реализующейся в природе случайностью. Эту случайность можно истолковать как «вечайное» равенство «гравитационной массы» и «инертной массы», либо как-нибудь иначе.

*Мужество и трезвость взглядов Ньютона:  
делать доступное; оставлять попытки  
более глубокого понимания будущим  
поколениям*

В беседах с одним из авторов этой книги в давно прошедшие годы Эйнштейн выражал свое глубочайшее уважение к Ньютону и, в частности, восхищение его мужеством. Он подчеркивал, что Ньютон даже лучше, чем его критики в XVII столетии, понимал трудности, связанные с идеями абсолютного пространства и абсолютного времени. Однако постулирование этих понятий было в то время единственным практически осуществимым способом продвинуться в описании движения. В результате Ньютон разделил проблему движения на две части: 1) пространство и время и их смысл — представления, вызывавшие затруднения, разъяснить которые было суждено лишь через 230 лет, и 2) законы ускорения относительно такого идеализированного пространства-времени — те законы, которые и дал Ньютон миру.

Nature and Nature's laws lay hid in night:

God said, Let Newton be! and all was light.

*Pope*

[Природа и ее Закон — весь мир во мрак одет. Да будет Ньютон! — Бог сказал, и вот повсюду свет.]

*Эйнштейновское предвидение: физический  
мир описывается чисто геометрически*

Мы находим теперь, что эйнштейновский взгляд на природу пространства и времени приводит к новому пониманию гравитации как чисто геометрического явления. Эйнштейн умер, завещая миру свое еще не подтвержденное предвидение, что не только гравитация, но и весь физический мир вообще может быть полностью описан на языке одной лишь геометрии. Может быть, стоило бы в заключительном диалоге бросить общий взгляд на физику и задать вопрос: какие ее разделы допускают простое описание на языке геометрии пространства-времени, а какие все еще далеки от подобного понимания?

<sup>1)</sup> Isaac Newton, *Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World*, Vol. 2, translated by Andrew Motte in 1729, revised and annotated by Florian Cajori, University of California Press, Berkeley, 1947, p. 6.

Таблица 15. Схема подхода к физике с точки зрения пространства-времени

Как движется свободная электрически нейтральная частица?	Такая частица следует наиболее прямой возможной линии в пространстве-времени, на языке геометрии — геодезической линии
Сколько компонент у 4-вектора энергии-импульса этой частицы?	Четыре
Являются ли все компоненты независимыми?	Нет, они связаны между собой соотношением $E^2 - (p^x)^2 - (p^y)^2 - (p^z)^2 = m^2$
Как электромагнитное силовое поле влияет на движение электрически заряженной частицы?	В любой данной точке <i>действительная</i> мировая линия такой частицы систематически отклоняется («искривляется») от той идеальной геодезической мировой линии, которая проходит через эту точку в том же направлении. На языке обыденной физики это значит, что заряженная частица <i>испытывает ускорение</i> относительно идеальной нейтральной пробной частицы
Как можно количественно измерить напряженность электромагнитного поля в данной области пространства-времени?	По кривизне мировой линии любой заряженной частицы, проходящей через эту область во времениподобном направлении относительно идеальной геодезической, проходящей через ту же точку в том же направлении. Можно во всех деталях измерить напряженность электромагнитного поля — как его направленность, так и абсолютную величину в данном месте (локально), измеряя кривизны трех мировых линий заряженных частиц, проходящих через данную область
Чему равно число независимых компонент напряженности электромагнитного поля в точке?	Шести. Для наблюдателя в данной инерциальной системе отсчета электромагнитное поле разлагается на отдельные электрическое и магнитное поля (напряженности каждого из которых имеют по три компоненты). Если в данной инерциальной системе отсчета заряженная частица мгновенно покоится, ее ускорение определяется одним лишь <i>электрическим</i> полем (измеренным в этой системе). Если же частица движется, то <i>магнитное</i> поле дает вклад в ее ускорение («магнитная сила»)
Как влияет гравитационное поле на движение одной частицы? (Речь идет о корректно определенном гравитационном поле, т. е. взятом в локальной <i>инерциальной</i> системе отсчета, в отличие от обыденного или кажущегося гравитационного поля, ощущаемого, например, на поверхности Земли, <i>не</i> являющейся инерциальной системой отсчета и <i>не</i> подверженной свободному падению)	Никак, потому что при этом отсчет ведется от мировой линии самой частицы! (Или от мировой линии идеальной пробной частицы, пробегающей по тому же пути в пространстве-времени)
Как влияет гравитационное поле на <i>относительное</i> движение <i>двух</i> пробных частиц? (Для простоты примите, что их мировые линии первоначально параллельны и разделены малым, но отличным от нуля интервалом.) Это влияние лучше описывать выражением «приливное поле», чем неопределенным выражением «гравитационное поле» — «приливное» потому, что <i>относительное</i> ускорение частиц воды на противоположных сторонах земного шара, вызываемое Луной, приводит к явлению прилива	Взаимное <i>удаление</i> двух пробных частиц систематически изменяется со временем, начиная с момента первоначальной параллельности мировых линий («девиация геодезических»)

Продолжение табл. 15

Чем оправдано большее внимание к приливной силе, влияние которой практически пренебрежимо мало (например, на спутник или на систему спутников), а не к обыденному или кажущемуся гравитационному полю, удерживающему спутники на орбитах?

Как можно количественно измерить приливное поле в данной окрестности в пространстве-времени, т. е., говоря на языке геометрии искривленного пространства Римана (1854) или общей теории относительности Эйнштейна (1916), измерить в этой окрестности «кривизну пространства-времени»?

К чему все эти разговоры о «кривизне пространства-времени»? Разве недостаточно просто регистрировать фактические данные о приливных воздействиях, воздерживаясь от этой геометрической интерпретации?

Допустим, что можно оправдать геометрическое описание тяготения. Но как тогда быть с электромагнетизмом? Ведь в конце концов это привычное нам поле имеет другой характер, чем гравитационное. Кроме того, не исчерпываются ли возможности геометрии описанием тяготения? Не следует ли теперь истолковывать электромагнетизм как нечто негеометрическое, т. е. как нечто чуждое, таинственное и «физическое», добавляемое к пространству-времени? И если одно поле (электромагнитное) описывается как негеометрическое, то почему такое внимание уделяется описанию физики тяготения на языке чистой геометрии?

На исследовании каких явлений мы концентрировали пока свое внимание?

Дело в том, что, как выяснилось, проще всего физика поддается локальному анализу, т. е. анализу относительно локальной инерциальной системы отсчета. Локально, для человека на спутнике, кажущееся гравитационное поле отсутствует. Этого человека интересует лишь расстояние до соседних спутников его системы. Это расстояние постепенно изменяется под действием приливных сил в этой окрестности (сил, вызванных здесь Землей и, в меньшей степени, Луной и Солнцем)

По девиации геодезических для двух мировых линий. Приливное поле, или кривизна, может быть всесторонне измерено как в отношении своих свойств направленности, так и по абсолютной величине в данной области путем измерения девиаций геодезических для пар мировых линий соответствующего числа пробных частиц, находящихся в этой области

Почему в обыденной жизни всегда было нужно давать геометрическое истолкование угла в  $90^\circ$  с помощью треугольника, стороны которого относятся как 3 : 4 : 5? Почему не проще собрать попросту миллионы разрозненных фактов о всевозможных измерениях? Ответ (как на эти вопросы, так и на исходные вопросы слева): дело в том, что геометрическая интерпретация более экономична и глубока при анализе фактов, а в случае гравитации мы имеем простое истолкование наблюдательных данных на языке геометрии искривленного пространства-времени. При этом уже не требуется предполагать, что мир состоит из пространства-времени и некоторой таинственной магической «физической» силы тяготения, чуждой пространству-времени и добавляемой к нему

Для многих обыденных целей удобно мыслить электромагнетизм как некое чуждое и «физическое» поле, претерпевающее свою специфическую динамическую эволюцию на фоне идеального плоского пространства-времени. Даже в обыденных исследованиях гравитационных эффектов (не очень массивные тела, испытывающие слабые ускорения) часто упрощенно представляют гравитацию как «физическое» поле, действующее через плоское фоновое пространство-время и погруженное в него. Но, поскольку речь идет о принципиальной стороне дела, следует помнить, что как электромагнитное, так и гравитационное поле (лучше говорить: приливное поле) можно понимать как проявления кривизны пространства-времени. При таком описании природы термин «приливное поле» в некоторой точке — всего лишь синоним кривизны пространства-времени в этой точке. Электромагнитное поле в некоторой точке связано с изменением кривизны в окрестностях этой точки

На действии поля на частицу (или на движение любого локализованного сгустка массы-энергии, например облака излучения)

Какой другой аспект необходимо учесть для полного охвата физики поля?

Действие *частицы* (или любого локализованного сгустка массы-энергии) на *поле*

Существуют ли альтернативные и в основном эквивалентные способы описания такого действия частицы на поле?

Да. *Описание 1*: действие частицы на поле означает изменение его структуры пространства-времени, но лишь в ее непосредственной окрестности; это воздействие распространяется от точки к точке в окружающем пространстве-времени. *Описание 2*: игнорируя детали этого процесса распространения, необходимо учитывать лишь то воздействие, которое производится на расстоянии частицей при резких последовательных изменениях ее скорости (точка зрения «действия на расстоянии», дальное действие)

Какие эффекты производит в данной системе отсчета частица, *покоящаяся* в этой системе?

Электрическое поле, пропорциональное ее заряду и обратно пропорциональное квадрату расстояния; магнитное поле отсутствует; приливное поле, пропорциональное массе и обратно пропорциональное кубу расстояния, и больше никаких других компонент приливного поля

Какие эффекты производит в данной системе отсчета частица, *равномерно движущаяся* в этой системе?

Кроме электрического, еще и магнитное поле; не только приливное поле, свойственное покоящейся частице, но и дополнительные приливные поля

Какие эффекты производит мгновенно *ускоренная* частица на расстоянии, превышающем время (в метрах), в течение которого имело место ускорение?

Электрическое и магнитное поля, пропорциональные заряду частицы и ее ускорению и обратно пропорциональные *первой* степени расстояния («электромагнитные волны»), распространяющиеся на это расстояние со стандартной скоростью (свет!). Приливные поля, по величине пропорциональные массе и ускорению частицы и обратно пропорциональные *первой* степени расстояния от нее. Распространяются на это расстояние со скоростью света («гравитационные волны»; еще не наблюдались; приемные устройства конструируются)

Знаем ли мы *внутреннюю структуру* элементарных частиц, производящих эти электромагнитные и гравитационные эффекты на расстоянии?

Адекватное описание внутренней структуры элементарных частиц (электронов, мезонов, протонов и пр.) отсутствует. Мы не знаем его, несмотря на: 1) построение ускорителей чрезвычайно высокой энергии и связанное с этим постоянное накопление громадного числа интересных количественных данных о массах и превращениях «элементарных» частиц и 2) происходящие время от времени открытия удивительных и прекрасных закономерностей, связывающих эти данные

Какой смысл может иметь обсуждение движения и взаимодействий элементарных частиц, если мы не знаем их *структуры*?

*Размеры* этих частиц очень малы по сравнению с *расстояниями* между частицами в атоме (сопоставьте их с расстоянием от радиопередатчика до радиоприемника!) Поэтому детали внутреннего строения в значительной степени несущественны, так же как детали внутреннего строения Земли в значительной степени несущественны для определения той силы, с которой она притягивает к себе Луну

Как мы, при всем нашем незнании строения элементарных частиц, подходим к ним в настоящее время?

Их рассматривают как странные и неоднородные объекты, погруженные в пространство-время

Но как же можно придерживаться идеалов чисто геометрического описания природы, если *частицы* — это чуждые объекты, *погруженные* в пространство-время, а не объекты, *слагающиеся* из пространства-времени?

Необходимо ли для объяснения мира повседневной физики привлекать в дополнение к частицам (строение которых может быть, а может и не быть геометрическим) и к электромагнитным и гравитационным полям (о которых мы знаем, как подходить к ним с геометрических позиций) еще и какие-либо другие фундаментальные понятия?

Можно ли привести простой пример проблемы, решаемой этим квантовым принципом?

Сдерживают ли «квантовые силы» атом как единое целое? Связывают ли они атомы друг с другом (химия!)? Являются ли они причиной электропроводности и упругости твердых тел?

Имеется ли другой пример, иллюстрирующий объяснение фундаментальных процессов квантовой физикой?

Лучшие из современных представлений не утверждают, что частицы *не* построены из пространства-времени. Скорее признается, что наши познания о них недостаточны даже для того, чтобы разумно обсуждать этот вопрос. На данном этапе разумно *рассматривать* частицы, как если бы они были чуждыми объектами, чтобы иметь возможность разбираться в структуре мира и подходить к частицам с практических, рабочих позиций. Такая рабочая процедура не исключает когда-то в будущем возможность описать частицы на языке геометрии, как сейчас описывают «глаз» тайфуна на языке аэродинамики, а воронку водоворота — на языке гидродинамики

Только одно понятие — квантовый принцип, центральный для всей физики

Задача о том, как свободная частица (находящаяся в существенно плоской области пространства-времени) движется из точки *A* в точку *B* по прямой линии: 1) Как эта частица «пробует» приемлемые альтернативные пути, которые она могла бы избрать. 2) Расплывание «прямой» линии, ведущей из *A* в *B*, в результате этого процесса «распробования», происходящего непрерывно. 3) Как яснее определить и измерить действительное физическое распространение этого рода по так называемому «классическому» или идеальному пути из *A* в *B*

Нет! Такой вещи, как «квантовая сила», не существует. Единственными силами, обуславливающими структуру атомов, молекул и твердых тел, являются *электрические* силы. Для того чтобы объяснить весь мир повседневной физики (за исключением тяготения), требуется лишь существование: 1) этих сил, 2) элементарных частиц и 3) квантового принципа, *управляющего движением частиц* под действием этих сил

Электрон движется по круговой орбите вокруг протона, который тяжелее его в 1836 раз, и удерживается на этой орбите электрическим притяжением со стороны протона. 1) Почему *относительная величина* распыливания орбиты мала, если эта орбита велика? 2) Почему способность частицы «распробовать» пространство вокруг орбиты делает физически невозможным существование любых орбит, кроме тех, на протяжении которых укладывается целое число длин волн («квантовое число», «квантовое условие», см. упражнение 101)? 3) Насколько велика относительная размытость или *неопределенность* положения в пространстве для орбиты с малым квантовым числом? 4) Величина специфической энергии, или «квантовый уровень», связанный с этими «квантовыми состояниями движения». 5) Величина энергии, выделяемая при «переходах» электрона с одного такого уровня на другой

Если вся физика подчиняется квантовому принципу (точная формулировка которого здесь не приводится), то какой смысл при *каких бы то ни было* обстоятельствах может иметь использование языка «классической» (неквантовой) физики для описания движения? Как можно рассматривать «положение в пространстве» и его изменение от одного «момента» к другому вдоль «мировой линии» частицы, если неизбежно существует квантовое размазывание или неопределенность того пути, которым следует частица в пространстве-времени?

Если ограничиться рассмотрением тех условий, при которых квантовые неопределенности координат практически несущественны и применимы *классические* (неквантовые) представления («предельный случай принципа соответствия»), на самом ли деле много в этих условиях физических явлений, которые мы можем объяснить?

Какие разделы физики можно сверх этого успешно проанализировать, приняв на вооружение *квантовый принцип*, но ограничиваясь электромагнитными и гравитационными силами и теми случаями, когда *расстояния* между частицами велики по сравнению с размерами этих частиц (отказ от учета идей физики элементарных частиц)?

Какая проблема из всего множества вопросов физики твердого тела нуждается в дальнейшей экспериментальной и теоретической разработке?

Чем больше орбита, тем меньше *относительная величина* размазывания («большой» названа орбита с большим «квантовым числом»). И вообще хотя предсказания квантовой физики сильно отличаются по своему *характеру* («вероятности», «квантовые состояния») от предсказаний классической физики («когда» и «где»), тем не менее они по своим практическим *следствиям* становятся все ближе и ближе к предсказаниям классической механики в предельном случае больших квантовых чисел (*принцип соответствия* Нильса Бора между классической и квантовой физикой)

Громадное количество! Механика точек и твердых тел, небесная механика и феноменологическая гравитация, динамика упругих сред, аэро- и гидродинамика с теорией звука, термодинамика, теория электричества и магнетизма, геометрическая и физическая оптика

Вся *атомная физика*: энергетические уровни всех атомов; их размеры; испускание света при переходах атомных электронов из одного состояния в другое; эффекты бомбардировки атомов светом или частицами. Все основные закономерности *химии*: столкновения между атомами; сила связи атомов в молекулах; форма и размеры молекул; основные и возбужденные состояния молекул; сопротивление молекул деформациям; механизм химических реакций; механизмы аккумуляции и переноса энергии молекулами. Все основные закономерности *физики твердого тела*: кристаллические структуры; теплота образования; упругость; тепло- и электропроводность; сверхпроводимость; коэффициент поглощения света; магнитные свойства; дислокации и прочность материалов; экситоны, фононы, плазмоны, магноны и прочие агенты, аккумулирующие и переносящие энергию на микроскопическом уровне в твердых телах. *Статистическая механика* теплового равновесия для твердых тел, жидкостей, газов и их систем; их фазы. Сверхтекучесть. Скорости протекания реакций

Атом или молекула, входящие в состав твердого тела, переведены в возбужденное энергетическое состояние путем поглощения прошедшего извне света. Каков *механизм*, с помощью которого происходит *разрядка* этой концентрации энергии, когда последняя распространяется по твердому телу в виде теплоты или колебаний решетки («фононов»)?

Продолжение табл. 15

Можно ли добиться успехов в исследовании систем, расстояние между элементарными частицами в которых *не очень велико* по сравнению с размерами частиц?

Да, в *ядерной физике*. В ядре расстояния между элементарными частицами составляют величины порядка  $10^{-13}$  см, тогда как установлено, что эффективные размеры нейтрона и протона имеют порядок  $10^{-14}$  см. Мы располагаем богатейшими данными об энергетических уровнях ядер, о размерах ядер, о несферичности атомных ядер, о радиоактивности ядер, о делении ядер и о ядерных превращениях, вызываемых их бомбардировкой. Многие стороны этих эффектов удается точно предсказывать, несмотря на тот факт, что неизвестна природа основных сил, действующих в ядре (это ни электрические, ни гравитационные, но некие «ядерные силы» короткого радиуса действия, убывающие с расстоянием много быстрее, чем обратный квадрат). Другие экспериментальные факты менее понятны или вообще не интерпретированы

Какая из множества проблем ядерной физики представляется *современнейшей* для дальнейшего экспериментального и теоретического исследования в настоящее время?

Механизм деления ядер и, в частности, механизм того, как при делении ядер урана или других тяжелых ядер иногда образуются наряду с двумя много более массивными осколками также ядра гелия или тяжелого водорода

Существует ли простой критерий, позволяющий в конкретных условиях указать, какое из взаимодействий является более важным: 1) внутренние взаимодействия, обуславливающие структуру элементарных частиц; 2) ядерное; 3) электромагнитное; 4) гравитационное взаимодействие?

Да. Критерий — количество энергии, связанное с каждым из этих взаимодействий

Каковы сравнительные значения этих четырех видов энергии для железного шара радиусом 1 м?

1) Внутренняя энергия элементарных частиц (определяемая массами покоя входящих в шар нейтронов и протонов):  $3,3 \cdot 10^4$  кг. 2) Ядерная энергия (определяемая изменением массы при объединении нейтронов и протонов и образовании  $\text{Fe}^{56}$ ):  $3,1 \cdot 10^3$  кг. 3) Электрическая энергия (определяемая энергией связи электронов в атомах железа и энергией связи атомов железа в кристаллической решетке металлического железа; вся эта энергия дается в переводе в единицы массы): около  $2 \cdot 10^{-2}$  кг. 4) Гравитационная энергия (энергия, требующаяся для удаления атомов железа на бесконечность против сил тяготения, переведенная в единицы массы): около  $5 \cdot 10^{-19}$  кг

Какой из этих четырех видов энергии возрастает быстрее всего при увеличении числа частиц?

Гравитационная энергия, ибо каждая частица гравитационно взаимодействует с любой другой частицей

Существуют ли условия, при которых соотношение между этими четырьмя видами энергии радикально изменяются?

Да, в достаточно массивной звезде (если звезда холодная, то при массе, примерно равной массе Солнца, т. е.  $2 \cdot 10^{30}$  кг; если горячая, то при большей массе, когда плотность оказывается ниже и гравитационные силы должны действовать на больших расстояниях)

Могут ли силы гравитационного притяжения в достаточно массивном или достаточно плотном (или и массивном и плотном одновременно) астрономическом объекте возобладать над силами, обуславливающими внутреннюю структуру элементарных частиц, и вызвать исчезновение этих частиц?

Мы не знаем ответа на этот вопрос, хотя он и возбуждает большой интерес и в настоящее время интенсивно исследуется как «гравитационный коллапс». Внимание было привлечено к этому гипотетическому механизму в январе 1963 г., когда был открыт так называемый «квазизвездный объект» — часть некой галактики, отстоящей от нас на расстоянии  $2 \cdot 10^6$  световых лет, — выделяющей за короткий по астрономическим масштабам промежуток времени в  $10^4$  лет или менее энергию (около  $10^{54}$  дж), эквивалентную той, которая выделилась бы при полном превращении в энергию массы около  $10^7$  солнц. Сейчас открыты и продолжают открываться многочисленные другие квазизвездные источники (это название теперь сокращенно произносится как «квазар»)

Существуют ли какие-либо другие условия, при которых можно ожидать эффектов, аналогичных гравитационному коллапсу, с исчезновением элементарных частиц, или обратных процессов, при которых давление падает и происходит расширение?

Эти условия существовали на ранних этапах расширения Вселенной и должны существовать на поздних этапах, когда Вселенная будет снова сжиматься

Что подтверждает представления о расширении Вселенной?

Разбегание галактик: галактики, находящиеся на вдвое большем расстоянии, убегают вдвое быстрее и т. д., как если бы они вылетели из общего центра с разными скоростями около  $14 \cdot 10^9$  лет назад

Какая сила доминирует в больших масштабах в динамике Вселенной?

Гравитация (кривизна пространства-времени)



## 4.

# Решения упражнений

## РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ К ГЛАВЕ 1

### 1. Пространство и время — подробный пример

Решение дано в тексте.

### 2. Практическая синхронизация часов

Установите стрелки часов в положение, соответствующее  $(6^2 + 8^2 + 0^2)^{1/2} = 10$  м светового времени. Нажмите кнопку пуска часов в момент прихода опорного сигнала.

### 3. Соотношения между событиями

Ответы на вопросы а), б) и в) согласно рис. 34. Для событий  $A$  и  $B$ : а) временноподобный интервал; б) 4 м собственного времени; в) да; для событий  $A$  и  $C$ : а) пространственноподобный интервал; б) 4 м собственного расстояния; в) нет; для событий  $C$  и  $B$ : а) светоподобный интервал; б) нуль; в) да, так как эти события можно связать одним световым лучом.

### 4. Одновременность

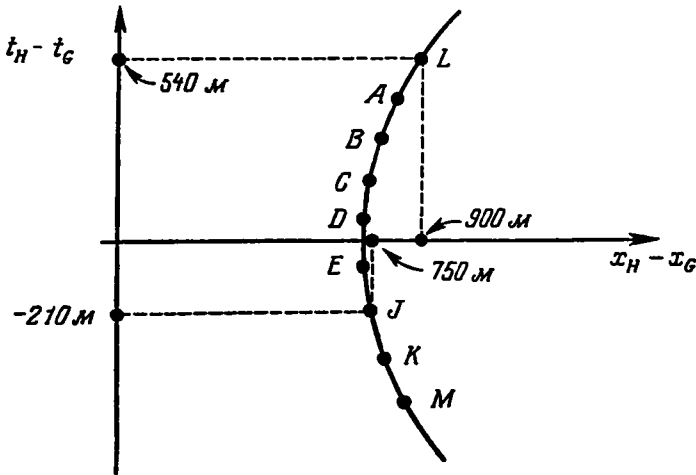
Слово «одновременность» пригодно для описания соотношения между событием « $A$  сталкивается с  $B$ » и событием « $C$  сталкивается с  $D$ » лишь в конкретной инерциальной системе отсчета. Чтобы охарактеризовать соотношение между этими двумя событиями независимо от какого бы то ни было выбора системы отсчета, следует сказать: событие « $A$  сталкивается с  $B$ » отделено от события « $C$  сталкивается с  $D$ » пространственноподобным интервалом в миллион миль.

### 5. Временной порядок событий

*Случай светоподобного интервала.* Если световой луч может непосредственно пройти от события  $G$  к событию  $H$ , то эти события связаны между собой светоподобным интервалом, — это чисто физическое утверждение, никак не связанное с выбором инерциальной системы отсчета. Но это значит, что событие  $G$  предшествует  $H$  в любой инерциальной системе, что и требовалось доказать.

*Случай временноподобного интервала.* Событие  $H$  расположено внутри светового конуса будущего с вершиной в событии  $G$  в некоторой инерциальной системе отсчета. Поэтому из  $G$  в  $H$  может попасть частица, движущаяся равномерно со скоростью, меньшей скорости света с точки зрения данной системы отсчета. Но тот факт, что частица может непосредственно перейти из  $G$  в  $H$ , никак не связан с конкретным выбором инерциальной системы. Поэтому событие  $G$  предшествует событию  $H$  в любой инерциальной системе, что и требовалось доказать.

*Случай пространственноподобного интервала.* Эта возможность исключается; интервал между двумя рассматриваемыми здесь событиями может быть лишь светоподобным или временноподобным, и не иначе. Поэтому теперь требуется доказать, что два события, разделенные пространственно-



Р и с. 139. Иллюстрация того, как выбор системы отсчета сказывается на величине разностей пространственных и временных координат двух событий  $G$  и  $H$ . Через  $L$  обозначена лабораторная система отсчета; система  $A$  «медленно» движется вправо относительно лабораторной системы отсчета; последовательность  $B, C, D, \dots$  изображает системы отсчета, движущиеся со все большими и большими скоростями вправо относительно лабораторной системы. Система  $J$  такая, в которой разности координат вновь оказываются целочисленными.

подобным интервалом, *не имеют* универсального порядка во времени, — такой порядок во времени существует *лишь* для пар событий, интервалы между которыми являются светоподобными или временноподобными. Рассмотрим для примера в лабораторной системе отсчета два события, разности координат которых равны  $x_H - x_G = 900$  м и  $t_H - t_G = 540$  м. Тогда пространственноподобный интервал между ними составляет

$$\sqrt{(900 \text{ м})^2 - (540 \text{ м})^2} = 720 \text{ м.}$$

Если рассматривать эти же события в системе отсчета, быстро движущейся вправо, то они окажутся ближе друг к другу во времени, но величина интервала останется без изменения. В какой бы системе отсчета ни проводились измерения, разности координат будут оставаться на гиперболе  $(x_H - x_G)^2 - (t_H - t_G)^2 = (720 \text{ м})^2$  (рис. 139). Когда новая система отсчета достигнет достаточно большой скорости относительно лабораторной системы (такова, например, система  $J$ ), то событие  $H$  станет наблюдаться до события  $G$ . Такая ситуация имеет место для любой пары событий, разделенных пространственноподобным интервалом, и ее можно описать с помощью гиперболы, подобной гиперболе на рис. 139. Коротче говоря, если события  $G$  и  $H$  разделены пространственноподобным интервалом, то при выборе системы наблюдателя, движущейся достаточно быстро вправо или влево относительно лабораторной системы отсчета, можно «сделать» событие  $G$  сколь угодно более ранним или сколь угодно более поздним по сравнению с событием  $H$ .

## 6. Распиряющаяся Вселенная

а) Средний чертеж на рис. 35 дает для собственного времени, прошедшего между двумя вспышками, выражение

$$\Delta\tau = \sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2} = \sqrt{(\Delta t)^2 - (\beta\Delta t)^2} = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Из правого чертежа на том же рисунке следует выражение для времени, прошедшего между приемом двух последовательных сигналов:

$$\Delta t_{\text{прием}} = \Delta t + \beta\Delta t = \Delta t (1 + \beta).$$

Исключим из первого уравнения  $\Delta t$  с помощью второго и найдем скорость удаления осколков  $\beta$ :

$$\beta = \frac{(\Delta t_{\text{прием}})^2 - (\Delta \tau)^2}{(\Delta t_{\text{прием}})^2 + (\Delta \tau)^2}.$$

Расстояние между осколком, на котором летит наблюдатель, и другим осколком бомбы, который он наблюдает, равняется времени, прошедшему с момента взрыва, умноженному на скорость удаления этих осколков друг от друга.

б) Пользуясь предыдущей формулой, определите скорость удаления звезды. Приравняйте  $\Delta t$  собственному периоду световой волны, а  $\Delta t_{\text{прием}}$  — наблюдаемому периоду для света, приходящего от удаленного источника. Если Вселенная когда-то ( $t = 0$ ) взорвалась, а ее первоначальный объем был ничтожно мал, то теперь, в более поздний момент времени  $T$ , расстояние до каждой звезды (или галактики) будет равно  $\beta T$  (для вдвое быстрее удаляющейся галактики и расстояние будет вдвое большим). Расстояние же до галактики в тот более ранний момент, когда она испустила принятый нами теперь свет, было равно  $\beta T / (1 + \beta)$ . Коэффициент красного смещения  $\Delta t_{\text{прием}} / \Delta \tau$  превосходит 3 для самых быстро удаляющихся известных нам сейчас источников (так называемых квазаров — квазизвездных объектов), однако расстояния до них неизвестны. В настоящее время мы умеем определять независимыми способами расстояния лишь для источников, удаляющихся от нас со скоростями  $\beta = 0,2$  и меньшими. Исходя из этих расстояний и наблюдаемого красного смещения, можно определить  $T$  равным от  $10^{10}$  до  $1,4 \cdot 10^{10}$  лет.

#### 7. Собственное время и связь

Ответ на первый вопрос: утверждение верно. На второй вопрос: нет, собственное время положительно. Одним из доказательств этого служит тот факт, что при отражении света вспышки между зеркалами на Луне можно добиться совпадения момента поглощения этого света с моментом прихода в эту точку частицы, испущенной с поверхности Солнца при вспышке. Собственное же время между событиями испускания и прихода к цели частицы с необходимостью больше нуля. Ответ на третий вопрос: нет, собственное время больше нуля.

#### 8. Время на сбор информации и на принятие решения

Время запаздывания равно  $R$  м светового времени, так как для связи использовались непосредственно передаваемые световые сигналы. Все другие средства связи дают большие времена запаздывания. В распоряжении наблюдателя будет 3,4 сек для принятия защитных мер, т. е. на 0,4 сек больше, чем необходимые ему 3 сек.

9. Лоренцево сокращение — подробный пример. Решение дано в тексте.

#### 10. Замедление хода часов

а) Можно, например, воспользоваться событиями, состоящими в пробивании отметок стрелкой часов на ракете в бумажных экранах, как это показано на рис. 38.

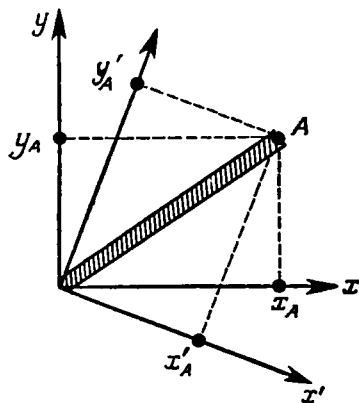
б) По определению  $\Delta x' = 0$ . Подставляя эту величину в уравнение (42), получим (44).

в) Принцип относительности не нарушается ввиду симметрии между системами отсчета. Отдельные покоящиеся в лаборатории часы отстают с точки зрения системы отсчета ракеты, если их сравнивать последовательно со встречающимися им часами, покоящимися в системе ракеты [см. часть г)]. Нелишне также вспомнить анализ части г) в предыдущем упражнении.

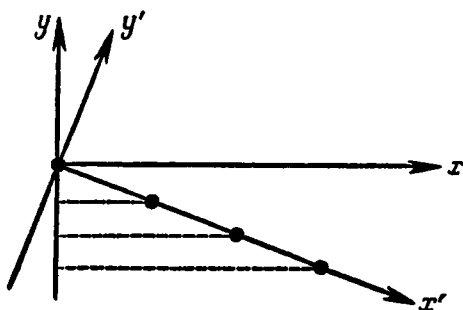
г) По определению  $\Delta x = 0$ . Подставляя эту величину в уравнение (39), получим (45).

#### 11. Относительная синхронизация часов

а), б) и в) При  $\Delta x = 0$  и  $\Delta t = 0$  формулы преобразования Лоренца дают  $\Delta t' = 0$  в системе отсчета любой ракеты. Это верно вне зависимости от того,



Р и с. 140.



Р и с. 141.

равны ли нулю  $\Delta y$  и  $\Delta z$  или не равны (вопрос б)). Если же  $\Delta t = 0$ , а  $\Delta x \neq 0$ , тогда

$$\Delta t' = -\Delta x \operatorname{sh} \theta_r \neq 0.$$

Уравнение (46) получается при использовании соответствующих условий ( $t = 0$ ) в уравнениях (37).

г) Чтобы вывести (47), подставим  $t' = 0$  в уравнения (36).

д) Если выбрать в системе ракеты положительное направление оси  $x'$  в направлении относительного движения лабораторной системы, то знак в уравнении (47) изменится на обратный, и это уравнение примет тот же вид, что уравнение (46).

е) Чтобы произвести измерения в нескольких разных местах в системе отсчета ракеты при  $t' = 0$  (т. е. одновременно в этой системе), необходимо воспользоваться несколькими часами-хронографами. Лучше было бы употребить выражение: «Пусть часы-хронографы на ракете будут расположены так, чтобы каждые из лабораторных часов были рядом с ними в начальный момент ракетного времени ( $t' = 0$ ), и пусть они сфотографируют в этот момент циферблаты лабораторных часов. Тогда на этих фотографиях не все лабораторные часы будут показывать время  $t = 0$ ».

## 12. Евклидовы аналогии

а) и б) См. рис. 140. Аналогия проявляется, когда мы сравниваем координаты  $x$  евклидовой системы и лоренцевой системы, а также координаты  $y$  евклидовой системы и  $t$  лоренцевой системы. При этом на рис. 140 расстояние  $x'_A$  меньше, чем расстояние  $x_A$ , что соответствует различию наблюдаемых длин одного и того же движущегося стержня в системах отсчета ракеты и лаборатории. Подобным же образом, замедление хода часов аналогично различию между значениями координат  $y'_A$  и  $y_A$  в двух евклидовых системах. В евклидовой геометрии инвариантом является длина стержня, получаемая из значений координат его концов в любой системе. В лоренцевой геометрии инвариант — это интервал между двумя событиями, получаемый из результатов наблюдений в любой инерциальной системе отсчета.

в) См. рис. 141. Точки, для которых  $y' = 0$ , не все имеют координату  $y = 0$ . Подобным же образом, не все события, происшедшие при  $t' = 0$ , будут иметь координату  $t = 0$ .

## 13. Лоренцево сокращение. II

Сосредоточим свое внимание на следующих двух событиях: прохождении концов метрового стержня через начало пространственных координат лабораторной системы. В системе отсчета ракеты эти события разделены расстоянием *минус* один метр (минус потому, что лаборатория в системе отсчета

ракеты движется в отрицательном направлении оси  $x'$ ) и временем, равным (1 м)/(относительная скорость):

$$\begin{aligned}\Delta x' &= -1 \text{ м}, \\ \Delta t' &= (1 \text{ м})/\beta_r.\end{aligned}$$

В лабораторной системе оба события происходят в одном и том же месте, но разделены отрезком времени  $\Delta t$ , который по условию задачи следует положить равным  $L/(\text{относительная скорость})$ , где  $L$  — «длина» метрового стержня, измеренная таким путем в лабораторной системе отсчета. Подставляя эти величины в формулы преобразования Лоренца (16), выразим  $\Delta t$  через относительную скорость:

$$\Delta t = \frac{L}{\beta_r} = \frac{\beta_r (-1 \text{ м}) + (1 \text{ м})/\beta_r}{\sqrt{1 - \beta_r^2}}.$$

Отсюда

$$L = \sqrt{1 - \beta_r^2} \text{ м},$$

что и соответствует лоренцеву сокращению, наблюдаемому в лабораторной системе [формула (38)].

#### 14. Замедление хода часов. II

Согласно условию задачи,  $\Delta x' = 0$ , а  $\Delta t' \neq 0$ . Расстояние между двумя событиями в лабораторной системе отсчета можно вычислить по формуле преобразования Лоренца

$$\Delta x = 0 + \Delta t' \operatorname{sh} \theta_r.$$

От нас требуется «измерить» время, прошедшее между этими событиями в лабораторной системе, разделив полученное выше расстояние на скорость движения обеих систем друг относительно друга:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\beta_r} = \frac{\Delta x}{\operatorname{th} \theta_r} = \Delta t' \operatorname{ch} \theta_r.$$

Это и есть формула, описывающая замедление хода часов (44).

#### 15. Формулы преобразования Лоренца со временем в секундах

Просто подставим в формулы (37)  $t = t_{\text{сек}}/c$  и  $\beta_r = v_r/c$ . Обратные преобразования [(36) или (16)] примут тогда вид

$$\begin{aligned}x &= x' \operatorname{ch} \theta_r + ct'_{\text{сек}} \operatorname{sh} \theta_r = \frac{x' + v_r t'_{\text{сек}}}{\sqrt{1 - (v_r/c)^2}}, \\ t_{\text{сек}} &= \frac{x'}{c} \operatorname{sh} \theta_r + t'_{\text{сек}} \operatorname{ch} \theta_r = \frac{t'_{\text{сек}} + \frac{v_r}{c^2} x'}{\sqrt{1 - (v_r/c)^2}}.\end{aligned}$$

#### 16. Вывод формул преобразования Лоренца

Из первого предположения следует условие  $a + b = e + f$ , из второго — условие  $b - a = e - f$ , а третье предположение дает  $\beta_r = b/f$ . В совокупности из полученных трех условий найдем  $f/a = 1$ ,  $b/a = e/a = \beta_r$ . Подставляя эти значения коэффициентов в исходные формулы для  $x$  и  $t$ , запишите условие инвариантности интервала. Отсюда следует  $a = (1 - \beta_r^2)^{-1/2}$ . Полученные формулы преобразования совпадают с (16).

#### 17. Собственная длина и собственное время

а) Направьте ось  $x'$  вдоль линии, соединяющей рассматриваемые события в лабораторной системе отсчета. *Сделайте предположение*, что существует такая система отсчета ракеты, в которой оба события происходят одновременно. Тогда преобразование Лоренца дает

$$\Delta t' = 0 = -\Delta x \operatorname{sh} \theta_r + \Delta t \operatorname{ch} \theta_r,$$

откуда

$$\frac{\text{sh } \theta_r}{\text{ch } \theta_r} = \text{th } \theta_r = \beta_r = \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1.$$

Так как отношение  $\Delta t/\Delta x$  меньше единицы, относительная скорость наших систем также меньше единицы, что подтверждает правильность предположения о существовании данной системы отсчета ракеты. Из факта инвариантности интервала следует

$$(\Delta x)^2 - (\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 - 0^2 = (\Delta \sigma)^2,$$

так что расстояние между событиями в системе отсчета ракеты равно собственному расстоянию между этими событиями.

б) Снова направьте ось  $x'$  вдоль линии, соединяющей рассматриваемые события в лабораторной системе отсчета. *Сделайте теперь предположение*, что существует такая система отсчета ракеты, в которой оба события происходят в *одном и том же месте*. Тогда

$$\Delta x' = 0 = \Delta x \text{ ch } \theta_r - \Delta t \text{ sh } \theta_r,$$

откуда

$$\text{th } \theta_r = \beta_r = \frac{\Delta x}{\Delta t} < 1,$$

что подтверждает правильность предположения о существовании данной системы отсчета ракеты. Заметьте, что отношение  $\Delta x/\Delta t$  есть просто та скорость, какой должен обладать в лабораторной системе наблюдатель на ракете, переносящийся от события к событию. Часть а) этого упражнения не содержит такой возможности. Из факта инвариантности интервала следует

$$(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta t')^2 - 0^2 = (\Delta \tau)^2,$$

так что промежуток времени между этими событиями в данной системе отсчета ракеты равен интервалу собственного времени между ними.

#### 18. Плоскость обоюдного согласия

Эту задачу можно решить двумя способами: во-первых, путем краткого рассуждения и, во-вторых, путем длинных математических преобразований (1). Рассуждения сводятся к следующему. Плоскость, на которой показания часов лаборатории и ракеты совпадают, должна быть перпендикулярна направлению относительного движения этих систем отсчета, так как видеть сразу и лабораторные, и ракетные часы синхронизованными друг с другом можно лишь в такой плоскости [см. часть б) упражнения 11]. Однако лабораторная система отсчета и система ракеты во всех отношениях взаимно равнозначны. Поэтому скорость «плоскости согласия» должна быть одинакова как с точки зрения системы отсчета ракеты, так и с точки зрения лабораторной системы (разным может быть лишь ее направление). Какая промежуточная скорость будет сохранять свое численное значение при переходе от первой системы отсчета ко второй? Во всяком случае, не  $\beta/2$ . Предмет, движущийся в лабораторной системе со скоростью  $\beta/2$ , будет обладать в системе отсчета ракеты скоростью, *не равной* —  $\beta/2$  (ведь скорости не просто складываются). Однако предмет, движущийся в лабораторной системе так, что его параметр скорости равен  $\theta_r/2$ , будет обладать в системе отсчета ракеты параметром скорости —  $\theta_r/2$  (параметры скорости аддитивны). Поэтому скорость движения «плоскости согласия» должна быть равна в лабораторной системе отсчета  $\beta = \text{th } \frac{\theta_r}{2}$ , если, конечно, такая плоскость существует.

Математические преобразования, дающие тот же результат, состоят в следующем. Положите в преобразованиях Лоренца (36)  $t = t'$ . Исключите затем из них  $x'$  и найдите, чему равно отношение  $x/t$  — скорость движения

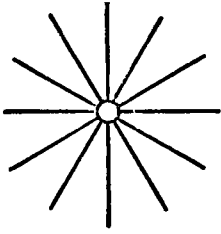


Рис. 142. Электрические силовые линии заряженной частицы в системе отсчета ракеты.

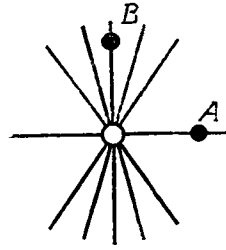


Рис. 143. Электрические силовые линии заряженной частицы в лабораторной системе отсчета.

плоскости, на которой времена одинаковы. Вы получите (см. табл. 8):

$$\frac{x}{t} = \frac{\text{ch } \theta_r - 1}{\text{sh } \theta_r} = \frac{2 \text{sh}^2 \frac{\theta_r}{2}}{2 \text{sh} \frac{\theta_r}{2} \cdot \text{ch} \frac{\theta_r}{2}} = \text{th} \frac{\theta_r}{2}.$$

### 19. Преобразование углов

Обозначим через  $\Delta x'$  проекцию метрового стержня на ось  $x'$  в системе отсчета ракеты, а через  $\Delta y'$  — аналогичную проекцию на ось  $y'$ . Значит, тангенс угла  $\varphi'$  равен  $\text{tg } \varphi' = \Delta y' / \Delta x'$ . В лабораторной системе отсчета  $y$ -проекция будет оставаться равной прежней  $y$ -проекции в системе ракеты, но  $x$ -проекция подвергнется лоренцеву сокращению, согласно выводам упражнения 9. Мы получим

$$\Delta y = \Delta y', \quad \text{где} \quad \Delta y' = (l \text{ м}) \sin \varphi',$$

и

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \beta_r^2}, \quad \text{где} \quad \Delta x' = (l \text{ м}) \cos \varphi'.$$

Отсюда легко вычислить величину тангенса искомого угла в лабораторной системе отсчета

$$\text{tg } \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{tg } \varphi'}{\sqrt{1 - \beta_r^2}}.$$

Длина метрового стержня, измеренная в лабораторной системе отсчета, равна

$$L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Подставляя сюда полученные выше значения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , найдем

$$L = \sqrt{1 - \beta_r^2 \cos^2 \varphi'} \text{ м}.$$

Мысленно заменяя электрические силовые линии метровыми стержнями, можно выяснить, как выглядит электрическое поле вблизи заряженной частицы, покоящейся в системе отсчета ракеты (на рис. 142 изображена картина, наблюдаемая в системе ракеты, а на рис. 143 — картина, наблюдаемая в лабораторной системе отсчета). Мы считаем, что электрическая сила, действующая на пробный заряд, покоящийся в лабораторной системе отсчета, пропорциональна плотности электрических силовых линий в том месте, где он находится. Следовательно, на пробные заряды, расположенные вдоль пути движения быстрой заряженной частицы (например, в точке  $A$  на рис. 143), будет действовать сила, меньшая, чем если бы частица покоилась. В свою очередь на пробные заряды, расположенные в стороне от пути движения быстрой заряженной частицы, будет действовать в момент их наибольшего сближения (например, в точке  $B$  на рис. 143) сила, превышающая ту, которая действовала бы, если бы частица — источник поля —

покоилась. На этом и на подобных ему релятивистских эффектах основывается анализ электрического и магнитного полей в превосходной книге Парселла, выпущенной в издательстве Мак-Гроу Хилл.

## 20. Преобразование скорости вдоль оси $\eta$

Из условия задачи мы знаем, что для любой пары событий на мировой линии частицы  $\Delta x' = 0$ . Тогда из формул преобразования Лоренца

$$\Delta y = \Delta y', \quad \Delta x = \Delta t' \operatorname{sh} \theta_r, \quad \Delta t = \Delta t' \operatorname{ch} \theta_r,$$

откуда можно вычислить компоненты скорости в лабораторной системе отсчета:

$$\beta^y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\Delta t' \operatorname{ch} \theta_r} = \frac{\beta^y'}{\operatorname{ch} \theta_r},$$

$$\beta^x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \operatorname{th} \theta_r.$$

## 21. Преобразование направлений скоростей

В системе отсчета ракеты разности координат даются соотношениями

$$\Delta y' = \beta' \sin \varphi' \cdot \Delta t'$$

и

$$\Delta x' = \beta' \cos \varphi' \cdot \Delta t'.$$

Найдем значения смещений  $\Delta y$  и  $\Delta x$  в лабораторной системе отсчета, пользуясь формулами преобразования Лоренца (42), откуда угол между вектором скорости частицы и направлением относительного движения в лабораторной системе отсчета оказывается равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\beta' \frac{\sin \varphi'}{\operatorname{ch} \theta_r}}{\beta' \cos \varphi' + \beta_r}.$$

Отличие полученного угла от угла, найденного в упражнении 19, вытекает из того, что теперь мы рассматривали преобразование *скорости* — величины, включающей время. В последнем уравнении угол  $\varphi$  стремится к нулю при  $\beta_r \rightarrow 1$ , тогда как, напротив, в упражнении 19 мы нашли, что угол наклона метрового стержня по отношению к направлению относительного движения систем стремится к  $90^\circ$ , когда  $\beta_r \rightarrow 1$ .

## 22. Эффект «прожектора»<sup>1)</sup>

В системе отсчета ракеты проекция на ось  $x$  пути, пройденного светом вспышки, равна  $\Delta x' = \cos \varphi' \cdot \Delta t'$ .

Чтобы найти  $\Delta x$  и  $\Delta t$  в лабораторной системе отсчета, воспользуемся формулами преобразования Лоренца (42). Скорость распространения света вспышки  $\beta$  равна единице как в системе отсчета ракеты, так и в лабораторной системе. Поэтому косинус угла между направлением луча и осью  $x$  в лабораторной системе дается выражением

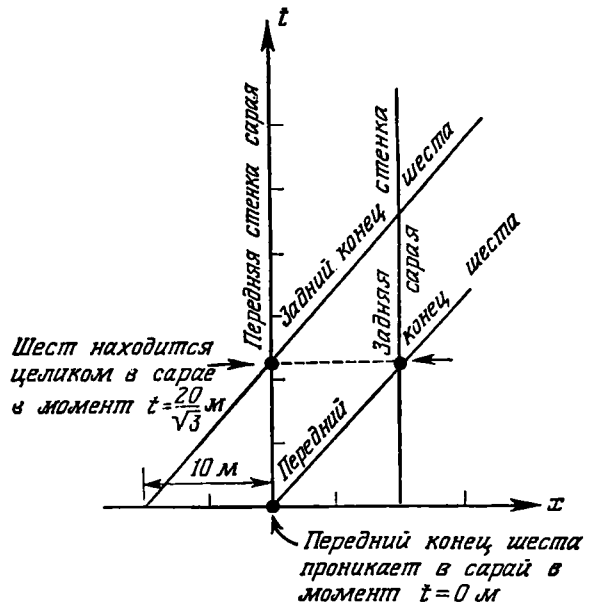
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \cos \varphi = \frac{\cos \varphi' + \beta_r}{\beta_r \cos \varphi' + 1}.$$

Это выражение совпадает с полученным в упражнении 21 в случае, когда  $\beta' = 1$ , как можно показать на основании тригонометрических тождеств. Лучи, распространяющиеся в переднее полушарие в системе отсчета ракеты,

<sup>1)</sup> Здесь речь идет о том пучке лучей, который испущен при единичной мгновенной вспышке. Если бы «прожектор» действовал непрерывно в течение всего времени, его луч, напротив, расширится бы вокруг оси, совпадающей с направлением движения (вперед или назад — несущественно), концентрируясь с точки зрения неподвижного наблюдателя в перпендикулярном движении «прожектора» направлению (например, на летящем вместе с ним экране). См. в связи с этим упражнение 19. Я благодарен П. И. Филиппову, заметившему этот эффект и обратившему на него мое внимание. — *Прим. перев.*



Р и с. 144. Пространственно-временная диаграмма в системе отсчета сарая.



обладают углами, меньшими, чем  $\varphi' = 90^\circ$ . Из только что полученного выражения следует величина максимального угла для таких лучей в лабораторной системе отсчета:  $\cos \varphi = \beta_r$  при  $\varphi' = 90^\circ$ . Весь свет, испущенный лампой в ее системе покоя в переднее полушарие, собирается в направленном вперед конусе с таким углом раствора относительно направления движения лампы, если наблюдение проводится из лабораторной системы отсчета.

### 23. Парадокс эйнштейновского поезда — подробный пример

Решение дано в тексте.

### 24. Загадка Эйнштейна

Да, он увидит себя в зеркале. В его системе отсчета, как и в любой другой инерциальной системе, свет обладает одной и той же скоростью. Свое изображение в зеркале он будет видеть точно таким же, как и при любой другой постоянной скорости движения относительно земли.

### 25. Парадокс шеста и сарая

Разрешение этого «парадокса» состоит в том, что в системе отсчета бегуна передний конец шеста покидает сарай прежде, чем задний конец шеста входит в сарай. Поэтому с точки зрения бегуна шест вообще ни в какой момент времени не находится в сарае целиком. Последовательность событий можно подробнее проиллюстрировать двумя диаграммами пространства-времени (рис. 144 и 145), численные значения длин и моментов времени на которых можно получить из следующих соображений. Так как множитель, описывающий лоренцево сокращение, по условию задачи равен 2, то (см. упражнение 9)

$$\text{ch } \theta_r = 2.$$

Поэтому из тождества

$$\text{ch}^2 \theta - \text{sh}^2 \theta = 1$$

следует, что

$$\text{sh } \theta_r = \sqrt{3}.$$

Отсюда относительная скорость двух систем отсчета равна

$$\beta_r = \text{th } \theta_r = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

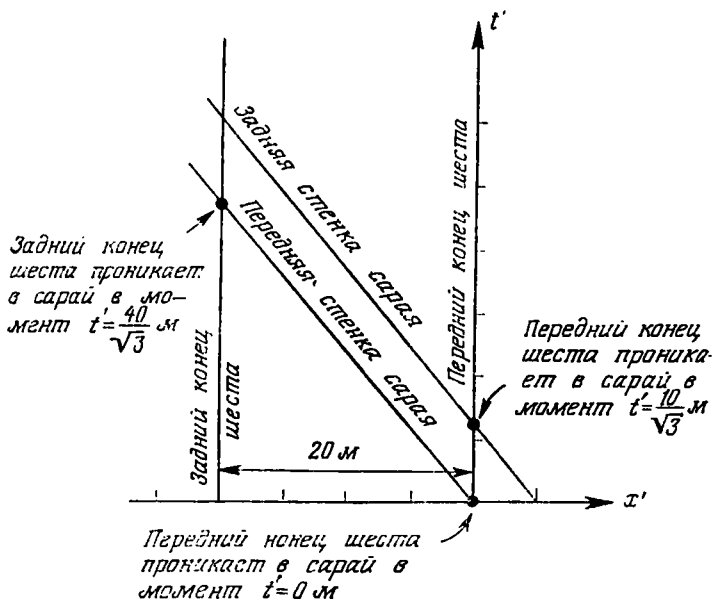


Рис. 145. Пространственно-временная диаграмма в системе отсчета бегуна.

Чтобы найти численные значения, приведенные на рис. 144 и 145, достаточно воспользоваться этими данными, а также тем, что длина шеста в системе отсчета бегуна равна 20 м, а в лабораторной системе 10 м.

## 26. Война в космосе

Камень преткновения состоял в понятии одновременности — «в тот момент, когда» (см. также упражнение 11). Точки  $a$  и  $a'$  могут поравняться друг с другом только в другом месте вдоль траектории относительного движения ракет, а не в точке, где производится выстрел из орудия. Поэтому момент, когда точки  $a$  и  $a'$  поравнялись друг с другом, может совпадать с моментом выстрела лишь в какой-то одной из двух систем отсчета. По условию задачи такая одновременность имеет место в системе  $O$ , так что рис. 42 правилен по определению. Но рис. 43 неверен: к тому времени, когда в системе  $O'$  поравняются точки  $a$  и  $a'$ , выстрел уже будет произведена Неверна и подпись под рис. 43: снаряд пролетит мимо ракеты с точки зрения обеих систем отсчета.

## 27. Парадокс часов

а) Возраст отправившегося в путешествие Петра будет при его возвращении равен (в годах): 21 (возраст на старте) + 7 (время, проведенное на удаляющейся от Павла ракете  $A$ ) + 7 (время, проведенное на приближающейся к Павлу ракете  $B$ ), т. е. всего 35 лет.

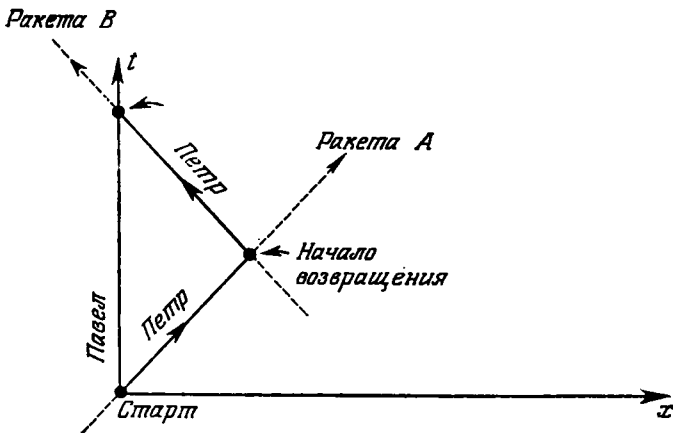
б) См. рис. 146.

в) Исходя из величины относительной скорости, равной  $24/25$ , найдем значение гиперболического косинуса от параметра скорости

$$\text{ch } \theta_r = \sqrt{1 - \beta_r^2} = \frac{25}{7}.$$

Точка, в которой Петр изменил свою скорость на обратную, имеет в системе отсчета ракеты  $A$  координату  $x' = 0$ , так как Петр все время был в начале координат этой системы; время же, соответствующее этому моменту, равно в системе отсчета ракеты  $t' = 7$  лет. Из формулы преобразования Лоренца для времени найдем, что момент изменения направления скорости в лабораторной системе отсчета соответствует

$$t = x' \text{sh } \theta_r + t' \text{ch } \theta_r = 0 + 7 \cdot \frac{25}{7} = 25 \text{ лет.}$$



Р и с. 146.

Промежуток времени между расставанием и встречей в лабораторной системе отсчета вдвое превышает это  $t$ , так что к моменту встречи Павлу исполнится  $24 + 25 + 25 = 74$  год, и он будет более чем в два раза старше, чем Петр-путешественник!

### 28. Предметы, движущиеся быстрее света

а) Когда стержень проходит в своем движении вниз расстояние  $\Delta y = \beta^v \Delta t$ , точка  $A$  продвигается вдоль оси  $x$  на расстояние  $\Delta x$ , даваемое выражением

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi.$$

т. е.

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\beta^v}{\operatorname{tg} \varphi} \Delta t$$

Поэтому скорость движения точки пересечения  $A$  равна

$$\beta_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta^v}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Для любой величины  $\beta^v$  можно подобрать такой достаточно маленький, но все же отличный от нуля угол  $\varphi$ , что  $\beta_A$  будет больше единицы, т. е. будет превышать скорость света. Но такое перемещение точки пересечения ни в коей мере не влечет за собой передачи информации вдоль оси  $x$  точно так же, как не происходит переноса информации между двумя будильниками, заранее поставленными на определенные моменты времени и зазвеневшими поэтому в разных точках пространства с таким интервалом времени между звонками, что свет не мог бы связать эти два события. В настоящем же примере нужно было предварительно в течение длительного срока ускорять длинный прямой стержень, пока он не приобрел бы своей конечной скорости, а наблюдатель в начале координат не имел никакого шанса передать только что появившуюся у него информацию другому наблюдателю, находящемуся далеко от него вдоль оси  $x$ , с помощью мчащейся точки пересечения. В части б) этого упражнения рассмотрена безуспешная попытка передать такую вновь полученную информацию со сверхсветовой скоростью.

б) В этом случае точка пересечения сможет перемещаться вправо не быстрее, чем со скоростью распространения в стержне акустических волн, т. е. со скоростью, во много раз меньшей, чем скорость света.

в) Обозначим угловую скорость вращения прожектора через  $\omega$  (в радианах в секунду). Условие того, что скорость поворота луча превышает  $c$ ,

имеет вид

$$\omega r > c \quad \text{или} \quad r > c/\omega.$$

Указанное в условии предупреждение вовсе не передается от  $A$  к  $B$ , совершенно так же, как оно не передавалось бы в случае, если будильники поставлены на очень близкие друг к другу моменты времени.

г) Да, скорость луча на экране может превышать скорость света, как и скорость вращения луча прожектора в части в) этого упражнения могла быть больше  $c$ .

### 29. Синхронизация движущимися часами — подробный пример

Решение дано в тексте.

### 30. Конструкция часов и замедление их хода

В основе всех рассуждений лежит допущение, что невозможно определить абсолютную скорость движения инерциальной системы отсчета исходя из вида физических законов, записанных в этой системе, и из входящих в них численных значений констант. Принцип работы любых реальных часов использует скорость протекания тех или иных физических процессов. Возьмем в одной инерциальной системе покоящиеся часы различных конструкций и сравним их ход; затем сделаем это для такого же набора часов, покоящихся в другой инерциальной системе. Если относительный ход часов разных конструкций будет меняться от одной инерциальной системы к другой, то это позволило бы найти абсолютное различие между разными инерциальными системами. Такое неодинаковое поведение разных физических процессов при переходах между системами отсчета противоречило бы принципу относительности, и поэтому мы должны признать, что это невозможно. Взяв в исходной инерциальной системе часы, прокалиброванные в метрах светового времени, и осторожно ускорив их так, чтобы они в конце концов стали покоиться в другой инерциальной системе отсчета, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой, мы (как следует предположить) получим в этой второй системе часы, правильно прокалиброванные в метрах светового времени.

### 31. Инерциальные системы отсчета, связанные с Землей

а) Путь по вертикали  $z$ , пройденный за время  $t_{\text{сек}}$  при свободном падении первоначально покоившейся частицей, находится из формулы

$$z = \frac{1}{2} g t_{\text{сек}}^2$$

Здесь  $g \approx 10 \text{ м/сек}^2$  — «гравитационное ускорение» (ускорение силы тяжести) вблизи поверхности Земли. В нашем случае время падения лишь немного превышает 1 метр светового времени, т. е. около  $3,3 \cdot 10^{-9} \text{ сек}$ . Отсюда

$$z \approx \frac{10}{2} \cdot (3,3 \cdot 10^{-9})^2 \approx 5 \cdot 10^{-17} \text{ м}.$$

Это на два порядка меньше размеров атомного ядра! Итак, пространственно-временная область размерами ( $1 \text{ м} \times 1 \text{ м} \times 1 \text{ м}$  в пространстве)  $\times 1 \text{ м}$  во времени является инерциальной с точностью до  $5 \cdot 10^{-17} \text{ м}$ . Пусть, например, пройденное при падении расстояние измеряется интерференционными методами при помощи видимого света. Тогда минимальное обнаружимое смещение при падении примерно равно длине световой волны — около  $5000 \text{ \AA}$  ( $5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ). Чтобы частица при своем падении пролетела такой путь, требуется

$$\sqrt{\frac{\text{Путь} \cdot 2}{g}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ сек} = 10^5 \text{ м светового времени}.$$

За такой срок частица, летящая с околосветовой скоростью, прошла бы в искровой камере приблизительно  $L = 10^5 \text{ м} = 100 \text{ км}$ !

б) За 22 м светового времени (т. е.  $73 \cdot 10^{-9}$  сек = 73 нсек) частица пройдет при падении из состояния покоя путь  $z$ , приблизительно равный

$$z = \frac{10}{2} \cdot (73 \cdot 10^{-9})^2 \approx 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ м,}$$

что примерно втрое превышает диаметр нуклона. С такой точностью является инерциальной связанная с Землей система отсчета в опыте Майкельсона — Морли.

### 32. Размеры инерциальной системы

а1) На рис. 46 являются подобными два треугольника с острым углом  $\theta$  соответственно при вершинах в точке  $B$  и в центре Земли. Меньшая сторона первого из них равна  $\varepsilon/2$ , а второго  $25/2$  м. Записывая формулу пропорциональности соответствующих сторон подобных треугольников, получим

$$\frac{\varepsilon/2}{250 \text{ м}} = \frac{(25 \text{ м})/2}{6,4 \cdot 10^6 \text{ м}},$$

откуда  $\varepsilon \approx 10^{-3}$  м, что и следовало доказать.

а2) Замените на рис. 46 пометку «25 м» на  $\Delta x$ , а  $r_e$  — на  $r$ . Пусть ускорение, действующее по направлению от точки  $B$  к центру Земли, равно  $a^*$ . Тогда проекция этого ускорения на ось  $x$ , параллельную поверхности Земли, составляет  $a^* \sin \theta$ . Относительное ускорение  $(\Delta a^x)^*$  двух частиц (первая падает из точки  $B$ , а вторая — из  $A$ ) вдвое превышает эту величину и имеет обратный ей знак:

$$(\Delta a^x)^* = -2a^* \sin \theta.$$

Из правого треугольника, острый угол  $\theta$  которого помещен в центре Земли, найдем

$$\sin \theta = \frac{\Delta x}{2r},$$

так что окончательно

$$(\Delta a^x)^* = -2a^* \frac{\Delta x}{2r} = -\frac{\Delta x}{r} a^*,$$

что и требовалось получить.

б1) Воспользуемся данным в тексте советом; тогда

$$a^*|_r = \frac{\text{const}}{r^2};$$

$$a^*|_{r+\Delta z} = \frac{\text{const}}{(r+\Delta z)^2} = \frac{\text{const}}{r^2} \left(1 + \frac{\Delta z}{r}\right)^{-2} = \frac{\text{const}}{r^2} \left[1 - 2\frac{\Delta z}{r} + 3\left(\frac{\Delta z}{r}\right)^2 - \dots\right],$$

где взята формула бинома Ньютона. Учтем, что  $\Delta z$  много меньше, чем  $r$ , и пренебрежем поэтому всеми членами разложения, за исключением первых двух. Вычитая теперь величину  $a^*$  в точке  $r$  из  $a^*$  в точке  $r + \Delta z$ , получим

$$\Delta a^* \approx -2\frac{a^*}{r} \Delta z.$$

Знак «минус» означает, что ускорение будет тем меньше, чем больше высота. Две частицы, начавшие падение из состояния покоя в точках, лежащих одна над другой (на одной вертикали), подвергаются действию относительного ускорения, и расстояние между ними будет возрастать. Такое относительное ускорение  $(\Delta a^z)^*$  положительно и по абсолютной величине равно  $\Delta a^*$ :

$$(\Delta a^z)^* \approx +2\frac{a^*}{r} \Delta z,$$

что и требовалось доказать.

б2) Расстояние, пройденное из состояния покоя под действием постоянного ускорения, пропорционально этому ускорению. Сравнивая между

собой уравнения (52) и (53), следует заключить, что ускорение одной частицы относительно другой теперь будет вдвое больше, чем в части а), и к тому же противоположного знака. Значит, вместо уменьшения расстояния на  $10^{-3}$  м [часть а)] мы должны иметь теперь *увеличение* расстояния на  $2 \cdot 10^{-3}$  м. Поэтому таблицу на стр. 99 следует пересмотреть следующим образом. В первом столбце запишите  $\epsilon \geq 2 \cdot 10^{-3}$  м; в третьем столбце  $\Delta x = 0$ ; в четвертом столбце  $\Delta y$  и  $\Delta z \leq 25$  м. Если бы мы в первом столбце ничего не изменили, то в четвертом столбце нам пришлось бы записать:  $\Delta y \leq 25$  м,  $\Delta z \leq 12.5$  м.

в) Следуя данным здесь советам, найдем

$$\begin{aligned} a^* &\sim 1/r^2, \\ (\Delta a^x)^* &\sim \Delta x/r^3, \\ \epsilon &\sim (\Delta a^x)^* (\Delta t)^2, \\ \epsilon &\sim \Delta x (\Delta t)^2/r^3. \end{aligned}$$

Если здесь оставить  $\epsilon$  прежним, то следует увеличить  $\Delta x$  в 8 раз,  $\Delta t$  в 14 раз, т. е.  $(\Delta t)^2$  в 200 раз. Поэтому числитель в последней дроби увеличится в 1600 раз, и если мы хотим во всех случаях сохранить одно и то же значение  $\epsilon$ , то нужно, чтобы  $r^3$  также возросло в 1600 раз:

$$r^3 \approx 1600r_e^3.$$

Отсюда найдем

$$r \approx 12r_e.$$

### 33. Опыт Майкельсона — Морли

а) При полете против ветра самолет движется относительно Земли со скоростью  $c - v$ . Поэтому он проходит отрезок  $AB$  за время  $t_1 = d/(c - v)$ , где  $d$  — длина отрезка  $AB$ .

При полете с попутным ветром самолет имеет относительно Земли скорость  $c + v$ , и срок обратного полета оказывается равен  $t_2 = d/(c + v)$ .

Полное время полета по замкнутому маршруту равно

$$t_1 + t_2 = \frac{2d/c}{1 - (v/c)^2}.$$

Но  $2d/c$  — время такого полета в отсутствие ветра. Значит, время, необходимое для перелета по замкнутому маршруту между  $A$  и наветренным пунктом  $B$ , превышает время для такого же перелета в условиях штиля в  $1/[1 - (v/c)^2]$  раз, что и требовалось показать.

Полет против ветра требует большей затраты времени, чем полет по ветру. Поэтому средняя скорость относительно Земли при полете по замкнутому маршруту должна быть меньше, когда дует ветер, чем при штиле. Это особенно ясно в предельном случае, когда скорость ветра  $v$  приближается к величине скорости самолета относительно воздуха  $c$ . При этом самолет может вернуться из  $B$  в  $A$  за короткий срок  $\frac{d}{c+v} \approx \frac{d}{2v}$ , но зато ему необходимо очень большое время, чтобы долететь против ветра из  $A$  в  $B$  вначале.

б) Чтобы ветер его не сносил в сторону, самолет должен развить скорость против ветра, равную относительно воздуха скорости самого ветра, т. е.  $v$ . Абсолютная же величина скорости самолета относительно воздуха равна  $c$ . Применяя теорему Пифагора к треугольнику скоростей, обнаружим, что скорость самолета поперек ветра (равная его скорости относительно Земли) составляет  $\sqrt{c^2 - v^2}$ . Чтобы покрыть с такой скоростью полный путь  $2d$  (полет по замкнутому маршруту), требуется время

$$\frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2d/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

в  $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$  раз превышающее срок полета по замкнутому маршруту  $2d/c$  при штиле.

в) Примем длину пути по замкнутому маршруту равной  $L = 2d$ . Тогда разность времен таких полетов в двух взаимно перпендикулярных направлениях получится, если вычтем из выражения, найденного в части а) этого упражнения, выражение, найденное в части б):

$$\Delta t = \frac{L/c}{1-(v/c)^2} - \frac{L/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Разлагая по формуле бинома Ньютона выражения в скобках, найдем

$$\Delta t = \frac{L}{c} \left\{ \left[ 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots \right] - \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots \right] \right\}.$$

При  $v/c \ll 1$  величина  $\Delta t$  достаточно точно выражается одним членом высшей степени по  $v/c$ :

$$\Delta t \approx \frac{L}{2c} \left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

Это и требовалось доказать. Первым вернется в А самолет, летавший поперек ветра.

г) Разрешая последнее уравнение относительно  $v$  и подставляя численные значения из условия задачи, получим  $v = 14$  км/час. Направление ветра ориентировано вдоль маршрута того самолета, который вернулся *последним*. Однако данные условия задачи не позволяют определить, в каком из двух *направлений*, параллельных этому маршруту, собственно дует ветер.

д) Подставляя в формулу, полученную в части в) этого упражнения, величины

$$\begin{aligned} L &= 22 \text{ м}, \\ v &= 30 \cdot 10^3 \text{ м/сек}, \\ c &= 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}. \end{aligned}$$

найдем

$$\Delta t = \frac{11}{3} \cdot 10^{-16} \text{ сек.}$$

е) Полагая  $\Delta t \leq 10^{-2}$   $T = 2 \cdot 10^{-17}$  сек =  $\frac{L}{c} \left(\frac{v}{c}\right)^2$  (обратите внимание на то, что множитель  $1/2$  в выражении для  $\Delta t$  в части в) сокращается) и подставляя сюда данные задачи, получим

$$v \leq 5 \cdot 10^3 \text{ м/сек} = \frac{1}{6} v_e.$$

ж) Нет, сам по себе опыт Майкельсона не служит опровержением теории распространения света в эфире. Например, могло бы случиться, что Земля увлекает эфир за собой, так что экспериментальная установка покоится относительно находящегося около поверхности Земли эфира. Для проверки этого предположения некоторые исследователи предлагали (и провели такой эксперимент!) разместить приборы на вершине горы; для этого можно было бы использовать и спутники. Для того чтобы специалисты, работающие в соответствующей области науки, отrekliсь от какой-либо тщательно разработанной теории, требуется опровергнуть ее целым рядом всесторонне поставленных опытов, и опыт Майкельсона — Морли оказался первым ударом, нанесенным теории светового эфира, от которого она уже никогда полностью не оправилась.

#### 34. Эксперимент Кеннеди — Торндайка

а) За время  $\Delta t$  (в секундах) свет проходит расстояние  $c\Delta t$  метров. В данном случае его следует приравнять разности длин двух замкнутых путей

$2\Delta l$ . так что  $\Delta t = 2\Delta l/c$ . Так как  $\Delta l = 16 \cdot 10^{-2}$  м, эта разность времен составляет  $\Delta t \approx 10^{-9}$  сек = 1 нсек.

б)  $n = \Delta t/T \approx 10^{-9}/(2 \cdot 10^{-16}) = 5 \cdot 10^5$  периодов. Величину  $n$  можно найти также из формулы

$$n = \frac{2\Delta l}{cT}.$$

в) Предположим, что число  $n$  не изменяется (не наблюдается перехода от света к темноте в поле зрения телескопа). Тогда должна быть постоянна и скорость  $c$ , так как отношение  $\Delta l/T$  не изменяется. Здесь стандартом длины (предполагается, что она не изменяется) служат размеры кварцевой плиты, на которой смонтирован интерферометр, тогда как постоянные интервалы времени задаются периодом света, излучаемого атомами.

г) Взяв приращение для выражения (54) в предположении постоянства  $\Delta l/T$ , получим

$$dc = -2 \frac{dn}{n^2} \frac{\Delta l}{T}$$

или

$$\frac{dc}{c} = -\frac{dn}{n}.$$

Подставляя сюда условия задачи и вычисленную выше величину  $n = 5 \cdot 10^5$ , получим при  $dn \leq 3/1000$

$$\left| \frac{dc}{c} \right| \leq \frac{3}{1000} \cdot \frac{1}{5 \cdot 10^5} = \frac{3}{5} \cdot 10^{-8},$$

или

$$dc \leq \frac{3}{5} \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^8 \approx 2 \text{ м/сек.}$$

в качестве того наибольшего изменения скорости света, которое еще не могло быть обнаружено в этом чрезвычайно тонком эксперименте (эта величина приведена в табл. 4 на стр. 26).

### 35. Эксперимент Дикке

а) Пусть шар из меди падает с ускорением  $g_1$ , а шар из золота — с ускорением  $g_2 = g_1 + \Delta g$ , лишь немного превышающим предыдущее. Их разность  $\Delta g$  обусловлена сопротивлением воздуха и возрастает к концу падения. Мы, однако, упростим рассуждения, предположив, что  $\Delta g$  равняется некоторой средней величине в течение всего процесса падения. Тогда пути, пройденные шарами за одно и то же время падения  $t$ , равны

$$s_2 = \frac{1}{2} (g_1 + \Delta g) t^2$$

и

$$s_1 = \frac{1}{2} g_1 t^2.$$

Их разность составляет

$$s_2 - s_1 = \Delta s = \frac{1}{2} \Delta g \cdot t^2.$$

Разделив левую и правую стороны этого равенства на соответствующие стороны уравнения движения шара из меди, найдем

$$\frac{\Delta s}{s_1} = \frac{\Delta g}{g_1}.$$

Измерения Галилея дали численные значения  $s_1 = 46$  м и  $\Delta s = 7 \cdot 10^{-2}$  м, т. е.

$$\frac{\Delta g}{g_1} = 7 \cdot 10^{-2}/46 \approx 10^{-3}.$$



Таково наибольшее значение относительного различия ускорения силы тяжести для разных объектов, не противоречащее наблюдениям Галилея. Примем теперь это отношение равным наибольшей величине, не противоречащей новейшему эксперименту Дикке:

$$\frac{\Delta g}{g} \leq 3 \cdot 10^{-11} \text{ (по Роллу, Кроткову и Дикке).}$$

Тогда при падении с той же высоты 46 м один шар опередил бы другой не более чем на отрезок

$$\Delta s = s_1 \frac{\Delta g}{g_1} = 46 \cdot 3 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ м},$$

что примерно в десять раз меньше характерных размеров атома. Если бы мы потребовали, чтобы разность  $\Delta s$  равнялась целому миллиметру, т. е.  $10^{-3}$  м, то шары пришлось бы сбросить в постоянном гравитационном поле с высоты  $s_1$ , равной

$$s_1 = \frac{\Delta s}{\Delta g/g_1} = 10^{-3}/(3 \cdot 10^{-11}) = \frac{1}{3} \cdot 10^8 \text{ м},$$

что составляет около одной десятой расстояния от Земли до Луны ( $3,8 \cdot 10^8$  м). Излишне говорить, что гравитационное поле Земли не постоянно (не однородно) на таком протяжении.

б) Условия равновесия состоят в равенстве нулю как результирующей горизонтальной компоненты силы, так и ее результирующей вертикальной компоненты. Из рис. 50 и 51 видно, что эти условия выполняются, если

$$T \sin \varepsilon = mg_s,$$

$$T \cos \varepsilon = mg.$$

Взяв отношения соответствующих сторон этих равенств, получим

$$\operatorname{tg} \varepsilon \approx \varepsilon \approx \frac{g_s}{g},$$

откуда

$$g_s \approx g\varepsilon.$$

в) Подставляя значения постоянных, данные в конце этой книги, и взяв в качестве  $M$  массу Солнца, найдем

$$g_s = \frac{GM}{R^2} = 5,94 \cdot 10^{-3} \text{ м/сек}^2.$$

г) Подставляя значения постоянных, найдем

$$\frac{v^2}{R} = 5,94 \cdot 10^{-3} \text{ м/сек}^2.$$

В ускоренной системе отсчета, связанной с Землей, это «центробежное ускорение», увлекающее предметы от Солнца, уравновешивается центростремительным ускорением силы тяжести, величина которого вычислена в части в). Полная величина ускорения, наблюдаемая в ускоренной системе отсчета Земли, равна нулю.

д) Формула (55) непосредственно следует из определения закручивающего момента и из ситуации, изображенной на рис. 52. Подставим  $g_s = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м/сек}^2$  [см. часть в) этого упражнения] и получим величину полного закручивающего момента со стороны гравитационного поля Солнца:

$$\begin{aligned} \text{Закручивающий момент} &= (0,03 \text{ кг}) \cdot (6 \cdot 10^{-3} \text{ м/сек}^2) \cdot (3 \cdot 10^{-11}) \times \\ &\times (0,03 \text{ м}) = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{сек}^2. \end{aligned}$$

Если поместить на конец метрового стержня одну бактерию (с массой около  $10^{-15}$  кг), то это даст закручивающий момент, примерно равный

$$(10^{-5} \text{ кг}) (10 \text{ м/сек}^2) (1/2 \text{ м}) \approx 5 \cdot 10^{-15} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{сек}^2,$$

что почти в тридцать раз превышает самое большое значение закручивающего момента, какое только может дать притяжение Солнца в крутильных весах Дикке!

е) Ответ очевиден из рис. 52.

ж) Приравняйте  $k\theta$  закручивающему моменту, данному уравнением (55), и вы получите искомый результат.

з)  $\theta_{\text{полн}} = 1,6 \cdot 10^{-8}$  рад.

### 36. Долой теорию относительности!

а) См., что получено в упражнении 10 относительно замедления хода часов.

б) См. упражнение 9 (Лоренцево сокращение — подробный пример).

в) Один из основных выводов частной теории относительности состоит в том, что пространственные координаты событий неодинаковы в системе отсчета ракеты и в лабораторной системе отсчета, а также что промежутки времени между событиями может быть различны с точки зрения двух инерциальных систем, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно. То, что теория отражает эти факты, существующие в природе, совсем даже не плохо. Просто так устроен наш мир! Если нам требуется привязать наблюдательные данные к конкретной системе отсчета, то теория относительности дает возможность найти значения координат в этой системе, если уже известны их значения в какой-то другой системе отсчета. Теория относительности указывает, как связаны между собой значения скоростей одних и тех же частиц с точки зрения различных взаимно перекрывающихся систем отсчета. Подводя итог, можно перечислить заслуги теории относительности:

1) Она вскрывает тот факт, что сами по себе отдельно взятые пространственные и временная координаты зависят от такого чисто случайного обстоятельства, как выбор системы отсчета.

2) Она указывает, как связать значения координат, скоростей, ускорений и сил, наблюдаемые в одной системе отсчета, с соответствующими значениями этих же величин, наблюдаемыми в другой инерциальной системе отсчета, перекрывающейся с предыдущей.

3) Мы обязаны ей языком инвариантов — «универсальным языком», на котором взаимосвязь между событиями может быть описана независимо от их пространственных и временных координат одинаково для любой системы отсчета. Дальнейшие подробности об этом см. в части е) этого упражнения.

г) Постоянство скорости света, ее одинаковая величина во всех инерциальных системах отсчета, конечно же, противоречит представлениям здравого смысла, возникшего из повседневного опыта, который связан с измерением малых скоростей. Но ведь все-таки самые тщательные эксперименты заставили нас в конце концов признать правильность этого кажущегося нелепым факта! Например, опыт Майкельсона — Морли (упражнение 33) и позднейшие постановки этого опыта показали, что скорость света *изотропна* — одинакова во всех направлениях — во всех инерциальных системах. Более того, экспериментом Кеннеди — Торндайка (упражнение 34) было доказано, что и *численное значение* этой скорости одинаково во всех системах отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга. Запроектированные теперь еще более тщательные измерения смогут проверить этот факт со значительно возросшей степенью точности (см. текст на стр. 25—27).

д) Утверждение мистера Большого Скептика заставляет нас провести разделение всех предсказаний теории относительности на те, которые полу-

чили непосредственное подтверждение, и те, которые были подтверждены косвенно или еще не были проверены. Вот список некоторых из этих предсказаний:

1) *Лоренцево сокращение масштабов* (упражнение 9). Наблюдаемую величину ионизации воздуха при распространении в нем частиц, обладающих релятивистскими скоростями, можно удовлетворительно объяснить, если учесть лоренцево сокращение для электрических силовых линий, исходящих из этих частиц (упражнение 19). Приводимое ниже объяснение принадлежит перу Е. Дж. Уильямса [первоначальный четкий анализ см., в частности, на стр. 331 в статье, опубликованной в *Proceedings of the Royal Society*, серия А, 130, 328 (1931), а более детальный разбор и дальнейшие ссылки можно найти в том же журнале, том 139, 163 (1933)]:

Если бы лоренцево сокращение не сжимало электрические силовые линии в тонкий концентрированный пучок, плоскость которого перпендикулярна направлению движения, то заряженная частица не смогла бы вырывать электроны из атомов, находящихся так далеко от ее траектории, и производимая ею ионизация была бы много слабее, чем это наблюдается в действительности. Рассмотрим атом азота, находящийся на наблюдаемом расстоянии  $1/3$  мм (около  $3 \cdot 10^{-4}$  м) от траектории движения заряженной частицы. Если бы лоренцева сокращения не происходило, то силовые линии электрического поля частицы «обметали» бы атом азота также на протяжении, грубо говоря,  $3 \cdot 10^{-4}$  м пути частицы, и это заняло бы время (при  $\beta = 1$ ) порядка  $(3 \cdot 10^{-4} \text{ м}) / (3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}) = 10^{-12}$  сек. Такой интервал времени действия электрических сил слишком велик для того, чтобы возбудить атом. В самом деле, уподобим атом маятнику. Медленно сместим точку подвеса маятника сначала в одну, а затем в противоположную сторону (такое смещение аналогично воздействию на атом электрического поля). Произведенное возмущение не возбудит колебаний маятника, так как эффективное время действия перемещающей силы на точку подвеса  $T_{\text{силы}}$  намного превышает характерное (резонансное) время колебаний  $T_{\text{колеб}}$  маятника. Для атома это характерное время равно  $10^{-16}$  сек, и если эффективное время действия электрических сил не будет сравнимым с ним, то не произойдет ни возбуждения, ни ионизации атома. Так как заряженная частица, являющаяся источником возмущающей силы, уже движется практически со скоростью света, отсутствуют резервные возможности сократить эффективное время ее действия на атом азота и сделать его меньше  $10^{-12}$  сек, что требовалось бы для объяснения наблюдаемой ионизации. Вот здесь-то и спасает дело лоренцево сокращение. Благодаря ему эффективная толщина пучка силовых линий, действующего на атом азота,

сокращается с  $3 \cdot 10^{-4}$  до  $3 \cdot 10^{-4} \sqrt{1 - \beta^2}$  м, и эффективное время действия сил становится равным не  $10^{-12}$ , а  $10^{-12} \sqrt{1 - \beta^2}$  сек. Если заряженная частица имеет скорость  $\beta = 1 - 10^{-9}$ , то  $\sqrt{1 - \beta^2} \approx (2 \cdot 10^{-9})^{1/2} \approx 5 \cdot 10^{-5}$ , и эффективное время действия сил составит всего  $\sim 0,5 \cdot 10^{-16}$  сек — величина эта достаточно мала, чтобы произошла ионизация атома азота, хотя он и удален на миллионы атомных поперечников от линии движения заряженной частицы.

2) *Замедление хода часов* (упражнение 10). Подтверждается в опытах со сверхбыстрыми элементарными частицами (упражнения 42 и 43).

3) *Относительность одновременности* (упражнение 11). Подтверждается косвенно (явление «томасовской прецессии», упражнение 103, где анализ основывается на выводах упражнения 52).

4) *Парадокс часов* (упражнение 27). Для случая часов бытовой конструкции, побывавших в космическом полете, проверка еще не произведена.

Подтверждается со значительной степенью точности в случае, когда в качестве часов используются ядра атомов железа (упражнение 89).

Самым убедительным и чувствительным методом проверки специфических предсказаний частной теории относительности оказалось использование столкновений сверхбыстрых частиц, энергетического баланса при ядерных превращениях и порождения пар элементарных частиц. Эти вопросы обсуждаются в тексте гл. 2 и в упражнениях к этой главе.

е) Что скажет вам шофер, если вы станете указывать ему в качестве данных о городах, в которые нужно заехать, их широту и долготу? Все, что ему нужно узнать, сводится к расстояниям до этих городов. Так же обстоит дело и в пространстве-времени: вполне можно обойтись без координат, указав лишь интервалы между всеми событиями. Эти интервалы никак не зависят от выбора координат, и тем не менее в них содержится вся действительно необходимая информация.

ж) Наблюдения связывают нас с физической реальностью; характеризуя их результаты, мы характеризуем и саму «реальность».

### 37. Евклидова аналогия — подробный пример

Решение дано в тексте.

### 38. Преобразование Галилея

Формулы (57) и (58) получаются из формул (37), если в них подставить выражения из строк 4 и 5 правого столбца табл. 8. В ньютоновской механике не делается различия между величинами момента времени для одного и того же события, измеренными разными движущимися относительно друг друга наблюдателями. Иначе говоря, в ньютоновской механике полагают  $t' = t$ . Здесь можно перейти к времени, измеренному в секундах, и тогда  $t'_{\text{сек}} = t_{\text{сек}}$ . Ради простоты момент совпадения начал лабораторной системы и системы отсчета ракеты полагают равным нулю ( $t = 0$ ). В лабораторной системе на оси  $x$  положение начала отсчета ракеты описывается функцией времени  $v_r t_{\text{сек}}$ . Утверждается, что координата  $x$  события в системе отсчета ракеты равна разности соответствующей координаты события и координаты точки начала отсчета ракеты, взятых в лабораторной системе. Следовательно, имеет место формула

$$x' = x - v_r t_{\text{сек}}.$$

Формулы (57) и (59) практически совпадают — разница состоит лишь в выборе единиц измерения времени. Заметим, что

$$\beta_r t = \frac{v_r}{c} t = v_r \frac{t}{c} = v_r t_{\text{сек}}.$$

Подставляя это равенство, приведем формулу (57) к виду (59). Однако формулы (58) и (60) нельзя привести к одному и тому же виду одной лишь заменой единиц измерения! Запишите формулу (58) так, чтобы в нее входили  $v_r$  и  $t_{\text{сек}}$ . Для этого достаточно разделить обе ее стороны на  $c$  и учесть, что  $t/c = t_{\text{сек}}$ :

$$t'_{\text{сек}} = -\frac{v_r}{c} \cdot \frac{x}{c} + t_{\text{сек}} = t_{\text{сек}} - x \frac{v_r}{c^2}. \quad (58')$$

Формула (58') отличается от формулы (60) в тексте членом  $xv_r/c^2$ , которым можно в большинстве случаев пренебречь, так как обычно скорость  $v_r$  намного меньше, чем скорость света  $c$ . *Пример.* Наибольшая скорость, с которой летал человек, достигается на искусственных спутниках Земли и примерно равна 30 000 км/час или 8000 м/сек. Наибольшее расстояние между космонавтом в спутнике и наблюдателем на Земле имеет место, когда наблюдатель находится на стороне Земли, противоположной положению спутника в этот момент. Тогда расстояние между ними примерно равно диаметру Земли — около  $13 \cdot 10^6$  м. Таким образом, наибольшее значение члена  $xv_r/c^2$ , достигну-

тое до сих пор с участием наблюдателей, равно

$$(13 \cdot 10^8 \text{ м}) (8 \cdot 10^3 \text{ м/сек}) / (3 \cdot 10^8 \text{ м/сек})^2 = 10^{-6} \text{ сек.}$$

Конечно, такой интервал времени доступен измерению современными средствами, но его едва ли *понадобится* измерять в ходе анализа экспериментов на спутниках хотя бы уже потому, что космонавт обычно поддерживает связь с наземным наблюдателем на обращенной к нему стороне планеты! <sup>1)</sup>

### 39. Пределы применимости преобразования Галилея

Найдем из табл. 8 приближенные выражения функций  $\text{sh } \theta$  и  $\text{ch } \theta$  с точностью до членов второго порядка:

$$\text{sh } \theta \approx \theta,$$

$$\text{ch } \theta \approx 1 + \theta^2/2$$

(в первом случае поправка второго порядка просто равна нулю!). Вид формул (37) с точностью до членов второго порядка малости можно получить, имея в виду, что даже в этом приближении  $\theta_r \approx \beta_r$ . Тогда в этом втором приближении будем иметь

$$x' = x(1 + \beta_r^2/2) - \beta_r t,$$

$$t' = -\beta_r x + t(1 + \beta_r^2/2).$$

Коэффициенты, входящие в эти уравнения, отличаются от коэффициентов в формулах (57) и (58) менее чем на 1%, если принять

$$\frac{\beta_r^2}{2} < 10^{-2}$$

или

$$\beta_r^2 < 1/50,$$

откуда приближенно получим

$$\beta_r < 1/7,$$

что и требовалось получить.

При старте с места гоночный автомобиль развивает ускорение  $a = v/t = 4 \text{ м/сек}^2$ . Если поддерживать такое ускорение постоянным, то скорости  $v = (1/7) \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}$  можно достигнуть за срок примерно в  $t = v/a = 10^7 \text{ сек}$ , т. е. около 4 месяцев. Даже с ускорением  $7g \approx 70 \text{ м/сек}^2$  для достижения этой скорости потребовалось бы около недели!

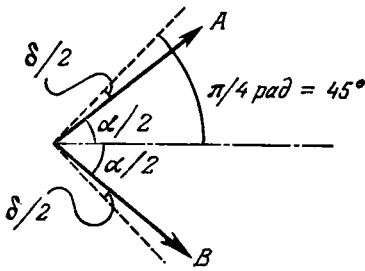
### 40. Столкновения в теории Ньютона и в теории относительности

В системе отсчета ракеты частицы после столкновения разлетаются вдоль оси  $y'$  со скоростями  $\pm \beta_r$ . В упражнении 20 было показано [формула (49)], что  $x$ - и  $y$ -компоненты скоростей этих частиц в лабораторной системе

<sup>1)</sup> После выхода в свет американских изданий книги Тейлора и Уилера и их сборника решений к упражнениям соотечественники авторов уже успели побывать на Луне. Взяв с форзаца книги величину расстояния от Земли до Луны и учтя, что первая космическая скорость на Луне составляет всего около  $1700 \text{ м/сек}$ , читатель найдет, что член  $xv_r/c^2$  в формуле (58') и в данном случае остается меньше  $10^{-5} \text{ сек}$ , когда астронавты кружат по окололунной орбите. Первую космическую скорость для Луны можно получить, приравняв друг другу центростремительную силу лунного притяжения и центробежную силу, действующую при движении по круговой орбите:

$$\frac{v^2}{R} = G \frac{M}{R^2}$$

(здесь уже произведено сокращение на величину массы космического корабля); в качестве  $R$  следует положить величину радиуса Луны,  $R = 1740 \text{ км} = 1,74 \cdot 10^6 \text{ м}$ ; масса Луны равна  $M = 7,3 \cdot 10^{22} \text{ кг}$ . Конечно, наибольшей скорости космический корабль достигает на обратном пути к Земле, при вхождении в ее атмосферу, но тогда слишком мала величина  $x$ . — Прим. перев.



Р и с. 147.

отсчета будут равны

$$\beta^x = \operatorname{th} \theta_r = \beta_r,$$

$$\beta^y = \frac{\beta^{y'}}{\operatorname{ch} \theta_r} = \pm \frac{\beta_r}{\operatorname{ch} \theta_r}.$$

Тангенс угла  $\alpha/2$ , образованного осью  $x$  и любым из этих двух векторов скорости в лабораторной системе отсчета (см. рис. 53), дается формулой

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta^y}{\beta^x} = \frac{1}{\operatorname{ch} \theta_r} = \sqrt{1 - \beta_r^2}.$$

Требуется найти величину малого угла  $\delta/2$  (рис. 147), который составляет разность между  $\pi/4$  радиан и  $\alpha/2$ , откуда получается сам угол  $\delta$  как отклонение полного угла  $\alpha$ , образованного векторами скорости в лабораторной системе отсчета, от прямого, т. е. от  $\pi/2 = 90^\circ$ . Из формулы 13 в табл. 8 найдем

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Воспользовавшись полученным выше выражением для  $\operatorname{tg} \alpha/2$  и приняв во внимание, что  $\operatorname{tg} \pi/4 = 1$ , а также что для малых  $\delta$  справедливо приближенное равенство  $\operatorname{tg} \delta/2 \approx \delta/2$ , мы придем к формуле

$$\frac{\delta}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \beta_r^2}}{1 + \sqrt{1 - \beta_r^2}} \approx \frac{1 - (1 - \beta_r^2/2)}{1 + (1 - \beta_r^2/2)} = \frac{\beta_r^2/2}{2 - \beta_r^2/2} \approx \frac{\beta_r^2}{4}; \quad \delta = \frac{\beta_r^2}{2},$$

где выражение  $\sqrt{1 - \beta_r^2}$  было подвергнуто разложению по правилу бинома Ньютона, в котором мы оставили лишь два первых слагаемых. От нас требовалось выяснить, при каких  $\beta_r$  угол  $\delta$  не превышает  $10^{-2}$  рад. Очевидно, это условие принимает вид

$$\beta_r^2 < 1/50 \quad \text{или} \quad \beta_r < 1/7.$$

Когда симметричные относительно друг друга скорости сталкивающихся и разлетающихся частиц в системе отсчета ракеты будут меньше этой величины, угол между векторами скорости разлетающихся частиц в лабораторной системе отсчета будет отличаться от прямого менее чем на  $10^{-2}$  рад. В лабораторной системе отсчета, где одна из частиц первоначально покоилась, скорость налетающей частицы поэтому должна быть меньше, чем  $2\beta_r < 2/7$ .

## 41. Примеры предельных переходов к механике Ньютона

Пример движения	$\beta$	Корректно ли в этом примере использование механики Ньютона?
См. в тексте (стр. 118)	1/37200	Да, потому что $\beta < 1/7$
	$10^{-4}$	Да
	1/137	Да
	79/137	Нет
	4/30	Да, на пределе
	$10^{-2}$	Да

42. Замедление времени для  $\mu$ -мезона — подробный пример

Решение дано в тексте.

43. Замедление времени для  $\pi^+$ -мезона

Если бы замедления времени не происходило, то из условий задачи следовало бы, что на расстоянии 5,4 м от мишени оставалась бы нераспавшейся половина мезонов. В упражнении 10 [см. формулу (44)] было выяснено, что множитель, характеризующий замедление времени, — это  $\text{sh } \theta_r$ . Следовательно, с точки зрения лабораторной системы отсчета в рассматриваемом опыте  $\pi$ -мезоны будут «жить» в течение срока, в 15 раз превышающего их «собственное время жизни» — то, которое наблюдается в системе отсчета ракеты, где они покоятся. В лаборатории те же мезоны летят с околосветовыми скоростями, и поэтому они смогут пролететь около 15 «характерных расстояний» (см. таблицу в тексте), т. е. приблизительно 80 м, прежде чем их количество в пучке вследствие распада снизится вдвое по сравнению с первоначальным.

## 44. Аберрация света звезд

Ориентируем ось  $x$  в направлении относительного движения. В покоящейся по отношению к Солнцу лабораторной системе отсчета свет, приходящий от далеких звезд  $B$  и  $D$ , будет иметь компоненты скорости  $\beta^y = \pm 1$  и  $\beta^x = 0$ . В системе отсчета ракеты (Земли) скорость распространения этого света также равна единице, но теперь  $x$ -компонента его скорости будет равна  $-\beta_r$ , т. е. относительной скорости движения двух рассматриваемых систем отсчета мимо друг друга. Синус угла  $\psi$  равняется  $x$ -компоненте скорости, разделенной на абсолютную величину скорости:

$$\sin \psi = \frac{\beta_r}{1} = \beta_r.$$

Этот вывод находится в согласии с результатами, полученными в упражнении 22.

## 45. Опыт Физо

Закон сложения скоростей (24) дает

$$\beta = (\beta' + \beta_r)(1 + \beta'\beta_r)^{-1}.$$

При малых  $\beta_r$  это выражение можно разложить по формуле бинома Ньютона, ограничиваясь лишь членами первой степени по  $\beta_r$ :

$$(1 + \beta'\beta_r)^{-1} \approx 1 - \beta'\beta_r.$$

Используя это разложение в предыдущей формуле и вновь отбрасывая в окончательном результате члены, в которых  $\beta_r$  возводится в степень выше первой, получим требуемый ответ — формулу (62).

## 46. Черенковское излучение

Формула (63) непосредственно следует из построения на рис. 62. Чтобы испускать черенковское излучение в некоторой среде, частица должна в ней

двигаться по крайней мере не медленнее, чем распространяется световой импульс в этой среде. Это видно из формулы (63): косинус угла  $\varphi$  никак не может быть больше единицы. Поэтому в люсите частица, для того чтобы давать черенковское излучение, должна двигаться по крайней мере со скоростью, равной  $2/3$  скорости света в пустоте. С другой стороны, угол  $\varphi$  в данном веществе будет максимален, когда его косинус имеет наименьшее значение, т. е. при наибольшем значении скорости частиц  $\beta$ . Ясно, что  $\beta$  не может превышать единицу, так что в люсите величина косинуса  $\varphi$ , равная  $\frac{2}{3\beta}$ , всегда больше или равна  $2/3$ . Соответствующий этому максимальный угол составляет  $0,841 \text{ рад}$ , или  $48^\circ,2$ .

#### 47. Искривление лучей света звезд Солнцем

Путь, равный диаметру Солнца, световой сигнал проходит за время, равное  $1,4 \cdot 10^8 \text{ м}$ , или  $4,7 \text{ сек}$ ; это и есть «эффективное время падения» светового луча, проходящего вплотную к поверхности Солнца. Полная скорость падения равна этому времени, умноженному на ускорение силы тяжести у поверхности Солнца ( $275 \text{ м/сек}^2$ ), так что составляет приблизительно  $1300 \text{ м/сек}$ , или  $4,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$  пути за  $1 \text{ м}$  светового времени. Угол отклонения луча, если он малый, можно приблизительно определить как отношение полученной скорости падения к полной скорости света, т. е. к единице. Итак, мы предсказали, что угол, на который отклоняется световой луч, равен  $4,3 \cdot 10^{-6} \text{ рад}$ . Общая теория относительности предсказывает вдвое больший эффект, что хорошо согласуется с данными наблюдений, приведенными в конце упражнения.

#### 48. Геометрическое истолкование

Упражнение построено так, что каждый шаг рассуждения мал, и читатель постепенно подводится к решению; поэтому едва ли было бы целесообразно давать здесь более детальный анализ. Но в последней части упражнения [часть к)] полезно отметить, что степень рассинхронизованности часов лабораторной системы отсчета и часов системы ракеты определяется величиной  $\text{sh } \theta$ , [см. формулу (46)], которая меняет свой знак при изменении знака относительной скорости (а тем самым и параметра относительной скорости). Напротив, степень замедления времени определяется величиной  $\text{ch } \theta$ , [см. формулу (44)], не меняющей знака при изменении знака скорости.

#### 49. Парадокс часов. II — подробный пример

Решение дано в тексте.

#### 50. Сокращение или поворот?

а) Свет, который приходит в наш глаз в данный момент, происходит от двух событий, по-разному удаленных от глаза. Поэтому события должны были произойти в разные моменты времени, и это — главное. В данном случае свет должен был выйти из точки  $E$  на  $1 \text{ м}$  времени раньше, чем из точки  $G$ , чтобы оба луча одновременно достигли наблюдателя. За этот срок куб, покоящийся в системе отсчета ракеты, пройдет относительно наблюдателя путь  $x$ , равный произведению  $\beta$  на  $1 \text{ м}$ .

б) Интересно, что, наблюдая в этих условиях маленькие объекты одним глазом, можно истолковать увиденное как поворот пролетающего мимо объекта. Так, например, если бы куб был повернут, как на рис. 74, можно было бы видеть часть его боковой стороны и укороченную нижнюю, т. е. получился бы тот же эффект, который в предыдущем случае теория относительности объясняла соответственно конечностью скорости распространения света и лоренцевым сокращением. Из рисунка видно, что угол  $\varphi$  такого кажущегося поворота дается выражением

$$\sin \varphi = \beta.$$

В пределе при  $\beta \rightarrow 0$  угол кажущегося поворота также стремится к нулю, и получается результат наблюдения, следующий из теории Ньютона. В пре-



деле при  $\beta \rightarrow 1$  объект представляется повернувшимся на  $90^\circ$  — вам кажется, что он летит, повернувшись к вам своей боковой стороной!

в) Ответы разным наблюдателям:

1) Наблюдателю в системе отсчета ракеты: «Когда объект покоится в данной системе отсчета, метод, с помощью которого вы его наблюдаете, не играет роли, так как разное время распространения света от разных частей объекта не приводит к искажению наблюдаемой картины».

2) Наблюдателю, использующему часовую сетку лабораторной системы: «Ваша система часов позволяет вам определять, в какое время происходят далекие друг от друга события, и корректно фиксировать их одновременность. Однако эта точная бухгалтерия все же не дает вам исключительных прав решать, что же произошло «на самом деле», и навешивать ярлык «невсамделишного» на результаты, полученные наблюдателем в системе отсчета ракеты или сильно удаленным зрителем, проводящим визуальные наблюдения».

3) Зрителю, визуально проводящему наблюдения в лабораторной системе отсчета: «Если вы понимаете, к чему приводит задержка во времени прихода сигналов от разных точек объекта, то вам должно быть ясно, что зрительное впечатление поворота объекта никак не противоречит результатам наблюдений, проведенных любым из ваших коллег».

Выражение «на самом деле» здесь не может иметь единого значения, независимого от системы отсчета наблюдателя и от его измерительной методики. Все методы измерения «правильные», но одни оказываются полезнее других, так как дают основу для интуиции и позволяют предсказать результаты того или иного конкретного опыта.

### 51. Парадокс часов. III

Из этого упражнения уже чуть было не получился «подробный пример»!

а) Если бы была правильной ньютонова механика, то, подвергаясь в течение  $10 \text{ лет}$  ускорению  $1g$ , вы приобрели бы в конце концов скорость, равную

$$v = at = gt \approx (10 \text{ м/сек}^2)(10 \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ сек}) = 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек},$$

т. е. вдесятеро превышающую скорость света! Альтернатива этому противоречащему физическим законам выводу дана в тексте упражнения.

б) Решение дано в тексте.

в) Уравнение (66) проще всего проверить, проинтегрировав его и сравнив результат с предыдущим уравнением. Проинтегрировать гиперболический косинус проще всего, представив его через экспоненты, а результат дифференцирования выразив снова через гиперболическую функцию — на этот раз синус (см. табл. 8).

г) Прделав в уравнении (66) предложенные подстановки, получим

$$x = \frac{c^2}{g} \left[ \text{ch} \left( \frac{g\tau_{\text{сек}}}{c} \right) - 1 \right].$$

Здесь следует взять в качестве  $g \approx 10 \text{ м/сек}^2$  и вспомнить, что  $10 \text{ лет}$  — это приблизительно  $3 \cdot 10^8 \text{ сек}$ . Воспользовавшись приближенными формулами из табл. 8, найдем

$$\begin{aligned} x &\approx \frac{9 \cdot 10^{16}}{10} \left[ \text{ch} \left( \frac{10 \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \right) - 1 \right] \approx 9 \cdot 10^{13} (e^{10/2}) \text{ м} \approx \\ &\approx 10^{20} \text{ м} \approx 10^4 \text{ световых лет}. \end{aligned}$$

Такое расстояние покрывается за время действия двигателя  $A$ , если же его удвоить, то мы получим расстояние до самой дальней точки пути —  $20\,000 \text{ световых лет}$ .

### 52. Наклонный стержень

Решение этого упражнения основывается на относительности одновременности (см. упражнение 11). В лабораторной системе отсчета все точки

стержня пересекают ось  $x$  одновременно при  $t = 0$ . Но картина, наблюдаемая в системе отсчета ракеты, будет другой! Когда в лабораторной системе  $t = 0$ , часы системы отсчета ракеты будут показывать на положительной части оси  $x'$  моменты времени, меньшие нуля [часть в) упражнения 11]. Это значит, что к моменту  $t' = 0$  по часам системы отсчета ракеты правый конец стержня уже пересечет ось  $x'$ . Но середина стержня проходит через начало координат ракеты в момент  $t' = 0$ , так что в системе отсчета ракеты метровый стержень будет наблюдаться несколько повернутым правым концом вверх (см. рис. 77б). Перейдем к количественному выражению эффекта. В лабораторной системе отсчета правый конец стержня пересекает ось  $x$  в момент  $t = 0$  и в точке  $x = 1/2$  м. Координаты того же события в системе отсчета ракеты следуют из формул преобразования Лоренца:

$$x' = x \operatorname{ch} \theta_r = \frac{1}{2} \operatorname{ch} \theta_r, \text{ м,}$$

$$t' = -x \operatorname{sh} \theta_r = -\frac{1}{2} \operatorname{sh} \theta_r, \text{ м.}$$

Требуется найти положение правого конца стержня не в отрицательный момент времени  $t' = -x \operatorname{sh} \theta_r$ , а в момент  $t' = 0$ , т. е. на  $x \operatorname{sh} \theta_r = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \theta_r$  м светового времени позже. Какое положение по истечении этого срока займет правый конец стержня? Значения компонент скорости конца метрового стержня можно определить по формуле, полученной в упражнении 20 [формула (49), в которой следует поменять местами штрихованную и нештрихованную скорости и изменить знак параметра скорости на обратный]:

$$\beta^{v'} = \frac{\beta^v}{\operatorname{ch} \theta_r},$$

$$\beta^{x'} = -\operatorname{th} \theta_r.$$

Тогда в момент  $t' = 0$  правый конец метрового стержня окажется в точке с координатами

$$y' = \beta^{v'} t' = \frac{\beta^v}{\operatorname{ch} \theta_r} \frac{1}{2} \operatorname{sh} \theta_r, \text{ м} = \frac{1}{2} \beta^v \operatorname{th} \theta_r, \text{ м}$$

и

$$x' = \frac{1}{2} \operatorname{ch} \theta_r - \operatorname{th} \theta_r \frac{\operatorname{sh} \theta_r}{2} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{ch} \theta_r - \frac{\operatorname{sh}^2 \theta_r}{\operatorname{ch} \theta_r} \right) = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \theta_r}.$$

В тот же момент ( $t' = 0$ ) середина метрового стержня совмещается с началом координат системы отсчета ракеты. Поэтому угол  $\varphi$ , образованный стержнем и осью  $x'$  системы отсчета ракеты, определяется выражением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y'}{x'} = \beta^v \operatorname{sh} \theta_r.$$

### 53. Парадокс метрового стержня

Соударения не произойдет. Конечно, в системе отсчета ракеты стержень не подвергается лоренцеву сокращению, но ведь там движущаяся вверх пластинка наклонена — ее правый край приподнят. В сущности можно рассматривать рис. 77 как изображение *отверстия* в пластинке! Правый край этого отверстия вплотную проскальзывает перед самым «носом» горизонтального метрового стержня, а левый край отверстия — сразу вслед за «хвостом» метрового стержня. Так метровый стержень при всей своей стандартной длине точь-в-точь «помещается» в подвергнувшемся сокращению отверстию, повернутом под углом.

### 54. Тонкий человек на решетке

Вот ключ к решению этого упражнения. На свете не существует таких вещей, как «жесткий» метровый стержень или «жесткий» мост. Пусть длинный

мост имеет опоры только на своих концах. Быстро уберем из-под него правую опору, и правый конец моста сразу же начнет падать. Но середина моста еще не начнет! Ведь она не «знает» еще об исчезновении правой опоры. Стоящий посередине моста человек ощущает под своими ногами его металл таким же устойчивым, как прежде. Падение начнется здесь с определенным опозданием, и время задержки определяется сроком, за который упругое колебание проходит через металл от правого конца моста до места, где стоит человек. Аналогично обстоит дело и с метровым стержнем. Конечно, его жесткость можно повысить, делая его из улучшенных материалов, — при этом увеличится скорость распространения в нем упругих колебаний, так что сократится время задержки, после которого середина стержня начнет падать. Но возможности улучшения материала стержня не беспредельны: скорость распространения упругих волн никогда не может превысить скорости света. Время задержки не может стать меньше времени распространения света.

Вера в существование абсолютно жестких предметов — вредное заблуждение, и отказ от него позволяет разобраться, например, в такой, казалось бы, парадоксальной ситуации. Пусть метровый стержень сначала покоится, лежа на узкой полке в ракете, а затем полка резко откидывается вниз и стержень начинает падать с ускорением силы тяжести. В системе ракеты стержень падает «синхронно» на всем своем протяжении, но в лабораторной системе это будет не так: там ракета мчится вправо — параллельно ориентации полки — с огромной скоростью. Поэтому в лабораторной системе отсчета сначала начинает падать правый конец метрового стержня, когда левый его конец все еще продолжает лежать на полке. В этой системе наблюдается, что стержень искривлен (и он искривлен там *на самом деле*), что, конечно, не противоречит релятивистски сформулированному понятию «жесткости»! Итак, стержень может быть прямым в одной системе отсчета и искривленным — в другой.

Нам ясна теперь сущность этого кажущегося парадокса, и мы знаем, что метровый стержень упадет в отверстие. В лабораторной системе отсчета этот вывод напрашивался сам собой: метровый стержень там был укорочен до длины, много меньшей метра, и ему ничего не стоило провалиться в отверстие. В системе отсчета ракеты, напротив, отверстие сократилось до размеров, намного меньших метра, тогда как метровый стержень приобрел свою полную длину. При этом, однако, мы должны были признать, что метровый стержень не был — и не мог быть в принципе — абсолютно жестким, его правый конец выгнулся вниз, этот конец погрузился в отверстие, а за ним туда нырнул и весь стержень.

## РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ К ГЛ. 2

### 55. Быстрые электроны

а) Энергия, приобретаемая на 1 м пути, равна

$$(40 \cdot 10^3 \text{ Мэв}) / (3 \cdot 10^8 \text{ м}) \approx 13 \text{ Мэв/м.}$$

Если бы выполнялись законы механики Ньютона, то энергия электрона, движущегося со скоростью света, была бы равна

$$\frac{1}{2} mc^2 = \frac{1}{2} (0,511 \text{ Мэв}) \approx 1/4 \text{ Мэв (по Ньютону),}$$

и эта энергия была бы достигнута на дистанции

$$(1/4 \text{ Мэв}) / (13 \text{ Мэв/м}) = 1/52 \text{ м} \approx 2 \text{ см!}$$

б) Согласно формуле (107), полученной во введении к этим упражнениям,

$$1 - \beta \approx \frac{m^2}{2E^2}, \quad \text{если } \beta \approx 1.$$

Здесь величины  $m$  и  $E$  выражены в одних и тех же единицах. Так как нас интересует их *отношение*, то выбор единиц (если они одинаковы для обеих величин!) не играет роли. Тогда, используя единицы  $Mэв$ , получим

$$1 - \beta \approx \frac{(1/2 Mэв)^2}{2 \cdot (4 \cdot 10^4 Mэв)^2} \approx \frac{1}{128} \cdot 10^{-8} < 10^{-10}.$$

Скорость этих электронов отличается от скорости света менее чем на десяти-миллиардную часть последней. При состязании на скорость полета между такими электронами и световой вспышкой на дистанции  $1000 \text{ км} = 10^9 \text{ мм}$  свет опередит электроны всего лишь на

$$(1 - \beta) 10^9 \text{ мм} < 10^{-10} \cdot 10^9 \text{ мм} = 0,1 \text{ мм}.$$

в) Множитель, характеризующий лоренцево сокращение, равен при этом

$$\frac{1}{\text{ch } \theta} = \frac{m}{E} = (0,5 Mэв) / (40 \cdot 10^3 Mэв) = 1,2 \cdot 10^{-5},$$

так что сократившаяся длина «3000-метровой» трубы при измерении в системе отсчета ракеты составляет всего

$$(3 \cdot 10^3 \text{ м}) \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4 \text{ см}.$$

### 56. Космические лучи

а) Коэффициент, характеризующий замедление времени, определяется формулой (44) из упражнения 10, так что

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\text{ch } \theta_r} = \Delta t \frac{m}{E} = \Delta t \cdot \frac{10^9 \text{ эв}}{10^{20} \text{ эв}},$$

так что для интервала времени, равного

$$\Delta t \approx (10^5 \text{ лет}) (3 \cdot 10^7 \text{ сек/год}),$$

найдем

$$\Delta t' = 10^5 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 10^{-11} \text{ сек} = 30 \text{ сек}.$$

Пока за свои 30 сек космический путешественник успеет пересечь Галактику, на Земле проходит сто тысячелетий!

б) Коэффициент, характеризующий лоренцево сокращение Галактики, определяется по формуле (38) из упражнения 9 и равен

$$\frac{10^5 \text{ св. лет}}{10^{-15} \text{ м}} = \frac{(10^5 \text{ лет}) (3 \cdot 10^7 \text{ сек/год}) (3 \cdot 10^8 \text{ м/сек})}{10^{-15} \text{ м}} = \frac{9 \cdot 10^{20} \text{ м}}{10^{-15} \text{ м}} \approx 10^{36} = \text{ch } \theta_r = \frac{E}{m}.$$

Чтобы протон приобрел необходимую скорость, ему необходимо придать энергию, равную в единицах массы

$$T = E - m = 10^{36} m - m \approx 10^{36} m \approx 10^{36} \cdot 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 10^9 \text{ кг},$$

иначе говоря, потребуется превратить в энергию около одного миллиона тонн массы, чтобы разогнать этот протон!

### 57. Границы ньютоновской механики

а) Ответ также указан в конце книги!

б) Согласно формуле без номера, находящейся на стр. 155 между формулами (81) и (82), из разложения бипома Ньютона следует разложение по степеням  $\beta$  и для релятивистской энергии:

$$E = m + m \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{8} m \beta^4 + \dots,$$

откуда

$$T = E - m = m \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{8} m \beta^4 + \dots$$

Здесь первый член справа — обычное ньютоновское выражение для кинетической энергии. Сравнивая с ним следующий член, найдем, что поправка

порядка  $10^{-2}$  к ньютоновской механике, рассматриваемая в этом упражнении, будет иметь место при

$$\frac{\left[ m\beta^2/2 + \frac{3}{8} m\beta^4 \right] - m\beta^2/2}{m\beta^2/2} = 10^{-2},$$

т. е. когда

$$\beta^2 = \frac{4}{3} \cdot 10^{-2}.$$

Это и есть граница ньютоновской механики; сравните ее с другими «границами», найденными в упражнениях 39 и 40 гл. 1. При такой скорости отношение кинетической энергии к энергии покоя равно

$$\frac{m\beta^2}{2} / m = \frac{\beta^2}{2} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-2}.$$

В случае протона его кинетическая энергия, соответствующая границе применимости ньютоновской механики, равна

$$T_p = \frac{2}{3} \cdot 10^{-2} m_p \approx \frac{2}{3} \cdot 10^{-2} \text{ Эв} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-2} \cdot 10^9 \text{ эв} = \frac{2}{3} \cdot 10^7 \text{ эв} \approx 7 \text{ Мэв.}$$

В случае же электрона соответствующая кинетическая энергия равна

$$T_e = \frac{2}{3} \cdot 10^{-2} m_e \approx \frac{2}{3} \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^6 \text{ эв} \approx 3 \text{ кэв.}$$

## 58. Релятивистская ракета

а) Законы сохранения импульса и энергии выражаются как

$$\begin{aligned} -m \operatorname{sh} \theta_{\text{выбр}} + M_2 \operatorname{sh} (d\theta) &= 0, \\ m \operatorname{ch} \theta_{\text{выбр}} + M_2 \operatorname{ch} (d\theta) &= M_1. \end{aligned}$$

Перенесите вторые слагаемые из левых частей обеих формул вправо, разделите соответствующие части получившихся формул друг на друга и учтите соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh} \theta_{\text{выбр}}}{\operatorname{ch} \theta_{\text{выбр}}} &= \operatorname{th} \theta_{\text{выбр}} = \beta_{\text{выбр}}, \\ \operatorname{sh} (d\theta) &\approx d\theta, \quad \operatorname{ch} (d\theta) \approx 1. \end{aligned}$$

Вы получите требуемые соотношения.

б) Когда параметр скорости мал,  $\beta = \theta$ , так что

$$v = \beta c \approx \beta_{\text{выбр}} c \ln \frac{M_1}{M} = v_{\text{выбр}} \ln \frac{M_1}{M},$$

что и требовалось показать.

в) Из закона сохранения энергии легко заключить, что  $m + M_2 \neq M_1$ , так как для того, чтобы получить  $M_1$ , нужно сложить  $m$  и  $M_2$ , предварительно умноженные на коэффициенты, много большие единицы. Рассматриваемый здесь процесс — это «обращенное неупругое столкновение»: в неупругих столкновениях кинетическая энергия переходит в массу покоя, тогда как здесь, наоборот, масса покоя превращается в кинетическую энергию ракеты и продуктов сгорания топлива.

г) Даже при наибольших допустимых отношениях масс ( $M_1/M \rightarrow \infty$ ) и при самых высоких скоростях выброса ( $\beta_{\text{выбр}} \rightarrow 1$ ) скорость ракеты будет лишь приближаться к скорости света, но не сможет ее превысить:

$$\beta = \operatorname{th} \theta \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \theta = \beta_{\text{выбр}} \ln \frac{M_1}{M} \rightarrow \infty.$$

д) Вернемся к выражению закона сохранения энергии, данному в ответе к части а). При очень большой скорости выброса величина  $\operatorname{ch} \theta_{\text{выбр}}$  стремится к бесконечности, и чтобы закон сохранения не нарушался при конеч-

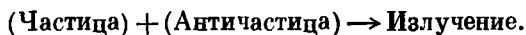
ных значениях  $M_2$  и  $M_1$ , величина массы выбрасываемых продуктов сгорания  $m$  должна становиться очень малой. Предельный случай достигается для света, когда масса покоя ракетного горючего полностью превращается в энергию излучения.

е) Ракета, работающая на световых вспышках, не очень практична. Предположим (для грубой оценки), что лампа вместе с батареей обладает массой  $1/2$  кг и излучает пучок света мощностью  $5$  вт; за полчаса (около  $2000$  сек) излученная энергия составит тогда  $10^4$  вт·сек, или  $10^4$  дж. Чтобы найти количество массы, перешедшей при этом в энергию, следует разделить  $10^4$  дж на  $c^2$ . Получается приблизительно  $10^{-13}$  кг — неудивительно, что наша лампа с батареей становится заметно легче после работы!

Отношение масс для такой «ракеты» составляет  $\frac{1}{2}$  кг /  $(\frac{1}{2}$  кг —  $10^{-13}$  кг), или приблизительно  $1 + 2 \cdot 10^{-13}$ . Чтобы вычислить скорость, приобретенную при этом первоначально покоившейся лампой [формула (110)], нужно найти натуральный логарифм числа  $1 + 2 \cdot 10^{-13}$ ; логарифм единицы равен нулю, и вблизи этого значения натуральный логарифм возрастает так же, как и его аргумент. Иными словами,  $\ln(1 + \delta) \approx \delta$  при  $\delta \ll 1$ . Отсюда и из формулы (110) следует, что скорость, приобретенная лампой, равна

$$\beta \approx \theta = \ln(1 + 2 \cdot 10^{-13}) \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ или } v = c\beta = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м/сек.}$$

Быстро бы прогорела та пиротехническая компания, которая выпускала бы ракеты весом по полкило, «летающие» с такой скоростью! Причина того, что лампа способна развить лишь такую ничтожную скорость, выясняется при обсуждении, предложенном в тексте упражнения. Дело в том, что «шлак», остающийся при реакции — использованные батареи, — ускоряется здесь вместе с ракетой. Напротив, химическая ракета практичнее, так как выбрасывает свой шлак через сопло. Существует ряд «бесшлаковых» реакций для элементарных частиц, и в случае исходных частиц с отличными от нуля массами покоя потенциально важны реакции типа



В качестве пары частица — античастица здесь могут фигурировать, например, электрон и позитрон или протон и антипротон. Еще практичнее взять электрически нейтральные вещество и антивещество (атомы антиводорода, антижелеза и пр.) и хранить их в отдельных местах. Однако по развитию техники мы еще очень далеки от возможности производить такие количества антивещества, которые требовались бы для ускорения ракет путем превращения в излучение частиц и античастиц при их аннигиляции в двигателе ракеты или непосредственно за ее кормой. В упражнении 104 рассмотрены трудности, с которыми столкнутся проектировщики межзвездных полетов, когда удастся преодолеть эту техническую трудность.

ж) Когда коэффициент, характеризующий замедление времени, равен 10, это значит, что  $\text{sh } \theta = 10$ . Из «способов быстрой оценки для простых смертных» в табл. 8 можно заключить, что при  $\theta \gg 1$  имеет место  $\text{sh } \theta \approx e^{\theta/2}$ . Если  $\theta = 3$ , то  $e^{\theta} \approx 20$ , а  $\text{sh } \theta \approx 10$ , что и требовалось. Если принцип ускорения ракеты основан на полном превращении массы в излучение (без шлака!), то из формулы (110) следует

$$M_1/M = (\text{Масса при старте})/(\text{Масса после достижения требуемой скорости}) = e^{\theta} \approx 20 = \text{Удвоенный коэффициент замедления времени.}$$

В случае химической ракеты достижение этой же скорости (или такой же величины коэффициента замедления времени) обходится намного дороже. Скорость выброса берется равной

$$\beta_{\text{выбр}} = (4 \cdot 10^8)/(3 \cdot 10^8) = 1,33 \cdot 10^{-5},$$

и для нее из формулы (108) следует

$$\ln \frac{\text{Масса при старте}}{\text{Масса после набора скорости}} = \frac{\theta}{\beta_{\text{выбр}}} = 3/(1,33 \cdot 10^{-5}) = 2,25 \cdot 10^5.$$

Для того чтобы после разгона ракета еще имела массу 1  $m$ , необходима в этом случае начальная масса

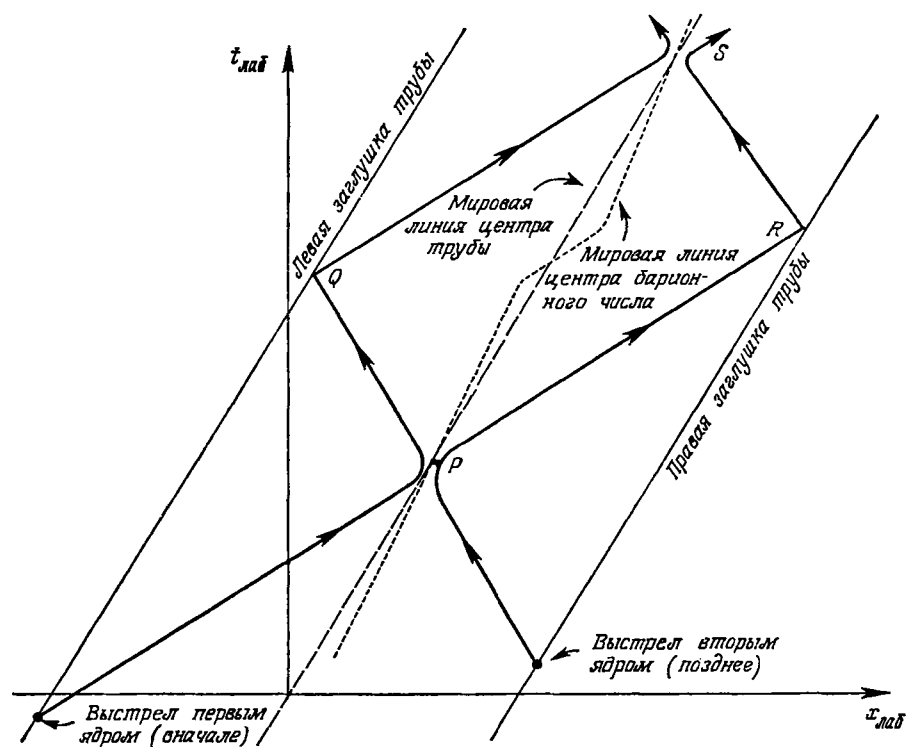
$$M_1 = (1 m) e^{225\,000} = 10^{97\,600} m.$$

Хорошенькая ракета, если вспомнить, что масса наблюдаемой Вселенной оценивается по порядку величины в  $10^{50} m$ !

### 59. Парадокс центра масс

а) В системе отсчета ракеты пушечные ядра все время движутся симметрично по отношению к центру трубы, так что центр масс этой системы ядер совпадает с центром трубы и остается неподвижным. Пока что никакого парадокса еще нет.

б) В лабораторной системе отсчета выстрелы, посредством которых ядра вводятся в трубу, производятся *неодновременно* (см. рис. 148, а также упражнение 11). Первое ядро вводится в левый конец трубы еще до того, как второе ядро вводится в ее правый конец, находящийся впереди по ходу движения трубы в лабораторной системе. В этой системе отсчета скорости ядер различны, так что различны их энергии и импульсы. Как определять теперь положение «центра масс»: считать массы ядер одинаковыми или учитывать такое различие? Ясно, что в приложении к составным системам, отдельные части которых движутся с релятивистскими скоростями, возникает значительная неоднозначность в определении понятия «центр масс». Поэтому вместо того, чтобы характеризовать здесь систему отсчета ракеты как «систему центра масс», было бы лучше назвать ее «системой нулевого



Р и с. 148.

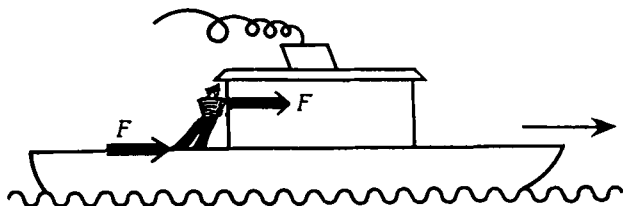
импульса» — это было бы более общее утверждение. Если, несмотря на различие их энергий (иногда говорят: «масс движения», см. конец табл. 13), мы придавали бы обсем сталкивающимся массам одинаковое значение, то тем самым ввели бы фактически такое понятие «центра масс», которое во избежание недоразумений было бы лучше называть «центром барионного числа». Иначе говоря, в этом случае значение тела оценивалось бы не по количеству содержащейся в нем энергии, а по числу входящих в него частиц (протонов и нейтронов, являющихся двумя разновидностями барионов, из которых построено обычное вещество). Мировая линия центра барионного числа наших двух ядер изображена на рис. 148 пунктирной линией. Ее можно определить, взяв в соответствующие моменты времени положения обоих ядер и найдя для каждого момента точку, лежащую точно посередине. Найденная линия испытывает колебания, и не удастся усмотреть связи между ее видом и законами, управляющими движением ядер. Поэтому понятие центра барионного числа едва ли может быть плодотворным.

В противоположность пунктирной линии штриховая изображает мировую линию центра гравитационного притяжения, оказываемого системой двух ядер на любую далекую массу (до того момента, когда одно из ядер соударяется с заглушкой в конце трубы). Такое представление о локализации центра гравитационного притяжения подкрепляется двумя соображениями. Во-первых, рассмотрим в системе отсчета ракеты положение центра масс ядер; там он все время совпадает с центром трубы в начале координат системы отсчета ракеты. Переходя к лабораторной системе отсчета, получим как раз нашу штриховую линию (скорость  $v_{\text{ракеты}} = \text{th } \theta_{\text{ракеты}}$ ). Во-вторых, найдем скорость переноса энергии (массы) вправо как сумму переносов, осуществляемых каждым ядром по отдельности. Выясним, с какой скоростью должны были бы двигаться эти ядра, если бы они были объединены, чтобы обеспечить такую же скорость переноса энергии (массы) вправо. Мы придем тогда вновь к только что полученной величине  $v_{\text{ракеты}}$  как скорости движения центра гравитационного притяжения (т. е. придем к штриховой прямой мировой линии, изображающей движение центра трубы; детали вычисления см. в конце этого анализа).

Все было бы очень просто и сводилось бы к приведенным рассуждениям, если бы не было самой трубы, а ядра после своего столкновения в мировой точке  $P$  (где они фактически меняются ролями) навсегда разлетелись бы в противоположные стороны. Тогда, конечно, соответствующий ядрам центр гравитационного притяжения навсегда стал бы двигаться по штриховой линии. Но в тот момент, когда первое ядро ударяется в мировой точке  $Q$  с левой заглушкой трубы, оно изменяет направление своего движения на обратное, и оба ядра с этого момента летят вправо. Значит, на некоторый срок скорость переноса энергии (массы) должна возрасти по сравнению с тем, что было получено ранее. Этот срок кончается в момент, соответствующий событию  $R$ , когда скорость переноса возвращается к своему прежнему значению, так что после  $R$  вновь можно утверждать, что энергия (масса) объединенной системы ядро 1 + ядро 2 движется вправо со скоростью системы отсчета ракеты  $v_{\text{ракеты}}$  (штриховая линия, проходящая через мировую точку  $S$  предстоящего столкновения ядер).

Итак, парадокс состоит в том, что в промежуток времени от  $t_Q$  до  $t_R$  должен был бы происходить ускоренный перенос энергии (массы) вправо и следовало бы ожидать, что за это время эффективный центр притяжения системы ядер будет ускоренно сдвигаться вправо, а когда он снова приобретет свою исходную скорость, следовало бы ожидать, что его мировая линия станет проходить несколько правее прежней штриховой линии. Однако такого сдвига не зафиксировано. Как же совместить ускоренный перенос энергии (массы) вправо с тем фактом, что центр притяжения продолжает двигаться по прежней прямой мировой линии?





Р и с. 149.

Чтобы найти ответ, рассмотрим такой пример. Пусть некий бездельник подпирает заднюю стенку надстройки на пароме. Тогда он совершает работу, «двигая» стенку, мощностью  $Fv$ , если давит своим плечом на нее с силой  $F$  и движется со скоростью  $v$ . Но в этом нет его заслуги, так как палуба, расходуя такую же мощность, совершает работу *над ним*. Иначе говоря, мощность  $Fv$  втекает в него через ноги и такая же мощность вытекает из его плеча. Мощность — скорость переноса энергии, и на релятивистском языке ее нужно понимать как скорость переноса энергии и *массы*. Хотя наш бездельник (вопреки своим принципам) невольно совершает перенос энергии (массы), его центр тяжести движется несколько не быстрее, чем если бы он стоял по стойке «смирно». Аналогичное происходит и с системой двух ядер: не ограничиваясь переносом вправо энергии (массы) с такой скоростью, что их центр притяжения движется по штриховой линии, ядра испытывают через определенные промежутки времени толчки со стороны левой заглушки трубы и переносят эти импульсы правой заглушке (это аналогично постоянному переносу энергии через нашего бездельника, только теперь сила действует прерывисто). Дополнительный перенос энергии (массы), происходящий при этом, вообще не приводит к дополнительному смещению центра притяжения <sup>1)</sup>.

в) Центр гравитационного притяжения системы труба + ядра движется вправо с постоянной скоростью  $\beta_{\text{ракеты}}$  в лабораторной системе отсчета.

#### Дополнительные данные к части б)

Обозначим значения скорости и параметра скорости ядер в системе отсчета ракеты через  $\pm\beta'$  и  $\pm\theta'$ . Тогда параметры скорости в лабораторной системе отсчета будут равны  $\theta_r + \theta'$  и  $\theta_r - \theta'$ . Скорость переноса энергии (массы) дается выражением

$$\begin{aligned} \text{Импульс} &= \frac{m\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \frac{m\beta_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} = m \operatorname{sh} \theta_1 + m \operatorname{sh} \theta_2 = \\ &= m (\operatorname{sh} \theta_r \operatorname{ch} \theta' + \operatorname{ch} \theta_r \operatorname{sh} \theta') + m (\operatorname{sh} \theta_r \operatorname{ch} \theta' - \operatorname{ch} \theta_r \operatorname{sh} \theta') = \\ &= 2m \operatorname{ch} \theta' \operatorname{sh} \theta_r. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> При соударении с заглушкой в конце трубы каждое ядро обменивается с ней импульсом и приводит ее, таким образом, в движение. Даже в системе отсчета ракеты, где соударения в противоположных концах трубы происходят одновременно, импульсы, переданные трубе, не сразу взаимно уничтожаются ввиду конечной скорости распространения акустической волны: хотя суммарный переданный импульс равен нулю, труба должна сначала некоторое время (симметрично) колебаться, и эти колебания, конечно, переносят энергию. В лабораторной системе отсчета такая симметрия нарушается в силу относительности одновременности, и для полного анализа переноса энергии (массы) здесь следовало бы учесть поток, распространяющийся по самой трубе. Полезно обратить внимание на то, что «неподвижно закрепленная» труба соответствует бесконечно большой массе по крайней мере заглушек, в противном случае ядра не сохраняли бы абсолютной величины своих импульсов. Но в таком случае можно пренебречь энергией, переносимой акустическими волнами, если рассматривать центр гравитационного притяжения всей системы в целом (правда, при этом было бы логично пренебречь и массами самих ядер!). Читатель видит отсюда, что ситуация, имеющая место между моментами  $t_Q$  и  $t_R$ , описана авторами неполно; ему было бы полезно обдумать вопрос о том, как изменится задача в случае разных масс заглушек и разной степени жесткости трубы (в обеих системах отсчета). Разумеется, анализ следует проводить качественно. — *Прим. перев.*

Полная величина энергии (массы) в системе отсчета ракеты равна

$$\frac{m}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \frac{m}{\sqrt{1-\beta_2^2}} = 2m \operatorname{ch} \theta'.$$

Разделив ее на скорость переноса энергии (массы), найдем  $\operatorname{sh} \theta_r$ . Итак, параметр скорости системы ядро 1 + ядро 2 совпадает с параметром скорости ракеты  $\theta_r$  относительно лабораторной системы отсчета, что и требовалось доказать.

**60. Второй вывод релятивистского выражения для импульса**

а) В системе отсчета ракеты шар  $A$  движется параллельно направлению оси  $y$  как до, так и после столкновения (см. рис. 83). Поэтому разности координат в системе ракеты между событиями столкновения шаров и ударом шара  $A$  о верхнюю стенку равны

$$\Delta x' = 0, \quad \Delta y' = \Delta y \quad \text{и} \quad \Delta t'.$$

Из формул (42) следует промежуток времени в лабораторной системе

$$\Delta t = \Delta x' \operatorname{sh} \theta_r + \Delta t' \operatorname{ch} \theta_r = \Delta t' \operatorname{ch} \theta_r.$$

Это выражение позволяет определить  $y$ -компоненту скорости шара  $A$  в лабораторной системе отсчета через скорость этого шара в системе отсчета ракеты  $\beta = \Delta y' / \Delta t'$ :

$$(\beta_A^y)_{\text{лаб}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\Delta t' \operatorname{ch} \theta_r} = \frac{\beta}{\operatorname{ch} \theta_r}.$$

б) Сравнивая рис. 83 и 84, видим, что скорость шара  $A$  в системе отсчета ракеты равна скорости шара  $B$  в лабораторной системе отсчета. Вертикальная компонента скорости шара  $A$  в лабораторной системе была найдена в части а) этого упражнения. Горизонтальная же компонента скорости шара  $A$  в лабораторной системе — это просто скорость движения этой системы относительно системы отсчета ракеты,  $\beta_r = \operatorname{th} \theta_r$ . Подставляя значения компонент скорости и импульса, данные на рис. 101, в закон пропорциональности, выведенный на основании этого же рисунка (см. текст данного упражнения), получим соотношение

$$\frac{p^x}{2m\beta} = \frac{\operatorname{th} \theta_r}{2\beta / \operatorname{ch} \theta_r}$$

(равенство этих отношений означает, что векторы импульса и скорости имеют одинаковое направление). Отсюда и следует формула

$$p^x = m \operatorname{sh} \theta_r.$$

**61. Второй вывод релятивистского выражения для энергии**

а) На основании двух частей рис. 102 можно непосредственно записать закон сохранения импульса в ньютоновском пределе. Из верхней киноленты, снятой в лаборатории, следует закон сохранения в лабораторной системе отсчета. Когда же на основании нижней киноленты рис. 102, снятой из ракеты, записывается закон сохранения импульса в этой системе, то стоящая в обеих частях уравнения скорость относительного движения систем  $\beta_r$  уничтожается, и остается в точности уравнение, уже полученное в лабораторной системе отсчета. Итак, в системе отсчета ракеты импульс автоматически сохраняется, если он сохранялся в лабораторной системе; но это верно лишь для столкновений с малыми скоростями.

б) Переходя к релятивистскому анализу, заметим, что в системе отсчета ракеты (нижняя кинолента на рис. 103) закон сохранения импульса принимает вид

$$m_1 \operatorname{sh} (\theta_1 - \theta_r) + m_2 \operatorname{sh} (\theta_2 - \theta_r) = m_1 \operatorname{sh} (\bar{\theta}_1 - \theta_r) + m_2 \operatorname{sh} (\bar{\theta}_2 - \theta_r).$$

Воспользовавшись формулой (11) из правого столбца табл. 8, преобразуем здесь каждое из четырех слагаемых так, чтобы получилось соотношение вида (112). У нас появятся две скобки: первая

$$(m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 - m_1 \operatorname{sh} \bar{\theta}_1 - m_2 \operatorname{sh} \bar{\theta}_2)$$

и вторая

$$(m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2 - m_1 \operatorname{ch} \bar{\theta}_1 - m_2 \operatorname{ch} \bar{\theta}_2).$$

Каждая из них должна самостоятельно обращаться в нуль, что следует из условия задачи. Значит, должны выполняться уравнения (111) и (113). Короче говоря, чтобы импульс сохранялся в системе отсчета ракеты, недостаточно его сохранения в лабораторной системе отсчета, как это было в предельном случае малых скоростей (в ньютоновской механике), но необходимо еще, чтобы в лабораторной системе сохранялась и энергия, что выражается уравнением (113).

в) Ход приведенных рассуждений в основном останется без изменения, если массы покоя разлетающихся частиц отличаются от масс частиц до соударения. При этом закон сохранения импульса в лабораторной системе отсчета принимает вид

$$m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 = \bar{m}_1 \operatorname{sh} \bar{\theta}_1 + \bar{m}_2 \operatorname{sh} \bar{\theta}_2,$$

а закон сохранения энергии (тоже в лабораторной системе) —

$$m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2 = \bar{m}_1 \operatorname{ch} \bar{\theta}_1 + \bar{m}_2 \operatorname{ch} \bar{\theta}_2.$$

Импульс будет сохраняться и в системе отсчета ракеты, только если выполняются оба эти закона сохранения одновременно.

Что же касается сохранения *кинетической* энергии, то заметим, что, вычитая в случае *упругого* столкновения из соответствующих сторон уравнения (113) тождество  $m_1 + m_2 \equiv \bar{m}_1 + \bar{m}_2$ , получим

$$\begin{aligned} (m_1 \operatorname{ch} \theta_1 - m_1) + (m_2 \operatorname{ch} \theta_2 - m_2) &= (m_1 \operatorname{ch} \bar{\theta}_1 - m_1) + (m_2 \operatorname{ch} \bar{\theta}_2 - m_2), \\ T_1 + T_2 &= \bar{T}_1 + \bar{T}_2. \end{aligned}$$

Это и есть выражение того факта, что при упругих столкновениях кинетическая энергия сохраняется. В случае неупругих столкновений, когда  $m_1 \neq \bar{m}_1$  и  $m_2 \neq \bar{m}_2$ , сохранения кинетической энергии *нет* и подобного уравнения записать нельзя. Особый интерес представляют неупругие столкновения без излучения, но с переходом части кинетической энергии в массу покоя:  $\bar{m}_1 + \bar{m}_2 > m_1 + m_2$ .

## 62. Задачи на пересчет

а) 100 *вт* — это 100 *дж/сек*, а так как в году около 30 миллионов секунд, то 100-ваттная лампочка излучает в год энергию, равную  $3 \cdot 10^9$  *дж*. Это соответствует массе покоя, равной  $(3 \cdot 10^9 \text{ дж})/c^2 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-7}$  *кг*.

б)  $10^{12}$  *квт \cdot ч* =  $10^{15}$  *вт \cdot ч* =  $10^{15} \cdot 3600$  *вт \cdot сек* =  $3,6 \cdot 10^{18}$  *дж*. Это соответствует массе покоя  $(3,6 \cdot 10^{18} \text{ дж})/c^2 = 40$  *кг*. В действительности же в энергию при этом превращается более 40 *кг* массы, так как производство электроэнергии неизбежно сопровождается тепловыми потерями (часть массы «уходит» в тепло): так, теряется часть теплоты при использовании химической энергии (при сжигании угля), теряется теплота, возникающая в результате трения из механической энергии (в генераторах гидроэлектростанций). Конечно, оценка зависит от того, в каких масштабах рассматривать, например, струи газов, извергаемые трубами тепловой электростанции, работающей на угле. На микроскопическом уровне можно провести деление на массу покоя отдельных молекул и на кинетическую энергию их теплового движения. Напротив, в крупных масштабах получится, что эти горячие газы имеют

массу покоя, превышающую сумму масс покоя отдельных составляющих их молекул (см. замечания по поводу «ящика с нагретым газом» на стр. 176). Конечно, та же участь ожидает и большую часть благополучно генерированной «полезной» электроэнергии, ведь ее поглотят и превратят в теплоту стены освещенной с ее помощью комнаты и т. д. и т. п. Так часть массы покоя угля превращается в электроэнергию, а потом — снова в массу покоя там, где эта энергия потребляется. И за целый год не найти ни одного момента, когда хоть сколько-нибудь заметная часть этих 40 кг энергии существовала в форме электроэнергии.

в) Студент производит энергию со скоростью (мощностью) в 2 лошадиные силы (л. с.):  $1/2$  л. с. полезной мощности +  $3 \cdot 1/2$  л. с. превращается в теплоту (2 л. с.  $\approx 1500$  вт). Срок, необходимый для того, чтобы превратить 1 кг массы в энергию, можно найти по формуле

$$1500 \text{ вт} \cdot t_{\text{сек}} = 1 \text{ кг} \cdot c^2,$$

откуда получается  $t_{\text{сек}} = 6 \cdot 10^{14}$  сек — больше десяти миллионов лет! Конечно, чтобы похудеть на 1 кг, никому не потребуется так долго крутить педали — химические процессы «горения» в организме чрезвычайно расточительны (коэффициент перевода массы в энергию невероятно мал), и удаление продуктов сгорания приводит к намного более быстрой потере массы, чем если бы она превращалась в энергию.

г) Полное количество световой энергии, испускаемой за одну секунду Солнцем, можно подсчитать, умножив величину энергии излучения, проходящую за 1 сек через  $1 \text{ м}^2$  поверхности, перпендикулярной падающим лучам вблизи Земли (т. е. солнечную постоянную), на площадь в квадратных метрах воображаемой сферы радиуса, равного радиусу орбиты Земли, с центром в Солнце. Этот радиус равен приблизительно  $r = 150$  млн. км =  $= 1,5 \cdot 10^{11}$  м, площадь же соответствующей сферы составляет

$$4\pi r^2 \approx 3 \cdot 10^{23} \text{ м}^2.$$

Количество энергии в джоулях, уходящей сквозь эту воображаемую поверхность каждую секунду, равно

$$(1,4 \text{ дж/сек} \cdot \text{м}^2) (3 \cdot 10^{23} \text{ м}^2) \approx 4 \cdot 10^{23} \text{ дж/сек},$$

что соответствует скорости потери массы Солнцем

$$(4 \cdot 10^{23} \text{ дж/сек})/c^2 \approx 4 \cdot 10^6 \text{ кг/сек} —$$

приблизительно 4000 т в 1 сек. Такова та часть массы Солнца, которая ежесекундно теряется им вследствие превращения вещества в свет. Количество массы такого же порядка излучается Солнцем в форме нейтрино. Еще большую роль в потерях массы Солнцем играет «солнечный ветер» — непосредственное выбрасывание вещества в пространство. Земля преграждает путь этим потокам на площади, приблизительно равной

$$\pi r_{\text{Земля}}^2 \approx 3 \cdot (6 \cdot 10^6 \text{ м})^2 \approx 10^{14} \text{ м}^2,$$

так что на нее падает в секунду около  $1,4 \cdot 10^{14}$  дж энергии в форме солнечного света. В год это составляет примерно  $4 \cdot 10^{21}$  дж — почти 50 000 кг энергии (массы). Часть падающего на нее света, конечно, отражается Землей, а еще некоторая часть снова излучается ею в космос в других диапазонах частот.

д) Скорость каждого поезда, выраженная в метрах пути на метр светового времени, равна

$$\beta = \frac{v}{c} = (45 \text{ м/сек})/(3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}) = 1,5 \cdot 10^{-7}.$$

При этом полная кинетическая энергия очень близка к той, которую дает теория Ньютона:

$$T_{\text{полн}} \approx 2 \frac{m\beta^2}{2} \approx (10^6 \text{ кг}) (2 \cdot 10^{-14}) = 2 \cdot 10^{-8} \text{ кг} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ г} = 20 \text{ мкг}.$$

Такова кинетическая энергия двух поездов до столкновения; она и переходит в ту добавочную массу покоя, на которую увеличивается масса поездов, рельсы и насыпи сразу же после столкновения.

### 63. Релятивистская химия

$10^8$  дж энергии соответствуют  $(10^8 \text{ дж})/c^2 \approx 10^{-9}$  кг. Это составляет примерно  $10^{-10}$  от тех 9 кг воды, которые получаются при полном соединении водорода и кислорода, а самые чувствительные химические весы неспособны зарегистрировать изменение веса, менее чем в 1000 раз превышающее эту величину.

### 64. Релятивистский осциллятор

а) Нет, инженер не сможет получить здесь сколь угодно высокой частоты. Так как скорость электрона не может быть больше скорости света, период одного колебания не удастся неограниченно уменьшать (в системе отсчета ящика).

б) Когда напряжение возрастает вдвое, кинетическая энергия электрона в соответствующих точках его траектории также удваивается. Однако ньютоновское выражение для кинетической энергии, справедливое при малых скоростях, имеет вид  $\frac{1}{2} m\beta^2$ , и поэтому скорость  $\beta$  увеличивается в  $2^{1/2} = 1,414\dots$  раз при удвоении величины напряжения. Во столько же раз, следовательно, увеличится при этом и частота.

в) Вывод, полученный в части б), наводит на мысль, что частота колебаний электрона увеличивается пропорционально корню квадратному из величины приложенного напряжения. Чтобы найти коэффициент пропорциональности, заметим, что электрон подвергается постоянному ускорению в каждой половине ящика, причем на него действует сила, равная  $\frac{qV_0}{L/2}$ . Здесь  $q$  — заряд электрона, а  $L$  — ширина ящика (равная в нашем случае 1 м). Тогда ускорение равно  $a = \frac{qV_0}{mL/2}$ , а время  $t$ , необходимое для того, чтобы электрон прошел путь от одной стенки ящика (где он покоился) до его центра, определяется из обычного уравнения равноускоренного движения,  $s = \frac{1}{2} at^2$ . В нашем случае  $s = L/2$  и  $t = T/4$  (четверть периода), тогда как  $a$  дается приведенным выше выражением. Отсюда

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{2} \frac{2qV_0}{mL} \left(\frac{T}{4}\right)^2$$

и следовательно,

$$v^2 = \left(\frac{1}{T}\right)^2 = \frac{qV_0}{8mL^2}.$$

Действительно, полученное выражение для частоты оказывается пропорционально квадратному корню из величины приложенного напряжения  $V_0$ .

г) В крайнем ультрарелятивистском случае электрон большую часть времени движется почти со скоростью света. В результате величина периода  $T_{\text{мин}}$  становится близка к тому времени, за которое свет покрывает расстояние  $2L$ :

$$T_{\text{мин}} = \frac{2L}{c}$$

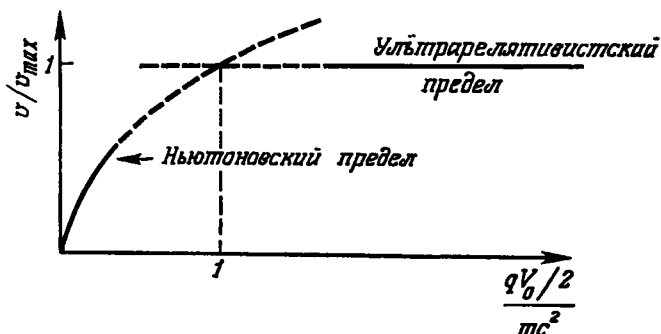
или

$$v_{\text{макс}} = \frac{1}{T_{\text{мин}}} = \frac{c}{2L}.$$

д) Начертить предлагаемый график проще, если взять не самую величину  $v$ , а безразмерное отношение

$$\frac{v}{v_{\text{макс}}} = \sqrt{\frac{qV_0}{2mc^2}} \quad (\text{ньютоновский предел}),$$

$$\frac{v}{v_{\text{макс}}} = 1 \quad (\text{ультрарелятивистский предел}).$$



Р и с. 150.

Этим формулам нетрудно дать простое истолкование. Величина  $qV_0$  представляет собой потенциальную энергию электрона, когда он покоится около стенки ящика; эта же величина равна и *кинетической* энергии электрона при прохождении им через сетку в центре ящика. В любом случае она определяет энергию электрона как колеблющегося грузика. Величина же  $mc^2$  — это просто масса покоя электрона, выраженная в единицах энергии. Разумеется, ньютоновская формула выполняется, когда частота много меньше своего ультррелятивистского предела, иначе говоря, если кинетическая энергия электрона много меньше его энергии покоя. Иными словами, область перехода от ньютоновского предела к ультррелятивистскому определяется соотношением  $qV_0 \approx 2mc^2 = 1 \text{ Мэв}$ , т. е.  $V_0 \approx 1\,000\,000 \text{ в}$ .

### 65. Импульс без массы?

а) Скорость переноса массы равна просто  $dE/dt$ , если выразить энергию в единицах массы.

б) Импульс равен  $x \frac{dm}{dt} = x \frac{dE}{dt}$ .

в) Движение платформы происходит оттого, что центр масс системы в целом <sup>1)</sup> не может начать двигаться. Так как масса покоя передается от аккумулятора воде, платформа должна двигаться влево (см. рис. 105) для того, чтобы центр масс всей системы сохранял неизменное положение. После того как заряд аккумулятора истощится, масса покоя перестанет передаваться воде, а вместе с этим отпадет необходимость в компенсирующем движении платформы — она остановится. Окончательный сдвиг платформы  $\epsilon$  будет составлять крайне малую часть ее длины  $x$ . Пусть вся израсходованная аккумулятором энергия равна  $E$ , так что воде была передана соответствующая ей масса (в форме теплоты). Положим полную массу платформы и всей ее нагрузки равной  $M$  (исключая массу  $E$ ). Тогда условие неподвижности центра масс можно выразить формулой

$$M\epsilon + E x = 0,$$

откуда окончательный сдвиг платформы определяется в виде

$$\epsilon = -\frac{E x}{M}.$$

г) Любой объект, покоящийся в данной системе отсчета, не совершает в ней механической работы. Поэтому в системе отсчета платформы перенос энергии слева направо может осуществляться лишь посредством движущейся ременной передачи. В системе отсчета стола, если считать, что платформа катится по нему без трения, движение энергии (массы) платформы в целом

<sup>1)</sup> Авторы используют здесь свой термин «центр импульса». См. по этому поводу наше примечание на стр. 214. — *Прим. перев.*

влево или вправо невозможно. Поэтому масса платформы  $M$  отступает влево в точности настолько, чтобы компенсировать перенос ременной передачей энергии (массы) вправо. В этой системе отсчета скорости переноса энергии платформой и ременной передачей в точности равны друг другу, но противоположно направлены. Наконец, в системе отсчета наблюдателя, движущегося вместе с ременной передачей в какую-то одну сторону, будет значительно ускорен перенос энергии в противоположную сторону встречным движением ремня, так как увеличится относительная скорость, и с этим наблюдателем нельзя не согласиться — ведь для него масса всей системы в целом несомненно находится в быстром движении.

#### 66. Частицы нулевой массы покоя

Вывод соотношения  $E^2 - p^2 = m^2$  основывается (см. рис. 88 и 89). во-первых, на инвариантности интервала и, во-вторых, на существовании множителя  $m$ , переводящего единичный 4-вектор, касательный к мировой линии, в вектор энергии-импульса, также к ней касательный. В пределе исчезающе малой массы покоя это соотношение принимает вид

$$p^2 = E^2 \quad \text{или} \quad |\vec{p}| = E,$$

формула же (90) справедлива для всех скоростей и масс покоя:

$$p = \beta E.$$

Поэтому, если  $p = E$ , скорость рассматриваемой частицы  $\beta$  должна быть равна единице: частица должна двигаться со скоростью света. Однако скорость связана с параметром скорости соотношением

$$\beta = \frac{p}{E} = \frac{m \operatorname{sh} \theta}{m \operatorname{ch} \theta} = \operatorname{th} \theta.$$

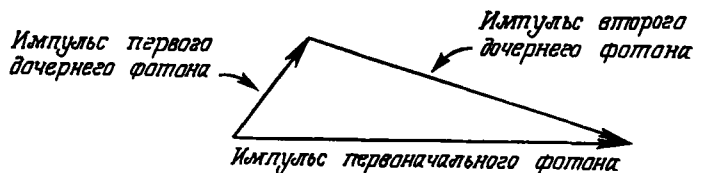
Отсюда, если скорость равна скорости света, должны быть равны друг другу  $\operatorname{ch} \theta$  и  $\operatorname{sh} \theta$ ; следовательно, параметр скорости  $\theta$  должен быть бесконечно большим. Если рассматривать теперь объект нулевой массы покоя из системы отсчета ракеты, двигающейся относительно лабораторной системы со скоростью  $\beta_r$  (параметр скорости  $\theta_r$ ), то параметр скорости этого объекта будет равен  $\theta' = \theta - \theta_r$ . Каким бы большим ни был параметр  $\theta_r$ ,  $\theta'$  будет бесконечен ввиду бесконечности  $\theta$ . Следовательно, свет распространяется с одной и той же скоростью в любой инерциальной системе отсчета, и невозможно найти систему, в которой бы он покоился. Это верно и для любых других частиц, масса покоя которых равна нулю; все они движутся со скоростью света. См. также обсуждение на стр. 159—161.

#### 67. Эйнштейновский вывод принципа эквивалентности энергии и массы покоя — подробный пример

Решение дано в тексте.

#### 68. Устойчивость фотона

Диаграмма на рис. 151 изображает сохранение импульса в ходе предполагаемого дробления фотона на два других фотона, не сохраняющих его первоначального направления движения. Треугольник образован трехмерными векторами импульса и построен в обычном трехмерном евклидовом пространстве. Поэтому сумма длин его боковых сторон должна быть больше



Р и с. 151.

длины основания, т. е.

$$\left( \begin{array}{c} \text{Модуль импульса первого} \\ \text{дочернего фотона} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Модуль импульса второго} \\ \text{дочернего фотона} \end{array} \right) > \\ > \left( \begin{array}{c} \text{Модуль импульса} \\ \text{исходного фотона} \end{array} \right).$$

Однако импульс фотона по модулю равен его энергии. Значит, сумма энергий двух дочерних фотонов должна превосходить энергию исходного фотона, а это невозможно. Следовательно, одновременное сохранение и импульса, и энергии невозможно, если только фотоны — продукты дробления — не продолжают двигаться в том же направлении, в котором двигался первоначальный фотон.

### 69. Давление света

а) Свет лампочки мощностью 1 *вт* приносит на поглощающую его поверхность 1 *дж* энергии каждую секунду. 1 *дж* эквивалентен энергии (массе), равной  $(1 \text{ дж})/c^2 \approx 10^{-17} \text{ кг}$ . Эта поверхность поглощает за одну секунду столько же импульса (выраженного в единицах массы); переход к обычным единицам осуществляется путем умножения на скорость света *c* (см. стр. 141), что дает в данном случае  $3 \cdot 10^{-9} \text{ кг} \cdot \text{м/сек}$  импульса, поступающего на поглощающую поверхность в секунду. Это соответствует силе, равной  $3 \cdot 10^{-9} \text{ кг} \cdot \text{м/сек}^2$ , т. е.  $3 \cdot 10^{-9} \text{ н}$ .

б) Сила, действующая на каждый квадратный метр *поглощающего* спутника, в 1400 раз больше только что найденной, т. е. равна около  $4 \cdot 10^{-6} \text{ н}$ . Когда свет падает на идеально отражающую поверхность, он отражается от нее в обратную сторону, так что *изменение* его импульса вдвое превышает полученную прежде величину — мы имеем теперь  $8 \cdot 10^{-6} \text{ н}$  на каждый квадратный метр поверхности. В случае «реальных» поверхностей давление должно быть промежуточным между этими двумя значениями, цвет же поверхности играет роль лишь постольку, поскольку он характеризует ее отражательную способность.

в) Запишем выражение для силы, действующей со стороны Солнца на частицу массы *m*, как  $ma_{\text{Солнце}}$ , где  $a_{\text{Солнце}} = \frac{GM}{R^2}$  — гравитационное ускорение, вызванное притяжением Солнца. (Что касается закона тяготения, см. введение к упражнению 73; вблизи Земли ускорение силы тяжести, вызываемое Солнцем, равно  $6 \cdot 10^{-3} \text{ м/сек}^2$ ; см. стр. 21). Сила, действующая со стороны солнечного света, представляет собой давление [см. часть б) этого упражнения], умноженное на эффективную поглощающую площадь частицы. Пусть частица имеет сферическую форму и полностью поглощает падающий на нее свет; тогда ее поперечное сечение равно  $\pi r^2$ . Обозначим давление солнечного света через *P*. Тогда отталкивающая сила будет равна  $P\pi r^2$ , сила же гравитационного притяжения к Солнцу будет  $ma_{\text{Солнце}}$ . Нас интересует, каких размеров должна быть частица, чтобы эти силы в точности уравновешивали друг друга:

$$ma_{\text{Солнце}} = \pi Pr^2.$$

Масса шарообразной частицы связана с ее плотностью  $\rho$  и радиусом *r* по формуле  $m = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$ . Подставляя ее в уравнение баланса сил, найдем отсюда величину критического радиуса

$$r = \frac{3}{4} \frac{P}{\rho a_{\text{Солнце}}}.$$

Чтобы определить численное значение *r*, необходимо задаться величиной плотности  $\rho$ ; предположим поэтому, что она равна плотности воды,  $10^3 \text{ кг/м}^3$ . Используя также данные о давлении солнечного света вблизи Земли и о вели-



Чине солнечного гравитационного ускорения в этой же области, найдем

$$r = \frac{3}{4} \frac{4 \cdot 10^{-6} \text{ н/м}^2}{(10^9 \text{ кг/м}^3)(6 \cdot 10^{-3} \text{ м/сек}^2)} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Итак, частица должна быть довольно маленькой — радиусом примерно 1000 атомов. Интересно, что расстояние от Солнца при вычислении сокращается. Отметим, что мы сделали здесь следующие предположения:

- 1) частица шарообразна,
- 2) частица полностью поглощает падающий на нее свет,
- 3) плотность частицы равна плотности воды.

### 70. Эффект Комптона

В подписи к рис. 109 дано уравнение, выражающее закон сохранения импульса. Однако нас больше интересует здесь энергия, почему мы и произведем в нем замены

$$\begin{aligned} p &= E_{\text{фотон}}, \\ \bar{p} &= \bar{E}_{\text{фотон}}, \\ \bar{p}^2 &= \bar{E}^2 - m^2. \end{aligned}$$

В результате получим уравнение

$$E^2 - m^2 = E_{\text{фотон}}^2 + \bar{E}_{\text{фотон}}^2 - 2E_{\text{фотон}}\bar{E}_{\text{фотон}}\cos\varphi,$$

в то время как собственно закон сохранения энергии дает

$$E_{\text{фотон}} + m = \bar{E}_{\text{фотон}} + \bar{E},$$

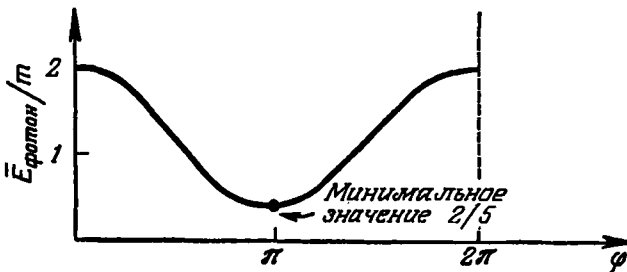
если учесть, что электрон первоначально находился в покое, так что его полная энергия сводилась к энергии покоя  $m$ . Теперь нас не интересует энергия  $\bar{E}$  электрона после столкновения, и мы исключим ее из полученных двух уравнений, получив, наконец, энергию фотона, рассеянного в направлении угла  $\varphi$ :

$$\bar{E}_{\text{фотон}} = \frac{E_{\text{фотон}}}{1 + \frac{E_{\text{фотон}}}{m}(1 - \cos\varphi)}.$$

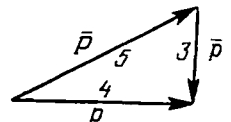
Разделив левую и правую стороны этого равенства на массу покоя электрона  $m$ , рассмотрим случай, когда  $E_{\text{фотон}}/m = 2$ :

$$\frac{\bar{E}_{\text{фотон}}}{m} = \frac{2}{1 + 2(1 - \cos\varphi)}.$$

Когда электрон крепко связан в атоме, в качестве массы  $m$  выступает масса этого атома в целом, и тогда эффективная величина отношения  $E_{\text{фотон}}/m$  оказывается в 20 тысяч раз меньше, чем при рассеянии фотонов на свободных электронах. В случае крепко связанных электронов знаменатель в формуле.



Р и с. 152.



Р и с. 153.

описывающей эффект Комптона, становится практически равным единице при любых углах  $\varphi$ , так что энергия рассеянного фотона оказывается очень близка к энергии падающего.

### 71. Измерение энергии фотона

На рис. 153 изображена диаграмма импульсов, причем через  $\bar{P}$  обозначен импульс электрона после столкновения. Для этого прямоугольного треугольника можно записать

$$\begin{aligned}\bar{P}^2 &= p^2 + \bar{p}^2 = E_{\text{фотон}}^2 + \bar{E}_{\text{фотон}}^2, \\ \frac{\bar{p}}{p} &= \frac{\bar{E}_{\text{фотон}}}{E_{\text{фотон}}} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

С другой стороны, имеют место закон сохранения энергии

$$E_{\text{фотон}} + m = \bar{E}_{\text{фотон}} + \bar{E}$$

и релятивистское соотношение между энергией и импульсом для электрона

$$\bar{E}^2 - \bar{P}^2 = m^2.$$

Из этих уравнений можно найти энергию падающего фотона

$$E_{\text{фотон}} = \frac{4m}{12}$$

(проверку выполнения всех этих уравнений можно осуществить, используя следующие вспомогательные величины:  $\bar{E}_{\text{фотон}} = \frac{3m}{12}$ ,  $\bar{E} = \frac{13m}{12}$ ,  $\bar{p} = \frac{5m}{12}$ ).

### 72. Энергия и частота фотона

а) В случае фотона, движущегося вдоль оси  $x$ , формулы преобразования энергии и импульса (78) сводятся к одному-единственному равенству

$$E' = E \operatorname{ch} \theta_r - p \operatorname{sh} \theta_r = E (\operatorname{ch} \theta_r - \operatorname{sh} \theta_r) = E e^{-\theta_r},$$

где мы учли формальные определения функций  $\operatorname{ch} \theta$  и  $\operatorname{sh} \theta$ , приведенные в табл. 8.

б) Нулевая вспышка ( $n = 0$ ) проходит через начало координат в момент  $t = 0$ , и ее распространение описывается в дальнейшем уравнением  $x = t$ , т. е.  $t - x = 0$ . Вспышка № 1 ( $n = 1$ ) проходит через начало координат в момент  $t = c/v$ , так что величина ее  $x$ -координаты всегда на  $c/v$  меньше, чем этой же координаты нулевой вспышки:

$$x = t - \frac{c}{v}, \text{ т. е. } 1 = \frac{v}{c} (t - x).$$

Вспышка №  $n$  проходит через начало координат в момент  $n \frac{c}{v}$ , и ее  $x$ -координата всегда на  $n \frac{c}{v}$  меньше, чем у нулевой вспышки:  $x = t - n \frac{c}{v}$ , т. е.  $n = \frac{v}{c} (t - x)$ .

Это и есть то уравнение, которое требовалось получить. Свет распространяется с одной и той же скоростью  $c$  и в лабораторной системе отсчета, и в системе ракеты, так что те же рассуждения, взятые в применении к системе отсчета ракеты, дают уравнение

$$n = \frac{v'}{c} (t' - x').$$

Подставим сюда значения  $t'$  и  $x'$  из формул преобразования Лоренца; мы получим

$$n = \frac{v'}{c} (t - x) (\operatorname{ch} \theta_r + \operatorname{sh} \theta_r),$$

$$n = \frac{v'}{c} (t - x) e^{\theta_r}.$$

Приравнивая друг другу выражения для  $n$ , полученные в лабораторной системе отсчета и в системе ракеты, найдем

$$v' = ve^{-\theta r}.$$

в) Равенства, полученные в частях а) и б) этого упражнения, выглядят одинаково, и это говорит за то, что энергия фотона  $E$  пропорциональна его классической частоте (как в лабораторной системе отсчета, так и в системе ракеты). Коэффициент пропорциональности определяется на основании других экспериментов, которых мы здесь не касаемся; окончательно получим

$$E = \frac{h}{c^2} \nu.$$

Умножая энергию, выраженную в единицах массы, на квадрат скорости света, получим  $E_{\text{обычн}}$  — энергию, измеренную в обычных единицах (см. разд. 10 гл. 2):

$$E_{\text{обычн}} = h\nu.$$

г) Если это последнее соотношение подставить в формулу, описывающую эффект Комптона (упражнение 70), то получится формула (116).

### 73. Гравитационное красное смещение

а) Работа, затрачиваемая на единицу массы при переходе от  $r$  к  $r + dr$ , выражается формулой (117) и представляет собой вклад в потенциальную энергию частицы. Вблизи поверхности Земли  $r \approx r_{\text{Земля}}$ , и мы получим

$$\frac{dW}{m} = \frac{m^*}{r_{\text{Земля}}^2} dr = g^* dr.$$

Подставляя  $g \approx 10 \text{ м/сек}^2$ , приближенно найдем

$$g^* = \frac{g}{c^2} \approx (10 \text{ м/сек}^2)/(9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{сек}^2) \approx 10^{-16} \text{ м/м}^2,$$

так что относительное изменение массы покоя частицы при подъеме на 170 м равно

$$\frac{dW}{m} \approx 1,7 \cdot 10^{-14} \approx 2 \cdot 10^{-14}.$$

б) Отношение же полной работы к массе дается формулой (118); если взять в ней в качестве  $m^*$  массу Земли, равную  $4,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , а за исходный радиус принять радиус Земли  $r_{\text{Земля}}$ , мы получим

$$\frac{W}{m} = \frac{m^*}{r_{\text{Земля}}} \approx (4,4 \cdot 10^{-3} \text{ м})/(6,7 \cdot 10^6 \text{ м}) \approx 7 \cdot 10^{-10}.$$

Отношения, полученные в частях а) и б) этого упражнения, не включают в правой стороне самую массу поднимающейся частицы.

в) Заменяя в формуле, полученной в части а),  $dr$  на  $z$ , а  $\frac{dW}{m}$  — на отношение (изменение энергии)/(полная энергия), получим, учитывая формулу (115), требуемый результат. Знак минус в нем появился ввиду того, что изменение энергии отрицательно (она уменьшается с высотой)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> В отличие от кинетической энергии, потенциальная энергия пробной массы в гравитационном поле с точки зрения теории Ньютона всегда отрицательна и обращается в нуль на бесконечности, где поле отсутствует; таким образом, энергия *возрастает* с высотой. Авторы в действительности имеют в виду работу, необходимую для *удаления* массы из гравитационного поля, равную по абсолютной величине потенциальной энергии этой массы, но обратную ей по знаку. Возрастание потенциальной энергии с высотой отражает тот факт, что гравитация создает силы *притяжения*, а не *отталкивания* между массами (по принципу минимума энергии). — *Прим. перев.*

г). Формула (119) непосредственно следует из ответа на часть б) этого упражнения. Для Земли ( $M^* = 4,44 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $r_{\text{Земля}} = 6,7 \cdot 10^6 \text{ м}$ ) относительная величина гравитационного красного смещения равна

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\text{Земля}} \approx -7 \cdot 10^{-10},$$

т. е. численно совпадает с ответом на часть б). Для Солнца ( $M^* = 1,47 \times 10^3 \text{ м}$ ,  $r_{\text{Солнце}} = 7 \cdot 10^8 \text{ м}$ ) относительная величина гравитационного красного смещения равна

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\text{Солнце}} \approx -2 \cdot 10^{-6}.$$

#### 74. Плотность спутника Сириуса

Из формулы (119) следует величина радиуса

$$r = \frac{M^*}{-\Delta\nu/\nu} = (1,5 \cdot 10^3 \text{ м}) / (7 \cdot 10^{-4}) \approx 2 \cdot 10^6 \text{ м}$$

(менее одной трети радиуса Земли!). Плотность равна

$$\frac{M}{\frac{4\pi}{3} r^3} = (2 \cdot 10^{30} \text{ кг}) / (4 \cdot 8 \cdot 10^{18} \text{ м}^3) \approx 6 \cdot 10^{10} \text{ кг/м}^3 = 6 \cdot 10^7 \text{ г/см}^3$$

— в шестьдесят миллионов раз больше плотности воды!

#### 75. Формулы Доплера

а) В системе отсчета ракеты

$$p'^x = p' \cos \varphi',$$

$$p'^y = p' \sin \varphi'.$$

Подставляя эти выражения для компонент импульса в формулы преобразования Лоренца (78), найдем

$$E' = -p \cos \varphi \operatorname{sh} \theta_r + E \operatorname{ch} \theta_r,$$

$$p' \cos \varphi' = p \cos \varphi \operatorname{ch} \theta_r - E \operatorname{sh} \theta_r,$$

$$p' \sin \varphi' = p \sin \varphi.$$

Но для фотона  $p = E$ , и первое из уравнений записывается в виде

$$E' = E \operatorname{ch} \theta_r (1 - \beta_r \cos \varphi),$$

как это требовалось показать [уравнение (120)]. Найдем теперь из второго уравнения  $\cos \varphi'$  и исключим из него  $E'$ , пользуясь (120):

$$\cos \varphi' = \frac{E \cos \varphi \operatorname{ch} \theta_r - E \operatorname{sh} \theta_r}{E \operatorname{ch} \theta_r (1 - \beta_r \cos \varphi)},$$

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \beta_r}{1 - \beta_r \cos \varphi}.$$

б) Будем исходить из формул, обратных (78):

$$E = p'^x \operatorname{sh} \theta_r + E' \operatorname{ch} \theta_r,$$

$$p^x = p'^x \operatorname{ch} \theta_r + E' \operatorname{sh} \theta_r,$$

$$p^y = p'^y,$$

$$p^z = p'^z.$$

Вновь производя уже знакомые подстановки

$$p'^x = p' \cos \varphi' = E' \cos \varphi',$$

$$p'^y = p' \sin \varphi' = E' \sin \varphi'$$

и т. д., найдем из приведенной выше формулы преобразования энергии

$$E = E' \operatorname{ch} \theta_r (1 + \beta_r \cos \varphi').$$

Подставляя этот результат в выписанную выше первую формулу для компонент импульса, найдем из нее

$$\cos \varphi = \frac{\cos \varphi' + \beta_r}{1 + \beta_r \cos \varphi'}.$$

Эти результаты приведены в упражнении 76, а последняя формула была выведена также в упражнении 22 [уравнение (50)].

в) Энергия фотона  $E$  и соответствующая ей классическая частота электромагнитной волны  $\nu$  связаны друг с другом равенством  $E = \frac{h}{c^2} \nu$  (см. упражнение 72). Поэтому уравнение (120) переписывается для частот в виде

$$\nu' = \nu \operatorname{ch} \theta_r \cdot (1 - \beta_r \cos \varphi).$$

Зная лишь, какая частота наблюдается в данной системе отсчета, еще невозможно сказать, чему равна частота в той системе, где источник излучения покоится. Итак, когда мы измеряем в нашей системе отсчета частоту, мы никоим образом не получаем прямой информации о скорости источника относительно нашей системы.

#### 76. Распад $\pi^0$ -мезона; подробный пример

Решение дано в тексте.

#### 77. Полет неоновой лампочки

Пока неоновая лампочка находится на большом расстоянии от наблюдателя и быстро к нему приближается, ее свет для наблюдателя очень яркий (эффект прожектора; упражнение 22) и далеко сдвинут в синюю сторону (частоты в диапазоне фиолетовых и ультрафиолетовых волн — эффект Доплера; упражнение 75). Затем яркость резко понизится (наблюдатель окажется вне «луча прожектора»), когда косинус угла, образованного лучом зрения и осью  $x$ , станет равен  $\beta_r$ . В момент наибольшего сближения лампочки с наблюдателем ее свет будет уже испытывать красное смещение (см. формулу (120) при  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\cos \varphi = 0$ ). Когда лампочка будет улетать прочь, ее свет будет очень слабым и далеко сдвинут в красную сторону (частоты в диапазоне дальних красных и инфракрасных волн).

#### 78. Физик и светофор

Учитывая в уравнении (120), что энергия  $E$  пропорциональна частоте  $\nu$ , а  $\cos \varphi = -1$ , получим

$$\nu' = \nu \operatorname{ch} \theta_r \cdot (1 + \beta_r) = \nu \sqrt{\frac{1 + \beta_r}{1 - \beta_r}}.$$

Подставляя сюда  $\nu = c/\lambda$ , найдем

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 - \beta_r}{1 + \beta_r}}$$

или

$$\beta_r = \frac{1 - (\lambda'/\lambda)^2}{1 + (\lambda'/\lambda)^2}.$$

При  $\lambda'/\lambda = (5300 \text{ \AA})/(6500 \text{ \AA}) = 0,81$

$$(\lambda'/\lambda)^2 = 0,66,$$

так что

$$\beta_r = 0,34/1,66 = 0,20.$$

откуда

$$v_r = \beta_r c = 6 \cdot 10^7 \text{ м/сек} = 216 \cdot 10^6 \text{ км/час} = 13 \cdot 10^7 \text{ миль/час},$$

так что штраф составит приблизительно 130 миллионов долларов.

## 79. Доплеровское смещение на краю диска Солнца

На экваторе Солнца линейная скорость вращения, направленная по касательной к его поверхности, равна

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi \frac{7 \cdot 10^8 \text{ м}}{(24,7 \text{ дней})(86400 \text{ сек/день})} = 2,1 \cdot 10^3 \text{ м/сек},$$

так что

$$\beta = \frac{v}{c} = 7 \cdot 10^{-6}.$$

Из формулы (120) для эффекта Доплера, приняв  $\varphi = 0$ , а  $\cos \varphi = 1$ , получим

$$v' = v \sqrt{\frac{1-\beta_r}{1+\beta_r}}$$

или

$$\lambda = \lambda' \sqrt{\frac{1-\beta_r}{1+\beta_r}} \approx \lambda' \left(1 - \frac{7 \cdot 10^{-6}}{2}\right) \left(1 + \frac{7 \cdot 10^{-6}}{2}\right) \approx \lambda' (1 - 7 \cdot 10^{-6}),$$

так что

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = - \frac{\Delta v}{v} \approx 7 \cdot 10^{-6}.$$

Сдвиг будет происходить в голубую сторону, когда излучающая точка приближается к Земле, и в красную, когда она удаляется от Земли. Полученная величина относительного доплеровского сдвига частоты сравнима с величиной относительного гравитационного сдвига также в случае Солнца  $2 \cdot 10^{-6}$  (см. упражнение 73).

## 80. Расширяющаяся Вселенная

а) Согласно условиям задачи,

$$\lambda' = 4870 \text{ \AA},$$

$$\lambda = 7300 \text{ \AA},$$

$$\varphi = \varphi' = \pi.$$

Формулу (120) можно записать в виде

$$\frac{E}{E'} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1-\beta_r}{1+\beta_r}}$$

или

$$\beta_r = \frac{1 - (\lambda'/\lambda)^2}{1 + (\lambda'/\lambda)^2}.$$

Так как  $\lambda'/\lambda = 0,67$ ,  $(\lambda'/\lambda)^2 = 0,45$ , то скорость равна

$$\beta_r = 0,55/1,45 = 0,38.$$

б) Для того чтобы со скоростью  $\beta = 0,38$  (в единицах скорости света) пройти расстояние  $5 \cdot 10^9$  световых лет, требуется  $(5 \cdot 10^9)/0,38 = 13 \cdot 10^9$  лет. Если на более раннем этапе скорость была больше (гравитация произвела в дальнейшем торможение), то это же расстояние могло быть пройдено за более короткий срок. Поэтому, учитывая замедляющее влияние тяготения в прошлом, мы приходим к меньшему сроку, прошедшему с момента начала расширения.

## 81. Анализ парадокса часов с помощью эффекта Доплера

Пусть время путешествия туда и обратно равно  $t$  в системе отсчета Павла и  $t'$  — в системе отсчета Петра. Тогда полное число пульсаций переменной звезды одно и то же в обеих системах отсчета и равно соответственно  $v't' = vt$ . Промежуток времени  $t$ , который покажут часы брата, оставшегося на Земле, равен  $t = \frac{v'}{v} t'$ . Найдем отношение частот по формуле (122), имея

в виду, что переменная наблюдается домоседом Павлом под углом  $90^\circ$  к направлению движения Петра ( $\varphi = 90^\circ$ ,  $\cos \varphi = 0$ ). Отсюда получим

$$t = t' \operatorname{ch} \theta_r.$$

В упражнении 27 было указано, что скорость равна  $\beta_r = 24/25$ , так что

$$\operatorname{ch} \theta_r = (1 - \beta_r^2)^{-1/2} = [1 - (24/25)^2]^{-1/2} = (49/625)^{-1/2} = 25/7.$$

Поэтому, если  $t' = 7$  лет, то  $t = 25$  лет, что уже было получено в упражнении 27.

### 82. «Не превышайте скорости»

Скорость приближающейся машины равна  $v_r = 80$  миль/час = 36 м/сек.

Отсюда

$$\beta_r = \frac{v_r}{c} = 12 \cdot 10^{-8}$$

Частота  $\nu'$  в системе отсчета машины может быть получена из уравнения (122), если принять  $\varphi = \pi$ . Ограничиваясь в разложении членами первой степени по  $\beta_r$ , найдем

$$\nu' = \nu_{\text{пад}} \sqrt{\frac{1 + \beta_r}{1 - \beta_r}} \approx \nu_{\text{пад}} \left(1 + \frac{\beta_r}{2}\right) \left(1 + \frac{\beta_r}{2}\right), \quad \nu' \approx \nu_{\text{пад}} (1 + \beta_r).$$

Затем радиолокационный луч отражается от машины в противоположном направлении, и при этом в системе отсчета машины частота  $\nu'$  остается неизменной. Частоту, наблюдаемую в системе отсчета автострады (лаборатории), можно найти из уравнения, обратного (122) (см. первую формулу в упражнении 76),

$$\nu_{\text{отр}} = \nu' \operatorname{ch} \theta_r \cdot (1 + \beta_r \cos \varphi').$$

Теперь  $\varphi' = 0$ , так что

$$\nu_{\text{отр}} = \nu' \sqrt{\frac{1 + \beta_r}{1 - \beta_r}} \approx \nu' (1 + \beta_r).$$

Подставляя сюда полученное выше выражение для  $\nu'$ , найдем

$$\nu_{\text{отр}} \approx \nu_{\text{пад}} (1 + \beta_r)^2 \approx \nu_{\text{пад}} (1 + 2\beta_r).$$

Сдвиг частоты приблизительно равен

$$\nu_{\text{отр}} - \nu_{\text{пад}} = \nu_{\text{пад}} \cdot 2\beta_r = (2455 \text{ Мгц}) \cdot 2 \cdot 12 \cdot 10^{-8} \approx 590 \cdot 10^{-6} \text{ Мгц} = 590 \text{ гц}.$$

Наименьшее изменение частоты, поддающееся обнаружению, равно

$$\Delta \nu_{\text{отр}} = 2\nu_{\text{пад}} \Delta \beta_r.$$

Если  $\Delta v_r = 10$  миль/час = 4,47 м/сек, то  $\Delta \beta_r \approx 1,5 \cdot 10^{-8}$ , и мы получим относительный сдвиг частоты

$$\Delta \nu_{\text{отр}} / \nu_{\text{пад}} = 2\Delta \beta_r \approx 3 \cdot 10^{-8}.$$

### 83. Доплеровское уширение спектральных линий

Приравняйте ньютоновское выражение для кинетической энергии ее выражению через температуру:

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle_{\text{ср}} = \frac{3}{2} kT.$$

Отсюда

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle_{\text{ср}}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

и

$$\beta_r \approx \frac{1}{c} \sqrt{\langle v^2 \rangle_{\text{ср}}} = \sqrt{\frac{3kT}{mc^2}}.$$

Возьмите уравнение, обратное (122),

$$v = v' \operatorname{ch} \theta_r \cdot (1 + \beta_r \cos \varphi')$$

для того, чтобы определить сдвиг частот; положите здесь  $\varphi' = 0$  и используйте приближение для малых  $\beta_r$ :

$$v = v' \sqrt{\frac{1+\beta_r}{1-\beta_r}} \approx v' \left(1 + \frac{1}{2}\beta_r\right) \left(1 + \frac{1}{2}\beta_r\right) \approx v' (1 + \beta_r).$$

Тогда

$$\frac{v-v'}{v'} \approx \frac{\Delta v}{v} = \beta_r = \sqrt{\frac{3kT}{mc^2}}.$$

Наблюдаемая частота будет выше для тех частиц, которые приближаются к наблюдателю, и ниже для тех, которые удаляются. В целом при температурах, совместимых с ньютоновским приближением, должен наблюдаться эффект разброса частот, выражаемый полученной выше формулой («доплеровское уширение спектральных линий»).

#### 84. Изменение энергии фотона вследствие отдачи излучателя

а) Воспользуемся законами сохранения для того, чтобы определить энергию и импульс частицы, испытывающей отдачу:

$$\bar{m} \operatorname{ch} \theta_r = m - E \quad (\text{энергия}).$$

$$\bar{m} \operatorname{sh} \theta_r = E \quad (\text{импульс}).$$

Возведем каждое из этих равенств в квадрат и вычтем первое из второго:

$$\bar{m}^2 (\operatorname{ch}^2 \theta_r - \operatorname{sh}^2 \theta_r) = \bar{m}^2 = (m - E)^2 - E^2 = m^2 - 2mE.$$

Отсюда следует выражение для энергии

$$E = \frac{m^2 - \bar{m}^2}{2m}.$$

В частном случае, когда отношение  $\frac{m - \bar{m}}{m}$  мало,

$$E = (m + \bar{m}) \frac{m - \bar{m}}{2m} \approx m - \bar{m} = E_0$$

(тем самым определяется  $E_0$ ). В точном выражении заменим повсюду  $\bar{m}$  по формуле  $\bar{m} = m - E_0$ ; получим

$$E = E_0 \frac{m + \bar{m}}{2m} = E_0 \frac{m + m - E_0}{2m} = E_0 \left(1 - \frac{E_0}{2m}\right),$$

что и требовалось показать.

б) Относительная поправка за счет отдачи при излучении атомами видимого света составляет

$$\frac{\Delta E}{E_0} \approx (3 \text{ эв}) / (2 \cdot 10^{10} \text{ эв}) = 1,5 \cdot 10^{-10} \quad (\text{отдача}).$$

Если  $kT \approx 1/40 \text{ эв}$ , то формула, полученная в упражнении 83, дает

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta E}{E_0} = \sqrt{\frac{3}{40}} / \sqrt{10 \cdot 10^9} \approx 3 \cdot 10^{-6} \quad (\text{по Допплеру}).$$

Мы видим, что доплеровское уширение частот видимого света, излучаемого атомами, намного больше, чем эффект сдвига энергии фотона за счет отдачи атома.

#### 85. Эффект Мессбауэра

Возьмем из предыдущего упражнения уравнение (123)

$$\frac{\Delta E}{E_0} = -\frac{E_0}{2m}.$$



Как энергию испущенного фотона  $E_0 = 14,4 \cdot 10^3 \text{ эв}$ , так и массу покоя  $m$  испустившей его частицы нужно выразить в одних и тех же единицах. Масса покоя протона приблизительно равна  $10^9 \text{ эв}$  (см. данные в конце книги); масса покоя  $\text{Fe}^{57}$ , состоящего из 26 протонов и 31 нейтрона, превышает эту величину примерно в 57 раз. Следовательно,

$$\frac{\Delta E}{E_0} \approx - (14 \cdot 10^3 \text{ эв}) / (2 \cdot 57 \cdot 10^9 \text{ эв}) \approx -10^{-7}.$$

б) Когда  $m = 1 \text{ г} = 10^{-3} / (1,7 \cdot 10^{-27} \text{ кг/протон}) \approx 0,6 \cdot 10^{24}$  масс протона  $\approx 0,6 \cdot 10^{33} \text{ эв}$ , мы получим

$$\frac{\Delta E}{E_0} \approx - (14 \cdot 10^3 \text{ эв}) / (6 \cdot 10^{32} \text{ эв}) \approx -2 \cdot 10^{-29}$$

— относительный сдвиг, намного меньший, чем в случае свободного атома железа! [ср. часть а)].

в) Воспользовавшись результатами упражнения 72, найдем частоту:

$$E_0 \text{ обьчн} = (14,4 \cdot 10^3 \text{ эв}) (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж/эв}) = 23 \cdot 10^{-16} \text{ Дж} = h\nu_0$$

или

$$\nu_0 = (23 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}) / (6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{сек}) = 3,5 \cdot 10^{18} \text{ гц}.$$

Ширина линии  $\Delta\nu$  в герцах равна

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \nu_0 = 3 \cdot 10^{-13} \cdot 3,5 \cdot 10^{18} \text{ гц} = 10^6 \text{ гц}.$$

Относительная ширина спектральной линии, равная  $3 \cdot 10^{-13}$ , намного меньше, чем относительный сдвиг, обусловленный отдачей свободного атома [т. е.  $10^{-7}$  — результат, полученный в части а)], и вместе с тем намного больше, чем относительный сдвиг в процессе без отдачи [ $2 \cdot 10^{-29}$  для однограммового образца; см. часть б)].

### 86. Резонансное рассеяние

Фотон выполняет двойную роль. Во-первых, он возбуждает атом, прежде находившийся в состоянии с основной энергией (массой)  $m$ , переводя его в состояние с  $\bar{m}$ . Для этого он должен столкнуться с атомом и поглотиться им, а значит, передать ему нежелательный толчок. Следовательно, и это во-вторых, фотон передает атому также кинетическую энергию отдачи. Если у фотона запас энергии будет достаточен лишь для выполнения первой роли, то он никак не сможет выполнить ни ее, ни вторую роль. Если, однако, атом обладает очень большой массой, то при отдаче он приобретет весьма малую скорость и потеря энергии на отдачу будет мала. Тогда энергия фотона может быть очень близкой к разности  $\bar{m} - m$ . Кинетическую энергию, переданную атому, в случае таких малых скоростей можно рассчитывать с помощью законов ньютоновской механики:

$$\bar{T} \approx (\text{Импульс})^2 / 2 \cdot (\text{Масса}) \approx \frac{(\bar{m} - m)^2}{2m}.$$

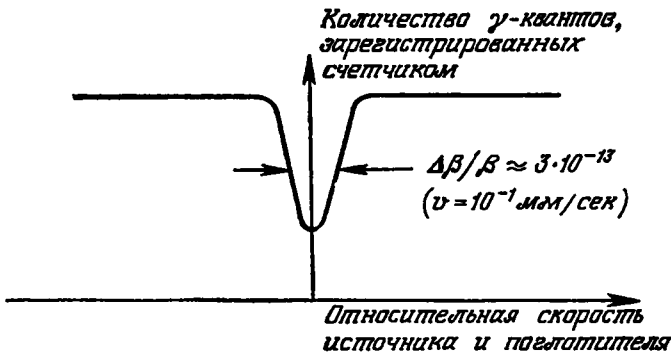
Отсюда можно заключить, что относительная поправка для энергии отдачи приближенно выражается как

$$\frac{\text{Энергия отдачи}}{\text{Энергия возбуждения}} = \frac{\bar{T}}{m - m} \approx \frac{\bar{m} - m}{2m}.$$

В случае свободного атома железа  $\text{Fe}^{57}$  это отношение равно

$$\frac{14,4 \text{ кэв}}{2 \cdot 57 \cdot 931 \text{ 000 кэв}} = 1,4 \cdot 10^{-7},$$

т. е. оно слишком велико, чтобы его «не заметил» атом железа. Атом (точнее, его ядро) требует, чтобы энергия падающего фотона выдерживалась с отно-



Р и с. 154.

сительной точностью около  $3 \cdot 10^{-13}$ , иначе этот фотон не будет поглощен. Если же атом принадлежит кристаллу и речь идет о «поглощении без отдачи», то отдачу приобретает масса кристалла, равная целому грамму, а это  $10^{22}$  атомов. Увеличение знаменателя дроби в  $10^{22}$  раз приводит к тому, что вместо прежней относительной поправки на энергию отдачи, равной  $1,4 \cdot 10^{-7}$ , мы получаем  $1,4 \cdot 10^{-29}$ , за которой никакой атом железа не «уследит», и фотон будет поэтому поглощен.

### 87. Измерение доплеровского смещения по резонансному рассеянию

Возьмем первую формулу из упражнения 76

$$E = E' \operatorname{ch} \theta_r \cdot (1 + \beta_r \cos \varphi')$$

(источник в системе отсчета ракеты, поглощающий атом — в лабораторной системе отсчета). Положим здесь  $\varphi' = 0$  и  $E' = E_0$  и запишем результат приближенно для малых скоростей  $\beta_r$ :

$$E = E_0 \sqrt{\frac{1 + \beta_r}{1 - \beta_r}} \approx E_0 \left(1 + \frac{\beta_r}{2}\right) \left(1 + \frac{\beta_r}{2}\right) \approx E_0 (1 + \beta_r)$$

или

$$\frac{E - E_0}{E_0} \approx \frac{\Delta E}{E_0} \approx \beta_r.$$

Относительный доплеровский сдвиг частоты, равный  $3 \cdot 10^{-13}$ , получается, когда скорость также составляет  $3 \cdot 10^{-13}$  скорости света, т. е.

$$v_r = 3 \cdot 10^{-13} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек} \approx 10^{-4} \text{ м/сек} = 10^{-3} \text{ см/сек}.$$

Число зарегистрированных счетчиком гамма-квантов при этом *увеличится*, так как поглотитель беспрепятственно пропустит сквозь себя больше падающих на него фотонов, не подвергнув их резонансному рассеянию. Когда источник фотонов *удаляется* от поглотителя, относительный сдвиг частоты будет отличаться от случая приближения источника лишь знаком, что соответствует изменению знака  $\beta_r$ . В целом поведение счетчика изображено на рис. 154.

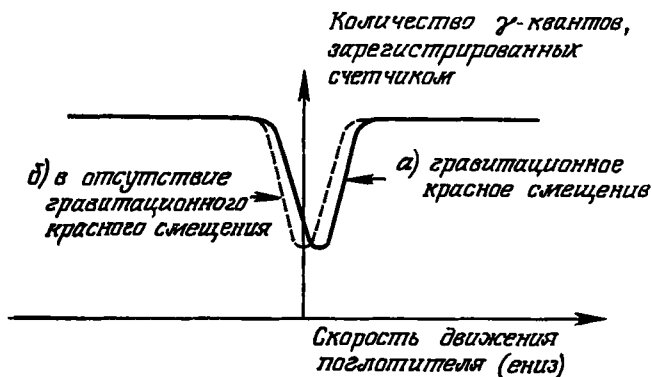
### 88. Проверка эффекта гравитационного красного смещения с помощью эффекта Мессбауэра

Возьмем формулу, полученную в части в) упражнения 73,

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\Delta v}{v_0} = -g^* z,$$

где  $g^* = g/c^2 = (9,8 \text{ м/сек}^2)/(3 \cdot 10^8 \text{ м/сек})^2 \approx 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ м/м}^2$  для точек на поверхности Земли. Если  $z = 22,5 \text{ м}$ , получим

$$\frac{\Delta v}{v} \approx -(22,5 \text{ м})(1,1 \cdot 10^{-16} \text{ м}^{-1}) \approx -2,5 \cdot 10^{-15}.$$



Р и с. 155.

Необходимо, чтобы резонансный поглотитель приближался к источнику гамма-квантов; тогда в системе отсчета поглотителя благодаря эффекту Доплера будет компенсировано гравитационное красное смещение, наблюдаемое в лабораторной системе отсчета. Вспомним, что в предыдущем упражнении относительная скорость  $\beta_r$ , нужная для оптимального поглощения, была найдена равной относительному сдвигу частоты излучения, которое требуется поглотить. Значит, скорость движения поглотителя должна быть равна

$$\beta_r = 2,5 \cdot 10^{-15}$$

или

$$v_r \approx 10^{-6} \text{ м/сек} = 10^{-4} \text{ см/сек} \quad (\text{см. рис. 155}).$$

Результаты эксперимента Паунда и Ребки, приведенные на стр. 209, получены путем сравнения двух опытных фактов:

1) результатов измерений сдвига частоты, когда источник находился внизу, а поглотитель — сверху, как и описано в этом упражнении (уменьшение энергии поднимающегося фотона), и 2) результатов измерений этого сдвига, когда источник находился сверху, а поглотитель — внизу (увеличение частоты опускающегося фотона). Следовало ожидать, что относительный сдвиг частоты в обоих случаях должен быть одинаковым, но разного знака; поэтому при вычитании одного результата из другого должен получаться «сдвиг», вдвое больший, чем просто при движении фотона вверх (Паунд и Ребка назвали такой сдвиг «сдвигом в два конца»). Половинное значение численных результатов, полученных Паундом и Ребкой, хорошо согласуется с результатами проведенных нами здесь вычислений.

### 89. Проверка парадокса часов с помощью эффекта Мессбауэра

При малых  $\beta$  коэффициент, характеризующий относительное различие в старении атомов-близнецов, можно приближенно представить, пользуясь первыми членами разложения бинома Ньютона:

$$1 - \sqrt{1 - \beta^2} \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2\right) = \frac{1}{2}\beta^2.$$

Число тик-так за 1 сек приблизительно равно  $\nu_0 \cdot (1 \text{ сек})$ ; поэтому накопление нехватки этих тик-так за одну секунду составит около

$$\nu_0 \left(\frac{\beta^2}{2}\right)_{\text{ср}} (1 \text{ сек}),$$

а относительная нехватка будет равна  $(\beta^2/2)_{\text{ср}}$ . Произвести оценку этой величины можно исходя из элементарной кинетической теории теплоты,

затронутой в обсуждении (см. текст упражнения). Мы получим

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \left( \frac{\beta^2}{2} \right)_{\text{ср}} = \frac{\frac{3}{2} kT}{m_{\text{Fe}} c^2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/град}}{57 \cdot (1,6 \cdot 10^{-27} \text{ кг}) (9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{сек}^2)} \cdot T = 2,5 \cdot 10^{-15} T,$$

т. е.  $2,5 \cdot 10^{-15}$  на градус. Этот результат хорошо согласуется (конечно, как оценочный) с экспериментальными данными Паунда и Ребки.

### 90. Симметричное упругое столкновение

Обозначим через  $T$  и  $p$  соответственно кинетическую энергию и импульс налетающей частицы, а через  $\bar{T}$  и  $\bar{p}$  — кинетическую энергию и абсолютную величину импульса каждой из рассеянных частиц. Тогда для рассматриваемого случая упругого рассеяния законы сохранения будут выражаться уравнениями

$$T + m + m = 2\bar{T} + 2m$$

или

$$T = 2\bar{T}$$

и

$$p = 2\bar{p} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Выражая импульс через кинетическую энергию, получим

$$p = \sqrt{E^2 - m^2} = \sqrt{(T + m)^2 - m^2} = \sqrt{T^2 + 2mT}.$$

Используя в уравнении сохранения импульса это выражение и равенство  $\bar{T} = T/2$ , найдем

$$\sqrt{T^2 + 2mT} = 2 \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 + 2m\left(\frac{T}{2}\right)} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Возведем этот результат в квадрат и найдем  $\cos \frac{\alpha}{2}$ :

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{T + 2m}{T + 4m}.$$

Это и требовалось получить. Формула (124) непосредственно следует отсюда ввиду указанного в условии упражнения тригонометрического тождества. Если упругое столкновение рассматривать в ньютоновском приближении, то кинетическую энергию  $T$  налетающей частицы следует считать много меньшей, чем массу покоя любой из частиц. Тогда из нашего уравнения следует  $\cos \alpha = 0$  и  $\alpha = 90^\circ$ , т. е. вывод механики Ньютона. В ультрарелятивистском случае кинетическая энергия  $T$  намного превышает массу покоя  $m$ , и поэтому можно пренебречь членом  $4m$  по сравнению с  $T$  в знаменателе правой части формулы (124). Тогда  $\cos \alpha = 1$  и  $\alpha = 0$  — обе частицы летят после столкновения вперед. Сравните этот вывод с результатом, полученным в упражнении 68, где показано, что одиночный фотон (самая релятивистская из всех частиц!) может спонтанно распасться на два фотона, лишь если эти последние движутся в том же направлении, что исходный фотон.

### 91. Давид и Голиаф — подробный пример

Решение дано в тексте.

### 92. Абсолютно неупругое столкновение

Решение этого упражнения проведено в гл. 2 на стр. 161 и 162, причем ответ записан в виде уравнения (92). Величина  $m_{\text{конечн}} = \bar{m} = m_1 + m_2$ , так как кинетическая энергия налетающей частицы  $T$  намного меньше, чем масса покоя любой из частиц. При этом условии еще допустим ньютоновский подход к данной задаче с его «принципом сохранения масс».

**93. Порождение частиц протонами**

а) Система частиц, изображенная на рис. 119, обладала импульсом до столкновения, но после этого ее импульс равен нулю. Поэтому такая реакция не могла бы удовлетворять закону сохранения импульса, а значит, она невозможна.

б) Рассмотрим кадр «после» на рис. 120. Взяв вместо разлетающихся четырех частиц конечного состояния такие же покоящиеся частицы, можно «сэкономить» избыточную кинетическую энергию и уменьшить на эту величину энергию, которая была первоначально придана двум сталкивающимся протонам (кадр «до», на рис. 120). Кинетическая энергия сталкивающихся частиц целиком переходит в массу покоя, лишь если все частицы конечного состояния покоятся.

в) Пусть  $E = T + m$  — энергия и  $p$  — импульс налетающего протона (рис. 121), а  $\bar{E} = \bar{T} + m$  и  $\bar{p}$  — соответственно энергия и импульс каждой частицы после реакции. Законы сохранения имеют вид:

$$T + m + m = 4(\bar{T} + m)$$

или

$$\bar{T} = \frac{1}{4} T - \frac{1}{2} m$$

и

$$p = 4\bar{p}$$

или

$$\sqrt{T^2 + 2mT} = 4\sqrt{\bar{T}^2 + 2m\bar{T}}.$$

Исключая из последнего уравнения  $\bar{T}$  и решая его затем относительно  $T$ , получим

$$T = 6m.$$

Это и есть пороговая энергия порождения протон-антипротонной пары. Так как масса покоя протона  $m$  составляет  $1 \text{ Бэв} = 10^9 \text{ эв}$ , то

$$T_{\text{порог}} = 6 \text{ Бэв}.$$

г) Из формулы в части в)

$$\bar{T} = \frac{1}{4} T - \frac{1}{2} m$$

находим, полагая  $T = 6m$ , что  $\bar{T} = m$ .

Энергетический баланс для пороговой реакции можно кратко охарактеризовать таким образом: из всей первоначальной кинетической энергии  $6m$  в массы покоя протона и антипротона превращается энергия  $2m$ , и все 4 частицы, имеющиеся по окончании реакции, приобретают кинетическую энергию  $m$  каждая.

д) Согласно уравнению (92) на стр. 162,

$$\bar{m}^2 = (m_1 + m_2)^2 + 2T_1 m_2,$$

в случае  $m_1 = m_2 = m$  и  $\bar{m} = 4m$  получим

$$16m^2 = 4m^2 + 2T_1 m$$

и

$$T_1 = 6m,$$

что уже было найдено в части в).

е) Собственно, как мишень тяжелое ядро ничем не примечательно. Лучше всего представлять себе, что налетающий протон сталкивается в мишени с одним-единственным протоном, а не сразу со многими (сравните это с выстрелом пуль в стаю птиц). Новым качеством протона в ядре является его движение там. Даже если это движение совершается с умеренной кине-

тической энергией ( $T_2 = 25 \text{ Мэв}$ ) навстречу налетающему протону, это уже дает огромное преимущество, позволяя получать пары при гораздо более низких энергиях. Законы сохранения имеют вид

$$m + T_1 + m + T_2 = 4(m + \bar{T}) \quad (\text{энергия}),$$

$$\sqrt{T_1^2 + 2mT_1} - \sqrt{T_2^2 + 2mT_2} = 4\sqrt{\bar{T}^2 + 2m\bar{T}} \quad (\text{импульс}).$$

Исключая из второго уравнения  $\bar{T}$  с помощью первого, можно найти  $T_1$ :

$$T_1 = 6m + 7T_2 - 4\sqrt{3T_2^2 + 6T_2m}.$$

Если кинетическая энергия  $T_2$  мала, приближенно получим

$$T_1 \approx 6m - 4\sqrt{6T_2m}.$$

Полагая  $T_2 = 25 \text{ Мэв}$ , найдем отсюда пороговую энергию

$$T_1 \approx 6000 \text{ Мэв} - 4 \cdot 400 \text{ Мэв} = 4400 \text{ Мэв},$$

при этом все равно, какое было выбрано ядро мишени — гелия или свинца! В формулу входит квадратный корень из энергии протона мишени, так как он дает скорость этого протона. Такое движение навстречу «обстреливаемому» протону делает его кинетическую энергию (в системе центра масс) много большей, чем в лабораторной системе отсчета. Какие-то  $25 \text{ Мэв}$  позволяют сэкономить целых  $1600 \text{ Мэв}$ !

#### 94. Порождение частиц электронами

Разберитесь сначала в решении упражнения 93. Воспользуйтесь уравнением (92) на стр. 162, приняв  $m_1 = m_e$  в качестве массы налетающего электрона,  $m_2 = m_p$  — массы протона мишени и  $\bar{m} = m_e + 3m_p$  — массы продуктов реакции (электрон, два протона и антипротон). Тогда это уравнение даст

$$(m_e + 3m_p)^2 = (m_e + m_p)^2 + 2T_e m_p,$$

откуда следует величина пороговой кинетической энергии электрона

$$T_e = 4m_p + 2m_e.$$

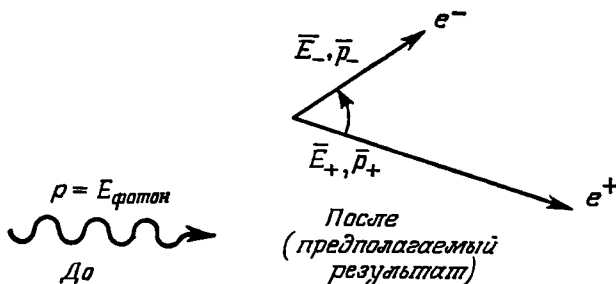
Масса покоя протона соответствует  $10^3 \text{ Мэв}$ , а электрона  $1/2 \text{ Мэв}$ , так что ею можно практически пренебречь по сравнению с массой протона. Поэтому пороговая энергия приблизительно равна  $4m_p = 4000 \text{ Мэв}$ .

#### 95. Фоторождение пары одиночным фотоном

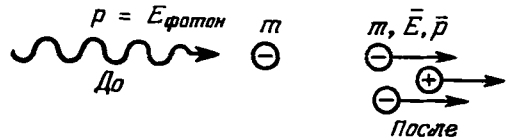
а) Предполагаемая реакция изображается диаграммой на рис. 156. Законы сохранения имеют вид:

$$E_{\text{фотон}} = \bar{E}_+ + \bar{E}_- \quad (\text{энергия}),$$

$$p = \bar{p}_+ - \bar{p}_- \quad (\text{импульс}).$$



Р и с. 156. Диаграмма предполагаемой реакции: слева одиночный фотон до реакции, справа — предполагаемый результат реакции (пара электрон и позитрон). Реакция не идет.



Р и с. 157. Диаграмма реально происходящей реакции: кроме фотона, в ней на начальной стадии должна участвовать заряженная частица с ненулевой массой покоя.

Вместо того чтобы рассматривать все компоненты 4-вектора энергии-импульса, достаточно будет взять его квадрат,

$$(\text{Энергия})^2 - (\text{Импульс})^2,$$

величина которого не должна изменяться в ходе реакции. Возводя в квадрат уравнения, описывающие законы сохранения, и вычитая полученные выражения друг из друга, найдем

$$\begin{aligned} (\text{Энергия})^2 - (\text{Импульс})^2 &= (\bar{E}_+^2 + 2\bar{E}_+\bar{E}_- + \bar{E}_-^2) - (\bar{p}_+^2 + 2\bar{p}_+\bar{p}_- + \bar{p}_-^2) = \\ &= E_{\text{фотон}}^2 - p_{\text{фотон}}^2. \end{aligned}$$

Вспомним, что разность  $E^2 - p^2$  в случае электрона равна просто  $m^2$ , а для фотона она дает нуль. Кроме того,  $2\bar{p}_+\bar{p}_- = 2p_+p_- \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между направлениями вылета электрона и позитрона. Разделив на 2, получим уравнение

$$m^2 + \bar{E}_+\bar{E}_- - \bar{p}_+\bar{p}_- \cos \varphi = 0$$

или

$$\cos \varphi = \frac{m^2 + \bar{E}_+\bar{E}_-}{\bar{p}_+\bar{p}_-}.$$

Однако  $\bar{E}_+ = \sqrt{m^2 + \bar{p}_+^2}$  всегда больше, чем  $\bar{p}_+$ , а  $\bar{E}_-$  всегда больше, чем  $\bar{p}_-$ . Значит, косинус равен величине, явно превышающей единицу, и поэтому ему не может соответствовать никакой реальный угол  $\varphi$ . Заключение: предполагаемая реакция невозможна.

Это можно доказать намного проще и изящнее, если перейти к системе центра масс предполагаемой электрон-позитронной пары. К такой системе отсчета, где полный импульс обращается в нуль, всегда можно перейти, если в рассматриваемой физической системе хотя бы у одной частицы масса покоя отлична от нуля. Но в этой системе в момент «до» (рис. 156) импульс исходного одиночного фотона никак не может быть равен нулю: иначе была бы равна нулю и энергия фотона, так как для фотонов  $E = p$ , и этого фотона попросту бы не существовало! Значит, предполагаемая нами реакция нарушает законы сохранения.

б) Рассуждения, проведенные в упражнении 93, показывают, что при пороговой реакции все ее продукты двигаются совместно с одинаковыми скоростями (рис. 157). Законы сохранения тогда записываются в виде

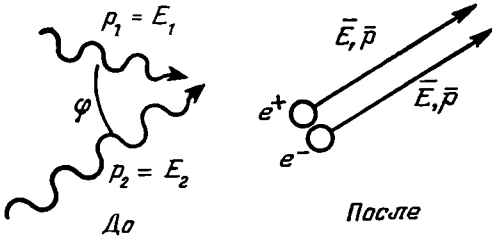
$$E_{\text{фотон}} + m = 3\bar{E}$$

и

$$p = E_{\text{фотон}} = 3\bar{p}.$$

Возводя в квадрат и вычитая друг из друга соответствующие части получающихся уравнений, найдем

$$E_{\text{фотон}}^2 + 2mE_{\text{фотон}} + m^2 - E_{\text{фотон}}^2 = 9(\bar{E}^2 - \bar{p}^2) = 9m^2.$$



Р и с. 158. Диаграмма реально происходящей реакции: до реакции два фотона, после реакции — электрон-позитронная пара. Показан случай порогового рождения пары, когда электрон и позитрон неподвижны относительно друг друга.

Отсюда следует величина пороговой энергии, равная

$$E_{\text{фотон}} = 4m = 4 \cdot (1/2 \text{ Мэв}) = 2 \text{ Мэв.}$$

### 96. Фоторождение пары двумя фотонами

Сначала рассмотрим пороговую реакцию, после которой возникающие электрон и позитрон не разлетаются (рис. 158; см. также упражнение 93). Запишем компоненты 4-вектора энергии-импульса до и после реакции и сравним их:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= 2\bar{E}, \\ \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= 2\bar{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Найдем квадрат этого 4-вектора:

$$(\text{Энергия})^2 - (\text{Импульс})^2 = E_1^2 + 2E_1E_2 + E_2^2 - p_1^2 - 2p_1p_2 \cos \varphi - p_2^2 = 4\bar{E}^2 - 4\bar{p}^2.$$

Полученное уравнение упрощается, если учесть, что разность  $E^2 - p^2$  равна 0 для фотонов и  $m^2$  для электронов или позитронов, а также что  $1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ . В результате найдем

$$E_1E_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = m^2.$$

Выполнение этого условия соответствует тому, что реакция идет на пределе (пороговое условие). Если слева будет стоять большая величина, то это значит, что энергии, которой два фотона обладают в системе центра масс (когда их суммарный импульс равен нулю), в принципе было бы достаточно для образования пары более массивных частиц, чем электрон и позитрон. Этот избыток энергии (величины в левой части равенства) означает также, что, если *на самом деле* рождается пара ( $e^+$ ,  $e^-$ ), то ее компоненты будут находиться в относительном движении и их кинетическая энергия не будет равна нулю в системе центра масс; иначе говоря, мы будем иметь дело уже с надпороговой реакцией.

### 97. Аннигиляция электрон-позитронной пары

а) В системе центра масс перед аннигиляцией полный импульс равен нулю. Значит, он должен быть равен нулю и после аннигиляции. Однако одиночный фотон не может обладать нулевым импульсом. Поэтому, чтобы закон сохранения импульса не нарушался, должно быть испущено по крайней мере два фотона (рис. 159).

б) Запишем закон сохранения энергии:

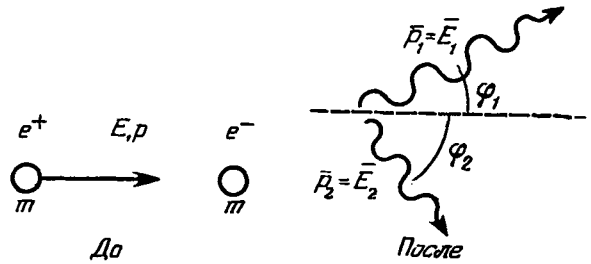
$$E + m = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$$

или

$$\bar{E}_2^2 = (E + m - \bar{E}_1)^2.$$

Закон сохранения импульса ясен из рис. 160.





Р и с. 159.

Воспользуемся законом косинусов

$$\bar{E}_2^2 = \bar{E}_1^2 + p^2 - 2p\bar{E}_1 \cos \varphi_1 = \bar{E}_1^2 + E^2 - m^2 - 2p\bar{E}_1 \cos \varphi_1.$$

Приравняв друг другу два выражения для  $\bar{E}_2^2$ , найдем

$$E^2 + m^2 + \bar{E}_1^2 + 2mE - 2E\bar{E}_1 - 2m\bar{E}_1 = \bar{E}_1^2 + E^2 - m^2 - 2p\bar{E}_1 \cos \varphi_1.$$

Отсюда следует выражение для  $\bar{E}_1$ :

$$\bar{E}_1 = \frac{m(m+E)}{E+m-p \cos \varphi_1} = \frac{m(2m+T)}{2m+T - \cos \varphi_1 \cdot \sqrt{T^2 + 2mT}}$$

или, наконец, в единицах массы электрона  $m$ ,

$$\frac{\bar{E}_1}{m} = \frac{1}{1 - \frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{1+2m/T}}}.$$

в) При заданной кинетической энергии сталкивающегося позитрона  $T$  максимальная энергия гамма-кванта реализуется при  $\cos \varphi_1 = 1$ , т. е.  $\varphi_1 = 0$ , и равна

$$\left(\frac{\bar{E}_1}{m}\right)_{\text{макс}} = \frac{1}{1 - (1+2m/T)^{-1/2}}.$$

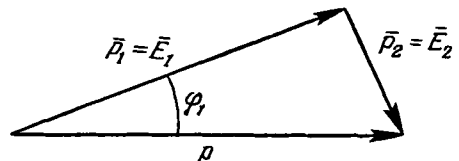
Минимальная энергия фотона соответствует  $\cos \varphi_1 = -1$ , т. е.  $\varphi_1 = \pi$ , и равна

$$\left(\frac{\bar{E}_1}{m}\right)_{\text{мин}} = \frac{1}{1 + (1+2m/T)^{-1/2}}.$$

г) При очень малых  $T$  (очень больших отношениях  $m/T$ ) максимальная и минимальная энергии приближенно равны друг другу:

$$\left(\frac{\bar{E}_1}{m}\right)_{\text{макс}} \approx \left(\frac{\bar{E}_1}{m}\right)_{\text{мин}} \approx 1 \quad (\text{малые } T).$$

Каждый фотон уносит энергию, равную энергии покоя одного электрона; первоначальной кинетической энергией можно пренебречь.



Р и с. 160.

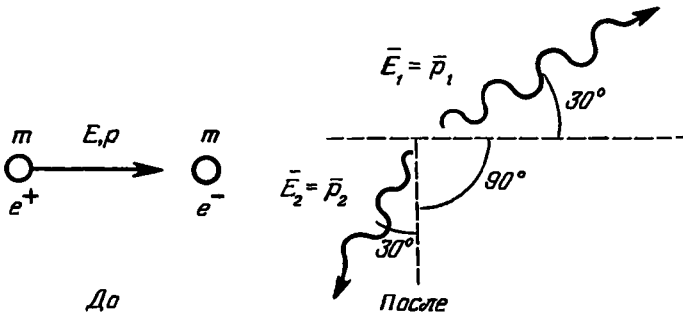


Рис. 161.

При очень больших  $T$  (очень малых отношениях  $m/T$ ) максимальная и минимальная энергии испущенных фотонов резко отличаются друг от друга:

$$\left(\frac{\bar{E}_1}{m}\right)_{\text{макс}} \approx \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{m}{T}\right)} = \frac{T}{m},$$

$$\left(\frac{\bar{E}_1}{m}\right)_{\text{мин}} \approx \frac{1}{2} \quad (\text{большие } T).$$

В этом случае самый богатый энергией из испущенных фотонов уносит с собой кинетическую энергию сталкивающегося позитрона, которая очень велика. Минимальная энергия здесь составляет половину массы покоя электрона.

#### 98. Проверка принципа относительности

а) Схему на рис. 122 можно представить в виде диаграммы (рис. 161). Законы сохранения записываются как

$$\begin{aligned} E + m &= \bar{E}_1 + \bar{E}_2, \\ p &= \bar{E}_1 \cos 30^\circ - \bar{E}_2 \sin 30^\circ, \\ 0 &= \bar{E}_1 \sin 30^\circ - \bar{E}_2 \cos 30^\circ. \end{aligned}$$

Из последних двух уравнений следует

$$\bar{E}_2 = \bar{E}_1 \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 0,58 \bar{E}_1,$$

и

$$p = \bar{E}_1 \left( \cos 30^\circ - \frac{\sin^2 30^\circ}{\cos 30^\circ} \right) = 0,58 \bar{E}_1.$$

Подставляя эти выражения в уравнение для сохранения энергии, найдем

$$E + m = \frac{p}{0,58} + p = 2,75p = 2,75 \sqrt{E^2 - m^2} = 2,75 \sqrt{E + m} \sqrt{E - m}$$

или

$$\sqrt{E + m} = 2,75 \sqrt{E - m}.$$

Возводя в квадрат, получим

$$E + m = 7,6 (E - m),$$

откуда следует величина энергии

$$E = 1,3m.$$

Кинетическая энергия налетающего позитрона, регистрируемого таким способом, равна

$$T = E - m = 0,3m = 0,3 \cdot 0,5 \cdot 10^6 \text{ эв} = 150 \text{ кэв}.$$

При этом скорость не близка к единице, и ее величину приходится находить непосредственным вычислением:

$$E = m \operatorname{ch} \theta, = m (1 - \beta^2)^{-1/2} = 1,3m, \\ 1 - \beta^2 = 0,59, \\ \beta = 0,64.$$

б) Следовало бы регистрировать разность времен между попаданиями гамма-квантов в счетчики  $A$  и  $B$ , расположенные на равных расстояниях от мишени. Если бы такая разность была обнаружена, она свидетельствовала бы о различии величины скорости света в зависимости от того, вперед или назад был он испущен движущейся частицей. Соответствующие экспериментальные результаты приведены на рис. 123.

99. Отождествление частиц по трекам в пузырьковой камере

а) Лабораторная система отсчета является одновременно и системой центра масс; в ней законы сохранения принимают вид

$$m_{\pi} = E_{\mu} + E_{\pi} = \sqrt{p_{\mu}^2 + m_{\mu}^2} + \sqrt{p_{\pi}^2 + m_{\pi}^2}, \quad p_{\mu} = 58,2m_e = p_{\pi}.$$

Подставим значение  $p$ , следующее из второго уравнения, в первое и используем значения масс покоя мезонов, указанные в условиях задачи. С точностью логарифмической линейки найдем

$$58m_e = \sqrt{(58,2m_e)^2 + m_{\pi}^2}.$$

Это уравнение заставляет думать, что  $m_{\pi}$  либо точно равняется нулю, либо намного меньше, чем  $m_e$ .

б) Спиновый момент импульса неизвестной частицы должен уничтожаться в сумме со спиновым моментом  $\mu^+$ -мезона  $\frac{1}{2} \hbar$ . Отсюда следует, что спиновый момент неизвестной частицы по абсолютной величине равен  $\frac{1}{2} \hbar$  и направлен в сторону, противоположную спиновому моменту  $\mu^+$ -мезона.

100. Накопительные кольца и встречные пучки

В лабораторной системе отсчета полная величина энергии, которая может реализоваться во взаимодействии, равна суммарной кинетической энергии сталкивающихся электронов, т. е.  $500 \text{ Мэв} + 500 \text{ Мэв} = 1000 \text{ Мэв} = 1 \text{ Бэв}$ , плюс энергия покоя этих электронов, т. е.  $1/2 \text{ Мэв} + 1/2 \text{ Мэв} = 1 \text{ Мэв}$ , которой можно пренебречь по сравнению с кинетической энергией. В любой другой системе отсчета полная величина энергии, которая может реализоваться во взаимодействии, будет такой же. На рис. 162 представлены ситуации в лабораторной системе и в системе отсчета ракеты. В последней один из электронов первоначально покоится; найдем кинетическую энергию другого. Частица 1 может покоиться в той системе, параметр скорости которой определяется соотношением

$$E = m \operatorname{ch} \theta,$$

или

$$\operatorname{ch} \theta, = \frac{E}{m} \approx \frac{T}{m} \approx 1000.$$

При столь больших скоростях из равенства (89),  $E \approx p$ , следует, что  $\operatorname{sh} \theta, \approx \operatorname{ch} \theta, \approx 1000$ . Поэтому формула преобразования энергии записы-



Р и с. 162.

вается для частицы 2 (с импульсом  $-p$ ) в виде

$$\begin{aligned} E'_2 &= E_2 \operatorname{ch} \theta_r - p_2 \operatorname{sh} \theta_r = E \operatorname{ch} \theta_r + p \operatorname{sh} \theta_r \approx 2E \operatorname{ch} \theta_r \approx 2E \frac{T}{m} \approx \\ &\approx (2 \cdot 500 \text{ Мэв}) \cdot 1000 = 10^6 \text{ Мэв} = 10^3 \text{ Бэв}. \end{aligned}$$

Такова кинетическая энергия, которую следует придать одиночному электрону, налетающему на покоящийся электрон, чтобы полная энергия, которая может реализоваться во взаимодействии, составляла 1000 Мэв.

Если взять для протонов (у которых  $m = 1 \text{ Бэв}$ )  $E'_2 = 10^3 \text{ Бэв}$ , то, читая предыдущие соотношения в обратном порядке, получим

$$2E_p \frac{T_p}{m} \approx 2 \frac{T_p^2}{m} \approx 10^3 \text{ Бэв}$$

или

$$T_p^2 = \frac{m}{2} \cdot 10^3 \text{ Бэв}^2 \approx 500 \text{ Бэв}^2, \quad T_p \approx 22 \text{ Бэв}.$$

Значит, протоны, «консервируемые» в накопительных кольцах, должны обладать энергией 22 Бэв, и полная энергия взаимодействия составит  $22 + 22 + 1 + 1 = 46 \text{ Бэв}$ .

#### 101. Де Бройль и Бор

Из упражнения 72 известно, что

$$E = p = \frac{h}{c^2} v.$$

однако

$$v = \frac{c}{\lambda},$$

так что

$$p = \frac{h}{\lambda c}$$

или

$$\lambda = \frac{h}{pc} = \frac{h}{p_{\text{обычн}}},$$

где  $p_{\text{обычн}} = pc$  — импульс, выраженный в обычных единицах. Потребуем, чтобы для электрона, движущегося по орбите вокруг ядра, выполнялось равенство

$$n\lambda = 2\pi r, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

или

$$\frac{nh}{p_{\text{обычн}}} = 2\pi r,$$

или

$$r p_{\text{обычн}} = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Отсюда следует, что орбитальный момент импульса электрона  $r p_{\text{обычн}}$  должен быть равен целому кратному  $\hbar$ , «кванта момента импульса».

Приравняем силу электрического притяжения  $KZe^2/r^2$  электрона (заряд  $e$ ) к ядру (заряд  $Ze$ ) центробежной силе

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{m^2 v^2}{m r} = \frac{(p_{\text{обычн}})^2}{m r},$$

необходимой для удержания электрона на круговой орбите. Постоянная  $K$  зависит от выбора системы единиц (в единицах СГС  $K = 1$ ; в системе СИ,

или МКС,  $K = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \text{ н} \cdot \text{м}^2 / \text{к}^2$ ):

$$\frac{(\rho_{\text{обычн}})^2}{mr} = \frac{KZe^2}{r^2}$$

или

$$(r\rho_{\text{обычн}})^2 = n^2 \hbar^2 = KZe^2 mr,$$

откуда получим

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{KZe^2 m}.$$

Формула (126а) получится, если использовать систему СИ ( $K = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0}$ ); формула (126б) — если положить  $K = 1$ .

Величину скорости  $\beta$  можно найти из формулы, справедливой в случае малых скоростей:

$$\beta = \frac{\rho_{\text{обычн}}}{mc} = \frac{n\hbar}{mrc} = \frac{n\hbar}{m c n^2 \hbar^2 / (KZe^2 m)} = \frac{KZe^2}{n\hbar c} = \frac{Ke^2}{\hbar c} \cdot \frac{Z}{n} = \frac{\alpha Z}{n}.$$

## 102. Видение посредством электронов

В формулу для импульса  $p = h/\lambda c$  подставим значения  $\lambda = 10^{-6}$  м и  $\lambda = 10^{-15}$  м, а затем найдем соответствующие значения энергии по формуле  $\frac{E}{m} = \sqrt{1 + (p/m)^2}$ . При  $\lambda = 10^{-6}$  м энергия получается приблизительно равной

$$\frac{E}{m} \approx 1 + 3 \cdot 10^{-12},$$

так что

$$T \approx 3 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Примем  $m = 0,5 \text{ Мэв}$ ; необходимая кинетическая энергия будет тогда равна

$$T \approx 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ эв}.$$

Чтобы электронный микроскоп обладал достаточной разрешающей способностью для наблюдения бактерий, электроны должны пропускаться через разность потенциалов не менее одного микровольта. Такие низкие напряжения на практике трудно поддерживать стабильно; более того, столь медленные электроны вовсе не способны пройти даже сквозь высушенную бактерию. Поэтому пользуются электронами с энергиями в несколько тысяч электрон-вольт, и это позволяет наблюдать детали строения бактерий.

При  $\lambda = 10^{-15}$  м энергия должна быть равна

$$\frac{E}{m} = 2,4 \cdot 10^8 \approx \frac{T}{m},$$

$$T = 2,4 \cdot 10^8 \cdot 0,5 \text{ Мэв} \approx 10^9 \text{ эв} = 1 \text{ Бэв}.$$

Для выявления деталей структуры протонов и нейтронов необходимы электроны, ускоренные не менее чем до таких энергий.

## 103. Прецессия Томаса

Все этапы решения этой задачи подробно изложены в тексте.

## 104. Трудности межзвездных полетов

а) Требуемую величину параметра скорости можно определить по коэффициенту замедления времени,  $\text{sh } \theta = 10$ . По «способам быстрой оценки для простых смертных» (см. табл. 8 на стр. 78) для параметра скорости приблизительно найдем  $e^\theta = 20$  или  $\theta = 3$ . Отношение начальной массы ракеты к конечной для одного этапа ускорения из состояния покоя до данного конечного значения параметра скорости (или для замедления от данного значения параметра скорости до состояния покоя) можно вычислить по формуле (110)

из упражнения 58:

$$\theta = \ln \frac{M_1}{M}.$$

Отсюда следует искомое отношение масс

$$\frac{M_1}{M} = e^\theta = 20.$$

Полезный груз ракеты равен  $10^5$  кг; поэтому суммарная масса полезного груза и горючего перед последним торможением при возвращении на Землю составляет  $20 \cdot 10^5$  кг. Но при *предшествовавшем* ускорении от далекой звезды к Земле ускорять приходится не только полезный груз, но и горючее, необходимое для конечного торможения. Поэтому при прощании со звездой полная масса космического корабля должна быть равна  $20 \cdot 20 \cdot 10^5$  кг. Продолжая эти рассуждения назад во времени вплоть до самого отлета с Земли, для исходного значения массы корабля получим

$$20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 10^5 \text{ кг} = 3,2 \cdot 10^{10} \text{ кг},$$

т. е. 32 миллиона тонн! Из этой общей массы полезный груз составляет всего 100 тонн, а остальное — горючее.

б) Полет в одну сторону (быстрое ускорение не в счет, важен лишь длительный полет по инерции, когда  $\text{ch } \theta = 10$ ) занимает 50 лет времени астронавта или  $50 \cdot 10 \text{ лет} = 500 \text{ лет}$  на Земле. Космический корабль летит почти со скоростью света:

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\text{ch}^2 \theta} = 10^{-2} = (1 - \beta)(1 + \beta) \approx 2(1 - \beta),$$

или

$$1 - \beta \approx 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

Поэтому он может достигнуть звезды, удаленной от нас самое большее на 500 световых лет. Все путешествие займет тысячу земных лет.

в) Коэффициент замедления времени равен  $\text{ch } \theta = 10$ , поэтому энергия атома водорода (масса покоя  $m$ ) составляет

$$E = m \text{ch } \theta = 10m$$

или

$$T = E - m = 9m \approx 9 \text{ Бэв}.$$

Лоренцево сокращение, происходящее в направлении движения, также определяется коэффициентом  $\text{ch } \theta = 10$ . Поэтому в системе отсчета ракеты, движущейся со своей полной скоростью, на каждый кубический сантиметр будет приходиться не один атом водорода, а целых десять, т. е.  $10 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^7$  атомов на один кубометр. В этой системе отсчета они будут лететь почти со скоростью света, так что в секунду на каждый квадратный метр лобовой поверхности космического корабля будет обрушиваться  $3 \cdot 10^8$  кубических метров частиц —  $3 \cdot 10^{15}$  атомов. Это в 300 раз превышает мощность пучка протонов высокой энергии от ускорителя.

Подведем итоги:

1) Расстояние (около 500 световых лет), достижимое в космическом полете человеком за время его жизни, намного меньше, чем расстояния до самых далеких из наблюдаемых нами звезд (от 5 до 9 миллиардов световых лет).

2) Даже в случае «идеальной» ракеты отношение начальной массы к конечной, необходимое для полета туда и обратно «всего лишь» на расстояние 500 световых лет, недопустимо велико.

3) Астронавт-человек нуждается во время такого полета в массивном защитном щите, что несовместимо с предположением об идеальной ракете, принятым при выводе двух предыдущих заключений.

# Некоторые физические постоянные

---

Скорость света в вакууме	$c = 2,997925 \times \begin{cases} 10^8 \text{ м/сек} \\ 10^{10} \text{ см/сек} \end{cases}$ $c = \begin{cases} 1 \text{ метр пути/метр светового времени} \\ 1 \text{ сантиметр пути/сантиметр светового времени} \end{cases}$
Гравитационная постоянная	$G = 6,670 \times \begin{cases} 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^{-2} \\ 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}^{-2} \end{cases}$
Постоянная Планка	$h = 6,6256 \times \begin{cases} 10^{-34} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{сек} \\ 10^{-27} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{сек} \end{cases}$
Квант момента импульса	$\hbar = 1,0545 \times \begin{cases} 10^{-34} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{сек} \\ 10^{-27} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{сек} \end{cases}$
Постоянная Больцмана	$k = 1,38054 \times \begin{cases} 10^{-23} \text{ джоуль/}^\circ\text{K} \\ 10^{-16} \text{ эрг/}^\circ\text{K} \end{cases}$
Элементарный заряд	$e = \begin{cases} 1,60210 \cdot 10^{-19} \text{ кулон} \\ 4,80298 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE или } e^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2}/\text{сек} \end{cases}$
Масса поюя электрона	$m_e = 9,1091 \times \begin{cases} 10^{-31} \text{ кг} \\ 10^{-28} \text{ г} \end{cases}$
Энергия покоя электрона	$m_e c^2 = 8,1869 \times \begin{cases} 10^{-14} \text{ джоуль} \\ 10^{-7} \text{ эрг} \end{cases}$ $= 0,510984 \text{ Мэв}$
Масса покоя протона	$m_p = 1,67252 \times \begin{cases} 10^{-27} \text{ кг} \\ 10^{-24} \text{ г} \end{cases}$
Энергия покоя протона	$m_p c^2 = 1,503186 \times \begin{cases} 10^{-10} \text{ джоуль} \\ 10^{-3} \text{ эрг} \end{cases}$ $= 938,232 \text{ Мэв}$
Масса Земли	$M_{\oplus} = 5,977 \times \begin{cases} 10^{24} \text{ кг} \\ 10^{27} \text{ г} \end{cases}$
Радиус сферы того же объема, что и Земля	$R_{\oplus} = 6,371 \times \begin{cases} 10^6 \text{ м} \\ 10^8 \text{ см} \end{cases}$
Среднее расстояние от Солнца до Земли (астрономическая единица)	$A_E = 1,495985 \times \begin{cases} 10^{11} \text{ м} \\ 10^{13} \text{ см} \end{cases}$
Средняя скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца	$v_e = 29,8 \text{ км/сек}$
Среднее расстояние от Земли до Луны	$3,84 \times \begin{cases} 10^8 \text{ м} \\ 10^{10} \text{ см} \end{cases}$
Масса Солнца	$M_{\odot} = 1,989 \times \begin{cases} 10^{30} \text{ кг} \\ 10^{33} \text{ г} \end{cases}$
Средний радиус Солнца	$R_{\odot} = 6,9598 \times \begin{cases} 10^8 \text{ м} \\ 10^{10} \text{ см} \end{cases}$

---

## Множители перехода

---

$$1 \text{ сек} = 2,997925 \times \left\{ \begin{array}{l} 10^8 \text{ м} \\ 10^{10} \text{ см} \end{array} \right. \text{ светового времени}$$

$$1 \text{ м светового времени} = 3,335640 \cdot 10^{-9} \text{ сек}$$

$$1 \text{ см светового времени} = 3,335640 \cdot 10^{-11} \text{ сек}$$

$$1 \text{ год} = 3,156 \cdot 10^7 \text{ сек} = 9,460 \times \left\{ \begin{array}{l} 10^{15} \text{ м} \\ 10^{17} \text{ см} \end{array} \right. \text{ светового времени}$$

$$1 \text{ км} = 0,6214 \text{ мили}$$

$$1 \text{ электронвольт (ев)} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ джоуль} = 1,602 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$$

---



# Резюме главы 1. СРАВНЕНИЕ ЕВКЛИДОВЫХ ПОВОРОТОВ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Евклидова геометрия трехмерного пространства

Лоренцева геометрия четырехмерного мира

*Задача: найти связь между*

координатами точки в исходной (нештрихованной) системе координат и координатами той же точки в штрихованной системе координат, повернутой относительно предыдущей

координатами (в том числе и временем) события в лабораторной системе отсчета (нештрихованные координаты) и координатами того же события в системе отсчета ракеты (штрихованные координаты)

*Для упрощения исследования берется частный случай, когда*

начала обеих систем совпадают  
поворот берется в плоскости  $x'y'$ , причем ось  $y'$  составляет с осью  $y$  угол  $\theta_r$  (наклон  $S_r = \text{tg } \theta_r$ ),  
 $z = z'$   
все координаты измеряются в метрах

начала совпадают при  $t = t' = 0$  (опорное событие)  
система отсчета ракеты движется в положительном направлении оси  $x$  лабораторной системы отсчета, причем параметр скорости равен  $\theta_r$  (скорость  $\beta_r = \text{th } \theta_r$ ),  $y = y'$ ,  $z = z'$   
все координаты измеряются в метрах (в том числе время, измеряемое в «метрах светового времени»)

*Сохраняющий одно и то же значение в обеих системах инвариант имеет вид*

$$(Длина)^2 = L^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(Пространственный интервал)^2 = \sigma^2 = - (Времениподобный интервал)^2 = -\tau^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

Таким образом,

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

Таким образом,

$$x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2$$

*При проверке выполнения последнего условия используется общее свойство*

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$   
тригонометрических функций

$\text{ch}^2 \theta - \text{sh}^2 \theta = 1$   
гиперболических функций

*Преобразование от штрихованных к нештрихованным координатам*

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta_r + y' \sin \theta_r = \\ &= \frac{x' + S_r y'}{\sqrt{1 + S_r^2}}; \\ y &= -x' \sin \theta_r + y' \cos \theta_r = \\ &= \frac{-S_r x' + y'}{\sqrt{1 + S_r^2}} \end{aligned}$$

(преобразование евклидова поворота)

$$\begin{aligned} x &= x' \text{ch } \theta_r + t' \text{sh } \theta_r = \\ &= \frac{x' + \beta_r t'}{\sqrt{1 - \beta_r^2}}; \\ t &= x' \text{sh } \theta_r + t' \text{ch } \theta_r = \\ &= \frac{\beta_r x' + t'}{\sqrt{1 - \beta_r^2}} \end{aligned}$$

(преобразование Лоренца)

*Преобразование от нештрихованных к штрихованным координатам*

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta_r - y \sin \theta_r = \\ &= \frac{x - S_r y}{\sqrt{1 + S_r^2}}; \\ y' &= x \sin \theta_r + y \cos \theta_r = \\ &= \frac{S_r x + y}{\sqrt{1 + S_r^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= x \text{ch } \theta_r - t \text{sh } \theta_r = \\ &= \frac{x - \beta_r t}{\sqrt{1 - \beta_r^2}}; \\ t' &= -x \text{sh } \theta_r + t \text{ch } \theta_r = \\ &= \frac{-\beta_r x + t}{\sqrt{1 - \beta_r^2}} \end{aligned}$$

*Фундаментальный закон сложения*

*наклонов:*

если некоторая линия образует угол  $\theta'$  с повернутой осью  $y'$ , то угол  $\theta$ , образуемый этой же линией с исходной осью  $y$ , определяется выражением

$$\theta = \theta' + \theta_r,$$

или для относительных наклонов

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{tg } \theta' + \text{tg } \theta_r}{1 - \text{tg } \theta' \text{tg } \theta_r},$$

$$S = \frac{S' + S_r}{1 - S' S_r}$$

*скоростей:*

если пуля движется в направлении оси  $x$  и параметр ее скорости равен  $\theta'$  в штрихованной системе отсчета ракеты, то параметр скорости пули относительно нештрихованной лабораторной системы отсчета  $\theta$  определяется выражением

$$\theta = \theta' + \theta_r,$$

или для относительных скоростей

$$\text{th } \theta = \frac{\text{th } \theta' + \text{th } \theta_r}{1 + \text{th } \theta' \text{th } \theta_r},$$

$$\beta = \frac{\beta' + \beta_r}{1 + \beta' \beta_r}$$

# Сводка формул главы 2, выраженных в единицах массы и в обычных единицах

Формулы, включающие $p, E, T$ , выраженные в единицах массы	Формулы, включающие $p_{\text{обычн}} = pc,$ $E_{\text{обычн}} = Ec^2$ $T_{\text{обычн}} = Tc^2,$ выраженные в обычных единицах	Номера Формул	
<b>Единицы измерения</b>			
Импульс	килограммы, граммы или, например, жетоны для автоматов, продающих подсолнечное масло	кг·м/сек, г·см/сек или (например) эстон-вершок/сек	
Энергия	килограммы, граммы или, например, те же жетоны	джоуль, Мэв, эрг или, например, фунт-вершок	
<b>Ньютоновские формулы (приближение малых скоростей)</b>			
	$p = mv,$ $T = \frac{1}{2} m\beta^2$	$p_{\text{обычн}} = mv$ $T_{\text{обычн}} = \frac{1}{2} m\beta^2 c^2 = \frac{1}{2} mv^2$	67, 68
<b>Релятивистские формулы</b>			
Компоненты 4-вектора энергии-импульса	$p^t = E = m \frac{dt}{d\tau}$ $p^x = m \frac{dx}{d\tau}$ $p^y = m \frac{dy}{d\tau}$ $p^z = m \frac{dz}{d\tau}$	$E_{\text{обычн}} = mc^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)$ $p^x_{\text{обычн}} = mc \left( \frac{dx}{d\tau} \right)$ $p^y_{\text{обычн}} = mc \left( \frac{dy}{d\tau} \right)$ $p^z_{\text{обычн}} = mc \left( \frac{dz}{d\tau} \right)$	77
Абсолютная величина импульса	$p = \sqrt{(p^x)^2 + (p^y)^2 + (p^z)^2} =$ $= m \frac{dr}{d\tau} =$ $= m \operatorname{sh} \theta =$ $= \frac{m\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$p_{\text{обычн}} =$ $= \sqrt{(p^x_{\text{обычн}})^2 + (p^y_{\text{обычн}})^2 + (p^z_{\text{обычн}})^2} =$ $= mc \left( \frac{dr}{d\tau} \right) =$ $= mc \operatorname{sh} \theta =$ $= \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}$	73
Полная энергия	$E = m \operatorname{ch} \theta = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$E_{\text{обычн}} = mc^2 \operatorname{ch} \theta = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$	81
Энергия покоя	$E_{\text{покоя}} = m$	$E_{\text{покоя обычн}} = mc^2$	83, 84
Кинетическая энергия	$T = m (\operatorname{ch} \theta - 1) =$ $= m \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$	$T_{\text{обычн}} = mc^2 (\operatorname{ch} \theta - 1) =$ $= mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$	85
4-вектор энергии-импульса	$E^2 - p^2 = m^2$	$E^2_{\text{обычн}} - p^2_{\text{обычн}} c^2 = m^2 c^4$	86
Выражение скорости частицы через ее импульс и энергию	$\beta = \operatorname{th} \theta = \frac{\operatorname{sh} \theta}{\operatorname{ch} \theta} = \frac{m \operatorname{sh} \theta}{m \operatorname{ch} \theta} = \frac{p}{E}$	$v = c \operatorname{th} \theta = \frac{p_{\text{обычн}} c^2}{E_{\text{обычн}}}$	90
Законы преобразования (штрихованные величины измерены в системе отсчета ракеты)	$E' = -p^x \operatorname{sh} \theta_r + E \operatorname{ch} \theta_r,$ $p^{x'} = p^x \operatorname{ch} \theta_r - E \operatorname{sh} \theta_r,$ $p^{y'} = p^y$ $p^{z'} = p^z$	$\frac{E'_{\text{обычн}}}{c} = -p^x_{\text{обычн}} \operatorname{sh} \theta_r + \frac{E_{\text{обычн}}}{c} \operatorname{ch} \theta_r,$ $p^{x'}_{\text{обычн}} = p^x_{\text{обычн}} \operatorname{ch} \theta_r - \frac{E_{\text{обычн}}}{c} \operatorname{sh} \theta_r,$ $p^{y'}_{\text{обычн}} = p^y_{\text{обычн}}$ $p^{z'}_{\text{обычн}} = p^z_{\text{обычн}}$	78
Обратные преобразования	$E = p^{x'} \operatorname{sh} \theta_r + E' \operatorname{ch} \theta_r,$ $p^x = p^{x'} \operatorname{ch} \theta_r + E' \operatorname{sh} \theta_r,$ $p^y = p^{y'}$ $p^z = p^{z'}$	$\frac{E_{\text{обычн}}}{c} = p^{x'}_{\text{обычн}} \operatorname{sh} \theta_r + \frac{E'_{\text{обычн}}}{c} \operatorname{ch} \theta_r,$ $p^x_{\text{обычн}} = p^{x'}_{\text{обычн}} \operatorname{ch} \theta_r + \frac{E'_{\text{обычн}}}{c} \operatorname{sh} \theta_r,$ $p^y_{\text{обычн}} = p^{y'}$ $p^z_{\text{обычн}} = p^{z'}$	

См. также рис. 91 на стр. 160

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому переводу . . . . .	5
<b>1. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ . . . . .</b>	<b>9</b>
1. Притча о землемерах . . . . .	9
2. Инерциальная система отсчета . . . . .	15
3. Принцип относительности . . . . .	21
4. Координаты события . . . . .	27
5. Инвариантность интервала . . . . .	33
6. Пространственно-временные диаграммы. Мировые линии . . . . .	41
7. Подразделения пространства-времени . . . . .	51
8. Преобразование Лоренца . . . . .	55
9. Параметр скорости . . . . .	65
<b>Упражнения к главе 1 . . . . .</b>	<b>79</b>
Предварительные замечания . . . . .	79
А. Интервал пространства-времени (разд. 5—7) . . . . .	81
Б. Преобразование Лоренца (разд. 8 и 9) . . . . .	84
В. Загадки и парадоксы . . . . .	92
Г. Основания теории . . . . .	96
Д. Приближение малых скоростей . . . . .	112
Е. Физика пространства-времени. Новые факты . . . . .	119
Ж. Геометрическое истолкование . . . . .	124
З. Винегрет . . . . .	129
<b>2. ИМПУЛЬС И ЭНЕРГИЯ . . . . .</b>	<b>139</b>
10. Введение. Импульс и энергия, выраженные в единицах массы . . . . .	139
11. Импульс . . . . .	142
12. 4-вектор энергии-импульса . . . . .	150
13. Эквивалентность энергии и массы покоя . . . . .	161
<b>Упражнения к главе 2 . . . . .</b>	<b>179</b>
А. Общие задачи . . . . .	181
Б. Эквивалентность энергии и массы покоя . . . . .	188
В. Фотоны . . . . .	191
Г. Допплеровское смещение . . . . .	202
Д. Столкновения . . . . .	210
Е. Атомная физика . . . . .	221
Ж. Межзвездные полеты . . . . .	228
<b>3. ФИЗИКА ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ . . . . .</b>	<b>229</b>
Притча о двух путешественниках . . . . .	239
<b>4. РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ . . . . .</b>	<b>253</b>
Решения упражнений к главе 1 . . . . .	253
Решения упражнений к главе 2 . . . . .	279
Некоторые физические постоянные . . . . .	315
Множители перехода . . . . .	316
Резюме главы 1 . . . . .	317
Сводка формул главы 2 . . . . .	318

## **УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!**

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие, просим присылать по адресу: Москва, И-278, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

**Э. Тейлор, Дж. Уэллер**

### **ФИЗИКА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ**

Редакторы *Л. В. Самсоненко,*  
*Э. А. Медушевская*  
Художник *В. А. Медников*  
Художественный редактор *В. М. Варлашин*  
Технический редактор *И. К. Дерва*  
Корректор *О. К. Румянцова*

Сдано в набор 6/XI 1970 г. Подписано к печати 8/IV 1971 г. Бумага № 1 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub> = 10 бум. л. Усл. печ. л. 28. Уч.-изд. л. 26,04. Изд. № 27/5952. Цена 2 р. 25 и. Зак. 543

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»**

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16 Главолиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР  
Москва, Трехпрудный пер., 9