

ВЛИЯНИЕ СРЕДЫ НА
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ
ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

М. А. ТЕФ-МИСЛАЕВИЧ

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒՄԻՆԻՑՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԳԵՄԻԱ
ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ԱՉԴԵՑՈՒՈՅՈՒՆԸ
ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԵԻՄԱԿԱՆ ՊՐՈՑԵՍՆԵՐԻ ՎՐԱ
ՄԵԾ ԷՆԵՐԳԻԱՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

М.А. ТЕР-МИКАЕЛЯН

ВЛИЯНИЕ СРЕДЫ НА
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ
ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ЕРЕВАН

1969

М. Л. Тер-Микаелян

**Влияние среды на электромагнитные процессы
при высоких энергиях**

Данная монография посвящается электромагнитным процессам в веществе, при рассмотрении которых нельзя отвлечься от взаимного влияния окружающих атомов.

Рассмотренные в монографии вопросы в основном относятся к физике высоких энергий, хотя методы и идеи, изложенные в книге, применяются и для нерелятивистских частиц.

Рассмотрению конкретных вопросов предшествует изложение метода псевдофотонов.

Далее излагаются вопросы когерентного тормозного излучения и рождения электронно-позитронных пар в монокристаллах.

Подробно рассмотрен так называемый „эффект плотности“.

В монографии излагается теория переходного излучения на одной границе и для пластинки вещества.

Большое внимание уделяется рассмотрению вопросов электромагнитного излучения при движении заряженных частиц через произвольную неоднородную среду.

Приводится обзор экспериментальных результатов, относящихся к вопросам, изложенным в монографии.

Книга представляет интерес для студентов старших курсов, аспирантов, научных сотрудников, работающих в области физики высоких энергий, электромагнитных излучений и твердого тела.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	9
Введение	11
Глава I. Метод псевдофотонов	17
§ 1. Введение	17
§ 2. Излучение релятивистского электрона в поле атома . .	22
§ 3. Угловое распределение и поляризация фотонов	35
§ 4. Рождение электронно-позитронных пар	39
§ 5. О границах применимости метода псевдофотонов	42
Глава II. Когерентное тормозное излучение в кристалле . .	45
§ 6. Введение	45
а) Краткий обзор работ (45). б) Интерференционные явления при рассеянии частицы на двухатомной молекуле (49). в) Критерий появления интерференционных явлений в тормозном излучении (54)	
§ 7. Вывод исходных формул для поперечников тормозного излучения и рождения электронно-позитронных пар в кристалле	59
§ 8. Когерентная часть поперечника тормозного излучения и рождения электронно-позитронных пар в кристалле	71
§ 9. Исследование интерференционных поперечников	78
§ 10. Угловое распределение и вопросы поляризации	92
§ 11. Эксперименты по когерентному излучению	108
§ 12. Излучение в тонком кристалле и границы применимости теории	118
Глава III. Радиационные процессы при высоких энергиях в аморфных средах	125
§ 13. Введение	125
§ 14. Влияние поляризации среды на тормозное излучение .	127
§ 15. Формулы для интенсивности и углового распределения с учетом поляризации среды	130

§ 16. О радиационных поправках к кулоновскому рассеянию с учетом среды	146
§ 17. Некоторые сведения из теории многократного рассеяния	153
§ 18. Влияние многократного рассеяния и поляризации среды на тормозное излучение в аморфном веществе (качественное рассмотрение)	160
§ 19. Влияние многократного рассеяния на тормозное излучение и рождение пар при высоких энергиях (точная классическая теория)	170
§ 20. Сводка результатов квантовомеханического расчета и угловое распределение фотонов	178
§ 21. Влияние поглощения среды на радиационные процессы в аморфной среде	183
§ 22. Экспериментальные работы, посвященные влиянию среды на радиационные процессы	203

Глава IV. Переходное излучение 210

§ 23. Введение	210
§ 24. Вывод формул переходного излучения	215
§ 25. Переходное излучение в пластинке	229
§ 26. Усложненные теории переходного излучения	239
а) Переходное излучение в случае среды, обладающей пространственной дисперсией (239). б) Релятивистский предел формул Гинзбурга—Франка и учет многократного рассеяния (243). в) Влияние резкости, шероховатости и движения границы на переходное излучение (252). г) Переходное излучение в ферродиэлектриках, анизотропных и гиротропных телах (254). д) Поверхностные волны (254).	
§ 27. Эксперименты по исследованию переходного излучения	257

Глава V. Излучение равномерно движущихся частиц в неоднородных средах 278

§ 28. Резонансное излучение	279
а) Введение (279). б) Квазиклассическое рассмотрение (290). в) Излучение в среде, изменяющей свойства по закону косинуса (299). г) Произвольная периодическая среда (308). д) Излучение в слоистой среде (310). е) Конкурирующие эффекты (322). ж) Влияние многократного рассеяния (328). з) Излучение в трехмерной периодической среде (343).	
§ 29. Эксперименты по резонансному излучению	346
а) Введение (346). б) Метод энергосыделения (351). в) Метод характеристического излучения (352). г) Метод комптоновского рассеяния (354). д) Эксперимент с μ -мезонами (355). е) Эксперименты с электронами (361).	

§ 30. Излучение заряженной частицы на случайных неоднородностях	370
а) Метод псевдофотонов (370). б) Излучение квантов произвольной частоты (374).	
§ 31. Дифракционное излучение быстрых частиц	379
а) Введение (379). б) Метод расчета (381). в) Пролет через круглое отверстие (383). г) Пролет через щель (385). д) Дифракционное излучение (точные методы) (387).	
Приложения	394
I. Приведение формулы Бете—Гайтлера к переменным \vec{q} . .	394
II. Учет тепловых колебаний	402
III. Основные свойства обратной решетки и вычисление структурного фактора	407
IV. К квантовой электродинамике в среде	412
V. Исследование интегрального уравнения (19.11)	420
VI. Интегрирование уравнения (19.10)	424
VII. Интегрирование формулы (20.15)	428
VIII. Вывод формул ионизационных потерь методом псевдофотонов	434
Литература	441
Основные обозначения	452

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая монография представляет собой попытку изложить с единой точки зрения некоторые задачи, связанные с электромагнитными процессами при высоких энергиях.

Соответственно рассматриваемым вопросам книгу можно разделить на пять частей: в первой главе методом псевдофотонов (метод Вайцзекера—Вильямса) рассматривается тормозное излучение и рождение пар на одном атоме. Эта глава является вводной в теорию электромагнитного излучения быстрых частиц и дает возможность читателям, не знакомым с квантовой электродинамикой, уяснить основное содержание книги. Следующие две главы посвящены вопросам тормозного излучения, рождения пар и рассеяния в кристаллах и аморфных средах. Наконец, в последних двух главах исследуется излучение, возникающее при прохождении заряженных частиц с постоянной скоростью через произвольную неоднородную среду.

При изложении мы стремились к максимально возможному упрощению математической стороны вопроса, отдавая предпочтение рассмотрению физической сущности явления. Изложение отдельных глав ведется таким образом, чтобы читатель, интересующийся содержанием одного какого-либо вопроса отдельной главы, мог при чтении опустить детальное изучение других глав.

Вопросами, изложенными в книге, автор начал заниматься в 1950 году в теоретическом отделе ФИАН им. П. Н. Лебедева под руководством Е. Л. Фейнберга, которому приносит глубокую благодарность.

В последние годы содержание книги служило предметом неоднократных обсуждений со многими физиками, среди которых мне особенно хочется отметить сотрудников Института Физических Исследований Академии наук Армянской ССР.

При написании книги автор использовал лекции, прочитанные им студентам-физикам Ереванского государственного университета.

Большую помощь при окончательной обработке и редактировании всей книги оказал мне С. М. Дарбинян, которому я приношу сердечную благодарность. Я благодарен также Б. В. Хачатрянцу за помощь в подборе материала при написании последних двух глав и изложении § 25 и 31. Хочу выразить благодарность В. Б. Пафому за написание приложения VII и обсуждение главы IV, И. И. Гольдману — за изложение приложения V и конца § 19, Р. О. Авакяну — за помощь в написании § 11, Д. М. Седракяну — за обсуждение пункта д) § 31 и Э. В. Сехпосяну — за помощь в подборе материала к гл. II. Ф. Р. Арутюнян оказал мне большую поддержку при написании § 27 и 29. Подбор материала и изложение этих двух параграфов основаны на материалах диссертации Ф. Р. Арутюняна.

Мне хочется поблагодарить И. М. Франка, а также Б. М. Болотовского за ознакомление с рукописью и ценные замечания, которые были использованы при окончательном редактировании книги.

ВВЕДЕНИЕ

В течение последних лет наблюдается повышенный интерес как теоретиков, так и экспериментаторов к чисто электромагнитным явлениям, возникающим при прохождении заряженных частиц через вещество. Это вызвано общим прогрессом физических исследований, который стимулировал постановку целого ряда задач по обнаружению новых эффектов в электромагнитной теории. Помимо чисто научного интереса, практическое использование более тонких свойств электромагнитных процессов является весьма перспективным в современной физике.

Книга посвящена рассмотрению только некоторых новых результатов в этой области. К ним относятся: тормозное излучение и рождение пар в кристаллах, эффекты, связанные с подавлением радиационных процессов в аморфных телах; вопросы, касающиеся переходного излучения, а также излучения равномерно движущихся частиц в неоднородных средах. Подбор материала, вошедшего в книгу, определялся не только интересами автора, но и тем, что он до сих пор нигде систематически не излагался. Автор сожалеет, что ему пришлось опустить изложение работ, связанных с ядерными дифракционными процессами при высоких энергиях, с излучением Черенкова — Вавилова и с теорией ионизационных потерь [1, 2, 3, 4].

Рассмотрение указанных в монографии вопросов ведется таким образом, чтобы читатель, не владеющий аппаратом квантовой электродинамики, имел возможность ознакомиться с основным содержанием книги. Тем не менее, при изложении первых трех глав, которые относятся в основном

к физике высоких энергий, иногда используются результаты квантовой электродинамики. Последние две главы не обязательно носят релятивистский характер и входящие в них вопросы рассмотрены на основе классической теории излучения.

Несмотря на то, что каждая глава представляет самостоятельный интерес и может быть изучена отдельно, перечисленные выше процессы при высоких энергиях связаны следующей общей характерной чертой*: при увеличении энергии всех участвующих в процессе частиц эффективные размеры области (в направлении движения частиц), которая существенна для формирования рассмотренных в книге процессов, увеличиваются, а не уменьшаются, как это может показаться на первый взгляд. При достаточно высоких энергиях эффективные расстояния становятся настолько большими, что необходимо рассматривать взаимодействие сразу со всей средой в целом. Это означает, что поперечники взаимодействия со средой, вообще говоря, нельзя представить в виде суммы независимых поперечников с отдельными атомами, как это обычно делается при высоких энергиях. Иными словами, окружающая среда будет существенным образом влиять на величину поперечников, вычисленных для одного центра.

На первый взгляд, постановка вопроса о влиянии среды на электромагнитные процессы при высоких и сверхвысоких энергиях (*когда длины волн всех участвующих в процессе частиц в 10^4 — 10^6 раз меньше междуатомных расстояний*) кажется парадоксальной**.

Обычно считают, что только в тех явлениях, в которых длина волны по крайней мере одной из участвующих в реакции частиц превышает расстояния между атомами или сравнима с ними, необходимо учитывать взаимодействие со всей средой в целом. Это означает, что при вычислении

* Этим, собственно говоря, определялось название книги.

** При рассмотрении излучения равномерно движущихся заряженных частиц в неоднородной среде под словами „междуатомное расстояние“ понимается расстояние между соседними неоднородностями.

поперечника какого-либо процесса нельзя рассматривать реакции на отдельных атомах независимо друг от друга. Так, например, если рассматривать процессы с фотонами, длина волны которых превышает междуатомные расстояния, то нужно пользоваться макроскопическими уравнениями электродинамики. Введение диэлектрической и магнитной восприимчивости является учетом взаимодействия фотонов со всей средой в целом. При таком рассмотрении возникает целый ряд новых явлений, не сводящихся к явлениям, происходящим на отдельном атоме. Интересным примером такого типа, имеющим большое практическое значение, является излучение Вавилова — Черенкова. Укажем еще одно явление, широко используемое на практике, при котором необходимо рассматривать всю среду в целом. Оно возникает при рассеянии γ -лучей или электронов в кристалле. Если длина волны γ -лучей или электронов сравнима с междуатомными расстояниями, то в широком диапазоне углов возникают интерференционные явления, приводящие к рассеянию, резко отличающемуся от комптоновского или резерфордовского рассеяния на отдельном атоме.

При рассмотрении же процессов, происходящих при высоких энергиях, обычно отвлекаются от взаимного влияния соседних атомов и представляют поперечник взаимодействия со всей средой в виде суммы поперечников для отдельно взятых центров. Такой подход оправдывается обычно тем, что длины волн λ всех участвующих в процессе высокоэнергичных частиц значительно меньше расстояний d между атомами.

Однако в целом ряде работ (которые будут детально проанализированы ниже) было показано, что и при высоких энергиях, когда длины волн всех частиц пренебрежимо малы по сравнению с междуатомными расстояниями, учет среды в некоторых процессах является необходимым. При этом оказалось, что, вообще говоря, только действие тех атомов, которые лежат на пути вызывающей реакцию частицы, нельзя рассматривать изолированно друг от друга.

Наиболее удивительным оказался тот факт, что чем выше энергия начальной частицы и чем больше направлен-

ность процесса, тем существеннее становится влияние среды. Отмеченные здесь обстоятельства легко уяснить, если вспомнить, что критерием перехода к независимым друг от друга актам взаимодействия является не малость длин волн по сравнению с расстояниями между атомами, а условие

$$q_i \gg \hbar/d_i. \quad (1)$$

Здесь q_i — импульс, переданный среде в данной реакции, в данном направлении, d_i — проекция на то же направление вектора \vec{d} , определяющего расстояние между двумя атомами, \hbar — постоянная Планка, деленная на 2π ($\hbar = 1,05 \times 10^{-27}$ эрг сек). Критерий (1) вытекает из соотношения неопределенностей. Действительно, всякая ограниченность в пространстве влечет неопределенность в импульсе. Поэтому, чтобы размеры не играли роли, необходимо и достаточно, чтобы характерные изменения импульсов в изучаемом процессе (т. е. импульс, передаваемый среде) превышали неопределенность в импульсе \hbar/d_i , т. е. выполнялось условие (1).

Условие (1) можно получить и иным способом. Рассмотрим некоторый процесс рассеяния на двух центрах с потенциалом $V(\vec{r}) + V(\vec{r} + \vec{d})$, где \vec{d} — расстояние между центрами (подробнее см. § 6, пункт б)). Обозначим через $\hbar k_{1,i2}$ импульсы частицы до и после рассеяния. По теории возмущений матричный элемент такого процесса определяется интегралом

$$\begin{aligned} & \int \left[V(\vec{r}) + V(\vec{r} + \vec{d}) \right] e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}} d\vec{r} = \\ & = \left[1 + e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{d}} \right] \int V(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}} d\vec{r}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в случае $(k_1 - k_2)_i d_i = \frac{1}{\hbar} q_i d_i \gg 1$ (по дважды встречающемуся индексу производится суммирование) центры действуют независимо друг от друга.

Действительно, вследствие быстрой осцилляции экспоненты в сечении выражение $\left| 1 + e^{i(k_1 - \vec{k}_2) \vec{d}} \right|^2$ можно заменить его средним значением, равным 2. Тогда, как и следовало ожидать, эффективное сечение на двух центрах будет отличаться от сечения на одном центре в два раза.

В обратном же случае $q\vec{d} \ll \hbar$ воздействие обоих центров на процесс происходит когерентно, выражение в квадратных скобках равно двум и сечение процесса на двух центрах в 4 раза больше эффективного сечения процесса на одном центре. Могут осуществляться и промежуточные случаи.

Если процесс не характеризуется резко выраженным угловым распределением, то условие (1), например для рассеяния на неподвижном центре, переходит в условие

$$\lambda \ll d, \quad (2)$$

где λ равна длине волны налетающей частицы: $\lambda = \hbar/p$.

При высоких же энергиях появляется резко выраженная направленность и (2) не следует из (1). Покажем, что условие (1) перестает выполняться (при достаточно высоких энергиях и резко выделенной направленности процесса) для импульса, передаваемого среде вдоль направления движения первоначальной частицы (продольно передаваемый импульс). Рассмотрим произвольный процесс, происходящий при высокой энергии (рассеяние, излучение, рождение частицы и т. п.).

Обозначим через E и \vec{p} энергию и импульс частицы, вызывающей данную реакцию, и пусть E_k и p_k — энергия и импульс k -ой частицы после реакции. Будем считать, что процесс происходит на неподвижных центрах, так что передачей энергии среде можно пренебречь. Напишем законы сохранения энергии и компоненты импульса вдоль движения начальной частицы:

$$E - \sum_k E_k = 0, \quad (3)$$

$$p - \sum_k \frac{\vec{p}_k p}{p} = q_{\parallel}, \quad (4)$$

где q_{\parallel} — импульс, переданный среде вдоль направления движения частицы, вызывающей данную реакцию.

При релятивистских энергиях $p \sim E$, $p_k \sim E_k$ и, если направленность процесса велика (т. е. углы между векторами \vec{p}_k и \vec{p} малы), то $\vec{p}_k \vec{p} \sim p_k p$. Тогда из (3) и (4) следует, что q_{\parallel} может стать очень малым. При этом условие (1) для продольно передаваемого импульса перестанет выполняться. В этом случае влияние среды в продольных направлениях учитывать необходимо.

Из вывода также видно, что чем выше энергия всех частиц и чем больше направленность процесса, тем меньше q_{\parallel} и тем существеннее становится влияние соседних атомов. Что касается передачи импульса среде в направлении, перпендикулярном движению, то она в зависимости от энергии налетающей частицы и рассматриваемого конкретного процесса может быть, вообще говоря, произвольной.

Во избежание недоразумений отметим, что при выполнении неравенства, обратного (1), влияние среды учитывать необходимо, однако приведет ли учет среды к малым или большим изменениям полных поперечников будет зависеть от того, какую долю в полный поперечник вносят соударения с проекциями передаваемого импульса, меньшими \hbar/d_i . В процессах, которые рассматриваются ниже, вклад в поперечник от малых продольно передаваемых импульсов оказывается основным, поэтому и изменение поперечников происходит по порядку величины.

Приведенные выше аргументы, указывающие на существенность больших продольных расстояний, были использованы в целом ряде работ, появившихся за последние годы. В последующих главах рассмотрены наиболее существенные, на наш взгляд, результаты, полученные в этой области.

I

МЕТОД ПСЕВДОФОТОНОВ

(Метод Вейцзекера—Вильямса,
метод прицельных параметров)

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи квантовой электродинамики, решаемые стандартными методами теории возмущений, нередко требуют длительных вычислений. В связи с этим широкое распространение получил простой приближенный метод расчета, предложенный Ферми [5] и детально развитый Вильямсом [6]. В настоящей главе рассматривается применение этого метода к вопросам тормозного излучения и рождения электронно-позитронных пар в поле атома.

В § 2 излагается вывод формул для поперечника тормозного излучения. Этому вопросу посвящена известная работа Вейцзекера [7]. В § 3 приводятся формулы для углового распределения и поляризации фотонов тормозного излучения; в § 4 получены выражения для поперечников рождения электронно-позитронных пар и, наконец, § 5 посвящен вопросу о пределах применимости метода псевдофотонов. Мы стараемся подчеркнуть, что метод псевдофотонов можно изложить таким образом, чтобы (для малых передаваемых ядру импульсов) его точность соответствовала бы точности теории возмущений. Формулы, полученные в этой главе, используются при рассмотрении вопросов ин-

терференционного (когерентного) излучения в кристаллах. Однако мы преследовали в основном другую цель, излагая метод псевдофотонов. Используя его, мы хотели наиболее простым и наглядным способом ввести читателя в круг вопросов, связанных с радиационными процессами при высоких энергиях.

Прежде чем переходить к расчетной части, рассмотрим физическую сторону метода псевдофотонов [5, 6, 7, 14]. Сущность метода псевдофотонов сводится к замене поля частицы на поле световых волн. Выясним, когда это можно сделать. Равномерно движущаяся частица с зарядом Ze и скоростью \vec{v} создает в точке, отстоящей от заряда на расстоянии $\vec{r}(vt, \rho)$, электрическое и магнитное поля, напряженности которых даются хорошо известными выражениями (см., например, [8] либо формулы (2.7) следующего параграфа):

$$\vec{E} = \gamma \frac{Ze \vec{r}}{(\rho^2 + v^2 t^2 \gamma^2)^{3/2}}, \quad \vec{H} = \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{E}], \quad (1.1)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (1.2)$$

Координата ρ определяется проекцией вектора \vec{r} на плоскость, перпендикулярную направлению траектории, проекция \vec{r} на направление движения отсчитывается от местонахождения заряда (который расположен в начале системы координат) и определяется величиной vt (см. рис. 1). Из выражений (1.1) и (1.2) следует, что в то время, как магнитное поле всегда перпендикулярно скорости \vec{v} , электрическое поле имеет компоненту, направленную вдоль скорости \vec{v} . Кроме того, по абсолютной величине напряженность магнитного поля в v/c раз меньше напряженности электрического поля. В этом состоит основное отличие

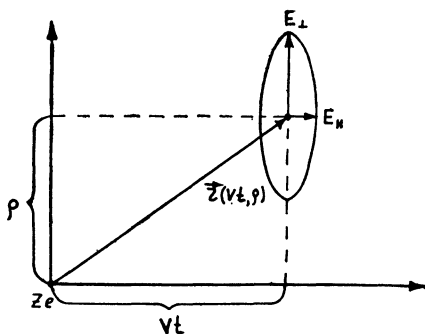
электромагнитного поля частицы от поля световых (плоских) волн, для которых векторы электрического и магнитного полей не только взаимно перпендикулярны и равны друг другу, но и перпендикулярны направлению распространения. Легко, однако, заметить, что при $v \rightarrow c$ электромагнитное поле частицы приобретает свойства электромагнитных волн. Легко видеть, что продольная компонента электрического поля

$$E_{\parallel} = \gamma \frac{Zevt}{(\rho^2 + v^2 t^2 \gamma^2)^{3/2}} \quad (1.3)$$

при $v \rightarrow c$ становится малой по сравнению с поперечной составляющей

$$E_{\perp} = \gamma \frac{Zep}{(\rho^2 + v^2 t^2 \gamma^2)^{3/2}} \quad (1.4)$$

Рис 1. Электрическое поле быстро движущейся частицы.



Действительно, времена, характеризующие действие поля в точке r — „времена ударов“, определяются знаменателями выражений (1.3) и (1.4) и равны

$$t_{эф} \sim \frac{\rho}{v} \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (1.5)$$

В течение промежутков времени $t_{эф}$ перпендикулярная составляющая электрического поля в γ раз больше параллельной составляющей. Для моментов времени, значительно пре-

вышающих $t_{эф}$, действием полей \vec{E} и \vec{H} можно пренебречь, поскольку \vec{E} быстро уменьшается с увеличением расстояния. Это означает, что при $v \rightarrow c$ поле заряженной частицы сконцентрировано на расстояниях порядка $vt_{эф}$ от плоскости, содержащей частицу и перпендикулярной направлению ее движения. Принято говорить, что в каждой точке r электрическое поле движущейся частицы имеет дискообразную (блинообразную) форму, вытянутую вдоль E_{\perp} и сплюснутую вдоль E_{\parallel} (см. рис. 1). При $v \rightarrow c$ толщина диска стремится к нулю, т. е. поле становится поперечным. Поскольку при $v \rightarrow c$ одновременно и $|\vec{H}| \rightarrow |\vec{E}|$, электромагнитное поле заряженной частицы приобретает свойства электромагнитных волн, и действие частицы будет эквивалентно действию набора фотонов различной частоты. Чтобы получить спектральную составляющую переменного во времени поля частицы, необходимо разложить напряженности \vec{E} и \vec{H} в интеграл Фурье по времени. Поскольку $E_{\parallel} \ll E_{\perp}$, имеем:

$$E_{\omega} = \gamma \frac{Ze\rho}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t} dt}{(\rho^2 + v^2 t^2 \gamma^2)^{3/2}}. \quad (1.6)$$

Для частот, удовлетворяющих условию

$$\omega \ll \omega_{\max} = \frac{v}{\rho} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (1.7)$$

$$E_{\omega} = \frac{Ze}{\pi v \rho}. \quad (1.8)$$

Для частот, превышающих ω_{\max} , напряженность E_{ω} резко уменьшается.

Для того чтобы определить поток фотонов частоты ω , проходящий через площадку в 1 см^2 , расположенную на при-

цельном расстоянии ρ , перпендикулярно направлению движения частицы, необходимо рассчитать поток вектора Пойнтинга S_ρ :

$$S_\rho = \frac{c}{4\pi} \int [\vec{E}\vec{H}]_{\parallel} dt = c \int_0^{\infty} E_\omega^2 d\omega = \int_0^{\infty} S_{\omega\rho} d\omega, \quad (1.9)$$

$$S_{\omega\rho} = cE_\omega^2 = \frac{Z^2 e^2 c}{\pi^2 v^2 \rho^2}. \quad (1.9')$$

Для получения полного потока фотонов частоты ω , проходящих через всю плоскость, перпендикулярную направлению скорости частицы, выражение (1.9) необходимо проинтегрировать по всем „параметрам удара“ ρ , от ρ_{\min} до ρ_{\max} :

$$S_\omega d\omega = \frac{2Z^2 e^2 c}{\pi v^2} \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} d\omega. \quad (1.10)$$

Следовательно, действие быстрой частицы с зарядом Ze можно заменить набором фотонов частоты ω , число которых равно

$$n_\omega d\omega = \frac{S_\omega}{\hbar\omega} d\omega = \frac{2Z^2 e^2 c}{\pi\hbar v^2} \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}. \quad (1.11)$$

Значения параметров ρ_{\max} и ρ_{\min} определяются конкретной постановкой задачи. Зная поперечник взаимодействия фотонов частоты ω с веществом, мы можем, используя формулу (1.11), определить соответствующий поперечник взаимодействия и для заряженных частиц:

$$\sigma_{\text{частиц}} = \int n_\omega \sigma(\omega) d\omega. \quad (1.12)$$

Такая процедура была впервые предложена Э. Ферми [5] при расчете ионизации атомов заряженными частицами. При этом Ферми использовал известные в то время экспериментальные данные для фотоэффекта. Задача относилась к нерелятивистским частицам и правомочность использования метода псевдофотонов в этом случае определялась тем, что действием магнитного поля при ионизации атома вообще можно было пренебречь. Отсюда следует, что всегда

можно добавить к электрическому полю частицы такое магнитное поле, которое даст возможность использовать метод псевдофотонов.

Перейдем теперь к изложению расчетной части метода псевдофотонов. При изложении мы следуем работе [9].

§ 2. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ АТОМА

Рассмотрим излучение релятивистского электрона, движущегося вдоль оси x в отрицательном направлении* с начальной скоростью \vec{v} (рис. 2а). Потенциал ядра (с учетом электронной экранировки атома) в точке нахождения электрона \vec{r} равен

$$\varphi = \frac{Ze}{r} e^{-r/R}; \quad R = R_0 Z^{-1/3}, \quad (2.1)$$

где R_0 — боровский радиус атома водорода, Ze — заряд ядра. Экспоненциальная экранировка используется в тексте только из-за простоты написания формул. Там, где это необходимо ее легко заменить более точной экранировкой (см. главу II). Разложим φ в тройной интеграл Фурье:

$$\varphi = \int \varphi_k e^{ik\vec{r}} d\vec{k}, \quad d\vec{k} = dk_1 dk_2 dk_3 \quad (2.2)$$

$$\varphi_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi Ze}{k^2 + R^{-2}}.$$

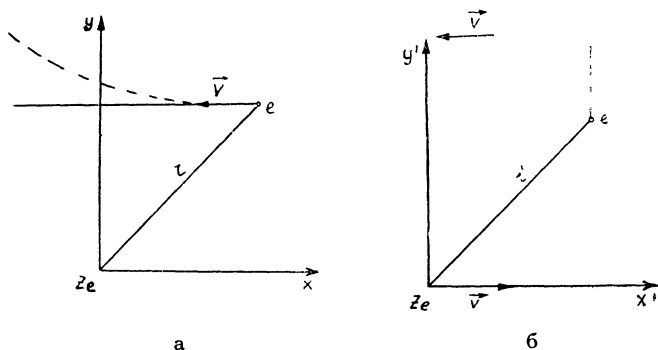
Скорость электрона при столкновении с ядром изменяется и это является причиной излучения. Ядро мы будем предполагать в дальнейшем бесконечно тяжелым и отдачей ядра при рассеянии электрона пренебрегать.

Перейдем в систему координат, движущуюся относительно первоначальной системы со скоростью \vec{v} . В новой

* Такой выбор направления движения электрона будет удобен для дальнейших вычислений.

системе координат электрон до рассеяния покоится, а ядро (поскольку отдачей пренебрегается) движется с постоянной скоростью \vec{v} вдоль оси x (рис. 2б) в течение всего процесса. Легко сообразить, что именно то обстоятельство, что скорость ядра является постоянной, делает целесообразным переход в движущуюся систему координат. Все величины в новой системе координат будем обозначать штрихованными символами. В книге будет использоваться четырехмерная координата x^ν ($x^0 = ct$, $x^{1,2,3} = \vec{x}$) и четырехмерный векторный потенциал A^ν ($A^0 = \varphi$, $A^{1,2,3} = \vec{A}$). Переход к новой системе координат осуществляется с помощью преобразования Лоренца (см., например, [8, 10]):

$$A'^\nu = \alpha_\mu^\nu A^\mu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.3)$$



а

б

Рис. 2. а. Движение электрона (пунктирная линия) в системе координат, где покоится ядро.

б. Смещение электрона (пунктир) в системе координат, где электрон до процесса столкновения покоился.

По дважды повторяющемуся индексу производится суммирование от 0 до 3. Матрица преобразования Лоренца определяется следующим выражением:

$$\alpha_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Операция опускания и поднимания индексов $A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}$ осуществляется с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}$ ($g_{00} = 1$; $g_{\mu\nu} = -1$, при $\mu = \nu = 1, 2, 3$ и $g_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$). γ и β определяются выражениями (1.2). После преобразования отличные от нуля компоненты потенциала в новой системе координат даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A'_x &= \frac{Ze}{2\pi^2} \beta \gamma \int \frac{\exp[i(k_2 y + k_3 z)]}{k^2 + R^{-2}} e^{i\gamma k_1(x' - vt')} d\vec{k}, \\ \varphi' &= \frac{Ze}{2\pi^2} \gamma \int \frac{\exp[i(k_2 y + k_3 z)]}{k^2 + R^{-2}} e^{i\gamma k_1(x' - vt')} d\vec{k}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Координаты x , y , z , t выражены через x' , y' , z' , t' согласно преобразованиям Лоренца:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' - vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' - \frac{1}{c^2} vx'\right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя (2.5), найдем электрическое и магнитное поля в системе координат где электрон до столкновения покоился:

$$\begin{aligned} E'_x &= -\frac{iZe}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_1 e^{i(k_2 y + k_3 z)}}{k^2 + R^{-2}} e^{i\gamma k_1(x' - vt')} d\vec{k}, \\ E'_y &= -\frac{iZe}{2\pi^2} \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_2 e^{i(k_2 y + k_3 z)}}{k^2 + R^{-2}} e^{i\gamma k_1(x' - vt')} d\vec{k}, \\ E'_z &= -\frac{iZe}{2\pi^2} \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_3 e^{i(k_2 y + k_3 z)}}{k^2 + R^{-2}} e^{i\gamma k_1(x' - vt')} d\vec{k}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} H'_x &= 0, \\ H'_y &= -\beta E'_z, \\ H'_z &= \beta E'_y. \end{aligned}$$

Формулы (2.7) определяют поле атома в точке x', y', z' в момент t' . Из последних выражений непосредственно следует, что при $\beta \rightarrow 1$ компонентой электрического поля вдоль движения E'_x по сравнению с E'_y и E'_z можно пренебречь. Можно также принять, что $H'_z = E'_y$ и $H'_y = -E'_z$. Тогда электромагнитное поле быстро движущегося ядра приобретает свойства плоской электромагнитной волны и (2.7) можно рассматривать как разложение по плоским волнам. Роль частоты ω играет величина

$$\omega_k = k_1 v \gamma. \quad (2.8)$$

Найдем поток энергии через единицу поверхности в точке нахождения электрона за время пролета ядра:

$$S_{\rho} = \frac{c}{4\pi} \int [E'_y{}^2 + E'_z{}^2] dt'. \quad (2.9)$$

Чтобы привести наши расчеты в соответствие с квантовой электродинамикой (где электрон описывается плоской волной), необходимо вместо одного электрона рассматривать пучок электронов с плотностью 1 электрон в 1 см^3 , движущихся на различных прицельных расстояниях от ядра. Фактически это сводится к интегрированию выражения (2.9) по всем возможным значениям y и z . Обратим внимание, что при значениях параметра удара

$$\rho = \sqrt{z^2 + y^2} \sim \frac{\hbar}{mc} = \lambda$$

уже нельзя пренебрегать чисто квантовыми эффектами. В частности, нельзя выбрать систему координат, где электрон покоится, а ядро движется на расстоянии $\rho \sim \lambda$, поскольку из-за соотношения неопределенностей неопределенность импульса электрона будет порядка mc . Тем не менее проинтегрируем выражение (2.9) по всем возможным прицельным параметрам, но будем считать, что окончательный результат, если его рассматривать как функцию k_2 и k_3 , является правильным только в интервале значений k_2 и k_3 от нуля до значений порядка $1/\lambda$. Физически это означает (см. § 5), что классический метод расчета дает правильный результат при из-

лучении таких квантов, при которых ядру передается импульс в направлении, перпендикулярном первоначальному движению электрона, меньший mc .

Интегрируя выражение (2.9), мы получаем:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} S_p dy dz = \frac{Z^2 e^2 \gamma}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 dk_3 \int \frac{k_2^2 + k_3^2}{(k^2 + R^{-2})^2} dk_1.$$

Если мы разделим поток энергии в интервале $k_1, k_1 + dk_1$ на энергию псевдокванта, равную $\hbar k_1 c \gamma$ ($v \sim c$), то получим полное число псевдоквантов в интервале $k_1, k_1 + dk_1$:

$$n_{k_1} dk_1 = \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_2^2 + k_3^2}{k_1 (k^2 + R^{-2})^2} d\vec{k}. \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) будет неоднократно использоваться в дальнейшем изложении. По сравнению с приближенной формулой (1.11) интеграл в формуле (2.10) определяется строго.

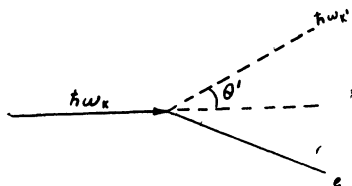
Перейдем теперь к вычислению поперечников тормозного излучения. Псевдокванты с различными значениями круговой частоты ω_k независимо друг от друга рассеиваются на электроны (это является следствием применимости теории возмущений, см. рассмотренный ниже пример). Ясно, что рассеянные псевдокванты в системе покоя электрона есть не что иное, как тормозные кванты в системе покоящегося ядра. Поперечник тормозного излучения мы получим, если умножим полное число псевдоквантов с частотой от ω_k до $\omega_k + d\omega_k$ на поперечник рассеяния (формула Клейна—Нишины) и преобразуем все величины в полученной таким образом формуле к лабораторной системе. Поперечник рассеяния на свободном электроны равен (мы отвлекаемся здесь от вопросов поляризации, см. § 3)

$$d\Phi = \frac{r_0^2 d\Omega'}{2} - \frac{\omega_k'^2}{\omega_k^2} \left(\frac{\omega_k'}{\omega_k} + \frac{\omega_k'}{\omega_k} - \sin^2 \theta' \right), \quad (2.11)$$

где $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ — классический радиус электрона, ω_k — ча-

стота падающего псевдофотона, ω'_k и $d\Omega'$ — частота и телесный угол рассеянного под углом θ' псевдофотона (рис. 3).

Рис. 3. Столкновение кванта $\hbar\omega_k$ с покоящимся до удара электроном. θ' и $\hbar\omega_{k'}$ — угол и частота рассеянного кванта.



Частоты связаны соотношением Комптона:

$$\frac{\hbar}{mc^2} \omega_k = \frac{\omega'_k}{mc^2/\hbar - \omega'_k (1 - \cos \theta')} \quad (2.12)$$

Для перехода в лабораторную систему координат необходимо воспользоваться преобразованием Лоренца, тогда

$$\omega = \gamma \omega'_k (1 - \beta \cos \theta'), \quad (2.13)$$

где ω есть частота излученного кванта. В нашем распоряжении имеются четыре переменные — ω_k , ω'_k , ω , θ , связанные двумя соотношениями — (2.12) и (2.13). Поскольку в полный поперечник тормозного излучения должна входить только частота излученного кванта ω , то мы выразим ω'_k и θ' согласно (2.12) и (2.13) через ω и ω_k и проинтегрируем полученную формулу по частотам кулоновского поля ω_k . Соотношения (2.12) и (2.13) накладывают ограничения на интервал значений ω_k , которые создают кванты с частотой ω . Вводя обозначение

$$\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1}, \quad (2.14)$$

где ε_1 — начальная энергия электрона, мы получим, учитывая соотношения (2.12) и (2.13),

$$\cos \theta' = \frac{1 - \varepsilon - \varepsilon \frac{mc^2}{\hbar\omega_k}}{\beta - \varepsilon}. \quad (2.15)$$

Условие $\cos \theta' \geq -1$ для излучения квантов, энергия которых подчиняется неравенству $\varepsilon < \beta$, приводит к соотношению

$$k_1 \geq k_{1\min} \equiv \delta = \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} \frac{mc^2}{\varepsilon_1} \frac{1}{\hbar} = \frac{\hbar\omega}{2\hbar} \frac{mc^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}. \quad (2.16)$$

Как будет показано в § 5, величина $k_{1\min}$, которую будем в дальнейшем обозначать через δ , соответствует минимальному импульсу, передаваемому ядру в процессе тормозного излучения вдоль направления первоначального движения электрона. Поскольку k_2 и k_3 будут соответствовать импульсу, передаваемому ядру в направлении, перпендикулярном движению (см. § 5), и согласно формуле (2.10) могут достигать нулевых значений, выражение δ является одновременно минимальным значением полного передаваемого ядру импульса.

Условие $\cos \theta' \leq 1$ дает

$$k_1 \leq k_{1\max} = \frac{2\varepsilon\gamma}{\hbar}. \quad (2.17)$$

Формула Клейна—Нишины (2.11) в переменных ε и $\omega_k = ck_1\gamma$ принимает следующий вид:

$$d\Phi = 2\pi r_0^2 \left(1 + \frac{\hbar^2\omega\delta}{m^2c^3} - \frac{2\delta}{k_1} + \frac{2\delta^2}{k_1^2} \right) \frac{d\varepsilon}{k_1\gamma\hbar}. \quad (2.18)$$

Учитывая (2.10), (2.15) и (2.18), мы получим поперечник тормозного излучения

$$d\sigma(\varepsilon) = \int_{\delta}^{k_{1\max}} n_{k_1} d\Phi dk_1 = 2\bar{\sigma} \frac{d\varepsilon}{\pi\gamma\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 dk_3 \times \\ \times \int_{\delta}^{k_{1\max}} dk_1 \frac{k_2^2 + k_3^2}{k_1^2(k^2 + R^{-2})^2} \left(1 + \frac{\hbar^2\omega\delta}{m^2c^3} - \frac{2\delta}{k_1} + \frac{2\delta^2}{k_1^2} \right). \quad (2.19)$$

Здесь и далее через $\bar{\sigma}$ обозначена величина

$$\bar{\sigma} = \frac{Z^2 r_0^2}{137} = Z^2 \cdot 5,8 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2.$$

Введем новую переменную

$$k_{\perp}^2 = k_2^2 + k_3^2. \quad (2.20)$$

Результат интегрирования в случае отсутствия экранирующего действия электронов, т. е. когда выполняется соотношение:

$$\delta R \gg 1, \quad (2.21)$$

есть

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{a/\hbar} dk_{\perp} \int_{\delta}^{k_{1\max}} \frac{k_{\perp}^3 dk_1}{k_1^2 (k_1^2 + k_{\perp}^2 + R^{-2})^2} \left(1 + \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3} - \frac{2\delta}{k_1} + \frac{2\delta^2}{k_1^2} \right) = \\ &= \frac{\hbar \gamma}{\varepsilon} \left\{ \left[\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \right] \ln \frac{a}{\delta \hbar} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \left[\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \right] - \frac{1 - \varepsilon}{9} \right\}. \quad (2.22) \end{aligned}$$

Величина a — порядка единицы.

Неопределенность величины a и является причиной погрешности метода псевдофотонов. Обратим внимание на то, что величина a определяет верхний предел импульса, передаваемого ядру в процессе излучения. Следовательно, в тех процессах, где большие передаваемые импульсы (порядка mc) не вносят вклада в поперечник, метод псевдофотонов имеет ту же точность, что и борновское приближение. С таким примером мы познакомимся при изучении когерентного (интерференционного) излучения в кристалле (см. главу II). Чтобы „подогнать“ поперечник (2.19) к точной формуле, необходимо выбрать a (хотя эта процедура и не имеет особого смысла) в виде:

$$\ln a = 1 + \frac{1 - \varepsilon}{9} \frac{1}{\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon)}, \quad (2.23)$$

тогда, используя (2.22), получим для интегрального сечения следующее выражение:

$$d\sigma(\varepsilon) = 4\bar{\sigma} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left[\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \right] \left(\ln \frac{1}{\delta \hbar} - \frac{1}{2} \right), \quad (2.24)$$

что совпадает с точной квантовомеханической формулой (при $\varepsilon_1 \gg mc^2$).

Характерной особенностью формулы (2.24) является логарифмическая зависимость поперечника от начальной энергии. Спектр излученных фотонов в основном определяется множителем $\frac{d\omega}{\omega}$.

В случае же полной экранировки, когда

$$\delta R = 137 \delta \lambda Z^{-1/3} \ll 1, \quad (2.25)$$

вместо (2.22) получим

$$I = \frac{\kappa \gamma}{\varepsilon} \left[\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \right] \left(\ln \frac{\alpha R}{\lambda} - \frac{1}{2} \right). \quad (2.26)$$

Следовательно, интегрирование (2.19) по k_1, k_2, k_3 с параметром обрезания (2.23) приводит к формуле:

$$d\sigma(\varepsilon) = 4 \bar{\sigma} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left\{ \left[\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \right] \left(\ln 137 Z^{-1/3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1 - \varepsilon}{9} \right\}. \quad (2.27)$$

В этом случае поперечник достигает насыщения и перестает зависеть от начальной энергии. Спектральный состав излучения практически не меняется. Аналогичную формулу можно получить и квантовомеханическим путем [11], используя для экранирующего действия электронов не модель Томаса — Ферми, а простой экспоненциальный множитель. Это сводится к замене в квантовомеханических формулах величины $\ln 183 Z^{-1/3}$ на $\ln 137 Z^{-1/3} + \frac{1}{2}$ (подробнее см. § 7).

Таким образом, используя метод расчета псевдофотонов, для интегрального сечения получим:

$$d\sigma(\varepsilon) = 4 \bar{\sigma} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \begin{cases} \left[\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \right] \left(\ln \frac{\alpha}{\delta \lambda} - \frac{3}{2} \right) - \frac{1 - \varepsilon}{9}, & \text{при } \delta R \gg 1 \\ \left[\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \right] \left(\ln \alpha 137 Z^{-1/3} - \frac{1}{2} \right), & \text{при } \delta R \ll 1. \end{cases} \quad (2.28)$$

Здесь и в последующих формулах первое значение последнего множителя соответствует случаю отсутствия экранировки ($\delta R \gg 1$), а второе значение — случаю полной экранировки ($\delta R \ll 1$). Интегральные сечения ($a \sim 1$) имеют погрешность порядка 10–20 % по сравнению с формулами теории возмущений.

Член $\frac{1-\varepsilon}{9}$ составляет всего несколько процентов от

основного и его появление в формулах связано со вторым слагаемым выражения (2.23). Следовательно, выбор $\ln a = 1$ будет соответствовать погрешности формул, равной всего нескольким процентам. Учет упрощенной экранировки приводит к погрешности порядка 6 %. Последнюю погрешность можно избежать, если подобрать радиус экранировки [11], который дает лучшее приближение к модели Томаса — Ферми. Это сводится к тому, что вместо $R/\lambda = 137Z^{-1/3}$ необходимо принять, что $R/\lambda = 108Z^{-1/3}$ (см. также § 7). Во избежание недоразумений отметим, что при интегрировании формулы (2.22) по k_1 мы приняли, что основной вклад в интеграл вносит область вблизи нижнего предела. Справедливость этого допущения легко усмотреть из структуры интеграла (2.22). Наши соотношения остаются правильными, если выполнено условие $\delta \ll k_{1\max}$. Последнее неравенство всегда имеет место, так как согласно (2.16) и (2.17) оно сводится к условию $4(1-\varepsilon) \gg 1-\beta^2$, что всегда выполняется при $\varepsilon_1 \gg \frac{mc^2}{2\sqrt{1-\varepsilon}}$.

Помимо излучения на ядре, необходимо учитывать также излучение на атомных электронах. Вопрос этот с учетом связи электрона до сих пор, ввиду его сложности, не рассмотрен точными методами квантовой электродинамики. Однако из качественного рассмотрения с помощью метода псевдофотонов можно видеть, что все отличие от случая излучения на ядре сводится (помимо того, что следует положить $Z=1$) к тому, что логарифмический множитель в формулах (2.24) и (2.27) должен быть несколько изменен. Это следует, во-первых, из того факта, что близкие пара-

метры удара (порядка λ), дающие логарифмический вклад в поперечник излучения, требуют учета отдачи первоначально покоившегося электрона; во-вторых, при больших параметрах удара необходимо учитывать связь электрона с атомом. Последняя не полностью эквивалентна соответствующему эффекту экранировки для ядра, поскольку (как это хорошо известно, например, из теории ионизационных потерь) атомные электроны могут поглощать энергию, а значит, приводить к рассеянию и излучению при пролетах частицы на расстояниях, значительно превышающих атомные. Полуколичественная оценка показывает, однако, что и этот второй эффект приводит лишь к незначительному изменению формул (2.24) и (2.27) (при $Z=1$ последние соответствуют излучению на электроне).

Ввиду отсутствия точных расчетов, можно с хорошей точностью учесть излучение на атомных электронах, заменив в формулах (2.24) и (2.27) Z^2 на $Z(Z+1)$.

Отметим еще, что формулы (2.24) и (2.27) становятся неприменимыми при $\frac{e^2}{\hbar c} \ln \frac{\varepsilon_1}{\hbar \omega} \sim 1$ (инфракрасная катастрофа) [12, 13, 14]. При выполнении последнего условия вероятность излучения (которая отличается от вероятности рассеяния множителем $\frac{e^2}{\hbar c} \ln \frac{\varepsilon_1}{\hbar \omega}$) становится сравнимой с вероятностью упругого рассеяния. Это указывает на неприменимость теории возмущений, в которой излучение является процессом более высокого порядка по параметру $e^2/\hbar c$, чем рассеяние. Метод, использованный при выводе формул (2.24) и (2.27), также неприменим, поскольку он предполагает справедливость теории возмущений. Это предположение необходимо в методе псевдофотонов, поскольку мы пользуемся формулой теории возмущений — формулой Клейна — Нишины (при выводе ее необходимо предположить малость взаимодействия). Правда, формулу для рассеяния мягких квантов можно вывести и не предполагая применимости теории возмущений (формула Томсона), однако и

этот последний вывод становится несправедливым для очень мягких квантов или больших интенсивностей, поскольку пренебрегается действием магнитного поля. Точная формула рассеяния квантов произвольной частоты на электроне может быть рассчитана методами квантовой электродинамики. Однако, если бы мы даже использовали точную формулу, все равно метод псевдофотонов был бы неприменим. Дело в том, что этот метод, помимо всего прочего, предполагает независимость действия отдельных компонент кулоновского поля ядра. Легко, однако, заметить, что если нужно учитывать действие магнитного поля на поведение электрона (или если неприменима теория возмущений), то тогда различные фурье-компоненты кулоновского поля быстро движущегося ядра не могут считаться независимыми.

Исходя из этих обстоятельств, для правильного вывода поперечника тормозного излучения инфракрасных квантов необходимо несколько изменить метод расчета. Рассмотренный ниже пример показывает, как простым способом получить поперечник излучения мягких квантов (который, очевидно, будет включать в себя и инфракрасную часть).

Пример. Вычислить поперечник излучения длинноволновых фотонов релятивистским электроном в поле ядра.

Для вывода мы учтем тот факт, что при излучении мягких квантов влиянием отдачи из-за излучения на движение электрона можно пренебречь. В системе координат, где электрон первоначально покоится, ядро движется равномерно и прямолинейно со скоростью \vec{v} . Если ядро пролетает на прицельном расстоянии ρ , то первоначально покоившийся электрон приобретает скорость в направлении, перпендикулярном движению ядра, равную

$$v_1 = \frac{2Ze^2}{mc\rho}. \quad (2.29)$$

Формулу (2.29) легко получить, учитывая выражения (1.3) и (1.4) для параллельной E_{\parallel} и перпендикулярной E_{ρ} движению составляющих электрического поля в точке с координатами ρ и vt .

Отметим, что даже при $\rho = \rho_{\min} \sim \lambda$ электрон остается нерелятивистским. Более того, поскольку $Ze^2/\hbar v_1 \gtrsim 1$, для расчета движения электрона в поле движущегося ядра можно использовать классическую элек-

тродинамику [15]. Вычислим излучение электрона, изменившего свою скорость от 0 до v_1 .

Векторный потенциал дается формулой

$$\vec{A}' = \frac{e v_1}{c R_0} \vec{n}. \quad (2.30)$$

Далее, с помощью фурье-компоненты магнитного поля, равной при $\omega' t \ll 1$

$$\vec{H}_{\omega'} = \frac{1}{2\pi} [\vec{A}' \vec{n}], \quad (2.31)$$

находим полное количество энергии, излученной в интервале частот $\omega', \omega' + d\omega'$ и в полярный угол $d\theta'$:

$$dI'_{n\omega'} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{Z^2 e^2}{\pi \rho^2 c} (1 + \cos^2 \theta') \sin \theta' d\theta' d\omega', \quad (2.32)$$

где θ' есть угол между направлением движения ядра и направлением излучения \vec{n} . При выводе (2.32) мы попутно усреднили поперечник по всем возможным отклонениям электрона в плоскости, перпендикулярной движению ядра (т. е. произвели замену $\overline{\sin^2(\vec{n}, \vec{v})} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta')$). Переходя в систему, где ядро покоится, и проинтегрировав по углам излучения, приходим к формуле

$$dI_{\omega} = \frac{8}{3} Z^2 r_0^2 \frac{e^2}{\pi \rho^2 c} d\omega. \quad (2.33)$$

Из условий $\omega' t \ll 1$ и (2.13) получим, что

$$\rho \ll \rho_{\max} \approx \frac{2c\gamma^2}{\omega}. \quad (2.34)$$

Мы воспользовались тем, что характерное время изменения поля (время столкновения согласно формуле (1.5)) есть

$$t_{\text{эф}} \sim \rho / v\gamma. \quad (2.35)$$

Умножим формулу (2.35) на $2\pi\rho d\rho$, разделим на энергию кванта $\hbar\omega$ и проинтегрируем по $d\rho$ от $\rho_{\text{min}} = \hbar$ до ρ_{max} . Тогда мы получим с логарифмической точностью ($a \sim 1$),

$$d\sigma(\omega) = \frac{16}{3} \frac{d\omega}{\omega} \ln a \frac{2c\gamma^2}{\omega\hbar}. \quad (2.36)$$

При полной экранировке, т. е. когда $\rho_{\max} > R_0 Z^{-1/3}$, мы имеем

$$d\sigma(\omega) = \frac{16}{3} \frac{\bar{\rho}}{\omega} \frac{d\omega}{\omega} \ln a 137 Z^{-1/3}. \quad (2.37)$$

Формулы (2.36) и (2.37) применимы при излучении квантов, удовлетворяющих условию $\omega't \ll 1$, которое в лабораторной системе можно переписать как $\omega \ll \frac{2c\gamma^2}{\rho}$, где $\bar{\rho}$ — некоторый средний параметр удара, заключенный между ρ_{\min} и ρ_{\max} . Сравнение (2.36) и (2.37) с (2.24) и (2.27) показывает, что предложенный элементарный вывод формул тормозного излучения для мягких квантов имеет логарифмическую точность.

§ 3. УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ФОТОНОВ

В предыдущих пунктах рассмотрены полные поперечники тормозного излучения. Перейдем теперь к угловому распределению излученных фотонов.

Чтобы получить поперечник для углового распределения тормозных квантов, нужно воспользоваться формулой (2.19). Проинтегрируем ее по переменным k_2 и k_3 . Интегрирование по k_1 производить не будем и выразим k_1 через θ_1 . Через θ_1 обозначим угол между направлением излучения и первоначальным направлением движения электрона. Будем измерять угол θ_1 в единицах mc^2/ε_1 :

$$\theta_1 = x \frac{mc^2}{\varepsilon_1}. \quad (3.1)$$

Связь между k_1 и x дается следующей формулой:

$$k_1 = \delta(1 + x^2). \quad (3.2)$$

Формулу (3.2) легко получить следующим образом. Воспользуемся формулой (2.15) и, учитывая выражение

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta_1 + \beta}{1 + \beta \cos \theta_1} \quad (3.3)$$

(связывающее угол рассеяния псевдофотона θ' в системе,

где движется ядро, с углом излучения кванта θ_l в лабораторной системе), получаем для ω_k следующее выражение:

$$\omega_k = \frac{mc^2}{\hbar} \frac{\varepsilon(1 + \beta \cos \theta_l)}{(1 - \varepsilon)(1 + \beta \cos \theta_l) - (\beta - \varepsilon)(\beta + \cos \theta_l)}. \quad (3.4)$$

Так как угол рассеяния θ' , а также угол излучения θ_l отсчитываются от направления движения ядра (в то время как угол θ_1 , введенный выше, отсчитывается от противоположного направления), а излучение происходит под небольшими углами относительно направления движения электрона, то $\theta_l \sim \pi$. Связь между углами θ_1 и θ_l дается соотношением $\theta_1 = \pi \pm \theta_l$. Из (3.4) и (2.8) при $\beta \rightarrow 1$ следует соотношение (3.2):

$$k_1 = \frac{mc}{\varepsilon_1} \omega_k = \delta(1 + x^2). \quad (3.5)$$

Учитывая (3.2), получим поперечник для углового распределения тормозных квантов в случае отсутствия экранирующего действия атомных электронов ($\delta R \gg 1$) и для случая полной экранировки ($\delta R \ll 1$) соответственно.

$$d^2\sigma = 4\bar{\sigma} \frac{d\omega}{\omega} x dx \left[\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2(1+x^2)^2} - \frac{4\varepsilon_2 x^2}{\varepsilon_1(1+x^2)^4} \right] \begin{cases} 2 \ln \frac{a}{\delta \hbar (1+x^2)} - 1, & \text{при } \delta R \gg 1 \\ 2 \ln a 137 Z^{-1/3} - 1, & \text{при } \delta R \ll 1, \end{cases} \quad (3.6)$$

где $a \sim 1$. Из формулы (3.6) следует, что поперечник достигает максимума при $x \sim 1$, при $x \gg 1$ поперечник уменьшается, как $1/x^3$. Объединим оба предельных случая формулы (3.6) в одну интерполяционную формулу. Если за максимальное значение параметра $\sqrt{k_2^2 + k_3^2}$ взять такое, для которого $\ln \frac{\hbar \sqrt{k_2^2 + k_3^2}}{mc} = 1$ (это соответствует выбору

$\ln a = 1$), то придем к следующей формуле:

$$d^2\sigma = 4 \frac{\bar{\sigma}}{\omega} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \left[\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} - \frac{4x^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1(1+x^2)^2} \right] \left\{ -1 + \ln \left[\frac{\lambda^2}{R^2} + \delta^2 \lambda^2 (1+x^2)^2 \right]^{-1} \right\}. \quad (3.7)$$

Отклонения формулы (3.7) от соответствующей формулы теории возмущений составляют несколько процентов.

Поляризация фотонов рассмотрена в нижеследующем примере.

Пример. Рассмотреть поляризацию квантов тормозного излучения, используя метод псевдофотонов.

Для вычисления поляризации (см. [16]) необходимо вместо формулы (2.11) использовать формулу для рассеяния поляризованного кванта на свободном электроне (см., например, [12]). Она имеет вид:

$$d\Phi = \frac{r_0^2 d\Omega'}{4} \frac{\omega'^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 + 4 \cos^2 \xi \right), \quad (3.8)$$

где ω и ω' — частоты падающего и рассеянного псевдофотонов (индекс k у частот ω для простоты опущен), ξ — угол между направлениями поляризации налетающего и вторичного псевдофотонов, $d\Omega'$ — телесный угол рассеянного псевдофотона. Усреднив (3.8) по поляризации налетающего псевдофотона, получаем

$$\overline{d\Phi} = \frac{r_0^2 d\Omega'}{4} \frac{\omega'^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 \cos^2 \varphi' \sin^2 \theta' \right). \quad (3.9)$$

Здесь θ' — угол рассеяния кванта (см. рис. 3), φ' — угол между плоскостью поляризации рассеянного псевдофотона (\vec{e}' , \vec{n}') и плоскостью (\vec{n}' , \vec{n}), где \vec{e}' — вектор поляризации рассеянного кванта, \vec{n} — направление движения начального псевдофотона (которое совпадает с направлением движения начального электрона), \vec{n}' — направление движения рассеянного псевдофотона. Как и следовало ожидать, при рассеянии неполяризованного фотона рассеянный фотон оказывается частично поляризованным. Вычисление поперечника тормозного излучения поляризованных квантов сводится к умножению (3.9) на соответствующую формулу для числа квантов (2.10) и переходу в систему покоящегося ядра. Преобразование в лабораторную систему совершается вдоль направления вектора \vec{p}_1 (которое совпадает с направлением движения псевдофотона \vec{n}). При этом исполь-

зуются формулы преобразования, приведенные в § 2. Расчет показывает, что при релятивистских энергиях и малых углах излучения положение вектора поляризации (вектора, направленного вдоль поля \vec{E}) при переходе к лабораторной системе меняется несущественно. Можно, следовательно, принять, что $\varphi' = \varphi$, где угол φ определяет положение вектора \vec{E} излученного кванта относительно плоскости, содержащей вектор \vec{p}_1 и вектор, определяющий направление движения тормозного кванта (эту плоскость назовем плоскостью излучения). При $\varphi = 0$ вектор \vec{E} лежит в плоскости излучения, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ вектор \vec{E} перпендикулярен этой плоскости. Соответствующие поперечники легко рассчитываются, если использовать уже готовые выражения (3.9), (2.15), (2.18), (2.20):

$$d^2\sigma_{\perp} = 4\bar{\sigma} \frac{d\omega}{\omega} \frac{d\psi}{2\pi} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \left[\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} \int_0^{a/\hbar} \frac{k_{\perp}^2 dk_{\perp}^2}{(k_1^2 + k_{\perp}^2 + R^{-2})^2} \right], \quad (3.10)$$

$$d^2\sigma_{\parallel} = 4\bar{\sigma} \frac{d\omega}{\omega} \frac{d\psi}{2\pi} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \left[\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2\varepsilon_1^2} - \frac{4x^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1(1+x^2)^2} \int_0^{a/\hbar} \frac{k_{\perp}^2 dk_{\perp}^2}{(k_1^2 + k_{\perp}^2 + R^{-2})^2} \right], \quad (3.11)$$

где $k_1 = \delta(1+x^2)$. Здесь $d\sigma_{\perp}$ соответствует углу $\varphi = 90^\circ$, а $d\sigma_{\parallel}$ — углу $\varphi = 0$. От азимутального угла ψ , определяющего направление движения фотона, поперечники не зависят, и поэтому при изменении угла ψ на $\pi/2$ степень поляризации P (см. определение (10.41)) изменяет знак. Это соответствует тому, что полный тормозной пучок (проинтегрированный по азимутальному углу ψ) неполяризован, как и следовало ожидать, исходя из симметрии задачи. В зависимости от $\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1}$, P достигает максимума при некотором оптимальном угле испускания $\theta_1 = \frac{mc^2}{\varepsilon_1}$. При фиксированном угле испускания поляризация наибольшая для самых мягких квантов и достигает значения, равного единице, при $\hbar\omega \ll \varepsilon_1$, $\theta_1 = \frac{mc^2}{\varepsilon_1}$ (см. рис. 4). Сравнение с точными формулами, выведенными с помощью теории возмущений [17], приводит к количественным расхождениям. Они обусловлены логарифмиче-

ской неточностью метода псевдофотонов, которая существенным образом сказывается при вычислении поляризационных явлений. Отметим, что формулы, эквивалентные (3.10) и (3.11), были получены ранее в работе [18]. Однако в упомянутой работе не производилось сравнение с точными расчетами.

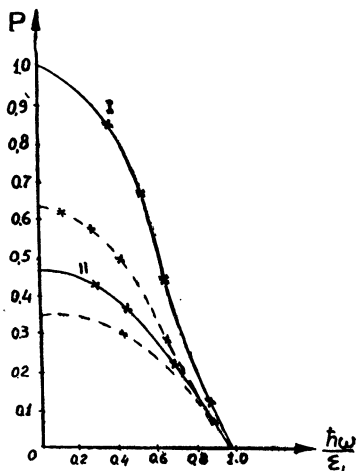


Рис. 4. Кривая I соответствует поляризации при угле излучения $\theta_1 = \frac{mc^2}{\epsilon_1}$, кривая II—при углах излучения $\theta_1 = \frac{1}{2} \frac{mc^2}{\epsilon_1}$ и $\theta_1 = 2 \frac{mc^2}{\epsilon_1}$. Кривые рассчитаны методом псевдофотонов. Пунктирными линиями приведены кривые для поляризации излучения на одном атоме, рассчитанные по теории возмущений, соответственно для углов излучения $\theta_1 = \frac{mc^2}{\epsilon_1}$ и $\theta_1 = \frac{1}{2} \frac{mc^2}{\epsilon_1}$. Величина P равна: $P = \frac{d\sigma_{\perp} - d\sigma_{\parallel}}{d\sigma_{\perp} + d\sigma_{\parallel}}$.

§ 4. РОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННЫХ ПАР

Исходя из предыдущих параграфов, можно получить приближенные формулы, описывающие процессы рождения электронно-позитронных пар, а также их угловое распределение. Дело в том, что формулу (2.19) можно рассматривать как некоторое приближение точной квантовомеханической формулы (см. следующий параграф). Три независимые переменные k_1, k_2, k_3 соответствуют трем угловым переменным в известной формуле Бете—Гайтлера (см. приложение I,

формулу (1)). Тогда переход от формулы для поперечника тормозного излучения к поперечнику для рождения электронно-позитронных пар сводится к простой замене обозначений и изменению фазового объема конечного состояния [12—14]. Этой процедуре можно дать наглядное разъяснение, следуя рассуждениям Дирака. Рождение электронно-позитронной пары можно рассматривать как процесс, обратный тормозному излучению, при котором электрон, испускающий фотон, переходит в состояние с отрицательной энергией. Величина матричного элемента для прямого и обратного процессов одинакова. Однако поскольку при рождении пары фотон поглощается, в матричном элементе тормозного излучения необходимо изменить знак у частоты ω и считать, что начальный электрон, находящийся в состоянии с отрицательной энергией, поглощает фотон и переходит в состояние с положительной энергией. Появление вакантного места в фоне отрицательных электронов интерпретируется как рождение позитрона. Таким образом определяется матричный элемент для процесса рождения электронно-позитронной пары. Для получения поперечника необходимо учесть, что при рождении пары в конечном состоянии мы имеем свободный электрон и позитрон, в то время как при тормозном излучении в конце процесса имеется фотон и электрон. Ясно, что для перевода поперечника тормозного излучения в поперечник рождения пары необходимо изменить плотность конечных состояний.

Учитывая эту аналогию, совершим в (2.19) замену

$$\varepsilon_1 \longrightarrow -\varepsilon_+, \quad \varepsilon_2 \longrightarrow \varepsilon_-, \quad \omega \longrightarrow -\omega \quad (4.1)$$

и будем интерпретировать электрон с отрицательной энергией как позитрон в конечном состоянии с энергией ε_+ , а фотон с отрицательной частотой как поглощенный фотон с частотой ω . После умножения формулы (2.19) на отношение фазовых объемов позитрона и фотона

$$\frac{\varepsilon_+^2 d\varepsilon_+}{(\hbar\omega)^2 d(\hbar\omega)} \quad (4.2)$$

получим формулу для поперечника рождения электронно-позитронной пары фотоном в поле атома:

$$d\sigma = 2\bar{\sigma} \frac{mc^2}{\pi\hbar} \frac{d\varepsilon_+}{(\hbar\omega)^2} \iint \frac{k_2^2 + k_3^2}{k_1^2 (k^2 + R^{-2})^2} \times \\ \times \left(1 - \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3} - \frac{2\delta}{k_1} + \frac{2\delta^2}{k_1^2} \right) d\vec{k}, \quad (4.3)$$

где $k_{1\min} \equiv \delta = (\hbar\omega/2\varepsilon_+ \varepsilon_-) (mc^2/\hbar)$ — минимальный передаваемый ядру импульс вдоль направления распространения фотона, $k_{1\max} = 2\omega/c$.

Проведя интегрирование по k_2 , k_3 и k_1 в (4.3), получим формулу для интегрального сечения (а также для углового распределения; если интегрирование по переменной k_1 не производить), аналогично тому, как это было сделано для случая тормозного излучения. Заметим, что и в данном случае $|k_{1\min}| \ll |k_{1\max}|$ и основной вклад в интеграл (4.3) даст область вблизи нижнего предела k_1 .

Однако более просто получить эти формулы исходя из соответствующих формул тормозного излучения. Так, для получения интегрального сечения совершим замену (4.1) в формуле (2.28) и помножим ее на отношение фазовых объемов (4.2). Замечая, что

$$\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \longrightarrow \frac{\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2}{\varepsilon_+^2} + \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+},$$

получим

$$d\sigma = 4\bar{\sigma} \frac{\varepsilon_+ \varepsilon_- d\varepsilon_+}{(\hbar\omega)^3} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} + \frac{2}{3} \right] \left(\ln \frac{a}{\delta\hbar} - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{9}, \\ \text{при } \delta R \gg 1 \\ \left[\frac{\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} + \frac{2}{3} \right] \left(\ln a 137 Z^{-1/3} - \frac{1}{2} \right), \\ \text{при } \delta R \ll 1. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Экранировка определяется радиусом $R = 137 \hbar Z^{-1/3}$. Если в формулу (4.4) подставить выражение (2.23) для a , то получатся точные формулы для рождения пар в крайне реля-

тивистском случае [14]. Необходимо только подобрать радиус экранировки R соответствующим образом [11], а именно: положить $R = 111 Z^{-1/3} \lambda$.

Таким же образом легко получить выражение для углового распределения пары. Исходя из формулы (3.6) и учитывая, что при преобразовании (4.1) следует также заметить

$$\theta_1 \longrightarrow \theta_+ \quad x \longrightarrow x = \theta_+ \frac{\varepsilon_+}{mc^2},$$

где θ_+ — угол между направлениями движения фотона и позитрона. Формула имеет следующий вид:

$$d^2\sigma = 8\bar{\sigma} \frac{\varepsilon_+^2 d\varepsilon_+}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^3} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \left[\frac{\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2}{\varepsilon_+^2} + \frac{4x^2\varepsilon_-}{\varepsilon_+(1+x^2)^2} \right] \begin{cases} \ln \frac{1}{\delta\lambda(1+x^2)} + \frac{1}{2}, & \text{при } \delta R \gg 1 \\ \ln 137 Z^{-1/3} + \frac{1}{2}, & \text{при } \delta R \ll 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Здесь мы снова взяли для параметра обрезания значение $\ln a = 1$.

Формулы (4.4), (4.5), а также (3.6), (2.28) могут быть использованы для практических расчетов, в которых не требуется большой точности.

§ 5. О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ПСЕВДОФОТОНОВ

Поскольку метод псевдофотонов является приближенным, полезно установить границы его применимости. Оказывается, что в результате разложения точных формул теории возмущений по некоторому параметру можно получить, как первое приближение, формулы, полученные методом псевдофотонов [19].

Формулу для поперечника тормозного излучения в борновском приближении (так называемую формулу Бете — Гайтлера) в случае релятивистских частиц и малых углов излу-

чения можно представить в следующем виде (см. приложение I, формулу (18)):

$$d\sigma^{\text{торм}} = 2\bar{\sigma} \frac{m^4 c^5 d(\hbar\omega)}{\varepsilon_1^2} \int_0^\infty dq_\perp^2 \int_{\hbar\delta + cq_\perp^2/2\varepsilon_1} dq_\parallel \frac{1}{(q^2 + \hbar^2 R^{-2})^2} \times$$

$$\times \left\{ -\frac{1}{(q_\parallel - cq_\perp^2/2\varepsilon_1)^2} - \frac{q_\parallel + cq_\perp^2(\hbar\omega - \varepsilon_2)/2\varepsilon_1\varepsilon_2}{[(q_\parallel - cq_\perp^2/2\varepsilon_2)^2 + (2\hbar\delta q_\perp/mc)^2]^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(q_\perp/mc)^2(1 + \hbar^2\omega\delta/m^2c^3) + 2}{(q_\parallel - cq_\perp^2/2\varepsilon_2)[(q_\parallel - cq_\perp^2/2\varepsilon_2)^2 + (2\hbar\delta q_\perp/mc)^2]^{1/2}} \right\}, \quad (5.1)$$

где $\delta = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_1\varepsilon_2} \frac{mc^2}{\lambda}$, q_\parallel и q_\perp — продольно и перпендикулярно передаваемые импульсы.

С другой стороны, метод псевдофотонов приводит для тормозного излучения к формуле (2.19). Для сравнения выражений (5.1) и (2.19) заменим в интеграле (5.1) переменную q_\parallel на $q'_\parallel = q_\parallel - cq_\perp^2/2\varepsilon_1$ и разложим выражение в фигурных скобках по q_\perp^2/m^2c^2 :

$$\frac{1}{q'^2_\parallel} \left(1 + \frac{\hbar^2\omega\delta}{m^2c^3} - \frac{2\hbar\delta}{q'_\parallel} + \frac{2\hbar^2\delta^2}{q'^2_\parallel} \right) \frac{q_\perp^2}{m^2c^2} +$$

$$+ \left(\frac{\hbar\delta}{mc} \frac{1 + \hbar^2\omega\delta/m^2c^3}{q'^2_\parallel} - \frac{9\hbar^2\delta^2 + 2\hbar^4\omega\delta^3/m^2c^3}{q'^4_\parallel} + \right.$$

$$\left. + \frac{24\hbar^3\delta^3}{q'^5_\parallel} - \frac{18\hbar^4\delta^4}{q'^6_\parallel} \right) \left(\frac{q_\perp^2}{m^2c^2} \right)^2 + \dots \quad (5.2)$$

Сравнивая (5.2) с соответствующим множителем формулы (2.19)

$$1 + \frac{\hbar^2\omega\delta}{m^2c^3} - \frac{2\delta}{k_1} + \frac{2\delta^2}{k_1^2}$$

увидим, что первый член разложения точной формулы дает результат метода псевдофотонов (при этом $q'_\parallel = \hbar k_1$,

$\vec{q}_\perp = \hbar \vec{k}_\perp$), а второй член является поправочным, если $q_\perp^2 \ll m^2 c^2$. Следовательно, формула (2.19) совпадает с точной формулой (5.1) только в области $q_\perp^2 \ll m^2 c^2$ (что соответствует прицельным расстояниям, бóльшим \hbar/mc).

Сравнение формул (5.2) и (2.19) показывает, что переменные k_\parallel и \vec{k}_\perp , введенные в методе псевдофотонов, совпадают с переменными q'_\parallel и \vec{q}_\perp :

$$q'_\parallel = \hbar k_\parallel, \quad \vec{q}_\perp = \hbar \vec{k}_\perp. \quad (5.3)$$

Следовательно, когда выполняется условие

$$cq_\perp^2/2\varepsilon_1 \ll q_\parallel,$$

$\hbar k_\parallel$ и $\hbar \vec{k}_\perp$ являются компонентами передаваемого ядру импульса вдоль направления движения начального электрона и перпендикулярно к нему.

Аналогичное рассмотрение можно провести и для образования пары.

В последнее время сделано много попыток улучшить метод псевдофотонов. Мы не останавливаемся на этих работах. Отметим только, что в упомянутых работах делались попытки учесть продольные псевдофотоны, рассмотреть вопросы поляризации, а также применить этот метод к ядерным явлениям (см. напр. [20—23]).

Как мы увидим ниже, для когерентного излучения в кристалле формулы, получаемые методом псевдофотонов, обладают той же точностью, что и формулы, получаемые в борновском приближении. Это является результатом того, что для когерентного излучения вклад в поперечник излучения или рождения пар вносят значения передаваемых импульсов $q_\perp \ll mc$. Однако, как мы только показали, именно для этого случая результаты, получаемые методом псевдофотонов и методом теории возмущений, совпадают.

II

КОГЕРЕНТНОЕ ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В КРИСТАЛЛЕ

§ 6. ВВЕДЕНИЕ

а) Краткий обзор работ

Несмотря на то, что когерентное тормозное излучение в кристалле только в течение последних лет получило экспериментальное подтверждение, первые теоретические попытки предсказать это явление относятся к 1935 году. Еще Вильямс [1] в известной работе, посвященной методу псевдофотонов, указал, что периодичность среды может оказать существенное влияние на величину поперечника тормозного излучения при высоких энергиях. Однако критерий появления эффекта, приведенный Вильямсом, в дальнейшем не оправдался.

Спустя почти двадцать лет была опубликована работа Феррети [2], посвященная тормозному излучению в кристалле. В ней методом псевдофотонов получена формула для поперечника излучения квантов в идеальном неограниченном монокристалле, без учета тепловых колебаний и экранировки. Указывается на существование определенных направлений влета электрона в кристалл, при которых излучение резко возрастает. Однако в этой статье нет количественных формул, пригодных для экспериментальной проверки. Физическая причина явления (хотя и приводится правильный критерий появления эффекта) не вскрыта, и объяснение эффекта

не является корректным. Поэтому работа не была понята и долгое время оставалась без последующего развития.

В работах автора [3, 4, 5], посвященных вопросам рассеяния и излучения релятивистских частиц в кристалле, было указано, что при высоких энергиях тормозное излучение формируется на большом пути вдоль траектории частицы. Это расстояние (которое теперь принято называть *когерентной длиной*) увеличивается с увеличением энергии первичной частицы (или с уменьшением частоты излученного кванта) и может достигнуть макроскопических размеров. Когда когерентная длина пути $l_{\text{ког}}$ становится сравнимой с характерными размерами d решетки (d — период решетки), влияние периодической структуры может оказаться существенным и его учитывать необходимо. В цитируемых работах с помощью метода псевдофотонов (причем было показано, что для вычисления когерентного излучения он эквивалентен борновскому приближению) было рассчитано излучение с учетом экранировки и тепловых колебаний решетки для трехмерного кристалла конечного и бесконечного размеров. Приведенные в работе [4] формулы, как мы увидим ниже, совпадают с формулами для поперечников когерентного тормозного излучения и рождения пар, полученными в последующих теоретических работах, и фактически без изменения используются сейчас при расчете теоретических кривых.

Затем Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчук [6] показали, что не только в кристаллах, но и в обычной аморфной среде формулы тормозного излучения (и рождения пар) претерпевают изменения. Это является результатом того, что на тех же эффективных расстояниях $l_{\text{ког}}$, что и в кристалле, но при значительно более высоких энергиях, становится существенным учет многократного рассеяния. В последующих работах автора [7, 8] было показано, что благодаря той же причине в процессах тормозного излучения в аморфной среде становится необходимым учет поляризации среды. Работы по тормозному излучению и рождению пар в аморфной среде изложены в главе III.

Ф. Дайсон и Г. Юбералл [9], не зная о работах [3, 4], но ознакомившись с работой [6], дали критерий появления эффекта в кристаллах и объяснили физически влияние кристаллической структуры на тормозное излучение, т. е. пришли к основной идее работы [4]. Впоследствии Юбералл [10, 11] рассчитал полные поперечники и поперечники для углового распределения в борновском приближении для случая линейной цепочки атомов. Но приближение линейной цепочки соответствует усреднению по азимутальному углу влета в кристалл, проведенному в [4], и потому основные результаты Юбералла содержатся в [4] (относительно поляризации см. ниже). Однако такое усреднение может привести только к приближенному описанию эффекта. Учет трехмерности кристаллической решетки [4], которая в отличие от одномерного приближения может привести к осцилляциям интенсивности [12], весьма существен. Формулы работы [4] нуждались в уточнении лишь в том отношении, что использованная в работе экспоненциальная экранировка для тех значений передаваемых импульсов, которые играют роль при вычислении когерентного излучения, неточна [12] и ее необходимо заменить на экранировку, соответствующую, например, модели Томаса—Ферми.

Барбиелини, Болонья, Диамбрини и Муртас [13—17] провели независимый расчет для когерентного трехмерного кристалла. Полученные кривые характеризуются осцилляциями, которые являются следствием трехмерности кристалла. В работе Болоньи, Лутца, Шульца, Тимма и Циммерманна [18] проведен более точный учет экранировки, использующий метод Хартри. Близкий метод учета экранировки, основывающийся на использовании экспериментальных данных по рассеянию γ -лучей, был предложен в работе Кифуна, Кимуры, Кобояси, Кондо и Нишикавы [19]. Работа Шиффа [20] посвящена вопросу о пределах применимости формулы (7.6). В работе Калашникова [21] приводится аналитическое выражение для мягкой части спектра тормозного излучения на линейной цепочке атомов, которая обобщает формулу (36) работы [4].

В последние годы был проведен целый ряд экспериментальных работ: Панофским и Саксеной [22, 23, 24], Олсоном и Фришем [25], группой итальянских физиков [13—17, 26, 27] (G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambri, G. P. Murta), группой физиков из DESY [18, 28] (L. Criegee, G. Lutz, H. D. Schulz, U. Timm, W. Zimmermann), группой японских физиков [19, 29] (S. Kato, T. Kifune, Y. Kimura, M. Kobayashi, K. Kondo, T. Nishikawa, H. Sasaki, K. Takamatsu, S. Kikuta, K. Kohra), посвященных доказательству существования теоретически предсказанных особенностей процессов тормозного излучения и рождения пар, происходящих в кристалле. Особо нужно отметить, что группы итальянских, немецких и японских авторов, помимо эксперимента, рассчитали на машине соответствующие теоретические кривые для поперечников излучения с учетом всех необходимых факторов для монокристалла алмаза и кремния и получили хорошее согласие с экспериментальными результатами.

Очень важным результатом когерентного излучения является наличие существенной поляризации [11, 17, 18, 19, 28, 30, 31], рассмотренной впервые Юбераллом для линейной цепочки атомов. В работах [11, 30] расчет проводился по теории возмущений. В работе [31] аналогичные результаты для поляризации когерентной части получены методом псевдофотонов. В работах [13—17] приведен необходимый количественный расчет поляризации и впервые экспериментально обнаружен эффект поляризации. В работах [18, 28] показано теоретически (и проверено экспериментально), что при определенных углах влета в кристалл линейная поляризация может достигнуть 750% . В работе [17] предложен новый метод определения поляризации фотонов, основанный на интерференционных явлениях в кристалле. В работах [33, 34, 35] исследовалась возможность получения и анализа линейно и циркулярно поляризованных когерентных фотонов в толстых монокристаллических мишенях.

До сих пор остается невыясненным вопрос о границах применимости теории возмущений. Содержащиеся в работах [4, 12] утверждения о неприменимости теории возмущений в направлениях максимума излучения при достаточно высоких

энергиях другими авторами не разделяются (см. [10, 20]). Соответствующие расчеты еще не проделаны. В работе [12] исследовано влияние поляризации среды на тормозное излучение в кристалле. Влияние многократного рассеяния оценивалось автором [4]. Недавно этот вопрос рассматривался в работе [32].

б) Интерференционные явления при рассеянии частицы на двухатомной молекуле

Ниже будут исследованы интерференционные эффекты в тормозном излучении и рождении электронно-позитронных пар. Однако, чтобы упростить понимание физической картины явления, рассмотрим прежде всего, следуя работе [3], рассеяние быстрого электрона на двухатомной молекуле. В этом случае все формулы значительно упрощаются, и причина специфического продольного эффекта становится наглядной.

Пусть φ — потенциал взаимодействия электрона с молекулой. В случае одинаковых атомов можно, приближенно, учитывая формфактор, положить

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = Ze \left(\frac{e^{-r/R}}{r} + \frac{e^{-|\vec{r}-\vec{d}|/R}}{|\vec{r}-\vec{d}|} \right), \quad (6.1)$$

где φ_1 и φ_2 — соответствующие потенциалы атомов, усредненные по своим электронным волновым функциям, а \vec{d} — вектор, определяющий размеры и направление оси молекулы.

Исходя из (6.1), легко получить поперечное сечение упругого рассеяния (речь идет о малых углах рассеяния, поэтому мы не учитываем поправок, связанных со спином):

$$d\sigma = 8 \left(\frac{Ze^2}{E} \right)^2 \frac{\theta_3 d\theta_3 d\varphi}{(\hbar^2 + \hbar^2/p^2 K^2)^2} \left(1 + \cos \frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \vec{d}}{\hbar} \right). \quad (6.2)$$

Здесь \vec{p}_1 и \vec{p}_2 — начальный и конечный импульсы электрона, причем $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p$, θ_3 — угол рассеяния, φ — угол между плоскостью (\vec{p}_1, \vec{d}) и плоскостью (\vec{p}_1, \vec{p}_2) .

Сечение (6.2) отличается от обычной релятивистской формулы Резерфорда только дополнительным множителем $2\left(1 + \cos \frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \vec{d}}{\hbar}\right)$, учитывающим интерференцию.

Если мы введем угол θ между направлением \vec{p}_1 и осью молекулы \vec{d} , то

$$\begin{aligned} & \cos \frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \vec{d}}{\hbar} = \\ & = \cos \left\{ \frac{pd}{\hbar} [-\cos \theta \cos \theta_3 - \sin \theta_3 \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta] \right\}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

В приложениях обычно интересуются средним квадратом угла отклонения (необходимые сведения по теории многократного рассеяния приведены в § 17), поэтому сечение (6.2) нужно умножить на θ_3^2 и проинтегрировать по θ_3 и φ . Верхний предел интеграла по θ_3 ограничен размерами ядра $\theta_{\max}^{(3)} = \hbar/pR_{\text{яд}}$; $R_{\text{яд}}$ — радиус ядра.

Таким образом, для среднего квадрата угла рассеяния получим (принято, что $Nx = 1$, x — пройденное расстояние, N — плотность молекул)

$$\bar{\theta}_3^2 = 8 \left(\frac{Ze^2}{E} \right)^2 \int \left[1 + \cos \frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \vec{d}}{\hbar} \right] \frac{\theta_3^3 d\theta_3 d\varphi}{(\theta_3^2 + \hbar^2/p^2 R^2)^2}. \quad (6.4)$$

Можно было бы исследовать все эффекты рассеяния, непосредственно используя распределение (6.2) или какую-либо другую его характеристику. Мы, однако, будем использовать в дальнейшем $\bar{\theta}_3^2$.

Если мы усредним (6.4) по всем ориентациям молекулы в пространстве (по направлениям вектора \vec{d}), то получим

$$\bar{\theta}_3^2 = 16\pi \left(\frac{Ze^2}{E} \right)^2 \int \left\{ 1 + \frac{\sin[|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|d/\hbar]}{2|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|d/\hbar} \right\} \frac{\theta_3^3 d\theta_3}{(\theta_3^2 + \hbar^2/p^2 R^2)^2}. \quad (6.5)$$

Поправки, связанные с дополнительным членом

$$\sin [|\vec{p}_1 - \vec{p}_2| d/\hbar] / 2[|\vec{p}_1 - \vec{p}_2| d/\hbar],$$

малы для углов рассеяния θ_3 , удовлетворяющих условию

$$|\vec{p}_1 - \vec{p}_2| d/\hbar = \frac{pd\theta_3}{\hbar} \gg 1. \quad (6.6)$$

После интегрирования по θ_3 легко показать, что поправки составляют несколько десятых процента. Следовательно, интерференционные эффекты после усреднения по всем ориентациям молекулы пренебрежимо малы.

Интерференция становится, однако, очень существенной при ориентации молекулы вдоль движения электрона $\theta \lesssim \frac{R}{d} \ll 1$. Действительно, интегрируя формулу (6.4) по всем φ и θ_3 , мы получим

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_3^2(\theta) = 16\pi \left(\frac{Ze^2}{E}\right)^2 \int_0^{\hbar/pR_{яд}} \left[1 + \cos \frac{pd\theta_3^2 \cos \theta}{2\hbar} \times \right. \\ \left. \times J_0\left(\frac{pd\theta_3}{\hbar} \sin \theta\right) \right] \frac{\epsilon_3^3 d\theta_3}{(\theta_3^2 + \hbar^2/p^2R^2)^2}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где J_0 — функция Бесселя.

Интерференционные эффекты необходимо учитывать при условии

$$\frac{pd\epsilon_3^2}{2\hbar} \ll 1. \quad (6.8)$$

Обратим внимание, что критерий содержит не полный импульс, передаваемый молекуле, а только лишь его продольную компоненту. Поскольку при увеличении энергии угол рассеяния уменьшается как $\frac{1}{p}$, интерференционные эффекты тем существеннее, чем выше энергия.

Интеграл по θ_3 можно разбить на два интеграла в пределах от 0 до ∞ и от $\hbar/pR_{яд}$ до ∞ . Второй интеграл

можно оценить, воспользовавшись асимптотическим разложением для J_0 , откуда видно, что для углов $\theta \geq R_{\text{яд}}/d$ им можно пренебречь. Первый интеграл легко взять в комплексной плоскости, пользуясь соотношениями $J_0 = \frac{1}{2}(H_0^{(1)} + H_0^{(2)})$ и $H_0^{(1)}(-x) = H_0^{(2)}(x)$, где $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ — функции Ганкеля. Интеграл будет определяться вычетом в точке $\theta_3 = ih/pR$, если загибать контур кверху. Если $p \gg \hbar d/2R^2$ (в противном случае интеграл делается пренебрежимо малым), то множитель $\cos(pd\theta_3^2 \cos\theta/2\hbar)$ на результат не влияет, и мы получим (для $R_{\text{яд}}/d \ll \theta \ll 1$)

$$\bar{\theta}_3^2 = 16\pi \left(\frac{Ze^2}{E} \right)^2 \left[\ln \frac{R}{R_{\text{яд}}} + i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)} \left(i \frac{d\theta}{R} \right) + \frac{\pi}{4} \frac{d\theta}{R} H_1^{(1)} \left(i \frac{d\theta}{R} \right) \right]. \quad (6.9)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках соответствует сумме кулоновского рассеяния на двух независимых атомах. Второе и третье слагаемые характеризуют интерференционную добавку. Из формулы видно, что интерференционная добавка экспоненциально затухает при углах влета $\theta \gtrsim R/d$. Для углов влета $\theta \lesssim R/d$ интерференционная добавка составляет 100%. Этот результат легко поддается наглядной интерпретации, поскольку в этом случае электрон попадает одновременно в поле действия обоих атомов.

Выясним влияние на интерференционные явления неупругих столкновений с молекулой, т. е. таких столкновений, при которых сама молекула из состояния $\Psi_0(\tau)$ переходит в состояние $\Psi_n(\tau)$, где τ — координаты ядер в конфигурационном пространстве. При этом абсолютная величина импульса электрона изменяется, и в сечение (6.2) вместо множителя

$$2 \left| 1 + \cos \frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \vec{d}}{\hbar} \right| = \left| \sum_{i=1, 2} \exp [i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \vec{r}_i/\hbar] \right|^2$$

будет входить множитель

$$\left| \sum_{i=1, 2} \int \Psi_n^*(\tau) e^{i\vec{q}\vec{r}_i/\hbar} \Psi_0(\tau) d\tau \right|^2, \quad \vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2. \quad (6.10)$$

Легко получить, что при малых углах рассеяния $\theta_3 \ll 1$ величина передаваемого импульса равна $q^2 = (p_1 - p_2)^2 + p_1 p_2 \theta_3^2$. Значение интеграла (6.10), вообще говоря, зависит от того, в какое состояние переходит молекула, поскольку, в силу закона сохранения энергии, в крайне релятивистском случае $c(p_1 - p_2) \approx E_n - E_0$, где $E_n - E_0$ — энергия возбуждения молекулы. Легко видеть, что для углов рассеяния $1 \gg \theta_3 \gg (E_n - E_0)/c \sqrt{p_1 p_2}$ (это условие для всех интересующих нас углов рассеяния и разностей $E_n - E_0$ выполнено) этой

зависимостью можно пренебречь и вынести $e^{i\vec{q}\vec{r}_i/\hbar}$ за знак интеграла. Тогда можно просуммировать по всем возможным возбужденным состояниям и, пользуясь полнотой системы функций $\Psi_n(\tau)$: $\sum_n \Psi_n^*(\tau) \Psi_n(\tau') = \delta(\tau - \tau')$, получить

$$\begin{aligned} & \sum_n \left| \sum_{i=1, 2} \int \Psi_n^*(\tau) e^{i\vec{q}\vec{r}_i/\hbar} \Psi_0(\tau) d\tau \right|^2 = \\ & = 2 \int \left[1 + \cos \frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \vec{d}}{\hbar} \right] \left| \Psi_0(\tau) \right|^2 d\tau. \quad (6.11) \end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы получить полное поперечное сечение рассеяния (суммируя упругие и неупругие столкновения), нужно выражение (6.2) усреднить при помощи начальной волновой функции молекулы. Поскольку мы видели, что эффект становится существенным только при довольно точной ориентации молекулы, величина $|\Psi_0(\tau)|^2$ должна быть очень резко сконцентрирована в узком интервале углов около направления движения. Это, по-видимому, имеет место в случае молекулярного кристалла J_2 , где среднеквадратичный угол отклонения оси молекулы от среднего направления измеряется несколькими градусами. Однако в кристаллах возникают свои интерференционные явления, которые будут изучены ниже. Рассмотренный пример пока-

зывает, что в принципе можно исследовать структуру вещества (с ориентированными молекулами), используя электроны высоких энергий. При высоких энергиях задача становится фактически одномерной, что, по-видимому, может очень упростить расшифровку эксперимента.

Таким образом, в рассеянии электронов (или других заряженных частиц) высоких энергий появляется специфический продольный эффект. Можно ожидать, что и в тормозном излучении будут появляться соответствующие интерференционные эффекты, поскольку поперечник тормозного излучения для мягких квантов можно разбить на произведения поперечника рассеяния и на вероятность излучения при заданном рассеянии.

в) Критерий появления интерференционных явлений в тормозном излучении

Выведем теперь критерий наступления специфических интерференционных эффектов в тормозном излучении*. Для этого будем следовать рассуждениям, приведенным в работе [4]. Запишем закон сохранения энергии и импульса применительно к процессу тормозного излучения:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega = 0, \quad (6.12)$$

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \frac{\hbar\omega}{c} \vec{n} = \vec{q}. \quad (6.13)$$

Через ε_1 , \vec{p}_1 обозначены начальные энергия и импульс излучающей частицы, через ε_2 и \vec{p}_2 — аналогичные величины после излучения, $\hbar\omega$ и $\frac{\hbar\omega}{c} \vec{n}$ обозначают энергию и импульс излученного фотона, а \vec{q} есть импульс, переданный среде. Спроектируем равенство (6.13) на направление начального движения электрона. Поскольку углы, составляемые вектором \vec{p}_2 и вектором \vec{n} с начальным направлением, малы, то,

* Очевидно, что обычная дифракция медленных электронов также приводит к интерференционным явлениям в тормозном излучении. Мы, однако, не будем рассматривать здесь этот тривиальный случай.

учитывая равенство (6.12), для релятивистских частиц ($\varepsilon_{1,2} \gg mc^2$) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\vec{p}_1 q}{p_1} &= q_{\parallel} \approx p_1 - p_2 - \frac{\hbar\omega}{c} + p_2 \frac{\theta_3^2}{2} + \frac{\hbar\omega}{c} \frac{\theta_1^2}{2} \approx \\ &\approx \frac{\hbar\omega mc^2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2} mc + p_2 \frac{\theta_3^2}{2} + \frac{\hbar\omega}{c} \frac{\theta_1^2}{2}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

где через θ_3 и θ_1 обозначены углы между \vec{p}_2 и \vec{p}_1 , и \vec{p} и \vec{p}_1 соответственно.

Из выражения (6.14) видно, что импульс, передаваемый среде вдоль направления движения первоначальной частицы q_{\parallel} , уменьшается с увеличением энергии первоначальной частицы. Минимальное значение q_{\parallel} достигается при $\theta_3 = \theta_1 = 0$. Будем обозначать его через $\hbar\delta$. Таким образом, в расчетах тормозного излучения появляется малая величина $\hbar\delta$ размерности импульса

$$\hbar\delta = \frac{\hbar\omega mc^2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2} mc. \quad (6.15)$$

Ясно, что величина $1/\delta$ будет иметь размерность длины и будет определять расстояния, которые характеризуют размеры области, где разыгрывается процесс. Величина

$$l_{\text{кор}} = \frac{1}{\delta} = \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\hbar\omega mc^2} \frac{\hbar}{mc} \quad (6.16)$$

носит название *когерентной длины* и была введена при рассмотрении тормозного излучения в кристалле [4].

Для мягких фотонов $\hbar\omega \ll \varepsilon_1$ соотношение (6.16) принимает вид

$$l_{\text{кор}} = \frac{c}{\omega(1 - v/c)}. \quad (6.17)$$

Выражение (6.17) для когерентной длины для случая излучения мягких квантов можно получить также, исходя из классических рассуждений. Для этого нужно напомнить, что векторный потенциал электромагнитного поля, создаваемого

частицей, движущейся по траектории $\vec{r}(t)$, дается известным выражением классической электродинамики

$$\vec{A}_\omega \sim \int_{-\infty}^{+\infty} [\vec{n} \vec{v}] e^{i\vec{k} \vec{r}(t) - i\omega t} dt. \quad (6.18)$$

Здесь $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$ — волновой вектор фотона.

Рассмотрим излучение, возникающее при мгновенном изменении направления скорости, т. е. при

$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{v}_1, & \text{при } t < 0 \\ \vec{v}_2, & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что при вычислении интеграла (6.18) существенны времена

$$t \sim \frac{1}{\omega \left(1 - \frac{v_{1,2}}{c} \cos \theta_{1,2} \right)}. \quad (6.19)$$

Через $\theta_{1,2}$ обозначены углы между скоростями $\vec{v}_{1,2}$ и направлением излучения фотона.

Аналогичная ситуация имеет место и при тормозном излучении, когда статистика отклонения электрона на различные углы θ_3 дается законом Кулона. Из (6.19) следует, что соответствующие выражения для когерентной длины (при $\theta_{1,2} \rightarrow 0$) совпадают с выражением (6.17).

Таким образом, в процессах тормозного излучения важную роль играют продольные размеры области. Эти размеры растут как при увеличении начальной энергии излучающей частицы, так и при уменьшении частоты кванта.

Ясно, что кристаллическая структура среды может влиять на тормозное излучение в кристалле только в том случае, когда минимальный продольный импульс $\hbar \delta$ становится меньше импульса $2\pi \hbar / d$, соответствующего периоду d кристаллической решетки. Учитывая выражения (6.15), имеем:

$$(\varepsilon_1/mc^2) 4\pi\lambda (1 - \varepsilon)/\varepsilon \geq d. \quad (6.20)$$

Например, при $\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1} \approx \frac{1}{2}$ эффект существен для энергий $\varepsilon_1 \gtrsim \frac{mc^2 d}{4\pi\lambda} \sim 100 \text{ Мэв}$. При таких энергиях при расчете

поперечника тормозного излучения необходимо рассматривать процесс на потенциале всего кристалла в целом.

Можно привести также и классическое объяснение интерференционным явлениям при тормозном излучении в кристалле. Воспользуемся рассуждениями Фриша [25] и рассмотрим кристаллическую решетку с периодом, равным d . Пусть влетающий под углом θ электрон встречает на своем пути атомы 1 и 2, находящиеся на расстоянии, равном $\frac{d}{\theta}$

(см. рис. 5). Поскольку рассматривается периодическая среда, то и последующие атомы, лежащие на пути электрона, отстоят друг от друга на расстоянии $\frac{d}{\theta}$. Предположим,

что при прохождении около атомов последовательно происходят акты тормозного излучения. Пусть излученные кванты малоэнергичны и не влияют на изменение импульса электрона. Ввиду малости углов излучения будем считать, что направление движения квантов совпадает с направлением движения первоначального электрона. Квант в точке 2 будет испущен в момент времени $t_0 + \frac{d}{v\theta}$, где t_0 — момент испускания первого кванта в точке 1. Поскольку первый квант

дойдет до точки 2 в момент времени $t_0 + \frac{d}{c\theta}$, то для эффективной интерференции, приводящей к усилению излучения, необходимо, чтобы разность фаз обоих квантов равнялась $2\pi n$, где n — целое число. Это условие имеет вид:

$$\frac{\omega d}{\theta} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c} \right) = 2\pi n. \quad (6.21)$$

Условие (6.21) можно переписать в виде

$$\frac{\delta}{\theta} = n \frac{2\pi}{d}, \quad (6.22)$$

где величина δ равна

$$\delta = \frac{\omega (mc^2)^2}{2cE^2}.$$

Следовательно δ , как и прежде, означает минимальный передаваемый ядру импульс при излучении мягких квантов.

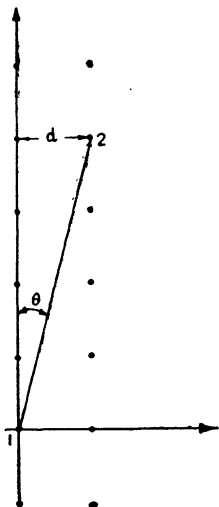


Рис 5. К классическому объяснению интерференционных явлений в кристалле.

Приведем для иллюстрации численные оценки: величина δ равна $\delta \approx \frac{10^{-4}}{\hbar} \approx 0,25 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}$ при энергии электрона

$E = 1 \text{ Гэв}$ и при энергии кванта $\frac{\hbar\omega}{E} = 0,3$. Для приведенных значений параметров интерференционные явления в кристалле должны наблюдаться, поскольку период решетки для большинства монокристаллов порядка нескольких ангстрем, и условие (6.22) всегда можно выполнить.

Можно, наконец, напомнить, что в литературе известно явление, когда интерференционные эффекты существенны, несмотря на то, что длина рассеиваемой волны значительно меньше размеров периода решетки. Это—хорошо изученное явление рассеяния рентгеновских лучей под малыми углами.

В этом случае эффективные размеры периода решетки, входящие в условие интерференции, уменьшаются пропорционально синусу угла падения рентгеновских лучей на кристалл.

§ 7. ВЫВОД ИСХОДНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И РОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННЫХ ПАР В КРИСТАЛЛЕ

Выведем исходную формулу для поперечников излучения и рождения электронно-позитронных пар в кристалле. При изложении этого вопроса следуем работе [4].

Потенциал кристаллической решетки произвольной структуры, состоящей из одинаковых атомов, можно представить в виде

$$\varphi = \sum_i \frac{Ze}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} e^{-|\vec{r} - \vec{r}_i|/R}. \quad (7.1)$$

Суммирование производится по всем атомам решетки с координатами \vec{r}_i . Экранировка описывается в действительности более сложным образом (см. ниже). Экспоненциальный вид экранировки мы используем, чтобы иметь простую аналитическую форму. В последующих формулах вид экранировки будет уточнен.

Свяжем поперечники тормозного излучения на отдельном атоме с поперечником излучения на кристаллической решетке.

Задача о тормозном излучении электрона в поле одного атома в борновском приближении решается, как известно, двумя этапами [36]. На первом этапе рассматривается отклонение электрона в поле атома, на другом — его взаимодействие с полем излучения. Если поле ядра заменить полем кристаллической решетки, то в обычном матричном элементе рассеяния появится дополнительный множитель

$$\sum_i \exp [i(\vec{p}_1 - \vec{p}') \vec{r}_i / \hbar], \quad (7.2)$$

где \vec{p}_1 — начальный импульс, \vec{p}' — импульс электрона в промежуточном состоянии. Суммирование ведется по всем атомам решетки. Вычисление на втором этапе приводит к закону сохранения импульса, т. е.

$$\vec{p}' = \vec{p}_2 + \hbar \vec{k},$$

где \vec{p}_2 — импульс электрона в конечном состоянии, а $\hbar \vec{k}$ — импульс излученного фотона. В окончательное выражение для сечения войдет квадрат модуля выражения (7.2)*. Таким образом, сечение для излучения кванта с энергией $\hbar\omega$ в определенном телесном угле при фиксированном отклонении электрона дается формулой

$$d\sigma = d\sigma_{\text{БГ}} \left| \sum_i \exp(i\vec{q} \vec{r}_i / \hbar) \right|^2, \quad (7.3)$$

где

$$\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \hbar \vec{k}$$

есть импульс, передаваемый среде, а через $d\sigma_{\text{БГ}}$ обозначено обычное дифференциальное сечение Бете—Гайтлера.

Дополнительный кристаллический множитель в формуле (7.3) накладывает условия на передаваемый импульс \vec{q} . Поэтому полезно выразить поперечник Бете—Гайтлера в переменных \vec{q} (обычно формула Бете—Гайтлера выражается в переменных: энергия и угол отклонения фотона, а также угол отклонения электрона). Это очень просто сделать, если воспользоваться методом псевдофотонов, который, как мы видели в предыдущей главе, для малых передаваемых им-

* При использовании современных методов расчета в выражение для матричного элемента тормозного излучения войдет $A(\vec{q}) = \int A_0 \exp(i\vec{k}x) d^4x$. Подставляя вместо A_0 выражение (7.1), придем к аналогичному результату.

пульсов $q \ll mc$ приводит к формулам, совпадающим с формулами теории возмущений. Ниже будет показано (см. 7.13), что именно эти значения q существенны для вычисления когерентного тормозного излучения. Следовательно, при вычислении когерентной части вместо точной формулы Бете—Гайтлера можно воспользоваться интерполяционной формулой (2.19), причем точность результатов от этого не изменится. Такая процедура вычисления поперечников тормозного излучения в кристалле была использована в работе [4].

Преобразование формулы Бете—Гайтлера к переменным q можно совершить и непосредственно (см. приложение I). Оба способа приводят к тождественным выражениям.

Однако, прежде чем производить конкретный анализ формулы (7.3), отметим следующее обстоятельство (см. рассмотренный выше пример с двухатомной молекулой). При тормозном излучении в кристалле состояние кристалла, вообще говоря, изменяется (это, однако, практически не меняет состояния конечных релятивистских частиц ввиду малости энергии возбуждения кристалла). Очевидно, что на эксперименте измеряется поперечник вне зависимости от того, в какое конечное состояние перейдет кристаллическая решетка. Следовательно, если в формулу (7.3) ввести дополнительно переменные, описывающие состояние кристаллической решетки, то выражение (7.3) необходимо будет просуммировать по всем конечным состояниям решетки. Ввиду полноты функций, описывающих состояние кристалла, отмеченная процедура эквивалентна усреднению поперечника (7.3) по начальному состоянию кристалла, т. е. умножению поперечника (7.3) на волновую функцию начального состояния кристалла $|\Psi_0(\vec{r}_i)|^2$ и усреднению по всем \vec{r}_i (сравни с разобранным выше примером рассеяния на молекуле).

Величины \vec{r}_i отклоняются от своих равновесных положений \vec{r}_{i0} из-за тепловых колебаний. Чтобы не усложнять изложение, процедура усреднения по тепловым колебаниям перенесена в приложение (см. приложение II). Если принять,

что колебания отдельных узлов решетки происходят независимо друг от друга, и обозначить через \bar{u}^2 средний квадрат амплитуды этих колебаний*, то имеет место следующее равенство (см. формулу (11) приложения II):

$$\overline{\left| \sum_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i / \hbar} \right|^2} = N(1 - e^{-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2}) + e^{-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2} \left| \sum_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{i0} / \hbar} \right|^2.$$

Используя это равенство, для поперечника тормозного излучения в кристалле получим выражение (см. формулы (3) и (12) работы [4]):

$$d\sigma = d\sigma_{\text{БГ}} \left\{ N(1 - e^{-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2}) + e^{-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2} \left| \sum_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{i0} / \hbar} \right|^2 \right\}, \quad (7.4)$$

где N — полное число атомов в рассматриваемом объеме.

Аналогичное усреднение по тепловым колебаниям обычно используется в теории дифракции рентгеновских лучей и приводит к разделению рассеяния на интерференционные максимумы и тепловой или диффузный фон [37]. Дифференциальный поперечник излучения (а также соответствующий поперечник образования электронно-позитронных пар) можно, следовательно, представить в виде суммы двух поперечников: поперечника Бете—Гайтлера на N независимых центрах и когерентной части:

$$d\sigma = Nd\sigma_{\text{БГ}} + d\sigma_{\text{ког}}, \quad (7.5)$$

$$d\sigma_{\text{ког}} = d\sigma_{\text{БГ}} e^{-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2} \left\{ \left| \sum_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{i0} / \hbar} \right|^2 - N \right\}. \quad (7.6)$$

Рассмотрим предельные случаи формулы (7.4).

Из результатов первой главы (см. формулу (2.19) и вычисления интегралов (2.22) и (2.26)) следует, что логарифмический вклад в формулу Бете—Гайтлера вносят все передаваемые импульсы, удовлетворяющие неравенству

* Более строгий учет тепловых колебаний решетки лежит в настоящее время за пределами возможностей эксперимента.

$\hbar/R \lesssim q_{\perp} \lesssim mc$. Следовательно, влиянием тепловых колебаний можно пренебречь только в том случае, если средний квадрат амплитуды тепловых колебаний значительно меньше эффективных значений величины $\hbar^2/q_{\text{эф}}^2$. В этом случае второе слагаемое формулы (7.6) сокращается с поперечником Бете—Гайтлера на N атомах, и полный поперечник излучения в кристалле будет определяться величиной, которую мы в дальнейшем будем называть интерференционной частью поперечника:

$$d\sigma_{\text{инт}} = d\sigma_{\text{БГ}} e^{-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2} \left| \sum_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{i0} / \hbar} \right|^2. \quad (7.6')$$

Этот предельный случай (при $\bar{u}^2 = 0$) соответствует переходу к идеальному кристаллу, рассмотренному Б. Феррети [2]. Как показывают численные оценки (см. табл. I), такая ситуация в действительности не осуществляется, и учет тепловых колебаний существенно меняет всю физическую картину излучения в кристалле.

Другой предельный случай формулы (7.4) будет соответствовать переходу к аморфному веществу, для которого поперечник излучения будет определяться формулой Бете—Гайтлера. Это произойдет, когда амплитуда тепловых колебаний станет настолько большой, что экспоненциальный множитель в формуле (7.6) зануляет когерентную часть поперечника. Для этого необходимо, чтобы средний квадрат тепловых колебаний атомов в решетке был бы значительно больше квадрата радиуса экранировки R .

Обратим внимание на структуру когерентной части поперечника тормозного излучения, определяемой формулой (7.6). Когерентный поперечник состоит из двух слагаемых: интерференционной части (см. формулу (7.6')) и второго слагаемого, которое мы будем обозначать через $d\sigma_1$,

$$d\sigma_1 = -Nd\sigma_{\text{БГ}} e^{-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2} \quad (7.6'')$$

и которое вообще не зависит от структуры кристаллической решетки. В дальнейших вычислениях поперечник $d\sigma_1$ будет

Таблица I

Элемент	Z	Атомный вес	$\theta_D^\circ \text{K}$	R	d	$\sqrt{\bar{u}^2}$			$d^2/4\pi^2 \bar{u}^2$			R^2/\bar{u}^2			Тип решетки
						0°K	293°K	θ_D	0°K	293°K	θ_D	0°K	293°K	θ_D	
C	6	12,01	1860	0,291	3,6	0,039	0,041	0,08	214,	197	51,9	55,2	50,7	13,4	Тип алмаза
Be	4	9,013	1160	0,333 3,607	2,283 3,607	0,058	0,069	0,118	38,7 97,2	28,5 70,8	9,4 23,4	32,6	23,7	7,8	Гексагональная плотная упаковка
Al	13	26,98	418	0,229	4,05	0,056	0,096	0,114	138,6	44,7	31,8	17,46	5,5	4	Кубическая гра-нецентрирован.
Si	14	28,09	658	0,219	5,43	0,045	0,062	0,09	373	186,9	89	24	12	5,76	Тип алмаза
Fe	26	55,85	467	0,178	3,66	0,037	0,06	0,074	254	92,4	59,7	24	8,7	5,64	Кубическая гра-нецентрирован.
Cu	29	63,54	339	0,172	3,61	0,04	0,077	0,08	202,5	54,9	49	18,36	4,98	4,5	Кубическая гра-нецентрирован.
Ge	32	72,6	366	0,167	5,66	0,036	0,066	0,74	605	187	152,4	21	6,45	5,25	Тип алмаза
W	74	183,86	379	0,126	3,16	0,022	0,04	0,046	507,6	155	124,8	31,98	9,78	7,98	Кубическая объ-емноцентриров.
Pb	82	207,21	94,5	0,122	4,95	0,042	0,15	0,085	372,9	27,84	93	9	0,669	2,25	Кубическая гра-нецентрирован.

d — период решетки в ангстремах,

θ_D — температура Дебая (для последних семи элементов значения θ_D взяты из книги Киттеля „Введение в физику твердого тела“),

$R = R_0 Z^{-1/3}$ — радиус экранировки в ангстремах ($R_0 = \hbar^2/mc^2 = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см — борковский радиус), \bar{u}^2 — средний квадрат амплитуды тепловых колебаний в Å^2 .

для удобства объединяться с поперечником Бете—Гайтлера и их сумма будет называться аморфной частью поперечника тормозного излучения в кристалле (см. формулу (8.1)). Таким образом, полный поперечник излучения в кристалле состоит из отдельных слагаемых: поперечника Бете—Гайтлера, интерференционного поперечника и поперечника $d\sigma_1$. Каждое из слагаемых будет рассмотрено ниже.

Поперечники Бете—Гайтлера хорошо исследованы и мы приведем здесь только конечные выражения для полных поперечников тормозного излучения и рождения электронно-позитронных пар [38, 36]:

$$d\sigma_{\text{торм}} = 4N\bar{\sigma} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left[(1 + (1 - \varepsilon)^2) \psi_1(\delta) - \frac{2}{3} (1 - \varepsilon) \psi_2(\delta) \right], \quad (7.7)$$

$$d\sigma_{\text{пары}} = 4N\bar{\sigma} \frac{\varepsilon_+^2 + d\varepsilon_+}{(\hbar\omega)^3} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_-^2}{\varepsilon_+^2}\right) \psi_1(\delta) + \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+} \psi_2(\delta) \right], \quad (7.8)$$

где

$$\psi_1(\delta) = 1 + \int_{\frac{mc}{\hbar\delta}}^{mc} (q - \hbar\delta)^2 [1 - F(q)]^2 \frac{dq}{q^3}, \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\delta) = & \frac{5}{6} + \int_{\frac{mc}{\hbar\delta}}^{mc} \left(q^3 - 6\hbar^2\delta^2 q \ln \frac{q}{\hbar\delta} + \right. \\ & \left. + 3\hbar^2\delta^2 q - 4\hbar^3\delta^3 \right) [1 - F(q)]^2 \frac{dq}{q^4}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

При условии полной экранировки для ψ_1 и ψ_2 можно воспользоваться следующими формулами [38, 36]:

$$\psi_1 = \ln 183Z^{-1/3}, \quad (7.11)$$

$$\psi_2 = \ln 183Z^{-1/3} - \frac{1}{6}. \quad (7.12)$$

Поперечники тормозного излучения и рождения пар выражены в переменных q . Преобразование к этим переменным было проведено Бете [38] для правильного учета экрани-

ровки. Экранирующее действие электронов описывается атомным форм-фактором $F(q)$, который задается обычно численно. Поэтому для получения полных поперечников полезно интегрирование по передаваемому импульсу q оставить на последний этап.

Приближенные формулы для перечисленных выше поперечников приведены в первой главе. От формул (7.7) и (7.8) они отличаются только значениями ψ_1 и ψ_2 , которые оказываются равными

$$\psi_1' = \ln 137Z^{-1/3} + \frac{1}{2}, \quad \psi_2' = \left(\ln 137Z^{-1/3} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{6}.$$

Как показано в работах [38, 39], лучшее согласие с точными расчетами дает значение радиуса экранировки $R = 111Z^{-1/3}\lambda$ вместо $R = 137Z^{-1/3}\lambda$. В этом случае имеем:

$$\psi_1' = \ln 111Z^{-1/3} + \frac{1}{2}, \quad (7.11')$$

$$\psi_2' = \left(\ln 111Z^{-1/3} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{6}. \quad (7.12')$$

Перейдем теперь к когерентной части. Заметим, прежде всего, что при $q^2\bar{u}^2/\hbar^2 \gg 1$ когерентная часть становится экспоненциально малой. Это означает, что из-за тепловых колебаний значения q^2 , вносящие вклад в поперечник когерентного тормозного излучения, должны быть ограничены по величине:

$$q \lesssim \hbar/\sqrt{\bar{u}^2}. \quad (7.13)$$

Поскольку условие $\hbar/\sqrt{\bar{u}^2} \ll mc$ всегда выполняется с большим запасом, то формулу Бете—Гайтлера, входящую в формулу (7.6), можно заменить упрощенным выражением (2.19), которое точно аппроксимирует формулу Бете—Гайтлера во всей области передаваемых импульсов, удовлетворяющих условию $q \ll mc$. Использование такого разложения

значительно упрощает все последующие формулы. Используя для $d\sigma_{\text{БГ}}$ выражение (2.19), перепишем формулу (7.6) в следующем виде (см. [4], формула (16)):

$$d\sigma_{\text{КОГ}}^{\text{ТОРМ}} = 2\bar{\sigma} \frac{m^2 c^3 \hbar d\omega}{\pi \varepsilon_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int dq_2 dq_3 \int_{\hbar\delta} \frac{dq_{\parallel}}{q_{\parallel}^2} \frac{q_{\perp}^2}{(q^2 + \hbar^2 R^{-2})^2} \left(1 + \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3} - \frac{2\hbar\delta}{q_{\parallel}} + \frac{2\hbar^2 \delta^2}{q_{\parallel}^2} \right) \exp(-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2) \left\{ \left| \sum_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i / \hbar} \right|^2 - N \right\}. \quad (7.14)$$

Формула (7.14) является исходной формулой для рассмотрения и расчета когерентного тормозного излучения в кристалле. Аналогичная формула имеет место и для поперечника рождения пар (см. рассмотренный ниже пример, формула (7.22)). Ниже в виде примера рассмотрен простой вывод формул (7.14) и (7.22), базирующийся на методе псевдофотонов.

Формулы (7.14) и (7.22) можно получить и с помощью стандартной теории возмущений. Для этого необходимо произвести целый ряд алгебраических преобразований для перехода от угловых переменных формулы Бете—Гайтлера к переменным \vec{q} . Эти преобразования, следуя вычислениям работы [10], проделаны в приложении I (см. формулы (18) и (26) приложения I). Совершив разложение в полученных формулах по $q_{\perp}^2 / m^2 c^2$ и оставляя первый член (см. выражения (5.1) и (5.2)), мы приходим к следующему результату для когерентной части поперечника тормозного излучения в кристалле:

$$d\sigma_{\text{КОГ}}^{\text{ТОРМ}} = 2\bar{\sigma} \frac{m^2 c^3 \hbar d\omega}{\pi \varepsilon_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int dq_2 dq_3 \int_{\hbar\delta + cq_{\perp}^2 / 2\varepsilon_1} dq_{\parallel} \times \\ \times \frac{q_{\perp}^2}{(q^2 + \hbar^2 R^{-2})^2 (q_{\parallel} - cq_{\perp}^2 / 2\varepsilon_1)^2} \times \\ \times \left[1 + \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3} - \frac{2\hbar\delta}{q_{\parallel} - cq_{\perp}^2 / 2\varepsilon_1} + \frac{2\hbar^2 \delta^2}{(q_{\parallel} - cq_{\perp}^2 / 2\varepsilon_1)^2} \right] \times \\ \times \exp(-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2) \left\{ \left| \sum_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{i0} / \hbar} \right|^2 - N \right\}. \quad (7.15)$$

По сравнению с формулой (5.1) здесь интегрирование по азимутальному углу вектора \vec{q}_\perp не производилось. Абсолютная величина q_\perp^2 равна $q_\perp^2 = q_2^2 + q_3^2$.

Формула (7.15) практически не отличается от формулы (7.14). Чтобы это показать, произведем замену переменных в (7.15):

$$q'_\parallel = q_\parallel - cq_\perp^2/2\varepsilon_1$$

и несколько упростим формулу (7.15), предполагая, что выполняется условие

$$\hbar\delta \gg cq_\perp^2/2\varepsilon_1. \quad (7.16)$$

Учитывая условие (7.13), перепишем неравенство (7.16) в виде

$$\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_2} \gg \frac{\lambda^2}{2u^2}, \quad (7.17)$$

из которого видно, что (7.16) практически всегда выполняется, что и приводит к совпадению формулы (7.14) и (7.15). Аналогичным образом проверяется эквивалентность и для поперечников рождения пар. Формулы для поперечников тормозного излучения и рождения пар были получены Юбераллом [10] для линейной цепочки атомов методом теории возмущений.

Однако сравнения с формулами работы [4] им произведено не было. Как мы видим, результаты расчета когерентных частей поперечников по теории возмущений оказываются тождественными с результатами работы [4]. Дополнительное предположение, сделанное в работе [10], заключающееся в замене реального трехмерного кристалла на одномерную цепочку атомов, в дальнейшем не оправдалось, и все расчеты эксперимента производятся сейчас по формулам (7.14) и (7.22). Единственное изменение, которое нужно ввести в эти формулы, заключается в более строгом учете экранирующего действия электронов.

Формулы (7.14) и (7.22) принято записывать теперь в том виде, который соответствует формулам (7.7) и (7.8) (см. ниже формулы (8.15), (8.16), (8.19), (8.20)).

В обеих формулах (7.14) и (7.15) экранировка берется экспоненциального вида. Как показывают численные расчеты, такой закон экранирующего действия электронов не всегда приводит к хорошим результатам. Можно так подобрать константу R , чтобы подогнать полученные таким образом полные поперечники для рождения электронно-позитронных пар и для тормозного излучения на отдельном атоме к соответствующим формулам, где используется точная экрани-

ровка по методу Хатри—Фока. При такой процедуре необходимо выбрать [38] $R = 108Z^{-1/3}\lambda$ либо, еще лучше, [39] $R = 111Z^{-1/3}\lambda$.

Однако совпадение полных поперечников не означает, что приближенный закон экранировки будет хорошо описывать экранирующее действие электронов по всей области передаваемых импульсов. В частности, для когерентной части поперечников, где область эффективных q из-за наличия тепловых колебаний ограничена условием (7.13)

$$q^2 \leq \frac{\hbar^2}{u^2},$$

закон экранирующего действия электронов должен быть специально подобран, исходя из известных экспериментальных данных [12, 18, 19].

Таким образом, в дальнейших формулах, для которых учет точной экранировки является существенным, необходимо произвести следующую замену:

$$\frac{1}{(q^2 + \hbar^2 R^{-2})^2} \longrightarrow \frac{[1 - F(q)]^2}{q^4}, \quad (7.18)$$

где $F(q)$ — атомный форм-фактор, который задается обычно численно.

Пример. Вывести формулы для поперечников тормозного излучения и рождения электронно-позитронных пар в кристалле методом псевдофотонов.

Вычислим поперечник тормозного излучения релятивистского электрона на потенциале (7.1). Положим, что электрон движется по оси x в отрицательном направлении с начальной скоростью \vec{v} . Переходя в систему координат, где электрон до рассеяния покоится, и следуя методу псевдофотонов (см. § 2), получим следующее выражение для полного потока энергии через всю поверхность, перпендикулярную движению

$$S = \frac{Z^2 e^2 \gamma}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 dk_3 \int \frac{k_2^2 + k_3^2}{(k^2 + R^{-2})^2} \left| \sum_i e^{i\vec{k}\vec{r}_i} \right|^2 dk_1. \quad (7.19)$$

Разделив поток энергии в интервале $k_1, k_1 + dk_1$ на энергию псевдофотона $\hbar c k_1 \gamma$, мы получим выражение для полного числа псевдофотонов в интервале $k_1, k_1 + dk_1$:

$$n_{k_1} dk_1 = \frac{Z^2 e^2}{\hbar c \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{(k_2^2 + k_3^2) dk_2 dk_3}{k_1 (k^2 + R^{-2})^2} \left| \sum_i e^{i \vec{k} \vec{r}_i} \right|^2 dk_1. \quad (7.20)$$

Отличие от формулы (2.10) состоит в присутствии интерференционного множителя. Далее, аналогично выводам главы I, умножим полученное выражение на поперечник рассеяния фотона на свободном электроне (2.18) (формула Клейна—Нишины). В результате мы получаем следующий поперечник тормозного излучения на кристалле

$$d\sigma_{\text{торм}} = 2\bar{\sigma} \frac{m^2 c^3 d\omega}{\pi \epsilon_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \int_0^{k_{1\text{max}}} \frac{dk_1}{k_1^2} \frac{k_2^2 + k_3^2}{(k^2 + R^{-2})^2} \times \\ \times \left(1 + \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3} - \frac{2\delta}{k_1} + \frac{2\delta^2}{k_1^2} \right) \left| \sum_i e^{i \vec{k} \vec{r}_i} \right|^2. \quad (7.21)$$

Здесь $k_{1\text{max}}$ и δ даются соответственно выражениями (2.16) и (2.17). Поперечник (7.21) отличается от поперечника тормозного излучения на одном атоме (2.19) подынтегральным множителем $\left| \sum_i \exp(i \vec{k} \vec{r}_i) \right|^2$. Формула (7.21) без учета экранировки и тепловых колебаний получена в работе [2].

Произведя в (7.21) замену $\epsilon_1 \rightarrow -\epsilon_+$, $\epsilon_2 \rightarrow \epsilon_{-1}$ и $\omega \rightarrow -\omega$ и интерпретируя электрон с отрицательной энергией как позитрон в конечном состоянии с энергией ϵ_+ , а фотон с отрицательной частотой как поглощаемый фотон с энергией $\hbar\omega$, можно получить формулу для рождения электронно-позитронных пар фотоном в поле кристалла. Для этого необходимо еще умножить (7.21) на отношение фазовых объемов позитрона и фотона (4.2). В результате получаем:

$$d\sigma_{\text{пары}} = 2\bar{\sigma} \frac{m^2 c^3}{\pi \hbar} \frac{d\epsilon_+}{(\hbar\omega)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \int_0^{k_{1\text{max}}} \frac{dk_1}{k_1^2} \frac{k_2^2 + k_3^2}{(k^2 + R^{-2})^2} \times \\ \times \left(1 - \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3} - \frac{2\delta}{k_1} + \frac{2\delta^2}{k_1^2} \right) \left| \sum_i e^{i \vec{k} \vec{r}_i} \right|^2, \quad (7.22)$$

где

$$\delta = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_+ \varepsilon_-} \frac{mc^2}{\hbar}, \quad k_{1 \max} = 2 \frac{\omega}{c}.$$

Далее, необходимо усреднить (7.21) и (7.22) по тепловым колебаниям, т. е. использовать формулу (11) приложения II.

Отметим, что формулы (7.21) и (7.22) для когерентной части обладают той же точностью, что и формула (7.15), поскольку мы считаем условие (7.16) всегда выполненным.

§ 8. КОГЕРЕНТНАЯ ЧАСТЬ ПОПЕРЕЧНИКА ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И РОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННЫХ ПАР В КРИСТАЛЛЕ

Когерентная часть поперечника состоит из двух различных по своему характеру членов. Один из них (который соответствует первому члену в фигурных скобках формулы (7.14)) зависит от ориентации кристаллических осей относительно вектора \vec{q} (и следовательно зависит от направления влета электрона в кристалл). Эту часть поперечника будем называть интерференционной частью и обозначать через $d\sigma_{\text{инт}}$ (см. формулу (7.6')). Второй член не зависит от направления вектора \vec{q} . По своей структуре он похож на формулу Бете—Гайтлера (2.19). Отличие состоит только в присутствии обрезающего фактора $\exp(-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2)$ и в отрицательном знаке перед всем выражением. В связи с этим удобно эту часть поперечника объединить с формулой Бете—Гайтлера (см. формулу (7.6'')) и обозначить сумму через

$$d\sigma_{\text{ам}} = Nd\sigma_{\text{БГ}} + d\sigma_1 \quad (8.1)$$

(такие обозначения приняты в работе [4]). Выражения для $d\sigma_{\text{БГ}}$ приведены выше (см. (7.7) и (7.8)). Приведем здесь выражение второго слагаемого $d\sigma_1$:

$$d\sigma_1^{\text{торм}} = -2\bar{\sigma}N \frac{m^2 c^3 \hbar d\omega}{\varepsilon_1^2} \int_0^\infty dq_\perp^2 \int_{\hbar\delta}^{\sim mc} dq_\parallel \frac{q_\perp^2}{q_\parallel^2 (q^2 + \hbar^2 R^{-2})^2} \left(1 + \right. \\ \left. + \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3} - \frac{2\hbar\delta}{q_\parallel} + \frac{2\hbar^2 \delta^2}{q_\parallel^2} \right) \exp(-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2). \quad (8.2)$$

Если предположить, что выполняется условие полной экранировки (2.20), то интегрирование по переменной q_{\parallel} (обозначим этот интеграл через I) приводит к результату

$$I = \int_{\hbar\delta}^{\sim mc} \frac{dq_{\parallel}}{q_{\parallel}^2} \exp(-q_{\parallel}^2 \bar{u}^2/\hbar^2) \left(1 + \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3} - \frac{2\hbar\delta}{q_{\parallel}} + \frac{2\hbar^2 \delta^2}{q_{\parallel}^2}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3}\right) I_1 - 2\hbar\delta I_2 + 2\hbar^2 \delta^2 I_3, \quad (8.3)$$

где

$$I_i = \int_{\hbar\delta}^{\sim mc} \exp(-q_{\parallel}^2 \bar{u}^2/\hbar^2) \frac{dq_{\parallel}}{q_{\parallel}^{i+1}}; \quad i=1, 2, 3. \quad (8.4)$$

Тогда окончательное выражение для $d\sigma_1$ можно записать в виде:

$$d\sigma_1^{\text{топм}} = -2\bar{\sigma} N I \frac{m^2 c^3 \hbar d\omega}{\varepsilon_1^2} \int dq_{\perp}^2 \frac{q_{\perp}^2}{(q_{\perp}^2 + \hbar^2 R^{-2})^2} \exp(-q_{\perp}^2 \bar{u}^2/\hbar^2). \quad (8.5)$$

В выражении (8.5) может быть произведена замена (7.18), что означает точный учет экранировки. В данном случае такая замена не является необходимой, поскольку, как будет видно из дальнейшего, $d\sigma_1$ является небольшой поправкой к $Nd\sigma_{\text{БГ}}$. Если предположить теперь, что выполняется условие

$$\frac{q_{\parallel}^2 \bar{u}^2}{\hbar^2} \ll 1, \quad (8.6)$$

то интеграл I легко берется, и мы приходим к формуле (14) работы [4] (из табл. I видно, что при выполнении условия (6.20), (8.6) всегда выполняется):

$$d\sigma_1^{\text{топм}} = -4\bar{\sigma} N \frac{d\omega}{\omega} \left[\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \right] B. \quad (8.7)$$

Здесь $\varepsilon = \hbar\omega/\varepsilon_1$, а через B обозначено выражение

$$2B\left(\frac{\bar{u}^2}{R^2}\right) = \int_0^{\bar{m}c} \frac{q^3 dq}{(q^2 + \hbar^2 R^{-2})^2} \exp(-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2) =$$

$$= -1 - Ei\left(-\frac{\bar{u}^2}{R^2}\right) \left(1 + \frac{\bar{u}^2}{R^2}\right) \exp(\bar{u}^2 / R^2), \quad (8.8)$$

где

$$Ei(-x) = - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Относительное уменьшение интенсивности излучения Бете—Гайтлера в процентах в зависимости от температуры приведено в табл. II, взятой из работы [4].

Таблица II

Вещество	θ_D °K	$\Delta = B/L_{rad}$ %	
		$T = 0$	$T = \theta_D$
Al	418	12	4
Pb	94,5	8	5
W	379	25	11

Через $L_{rad} = \ln 183 Z^{-1/3}$ обозначен так называемый радиационный логарифм. Из таблицы видно, что $d^2\tau_1$ приводит к поправкам к формуле Бете—Гайтлера порядка 5—25%.

Аналогичная формула имеет место и для поперечника рождения электронно-позитронных пар. Поправка к формуле (7.8) может быть рассчитана по формулам (8.5) или (8.7), в которых произведена замена (4.1) и введен множитель (4.2). Таким образом, в случае рождения пары вместо формулы (8.7) мы будем иметь:

$$d\sigma_1^{\text{пары}} = -4\bar{\sigma} N \frac{\epsilon_+^2 d\epsilon_+}{(\hbar\omega)^3} \left(1 + \frac{\epsilon_-^2}{\epsilon_+^2} + \frac{2}{3} \frac{\epsilon_-}{\epsilon_+}\right) B. \quad (8.9)$$

B дается формулой (8.8).

Как уже отмечалось выше, поперечники $d\sigma_1$ (8.7) и (8.9) можно объединить с формулами (7.7) и (7.8). Тогда для поперечника $d\sigma_{ам} = Nd\sigma_{БГ} + d\sigma_1$ получаются выражения

$$d\sigma_{ам}^{горм} = \bar{\sigma} N \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left[(1 + (1 - \varepsilon)^2) \psi_1^{ам}(\delta) - \frac{2}{3} (1 - \varepsilon) \psi_2^{ам}(\delta) \right], \quad (8.10)$$

$$d\sigma_{ам}^{пары} = \bar{\sigma} N \frac{\varepsilon_+^2 d\varepsilon_+}{(\hbar\omega)^3} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_-^2}{\varepsilon_+^2}\right) \psi_1^{ам}(\delta) + \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+} \psi_2^{ам}(\delta) \right], \quad (8.11)$$

где

$$\psi_1^{ам}(\delta) = 4[\psi_1(\delta) - B], \quad \psi_2^{ам}(\delta) = 4[\psi_2(\delta) - B] \quad (8.12)$$

определяются по формулам (7.9), (7.10) и (8.8).

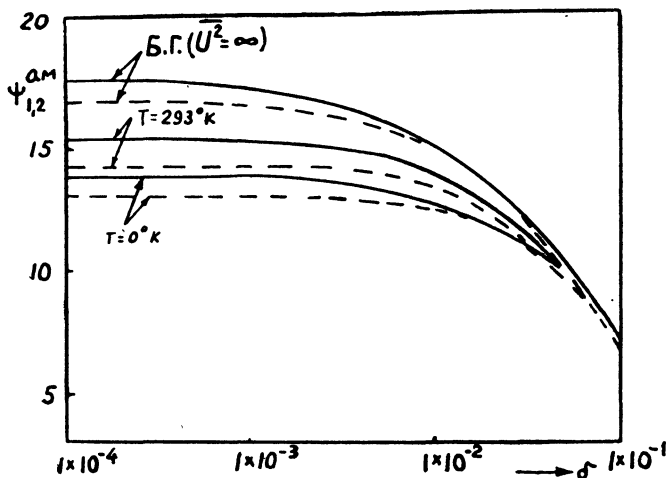


Рис. 6. Величина $\psi_{1,2}^{ам} = 4[\psi_{1,2} - B]$ в зависимости от δ для монокристалла кремния при $T = 293^\circ\text{K}$ и $T = 0^\circ\text{K}$. Сплошная кривая соответствует $\psi_1^{ам}$, пунктирная $\psi_2^{ам}$. Верхние кривые Б.Г. соответствуют чисто аморфному веществу (поперечнику Бете—Гайтлера $\bar{u}^2 \rightarrow \infty$, т. е. $B = 0$).

На рис. 6 приведена зависимость $\psi_1^{ам}$ (сплошная кривая) и $\psi_2^{ам}$ (пунктирная кривая) от величины δ для кремния. Приведенная серия кривых соответствует двум значениям температуры: $T = 0^\circ\text{K}$ и комнатной температуре $T = 293^\circ\text{K}$. Верхняя пара кривых соответствует случаю, когда $B = 0$,

т. е. формуле Бете—Гайтлера. Кривые взяты из работы [19], величина δ выражена в единицах λ .

Окончив анализ аморфной части полных поперечников тормозного излучения и рождения пар, перейдем к интерференционным частям. Представив когерентные части поперечников тормозного излучения и рождения пар в виде $d\sigma_{\text{кор}} = d\sigma_1 + d\sigma_{\text{инт}}$, из формул (7.14) и (7.22) для интерференционных частей поперечников получаем следующие выражения:

$$d\sigma_{\text{инт}}^{\text{торм}} = 2\bar{\sigma} \frac{m^2 c^3 \hbar d\omega}{\pi \epsilon_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_2 dq_3 \int_{\hbar\delta}^{\sim mc} dq_{\parallel} \frac{q_{\perp}^2 [1 - F(q)]^2}{q_{\parallel}^2 q^4} \left(1 + \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3} - \frac{2\hbar\delta}{q_{\parallel}} + \frac{2\hbar^2 \delta^2}{q_{\parallel}^2} \right) \exp(-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2) \sum_{ij} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} (\vec{r}_{i0} - \vec{r}_{j0})}, \quad (8.13)$$

$$\left(\delta = \frac{\hbar\omega}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{mc^2}{2\lambda} \right).$$

$$d\sigma_{\text{инт}}^{\text{пары}} = 2\bar{\sigma} \frac{m^2 c^3 d\epsilon_+}{\pi (\hbar\omega)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_2 dq_3 \int_{\hbar\delta}^{\sim mc} dq_{\parallel} \frac{q_{\perp}^2 [1 - F(q)]^2}{q_{\parallel}^2 q^4} \left(1 - \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3} - \frac{2\hbar\delta}{q_{\parallel}} + \frac{2\hbar^2 \delta^2}{q_{\parallel}^2} \right) \exp(-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2) \sum_{ij} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} (\vec{r}_{i0} - \vec{r}_{j0})}, \quad (8.14)$$

$$\left(\delta = \frac{\hbar\omega}{\epsilon_+ \epsilon_-} \frac{mc^2}{2\lambda} \right).$$

Формулы (8.13) и (8.14) являются исходными формулами для исследования интерференционной части поперечников тормозного излучения и рождения электронно-позитронных пар. Для более строгого учета экранирующего действия электронов мы произвели замену (7.18). Формула (8.13) была получена в работе [4] с использованием упрощенной экспоненциальной экранировки. Перепишем формулы (8.13) и (8.14) в виде, соответствующем формулам (7.7) и (7.8):

$$d\sigma_{\text{инт}}^{\text{торм}} = \bar{\sigma} N \frac{d\omega}{\omega} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} \right) \psi_{1\text{инт}}(\delta) - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \psi_{2\text{инт}}(\delta) \right], \quad (8.15)$$

$$d\sigma_{\text{инт}}^{\text{пары}} = \bar{\sigma} N \frac{\varepsilon_+^2 d\varepsilon_+}{(\hbar\omega)^3} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_-^2}{\varepsilon_+^2} \right) \psi_{1\text{инт}}(\delta) + \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+} \psi_{2\text{инт}}(\delta) \right], \quad (8.16)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{1\text{инт}}(\delta) = & \frac{2\hbar\delta}{N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_2 dq_3 \int_{\hbar\delta}^{\sim mc} dq_{\parallel} \frac{[1 - F(q)]^2}{q^4} \left(\frac{q^2}{q_{\parallel}^2} - 1 \right) \times \\ & \times \exp(-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2) \sum_{ij} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(\vec{r}_{i0} - \vec{r}_{j0})}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} \psi_{2\text{инт}}(\delta) = & \frac{12\hbar^2 \delta^2}{N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_2 dq_3 \int_{\hbar\delta}^{\sim mc} dq_{\parallel} \frac{[1 - F(q)]^2}{q^4 q_{\parallel}} \left(1 - \frac{\hbar\delta}{q_{\parallel}} \right) \times \\ & \times \left(\frac{q^2}{q_{\parallel}^2} - 1 \right) \exp(-q^2 \bar{u}^2 / \hbar^2) \sum_{ij} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(\vec{r}_{i0} - \vec{r}_{j0})}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Написание формул для полных поперечников в форме (8.15) и (8.16) сейчас является общепринятым.

Таким образом, полные поперечники для тормозного излучения и рождения электронно-позитронных пар можно окончательно представить в виде

$$\begin{aligned} d\sigma^{\text{торм}} &= d\sigma_{\text{ам}}^{\text{торм}} + d\sigma_{\text{инт}}^{\text{торм}} = \\ &= \bar{\sigma} N \frac{d\omega}{\omega} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} \right) (\psi_{1\text{ам}} + \psi_{1\text{инт}}) - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\psi_{2\text{ам}} + \psi_{2\text{инт}}) \right], \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} d\sigma^{\text{пары}} &= d\sigma_{\text{ам}}^{\text{пары}} + d\sigma_{\text{инт}}^{\text{пары}} = \\ &= \bar{\sigma} N \frac{\varepsilon_+^2 d\varepsilon_+}{(\hbar\omega)^3} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_-^2}{\varepsilon_+^2} \right) (\psi_{1\text{ам}} + \psi_{1\text{инт}}) + \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+} (\psi_{2\text{ам}} + \psi_{2\text{инт}}) \right]. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Функции $\psi_{1,2}^{\text{ам}}$ и $\psi_{1,2}^{\text{инт}}$ даются формулами (8.12), (8.17) и (8.18).

Функции $\psi_{1,2}^{\text{инт}}$ зависят от кристаллической структуры и от направления движения электронов (или фотонов), влетающих в кристалл (см. ниже).

Перепишем формулы (8.17) и (8.18), учитывая, что двойные суммы по атомам кристаллической решетки можно записать в виде (см. приложение III, а также формулу (9.6)):

$$\sum_{ij} e^{i \frac{\vec{q}}{\hbar} (\vec{r}_{i0} - \vec{r}_{j0})} = N_0 \frac{(2\pi)^3}{\Delta} \sum_{\vec{g}} |S(\vec{g})|^2 \delta \left(\frac{\vec{q}}{\hbar} - \vec{g} \right). \quad (8.21)$$

Здесь \vec{g} — вектор обратной решетки, N_0 — полное число атомов, находящихся в вершинах выбранных нами элементарных ячеек, Δ — объем элементарной ячейки прямой решетки, $S(\vec{g})$ — структурный фактор (см. формулу (9.3)):

$$\begin{aligned} \psi_1^{\text{инт}}(\delta) &= \frac{N_0}{N} \frac{4\delta (2\pi)^2}{\Delta} \sum_{\vec{g}} |S(\vec{g})|^2 \times \\ &\times \exp(-g^2 \bar{u}^2) \frac{[1 - F(g)]^2}{g^4} \left(\frac{g^2}{g_{\parallel}^2} - 1 \right), \end{aligned} \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} \psi_2^{\text{инт}}(\delta) &= \frac{N_0}{N} \frac{24\delta^2 (2\pi)^2}{\Delta} \sum_{\vec{g}} |S(\vec{g})|^2 \times \\ &\times \exp(-g^2 \bar{u}^2) \frac{[1 - F(g)]^2}{g_{\parallel} g^4} \left(\frac{g^2}{g_{\parallel}^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{\delta}{g_{\parallel}} \right). \end{aligned} \quad (8.23)$$

Суммирование по \vec{g} распространяется только по тем векторам обратной ячейки, проекция которых на направление первоначального движения превышает или равна величине δ (см. формулу (8.21)):

$$g_{\parallel} = \frac{q_{\parallel}}{\hbar} \geq \delta. \quad (8.24)$$

Условие (8.24) связывает направление начального импульса электрона с векторами обратной решетки. Поэтому функции ψ_1 и ψ_2 зависят от направления влета электрона в кристалл.

§ 9. ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПОПЕРЕЧНИКОВ

Аморфная часть поперечника тормозного излучения (8.10) (или рождения пар (8.11)) в кристалле не зависит от направления влета электрона (или фотона) в кристалл и, следовательно, не требует специального рассмотрения. Формулы (7.7), (7.8) и (8.7), (8.9) являются окончательными для построения теоретических кривых.

Формулы (8.13) и (8.14), соответствующие интерференционным частям когерентных поперечников, должны быть детально проанализированы. На эксперименте обычно осуществляется тот случай, когда интерференционные части дают основной вклад в полный поперечник тормозного излучения или рождения пар в кристалле.

Формулы (8.13) и (8.14) отличаются от формулы Бете—Гайтлера интерференционным множителем, представляющим некоторую двойную сумму по координатам атомов, входящих в решетку. Посмотрим, к каким следствиям приводит наличие такого множителя.

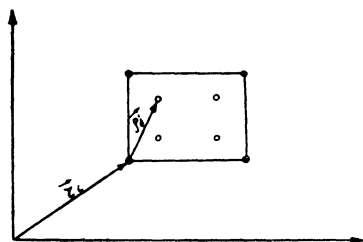
Прежде всего отметим, что речь идет о монокристалле. Действительно, случай поликристаллического вещества соответствовал бы усреднению по всем возможным направлениям векторов $\vec{r}_{i,j}$, входящих в двойную сумму выражений (8.13) и (8.14). Усреднения по хаотическому распределению отдельных блоков в поликристалле соответствуют усреднению по ориентациям двухатомной молекулы, приведенному в § 6. В этом случае специфический продольный интерференционный эффект пропадает, и влияние кристаллической структуры на поперечники тормозного излучения и рождения пар при высоких энергиях становится несущественным.

Другая ситуация возникает в случае излучения в монокристалле. Наличие интерференционного множителя, как будет показано ниже, приведет к весьма существенным отклонениям от обычной формулы Бете—Гайтлера.

Рассмотрим подробнее интерференционный множитель. Для того чтобы провести суммирование по атомам, входящим в кристаллическую решетку, удобно определить эле-

ментарную ячейку. Как известно, ее можно выбрать множеством различных способов. Если внутри элементарной ячейки нет узлов, то такая ячейка называется примитивной. Однако в ряде случаев целесообразен выбор элементарной ячейки большего объема, чем примитивная; такая решетка содержит дополнительные узлы, помимо узлов в вершинах. Эту элементарную ячейку называют сложной и характеризуют координатами всех узлов. Совокупность координат узлов, входящих в элементарную ячейку, называют базисом ячейки.

Рис. 7. Проекция элементарной кристаллической ячейки. \odot — узлы одной из примитивных решеток, \circ — узлы всех остальных атомов, входящих в ячейку и отсчитываемых от узла \vec{r}_i радиус-вектором $\vec{\rho}_j$.



Решетку со сложной ячейкой можно представить составленной из нескольких взаимопроникающих решеток с примитивными ячейками. Эти решетки мы для краткости будем называть примитивными. Будем полагать, что все примитивные решетки составлены из одних и тех же атомов. В качестве элементарной ячейки мы примем ячейку одной из примитивных решеток, со входящими в нее атомами остальных примитивных решеток. В таком случае мы имеем сложную ячейку и координаты всех атомов \vec{r}_{i0} можем записать в виде (см. рис. 7).

$$\vec{r}_{i0} = \vec{r}_i + \vec{\rho}_j, \quad (9.1)$$

где \vec{r}_i сейчас означают координаты атомов в вершинах выбранных нами элементарных ячеек (т. е. координаты атомов одной из примитивных решеток), а $\vec{\rho}_{j\bar{5}}$ — радиус-векторы остальных атомов внутри i -ой элементарной ячейки, отсчитываемые от \vec{r}_i -го узла.

Через \vec{d} , \vec{f} , \vec{b} мы будем обозначать основные векторы трансляции, на которых построена элементарная ячейка. Рассмотрим для примера кристаллы ромбической, тетрагональной и кубической систем. В кристаллах рассматриваемых систем углы (\vec{b}, \vec{f}) , (\vec{b}, \vec{d}) и (\vec{f}, \vec{d}) равны 90° .

Подставив (9.1) в (8.13) или (8.14), представим интерференционный множитель в виде:

$$\left| \sum_i e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}_{i0}} \right|^2 = \left| \sum_{ij} e^{i\vec{k}(\vec{r}_i + \vec{\rho}_j)} \right|^2 = |S(\vec{g})|^2 \left| \sum_i e^{i\vec{k}\vec{r}_i} \right|^2, \quad (9.2)$$

$$(\hbar\vec{k} = \vec{q}).$$

Величина

$$S(\vec{g}) = \sum_j e^{i\vec{k}\vec{\rho}_j} \quad (9.3)$$

носит название структурного фактора, вычисление которого для некоторых частных случаев приведено в приложении III.

Рассмотрим подробнее множитель $\left| \sum_i e^{i\vec{k}\vec{r}_i} \right|^2$. Поскольку \vec{r}_i

означают радиус-векторы атомов примитивной прямоугольной решетки, то можно написать

$$\vec{r}_i = n\vec{d} + m\vec{f} + l\vec{b}, \quad (9.4)$$

где n , m , l — целые числа. Заменяв суммирование по i независимым суммированием по n , m , l и направив оси прямоугольной системы координат x , y , z по осям \vec{d} , \vec{f} , \vec{b} прямоугольной ячейки (см. рис. 8), мы имеем

$$\left| \sum_i e^{i\vec{k}\vec{r}_i} \right|^2 = \left| \sum_{n=0}^{N_1} e^{ik_x n d} \right|^2 \left| \sum_{m=0}^{N_2} e^{ik_y m f} \right|^2 \left| \sum_{l=0}^{N_3} e^{ik_z l b} \right|^2.$$

Каждую сумму представим в виде

$$\left| \sum_{n=0}^{N_1} e^{ik_x nd} \right|^2 = \left| \frac{1 - e^{ik_x N_1 d}}{1 - e^{ik_x d}} \right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} N_1 k_x d\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} k_x d\right)}.$$

Аналогичные выражения для двух других сумм мы не выпишем. При больших N_1, N_2, N_3^* правые части выражаются через δ функции, согласно формуле

$$\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} N_1 k_x d\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} k_x d\right)} = \frac{2\pi}{d} N_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(k_x - \frac{2\pi}{d} n\right). \quad (9.5)$$

Окончательно имеем (сравни с формулой (8.21)):

$$\left| \sum_i e^{i\vec{k}r_i} \right|^2 = N_0 \frac{(2\pi)^3}{bfd} \sum_{l, m, n} \delta\left(k_x - \frac{2\pi}{d} n\right) \delta\left(k_y - \frac{2\pi}{f} m\right) \times \\ \times \delta\left(k_z - \frac{2\pi}{b} l\right) = N_0 \frac{(2\pi)^3}{\Delta} \sum_{\vec{g}} \delta(\vec{k} - \vec{g}), \quad (9.6)$$

где $N_0 = N_1 N_2 N_3$ — полное число атомов, находящихся в вершинах выбранных нами ячеек, а $\vec{g}\left(\frac{2\pi}{d} n, \frac{2\pi}{f} m, \frac{2\pi}{b} l\right)$ — вектор обратной решетки.

Величины

$$q_{\parallel} = \hbar k_1, \quad q_2 = \hbar k_2, \quad q_3 = \hbar k_3,$$

фигурирующие в (8.13) и (8.14), есть импульсы отдачи соответственно вдоль движения электрона и в плоскости, перпендикулярной движению. Величины же $\hbar k_x, \hbar k_y, \hbar k_z$, входящие в δ -функцию, есть составляющие импульса отдачи по осям кристаллической ячейки. Нам необходимо установить между ними связь.

Пусть электрон влетает в кристалл под углом θ к оси x (ось \vec{d} решетки). Введем систему координат x', y', z' ,

* Для тонких пленок, толщина которых вдоль направления движения частицы удовлетворяет условию $N_1 d < 1/\delta$, формулы для излучения в кристалле видоизменяются (см. § 12).

связанную с электроном, причем ось x' направим вдоль падения электрона. Угол между плоскостью влета (содержащую оси x и x') и плоскостью кристалла xz обозначим через α . Положение системы координат $x'y'z'$ относительно системы кристалла определяется углами Эйлера θ , η , α (см. рис. 8). Угол η определяет положение линии пересечения

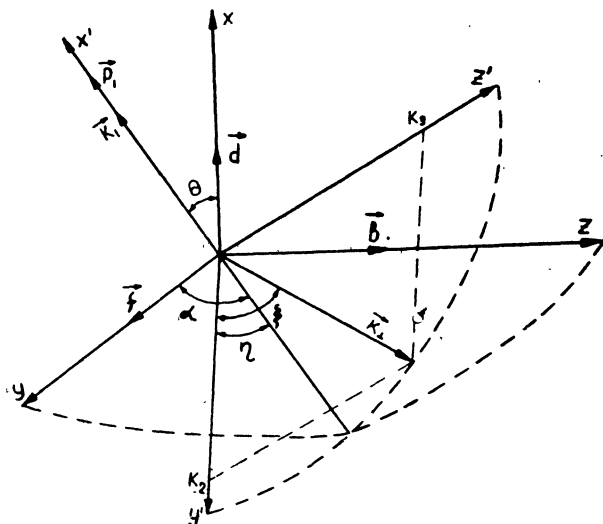


Рис. 8. Система координат xuz связана с осями выбранной кристаллической ячейки. θ — угол влета электрона в кристалл, т. е. угол между импульсом \vec{p}_1 и осью x . Угол α определяет азимутальный угол влета (угол между плоскостью, содержащей оси xx' , и плоскостью, содержащей оси xz).

плоскостей yz и $y'z'$ относительно оси y' . Введем также величину $k_{\perp}^2 = \sqrt{k_2^2 + k_3^2}$ таким образом, что

$$k_{\perp} \cos \xi = k_2, \quad k_{\perp} \sin \xi = k_3 \quad (9.7)$$

(угол ξ характеризует положение \vec{k}_{\perp} в плоскости $z'y'$). С помощью углов Эйлера выпишем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} k_x &= k_{\perp} \sin \theta \sin \xi + k_1 \cos \theta, \\ k_y &= k_{\perp} (\cos \alpha \cos \xi - \cos \theta \sin \alpha \sin \xi) + k_1 \sin \theta \sin \alpha, \\ k_z &= k_{\perp} (\sin \alpha \cos \xi + \cos \theta \cos \alpha \sin \xi) - k_1 \sin \theta \cos \alpha. \end{aligned} \quad (9.8)$$

При написании формул (9.8) мы, не уменьшая общности, выбрали угол $\eta = 0$. Учитывая (9.2), (9.6), (9.7), (9.8), проинтегрируем интерференционный поперечник (8.13) по переменным q_{\parallel} , q_2 , q_3 . Из-за наличия δ -функций интегрирование сводится к замене k_1 , k_2 , k_3 следующими выражениями:

$$k_1 = \frac{2\pi}{d} n \cos \theta + \left(\frac{2\pi}{f} m \sin \alpha - \frac{2\pi}{b} l \cos \alpha \right) \sin \theta,$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{f} m \cos \alpha + \frac{2\pi}{b} l \sin \alpha, \quad (9.9)$$

$$k_3 = \frac{2\pi}{d} n \sin \theta - \left(\frac{2\pi}{f} m \sin \alpha - \frac{2\pi}{b} l \cos \alpha \right) \cos \theta.$$

Соотношения (9.9) следуют из формулы (9.8) и (9.7). В результате имеем [4]:

$$d\sigma_{\text{инт}}^{\text{топм}} = 2\bar{\sigma} \frac{m^2 c^3}{\pi} \frac{d\omega}{\varepsilon_1^2} N_0 \frac{(2\pi)^3}{bfd} \sum_{n, m, l} |S_{nml}|^2 \times$$

$$\times \frac{(k_2^2 + k_3^2) \exp(-k^2 \bar{u}^2)}{k_1^2 \left(k^2 + \frac{1}{R^2} \right)^2} \left[1 + \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3} - \frac{2\delta(k_1 - \delta)}{k_1^2} \right], \quad (9.10)$$

где k_1 , k_2 , k_3 , k определяются формулами (9.9) и (9.6). Величина S_{nml} определена в приложении III.

Для получения поперечника рождения пары в кристалле достаточно, как уже отмечалось, произвести в (9.10) замену (4.1) и умножить поперечник на отношение фазовых объемов позитрона и фотона (4.2). Кроме того, поскольку в этом процессе в кристалл влетает не электрон, а фотон, под θ и α нужно понимать соответственно углы между импульсом фотона и кристаллографической осью и азимутальный угол влета фотона. Совершив эти преобразования, получаем:

$$d\sigma_{\text{инт}}^{\text{пары}} = 2\bar{\sigma} \frac{d\varepsilon_+}{\pi (\hbar\omega)^2} \frac{m^2 c^3}{\hbar} N_0 \frac{(2\pi)^2}{bfd} \sum_{n, m, l} |S_{nml}|^2 \times$$

$$\times \frac{(k_2^2 + k_3^2) \exp(-k^2 \bar{u}^2)}{k_1^2 \left(k^2 + \frac{1}{R^2} \right)^2} \left[1 - \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3} - \frac{2\delta(k_1 - \delta)}{k_1^2} \right]. \quad (9.11)$$

Проведем анализ интерференционного поперечника (9.10). Все отличие формулы (9.10) от соответствующей формулы Бете—Гайтлера состоит (помимо наличия экспоненциального теплового множителя) в суммировании по дискретным переменным n, m, l , вместо интегрирования по непрерывным переменным. Если устремить периоды решетки d, f, b в бесконечность, то суммирование по n, m, l можно заменить на интегрирование по переменным k_1, k_2, k_3 . Легко убедиться, что в этом случае получается обычная формула Бете—Гайтлера (см. главу I). Отвлекаясь пока от переменных m и l (приводящих к тонкой структуре), рассмотрим эффект, к которому приводит замена интегрирования по переменной k_1 на суммирование по дискретной переменной n . Интеграл по k_1 в формуле Бете—Гайтлера (2.19) определяется в основном членом $\int_0^{\infty} \frac{dk_1}{k_1^2}$. В интеграл по k_1 эффек-

тивно вносит вклад область изменения переменной около нижнего предела $\int_0^{\infty} \frac{dk_1}{k_1^2} \sim \frac{1}{\delta}$. Этот интеграл при учете дискретности заменяется на сумму по n следующего вида:

$$\int_0^{\infty} \frac{dk_1}{k_1^2} \rightarrow \sum_n \frac{\frac{2\pi}{d}}{\left[\frac{2\pi}{d} n \cos \theta + \left(\frac{2\pi}{f} m \sin \alpha - \frac{2\pi}{b} l \cos \alpha \right) \sin \theta \right]^2}. \quad (9.12)$$

Выражение, стоящее в знаменателе в квадратных скобках, должно быть больше или равно δ . При суммировании в правой части формулы (9.12) можно так подобрать переменные θ, α, l, m, n , что первый член суммы по n (который будет фактически определять сумму) будет порядка $(2\pi/d)/\delta^2$. Следовательно, когда

$$\delta \ll \frac{2\pi}{d}, \quad (9.13)$$

эффект усиления тормозного излучения в кристалле может оказаться очень большим. Максимальное усиление будет

наблюдаться в тех случаях, когда знаменатель выражения (9.12) будет по своей величине близок к своему минимально допустимому значению, равному δ , т. е. когда выполняется условие

$$\left| \frac{2\pi}{d} n \cos \theta + \left(\frac{2\pi}{f} m \sin \alpha - \frac{2\pi}{b} l \cos \alpha \right) \sin \theta \right| \geq \delta. \quad (9.14)$$

Легко увидеть, что для удовлетворения обоих условий (9.13) и (9.14) для малых углов влета в кристалл θ необходимо выбрать $n = 0$ и подобрать таким образом m , l , α , чтобы выполнялось условие

$$\left| \frac{2\pi}{f} m \sin \alpha - \frac{2\pi}{b} l \cos \alpha \right| \theta \approx \delta. \quad (9.15)$$

Следовательно, угол влета θ , при котором условие (9.15) при данных m и l выполняется, определяется из следующего равенства:

$$\theta_{\text{эф}} \approx \frac{\delta}{\left| \frac{2\pi}{f} m \sin \alpha - \frac{2\pi}{b} l \cos \alpha \right|}. \quad (9.16)$$

Излучение при этом будет максимальным.

Для тех же углов влета, для которых условие (9.15) не выполняется, излучение будет подавлено.

Отметим, что минимальный угол влета в кристалл, при котором должно наблюдаться увеличение интенсивности излучения, согласно формуле (9.16) для $\hbar\omega = \varepsilon_2$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$m = 1$; для широкого класса кристаллов (см. табл. I) равен

$$\theta_{1\text{эф}} = \frac{m_e c^2 \hbar \omega}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{1}{\frac{2\pi}{f} \lambda} \sim \frac{m_e c^2}{4\pi \varepsilon_1} \frac{f}{\lambda} \sim 100 \frac{m_e c^2}{\varepsilon_1}. \quad (9.17)$$

Угол $\theta_{1\text{эф}}$, где наблюдается первый максимум интенсивности ($m = 1$, $l = 0$ или наоборот), значительно больше эффективных углов в тормозном излучении или рождении электронно-позитронных пар. Последующие максимумы будут наблюдаться при углах влета, меньших в целое число раз,

чем $\theta_{1\text{эф}} \left(\text{при } \alpha = \frac{\pi}{2} \right)$, и по интенсивности они уступят максимуму первого порядка, поскольку они будут соответствовать значениям $m \geq 2$.

Это явление иллюстрируется на рис. 9, взятом из работы [29]. Заметим, что при $\theta = 0$ (влет вдоль оси кристалла) условие (9.15) выполняться не может, и интенсивность излучения достигает минимума.

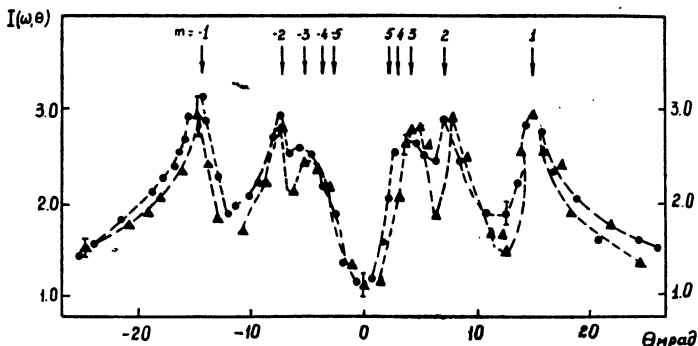


Рис. 9. Интенсивность тормозного излучения в кристалле кремния ($T = 293^\circ\text{K}$) в зависимости от θ (угол между электронным пучком и кристаллической осью [110]). Угол ψ , который характеризует угол между пучком электронов и кристаллической плоскостью (001), выбран $\psi = (0 \pm 2) \cdot 10^{-4}$ рад. Раствор пучка электронов составляет $\Delta\theta = (4,8 \pm 0,3) \cdot 10^{-4}$ рад $= (0,68 \pm 0,33) \frac{mc^2}{\epsilon_1}$ для экспериментальных сплошных точек и $\Delta\theta = (3,8 \pm 0,3) \cdot 10^{-4}$ рад $= (0,55 \pm 0,042) \frac{mc^2}{\epsilon_1}$ для треугольников. Энергия электронов 720 Мэв . Детектировались фотоны с энергией 150 Мэв .

Аналогичные заключения можно вывести и относительно осцилляций интенсивности излучения (или поперечника рождения электронно-позитронных пар) в зависимости от энергии излученного кванта при фиксированном угле влета в кристалл.

Условие (9.16) $\left(\text{при } \alpha = \frac{\pi}{2} \right)$ приводит к следующему значению энергии кванта, при котором должны наблюдаться максимумы интенсивности:

$$\hbar\omega = \frac{\varepsilon_1}{1 + \frac{m_e c^2}{\varepsilon_1 \hbar} \frac{f}{2\pi m \theta}}. \quad (9.18)$$

Для иллюстрации приведем кривую (см. рис. 10), взятую из работы группы итальянских авторов [14], в которой были впервые экспериментально подтверждены осцилляции интенсивности в зависимости от величины $\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1}$. Для геометрии

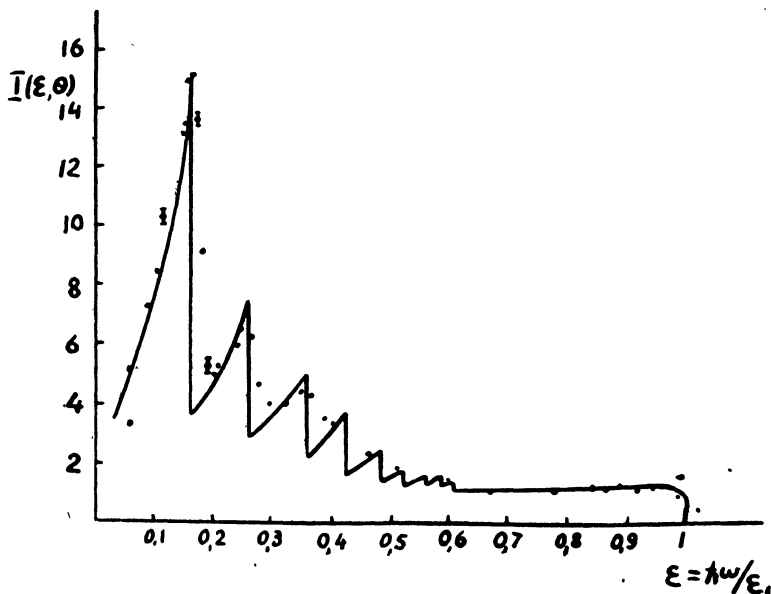


Рис. 10. По оси абсцисс отложена энергия кванта $\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1}$, по оси ординат—интенсивность в относительных единицах:

$$I(\varepsilon, \theta) = [1 + (1 - \varepsilon)^2][\psi_1^{\text{ам}} + \psi_1^{\text{инт}}(\delta, \theta)] - \frac{2}{3}(1 - \varepsilon)[\psi_2^{\text{ам}} + \psi_2^{\text{инт}}(\delta, \theta)].$$

Расчет кривых выполнен для монокристалла алмаза в виде параллелепипеда размерами $10 \times 5 \times 2$ мм³. Электрон влетает в кристалл под малым углом $\theta = 4,6 \pm 0,1$ мрад относительно оси кристалла $\vec{b}_1 = [110]$. Импульс лежит в плоскости осей \vec{b}_1 и $\vec{b}_2 = [001]$. Энергия электрона равна 1 Гэв. Сплошная кривая—теория, точки означают экспериментальные данные.

ческой интерпретации результатов полезно использовать обратную кристаллическую решетку. Рассмотрим простую кубическую решетку ($d = b = f$). На рис. 11а и 11б пунктиром изображена ее обратная решетка (определение и свойства обратной решетки см. в приложении III). Тройка чисел (n, m, l) определяет вектор обратной решетки. Вклад в излучение вносят только те векторы обратной решетки, проекция которых на направление движения электрона (в случае

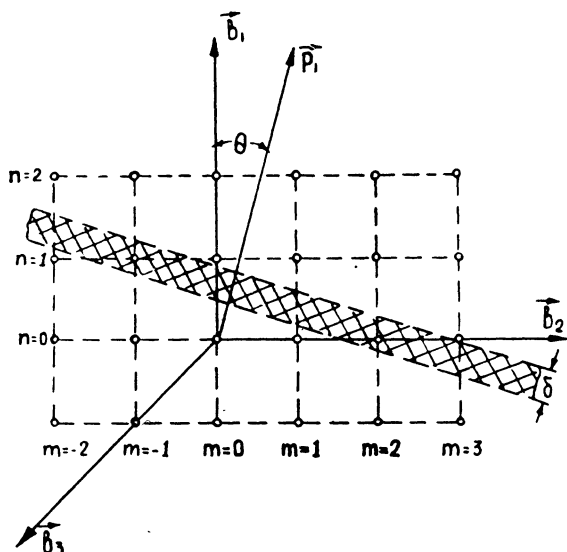


Рис. 11а. Расположение вектора импульса электрона \vec{p}_1 в обратной решетке простой кубической ячейки. Вклад в излучение дают векторы обратной решетки, проекции которых на направление \vec{p}_1 больше значения δ . Заштрихованная область отстоит от начала координат на величину δ . Толщина области порядка δ . Показана проекция на плоскость $\vec{b}_1\vec{b}_2$.

рождения пар—на направление движения фотона) больше δ (см. условие (8.24) и рис. 11а). При малых углах влета $\theta \ll 1$ в излучении принимают участие узлы с $n = 0$ (см. (9.15)). Это соответствует тому факту, что в интерференции участвуют атомы, принадлежащие системе плоскостей, параллельных оси x (напомним, что вектор обратной решетки

$\vec{g} = \left(\frac{2\pi}{d} n, \frac{2\pi}{f} m, \frac{2\pi}{b} l \right)$ перпендикулярен системе плоскостей прямой решетки с теми же индексами Миллера).

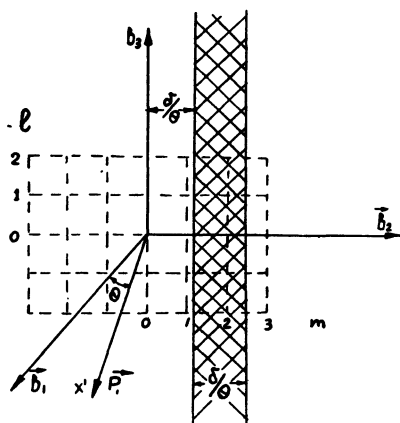


Рис. 116. Расположение импульса начального электрона \vec{p}_1 в обратной решетке простой кубической ячейки (проекция на плоскость $\vec{b}_2 \vec{b}_3$). Вклад в поперечник (9.10) дают узлы обратной решетки с $n = 0$. Импульс электрона \vec{p}_1 составляет с осью \vec{b}_1 угол θ и лежит в плоскости, содержащей оси \vec{b}_1 и \vec{b}_2 . Вклад в излучение дают только те значения $\frac{2\pi}{f} m$, которые удовлетворяют соотношению $\frac{2\pi}{f} m \sim \frac{\delta}{\theta}$. Этот „блин“ заштрихован.

Пусть, например, направление влета электрона с импульсом \vec{p} в кристалл лежит в плоскости xy (плоскость \vec{b}_1, \vec{b}_2 ; см. рис. 11а), что соответствует значению $\alpha = \frac{\pi}{2}$ в формуле (9.10) и на рис. 8. Тогда, согласно условию (9.14), основной вклад в поперечник излучения будут вносить те узлы обратной решетки с индексом m (и произвольным l), которые удовлетворяют условию

$$\frac{2\pi}{f} m \theta \gtrsim \delta. \quad (9.19)$$

Это условие отбирает эффективные значения m при заданном значении θ и δ . В заштрихованную область на рис. 11а и 11б попадут векторы обратной решетки, эффективно участвующие в интерференционном излучении. Рис. 11б соответствует проекции на плоскость, содержащую векторы \vec{b}_2, \vec{b}_3 , рис. 11а соответствует проекции на плоскость, содержащую векторы \vec{b}_1, \vec{b}_2 . Ширина заштрихованной области соответствует значениям m , лежащим в интервале $\frac{2\pi}{f} \Delta m \sim \frac{\delta}{\theta}$. Вкладом в поперечник других значений можно пренебречь, поскольку сумма (9.12) быстро убывает с увеличением m .

С увеличением энергии γ -кванта растет δ и увеличивается расстояние от начала до границы заштрихованной области, равное δ/θ . При определенной энергии γ -квантов, превышающих $\hbar\omega_{\text{пик}}$ (соответствующей точке пика на спектре), из заштрихованной области выбывают векторы обратной решетки, соответствующие первому ряду, — так в спектре получается первое падение интенсивности. При дальнейшем увеличении энергии γ -кванта в заштрихованную область попадут векторы обратной решетки с $m=2$, и образуется второй пик уже меньшей интенсивности и т. д.

Суммирование, входящее в формулы (9.10) и (9.11), необходимо произвести по всем возможным значениям l , вплоть до l_{max} , который определяется обрезающим тепловым фактором $\exp\left[-\frac{4\pi^2 u^2}{d^2} l^2\right]$. Из приведенной выше табл. I видно, что величина $l_{\text{эф}}$ порядка 100 и изменяется в зависимости от температуры. При изменении температуры от $T=0^\circ\text{K}$ до $T=\theta_D$, $l_{\text{эф}}$ уменьшается примерно в два раза.

Естественно, что для различных значений θ (или δ) вклад в интенсивность будут давать члены, отличающиеся индексом m . Этим и будет определяться их относительная интенсивность. Например, при $\theta \rightarrow 0$ и постоянном δ вклад в излучение будут давать члены с $m \rightarrow \infty$. Они будут соответствовать ничтожно малой интенсивности. Эффективный вклад в поперечник вносит небольшое число значений m около m_{min} , заключенных в пределах двух-трех значений δ/θ .

На рассмотренном выше примере простой кубической решетки выяснена физическая картина интерференционного излучения. На эксперименте обычно используются монокристаллы алмаза. На рис. 11в, взятом из работы [18], приве-

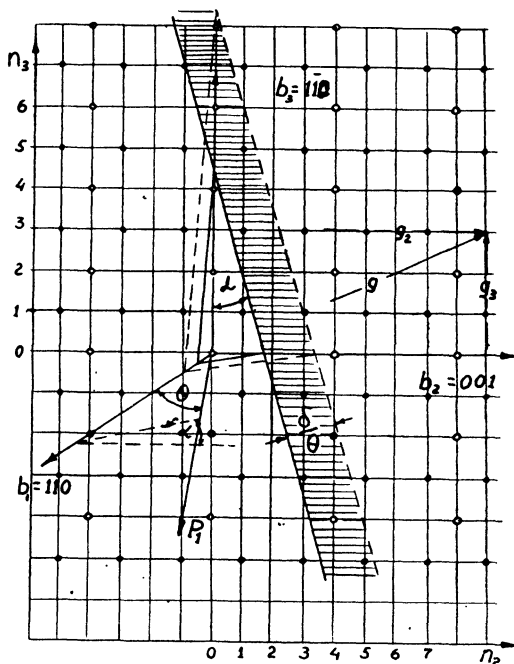


Рис. 11в. Расположение начального импульса электрона \vec{p}_1 в пространстве обратной решетки алмаза.

дена обратная решетка алмаза (проекция на плоскость \vec{b}_2, \vec{b}_3). Направление влета электрона определяется углом θ относительно оси $\vec{b}_1 = [110]$ и азимутальным углом α между плоскостью влета (плоскость, содержащая ось \vec{b}_1 и направление влета \vec{p}_1) и плоскостью решетки, определяемой осями \vec{b}_1 и \vec{b}_2 . Азимутальный угол на рис. 11в отличается от введенного выше угла α (см. рис. 8) на $\frac{\pi}{2}$. Оси $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ обычно выбирают следующим образом:

$$\vec{b}_1 = [110], \quad \vec{b}_2 = [001], \quad \vec{b}_3 = [\bar{1}\bar{1}0].$$

§ 10. УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ВОПРОСЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ

а) Характерные углы излучения или рождения электронно-позитронных пар при высоких энергиях порядка $\frac{mc^2}{\epsilon_1}$ или $\frac{mc^2}{\hbar\omega}$. Величина этих углов при тех энергиях, которые

используются для наблюдения когерентного излучения, настолько мала (меньше миллирадиана), что экспериментально обычно наблюдаются только полные поперечники. Тем не менее, с теоретической точки зрения полезно иметь формулы для углового распределения. Прежде всего, рассмотрим угловое распределение тормозного излучения. Как уже неоднократно отмечалось, дифференциальный поперечник излучения в кристалле складывается из двух частей (см. (7.5)):

$$d\sigma = Nd\sigma_{\text{БГ}} + d\sigma_{\text{ког}}.$$

Первое слагаемое соответствует обычному поперечнику Бете—Гайтлера на N независимых атомах. Соответствующий поперечник для углового распределения фотонов (после интегрирования по углам вылета электрона) известен [39]:

$$d^2\sigma_{\text{БГ}}^{\text{торм}} = 4\pi N \frac{d\epsilon}{\epsilon} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \left\{ \left[1 + \frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1^2} - \frac{4x^2\epsilon_2}{\epsilon_1(1+x^2)^2} \right] \times \right. \\ \left. \times \ln \left[\frac{\hbar^2\delta^2}{m^2c^2} + \frac{Z^{2/3}}{111^2(1+x^2)^2} \right]^{-1} + \frac{16x^2\epsilon_2}{\epsilon_1(1+x^2)^2} - \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}{\epsilon_1^2} \right\}. \quad (10.1)$$

Величина x есть угол излучения фотона относительно направления первоначального движения электрона, измеренный в единицах $\frac{mc^2}{\epsilon_1}$:

$$x = \frac{\epsilon_1}{mc^2} \theta_1. \quad (10.2)$$

Что касается когерентной части поперечника, то для вычисления соответствующего углового распределения можно

воспользоваться методом псевдофотонов. Для этого будем исходить из формулы (7.6), в которой вместо $d\sigma_{\text{БГ}}$ подставим выражение (2.19). Однако в данном случае интегрирование необходимо производить только по двум переменным — k_2 и k_3 . Что касается третьей переменной интегрирования, k_1 , то ее нужно связать с углом излучения фотона θ_1 . Для этого воспользуемся формулой (3.5):

$$k_1 = \delta(1 + x^2).$$

После несложных преобразований получим

$$d^2\sigma_{\text{ког}}^{\text{торм}} = 4\bar{\sigma} \frac{d\omega}{\pi\omega} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \left[1 + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} - \frac{4x^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1(1+x^2)^2} \right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 dk_3 \frac{k_2^2 + k_3^2}{(k^2 + R^{-2})^2} e^{-k^2 \bar{u}^2} \left\{ \left| \sum_i e^{i\vec{k} \vec{r}_{i0}} \right|^2 - N \right\}. \quad (10.3)$$

Как мы уже знаем, когерентная часть дифференциального поперечника тормозного излучения складывается из двух частей:

$$d\sigma_{\text{ког}} = d\sigma_{\text{инт}} + d\sigma_1, \quad (10.4)$$

соответствующих первому и второму членам в фигурных скобках в формуле (10.3).

Значение $d\sigma_1$ не зависит от направления влета электрона в кристалл и может быть вычислено в общем случае (рассматривается случай полной экранировки $\delta(1+x^2)R \ll 1$):

$$d^2\sigma_1^{\text{торм}} = -8\bar{\sigma}N \frac{d\omega}{\omega} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \left[1 + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{4x^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1(1+x^2)^2} \right] B \left(\frac{\bar{u}^2}{R^2} \right). \quad (10.5)$$

Величина B дается формулой (8.8).

По своей структуре формула (10.5) соответствует дифференциальному поперечному сечению Бете—Гайтлера и может быть объединена с формулой (10.1). Поправка, связанная с $d\sigma_1$, составляет 10–20% от поперечника Бете—Гайтлера. Окончательное выражение для аморфной части дифференциального поперечного сечения примет вид:

$$d^2\sigma_{\text{ам}}^{\text{торм}} = d^2\sigma_{\text{БГ}}^{\text{торм}} + d^2\sigma_1^{\text{торм}} = 4\bar{\sigma} N \frac{d\omega}{\omega} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \left\{ \left[1 + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} - \frac{4x^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1(1+x^2)^2} \right] \left[\ln \left(\frac{\hbar^2\delta^2}{m^2c^2} + \frac{Z^{3/2}}{111^2(1+x^2)^2} \right)^{-1} - 2B \left(\frac{\bar{u}^2}{R^2} \right) \right] + \frac{16x^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1(1+x^2)^2} - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1^2} \right\}. \quad (10.6)$$

Подставляя теперь вместо интерференционного множителя выражение (8.21) в формулу (10.3), для интерференционной части дифференциального поперечника тормозного излучения получим:

$$d^2\sigma_{\text{инт}}^{\text{торм}} = 4\bar{\sigma} \frac{d\omega}{\pi\omega} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \left[1 + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} - \frac{4x^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1(1+x^2)^2} \right] \times \\ \times \sum_{\vec{g}} \frac{g^2 - g_{\parallel}^2}{g^4} [1 - F(g)]^2 e^{-g^2\bar{u}^2} |S(\vec{g})|^2 N_0 \frac{(2\pi)^3}{\Delta} \delta[\delta(1+x^2) - g_{\parallel}]. \quad (10.7)$$

Из выражения (10.7) следует, что для каждого определенного вектора обратной решетки угловое распределение квантов имеет δ -образный характер. Как и в предыдущих формулах, вклад в сумму вносят только те векторы обратной ячейки, проекция которых на направление движения электрона превышает величину δ . При построении теоретических кривых (см. рис. 12а), чтобы избежать δ -функциональной зависимости, формулу (10.7) необходимо проинтегрировать по небольшому интервалу значений Δx (либо $\Delta\varepsilon$) около выбранного направления. Величина Δx определяется разрешающей способностью экспериментальной установки. Из приведенных формул видно, что наибольшее усиление в кристалле испытывают тормозные кванты, излученные под углом $x \lesssim 1$. Большим x (при тех же значениях δ) будут соответствовать большие g_{\parallel} , которые приводят к уменьшению сечения; при очень малых x сечение падает за счет уменьшения телесного угла $x dx$.

Угловое распределение интерференционного излучения имеет специфический характер, отличный от обычного угло-

вого распределения тормозного излучения. Это связано с тем, что наличие δ -функции в формуле (10.7) приводит к определенной связи между векторами обратной решетки, ответственными за излучение γ -квантов данной энергии, и углом испускания γ -квантов:

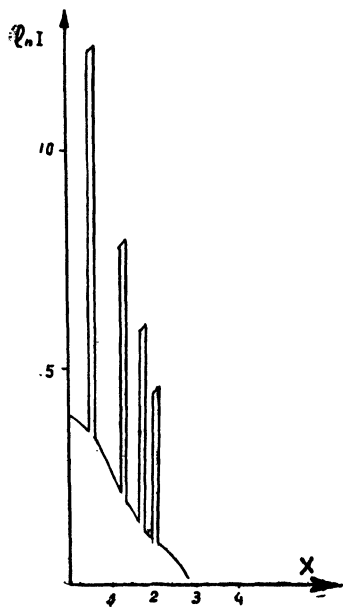
$$(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha) \theta = \delta (1 + x^2). \quad (10.8)$$

При таком подборе θ и α , когда в допустимую область векторов обратной решетки попадает только одна точка (вклад других точек мал), спектр коллимированного тормозного излучения превращается в спектр, приведенный на рис. 12б [40] (сравни с [41]). Кривые, изображенные на рис. 12а и 12б, построены для кристалла алмаза (определение угла α соответствует рис. 11в).

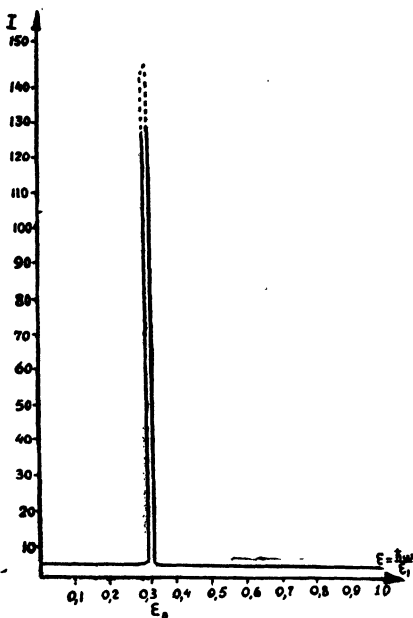
В действительности при построении этих кривых необходимо учитывать влияние многократного рассеяния электронов в монокристалле и расходимость первоначального пучка, что приводит к размытию приведенных кривых. На рис. 12в приведены результаты конкретного расчета тормозного излучения на кристалле бериллия с учетом расходимости начального пучка (Болонья, частное сообщение).

Нетрудно выписать выражения и для дифференциальных поперечников рождения электронно-позитронных пар фотоном в кристалле. Для этого, как известно, надо совершить замену (4.1) и учесть отношение фазовых объемов (4.2) в соответствующих формулах тормозного излучения электрона в кристалле. Так, исходя из формулы (10.3) для когерентной части дифференциального поперечника рождения пары в кристалле, получим следующее выражение:

$$d^2\sigma_{\text{ког}}^{\text{пары}} = 4\bar{\sigma} \frac{\varepsilon_+^2 d\varepsilon_+}{\pi (\hbar\omega)^3} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \left[1 + \frac{\varepsilon_-^2}{\varepsilon_+^2} + \frac{4x^2\varepsilon_-}{\varepsilon_+(1+x^2)^2} \right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 dk_3 \frac{k_2^2 + k_3^2}{(k^2 + R^{-2})^2} e^{-k^2 \bar{a}^2} \left\{ \left| \sum_i e^{i\vec{k}r_{i0}} \right|^2 - N \right\}. \quad (10.9)$$



а



б

Рис. 12. а. Угловое распределение тормозного излучения на кристалле алмаза. θ — угол между начальным импульсом \vec{p}_1 и осью $[110]$, α — угол между плоскостями $(\vec{p}_1, [110])$ и плоскостью, содержащей оси $[110]$, $[001]$. По оси ординат отложена величина $\ln I$:

$$I = \frac{\omega d^2 \sigma_{ам}^{торм}}{N \sigma d \omega x dx} + \frac{\omega}{N \sigma d \omega x \Delta x} \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} d\sigma_{инт}^{торм}.$$

Кривая рассчитана для следующих значений параметров: $\epsilon_1 = 6 \text{ Гэв}$, $\hbar\omega = 1 \text{ Гэв}$, $\theta = 1,55 \text{ рад}$, $\alpha = 0^\circ$, $\Delta x = 0,05$.

б. Спектр коллимированного тормозного излучения на кристалле алмаза. x_k — угол коллимации. По оси ординат отложена величина

$$I = \frac{\omega}{N \sigma d \omega} \int_0^{x_k} d^2 \sigma^{торм}. \text{ Пунктиром обозначено уменьшение пика вследствие коллимации.}$$

Значения параметров, для которых рассчитана кривая, следующие: $\epsilon_1 = 6 \text{ Гэв}$, $\epsilon = 0,333$, $x_k = 0,285$, $\alpha = 1^\circ 15'$, $\theta = 50 \text{ рад}$.

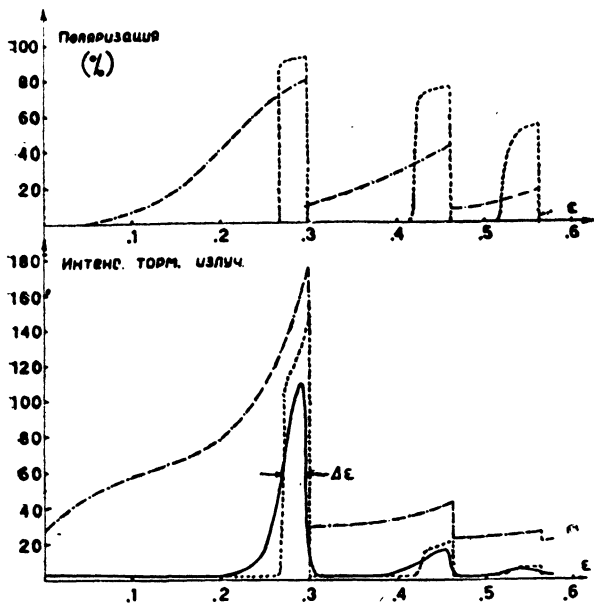


Рис. 12в. Интенсивность тормозного излучения $\varepsilon \frac{d\sigma}{d\varepsilon} / \bar{\sigma} N$ и поляризация $[d\sigma_{\perp}^{\text{инт}} - d\sigma_{\parallel}^{\text{инт}}] / d\varepsilon$ в монокристалле *Be* в зависимости от энергии кванта $\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1}$; $\varepsilon_1 = 6 \text{ Гэв}$, $\vec{b}_1 = [12\bar{1}0]$, $\vec{b}_2 = [10\bar{1}0]$, $\vec{b}_3 = [0001]$, $\alpha = 1,5^\circ$, $\theta = 51,3$ мрад. Кривая пунктир—точка построена без учета рассеяния электронов в кристалле, без учета расходимости начального пучка и без выделения определенного направления детектирования фотонного пучка. Пунктирная линия соответствует интенсивности излучения и поляризации для углов излучения фотона, равных $3,4 \cdot 10^{-5}$ рад. При вычислении этой кривой не учитывалось влияние многократного рассеяния и расходимости начального пучка. Неточность в энергии фотона составляла $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = 11\%$. Сплошная линия соответствует тем же значениям углов излучения и разброса энергии фотона; расходимость начального пучка не учитывается, учет многократного рассеяния произведен для толщины монокристалла, равной $9,25 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^2$.

Используя выражение (8.21), запишем интерференционную часть дифференциального поперечника рождения пары в виде

$$d^2\sigma_{\text{инт}}^{\text{пары}} = 4\bar{\sigma} \frac{\varepsilon_+^2 d\varepsilon_+}{\pi (\hbar\omega)^3} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \left[1 + \frac{\varepsilon_-^2}{\varepsilon_+^2} + \frac{4x^2\varepsilon_-}{\varepsilon_+ (1+x^2)^2} \right] \times \\ \times \sum_{\vec{g}} [1 - F(g)]^2 \frac{g^2 - g_{\parallel}^2}{g^4} e^{-g^2 \bar{u}^2} |S(\vec{g})|^2 N_0 \frac{(2\pi)^3}{\Delta} \delta[\delta(1+x^2) - g_{\parallel}], \quad (10.10)$$

где δ (в квадратных скобках!) — минимальный продольно передаваемый импульс в процессе рождения пары, $x = \frac{\varepsilon_+}{mc^2} \theta_+$,

θ_+ — угол между импульсами позитрона и фотона.

б) Вопросы, связанные с поляризацией когерентного излучения, исследовались в работах [11, 30, 31, 17, 18, 19, 28]. Рассмотрим прежде всего поляризацию тормозного излучения на одном атоме. Зафиксируем угол излучения фотона (по углу отклонения электрона поперечник проинтегрирован). Определим степень линейной поляризации фотонов по формуле

$$P = \frac{d\sigma_{\parallel} - d\sigma_{\perp}}{d\sigma_{\parallel} + d\sigma_{\perp}}, \quad (10.11)$$

где $d\sigma_{\parallel}$ определяет сечение излучения квантов, электрический вектор которых лежит в плоскости, содержащей вектор \vec{p}_1 и вектор, определяющий направление излучения квантов. $d\sigma_{\perp}$ — аналогичная величина с вектором поляризации, перпендикулярным той же плоскости. Очевидно, что для полного пучка излученных фотонов поляризация должна исчезать. Это следует из симметрии задачи, поскольку после интегрирования по телесному углу излучения исчезает плоскость, относительно которой можно определить поляризацию фотонного пучка. Поэтому полный пучок тормозных квантов на отдельном атоме будет не поляризован. Иное положение будет при излучении в кристалле. Азимутальная симметрия в этом случае отсутствует, поэтому пучок может обладать опреде-

ленной степенью поляризации. Ясно, что поляризация пучка будет тем больше, чем меньше узлов обратной решетки будут вносить вклад в поляризацию (непрерывное распределение узлов соответствует переходу к аморфному веществу). Поляризация интерференционной части поперечника тормозного излучения может быть рассчитана методом псевдофотонов (см. нижеследующий пример).

Для получения точных формул, определяющих поляризацию, необходимо исходить из расчетов по теории возмущений.

Пример. Рассмотреть поляризацию фотонов, излученных под углом x , используя метод псевдофотонов.

Используя результаты § 3, легко получить поперечники $d\sigma_{\perp}$ и $d\sigma_{\parallel}$. В случае кристалла формулы для $d\sigma_{\perp}$ и $d\sigma_{\parallel}$ выглядят так:

$$d\sigma_{\perp} = 4\sigma^{-} \frac{d\omega}{\omega} \frac{d\psi}{2\pi} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \left[\frac{1}{2} \frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}{\epsilon_1^2} \right] \times \\ \times \int \frac{k_{\perp}^2 dk_{\perp}^2}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + R^{-2})^2} \left| \sum_i e^{i\vec{k}r_i} \right|^2, \\ d\sigma_{\parallel} = 4\sigma^{-} \frac{d\omega}{\omega} \frac{d\psi}{2\pi} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \left[\frac{1}{2} \frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}{\epsilon_1^2} - \right. \\ \left. - \frac{4x^2\epsilon_2}{\epsilon_1(1+x^2)^2} \right] \int \frac{k_{\perp}^2 dk_{\perp}^2}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + R^{-2})^2} \left| \sum_i e^{i\vec{k}r_i} \right|^2.$$

Из последних выражений видно, что поляризация P для кристалла совпадает с поляризацией для одного атома, рассчитанной методом псевдофотонов. Сравнение с результатами расчетов для кристаллов по теории возмущений [11] показывает, что метод псевдофотонов приводит к точным результатам при тех же углах влета электрона в кристалл, при которых вклад в излучение вносится в основном интерференционной частью. Для тех же углов влета, для которых существенна и аморфная часть, результаты метода псевдофотонов обладают плохой точностью.

На эксперименте обычно измеряется поляризация полного фотонного пучка. Поэтому полезно определять поляризацию фотонов относительно плоскости, проходящей через импульс электрона и одну из кристаллических осей.

Обозначим через $d\tau_{\parallel}$ поперечник излучения фотонов, вектор поляризации которых лежит в плоскости, содержащей вектор \vec{p}_1 и вектор обратной решетки \vec{b}_1 (см. рис. 11б, 11в). Для решетки типа алмаза обычно выбирается $\vec{b}_1 = [110]$. Тогда степень поляризации определяется следующим выражением [17, 18]:

$$P = \frac{2(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\psi_3(\delta, \theta, \alpha)}{(1 + \varepsilon_2^2/\varepsilon_1^2)[\psi_1^{\text{AM}}(\delta) + \psi_1^{\text{INT}}(\delta, \theta, \alpha)] - (2\varepsilon_2/3\varepsilon_1)[\psi_2^{\text{AM}}(\delta) + \psi_2^{\text{INT}}(\delta, \theta, \alpha)]}, \quad (10.12)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1^{\text{INT}}(\delta, \theta, \alpha) &= \frac{N_0(2\pi)^2}{N} \frac{4\delta}{d^3} \frac{1}{\theta^2} \sum_{\vec{g}} |S(\vec{g})|^2 \frac{[1 - F(g)]^2}{g^4} \times \\ &\times \frac{g_2^2 + g_3^2}{(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)^2} e^{-g^2 u^2}, \\ \psi_2^{\text{INT}}(\delta, \theta, \alpha) &= \frac{N_0(2\pi)^2}{N} \frac{24\delta^2}{d^3} \frac{1}{\theta^3} \sum_{\vec{g}} |S(\vec{g})|^2 \frac{[1 - F(g)]^2}{g^4} \times \\ &\times \frac{(g_2^2 + g_3^2)(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha - \delta/\theta)}{(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)^4} e^{-g^2 u^2}, \\ \psi_3^{\text{INT}}(\delta, \theta, \alpha) &= -\frac{N_0}{N} 4\delta^3 \frac{(2\pi)^2}{d^3} \sum_{\vec{g}} |S(\vec{g})|^2 \frac{[1 - F(g)]^2}{g^4 \theta^4} \times \\ &\times \frac{(g_2^2 - g_3^2) \cos 2\alpha + 2g_2 g_3 \sin 2\alpha}{(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)^4} e^{-g^2 u^2}. \quad (10.13) \end{aligned}$$

Выражения для ψ_1^{INT} и ψ_2^{INT} следуют из формул (8.22) и (8.23) при малых углах влета $\theta \ll 1$. В этом случае

$n = 0 \left(g_x = \frac{2\pi}{d} n = 0 \right)$, а $g_{\parallel} = (g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha) \theta$, где g_2 и g_3 — проекции \vec{g} на кристаллические оси. Вектор обратной решетки \vec{g} , по которому идет суммирование в формулах (10.13), определяется своими проекциями на оси $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ (см., например, рис. 11в). Угол θ есть угол, образованный вектором \vec{p}_1 и вектором решетки \vec{b}_1 , угол α есть угол между

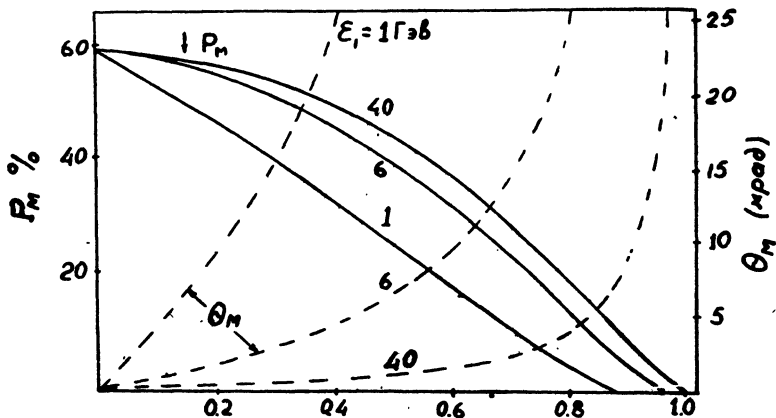


Рис. 13. Поляризация полного тормозного пучка фотонов от электронов трех различных энергий $\epsilon_1 = 1 \text{ Гэв}$, $\epsilon_1 = 6 \text{ Гэв}$, $\epsilon_1 = 40 \text{ Гэв}$ в тонком монокристалле алмаза при комнатной температуре. Направление влета электрона параллельно плоскости, содержащей оси $[110]$ и $[001]$. По оси абсцисс отложена энергия фотонов $\epsilon = \frac{\hbar\omega}{\epsilon_1}$. Сплошные кривые описывают максимальную поляризацию P_M в процентах, рассчитанную по формуле (10.12) при $\alpha=0$. Пунктирные кривые описывают зависимость θ_M от ϵ , для которых поляризация получается максимальной. θ_M — угол влета электрона относительно оси кристалла $[110]$, измеренный в миллиadiansах.

плоскостью, содержащей векторы \vec{p}_1, \vec{b}_1 , и плоскостью, содержащей вектора \vec{b}_1, \vec{b}_2 . Как и в случае расчета тормозного спектра, вклад вносят вектора обратной решетки, которые удовлетворяют условию (см. (9.14), (9.15)):

$$g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha \geq \delta/\theta.$$

Для иллюстрации на рис. 13, взятом из работы [17], приводится результат численного расчета степени поляризации в зависимости от энергии кванта для трех значений энергии: $\varepsilon_1 = 1 \text{ ГэВ}$, $\varepsilon_1 = 6 \text{ ГэВ}$, $\varepsilon_1 = 40 \text{ ГэВ}$ в монокристалле алмаза. Расчет проводился по формулам (10.12), (10.13) при $\alpha = 0$.

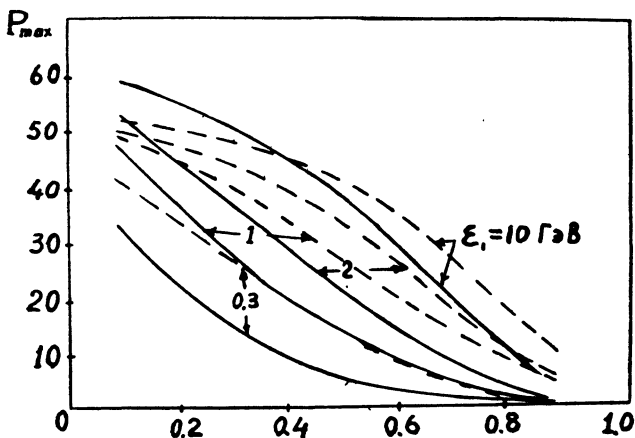


Рис. 14. Поляризация полного потока фотонов для первого пика в спектре излучения в зависимости от $\xi = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1}$ для монокристалла алмаза (пунктир) и монокристалла кремния (сплошная кривая). Кривые рассчитаны для энергий $\varepsilon_1 = 0,3 \text{ ГэВ}$, $\varepsilon_1 = 1 \text{ ГэВ}$, $\varepsilon_1 = 2 \text{ ГэВ}$ и $\varepsilon_1 = 10 \text{ ГэВ}$. Импульс начального электрона лежит в плоскости $(\bar{1}10)$. Угол влета с осью $[110]$ соответствует первому пику для данной частоты. Температура кристалла 293°К .

На рис. 14 приводится сравнение степени поляризации когерентных квантов излучения в монокристалле кремния и в монокристалле алмаза. На рис. 15 приводится (для сравнения) относительная характеристика для интенсивности излученных квантов в первом пике в монокристалле кремния и в монокристалле алмаза. Оба графика взяты из работы [19]. Из приведенных графиков видно, что усиление тормозных квантов в монокристалле алмаза происходит значительно эф-

фективнее, чем в кремнии. Поляризационные же эффекты одного порядка.

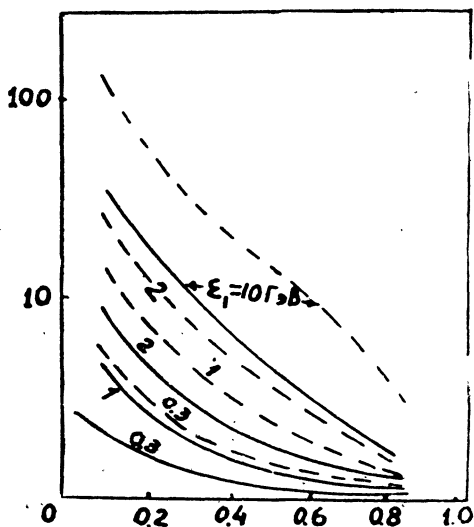


Рис. 15. По оси ординат отложен фактор усиления, т. е. отношение полного поперечника излучения к поперечнику тормозного излучения Бете—Гайтлера (точнее говоря, к аморфной части поперечника излучения) в зависимости от энергии кванта. Сплошные линии относятся к монокристаллу кремния, пунктирные кривые—к монокристаллу алмаза. Кривые рассчитаны для электронов различных энергий, влетающих под небольшим углом к оси [110] (соответствующим первому пику для данной частоты) и расположенных в плоскости $(\bar{1}10)$. Остальные данные соответствуют предыдущему рисунку.

Определение степени поляризации фотонного пучка высокой энергии является трудной экспериментальной задачей. Однако и тут могут быть использованы эффекты интерференции, связанные с кристаллической структурой. Как показано в работе [17], поперечник рождения электронно-позитронной пары в кристалле зависит от поляризации фотонного пучка. Изложение метода определения поляризации фотонов высо-

ких энергий и необходимые для расчета формулы (11.6), (11.7) приведены в следующем параграфе. Однако из того факта, что поперечник парообразования в кристалле зависит от поляризации фотонного пучка, следует ряд интересных эффектов, разыгрывающихся при прохождении фотонов через монокристалл.

В работах [33, 35] показано, что при прохождении неполяризованного пучка γ -квантов высокой энергии через кристалл определенной толщины пучок γ -квантов приобретает некоторую поляризацию. Происходит это по той причине, что γ -кванты высокой энергии выбывают из пучка в основном из-за образования электронно-позитронных пар, а сечение образования пар в кристалле зависит от направления поляризации γ -квантов относительно плоскости, проходящей через ось кристалла и импульс фотона. Так как неполяризованный γ -пучок можно представить как смесь двух пучков, поляризованных в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и не обладающих постоянным соотношением фаз, то при определенных условиях падения γ -пучка на кристалл одна из компонент поглотится в большей степени, чем другая, и оставшийся пучок будет частично поляризованным. При этом появляется линейная поляризация.

Рассмотрим случай кубического кристалла, где импульс \vec{k} входящих в кристалл γ -лучей лежит в плоскости (001) и составляет малый угол θ с осью [110]. Суммарное поперечное сечение для образования пары зависит в этой ситуации от линейной поляризации γ -лучей. Обозначим через σ_{\parallel} и σ_{\perp} полные поперечные сечения парообразования для γ -лучей, которые линейно поляризованы в плоскости (001) и ортогонально к ней. Две поляризованные компоненты будут поглощаться с различной средней длиной свободного пробега, а именно, после прохождения толщины x кристалла интенсивности двух компонент будут уменьшаться согласно

$$I_{\parallel}(x) = I_{\parallel}(0) e^{-\sigma_{\parallel} x}, \quad (10.14)$$

$$I_{\perp}(x) = I_{\perp}(0) e^{-\sigma_{\perp} x}.$$

Если пучок первоначально не поляризован, т. е. $I_{\parallel}(0) = I_{\perp}(0)$, то после прохождения длины x фотонный пучок приобретает поляризацию, степень которой равна

$$P(x) = \frac{I_{\parallel}(x) - I_{\perp}(x)}{I_{\parallel}(x) + I_{\perp}(x)} = th \left[\frac{x}{2} (\sigma_{\perp} - \sigma_{\parallel}) \right]. \quad (10.15)$$

Из уравнения (10.15) видно, что этот метод может в принципе дать существенную поляризацию при соответствующем выборе толщины x . Это достигается потерей начальной интенсивности, которая может быть выражена через поляризацию $P(x)$ и параметр $R(\theta, \omega)$:

$$R(\theta, \omega) = \frac{\sigma_{\perp} - \sigma_{\parallel}}{\sigma_{\perp} + \sigma_{\parallel}}. \quad (10.16)$$

Интенсивность после прохождения толщины x будет

$$I(x) = I_{\parallel}(x) + I_{\perp}(x) = I(0) \exp[-R^{-1} th^{-1} P] (1 - P^2)^{-1/2}. \quad (10.17)$$

На рис. 16 приводится потеря интенсивности как функция от поляризации для различных значений R . Большие поляризации с приемлемыми потерями интенсивности возможны, если $R \geq 0,05$.

Эффективность устройства увеличивается с энергией фотона (см. рис. 17), его использование как поляризатора начинается практически с энергий порядка 6 Гэв. На рис. 17 приводится R как функция угла θ для Cu при $\hbar\omega = 6$ Гэв (нижняя кривая) и как функция $\hbar\omega$ при $\theta = 3,7$ мрад (максимальном при 6 Гэв). Для фотонов энергии 6 Гэв при уменьшении интенсивности в 1000 раз приобретается поляризация 30% при толщине кристалла меди 8,1 см.

Нетрудно видеть, что кристалл может быть также использован как анализатор поляризации при прохождении фотонов через кристалл. Предположим, что исходный γ -пучок имеет линейную поляризацию $\vec{\xi}$. Пусть φ — угол между $\vec{\xi}$ и плоскостью (001). Как и выше, импульс фотона лежит в плоскости (001) кубического кристалла и составляет малый угол θ с осью [110], тогда

$$[I(x)/I(0)]_{\vec{\xi}} = [I(x)/I(0)]_{\vec{\xi}=0} [1 + |\vec{\xi}| P(x) \cos 2\varphi]. \quad (10.18)$$

Если $P(x)$ известно (см. формулу (10.15)), $\vec{\xi}$ можно определить измерением отношения $I(x)/I(0)$ в кристалле при различных значениях угла φ .

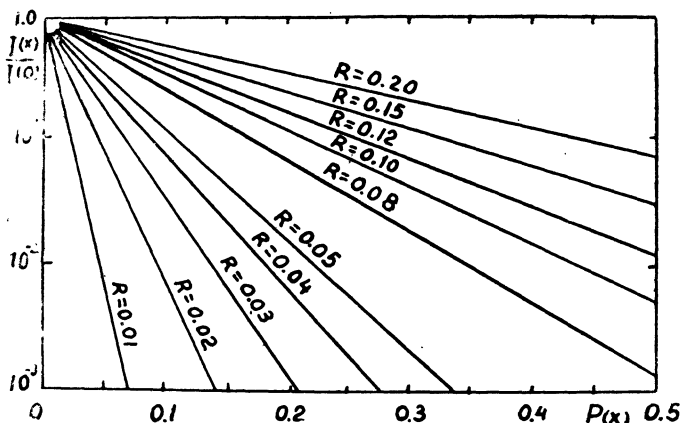


Рис. 16 Связь между поглощением фотонов и приобретаемой поляризацией для различных значений R [33].

В работе [34] указано на возможность превращения линейной поляризации в циркулярную, с использованием кристаллических пластинок соответствующей толщины, аналогично оптическим пластинкам в „четверть длины волны“.

Пусть линейно поляризованный пучок γ -квантов пропускается через второй кристалл меди, ориентированный относительно первого так, что плоскость поляризации составляет с плоскостью (001) угол φ . Вектор поляризации падающих фотонов можно представить как линейную комбинацию двух векторов \vec{t} и \vec{y} : $\vec{e} = e_1 \vec{t} + e_2 \vec{y}$, где \vec{t} лежит в плоскости (001) а \vec{y} перпендикулярен к ней. Для того чтобы кристаллическая пластинка действовала как пластинка в „четверть длины волны“, необходимо, чтобы при этом создавалась разность фаз между компонентами поляризации, равная $\pi/2$, то есть $\text{Re}(n_{\perp} - n_{\parallel}) \omega x = \pi/2$, где n_{\perp} и n_{\parallel} имеют смысл коэффи-

коэффициентов преломления для перпендикулярно и параллельно поляризованных фотонов. Для области энергии 6 Гэв толщина пластинки в „четверть длины волны“ для меди составляет $1,84 \text{ см}$. При этом падение интенсивности будет $I(x_2)/I(x_1) \sim \sim \frac{1}{4}$.

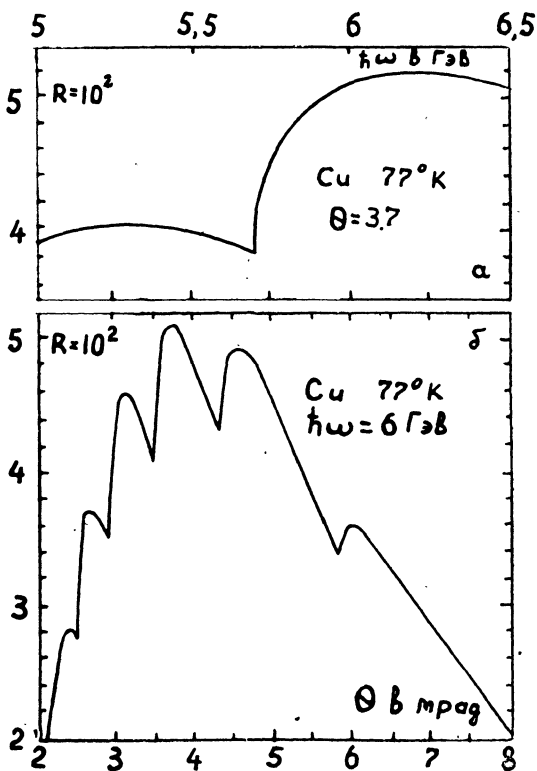


Рис. 17. а) R как функция от $\hbar\omega$ вблизи значения $\hbar\omega = 6 \text{ Гэв}$ при оптимальном угле влета $\theta = 3,7 \text{ мрад}$; б) R как функция от угла θ для Cu при $\hbar\omega = 6 \text{ Гэв}$ [33].

Таким образом, в настоящее время имеется реальная возможность получить циркулярно поляризованный γ -пучок высокой энергии.

§ 11. ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО КОГЕРЕНТНОМУ ИЗЛУЧЕНИЮ

Первая попытка установить влияние кристаллической структуры на тормозное излучение была предпринята на электронном ускорителе в Стэнфорде В. Панофским и А. Саксеной [22]. Изучалось тормозное излучение электронов с энергией 600 Мэв на монокристалле кремния. Пучок электронов направлялся под малым углом относительно оси кристалла [100]. Измерялась интенсивность в зависимости от угла влета электронов в кристалл. Кванты детектировались по фоторождению π -мезонов. Попытка обнаружить эффект оказалась неудачной. В последующей работе тех же авторов [24] было наблюдеено увеличение интенсивности мягких квантов и ее зависимость от угла влета.

Наличие эффекта было впервые установлено в Корнельском университете сотрудниками лаборатории Р. Вильсона О. Фришем и Д. Ольсеном [25]. Используя пучок электронов с энергией 1 Гэв, авторы измеряли отношение мягкой части тормозного спектра к жесткой части в зависимости от угла влета. Опыт производился на монокристалле германия. Поскольку интерференционные явления сильнее влияют на излучение мягких квантов, можно было ожидать значительного эффекта в зависимости от угла влета в кристалл. Действительно, при углах влета электронов в кристалл, равных примерно 20 миллирадианам, отношение числа мягких квантов к числу жестких увеличилось примерно в два раза.

Хотя упомянутые выше работы и подтвердили само наличие интерференционных явлений, однако количественных результатов и тем более детального сравнения с теорией в них произведено не было.

В цикле работ [26, 27] группой итальянских физиков были получены количественные результаты и проведено сравнение с теорией. Эксперименты проводились на ускорителе во Фраскати с предельной энергией электронов в 1 Гэв.

Работа [26] посвящена рождению электронно-позитронных пар в кристалле кремния. Пластика монокристалла толщиной 0,08 мм (что составляет $8,5 \cdot 10^{-4}$ радиационной длины)

и диаметром 18 мм облучалась квантами со средней энергией 910 Мэв. Изучалась частота образования пар в зависимости от угла между направлением пучка квантов и осью кристалла [100]. Частота образования пар теоретически определяется аморфной и интерференционной частями поперечника (см. § 8 и 9). Учитывалось также рождение электронно-позитронных пар в поле электронов. Согласие с теоретическими расчетами удовлетворительное.

Другая работа тех же авторов [27] посвящена изучению тормозного излучения в кристалле кремния. Энергия электронов равнялась 1 Гэв. Исследовалась интенсивность тормозного излучения в зависимости от энергии γ -квантов $\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1}$ и сравнивалась с теоретически рассчитанной интенсивностью:

$$I(\varepsilon, \theta) \equiv \frac{\varepsilon d\sigma}{N\sigma d\varepsilon} = [1 + (1 - \varepsilon)^2][\psi_1^{\text{ам}}(\delta) + \psi_1^{\text{инт}}(\delta, \theta)] - \frac{2}{3}(1 - \varepsilon)[\psi_2^{\text{ам}}(\delta) + \psi_2^{\text{инт}}(\delta, \theta)]. \quad (11.1)$$

Здесь принято $\alpha = 0$, а функции $\psi_{1,2}^{\text{инт}}$ определяются следующими формулами (сравни с формулами (10.13), множитель $\frac{N_0}{N}$ включен в структурный фактор в последующих формулах):

$$\psi_1^{\text{инт}}(\delta, \theta) = \frac{(2\pi)^2}{\Delta} 4\delta \sum_{\vec{g}} |S(\vec{g})|^2 \frac{\exp(-g^2 \bar{u}^2)}{(g^2 + \beta^{-2})^2} \frac{g^2}{g_2^2 \theta^2}, \quad (11.2)$$

$$\psi_2^{\text{инт}}(\delta, \theta) = \frac{(2\pi)^2}{\Delta} 24\delta^2 \sum_{\vec{g}} |S(\vec{g})|^2 \frac{\exp(-g^2 \bar{u}^2)}{(g^2 + \beta^{-2})^2} \frac{g^2}{g_2^4 \theta^4} (g_2 \theta - \delta).$$

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 18. Авторам удалось экспериментально установить, что при падении электронов точно вдоль оси кристалла наблюдается минимум интенсивности тормозного излучения. Получены две серии экспериментальных кривых. В первой серии кривых изучалась зависимость интенсивности тормозных квантов (с

двумя различными средними энергиями—80 и 240 Мэв) в кристалле Si от угла влета относительно оси кристалла [111]. Максимум излучения наблюдался при углах влета примерно 6 миллирадиан. Измерялась также зависимость интенсивности излучения (при фиксированном угле влета $\theta = 6$ мрад и $\theta = 1$ мрад) от энергии излученного кванта.

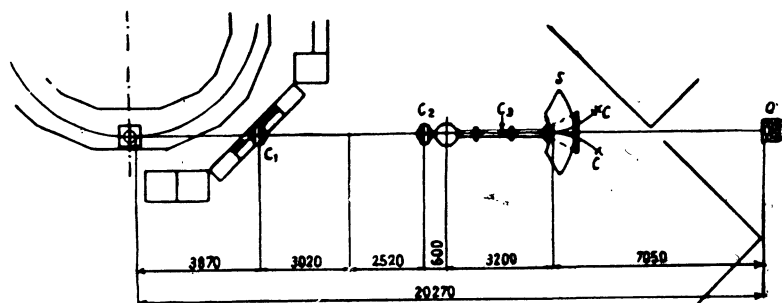


Рис. 18. Экспериментальная установка для измерения образования электронных пар (монокристалл действует как конвертор в парном спектрометре) или для измерения тормозного излучения (монокристалл действует как радиатор в прямой секции синхротрона). S — парный спектрометр, C_1 , C_2 , C_3 — коллиматоры, C — сцинтилляционный счетчик быстрого совпадения для детектирования симметричных электронных пар, Q — квантометр. Расстояния указаны в миллиметрах.

В последующей серии работ [13, 14] авторы улучшили угловое разрешение экспериментальной установки. Это позволило установить „тонкую структуру“ спектра тормозного излучения в кристалле. Авторы считают, что наиболее удобным кристаллом для исследования тонкой структуры является монокристалл алмаза (из-за малой величины периода решетки и высокой температуры Дебая), на котором и были проведены эксперименты. Результаты экспериментов приведены на рис. 10, на котором отложена интенсивность излучения от электронов с начальной энергией $\varepsilon_1 = 1$ Гэв в кристалле алмаза (при комнатной температуре) в зависимости от энергии

γ -кванта $\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1}$. Направление влета в кристалл лежит в плоскости, содержащей оси $\vec{b}_1 = [110]$ и $\vec{b}_3 = [\bar{1}10]$ и составляет

угол $\theta = 4,6 \pm 0,1$ мрад с осью \vec{b}_1 . Экспериментальные данные отмечены точками.

В последующей работе группы японских авторов [29] эксперименты по когерентному излучению электронов с энергией $\varepsilon_1 = 720 \text{ Мэв}$ проведены на японском электронном ускорителе. Использовалась мишень из монокристалла Si размерами $1 \times 8 \times 10 \text{ мм}^3$. Большая плоскость образца вырезана параллельно плоскости кристалла (110). Кристалл был ориентирован относительно пучка электронов с точностью 10^{-3} рад. Направление влета электрона в монокристалл определялось углом θ с осью кристалла [110] и углом ψ с плоскостью кристалла (001).

Используя условие интерференции (9.14), имеем $\theta_m = \frac{\delta f}{2\pi m}$, что для различных m и при одном и том же δ

(что соответствует определенной энергии фотона) приводит к максимумам различного порядка в зависимости от угла влета в кристалл (см. рис. 9). Авторы провели серию измерений и наблюдали максимумы в интенсивности излучения вплоть до пятого порядка.

Интенсивность (в относительных единицах) когерентного излучения в монокристалле Si (при температуре $T = 293^\circ\text{К}$) для фотонов с энергией 150 Мэв в зависимости от θ (угол между скоростью электрона и осью кристалла [110]) и ψ (угол между скоростью электрона и плоскостью (001)) приведена на рис. 9. Пунктирная линия соответствует экспериментальным точкам. Статистическая ошибка порядка $4,5\%$. Кривая снята в зависимости от угла θ при $\psi = (0 \pm 2) \cdot 10^{-4}$ рад. Пучок фотонов коллимирован в угле $(4,8 \pm 0,3) \cdot 10^{-4}$ рад = $(0,68 \pm 0,33) \frac{mc^2}{\varepsilon_1}$ и измерялся с точностью $\frac{\Delta\omega}{\omega} = 28 \cdot 10^{-2}$.

Японская группа измерила также зависимость интенсивности от энергии излученного фотона (то есть от δ). В обеих сериях экспериментов авторы наблюдали „тонкую структуру“.

Эксперимент по когерентному излучению в кристалле был проведен недавно на электронном ускорителе в Гамбурге (DESY) [18]. Энергия электронов составляла $4,8$ и 6 Гэв . Эксперимент проводился на монокристалле алмаза размерами $1 \times 4 \times 7 \text{ мм}^3$, при комнатной температуре. Наибольшая по

площади грань параллелепипеда была перпендикулярна оси кристалла $[110]$. Толщина в направлении пучка составляла 1 мм, что соответствует 0,008 рад длины. Кристалл алмаза, смонтированный в гониометр, мог вращаться вокруг вертикальной (направленной по оси решетки $\vec{b}_3 = [1\bar{1}0]$) и горизонтальной (направленной по оси $\vec{b}_2 = [001]$) осей в пределах ± 50 мрад.

Обе оси были перпендикулярны оси кристалла $\vec{b}_1 = [110]$, вдоль которой и распространялся пучок электронов. Углы могли устанавливаться с точностью до 0,1 мрад.

Направление влета электрона в кристалл определялось углом θ между импульсом электрона и осью $\vec{b}_1 = [110]$ и азимутальным углом α между плоскостью, содержащей \vec{p}_1 и $\vec{b}_1 = [110]$, и плоскостью, содержащей оси $[001]$ и $[110]$ (см. рис. 11в).

На эксперименте, как и итальянской группой, измерялась величина

$$I(\varepsilon, \theta, \alpha) = \frac{\varepsilon d\sigma}{N\sigma d\varepsilon} = [1 + (1 - \varepsilon)^2] [\psi_1^{\text{инт}}(\delta, \theta, \alpha) + \psi_1^{\text{ам}}(\delta)] - \frac{2}{3} (1 - \varepsilon) [\psi_2^{\text{инт}}(\delta, \theta, \alpha) + \psi_2^{\text{ам}}(\delta)], \quad (11.3)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1^{\text{инт}}(\delta, \theta, \alpha) &= \frac{(2\pi)^2}{\Delta} \frac{4\delta}{\theta^2} \sum_{\vec{g}} |S(\vec{g})|^2 e^{-g^2 u^2} \times \\ &\times H(g^2) \frac{g_2^2 + g_3^2}{(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)^2}, \\ \psi_2^{\text{инт}}(\delta, \theta, \alpha) &= \frac{(2\pi)^2}{\Delta} \frac{24\delta^2}{\theta^3} \sum_{\vec{g}} |S(\vec{g})|^2 e^{-g^2 u^2} \times \\ &\times H(g^2) \frac{(g_2^2 + g_3^2)(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha - \delta/\theta)}{(g_2 \cos \alpha + g_3 \sin \alpha)^4}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Значения $\psi_1^{\text{ам}}$ и $\psi_2^{\text{ам}}$ можно аппроксимировать следующими числами: $\psi_1^{\text{ам}} = 18,2$, $\psi_2^{\text{ам}} = 17,4$. Функция $H(g^2)$ в выражениях $\psi_1^{\text{инт}}$ и $\psi_2^{\text{инт}}$ введена вместо функции

$$\frac{1}{(g^2 + \beta^{-2})^2}; \quad (\beta = 111Z^{-1/3})$$

и указывает на использование экранировки типа Хартри—Фока. Все величины выражены в единицах $\lambda = \frac{h}{mc}$. Значение

структурного фактора $|S(\vec{g})|^2 = 4$ для точек и $|S(\vec{g})|^2 = 8$ для кружочков на рис. 11в. В отличие от формул (10.13) множитель $\frac{N_0}{N} = \frac{1}{8}$ включен в структурный фактор. Экспериментальные

результаты (как было показано) лучше ложатся на кривые, рассчитанные с уточненной экранировкой, и отклоняются от кривых, рассчитанных использованием экспоненциальной экранировки. Серия кривых, приведенных ниже (рис. 19, 20, 21), показывает хорошее согласие между экспериментальными и теоретическими кривыми для интенсивности излучения в зависимости от $\varepsilon = \frac{h\omega}{\varepsilon_1}$. В цитируемой работе ав-

торы рассмотрели случай ориентации кристалла, при которой импульс электрона не лежит в плоскости, проходящей через оси [110] и [001], а составляет некоторый угол с ней. В частности, при $\alpha = 1,5^\circ$, $\theta = 50$ мрад (см. рис. 20). θ берется „большим“, чтобы допустимая область векторов обратной решетки δ/θ была малой. При этих условиях основной вклад в интерференционное излучение будет идти от точки с $m = 0$, $l = 2$, как показано на рис. 11в, ибо другие близлежащие точки не попадают в допустимую область δ/θ . На эксперименте при энергии электронов 4,8 и 6 Гэв действительно наблюдались только изолированные пички („линии“) при энергиях фотона 1,44 и 2 Гэв соответственно (рис. 20, 21).

Первые измерения поляризации фотонов спектра тормозного излучения от кристалла алмаза проведены группой Диамбрини и др. [16]. Они исследовали поляризацию

фотонов с энергией 150 Мэв из спектра тормозного излучения электронов энергии 1 Гэв в зависимости от угла влета θ (θ — угол между импульсом \vec{p}_1 и осью $[110]$). Измерение поляризации фотонов основывалось на известном явлении

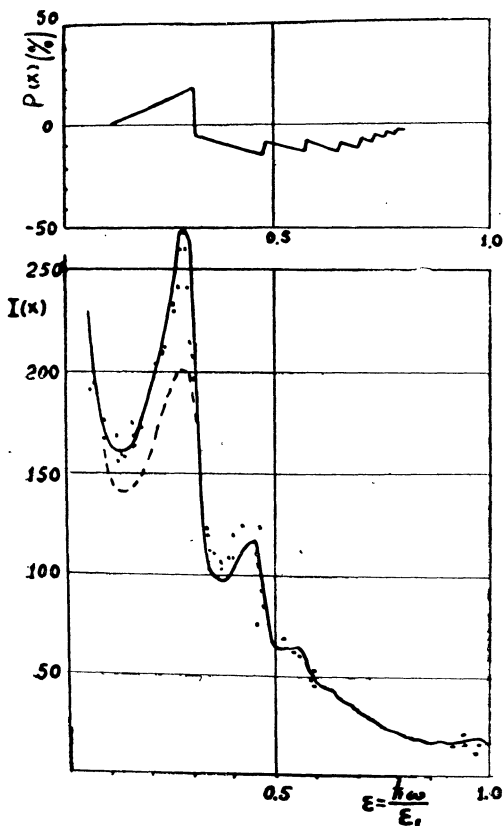


Рис. 19. Интенсивность излучения (нижняя кривая) и поляризация (верхняя кривая) полного пучка излученных фотонов в зависимости от энергии кванта $\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1}$. Пунктирная кривая соответствует экспоненциальной экранировке, сплошная кривая рассчитана для закона экранировки Хартри. Энергия электронов $4,8 \text{ Гэв}$, направление влета определяется углами $\theta = 2,48 \cdot 10^{-3}$ рад и $\alpha = 90^\circ$.

преимущественного образования электронно-позитронных пар линейно поляризованными фотонами в плоскости поляриза-

ции фотона [42] (т. е. в плоскости, содержащей вектор \vec{k} и вектор поляризации фотона). При угле θ , равном 6 мрад., авторы наблюдали поляризацию фотонов с энергией $\hbar\omega = 150$ Мэв, равную 50% .

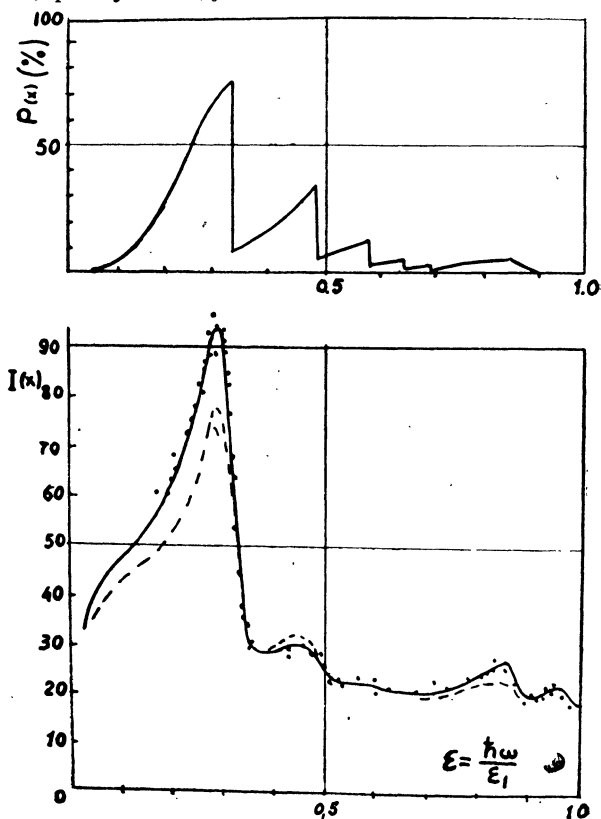


Рис. 20. Интенсивность излучения и поляризация в зависимости от энергии фотона $\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1}$ на кристалле алмаза для углов влета $\alpha = 1,5^\circ$, $\theta = 5 \cdot 10^{-2}$ рад. Сплошная линия — потенциал Хартри, пунктирная — экспоненциальный потенциал.

Как уже упоминалось ранее, немецкой группой было показано, что подбором углов θ и α можно достигнуть высокой поляризации (76%) для одной фотонной „линии“ в тормозном излучении от кристалла алмаза. Ими же эксперимен-

тально исследована поляризация фотонов от электронов 6 Гэв в кристалле алмаза в широком интервале энергии фотонов 1—6 Гэв. Они использовали метод, предложенный Барбиеллини и др. [17], основанный на использовании интер-

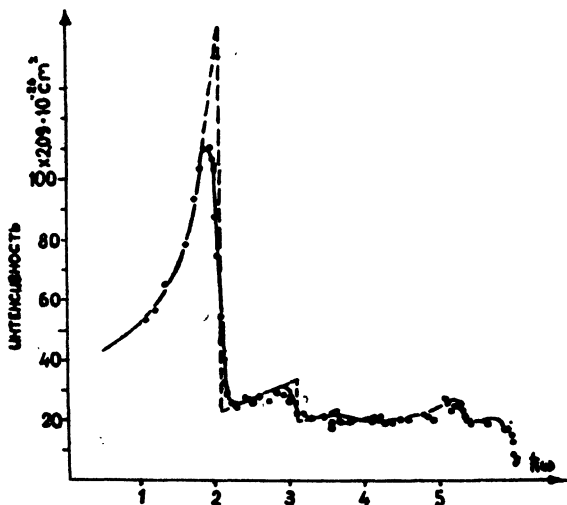


Рис. 21. Спектр тормозного излучения на кристалле алмаза. Начальная энергия электронов $\varepsilon_1 = 6$ Гэв. Направление влета определяется углом $\theta = 50,5 \cdot 10^{-3}$ рад и $\alpha = 49,6 \cdot 10^{-3}$ рад. По оси абсцисс отложена энергия кванта в Гэв. По оси ординат отложена интенсивность $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ в единицах $\bar{\sigma}$.

ференционных явлений при образовании электронно-позитронных пар поляризованными фотонами в кристалле. Экспериментальная установка аналогична установке по измерению спектра тормозного излучения с тем отличием, что в парном спектрометре вместо обычного конвертера используется еще один кристалл алмаза (один в прямой секции синхротрона, на который падают электроны, и получается тормозное излучение, другой в парном спектрометре, где γ -кванты от первого кристалла конвертируются в электронно-позитронные пары). В эксперименте измеряется число пар N_{\parallel} от фотонов, поляризованных параллельно плоскости, образованной осью кристалла \vec{b}_1 и импульсом фотона \vec{k} , и N_{\perp} —

от фотонов, поляризованных перпендикулярно этой плоскости. Поляризация равна

$$P = \frac{1}{R} \frac{N_{\parallel} - N_{\perp}}{N_{\parallel} + N_{\perp}}, \quad (11.5)$$

где R — асимметрия, определяемая формулой

$$R = \frac{d\sigma_{\parallel} - d\sigma_{\perp}}{d\sigma_{\parallel} + d\sigma_{\perp}}. \quad (11.6)$$

Здесь $d\sigma_{\parallel}$ и $d\sigma_{\perp}$ — поперечники образования пар в кристалле фотонами, полностью поляризованными параллельно или перпендикулярно плоскости падения (плоскость, содержащая импульс фотона \vec{k} и ось кристалла):

$$\begin{aligned} d\sigma_{\parallel} - d\sigma_{\perp} &= 2\bar{\sigma} N \psi_3(\delta, \theta, \alpha) (1-y) y dy, \\ d\sigma_{\parallel} + d\sigma_{\perp} &= N \bar{\sigma}^{-1} \left\{ [y^2 + (1-y)^2] [\psi_1^{\text{инт}}(\delta, \theta, \alpha) + \psi_1^{\text{ам}}(\delta)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} y (1-y) [\psi_2^{\text{инт}}(\delta, \theta, \alpha) + \psi_2^{\text{ам}}(\delta)] \right\} dy, \quad (11.7) \\ y &= \frac{\varepsilon_-}{\hbar\omega}, \quad \delta = \frac{mc^2}{2\hbar\omega(1-y)} \frac{1}{\kappa}. \end{aligned}$$

На рис. 22 приведено сечение образования пар фотонами [43], поляризованными перпендикулярно и параллельно к плоскости (\vec{k}, \vec{b}_1) . Как видно из рисунка, при определенном угле влета разница между $d\sigma_{\parallel}$ и $d\sigma_{\perp}$ наибольшая.

Подбирая углы θ и α такими, чтобы величина R была наибольшей, вращением второго кристалла ищут угол, при котором будет максимальная интенсивность регистрации электронно-позитронных пар. Этот отсчет будет соответствовать N_{\parallel} , затем, поворачивая кристалл вокруг импульса фотона на угол 90° , регистрируют число N_{\perp} . Зная из теории величину R , по формуле (11.5) находят величину поляризации P . Результаты измерения немецкой группы [28] приведены на рис. 23. Этот метод применим при энергии фотонов выше 1 Гэв. Подробное обсуждение этого вопроса можно найти в обзоре Диамбрини [44].

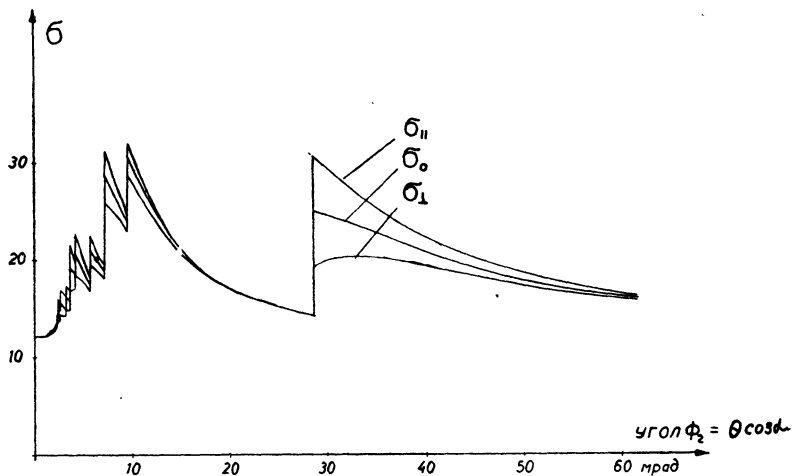


Рис. 22. Поперечные сечения парообразования в произвольных единицах, в зависимости от угла θ при $\hbar\omega = 5,25$ Гэв и $\alpha = 0$.

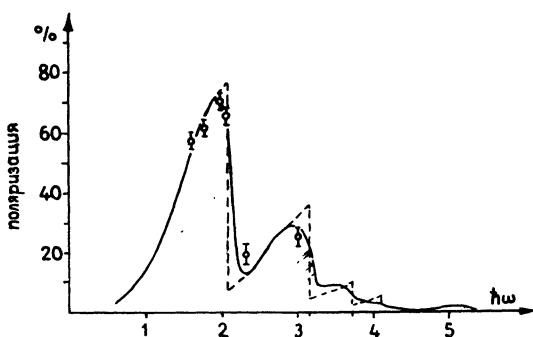


Рис. 23. Степень поляризации тормозного излучения на кристалле алмаза. По оси абсцисс отложена энергия кванта в Гэв: $\epsilon_1 = 6$ Гэв, $\theta = 50,5 \cdot 10^{-3}$ рад, $\alpha = 49,6 \cdot 10^{-3}$ рад.

§ 12. ИЗЛУЧЕНИЕ В ТОНКОМ КРИСТАЛЛЕ И ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ

Рассмотрим излучение в достаточно тонком кристалле [4]. Пусть электрон влетает в решетку под малым углом θ относительно одной из кристаллографических осей, вдоль которой направлена ось x . Направление движения электрона

совмещено с осью x' (см. рис. 8). Будем считать кристалл вдоль движения электрона настолько тонким, что переход к δ -функции в кристаллическом факторе (9.6) является непроверным.

Представим кристаллический фактор в следующем виде:

$$\left| \sum_i e^{i\vec{k}\vec{r}_i} \right|^2 = N_3 N_2 \frac{(2\pi)^2}{bf} \times \\ \times \sum_{lm} \delta\left(k_z - \frac{2\pi}{b} l\right) \delta\left(k_y - \frac{2\pi}{f} m\right) \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} N_1 k_x d\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} k_x d\right)}. \quad (12.1)$$

Подставим полученное выражение в интерференционную часть поперечника тормозного излучения (8.13):

$$d\sigma_{\text{инт}}^{\text{ТОРМ}} = 8\pi\sigma \frac{m^2 c^3 d\omega}{\varepsilon_1^2 bf} \times \\ \times \sum_{lm} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 dk_3 \int \frac{dk_1}{k_1^2} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} N_1 k_x d\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} k_x d\right)} \frac{k_{\perp}^2 [1 - F(k)]^2}{k^4} \times \\ \times \left(1 + \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3} - \frac{2\delta}{k_1} + \frac{2\delta^2}{k_1^2}\right) \times \\ \times \exp(-k^2 \bar{u}^2) \delta\left(k_z - \frac{2\pi}{b} l\right) \delta\left(k_y - \frac{2\pi}{f} m\right). \quad (12.2)$$

Величины k_x , k_y , k_z связаны с k_1 , k_2 , k_3 соотношениями (9.8) и (9.9). Рассмотрим осциллирующий множитель, входящий в интеграл (12.2). В пределе малых углов влета $\theta \ll 1$, используя формулы (9.8) и (9.9), получим

$$\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} N_1 k_x d\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} k_x d\right)} = \frac{\sin^2\left\{\frac{1}{2} N_1 d [k_1 - (k_y \sin \alpha - k_z \cos \alpha) \theta]\right\}}{\sin^2\left\{\frac{1}{2} d [k_1 - (k_y \sin \alpha - k_z \cos \alpha) \theta]\right\}}. \quad (12.3)$$

При интегрировании по переменной k_1 могут осуществиться два предельных случая. В первом случае множитель (12.3) сильно осциллирует при значениях переменной k_1 в области около нижнего предела

$$N_1 d \gg \frac{2}{\delta}. \quad (12.4)$$

При выполнении неравенства (12.4) осциллирующий множитель можно заменить на δ -функцию (см. формулу (9.5)). Это будет соответствовать „толстому“ кристаллу, подробно рассмотренному в предыдущих параграфах. Однако при уменьшении δ может осуществиться противоположный случай:

$$N_1 d \ll \frac{2}{\delta}. \quad (12.5)$$

При выполнении неравенства (12.5) множитель (12.3) можно вынести из-под интеграла по k_1 и произвести интегрирование по k_1 . В этом случае мы получим следующую формулу [4] (при $b = f = d$):

$$\sigma_{\text{инт}}(\varepsilon) = 2\bar{\sigma} N_2 N_3 \frac{d\varepsilon}{\pi\varepsilon} \left\{ \varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \right\} \sum_{lm} \exp \left[-\frac{m^2 + l^2}{c^2} \right] \times \\ \times \frac{m^2 + l^2}{\left[m^2 + l^2 + \frac{d^2}{4\pi^2 R^2} \right]^2} \frac{\sin^2 [N_1 \pi (m \sin \alpha - l \cos \alpha) \theta]}{\sin^2 [\pi (m \sin \alpha - l \cos \alpha) \theta]}. \quad (12.6)$$

Через c^2 обозначена величина

$$c^2 = \frac{d^2}{4\pi^2 \bar{u}^2}. \quad (12.7)$$

Максимум излучения будет наблюдаться при условии

$$(m \sin \alpha - l \cos \alpha) \theta = n, \quad (12.8)$$

где n — произвольное целое число. В этом случае интенсивность излучения будет пропорциональна величине N_1^2 . Указанная зависимость имеет простой физический смысл. Излучение пропорционально квадрату числа атомов, лежащих на траектории частицы и действующих когерентно. Следует отметить, что формула (12.6) обладает свойствами, отличными

от формул, описывающих излучение в толстом кристалле (см., например, формулу (9.10)). Например, при влете точно вдоль кристаллографической оси формула (12.6) предсказывает максимальную интенсивность излучения. Зависимость от энергии излучающей частицы исчезает и спектр излучения имеет вид $\frac{d\omega}{\omega}$. Излучение пропорционально $N_1^2 N_2 N_3$.

В противоположность этому, для толстого кристалла интенсивность излучения зависит от энергии, достигает минимума при $\theta \rightarrow 0$ и становится пропорциональной $N_1 N_2 N_3 \frac{1}{\delta d}$ (см. формулу (9.10) при $b = f = d$). Коэффициент усиления излучения $\frac{1}{\delta d} = \frac{l_{\text{кор}}}{d}$ и в этом случае имеет простой смысл и характеризует число атомов, укладываемых на когерентной длине. При увеличении энергии излучающей частицы или уменьшении энергии излученного кванта когерентная длина увеличивается и захватывает все больше атомов, лежащих на траектории частицы. Излучение в максимумах растёт. Когда когерентная длина становится больше длины кристалла, все атомы действуют когерентно, и излучение становится пропорциональным квадрату числа атомов, лежащих на траектории частицы. При дальнейшем увеличении энергии интенсивность излучения остается постоянной. Такова в грубых чертах (мы отвлекаемся сейчас от тонкой структуры спектра излучения) физика интерференционного излучения в кристалле. Из изложенного становится ясным, что критерием применимости теории возмущений не будет обычное условие, справедливое для одного атома

$$\frac{Ze^2}{\hbar c} < 1. \quad (12.9)$$

Можно предположить, что теория возмущений будет справедлива при выполнении неравенства

$$\frac{Ze^2}{\hbar c} \left(\frac{l_{\text{кор}}}{d} \right) < 1. \quad (12.10)$$

Неравенство заведомо перестает выполняться при достаточно большом отношении $\left(\frac{l_{\text{кор}}}{d}\right)$. Однако можно думать, что поправки, связанные с неприменимостью теории возмущений, будут малы. Причиной этому является то, что формула Резерфорда остается справедливой при выполнении как неравенства (12.9), так и неравенства обратного (12.9). Это является замечательным свойством кулоновского поля, для которого и классический расчет, и расчет по теории возмущений приводят к одной и той же формуле. Это может явиться причиной того, что формулы интерференционного излучения останутся справедливыми в значительно более широкой области.

Тем не менее при некоторой энергии интерференционная часть поперечника излучения в направлении максимумов должна обрезаться. Тогда, поскольку выражение для аморфной части поперечника, по-видимому, остается справедливым всегда, полный поперечник в кристалле (после усреднения по всем углам влета электрона) будет меньше, чем соответствующий поперечник в аморфном веществе.

Можно привести энергетический критерий [4]. Очевидно, что формулы становятся заведомо неприменимыми, когда потери энергии $\Delta\varepsilon_1$ на когерентной длине $\sim \frac{1}{\delta}$ становятся сравнимыми с начальной энергией. Пусть $\hbar\omega \sim \varepsilon_1$. Потери энергии приближенно описываются формулой

$$\Delta\varepsilon_1 \sim 2\bar{\sigma} N \frac{R}{d} \frac{\varepsilon_1}{\theta} \frac{\varepsilon_2}{mc^2} \lambda, \quad (12.11)$$

здесь N — число атомов в 1 см^3 , R — радиус экранировки, d — расстояние между атомами. Поскольку

$$\theta \sim \frac{d}{2\pi} \frac{mc^2}{\varepsilon_1 \lambda}, \quad (12.12)$$

имеем окончательно

$$\frac{\Delta\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \sim 4\pi\bar{\sigma} N \frac{R}{d^2} \left(\frac{\varepsilon_1}{mc^2}\right)^2 \lambda^2 < 1. \quad (12.13)$$

С увеличением ε_1 θ уменьшается и относительные потери будут меньше единицы, если

$$\varepsilon_1 < mc^2 \frac{d}{\hbar Z r_0} \left(\frac{137}{4\pi RN} \right)^{1/2} \sim \frac{10^9 mc^2}{Z}. \quad (12.14)$$

При больших энергиях теория возмущений в направлениях максимумов заведомо неприменима.

Нужно также оценить влияние многократного рассеяния на формулы когерентного излучения [4]. Следует учесть, что из-за многократного кулоновского рассеяния входящий в монокристалл под углом θ электрон будет отклоняться от первоначального направления влета и при достаточной толщине кристалла выйдет из направления, для которого наблюдается максимум излучения. Ясно, что при достаточно большом рассеянии произойдет усреднение по большому числу максимумов и минимумов и интерференционное усиление излучения исчезнет. Критерий легко выписать, сравнивая средний квадрат угла многократного рассеяния с квадратом угла между двумя направлениями влета электрона в кристалл, для которых наблюдается усиление излучения. Это приводит к условию на толщину x монокристалла:

$$x < L \left(\frac{mc^2}{E_s} \right)^2 \left(\frac{d}{\hbar} \right)^2 \left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_2} \right)^2. \quad (12.15)$$

Однако и в этом вопросе еще нет полной ясности.

При дальнейшем увеличении энергии ускоряемых частиц величина δ может быть сделана настолько малой, что станет возможным применять исследованные выше процессы и к другим частицам.

Действительно, в случае тормозного излучения электронов значения δ , для которых экспериментально наблюдались интерференционные излучения, по порядку величины равны $\delta \sim 10^{-4}/\lambda$ (при $\varepsilon_1 = 5$ Гэв, $\hbar\omega = \frac{\varepsilon_1}{2}$). В случае же тормозного излучения μ -мезонов в кристалле значения δ определяются формулой $\delta = \frac{m_\mu^2 c^3 \omega}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ и из условия появления

интерференционных эффектов $\delta \sim 1/d$ следует, что интерференционные явления для μ -мезонов имеют место для более мягких фотонов, чем для электронов (при одинаковых начальных энергиях). Так, при начальной энергии μ -мезона 5 Гэв интерференционные эффекты начинаются для фотонов с энергией в несколько Мэв , при $\varepsilon_1 \sim 20 \text{ Гэв}$ — для фотонов с энергией порядка $0,1 \text{ Гэв}$. Этим, по-видимому, можно воспользоваться для детектирования и определения энергии μ -мезонов. При этом нужно использовать толстые монокристаллы, поскольку поперечник тормозного излучения μ -мезонов в 200^2 раз меньше соответствующего поперечника для электронов.

До сих пор не исследованы процессы когерентного рождения пар частиц от заряженной частицы. Рассмотрение с помощью метода псевдофотонов показывает, что и тут должны быть интерференционные эффекты. В этом пункте (при рождении $e^+ e^-$ -пары) все заряженные частицы эквивалентны, поскольку спектр и интенсивность псевдофотонов у них одни и те же.

III

РАДИАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ В АМОРФНЫХ СРЕДАХ

(Эффект плотности)

§ 13. ВВЕДЕНИЕ

Из теоретического анализа методов получения формул Бете — Гайтлера для тормозного излучения и образования электронно-позитронных пар следует, что они должны быть применимы вплоть до сколь угодно больших энергий. Этот вывод, однако, относится к радиационным процессам, происходящим на одном изолированном атоме. Если же рассматривать радиационные процессы в аморфной (некристаллической) среде, то и тут, так же как и в кристалле, можно установить, что при достаточно больших энергиях или для достаточно мягких квантов теория Бете — Гайтлера несправедлива [1, 2, 3]. Изменение обычных формул связано, следовательно, с присутствием окружающих атомов. Эти явления мы будем в дальнейшем называть эффектом плотности в тормозном излучении, по аналогии с известным эффектом плотности Ферми в теории ионизационных потерь. Различие между обоими явлениями заключается в том, что подавление роста ионизационных потерь происходит за счет экранировки больших поперечных параметров удара, а подавление поперечников тормозного излучения и рождения пар происходит за счет процессов, разыгрывающихся в продольном направлении. Причина этих явлений уже отмечалась во

введении к книге и в § 6 и будет подробно обсуждаться ниже. Она заключается в том, что длина волны (см. формулу (13.1)), соответствующая продольно передаваемому импульсу среде, становится больше расстояний между атомами (хотя длина волны падающей частицы при больших энергиях много меньше межатомных расстояний). На классическом языке это означает, что для формирования тормозных квантов необходимы большие продольные расстояния пролета частицы (сравни с формулами (6.16), (6.17)). Эта продольная длина называется когерентной длиной и для мягких квантов и углов излучения, много меньших mc^2/ε_1 , равна

$$l_{\text{ког}} = \frac{c}{\omega} \left(\frac{\varepsilon_1}{mc^2} \right)^2. \quad (13.1)$$

Здесь ω — частота излученного кванта, а ε_1 — начальная энергия излучающей частицы (которую в случае малых потерь энергии будем в дальнейшем обозначать также и через E). Вследствие этого характер излучения в среде при больших энергиях начальной частицы должен зависеть от присутствия других атомов и может резко отличаться от случая, когда излучение происходит на каждом излучающем центре независимо. Говоря о влиянии среды на формулы тормозного излучения и рождения пар, мы имеем в виду прежде всего учет многократного кулоновского рассеяния и поляризации среды. Первый эффект был рассмотрен Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчуком [1, 2], второй — автором [3, 4]. В вышеуказанных работах рассмотрение ограничивалось излучением мягких квантов (энергия которых много меньше энергии электрона), и вычисления проводились методом классической теории излучения. Формулы, полученные в той области частот, где существенное влияние оказывает многократное рассеяние, носили приближенный оценочный характер. Математическая теория влияния многократного рассеяния на тормозное излучение была развита в работах А. Б. Мигдала [5, 6]. В последующих работах Ф. Ф. Терновского, В. М. Галицкого, И. И. Гуревича, В. В. Якимца и И. Н. Топтыгина результаты были распро-

странены на поглощающую среду (и на рассмотрение процессов рождения пар непосредственно от электрона) [7, 8, 9, 10]. Кроме того, появился целый ряд теоретических и экспериментальных работ, посвященных рассмотрению близких вопросов [11, 12, 13, 14, 28, 29, 41, 48—52, 65—75]. Экспериментальные работы, посвященные обнаружению влияния среды на электромагнитные процессы, изложены в § 22.

§ 14. ВЛИЯНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ СРЕДЫ НА ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

В этом параграфе при помощи простого математического аппарата излагается теория тормозного излучения с учетом поляризации среды [3, 4]. Как будет показано ниже, учет влияния поляризации среды приводит к существенному изменению формул тормозного излучения для фотонов, частота которых порядка или меньше $\omega_{кр}$ (см. формулу (14.5)). Энергия этих квантов при энергии излучающей частицы, равной $\epsilon_1 = 10^{12}$ эв, в плотных средах с большими Z достигает энергий порядка $\hbar\omega = 10^8$ эв. Причина изменений формул Бете—Гайтлера заключается во взаимодействии излученных квантов со средой. Если среда однородна и прозрачна (т. е. рассеянием и поглощением кванта можно пренебречь), то учет этого взаимодействия очень прост как в классической, так и в квантовой электродинамике. Все дело сводится к тому, что в исходных уравнениях поля нужно заменить скорость кванта c на фазовую скорость $c/\sqrt{\epsilon}$, где $\sqrt{\epsilon}$ — показатель преломления для заданной частоты.

Рассмотрение задачи ведется на основе классической электродинамики, поскольку, как мы увидим в результате вычисления эффекта, влияние поляризации будет существенно для излучения квантов, энергия которых будет много меньше энергии начальной частицы. Волновой вектор и частота излученного кванта связаны соотношением

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} \vec{n}, \quad (14.1)$$

где \vec{n} — единичный вектор вдоль направления движения кванта. Далее будем интересоваться излучением частот, значительно превышающих атомные, следовательно:

$$\sqrt{\varepsilon} = 1 - \frac{2\pi NZe^2}{m\omega^2} = 1 - \frac{\omega_0^2}{2\omega^2}. \quad (14.2)$$

Величина

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi NZe^2}{m} \quad (14.3)$$

носит название ленгмюровской частоты. В этой главе через N обозначено число атомов в единице объема. Обозначим через θ_1 , θ_2 и θ_3 углы между векторами \vec{k} , \vec{p}_1 ; \vec{k} , \vec{p}_2 и \vec{p}_1 , \vec{p}_2 соответственно (см. рис. 24). Используя соотношение $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \hbar\omega$, можно получить выражение для минимального продольно передаваемого импульса (сравни с выводом формулы (6.15)):

$$q_{\parallel} = p_1 - p_2 \cos \theta_3 - \frac{\hbar\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} \cos \theta_1, \quad (14.4)$$

$$\delta_1 = \frac{1}{\hbar} q_{\parallel \min} = \frac{\hbar\omega mc^2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \hbar} + \frac{2\pi NZe^2}{mc\omega}.$$

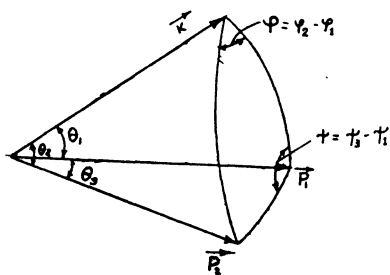


Рис. 24. Сферический треугольник, определяющий относительное расположение векторов \vec{p}_1 , \vec{p}_2 , \vec{k} .

При $N = 0$ величину δ_1 будем обозначать через δ (см. формулу (6.16)). Когда $N = 0$, $\delta_1 = \delta$ неограниченно уменьшается при увеличении энергии ε_1 или при уменьшении частоты ω . Другими словами, для тормозного излучения важными становятся большие продольные расстояния пролета частицы, равные $l_{\text{кор}} = 1/\delta$. Для частот, меньших или порядка $\omega_{\text{кр}}$,

второй член в формуле (14.4), ответственный за поляризацию среды, обрезает дальнейшее увеличение эффективных продольных расстояний. В этом и состоит указанная в § 13 аналогия, существующая между эффектом плотности в теории ионизационных потерь и в тормозном излучении. В первом случае влияние среды экранирует поле движущейся частицы и обрезает большие параметры столкновения в направлении, перпендикулярном движению; во втором случае обрезаются продольные расстояния.

Критическая частота, начиная с которой наступает эффект, дается выражением

$$\omega_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{(mc^2)^2}} \omega_0 \approx \frac{\epsilon_1}{mc^2} \omega_0 \ll \frac{\epsilon_1}{\hbar}. \quad (14.5)$$

Поскольку эффект сказывается только для излучения фотонов, энергия которых много меньше энергии начальной частицы, то можно считать, что $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$.

Для плотных сред с большими Z величина $\hbar\omega_{\text{кр}}$ составляет примерно $\hbar\omega_{\text{кр}} \approx (10^{-4} - 10^{-5})\epsilon_1$.

Для оценки эффекта поляризации среды (количественный расчет приводится в § 15) воспользуемся приближенной формулой (2.19) для поперечника тормозного излучения Бете—Гайтлера. Перепишем (2.19) в следующем виде:

$$d\sigma = 2\bar{\sigma} \frac{m^2 c^3 d\omega}{\epsilon_1^2} \int_{\delta}^{k_{1\text{max}}} \frac{dk_1}{k_1^2} \left(1 + \frac{\hbar^2 \omega \delta}{m^2 c^3} - \frac{2\delta}{k_1} + \frac{2\delta^2}{k_1^2} \right) \int_0^{a/\lambda} \frac{k_1^2 dk_1^2}{(k_1^2 + k_1^2 + R^{-2})^2}. \quad (2.19)$$

Легко видеть, что основной вклад в поперечник вносит область интегрирования по k_1 около нижнего предела δ . Однако в среде величина δ изменяется. Эффект влияния поляризации среды можно приближенно учесть, если в формулу (2.19) вместо δ подставить δ_1 . Величина δ_1 дается с учетом эффекта поляризации выражением (14.4). Опуская k_1 во вто-

ром интеграле (поскольку условие $\delta R \ll 1$ предполагается выполненным, в противном случае это приводит к логарифмической неточности), для поперечника излучения мягких фотонов получим выражение

$$d\sigma = \frac{8}{3} \sigma \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{mc^2} \right)^2} \frac{d\omega}{\omega} \left(2 \ln \frac{aR}{\lambda} - 1 \right). \quad (14.6)$$

Величина a порядка единицы и ее введение связано с неточностью формулы (2.19) на близких параметрах столкновения. Из формулы (14.6) видно, что множитель, стоящий в знаменателе, приводит к подавлению излучения мягких квантов. Для излучения квантов, частота которых много меньше критической (см. (14.5)), формула примет вид:

$$d\sigma = \frac{16}{3} \sigma \frac{\omega d\omega}{\epsilon_1^2} \frac{m^2 c^4}{\omega_0^2} \left(\ln \frac{aR}{\lambda} - \frac{1}{2} \right). \quad (14.7)$$

В отличие от формулы Бете — Гайтлера спектр излучения мягких квантов ведет себя как $\omega d\omega$, а интенсивность излучения обратно пропорциональна квадрату энергии излучающей частицы. Таким образом, учет поляризации среды существенно изменяет формулу для поперечника тормозного излучения в области малых частот, ограниченных условием

$$\omega \lesssim \omega_{\text{кр}} \ll \frac{\epsilon_1}{\hbar}. \quad (14.8)$$

На излучение фотонов, частота которых превышает $\omega_{\text{кр}}$, влияние поляризации среды несущественно.

§ 5. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕНСИВНОСТИ И УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ПОЛЯРИЗАЦИИ СРЕДЫ [3, 14]

При расчете излучения мягких квантов можно пренебречь отдачей и воспользоваться классическим методом расчета. Тогда поперечник будет равен произведению попе-

речника рассеяния на вероятность излучения при заданном рассеянии.

Энергия излучения в интервале частот $d\omega$ и в интервале телесного угла $d\Omega$ при заданном отклонении электрона дается следующим выражением макроскопической электродинамики:

$$dI_{n, \omega} = \frac{e^2 V \varepsilon}{4\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega d\Omega \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\vec{n} \vec{v}] e^{i\vec{k} \vec{r}(t) - i\omega t} dt \right|^2, \quad (15.1)$$

где \vec{k} — волновой вектор излученного фотона, \vec{n} — единичный вектор в направлении \vec{k} , а ε — диэлектрическая постоянная среды (см. формулы (14.1) и (14.2)). Формулу (15.1) легко получить (см. пример, разобранный в конце § 23), исходя из макроскопических уравнений Максвелла, следуя обычным рассуждениям, которые применяются для вывода соответствующего выражения для излучения в вакууме [15, 16]. При выводе необходимо только учесть соотношение (14.1) и то обстоятельство, что наличие среды приводит для компонент плоской электромагнитной волны к связи

$$\vec{H}_\omega = \sqrt{\varepsilon} [\vec{n} \vec{E}_\omega]. \quad (15.2)$$

Магнитная проницаемость μ в дальнейшем положена равной единице. Траектория электрона задается уравнением

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{v}_1 t & \text{при } t < t_0 \\ \vec{r} &= \vec{v}_2 t & \text{при } t > t_0. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Более детальное задание траектории около $t = t_0$ оказывается несущественным благодаря тому, что в интеграле типа (15.1) при релятивистских энергиях играют роль большие промежутки интегрирования по переменной t . Фактически результат (15.1) будет зависеть только от отклонения электрона на заданный угол. Действительно, интенсивность излучения определяется интегралами типа

$$\vec{H} \sim \int_{-\infty}^{t_0=0} [\vec{n} \vec{v}_1] e^{i(\vec{k} \vec{v}_1 - \omega)t} dt + \int_{t_0=0}^{\infty} [\vec{n} \vec{v}_2] e^{i(\vec{k} \vec{v}_2 - \omega)t} dt \approx$$

$$\approx \frac{i[\vec{n} \vec{v}_1]}{\omega - \vec{k} \vec{v}_1} - \frac{i[\vec{n} \vec{v}_2]}{\omega - \vec{k} \vec{v}_2}. \quad (15.4)$$

Легко видеть, что промежутки $t_{\text{эф}}$, вносящие эффективный вклад в излучение, определяются следующим соотношением:

$$t_{\text{эф}} \lesssim \frac{1}{\omega - \vec{k} \vec{v}_{1,2}}.$$

Следовательно, длина траектории, которая существенна для формирования излучения, равна

$$l_{\text{кор}} = ct_{\text{эф}}. \quad (15.5)$$

Сравнение с формулой (14.4) показывает, что

$$l_{\text{кор}} \sim \frac{1}{\delta_1}. \quad (15.6)$$

Это означает, что квантовое (см. вывод формул (14.4)) и классическое рассмотрение приводит к одному и тому же значению когерентной длины для мягких квантов ($\hbar\omega \ll \varepsilon_1$).

Вероятность отклонения должна даваться квантовомеханическими расчетами. Для малых углов отклонения излучающей релятивистской частицы мы можем воспользоваться формулой Резерфорда в виде

$$d\sigma_R = 4Z^2 r_0^2 \left(\frac{mc^2}{\varepsilon_1} \right)^2 \frac{dO}{[6_3^2 + (\hbar/Rp_1)^2]^2}, \quad (15.7)$$

где R — радиус экспоненциальной экранировки кулоновского поля, p_1 и ε_1 — импульс и энергия начального электрона, dO — телесный угол вдоль направления рассеянного электрона. Экспоненциальная экранировка взята только ради наглядности. Во всех случаях, где необходим точный учет экранировки, необходимо произвести замену (7.18)

$\left[\theta_3^2 + \left(\frac{\hbar}{R p_1} \right)^2 \right]^{-2} \rightarrow \frac{(1-F)^2}{\epsilon_3^4}$ (см. формулу (17.2)). Используя (15.1) и (15.7), после элементарных преобразований мы получим дифференциальный поперечник тормозного излучения в среде ($|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v \sim c$, $\epsilon \sim 1$):

$$d\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{\pi^2} \frac{d\Omega d\Omega'}{[\epsilon_3^2 + (\hbar/R p_1)^2]^2} \left(\frac{mc^2}{\epsilon_1} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega} \left[\frac{\theta_1^2}{\left(1 - \frac{v}{c} V_{\epsilon}^- + \frac{1}{2} \theta_1^2 \right)^2} + \frac{\theta_2^2}{\left(1 - \frac{v}{c} V_{\epsilon}^- + \frac{1}{2} \theta_2^2 \right)^2} - \frac{2\theta_1\theta_2 \cos \varphi}{\left(1 - \frac{v}{c} V_{\epsilon}^- + \frac{1}{2} \theta_1^2 \right) \left(1 - \frac{v}{c} V_{\epsilon}^- + \frac{1}{2} \theta_2^2 \right)} \right], \quad (15.8)$$

где φ — угол между плоскостями, проходящими через векторы \vec{k}, \vec{p}_1 и \vec{k}, \vec{p}_2 (рис. 24).

Отметим, что использование классического расчета, помимо выполнения условия $\hbar\omega \ll \epsilon_1$, предполагает, что импульс, уносимый фотоном при излучении, мал по сравнению с изменением импульса при рассеянии. Сравнение формулы (15.8) с точной формулой Бете — Гайтлера [17] (при $\epsilon = 1$ и с упрощенным описанием экранировки) показывает, что в последней вместо $p_1^2 \theta_3^2 + (\hbar/R)^2$ стоит выражение

$$q^2 + (\hbar/R)^2 = q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2 + (\hbar/R)^2,$$

где $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \hbar\vec{k}$ передаваемый импульс. Поскольку мы считаем, что $q_{\parallel \text{эф}} \sim \frac{m^2 c^4}{2\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{\hbar\omega}{c} \ll \frac{\hbar}{R}$ (случай полной экранировки), а q_{\perp} при малых частотах и малых углах излучения определяется величиной $p_1 \theta_3$, то такое приближение допустимо.

Для получения интегральной формулы проще исходить непосредственно из выражения (15.1). Вычислим интеграл в (15.1) в пределах от $-T$ до T и в конечном выражении перейдем к пределу $T \rightarrow \infty$. Предположим, что в интервале времени $(-T, 0)$ частица движется с постоянной скоростью \vec{v}_1 , а в интервале $(0, T)$ с постоянной скоростью \vec{v}_2 . После простого интегрирования формулы (15.1) приходим к выражению:

$$\begin{aligned}
 dl_{\vec{n}\omega} = & \frac{e^2 \sqrt{\varepsilon}}{4\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega d\Omega \left\{ \frac{\sin^2 \frac{\vec{k}\vec{v}_1 - \omega}{2} T}{[\vec{n}\vec{v}_1]^2 \left(\frac{\vec{k}\vec{v}_1 - \omega}{2}\right)^2} + \right. \\
 & + \frac{\sin^2 \frac{\vec{k}\vec{v}_2 - \omega}{2} T}{[\vec{n}\vec{v}_2]^2 \left(\frac{\vec{k}\vec{v}_2 - \omega}{2}\right)^2} + \\
 & + 2([\vec{n}\vec{v}_1][\vec{n}\vec{v}_2]) \frac{\sin \frac{\vec{k}\vec{v}_1 - \omega}{2} T \sin \frac{\vec{k}\vec{v}_2 - \omega}{2} T}{\frac{\vec{k}\vec{v}_1 - \omega}{2} \frac{\vec{k}\vec{v}_2 - \omega}{2}} \times \\
 & \left. \times \cos \frac{\vec{k}\vec{v}_1 - \omega + \vec{k}\vec{v}_2 - \omega}{2} T \right\}. \quad (15.9)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим два частных случая этой формулы:

а) Пусть величины $\left(1 - \frac{v_{1,2}}{c} \sqrt{\varepsilon}\right)$ могут обращаться в ноль. Тогда для некоторого интервала частот могут выполняться следующие условия:

$$\omega \left(1 - \frac{v_{1,2}}{c} \sqrt{\varepsilon} \cos \theta_{1,2}\right) T \ll 1. \quad (15.10)$$

В этом случае в выражении для интенсивности излучения появляются члены, пропорциональные T , и формула (15.9) сводится к выражению для излучения Черенкова — Вавилова, возникающего независимо на двух участках траектории. После интегрирования по углам излучения кванта мы приходим для числа излученных квантов к известной формуле Франка — Тамма:

$$dn = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{2vT}{c} \left(1 - \frac{c^2}{v^2\varepsilon}\right) d\omega. \quad (15.11)$$

б) Пусть $1 - \frac{v_{1,2}}{c} \sqrt{\varepsilon} > 0$, то есть отсутствует излучение Вавилова — Черенкова. Тогда при $T \rightarrow \infty$ выполняются условия

$$\omega \left(1 - \frac{v_{1,2}}{c} \sqrt{\varepsilon} \cos \theta_{1,2}\right) T \gg 1. \quad (15.12)$$

В этом случае формула (15.9), после замены быстроосциллирующих величин их средними значениями, принимает вид:

$$dI_{\vec{n}\omega} = \frac{e^2 \sqrt{\varepsilon}}{4\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega d\Omega \left\{ \frac{[\vec{n} \vec{v}_1]}{(\vec{k} \vec{v}_1 - \omega)} - \frac{[\vec{n} \vec{v}_2]}{(\vec{k} \vec{v}_2 - \omega)} \right\}^2 + \frac{e^2 \sqrt{\varepsilon}}{4\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega d\Omega \left\{ \frac{[\vec{n} \vec{v}_1]^2}{(\vec{k} \vec{v}_1 - \omega)^2} + \frac{[\vec{n} \vec{v}_2]^2}{(\vec{k} \vec{v}_2 - \omega)^2} \right\}. \quad (15.13)$$

Первый член формулы есть выражение для излученной энергии при отклонении частицы от прямолинейной траектории, второй же член представляет собой излучение при „остановках“. Второй член не исчезает при $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, поскольку введение времени T предполагает начало и конец движения. Отбросив второй член и используя формулу $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} \vec{n}$,

перепишем выражение для излученной энергии частоты ω в телесный угол $d\Omega$ при заданном отклонении электрона в следующем виде:

$$dI_{\vec{\omega}} = \frac{e^2}{4\pi^2 c V \varepsilon} d\omega d\Omega \left\{ \frac{[\vec{k} \vec{v}_1]}{\vec{k} \vec{v}_1 - \omega} - \frac{[\vec{k} \vec{v}_2]}{\vec{k} \vec{v}_2 - \omega} \right\}^2. \quad (15.14)$$

Интегрируя по углам излученного кванта, приходим к следующему выражению:

$$dI_{\omega} = \frac{e^2}{\pi c} \frac{d\omega}{V \varepsilon} \left\{ \left(1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \varepsilon \right) \int_{-1}^1 \frac{dz}{1 - \frac{v_z^2}{c^2} \varepsilon} - 2 \right\}, \quad (15.15)$$

где через v_z обозначена следующая величина:

$$\vec{v}_z = \frac{1}{2} (1 + z) \vec{v}_1 + \frac{1}{2} (1 - z) \vec{v}_2. \quad (15.16)$$

При интегрировании мы воспользовались обычно применяемым в этом случае тождеством (см., например, [18]):

$$\frac{1}{(\vec{k} \vec{v}_1 - \omega)(\vec{k} \vec{v}_2 - \omega)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz}{(\omega - \vec{k} \vec{v}_z)^2}. \quad (15.17)$$

Введем обозначение

$$\text{sh } \Phi = \frac{v}{c} V \varepsilon \frac{\sin \frac{\theta_3}{2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon}}, \quad (15.18)$$

тогда

$$\int_{-1}^1 \frac{dz}{1 - \frac{v_z^2}{c^2} \varepsilon} = \frac{4\Phi}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon \right) \text{sh } 2\Phi},$$

$$1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \varepsilon = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon \right) \text{ch } 2\Phi.$$

Подставляя эти значения в (15.15), для числа излученных квантов получаем следующее выражение:

$$\frac{dI_{\omega}}{\hbar \omega} = \frac{2}{137 \pi V \varepsilon} \frac{d\omega}{\omega} \{ 2\Phi \text{cth } 2\Phi - 1 \}. \quad (15.19)$$

Рассмотрим два предельных случая этой формулы. Пусть углы отклонения электрона малы:

$$\sin \frac{\theta_3}{2} \ll \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \ll 1. \quad (15.20)$$

Тогда величина Φ , входящая в формулу (15.19), может быть упрощена:

$$\Phi = \frac{\theta_3}{2} / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}.$$

Формула (15.19) в этом случае принимает вид:

$$\frac{dI_\omega}{\hbar\omega} = \frac{2}{3} \frac{1}{137\pi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\theta_3^2}{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}. \quad (15.21)$$

В другом предельном случае больших углов, когда выполняется неравенство, обратное неравенству (15.20), имеем

$$\frac{dI_\omega}{\hbar\omega} = \frac{2}{137\pi} \frac{d\omega}{\omega} \left\{ 2 \ln \frac{2 \sin \frac{\theta_3}{2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} - 1 \right\}. \quad (15.22)$$

Для того чтобы получить поперечник тормозного излучения, необходимо выражение (15.19) умножить на поперечник моттовского рассеяния. В действительности (пренебрегая спиновой зависимостью) для малых углов рассеяния можно использовать обычный поперечник Резерфорда.

Поперечник тормозного излучения можно записать в следующем виде:

$$d\sigma_{\text{торм}} = d\sigma_R \frac{2}{137\pi} \frac{d\omega}{\omega} \{2\Phi \operatorname{cth} 2\Phi - 1\}. \quad (15.23)$$

Как видно из приведенных выше формул (15.7), (15.21), (15.22), эффективный вклад в поперечник излучения [при высоких энергиях дают малые углы рассеяния электрона порядка

$$\frac{\hbar}{R\rho_1} \lesssim \theta_3 \lesssim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}.$$

Полный поперечник тормозного излучения получим, интегрируя формулу (15.23) по углам отклонения электрона. Однако, прежде чем выписывать соответствующую формулу, заметим, что интегрирование выражения (15.23) в общем виде должно производиться численно, поскольку атомный формфактор, входящий в поперечник Резерфорда, не имеет аналитического вида. Вид, получающийся в результате формулы, легко усмотреть, если воспользоваться формулой (15.7) с экспоненциальной экранировкой и предельными выражениями (15.21) и (15.22). В этом случае интегрирование проводится элементарным образом и в результате получается приведенная ниже формула (15.24), имеющая логарифмическую точность ($a \approx 1$):

$$d\sigma_{\text{торм}} = \frac{8}{3 \cdot 137} \left(\frac{Ze^2}{\varepsilon_1} \right)^2 \frac{1}{1 - \varepsilon \frac{v^2}{c^2}} \frac{d\omega}{\omega} \ln \left[a \frac{\left(1 - \varepsilon \frac{v^2}{c^2} \right) R^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \lambda^2} \right]. \quad (15.24)$$

Точность формулы (15.24) можно улучшить, если провести численное интегрирование. При этом [должна получиться формула следующего вида [4]:

$$d\sigma_{\text{торм}} = 4\bar{\sigma} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1} \right)}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(\frac{\varepsilon_1}{mc^2} \right)^2} L_{\text{рад}}. \quad (15.25)$$

В формулу (15.25) введен множитель, который необходим для описания излучения квантов произвольной энергии. Для излучения частот, превышающих критическую, формула (15.25) переходит в обычную формулу Бете—Гайтлера и, следовательно, $L_{\text{рад}} = 183 Z^{-1/3}$.

Для излучения квантов, для которых существенно учитывать влияние поляризации среды, формула (15.25) отличается от формулы Бете—Гайтлера. Множитель, стоящий в

знаменателе формулы (15.25), резко уменьшает вероятность излучения мягких квантов. Спектр излучения вместо бете-гайтлеровского вида $\frac{d\omega}{\omega}$ превращается в спектр, определяемый законом $\omega d\omega$. Это означает, что для среды, диэлектрическая постоянная которой дается выражением (14.2), не существует проблемы, связанной с инфракрасной катастрофой. В связи с этим и радиационные поправки к электромагнитным процессам должны измениться [4]. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе. Помимо этого основного изменения, претерпевает изменение и радиационный логарифм. Сравнение с формулой (15.25) показывает, что радиационный логарифм должен иметь следующий вид:

$$L_{\text{rad}} = \ln \left\{ 183 Z^{-1/3} \left[1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(\frac{\epsilon_1}{mc^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}.$$

Мы увидим в последующих параграфах, что вид радиационного логарифма при учете эффектов плотности действительно должен измениться.

Формулой (15.25) с обычным выражением для радиационного логарифма часто пользуются при расчетах каскадных кривых. При этом ввиду того, что поперечники остаются однородными функциями отношения $\frac{\hbar\omega}{\epsilon_1}$, можно применять стандартные интегральные преобразования, широко используемые в каскадной теории ливней. Подробнее эти вопросы будут обсуждены в § 22.

Формулы (15.23), (15.24) относятся к поперечникам излучения в среде, диэлектрическая постоянная которой имеет вид (14.2). Выражение (14.2) является универсальным для всех сред, для частот, значительно превышающих атомные частоты. В последующем изложении мы в основном будем рассматривать эту область частот. Излучение квантов в оптической области с учетом влияния многократного рассеяния и поляризации среды исследовано в работах [50, 52].

Может возникнуть вопрос: насколько правомочно пользоваться диэлектрической постоянной среды при вычислении

излучения квантов, длина волн которых значительно меньше расстояний между атомами. В действительности именно такая ситуация возникает при увеличении энергии излучающей частицы (см. формулу (14.5)). Чтобы обосновать правомочность использования обычной диэлектрической постоянной, необходимо исходить из микроскопических уравнений Максвелла. Рассматривая взаимодействие фотонов с электронами среды [19, 20, 21] (что сводится к суммированию цепочек комптон-эффекта для рассеяния под углом ноль) и усредняя по всем возможным состояниям, мы смогли бы ввести последовательным способом диэлектрическую постоянную среды. Из этих вычислений должен следовать критерий применимости макроскопического рассмотрения эффекта. Такой детальный анализ еще никем не произведен. Можно привести аргумент в пользу того, что результаты, полученные описанным выше методом, не будут отличаться от приведенных в тексте формул. Это следует из того, что эффективным параметром длины, входящим в задачу, является когерентная длина, а не длина волны излученного фотона. Если это так, то макроскопическая электродинамика может применяться всегда, если когерентная длина больше, чем расстояние между атомами. Для нашего случая когерентная длина для излучения мягких квантов значительно больше величины c/ω_0 , где ω_0 — ленгмюровская частота. Поэтому можно надеяться, что точные микроскопические расчеты для излучения мягких квантов в прозрачной среде с учетом эффекта поляризации подтвердят полученные выше формулы.

Нужно также отметить, что всякая среда является в той или иной степени поглощающей. Поэтому приведенные выше результаты останутся правильными и в поглощающей среде при условии, что длина, на которой происходит поглощение кванта, значительно превышает когерентную длину. В этом случае для тонких слоев вещества (когда толщина слоя значительно меньше длины поглощения кванта) приведенные выше формулы остаются без изменения. Для более толстых слоев учет поглощения среды можно производить обычным феноменологическим образом. Фактически это сводится к тому, что для излучения кванта определенной ча-

стоты „работает“ слой вещества, толщина которого равна по порядку длине поглощения кванта. В случае выполнения обратного неравенства (т. е. когда длина, на которой поглощается квант, меньше когерентной длины) необходимо учитывать изменение самих поперечников излучения. Мы вернемся к этому вопросу позже.

Нужно отметить, что влиянием поляризации на поперечник рождения электронно-позитронных пар всегда можно пренебречь. Это следует из того, что поляризация среды влияет только на излучение квантов, энергия которых значительно меньше энергии излучающей частицы.

В заключение этого параграфа отметим, что учет поляризации среды в других видах излучения производился уже давно. Например, при расчете излучения антенных систем обычно учитывают окружающую среду путем введения диэлектрической постоянной ϵ . Особенности излучения при сверхсветовом движении в среде были проанализированы в обзоре В. Л. Гинзбурга [24]. Имеется большая литература по вопросам излучения в магнитном поле [16, 22]. В работе В. Н. Цытовича [23] приведены общие формулы для излучения при круговом движении в среде. В. Л. Гинзбург [24] указал, что при излучении в магнитном поле в плазме, для которой диэлектрическая постоянная имеет вид (14.2), влияние среды скажется при выполнении критерия $\omega < \omega_{кр}$. В конце этого параграфа приводится в виде примера расчет излучения в магнитном поле с учетом ϵ вида (14.2). Необходимо отметить, что для малых частот (сравнимых с частотой лармовского вращения) сама диэлектрическая постоянная должна зависеть от магнитного поля и расчет излучения должен быть видоизменен (см., например, [25, 26]).

Пример: Излучение релятивистского электрона, движущегося по окружности в плазме (при изложении этого вопроса следуем работе [27]).

Рассмотрим излучение релятивистского электрона, движущегося в магнитном поле при наличии плазмы. Компонента Фурье с индексом q векторного потенциала дается выражением

$$\vec{A}_q = \frac{e e^{ikR_0}}{cR_0 T} \oint e^{i(q\omega_1 t - \vec{k} \cdot \vec{r}(t))} d\vec{r}. \quad (15.26)$$

Выражение (15.26) является обобщением аналогичного выражения для случая вакуума [15, 22]. Нужно учесть, что связь между \vec{k} и частотой $\omega = q\omega_1$ в присутствии среды имеет вид:

$$\vec{k} = q\omega_1 \frac{\sqrt{\varepsilon^-}}{c} \vec{n}. \quad (14.1)$$

Здесь \vec{n} — единичный вектор в направлении распространения фотона, q — целое число, T — период вращения, R_0 — расстояние до точки наблюдения, $\vec{r}(t)$ — траектория частицы, а

$$\omega_1 = \frac{ceH}{E} \quad (15.27)$$

— частота обращения в магнитном поле. Учитывая дальнейшее применение формулы к излучению частот, превышающих атомные, примем, что $\varepsilon < 1$ и имеет вид:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{q^2 \omega_1^2}. \quad (14.2)$$

Величина ω_0 дается формулой (14.3). Влиянием магнитного поля на вид диэлектрической постоянной можно пренебречь, если рассматривается излучение частот, превышающих ларморовскую частоту прецессии электронов.

Мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда $\varepsilon > 0$, ибо излучение частот, для которых $\varepsilon < 0$, не происходит. Естественно, что плазма предполагается прозрачной. Вектор Пойнтинга, как известно, при наличии среды своего вида не меняет:

$$S = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}]. \quad (15.28)$$

Нужно учесть, что в плоской волне

$$\sqrt{\varepsilon^-} |\vec{E}| = |\vec{H}|. \quad (15.29)$$

Тогда для интенсивности q -ой гармоники, излученной в единицу телесного угла, мы получим

$$dI_q = \frac{c}{2\pi\sqrt{\varepsilon}} |H_q|^2 R_0^2 dO = \frac{c}{2\pi} |[\vec{R}_0 \vec{A}_q]|^2 \frac{R_0^2}{\sqrt{\varepsilon}} dO. \quad (15.30)$$

Дальнейший расчет полностью повторяет аналогичные вычисления для случая вакуума (см., например, [15]). Если траектория частицы задается как $y = r \sin \omega_1 t$ и $x = r \cos \omega_1 t$, то, вводя $\varphi = \omega_1 t$, имеем

$$dx = -r \sin \varphi d\varphi \quad \text{и} \quad \vec{kr} = kr \sin \theta \sin \varphi = \frac{qv}{c} \sqrt{\varepsilon} \sin \theta \sin \varphi,$$

где θ — угол между направлением излучения и нормалью к плоскости движения.

Подставим полученные выражения в (15.26) и, используя известные свойства функций Бесселя, получим:

$$A_{qx} = -i \frac{ev}{c} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} J'_q \left(\frac{qv}{c} \sqrt{\varepsilon} \sin \theta \right), \quad (15.31)$$

$$A_{qy} = \frac{ev}{c} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} \frac{v}{c} \sin \theta} J_q \left(\frac{qv}{c} \sqrt{\varepsilon} \sin \theta \right).$$

Подставляя (15.31) в (15.30), получим полную интенсивность излучения:

$$dI_q = \frac{e^2}{2\pi} \frac{q^2 \omega_1^2}{c \sqrt{\varepsilon}} \left[\varepsilon \frac{v^2}{c^2} J_q'^2 \left(q \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon} \sin \theta \right) + \text{ctg}^2 \theta J_q^2 \left(q \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon} \sin \theta \right) \right] d\Omega. \quad (15.32)$$

Интегрирование по углам проводится способом, аналогичным случаю для вакуума, и мы получаем окончательно:

$$I_q = \frac{2e^4 q H^2 (1 - v^2/c^2)}{c^2 \sqrt{\varepsilon} m^2 v} \left\{ \frac{v^2}{c^2} \sqrt{\varepsilon} J_{2q}' \left(2q \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon} \right) - q \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon \right) \int_0^{v/c} J_{2q} \left(2q \sqrt{\varepsilon} \xi \right) d\xi \right\}.$$

Как будет видно из дальнейшего, основную роль в излучении релятивистской частицы $\varepsilon_1/mc^2 \gg 1$ играют частоты с большими q .

Используя для этого случая асимптотическое представление функций Бесселя, имеем

$$q \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon} \gg 1; \quad (15.33)$$

$$I_q = - \frac{2e^4 H^2 (1 - v^2/c^2) q^{1/3}}{\sqrt{\pi} m^2 c^3} \left\{ \Phi'(u) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon \right) q^{2/3} \int_u^\infty \Phi(\xi) d\xi \right\}, \quad (15.34)$$

где $\Phi(u)$ — функция Эйри, а

$$u = 2q^{2/3} \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon} \right). \quad (15.35)$$

Рассмотрим предельные случаи формулы (15.34). Нас будет интересовать случай плазмы, для которой ε мало отличается от единицы, т. е.

$$\sqrt{\varepsilon} = 1 - \frac{\omega_0^2}{2q^2 \omega_1^2}; \quad \omega_0^2 \ll 2q^2 \omega_1^2.$$

Пусть

$$u = 2q^{2/3} \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{\omega_0^2}{2q^2 \omega_1^2} \right) \ll 1. \quad (15.36)$$

В этом случае $\Phi'(0) = -0,4587$ и интенсивность дается выражением, полностью совпадающим с соответствующим выражением для вакуума:

$$I_q = 0,52 \frac{e^4 H^2}{m^2 c^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) q^{1/3}. \quad (15.37)$$

При этом условии (15.36) налагает ограничения на излученные частоты

$$1 \ll q \ll \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}, \quad (15.38)$$

а также

$$q \gg \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^{3/2}.$$

Другой предельный случай соответствует $u \gg 1$, т. е. либо

$$q \gg \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}, \quad (15.39)$$

либо

$$q \ll \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^{3/2}.$$

Формулу (15.34) для интенсивности излучения можно в этом случае, воспользовавшись асимптотическим свойством функции Эйри, переписать в следующем виде:

$$I_q = \frac{e^4 H^2 q^{1/2}}{2 \sqrt{\pi} m^2 c^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon\right)^{1/4} e^{\frac{2}{3} q \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon\right)^{3/2}}. \quad (15.40)$$

Суммируем результаты. Для излучения волн с частотой $q\omega_1$, которые удовлетворяют неравенству (15.38), т. е.

$$\omega_1 \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^{3/2} \ll q\omega_1 \ll \frac{\omega_1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}, \quad (15.41)$$

интенсивность излучения дается выражением (15.37), не зависящим от диэлектрической постоянной. Для частот, находящихся как справа, так и слева этого интервала $u \gg 1$ и, следовательно, нужно пользоваться формулой (15.40), в которую существенным образом входит диэлектрическая постоянная.

Для существования интервала (15.41) необходимо выполнение неравенства

$$\frac{\varepsilon_1}{mc^2} \gg \frac{\omega_0}{eH} mc. \quad (15.42)$$

Проведем упрощение формулы (15.40) при выполнении условия (15.42). Множители $1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon$, входящие в формулу (15.40), можно заменить

на $1 - \frac{v^2}{c^2}$ при условии $1 - \frac{v^2}{c^2} \gg \frac{\omega_0^2}{q^2 \omega_1^2}$, которое перепишем в виде

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{mc^2} \right)^4 \ll \frac{q^2 H^2}{4 \pi mc^2 NZ}. \quad (15.43)$$

В районе максимума, где $q \sim (1 - v^2/c^2)^{-3/2}$, неравенство (15.43) совпадает с условием (15.42).

Таким образом, около максимума и справа от него формула (15.37) должна переходить в формулу (15.40), в которой можно положить $\epsilon=1$. В другом крайнем случае, на левой стороне спектра, $q \approx (\omega_0/\omega_1)^{3/2}$ (см. условие (15.41)). Подставляя это значение в формулу

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \ll \frac{\omega_0^2}{q^2 \omega_1^2}, \quad (15.44)$$

противоположную неравенству (15.43), придем вновь к условию (15.42). Таким образом, около левой части спектра излучения формула (15.37) переходит в формулу (15.40), в которой можно пренебречь $1 - v^2/c^2$ по сравнению с $\omega_0^2/q^2 \omega_1^2$, т. е. интенсивность излучения будет даваться формулой:

$$I_q = \frac{e^4 H^2 q^{1/2}}{2m^2 c^3 \sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(\frac{\omega_0^2}{q^2 \omega_1^2}\right)^{1/4} \times \\ \times \exp\left[-\frac{2}{3} q \left(\frac{\omega_0^2}{q^2 \omega_1^2}\right)^{3/2}\right]. \quad (15.45)$$

Рассмотрим теперь случай, когда неравенство (15.42) не выполняется, т. е.

$$1 \ll \left(\frac{\epsilon_1}{mc^2}\right)^2 \ll \frac{4\pi mc^2 NZ}{H^2}. \quad (15.46)$$

В этом случае для всего интервала излученных частот интенсивность излучения дается формулой (15.40) (поскольку $u \gg 1$) и экспоненциально мала. Формулу (15.40) опять-таки можно упростить в двух случаях, исходя из условий (15.43) и (15.44).

§ 16. О РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВКАХ К КУЛОНОВСКОМУ РАССЕЯНИЮ С УЧЕТОМ СРЕДЫ*

Поляризационный эффект, рассмотренный в § 15, должен повлиять на вычисление радиационных поправок к электромагнитным процессам [4]. Ниже рассмотрено изменение радиационных поправок к кулоновскому рассеянию, вызванное присутствием среды [28, 29]. Причину этого влияния легко

* Читателям, не знакомым с квантовой электродинамикой, рекомендуется пропустить § 16.

понять из следующих рассуждений. Экспериментально всегда измеряется сумма двух поперечных сечений — упругого кулоновского сечения и сечения тормозного излучения квантов с энергией, меньшей некоторой заданной энергии $\hbar\omega_{min}$, определяемой разрешающей способностью экспериментальной установки.

Учет этого обстоятельства позволяет при теоретическом расчете избежать трудностей, связанных с инфракрасной расходимостью, из-за которой постановка вопроса о вычислении чисто упругого сечения является незаконной. Однако формулы тормозного излучения для релятивистских частиц претерпевают значительные изменения как за счет многократного рассеяния, так и за счет поляризации среды. Очевидно, что эти изменения сечения тормозного излучения скажутся при вычислении радиационных поправок к кулоновскому рассеянию, поскольку, как мы только что отметили, фактически нужно всегда вычислять сумму двух поперечных сечений. Простое суммирование нового сечения тормозного излучения и сечения чисто упругого рассеяния (с вычисленными для вакуума радиационными поправками) было бы непоследовательным.

Очевидно, нужно учесть влияние среды и при вычислении самих радиационных поправок. Рассмотрим влияние поляризации среды. В интересующем нас случае упругого рассеяния в начале и в конце процесса фотоны отсутствуют, поэтому все влияние поляризации среды сведется к изменению функции распространения фотона.

В отличие от случая вакуума, фотон, движущийся в среде, подвергается многократным актам поглощения и испускания. Для нахождения измененной функции распространения нужно просуммировать ряд диаграмм Фейнмана, где каждая последующая диаграмма отличается от предыдущей дополнительным актом поглощения и испускания фотона без изменения частоты. При этом получается геометрическая прогрессия, сумма которой и приводит к искомой функции распространения. Далее, результаты расчета с такой измененной функцией распространения нужно усреднить по состояниям всех атомов [30, 31, 32]. Этой процедуре вычис-

ления можно дать простую наглядную трактовку, обратив внимание на то, что такая методика вычисления в некотором смысле эквивалентна переходу от микроскопических к макроскопическим уравнениям Максвелла (см. приложение IV). Для получения правил написания матричных элементов с учетом влияния среды удобно воспользоваться следующим формальным способом [28, 33]. Напишем макроскопические уравнения Максвелла для потенциалов в четырехмерно-инвариантном виде (мы будем пользоваться написанием в форме Мандельштама—Тамма [34, 35], которое полностью эквивалентно обычному):

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ik}\varepsilon^{lm}\partial^2 A_k/\partial x^l\partial x^m &= 4\pi J^i, \\ \varepsilon^{lm}\partial A_l/\partial x^m &= 0,\end{aligned}\tag{16.1}$$

где $\varepsilon^{ik} = \varepsilon^{ki}$ — введенный Мандельштамом и Таммом тензор диэлектрической и магнитной проницаемостей. Отличные от нуля его компоненты в системе покоя среды равны $\varepsilon^{00} = \varepsilon\sqrt{\mu}$, $\varepsilon^{\alpha\alpha} = -1/\sqrt{\mu}$ при $\alpha = 1, 2, 3$; $\varepsilon^{ik} = 0$ при $i \neq k$. Переход к случаю вакуума сводится к замене тензора ε^{ik} на метрический тензор g^{ik} ($g^{00} = 1$; $g^{\alpha\alpha} = -1$, при $\alpha = 1, 2, 3$; $g^{ik} = 0$ при $i \neq k$). Остальные обозначения следующие:

$$J^i = \left(\rho, \frac{\vec{j}}{c}\right), \quad x^i = (ct, \vec{x}), \quad A^i = (\varphi, \vec{A}).$$

Следуя рассуждениям Р. Фейнмана [36, 37], мы придем к выводу, что изменение, которое необходимо ввести для учета влияния среды, сводится к замене функции распространения фотонов на $-i\hbar c/(2\pi)^4 \varepsilon^{lm}k_l k_m$. Концам внутренней линии фотонов будут теперь соответствовать матрицы $ie\sqrt{4\pi}\gamma^i$ и $ie\sqrt{4\pi}\varepsilon_{\mu i}^{-1}\gamma^\mu$. Воспользуемся этим формальным способом для вычисления энергии электрона. Из физических соображений следует, что электрон в среде будет поляризовать вещество. Кроме того, использование обычной диэлектрической постоянной приведет к затуханию начальной волновой функции электрона за счет потерь энергии. Если представить волновую функцию электрона в виде $\exp(iEt/\hbar - \gamma t/2)$, то для величины $i(E - E_B)/\hbar - \gamma/2$ (где E — энергия

электрона в среде, E_B — энергия электрона в вакууме) получим выражение (см. рассмотренный ниже пример и приложение IV)

$$\Delta E = E - E_B = \frac{e^2 v}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp} (1/v^2 - \varepsilon/c^2)}{[k_{\perp}^2 + \omega^2 (1/v^2 - \varepsilon/c^2)]^{\varepsilon}}, \quad (16.2)$$

$$\gamma = 2i \frac{e^2 v}{\pi \hbar} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp} (1/v^2 - \varepsilon/c^2)}{[k_{\perp}^2 + \omega^2 (1/v^2 - \varepsilon/c^2)]^{\varepsilon}}. \quad (16.3)$$

Из величины γ легко получить потери энергии заряженной частицы, умножив подынтегральное выражение на $\hbar\omega$ (см. приложение VIII). Величина ΔE есть энергия поляризации среды (сравни с [38, 39, 40]). Необходимо еще отметить, что использование обычного значения $\varepsilon(\omega)$ справедливо для расстояний, превышающих межатомные. Поэтому γ определяет потери энергии на „далекие“ столкновения. Естественно, что для эквивалентности метода суммирования диаграмм методу макроскопических уравнений и в первом способе вычисления нужно делать то же приближение.

Вернемся к задаче о радиационных поправках к рассеянию в кулоновском поле. Следуя обычной процедуре расчета, мы должны, во избежание инфракрасной катастрофы, рассмотреть также и сечение тормозного излучения мягких квантов частоты ω . Последнюю формулу легко получить, рассчитав излучение классическим способом при заданном отклонении электрона. Вероятность рассеяния дается поперечным сечением моттовского рассеяния $d\sigma_M$. Формула (16.4) была выведена в предыдущем параграфе:

$$d\sigma = d\sigma_M \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{\varepsilon}} \{2\Phi \operatorname{cth} 2\Phi - 1\} \frac{d\omega}{\omega}, \quad (16.4)$$

где

$$\operatorname{sh} \Phi = \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon} \frac{\sin(\theta_3/2)}{\sqrt{1 - \varepsilon v^2/c^2}}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137},$$

а через θ_3 обозначен угол отклонения электрона. При вычислении сечения упругого рассеяния с точностью до e^6 мы

должны взять квадрат модуля от суммы матричных элементов второго и четвертого порядка по e . Нужно заметить, что при вычислении матричного элемента второго порядка (простое кулоновское рассеяние) влиянием соседних атомов можно пренебречь, так как рассеяние происходит в области внутри атома. Поскольку поправочные члены содержат матричный элемент четвертого порядка линейно, мы имеем право в матричных элементах пользоваться усредненной по состояниям систем функцией распространения фотонов, совпадающей для малых импульсов (больших расстояний) с функцией Грина уравнения (16.1). Инфракрасная расходимость в поправках сокращается с интегралом формулы (16.4) по ω от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_{\min}$. Примем, что $\omega_{\min} \gg \omega_{\text{ат}}$ и воспользуемся предельным значением $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_0^2/\omega^2$. Изменение радиационных поправок в среде будет связано с формулой (16.4), в которой, несмотря на то, что $\epsilon \approx 1$, при $1 - v^2/c^2 \approx \omega_0^2/\omega^2$ среду учитывать необходимо. В результате, в радиационных поправках к кулоновскому рассеянию появится дополнительный член, связанный с изучаемым эффектом. Формула для сечения рассеяния во втором порядке теории возмущений имеет вид [28]

$$d\sigma = d\sigma_{\text{в}}(\omega_{\min}) + d\sigma_{\text{м}} \frac{2\alpha}{\pi} \ln^2 \left(\frac{mc^2}{E} \frac{\omega_{\min}}{\omega_0} \right), \quad (16.5)$$

где $d\sigma_{\text{в}}$ — обычное дифференциальное поперечное сечение рассеяния с радиационными поправками в вакууме [37]. Формула (16.5) (а также (16.8)) справедлива для углов рассеяния

$$\theta_3 > \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \quad (16.6)$$

и при условии

$$\omega_{\min} \ll \omega_0 \frac{E}{mc^2}. \quad (16.7)$$

В противном случае влияние среды несущественно. Влиянием многократного рассеяния на рассматриваемый расчет можно пренебречь. И. В. Андреев [29] рассмотрел радиа-

ционные поправки к кулоновскому рассеянию в среде без использования теории возмущений [29а]. Полный поперечник рассеяния (проинтегрированный по всем углам излучения) с потерей энергии, меньшей $\hbar\omega_{\min}$, оказывается равным

$$d\sigma = d\sigma_m \exp \left\{ -\frac{4\alpha}{\pi} \ln \frac{E}{mc^2} \ln \frac{E}{\hbar\omega_{\min}} + \frac{2\alpha}{\pi} \ln^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_{\min}} \frac{E}{mc^2} \right) \right\}. \quad (16.8)$$

Первый член разложения экспоненты совпадает с формулой (16.5). Радиационные поправки в среде для комптоновского рассеяния рассматривались М. И. Рязановым [41].

Пример. Найти изменение энергии частицы в среде в крайне релятивистском случае.

Используя метод написания матричных элементов (см. приложение IV), найдем изменение энергии в среде

$$\Delta \tilde{E} = \Delta E - i \frac{\gamma \hbar}{2} = \frac{e^2 v}{\pi} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp (1/v^2 - \varepsilon/c^2)}{[k_\perp^2 + \omega^2 (1/v^2 - \varepsilon/c^2)] \varepsilon}. \quad (16.9)$$

Отделяя действительную и мнимую части, имеем:

$$\Delta E = \frac{e^2 v}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp (1/v^2 - \varepsilon/c^2)}{[k_\perp^2 + \omega^2 (1/v^2 - \varepsilon/c^2)] \varepsilon}, \quad (16.2)$$

$$\gamma = 2i \frac{e^2 v}{\pi \hbar} \operatorname{Im} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp (1/v^2 - \varepsilon/c^2)}{[k_\perp^2 + \omega^2 (1/v^2 - \varepsilon/c^2)] \varepsilon}. \quad (16.3)$$

Затухание γ связано с потерями энергии на единицу пути. Для получения потерь нужно умножить подынтегральное выражение формулы (16.3) на энергию $\hbar\omega$ и разделить на скорость частицы v . В результате имеем

$$\frac{dE}{dx} = i \frac{e^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega d\omega \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp (1/v^2 - \varepsilon/c^2)}{[k_\perp^2 + \omega^2 (1/v^2 - \varepsilon/c^2)] \varepsilon(\omega)}. \quad (16.10)$$

В случае релятивистских частиц выражения (16.2) и (16.10) удастся вычислить в общем случае, не используя конкретного вида $\varepsilon(\omega)$ (см., например, [16]). Для этого замкнем контур интегрирования по переменной ω в верхнюю полуплоскость. Известно, что $\varepsilon(\omega)$ в верхней полупло-

скости комплексного переменного ω не имеет ни нулей, ни полюсов. Поэтому значение интеграла определяется вычетами в точках, где знаменатель выражений (16.2) и (16.10) обращается в нуль:

$$k_{\perp}^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon}{c^2} \right) = 0. \quad (16.11)$$

При $v \rightarrow c$ и $\varepsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2$ имеем:

$$\omega_{1,2} = \pm i \frac{v}{c} \sqrt{\frac{c^2 k_{\perp}^2 + \omega_0^2}{1 - v^2/c^2}} \gg \omega_{\text{ат.}}$$

Вычисление интегралов приводит к результату:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi N Z e^4}{m v^2} \ln \frac{m c^2 k_{\perp \text{max}}^2}{4\pi N Z e^2}. \quad (16.12)$$

Формула (16.12) есть известная формула Ферми для ионизационных потерь релятивистской частицы с учетом эффекта плотности (см., например, приложение VIII). Мы ограничили допустимые значения k_{\perp} величиной $k_{\perp \text{max}}$, поскольку при больших k_{\perp} необходимо учитывать пространственную дисперсию. Формула (16.2) известным образом сшивается с потерями при близких столкновениях. [Вычисление выражения (16.2) производится аналогичным образом. Поскольку выражение для ΔE расходится, найдем разность выражений ΔE в среде и ΔE в вакууме (при $\omega_0 = 0$). Простые вычисления приводят к выражению

$$\Delta E - \Delta E(\omega_0 = 0) = - \frac{m e^2 \omega_0 c}{\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}} = - \frac{m e^2 \omega_0 c}{E}. \quad (16.13)$$

Если скорость частицы не меняется (в среде и в вакууме одна и та же), то выражение (16.13) приводит к дополнительной перенормировке массы частицы в среде. Изменение энергии связано с изменением массы (при $v = \text{const}$) следующей формулой:

$$\Delta E = \Delta \left(\frac{m c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{\Delta m}{m} E. \quad (16.14)$$

Используя формулу (16.13), имеем

$$\Delta m_{\text{ср}} - \Delta m_{\text{вак}} = - \left(\frac{m c^2}{E} \right)^2 \frac{e^2 \omega_0}{c^3}. \quad (16.15)$$

Масса в среде уменьшается, поскольку частица поляризует вещество.

Если перенормировку массы определить при неизменном импульсе, то получается следующее выражение:

$$\Delta m_{\text{ср}} - \Delta m_{\text{вак}} = - \frac{e^2 \omega_0}{c^3}. \quad (16.16)$$

§ 17. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Прежде чем переходить к рассмотрению влияния многократного рассеяния на процессы тормозного излучения, приведем некоторые сведения из теории многократного рассеяния. Этот параграф носит справочный характер. При изложении мы следуем книге С. З. Беленького [42], хотя аналогичные вопросы можно найти и в других руководствах (см., например, [43]).

Рассмотрим следующую задачу. Пусть частица с энергией E проходит через тонкий слой вещества толщины dz . Выберем ось z вдоль направления движения частицы (см. рис. 25). Потерями энергии при прохождении частицы через пластинку пренебрегаем. Будем считать, что углы отклонения малы, т. е. $\theta \ll 1$.

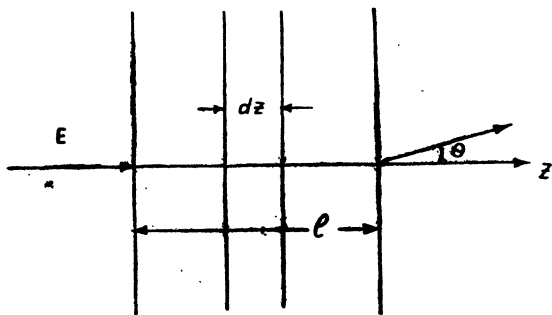


Рис. 25. К выводу кинетического уравнения. Угол θ есть угол отклонения электрона после прохождения толщины l .

Рассмотрим вначале одномерную задачу. Введем функцию распределения $f(E, \vec{\theta}, z)$ для числа частиц с энергией E и направлением движения $\vec{\theta}$ на глубине z . Здесь $\vec{\theta}$ — двухмер-

ный вектор, лежащий в плоскости $xу$, характеризующий угол рассеяния частицы (см. рис. 26).

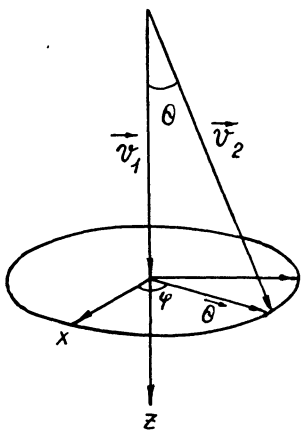


Рис. 26. Двухмерный вектор $\vec{\theta}$, определяющий угол рассеяния. $\vec{\theta}$ расположен в плоскости, перпендикулярной направлению первоначального движения \vec{v}_1 .

Абсолютное значение вектора $\vec{\theta}$ определяет угол рассеяния:

$$|\vec{\theta}| = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2} = \theta, \quad \theta_x = \theta \cos \varphi, \quad \theta_y = \theta \sin \varphi.$$

Кинетическое уравнение для функции распределения записывается в виде

$$\frac{\partial f(E, \vec{\theta}, z)}{\partial z} = -Nf(E, \vec{\theta}, z) \int d\sigma(|\vec{\chi}|) + N \int f(E, \vec{\theta} + \vec{\chi}, z) d\sigma(|\vec{\chi}|). \quad (17.1)$$

Здесь N — число рассеивающих атомов в 1 см^3 , $d\sigma$ — поперечное сечение упругого рассеяния на атомах (резерфордское рассеяние), которое для малых углов $\chi = |\vec{\chi}|$ имеет вид

$$d\sigma(\chi) = 4e^2 Z^2 \frac{E^2}{(pc)^4} \frac{(1-F)^2}{\chi^4} \chi d\chi d\Phi = \sigma(\chi) \chi d\chi d\Phi, \quad (17.2)$$

где Z — заряд ядра, p — абсолютное значение трехмерного

импульса, F — атомный формфактор, Φ — азимут вектора $\vec{\chi}$ на плоскости xy .

Уравнение (17.1) выражает собой тот факт, что изменение числа частиц с данным $\vec{\theta}$ в слое dz происходит из-за рассеяния в слое (первый член правой части) и из-за того, что частицы, имеющие на плоскости z направление движения $\vec{\theta} + \vec{\chi}$, проходя через слой dz , претерпевают рассеяние на угол χ и попадают в направление $\vec{\theta}$ (второй член правой части).

Здесь предполагается, что многократное рассеяние обусловлено только резерфордским кулоновским рассеянием, которое, вообще говоря, и определяет рассеяние заряженных частиц на малые углы (например, поправка из-за спинового взаимодействия вносит пренебрежимый вклад при рассеянии на малые углы). Вкладом ядерного рассеяния в многократное рассеяние [44] пренебрегается.

Задача теперь заключается в решении интегродифференциального уравнения (17.1). Точное решение этого уравнения приводится в работе Г. Мольер [45], прекрасное изложение которой имеется в работе Г. Бете [46].

Мы приводим более простое, но менее точное рассмотрение этого уравнения. Разложим в ряд функцию $f(E, \vec{\theta} + \vec{\chi}, z)$ под знаком интеграла и ограничимся квадратичными членами по $\chi_x = \chi \cos \Phi$, $\chi_y = \chi \sin \Phi$:

$$f(E, \vec{\theta} + \vec{\chi}, z) = f(E, \vec{\theta}, z) + \frac{\partial f}{\partial \theta_x} \chi_x + \frac{\partial f}{\partial \theta_y} \chi_y + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_x^2} \chi_x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_x \partial \theta_y} \chi_x \chi_y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_y^2} \chi_y^2 + \dots \quad (17.3)$$

Интегрируя это выражение по Φ , получим

$$\int_0^{2\pi} [f(E, \vec{\theta} + \vec{\chi}, z) - f(E, \vec{\theta}, z)] d\Phi = \frac{\pi}{2} \chi^2 \Delta_\theta f(E, \vec{\theta}, z) +$$

$$+ \frac{\pi}{32} \chi^4 \Delta_\theta \Delta_\theta f(E, \vec{\theta}, z) + \dots, \quad (17.4)$$

где

$$\Delta_\theta = \frac{\partial^2}{\partial \theta_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta_y^2}.$$

Если ограничиться первым членом в (17.4) и подставить его в выражение (17.1), то интегральное уравнение сводится к дифференциальному. Такое приближение соответствует тому, что мы пренебрегаем отклонениями на большие углы в элементарном акте рассеяния. Предельный угол получается из условия

$$\chi_{\max}^2 < \frac{16 \Delta_\theta f(E, \vec{\theta}, z)}{\Delta_\theta \Delta_\theta f(E, \vec{\theta}, z)}. \quad (17.5)$$

Подставляя теперь (17.2) и первый член выражения (17.4) в (17.1), получим

$$\frac{\partial f}{\partial z} = N \frac{\pi}{2} \Delta_\theta f \int_0^{\chi_{\max}} \sigma(\chi) \chi^3 d\chi = \frac{q}{v} \Delta_\theta f. \quad (17.6)$$

Через q мы обозначили величину*

$$q = \frac{Nv}{4} \int_0^{\chi_{\max}} \sigma(\chi) \chi^3 d\chi d\Phi, \quad (17.7)$$

которой будем широко пользоваться в последующих параграфах. Введем обозначение

$$\int_0^{\chi_{\max}} \frac{(1-F)^2}{\chi} d\chi = L_R. \quad (17.8)$$

* Подчеркнем, что q есть средний квадрат угла многократного рассеяния на 1 см, умноженный на $\frac{v}{4}$. Обратим внимание, что значение q зависит от верхнего предела интеграла (17.8) и в задачах, связанных с тормозным излучением, значение q должно быть примерно в два раза меньше (см. формулу (19.26)).

Величину L_R мы будем называть резерфордовским логарифмом. При больших энергиях необходимо учитывать размеры ядра. Предельный угол рассеяния χ'_{\max} будет определяться дифракционным углом $\chi'_{\max} = \frac{h}{pR_{\text{яд}}}$. Для этого случая (т. е. когда $\chi'_{\max} < \chi_{\max}$) из формулы (17.6) получим приближенную формулу:

$$L_R \approx \int_{\frac{h}{pR_{\text{ат}}}}^{\frac{h}{pR_{\text{яд}}}} \frac{d\chi}{\chi} = \ln \frac{R_{\text{ат}}}{R_{\text{яд}}} \approx 2 \ln(137 Z^{-1/3}) \approx 2L_{\text{рад}}, \quad (17.9)$$

где $L_{\text{рад}} = \ln(183 Z^{-1/3})$ — так называемый радиационный логарифм [42, 43, 47]. Подставляя в формулу (17.7) выражения (17.2) и (17.8), имеем:

$$q = 2\pi Ne^4 Z^2 \frac{E^2 v}{(pc)^4} L_R. \quad (17.10)$$

Перепишем уравнение (17.6) в форме, принятой в каскадной теории. Для этого будем измерять длину пути z в радиационных единицах L . В этом случае говорят, что длина пути выражена в t единицах:

$$t = \frac{z}{L}, \quad \frac{1}{L} = \frac{4Z^2 r_0^2 N}{137} \ln(183 Z^{-1/3}). \quad (17.11)$$

Значения радиационной длины L для некоторых веществ приведены в табл. III, взятой из работы [42]. Уравнение (17.6) в новых единицах примет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{E_k^2}{4(pv)^2} \Delta_0 f, \quad (17.12)$$

где

$$E_k^2 = 4\pi \cdot 137 (mc^2)^2 \frac{L_R}{2 \ln(183 Z^{-1/3})}. \quad (17.13)$$

Обычно вместо E_k употребляется $E_s \approx E_k$,

$$E_s = \sqrt{4\pi \cdot 137} mc^2 \approx 21 \text{ Мэв}. \quad (17.14)$$

Таблица III

Вещество	L в г/см^2	L в см или в м
Свинец	6,1	0,46 см
Медь	11,5	1,29 см
Азот	35,4	283 м
Воздух	34	300 м
Вода	33,9	33,9 см

Уравнение (17.12) является уравнением типа теплопроводности. Его решение, удовлетворяющее граничному условию

$$f(E, \vec{\theta}, t)|_{t=0} = \delta(\theta_x) \delta(\theta_y), \quad (17.15)$$

имеет вид

$$f(E, \vec{\theta}, t) = \frac{1}{\pi\bar{\theta}^2} e^{-\theta^2/\bar{\theta}^2}, \quad (17.16)$$

где $\bar{\theta}^2 = \int \theta^2 f(E, \vec{\theta}, t) d\Omega$ — средний квадрат угла отклонения на длине t . Функция (17.16) нормирована на единицу:

$$\int f(E, \vec{\theta}, t) d\Omega = 1, \quad d\Omega = d\theta_x d\theta_y = \theta d\theta d\varphi.$$

Значение среднего квадрата угла отклонения $\bar{\theta}^2$ получим, умножая уравнение (17.12) на θ^2 и интегрируя по телесному углу $d\Omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \theta^2 f(E, \vec{\theta}, t) d\Omega = \frac{E_k^2}{4E^2} \int \theta^2 \Delta_{\theta} f(E, \vec{\theta}, t) d\Omega. \quad (17.17)$$

Поскольку ниже будет рассматриваться рассеяние релятивистских частиц, величину pv можно заменить на E .

Интегрируя выражение (17.17) по частям и учитывая, что функция f и ее производные по θ_x и θ_y на пределах интегрирования обращаются в нуль, получим

$$\frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial t} = \frac{E_k^2}{E^2}.$$

С учетом начального условия $\overline{\theta^2}|_{t=0} = 0$ получим следующее значение для среднего квадрата угла отклонения:

$$\overline{\theta^2} = \frac{E_k^2}{E^2} t. \quad (17.18)$$

Рассмотрим теперь распределение рассеянных частиц в плоскости, перпендикулярной к направлению первоначального движения частицы. Отклонения от оси z будем характеризовать двухмерным вектором $\vec{\rho}$, лежащим в плоскости xy .

Функция распределения зависит от переменных $E, t, \vec{\theta}, \vec{\rho}$. В данном случае кинетическое уравнение получается аналогично уравнению (17.1) с той лишь разницей, что в левой части мы должны учитывать изменение функции вдоль направления, составляющее угол θ с осью z . Для малых углов отклонения оно имеет вид

$$\frac{\partial f(E, t, \vec{\theta}, \vec{\rho})}{\partial t} + \vec{\theta} \frac{\partial f}{\partial \vec{\rho}} = \frac{E_k^2}{4E^2} \Delta_{\theta} f. \quad (17.19)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию

$$f(E, t, \vec{\theta}, \vec{\rho})|_{t=0} = \delta(x) \delta(y) \delta(\theta_x) \delta(\theta_y) \quad (17.20)$$

и условию нормировки

$$\int f(E, t, \vec{\theta}, \vec{\rho}) d\theta_x d\theta_y dx dy = 1, \quad (17.21)$$

было получено Ферми (см. [47], вывод приведен в [42]). Оно имеет вид:

$$f(E, t, \vec{\theta}, \vec{\rho}) = \frac{12}{\pi^2 t^2 (\overline{\theta^2})^2} \exp \left[-\frac{4}{\overline{\theta^2}} \left(\theta^2 + \frac{3\rho^2}{t^2} - 3 \frac{\vec{\theta} \vec{\rho}}{t} \right) \right]. \quad (17.22)$$

Среднее значение квадрата угла отклонения $\overline{\theta^2}$, а также средние $\overline{\rho^2}, \overline{\vec{\theta} \vec{\rho}}$ получим, умножая уравнение (17.19) соответ-

ственно на θ^2 , ρ^2 , $\vec{\theta}_\rho$ и интегрируя по $d\theta_x d\theta_y dx dy$. Их значения как функции от t следующие:

$$\overline{\theta^2} = \frac{E_k^2}{E^2} t, \quad (17.23)$$

$$\overline{\vec{\theta}_\rho} = \frac{E_k^2}{E^2} \frac{t^2}{2}, \quad (17.24)$$

$$\overline{\rho^2} = \frac{E_k^2}{E^2} \frac{t^3}{3}. \quad (17.25)$$

Пример. Пользуясь тем, что отклонения в различные промежутки времени статистически независимы, вычислить следующие средние значения ($\hbar = c = 1$):

$$\overline{\int_0^t \theta_\tau^2 d\tau} = \frac{E_k^2 t |t|}{2E^2},$$

$$\overline{\vec{\theta}_t \int_0^t \vec{\theta}_\tau d\tau} = \overline{\int_0^t (\vec{\theta}_\tau + \vec{\varphi}) \vec{\theta}_\tau d\tau} = \overline{\int_0^t \theta_\tau^2 d\tau} = \frac{E_k^2 t |t|}{2E^2},$$

$$\begin{aligned} \overline{\left(\int_0^t \vec{\theta}_\tau d\tau \right)^2} &= 2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau \vec{\theta}_\tau \vec{\theta}_\nu d\nu = 2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau (\vec{\theta}_\nu + \vec{\varphi}) \vec{\theta}_\nu d\nu = \\ &= 2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau \theta_\nu^2 d\nu = \frac{E_k^2 |t|^3}{3E^2}. \end{aligned}$$

§ 18. ВЛИЯНИЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИИ СРЕДЫ НА ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В АМОРФНОМ ВЕЩЕСТВЕ (КАЧЕСТВЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ)

Перейдем к рассмотрению влияния многократного кулоновского рассеяния на тормозное излучение [1, 2, 5]. Приве-

дем критерий появления эффекта. При тормозном излучении на одном атоме характерные углы излучения порядка $\theta_1 \sim \frac{mc^2}{\varepsilon_1}$. Как мы видели, излучение происходит на когерентной длине, которая порядка $\frac{1}{\delta}$. Если на этих расстояниях многократное рассеяние отклоняет электрон на углы порядка или больше θ_1 , то его влияние необходимо учитывать при расчете излучения. Средний квадрат угла многократного рассеяния дается формулой (17.23). Следовательно, если выполняется условие

$$\left(\frac{mc^2}{\varepsilon_1}\right)^2 \ll \frac{E_k^2}{\varepsilon_1^2} \frac{1}{\delta L}, \quad (18.1)$$

эффект многократного рассеяния существен. Неравенство (18.1) можно переписать в более простом виде:

$$\frac{mc^2 \hbar \omega}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} \ll \frac{E_k^2}{(mc^2)^2} \frac{\lambda}{L}. \quad (18.1')$$

Например, при $\varepsilon_2 \sim \hbar \omega$ эффект в свинце наступает при энергиях $\varepsilon_1 \approx 5 \cdot 10^{12}$ эв. При $\hbar \omega \ll \varepsilon_1$ эффект наступает при меньших энергиях, однако для мягких квантов необходимо в оценках учитывать и эффекты, связанные с поляризацией среды. В этом параграфе приводится наглядная качественная оценка этого явления. Для полного рассмотрения влияния среды на тормозное излучение мы одновременно учтем и эффект поляризации среды, влияние которой в отдельности было рассмотрено в § 14 и 15. Как было показано в § 14, полуквантовый расчет влияния поляризации среды сводился к следующему: определялось значение минимального продольно передаваемого импульса

$$\hbar \delta = p_1 - p_2 - \hbar k$$

с учетом поляризации среды, которое затем использовалось при вычислении поперечника тормозного излучения по формуле (2.19). Обратное значение δ определяет когерентную длину.

Влияние среды сводится к уменьшению когерентной длины. Аналогичные рассуждения применялись при рассмотрении когерентного излучения в кристалле [48]. Используя тот же метод оценки, вычислим изменение δ , связанное с многократным рассеянием. Последнее находим следующим образом. При прохождении расстояния l , на котором формируется излучение, заряженная частица вследствие многократного рассеяния отклоняется на угол θ_s , где $\overline{\theta_s^2} = \frac{E_s^2}{\varepsilon_1} \frac{l}{L}$ — среднеквадратичный угол многократного рассеяния, L — радиационная длина среды. Следовательно, в приведенном выражении для δ мы должны заменить p_1 и p_2 на

$$p_1 \cos \theta_s \approx p_1 - p_1 \frac{\overline{\theta_s^2}}{2}, \quad p_2 \cos \theta_s \approx p_2 - p_2 \frac{\overline{\theta_s^2}}{2}.$$

Таким образом, приближенный учет эффектов многократного рассеяния и поляризации среды для минимального продольно передаваемого импульса приводит к следующему выражению для δ_2 :

$$\delta_2 = \delta - \frac{p_1}{\hbar} \frac{\overline{\theta_s^2}}{2} + \frac{p_2}{\hbar} \frac{\overline{\theta_s^2}}{2} + \frac{\omega}{c} (1 - \sqrt{\varepsilon^-}), \quad (18.2)$$

где

$$\delta = \frac{1}{\hbar} p_1 - \frac{1}{\hbar} p_2 - \frac{\omega}{c} \approx \frac{\hbar \omega m c^2}{2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \hbar}$$

— использованное ранее значение δ . Дополнительные члены в формуле (18.2) характеризуют изменение δ за счет поляризации среды и многократного рассеяния. Подставляя значения $\overline{\theta_s^2}$ и $\sqrt{\varepsilon^-}$, получим:

$$\delta_2 = \delta + \frac{\delta}{m^2 c^4} \frac{E_s^2 l}{L} + \frac{\omega_0^2}{2 \omega c}. \quad (18.3)$$

Поскольку $l \sim \frac{1}{\delta_2}$, уравнение (18.3) перепишем в виде:

$$\delta_2 = \delta + \frac{E_s \delta_0}{m^2 c^4 L \delta_2} + \frac{\omega_0^2}{2 \omega c},$$

откуда получим следующее выражение для δ_2 :

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \left(\delta + \frac{\omega_0^2}{2 \omega c} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\delta + \frac{\omega_0^2}{2 \omega c} \right)^2 + \frac{E_s^2 \delta}{m^2 c^4 L}}. \quad (18.4)$$

Для оценки влияния многократного рассеяния и поляризации среды на тормозное излучение необходимо проинтегрировать формулу (2.19), заменив значение δ на δ_2 . Поступая так же, как при получении (14.6) из (2.19), получим:

$$d\tau = 2\bar{\sigma} \frac{m^2 c^3 d\omega}{\varepsilon_1^2} \left(\frac{\hbar^2 \omega}{m^2 c^3} + \frac{2}{3\delta_2} \right) \int \frac{k_{\perp}^2 dk_{\perp}^2}{(k_{\perp}^2 + R^{-2})^2}. \quad (18.5)$$

Для квантов, энергия которых значительно меньше энергии излучающей частицы, формулу (18.5) можно переписать в следующем виде:

$$d\tau = \frac{8}{3} \bar{\sigma} \frac{m^2 c^3 d\omega}{\varepsilon_1^2 \delta_2} \left(\ln \frac{aR}{\lambda} - \frac{1}{2} \right), \quad (18.6)$$

где a — величина порядка единицы. В дальнейшем мы будем обозначать величину $\ln \frac{aR}{\lambda} - \frac{1}{2}$ через L_{grad} . Величина δ , входящая в формулы (18.4) и (18.6), для квантов, удовлетворяющих условию

$$\hbar\omega \ll \varepsilon_1, \quad (18.7)$$

равна

$$\delta (\hbar\omega \ll \varepsilon_1) = \frac{\omega}{2c} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon_1} \right)^2. \quad (18.8)$$

Перейдем к анализу формул (18.4) и (18.6). Рассмотрим прежде всего переход к обычным формулам тормозного излучения. Для этого в формуле (18.4) необходимо пренебречь членами, пропорциональными ω_0^2 (это означает пренебрежение поляризацией среды), и членами, пропорцио-

нальными E_s^2 (последнее означает пренебрежение многократным рассеянием). В этом предельном случае

$$\delta_2 = \delta.$$

Формула (18.6) примет тогда вид

$$d\sigma_{\text{БГ}} = \frac{16}{3} \frac{\sigma}{\omega} \frac{d\omega}{\omega} L_{\text{рад}}. \quad (18.9)$$

Формула (18.9) есть обычная формула Бете — Гайтлера. Спектр фотонов, согласно формуле (18.9), имеет вид $d\omega/\omega$. Поперечник Бете — Гайтлера не зависит от энергии излучающей частицы. Потери энергии на единицу пути равны

$$-\frac{d\varepsilon_1}{dx} = \int_{\omega_{\text{кр}}}^{\sim \omega_{\text{max}}} N \hbar \omega d\sigma_{\text{БГ}} = \frac{4}{3} \frac{1}{L} \hbar \omega_{\text{max}} \sim \frac{\varepsilon_1}{L}. \quad (18.10)$$

Из (18.10) следует, что потери энергии на единицу пути пропорциональны энергии начальной частицы и плотности атомов. Другой предельный случай формулы (18.6) соответствует переходу к формулам, рассмотренным в предыдущих параграфах. Это происходит, когда выполняется следующее условие [3]:

$$\frac{4E_s^2 \delta}{m^2 c^4 L} \ll \left(\delta + \frac{\omega_0^2}{2\omega c} \right)^2. \quad (18.11)$$

При этом формула (18.6) примет следующий вид [3, 4]:

$$d\sigma' = \frac{16}{3} \frac{\sigma}{\omega} \frac{d\omega}{\omega} \frac{L_{\text{рад}}}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(\frac{\varepsilon_1}{mc^2} \right)^2}. \quad (18.12)$$

Для частот

$$\omega \gg \omega_{\text{кр}} = \omega_0 \frac{\varepsilon_1}{mc^2} \quad (18.13)$$

формула (18.12) переходит в формулу Бете — Гайтлера (18.9). При $\omega \ll \omega_{\text{кр}}$ формула (18.12) переходит в формулу

$$d\sigma' = \frac{16}{3} \frac{\omega d\omega}{\omega_0^2} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon_1} \right)^2 L_{\text{rad}}. \quad (18.14)$$

Отличительные черты формулы (18.14): частотное распределение излученных фотонов дается видом $\omega d\omega$, поперечник излучения уменьшается с увеличением энергии по закону $1/\varepsilon_1^2$. Число излученных квантов в интервале частот $d\omega$ на единицу пути не зависит от плотности.

Вычислим потери энергии на единицу пути при излучении квантов, энергия которых меньше $\hbar\omega_{\text{кр}}$:

$$-\frac{d\varepsilon_1}{dx} = N \int_0^{\omega_{\text{кр}}} \hbar\omega d\sigma' = \frac{4}{3} \frac{1}{L} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon_1} \right)^2 \frac{\hbar\omega_{\text{кр}}^3}{3\omega_0^2} \approx \frac{4}{9} \frac{\hbar\omega_0}{L} \frac{\varepsilon_1}{mc^2}. \quad (18.15)$$

Сравним потери энергии по формуле (18.15) с потерями энергии по формуле (18.10). Поскольку в обычных веществах $\hbar\omega_0 \ll mc^2$, частью потерь энергии в интервале частот от 0 до $\omega_{\text{кр}}$, которая рассчитывается по формуле (18.14), можно пренебречь.

Пусть выполняется условие, обратное условию (18.11). Тогда

$$\delta_2 = \frac{E_s}{mc^2} \sqrt{\frac{\delta}{L}} \quad (18.16)$$

и формула (18.6) принимает вид [2]:

$$d\sigma_{\text{лп}} = \frac{8}{3} \frac{\omega}{\omega_0} \frac{(mc^2)^2}{\varepsilon_1 E_s} L_{\text{rad}} \sqrt{\frac{2L}{c}} \quad (18.17)$$

или, используя значение для лавинной длины L (см. (17.11)) и E_s (см. (17.14)), имеем

$$d\sigma_{\text{лп}} = \frac{4}{3} \frac{Zr_0}{137} \frac{mc^2}{\varepsilon_1} \left(\frac{L_{\text{rad}}}{2\pi c N} \right)^{1/2} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (18.18)$$

Формула (18.17) отличается от точной формулы А. Б. Мигдала, исследуемой в следующих параграфах, коэффициентом порядка единицы (лишний множитель в формуле (18.17) ра-

вен $1/3$, см. формулу (19.25)). Отметим следующие характерные особенности этой формулы: спектр излученных квантов имеет вид $d\omega/\sqrt{\omega}$, поперечник излучения обратно пропорционален корню из плотности. Используя формулу (18.18), оценим потери энергии быстрой частицы на единицу пути:

$$-\frac{d\varepsilon_1}{dx} = \int_0^{\varepsilon_1} N \hbar \omega d\sigma_{\text{лп}} = \frac{4}{9} \frac{(mc^2)^2}{\varepsilon_1 E_s} \frac{\hbar \omega_{\text{max}}^{3/2}}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{2}{c}}. \quad (18.19)$$

Поскольку $\hbar \omega_{\text{max}}$ пропорционально ε_1 , потери энергии растут пропорционально корню из энергии частицы. По обычной формуле Бете—Гайтлера (18.10) потери энергии пропорциональны энергии. Это означает, что в той области энергий, где справедлива формула (18.18), электроны и позитроны (а также фотоны) теряют значительно меньше энергии, чем это следует из теории Бете—Гайтлера. Следовательно, легкие частицы становятся проникающими. Как мы увидим ниже, это наступает при энергиях 10^{12} — 10^{13} эв для твердых веществ конца периодической системы.

Рассмотрим несколько детально условие, обратное условию (18.11):

$$4 \left(\frac{E_s}{mc^2} \right)^2 \frac{\delta}{L} \gg \left(\delta + \frac{\omega_0^2}{2\omega c} \right)^2. \quad (18.20)$$

Условие (18.20) приводит к двум условиям (их легко получить, считая вначале, что $\delta \ll \frac{\omega_0^2}{2\omega c}$, а затем используя обратное неравенство), определяющим некоторый интервал частот, внутри которого существенно влияние многократного рассеяния:

$$\left[\frac{\varepsilon_1^2}{E_s^2} \frac{L}{8\hbar c} (\hbar \omega_0)^4 \right]^{1/3} \equiv \hbar \omega_1 \ll \hbar \omega \ll \hbar \omega_2 \equiv \left(\frac{E_s}{mc^2} \right)^2 \frac{8\lambda \varepsilon_1^2}{Lmc^2}. \quad (18.21)$$

Для существования интервала (18.21) необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\omega_2 > \omega_1$. Это означает, что энергия частицы должна превышать величину E_0 , равную

$$E_0 = \frac{mc^2 L\omega_0}{E_s 8c} mc^2. \quad (18.22)$$

Величины E_0 , $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$, введенные в работах [3, 4], отличаются коэффициентами от величин, даваемых формулами (18.21) и (18.22). Это не должно вызывать удивления, поскольку в обоих случаях формулы имеют оценочный характер. Для плотных сред, состоящих из элементов конца периодической системы, $E_0 \approx 10^9$ эв. При энергиях, меньших E_0 , влиянием многократного рассеяния всегда можно пренебречь, и поперечник излучения дается формулой (18.12).

Вне интервала (18.21) имеют место другие формулы. Когда выполняется неравенство

$$\omega_{ат} \ll \omega \ll \left(\frac{L^{1/2} \omega_0^2}{2\sqrt{2c}} \frac{\varepsilon_1}{E_s} \right)^{2/3}, \quad (18.23)$$

имеет место формула (18.14). Для частот, лежащих в интервале

$$\frac{8c}{L} \frac{E_s^2 \varepsilon_1^2}{(mc^2)^4} \ll \omega \ll \frac{\varepsilon_1}{\hbar}, \quad (18.24)$$

остаётся справедливой формула Бете — Гайтлера.

До сих пор исследовалось влияние различных эффектов на излучение мягких квантов (условие (18.7)). Аналогичные рассуждения можно провести и для жестких квантов. При этом нужно исходить из формулы (18.4). Учет рассеяния будет существенным, если выполняется неравенство

$$4 \left(\frac{E_s}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{L} \gg \delta \left(1 + \frac{\omega_0^2 \varepsilon_1^2}{\omega^2 m^2 c^4} \right)^2. \quad (18.25)$$

Во втором члене в правой части мы заменили ε_2 на ε_1 , поскольку этот член нужно учитывать только для мягких квантов. Из условия (18.25) вытекает, что для очень жестких квантов $\hbar\omega \rightarrow \varepsilon_1$ ($\delta \rightarrow \infty$) условие (18.25) не выполняется. Поэтому в этой очень узкой области спектра всегда остаётся справедливой формула Бете — Гайтлера.

Когда выполняется условие, противоположное условию (18.25), влиянием рассеяния можно пренебречь. Это имеет

место при энергиях, меньших E_0 . В этом случае формула (18.5) приводит к формуле, имеющей логарифмическую точность. Однако, если мы вместо интеграла по k_{\perp} в формуле (18.5) напишем $L_{\text{рад}}$ и будем понимать нужный радиационный логарифм, то и формула будет точной (см. формулу (15.25)):

$$d\sigma = 4\bar{\sigma} L_{\text{рад}} \frac{d\omega}{\omega} \left[\left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1} \right) \right] \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(\frac{\varepsilon_1}{mc^2} \right)^2}. \quad (18.26)$$

При энергиях $\varepsilon_1 \ll E_0$ имеет место, следовательно, лишь формула (18.26), справедливая во всей области излученных квантов [4]. При излучении частот, превышающих критическую частоту $\omega_{\text{кр}}$ (см. формулу (18.13)), эффектом поляризации среды можно пренебречь, и мы приходим к формуле Бете — Гайтлера. При выполнении неравенства, противоположного (18.13), формула (18.26) переходит в формулу (18.14). На рис. 27 приведен качественный ход поперечника тормозного излучения для начальных энергий, меньших E_0 .

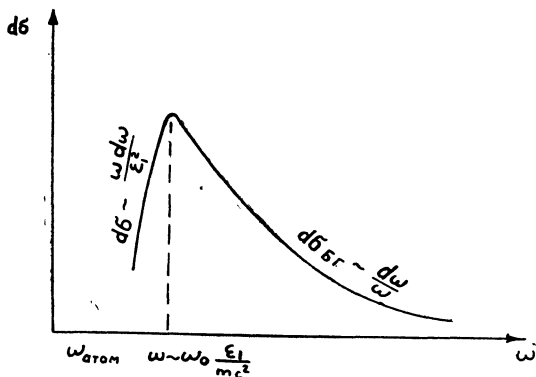


Рис. 27. Спектр тормозного излучения в среде при энергиях, меньших E_0 .

На рис. 28 изображена интенсивность излучения (в единицах соответствующей интенсивности излучения Бете — Гайтлера) для произвольной начальной энергии в зависимости от энергии кванта. Из неравенства (18.11) следует, что

характерным параметром, определяющим границы применимости различных формул тормозного излучения, является отношение правой части неравенства к левой части того же неравенства. Обозначим это отношение через s' :

$$s' = \frac{mc^2}{E_s} \left[\frac{L\hbar\omega mc^2}{8\varepsilon_1\varepsilon_2\lambda} \right]^{1/2} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\varepsilon_1^2}{m^2c^4} \right). \quad (18.27)$$

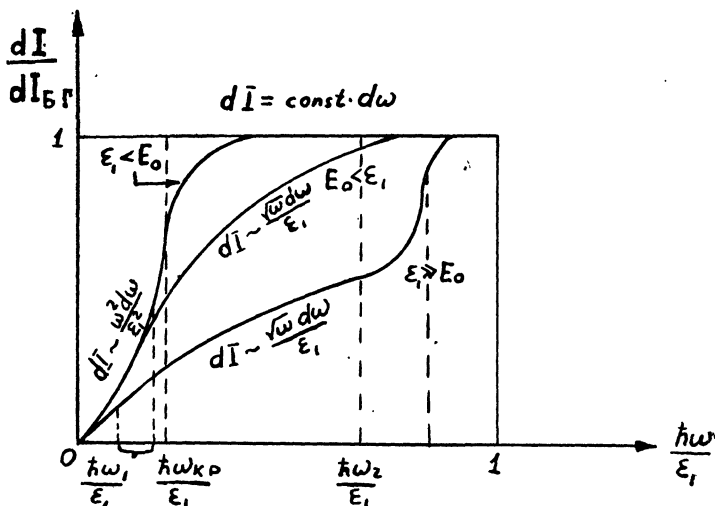


Рис. 28. Самая верхняя кривая (параллельная оси абсцисс) есть кривая Бете — Гайтлера. Следующая кривая сверху соответствует рис. 27 и формуле (18.12). Средняя кривая соответствует появлению области частот (см. неравенство (18.21)), излучение которых даётся формулой (18.17). Для частот, меньших $\hbar\omega_{кр}$, справедлива формула (18.12), а для частот, больших $\hbar\omega_2$, справедлива формула Бете — Гайтлера. Самая нижняя кривая соответствует столь большим энергиям, для которых область применимости формулы Ландау — Померанчука (18.17) занимает почти всю область излучаемых жестких квантов. Только очень узкая область излучения квантов с $\hbar\omega \rightarrow \varepsilon_1$ описывается формулой (18.9). Кривая взята из обзора Е. А. Фейнберга [11].

При $s' \gg 1$ влиянием рассеяния можно пренебречь, и мы приходим к формуле (18.26). В случае $s' \ll 1$ рассеяние существенно и справедлива формула (18.18). Физический смысл величины s' заключается в следующем: s' есть отношение минимального продольно передаваемого импульса без учета

многократного рассеяния к добавке к продольно передаваемому импульсу, связанному только с многократным рассеянием. Ясно, что если эта добавка мала, т. е. s' велико (и, следовательно, когерентная длина из-за влияния многократного рассеяния изменяется мало), то влиянием многократного рассеяния можно пренебречь. Как мы увидим в следующих параграфах, при точном рассмотрении вопроса возникает характерный параметр (введенный Мигдалом), величина которого определяет границы применимости различных предельных формул. Параметр s' , полученный из наглядных рассуждений, оказывается всего в два раза больше параметра Мигдала.

§ 19. ВЛИЯНИЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ НА ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И РОЖДЕНИЕ ПАР ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

(точная классическая теория)

Формулы, приведенные в предыдущем параграфе, основаны на работах [1, 2, 3, 4]. Мы не будем здесь излагать самих этих работ, поскольку в той области, где существен учет многократного рассеяния, они носят оценочный характер. А. Б. Мигдалу, используя оригинальную методику расчета, удалось точно решить задачу о влиянии многократного рассеяния на тормозное излучение. Формула, полученная А. Б. Мигдалом, не только уточняет коэффициент в выражении (18.17), но и правильно описывает промежуточную область перехода от формулы (18.12) к формуле (18.17).

В этом параграфе, следуя работе А. Б. Мигдала [5], приводится классическое решение задачи о тормозном излучении с учетом многократного рассеяния электронов в среде. Влиянием поляризации среды для упрощения формул будем пренебрегать (обобщение на случай учета поляризации среды приведено в работах [6, 50], см. § 28 и приложение VII). Как и в предыдущих параграфах, будем рассматривать излучение квантов с энергией, много меньшей, чем энергия электронов. Это позволяет пользоваться классической теорией излучения.

Для вычисления полной энергии, излучаемой в телесном угле $d\Omega$ и в интервале частот $d\omega$ за все время пролета от $-T$ до $+T$, воспользуемся выражением (15.1):

$$dI_{n, \omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} d\omega d\Omega \int_{-T}^{+T} dt dt' [\vec{n}\vec{v}(t)] \cdot [\vec{n}\vec{v}(t')] \times \\ \times \exp \{i\omega(t-t') - i\vec{k}[\vec{r}(t) - \vec{r}(t')]\}. \quad (19.1)$$

Здесь частота ω и волновой вектор \vec{k} излученного кванта связаны соотношением $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$, $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$ — координата и скорость электрона в момент времени t .

Совершив замену переменных $t = t$, $t' = t + \tau$ и введя обозначения $\vec{r}(t) = \vec{r}$, $\vec{r}(t') = \vec{r}'$, $\vec{v}(t) = \vec{v}$, $\vec{v}(t') = \vec{v}'$, перепишем (19.1) в более удобном для дальнейших вычислений виде:

$$dI_{n, \omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} d\omega d\Omega \int_{-T}^{+T} dt \int_0^{\infty} d\tau \left\{ [\vec{n}\vec{v}] \cdot [\vec{n}\vec{v}'] e^{-i\omega\tau + i\vec{k}(\vec{r}' - \vec{r})} + \text{к. с.} \right\}, \quad (19.2)$$

где к. с. — комплексно сопряженное выражение. Излученная энергия, рассчитанная по формуле (19.2), будет бесконечной, поскольку при $T \rightarrow \infty$ длина траектории бесконечна. Поэтому вычислим энергию, излученную электроном (в интервале частот $d\omega$ и в интервале углов $d\Omega$) за единицу времени в момент t :

$$d\dot{I}_{n, \omega} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi^2 c^3} d\omega d\Omega \operatorname{Re} \int_0^{\infty} [\vec{n}\vec{v}] \cdot [\vec{n}\vec{v}'] e^{-i\omega\tau + i\vec{k}(\vec{r}' - \vec{r})} d\tau. \quad (19.3)$$

Задача состоит в усреднении (19.3) по всем возможным траекториям электрона. Поскольку акты рассеяния в разные моменты времени статистически независимы, усреднение сводится к умножению (19.3) на функции распределения

координат и скоростей в моменты t и t' , т. е. на $W_1(\vec{r}, \vec{v}; t)$ и $W_2(\vec{r}', \vec{v}'; r, v; \tau)$, и интегрированию по координатам \vec{r} и \vec{r}' и по скоростям \vec{v} и \vec{v}' . Таким образом, для среднего значения излученной энергии в единицу времени имеем:

$$d\dot{I}_{n, \omega} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi^2 c^3} d\omega d\Omega \operatorname{Re} \int [\vec{n}\vec{v}] W_1(\vec{r}, \vec{v}; t) d\vec{v} d\vec{r} \times \\ \times \int_0^\infty d\tau \int [\vec{n}\vec{v}'] W_2(\vec{v}', \vec{r}'; \vec{v}, \vec{r}; \tau) e^{-i\omega\tau + ik(\vec{r}' - \vec{r})} d\vec{v}' d\vec{r}', \quad (19.4)$$

где $W_1(\vec{r}, \vec{v}; t)$ определяет вероятность значений \vec{r} и \vec{v} в момент t , $W_2(\vec{r}', \vec{v}'; r, v; \tau)$ определяет вероятность значений \vec{r}' и \vec{v}' в более поздний момент времени $t + \tau$ при условии, что величины \vec{r}' и \vec{v}' при $\tau = 0$ равны соответственно \vec{r} и \vec{v} . Функции W_1 и W_2 удовлетворяют {обычному нестационарному кинетическому уравнению (см. (19.12)) со следующими начальными условиями:

$$W_1(\vec{r}, \vec{v}; 0) = \delta(\vec{r}) \delta(\vec{v} - \vec{v}_0) \quad (19.5)$$

$$W_2(\vec{r}', \vec{v}'; r, v; 0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\vec{v} - \vec{v}').$$

Далее, воспользуемся тем обстоятельством, что при высоких энергиях углы векторов $\vec{v}, \vec{v}', \vec{n}$ с первоначальным направлением скорости электрона \vec{v}_0 весьма малы. Удобно отсчитывать углы от направления движения фотона \vec{n} . В приближении малых углов положим

$$\vec{v}_0 = v \left(1 - \frac{\theta_0^2}{2} \right) \vec{n} + v \vec{\theta}_0, \\ \vec{v} = v \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \vec{n} + v \vec{\theta}, \quad (19.6) \\ \vec{v}' = v \left(1 - \frac{\theta'^2}{2} \right) \vec{n} + v \vec{\theta}'.$$

Здесь мы ввели двухмерные векторы $\vec{\theta}_0, \vec{\theta}, \vec{\theta}'$, перпендикулярные направлению вылета фотона \vec{n} ($\vec{n}\vec{\theta}_0 = \vec{n}\vec{\theta} = \vec{n}\vec{\theta}' = 0$).

Введенные по формулам (19.6) угловые векторы $\vec{u}, \vec{\theta}_0, \vec{\theta}'$ с точностью до членов второго порядка малости обеспечивают выполнение равенства $|\vec{v}| = |\vec{v}'| = |\vec{v}_0| = v$. Используя выражение (19.6), можно написать

$$[\vec{n}\vec{v}] \cdot [\vec{n}\vec{v}'] = v^2 \vec{\theta} \vec{\theta}'. \quad (19.7)$$

Перейдем теперь в [интеграле (19.4) от переменных \vec{v}, \vec{v}' к переменным $\vec{\theta}, \vec{\theta}'$. Введем обозначение для фурье-образа вероятности $W_2(\vec{v}', \vec{v}, \vec{r} - \vec{r}'; \tau)$:

$$W_{k\rightarrow}(\vec{\theta}', \vec{\theta}; \tau) = v^3 \int W_2 e^{ik(\vec{r}' - \vec{r}) - i\omega\tau} d(\vec{r}' - \vec{r}). \quad (19.8)$$

Тогда выражение (19.4) можно представить в виде

$$dI_{n,\omega} = \frac{e^2 \omega^2 d\omega}{2\pi^2 c} d\Omega \operatorname{Re} \int d\vec{r} d\vec{v} W_1(\vec{r}, \vec{v}; t) \int_0^\infty d\tau \times \\ \times \int d\vec{\theta}' W_{k\rightarrow}(\vec{\theta}', \vec{\theta}; \tau) (\vec{\theta} \vec{\theta}'). \quad (19.9)$$

Таким образом, задача сведена к нахождению функции $W_{k\rightarrow}(\vec{\theta}', \vec{\theta}; \tau)$ и к вычислению интегралов (19.9).

Уравнение для $W_{k\rightarrow}$ получим, исходя из определения (19.8) и из кинетического уравнения для функции $W_2(r', v'; \tau)$:

$$\frac{\partial W_2}{\partial \tau} + \vec{v}' \frac{\partial W_2}{\partial \vec{r}'} = \frac{N}{v^2} \int \sigma(\vec{v}'', \vec{v}') [W_2(\vec{r}', \vec{v}''; \tau) - \\ - W_2(\vec{r}', \vec{v}'; \tau)] d\vec{v}''. \quad (19.10)$$

Здесь N — число атомов в единице объема, σ — сечение упругого рассеяния (кулоновского с экранированием) на угол $(\vec{v}' - \vec{v}'')/|\vec{v}'|$. Уравнение (19.10) несколько отличается от уравнения (17.1) для функции распределения, исследованного в § 17. Отличие заключается в том, что в левой части (19.10) стоит полное изменение числа частиц в единицу времени (нестационарный случай). В предельном случае малых углов уравнение (19.10) в стационарном случае сводится к (17.1). В отличие от § 17 нам придется удерживать члены, квадратичные по $\vec{\theta}, \vec{\theta}'$.

Обычный способ исследования такого уравнения состоит в переходе к приближению Фоккера — Планка, при котором $W_2(\vec{r}', \vec{v}''; \tau) - W_2(\vec{r}', \vec{v}'; \tau)$ разлагается в ряд по $\vec{v}'' - \vec{v}'$ и удерживаются члены разложения лишь вплоть до квадратичных. Такой способ рассмотрения был применен А. Б. Мигдалом. Однако, если специально не исследовать выражение для L_R в (19.26) (и не обрезать его при углах рассеяния θ' , определяемых интегральным уравнением (19.10)), то в предельном случае среды малой плотности можно вместо формулы Бете — Гайтлера прийти к неправильному результату (отличающемуся от правильного приблизительно в два раза) [5, 6].

Тем не менее рассмотрим решение этой задачи в приближении Фоккера — Планка, следуя способу, предложенному в работе [49] (оригинальная работа А. Б. Мигдала изложена в приложении VI).

Умножая (19.10) на $\exp[i\vec{k}(\vec{r}' - \vec{r}) - i\omega\tau]$ и интегрируя по $\vec{r}' - \vec{r}$, получим уравнение для $W_k^-(\theta, \theta_0; \tau)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W_k^-}{\partial \tau} + \frac{i\omega}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2 \right) W_k^- = \\ & = Nv \int_{\sigma} (\vec{\theta}' - \vec{\theta}) [W_k^-(\vec{\theta}') - W_k^-(\vec{\theta})] d\vec{\theta}'. \end{aligned} \quad (19.11)$$

Начальное условие для $W_{\vec{k}}(\vec{\theta}, \vec{\theta}_0; \tau)$ получаем из (19.5):

$$W_{\vec{k}}(\vec{\theta}, \vec{\theta}_0; 0) = \delta(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0). \quad (19.12)$$

В приближении Фоккера—Планка уравнение (19.11) запишется в виде

$$\frac{\partial W_{\vec{k}}}{\partial \tau} + \frac{i\omega}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2 \right) W_{\vec{k}} = q \Delta_0 W_{\vec{k}}, \quad (19.13)$$

где Δ_0 — двухмерный лапласиан по переменной $\vec{\theta}$,

$$q = \frac{Nv}{4} \int_{\sigma} (\vec{\theta}) \theta^2 d\vec{\theta}. \quad (19.14)$$

Решение (19.13) ищем в виде

$$W_{\vec{k}}(\theta, \theta_0; \tau) = \exp[\alpha(\tau)\theta^2 + \beta(\tau)\vec{\theta}\vec{\theta}_0 + \gamma(\tau)]. \quad (19.15)$$

Система получающихся для α, β, γ уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} + \frac{i\omega}{2} &= 4q\alpha^2 \\ \dot{\beta} &= 4q\alpha\beta \end{aligned} \quad (19.16)$$

$$\dot{\gamma} = q(\theta_0^2\beta^2 + 4\alpha) - \frac{i\omega}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

имеет следующее решение, удовлетворяющее начальному условию (19.12):

$$\begin{aligned} \alpha &= -\sqrt{\frac{i\omega}{8q}} \operatorname{cth} [V\sqrt{2i\omega q} \tau], \\ \beta &= \sqrt{\frac{i\omega}{2q}} \operatorname{sh}^{-1} [V\sqrt{2i\omega q} \tau], \\ \gamma &= -i\omega \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\tau}{2} - \ln [\operatorname{sh} V\sqrt{2i\omega q} \tau] - \\ &\quad - \theta_0^2 \sqrt{\frac{i\omega}{8q}} \operatorname{cth} [V\sqrt{2i\omega q} \tau] + \ln \sqrt{\frac{i\omega}{8\pi^2 q}}. \end{aligned} \quad (19.17)$$

После подстановки этого решения кинетического уравнения в формулу (19.9) для излучаемой энергии, находим

$$dI_{n, \omega}^{\vec{r}} = \frac{e^2 \omega^2 d\omega}{2\pi^2 c} d\Omega \int dr d\vec{v} W_1(\vec{r}, \vec{v}; t) \operatorname{Re} \int d\tau f(\tau, \vec{\theta}), \quad (19.18)$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned} & \int d\vec{\theta}' (\vec{\theta} \vec{\theta}') W_k(\vec{\theta}', \vec{\theta}; \tau) \equiv f(\tau, 0) = \\ & = \frac{2i}{\omega} e^{-i \frac{\omega \tau}{2} (1 - \frac{v^2}{c^2})} \frac{d}{d\tau} \exp\left(-\theta^2 \sqrt{\frac{i\omega}{8q}} \operatorname{th} \sqrt{2i\omega q} \tau\right). \end{aligned}$$

Проведя интегрирование по углам вылета фотона $d\Omega = d\vec{\theta}$ (см. формулу (19.6)) и используя далее условие нормировки для функции W_1

$$\int W_1(\vec{r}, \vec{v}; t) d\vec{r} d\vec{v} = 1, \quad (19.19)$$

для излученной в единицу времени энергии получим следующую формулу А. Б. Мигдала:

$$dI_{\omega}^{\vec{r}} = \frac{8e^2 q d\omega}{3\pi c (1 - v^2/c^2)} \Phi(s), \quad (19.20)$$

где

$$\Phi(s) = 24 s^2 \int_0^{\infty} \operatorname{cth} x \cdot e^{-2sx} \sin 2sx dx - 6\pi s^2. \quad (19.21)$$

Через s обозначен параметр Мигдала:

$$s = \frac{1 - v^2/c^2}{8} \sqrt{\frac{\omega}{q}}. \quad (19.22)$$

При $s \rightarrow \infty$, когда многократным рассеянием можно пренебречь,

$$\Phi(s) \rightarrow 1 - \frac{0,012}{s^4}. \quad (19.23)$$

Таким образом, при малых энергиях получаем обычное выражение Бете — Гайтлера. Что касается величины L_R , входящей в q , то она будет определена ниже. При $s \rightarrow 0$

$$\Phi(s) \rightarrow 6s, \quad (19.24)$$

$$dI_\omega = \frac{2e^2}{\pi c} \sqrt{\omega q} d\omega, \quad (19.25)$$

что с точностью до численного множителя совпадает с приближенной формулой Ландау — Померанчука (18.17). В случае кулоновских соударений для q необходимо использовать выражение (19.14):

$$q = \frac{Nv}{4} \int_0^{\theta_{\max.}} \sigma(\theta) \theta^2 \theta d\theta d\varphi = 2\pi Ne^4 Z^2 \frac{c}{\varepsilon_1^2} L_R. \quad (19.26)$$

Получающийся при этом логарифм L_R (если интегрировать по всем углам θ вплоть до $\theta_{\max} = \hbar/pR_{\text{яд}}$) больше приблизительно в два раза, чем логарифм в формуле Бете — Гайтлера $L_{\text{рад}}$ (см. (17.9)). При этом мы вместо правильной формулы Бете — Гайтлера получаем в два раза больший поперечник. Это обстоятельство связано с тем, что переход от интегрального уравнения к уравнению типа Фоккера — Планка связан с ограничением на допустимые углы рассеяния, вносящие вклад в интеграл (19.26). Мы уже встретились с этим обстоятельством в § 15, где было показано, что акты излучения отбирают определенным образом углы рассеяния электрона; которые эффективны в процессах излучения.

Чтобы исследовать этот вопрос детально, надо вернуться к интегродифференциальному уравнению (19.11). Исследование этого уравнения приведено в приложении V. Здесь укажем только, что если вместо θ_{\max} подставить не $\hbar/pR_{\text{яд}}$ (как это сделано в § 17), а $\hbar/p\lambda$, то $L_R \approx L_{\text{рад}}$ и полученная таким образом формула будет иметь правильный коэффициент.

§ 20. СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ
КВАНТОМЕХАНИЧЕСКОГО РАСЧЕТА И
УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФОТОНОВ

А. Б. Мигдал обобщил классический метод расчета на квантовый случай [6, ба, бб]. Ему удалось получить полные поперечники тормозного излучения в среде, не делая предположения о малости энергии излученного кванта по сравнению с энергией излучающего электрона.

Ниже приводятся результаты квантовомеханического расчета для полных поперечников тормозного излучения и образования пар в среде.

Поперечник излучения тормозных квантов с энергией, лежащей в интервале от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$ дается следующей формулой Мигдала:

$$d\sigma_{\text{торм}}^M = \frac{4}{3} \sigma L_{\text{рад}} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \{ \varepsilon^2 G(s) + 2 [1 + (1 - \varepsilon)^2] \Phi(s) \}. \quad (20.1)$$

При написании формулы (20.1) приняты следующие обозначения: через r_0 , как и прежде, обозначен классический радиус электрона, через $\varepsilon = \hbar\omega/\varepsilon_1$ — энергия излученного кванта, измеренная в единицах энергии начального электрона, $L_{\text{рад}} \approx \ln \frac{\theta_2}{\theta_1}$, где θ_2 и θ_1 — максимальный и минимальный эффективные углы отклонения электрона в процессах излучения (см. формулу (17.9)). Оценки показывают [6], что $\theta_2 \sim 1/s^{1/2}$, поэтому можно приближенно положить

$$L_{\text{рад}} = \ln \frac{183 Z^{-1/3}}{s^{1/2}}. \quad (20.2)$$

При $s=1$ $L_R \approx L_{\text{рад}}$ и это дает правильное значение радиационного логарифма, входящего в обычную формулу Бете — Гайтлера. Логарифмическая неточность результатов Мигдала является следствием замены точного интегрального уравнения (19.11) на уравнение типа Фоккера — Планка (19.13).

Функция $\Phi(s)$ приведена выше (см. формулу (19.21)). Функция $G(s)$ дается следующим выражением:

$$G(s) = 48 s^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\sin st}{\text{sh } st} dt \right). \quad (20.3)$$

Асимптотическое поведение Φ и G дается следующими формулами:

$$\text{при } s \rightarrow 0, \quad \Phi \rightarrow 6s, \quad G \rightarrow 12 \pi s^2, \quad (20.4)$$

$$\text{при } s \rightarrow \infty, \quad \Phi \rightarrow 1 - \frac{0,012}{s^4}, \quad G \rightarrow 1 - \frac{0,029}{s^4}. \quad (20.5)$$

Промежуточные значения приведены в табл. IV.

Таблица IV

s	$\Phi(s)$	$G(s)$
0	0	0
0,05	0,258	0,094
0,1	0,446	0,906
0,2	0,686	0,475
0,3	0,805	0,695
0,4	0,880	0,800
0,5	0,93	0,875
0,6	0,95	0,917
0,7	0,965	0,945
0,8	0,975	0,963
0,9	0,985	0,975
1,0	0,990	0,985
1,5	0,998	0,994
2	0,999	0,998

Параметр s несколько отличается от выражения (19.22). Он равен

$$s = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\omega m^2 c^3}{2\pi \epsilon_1 \epsilon_2 r_0^2 N Z^2 L_{\text{rad}}}}. \quad (20.6)$$

Естественно, что для мягких квантов параметры s , определяемые формулами (20.6) и (19.22), совпадают. Формула (20.1) при $\epsilon \ll 1$ переходит в формулу (19.20), выведенную в предыдущем параграфе:

$$d\sigma (\varepsilon \ll 1) = \frac{16}{3} \sigma L_{\text{rad}} \frac{d\omega}{\omega} \Phi (s). \quad (19.20)$$

Рассмотрим предельные случаи формулы (20.1). При $s \gtrsim 1$ функции $\Phi (s)$ и $G (s)$ можно положить равными единице. Тогда поперечник (20.1) превращается в формулу Бете — Гайтлера:

$$d\sigma_{\text{БГ}} = 4\bar{\sigma} \frac{d\omega}{\omega} \left[\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \right] L_{\text{rad}}. \quad (20.7)$$

При $s \ll 1$ имеем другой предельный случай формулы (20.1):

$$d\sigma_{\text{ЛП}} = \frac{1}{137} \frac{d\omega}{V\omega} \sqrt{\frac{2Z^2 r_0^2 L_{\text{rad}}}{\pi c N}} \frac{mc^2}{V\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left[1 + \left(1 - \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1} \right)^2 \right]. \quad (20.8)$$

Для мягких квантов формула (20.8) переходит в формулу (19.25) предыдущего параграфа.

Влияние поляризации среды в методике Мигдала можно учесть эффективным образом, заменив величину s на s' (см. следующий параграф). Величина s' равна:

$$s' = s \left[1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(\frac{\varepsilon_1}{mc^2} \right)^2 \right]. \quad (20.9)$$

Расчеты показывают, что вместо формулы (19.20) мы получим более общую формулу, учитывающую также и поляризацию среды. Она имеет вид

$$d\sigma (\varepsilon \ll 1) = \frac{16}{3} \sigma \frac{L'_{\text{rad}} \Phi (s') d\omega}{\left[1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(\frac{\varepsilon_1}{mc^2} \right)^2 \right] \omega}. \quad (20.10)$$

L'_{rad} отличается от L_{rad} тем, что величина s заменена на s' . При $s' \gtrsim 1$ формула (20.10) переходит в формулу (18.12).

Как уже неоднократно отмечалось, имея готовую формулу тормозного излучения жестких квантов, можно получить формулу для парообразования. Поперечник образования пары с энергией электрона от ε_- до $\varepsilon_- + d\varepsilon_-$ и про-

суммированный по всем возможным конечным состояниям позитрона имеет вид

$$d\sigma_{\text{пары}}^M = \frac{4}{3} \sigma_{L_{\text{рад}}} \frac{d\varepsilon_-}{\hbar\omega} \left\{ G(\tilde{s}) + 2 \left[\left(\frac{\varepsilon_-}{\hbar\omega} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_+}{\hbar\omega} \right)^2 \right] \Phi(\tilde{s}) \right\}. \quad (20.11)$$

Функции Φ и G даются формулами (20.3) и (19.21). Величина \tilde{s} отличается от величины s тем, что $\hbar\omega = \varepsilon_- + \varepsilon_+$ (вместо $\hbar\omega = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$), ε_+ есть энергия позитрона. При $\tilde{s} \gtrsim 1$, $\Phi(\tilde{s})$ и $G(\tilde{s})$ равны единице и формула (20.11) переходит в обычную формулу Бете — Гайтлера для образования пары (см. формулу (4.3)).

До сих пор речь шла о полных поперечниках тормозного излучения и образования пар. Угловое распределение тормозных квантов рассмотрено В. Е. Пафомовым [50] и в совместной работе Н. П. Калашникова и М. И. Рязанова [51]. В. Е. Пафомов рассмотрел также поляризацию тормозных квантов при прохождении через слой вещества. Приведем окончательные результаты расчетов согласно работе [50].

Спектральная плотность энергии (т. е. величина $\frac{d^2 I_{\rightarrow}}{d\omega d\Omega}$) тормозного излучения для фотонов, поляризованных в плоскости, перпендикулярной к плоскости распространения (плоскость распространения проходит через направление первоначального движения частицы и волновой вектор), и в плоскости распространения на единицу телесного угла определяется по следующим формулам:

$$\frac{d^2 I_{\rightarrow}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega}{2\pi^2 c} \operatorname{Im} \int_0^T \eta t dt \times \int_0^1 \exp\left(-\frac{\sigma z x}{1 + \eta t x}\right) \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\sigma \eta / 2} \frac{dx}{(1 + \eta t x)^2}, \quad (20.12)$$

$$\frac{d^2 I_{\rightarrow}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega}{\pi^2 c} \operatorname{Im} \int_0^T dt \int_0^1 \exp\left(-\frac{\sigma z x}{1 + \eta t x}\right) \times \\ \times \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\sigma_{\gamma}/2} \left(\frac{\eta t}{2} + \frac{\sigma z}{1 + \eta t x}\right) \frac{dx}{(1 + \eta t x)^2}. \quad (20.13)$$

Угловое распределение для интенсивности тормозного излучения неполяризованных фотонов определяется суммой этих результатов. Оно описывается следующей формулой:

$$\frac{d^2 I_{\rightarrow}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega}{\pi^2 c} \operatorname{Im} \int_0^T dt \int_0^1 \exp\left(-\frac{\sigma z x}{1 + \eta t x}\right) \times \\ \times \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\sigma_{\gamma}/2} \left(\eta t + \frac{\sigma z}{1 + \eta t x}\right) \frac{dx}{(1 + \eta t x)^2}. \quad (20.14)$$

Интегрируя $\frac{d^2 I_{\rightarrow}}{d\omega d\Omega}$ по телесному углу, найдем спектральную плотность энергии тормозного излучения. В формулах (20.12)–(20.14) приняты следующие обозначения: $z = \theta_1^2 g^2$, где $g = \varepsilon_1/mc^2$, а θ_1 — угол между волновым вектором и первоначальным направлением движения частицы, остальные обозначения см. в приложении VII. Элемент телесного угла равен $d\Omega = 2\pi\theta_1 d\theta_1 = \frac{\pi}{g^2} dz$ и спектральная плотность энергии тормозного излучения определяется по формуле:

$$\frac{dI_{\omega}}{d\omega} = \frac{e^2 \omega}{\pi c g^2} \operatorname{Im} \int_0^T dt \int_0^1 dx \int_0^{\infty} dz \times \\ \times \exp\left(-\frac{\sigma z x}{1 + \eta t x}\right) \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\sigma_{\gamma}/2} \left(\eta t + \frac{\sigma z}{1 + \eta t x}\right) \frac{1}{(1 + \eta t x)^2}. \quad (20.15)$$

Интегрирование должно быть проведено здесь по t и x , а затем по z . В результате довольно сложных расчетов снова приходим к формуле (19.20) (см. приложение VII).

§ 21. ВЛИЯНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ СРЕДЫ НА РАДИАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В АМОРФНОЙ СРЕДЕ

До сих пор речь шла об изменении поперечников тормозного излучения и парообразования в однородных и прозрачных средах. Предполагалось, что излученный в среде квант в дальнейшем свободно распространяется в среде. В действительности это не так, поскольку существует поглощение. Кроме того, среда может быть и неоднородной.

Примерами неоднородных сред являются кристаллические среды. Мы видели в предыдущей главе, к каким существенным отклонениям приводит учет периодической структуры кристалла при вычислении поперечников тормозного излучения и парообразования. Однако до сих пор еще полностью не исследовано одновременное влияние периодической структуры среды и „эффекта плотности“. Что касается влияния поляризации среды на тормозное излучение в периодических средах, то необходимые формулы могут быть получены [15]. Влияние же многократного рассеяния на поперечник излучения в кристалле требует детального рассмотрения и еще никем не проведено. Другим примером неоднородной среды является среда, составленная из двух различных веществ с границей раздела. Вопросы, связанные с тормозным излучением в таких средах, имеют специфические особенности из-за наличия границ перехода. Они изложены в следующей главе.

В настоящем параграфе рассматривается влияние поглощения на тормозное излучение [1, 7, 8, 10]. Конец параграфа посвящен рассмотрению влияния „эффекта плотности“ на рождение пар от электрона [9].

В предыдущем изложении учитывалась только действительная часть $\epsilon(\omega)$, т. е. поглощением пренебрегалось. Цель настоящего параграфа показать, к каким следствиям приводит учет мнимой части диэлектрической постоянной ϵ'' . Известно, что ϵ'' связана с сечением поглощения σ следующей формулой:

$$\varepsilon''/n = \frac{N\sigma}{\omega} c = \frac{c}{L\omega}. \quad (21.1)$$

Здесь n — действительная часть коэффициента преломления, N — число атомов в 1 см^3 , а L — длина, на которой происходит поглощение частицы*. Ясно, что сам факт излучения кванта приводит к изменению первоначального состояния электрона. Поскольку процесс излучения происходит на радиационной длине L , то эффективная длина „поглощения“ электрона порядка L . Поэтому, если когерентная длина больше радиационной длины, то поперечники тормозного излучения должны претерпевать существенные изменения [1, 7]. Аналогичные рассуждения применимы и к процессу образования электронно-позитронной пары. Критерий можно записать в следующем виде:

$$\frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\hbar\omega mc^2} \lambda > L. \quad (6.20)$$

Например, для свинца $L \sim 0,5 \text{ см}$ и для квантов с $\hbar\omega = \varepsilon_1/2$ получим, что неравенство (6.20) выполняется начиная с энергии $\varepsilon_1 \sim 10^{10} \text{ мэВ}$. Для мягких квантов ε_1 будет меньше. Как мы видим, энергии, при которых в процессах тормозного излучения и парообразования наступают эффекты, связанные с наличием поглощения, в настоящее время недостижимы на ускорителях. Тем не менее мы рассмотрим эти эффекты несколько подробнее. Необходимо отметить, что поглощение не обязательно связано с процессами тормозного излучения или парообразования. Например, поглощение фотонов с энергией, меньше критической (терминология, принятая в теории космических лучей, см. [42]), определяется комптоновским рассеянием, а не рождением пар. Когда энергия квантов становится еще меньше, более важным становится поглощение из-за фотозффекта.

Для исследования процессов излучения в поглощающей среде необходимо вычислять не поток энергии (поскольку

* То, что через L одновременно обозначается длина, на которой происходит поглощение частиц, и лавинная единица, не должно вызывать недоразумений.

на бесконечном расстоянии он поглощается и не выйдет из среды), а другую величину. Удобно вычислять потери энергии частицы в единицу времени (тормозящую силу), либо энергию, поглощенную средой за единицу времени. Ясно, что оба способа вычисления должны привести к одному и тому же результату. В поглощающей среде мы не сможем отделить процесс чистого тормозного излучения от процесса ионизации. Действительно, излученный частицей тормозной квант поглощается в среде и может привести к фотоэффекту атома. Этот процесс (если точка наблюдения находится вдали от частицы) неотличим от непосредственной ионизации или возбуждения атома заряженной частицей. Поэтому разделение потерь энергии, которые идут на различные процессы в случае поглощающей среды, можно производить только на расстояниях от траектории частиц, меньших, чем длина поглощения фотона.

Перейдем к вычислению потерь энергии заряженной частицей при ее прохождении через поглощающую среду. Потери энергии будем вычислять, используя макроскопические уравнения Максвелла. Это означает, что мы ограничимся рассмотрением малых потерь по сравнению с начальной энергией частицы. Поэтому траекторию частицы можно считать заданной. Как мы увидим ниже, в рассматриваемой задаче существенны длины, большие по сравнению с межатомными расстояниями. Поэтому влияние вещества может учитываться феноменологически, путем введения в микроскопические уравнения Максвелла комплексной диэлектрической проницаемости. Будем исходить из обычной системы макроскопических уравнений Максвелла (магнитная проницаемость положена равной единице):

$$\Delta \vec{A} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} e v \delta(\vec{r} - \vec{r}(t)), \quad (21.2)$$

$$\Delta \varphi - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} e \delta(\vec{r} - \vec{r}(t)). \quad (21.3)$$

Разложим потенциалы в четырехкратные интегралы Фурье:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int \vec{A}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} d\vec{k}d\omega. \quad (21.4)$$

Решение уравнений (21.2) и (21.3) можно записать в следующем виде:

$$\vec{A}(\vec{k}, \omega) = \frac{e}{4\pi^3 c} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right]^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v}(t) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}(t)} dt, \quad (21.5)$$

$$\varphi(\vec{k}, \omega) = \frac{e}{4\pi^3 \varepsilon(\omega)} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right]^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}(t)} dt. \quad (21.6)$$

Условие Лоренца запишем в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [k\vec{v}(t) - \omega] e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}(t)} dt = 0. \quad (21.7)$$

Полные потери энергии частицы за все время движения определяются как работа силы торможения, действующей на частицу, согласно формуле

$$I = -e \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{v}(t) dt. \quad (21.8)$$

$\vec{E}(\vec{r}, t)$ есть напряженность электрического поля, создаваемого частицей, движущейся по траектории $\vec{r}(t)$ со скоростью $\vec{v}(t)$.

Значение $\vec{E}(\vec{r}, t)$ в формуле (21.8) берется на траектории частицы. Фурье-компонента поля определяется из соотношения

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \frac{i\omega}{c} \vec{A}(\vec{k}, \omega) - i\vec{k}\varphi(\vec{k}, \omega). \quad (21.9)$$

Используя приведенные выражения, легко получить формулу для вычисления полных потерь:

$$I = -\frac{ie^2}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega d\vec{k} d\omega}{k^2 - \frac{\omega^2 \epsilon(\omega)}{c^2}} \left\{ \left| \int \frac{\vec{v}}{c} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(t) - i\omega t} dt \right|^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{\epsilon} \left| \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}(t) - i\omega t} dt \right|^2 \right\}. \quad (21.10)$$

Относительно пределов применимости полученной формулы нужно заметить следующее. Передача энергии $\hbar\omega$ среде должна быть значительно меньше энергии электрона, поскольку $\vec{r}(t)$ есть заданная траектория и отдачи пренебрегается. В частности, поскольку формула (21.10), как мы увидим ниже, содержит в себе потери на тормозное излучение, энергия излученных квантов должна быть значительно меньше энергии электрона. Вместо $\vec{r}(t)$ мы должны будем подставлять классическую траекторию, определяемую рассеянием на кулоновских центрах. Однако поскольку $Ze^2/\hbar c < 1$, понятие классической траектории не имеет места, и классической связи параметра столкновения с углом отклонения не существует. В действительности, на результате это не скажется, ибо процедура получения окончательного результата сводится к усреднению выражения (21.10) по всем возможным траекториям, т. е. по всем возможным отклонениям от прямолинейного пути. Естественно, что усреднение будет зависеть от законов многократного рассеяния, которые одинаковы для классического и квантового случаев ввиду того случайного обстоятельства, что формула Резерфорда остается всегда справедливой. Таким образом, квантовость в этом пункте оказывается несущественной. Наконец, мы используем макроскопическую электродинамику. Отсюда следует, что эффективные длины, входящие в задачу, должны превышать межатомные расстояния; на языке передаваемых импульсов это означает, что $k_{\perp} \ll \hbar/R_{ат}$, где $R_{ат}$ — порядка межатомных расстояний, а k_{\perp} — компонента вектора \vec{k} , перпендикулярная направлению движения. Такое ограничение необходимо делать, если мы явно не вводим зависимость ϵ от вектора \vec{k}

(пространственная дисперсия), т. е. используем обычное выражение $\varepsilon(\omega)$, справедливое в макроскопической электродинамике. Для больших значений k_{\perp} мы приходим к столкновениям отдельных частиц, поэтому необходим квантовый расчет и соответствующая сшивка с формулами, справедливыми при малых k_{\perp} . В этом пункте наши расчеты не отличаются от общепринятых расчетов ионизационных потерь.

Наконец, сделаем еще одно замечание относительно перехода формулы (21.10) в аналогичную формулу, когда у нас имеется всего один атом и влияние среды отсутствует. Для этого полезно представить потери в виде величины, пропорциональной мнимой части $\varepsilon(\omega)$, т. е. пропорциональной коэффициенту поглощения. Для этого интегрирование в бесконечных пределах по ω заменим на интегрирование от нуля до бесконечности и, воспользовавшись свойством диэлектрической постоянной $\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega)$, получим

$$I = -\frac{ie^2}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k} \int_0^{\infty} d\omega \frac{(\varepsilon - \varepsilon^*) \omega}{\left| k^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \right|^2} \left\{ \left| \int \frac{\vec{v}}{c} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}(t) - i\omega t} dt \right|^2 \frac{\omega^2}{c^2} + \right. \\ \left. + \frac{k^2 - \omega^2 (\varepsilon + \varepsilon^*)/c^2}{|\varepsilon|^2} \left| \int e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}(t) - i\omega t} dt \right|^2 \right\}. \quad (21.11)$$

Коэффициент поглощения определяется формулой (21.1), которую перепишем в следующем виде:

$$N\sigma(\omega) = i\omega(\varepsilon^* - \varepsilon)/2cn. \quad (21.12)$$

Здесь $\sigma(\omega)$ — сечение поглощения кванта частоты ω отдельным атомом. Формулу (21.11) легко получить иным способом. Необходимо вычислить поток псевдоквантов от движущейся частицы, умножить его на коэффициент поглощения и проинтегрировать по всем \vec{k} и ω (подробнее см. в приложении VIII). Отсюда становится ясным, как перейти к случаю столкновения с системой независимых атомов (т. е. получить обычные формулы тормозного излучения и ионизации без влияния среды). Для этого нужно во всех членах формулы (21.11) (кроме коэффициента поглощения) положить $\varepsilon = 1$. Тогда мы пре-

небрежем влиянием эффекта плотности и для заданного движения $\vec{r}(t)$ получим формулу для потерь:

$$I = -\frac{ie^2}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k} \int_0^{\infty} \frac{d\omega (\varepsilon - \varepsilon^*) \omega}{(k^2 - \omega^2/c^2)^2} \left\{ \left(k^2 - \frac{2\omega^2}{c^2} \right) \left| \int e^{i\vec{k}\vec{r}(t) - i\omega t} dt \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2}{c^2} \left| \int \frac{\vec{v}(t)}{c} e^{i\vec{k}\vec{r}(t) - i\omega t} dt \right|^2 \right\}. \quad (21.13)$$

Формула (21.11) была использована в работе (28) для вычисления влияния „эффекта плотности“ на ионизационные потери. Мы не будем здесь обсуждать этот вопрос, поскольку нас будет интересовать влияние поглощения на тормозное излучение. Для потерь энергии в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ из (21.11) получим

$$dl_\omega = \frac{e^2}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk d\omega \omega \varepsilon''}{\left| k^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon'}{c^2} \right|^2} \left\{ \left| \int \frac{\vec{v}}{c} e^{i\vec{k}\vec{r}(t) - i\omega t} dt \right|^2 \frac{\omega^2}{c^2} + \right. \\ \left. + \frac{k^2 - 2\omega^2 \varepsilon'/c^2}{|\varepsilon|^2} \left| \int e^{i\vec{k}\vec{r}(t) - i\omega t} dt \right|^2 \right\}. \quad (21.14)$$

Выражение (21.14) можно получить иным образом. Ясно, что в бесконечной поглощающей среде энергия, которую теряет частица, приобретается средой. Поэтому рассчитаем энергию, поглощенную средой в интервале частот $d\omega$.

Изменение энергии среды за время пролета частицы равно (см., например, [17])

$$I = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (21.15)$$

Разложим поля \vec{E} и \vec{D} в четырехкратные интегралы Фурье:

$$\vec{E} = \int \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}\vec{r}(t) - i\omega t} d\vec{k}d\omega \quad (21.16)$$

$$\vec{D} = \int \varepsilon(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}\vec{r}(t) - i\omega t} d\vec{k}d\omega.$$

Подставляя разложения (21.16) в формулу (21.15) и интегрируя по четырехмерному объему, получим выражение для потерь:

$$I = (2\pi)^3 \int_0^\infty \omega d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \varepsilon''(\vec{k}, \omega) |\vec{E}(\vec{k}, \omega)|^2, \quad \text{где } d^3k = d\vec{k}. \quad (21.17)$$

Положим $\mu = 1$. Выражение для $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ найдем, используя формулы (21.9), (21.5) и (21.6):

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \frac{ie}{4\pi^3 \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right]} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\omega \vec{v}(t)}{c^2} - \frac{\vec{k}}{\varepsilon} \frac{(\vec{k}v)}{\omega} \right] e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}(t)} dt \right\}. \quad (21.18)$$

Легко видеть, что подстановка (21.18) в (21.17) приводит к выражению, полностью совпадающему с формулой (21.11) и (21.14). В дальнейшем изложении мы будем полностью следовать работе В. М. Галицкого и В. В. Якимца [8].

В последующих формулах положено $\hbar = c = m = 1$. Подставляя (21.18) в (21.17), находим:

$$dI_\omega = \frac{e^2 \omega d\omega}{(4\pi^3)^2} \int d^3k \frac{\varepsilon''(k)}{|k^2 - \varepsilon \omega^2|^2} \int \int dt dt' \left[\omega \vec{v}(t) - \frac{\vec{k}(\vec{k}v)}{\varepsilon \omega} \right] \left[\omega \vec{v}(t') - \frac{\vec{k}(\vec{k}v')}{\varepsilon^* \omega} \right] e^{i\omega(t-t') - i\vec{k}[\vec{r}(t) - \vec{r}(t')]} \quad (21.19)$$

Делая замену переменных $t \equiv t$, $\tau = t' - t$ и вводя обозначения

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &\equiv \vec{v}, & \vec{r}(t) &\equiv \vec{r}, \\ \vec{v}(t + \tau) &\equiv \vec{v}', & \vec{r}(t + \tau) &\equiv \vec{r}',\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}dI_\omega = \frac{e^2 d\omega}{(4\pi^3)^2 \omega} \int \frac{d^3 k}{|\varepsilon|^2} \int_{-T}^T dt \int_0^\infty d\tau \left\{ e^{-i\omega\tau + i\vec{k}(\vec{r}' - \vec{r})} \left[(\vec{n}\vec{v})(\vec{n}\vec{v}') + \right. \right. \\ \left. \left. + |\varepsilon|^2 \omega^4 \frac{[\vec{n}\vec{v}][\vec{n}\vec{v}']}{|k^2 - \varepsilon\omega^2|^2} \right] + \text{к. с.} \right\}, \quad (21.20)\end{aligned}$$

где \vec{n} — единичный вектор в направлении \vec{k} .

Выражение (21.20) необходимо усреднить по всем возможным траекториям частицы. Следуя работе [5] (см. приложение VI), приходим к следующему выражению для средних дифференциальных потерь энергии частицы в единицу времени:

$$\begin{aligned}d\dot{I}_\omega = \frac{dI_\omega}{2T} = \frac{e^2 d\omega}{\pi^3 \omega} \text{Re} \int d^3 k \frac{\varepsilon''(k)}{|\varepsilon|^2} \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} \times \\ \times \int d\vec{\theta} W_{\vec{k}}(\vec{\theta}, \frac{\vec{k}\vec{v}}{kv}; \tau) \left[(\vec{n}\vec{v})(\vec{n}\vec{v}') + |\varepsilon|^2 \omega^4 \frac{[\vec{n}\vec{v}][\vec{n}\vec{v}']}{|k^2 - \varepsilon\omega^2|^2} \right], \quad (21.21)\end{aligned}$$

где $\vec{\theta}$ — угол между направлениями \vec{v} и \vec{v}' ; $W_{\vec{k}}$ — фурье-компонента функции распределения W (ср. с формулой (19.8) при $v = c = 1$), удовлетворяющая уравнению*

$$\frac{\partial W_{\vec{k}}}{\partial \tau} - i(kv') W_{\vec{k}} = q\Delta_\theta W_{\vec{k}} \quad (19.13')$$

* Обратим внимание, что в отличие от § 19, экспонента $\exp(-i\omega\tau)$ не включена в определение $W_{\vec{k}}$.

с начальным условием $W_{\vec{k}}(\tau=0) = \delta(\vec{\theta})$. Величина q имеет вид

$$q = 2 \frac{\pi N (Ze^2)^2}{E^2} \ln(183 Z^{-1/2}). \quad (17.10)$$

В отличие от работы [8], мы считаем, что $L_R \approx L_{\text{rad}}$. Это необходимо, чтобы получить правильный коэффициент в формуле Бете — Гайтлера.

Заметим, что в отличие от случая, рассмотренного в § 19, в формуле (21.21) ω и \vec{k} не связаны обычным соотношением, причем по \vec{k} производится интегрирование.

В случае отсутствия столкновений ($q = 0$)

$$W_{\vec{k}} = \delta(\vec{\theta}) e^{i(\vec{k} \vec{v}) \tau} \quad (21.22)$$

и (21.21) дает (при ε , определяющемся поляризацией атомных оболочек) известное выражение для ионизационных потерь в веществе (см. приложение VIII). С другой стороны, при $\varepsilon'' \rightarrow 0$ (в отсутствие поглощения) первый член в квадратных скобках исчезает, а во втором появляется функция $\delta(k - \omega \sqrt{\varepsilon})$ и (21.21) переходит в выражение для тормозного излучения, полученное в работе [5] (см. формулы (19.20) и (20.10)). В интересующем нас случае больших энергий и частот первый член в формуле (21.21) всегда оказывается несущественным. При этом выражение для dI_{ω} принимает следующий вид:

$$dI_{\omega} = \frac{e^2 \omega^3}{\pi^3} d\omega \operatorname{Re} \int d^3 k d\tau d\vec{\theta} \frac{\varepsilon''(k)}{|k^2 - \varepsilon \omega^2|^2} e^{-i\omega\tau} [\vec{n} \vec{v}] [\vec{n}' \vec{v}'] W_{\vec{k}}. \quad (21.23)$$

Решение уравнения (19.13') может быть найдено методом Лапласа, аналогично тому, как это проделано в работе [5] (см. приложение VI). В результате получаем

$$d\dot{I}_\omega = \frac{4e^2\omega^3}{\pi^2} d\omega \operatorname{Re} \int \frac{\varepsilon'' k^2 dk}{|k^2 - \varepsilon\omega^2|^2} \lim_{p \rightarrow 0} U(p), \quad (21.24)$$

где

$$U(p) = \frac{i/k}{p^2 - p_1^2} \left(\frac{p_1 + p}{p_1 - p} \right)^\mu \int_{p_0}^p \left(1 + i \frac{\omega - kv}{4qp} \right) \left(\frac{p_1 - p}{p_1 + p} \right)^\mu dp, \quad (21.25)$$

$$p_1 = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{k}{q}}, \quad \mu = (1+i)s, \quad s = \frac{\omega - kv}{4\sqrt{qk}}. \quad (21.26)$$

Величины p_1 , μ и s отличаются от соответствующих величин, введенных А. Б. Мигдалом (см. приложение VI) тем, что $k \neq \omega \sqrt{\varepsilon}$. Контур интегрирования выбирается из условия аналитичности $U(p)$ в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$.

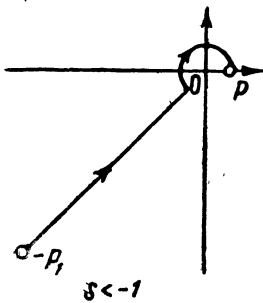


Рис. 29. Выбор контура интегрирования
 $s < -1$, $p_0 = -p_1$.

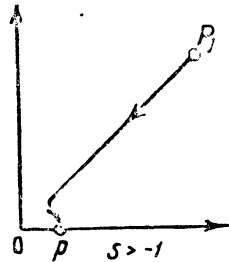


Рис. 30. Выбор контура интегрирования
 $s > -1$, $p_0 = p_1$.

Направляя его, как показано на рис. 29, 30, и подставляя (21.25) в (21.24), находим

$$d\dot{I}_\omega = \frac{4e^2\omega^2}{\pi^2} d\omega \int \frac{dk \varepsilon'' \sqrt{qk}}{(k^2 - \varepsilon'\omega^2)^2 + \varepsilon''\omega^4} \left\{ \Theta(s+1) \frac{\Phi(s)}{6s} + \right. \\ \left. + \Theta(-s-1) \left[\frac{\Phi(-s)}{6s} - 4\pi s \right] \right\}, \quad (21.27)$$

где

$$\Phi(s) = 3s \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\cos st + \sin st}{c\hbar^2 \frac{t}{2}} dt + 24s^2 \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\sin st}{\text{sh } t} dt - 6\pi s^2. \quad (19.28)$$

При $s > 0$ можно проинтегрировать первое слагаемое в (19.28) по частям. В этом случае $\Phi(s)$ совпадает с функцией, введенной в § 19 (формула (19.21)). $\Theta(x)$ — известная разрывная функция:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (21.29)$$

ε' и ε'' — действительная и мнимая части диэлектрической постоянной соответственно. При больших частотах действительная часть диэлектрической постоянной близка к единице, однако для учета эффекта поляризации среды и правильного определения границ областей, где применимы различные предельные случаи формулы (21.27), в ε' необходимо сохранить член, учитывающий поляризацию среды:

$$\varepsilon' = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2},$$

$$\omega_0^2 = 4\pi NZe^2. \quad (21.30)$$

Рассмотрим область частот, поглощение которой в основном определяется парообразованием (в работе [10] рассмотрено также и влияние комптоновского поглощения). Таким образом, мнимая часть диэлектрической постоянной определяется рождением пар. Знаменатель подынтегрального выражения (21.27) носит резонансный характер с полушириной пика $\varepsilon''\omega \ll \frac{1}{\omega}$. Поэтому медленно меняющуюся в этой области функцию $\varepsilon''(k)$ можно взять в точке $k = \omega$. При этом, как было отмечено,

$$\varepsilon'' = \frac{N\sigma}{\omega} = \frac{1}{L\omega}. \quad (21.1)$$

Здесь σ — полный поперечник образования пар (см. формулу (21.43)). В соответствии с этим длина поглощения L отличается от введенной ранее радиационной длины (см. формулу (17.9)) коэффициентом, равным $9/7$. Нетрудно видеть, что при $q \rightarrow 0$ в выражении для $d\dot{I}_\omega$ остается только член, связанный с $4\pi\kappa$. Этот член описывает дифференциальные потери энергии электрона на образование пар. Такое соответствие мы сохраним и при $q \neq 0$. Поэтому $d\dot{I}_\omega$ удобно представить в виде суммы двух слагаемых

$$d\dot{I}_\omega = d\dot{I}_\omega^\Gamma + d\dot{I}_\omega^\Pi; \quad (21.31)$$

$$d\dot{I}_\omega^\Gamma = \frac{4e^2\omega^2}{\pi^2 L} d\omega \sqrt{q\omega} \int dk \frac{F(s)}{(k^2 - \varepsilon'\omega^2)^2 + \omega^2/L^2}, \quad (21.32)$$

$$d\dot{I}_\omega^\Pi = \frac{4e^2\omega^2}{\pi L} d\omega \int dk \frac{kv - \omega}{(k^2 - \varepsilon'\omega^2)^2 + \omega^2/L^2} \Theta(-s-1), \quad (21.33)$$

где

$$F(s) = \theta(s+1) \frac{\Phi(s)}{6s} + \theta(-s-1) \frac{\Phi(-s)}{6s}. \quad (21.34)$$

Рассмотрим величину $d\dot{I}_\omega^\Gamma$. Она описывает потери энергии электрона на тормозное излучение. Как было указано выше, в отсутствие поглощения (т. е. при $L^{-1} = 0$) в формуле (21.32) под интегралом появляется δ -функция

$$\delta(k - \omega\sqrt{\varepsilon'}) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2\omega^2}{\pi} \frac{L^{-1}}{(k^2 - \varepsilon'\omega^2)^2 + \omega^2 L^{-2}} \quad (21.35)$$

и, следовательно, в результате интегрирования получаем:

$$d\dot{I}_\omega^\Gamma = \frac{2e^2}{\pi} \sqrt{q\omega} F(s') d\omega = \frac{4e^2}{3\pi} \frac{qd\omega}{1 - v\sqrt{\varepsilon'}} \Phi(s'); \quad (21.36)$$

$$s' = \frac{1 - v\sqrt{\varepsilon'}}{4} \sqrt{\frac{\omega}{q}}.$$

Формула (21.36) совпадает с выражением, найденным в § 19 (см. формулу (19.20)), если в последней учесть также влияние поляризации среды. При отличном от нуля значении L^{-1} коэффициент при $F(s)$ в подынтегральной функции имеет конечную ширину. Несмотря на это, (21.36) оказывается справедливым, если эта ширина меньше интервала существенного изменения функции $F(s)$. В противном случае результат А. Б. Мигдала (21.36) изменяется.

Приближенный ход зависимости кривой $F(s)$ от s представлен на рис. 31. Вне интервала $|s| < 1$ $F(s)$ нечетна и убывает как $\frac{1}{s}$; $F(s) \approx \frac{1}{6s}$, при $|s| \geq 1$; при $s = 0$ она равна единице и растет при $s = -1$ до значения $F(-1) = 12,4$.

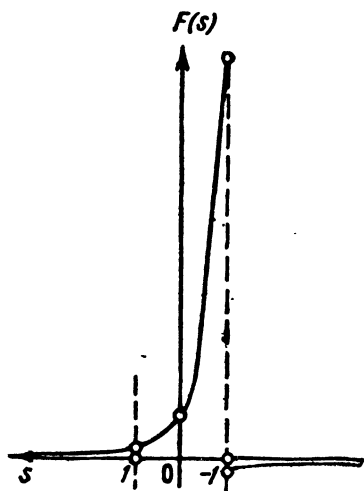


Рис. 31. График функции $F(s)$.

Таким образом, существенные значения функции $F(s)$ лежат в интервале $|s| < 1$. Для сравнения поведения $F(s)$ и резонансного знаменателя в (21.32) введем переменную $x = k - \omega \sqrt{\varepsilon'}$. Точкам $s = \pm 1$ отвечают значения x , равные соответственно

$$x_{\pm} = \frac{\omega_0^2}{2\omega} + \frac{\omega}{2E^2} \mp 4\sqrt{q\omega}. \quad (21.37)$$

Следовательно, по переменной x интервал основного изменения $F(s)$ есть

$$\Delta x_s = x_- - x_+ = 8\sqrt{q\omega}, \quad (21.38)$$

причем он лежит вблизи точки

$$x_0 = \frac{\omega_0^2}{2\omega} + \frac{\omega}{2E^2}. \quad (21.39)$$

Поглощение кванта влияет на тормозное излучение в том случае, когда ширина резонансного знаменателя $\Delta x_p = 1/L$ становится больше ширины функции $F(s)$. Это осуществляется при выполнении следующих двух неравенств:

$$\Delta x_s \ll \Delta x_p; \quad x_0 \ll \frac{1}{2} \Delta x_p. \quad (21.40)$$

Из первого соотношения находим

$$\omega \ll L\omega_0^2 \frac{E^2}{E_c^2}, \quad (21.41)$$

где

$$E_c = \left(\frac{4\pi}{e^2} \right)^{1/3} \cdot 4,5 L\omega_0. \quad (21.42)$$

Для сечения рождения пар фотоном в поле ядра использовано известное выражение [18]:

$$\sigma = \frac{28}{9} e^2 (Ze^2)^2 \ln(183 Z^{-1/3}); \quad \omega \gg 1. \quad (21.43)$$

Второе из неравенств (21.40) означает

$$\frac{1}{L} \gg \frac{\omega_0^2}{2\omega} + \frac{\omega}{E^2}. \quad (21.44)$$

Для граничной частоты, определяющейся из (21.41), условие (21.44) удовлетворяется автоматически (при $E > E_c$). С уменьшением частоты первый член в правой части возрастает, и мы получаем

$$\omega \gg L\omega_0^2 \quad (21.45)$$

Неравенства (21.41), (21.45) одновременно оказываются возможными только при $E \gg E_c$. Таким образом, начиная с этих энергий в интервале частот

$$L\omega_0^2 \ll \omega \ll L\omega_0^2 \frac{E^2}{E_c^2}; \quad E \gg E_c \quad (21.46)$$

поглощение существенно влияет на тормозное излучение. Приведем численные оценки для свинца: $\omega_0 \approx 60$ эв; $L\omega_0^2 \approx 1,2 \cdot 10^8$ эв; $E_c \approx 1,7 \cdot 10^{14}$ эв. Необходимо также иметь в виду, что при больших частотах, в частности для свинца при $\omega \gtrsim 5 \cdot 10^{11}$ эв, радиационная длина L начинает зависеть от энергии квантов вследствие эффекта многократного рассеяния [2].

При вычислении интенсивности излучения в рассматриваемом случае знаменатель в (21.32) можно взять в точке $k = \omega$. Ввиду нечетности $F(s)$ при $|s| \geq 1$, области $s > 1$ и $s < -1$, взаимно погашаясь, не дают вклада в остающийся интеграл. Элементарное интегрирование приводит к следующей формуле:

$$dI_\omega^r = \frac{16 \xi e^2}{\pi^2} q \omega L d\omega; \quad \xi = 2 \ln(2 \operatorname{sh} \pi) \approx 2\pi. \quad (21.47)$$

Как и ожидалось, dI_ω^r оказывается пропорциональным радиационной длине. Подставляя в (21.47) для q и σ значения (17.10), (21.43), приходим к выражению (в системе единиц $\hbar = c = 1$)

$$dI_\omega^r = 41,1 \frac{m^2}{E^2} \omega d\omega. \quad (21.48)$$

с точностью до коэффициента, совпадающего с выражением, найденным из простых соображений в работе [7].

При выполнении условий

$$\begin{aligned} \Delta x_s \gg \Delta x_p, \quad x_0 \gg \frac{1}{2} \Delta x_p; \\ \Delta x_s \gg \Delta x_p, \quad x_0 \ll \frac{1}{2} \Delta x_p, \end{aligned} \quad E \gg E_c \quad (21.49)$$

мы получаем неравенства, обратные соответственно (21.41) и (21.45):

$$E \gg E_c, \quad \omega \ll L\omega_0^2; \quad (21.50)$$

$$E \gg E_c, \quad \omega \gg L\omega_0^2 \frac{E^2}{E_c^2}. \quad (21.51)$$

Теперь $F(s)$ — плавная функция в существенной области интегрирования по k . В первом случае (21.50) $s \gg 1$, $\omega_0^2 \gg \frac{\omega^2}{E^2}$ и мы приходим к результату работы [3] (см. формулу (15.25)). Во втором случае $s \ll 1$, следовательно, в области (21.51) справедлива формула Ландау—Померанчука [2].

Перейдем теперь к рассмотрению поперечника рождения электронно-позитронных пар непосредственно от электрона.

Учет эффектов плотности необходим и при рассмотрении процессов, связанных с образованием пар быстрым электроном в среде. Используя (21.29), (21.30) формулу (21.33) для дифференциальных потерь энергии электрона на рождение пар можно представить в виде

$$dI_\omega^n = \frac{4e^2\omega^2 d\omega}{\pi L} \int_{\omega/v + \sqrt{q\omega}}^{k_m} dk \frac{k v - \omega}{(k^2 - \omega^2 + \omega_0^2)^2 + \omega^2 L^{-2}}. \quad (21.52)$$

Выбор верхнего предела в качестве $\omega^2 - k_m^2 = -a^2$, где a по порядку величины равно единице, обусловлен характером поведения $\sigma(k)$ при больших k . Очевидно, это в точности соответствует обрезанию интегралов в методе псевдофотонов при $k_{\perp \max} = a \left(\text{в CGSE-системе } k_{\perp \max} = a \frac{mc}{\hbar} \right)$. Интегрирование выражения (21.52) легко выполняется и дает

$$dI_\omega^n = \frac{e^2 d\omega}{2\pi L} \ln \frac{a^4}{(\omega^2/E^2 + 8\omega \sqrt{q\omega} + \omega_0^2)^2 + \omega^2/L^2}. \quad (21.53)$$

Влияние поляризации среды будет основным эффектом, если

$$\omega_0^2 \gg \frac{\omega^2}{E^2} + 8\omega \sqrt{q\omega}; \quad \omega_0^2 \gg \frac{\omega}{L}, \quad (21.54)$$

при этом

$$dI_\omega^n = \frac{2e^2}{\pi L} \ln \frac{\alpha}{\omega_0} d\omega. \quad (21.55)$$

Детальное рассмотрение неравенства (21.54) показывает, что (21.55) справедливо в следующих областях по частотам и энергиям:

$$\begin{aligned} E \ll \frac{L^3 \omega_0^3}{E_c^2}, \quad \omega \ll \omega_0 E; \\ \frac{L^3 \omega_0^3}{E_c^2} \ll E \ll E_c, \quad \omega \ll L\omega_0^2 \left(\frac{E}{E_c}\right)^{2/3}; \\ E \gg E_c, \quad \omega \ll L\omega_0^2. \end{aligned} \quad (21.56)$$

Аналогично нетрудно исследовать и другие предельные случаи формулы (21.53). Например, многократное рассеяние играет главную роль при выполнении условий:

$$\begin{aligned} \frac{L^3 \omega_0^3}{E_c^2} \ll E \ll \frac{L^3 \omega_0^2}{E_c^2}, \quad L\omega_0^2 \left(\frac{E}{E_c}\right)^{2/3} \ll \omega \ll \frac{E_c^2 E^2}{L^3 \omega_0^2}; \\ \frac{L^3 \omega_0^2}{E_c^2} \ll E \ll E_c, \quad \omega \gg L\omega_0^2 \left(\frac{E}{E_c}\right)^{2/3}; \\ E \gg E_c, \quad \omega \gg L\omega_0^2 \frac{E^2}{E_c^2}. \end{aligned} \quad (21.57)$$

В этом случае мы получаем:

$$dI_\omega^n = \frac{2e^2}{\pi L} \ln \alpha \left(\frac{L\omega_0}{E_c} \frac{E}{\omega} \sqrt{\frac{L}{\omega}}\right)^{1/3} d\omega, \quad (21.58)$$

что совпадает с результатом работы Ф. Ф. Терновского [9]. Интервалу (21.46) соответствует результат

$$dI_\omega^n = \frac{2e^2}{\pi L} \ln \alpha \sqrt{\frac{L}{\omega}} d\omega. \quad (21.59)$$

Известное выражение для образования пар ультрарелятивистским электроном [18]

$$dI_{\omega}^n = \frac{2e^2}{\pi L} \ln a \frac{E}{\omega} d\omega \quad (21.60)$$

сохраняется лишь в сравнительно узкой энергетической области:

$$E \ll \frac{L^2 \omega_0^3}{E_c^2}, \quad \omega \gg \omega_0 E; \quad (21.61)$$

$$\frac{L^3 \omega_0^3}{E_c^2} \ll E \ll \frac{L^3 \omega_0^2}{E_c^2}, \quad \omega \gg \frac{E_c^2 E^2}{L^3 \omega_0^3}.$$

Легко видеть, что и для тормозного излучения границы соответствующих эффектов определяются теми же неравенствами (21.56), (21.57), (21.61).

В заключение отметим, что в работе И. Н. Топтыгина [10] производился учет эффектов поглощения как за счет образования пар, так и за счет комптоновского рассеяния. Диаграммный метод, который использован в работе [10], мы излагать не будем. По-видимому, результаты работы [10] можно получить, исходя из приведенных в тексте формул. Для этого необходимо под σ понимать суммарный поперечник поглощения, обязанный как комптоновскому рассеянию, так и рождению пар. В соответствии с формулой (21.1) изменится и величина L , входящая во все последующие рассуждения. Влияние комптоновского рассеяния на поперечник излучения несущественно. В работе [10] показано, что при $\epsilon_1 > 10^5$ эв и для $\hbar\omega < 10^7$ эв тормозное излучение заряженной частицы определяется в основном вторичным излучением от комптоновских электронов.

Влияние поглощения за счет фотоэффекта также должно приводить (в области мягких квантов) к изменению поперечника тормозного излучения. Этот эффект еще детально никем не рассматривался.

В этом параграфе мы ограничивались рассмотрением мягких квантов. Для больших потерь энергии, сравнимых с начальной энергией электрона, необходимо использовать квантовый

метод расчета [10, 52]. Анализ показывает, что формула (21.47), выведенная для интенсивности тормозного излучения, остается в силе. Это может показаться несколько неожиданным, поскольку применимость формулы (21.47) ограничивается неравенством (21.46), правая граница которого растет как E^2 . Это означает, что при достаточно больших E^2 энергия излученных фотонов может быть близкой к начальной энергии электрона, и квантовый расчет станет необходим. В действительности это не так, поскольку для фотонов очень больших энергий выражение для поперечника рождения пары (21.43) уже несправедливо. Следовательно, и выражение для радиационной длины

$$L = \frac{18}{28} \frac{137}{r_0^2 N Z^2 \ln 183 Z^{-1/3}}, \quad (21.62).$$

использованное в этом параграфе, должно быть изменено

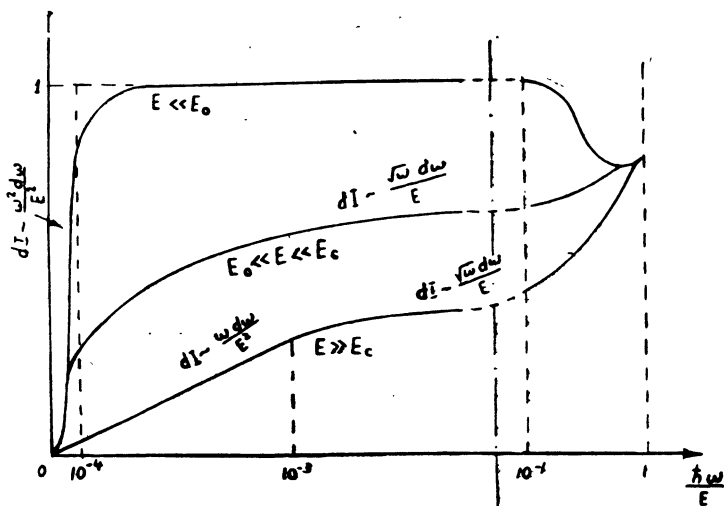


Рис. 32. Качественный ход дифференциальных потерь энергии на тормозное излучение. Обозначения те же, что и на рис. 28.

Действительно, при больших энергиях фотона на поперечник пареобразования существенное влияние оказывает многократное рассеяние и поперечник образования пары дается выра-

жением (20.11), исходя из которого можно получить новое значение радиационной длины:

$$L(\omega) = \frac{E_s^2}{3\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi r_0^2 N Z^2 \ln 183 Z^{-1/3}}}. \quad (21.63)$$

Анализ показывает, что влияние поглощения сказывается лишь на излучении тормозных квантов, энергия которых простирается вплоть до энергий порядка $10^{-3} E$. Это означает, что классические расчеты, приведенные в настоящем параграфе, остаются в силе. Качественный ход дифференциальных потерь энергии приведен на рис. 32, взятом из работы [8].

§ 22. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РАБОТЫ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ВЛИЯНИЮ СРЕДЫ НА РАДИАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Подтверждению эффектов подавления тормозного излучения в среде посвящено большое количество экспериментальных работ. Тем не менее детальная экспериментальная проверка выводов теории, изложенных в предыдущих параграфах, до сих пор проведена не была. Сложность эксперимента заключается в том, что большинство теоретических выводов относится к области энергий, недостижимых на современных ускорителях. Поэтому постановка основных экспериментов осуществлялась в космических лучах. Это обстоятельство значительно усложняет эксперимент.

Наиболее простым способом проверки теории, по-видимому, является измерение спектра тормозного излучения в зависимости от энергии излучающей частицы E . Для того чтобы заметить влияние многократного рассеяния на поперечник тормозного излучения, необходимо иметь электроны с энергией выше E_0 (см. формулу (18.22)). Для твердых веществ с большими Z $E_0 \geq 10^9$ эв. Для наблюдения же влияния поляризации среды необходимо измерить спектр тормозного излучения мягких квантов. Энергия исследуемых

квантов должна быть меньше или порядка $\omega_{кр}$ (см. формулу (18.13)), чтобы можно было заметить эффект поляризации. Если излучение происходит в веществе с большим Z , то $\hbar\omega_{кр} \sim 10^{-4} E$. Для сравнения с приведенной выше теорией необходимо, чтобы частота излученных мягких квантов значительно превышала атомные частоты. Многообещающие экспериментальные данные были получены в так называемых ливнях Шайна [53]. Оказалось, что в электронно-фотонных ливнях, образованных частицами сверхвысоких энергий ($10^{13} - 10^{14}$ эв), наблюдается очень мало фотонов с энергией меньше 10^8 эв. Дайсоном [54] было высказано предположение, что этот экспериментальный факт находит естественное объяснение, если учесть эффект поляризации среды. Однако, к сожалению, экспериментальных данных по ливням Шайна, а также и других близких экспериментальных данных оказалось недостаточно для однозначной интерпретации [55—64].

Эффект поляризации среды можно также исследовать на современных электронных ускорителях, измеряя мягкую часть спектра тормозного излучения. Группой Ф. Р. Арутюняна [65] проводились измерения по обнаружению влияния эффекта поляризации на тормозное излучение мягких фотонов. Измерялись спектры тормозного излучения в пластинке алюминия толщиной 1,1 см при прохождении электронов с энергией 450 и 600 Мэв. Кванты детектировались в области 10—100 кэв. Как видно из формулы (14.6) или (18.4), влияние поляризации среды в этой области энергий является весьма существенным, поскольку $\omega_{кр}$ для рассматриваемых экспериментальных условий равно 32 кэв. Из той же формулы (14.6) следует, что интенсивность квантов в области $\omega < \omega_{кр}$ обратно пропорциональна квадрату энергии электрона. Эта зависимость, обнаруженная в цитируемой работе, иллюстрируется на рис. 33. По оси абсцисс отложена энергия квантов в кэв, по оси ординат — число излученных квантов. Экспериментальные данные получены для двух различных энергий электронов. Различие между кривыми соответствует закону $1/E^2$. При $\omega > \omega_{кр}$ (около 80 кэв) кривые для различных начальных энергий электронов сливаются в одну кривую тор-

мозного излучения, что также соответствует предсказанию теории. Однако, несмотря на правильную энергетическую зависимость, изложенные эксперименты должны быть улучшены, чтобы избежать влияния поглощения фотонов в веществе. Необходимо отметить, что резкое уменьшение интенсивности тормозного излучения для частот $\omega \lesssim \omega_{кр}$ может быть использовано для детектирования и измерения энергий сверхбыстрых частиц.

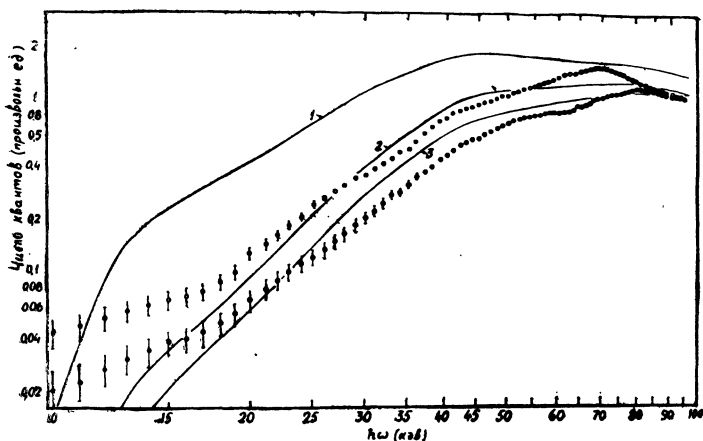


Рис. 33. Экспериментальные данные по тормозному излучению мягких квантов. 1—теория для случая изолированного атома, 2, 3—теория с учетом эффекта плотности и экспериментальные результаты при $E=450$ и 600 МэВ соответственно.

Систематическое исследование электронно-фотонных ливней в фотоэмульсиях было проведено группой физиков: А. А. Варфоломеевым, Р. И. Герасимовой, И. И. Гуревичем, Л. А. Макарьевой, А. С. Романцевой, С. А. Чуевой [66, 67, 68]. Исследовались 15 электронно-фотонных ливней в интервале энергий $10^{11} - 10^{13}$ эВ. Ливни были обнаружены в эмульсионных стопках, экспонированных на высоте 20—27 км. Уже в первых публикациях авторы работ [60, 66, 67] отмечали, что детальное изучение энергетических спектров электронов в электромагнитных каскадах (при начальных

энергиях $\geq 10^{12}$ эв) может подтвердить наличие эффектов влияния среды на тормозное излучение. Как показывают численные оценки, эффект поляризации среды должен появиться в эмульсии в области частот $\hbar\omega \lesssim 7 \cdot 10^{-5} E$. При этом для энергии излучения вместо формулы Бете—Гайтлера $dl \sim d\omega$ имеет место зависимость $dl \sim \frac{\omega^2 d\omega}{E^2}$. Эффект многократного рассеяния должен проявляться в эмульсии в области частот

$$7 \cdot 10^{-5} < \frac{\hbar\omega}{E} < 2 \cdot 10^{-8} \frac{E}{mc^2}$$

Интенсивность при этом определяется формулой $dl \sim \frac{\sqrt{\omega} d\omega}{E}$. На рис. 34, взятом из работы Варфоломеева и Светлолобова [67], приведены кривые для поперечника

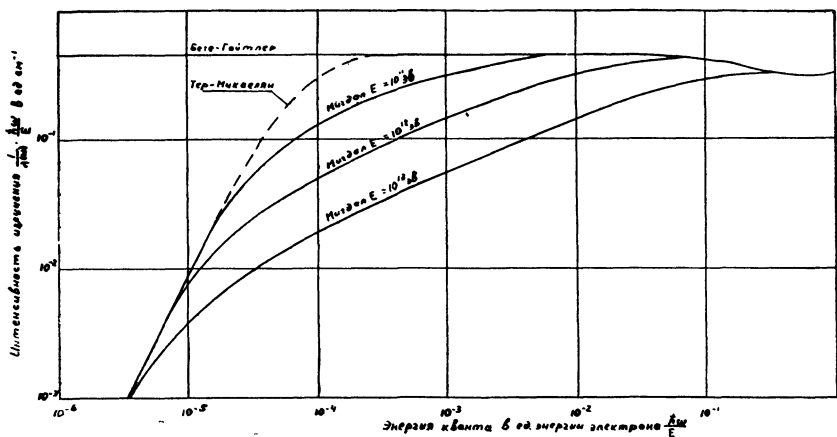


Рис. 34. Энергетическое распределение тормозного излучения электронов в эмульсии соответственно по формулам Бете—Гайтлера, Тер-Микаеляна и формулам Мигдала, учитывающим как поляризацию среды, так и многократное рассеяние для электронов с энергией 10^{11} — 10^{13} эв.

По оси ординат отложена интенсивность излучения $\frac{1}{\lambda(\omega)} \frac{d\hbar\omega}{E}$, где $\lambda(\omega)$ —свободный пробег электрона в эмульсии для излучения кванта с частотой ω , E —энергия электрона.

тормозного излучения в эмульсии, на которых эффекты подавления довольно ясно выражены. К сожалению, элементарные поперечники тормозного излучения измерять непосредственно в электронно-фотонных ливнях нельзя. Поэтому приведенные выше поперечники излучения и соответствующие кривые брались за исходные данные для расчета электромагнитных каскадов. Эта трудоемкая расчетная работа предшествовала анализу экспериментальных данных. Методом Монте-Карло были рассчитаны ливни для начальных энергий электронов: 10^9 , 10^{10} , 10^{11} , $5 \cdot 10^{11}$, 10^{12} , $3 \cdot 10^{12}$ эв на глубине до 2,8 радиационных единиц в фотоэмульсии. Были получены энергетические спектры электронов и пар, а также некоторые данные по флуктуациям. Результаты экспериментов группы А. Варфоломеева, И. Гуревича и их сравнение с теорией представлены на рис. 35. На рисунке сравнивается экспериментальное число пар с энергией, большей $1 \div 2$ Мэв, с предсказаниями теории для различных начальных энергий электрона. Сплошные кривые соответствуют теории, причем верхняя кривая рассчитывалась по формуле Бете — Гайтлера, а нижняя по формулам Мигдала, учитывающим эффект плотности. Хотя экспериментальные кривые и имеют тенденцию лучшего согласия с нижней кривой, однако статистических данных еще мало для однозначного выбора варианта теории.

Расчеты электронно-фотонных ливней методом Монте-Карло производились также Т. Г. Волконской, И. П. Иваненко, П. А. Тимофеевым [69]. Рассчитывались энергетические спектры электронов и фотонов для начальных энергий 10^{14} эв на глубинах от 0,25 до 2 ливневых единиц для свинца и фотоэмульсии. В работе П. А. Тимофеева [70] развита одномерная каскадная теория электронно-фотонных ливней в свинце и воздухе (в приближении А) с учетом поляризации среды. Для поперечника тормозного излучения использовалась формула (15.25). Величина $\frac{\hbar\omega_0}{mc^2}$, входящая в знаменатель указанной формулы, равна для свинца $1,9 \cdot 10^{-4}$, а для воздуха

$7,5 \cdot 10^{-5}$. Следовательно, следует ожидать, что при $\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1} \lesssim 10^{-4}$ интегральное число ливневых частиц уменьшится. В работе рассчитаны интегральные энергетические спектры частиц на глубине $t = 1$ и $t = 2$ и показано, что недостаток ливневых частиц по сравнению с обычными расчетами невелик. Влиянием многократного рассеяния можно пренебречь для энергий начальной частицы, не превышающей 10^{12} эв.

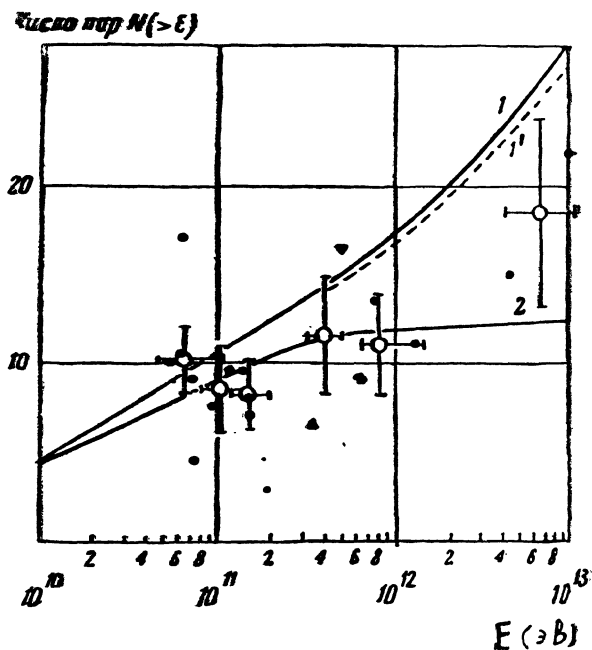


Рис. 35. Число пар N с энергией больше $\varepsilon \sim (1 \div 2) \text{ Мэв}$, образуемых на глубине $\leq 1,5 t$ единиц на один первичный электрон с энергией E . 1—расчетная кривая для среднего значения N в варианте Бете—Гайтлера 2—расчетная кривая для среднего значения N в варианте Мигдала.

- экспериментальные данные Варфоломеева, Гуревича и др.
- ▲—результаты Мьезовича и др.
- экспериментальные данные, усредненные по нескольким ливням.
- ▼—данные по ливню Фенивеша и др.

В работе А. К. Бахтадзе и И. П. Иваненко [71] получено решение одномерных каскадных уравнений с учетом

поляризации среды и ионизационных потерь для случая полного экранирования. Рассчитаны энергетические спектры и зависимость числа частиц от глубины. В последующих работах И. П. Иваненко, Б. Е. Самосудова и А. К. Бахтадзе [72, 73, 74] получены выражения для равновесных спектров электронов и фотонов в приближении B с учетом поляризации среды, а также угловое распределение ливневых частиц. Для тяжелых элементов использовался метод моментов, результаты которого хорошо согласуются с численными расчетами по методу Монте-Карло.

Следует отметить, что учет поляризации среды в уравнениях каскадной теории не усложняет вычисления. Действительно, поперечник излучения с учетом поляризации среды остается однородной функцией отношения $\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1}$, и это дает возможность использовать хорошо разработанный аппарат интегральных преобразований в каскадной теории [42, 75]. Кроме того, учет поляризации среды устраняет трудности в расчетах каскадных процессов, связанных с инфракрасной расходимостью.

Введение эффекта многократного рассеяния настолько усложняет математическую структуру уравнений, что на сегодняшний день эффективные результаты дает только метод Монте-Карло.

IV

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

§ 23. В В Е Д Е Н И Е

В последующих двух главах рассматривается излучение, возникающее при прохождении заряженных частиц через произвольную неоднородную среду.

В большинстве разобранных ниже примеров скорость частицы будет предполагаться постоянной. Исходя из законов сохранения энергии и импульса можно показать, что равномерно движущаяся частица в однородной среде электромагнитные волны не излучает (см. пример в конце § 23). Исключением из этого правила является излучение „сверхсветового электрона“ — так называемое излучение Вавилова—Черенкова [1, 2, 3, 4], теория которого была дана в работе И. Е. Тамма и И. М. Франка. Излучению Вавилова—Черенкова посвящена обширная литература (см., например, обзоры [5, 6]), и поэтому мы опускаем детальное изложение вопросов, связанных с этим излучением.

Таким образом, за исключением случая излучения „сверхсветового“ электрона, равномерно движущаяся частица при прохождении через однородную среду электромагнитные волны не излучает. Для возникновения излучения необходимо создать в среде, через которую проходит частица, неоднородность. Наиболее простая неоднородность — это граница раздела между двумя однородными средами. Такая граница приводит к отражению и преломлению света, законы которого описываются хорошо известными формулами Френеля. Соответ-

ствующее явление, на которое обратили внимание В. Л. Гинзбург и И. М. Франк [7], возникает и при пересечении равномерно движущейся заряженной частицей границы раздела двух сред. При этом появляется излучение как в переднюю, так и в заднюю полусферу. Это излучение носит название переходного излучения и описывается формулами, полученными В. Л. Гинзбургом и И. М. Франком [7]. В теории излучения заряженных частиц в неоднородных средах они играют ту же роль, какую в теории распространения света играют формулы Френеля.

Соответствие между процессами излучения и рассеяния легко установить, если разложить электромагнитное поле равномерно движущейся частицы на псевдофотоны и свести процессы излучения к процессам рассеяния псевдофотонов. Из такого рассмотрения сразу становится очевидным, что причиной излучения является неоднородность среды. В однородной среде равномерно движущаяся частица излучать не будет, поскольку в однородной среде распространение электромагнитных волн не сопровождается рассеянием света. Аналогия между рассеянием света и излучением частиц будет развита и подробно прослежена на примерах, рассмотренных в следующей главе.

В настоящей главе излагается теория переходного излучения на одной (§ 24) и двух границах раздела (§ 25), а также приводится усложненная теория переходного излучения (§ 26) и обзор соответствующих экспериментальных данных (§ 27).

Вопросы переходного излучения равномерно движущихся частиц в неоднородных средах до сих пор систематически мало излагались (см. обзоры [8, 9, 10]). В связи с этим автор вынужден был приводить в тексте необходимые для экспериментов формулы, несмотря на их громоздкий внешний вид.

В последнее время появилось большое число теоретических работ, посвященных кругу вопросов, рассмотренных в этой главе. Естественно, что автор не мог включить в книгу все опубликованные работы. В первую очередь изложены теоретические работы, которые, по мнению автора,

наиболее перспективны для постановки экспериментов в оптической и более жесткой области частот. В частности, опущены все вопросы, связанные с излучением в волноводах, а также излучением токов и диполей. Ссылки на эти работы читатели могут найти в цитируемых нами статьях и обзорах.

Пример. Вывести формулу для углового распределения и интенсивности излучения Вавилова—Черенкова.

Необходимо отметить, что основные свойства черенковского излучения можно получить из элементарных соображений. Приведем их здесь, следуя рассуждениям В. Л. Гинзбурга [11], поскольку в дальнейшем они будут широко использоваться при рассмотрении более сложных вопросов. Исходя из законов сохранения энергии—импульса, определим угол излучения Вавилова—Черенкова:

$$\delta E = \hbar\omega, \quad (23.1)$$

$$\vec{\delta p} = \frac{\hbar\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} \vec{n}. \quad (23.2)$$

δE и $\vec{\delta p}$ — изменения энергии и импульса излучающей частицы, $\hbar\omega$ — энергия и $\frac{\hbar\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} \vec{n}$ — импульс кванта в среде (по этому вопросу см.

обзор В. Л. Гинзбурга [12]), \vec{n} — направление его распространения, ε — диэлектрическая проницаемость среды. Для малых изменений энергии излучающей частицы имеем следующее соотношение:

$$\delta E = v \vec{\delta p}, \quad (23.3)$$

которое легко получить, дифференцируя выражение для энергии $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$. Умножая (23.2) на скорость частицы \vec{v} и используя (23.3) и (23.1), получим:

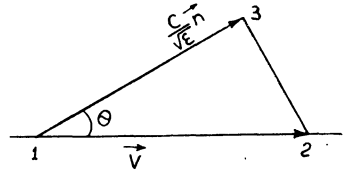
$$\cos \theta = \frac{c}{v \sqrt{\varepsilon}}. \quad (23.4)$$

Формула (23.4) определяет угол излучения Вавилова—Черенкова.

Формулу (23.4) можно получить иным способом, исходя из следующих наглядных геометрических соображений. Допустим, что электрон при своем движении в среде все время излучает электромагнитные волны. Излучение с различных участков траектории будет интерферировать и га-

силь друг друга. Исключение составит только излучение под углом θ (см. рис. 36), для которого фотоны, излученные электроном в точке 1, находятся в одной фазе с фотонами, излученными в любой другой (например, в точке 2) точке траектории. Это следует из того, что за то время, пока электрон дойдет от точки 1 до точки 2, фотон, излученный в точке 1, дойдет до точки 3 и будет находиться в одной фазе с фотоном, который электрон испустит в точке 2.

Рис. 36. К выводу углового распределения излучения Вавилова—Черенкова.



Для вычисления интенсивности излучения необходимо обратиться к решению макроскопического уравнения для векторного потенциала

$$\Delta \vec{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (23.5)$$

Потенциал в точке p в момент времени t , создаваемый зарядом, находящимся в точке q , определяется запаздывающим решением макроскопических уравнений Максвелла (магнитная восприимчивость положена равной единице)

$$\vec{A}(p, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}_{t-R_{pq}V\sqrt{\epsilon}/c}}{R_{pq}} dV_q. \quad (23.6)$$

На больших расстояниях от заряда (точнее говоря, на расстояниях, стремящихся к бесконечности быстрее, чем длина траектории $2vT$, где через $2T$ обозначено время пролета) имеем

$$R_{pq} = R - \vec{r} \vec{n}, \quad (23.7)$$

где \vec{n} — направление вектора \vec{R} , а \vec{r} — радиус-вектор траектории частицы (см. рис. 37). Ток, создаваемый движущейся частицей, равен

$$\vec{j}(t) = e v \delta(\vec{r} - \vec{r}(t)). \quad (23.8)$$

Подставляя (23.7) и (23.8) в (23.6) и беря компоненту Фурье, имеем

$$\vec{A}_\omega = \frac{ee^{ikR}}{2\pi cR} \int \vec{v}(t) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}(t))} dt, \quad (23.9)$$

где через \vec{k} обозначен импульс фотона в среде:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} \vec{n}. \quad (23.10)$$

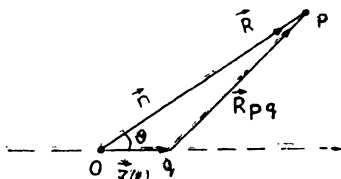


Рис. 37. R_{pq} — расстояние от точки q , где находится заряд, до точки наблюдения p , $\vec{r}(t)$ — траектория заряда, $\vec{R}_{pq} = R - \vec{r}\vec{n}$, а θ — угол излучения.

Интегрирование проводится по всей бесконечной траектории. Мы, однако, будем предполагать траекторию вначале конечной, простирающейся от $-vT$ до $+vT$, и только в конечном результате, при вычислении потерь в единицу времени, устремим $T \rightarrow \infty$. Поскольку $\vec{H}_\omega = \text{rot } \vec{A}_\omega$, то из (23.9), используя формулу

$$\text{rot}(f(R)\vec{a}) = f(R)\text{rot } \vec{a} + [\vec{\nabla} f(R), \vec{a}],$$

где $f(R)$ — произвольная скалярная функция расстояния R , а \vec{a} — произвольный вектор, имеем (при дифференцировании выражения (23.9) члены порядка $1/R^2$ отбрасываем по сравнению с членами $1/R$):

$$\vec{H}_\omega = - \frac{i\omega \sqrt{\epsilon} ee^{ikR}}{2\pi c^2 R} \int [\vec{n}\vec{v}(t)] e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}(t))} dt. \quad (23.11)$$

Вычислим интенсивность излучения частоты ω в телесном угле $d\Omega$ и в интервале частот $d\omega$. Для этого необходимо использовать выражение для излученной энергии частоты ω в телесный угол $d\Omega$, которое для рассматриваемого случая примет вид

$$dI_{n, \omega} = \frac{c |\vec{H}_\omega|^2}{\sqrt{\epsilon}} R^2 d\Omega d\omega. \quad (23.12)$$

Подставив в эту формулу значение \vec{H}_ω из (23.11), получим

$$dI_{\vec{n}, \omega} = \frac{e^2 \omega^2 \sqrt{\epsilon}}{4\pi^2 c^3} d\omega \left| \int_{-T}^{+T} [n\vec{v}(t)] e^{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r}(t))} dt \right|^2. \quad (23.13)$$

Выражение (23.13) позволяет вычислить излучение в среде при произвольном движении заряда. Чтобы получить формулу Тамма—Франка, необходимо предположить, что заряженная частица движется равномерно и прямолинейно. Тогда $\vec{r}(t) = \vec{v}t$ и формулу (23.13) можно переписать в виде следующего выражения:

$$dI_{\vec{n}, \omega}_{T \rightarrow \infty} = 2T \frac{e^2 \omega^2 \sqrt{\epsilon}}{4\pi^2 c^3} d\Omega d\omega [n\vec{v}]^2 \int_{-T}^{+T} e^{i(\omega - \vec{k} \vec{v})t} dt. \quad (23.14)$$

Один из интегралов по времени заменен на $2T$, поскольку при больших T интеграл отличен от нуля только тогда, когда выполняется равенство $\omega = \vec{k} \vec{v}$. Введя угол θ между направлением \vec{v} и направлением излучения \vec{n} , получим энергию излучения в единицу времени

$$d\dot{I}_{\vec{n}, \omega} = \frac{e^2 v^2 \omega^2 \sqrt{\epsilon}}{2\pi c^3} d\Omega d\omega \delta(\omega - kv \cos \theta) \sin^2 \theta. \quad (23.15)$$

Наличие δ -функции определяет Черенковский угол излучения, который дается формулой (23.4).

Интегрируя по телесному углу, получим формулу Тамма—Франка:

$$d\dot{I}_{\omega} = \frac{e^2 v \omega d\omega}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon} \right). \quad (23.16)$$

Формула (23.16) определяет энергию, излученную в единицу времени.

§ 24. ВЫВОД ФОРМУЛ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим задачу о переходном излучении [7], т. е. излучении, возникающем при переходе заряженной частицы из среды с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 в среду с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 .

Выводу формул для полей и интенсивностей в случае одной или двух границ раздела посвящено большое число работ [13—25]. Нам представляется, что читателю легче самому вывести необходимые формулы, чем восстанавливать

детали всех оригинальных работ. Это следует из того, что вывод соответствующих формул (особенно для косоугольного влета и в случае двух границ раздела), базирующийся обычно на известных методах, требует длительных, хотя и простых, алгебраических вычислений.

Тем не менее, мы приведем в тексте полный вывод формул Гинзбурга—Франка в случае нормального влета при наличии одной границы раздела. При изложении этого вопроса будем следовать работе [17]. Что касается других случаев, то в книге опущены подробные выкладки и, как правило, приводятся лишь наиболее важные промежуточные результаты, зная которые, читатель без труда сможет восстановить весь расчет.

Перейдем к вычислению интенсивности переходного излучения в случае, когда скорость частицы направлена перпендикулярно границе раздела двух сред. Направим ось z вдоль скорости частицы \vec{v} . Будем считать, что скорость частицы постоянна. Примем, что плоскость раздела двух сред совпадает с плоскостью xy ($z = 0$). При $z < 0$ частица находится в первой среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_1$, при $z > 0$ — в среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_2$ (см. рис. 38). Уравнения Максвелла для потенциалов (слева от поверхности раздела) имеют вид:

$$\Delta \vec{A} - \frac{\epsilon_1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} e\vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{v}t), \quad (24.1)$$

$$\Delta \varphi - \frac{\epsilon_1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi e}{\epsilon_1} \delta(\vec{r} - \vec{v}t).$$

Аналогичные уравнения (после замены ϵ_1 на ϵ_2) описывают электромагнитные поля справа от поверхности раздела. Решение уравнений (24.1) будем искать, разлагая все величины в четырехкратные интегралы Фурье, например:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int \vec{A}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} d^3k d\omega. \quad (24.2)$$

Для нахождения электрического поля воспользуемся формулой

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \frac{i\omega}{c} \vec{A}(\vec{k}, \omega) - ik\varphi(\vec{k}, \omega). \quad (24.3)$$

В дальнейшем всем величинам слева от поверхности раздела будем приписывать индекс 1, а справа — индекс 2. Легко видеть, что решение неоднородных уравнений приводит к следующему выражению (сравни с формулой (21.18)) для \vec{E}_1 :

$$\vec{E}_1(\vec{k}, \omega) = \frac{ie}{2\pi^2} \left[\frac{\omega v}{c^2} - \frac{\vec{k}}{\varepsilon_1} \right] \frac{\delta(\omega - \vec{k}v)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1}. \quad (24.4)$$

Для получения полного решения уравнений (24.1) необходимо к частному решению неоднородных уравнений добавить решения однородных уравнений. Решениями однородных уравнений являются поля излучения, которые всегда можно представить в виде

$$\vec{E}_1^\Phi(\vec{k}, \omega) = \vec{E}_1'(\vec{k}, \omega) \delta\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1\right). \quad (24.5)$$

Выражение для электрического поля справа от поверхности раздела (при $z > 0$) получим, заменяя в (24.4) и (24.5) индекс 1 на индекс 2. Нашей задачей является определение полей излучения \vec{E}_1, \vec{E}_2' . Для их определения воспользуемся, как это обычно делается при выводе формул Френеля, условиями на границах раздела. Из условий непрерывности тангенциальной составляющей суммарного электрического поля $\vec{E}_t + \vec{E}_t^\Phi$ при $z = 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \int [\vec{E}_{1t}(\vec{k}, \omega) + \vec{E}_{1t}^\Phi(\vec{k}, \omega)] e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} d^3k d\omega = \\ & = \int [\vec{E}_{2t}(\vec{k}, \omega) + \vec{E}_{2t}^\Phi(\vec{k}, \omega)] e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} d^3k d\omega. \end{aligned} \quad (24.6)$$

Далее, непрерывность нормальной к поверхности раздела составляющей полной индукции $\varepsilon(\vec{E}_n + \vec{E}_n^\Phi)$ приводит при $z = 0$ к условию

$$\begin{aligned} & \int \varepsilon_1 [E_{1n}(\vec{k}, \omega) + E_{1n}^\Phi(\vec{k}, \omega)] e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} d^3k d\omega = \\ & = \int \varepsilon_2 [E_{2n}(\vec{k}, \omega) + E_{2n}^\Phi(\vec{k}, \omega)] e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} d^3k d\omega. \end{aligned} \quad (24.7)$$

Кроме этих условий, мы имеем для полей излучения $\text{div} \vec{E}_{1,2}^\Phi = 0$ везде, как слева, так и справа от поверхности раздела (аргументы полей \vec{k} и ω для упрощения записи мы в дальнейшем будем опускать),

$$\vec{k} \vec{E}_1^\Phi = q \vec{E}_{1t}^\Phi + k_z E_{1n}^\Phi = 0, \quad (24.8)$$

$$\vec{k} \vec{E}_2^\Phi = q \vec{E}_{2t}^\Phi + k_z E_{2n}^\Phi = 0.$$

Через вектор \vec{q} мы будем в этой главе обозначать проекцию вектора \vec{k} на поверхность раздела, а через k_z проекцию \vec{k} на ось z . Следовательно,

$$k^2 = q^2 + k_z^2. \quad (24.9)$$

Покажем, что тангенциальные составляющие полей излучения удовлетворяют равенству $\vec{q} \vec{E}_{1,2t}^\Phi = q E_{1,2t}^\Phi$, т. е. векторы $\vec{E}_{1,2}^\Phi$, \vec{k} и ось z лежат в одной плоскости. Действительно, поскольку $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$, а \vec{A} направлен по вектору \vec{v} (см. формулу (23.9)), то магнитный вектор поля излучения параллелен вектору $[\vec{k}\vec{v}]$, электрический же вектор поля излучения \vec{E}^Φ , в силу его перпендикулярности вектору \vec{H}^Φ , должен лежать в плоскости, содержащей векторы \vec{k} и \vec{v} . По-

сколькx в рассматриваемом случае вектор \vec{v} направлен вдоль оси z , то вектор \vec{E}^Φ будет лежать в плоскости, содержащей вектор \vec{k} и ось z .

Этим определяется поляризация переходного излучения. Плоскость, содержащую вектор \vec{k} и нормаль к границе раздела (т. е. ось z), будем называть плоскостью излучения. Следовательно, переходное излучение при нормальном влете поляризовано в плоскости излучения.

Таким образом, уравнения (24.6)—(24.8) с учетом условия $q\vec{E}_t^\Phi = qE_t^\Phi$ однозначно определяют поля \vec{E}_1^Φ и \vec{E}_2^Φ . Для нахождения последних проинтегрируем уравнения (24.6) и (24.7) по k_z . При этом надо учесть тот факт, что для волн, распространяющихся в первой среде и движущихся против оси z , компонента волнового вектора на эту ось отрицательна, а для волн, движущихся вдоль оси, положительна (при $\omega > 0$; напоминаем, что временная компонента выбрана в виде $e^{-i\omega t}$). Это означает, что при интегрировании выражения (24.5) k_z заменяется на $-x_1$ для волн, движущихся против оси z , и на x_2 для волн, движущихся вдоль оси z . Через $x_{1,2}$ мы обозначим положительное значение корня

$$x_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2} - q^2}. \quad (24.9')$$

В результате мы имеем систему уравнений для определения полей излучения:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{ie\varepsilon_1}{2\pi^2} \left[\frac{\omega v^2}{c^2} - \frac{\omega}{\varepsilon_1} \right] \frac{1}{v^2 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \right)} \right\}_{k_z = \frac{\omega}{v}} + \left\{ \frac{\varepsilon_1 E'_{1n}}{2|k_z|} \right\}_{k_z = -x_1} = \\ & = \left\{ \frac{ie\varepsilon_2}{2\pi^2} \left[\frac{\omega v^2}{c^2} - \frac{\omega}{\varepsilon_2} \right] \frac{1}{v^2 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 \right)} \right\}_{k_z = \frac{\omega}{v}} + \left\{ \frac{\varepsilon_2 E'_{2n}}{2|k_z|} \right\}_{k_z = x_2}, \end{aligned} \quad (24.10)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\frac{ieq}{2\pi^2\varepsilon_1 v \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1\right)} \right\}_{k_z = \frac{\omega}{v}} + \left\{ \frac{E'_{1t}}{2|k_z|} \right\}_{k_z = -x_1} = \\
& = \left\{ \frac{ieq}{2\pi^2\varepsilon_2 v \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2\right)} \right\}_{k_z = \frac{\omega}{v}} + \left\{ \frac{E'_{2t}}{2|k_z|} \right\}_{k_z = x_2}. \quad (24.11)
\end{aligned}$$

Перепишем соотношения (24.8) в следующем виде:

$$E'_{1t} = \frac{x_1 E'_{1n}}{q}, \quad E'_{2t} = -\frac{x_2 E'_{2n}}{q}. \quad (24.8')$$

Из уравнений (24.10), (24.11), (24.8) определим E'_{1n} и E'_{2n} :

$$\begin{aligned}
E'_{1n}(\vec{k}, \omega) &= \frac{ie x_1 q^2}{\pi^2 v (\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 x_1)} \times \\
&\times \left\{ \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{v}{\omega} x_2}{\frac{\omega^2}{v^2} + q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1} + \frac{-1 + \frac{v}{\omega} x_2}{\frac{\omega^2}{v^2} + q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2} \right\}, \quad (24.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E'_{2n}(\vec{k}, \omega) &= \frac{-ie x_2 q^2}{\pi^2 v (\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 x_1)} \times \\
&\times \left\{ \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{v}{\omega} x_1}{\frac{\omega^2}{v^2} + q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2} - \frac{1 + \frac{v}{\omega} x_1}{\frac{\omega^2}{v^2} + q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1} \right\}. \quad (24.13)
\end{aligned}$$

Введем углы излучения фотона. Слева от поверхности раздела имеем

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \sin \theta_1; \quad x_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1. \quad (24.14)$$

Аналогично в формуле (24.13) следует положить

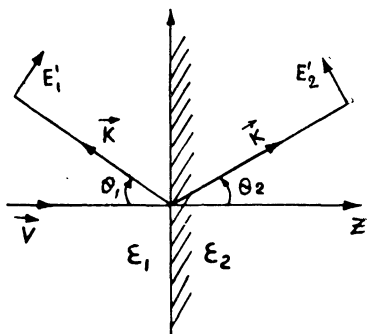
$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2} \sin \theta_2, \quad x_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_2. \quad (24.14')$$

Углы θ_1 и θ_2 отсчитываются от оси z , как это показано на рис. 38. Таким образом, слева от поверхности раздела мы имеем

$$\vec{E}_1^\Phi(\vec{r}, t) = \int \frac{\vec{E}_1'}{2x_1} \exp(ik_x x + ik_y y - ix_1 z - i\omega t) dk_x dk_y d\omega. \quad (24.15)$$

Аналогичное выражение имеет место справа от поверхности раздела. Для упрощения записи штрихи в обозначениях полей излучения будем в дальнейшем опускать.

Рис. 38. ϵ_1 и ϵ_2 — диэлектрические постоянные первой и второй среды. Плоскость $z=0$ есть плоскость раздела двух сред. Углы θ_1 и θ_2 определяют углы излучения в заднюю и переднюю полусферы. Отсчет углов показан на рисунке.



Найдем угловое и частотное распределение переходного излучения слева от поверхности раздела. Для этого вычислим поток вектора Пойнтинга \vec{S}_z (за все время пролета частицы) через плоскость, перпендикулярную движению частицы и удаленную от поверхности раздела на большом расстоянии $z \rightarrow -\infty$.

$$S_z = \frac{c}{4\pi} \int [\vec{E}\vec{H}]_z dx dy dt. \quad (24.16)$$

Подставим разложение (24.15) в (24.16) и учитывая, что

$$dk_x dk_y = 2\pi q dq = 2\pi k^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_1,$$

получим для углового и частотного распределения энергии переходного излучения формулу

$$dI_1(\vec{n}, \omega) = 4\pi^2 c V \sqrt{\varepsilon_1} \left| \frac{E_{1t}}{2x_1} \right|^2 k^2 d\Omega d\omega. \quad (24.17)$$

Отметим, что S_z связано с $dI(\vec{n}, \omega)$ формулой

$$S_z = \int \cos \theta_1 dI(\vec{n}, \omega),$$

в которой интегрирование по ω происходит от 0 до ∞ , а интеграл по $d\Omega$ берется по левой полусфере. Выражение (24.17) решает поставленную задачу. Вычислим, используя (24.8), (24.12), (24.13) и (24.17), энергию переходного излучения $dI_1(\vec{n}, \omega)$ в левое и $dI_2(\vec{n}, \omega)$ в правое полупространства. Приведем для справок значения отдельных членов, входящих в (24.12) и (24.13):

$$|E_{1t}| = |E_{1n}| \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1}, \quad (24.18)$$

$$|\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 x_1| = \frac{\omega}{c} V \sqrt{\varepsilon_1} |\varepsilon_2 \cos \theta_1 + V \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 \sin^2 \theta_1}|. \quad (24.19)$$

Аналогичные выражения для правого полупространства отличаются перестановкой индексов 1 и 2. Приведем еще выражение для члена, стоящего в фигурных скобках (24.12):

$$\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) (1 - \beta^2 \varepsilon_1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1})}{\frac{\omega^2}{v^2} \varepsilon_1 (1 - \beta^2 \varepsilon_1 \cos^2 \theta_1) (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1})}; \quad (24.20)$$

здесь $\beta = \frac{v}{c}$. Выражение в фигурных скобках формулы (24.13) отличается от (24.20) заменой индексов 1 и 2 и изменением знака перед β .

Учитывая (24.18)—(24.20), перепишем (24.17) в виде

$$dI_1(\vec{n}, \omega) = \frac{e^2 v^2 \varepsilon_1^{1/2} \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1}{\pi^2 c^3} d\omega d\Omega \times \\ \times \left| \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) (1 - \beta^2 \varepsilon_1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1})}{(1 - \beta^2 \varepsilon_1 \cos^2 \theta_1) (1 + \beta \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}) (\varepsilon_2 \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 \sin^2 \theta_1})} \right|^2. \quad (24.21)$$

Аналогичным образом получим выражение для излученной энергии в правое полупространство:

$$dl_2(\vec{n}, \omega) = \frac{e^2 v^2 \varepsilon_2^{1/2} \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2}{\pi^2 c^3} d\omega d\Omega \times$$

$$\times \left| \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (1 - \beta^2 \varepsilon_2 - \beta \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \theta_2})}{(1 - \beta^2 \varepsilon_2 \cos^2 \theta_2)(1 - \beta \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \theta_2}) (\varepsilon_1 \cos \theta_2 + \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2^2 \sin^2 \theta_2})} \right|^2$$

(24.22)

Формулы (24.21) и (24.22) дают решение поставленной задачи и в литературе их принято называть формулами Гинзбурга—Франка.

Легко заметить, что (24.21) и (24.22) переходят друг в друга при замене индексов $1 \leftrightarrow 2$ и $\beta \rightarrow -\beta$.

Обратим внимание, что интенсивность излучения пропорциональна квадрату модуля разности диэлектрических постоянных $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2$, а для нерелятивистских частиц также и квадрату скорости.

Зависимость от входящих в формулы параметров сложная и в каждом конкретном случае будет определяться значениями $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$. Конкретные кривые, построенные по формулам (24.21) и (24.22), приведены в § 27.

Полученные формулы верны и для непрозрачных сред, если только длина поглощения кванта больше расстояния от границы раздела до точки наблюдения. В противном случае при использовании формулы (24.15) необходимо учитывать затухание, вызванное комплексностью диэлектрической постоянной (см. случай пластинки § 25).

Обратим внимание, что знаменатели формул (24.21), (24.22), описывающих интенсивность переходного излучения, обращаются в нуль в прозрачной среде при выполнении условия излучения Черенкова—Вавилова. Это не должно вызывать удивления, поскольку в прозрачной среде излучение Черенкова—Вавилова суммируется со всей бесконечной траектории (что будет соответствовать излучению цилиндрической, а не сферической электромагнитной волны, интенсивность которой мы вычислили). В действительности, однако, всегда существует хотя бы сколь угодно малое поглощение,

вследствие чего длина траектории, на которой происходит когерентное суммирование излучения Черенкова—Вавилова, будет конечной и по порядку величины равной длине поглощения кванта. Это означает, что на достаточно больших расстояниях мы можем описывать излучение Черенкова—Вавилова сферической волной (см. разобранный выше вывод формулы Тамма—Франка). Для количественной оценки тех расстояний, начиная с которых формулы (24.21) и (24.22) будут справедливы, обратим внимание, что при наличии затухания „эффективный размер“ излучающей области будет порядка $r \sim \frac{c}{\omega} \frac{1}{\varepsilon''}$. Для того чтобы мы могли считать волну

сферической, необходимо пользоваться формулами (23.6), (23.7), (23.9), из которых следует, что влиянием квадратичного по размерам источника члена, опущенного в формуле (23.7), можно пренебречь, если выполняется условие $\frac{\omega}{c} \frac{r^2}{R} \ll 1$. Следовательно, цилиндрическая волна трансформируется в сферическую и формулы (24.21) и (24.22) остаются в силе на расстояниях, превышающих $R \gg \frac{c}{\omega} \frac{1}{\varepsilon''^2}$.

Рассмотрим теперь задачу о переходном излучении, когда скорость частицы составляет с осью z некоторый угол ψ (случай наклонного падения на границу раздела двух сред исследовался в работах [18—21]). В этом случае плотность заряда и тока равны соответственно

$$\rho = e\delta(\vec{r} - \vec{v}t), \quad \vec{j} = \rho\vec{v},$$

где

$$\vec{v} = \{v_x = v \sin \psi, 0, v_z = v \cos \psi\}. \quad (24.23)$$

Не нарушая общности, мы предполагаем, что скорость частицы лежит в плоскости (x, z) (см. рис. 39).

Решение задачи в этом случае хотя и аналогично решению в случае нормального падения, но требует более длительных вычислений. Для нахождения полей излучения

используются граничные условия. Систему получающихся при этом уравнений удобно исследовать, если разложить тангенциальные составляющие полей на компоненты, направленные по векторам \vec{x} и \vec{q} . Напомним, что через \vec{q} обозначена тангенциальная составляющая вектора \vec{k} . Уравнения,

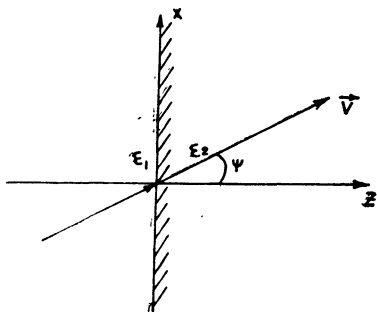


Рис. 39. Направление вылета определяется углом ψ . Следовательно,

$$\beta_z = \frac{v}{c} \cos \psi, \quad \beta_x = \frac{v}{c} \sin \psi.$$

Направление вылета кванта определяется направляющими косинусами $\cos \theta_x$, $\cos \theta_y$, $\cos \theta_z$ относительно осей x , y , z при излучении вправо и относительно осей x , y , $-z$ при излучении влево (см. рис. 38).

соответствующие уравнениям (24.10) и (24.11), легко решаются, и мы получаем для тангенциальных компонент полей излучения следующие формулы (сравни с формулами (24.12) и (24.13), штрихи опущены):

$$E_{1,2q} \rightarrow = \frac{ieq x_{1,2}^2}{\pi^2 v_z (\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 x_1)} \left\{ \frac{\varepsilon_{2,1} \mp \frac{v_z}{\omega} x_{2,1}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2}} + \frac{-1 \pm \frac{v_z}{\omega} x_{2,1}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{2,1}} - \frac{k_x v_x}{\omega x_{1,2}} \left(\frac{\omega}{v_z} - k_x \frac{v_x}{v_z} + x_1 - x_2 \right) \left(\frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1} - \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2} \right) \right\}, \quad (24.24)$$

$$E_{1,2x} = - \frac{ie}{\pi^2 c^2 v_z} \frac{\omega x_{1,2} \left(\frac{\omega}{v_z} - k_x \frac{v_x}{v_z} \mp x_{2,1} \right)}{x_1 + x_2} \times \left(\frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1} - \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2} \right), \quad (24.25)$$

где верхние знаки соответствуют полю \vec{E}_{1t} слева от границы раздела, нижние знаки соответствуют полю \vec{E}_{2t} справа от границы; q и $\kappa_{1,2}$ определяются формулами (24.14).

Как мы видели, в случае нормального влета ($\psi = 0$) электрический вектор излучаемых волн лежит в плоскости излучения (плоскость, содержащая вектор \vec{k} и нормаль к границе раздела). Однако в случае косоного влета ($\psi \neq 0$) имеется еще компонента, направленная по оси x . Поэтому возможны две различные поляризации: одна — электрический вектор которой лежит в плоскости излучения, и вторая — электрический вектор которой перпендикулярен к плоскости излучения. Поляризацию первого типа мы будем называть параллельной и приписывать индекс \parallel (\vec{E}^{\parallel}), поляризацию второго типа — перпендикулярной и приписывать индекс \perp (\vec{E}^{\perp}).

Разложим \vec{E}_t и \vec{H}_t на две компоненты, одна из которых лежит в плоскости излучения, а другая перпендикулярна к ней. Легко получить выражения для параллельных и перпендикулярных к плоскости излучения компонент векторов. Приведем их проекции на оси x и y :

$$\begin{aligned} E_{1,2x}^{\parallel} &= \cos \varphi (E_{1,2q} + \cos \varphi E_{1,2x}), \\ E_{1,2y}^{\parallel} &= \sin \varphi (E_{1,2q} + \cos \varphi E_{1,2x}), \end{aligned} \quad (24.26)$$

$$E_{1,2x}^{\perp} = \sin^2 \varphi E_{1,2x},$$

$$E_{1,2y}^{\perp} = -\sin \varphi \cos \varphi E_{1,2x}.$$

$$H_{1,2x}^{\parallel} = \mp \frac{c}{\omega} \kappa_{1,2} \sin \varphi \cos \varphi E_{1,2x},$$

$$H_{1,2y}^{\parallel} = \mp \frac{c}{\omega} \kappa_{1,2} \sin^2 \varphi E_{1,2x},$$

(24.27)

$$H_{1,2x}^{\perp} = \pm \frac{\omega}{c} \frac{\epsilon_{1,2}}{\kappa_{1,2}} \sin \varphi (E_{1,2q} + \cos \varphi E_{1,2x}),$$

$$H_{1,2y}^{\perp} = \mp \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_{1,2}}{\chi_{1,2}} \cos \varphi (E_{1,2q} + \cos \varphi E_{1,2x}).$$

В формулах (24.26) и (24.27) и далее через φ обозначен угол между осью x и вектором \vec{q} .

Перейдем теперь к вычислению потока вектора Пойнтинга через плоскости $z_{1,2} \rightarrow \pm \infty$. Вектор Пойнтинга для излучения различных поляризаций имеет по определению вид:

$$\vec{S}_{1,2}^{\parallel} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}_{1,2t}^{\parallel} \vec{H}_{1,2t}^{\perp}], \quad (24.28)$$

$$\vec{S}_{1,2}^{\perp} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}_{1,2t}^{\perp} \vec{H}_{1,2t}^{\parallel}].$$

Исходя из этих определений и воспользовавшись формулами (24.26) и (24.27), для спектральной плотности энергии излучения $I_{1,2}^{\parallel, \perp}(\vec{n}, \omega)$ получим:

$$I_{1,2}^{\parallel}(\vec{n}, \omega) = \frac{dI_{1,2}^{\parallel}(\vec{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{\pi^2 \omega^3 \varepsilon_{1,2}^2}{c^2 \chi_{1,2}^3} \cos \theta_{1,2} |E_{1,2q} + \cos \varphi E_{1,2x}|^2, \quad (24.29)$$

$$I_{1,2}^{\perp}(\vec{n}, \omega) = \frac{dI_{1,2}^{\perp}(\vec{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{\pi^2 \omega \varepsilon_{1,2}}{\chi_{1,2}} \cos \theta_{1,2} \sin^2 \varphi |E_{1,2x}|^2. \quad (24.30)$$

Эти формулы, совместно с формулами (24.24) и (24.25), определяют энергию переходного излучения назад и вперед (индексы 1 и 2). В частном случае ($\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$) формулы (24.29) и (24.30) можно записать в относительно простом виде (В. Пафомов—частное сообщение):

$$I_2^{\parallel}(\vec{n}, \omega) = \frac{e^2 \beta_z^2 \cos^2 \theta_z |1 - \varepsilon|^2}{\pi \varepsilon c [(1 - \beta_x \cos \theta_x)^2 - \beta_z^2 \cos^2 \theta_z]^2 \sin^2 \theta_z} \times \\ \times \left| \frac{(1 - \beta_x \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_z} - \beta_z^2 - \beta_x \cos \theta_x) \sin^2 \theta_z + \beta_x \beta_z \cos \theta_x \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_z}}{(1 - \beta_x \cos \theta_x - \beta_z \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_z}) (\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_z} + \varepsilon \cos \theta_z)} \right|^2, \quad (24.31)$$

$$I_2^\perp(\vec{n}, \omega) = \frac{e^2 \beta_x^2 \beta_z^4 \cos^2 \theta_y \cos^2 \theta_x |1 - \varepsilon|^2}{\pi^2 c [(1 - \beta_x \cos \theta_x)^2 - \beta_z^2 \cos^2 \theta_z] \sin^2 \theta_z} \times \\ \times \left| (1 - \beta_x \cos \theta_x - \beta_z \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_z}) (\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_z} + \cos \theta_z) \right|^{-2}. \quad (24.32)$$

I_2^\parallel и I_2^\perp определяют энергию излучения „вперед“ при вылете частицы из среды с диэлектрической проницаемостью ε в вакуум ($\beta_z > 0$). Случай $\beta_z < 0$ соответствует влету частицы из вакуума в среду. Интенсивность излучения „назад“ дается формулами (24.31) и (24.32), в которых индекс 2 нужно заменить на индекс 1. В формулах использованы следующие обозначения: направление влета определяется величинами $\beta_z = \frac{v}{c} \cos \psi$ и $\beta_x = \frac{v}{c} \sin \psi$, направление излучения определяется направляющими косинусами волнового вектора \vec{k} :

$$\begin{aligned} \cos \theta_x &= \sin \theta_2 \cos \varphi \\ \cos \theta_y &= \sin \theta_2 \sin \varphi \\ \cos \theta_z &= \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (24.33)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формул (24.29) и (24.30).

1. При $\psi = 0$ ($\beta_x = 0$) $I_{1,2}^\perp = 0$ и из $I_{1,2}^\parallel$ мы получаем соответственно формулы (24.21) и (24.22).

2. При устремлении угла входа частицы $\psi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ переходной эффект должен исчезнуть. Из формул (24.31) и (24.32) следуют соотношения:

$$I^\parallel \sim \cos^2 \psi, \quad I^\perp \sim \cos^4 \psi.$$

Поэтому полное излучение $(I^\perp + I^\parallel)$ при $\psi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ исчезает, как $\cos^2 \psi$.

3. Если скорость частицы мала, т. е. $\beta \ll 1$, то (при $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$) для излучения назад имеем

$$I_1^{\parallel}(\vec{n}, \omega) = \frac{e^2 \beta^2}{\pi^2 c} \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \psi \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_1}} \right|^2, \quad (24.34)$$

$$I_1^{\perp}(\vec{n}, \omega) = \frac{e^2 \beta^6}{\pi^2 c} \cos^2 \theta_1 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi \cos^4 \psi \left| \frac{\varepsilon - 1}{\cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_1}} \right|^2. \quad (24.35)$$

Легко видеть, что при $\beta \ll 1$, $I_1^{\parallel} \gg I_1^{\perp}$. Следовательно, поляризация в случае нерелятивистских частиц при наклонном влете такая же, как и при нормальном.

4. Для всех реальных сред (т. е. если ни одна из двух сред не является идеальным проводником) излучение под углом $\theta_{1,2} = \pi/2$ исчезает.

§ 25. ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ПЛАСТИНКЕ

Переходное излучение при наличии двух границ раздела (пластинка) при нормальном влете было рассмотрено В. Пафомовым [22]. Мы начнем изложение этого вопроса с более общего случая, наклонного влета частицы в пластинку, следуя работе В. А. Енгибаряна и Б. В. Хачатряна [23]. Пусть в среде с диэлектрической проницаемостью ε_1 помещена пластинка толщиной a , ограниченная плоскостями $z=0$ и $z=a$ (см. рис. 40). Диэлектрическая проницаемость пластинки равна ε_2 . Магнитные проницаемости положены равными единице $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Скорость заряда принята постоянной $\vec{v} = \text{const}$ и составляет с положительным направлением оси z (нормалью к пластинке) угол ψ .

Очевидно, что в области $z < 0$ будут присутствовать только отраженные волны (\vec{E}_1^-, \vec{H}_1^-), в области $z > a$ — волны, распространяющиеся в положительном направлении оси z (\vec{E}_1^+, \vec{H}_1^+), а в области внутри пластинки $0 < z < a$ будут присутствовать волны обоих типов (\vec{E}_2^-, \vec{H}_2^- и \vec{E}_2^+, \vec{H}_2^+). Нижние индексы характеризуют среду (индекс 1 соответствует среде ε_1 , индекс 2 — среде ε_2), верхние же индексы опреде-

Ляют направление распространения волн: плюсом (+) обозначены волны, распространяющиеся вправо, а минусом (—) — распространяющиеся в обратном направлении. Для первого типа волн необходимо выбрать k_z положительным, а для второго типа k_z выбирается отрицательным (при $\omega > 0$, поскольку временная экспонента имеет вид $e^{-i\omega t}$).

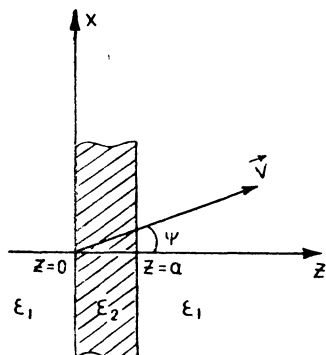


Рис. 40. Переходное излучение в пластинке с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 и толщиной a .

Дальше мы поступаем аналогично тому, как это проделано в § 24: запишем условия непрерывности тангенциальных составляющих полей и нормальных составляющих индукций на плоскостях $z = 0$ и $z = a$. Кроме условий непрерывности, мы имеем следующие условия поперечности для фурье-компонент полей излучения:

$$\begin{aligned} \vec{k} \vec{E}_1^- &= q \vec{E}_{1t}^- - \chi_1 E_{1n}^- = 0, \\ \vec{k} \vec{E}_2^+ &= q \vec{E}_{2t}^+ + \chi_2 E_{2n}^+ = 0, \\ \vec{k} \vec{E}_2^- &= q \vec{E}_{2t}^- - \chi_2 E_{2n}^- = 0, \\ \vec{k} \vec{E}_1^+ &= q \vec{E}_{1t}^+ + \chi_1 E_{1n}^+ = 0. \end{aligned} \tag{25.1}$$

Аналогичные условия поперечности имеют место и для магнитных векторов, однако в дальнейшем мы не будем пользоваться ими, а вместо них воспользуемся условиями перпендикулярности векторов \vec{E} и \vec{H} :

$$\vec{H}_1^- = \frac{c}{\omega} [\vec{q} - \vec{x}_1, \vec{E}_1^-], \quad \vec{H}_2^- = \frac{c}{\omega} [\vec{q} - \vec{x}_2, \vec{E}_2^-], \quad (25.2)$$

$$\vec{H}_1^+ = \frac{c}{\omega} [\vec{q} + \vec{x}_1, \vec{E}_1^+], \quad \vec{H}_2^+ = \frac{c}{\omega} [\vec{q} + \vec{x}_2, \vec{E}_2^+].$$

Векторы \vec{x}_1 и \vec{x}_2 направлены вдоль оси z , а их величина определяется формулами (24.9'). Знак минус в правых частях равенств (25.1) и (25.2) учитывает тот факт, что для волн, движущихся против оси z , компонента волнового вектора на эту ось отрицательна, а для волн, движущихся вдоль оси z — положительна (при $\omega > 0$). Условия непрерывности совместно с (25.1) приводят к системе уравнений, однозначно определяющих фурье-компоненты полей излучения. Чтобы решить эту систему, поступаем так же, как и в § 24. Магнитные поля при помощи соотношений (25.2) выражаем через электрические и разлагаем последние на две составляющие, направленные вдоль вектора \vec{q} и вдоль оси x . После такого разбиения электрических векторов алгебраическая система уравнений, определяющая поля излучения, упрощается. Решения этих уравнений имеют вид [23]:

$$E_{1x}^- = -\frac{fx_1}{D_1} [(\chi_1 - \chi_2)(k'_z + \chi_2)e^{iax_2} + (\chi_1 + \chi_2)(\chi_2 - k'_z)e^{-iax_2} - 2\chi_2(\chi_1 - k'_z)e^{iak'_z}], \quad (25.3)$$

$$E_{1x}^+ = -\frac{fx_1}{D_1} [(\chi_2 - \chi_1)(k'_z - \chi_2)e^{iax_2} + (\chi_1 + \chi_2)(k'_z + \chi_2)e^{-iax_2} - 2\chi_2(k'_z + \chi_1)e^{-iak'_z}]e^{ia(k'_z - \chi_1)}, \quad (25.4)$$

$$E_{1q}^- = \frac{ieq}{\pi^2 v_z} \frac{x_1}{x_2} \frac{1}{D} \left\{ \alpha_1 \left(\frac{\varepsilon_2}{\chi_2} + \frac{\varepsilon_1}{\chi_1} \right) e^{-iax_2} + \alpha_2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\chi_2} - \frac{\varepsilon_1}{\chi_1} \right) e^{iax_2} + \right. \\ \left. + 2\varepsilon_2 \delta_1 e^{iak'_z} - \frac{k_x v_x}{\omega \chi_2} \left(\frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1} - \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2} \right) \right\} \times \\ \times \left[F_1 \left(\frac{\varepsilon_2}{\chi_2} + \frac{\varepsilon_1}{\chi_1} \right) e^{-iax_2} + F_1 \left(\frac{\varepsilon_2}{\chi_2} - \frac{\varepsilon_1}{\chi_1} \right) e^{iax_2} - 2 \frac{\varepsilon_2}{\chi_2} F_2 e^{iak'_z} \right], \quad (25.5)$$

$$\begin{aligned}
E_{1q}^+ = & \frac{ieq}{\pi^2 v_z} \frac{x_1}{x_2} \frac{e^{ia(k'_z - x_1)}}{D} \left\{ \alpha_2 \left(\frac{\varepsilon_2}{x_2} + \frac{\varepsilon_1}{x_1} \right) e^{-iax_2} + \right. \\
& + \alpha_1 \left(\frac{\varepsilon_2}{x_2} - \frac{\varepsilon_1}{x_1} \right) e^{iax_2} + 2\varepsilon_2 \delta_2 e^{-iak'_z} - \frac{k_x v_x}{\omega x_2} \times \\
& \times \left(\frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1} - \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2} \right) \left[F_2 \left(\frac{\varepsilon_2}{x_2} + \frac{\varepsilon_1}{x_1} \right) e^{-iax_2} + \right. \\
& \left. \left. + F_2 \left(\frac{\varepsilon_2}{x_2} - \frac{\varepsilon_1}{x_1} \right) e^{iax_2} - 2 \frac{\varepsilon_2}{x_2} F_1 e^{-iak'_z} \right] \right\}, \quad (25.6)
\end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
k_{1,2}^2 = & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2}, \quad f = \frac{\omega v_x}{c^2} (b_1 - b_2), \\
b_{1,2} = & \frac{ie}{\pi^2 v_z} (q^2 + k_z'^2 - k_{1,2}^2)^{-1}, \quad (25.7)
\end{aligned}$$

$$k'_z = \frac{1}{v_z} (\omega - k_x v_x);$$

$$D_1 = (x_1 + x_2)^2 e^{-iax_2} - (x_1 - x_2)^2 e^{iax_2}, \quad (25.8)$$

$$D = \left(\frac{\varepsilon_2}{x_2} + \frac{\varepsilon_1}{x_1} \right)^2 e^{-iax_2} - \left(\frac{\varepsilon_2}{x_2} - \frac{\varepsilon_1}{x_1} \right)^2 e^{iax_2};$$

$$\begin{aligned}
F_1 = & k'_z - \left(1 - \frac{x_2^2}{x_1^2} \right) \left[\left(1 + \frac{x_2}{x_1} \right)^2 e^{-iax_2} - \left(1 - \frac{x_2}{x_1} \right)^2 e^{iax_2} \right]^{-1} \times \\
& \times \left[(k'_z - x_2) \left(1 + \frac{x_2}{x_1} \right) e^{-iax_2} - (k'_z + x_2) \left(1 - \frac{x_2}{x_1} \right) e^{iax_2} - \right. \\
& \left. - 2 \frac{x_2}{x_1} (k'_z - x_1) e^{iak'_z} \right], \quad (25.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = & k'_z - \left(1 - \frac{x_2^2}{x_1^2}\right) \left[\left(1 + \frac{x_2}{x_1}\right)^2 e^{-iax_2} - \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right)^2 e^{iax_2} \right]^{-1} \times \\
& \times \left[(k'_z + x_2) \left(1 + \frac{x_2}{x_1}\right) e^{-iax_2} - (k'_z - x_2) \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right) e^{iax_2} - \right. \\
& \left. - 2 \frac{x_2}{x_1} (k'_z + x_1) e^{-iak'_z} \right]; \quad (25.10)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{aligned} \right\} = \frac{\pm \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - x_2 \frac{v_z}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1} + \frac{\mp 1 + x_2 \frac{v_z}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2}, \quad (25.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 \\ \delta_2 \end{aligned} \right\} = \frac{\mp \frac{1}{x_1} + \frac{v_z}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1} + \frac{\pm \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{1}{x_1} - \frac{v_z}{\omega}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2}.$$

Мы выписали только те выражения для компонент полей излучения, которые нам нужны в дальнейшем при вычислении интенсивности излучения в переднее и заднее полупространства.

Для выяснения поляризационных свойств излучения разложим опять \vec{E}_t и \vec{H}_t на две компоненты, лежащие в плоскости излучения и перпендикулярно к ней. Все векторы, лежащие в плоскости излучения, мы будем характеризовать знаком (\parallel) (параллельный) в аргументе, а векторы, перпендикулярные к ним, знаком (\perp) (перпендикулярный). Тогда мы будем иметь следующие выражения для перпендикулярных и параллельных векторов:

$$\begin{aligned}
E_x^{+, -}(\parallel) &= \cos \varphi (E_q^{+, -} + \cos \varphi E_x^{+, -}), \\
E_y^{+, -}(\parallel) &= \sin \varphi (E_q^{+, -} + \cos \varphi E_x^{+, -}), \\
E_x^{+, -}(\perp) &= \sin^2 \varphi E_x^{+, -}, \\
E_y^{+, -}(\perp) &= -\sin \varphi \cos \varphi E_x^{+, -}; \quad (25.12)
\end{aligned}$$

$$H_x^{+, -}(\parallel) = \pm \sin \varphi \cos \varphi \frac{c\chi_1}{\omega} E_x^{+, -},$$

$$H_y^{+, -}(\parallel) = \pm \sin^2 \varphi \frac{c\chi_1}{\omega} E_x^{+, -},$$

(25.13)

$$H_x^{+, -}(\perp) = \mp \sin \varphi \frac{\omega \varepsilon_1}{c\chi_1} (E_q^{+, -} + \cos \varphi E_x^{+, -}),$$

$$H_y^{+, -}(\perp) = \pm \cos \varphi \frac{\omega \varepsilon_1}{c\chi_1} (E_q^{+, -} + \cos \varphi E_x^{+, -}).$$

Теперь можно непосредственно приступить к вычислению интенсивностей волн различной поляризации. Аналогично тому, как было сделано в § 24 (см. формулы (24.29) и (24.30)), мы будем иметь следующие выражения для углового распределения спектральной плотности энергии переходного излучения:

для параллельной составляющей

$$I_{-, +}^{\parallel}(\vec{n}, \omega) = \frac{\pi^2 \omega^3 \varepsilon_1^2}{c^2 \chi_1^3} \cos \theta_{1,2} |E_q^{-, +} + \cos \varphi E_x^{-, +}|^2, \quad (25.14)$$

для перпендикулярной составляющей

$$I_{-, +}^{\perp}(\vec{n}, \omega) = \frac{\pi^2 \omega \varepsilon_1}{\chi_1} \cos \theta_{1,2} \sin^2 \varphi |E_x^{-, +}|^2. \quad (25.15)$$

Эти формулы, совместно с формулами (25.3)–(25.6), решают задачу об интенсивности переходного излучения при наклонном падении заряда на пластинку.

Выпишем общую формулу для углового распределения излучения частоты ω в случае пластинки, помещенной в вакуум ($\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$) [23]. Угловое и спектральное распределения переходного излучения определяются через спектральные плотности $I_{+, -}^{\parallel, \perp}(\vec{n}, \omega)$ по формуле:

$$dI_{+, -}^{\parallel, \perp}(\vec{n}, \omega) = I_{+, -}^{\parallel, \perp}(\vec{n}, \omega) d\omega d\Omega.$$

Приведем выражение для параллельной составляющей спектральной плотности излучения в правое полупространство

$$I_{+}^{\parallel}(\vec{n}, \omega) = \frac{e^2 \beta_z^2}{\pi^2 c} \frac{\cos^2 \theta_z}{\sin^2 \theta_z} \times$$

$$\times \frac{|\varepsilon - 1|^2}{|[(1 - \beta_x \cos \theta_x)^2 - \beta_z^2 x^2][(1 - \beta_x \cos \theta_x)^2 - \beta_z^2 \cos^2 \theta_z]|^2} \times$$

$$\times \frac{|B_{\downarrow}^{\parallel}(\omega, \vec{n}, \vec{v})|^2}{|(x+y)^2 e^{-i \frac{\omega a}{c} x} - (x-y)^2 e^{i \frac{\omega a}{c} x}|^2}, \quad (25.16)$$

где

$$B_{\downarrow}^{\parallel}(\omega, \vec{n}, \vec{v}) = (x+y)(1 - \beta_x \cos \theta_x + \beta_z x) \times$$

$$\times [(1 - \beta_z^2 - \beta_x \cos \theta_x - \beta_z x) \sin^2 \theta_z + \beta_x \beta_z x \cos \theta_x] e^{-i \frac{\omega a}{c} x} +$$

$$+ (x-y)(1 - \beta_x \cos \theta_x - \beta_z x) [(1 - \beta_z^2 - \beta_x \cos \theta_x + \beta_z x) \sin^2 \theta_z -$$

$$- \beta_x \beta_z x \cos \theta_x] e^{i \frac{\omega a}{c} x} - 2x [(1 - \beta_x \cos \theta_x + \beta_z y) \times$$

$$\times (1 - \beta_z^2 - \beta_x \cos \theta_x) \sin^2 \theta_z + \beta_z (\beta_x \cos \theta_x - \sin^2 \theta_z) \times$$

$$\times (\beta_z x^2 + y - \beta_x y \cos \theta_x)] e^{-i \frac{\omega a}{v_z} (1 - \beta_x \cos \theta_x)}. \quad (25.17)$$

Спектральная плотность излучения компоненты с поляризацией, перпендикулярной плоскости излучения, дается формулой

$$I_{+}^{\perp}(\vec{n}, \omega) = \frac{e^2 \beta_x^2 \beta_z^4}{\pi^2 c} \frac{\cos^2 \theta_y \cos^2 \theta_z}{\sin^2 \theta_z} \times$$

$$\times \frac{|\varepsilon - 1|^2}{|[(1 - \beta_x \cos \theta_x)^2 - \beta_z^2 x^2][(1 - \beta_x \cos \theta_x)^2 - \beta_z^2 \cos^2 \theta_z]|^2} \times$$

$$\times \frac{|B_{\downarrow}^{\perp}(\omega, \vec{n}, \vec{v})|^2}{\left| \left(x + \frac{y}{\varepsilon}\right)^2 e^{-i \frac{\omega a}{c} x} - \left(x - \frac{y}{\varepsilon}\right)^2 e^{i \frac{\omega a}{c} x} \right|^2}, \quad (25.18)$$

где

$$\begin{aligned}
 B_{\psi}^{\perp}(\omega, \vec{n}, \vec{v}) = & (1 - \beta_x \cos \theta_x + \beta_z x) \left(x + \frac{y}{\varepsilon} \right) e^{-i \frac{\omega a}{c} x} + \\
 & + (1 - \beta_x \cos \theta_x - \beta_z x) \left(x - \frac{y}{\varepsilon} \right) e^{i \frac{\omega a}{c} x} - \\
 & - 2x (1 - \beta_x \cos \theta_x + \beta_z \cos \theta_z) e^{-i \frac{\omega a}{v_z} (1 - \beta_x \cos \theta_x)}. \quad (25.19)
 \end{aligned}$$

При написании формул мы ввели следующие обозначения:

$$x = \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_z}, \quad y = \varepsilon \cos \theta_z. \quad (25.20)$$

Приведенные формулы определяют излучение в правое полупространство.

Для получения аналогичных формул для излучения в левое полупространство (излучение назад) необходимо в приведенных формулах заменить β на $-\beta$.

Направление скорости электрона составляет с осью z угол ψ , так что

$$\beta_x = \frac{v}{c} \sin \psi, \quad \beta_z = \frac{v}{c} \cos \psi. \quad (25.21)$$

Направление движения кванта определяется направляющими косинусами $\cos \theta_x$, $\cos \theta_y$, $\cos \theta_z$ относительно осей x , y , z для излучения в правое полупространство и относительно осей x , y , $-z$ для излучения в левое полупространство (аналогично отсчету углов θ_1 и θ_2 , показанному на рис. 38).

Рассмотрим частные случаи приведенных формул.

1. Нормальный влет (вдоль оси z). Частица пересекает пластинку с диэлектрической постоянной $\varepsilon_2 = \varepsilon$ перпендикулярно поверхности ($\varepsilon_1 = 1$, см. рис. 40). В этом случае отлична от нуля только интенсивность волн с „параллельной“ поляризацией. Соответствующая формула для энергии излучения в левое полупространство перед пластинкой ($z < 0$) совпадает с формулой работы [22] и имеет вид:

$$I^1 = \frac{2e^2 v^2}{\pi c^3} \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^3 \theta \cos^2 \theta \frac{|\varepsilon - 1|^2}{|(1 - \beta^2 x_0^2)(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)|^2} \times \\ \times \frac{|B_0(\omega, \theta)|^2}{|(x_0 + y_0)^2 e^{-i \frac{\omega a}{c} x_0} - (x_0 - y_0)^2 e^{i \frac{\omega a}{c} x_0}|^2}, \quad (25.22)$$

$$B_0(\omega, \theta) = (x_0 - y_0)(1 - \beta x_0)(1 - \beta^2 + \beta x_0) e^{i \frac{\omega a}{c} x_0} + \\ + (x_0 + y_0)(1 + \beta x_0)(1 - \beta^2 - \beta x_0) e^{-i \frac{\omega a}{c} x_0} - \\ - 2x_0(1 - \beta^2 - \beta^3 y_0 - \beta^2 x_0^2) e^{-i \frac{\omega a}{v}}, \quad (25.23)$$

где введены следующие обозначения:

$$x_0 = \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}, \quad y_0 = \varepsilon \cos \theta. \quad (25.24)$$

Угол θ есть угол между осью „ $-z$ “ и направлением излучения. Приведенная формула относится к излучению в левое полупространство. Для получения интенсивности излучения в правое полупространство ($z > a$) необходимо заменить β на $-\beta$ и отсчитывать углы от положительного направления оси z . Формула (25.22) была подтверждена в работе [24], где определено также поле вблизи пластинки. В работе [25] были получены формулы при излучении в кристаллических, ферродиелектрических пластинках. В работе [24а] приведены расчетные кривые для излучения жестких квантов релятивистской частицей. Соответствующие исходные формулы [41а] для пластинки приведены в § 28 (см. формулы (28.42') либо (28.92) при $n = 2$). Относительно влияния рассеяния на переходное излучение релятивистской частицы в пластинке см. § 28.

2. Для всех реальных сред, как и в случае одной границы раздела, интенсивность излучения под углом $\theta = \frac{\pi}{2}$ (касательно к границе раздела) равняется нулю.

3. Излучение, как и следовало ожидать, отсутствует при $\psi = \frac{\pi}{2}$.

4. При $a \rightarrow 0$ излучение исчезает.

5. При $a \rightarrow \infty$ получаются формулы для наклонного влета в случае одной границы, выведенные в предыдущем параграфе. Легко видеть, что при $a \rightarrow \infty$ величина $\vec{E}_2^- \rightarrow 0$, а \vec{E}_2^+ и \vec{E}_1^- переходят в формулы (24.24) и (24.25).

6. Выражение для энергии переходного излучения от нерелятивистских электронов в тонких пластинках, помещенных в вакуум и имеющих не очень большую диэлектрическую проницаемость $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = \epsilon$, $\beta V\epsilon \ll 1$, $\frac{a}{\lambda} V\epsilon \ll 1$ (λ — длина волны излученного фотона) сильно упрощается. В этом случае имеем следующие формулы для спектральной плотности энергии волн различной поляризации [23]:

$$I_{+, -}^{\parallel}(\vec{n}, \omega) = \frac{e^2 \beta^2}{\pi^2 c} \left| \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \right|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi \sin^2 \frac{ak'_z}{2}, \quad (25.25)$$

$$I_{+, -}^{\perp}(\vec{n}, \omega) = \frac{e^2 \beta^6}{\pi^2 c} |\epsilon - 1|^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi \cos^4 \psi \sin^2 \frac{ak'_z}{2}. \quad (25.26)$$

Эти формулы показывают, что:

а) интенсивности излучения „вперед“ и „назад“ одинаковы для каждого типа поляризаций;

б) при устремлении угла входа ψ к $\frac{\pi}{2}$ переходной эффект исчезает, как $\cos^2 \psi$ для „параллельно“ поляризованных волн и как $\cos^4 \psi$ для перпендикулярной поляризации. Полная же энергия ($I^{\parallel} + I^{\perp}$) исчезает, как $\cos^2 \psi$ (сравни с формулами (24.31), (24.32));

в) интенсивности излучения являются периодическими функциями толщины пластинки с периодом, равным $\frac{2\pi}{k'_z} = \frac{2\pi v_z}{(\omega - k_x v_x)} \approx 2\pi\beta\lambda \cos \psi$, поскольку $\beta \ll 1$;

г) интенсивность параллельно поляризованных волн пропорциональна β^2 , а интенсивность перпендикулярно поляри-

зованных волн— β^6 , т. е. для нерелятивистских электронов $I^\perp \ll I^\parallel$ (сравни с формулой (24.34) и (24.35)).

7. Переходное излучение при входе заряженной частицы из вакуума в идеально проводящую пластинку ($\varepsilon_2 \rightarrow \infty$) описывается простыми формулами.

Угловое распределение излучения в этом случае имеет один и тот же вид как для излучения назад, так и для излучения вперед (индексы + и — опускаем):

$$I_{n, \omega}^\parallel = \frac{e^2 \beta^2 \cos^2 \psi}{\pi^2 c} (\sin \theta - \beta \cos \varphi \sin \psi)^2 | [1 - \beta (\sin \theta \cos \varphi \sin \psi - \cos \theta \cos \psi)] [1 - \beta (\sin \theta \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi)] |^{-2}, \quad (25.27)$$

$$I_{n, \omega}^\perp = \frac{e^2 \beta^2 \cos^2 \psi}{\pi^2 c} \beta^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \sin^2 \psi | [1 - \beta (\sin \theta \cos \varphi \sin \psi - \cos \theta \cos \psi)] [1 - \beta (\sin \theta \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi)] |^{-2}. \quad (25.28)$$

При наклонном падении на границу раздела двух сред и $\varepsilon \rightarrow \infty$ в [20] получены такие же формулы. Это означает, что при пересечении электроном идеально проводящей пластинки происходит независимое излучение от передней и задней границ раздела, и все характерные особенности излучения, имеющие место при косом падении на одну границу раздела, в случае пластинки остаются без изменений.

§ 26. УСЛОЖНЕННЫЕ ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

а) Переходное излучение в случае среды, обладающей пространственной дисперсией

Связь между векторами D_i и E_i , а также B_i и H_i с постоянными ε_{ij} и ν_{ij}

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j, \quad B_i = \nu_{ij} H_j, \quad (26.1)$$

строго говоря, справедлива лишь для медленно меняющихся полей. Для быстропеременных полей, меняющихся быстро

по сравнению с периодами собственных колебаний атомов, уравнения (26.1) должны быть видоизменены. Действительно, если поля меняются быстро, то состояние среды в данный момент времени t может зависеть от значений полей в более ранние моменты времени. Кроме того, из-за процессов переноса состояние среды в некоторой точке \vec{r} будет определяться не только значением поля в данной точке, но и значениями полей в соседних точках. Поэтому уравнение, например, для электрической индукции в самом общем виде с учетом принципа причинности следует записать в виде (подробнее см., например, [26, 34])

$$D_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int \varepsilon_{ik}(t, t', \vec{r}, \vec{r}') E_k(\vec{r}', t') d\vec{r}'. \quad (26.2)$$

Если процессы в среде однородны в пространстве и во времени, то оператор $\hat{\varepsilon}$ зависит от разностей $\vec{r} - \vec{r}'$ и $t - t'$.

В этом случае из (26.2) для фурье-компонент \vec{D} и \vec{E} находим

$$D_i(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_{ik}(\omega, \vec{k}) E_k(\omega, \vec{k}). \quad (26.3)$$

В формуле (26.3) тензор диэлектрической проницаемости ε_{ik} зависит как от частоты ω , так и от волнового вектора \vec{k} . Зависимость ε_{ik} от ω , как известно, называется временной дисперсией, зависимость же от волнового вектора называется пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости.

Вопрос о переходном излучении заряженной частицы с учетом пространственной дисперсии рассматривался в большом количестве работ [27—34]. Мы исследуем его на примере электронной плазмы, следуя работам [28, 8].

Пусть электрон движется с постоянной скоростью вдоль оси z и пересекает нормально границу вакуум—плазма (плазма занимает полупространство $z > 0$). Исходными уравнениями для решения поставленной задачи являются уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} [\vec{j} + q\vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{v}t)], \quad (26.4)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

где q — заряд частицы. Ток \vec{j} , обусловленный электронами плазмы, определяется из линеаризованного кинетического уравнения [26]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v f + \vec{u} \nabla f + e u \vec{E} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = 0, \quad (26.5)$$

согласно формуле

$$\vec{j} = e \int \vec{u} f d\vec{p}. \quad (26.6)$$

Здесь f — добавка к равновесной функции распределения f_0 ; ε , u , e , v — энергия, скорость, заряд и эффективная частота столкновений электронов плазмы. Ионы в плазме предполагаются неподвижными. Для решения задачи представим уравнение поля в виде

$$\Delta \vec{E} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{c^2 \partial t^2} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ e \int \vec{u} f d\vec{p} + q\vec{v} \delta(z - vt) \delta(x) \delta(y) \right\} = 0 \quad (26.7)$$

и разложим все величины, входящие в уравнения (26.4) и (26.5), в интеграл Фурье по ω и \vec{k} . Тогда, используя обычные граничные условия для полей \vec{E} и \vec{H} (см. § 24) и условие зеркального отражения для функции распределения на границе раздела

$$f(z=0, u_z) = f_j(z=0, -u_z), \quad (26.8)$$

определяем поля $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$.

При построении решения электрическое поле продолжается в область $z < 0$, причем тангенциальные компоненты E_t четным, а нормальную E_z — нечетным образом [26]. Опуская дальнейшие вычисления, приводим сразу результат для спектральной плотности энергии переходного излучения в вакууме:

$$\frac{dI_{n, \omega}}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \beta^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\pi^2 c (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} |\eta(\omega, \theta)|^2, \quad (26.9)$$

$$\eta(\omega, \theta) = \frac{1 - \beta \xi - \beta \gamma (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)}{\xi + \cos \theta}, \quad (26.10)$$

$$\xi = \frac{i\omega}{\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{k^2} \left\{ \frac{k_z^2}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k) - k^2} + \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon^l(\omega, k)} \right\}, \quad (26.11)$$

$$\gamma = \frac{\omega^3}{v^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_z dk_z}{k^2} \delta_+ \left(\frac{\omega}{v} - k_z \right) \left[\frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr} - k^2} - \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^l} \right]. \quad (26.12)$$

Функция $\delta_+(x)$ определяется обычным образом:

$$\delta_+(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} d\alpha = \delta(x) + \frac{i}{\pi} P \frac{1}{x}.$$

Приведенные формулы фактически решают поставленную задачу. Полагая в (26.11) и (26.12) $\varepsilon^{tr} = \varepsilon^l = \varepsilon(\omega)$, мы приходим к формуле Гинзбурга—Франка для переходного излучения в среде без учета пространственной дисперсии. Входящие в выражения (26.11) и (26.12) поперечная ε^{tr} и продольная ε^l диэлектрические постоянные определяются для плазмы следующим образом [26]:

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 + \frac{2\pi c^2}{\omega k^2} \int \frac{[\vec{k}u]^2}{\omega - \vec{k}u + i\nu} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\vec{p}, \quad (26.13)$$

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi c^2}{\omega k^2} \int \frac{(\vec{k}u)^2}{\omega - \vec{k}u + i\nu} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\vec{p}. \quad (26.14)$$

Тензор диэлектрической постоянной изотропной среды можно представить через ε^{tr} и ε^l следующим образом:

$$\varepsilon_{ik} = \left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_k}{k^2} \varepsilon^l(\omega, k). \quad (26.15)$$

Конкретные частные случаи исследованы в цитированных выше работах (см. также обзор [8]).

б) Релятивистский предел формулы Гинзбурга—Франка и учет многократного рассеяния

Рассмотрим переходное излучение в пределе больших частот и высоких энергий. Для частот, превышающих характерные атомные частоты, диэлектрическая проницаемость среды близка к единице и может быть представлена в виде следующей формулы:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (26.16)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi N Z e^2}{m}}. \quad (14.3)$$

В оптической области диэлектрическая постоянная не имеет универсального вида (26.16). Однако и в этом случае использование релятивистских частиц предпочтительнее и может быть применено для определения оптических свойств вещества (см. [10] и конец § 27).

Как легко заметить из рассмотрения знаменателя формулы (24.22), излучение „вперед“ сконцентрировано в узком конусе вдоль траектории частицы с углом раствора $\theta \sim \sqrt{1 - \beta^2} \ll 1$ [15]. Для энергии излучения „вперед“ при вылете электрона из среды с диэлектрической постоянной $\varepsilon_1 = \varepsilon$ в вакуум $\varepsilon_2 = 1$ из формулы (24.22) в пределе $\beta \rightarrow 1$, $\omega \gg \omega_0$ получим

$$dI_{\theta, \omega} = \frac{2e^2}{\pi c} \theta^3 d\theta d\omega \left(\frac{1}{1 - \beta^2 + \theta^2} - \frac{1}{1 - \beta^2 \varepsilon + \theta^2} \right)^2. \quad (26.17)$$

Выражение (26.17) очень легко также получить, используя квазиклассическое приближение, развитое в § 28 (см. вывод

формулы (28.42)). Проинтегрировав выражение (26.17) по углам, найдем

$$dI_{\omega} = \frac{e^2}{\pi c} \left[\left(1 + 2 \frac{\omega^2}{\omega_{кр}^2} \right) \ln \left(1 + \frac{\omega_{кр}^2}{\omega^2} \right) - 2 \right]. \quad (26.18)$$

Через

$$\omega_{кр} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (14.5)$$

обозначена величина, введенная в предыдущей главе при рассмотрении эффекта поляризации среды в тормозном излучении. Когда выполняется условие $\frac{\omega}{\omega_{кр}} \ll 1$, то из (26.18)

для числа излученных квантов $\frac{dI_{\omega}}{\hbar\omega}$ частоты ω имеем:

$$\frac{dI_{\omega}}{\hbar\omega} = \frac{2}{137\pi} \frac{d\omega}{\omega} \left[\ln \frac{\omega_{кр}}{\omega} - 1 \right]. \quad (26.19)$$

Как видно из формулы (26.18), испускаемый спектр частот простирается до частот порядка $\omega_{кр}$, излучение частот $\omega > \omega_{кр}$ сильно подавлено и дается следующей формулой:

$$\frac{dI_{\omega}}{\hbar\omega} = \frac{1}{6 \cdot 137\pi} \frac{d\omega}{\omega} \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega} \right)^4. \quad (26.19')$$

При больших энергиях $\omega_{кр}$ может значительно превышать оптические частоты и, следовательно, переходное излучение распространяется и на область жестких квантов [15].

Проинтегрировав (26.18) по частотам, найдем потери энергии за счет переходного излучения:

$$I \sim \frac{e^2 \omega_0}{3c} \frac{E}{mc^2} = \frac{e^2}{3c} \omega_{кр}, \quad (26.20)$$

т. е. полное излучение пропорционально энергии частицы. Этот результат получен Г. Гарибьяном [15] в результате вычислений потерь энергии равномерно движущейся заряженной частицы через границу двух сред. К. Барсуков [35] показал, что потери энергии частицы, определяемые выражением (26.20), обусловлены переходным излучением.

Полезно установить соответствие между теорией тормозного излучения с учетом эффекта плотности и теорией переходного излучения для крайне релятивистского случая. Уже беглое сравнение формулы (26.17) с формулой (15.1) (со значением входящего в нее интеграла (15.4)) показывает, что между обеими теориями должна быть близкая связь. Действительно, выражение (26.17) отличается от формулы (15.1) только тем, что в знаменателе одного из членов в круглых скобках формулы (26.17) положено $\varepsilon = 1$ и $v_1 = v_2$. Следовательно, все идеи и результаты теории тормозного излучения можно без труда перенести на теорию переходного излучения. Это соответствие было подчеркнуто в работах [10, 39]. Например, как было показано в предыдущей главе, учет влияния диэлектрической постоянной в тормозном излучении приводит к подавлению излучения мягких квантов, частота которых меньше $\omega_{кр}$ (см. формулу (14.5)). В соответствии с этим результатом формула (26.17) показывает, что интенсивность переходного излучения для жестких квантов не исчезает и спектр переходного излучения простирается в заоптическую область до той же частоты $\omega_{кр}$.

Начиная с энергии E_0 , введенной в теорию при рассмотрении тормозного излучения [41], поперечник тормозного излучения претерпевает изменения за счет многократного рассеяния [40]. Оказывается, что и это явление можно перенести в теорию переходного излучения [36—39], причем, как и в случае эффекта поляризации, многократное рассеяние не подавляет переходное излучение, а, наоборот, обогащает спектр переходного излучения квантами, частота которых простирается вплоть до частоты $\hbar\omega_2$, введенной опять-таки в теории тормозного излучения [41].

Эта аналогия не должна вызывать удивления, поскольку все отмеченные результаты прямо следуют (как в теории тормозного излучения, так и в теории переходного излучения) из рассмотрения выражений одного и того же типа (15.4) и (24.13). Из этих же выражений следует, что длина, на которой формируется переходное излучение, должна совпадать с когерентной длиной, введенной при рассмотрении когерент-

ного излучения в кристалле (см. гл. II, формулы (6.16), (6.17)) и использованной при рассмотрении тормозного излучения в аморфной среде (см. гл. III, формула (13.1)). Таким образом, при переходе из вакуума в среду с диэлектрической постоянной ε релятивистская заряженная частица (см. Нобелевскую лекцию И. Франка [4]) „начинает излучать“ задолго до пересечения границы на расстояниях, равных

$l_{\text{вак}} \sim \frac{c}{\omega(1 - v^2/c^2)}$. Входя в среду, частица „продолжает

излучать“ на расстояниях, равных $l_{\text{ср}} \sim \frac{c}{\omega(1 - \varepsilon v^2/c^2)}$. Ин-

тенсивность переходного излучения, как это следует из выражения (24.13) для полей переходного излучения, пропорциональна квадрату разности этих выражений (отметим, что мы рассматривали малые углы излучения $\theta^2 \ll 1 - \beta^2\varepsilon$).

Следовательно, переходное излучение (для частот, превышающих атомные частоты) можно себе представить как излучение двух зарядов: одного—движущегося в вакууме и внезапно остановившегося у границы, и другого, движение которого начинается у границы двух сред и траектория является продолжением траектории внезапно остановившегося заряда. Если бы $\varepsilon = 1$, то интерференция полей излучения при „остановке заряда“ и при „начале движения заряда“ сводила бы к нулю суммарное излучение. Однако, даже если $\varepsilon(\omega)$ сколь угодно мало отличается от 1, будут появляться переходные кванты, частота которых простирается до критической частоты $\omega_{\text{кр}}$.

Рассмотрим теперь приближенную теорию влияния многократного рассеяния на переходное излучение. При изложении будем следовать работе В. Пафомова [39]. Если диэлектрическая проницаемость среды имеет вид (26.16) и $\beta \sim 1$, то, используя формулу (15.1), можно легко рассчитать интенсивность переходного излучения. Действительно, в пределе больших частот можно пренебречь отражениями, т. е. не заботиться о выполнении граничных условий и свести задачу к излучению при „остановке“ и внезапном движении заряда. Тогда интеграл (15.1) можно легко оценить и для значения

напряженности магнитного поля переходного излучения получить следующую формулу:

$$H \sim \theta \left[\left(1 - \beta + \frac{\theta^2}{2} \right)^{-1} - \left(1 - \beta \sqrt{\varepsilon} + \frac{\theta^2}{2} \right)^{-1} \right]. \quad (26.21)$$

Первый член в (26.21) соответствует полю, формирующемуся в вакууме, а второй — полю, формирующемуся в среде. Обозначим через l_b и l_c когерентные длины (зоны формирования) в вакууме и в среде соответственно:

$$l_b \sim \frac{c}{\omega} (1 - \beta^2 + \theta^2)^{-1}, \quad (26.22)$$

$$l_c \sim \frac{c}{\omega} (1 - \varepsilon \beta^2 + \theta^2)^{-1}.$$

Подчеркнем, что когерентная длина в переходном излучении тождественна когерентной длине, введенной при исследовании тормозного излучения в кристалле и аморфной среде (см. гл. II и III). Как видно из формулы (26.21), амплитуда поля переходного излучения пропорциональна разности длин зон формирования в вакууме и среде. В области углов, где излучение максимально ($\theta \simeq \frac{mc^2}{E} \ll 1$), имеем

$$l_b \sim \frac{c}{\omega} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2, \quad l_c \sim \frac{c}{\omega} \left[\left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} \right]^{-1}, \quad (26.23)$$

где E — полная энергия и m — масса частицы.

Для частот, много меньше критических, $\omega \ll \omega_{кр}$, когерентная длина в вакууме много больше когерентной длины в веществе, т. е. поле переходного излучения формируется в основном в вакууме. Влияние многократного рассеяния на вероятность излучения переходных квантов в этом случае несущественно. Многократное рассеяние будет лишь искажать малый член l_c в формуле (26.21).

Рассмотрим теперь частоты $\omega > \omega_{кр}$. В этом случае $l_b \sim l_c$ (без учета многократного рассеяния) и происходит компенсация двух членов в формуле (26.21). Поэтому энер-

гия излучается тем меньше, чем сильнее выполняется неравенство $\omega > \omega_{кр}$. Посмотрим теперь, как будет влиять многократное рассеяние на процесс излучения. Как мы видели при рассмотрении теории тормозного излучения, многократное рассеяние существенно искажает формулы тормозного излучения в том случае, если на пути $l_c = \frac{c}{\omega} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2$ частица за счет рассеяния выводится за пределы угла $\theta \sim mc^2/E$. При этом изменится второй член в формуле (26.21), поскольку многократное рассеяние будет выводить частицы из зоны когерентности, т. е. уменьшать l_c . Следовательно, новая длина когерентности l_c в веществе при учете рассеяния будет меньше, чем без учета рассеяния (на языке теории тормозного излучения это соответствует подавлению тормозного излучения). Это означает, что второй член в формуле (26.21), обуславливающий обрезание спектра переходного излучения на частотах, превышающих $\omega_{кр}$, будет подавлен, компенсация членов в формуле (26.21) не произойдет и в переходном излучении появятся новые частоты.

Следовательно, при учете влияния многократного рассеяния спектр переходного излучения будет простираться вплоть до некоторой частоты ω_2 , превышающей $\omega_{кр}$. Это явление будет наблюдаться при энергии, больше некоторой энергии, которую мы обозначим через E_0 . Оценим ω_2 и E_0 . Как уже было сказано выше, многократное рассеяние существенно учитывать, если выполняется условие

$$\sqrt{\bar{\theta}^2} > \frac{mc^2}{E}, \quad (26.24)$$

где $\bar{\theta}^2$ — средний квадрат угла рассеяния на пути l_c : $\bar{\theta}^2 = \left(\frac{E_s}{E} \right)^2 \frac{l_c}{L}$, $E_s = 21 \cdot 10^6$ эв, L — радиационная единица длины. Перепишем последнее неравенство, используя выражение (26.23) для l_c ($\theta \lesssim \frac{mc^2}{E}$ и $\omega \gtrsim \omega_{кр}$) в следующем виде:

$$\frac{E_s E}{(mc^2)^2} \sqrt{\frac{c}{\omega L}} > 1. \quad (26.24')$$

Если (26.24') выполняется для частоты $\omega_{кр}$, т. е.

$$\frac{E_s}{mc^2} \sqrt{\frac{E}{mc^2 \omega_0 L}} > 1,$$

то спектр переходного излучения обогатится частотами, лежащими в интервале $\omega_{кр} \leq \omega \leq \omega_2$.

Предельная частота, вплоть до которой простирается спектр переходного излучения, определяется из неравенства (26.24'):

$$\omega_2 \approx \frac{E_s^2 E^2}{(mc^2)^4} \frac{c}{L}. \quad (26.25)$$

Обозначим через E_0 энергию, при которой $\omega_2 = \omega_{кр}$:

$$E_0 \approx \frac{\omega_0 L}{c} \frac{(mc^2)^3}{E_s^2}. \quad (26.26)$$

Частота ω_2 и энергия E_0 с точностью до коэффициентов совпадают с аналогичными величинами, которые использовались в предыдущей главе при изложении теории тормозного излучения (см. формулы (18.21) и (18.22)). При $E < E_0$ влияние многократного рассеяния несущественно и справедлива обычная формула для энергии переходного излучения. Для энергии $E > E_0$ влияние многократного рассеяния становится существенным, и формулы (26.17) и (26.20) изменяются. Можно было бы думать, что формулу для полной интенсивности излучения для случая $E > E_0$ можно получить из формулы (26.20), заменяя $\omega_{кр}$ на ω_2 , поскольку влияние многократного рассеяния сводится к расширению интервала излученных частот от $\omega_{кр}$ до величин порядка ω_2 . Однако эта процедура окажется несправедливой, поскольку наши рассуждения относились к малым углам рассеяния $\theta < \frac{mc^2}{E}$, а учет многократного рассеяния меняет угловое распределение переходного излучения (максимальная излучаемая частота быстрее падает с ростом угла, чем это имеет место при отсутствии много-

кратного рассеяния). Для оценки энергии переходного излучения с учетом многократного рассеяния воспользуемся формулой (26.17):

$$\frac{dI_{\theta, \omega}}{d\theta d\omega} = \frac{2e^2}{\pi c} \theta^3 \frac{\omega^2}{c^2} (l_B - l_c)^2. \quad (26.17')$$

Интенсивность переходного излучения будет мала, если когерентные длины в среде и в вакууме становятся одинаковыми. Поэтому приближенное условие появления переходного излучения можно записать в виде

$$l_B > 2l_c. \quad (26.27)$$

Выбор коэффициента 2, входящего в правую часть неравенства, несущественен для последующих рассуждений.

Используя выражение (26.22) для когерентных длин, получим

$$\sqrt{1 + \frac{\theta^2}{1 - \beta^2}} < \frac{\omega_{кр}}{\omega}. \quad (26.27')$$

Из формулы (26.27') следует, что максимальное значение углов θ , которые вносят существенный вклад в интенсивность переходного излучения, обратно пропорционально излучаемой частоте ω . Учтем теперь влияние многократного рассеяния. Ясно, что когерентная длина в вакууме не изменится, а когерентная длина в среде по порядку величины будет равна

$$l_c \sim \frac{c}{\omega} \left\{ 1 - \beta^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 + \theta^2 + \bar{\theta}^2 \right\}^{-1}, \quad (26.28)$$

где $\bar{\theta}^2$ есть средний квадрат угла рассеяния на длине l_c . Из формул (26.17') и (26.28) вытекает, что существенный вклад в интенсивность вносят углы излучения θ , вплоть до $\sqrt{\bar{\theta}^2}$. Таким образом, условие появления излучения в этом случае можно записать в виде

$$\frac{E_s^2}{E^2} \frac{l_c}{L} \gtrsim \theta^2. \quad (26.29)$$

Выражение (26.29) можно переписать в виде:

$$\frac{\theta^2}{1-\beta^2} \left(1 + \frac{\theta^2}{1-\beta^2} \right) < \frac{\omega_2}{\omega}. \quad (26.29')$$

Это соотношение по порядку величины справедливо для любых углов излучения θ . Из этой формулы, в частности, следует, что в области $\theta > \sqrt{1-\beta^2}$ максимальные углы, которые еще вносят существенный вклад в излучение, обратно пропорциональны корню четвертой степени излученной частоты.

Перейдем теперь к оценке энергии излучения. Для этого воспользуемся тем, что поле формируется в основном в вакууме, т. е. оно определяется первым членом в (26.21). Формула для энергии излучения на единицу полярного угла и на единичный интервал частот имеет вид:

$$\frac{dI_{\theta, \omega}}{d\theta d\omega} = \frac{2e^2}{\pi c} \frac{\theta^3}{(1-\beta^2 + \theta^2)^2}. \quad (26.30)$$

Интегрирование по угловым переменным при $E < E_0$ мы должны провести по области, даваемой формулой (26.27'), а при $E > E_0$ — по области, даваемой формулой (26.29'). В первом случае имеем известный результат [15] (см. формулу (26.20)):

$$I \sim \frac{4e^2 \omega_0}{3c\pi} \frac{E}{mc^2}.$$

Во втором случае, интегрируя по области (26.29'), найдем

$$dI_{\omega} \approx \frac{e^2}{\pi c} d\omega \left[\ln \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega + 4\omega_2}}{2\sqrt{\omega}} + \frac{2\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega + 4\omega_2}} - 1 \right]. \quad (26.31)$$

Чтобы найти угловое распределение полного излучения, проинтегрируем (26.30) по частотам от 0 до ω_{\max} , определяемой неравенством (26.29'), и представим результат в виде

$$\frac{dI_{\theta}}{d\theta} \approx \frac{2e^2 \theta^3 \omega_{\max}}{\pi c (1-\beta^2 + \theta^2)^2} \approx \frac{2e^2 \omega_2 (1-\beta^2)^2 \theta}{\pi c (1-\beta^2 + \theta^2)^3}. \quad (26.32)$$

Интегрируя это выражение с учетом того, что основной вклад в интеграл по углам дает область нижнего предела,

найдем, что энергия переходного излучения по порядку величины равна

$$I \approx \frac{e^2 \omega_2}{2\pi c} = \frac{e^2 E_s^2}{2\pi L (mc^2)^2} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2. \quad (26.33)$$

Она растет пропорционально квадрату энергии частицы.

В действительности необходимо выполнить условие $\hbar\omega_2 \ll E$. Поэтому при энергиях $E \gg L(mc^2)^4/E_s^2\hbar c$ полная энергия излучения по порядку величины равна

$$I \approx \int_{\sim E/\hbar}^{\sim E/\hbar} I_\omega d\omega \sim \frac{e^2 E}{2\pi \hbar c} \left[\ln \frac{E_s^2 E^2 \hbar c}{L (mc^2)^4} - 1 \right]. \quad (26.34)$$

Наличие многократного рассеяния должно приводить также и к появлению тормозного излучения, пропорционального длине траектории. Очевидно, что на эксперименте всегда измеряется полное излучение, включающее в себя как переходное, так и тормозное излучение. Поскольку траектория частицы в рассмотренной выше задаче предполагается бесконечной, то выделение из теоретических формул части излучения, соответствующей переходным квантам, содержит элемент произвола и носит условный характер. В действительности имеется единое излучение и процедура выделения из него отдельных частей имеет смысл только в том случае, когда рассеяние мало. Этот вопрос для случая произвольной периодической среды подробно разобран в § 28.

в) Влияние резкости, шероховатости и движения границы на переходное излучение

Как мы убедились в пункте б) этого параграфа, при высоких энергиях и больших частотах длина траектории, которая важна для формирования переходного излучения, может быть значительно больше длины излученной волны. Поэтому в теории переходного излучения релятивистских частиц и жестких квантов характерной длиной, с которой

нужно сравнивать размеры неоднородности, является когерентная длина.

При выводе формул переходного излучения было предположено, что граница перехода является резкой. В действительности всегда имеется некоторый переходный слой, и только в том случае, если толщина переходного слоя меньше когерентной длины, приведенные формулы не должны измениться. Отметим, что как и в случае когерентного тормозного излучения, переходное излучение (несмотря на то, что размеры неоднородностей на много порядков могут превышать длину волны излученного фотона) не будет искажаться, если когерентная длина больше размеров неоднородностей границы.

При обычных атомных частотах или для нерелятивистских частиц когерентная длина будет порядка длины волны излученного фотона. В этом случае нет никакого увеличения расстояний с увеличением энергии, которое играет важную роль в формировании излучения. Поэтому характерные размеры неоднородностей границы должны быть меньше длины волны.

Вопрос о нерезкости границы перехода и его влияния на переходное излучение рассматривался в работах [42, 44] на частных примерах. В работе [43] рассмотрение проведено с помощью квазиклассического метода для случая, когда длина волны меньше размеров неоднородностей.

Влияние шероховатостей поверхности до сих пор никем не исследовалось. Эта задача аналогична известной задаче о рассеянии света от шероховатой поверхности, и соответствующие формулы могут быть получены, исходя из теории рассеяния света на неоднородностях.

Тут следует также отметить, что при экспериментальном исследовании переходного излучения обычно сталкиваются с образцами, на поверхности которых имеется слой постороннего вещества. Расчет формул переходного излучения для такого случая проведен в работе [45].

Вопросы переходного излучения в случае движущейся границы рассматривались в работах [46]. Эти расчеты могут представить интерес при рассмотрении взаимодействия заря-

женных частиц с быстро движущимися сгустками плазмы. Очевидно, что для решения такого рода задач необходимо воспользоваться преобразованием Лоренца к неподвижной границе раздела.

г) Переходное излучение в ферродиелектриках, анизотропных и гиротропных телах

Используя изложенную выше методику, нетрудно получить выражение для интенсивности излучения при нормальном влете заряженной частицы из ферродиелектрика в вакуум [47]. Для энергии, излученной вперед (сравни с (24.22)), имеем:

$$dI_{n, \omega} = \frac{e^2 \beta^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\Omega d\omega}{\pi^2 c (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \times \left| \frac{(\epsilon - 1)(1 - \beta \sqrt{\epsilon \mu - \sin^2 \theta}) - \beta^2 (\epsilon \mu - 1)}{(1 - \beta \sqrt{\epsilon \mu - \sin^2 \theta})(\epsilon \cos \theta + \sqrt{\epsilon \mu - \sin^2 \theta})} \right|^2. \quad (26.35)$$

Интересно отметить, что в ферродиелектриках групповая скорость может быть направлена противоположно фазовой скорости. Это приводит к своеобразным явлениям, рассмотренным в работе [47]. Аналогичные явления могут наблюдаться и в анизотропных телах [31, 22]. Переходное излучение в гиротропных средах рассматривалось в работах [48, 49]. Излучение в кристаллических и ферродиелектрических пластинках рассмотрено в работе [25].

д) Поверхностные волны

При выводе формул (24.21) и (24.22) мы ограничились рассмотрением излучения поперечных электромагнитных волн, распространяющихся от границы раздела в первую и вторую среду. Однако уравнения Максвелла для фотонного поля в неоднородных средах

$$\text{rot } \vec{E}_\omega = \frac{i\omega}{c} \vec{H}_\omega \quad (26.36)$$

$$\text{rot } \vec{H}_\omega = -i\epsilon(z) \frac{\omega}{c} \vec{E}_\omega$$

допускают и другие решения, связанные с распространением волн вдоль поверхности раздела двух сред.

Рассмотрим, как и прежде, среду, составленную из двух различных веществ с диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2 . Полупространство $z < 0$ занято первой средой, полупространство $z > 0$ занято средой с диэлектрической постоянной ϵ_2 (см. рис. 38).

Выражения для полей (24.12) и (24.13) обращаются в бесконечность при выполнении равенства

$$\epsilon_1 \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 - q^2} = -\epsilon_2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 - q^2}. \quad (26.37)$$

Наличие полюса у выражений для полей означает возможность излучения электромагнитной волны. Волновой вектор $q^2 = k_x^2 + k_y^2$ и частота такой волны связаны следующим выражением:

$$q^2 = \frac{\omega^2 \epsilon_1 \epsilon_2}{c^2 (\epsilon_2 + \epsilon_1)} = \frac{\omega^2 \epsilon_1 |\epsilon_2|}{c^2 (|\epsilon_2| - \epsilon_1)}. \quad (26.38)$$

Уравнения (26.38) и (26.37) выполняются одновременно только в том случае, если одна из диэлектрических постоянных (например ϵ_2) отрицательна и по абсолютной величине больше, чем вторая. Подставив q^2 в формулы (24.9'), найдем, что величины χ_1 и χ_2 чисто мнимы и равны

$$\chi_1 = -\frac{i\omega}{c} \frac{\epsilon_1}{\sqrt{|\epsilon_2| - \epsilon_1}}, \quad \chi_2 = \frac{i\omega}{c} \frac{|\epsilon_2|}{\sqrt{|\epsilon_2| - \epsilon_1}}, \quad (26.39)$$

Следовательно, волны будут затухать в глубь обеих сред (см., напр., формулу (24.15)) на расстояниях порядка обратной величины $|\chi_{1,2}|$. Выберем решения уравнений (26.36) для магнитного поля в первой и второй среде в виде

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_0 e^{ik_x x + ik_y y + i\chi_1 z} \quad (26.40)$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_0 e^{ik_x x + ik_y y + i\chi_2 z}$$

Чтобы удовлетворялось уравнение $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ (см. (26.36)), необходимо считать, что вектор \vec{H}_0 перпендикулярен вектору распространения $\vec{q}(k_x, k_y)$ и лежит в плоскости раздела двух сред, т. е. в плоскости xy . Граничные условия непрерывности \vec{H} автоматически выполняются. Условие для непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля (которое следует из первого уравнения (26.36)) тождественно условию (26.37), рассмотренному нами выше. Вектор электрического поля поверхностной волны лежит в плоскости, содержащей вектор $\vec{q}(k_x, k_y)$ и нормаль к границе раздела. Рассмотренная электромагнитная волна носит название поверхностной \vec{H} -волны.

Заряженная частица, проходя через границу раздела двух сред, будет возбуждать поверхностные волны. Этот вопрос, начиная с работы Р. Риччи [50], рассматривался многими авторами [51—56]. Соответствующие формулы можно получить, используя методику вычислений, приведенную в предыдущих параграфах, поскольку при вычислениях фотонных полей необходимо соответствующим образом обходить полюс выражения типа (24.15). Очевидно, что энергия возбуждения поверхностных волн будет тем больше, чем большее время заряженная частица взаимодействует с поверхностью. Расчет показывает, что энергия поверхностных волн обратно пропорциональна $\cos \psi$ [52] (см. рис. 39).

Для энергии поверхностных волн частоты ω , распространяющихся в вакууме ($\epsilon_1 = 1$) в отсутствие поглощения, имеем:

$$\frac{dI_{\omega}^{(1)}}{d\omega} = \frac{2e^2 |\epsilon_2| (|\epsilon_2| - 1 + \beta_z^2 \epsilon_2^2)}{c |\beta_z| \sqrt{|\beta_x^2 \epsilon_2| - |\epsilon_2| + 1} \sqrt{|\epsilon_2| - 1} (\epsilon_2^2 - 1)}. \quad (26.41)$$

Для аналогичной величины в среде имеем:

$$\frac{dI_{\omega}^{(2)}}{d\omega} = \frac{2e^2 (|\epsilon_2| - 1 + \beta_z^2)}{c |\beta_z| \sqrt{|\beta_x^2 \epsilon_2| - |\epsilon_2| + 1} \sqrt{|\epsilon_2| - 1} (\epsilon_2^2 - 1)}, \quad (26.42)$$

где

$$|\varepsilon_2| > 1 \text{ и } \beta_x^2 |\varepsilon_2| > |\varepsilon_2| - 1.$$

Значения β_z и β_x даются формулами (25.21). Нужно отметить, что энергия поверхностных волн при некоторых значениях параметров может значительно превышать энергию переходного и тормозного излучений (см. конец § 27).

§ 27. ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ*

Экспериментальное исследование свечения поверхностей различных материалов под действием электронов [57—64] началось задолго до того, как стало известно само явление переходного излучения.

Наблюдаемое свечение большинство авторов приписывало люминесценции и различным видам тормозного излучения. Сейчас нет сомнения, что определенная часть свечения, наблюдаемого в этих экспериментах, была обусловлена переходным излучением.

Первой успешной попыткой исследования переходного излучения, по-видимому, следует считать работу Голдсмита и Желли [65]. Авторы наблюдали свечение поверхности золота, серебра и алюминия при бомбардировке их протонами с энергией от 1 до 5 *Мэв*.

В этом эксперименте было обнаружено, что регистрируемое излучение частично поляризовано. Степень поляризации достигала для $Al \sim 20\%$, $Ag \sim 10\%$ и для $Au \sim 8\%$. Направление поляризации совпадало с ожидаемым по теории переходного излучения. Наличие поляризации использовалось для отделения переходного излучения от фона, природа которого осталась неизвестной.

Тот факт, что выход свечения в этом эксперименте возрастал пропорционально энергии протонов, говорит о том, что авторы действительно наблюдали переходное излучение. Интенсивность наблюдаемого в этом эксперименте выхода

* Изложение первой части § 27 следует обзору [10].

качественно согласуется с ожидаемым выходом, согласно теории переходного излучения.

Более детальное исследование переходного излучения, возникающего в массивных мишенях из серебра, алюминия и никеля, было проведено в диссертационной работе С. Михалыка [66, 67], выполненной под руководством А. Е. Чудакова. В этом эксперименте использовались электроны с энергией до 60 кэВ, нормально падающие на поверхность мишени.

Поляризованная компонента излучения в этих опытах достигала 90%. Было установлено, что мишень с плохо обработанной поверхностью создает неполяризованный свет довольно большой интенсивности. Высокая степень поляризации была достигнута специальной химической обработкой и механической полировкой поверхности мишени. Тем не менее причина появления неполяризованной компоненты при чистой поверхности мишени осталась необъясненной.

Эксперимент показал, что энергия излучения линейно растет с энергией электронов. Сохранялась также пропорциональность между током пучка электронов и излученной энергией (рис. 41).

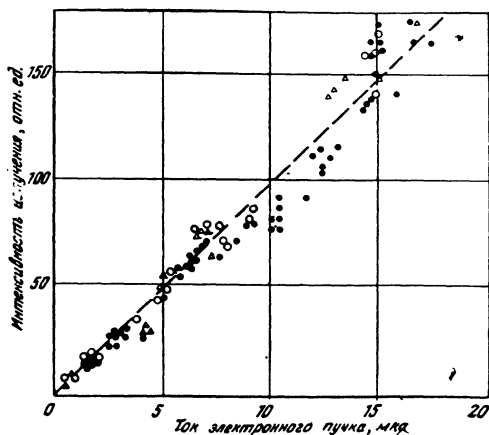


Рис. 41. Зависимость яркости переходного излучения от силы тока при энергии электронов 12 кэВ [66, 67].

Полученные в эксперименте угловые распределения согласуются с теорией (рис. 42). Спектр излучения не измерялся. Абсолютная интенсивность переходного излучения определялась путем сравнения ее с интенсивностью известного источника света.

Расхождение эксперимента с теорией при малых энергиях электронов (~ 12 кэв) достигало $\sim 33\%$ и уменьшалось до $\sim 15\%$ для электронов с энергией $40 \div 60$ кэв.

В последующих экспериментах [68—72] исследовалось переходное излучение при прохождении электронов через серебряные пленки.

В работах [69, 70] серебряные пленки подвергались бомбардировке пучком электронов с энергией 25 кэв. Для детектирования и анализа спектра излучения со стороны пучка был расположен маленький кварцевый спектрограф с разрешением ~ 100 Å. Излучение фиксировалось на фотопленку. Было обнаружено излучение, характеризующееся довольно резким пиком при $\lambda \approx 3300$ Å. Интенсивность и форма спектра излучения периодически менялась с толщиной, и период оказался равным ~ 1000 Å.

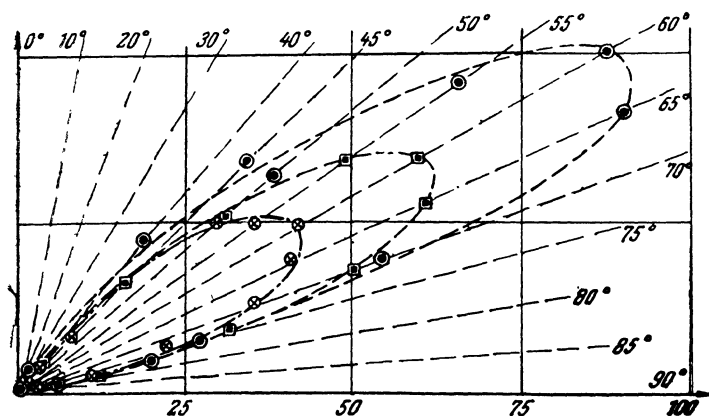


Рис. 42. Угловое распределение поляризованной компоненты видимой части спектра излучения. Точки—эксперимент, кривые—теория. Внешняя кривая — для серебра, средняя — для алюминия и внутренняя — для никеля [66, 67].

В работе [68] были использованы серебряные пленки толщиной ~ 500 Å и электроны с энергией 22 кэв, падающие нормально на пленку. В этом эксперименте также было об-

наружено излучение с указанными выше спектральными характеристиками. Угловое распределение излучения имеет максимум при $\theta \sim 40^\circ$ (угол отсчитывается от нормали к пленке, направленной в сторону пучка), спадая при $\theta \rightarrow 0^\circ$ и $\theta \rightarrow 90^\circ$.

Оказалось, что спектральное распределение существенным образом зависит от угла наблюдения. При $\theta = 30^\circ$ форма спектра согласуется с полученной в работах [69, 70], максимум находится при $\lambda = 3400 \text{ \AA}$. При больших углах ($\theta = 75^\circ$) на кривой отсутствует резкий пик. Поляризацию излучения удалось измерить в более поздней работе [71]. Эти результаты, а также результаты других экспериментов, выполненных впоследствии, послужили предметом дискуссии [72—76, 9, 31, 32]. Сравнение результатов экспериментов [68—70] с теорией переходного излучения было проведено в работе [32]. Результаты эксперимента хорошо согласуются с формулами переходного излучения для пластинки (см. § 25). Наличие пика в области прозрачности серебра находит естественное объяснение в рамках теории переходного излучения.

Во всех экспериментах по переходному излучению, выполненных впоследствии, исследовалась как поляризация так и зависимость выхода от энергии падающих электронов. Как правило, свет всегда оказывается частично поляризованным, и знак поляризации при этом совпадает с ожидаемым по теории переходного излучения. Степень поляризации растет с увеличением энергии электрона и в области выше $\sim 50 \text{ кэВ}$ практически наблюдается 100%-ная поляризация. Отклонение линейной зависимости выхода свечения как функции энергии электронов наблюдается в основном также при малых энергиях (до 30 кэВ). Это положение является характерным почти для всех экспериментов. Аналогичное отклонение от теории наблюдается также и для абсолютной величины интенсивности излучения под определенным углом. Все это свидетельствует о том, что при малых энергиях возрастает роль тормозного излучения и люминесценции, которые возникают в поверхностной пленке металла.

Действительно, для металлов коэффициент поглощения фотонов большой и свечение, обусловленное тормозным

излучением и люминесценцией, будет выходить лишь из тонкого поверхностного слоя металла. Поскольку выход переходного излучения растет пропорционально энергии, а выход люминесценции и тормозного излучения обратно пропорционален E , то с увеличением энергии электрона переходное излучение начинает играть преобладающую роль. Если бы регистрировалось тормозное излучение и люминесценция, образованные на всем пробеге электрона, то положение было бы обратным. В этом случае будет наблюдаться возрастание фона с энергией электрона, поскольку пробег электрона в области энергий до 300 кэВ зависит от энергии как $\sim E^2$. Это может иметь место для массивных образцов прозрачных диэлектриков и металлов в области их прозрачности.

В работах [77—79] исследовалось свечение под действием электронов с энергией от 6 до 30 кэВ следующих металлов: вольфрама, тантала, молибдена, платины, никеля, меди, алюминия, серебра и цезия. Для этих металлов были измерены спектральные и угловые распределения излучения, зависимость яркости свечения от энергии электронов и другие характеристики переходного излучения. Интересными в этих экспериментах являются измерения, ставящие себе цель выявить зависимость яркости свечения от температуры мишени и степени вакуума того объема, в котором находилась мишень. Полученные результаты свидетельствуют о том, что интенсивность излучения не меняется при изменении вакуума от 10^{-5} до 10^{-9} мм ртутного столба, а также при изменении температуры в широких пределах.

Впоследствии этой же группой немецких физиков [80] было более подробно исследовано переходное излучение в массивной мишени серебра, особенно в области прозрачности. Спектральная плотность излучения измерялась авторами при различных энергиях. Полученные данные аппроксимировались формулой, состоящей из двух слагаемых: одного — пропорционального энергии, а другого — обратно пропорционального энергии электронов. Спектральная плотность составляющей, пропорциональной энергии (нижний график на рис. 43), начиная с $\lambda = 5500 \text{ \AA}$, растет по мере приближения к ультра-

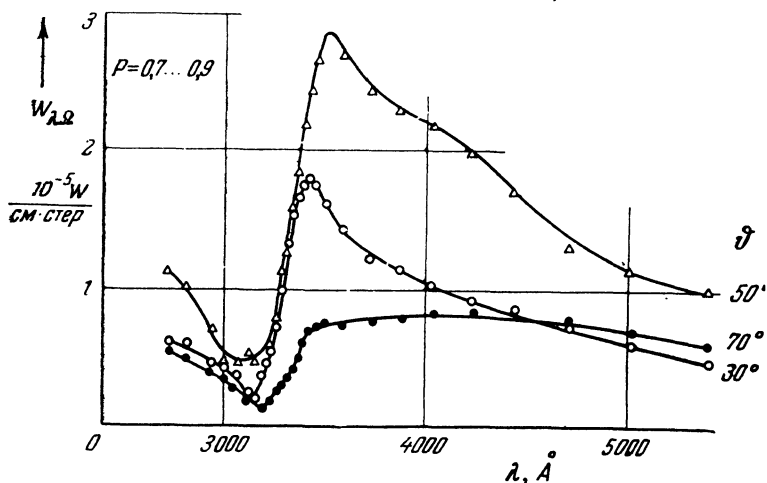
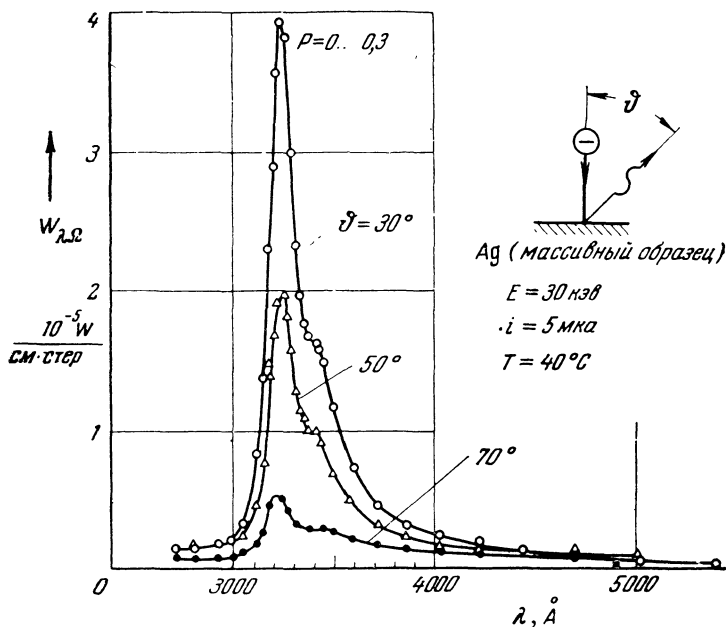


Рис. 43. Спектр излучения серебра, наблюдаемый при бомбардировке электронами с энергией 30 кэВ. Верхний график — компонента, пропорциональная E^{-1} , нижний — пропорциональная E . Разложение сделано для разных углов наблюдения [80].

фиолетовой части спектра. При $\lambda = 3500 \text{ \AA}$ она достигает максимума, а затем при $\lambda = 3200 \text{ \AA}$ резко падает. Все в целом хорошо воспроизводит предсказание теории переходного излучения как по ходу кривых, так и по абсолютной величине интенсивности. Составляющая излучения, обратно пропорциональная энергии электронов (верхний график на рис. 43), имеет вид узкого пика, положение которого определяется максимумом прозрачности серебра $\lambda = 3250 \text{ \AA}$. Авторы полагают, что это излучение есть оптическая часть спектра тормозного излучения, возникающего в толще серебра. При энергии электронов 30 кэВ интенсивности переходного и тормозного излучений примерно равны (косой влет см. ниже).

Обширные исследования переходного излучения в пленках металлов под действием электронов с энергией до 120 кэВ проводились американской группой физиков. Результаты этих исследований содержатся в работах [81—88]. Исследовались пленки металлов: меди, олова, алюминия, серебра, магния, золота, германия, стронция, кадмия, индия, цинка. Свечение исследовалось „вперед“ под углом 30° относительно направления движения электронов, которое совпадало с нормалью к поверхности пленки. Характеристики излучения исследовались как в плоскости, составленной направлением излучения и направлением нормали к поверхности пленки (параллельной составляющей излучения), так и в перпендикулярной плоскости (перпендикулярная составляющая излучения).

Параллельная составляющая излучения отождествлялась с переходным излучением и экспериментально полученные результаты сравнивались с теорией для пластинки вещества (см. § 25). Измеренные спектральные распределения параллельной составляющей излучения в области длин волн от 2500 до 5500 \AA [85] хорошо согласуются с теорией переходного излучения (рис. 44, 45) для электронов с энергией от 40 до 100 кэВ. Для электронов с энергией ниже, чем 40 кэВ, экспериментальные данные превышают теорию примерно в два раза, повторяя при этом ход теоретических кривых. Такое расхождение эксперимента с теорией авторы

объясняют существенным рассеянием электронов в мишени а следовательно, сравнительно сильным проявлением тормозного излучения при низких энергиях электронов. Спектр излучения для серебра, так же как и в предшествующих экспериментах, характеризуется интенсивным пиком в области его прозрачности. Экспериментальные точки неплохо совпадают с теорией, хотя экспериментально наблюдаемый пик получается несколько более плоским, чем ожидаемый.

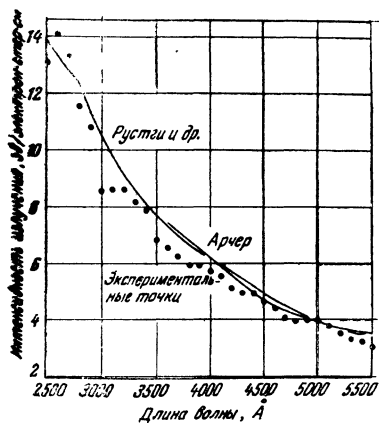


Рис. 44. Спектральное распределение излучения германиевой пленки толщиной 690 \AA под действием электронов с энергией 100 кэВ и теоретическая кривая, рассчитанная на основе имеющихся оптических данных. Угол наблюдения $\theta = 30^\circ$ [85].

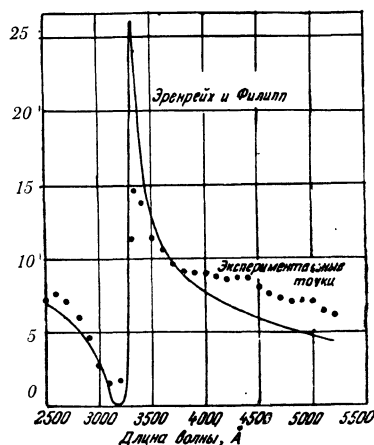


Рис. 45. Спектральное распределение переходного излучения серебряной пленки толщиной 710 \AA под действием электронов с энергией 100 кэВ . Угол наблюдения $\theta = 30^\circ$. Сплошная кривая рассчитана по теории переходного излучения [85].

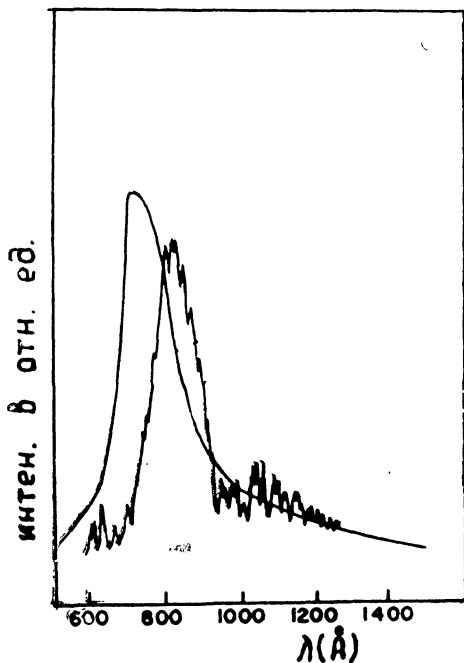
Яркость свечения оказалась пропорциональной энергии электронов. С толщиной пленки от 800 \AA до 2400 \AA [81] она меняется незначительно. Перпендикулярная составляющая излучения отождествлялась с тормозным излучением. Экспериментальные данные сравниваются с формулами тормозного излучения для оптической части спектра.

Данные для золотых пленок [86] позволяют сделать вывод, что тормозное излучение неполяризовано. Следует

подчеркнуть, что данные по тормозному излучению получены с большой ошибкой и часто сигнал, соответствующий эффекту, составляет всего 20—30% уровня шумов.

Интересные опыты были выполнены недавно этой же группой физиков [87, 88] для коротковолновой части спектра ($\lambda = 600 \text{ \AA} \div 2000 \text{ \AA}$) по свечению пленок Al, Mg [87] и Cd

Рис. 46. Спектр переходного излучения в пленке алюминия толщиной 800 \AA под действием электронов с энергией 80 кэВ . Угол наблюдения $\theta = 30^\circ$ [87]. По оси ординат отложена интенсивность в относительных единицах. Сплошная непрерывная линия — теоретическая кривая, пилообразная кривая — эксперимент.



In и Zn [88]. Дело в том, что область прозрачности этих металлов находится именно в отмеченном интервале длин волн и эти металлы должны вести себя примерно так же, как серебро при $\lambda = 3250 \text{ \AA}$. Условия эксперимента аналогичны условиям эксперимента работы [81]. Экспериментальные данные для Al и In, полученные в этих работах, вместе с теоретическими кривыми переходного излучения приводятся на рис. 46, 47. Наблюдаемый спектр излучения алюминиевой пленки характеризуется резким пиком при $\lambda = 815 \text{ \AA} \pm 15 \text{ \AA}$ и несколько смещен относительно теоретически ожидаемого спектра в длинноволновую область. Авторы считают, что это смещение вызвано некоторым раз-

lichem оптических постоянных используемых пленок от тех, по которым вычислялась теория. Для пленок индия в области пика эксперимент хорошо согласуется с теорией. Эксперименты по характеристическим потерям энергии электрона в твердых телах показывают, что величина этой дискретной потери для Al равна 15,3 эв (810 Å), а для индия спектр

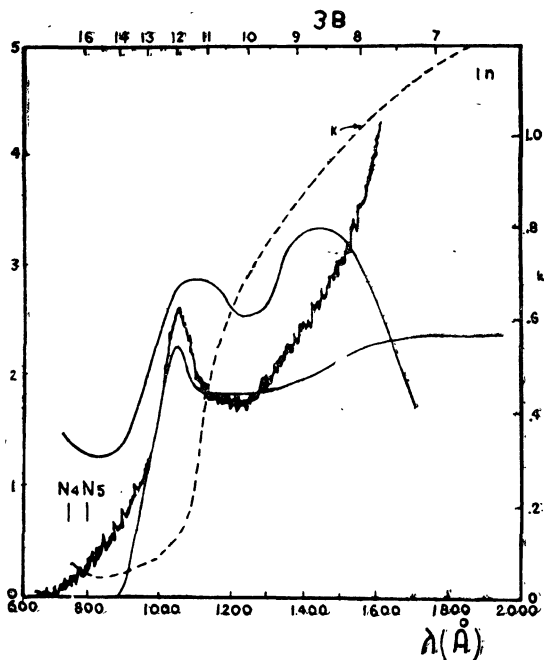


Рис. 47. Спектр излучения в пленке индия под действием электронов с энергией 80 кэв. Угол наблюдения $\theta = 30^\circ$ [88]. Пунктирная кривая соответствует зависимости мнимой части показателя преломления k для индия от длины волны. Кривая Робинса (верхняя кривая) соответствует кривой характеристических потерь для индия. Пилообразная кривая — эксперимент, непрерывная кривая — теория. По оси ординат отложена интенсивность в произвольных единицах.

этих потерь (кривая Робинса) приводится на рис. 47 вместе с данными по излучению. Наблюдается хорошее согласие спектров излучения со спектрами характеристических потерь. Но в то время как ширина линии характеристических потерь, измеренная обычными методами, может быть разрешена

не лучше, чем 2 эв, ширина спектра излучения может быть измерена с точностью 0,2 эв.

Таким образом, открывается возможность исследования характеристических потерь энергии электронов в твердых телах оптическим методом с очень большой точностью.

Переходное излучение, возникающее при бомбардировке диэлектриков (NiO, CaO, MnO) электронами с энергией от 6 до 19 кэв, наблюдалось в эксперименте [89], выполненном японскими физиками. Благодаря большим значениям диэлектрических проницаемостей указанных кристаллов (для NiO $\epsilon = 5,4$) интенсивность излучения оказалась достаточной для экспериментального наблюдения. Степень поляризации (около 50%) оказалась меньше, чем для металлов, и слабо зависела от энергии электронов. Это объясняется тем, что в данном случае фон от люминесценции возникает не только в поверхностном слое, но и внутри диэлектрика. Спектр излучения и угловое распределение хорошо согласуются с теорией переходного излучения. Излучение не зависит от чистоты кристаллов, что было подтверждено экспериментами с кристаллами, имеющими разную степень примесей Li_2O и Al_2O_3 .

До сих пор все эксперименты относились к нормальному влету. Более общим является случай возникновения переходного излучения, когда заряженная частица падает на границу раздела двух сред под углом. Эксперимент по исследованию излучения для наклонного падения электронов на границу вакуум—серебро был выполнен авторами работы [90, 80]. Условия эксперимента были те же, что и в работе [77], с той лишь разницей, что в данном случае электроны попадали на поверхность серебра наклонно под скользящими углами к его поверхности. Для углов влета 87,5 и 89° (углы отсчитываются от нормали к поверхности) и энергии электронов 30 кэв высота пика оказалась на порядок выше интенсивности излучения при нормальном падении. Пик излучения наблюдается при $\lambda = 3500 \text{ \AA}$, что не совсем совпадает с максимумом прозрачности серебра (3250 Å). Авторы делают вывод, что они наблюдали излучение, которое является результатом поверхностных плазменных волн, возбужденных электроном.

Экспериментальные данные по вопросу генерации поверхностных волн (см. § 26 пункт д)) и связанных с ними дискретных потерь энергии опубликованы также в работах [96, 95].

Основной результат цитированных работ сводится к следующему: во-первых, экспериментально обнаружено излучение, которое по интенсивности на 1—2 порядка превосходит переходное и тормозное излучения, во-вторых, положение максимума в спектре излучения не совпадает с полосой прозрачности вещества и довольно точно соответствует положению максимума интенсивности поверхностных волн.

Поскольку поверхностные волны не излучаются в пространство, для объяснения экспериментальных данных необходимо предположить существования эффективного механизма преобразования поверхностных волн в сферическую электромагнитную волну. Таким механизмом может быть рассеяние поверхностных волн на неоднородностях, а также разнообразные нелинейные эффекты.

Детальное исследование излучения, возникающего при прохождении нерелятивистских электронов $20 \div 60$ кэв через тонкие пленки алюминия, серебра и золота, было выполнено группой Ф. Р. Арутюняна [91—94]. Толщины пленок a удовлетворяли условию $a \ll \lambda$. В этих экспериментах был достигнут очень низкий уровень шумов, благодаря чему измерения были выполнены с хорошей точностью. Проводились измерения поляризации, спектра и углового распределения излучения. Исследовалась зависимость интенсивности от энергии электрона, от тока пучка, от толщины пленки, от времени облучения, от угла влета электрона в пленку и от оптических постоянных веществ. Степень поляризации излучения для исследованных металлов в среднем составляет $80-90\%$. Для особо тонких пленок алюминия, когда фоном от тормозного излучения можно пренебречь, степень поляризации достигает $\sim 100\%$. Зависимость интенсивности излучения от φ (φ есть угол между плоскостью пропускания поляризационного фильтра и плоскостью, содержащей нормаль к поверхности пленки и направление излучения) для тонких пленок алюминия приводится на рис. 48. Данные приводятся

для прямого ($\psi = 0$) и наклонного ($\psi = 15^\circ$ и $\psi = 30^\circ$) прохождения электронов через пленку. Угол ψ отсчитывается от нормали к поверхности пленки. Плоскость, содержащую направление движения электрона и нормаль к поверхности пленки, назовем плоскостью падения. Следует отметить, что при такой геометрии плоскость $\varphi = 0$ для случаев, когда угол ψ отличен от нуля, повернут относительно такой же плоскости при $\psi = 0$ на угол φ_n , для которого $\text{ctg } \varphi_n = \sin \theta \text{ctg } \psi$ (θ — угол излучения, отсчитываемый от нормали к поверхности пленки).

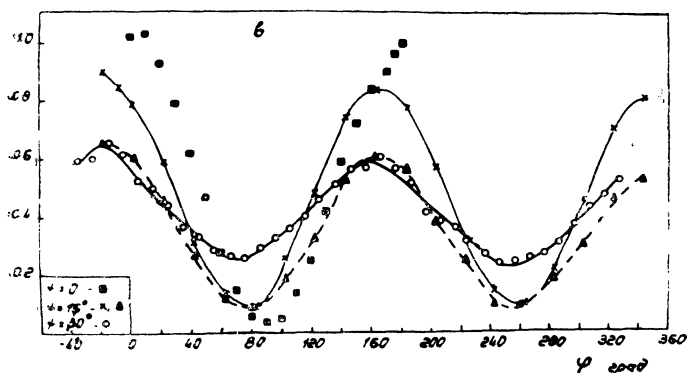


Рис. 48. Зависимость интенсивности излучения (в относительных единицах) от угла φ для Al [91—93]:

- | | | | | | |
|---|-----------------------|--------------------------------|-------------------------|------------------------|-----------------------|
| ■ | — $\psi = 0^\circ$, | $\lambda = 4670 \text{ \AA}$, | $a = 329 \text{ \AA}$, | $E = 60 \text{ кэВ}$, | $\theta = 50^\circ$, |
| × | — $\psi = 15^\circ$, | $\lambda = 4950 \text{ \AA}$, | $a = 209 \text{ \AA}$, | $E = 60 \text{ кэВ}$, | $\theta = 60^\circ$, |
| ▲ | — $\psi = 15^\circ$, | $\lambda = 4950 \text{ \AA}$, | $a = 209 \text{ \AA}$, | $E = 40 \text{ кэВ}$, | $\theta = 60^\circ$, |
| ○ | — $\psi = 30^\circ$, | $\lambda = 4950 \text{ \AA}$, | $a = 209 \text{ \AA}$, | $E = 60 \text{ кэВ}$, | $\theta = 60^\circ$. |

Если при $\psi = 0$ перпендикулярная составляющая излучения I^\perp не наблюдается (на рис. 48 ее величина соответствует величине экспериментального фона), то при ψ , отличном от нуля, ее интенсивность заметно возрастает и продолжает увеличиваться с ростом угла ψ . Максимальная интенсивность излучения при $\psi \neq 0$ наблюдается не при $\varphi = 0$, как это имеет место при $\psi = 0$, а при некотором другом его значении — φ' . Величина φ' увеличивается с ростом ψ и достигает $\varphi' \sim 15^\circ$ при $\psi = 30^\circ$. При фиксированном ψ величина φ' почти не зависит от энергии электрона.

Измерения показали, что яркость свечения пленок Al, Ag и Au под действием электронов со временем постепенно падает. Этот спад, в основном, наблюдается в течение первого часа облучения пленки и может достигать $\sim 20 \div 25\%$. При дальнейшем увеличении времени облучения этот эффект постепенно исчезает. Анализ показывает, что, по-видимому, металлическая пленка под действием электронов в некоторой степени меняет свои оптические свойства.

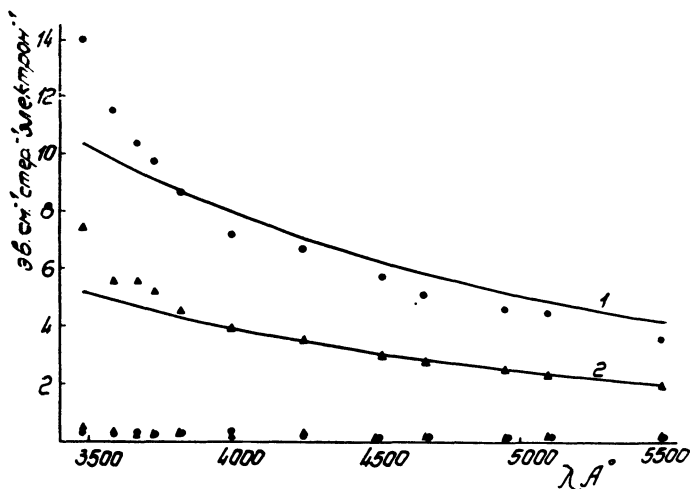


Рис. 49. Спектральное распределение переходного излучения для Al: $E = 60$ кэв, $a = 275$ Å. 1, ● — $\theta = 60^\circ$; 2, ▲ — $\theta = 30^\circ$. Нижние точки соответствуют фону. Данные работ [91—93].

Преимущественную часть ($\sim 90\%$) полного выхода свечения составляет переходное излучение. Измерены следующие характеристики свечения при $\psi = 0$: поляризация и абсолютный выход, спектральный состав (рис. 49) и угловое распределение (рис. 50), зависимость выхода от энергии электрона (рис. 51) и от толщины пленки (рис. 52). Все приведенные данные согласуются с предсказаниями теории переходного излучения для пластинки вещества. Наблюдаемые отклонения данных эксперимента от ожидаемых по теории объясняются, по-видимому, как влиянием многократного рассеяния, так и неточными значениями коэффициентов поглоще-

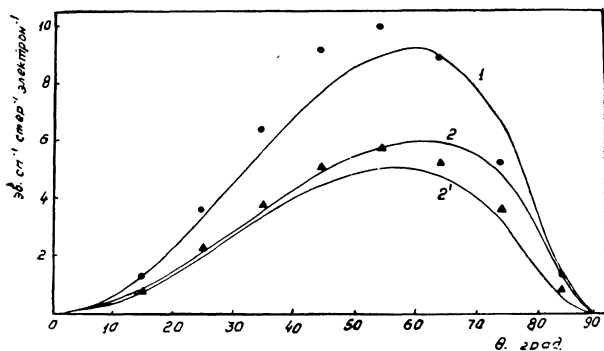


Рис. 50. Угловое распределение переходного излучения для Al: $\alpha = 329 \text{ \AA}$, $E = 60 \text{ кэВ}$. 1, ● — $\lambda = 3730 \text{ \AA}$; 2, ▲ — $\lambda = 4670 \text{ \AA}$. Кривая 2' рассчитана для значения коэффициента поглощения $\chi = 3,7$, а кривая 2 — для $\chi = 5,19$ (данные работ [91—93]).

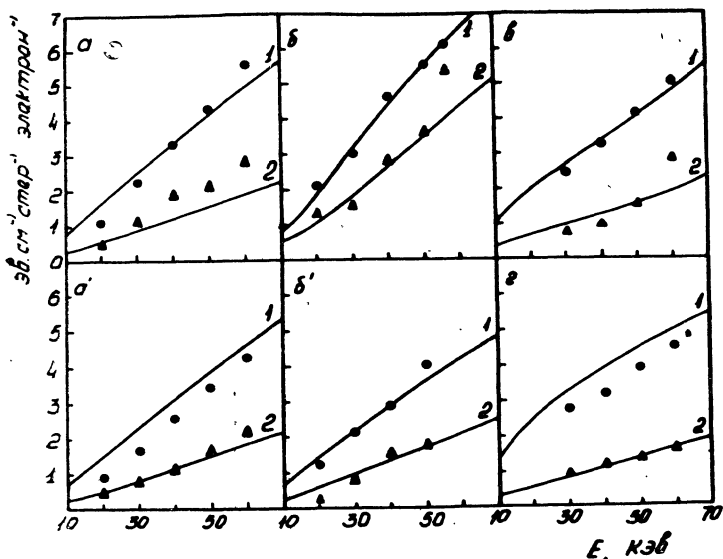


Рис. 51. Зависимость интенсивности переходного излучения от энергии электрона [91—93].

- | | | | |
|------------------------------------|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| а. $\lambda = 5100 \text{ \AA}$; | $\alpha = 660 \text{ \AA}$; | 1, ● — $\theta = 55^\circ$; | 2, ▲ — $\theta = 25^\circ$. |
| а'. $\lambda = 5100 \text{ \AA}$; | $\alpha = 837 \text{ \AA}$; | 1, ● — $\theta = 55^\circ$; | 2, ▲ — $\theta = 25^\circ$. |
| б. $\lambda = 4000 \text{ \AA}$; | $\alpha = 767 \text{ \AA}$; | 1, ● — $\theta = 60^\circ$; | 2, ▲ — $\theta = 30^\circ$. |
| б'. $\lambda = 5500 \text{ \AA}$; | $\alpha = 767 \text{ \AA}$; | 1, ● — $\theta = 60^\circ$; | 2, ▲ — $\theta = 30^\circ$. |
| в. $\lambda = 3820 \text{ \AA}$; | $\alpha = 1341 \text{ \AA}$; | 1, ● — $\theta = 60^\circ$; | 2, ▲ — $\theta = 20^\circ$. |
| г. $\lambda = 4670 \text{ \AA}$; | $\alpha = 334 \text{ \AA}$; | 1, ● — $\theta = 60^\circ$; | 2, ▲ — $\theta = 20^\circ$. |

ния исследуемых пленок. Они были заимствованы из других работ для расчета теоретических кривых. Например, кривая 2' (рис. 50), рассчитанная для меньшего значения коэффициента поглощения, лучше согласуется с экспериментом, чем кривая 2.

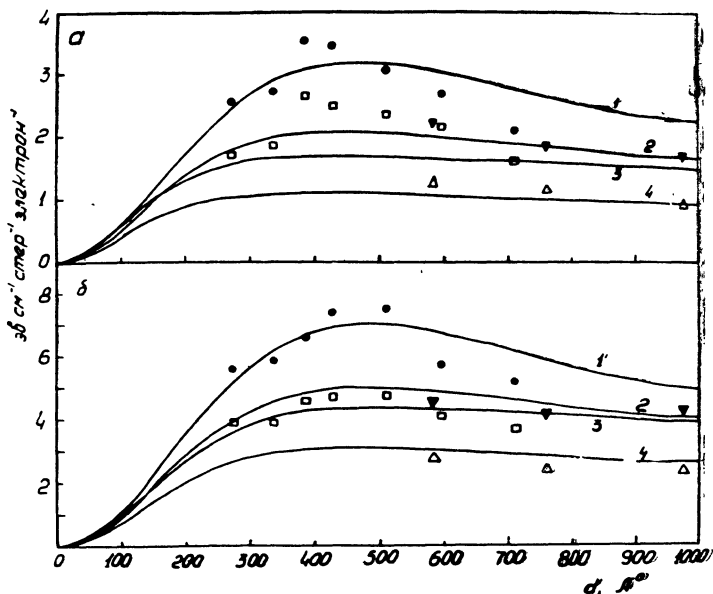


Рис. 52. Зависимость интенсивности переходного излучения от толщины пленки Ag [91—93].

- | | | | |
|---------|----------------------------------|------------------------|-----------------------|
| а. 1, ● | — $\lambda = 4000 \text{ \AA}$, | $E = 50 \text{ кэв}$, | $\theta = 25^\circ$. |
| 2, □ | — $\lambda = 4670 \text{ \AA}$, | $E = 50 \text{ кэв}$, | $\theta = 25^\circ$. |
| 3, ▼ | — $\lambda = 5500 \text{ \AA}$, | $E = 60 \text{ кэв}$, | $\theta = 25^\circ$. |
| 4, △ | — $\lambda = 5500 \text{ \AA}$, | $E = 40 \text{ кэв}$, | $\theta = 25^\circ$. |
| б. 1, ● | — $\lambda = 4000 \text{ \AA}$, | $E = 50 \text{ кэв}$, | $\theta = 50^\circ$. |
| 2, □ | — $\lambda = 4670 \text{ \AA}$, | $E = 50 \text{ кэв}$, | $\theta = 50^\circ$. |
| 3, ▼ | — $\lambda = 5500 \text{ \AA}$, | $E = 60 \text{ кэв}$, | $\theta = 55^\circ$. |
| 4, △ | — $\lambda = 5500 \text{ \AA}$, | $E = 40 \text{ кэв}$, | $\theta = 55^\circ$. |

К сожалению, измерение оптических постоянных пленок в процессе опыта не проводилось (такие измерения сейчас проводятся).

Неполяризованная часть излучения (при нормальном влете) для пленок серебра и золота (для тонких пленок алю-

миния неполяризованная часть излучения отсутствует) по данным работы [93] состоит из тормозного и переходного излучения. Последнее может возникать из-за многократного рассеяния электронов в пленке металла (на вторую границу электроны падают наклонно, в связи с чем появляется составляющая переходного излучения с перпендикулярной составляющей). Та часть свечения, выход которой обратно пропорционален энергии электрона, отождествляется с тормозным излучением. Экспериментальные данные сравниваются с теорией тормозного излучения для пластинки вещества с учетом диэлектрических свойств среды. Однако выход тормозного излучения, измеренный экспериментально для серебра, по абсолютной величине во много раз превышает соответствующий выход, вычисленный по теории. Такое несоответствие эксперимента и теории, по-видимому, объясняется многократным рассеянием электронов и неточными значениями коэффициентов поглощения используемых пленок. Удалось определить поляризацию тормозного излучения. Величина степени поляризации (при наблюдении под большими углами излучения) оказалась равной $30 \div 65\%$ и согласуется с теорией. Преимущественно испускаются фотоны тормозного излучения, поляризованные в плоскости, составленной вектором кванта \vec{l} и направлением движения электрона. Особое место занимают данные [94], полученные для случая наклонного прохождения электронов через пленки алюминия. Согласно теории (см. формулы (25.25) и (25.26)), в этом случае $I^\perp \ll I^\parallel$ и излучение практически должно быть поляризовано в плоскости $\varphi = 0$, так же как и при прямом прохождении электронов. Однако в эксперименте регистрируется заметное излучение, поляризованное в плоскости $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (рис. 48). В отдельных случаях абсолютная величина I^\perp сравнивается с величиной I^\parallel . Надо отметить, что излучение при наклонном прохождении электронов исследовалось для тех пленок, для которых при прямом прохождении электронов составляющая I^\perp полностью отсутствует. Эти данные приводятся на рис. 53, 54, 55. Измеренные характеристики для I^\parallel (спектральный состав и угловое распределение, зависимость выхода от

энергии электрона и угла его влета в пленку) согласуются с предсказаниями теории переходного излучения для этой составляющей. Однако измеренный выход излучения по абсолютной величине оказался в $2 \div 3$ раза меньше теоретического.

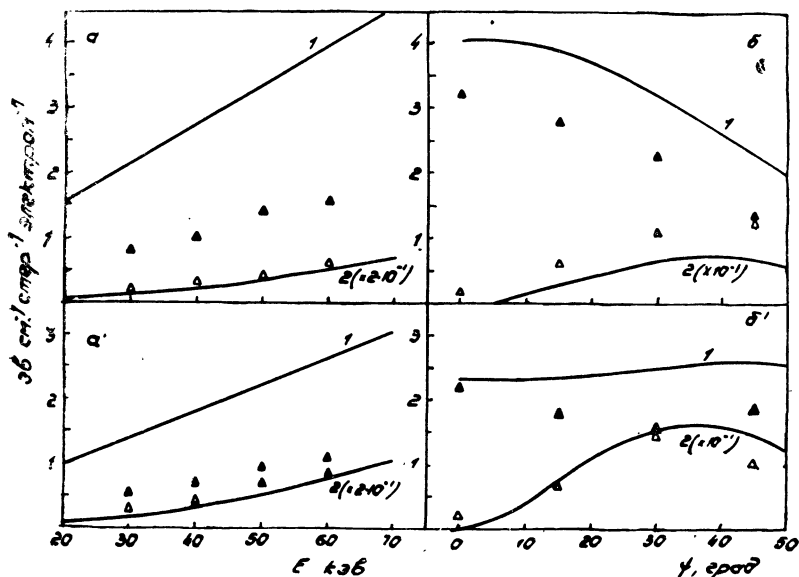


Рис. 53. Зависимость параллельной (I^{\parallel}) и перпендикулярной (I^{\perp}) составляющих излучения от энергии электрона и угла влета ψ (данные работы [94]). Кривые 1 соответствуют параллельной составляющей, кривые 2 — перпендикулярной составляющей, причем ординаты теоретических кривых 2 увеличены на порядок.

Если в качестве оптических постоянных алюминия использовать те значения, при которых в случае прямого прохождения электронов экспериментальные данные лучшим образом согласуются с теорией, то наблюдаемые отклонения эксперимента от теории для $\psi \neq 0$ (в том числе и уменьшение его абсолютного выхода в $2 \div 3$ раза при наклонном прохождении электронов через те же пленки) устраняются. Это хорошо видно из рис. 54, где кривая 1' лучше согласуется с теорией, чем кривая 1. Кривая вычислена для того же значения коэффициента поглощения, что и кривая 2' (рис. 50).

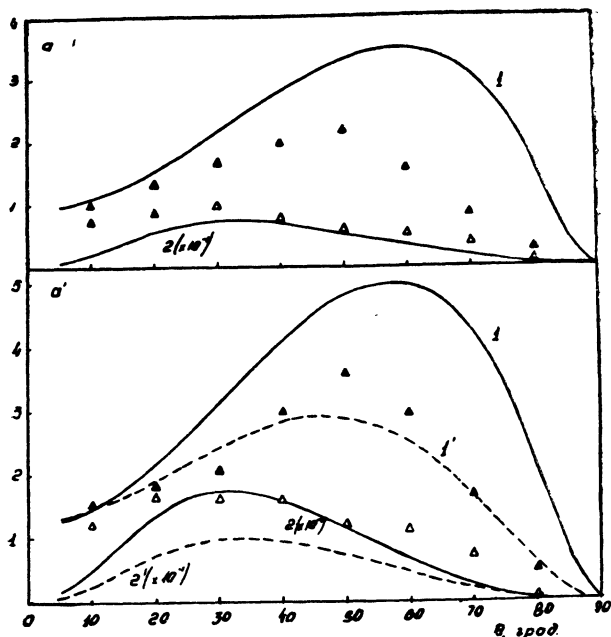


Рис. 54. Угловое распределение параллельной (I^{\parallel}) и перпендикулярной (I^{\perp}) составляющих излучения для Al: $a = 329 \text{ \AA}$, $\lambda = 4670 \text{ \AA}$; $\psi = 30^\circ$; а) $E = 40 \text{ кэв}$; а') $E = 60 \text{ кэв}$. 1, \blacktriangle — I^{\parallel} ; 2, \triangle — I^{\perp} . Кривые 1' и 2' рассчитаны с показателем поглощения $\chi = 3,7$ вместо 5,19 (данные работы [94]).

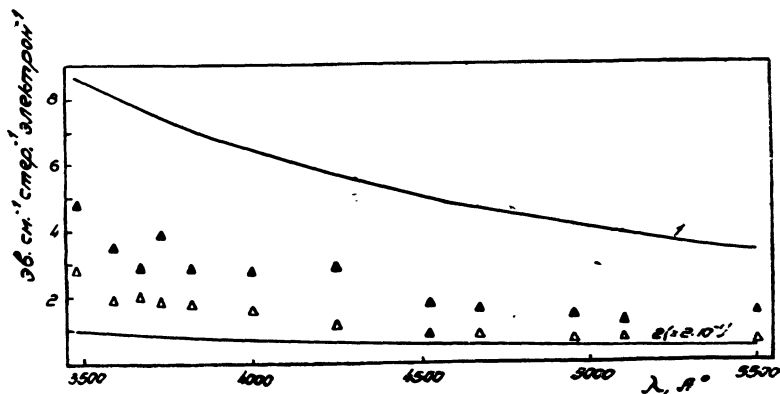


Рис. 55. Спектральное распределение параллельной (I^{\parallel}) и перпендикулярной (I^{\perp}) составляющих излучения для Al: $a = 252 \text{ \AA}$, $E = 60 \text{ кэв}$; $\theta = 50^\circ$; $\psi = 30^\circ$; 1, \blacktriangle — I^{\parallel} ; 2, \triangle — I^{\perp} (данные работы [94]).

Что касается перпендикулярной составляющей излучения, то ход кривых, определяющих спектральный состав, угловое распределение и другие характеристики, согласуется с теорией переходного излучения для этой составляющей. Лучшее согласие достигается опять-таки при меньших значениях коэффициента поглощения (кривая 2' вместо кривой 2 на рис. 54). Однако измеренный выход свечения для этой составляющей по абсолютной величине в среднем на порядок превышает выход, ожидаемый по теории. Это уже трудно объяснить специальным подбором оптических постоянных пленок.

Следует отметить, что если аналогичные неясности, имеющиеся в других экспериментах, выполненных для случая наклонного падения электронов на поверхность массивной мишени [90], в какой-то степени (как отметил И. М. Франк) можно аргументировать существенным проявлением тормозного излучения (при скользящем падении), то для данных работы [94] рассеяние электронов пренебрежимо мало и тормозное излучение полностью отсутствует. Причина расхождения эксперимента и теории не выявлена.

В заключение обзора экспериментальных данных отметим, что в работе [97] (см. обзор [10]) предлагается использовать переходное излучение для определения оптических констант сред с сильным поглощением (металлов). Были рассчитаны кривые углового и спектрального распределения энергии переходного излучения для различных значений действительной n и мнимой k частей показателя преломления, лежащих в интервале от 0,2 до 3,5, что соответствует соответствующему интервалу значений показателей преломления для реальных металлов. Предлагается использовать релятивистские электроны, поскольку фон (люминесценция поверхностной пленки, тормозное излучение) при этом оказывается наименьшим. Расчет кривых проводился по формулам (24.21) и (24.22), которые для больших углов $\theta \gg E/mc^2$ излучения можно несколько упростить, полагая $\beta = 1$, $\epsilon_1 = 1$. Для энергии, излученной в заднюю полусферу, имеем:

$$\frac{dI_H}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{|(1 - \epsilon_2) \sqrt{\epsilon_2 - \sin^2 \theta}|^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{|(\sqrt{\epsilon_2 - \sin^2 \theta} + \epsilon_2 \cos \theta)(1 + \sqrt{\epsilon_2 - \sin^2 \theta})|^2}. \quad (24.21')$$

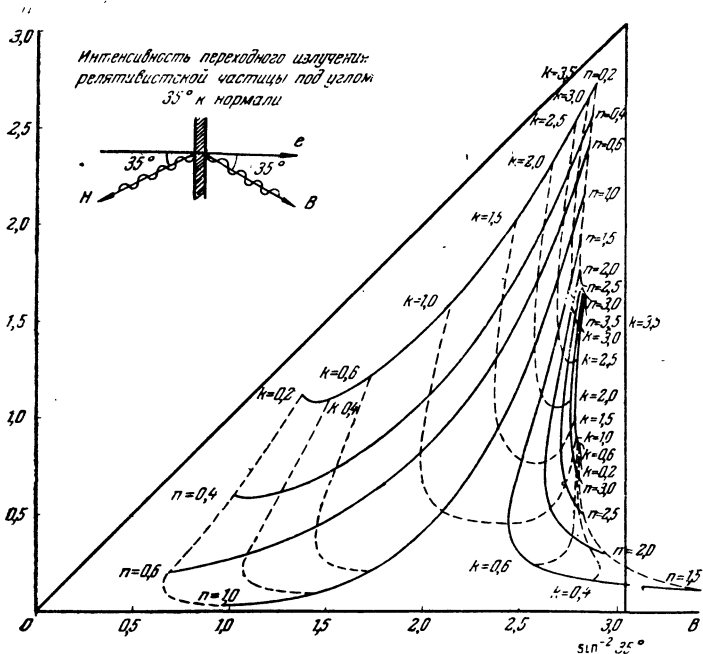


Рис. 56. Буквой B обозначена энергия переходного излучения в единичном интервале телесного угла и единичном интервале частот под углом $\theta = 35^\circ$ (вперед), а буквой H аналогичная величина под углом $\theta_1 = 35^\circ$ (назад), рассчитанная по формуле (24.21'). По оси абсцисс отложена величина B , а по оси ординат — H .

Сплошные кривые соединяют точки, соответствующие постоянным значениям действительной части коэффициента преломления n . Вдоль сплошных линий изменяются значения коэффициента поглощения k . Пунктирные кривые соответствуют постоянным значениям k и переменным n . Измерения H и B однозначно определяют оптические константы металлов.

Энергия излучения „вперед“ дается аналогичной формулой с той лишь разницей, что в знаменателе выражения (24.21') необходимо изменить знак в последнем множителе перед величиной $\sqrt{\epsilon_2 - \sin^2 \theta}$. Результаты численного расчета для частного случая $\theta = 35^\circ$ приведены на рис. 56.

V ИЗЛУЧЕНИЕ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩИХСЯ ЧАСТИЦ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Настоящая глава посвящена рассмотрению излучения, возникающего при прохождении заряженных частиц через произвольную неоднородную среду. Неоднородности в среде могут быть периодическими или случайными функциями точки. В соответствии с этим изложены вопросы излучения в периодических средах (§ 28, 29), в средах со случайно расположенными неоднородностями (§ 30) и в средах с экранами и другого рода препятствиями (§ 31). Излагаемая ниже теория очень напоминает соответствующие расчеты по рассеянию света в веществе с неоднородной диэлектрической постоянной.

Мы опять-таки отдали предпочтение изложению тех вопросов, которые могут иметь применение в физике высоких энергий. В частности, большое внимание уделяется теории и эксперименту по резонансному излучению.

Автор старался на каждом рассмотренном ниже примере иллюстрировать различные математические методы решения. Так, например, § 28 и первая часть § 31 базируются на квазиклассическом приближении (геометрической оптике), расчеты § 30 и конца § 28 основаны на теории возмущений и методе псевдофотонов. Точные методы решения, на основе которых мы излагали теорию переходного излучения, затронуты только в конце § 31. Читатель, овладевший перечисленными выше методами, сможет без труда самостоятельно решать необходимые задачи на излучение заряженных частиц.

а) Введение

Рассмотрим излучение, возникающее при прохождении равномерно движущейся заряженной частицы через произвольную периодически неоднородную среду. В дальнейшем мы будем рассматривать как естественные кристаллические структуры, так и искусственно создаваемые периодические среды. Однако оказывается, что наибольший практический интерес будет представлять излучение в искусственно создаваемых одномерных периодических структурах. Излучение в трехмерных периодических средах (кристаллах) рассмотрено в конце этого параграфа.

Наличие периодичности должно приводить к интерференционным явлениям, и возможность появления излучения, пропорционального длине пути в такой среде, связана, как мы сейчас увидим, с выполнением определенных соотношений [1].

Рассмотрим одномерную периодическую среду и выведем необходимое условие появления излучения в такой среде. Пусть свойства среды периодически изменяются (фактически это будет изменение плотности атомов или электронов) вдоль оси z . В этом случае диэлектрическая постоянная среды имеет вид

$$\varepsilon(\omega, z) = \varepsilon_0(\omega) + \varepsilon_1(z, \omega), \quad (28.1)$$

где $\varepsilon_1(z, \omega)$ — периодическая функция переменной z с периодом l , разлагаемая в ряд Фурье и удовлетворяющая условию

$$\varepsilon_1 \ll \varepsilon_0. \quad (28.2)$$

Условие (28.2) всегда удовлетворяется для частот, значительно превышающих характерные атомные частоты (см. выражение диэлектрической постоянной (28.8)). Выполнение условия (28.2), однако, не означает, что для расчета излучения можно пользоваться теорией возмущений. Как мы увидим ниже, теория возмущений будет применима только в том случае, если переменная часть плотности атомов N' значительно меньше постоянной составляющей плотности N .

Используя законы сохранения, выведем необходимое условие для излучения кванта с энергией $\hbar\omega$. Закон сохранения энергии имеет вид

$$\delta E = \hbar\omega, \quad (28.3)$$

где δE — есть изменение энергии излучающей частицы. Передачей энергии среде мы пренебрегаем ввиду громадной массы среды. Используем также закон сохранения импульса

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \frac{\hbar\omega}{c} \vec{n} \sqrt{\varepsilon_0} = \vec{q}, \quad (28.4)$$

где \vec{p}_1 и \vec{p}_2 — импульсы частицы до и после излучения кванта, \vec{n} — единичный вектор вдоль распространения кванта, \vec{q} — передаваемый среде импульс. Для малых изменений энергии δE и импульса $\vec{\delta p}$ имеется соотношение $\vec{v} \vec{\delta p} = \delta E$. Далее нужно учесть, что в процессе излучения в среде, периодической вдоль оси z , ей может быть передан только „квантованный“ импульс, направленный вдоль оси z и равный $\frac{2\pi\hbar}{l}r$, где r — произвольное целое число (сравни с выводом интерференционных условий при тормозном излучении в кристалле).

В перпендикулярном направлении среда считается однородной и, следовательно, импульс, переданный среде в направлении, перпендикулярном оси z , равен нулю. Умножим соотношение (28.4) на скорость частицы \vec{v} . Тогда легко видеть, что закон сохранения импульса вдоль направления первоначальной скорости можно записать в виде

$$\frac{\hbar\omega}{v} \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta \right) = \frac{2\pi\hbar r}{l} \cos \psi, \quad (28.5)$$

где θ — угол между направлением излучения кванта и скоростью частицы, а ψ — угол влета, т. е. угол между направлением скорости \vec{v} и осью z . По своему физическому содержанию условие (28.5) эквивалентно условию Брэгга—Вульфа в дифракции рентгеновских лучей.

Равенство (28.5) идентично условию когерентного тормозного излучения в кристаллах в приближении линейной цепочки атомов (см. главу II).

Если направление скорости частицы совпадает с осью z , то (28.5) несколько упрощается:

$$\omega_{\text{эф}} = \omega \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \theta \right) = \frac{2\pi v}{l} r. \quad (28.5')$$

Соотношение (28.5) удобно записать в следующем виде:

$$\cos \theta = \frac{c}{v \sqrt{\epsilon_0}} - \frac{2\pi r c}{l \omega \sqrt{\epsilon_0}} \cos \psi. \quad (28.6)$$

Условие (28.5) показывает, что излучение порядка r в среде с идеальной периодичностью может появляться только в том случае, если существует резонанс r -ого порядка между „частотой пролета“ периода среды, равной $\frac{2\pi v}{l}$, и „эффективной частотой“ излучения $\omega_{\text{эф}}$.

Для нерелятивистских частиц условие (28.5') приводит к равенству

$$\omega = 2\pi v r / l, \quad (28.5'')$$

которое поддается простой физической интерпретации: в периодической среде могут излучаться фотоны только с частотой, равной целому кратному „частоты пролета среды“ $\frac{2\pi v}{l}$. Таким образом, при излучении фотонов устанавливается своеобразный резонанс между частотой пролета и частотой излучения.

В релятивистском случае, как это хорошо известно, например, из теории синхротронного излучения, частоты сдвинуты из-за Допплер-эффекта. В формуле (28.5) наличие множителя $\left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \theta \right)$ также соответствует Допплер-эффекту*. Аналогия с синхротронным излучением может быть

* Обратим внимание, что осциллятор с собственной частотой колебания, равной ω , при движении со скоростью β будет излучать в направлении θ частоту, равную $\omega' = \frac{\omega \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \sqrt{\epsilon_0} \cos \theta}$.

прослежена более детально. Следует учесть, что с физической точки зрения безразлично, совершает ли сама частица периодические движения либо равномерно движущаяся частица проходит через периодически неоднородную среду.

В последующем изложении условие (28.5) мы будем называть условием резонанса, а соответствующее излучение — *резонансным*. Резонансное излучение будет складываться из излучения различных гармоник, отличающихся друг от друга значением r .

Во избежание недоразумений отметим, что при выводе формулы (28.5) пренебрежено влиянием $\varepsilon_1(z, \omega)$ на распространение излученного кванта (подробнее см. ниже). Такое рассмотрение будет соответствовать приближению геометрической оптики (квазиклассическое приближение). Используя условие применимости квазиклассики, можно показать, что формула (28.5) останется справедливой, если выполняется неравенство (28.27), обеспечивающее справедливость квазиклассического приближения (см. ниже).

Условие (28.5) легко вывести другим наглядным способом. Излучение электрона с траектории возможно, если излучаемые кванты при распространении в среде будут в фазе с электроном и, следовательно, будут когерентно складываться (см. рис. 57). Рассмотрим в виде примера конкретную периодическую среду, составленную из двух чередующихся слоев с диэлектрическими постоянными ε_1 и ε_2 . Такую периодическую среду принято называть *слоистой средой*. За время $\Delta t = \frac{l_1 + l_2}{v}$, где l_1, l_2 — тол-

щины пластинок, а v — скорость электрона, электрон из точки 1 перейдет в точку 3. Пусть в точке 1 электрон испустит „переходной“ квант, который в дальнейшем *свободно* распространяется в слоистой среде. Очевидно, что имеет место равенство $\Delta t_1 = l_1 \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta / c$, где Δt_1 — время, за которое электрон проходит первую пластинку, а θ — угол излучения. Аналогичное равенство можно записать и для фотона, испущенного электроном из точки 2: $\Delta t_2 = l_2 \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta / c$.

Используя выписанные формулы и условие когерентного сложения $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \frac{2\pi r}{\omega}$, получим снова неравенство (28.5'),

причем под ε_0 в данном случае нужно понимать величину

$$\sqrt{\varepsilon_0} = \frac{l_1 \sqrt{\varepsilon_1} + l_2 \sqrt{\varepsilon_2}}{l_1 + l_2}. \quad (28.7)$$

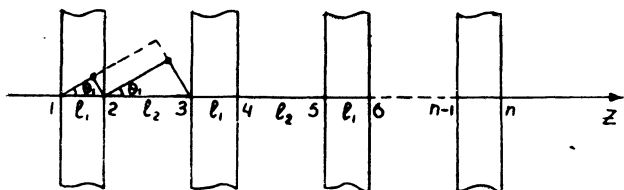


Рис. 57. К выводу условия резонанса.

Рассмотрим, к каким следствиям приводит условие резонанса. Из выражения (28.5) видно, что при стремлении длины периода к бесконечности $l \rightarrow \infty$, условие (28.5) превращается в известное условие излучения Вавилова—Черенкова, из которого следует, что излучение в однородной среде может появиться только тогда, когда диэлектрическая постоянная больше единицы.

Однако в отличие от случая $l \rightarrow \infty$ условие (28.5) может быть удовлетворено и в области частот, превышающих атомные частоты, где диэлектрическая постоянная (28.1) меньше единицы и имеет вид:

$$\varepsilon_0 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_1 = -\frac{N'Z'\omega_0^2}{NZ\omega^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi NZe^2}{m_e}. \quad (28.8)$$

Здесь NZ — средняя плотность, $N'Z'$ — переменная часть плотности электронов, m_e , e — масса и заряд электрона.

Перейдем к анализу формулы (28.6). Рассмотрим нормальный влет, $\psi = 0$. Используя неравенство $|\cos \theta| \leq 1$, из формулы (28.6) получим условие на интервал длин волн, излучаемых резонансным образом:

$$\frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_0}} \left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_0}\right) \geq \frac{2\pi r \lambda}{l} \geq \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_0}\right) \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad (28.9)$$

где

$$\lambda = \frac{c}{\omega \sqrt{\epsilon_0}}.$$

Обратим внимание, что для каждого фиксированного целого числа r , которое характеризует номер гармоника, имеется свой интервал излученных частот.

Из неравенства (28.9) следует, что излучение для отрицательных значений r и для $r = 0$ может осуществляться только в том случае, если правая часть неравенства (28.9) для некоторой области частот обращается в нуль. Для этого, во всяком случае, необходимо, чтобы диэлектрическая постоянная среды была больше единицы.

Рассмотрим излучение частот, значительно больших характерной атомной частоты $\omega_{ат}$. В этом предельном случае диэлектрическая постоянная среды всегда меньше единицы и имеет универсальный вид (см. формулу (28.8)). Легко видеть, что вклад в излучение будут давать только гармоники с положительными r .

Для частот, удовлетворяющих неравенству $\omega \gg \omega_0$, выражение (28.9) можно упростить, разлагая $\sqrt{\epsilon_0}$ в ряд и полагая, где это возможно, ϵ_0 равным единице.

В этом случае правая часть неравенства (28.9) приводит сразу к двум условиям, поскольку оно превращается в квадратное уравнение для определения частоты. При высоких энергиях (далеко за порогом появления излучения, см. условие (28.13)) правую часть неравенства (28.9) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{2\pi(1 + v/c)vr}{l} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \gtrsim \omega \gtrsim \frac{NZe^2 l}{m_e cr}. \quad (28.10)$$

Нужно обратить внимание на то, что минимальная частота излучения определяется однозначно заданием периода среды l , средней плотности электронов NZ и номером гармоника r .

Левая часть неравенства (28.9) приводит к следующему условию:

$$\omega \gg \frac{2\pi v r}{(1 + v/c)l}. \quad (28.11)$$

Если выполняется неравенство

$$l \gg 2\pi r \left[\frac{m_e v c}{2\pi N Z e^2 (1 + v/c)} \right]^{1/2}, \quad (28.12)$$

то условие (28.11) будет автоматически следовать из условия (28.10).

Покажем, что в этом случае излучение будет иметь энергетический порог. Действительно, для существования интервала частот ω , излучаемых при определенном значении r , необходимо, чтобы левая часть неравенства (28.9) была больше правой. Это приводит к условию на пороговое значение энергии, начиная с которой появляется излучение с индексом r (излучение r -ой гармоники):

$$\frac{E}{m c^2} \gg \frac{l}{2\pi r} \sqrt{\frac{2\pi N Z e^2}{m_e v c (1 + v/c)}}. \quad (28.13)$$

Легко видеть, что для существования интервала (28.10) и справедливости неравенства (28.12) необходимо выполнение условия $\frac{E}{m c^2} \gg 1$. Поэтому в дальнейшем во всех формулах скорость частицы v может быть заменена на c . В этом случае формулы (28.10) — (28.13) можно переписать в более компактной форме:

$$\omega_{\max} = \frac{4\pi c r}{l} \left(\frac{E}{m c^2} \right)^2 \gtrsim \omega \gtrsim \frac{l \omega_0^2}{4\pi c r} = \omega_{\min}, \quad (28.10)$$

$$\omega \gtrsim \frac{\pi c r}{l}, \quad (28.11)$$

$$l \gg \frac{2\pi c r}{\omega_0}, \quad (28.12)$$

$$\frac{E}{m c^2} \gg \frac{l \omega_0}{4\pi r c}. \quad (28.13)$$

Точные формулы для интервала излученных частот и пороговой энергии приводятся ниже (см., например, (28.58), (28.89), (28.90)).

Итак, излучение в периодической среде должно состоять из суммы излучений различных гармоник, определяемых целыми числами r . Интервал частот для каждой гармоники дается выражениями (28.9) и (28.11). Однако в пределе больших частот и при выполнении неравенства (28.12) интервал излучаемых частот будет определяться только неравенством (28.10). Этот наиболее интересный случай будет подробно рассмотрен в дальнейшем на конкретных примерах. Именно в этом случае резонансное излучение будет обладать пороговыми свойствами.

Из формулы (28.13) видно, что чем выше энергия излучающей частицы, тем меньше индекс r излучаемой гармоники. Излучение r -ой гармоники появляется только начиная с определенной энергии частицы.

Очень существенно отметить, что порог излучения зависит от энергии частицы, а не от скорости v , как это, например, имеет место при излучении Вавилова—Черенкова. Это обстоятельство может сыграть определяющую роль при практическом использовании резонансного излучения в той области энергий, где скорость частицы приближается к скорости света и применение черенковских счетчиков является затруднительным. Мы вернемся к подробному обсуждению этих вопросов в последующих пунктах.

Отметим еще, что в рассматриваемом случае (когда выполняется условие (28.12)) резонансное излучение приобретает резкую направленность вперед. Это следует из того факта, что неравенство (28.10) было получено с использованием только правой части неравенства (28.9), которое соответствует условию $\cos \theta \leq 1$. Это означает, что максимальные и минимальные частоты, излучаемые на r -ой гармонике, направлены точно вдоль движения начальной частицы. Это следует также из формулы (28.6), которую мы перепишем для рассматриваемого случая в следующем виде:

$$\theta^2 = \frac{4\pi r c}{l\omega} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (28.6')$$

Для излучения промежуточных частот угол излучения оказывается малым. Максимальным углом излучения на каждой гармонике

$$\theta_{\max} = \frac{2\pi rc}{l\omega_0} \quad (28.6'')$$

обладают кванты, всего в два раза превосходящие минимально возможные частоты излучения $\omega_{\min} \approx \frac{l\omega_0^2}{4\pi cr}$.

Сравнение неравенства (28.6'') с неравенством (28.12) показывает, что максимально возможный угол излучения будет действительно всегда мал, если неравенство (28.12) выполнено.

В том случае, если неравенство (28.12) перестает выполняться, угловое распределение излученных квантов уже не будет направленным, и фотоны будут излучаться и в заднюю полусферу. Интервал излученных частот (для $\omega \gg \omega_0$) в этом случае определяется левой частью неравенства (28.10) и неравенством (28.11).

Наше внимание будет сконцентрировано на изучении процессов излучения фотонов, для которых $\omega \gg \omega_0$ и выполняется неравенство (28.12).

Укажем еще раз, что в этом случае каждая гармоника занимает определенный частотный интервал, даваемый формулой (28.10) (точные границы этого интервала даются корнями квадратного уравнения, вытекающего из правой части неравенства (28.9)).

Различные гармоники, вообще говоря, перекрываются (см. рис. 58а,б). Каждая гармоника появляется, начиная с определенной энергии (см. формулу (28.13)). Чем меньше номер гармоники, тем выше энергия, начиная с которой появляется излучение на данной гармонике. Следовательно, с увеличением энергии излучающей частицы спектр излученных квантов обогащается за счет появления гармоник с малыми значениями r .

Это будет происходить до тех пор, пока не появятся все гармоники с $r \geq 1$. Как показывает расчет, дальнейшее увеличение энергии частицы не приводит к существенному изменению спектра и интенсивность резонансного излучения при этом стремится к насыщению.

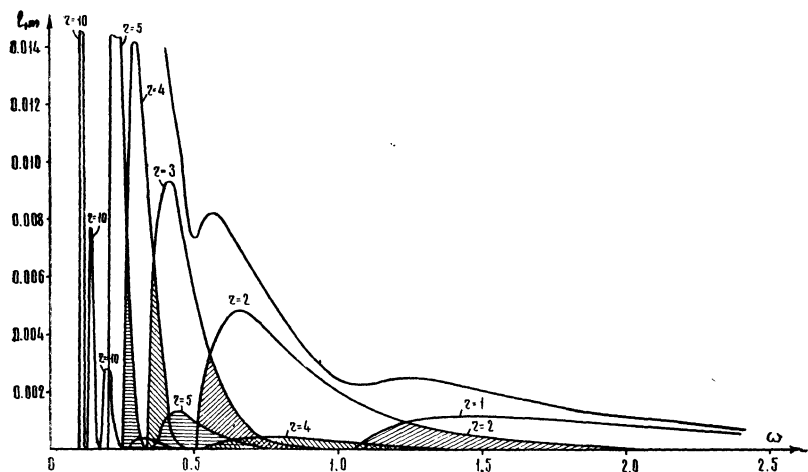


Рис. 58а. Дифференциальные спектры резонансного излучения различных порядков ($r = 1, 2, 3$). Верхняя кривая есть суммарный спектр по всем гармоникам. По оси абсцисс отложена частота излученного кванта в единицах минимально возможной частоты на первой гармонике. По оси ординат отложена величина $l_1 m$, где m — полное число излученных квантов на 1 см слоистой вещества, а l_1 — толщина пластинки. Кривые рассчитаны для слоистой среды, состоящей из пластинок, расположенных друг от друга в воздухе на расстоянии $l_2 = l_1$. Энергия излучающей частицы превышает пороговую энергию на первой гармонике в 2,2 раза. Кривые для других значений параметров см. в [2].

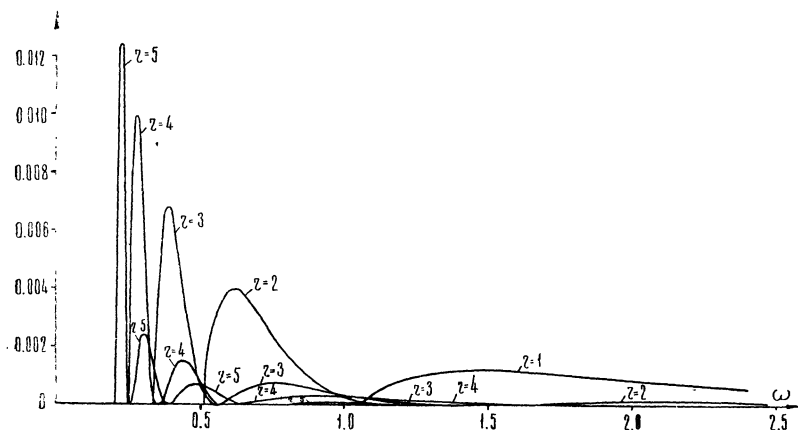


Рис. 58б. То же, что и на рис. 58а при $\alpha = \frac{l_2}{l_1} = 5$.

Обратим внимание на угловое распределение резонансного излучения (см. формулы (28.6) и (28.6')). Для заданной энергии, номера гармоники, периода среды и частоты резонансные кванты излучаются под определенным углом, для которого выполняется условие когерентного суммирования. Только в этих направлениях происходит усиление излучения, образованного на различных неоднородностях среды (в других направлениях происходит гашение излучения), и интенсивность излучения будет пропорциональна квадрату числа неоднородностей (см. (28.49') или (28.92), из которых следует, что интенсивность излучения пропорциональна квадрату длины траектории). К сожалению, угловое распределение резонансного излучения экспериментально не исследовано, хотя соответствующее явление используется при детектировании излучения Черенкова — Вавилова.

Все изложенные закономерности получены только из законов сохранения энергии и импульса. Точный расчет подтверждает приведенные выше результаты и, кроме того, показывает, что основная доля излучения на каждой гармонике концентрируется около минимальной излучаемой частоты для данной гармоники. Отсюда сразу следует, как нужно начать расчет эксперимента. Выбирая минимальную частоту излучения, которую будет детектировать экспериментальная установка, мы тем самым определяем длину периода l (см. формулу (28.10)). Зная длину периода, мы по формуле (28.13) определяем пороговую энергию, начиная с которой появляется излучение на данной гармонике. Конечно, приведенные рассуждения достаточно грубы, однако детальный анализ возможностей эксперимента, который проведен в § 29, подтверждает в общих чертах приведенные аргументы.

Перейдем сейчас к вычислению интенсивности резонансного излучения. Очевидно, что в общем случае произвольной периодической среды точно рассчитать излучение частицы невозможно. Вряд ли представит интерес также строгое решение задачи для какой-то конкретной среды, поскольку нашей задачей является исследование произвольной периодической среды с целью выбора оптимальных условий для постановки эксперимента. К счастью, правая часть неравенства

(28.10) и условие (28.12) (при подстановке конкретных чисел) автоматически приводят к условию $\lambda \ll l$. Это означает, что резонансное излучение может появиться лишь в той области частот, где длина волны излученного фотона много меньше периода среды. Это наводит нас на мысль использовать квазиклассический метод расчета.

Излучение в области частот $\lambda \approx l$ имеет совершенно другие свойства и рассмотрено в пункте з) настоящего параграфа. Естественно, что квазиклассический метод расчета в этом случае неприменим. Поэтому в пункте з) используется метод теории возмущений и расчет излучения ограничивается средами, для которых изменения плотности незначительны: $N'Z' \ll NZ$.

б) Квазиклассическое рассмотрение [1, 2, 3]

Уравнения Максвелла для неоднородной среды сохраняют свой обычный вид. Отличие от соответствующих уравнений для однородной среды будет заключаться в том, что теперь диэлектрическая и магнитная проницаемости будут функциями точки x, y, z . Мы будем писать уравнения Максвелла для фурье-компонент полей по времени, выбирая временные множители в виде $e^{-i\omega t}$.

Обозначая фурье-компоненты по времени электромагнитных потенциалов через $\vec{A} \equiv \vec{A}(\omega)$ и $\varphi \equiv \varphi(\omega)$, имеем:

$$\vec{E}_\omega = -\vec{\nabla}\varphi + \frac{i\omega}{c}\vec{A}, \quad (28.14)$$

$$\vec{H}_\omega = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}$$

Используя уравнения Максвелла и условие Лоренца

$$\varphi = -\frac{ic}{\epsilon\mu\omega} \text{div } \vec{A}, \quad (28.15)$$

можно записать уравнение для фурье-компоненты векторного потенциала $\vec{A}(x, y, z, \omega)$ в виде

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} - \operatorname{div} \vec{A} \operatorname{grad} \left(\ln \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2} \right) = - \frac{2\mu}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{j}(t) e^{i\omega t} dt. \quad (28.16)$$

В дальнейшем положим $\mu = 1$. Будем считать, что свойства среды изменяются только в одном направлении (вдоль оси z). Значение $\varepsilon(z, \omega)$ будет определяться формулой вида (28.1). Если, кроме того, принять, что ток также направлен по оси z

$$j_z = ev_z(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}(t)) = ev_z \delta(x) \delta(y) \delta(z - z(t)), \quad (28.17)$$

то уравнение для \vec{A} примет вид:

$$\Delta A_z + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1(z)) A_z - \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = - \frac{2}{c} \int j_z e^{i\omega t} dt. \quad (28.18)$$

Остальные компоненты A_y и A_x нужно положить равными нулю. Этим, в частности, уже определяется поляризация исследуемого излучения, именно: вектор \vec{H} резонансного излучения перпендикулярен плоскости, содержащей ось z и вектор распространения волны.

Произвольное направление влета рассмотрено в работах [4, 5, 6], в которых показано, что при небольших углах влета ψ и больших частотах излучения все изменение сводится, грубо говоря, к замене длины периода l на величину $\frac{l}{\cos \psi}$. Излучение заряженной частицы в периодической среде с учетом отклонений за счет многократного рассеяния исследовано в работе [20] и изложено в пункте ж) настоящего параграфа.

Решение уравнения (28.18) будем искать в виде (индекс z в дальнейшем мы будем опускать)

$$A(x, y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, k_y, z, \omega) \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y. \quad (28.19)$$

Уравнение для

$$A(k_x, k_y, z, \omega) = A(q, z),$$

где

$$q = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad (28.2)$$

имеет вид

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial A(q, z)}{\partial z} \right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - q^2 \right) A(q, z) =$$

$$= - \frac{e}{2\pi^2 c} \int v(t) \delta(z - z(t)) e^{i\omega t} dt. \quad (28.21)$$

Найдя решение уравнения (28.21), с помощью (28.19) и (28.15) восстановим φ и, используя (28.14), найдем искомые поля \vec{E} и \vec{H} . При произвольной зависимости ε от z уравнение (28.21) может быть решено в общем виде в квазиклассическом приближении.

Для нахождения функции Грина уравнения (28.21) рассмотрим соответствующее однородное уравнение. Будем искать решение однородного уравнения в виде

$$A(q, z) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \psi(z)\right), \quad (28.22)$$

где \hbar — малая величина. Подставив $A(q, z)$ в однородное уравнение (28.21), найдем уравнение для ψ

$$\frac{i\varepsilon}{\hbar} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - q^2 \right) = 0, \quad (28.23)$$

которое будем решать, разлагая по малому параметру \hbar :

$$\psi = \psi_0 + \hbar \psi_1 + \hbar^2 \psi_2 \dots$$

Тогда ψ можно найти, решив последовательно цепочку уравнений:

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial z} = \pm x \hbar$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{x}{\varepsilon}, \quad (28.24)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \left\{ i\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} / 2 \frac{\partial \psi_0}{\partial z^2}, \text{ и т. д.}$$

Через x мы обозначили положительное значение корня

$$x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - q^2}. \quad (28.25)$$

Подкоренное выражение в формуле (28.25) всегда положительно, т. к. мы рассматриваем поле излучения. Диэлектрическая постоянная также предполагается положительной и вещественной, поскольку нас будут интересовать распространяющиеся волны.

Два линейно независимых решения однородного уравнения (28.21) имеют вид (с точностью до ψ_1)

$$A_{1,2} = C_{1,2} \frac{\exp\left(\pm \int^z x dz\right)}{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{1/2}}. \quad (28.26)$$

Отметим, что возможность приведения уравнения (28.23) к цепочке уравнений для конечного числа функций $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ требует выполнения условия квазиклассики:

$$\left| \frac{\varepsilon}{x^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right| \ll 1. \quad (28.27)$$

В действительности нам необходимо еще потребовать, чтобы в течение интервала времени t , существенного для вычисления интеграла типа (28.32), фаза векторного потенциала слабо менялась за счет ψ_2 и следующих членов разложения. Для рассматриваемых ниже сред это требование легко выполнить, если потребовать выполнения более жесткого условия, чем условие (28.27), а именно:

$$\lambda \ll l, \quad (28.28)$$

т. е. длина волны излученного фотона должна быть много меньше периода среды.

После нахождения двух линейно независимых решений (28.26) функцию Грина уравнения (28.21) $G(z, z')$ построим обычным образом (см., например, [7]).

Нужно только заметить, что $G(z, z')$ должно приводить к расходящимся от точки $z = z'$ (где находится источник) волнам. Для этого, поскольку временные множители у нас выбраны в виде $e^{-i\omega t}$, $G(z, z')$ необходимо искать в форме:

$$G(z, z') = \begin{cases} CA_1(q, z) A_2(q, z') = \\ = C \sqrt{\frac{\varepsilon(z) \varepsilon(z')}{\chi(z) \chi(z')}} \exp\left(i \int_{z'}^z \chi dz\right), & z > z'; \\ CA_1(q, z') A_2(q, z) = \\ = C \sqrt{\frac{\varepsilon(z) \varepsilon(z')}{\chi(z) \chi(z')}} \exp\left(i \int_z^{z'} \chi dz\right), & z < z'. \end{cases} \quad (28.29)$$

Функция Грина $G(z, z')$ непрерывна в точке $z = z'$. Из формулы (28.29) следует, что производная $G(z, z')$ в точке $z = z'$ терпит разрыв. Как функция своих аргументов, $G(z, z')$ удовлетворяет однородному уравнению типа (28.21). Соотношением (28.29) функция Грина определяется с точностью до постоянного множителя. Для определения C мы потребуем, чтобы функция $G(z, z')$ удовлетворяла уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial G(z, z')}{\partial z} \right) + \frac{1}{\varepsilon(z)} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - q^2 \right) G(z, z') = -4\pi \delta(z - z'). \quad (28.30)$$

Проинтегрируем уравнение (28.30) около точки $z = z'$. Тогда постоянный множитель определяется из условия, чтобы скачок производной функции Грина в точке $z = z'$ был равен

$$\left. \frac{\partial G(z, z')}{\partial z} \right|_{z=z'+0} - \left. \frac{\partial G(z, z')}{\partial z} \right|_{z=z'-0} = -4\pi \varepsilon(z').$$

Коэффициент C оказывается равным $C = 2\pi i$. Таким образом, искомое решение уравнения (28.21) можно записать в виде

$$A(q, z) = \frac{e}{8\pi^3 c} \int G(z, z') dz' \int \frac{v(t)}{\varepsilon(z')} \delta(z' - z(t)) e^{i\omega t} dt. \quad (28.31)$$

Подставляя выражение для функции Грина в формулу (28.31) и интегрируя по z' , получим окончательное выражение для векторного потенциала на расстоянии z от начала координат при произвольно изменяющейся скорости $v(z)$ и траектории $z(t)$:

$$A(q, z) = \frac{ie}{4\pi^2 c} \sqrt{\frac{\varepsilon(z)}{\chi(z)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(t) \exp\left(i\omega t + i \left| \int_{z(t)}^z \chi dz \right| \right)}{[\chi(z(t)) \varepsilon(z(t))]^{1/2}} dt. \quad (28.32)$$

Модуль в экспоненте подынтегрального выражения появляется согласно определению функции Грина (28.29). Необходимо брать, следовательно, только положительное значение интеграла по z . Мы увидим в дальнейшем, что в действительности нам придется использовать выражение (28.32) только для вычисления излучения в переднюю полусферу $z \rightarrow \infty$. Поскольку χ по определению положительна, интеграл по z будет всегда положительным. Поэтому знак модуля мы в дальнейшем опустим.

Напомним, что квазиклассический метод расчета неприменим для вычисления отраженных волн. Поэтому выражение (28.32) заведомо приведет к неправильному результату, если пытаться вычислять излучение „назад“ (т. е. при $z \ll z(t)$).

Вычислим поток энергии, проходящей через плоскость, перпендикулярную траектории частицы и отстоящей от начала координат на расстоянии z . Для простоты мы будем предполагать в дальнейшем, что частица движется равномерно и прямолинейно, хотя формула (28.32) дает возможность исследовать и случай, когда скорость v зависит от времени. Оценки показывают, что влиянием торможения частицы из-за ионизационных потерь на излучение можно пренебречь.

Для нахождения излученной энергии необходимо подсчитать проекцию вектора Пойнтинга на ось z :

$$[\vec{E}\vec{H}]_z = E_x H_y - E_y H_x.$$

Используя (28.15), находим, что

$$\varphi(q, z) = \frac{c}{\omega \varepsilon} \chi A(q, z), \quad (28.33)$$

ибо, согласно условию квазиклассики (28.27), при дифференцировании выражения (28.32) по переменной z можно ограничиться дифференцированием только экспоненты подынтеграль-

ного выражения. Используя (28.14), вычислим поля \vec{E} и \vec{H} , подставим их в выражение для вектора Пойнтинга и определим поток энергии через плоскость (x, y) за все время пролета частицы:

$$S_z = \frac{c}{4\pi} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} [\vec{E}\vec{H}]_z dx dy dt. \quad (28.34)$$

Разложим \vec{E} и \vec{H} в тройные интегралы по переменным x, y, t , подставим полученные выражения в (28.34) и проинтегрируем по x, y, t . Учитывая вещественность полей

$$\vec{E}(-k_x, -k_y, -\omega) = \vec{E}^*(k_x, k_y, \omega),$$

имеем

$$S_z = 4\pi^2 c \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \int_0^{\infty} d\omega [E_x(-k_x, -k_y, -\omega) H_y(k_x, k_y, \omega) - E_y(-k_x, -k_y, -\omega) H_x(k_x, k_y, \omega)]. \quad (28.35)$$

Выражение в квадратных скобках легко вычислить, используя формулы (28.33) и (28.14). Ответ имеет вид

$$E_x^* H_y - E_y^* H_x = \frac{q^2 c z}{\omega \varepsilon} |A(q, z)|^2. \quad (28.36)$$

Окончательное выражение для потока энергии определенной частоты через плоскость, отстоящую на расстоянии z от начала координат и перпендикулярную траектории, следующее:

$$dI_\omega = \frac{8\pi^3 c^2 d\omega}{\omega \varepsilon} \int x q^3 |A(q, z)|^2 dq. \quad (28.37)$$

Свяжем величину q с углом излучения кванта θ . В силу квазиклассичности можно считать, что изменение свойств среды вдоль оси z мало сказывается на распространении кванта. Среду в первом приближении будем считать однородной. Следовательно, можно ввести неизменный вдоль всей среды угол излучения кванта. Ясно, что $\cos\theta > 0$ (так как при $z \rightarrow \infty$

мы имеем только расходящиеся волны излучения). Связь между q , x и θ дается соотношениями

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \theta, \quad (28.38)$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - q^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta.$$

Легко доказать, что среднее отклонение кванта при распространении в периодической среде от направления, определяемого углом θ , равно нулю. Среднее значение квадрата угла отклонения $\bar{\theta}^2$ на расстояниях порядка l мало по сравнению с квадратом θ . В силу того, что мы будем в дальнейшем рассматривать излучение квантов, значительно превышающих атомные частоты, влияние переменной части диэлектрической постоянной будет сказываться на распространение таких фотонов значительно меньше, чем другие причины, например, фото-эффект и комптон-эффект.

Тем не менее, *вся причина излучения* заключается именно в отличии ε от постоянной величины и при вычислении интеграла (28.32) переменной частью ε отнюдь пренебрегать нельзя. Мы увидим в следующем параграфе, что, несмотря на ничтожно малое значение величины $\varepsilon_1(z)$, она становится очень существенной, так как в экспоненте подынтегрального выражения (28.32) стоит величина $(\omega - \chi_0 v)$, которая стремится к нулю для малых углов излучения и больших скоростей.

Пример: Используя квазиклассическое приближение, рассмотрим излучение Вавилова—Черенкова; излучение при остановке заряда и переходное излучение.

1) Для иллюстрации формул (28.32) и (28.37) рассмотрим черенковское излучение в однородной среде. В этом случае квазиклассические формулы являются точными и векторный потенциал оказывается равным

$$A(q, z) = \frac{iev}{2\pi c} \frac{\delta(\omega - kv \cos \theta)}{k \cos \theta}.$$

Подставим полученное значение потенциала в формулу (28.37) и заменим одну дельта-функцию на $\frac{T}{2\pi}$ (T — полное время пролета). Воспользовавшись равенством

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta \delta(\omega - kv \cos \theta) d\theta = \frac{1}{kv} \left[1 - \left(\frac{c}{v\sqrt{\varepsilon}} \right)^2 \right], \quad (28.39)$$

получим формулу Тамма—Франка:

$$dI_{\omega} = \frac{e^2 v}{c^2} \left[1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon} \right] \omega d\omega. \quad (28.40)$$

2) Другим примером применения формул (28.37) и (28.32) является решение задачи на излучение при остановке в однородной среде. И здесь ответ должен получиться точным. Пусть частица, движущаяся со скоростью v в среде с диэлектрической постоянной ε , внезапно останавливается в момент $t = 0$. Определяя с помощью (28.32) векторный потенциал и используя (28.37), находим энергию излучения при остановке:

$$A(q, z) = \frac{ev}{4\pi^2 \omega \sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{\omega - kv}, \quad (28.41)$$

$$dI_{\theta, \omega} = \frac{e^2 v^2}{2\pi c^3} \sin^3 \theta \frac{d\theta d\omega}{\left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon} \cos \theta \right)^2}.$$

3) С помощью (28.32) и (28.37) легко получить также формулу и для переходного излучения в пределе малых углов, больших скоростей и больших частот (см. § 26, пункт б)). Условие применимости квазиклассики для резкой границы обсуждается ниже. Если заряженная частица пересекает нормально границу, разделяющую две среды с диэлектрическими постоянными ε_1 и ε_2 , то векторный потенциал на большом расстоянии от границы складывается из двух потенциалов, соответствующих остановке в первой среде и внезапному началу движения во второй среде. Формула (28.32) дает

$$A(q, z) = \frac{ev\varepsilon_1^{1/4}(z)}{4\pi^2 \omega} \left| \frac{1}{(\omega - x_1 v) \varepsilon_1^{3/4}} - \frac{1}{(\omega - x_2 v) \varepsilon_2^{3/4}} \right|.$$

Используя (28.32), определим энергию излучения которая, при $v \rightarrow c$, $\theta \ll 1$, $\left| \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right| \ll 1$ принимает следующий вид (сравни с формулой (26.17)):

$$df_{\theta, \omega}^{(1)} = \frac{e^2}{8\pi c} \theta^3 d\theta d\omega \left| \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta\right) \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta\right)} \right|^2. \quad (28.42)$$

Аналогичные вычисления в случае излучения при наличии двух границ (пластинка) приводят к формуле, отличающейся от формулы (28.42) интерференционным множителем. Формула для излученной энергии в пластинке в пределе $v \rightarrow c$, $\omega \gg \omega_0$ и $\theta \ll 1$ имеет вид

$$df_{\theta\omega}^{(2)} = df_{\theta\omega}^{(1)} 4 \sin^2 \left[\frac{\omega l_1}{2c} \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta\right) \right]; \quad (28.42')$$

через ε_1 и l_1 обозначены диэлектрическая проницаемость и толщина пластинки, помещенной в вещество с диэлектрической постоянной ε_2 (смотри вывод формулы (28.92) при $n=2$).

в) Излучение в среде, изменяющей свойства по закону косинуса

Вычислим резонансное излучение в среде, диэлектрическая постоянная которой равна:

$$\varepsilon(\omega, z) = \varepsilon_0(\omega) + \Delta \cos \frac{2\pi z}{l}. \quad (28.43)$$

Расчет интенсивности проводится с помощью формул (28.32) и (28.37). Величина χ , входящая в (28.32), для упрощения последующих выкладок разлагается в ряд

$$\chi = \sqrt{\chi_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \Delta \cos \frac{2\pi z}{l}} \approx \chi_0 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\Delta}{\chi_0} \cos \frac{2\pi z}{l}. \quad (28.44)$$

Разложение (28.44) справедливо при условии (28.2).

Выражение $A(q, z)$ при $z \rightarrow +\infty$ и постоянной скорости для рассматриваемой среды следующее:

$$A(q, z) = \frac{iev}{4\pi^2 c} \left(\frac{\varepsilon}{\chi}\right)^{1/2} \int \frac{dt}{(\chi\varepsilon)^{1/2}} \exp \left\{ i\omega t + i\chi_0(z - vt) + \right. \\ \left. + i \frac{\omega^2 l \Delta}{4\pi^2 c \chi_0} \left(\sin \frac{2\pi z}{l} - \sin \frac{2\pi vt}{l} \right) \right\}. \quad (28.45)$$

Условие применимости квазиклассики (28.27) можно записать в виде $\frac{\Delta\lambda}{\varepsilon_0 l} \ll 1$. Однако, используя формулы (28.24) и выражения для χ , мы можем вычислить ψ_2 и показать необходимость более жесткого условия (28.28). Если же условие (28.28) выполняется, то зависимостью от t знаменателя выражения (28.45) можно пренебречь и, воспользовавшись формулой, известной из теории функций Бесселя [8]

$$\exp\left(-iB \sin \frac{2\pi vt}{l}\right) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} J_r(B) \exp\left(-ir \frac{2\pi vt}{l}\right), \quad (28.46)$$

представить (28.45) в виде суммы слагаемых, каждое из которых содержит дельта-функцию вида

$$\delta\left(\omega - \chi_0 v - \frac{2\pi v}{l} r\right). \quad (28.47)$$

Легко видеть, что мы пришли к условию резонанса (28.5), из которого, в частности, следует выражение для косинуса угла излучения (см. формулу (28.6') при $\psi = 0$):

$$\cos \theta = \frac{c}{v \sqrt{\varepsilon_0}} - \frac{2\pi rc}{l\omega \sqrt{\varepsilon_0}}. \quad (28.48)$$

Из формулы (28.48) следует выражение для интервала излученных частот на r -ой гармонике (см. формулу (28.9)). После подстановки квадрата модуля выражения (28.45) в (28.37) для энергии излучения за время T в направлении θ получим следующую формулу:

$$dI_{\omega, \theta} = \frac{e^2 v}{c^2} \omega d\omega T \sum_r J_r^2(B) \delta\left(\cos \theta - \frac{c}{v \sqrt{\varepsilon_0}} + \frac{2\pi rc}{l\omega \sqrt{\varepsilon_0}}\right) \sin^3 \theta d\theta. \quad (28.49')$$

Одну δ -функцию вида (28.47) мы заменили на $\frac{T}{2\pi}$ — полное время пролета. Интегрируя по углам излучения имеем:

$$dI_{\omega} = \frac{e^2 v}{c^2} \omega d\omega T \sum_r J_r^2(B) \left[1 - \left(\frac{c}{v \sqrt{\varepsilon_0}} - \frac{2\pi rc}{l\omega \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2 \right]. \quad (28.49)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, есть $\sin^2 \theta$. Величина B , входящая в аргумент функции Бесселя, равна

$$B = \frac{l\Delta}{4\pi\lambda\varepsilon_0 \cos \theta}. \quad (28.50)$$

Прежде чем переходить к анализу выражения (28.49), напомним, что квазиклассический расчет, использованный нами, теряет свою применимость около точек поворота $x = 0$ (см. (28.27)). Используя это условие, мы приходим к заключению, что полученные формулы остаются справедливыми только для углов излучения $\cos \theta > \delta$, где δ — малая величина, определяемая наименьшими допустимыми значениями $\cos \theta$, когда еще применима квазиклассика.

Перейдем к анализу выражений (28.48) и (28.49). Начнем с рассмотрения излучения частот, не превышающих атомные частоты. Рассмотрим отдельные члены ряда (28.49). Если выполняется условие

$$\frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon^-} > 1, \quad (28.51)$$

то член ряда (28.49) с $r = 0$ дает нам интенсивность черенковского излучения в периодической среде. Формула (28.49) в этом случае отличается от формулы Тамма — Франка только тем, что вместо единицы стоит величина $J_0^2(B)$, уменьшающая интенсивность черенковского излучения.

Рассмотрим слагаемое с $r = -1$. Угол излучения определяется условием (28.48). Интенсивность задается слагаемым с $r = -1$. В формуле (28.49) для определения интервала излученных частот, помимо выполнения условия (28.51), необходимо учесть и правую часть неравенства (28.9), которое накладывает условие на допустимый спектр излученных частот.

Рассмотрим слагаемое с $r = 1$. Условие $\cos \theta > \delta$ будет налагать определенные ограничения на частоту излучения. В то же время (28.9) для $r = 1$ дает нам интервал излученных частот. Сравнение двух условий показывает, что только малую часть спектра излученных частот около ω_{\min} нельзя описывать формулой (28.49). Это может оказаться несущественным, так как при больших значениях B интенсивность из-за наличия члена $J_r^2(B)$ будет мала. Случай $r = 1$ интересен тем,

что излучение может возникать и тогда, когда условие (28.51) не выполняется, т. е. до порога черенковского излучения. Рассуждения можно продлить для $r = \pm 2, \pm 3$ и т. д. Отметим, что излучение положительного порядка $r > 0$ может возникать до порога черенковского излучения.

Подчеркнем еще раз, что формулы (28.49) полностью описывают излучение при выполнении условий (28.27), (28.28) и (28.2). Угол излучения для каждого порядка задается условием (28.48), а интервал полученных частот определяется условием (28.9).

Приведенные в тексте формулы очень напоминают формулы, полученные при рассмотрении излучения движущегося осциллятора в однородной среде [9, 10]. Действительно, как мы уже упоминали в пункте а) § 28, существует большая аналогия между излучением равномерно движущихся частиц в неоднородных средах и излучением „неоднородно“ движущихся частиц в однородной среде, закон движения которых соответствует закону изменения свойств неоднородной среды.

Перейдем теперь к рассмотрению излучения частот, превышающих характерные атомные частоты. Тогда можно пользоваться предельными значениями ε_0 и Δ в форме (28.8), и анализ формул может быть значительно продвинут вперед. Заметим, что при $\varepsilon < 1$ возможно излучение только положительного порядка: $r = +1, +2, \dots$

В рассматриваемом случае правая часть неравенства (28.9) приводит сразу к двум неравенствам для максимально и минимально возможной излучаемой частоты (см. (28.10)). Если мы потребуем выполнения условия (28.12), которое перепишем в виде

$$r \ll r_{\max} = \frac{l\omega_0}{2\pi c}, \quad (28.52)$$

то левая часть неравенства (28.9) выполняется автоматически. Таким образом, для излучения гармоник от $r = 1$ до $r < r_{\max}$ интенсивность дается формулой (28.49), интервал излучаемых частот для каждого порядка дается формулой (28.10), и порог энергии, при которой начинается излучение данного по-

рядка, определяется формулой (28.13). Сравнение (28.12) с (28.13) показывает, что энергия частицы должна значительно превышать mc^2 , поэтому в дальнейшем при исследовании этого случая мы должны положить $v = c$. Для нерелятивистских частиц излучение с описанными свойствами не имеет места и остается только область (28.53), рассматриваемая ниже. Напомним также, что при соблюдении условия (28.12) излучение будет направленным ($\cos \theta \approx 1$) для всего интервала излученных частот.

Если порядок излучения превышает r_{\max} (см. (28.52)), то интервал излученных частот вместо (28.10) будет даваться следующим неравенством:

$$\frac{2\pi v r}{l} \left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \gtrsim \omega \gtrsim \frac{2\pi v r}{l(1 + v/c)}. \quad (28.53)$$

В этом случае теряется зависимость пороговой энергии от порядка излучения и от длины периода. Углы излучения могут быть близкими к π для частот, близких к

$$\omega_{\min} = \frac{2\pi v r}{l \left(1 + \frac{v}{c}\right)}. \text{ Интенсивность излучения оказывается}$$

относительно малой для $r \gtrsim r_{\max}$. Для нерелятивистских частиц может осуществляться только этот случай.

Вернемся к рассмотрению гармоник, удовлетворяющих условию (28.52). Ввиду направленности излучения мы можем упростить квадратную скобку в (28.49). Перепишем упомянутую формулу, разделив ее предварительно на $\hbar\omega$ и на vT . Тогда число квантов в интервале $d\omega$ на единицу пути равно

$$dm = \frac{2d\omega}{137} \sum_{r=1}^{r_{\max}} J_r^2(B) \left(1 - \frac{c}{vV_{\varepsilon_0}} + \frac{2\pi r c}{l\omega V_{\varepsilon_0}}\right). \quad (28.54)$$

Если вместо ω ввести переменную y

$$y = \frac{NZe^2}{m_e c} \frac{l}{\omega r} = \frac{\omega_{\min}}{\omega}, \quad (28.55)$$

где $\omega_{\min} = \frac{l\omega_0^2}{4\pi c r}$ (см. формулу (28.10)), то для B получается выражение

$$B = \frac{N'Z'e^2l}{m_e c \omega} = \gamma y, \quad \text{где } \gamma = r \frac{N'Z'}{NZ}. \quad (28.56)$$

Полное число излученных квантов на единицу пути будет определяться следующим выражением:

$$m = \frac{4\pi}{137l} \sum_{r=1}^{\sim r_{\max}} r \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y^2} J_r^2(\gamma y) \left\{ y - y^2 - \frac{\omega_0^2}{4a^2} \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 \right\}, \quad (28.57)$$

где y_1 и y_2 являются корнями правой части уравнения (28.9):

$$y_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{a^2} \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2}}{2}. \quad (28.58)$$

Введенный для упрощения написания формул параметр a пропорционален „частоте пролета“ периода среды:

$$a = \frac{2\pi c}{l} r. \quad (28.59)$$

Для положительности подкоренного выражения формулы (28.58) необходимо, чтобы величина $\frac{\omega_0}{a^2} \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2$ была меньше 1. Это и определяет пороговую энергию. Заметим, что величины y_1 и y_2 , определяемые выражением (28.58), являются одновременно корнями выражения, стоящего в фигурных скобках в формуле (28.57).

Перейдем к анализу формулы (28.57). Нам необходимо выяснить зависимость числа излученных квантов для различных порядков от значения параметра $\frac{N'Z'}{NZ}$. Воспользовавшись известным значением интеграла для функции Бесселя [8], можно представить выражение для числа излученных квантов на единицу пути далеко за порогом, т. е. когда выполняется неравенство $\frac{\omega_0^2}{a^2} \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 \ll 1$, в следующем виде:

$$m = \frac{4\pi}{137l} \sum_r \left\{ \frac{\gamma}{2} \left[J_{r+1}(\gamma) \frac{\partial J_r(\gamma)}{\partial r} - J_r(\gamma) \frac{\partial J_{r+1}(\gamma)}{\partial (r+1)} \right] + \frac{J_r^2(\gamma)}{2} - r \int_0^1 J_r^2(\gamma y) dy \right\}, \quad (28.60)$$

где дифференцирование функций Бесселя по r производится только по индексу.

Рассмотрим выражение (28.60) для того случая, когда параметр γ мал, и функции Бесселя можно разлагать в ряд по степеням γ . Поскольку мы ограничиваемся только первым членом разложения, необходимо считать, что

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \frac{1}{r} = \left(\frac{N'Z'}{NZ}\right)^2 \frac{r}{4} \ll 1. \quad (28.61)$$

Тогда (28.60) принимает вид

$$m = \frac{4\pi}{137l} \sum_r \left[\frac{1}{2} - \frac{r}{2r+1} \right] \left(\frac{N'Z'}{2NZ} r\right)^{2r} \frac{1}{(r!)^2}. \quad (28.62)$$

При $r=1$ мы имеем

$$m_1 = \frac{\pi}{137 \cdot 6} \frac{1}{l} \left(\frac{N'Z'}{NZ}\right)^2. \quad (28.63)$$

Мы видим, что если параметр $\left(\frac{N'Z'}{2NZ}\right)^2 \ll 1$, то можно ограничиться только первым членом ряда (28.62). Однако разложение функции Бесселя в степенной ряд требует выполнения (28.61). Если оно не выполняется, то для оценки (28.60) можно воспользоваться асимптотическим представлением Дебая:

$$J_r(\gamma) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{r^2 - \gamma^2}} e^{-ru}, \quad (28.64)$$

где

$$u = -\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{r}\right)^2} + \gamma r \operatorname{th} \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{r}\right)^2}.$$

Разложение Дебая справедливо, если выполняется неравенство.

$$r^{1/3} \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{r}\right)^2} \gg 1. \quad (28.65)$$

Если $\gamma \ll r$, т. е. $\frac{N'Z'}{NZ} \ll 1$, то представление (28.64) значительно упрощается и приобретает вид

$$J_r(\gamma) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\gamma}{r}\right)^r \frac{1}{r!} e^{-3\gamma^2/8r}. \quad (28.66)$$

Излучение не будет экспоненциально мало, только если выполняется неравенство $\gamma^2 \ll r$, но в этом случае мы возвращаемся к рассмотренному выше примеру (28.62). Таким образом, при $N'Z' \ll NZ$ основной вклад в излучение дает первая гармоника (см. формулу (28.63)).

Несколько сложнее проводится анализ в том случае, когда переменная часть плотности электронов одного порядка с постоянной частью

$$N'Z' \approx NZ. \quad (28.67)$$

В этом случае представление Дебая становится, согласно (28.65), применимым только для слишком больших порядков:

$$r > \frac{1}{\left\{1 - \left(\frac{N'Z'}{NZ}\right)^2\right\}^{3/2}}.$$

Однако для оценки функций Бесселя можно воспользоваться представлением Фока, справедливым при условии

$$r \gg 1, \quad \left(1 - \frac{N'Z'}{NZ}\right) \ll 1; \quad (28.68)$$

$$J_r(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/3} \Phi(t), \quad (28.69)$$

где $\Phi(t)$ — функция Эйри и $t = r^{2/3} \left(1 - \frac{N'Z'}{NZ}\right) \left(2 \frac{N'Z'}{NZ}\right)^{1/3}$.

Подставляя (28.69) в формулу (28.60), мы получаем для исследуемого случая формулу

$$m = \frac{4\pi}{137l} \sum_r \left\{ \frac{1}{\pi} \left[\Phi \left(\frac{r-\gamma+1}{(\gamma/2)^{1/3}} \right) \Phi' \left(\frac{r-\gamma}{(\gamma/2)^{1/3}} \right) - \Phi \left(\frac{r-\gamma}{(\gamma/2)^{1/3}} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Phi' \left(\frac{r-\gamma+1}{(\gamma/2)^{1/3}} \right) \right] + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{\gamma} \right)^{2/3} \Phi^2 \left(\frac{r-\gamma}{(\gamma/2)^{1/3}} \right) - r \int_0^1 J_r^2(\gamma y) dy \right\}. \quad (28.70)$$

Напомним, что функции Эйри экспоненциально малы, когда $r \gg \left(1 - \frac{N'Z'}{NZ}\right)^{-3/2}$.

Остановимся в заключение на спектре излучения. Частотный интервал излучения для каждого порядка задается условием (28.9) для $r < r_{\max}$ и (28.53) для $r > r_{\max}$.

Для выяснения спектра излучения вернемся к формуле (28.54) или (28.57) (не производя интегрирования по y). Число испущенных фотонов в интервале $d\omega$ будет определяться множителями

$$J_r^2(\gamma y) = J_r^2 \left(\frac{N'Z'}{NZ} r \frac{\omega_{\min}}{\omega} \right) \quad \text{и} \quad \left(y - y^2 - \frac{\omega_0^2}{4a^2} \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 \right).$$

Последний множитель, как мы уже видели, достигает максимума при $\omega \approx 2\omega_{\min}$ (см. (28.6'')), обращаясь в нуль при $\omega = \omega_{\max}$ и $\omega = \omega_{\min}$. Поэтому число излученных квантов в интервале $d\omega$ для r -ой гармоникки будет в основном определяться квадратом функции Бесселя r -ого порядка. Легко заметить, исходя из свойств функции Бесселя, что подавляющее большинство излученных квантов будет сконцентрировано около $\omega \approx \omega_{\min}$. Если $\frac{N'Z'}{NZ} \omega_{\min} \ll \omega$, то значения J_r^2 даются форму-

лой Дебая (для больших r), если $\omega \approx \frac{N'Z'}{NZ} \omega_{\min}$, можно использовать для оценки числа квантов формулу (28.69).

Приведем для иллюстрации спектрального распределения формулу для числа излученных фотонов при условии $N'Z' \ll NZ$. Как мы подчеркивали, основной вклад дает член с $r = 1$. Используя разложение для J_1^2 в степенной ряд, мы получим

$$dm = \frac{\pi N'^2 Z'^2 r_0^2}{137} \frac{d\omega}{\omega^3} l c^2 \left[1 - \frac{l}{2\pi \lambda} \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} \right) \right], \quad (28.71)$$

где r_0 — классический радиус электрона.

Дальнейшее исследование вопросов, связанных с излучением заряженных частиц в среде, изменение плотности которой дается формулой (28.43), проводилось в работах [11, 12]. Случай неоднородной магнитоактивной среды, а также неоднородной нестационарной среды, исследован в работе [13].

г) Произвольная периодическая среда

Рассмотренный выше пример среды, изменяющей свойства по закону косинуса, дает возможность получить результаты для произвольной периодической среды при дополнительном условии $N'Z' \ll NZ$.

Как и прежде, свойства среды будем описывать диэлектрической постоянной (28.1). Переменную часть $\varepsilon_1(z)$ разложим в ряд Фурье:

$$\varepsilon_1(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_r^- \cos \frac{2\pi zr}{l} + b_r \sin \frac{2\pi zr}{l} \right) \quad (28.72)$$

Обратим внимание, что нулевой член разложения $\varepsilon_1(z)$ в ряд объединен с постоянной частью диэлектрической постоянной среды ε_0 . Расчет аналогичен вычислениям, приведенным в пункте в). В формулу (28.44) вместо ε_1 нужно подставить выражение (28.72), что приведет к появлению в формуле (28.45) новой экспоненты, равной

$$\exp \left\{ i\omega t - i\kappa_0(z - vt) + \frac{i\omega^2 l}{4\pi^2 c \kappa_0} \sum_r \left[\frac{a_r}{r} \left(\sin \frac{2\pi zr}{l} - \sin \frac{2\pi vtr}{l} \right) - \frac{b_r}{r} \left(\cos \frac{2\pi zr}{l} - \cos \frac{2\pi vtr}{l} \right) \right] \right\}. \quad (28.73)$$

Дальнейшие вычисления можно значительно упростить, предположив, что

$$A_r = \frac{\omega^2 l}{4\pi c^2 \kappa_0} \frac{a_r}{r} \ll 1 \quad (28.74)$$

$$B_r = \frac{\omega^2 l}{4\pi c^2 x_0} \frac{b_r}{r} \ll 1. \quad (28.74')$$

Используя условие (28.74), можно разложить экспоненту выражения (28.73) в ряд и ограничиться первыми двумя членами. Вычисление $A(q, z)$ (см. (28.45)) сведется к вычислению интеграла

$$|A(q, z)| = \frac{ev}{4\pi^2 c x} \left| \int dt e^{i(\omega - x_0 v)t} \left[1 - i \sum_r \left(A_r \sin \frac{2\pi v t r}{l} - B_r \cos \frac{2\pi v t r}{l} \right) \right] \right|. \quad (28.74')$$

Ограничимся рассмотрением частот, превышающих атомные. Тогда при интегрировании по t отличный от нуля результат дают только слагаемые, входящие в сумму по r . Результат интегрирования есть

$$|A(q, z)| = \frac{ev}{4\pi c x} \left| \sum_{r=1}^{\infty} \delta \left(\omega - x_0 v - \frac{2\pi v}{l} r \right) (B_r + iA_r) \right|. \quad (28.75)$$

Отдельные члены суммы по r не интерферируют друг с другом в силу различия аргументов в дельта-функциях. Поэтому при вычислении энергии излучения за время T вместо (28.49) получим выражение

$$dI_{\omega} = \frac{e^2 v}{c^2} \omega d\omega T \sum_r \frac{A_r^2 + B_r^2}{4} \left[1 - \left(\frac{c}{v V_{\varepsilon_0}} - \frac{2\pi r c}{l \omega V_{\varepsilon_0}} \right)^2 \right]. \quad (28.76)$$

Сравнение (28.76) с аналогичным выражением (28.49) при $B \ll 1$ показывает, что излучение в произвольной периодической среде складывается из различных членов, каждый из которых соответствует коэффициенту Фурье b_r или a_r при разложении проницаемости ε в ряд Фурье. Отдельные члены входят с весом, пропорциональным a_r^2/r^2 или b_r^2/r^2 . Угол излучения для различных гармоник дается выражениями (28.48).

Отметим отличие между формулой (28.76) и формулой (28.49). Суммирование по r в формуле (28.49) есть следствие того, что величина B не мала, суммирование же в формуле (28.76) присутствует всегда, если разложение ε_1 в ряд

Фурье содержит члены с различными r . Выражение (28.76), пропорциональное $A_r^2 + B_r^2$, можно получить по теории возмущений, в то время как выражение (28.49) есть результат квазиклассического расчета. В обоих случаях угол излучения дается одной и той же формулой, хотя зависимость интенсивности от величины B совершенно другая. Интервал [излученных частот определяется одной и той же формулой.

Пример. Рассмотреть излучение в слоистой среде при малых изменениях плотности.

Для иллюстрации формулы (28.76) рассмотрим излучение в слоистой среде, состоящей из двух чередующихся веществ с одинаковой толщиной. Если плотность атомов электронов первой среды равна $N_1 Z_1$, а второй $N_2 Z_2$, то величины NZ и $N'Z'$ равны соответственно

$$NZ = \frac{N_1 Z_1 + N_2 Z_2}{2}, \quad N'Z' = \frac{N_1 Z_1 - N_2 Z_2}{2}.$$

Диэлектрическая постоянная $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1(z)$ определяется условием $\epsilon_0 = \frac{4\pi NZ}{m_e \omega^2}$, а $\epsilon_1 = \frac{4\pi N'Z'}{m_e \omega^2} \theta(z)$, где функция $\theta(z)$ в интервале от $-l/2$ до 0, занимаемом первой средой, равна $+1$, а в интервале от 0 до $l/2$, занимаемом второй средой, равна -1 . Коэффициенты Фурье такой функции равны $a_r = 0$, $b_r = -\frac{4}{\pi r}$ для нечетных r и $a_r = b_r = 0$ для четных r .

Подставляя найденные коэффициенты разложения в формулу (28.76) и воспользовавшись приведенными значениями ϵ_0 и ϵ_1 для числа квантов, излученных на единицу пути в слоистой среде, получим выражение

$$dm = \frac{16N'Z'^2 r_0^2 c^2 l d\omega}{137\pi\omega^3} \sum_{r=1} \frac{1}{r^3} \left[1 - \frac{\omega l}{2\pi r v} \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_0} \right) \right]. \quad (28.77)$$

Суммирование проводится по всем нечетным r . Практически сумма определяется членом с $r = 1$.

д) Излучение в слоистой среде

Ввиду того, что слоистая среда является наиболее удобной с экспериментальной точки зрения для исследования резонансного излучения, здесь приводится подробный вывод и обсуждение соответствующих формул.

В предыдущей главе было показано, что при прохождении заряженной частицей границы раздела двух сред возникает излучение, которое получило название переходного излучения. Следует отметить, что возможность усиления переходного излучения с использованием большего числа границ обсуждалась И. М. Франком [14]. Им было указано, что простое суммирование переходного излучения от большого числа границ возможно, когда расстояние между границами превышает когерентную длину. В действительности, как мы увидим ниже, интерференционные эффекты оказываются всегда весьма существенными для излучения первых гармоник. Переход к простому суммированию возможен в той области частот, где гармоники сильно перекрываются и суммирование по r можно заменить интегрированием (случай больших значений r). Очевидно, что последнее заключение относится к полной энергии излучения (проинтегрированной по углу излученных квантов). Угловое распределение резонансных квантов носит δ -образный характер (см. (28.49), (28.6), (28.83)), поскольку в тех направлениях, где удовлетворяется условие когерентного суммирования, излучение будет пропорционально квадрату числа пластинок (см. формулу (28.92)), в то время как при независимом суммировании переходного излучения на пластинках оно пропорционально просто числу пластинок. После интегрирования по углу излучения оба способа вычисления при больших значениях r приводят примерно к одинаковым результатам, резко отличаясь при малых значениях (правая граница спектра) r .

Мы подробно рассмотрим этот вопрос в последующих пунктах.

В работе Я. Б. Файнберга и Н. А. Хижняка [15] получено строгое решение задачи об излучении заряженной частицы в слоистой периодической среде [см. также [15a)]. В той же работе имеется условие, соответствующее условию резонанса. Однако авторы интересовались изучением длинноволновых фотонов, в то время как основные эффекты, рассмотренные в работах [1, 2, 3], лежат в области жестких квантов. Строгое решение другим методом для слоистой среды, состоящей из l слоев, впоследствии получено в ра-

боте [16]. Однако физические результаты упомянутой работы не соответствуют результатам работ [1, 2, 3, 15], поскольку в [16] пропущено излучение, появляющееся при выполнении условия резонанса. Естественно, что неучет резонансного излучения привел автора работы [16] к выводу, что в слоистой среде при высоких энергиях излучение не усиливается и равно по порядку величины переходному излучению на одной границе.

Изложение настоящего параграфа основано на работах [1, 2, 3], результаты которых были подтверждены и развиты впоследствии в целом ряде экспериментальных и теоретических работ (см. [10—12, 17, 18, 20, 21—26]).

Следует отметить, что усиление излучения в слоистой среде будет происходить и в оптической области [15, 15а, 15б, 15в, 15г, 19], однако для его вычисления необходимо знать конкретный вид $\varepsilon(\omega)$. В связи с этим мы ограничимся рассмотрением резонансного излучения жестких квантов, для которых $\varepsilon(\omega)$ имеет универсальный вид (см. (28.8)).

Будем использовать формулы, полученные в предыдущем разделе. Для того чтобы квазиклассические расчеты были справедливыми, нужно удовлетворить условию (28.27). Для его выполнения необходимо сгладить границы перехода между слоями, т. е. вместо резких границ ввести переходной слой. Это всегда можно сделать, так как для создания излучения важны большие расстояния пролета частиц. Поэтому интересующий нас результат не зависит от резкости границы. Заметим далее, что поскольку квазиклассическое приближение приводит к неправильным результатам для отраженных волн, необходимо считать, что эффекты, связанные с отраженными волнами, пренебрежимо малы. Это будет выполнено, если изменение диэлектрических свойств среды от слоя с диэлектрической проницаемостью ε_1 к слою ε_2 будет мало, т. е. необходимо выполнение неравенства, эквивалентного неравенству (28.2):

$$\left| \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right| \ll 1. \quad (28.2')$$

В области больших частот, которые и будут нас интересовать в дальнейшем, это условие выполнено всегда. Кроме выполнения неравенства (28.2'), в последующем будет принято, что скорость частицы близка к скорости света $v \approx c$ и углы излучения малы. Последнее условие окажется автоматически выполненным, если выполняется неравенство (28.28).

Энергия, излученная частицей, движущейся вдоль оси z через плоскость, перпендикулярную траектории частицы и отстоящую на расстоянии z от начала координат, дается выражением (28.37).

$A(q, z)$ вычисляется по формуле (28.32):

$$A(q, \omega, z) = \frac{iev}{4\pi^2 c} \sqrt{\frac{\varepsilon(z)}{\chi(z)}} I, \quad (28.78)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(i\omega t + i \left| \int_{vt}^z \chi dz \right| \right)}{[\chi(vt) \varepsilon(vt)]^{1/2}} dt. \quad (28.79)$$

Вычисление $A(q, \omega, z)$ сводится к вычислению интеграла I для слоистой среды. Рассмотрим вначале конечное число чередующихся слоев из двух различных веществ с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 , расположенных в среде с диэлектрической проницаемостью ε_2 (см. рис. 57). Введем обозначения

$$\chi_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta; \quad \chi_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta. \quad (28.80)$$

Пусть слой из первого вещества с диэлектрической постоянной ε_1 имеет толщину $l_1 = v\Delta t_1$, из второго вещества с диэлектрической постоянной ε_2 толщину $l_2 = v\Delta t_2$. Промежутки времени Δt_1 и Δt_2 равны временам пролета пластинок первой и второй среды соответственно. Пронумеруем границы раздела числами, изменяющимися от 1 до $n+1$. Пусть нечетные числа характеризуют первую среду, а четные — вторую. Выберем для удобства n четным числом, т. е. мы будем иметь $n/2$ слоев одной среды и $n/2$ слоев второй.

При вычислении выражения (28.81) принято, что i -ая пластина имеет толщину $v\Delta t_i$, т. е. попутно решена задача об излучении в слоистой среде с произвольными толщинами пластин. Выражение (28.81) мы используем в следующем параграфе для вычисления излучения с учетом случайных отклонений толщин слоев от средней толщины. Сейчас мы примем, что все нечетные слои имеют толщину l_1 , а четные l_2 . Тогда выражение (28.81) можно переписать в следующем виде:

$$|I| = 2 \sin \left[\frac{(\omega - \kappa_1 v)}{2} \Delta t_1 \right] \left| \frac{1}{(\varepsilon_1 \kappa_1)^{1/2} (\omega - \kappa_1 v)} - \frac{1}{(\varepsilon_2 \kappa_2)^{1/2} (\omega - \kappa_2 v)} \right| \frac{\sin \frac{n}{2} \beta}{\sin \beta}, \quad (28.82)$$

где величина β , входящая в осциллирующий множитель, равна

$$2\beta = (\omega - \kappa_1 v) \frac{l_1}{v} + (\omega - \kappa_2 v) \frac{l_2}{v}.$$

При достаточно большом числе пластин величина I будет пропорциональна числу пластин $n/2$ только в том случае, когда выполняется условие резонанса

$$\beta = \pi r, \quad (28.83)$$

где r — произвольное целое число.

Условие резонанса (28.83) есть необходимое условие когерентного суммирования фотонов, излученных на различных границах. Если условие (28.83) не выполняется, то излучение в слоистой среде будет по порядку величины пропорционально излучению на одной границе раздела, поскольку из-за интерференционных явлений кванты, возникшие на различных границах перехода, будут гасить друг друга.

Преобразуем выражение (28.83) в обычную форму резонансного условия (см. формулу (28.5)). Для этого необходимо ввести среднее значение диэлектрической постоянной в слоистой среде

$$V \varepsilon_0 = \frac{V \varepsilon_1 l_1 + V \varepsilon_2 l_2}{l}. \quad (28.7)$$

Через l обозначен период слоистой среды

$$l = l_1 + l_2. \quad (28.84)$$

Условие резонанса (28.83) с помощью введенной по формуле (28.7) диэлектрической постоянной можно записать в обычном виде

$$\omega \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \theta \right) = \frac{2\pi v}{l} r. \quad (28.5')$$

Как было показано ранее (см. пункт а) настоящего параграфа), формулы для определения направления излучения резонансного кванта, интервала излученных частот, пороговой энергии и т. д. являются прямым следствием условия (28.5').

Следовательно, все выражения, приведенные выше (см. формулы (28.10)—(28.13)), остаются в силе. Необходимо только доопределить, что понимать в слоистой среде под средней плотностью электронов NZ , входящей в ленгмюровскую частоту (см. формулу (28.8)). Для этого необходимо в формуле (28.7) перейти к пределу больших частот и сравнить ее с выражением диэлектрической постоянной вида (28.8). Сравнение показывает, что все выведенные выше формулы для произвольной периодической среды можно применить к слоистой среде, если под средней плотностью электронов в слоистой среде понимать выражение

$$NZ = \frac{N_1 Z_1 l_1 + N_2 Z_2 l_2}{l_1 + l_2}. \quad (28.85)$$

Для дальнейшего будет удобно ввести параметр α , характеризующий отношение толщин пластинок:

$$\alpha = \frac{l_2}{l_1}. \quad (28.86)$$

Введенный выше параметр α

$$\alpha = \frac{2\pi c}{l} r \quad (28.59)$$

в r раз больше частоты пролета периода среды l . Ленгмюровская частота для слоистой среды имеет вид:

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2}{m_e} \frac{N_1 Z_1 + N_2 Z_2 \alpha}{1 + \alpha}. \quad (28.87)$$

Как мы уже указывали, формулы (28.10)—(28.13) остаются в силе и для слоистой среды.

Приведем здесь для полноты соответствующие выражения, используя введенные выше обозначения. Интервал излученных частот определяется из правой части неравенства (28.9), которое для частот, значительно больших атомных, перепишем в следующем виде:

$$\frac{\omega_0^2}{2\omega^2} - \frac{a}{\omega} + \left(1 - \frac{v}{c}\right) = 0. \quad (28.88)$$

Корни квадратного уравнения (28.88) определяют максимальную и минимальную излученную частоту для данной гармоники:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \left(a + \sqrt{a^2 - \omega_0^2 \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}\right) \geq \\ & \geq \omega \geq \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \left(a - \sqrt{a^2 - \omega_0^2 \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}\right). \end{aligned} \quad (28.89)$$

Энергетический порог появления гармоники с номером r определяется из положительности подкоренного выражения:

$$\left(\frac{E}{mc^2}\right)_{\text{пор}} = \frac{\omega_0}{a} = \frac{l}{2\pi cr} \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m_e} \frac{N_1 Z_1 + N_2 Z_2 \alpha}{1 + \alpha}}. \quad (28.90)$$

Излучение с указанными свойствами имеет место до гармоник, номер которых не превышает r_{max} (см. формулу (28.12)):

$$r_{\text{max}} \ll \frac{l\omega_0}{2\pi c}. \quad (28.91)$$

Вернемся теперь к расчету энергии излучения в слоистой среде. Подставляя найденное значение величины I (формула (28.82)) в формулу (28.78), определим векторный потенциал $A(q, \omega, z)$ для электромагнитного поля излучения. Используя формулу (28.37), вычислим поток энергии через плоскость, перпендикулярную оси z на большом расстоянии от слоистого вещества (см. формулы (3), (4), (6) работы [3]):

$$dI_{\omega} = \frac{2e^2c^2}{\pi} \frac{d\omega}{\omega} \int q^3 dq \sin^2 \left[\frac{l_1(\omega - x_1 v)}{2c} \right] \times \\ \times \left| \frac{1}{(\varepsilon_1 x_1)^{1/2} (\omega - x_1 v)} - \frac{1}{(\varepsilon_2 x_2)^{1/2} (\omega - x_2 v)} \right|^2 \frac{\sin^2 \frac{n}{2} \beta}{\sin^2 \beta}. \quad (28.92)$$

Переменная q связана с углом излучения θ соотношением (28.38), в котором ε_0 определяется выражением (28.7). Формула (28.92) (если не производить интегрирование по q) определяет угловое распределение резонансного излучения в слоистой среде. Формулу (28.92) можно несколько упростить, если вынести величины $(\varepsilon_1 x_1)^{1/2}$ и $(\varepsilon_2 x_2)^{1/2}$ за знак модуля. Это можно сделать благодаря условию квазиклассики.

Таким образом, угловое распределение резонансных квантов определяется выражением

$$dI_{\omega, \theta} = \frac{e^{2\theta^3} d\theta d\omega}{2\pi c} \left| \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta\right) \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta\right)} \right|^2 \times \\ \times \sin^2 \left[\frac{l_1 \omega}{2c} \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta\right) \right] \frac{\sin^2 \frac{n\beta}{2}}{\sin^2 \beta}. \quad (28.92')$$

Как видно из приведенного выражения в области изменения переменных, для которых выполняется условие резонанса (28.83), излучение пропорционально квадрату числа пластин $\left(\frac{n}{2}\right)^2$.

Интересно отметить, что при конечном числе пластинок усиление может быть достигнуто не только в случае, когда выполняется условие резонанса, но и при выполнении неравенства

$$\frac{n\beta}{2} \approx \frac{n}{2} \frac{l}{\lambda} \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) < 1. \quad (28.83')$$

В этом случае последний множитель в формуле (28.92) заменяется на $\left(\frac{n}{2}\right)^2$, т. е. излучение пропорционально квадрату

числа пластинок. Входящий в формулу (28.92) множитель $\sin^2 \left[\frac{l_1 \omega}{2c} \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta \right) \right]$, характеризующий интерференцию излучения, возникающего на двух границах одной и той же пластинки, можно также заменить на квадрат аргумента.

Рассмотрение углового распределения резонансных квантов показывает, что весьма перспективным (с точки зрения уменьшения относительного влияния фоновых явлений) является создание детекторов, которые смогли бы выделять определенный коллимированный пучок резонансных квантов.

Перейдем к рассмотрению полного излучения в слоистой среде. Интегрирование по углам излученного кванта легко произвести, если учесть, что для большого числа пластинок быстро осциллирующий множитель в формуле (28.92) можно заменить на сумму δ функций

$$\left(\frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \beta} \right)^2 = \frac{n}{2} \pi \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \delta(\beta - \pi r). \quad (28.93)$$

Формулу (28.92) легко преобразовать к виду:

$$dI_\omega = \frac{e^2 n}{l} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 \frac{d\omega}{\omega} \sum_{r=r_{\min}}^{r_{\max}} \sin^2 \left[\frac{\omega l_2}{c} \left(\frac{a}{\omega} - \frac{l_1 \omega^2}{2l\omega^2} \right) \right] \times \\ \times \frac{\frac{a}{\omega} - \left(1 - \frac{v}{c} \right) - \frac{\omega_0^2}{2\omega^2}}{\left[\frac{a}{\omega} - \frac{l_1 \omega^2}{2l\omega^2} \right]^2 \left[\frac{a}{\omega} + \frac{l_2 \omega^2}{2l\omega^2} \right]^2}, \quad (28.94)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2}{m_e} (N_1 Z_1 - N_2 Z_2). \quad (28.94')$$

При заданной энергии частицы суммирование в формуле (28.94) должно начинаться со значения $r_{\min} \geq 1$, которое определяется по (28.90). Для получения полного числа излучен-

ных квантов на единицу пути слоистого вещества необходимо проинтегрировать выражение (28.94) по частотам, предварительно разделив dI_ω на энергию кванта $\hbar\omega$ и суммарную толщину пластин $\frac{n}{2} l$.

Используя переменную

$$y = \frac{\omega_0^2}{2a\omega}, \quad (28.55)$$

получим удобную формулу для вычисления полного числа испущенных фотонов на единицу пути слоистого вещества:

$$m = \frac{4}{137} \frac{p^2}{l\pi} (1 + \alpha)^2 \sum_{r=1}^{r_{\max}} \frac{1}{r} \int_{y_1}^{y_2} \frac{y - \frac{\omega_0^2}{2a^2} \left(1 - \frac{v}{c}\right) - y^2}{(1 - py)^2 (1 + p\alpha y)^2} \times \\ \times \sin^2 \left[\frac{\pi r \alpha}{1 + \alpha} (1 - yp) \right] dy. \quad (28.95)$$

Здесь

$$p = \frac{N_1 Z_1 - N_2 Z_2}{N_1 Z_1 + N_2 Z_2}. \quad (28.96)$$

Порог энергии для излучения r -ой гармоники определяется условием (28.90), интервал излученных частот — формулой (28.89). При построении спектра излучения для каждой отдельной гармоники удобнее исходить из уравнения (28.95), записанного в переменных

$$\omega' = \frac{2\omega a}{r\omega_0^2} = \frac{\omega}{\omega_{\min} (r = 1)}. \quad (28.97)$$

Обратим внимание на то, что величина $\frac{r\omega_0^2}{2a} = \omega_{\min} (r = 1)$

для энергий, значительно превышающих пороговое значение (28.91), есть минимально возможная излучаемая частота на первой гармонике (см. (28.89) и (28.10)). Тогда получим

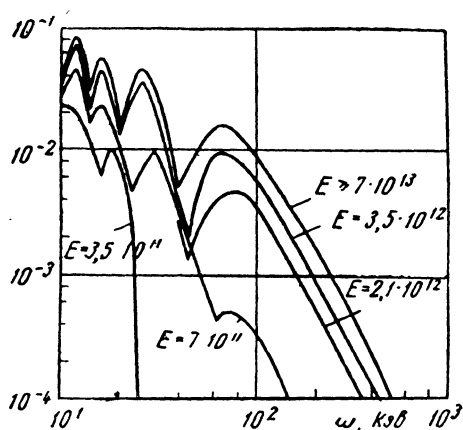
$$dm = \frac{4}{137} \frac{p^2(1+\alpha)^2}{\pi l} \sum_r \frac{d\omega'}{r^3\omega'^3} \frac{1 - \frac{\omega_0^2}{2\alpha^2} \left(1 - \frac{v}{c}\right) \omega' r - \frac{1}{\omega' r}}{\left(1 - \frac{p}{\omega' r}\right)^2 \left(1 + \frac{p\alpha}{\omega' r}\right)^2} \times$$

$$\times \sin^2 \left[\frac{\pi r \alpha}{1 + \alpha} \left(1 - \frac{p}{\omega' r}\right) \right]. \quad (28.98)$$

Спектр для каждой гармоникой будет описываться кривой, ордината которой обращается в нуль при

$$\omega' = \omega'_{\min} \approx \frac{1}{r} \quad \text{и при} \quad \omega' = \omega'_{\max} \approx \frac{2\alpha^2}{\omega_0^2 r (1 - v/c)}. \quad (28.99)$$

Рис. 59. Дифференциальные спектры резонансного излучения μ -мезонов различных энергий. По оси ординат отложена величина dm — число квантов, излученных μ -мезонами в слое толщиной в 1 см; По оси абсцисс отложена величина ω — энергия излученного кванта (кэв).



Как показывает численный расчет, кривые излучения на каждой гармонике имеют резкий максимум вблизи левой границы спектра. На рисунках 58, 59 приведены результаты расчета спектра резонансного излучения, а также полного числа излученных квантов в зависимости от различных параметров (отношения толщин, энергии, номера гармоник и значения p). Расчет показывает, что с увеличением энергии число излученных квантов растет за счет вклада гармоник с малыми r . При энергиях, больших пороговой энергии, для первой гармоники происходит насыщение. Формула (28.98) [3, 2] является основной формулой, по которой рассчитываются дифференциальные кривые для сравнения эксперимента с теорией (см. § 29).

Нужно отметить, что формула (28.95) для полного числа квантов m может быть подвергнута дальнейшим математическим преобразованиям, хотя для численных расчетов удобнее непосредственно иметь дело с ней. Для максимально возможного значения испущенных на единицу длины слоистой среды полного числа фотонов можно получить следующую оценку [18]:

$$m_{\max} \approx \frac{4}{137\pi l} \sum_{r=1}^{r_{\max}} \frac{\ln(2\pi\gamma r)}{r}, \quad (28.100)$$

где

$$\gamma = 1,78.$$

Суммирование приведенного выражения может быть выполнено для больших r_{\max} :

$$m_{\max} \approx \frac{4}{137\pi l} \left[\ln 2\pi\gamma \cdot \ln \gamma r_{\max} + \frac{(\ln r_{\max})^2}{2} \right]. \quad (28.101)$$

Максимальное значение m_{\max} достигается при энергиях, значительно превосходящих пороговую энергию и для значений параметров $p \sim 1$ и $\alpha \sim \pi r_{\max}$.

е) Конкурирующие эффекты [2]

1. „Тепловой“ фон

В настоящем разделе мы приведем оценку различных причин, видоизменяющих приведенные в предыдущих пунктах выводы.

Прежде всего рассмотрим вопрос о том, как будут влиять на формулы резонансного излучения случайные отклонения от идеальной периодичности. Этот вопрос тесно связан с рассмотрением теплового или диффузного фона в дифракции рентгеновских лучей. С аналогичной постановкой задачи мы уже встречались при исследовании интерференционного излучения в кристалле.

Рассмотрение случайных отклонений толщин от их средних значений l_1, l_2 проведем на примере слоистой среды, исследованной в предыдущем пункте. Будем исходить

из формулы (28.81), которая определяет интенсивность резонансного излучения. Для больших n ее можно переписать в виде

$$|I|^2 = \left| \frac{1}{(\chi_1 \varepsilon_1)^{1/2} (\omega - \chi_1 \nu)} - \frac{1}{(\chi_2 \varepsilon_2)^{1/2} (\omega - \chi_2 \nu)} \right|^2 \left| \sum_{m=1}^n e^{i r_m} (-1)^m \right|^2. \quad (28.102)$$

Пусть величины r_m , входящие в (28.102) (см. (28.81')), флуктуируют около своих средних значений благодаря флуктуациям толщин пластинок. Поскольку слоистая среда, необходимая для эксперимента, создается искусственным образом (см. § 29), то вопрос о флуктуациях будет сводиться к вопросу о флуктуациях толщин различных пластин. В случае среды, состоящей из твердых пластин (всего $n/2$ пластин), размещенных на определенном расстоянии l_2 друг от друга в газе, флуктуации l_2 будут соответствовать неточностям в расстановке пластинок, а флуктуации l_1 — неточностям толщин самих пластин. Поскольку мы имеем периодическую среду, в которой все положения одинаковых пластин равноправны, то флуктуации r_m должны быть одинаковыми для эквивалентных точек (это предположение соответствует независимым тепловым колебаниям кристаллической решетки). Это можно записать либо в виде

$$r_m = r_{m0} + (\omega - \chi_m \nu) \xi_m, \quad (28.103)$$

либо в виде

$$r_m = r_{m0} + (\omega - \chi_1 \nu) \xi_{m_1} + (\omega - \chi_2 \nu) \xi_{m_2}, \quad (28.104)$$

где для четных m ($\chi_m = \chi_2$) средний квадрат случайных отклонений $\overline{\xi_m^2}$ равен $\overline{\xi_2^2}$, а для нечетных m ($\chi_m = \chi_1$) равен $\overline{\xi_1^2}$. Распределение различных значений ξ_m дается законом Гаусса:

$$f_{1,2}(\xi_m) d\xi_m = \frac{d\xi_m}{\sqrt{\pi \overline{\xi_{1,2}^2}}} e^{-\xi_m^2 / \overline{\xi_{1,2}^2}}. \quad (28.105)$$

Рассмотрим флуктуации типа (28.104). Поперечник излучения пропорционален выражению (28.102), которое нужно усреднить по флуктуациям r_m , т. е. по всем ξ_m . Это сводится

к усреднению множителя, входящего в формулу (28.102), с помощью произведения $2n$ функций вида (28.105). Результат усреднения можно представить в виде

$$\overline{\left| \sum e^{ir_{nl}} (-1)^m \right|^2} = \pi + \sum_{\substack{l=1, m=1 \\ l \neq m}}^n e^{i(r_{l0} - r_{m0})} (-1)^{l+m} \times \\ \times \exp \left[-\frac{(\omega - x_1 v)^2}{2} \bar{\xi}_1^2 - \frac{(\omega - x_2 v)^2}{2} \bar{\xi}_2^2 \right]. \quad (28.106)$$

Используя (28.106), (28.37), (28.78), (28.102), можно записать формулу для полной энергии излучения в слоистой среде, состоящей из $\frac{n}{2}$ пластин со случайными флуктуациями толщин пластин и промежутков между ними в следующем виде:

$$dI_{\omega, n} = \frac{e^2}{2\pi c} \theta^3 d\theta d\omega \left| \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta} - \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta} \right|^2 (A_1 + A_2), \quad (28.107)$$

где

$$A_1 = n \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{(\omega - x_1 v)^2}{2} \bar{\xi}_1^2 - \frac{(\omega - x_2 v)^2}{2} \bar{\xi}_2^2 \right] \right\}, \quad (28.108)$$

$$A_2 = \exp \left[-\frac{(\omega - x_1 v)^2}{2} \bar{\xi}_1^2 - \frac{(\omega - x_2 v)^2}{2} \bar{\xi}_2^2 \right] \times \\ \times \sum_{l, m=1}^n e^{i(r_{l0} - r_{m0})} (-1)^{l+m}.$$

Как мы видим, выражение (28.107) распадается на два слагаемых различной природы. Второе слагаемое в круглых скобках (формулы (28.107)) отличается от выражения, исследованного в предыдущем пункте, дополнительным множителем

$$\exp \left[-\frac{(\omega - \kappa_1 v)^2}{2 \xi_1^2} - \frac{(\omega - \kappa_2 v)^2}{2 \xi_2^2} \right].$$

Выписанный множитель приводит к уменьшению резонансного излучения в реальной периодической среде по сравнению с излучением в среде с идеальной периодичностью. Из условия резонанса (28.83) замечаем, что всегда имеют место неравенства

$$(\omega - \kappa_{1,2} v) \lesssim \frac{2\pi rc}{l_{1,2}}. \quad (28.109)$$

Поэтому для того, чтобы формулы резонансного излучения, выведенные в предыдущем пункте, не изменялись, достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\frac{\sqrt{2} \pi rc}{l_{1,2}} \sqrt{\xi_{1,2}^2} \ll 1. \quad (28.109')$$

Следовательно, если неточности в расстановке пластин будут много меньше, чем расстояния между пластинами, а также флуктуации в толщинах пластин будут много меньше толщины пластинок (при $r = 1$), то периодическую слоистую среду можно считать идеально периодической. Обратим внимание, что с увеличением номера гармоники допуск на флуктуации становится более жестким.

Перейдем к исследованию первого слагаемого в выражении (28.107). Очевидно, при больших флуктуациях (см. условия (28.110)) мы имеем обычную формулу для переходного излучения в пределе больших скоростей, больших квантов и малых углов (см. § 26, пункт б)) на n независимых границах.

Таким образом, „тепловой“ фон излучения в периодической среде приводит для слоистой среды к переходному излучению. Однако для того, чтобы переходное излучение на пластинках было максимальным, необходимо, чтобы выполнялось одно из двух неравенств, которые запишем в виде:

либо

$$\sqrt{\bar{\xi}_1^2} \gg \frac{\sqrt{2}}{\omega - \kappa_1 v},$$

либо

(28.110)

$$\sqrt{\bar{\xi}_2^2} \gg \frac{\sqrt{2}}{\omega - \kappa_2 v}.$$

Итак, чтобы переходное излучение было максимальным, флуктуации толщины первой среды (мы считаем ее более плотной) для излучения волны с частотой ω должны быть

$$\sqrt{\bar{l}_1^2} \gg \frac{\kappa \sqrt{2}}{1 - \frac{v}{c} + \frac{2\pi e^2 N_1 Z_1}{m\omega^2} + \frac{\theta^2}{2}}, \quad (28.111)$$

либо флуктуации толщин легкого вещества должны быть

$$\sqrt{\bar{l}_2^2} \gg \frac{\kappa \sqrt{2}}{1 - \frac{v}{c} + \frac{2\pi e^2 N_2 Z_2}{m\omega^2} + \frac{\theta^2}{2}}. \quad (28.111')$$

Напомним, что в переходном излучении присутствуют все частоты от нулевой до $\omega_{кр}$ (см. § 26 и формулу (14.5)). Вклад бóльших частот, согласно (28.107), мал.

При выполнении условия (28.110) первое слагаемое в формуле (28.107) будет приводить к n кратной интенсивности по сравнению с излучением на одной границе.

После интегрирования по углу θ первое слагаемое формулы (28.107) приводит к формуле для интенсивности излучения (26.18), исследованной в пункте б) § 26.

Рассмотрим случай, когда отклонение r_m от положения равновесия определяется условием (28.103). После усреднения (28.102) с помощью функций (28.105) мы получим формулу, аналогичную (28.107), в которой вместо A_1 и A_2 стоят величины A'_1 и A'_2 :

$$A'_1 = n \left\{ 1 - \frac{1}{2} \exp \left[- \frac{(\omega - \chi_1 v)^2}{2} \bar{\xi}_1^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \exp \left[- \frac{(\omega - \chi_2 v)^2}{2} \bar{\xi}_2^2 \right] \right\}, \quad (28.112)$$

$$A'_2 = \left| \sum_l e^{i r_l} (-1)^l e^{-\frac{(\omega - \chi_l v)^2}{4} \bar{\xi}_l^2} \right|^2.$$

Первое слагаемое A'_1 в полученной формуле, как и выше, определяет „тепловой“ фон, и оценки проводятся аналогично вышеизложенному. Второе слагаемое A'_2 приводит к формулам резонансного излучения, отличающимся от формул для идеальной слоистой среды множителем, который можно определить, если просуммировать ряд, входящий в (28.112). Следовательно вместо A_2 в (28.107) нужно подставить A'_2 :

$$A'_2 = \frac{\sin^2 \frac{n\beta}{2}}{\sin^2 \beta} \left\{ \exp \left[- \frac{(\omega - \chi_1 v)^2}{2} \bar{\xi}_1^2 \right] + \exp \left[- \frac{(\omega - \chi_2 v)^2}{2} \bar{\xi}_2^2 \right] - \right. \\ \left. - 2 \exp \left[- \frac{(\omega - \chi_1 v)^2}{4} \bar{\xi}_1^2 - \frac{(\omega - \chi_2 v)^2}{4} \bar{\xi}_2^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \cos (\omega - \chi_1 v) \Delta t_1 \right\}. \quad (28.113)$$

Если выполнены условия, обратные обоим условиям (28.110), то формулы не отличаются от случая излучения в идеальной среде. Интересно отметить, что случай (28.103) (см. формулу (28.113) и (28.112)) допускает существование резонансного излучения, даже если одна из флуктуаций сколь угодно велика (т. е. условие (28.109') выполняется только для одного индекса). При этом, как видно из (28.113), окончательные формулы резонансного излучения будут отличаться тем, что множитель $4 \sin^2 \frac{(\omega - \chi_2 v) \Delta t_2}{2}$, входящий в (28.92) и (28.98), будет заменен на единицу. Для теплового фона, как видно из (28.112), в рассматриваемом случае появится множитель $n/2$, на который нужно умножить формулу переходного излучения на одной границе.

2. Влияние фотоэффекта и других причин

Формулы § 28 выведены для частиц, скорость которых может произвольным образом изменяться вдоль оси z . Это дает возможность оценить погрешность, связанную с торможением частицы, и показать, что если скорость частиц мало изменяется на длине, равной периоду среды, то торможением частиц можно пренебречь.

Влияние поглощения кванта является значительно более существенным. Легко понять, что поглощение должно быть пренебрежимо мало на расстояниях порядка периода среды. Это приводит к тому, что резонансные эффекты можно наблюдать, помимо оптической области, начиная с частот, превышающих частоты мягких рентгеновских лучей. Поскольку в этой области частот поглощение обусловлено в основном фотоэффектом, резко зависящим от атомного номера, то слоистую среду предпочтительно изготавливать из легких веществ. Напомним, что полное число резонансных квантов, образованных на единице пути, зависит от разности плотностей электронов в первой и второй среде только через величину p (см. (28.96) и (28.98)).

ж) Влияние многократного рассеяния [20]

Рассмотрение влияния многократного рассеяния является необходимым при расчете резонансного излучения легких частиц. Очевидно, что многократное рассеяние нужно учитывать, когда средний квадрат угла рассеяния на когерентной длине больше угла излучения. Это условие, учитывая формулы (28.6'') и (17.18), можно записать в следующем виде:

$$\frac{E_s}{E} \sqrt{\frac{l_{\text{ког}}}{L}} > \frac{2\pi r c}{l_{\omega_0}}. \quad (28.114)$$

Используя выражение для пороговой энергии (28.90), перепишем условие (28.114) в виде неравенства:

$$E < \frac{E_s}{mc^2} \sqrt{\frac{l_{\text{ког}}}{L}} E_{\text{пор}}. \quad (28.115)$$

Для определения когерентной длины, входящей в выражение (28.115), необходимо рассчитать минимальный продольный импульс, который дается следующим выражением:

$$q_{\parallel} = \left(\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{n} \frac{\hbar\omega}{c} \sqrt{\epsilon} \right) \frac{\vec{v}}{v} - 2\pi r \hbar / l. \quad (28.116)$$

Здесь принято, что начальная скорость направлена по оси z , вдоль которой среда периодически изменяется. Последнее слабое характеризует тот факт, что периодическая среда может принимать импульс, кратный величине $\frac{2\pi\hbar}{l}$. Кроме передачи импульса всей среде, как целому, при кулоновском рассеянии на ядрах происходит передача импульса отдельным ядрам.

Когерентная длина определяется как обратная величина минимального значения продольно передаваемого импульса $\hbar\delta = q_{\parallel \min}$:

$$l_{\text{ког}} = \frac{1}{\delta} = \frac{v}{\omega \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} - \frac{2\pi r v}{l\omega} \right)}. \quad (28.117)$$

Введенную таким образом когерентную длину нужно понимать несколько условно, поскольку при излучении резонансных квантов она принимает отрицательные значения.

Обратим внимание также на тот факт, что для излучения минимальной и максимальной частоты на каждой гармонике когерентная длина обращается в бесконечность, поскольку знаменатель выражения (28.117) обращается в нуль. Следовательно, для небольшой области частот вблизи от границ интервала (28.10) многократное рассеяние необходимо учитывать всегда.

Из рассмотрения формулы (28.117) вытекает, что наличие периодичности среды обрезает рост когерентной длины. В частности, если период среды удовлетворяет условию

$$l \ll \frac{2\pi r v}{\omega \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}, \quad (28.118)$$

то когерентная длина равна

$$|l_{\text{кор}}| \sim \frac{l}{2\pi r}. \quad (28.118')$$

Следовательно, чем больше число r , тем меньше когерентная длина. Учитывая (28.118'), неравенство (28.115) должно быть записано следующим образом:

$$E \lesssim \frac{E_s}{mc^2} \sqrt{\frac{l}{2\pi r L}} E_{\text{пор}}. \quad (28.115')$$

Напомним, что излучение на r -ой гармонике появляется начиная с пороговой энергии, $E_{\text{пор}}$. Поэтому, если величина $\frac{E_s}{mc^2} \sqrt{\frac{l_{\text{кор}}}{L}}$ меньше единицы (что практически всегда выполняется для тяжелых частиц), то многократное рассеяние несущественно.

Условие (28.115) и выражение (28.117), полученные из качественных рассуждений, подтверждены нижеприведенным расчетом.

После этих элементарных рассуждений приведем вывод формул для интенсивности резонансного излучения с учетом влияния многократного рассеяния в неоднородной среде, свойства которой меняются периодически вдоль оси z .

Исходя из уравнения (28.16), определим векторный потенциал поля излучения. По сравнению с соответствующими расчетами, приведенными выше, задача несколько усложняется, поскольку ток, вызывающий излучение, из-за влияния многократного рассеяния уже нельзя считать направленным вдоль оси z . Запишем его в следующем виде:

$$\vec{j} = e\vec{v}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}(t)). \quad (28.119)$$

Решение уравнения (28.16) в квазиклассическом приближении (см. условия (28.28) и (28.27)) легко получить, разлагая векторный потенциал по переменным t , x , y в интеграл Фурье и используя методику, развитую в пункте б). Решение дается выражением:

$$\vec{A}(q, z) = \frac{i}{(2\pi)^2 \kappa c} \int \exp \left\{ i \left| \int_{z'}^z \kappa dz \right| - ik_x x' - ik_y y' + i\omega t \right\} \times \\ \times \vec{j}(t, x', y', z') dt dx' dy' dz'. \quad (28.120)$$

Решение (28.120) в отличие от Формулы (28.32) получено при учете только первого члена разложения ψ_0 квазиклассической функции. Значения q и χ даются формулами (28.20) и (28.122). Напряженность магнитного поля определяется формулой

$$\vec{H}_\omega(x, y, z) = -\frac{e}{(2\pi)^2 c} \times \int \int \int \frac{[\vec{k}\vec{v}(t)]}{\chi} \exp \left\{ i \int_{z(t)}^z \chi dz + ik_x [x - x(t)] + ik_y [y - y(t)] + i\omega t \right\} dt dk_x dk_y. \quad (28.121)$$

Вектор \vec{k} имеет компоненты k_x, k_y, χ :

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \theta_\Phi \cos \varphi_\Phi, \\ k_y = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \theta_\Phi \sin \varphi_\Phi, \quad (28.122) \\ \chi = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k_x^2 - k_y^2},$$

причем величина χ зависит от переменной z . θ_Φ есть угол излучения фотона, отсчитываемый от оси z , φ_Φ — азимутальный угол.

Поток энергии через плоскость xy за все время пролета определяется выражением

$$I = \int_0^\infty dI_\omega = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int [E\vec{H}]_z dt dy dx = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int |H|^2 \cos \theta_\Phi dt dx dy. \quad (28.123)$$

Используя формулу (28.121) и введя обозначения $\vec{r}(t) = \vec{r}$, $\vec{r}(t') = \vec{r}'$, $\vec{v}(t) = \vec{v}$, $\vec{v}(t') = \vec{v}'$, из (28.123) получим

$$dI_{\omega} = \frac{e^2 d\omega}{4\pi^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{[\vec{k}\vec{v}][\vec{k}\vec{v}']}{x^2} \times$$

$$\times \exp \left\{ i \int_z^{z'} dz - ik_x (x - x') - ik_y (y - y') + i\omega (t - t') \right\} \times$$

$$\times k^2 \cos^2 \theta_{\Phi} \sin \theta_{\Phi} d\theta_{\Phi} d\varphi_{\Phi}. \quad (28.124)$$

Выражение (28.124) необходимо усреднить по всем возможным траекториям частицы. Для этого умножим выражение (28.124) на функции распределения $W_1(\vec{r}, \vec{v}; t)$ и $W_2(\vec{r}', \vec{v}', t', \vec{r}, \vec{v}, t)$ и проинтегрируем по координатам \vec{r} и \vec{r}' и скоростям \vec{v}, \vec{v}' точно так же, как это было сделано при выводе формулы (19.4). Удобно отсчитывать углы отклонения электрона $\vec{\theta}$ и $\vec{\theta}'$ от направления излученного фотона \vec{k} (см. формулы (19.6)).

Мы предполагаем, что в момент $t = 0$ скорость частицы \vec{v}_0 направлена по оси z , вдоль которой изменяются свойства среды. Очевидно, что все углы, входящие в формулы, много меньше единицы. Функция распределения $W_2(\vec{r}', \vec{v}'; \vec{r}, \vec{v}; \tau)$ удовлетворяет кинетическому уравнению (19.10). Обратим внимание, что стоящая там в правой части величина N , характеризующая плотность ядер в периодической среде, вообще говоря, должна зависеть от переменной z . Для оценок мы пренебрежем этой зависимостью, т. е. будем предполагать, что плотность ядер постоянна вдоль среды, а периодическое изменение диэлектрической постоянной создается за счет изменяющейся плотности электронов. В этом случае можно воспользоваться известным решением уравнения (19.10) в приближении Фоккера—Планка. Запишем уравнение для фурье-компоненты $W_k(\vec{\theta}', \vec{\theta}; \tau)$ функции распределения W_2 (см. формулу (19.8)) следующим образом:

$$\frac{\partial W_k(\vec{v}', \vec{v}; \tau)}{\partial \tau} + i(\omega - \vec{k} \vec{v}') W_k = q \Delta_{\theta'} W_k(\vec{v}', \vec{v}; \tau). \quad (28.125)$$

При $\tau = 0$ функция W_k удовлетворяет начальному условию (19.12). Решение уравнения (28.125) можно искать в виде (19.15). Подстановка выражения (19.15) в уравнение (28.125) приводит к соотношениям для определения величин α , β и γ . Легко видеть, что значения α и β будут опять-таки определяться выражениями (19.17), а выражение γ для рассматриваемого случая примет вид:

$$\begin{aligned} \gamma = & -i\omega \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{4\pi v r}{\omega l} \right) \frac{\tau}{2} + \ln [\text{sh}(\sqrt{2i\omega q} \tau)] - \\ & - \theta^2 \sqrt{\frac{i\omega}{8q}} \text{cth}(\sqrt{2i\omega q} \tau) + \ln \sqrt{\frac{i\omega}{8\pi^2 q}}. \quad (28.126) \end{aligned}$$

Все отличие выражения (28.126) от соответствующего выражения для случая однородной среды (см. формулы (19.17)) заключается в замене выражения $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ на выражение $\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{4\pi v r}{\omega l}\right)$. Дополнительные слагаемые $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ и $\frac{4\pi v r}{\omega l}$ появляются из-за эффекта поляризации среды и влияния периодичности среды. Поскольку переменная τ характеризует эффективные времена пролета частицы, то когерентная длина действительно определяется выражением (28.117).

Перейдем к вычислению излученной энергии. Умножим выражение (28.124) на W_1 и W_2 и усредним по всем траекториям частицы. Предварительно упростим интеграл, входящий в экспоненту. Для этого рассмотрим конкретную периодическую среду.

Пусть свойства среды меняются по закону косинуса (см. формулу (28.43)). Используя разложение (28.44) и формулу (28.46) для излученной энергии в единицу времени и в телесный угол $d\Omega$, получим выражение

$$d\dot{I}_\omega = \frac{e^2 \omega^2 d\omega}{2\pi^2 c} d\Omega \operatorname{Re} \left\{ \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \int_0^\infty d\tau (\vec{\theta} \vec{\theta}') |J_r(B)|^2 W_k(\vec{\theta}', \theta; \tau) \times \right. \\ \left. \times W_1(\vec{r}, \vec{v}; t) d\vec{r} d\vec{v} d\theta' \right\}. \quad (28.127)$$

При получении выражения (28.127) опущены члены, дающие малый вклад. Где возможно, пренебрежено отличием вектора \vec{k} от импульса фотона в однородной среде, а также рассмотрен случай, когда индексы двух различных бесселевых функций совпадают. Именно этот член существен для исследования резонансного излучения. Величина B , входящая в аргумент функции Бесселя, определяется формулой (28.50), в которой $\cos \theta$ можно положить равным единице. Проинтегрируем выражение (28.127) по углам $\vec{\theta}'$. Воспользовавшись формулой:

$$\int (\vec{\theta} \vec{\theta}') e^{\alpha(\tau) \theta'^2 + \beta(\tau) \vec{\theta} \vec{\theta}' + \gamma(\tau)} d\vec{\theta}' = \\ = \theta^2 \frac{\exp \left[-\frac{ic\tau}{l_{\text{кор}}} - \theta^2 \sqrt{\frac{i\omega}{8q}} \operatorname{th} (V \sqrt{2i\omega q} \tau) \right]}{\operatorname{ch}^2 (V \sqrt{2i\omega q} \tau)} \quad (28.128)$$

представим выражение (28.127) в следующем виде:

$$d\dot{I}_\omega = \frac{e^2 \omega^2 d\omega}{2\pi^2 c} d\Omega \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} |J_r(B)|^2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(\vec{r}, \vec{v}; t) \theta^2 d\vec{r} d\vec{v} \times \\ \times \int_0^\infty d\tau \frac{\exp \left[-\frac{ic\tau}{l_{\text{кор}}} - \theta^2 \sqrt{\frac{i\omega}{8q}} \operatorname{th} (V \sqrt{2i\omega q} \tau) \right]}{\operatorname{ch}^2 (V \sqrt{2i\omega q} \tau)}. \quad (28.129)$$

Легко заметить, что для равномерно и прямолинейно движущейся частицы, т. е. при $q \rightarrow 0$, интеграл по τ приводит к дельта-функции вида $\delta \left(\frac{\omega}{2} \theta^2 + \frac{c}{l_{\text{кор}}} \right)$. Следовательно, при $q \rightarrow 0$ угол излучения квантов определяется формулой

$$\theta_{\text{нз}}^2 = -\frac{2c}{\omega l_{\text{кор}}}, \quad (28.130)$$

т. е. излучение возможно только для значений r , больших нуля, для которых когерентная длина может принимать отрицательные значения. Интегрируя формулу (28.129) по угловым переменным $d\Omega$ и воспользовавшись (19.5), при $q = 0$, получим

$$d\dot{I}_\omega (q = 0) = \frac{e^2 \omega d\omega}{c} \sum_{r>0} |J_r(B)|^2 \left[\frac{4\pi r c}{\omega l} - (1 - \beta^2) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right]. \quad (28.131)$$

Формула (28.131) соответствует исследованной ранее формуле (28.49) для резонансного излучения в пределе больших частот и релятивистских энергий.

Проинтегрируем формулу (28.129) по угловым переменным $d\Omega$ воспользовавшись формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int \theta^2 d\vec{\theta} \frac{\exp \left[-\theta^2 \sqrt{\frac{i\omega}{8q}} \operatorname{th} (\sqrt{2i\omega q} \tau) \right]}{\operatorname{ch}^2 (\sqrt{2i\omega q} \tau)} = \frac{8\pi q}{i\omega} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 (\sqrt{2i\omega q} \tau)}. \quad (28.132)$$

Окончательный результат, используя (19.19) можно представить в виде

$$d\dot{I}_\omega = -\frac{2e^2 d\omega}{\pi} \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} |J_r(B)|^2 \frac{F(s)}{l_{\text{кор}}}, \quad (28.133)$$

Функция $F(s)$ несущественно отличается от функции (21.34), введенной Галицким и Якимцом. Ее можно выразить через функцию Мигдала $\Phi(s)$,

$$F(s) = -\frac{\Phi(s)}{24s^2} \Theta(s+1) - \left[\frac{\Phi(-s)}{24s^2} - \pi \right] \Theta(-s-1), \quad (28.134)$$

где параметр s определяется формулой (28.136).

Формулу (28.133) можно переписать в следующем виде:

$$dI_{\omega} = \frac{2e^2 d\omega}{\pi} \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \frac{|J_r(B)|^2}{l_{\text{кор}}} \times \\ \times \left\{ \frac{\Phi(s)}{24s^2} \Theta(s+1) + \left[\frac{\Phi(-s)}{24s^2} - \pi \right] \Theta(-s-1) \right\}, \quad (28.135)$$

где

$$\Phi(s) = 3s \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\cos st + \sin st}{\text{ch}^2 \frac{t}{2}} + 24s^2 \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\sin st}{\text{sh} t} dt - 6\pi s^2, \quad (21.28)$$

$$s = \frac{c}{4l_{\text{кор}} \sqrt{\omega q}}. \quad (28.136)$$

Параметр s , введенный по формуле (28.136), отличается от соответствующего параметра Мигдала s , использованного в § 19 (см. формулу (19.22)), тем, что когерентная длина, входящая в формулу (28.136), рассчитывается с учетом периодичности и поляризации среды (см. (28.117)). Физический смысл величины q следует из формул (17.12), (17.7), (19.26), откуда видно, что q (для случая излучения $L_R \approx L_{\text{рад}}$) соответствует среднему квадрату угла многократного рассеяния на единице длины, умноженному на скорость частицы и деленному на 8:

$$q = \frac{E_s^2 c}{8E^2 L}. \quad (28.137)$$

Угол излучения резонансных квантов связан с когерентной длиной соотношением (28.130). Следовательно, абсолютная величина s по порядку величины есть отношение угла излучения к углу многократного рассеяния на когерентной длине:

$$|s| = \sqrt{\frac{\theta_{\text{из}}^2}{4\bar{\theta}_s^2(l_{\text{кор}})}}. \quad (28.138)$$

Очевидно, что при $s \rightarrow \infty$ многократным рассеянием можно пренебречь, при $s \rightarrow 0$ имеет место противоположный случай. Функция $F(s)$ для положительных значений s соответствует функции, введенной Мигдалом (см. § 19), отличаясь от нее

только множителем $-\frac{1}{24s^2}$. Чтобы в этом убедиться, необходимо воспользоваться формулой (28.132) и при интегрировании выражены типа (28.129), произвести замену переменных

$$\sqrt{2i\omega q} \tau = x. \quad (28.139)$$

При совмещении контура интегрирования с действительной осью нужно соответствующим образом обходить точку $x = 0$. В этом случае

$$F(s > 0) = -\int_0^{\infty} \text{cth } x e^{-2sx} \sin 2sx \, dx + \frac{\pi}{4} = -\frac{\Phi(s > 0)}{24s^2} \quad (28.140)$$

(см. формулу (19.21)).

Найдем предельные значения $F(s)$. Из исследования выражения (28.134) (см. (19.23), (19.24) и рис. 31) легко получить

$$F(s) = -\frac{\pi}{2} \text{sign } l_{\text{ког}} + \frac{\pi}{2} - \frac{2q\omega}{3c^2} l_{\text{ког}}^2 \quad \text{при } |s| \gg 1, \quad (28.141)$$

$$F(s) = -\frac{\sqrt{q\omega} l_{\text{ког}}}{c} \quad \text{при } |s| \ll 1. \quad (28.142)$$

Формула (28.133) в этих предельных случаях принимает вид

$$d\dot{I}_\omega (|s| \gg 1) = -\frac{2e^2 d\omega}{\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{|J_r(B)|^2}{l_{\text{ког}}} \times \\ \times \left\{ -\frac{\pi}{2} \text{sign } l_{\text{ког}} + \frac{\pi}{2} - \frac{2q\omega}{3c^2} l_{\text{ког}}^2 \right\}, \quad (28.143)$$

$$d\dot{I}_\omega (|s| \ll 1) = \frac{2e^2 d\omega}{\pi} \frac{\sqrt{q\omega}}{c} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} |J_r(B)|^2. \quad (28.144)$$

Формулы (28.143) и (28.144) легко поддаются физической интерпретации.

Рассмотрим выражение (28.143). В пределе $|s| \rightarrow \infty$ для отрицательных значений когерентной длины ($s < 0$) получается формула (28.131). Для положительных значений $l_{\text{ког}}$ при $s \rightarrow \infty$, как и следовало ожидать, излучение отсутствует.

Добавочный малый член (третье слагаемое в фигурных скобках формулы (28.143)) дает отрицательный вклад в резонансное излучение (когда $l_{\text{ког}}$ отрицательно), что соответствует нарушению когерентного сложения из-за влияния многократного рассеяния. Однако то же самое слагаемое для положительных значений когерентной длины дает положительный вклад в излучение. Естественно эту часть интерпретировать как тормозное излучение в периодической среде. Рассматриваемое слагаемое при $B \rightarrow 0$ (следовательно и $r = 0$) в точности совпадает с формулой для поперечника тормозного излучения с учетом эффекта поляризации среды (см. (14.6) и (15.25)). При $B \neq 0$ тормозное излучение в периодической среде будет несколько иным по сравнению с тормозным излучением в однородной среде из-за наличия функций Бесселя в формуле (28.143) и отличия величины когерентной длины (28.117) в периодической среде от соответствующей величины для аморфной среды (см. формулу (6.16), (14.4)).

Нужно обратить внимание, что в рассмотренном предельном случае ($s \gg 1$) поправки, связанные с многократным рассеянием, будут малы по сравнению с резонансным излучением, если резонансное излучение начинается с $r = 1$. В противном случае из-за присутствия функций Бесселя вклад тормозного члена для малых r может превышать интенсивность резонансного излучения для больших гармоник.

Формула (28.144) описывает предельный случай сколь угодно больших рассеяний. Физически ясно, что мы должны получить в этом приближении формулу тормозного излучения, поскольку в этом предельном случае полностью нарушается условие когерентного суммирования и интенсивность тормозного излучения будет больше интенсивности резонансных квантов. Действительно, если условие $s \ll 1$ выполняется для всех значений r , то, суммируя ряд функций Бесселя, входящих в выражение (28.144), приходим к формуле Ландау — Померанчука — Мигдала (см. формулу (19.25)). Можно говорить, что в этом предельном случае влияние многократного рассеяния увеличивает резонансное излучение, хотя в действительности это увеличение есть результат появления тормозных квантов. На практике, по-ви-

димому, наиболее часто будет встречаться промежуточный случай, когда для некоторых значений r излучение следует формуле (28.143), а для других значений r излучение может быть больше (чем в отсутствии рассеяния) и дается формулой (28.144).

Рассмотренный выше пример излучения в косинусоидальной среде дает нам возможность рассчитать резонансное излучение с учетом рассеяния в произвольной периодической среде при небольших изменениях плотности. Для произвольной периодической среды входящий в экспоненту формулы (28.124) интеграл можно записать следующим образом:

$$\int_z^{z'} \kappa dz = \kappa_0 (z' - z) + \frac{\kappa_0}{2} \int_z^{z'} \varepsilon_1(z) dz, \quad (28.145)$$

где κ_0 определяется формулой (28.38) и рассматривается излучение под малыми углами $\cos \theta \approx 1$. Подставим в формулу (28.124) выражение $\varepsilon_1(z)$ в виде ряда Фурье (см. формулу (28.72)) и проинтегрируем по переменной z . Если выполняются условия

$$A_r = \frac{\omega l}{4\pi r c} a_r \ll 1 \quad B_r = \frac{\omega l}{4\pi r c} b_r \ll 1, \quad (28.146)$$

экспоненту выражения (28.124) можно разложить в ряд по A_r и B_r и ограничиться первыми тремя членами.

Дальнейший анализ полученных таким образом формул полностью следует проведенным выше расчетам для случая косинусоидальной среды. В результате получаем выражение для излученной энергии в единицу времени:

$$d\dot{I}_\omega = -\frac{e^2 d\omega}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{A_r^2 + B_r^2}{l_{\text{ког}}} F(s). \quad (28.147)$$

Для компактности формул суммирование по r распространено по всем r , включая $r = 0$. Для этого приятно, что $A_{-r} = A_r$, $B_{-r} = B_r$. Кроме того, необходимо выбрать, что $A_0^2 + B_0^2 = 4 - 2 \sum_{r'=1}^{\infty} (A_{r'}^2 + B_{r'}^2)$. Когда рассеянием можно пренебречь,

то $F(s) = \pi$ для отрицательных значений $l_{\text{ког}}$ и $F(s) = 0$ для положительных значений. В этом случае суммирование по r нужно распространить только на положительные значения r , и формула (28.147) совпадает с формулой (28.76) в пределе больших частот и релятивистских энергий. Используя следующий член разложения $F(s)$ (см. формулу (28.141)), можно получить выражение соответствующее интенсивности тормозного излучения в произвольной периодической среде. Общая формула для случая $|s| \gg 1$ имеет следующий вид:

$$dI_{\omega} = -\frac{e^2 d\omega}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{A_r^2 + B_r^2}{l_{\text{ког}}} \left\{ -\frac{\pi}{2} \text{signs} + \frac{\pi}{2} - \frac{2q\omega}{3c^2} l_{\text{ког}}^2 \right\}. \quad (28.148)$$

В противоположном случае при $|s| \ll 1$ основной вклад определяется тормозным излучением (см. (19.25)):

$$dI_{\omega} = \frac{2e^2 \sqrt{q\omega} d\omega}{\pi c}. \quad (28.149)$$

Пример: Рассмотреть излучение в слоистой среде с учетом рассеяния при малом изменении плотности.

Применим формулу (28.147) для нахождения излучения в слоистой среде, составленной из двух чередующихся пластинок с толщинами l_1 и l_2 . Диэлектрическую проницаемость можно записать в виде (см. формулы (28.7); (28.72))

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \frac{N_1 Z_1 l_1 + N_2 Z_2 l_2}{l} - \left[\theta(z) - \frac{l_1 - l_2}{l} \right] \frac{2\pi e^2}{m\omega^2} (N_1 Z_1 - N_2 Z_2), \quad (28.150)$$

где функция $\theta(z)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta(z) &= 1, & 0 < z < l_1; & & l < z < l + l_1; & \dots \\ \theta(z) &= -1, & l_1 < z < l; & & l + l_1 < z < 2l; & \dots \end{aligned}$$

Разложение $\theta(z)$ в ряд Фурье определяет коэффициенты Фурье переменной части диэлектрической постоянной. В последующих формулах величина ω_0 будет определяться формулой (28.87). Коэффициенты Фурье функции $\frac{2\pi e^2}{m\omega^2} (N_1 Z_1 - N_2 Z_2) \left[\theta(z) - \frac{l_1 - l_2}{l} \right]$ определяются следующими выражениями:

$$a_r = \frac{4e^2 (N_1 Z_1 - N_2 Z_2)}{m\omega^2 r} \sin \frac{2\pi l_1 r}{l}, \quad |r| \geq 1; \quad (28.151)$$

$$b_r = -\frac{8e^2 (N_1 Z_1 - N_2 Z_2)}{m\omega^2 r} \sin^2 \frac{\pi r l_1}{l}, \quad |r| \geq 1. \quad (28.152)$$

Подстановка выражений (28.151), (28.152), (28.146) в формулу (28.147) приводит к следующему результату для числа излученных квантов в единицу времени:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{I}_\omega}{\hbar\omega} = & -\frac{d\omega}{137\pi} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) F_0(s) - \\ & -\frac{d\omega}{\omega^2} \frac{(N_1 Z_1 - N_2 Z_2)^2 l^2 r_0^2 c^2}{137\pi^3} \times \\ & \times \sum_{r \neq 0} \frac{\sin^2 \frac{\pi r l_1}{l}}{r^4} \left\{ F(s) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{4\pi r c}{l\omega} \right) - \right. \\ & \left. - F_0(s) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right\}, \quad (28.153) \end{aligned}$$

где через $F_0(s)$ обозначена функция $F(s)$ при значении r (входящем в параметр s), равном нулю.

Формула (28.153) состоит из двух различных по своему характеру членов.

Первое слагаемое соответствует тормозному излучению и дается обычным поперечником тормозного излучения с учетом эффекта плотности среды. В выражение для функции $F_0(s)$ входит когерентная длина, в которой нужно положить $r = 0$.

Второе слагаемое содержит суммирование по всем значениям r —положительным и отрицательным, за исключением $r = 0$. Для области резонансных квантов когерентная длина отрицательна (при этом всегда выполняется условие $r_1 > 0$) и, если параметр s велик, основной член совпадает с формулами для интенсивности резонансного излучения (см. (28.77) и (28.98)). В случае малых изменений плотности это излучение (несмотря на неравенства (28.146)) при $s \gg 1$ может значительно превышать тормозное излучение (см. (28.141)).

Для области тормозных квантов когерентная длина положительна и добавочный член в разложении формулы (28.141) приводит к дополнительному тормозному излучению. По сравнению с первым слагаемым ($r = 0$) добавочное тормозное излучение будет мало (см. условие (28.146) и формулы (28.141), (28.147)). В области, где велико многократное рассеяние ($|s| \ll 1$), вклад будет давать только первое слагаемое ($r = 0$) формулы (28.153). Обратим внимание, что во все формулы (см., например, выражение для ω_0) под средним числом электронов понимается величина (28.85).

Приближение состоит в том, что величина для лавинной длины, входящей в параметр q , предполагается мало меняющейся вдоль среды, т. е. пренебрегается изменениями плотности рассеивающих центров вдоль траектории частицы. Поскольку рассеяние пропорционально NZ^2 , а резонансное излучение пропорционально разности диэлектрических постоянных среды, то всегда можно придумать такую искусственную среду, для которой принятое приближение выполняется. Наиболее серьезным ограничением для практического использования формулы (28.153) являются неравенства (28.146), которые после использования выражений для фурье-компонент переменной части диэлектрической постоянной (28.151), (28.152) приводят к ограничению на нижний предел излучаемой частоты:

$$\omega > \frac{\omega_0^2 l}{2\pi^2 cr} \left[\frac{(N_1 Z_1 - N_2 Z_2) l}{N_1 Z_1 l_1 + N_2 Z_2 l_2} \right]. \quad (28.154)$$

Если неравенства (28.146) или (28.154) не выполняются, то изложенная методика расчета становится неприменимой.

Пример: Рассмотрим, используя квазиклассический метод расчета, влияние многократного рассеяния на переходное излучение в пластинке при малом изменении плотности.

Обозначим через $N_1 Z_1$ плотность электронов в пластинке, а через $N_2 Z_2$ плотность электронов остальной среды. Толщину пластинки обозначим через l_1 и предположим, что

$$\frac{N_1 Z_1 - N_2 Z_2}{N_2 Z_2} \ll 1.$$

Для получения искомого выражения в формуле (28.153) устремим $l_2 \rightarrow \infty$. В этом случае суммирование по r во втором члене формулы (28.153) можно заменить на интегрирование по непрерывному параметру a :

$$a = \frac{2\pi r c}{l}.$$

В результате число квантов, излученных на длине одной пластинки (интенсивность тормозного излучения вне пластинки не выписывается) будет равно:

$$\begin{aligned} \frac{dI_\omega}{\hbar\omega} = & - \frac{d\omega F_0(s) l_1}{137\pi c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) - \\ & - \frac{8}{137} (N_1 Z_1 - N_2 Z_2)^2 r_0^2 c^4 \frac{d\omega}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} da \frac{\sin^2 \frac{al_1}{2c}}{a^4} \times \\ & \times \left\{ F(s) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{2a}{\omega} \right) - F_0(s) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (28.155)$$

Интеграл по a берется в смысле главного значения, поскольку суммирование по r в формуле (28.153) распространено на все значения r , кроме $r = 0$. При малых значениях параметра s второй член формулы (28.155) стремится к нулю и полное излучение определяется в первом приближении обычным тормозным поперечником.

При больших значениях параметра s второй член формулы (28.155) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dI_\omega}{\hbar\omega} &= \frac{8\pi(N_1Z_1 - N_2Z_2)^2 r_0^2 c^2 d\omega}{137\omega^5} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{\theta^3 d\theta \sin^2 \left[\frac{\omega l_1}{2c} \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} + \frac{\theta^2}{2} \right) \right]}{\left(1 - \frac{v}{c} + \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} + \frac{\theta^2}{2} \right)^4} + \\ &+ \frac{128}{3 \cdot 137} \frac{(N_1Z_1 - N_2Z_2)^2 r_0^2 c^4 q d\omega}{\omega^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{2a}{\omega} \right)} \frac{\sin^2 \frac{al_1}{2c}}{a^3}. \quad (28.155') \end{aligned}$$

Легко видеть, что первое слагаемое формулы (28.155') совпадает с формулой для переходного излучения в пластинке в пределе малых изменений плотности (сравни с формулой (28.42')). Второе слагаемое формулы (28.155') появляется в результате многократного рассеяния (точное решение в случае произвольного изменения плотности получено в работе [19a], результаты которой, однако, не поддаются интерпретации).

з) Излучение в трехмерной периодической среде

Квазиклассический метод расчета неприменим для вычисления излучения в заднюю полусферу. Он неприменим также и для расчета излучения, длина волны которого сравнима или больше периода решетки. Поэтому для того, чтобы избежать этих двух ограничений, мы будем пользоваться в настоящем разделе теорией возмущений [4]. В частности, для расчета интенсивности частот, превышающих атомные ча-

стоты, в среде с длиной периода, меньшей $l \sim 10^{-5} Z^{-1/3} \text{ см}$ (см. формулу (28.12)), нужно пользоваться приводимым ниже расчетом. Постоянную составляющую диэлектрической проницаемости обозначим через ϵ_0 . Разложим переменную часть диэлектрической проницаемости ϵ_1 в трехмерный ряд Фурье:

$$\epsilon_1(\vec{r}) = \sum_{\vec{b}} n_{\vec{b}} e^{2i\vec{b}\vec{r}}. \quad (28.156)$$

Положения атомов определяются вектором $\vec{r} = n\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + l\vec{a}_3$, где n, m, l — целые числа, а $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — базисные векторы решетки.

Суммирование в (28.156) проводится по всем допустимым векторам \vec{b} (\vec{b} — вектор обратной решетки). Электромагнитные поля в нулевом приближении в однородной среде (при $\epsilon_1 = 0$) даются формулами § 21, а также (для равномерного движения) формулами § 30 (см. формулу (30.2)). Следующее приближение для электромагнитных полей дается формулами теории возмущений (см. формулу (30.12)). Подставляя в упомянутую формулу $\epsilon_1(\vec{r})$, мы получим для поля излучения на расстоянии R_0 от рассеивающего объема следующее выражение:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\omega}(\vec{R}_0) = & \frac{e}{\epsilon R_0} \sum_{\vec{b}} n_{\vec{b}} \left[\vec{k}' \left[\vec{k}' \left(\frac{\omega \vec{v}}{c^2} - \frac{\vec{k}' - 2\vec{b}}{\epsilon_0} \right) \right] \right] \times \\ & \times \frac{\partial [\omega - (\vec{k}' - 2\vec{b}) \vec{v}]}{(\vec{k}' - 2\vec{b})^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0}. \end{aligned} \quad (28.157)$$

Угол излучения θ (угол между \vec{k}' и \vec{v}) определяется нулем аргумента дельта-функции в выражении (28.157) (сравни с формулой (28.6)):

$$\cos \theta = \frac{c}{v \sqrt{\epsilon_0}} + \frac{2(\vec{b}\vec{v})c}{\omega v \sqrt{\epsilon_0}}. \quad (28.158)$$

Заметим, что в условие (28.158) входит только компонента скорости вдоль вектора \vec{b} . Каждый вектор обратной решетки дает вклад в интенсивность излучения, пропорциональный квадрату $n_{\vec{b}}$. Из условия $|\cos \theta| \leq 1$ мы, как и прежде, получим интервал излученных частот. Например, для частот, превышающих атомные, когда ε имеет вид (28.8), интервал излученных частот дается условием (28.9) (везде в цитируемых формулах нужно заменить величину $\frac{\pi r}{l}$ на $\frac{(\vec{b}\vec{v})}{v}$).

Рассчитаем энергию, излученную в интервале частот $d\omega$ и в интервале телесного угла $d\Omega$ при прохождении длины vT :

$$dI_{\omega, \vec{n}} = c \sqrt{\varepsilon_0} |\vec{E}'_{\omega}|^2 R_0^2 d\omega d\Omega; \quad (28.159)$$

$$dI_{\omega, \vec{n}} = \frac{e^2 \omega^2 T}{2\pi \varepsilon_0^2 c} \sum_{\vec{b}} n_{\vec{b}}^2 \left| \left[\vec{k}' \left(\frac{\omega \varepsilon}{c^2} \vec{v} + 2\vec{b} \right) \right] \right|^2 \times \\ \times \frac{\delta[\omega - (\vec{k}' - 2\vec{b}) \vec{v}]}{\left[(\vec{k}' - 2\vec{b})^2 - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \omega^2 \right]^2} d\omega d\Omega. \quad (28.160)$$

При получении (28.160) из (28.159) одну дельта-функцию мы заменили на $\frac{vT}{2\pi}$, поскольку излученная энергия будет, естественно, пропорциональна длине пробега vT .

Пример: Рассмотреть излучение в косинусоидальной среде.

Получим из формулы (28.160) исследованный ранее случай излучения при движении вдоль одномерной периодической среды. Рассмотрим простоты ради случай, когда переменная часть диэлектрической проницаемости меняется по закону косинуса. Для получения результата нужно в выражении (28.156) выбрать $b_x = b_y = 0$,

$$b_{z, 1} = \frac{\pi}{l}, \quad b_{z, -1} = -\frac{\pi}{l}; \quad n_b = \frac{\Delta}{2},$$

тогда

$$\varepsilon' = \frac{\Delta}{2} \left(e^{2i \frac{\pi z}{l}} + e^{-2i \frac{\pi z}{l}} \right). \quad (28.161)$$

Из (28.160) для излучения гармоник $r = \pm 1$ получим следующее выражение:

$$dI_{\omega, \pm 1} = \frac{e^2 \omega^3 v T l^2 \Delta^2}{64 \pi^2 c^4 \varepsilon_0} \frac{\left(1 \pm \frac{2\pi c^2}{l \omega \varepsilon_0 v} \right)^2}{\left(\frac{c}{v \sqrt{\varepsilon_0}} \pm \frac{\pi c}{l \omega \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2} \times \\ \times \left[1 - \left(\frac{c}{v \sqrt{\varepsilon_0}} \pm \frac{2\pi c}{l \omega \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2 \right] d\omega. \quad (28.162)$$

Сравним это выражение с формулой (28.49), полученной в предположении $\lambda \ll l$. Для этого предположим, что $B = \frac{L \omega \Delta}{4\pi \varepsilon^{1/2} \cos \theta} \ll 1$. Это, как мы видели, соответствует теории возмущений. Ограничимся гармониками $r = \pm 1$. Тогда (28.49) можно переписать в виде

$$dI_{\omega, \pm 1} = \frac{e^2 v T l^2 \Delta^2 \omega^3 d\omega}{64 \pi^2 c^4 \varepsilon_0} \frac{1 - \left(\frac{c}{v \sqrt{\varepsilon_0}} \pm \frac{2\pi c}{l \omega \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2}{\left(\frac{c}{v \sqrt{\varepsilon_0}} \pm \frac{2\pi c}{l \omega \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2}. \quad (28.163)$$

Мы видим, что (28.163) и (28.162) совпадают при условии $\lambda \ll l$ и $\frac{c}{v \sqrt{\varepsilon_0}} \lesssim 1$.

Интересно отметить, что при $l\omega = \pi v$ знаменатель выражения (28.162) становится малым и, следовательно, излучение возрастает. В этом случае угол излучения кванта равен $\cos \theta = -\frac{c}{v \sqrt{\varepsilon_0}}$, т. е. этот максимум может наступать уже после наступления порога для черенковского излучения. Излучение в этом случае направлено назад.

§ 29. ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО РЕЗОНАНСНОМУ ИЗЛУЧЕНИЮ

а) Введение

Резонансное излучение было впервые обнаружено в 1964 году группой Ф. Р. Арутюняна [21, 22]. С помощью этого

излучения детектировались μ -мезоны горизонтального потока космических лучей с энергией $700 \div 6000$ Гэв. В дальнейшем этими же авторами [23, 24] были измерены подробные характеристики излучения, возникающего при движении электронов с энергиями $250 \div 600$ Мэв через различные слоистые среды.

Остановимся несколько подробнее на возможностях применения резонансного излучения для детектирования частиц высоких энергий [2, 21 — 25].

Излучение с перечисленными выше свойствами (см. § 28) генерируется только релятивистскими частицами. При относительно малых энергиях частица излучает на гармониках с большими r . При постепенном увеличении энергии излучающей частицы добавляется излучение на новых гармониках с меньшими r . Если энергия частиц превышает пороговую энергию для первой гармоники, которую мы будем обозначать в дальнейшем через $E_{\text{пор}}$ (см. формулу (28.90) при $r = 1$), то дальнейшего добавления гармоник не происходит, и интенсивность излучения достигает насыщения. Потери энергии на резонансное излучение в этом случае составляют примерно 10^4 эв на 1 г/см^2 для периодической среды, состоящей из твердых пластинок, расположенных в газе.

Дифференциальный спектр излученных квантов на каждой гармонике можно представить в форме кривой, имеющей максимум примерно при $\omega \approx 1,5\omega_{\text{min}}$ и пересекающей ось абсцисс при ω_{min} и ω_{max} . Число квантов за максимумом кривой резко падает.

Для иллюстрации на рис. 58а приводится дифференциальный спектр резонансного излучения для одного конкретного случая ($E = 2,2E_{\text{пор}}$, $\alpha = 1$). На рисунке показаны спектры резонансного излучения для нескольких гармоник; верхняя кривая дает суммарный дифференциальный спектр для всех гармоник при $E = 5E_{\text{пор}}$. По оси абсцисс отложена частота излучения ω' (ω' — есть частота излучения ω , выраженная в единицах $\omega_{1 \text{ min}}$), по оси ординат — величина $l_1 m$. На рис. 58б приводятся аналогичные кривые при $\alpha = 5$. Необходимо отметить, что слоистую среду, состоящую из двух различных твердых пластинок, осуществить проще, чем периодически

расположить пластинки в газе. Однако, чтобы достичь случая $p \approx 1$, нужно брать твердые пластинки с резко отличающимися атомными номерами (легкое и тяжелое вещества). В тяжелых веществах фотопоглощение резонансных квантов может резко уменьшать выход интенсивности. В случае же двух веществ с малыми атомными номерами p будет порядка $0,3 \div 0,7$, и интенсивность излучения (которая для малых p пропорциональна $\sim p^2$) уменьшается по сравнению со случаем пластинок, расположенных в газе. Имея в распоряжении интенсивный пучок заряженных частиц от ускорителя, предпочтительнее с чисто экспериментальной точки зрения создавать слоистую среду из двух различных твердых пластинок. В космических же лучах для увеличения выхода излучения следует брать среду из пластинок, расположенных в газе (в последующих расчетах принято $p = 0,99$). При $p \approx 1$ величина $\omega_{1\min}$ зависит только от толщины пластинки и от плотности электронов в пластинке.

В табл. V приводятся значения $\hbar\omega_{1\min}$ для некоторых веществ. Подчеркнем, что выбор толщины и вещества пластинки полностью определяет ту область частот, на которой ведется детектирование резонансного излучения. В той же таблице приводятся значения пороговой энергии (при $r = 1$ и $\alpha = 1$). Пороговая энергия зависит, помимо l_1 и $N_1 Z_1$, от расстояния между пластинками как $\sqrt{1 + \alpha}$. Частицы с энергией, превышающей $E_{1\text{пор}}/mc^2$, дадут фотоны с энергией, превышающей $\hbar\omega_{1\min}$, частицы же с меньшей энергией будут давать менее жесткие кванты.

Таблица V

Вещество	$10^{-23} N_1 Z_1$ см ⁻³	$\hbar\omega_{1\min} = 5,55 \cdot 10^{-24} \times$ $\times l_1 N_1 Z_1$ Мэв	$\frac{10^{-5}}{l_1} \left(\frac{E}{mc^2} \right)_{1\text{пор}}$ при $\alpha = 1$
Бумага	2 ÷ 3	(1,1 ÷ 1,7) l_1	1,6 ÷ 2,4
Полиэтилен	2,8	1,53 l_1	2,21
Be	4,9	2,72 l_1	2,95
Al	7,8	4,33 l_1	3,72

На рис. 59 приводятся дифференциальные спектры излучения, образуемые μ -мезонами разных энергий в слоистой среде, состоящей из листов бумаги толщиной $l_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ см, расположенных в воздухе на расстоянии $l_2 = 1$ см друг от друга. По оси ординат отложено число излученных квантов на единицу длины слоистого вещества. Как видно из этих спектров, если экспериментальная установка будет регистрировать фотоны с энергиями выше заданной, то каждой частице с определенной энергией будет соответствовать свое число зарегистрированных фотонов. Это свойство используется в эксперименте [21, 22] для регистрации μ -мезонов высоких энергий. Очевидно, что область энергий детектируемых μ -мезонов можно варьировать параметрами слоистой среды и выбором пороговой энергии γ -квантов, выше которой они детектируются. Такой прибор аналогичен черенковскому счетчику как в смысле направленности, так и его пороговых свойств, но который в отличие от черенковского счетчика может работать в области больших значений β , отличных от единицы в восьмом-десятом знаке.

На рис. 60 приводятся кривые зависимости интегрального числа фотонов от энергии частицы в случае $\alpha = 1$ для $\omega' > 0,1$, $\omega' > 1$ и $\omega' > 3$. По оси абсцисс отложена энергия начальной частицы в единицах пороговой энергии для первой гармоники ($E/E_{\text{пор}}$), а по оси ординат — число излученных квантов в 1 см слоистого вещества, умноженное на толщину пластинки l_1 . Представленные кривые указывают на весьма резкую зависимость числа резонансных квантов от энергии частицы. Чем больше энергия детектируемых фотонов, тем больше энергия первичной частицы, при которой проявляется отмеченная резкая зависимость числа квантов от энергии частицы. Кривые для других значений α аналогичны этим, но число квантов резонансного излучения на 1 см слоистого вещества оказывается другим. С увеличением α число квантов на единицу пути сначала увеличивается, вплоть до $\alpha \approx 3 \div 5$, а затем падает, при больших α , примерно, как $1/(1 + \alpha)$.

Конкретная экспериментальная установка чувствительна к определенному интервалу энергий γ -квантов. Поэтому надо исходить из заданной энергии квантов, которые возникают

в слоистом веществе и могут детектироваться установкой. Если выбрать область частот $\omega' > 1$, то это будет означать, что мы имеем дело с квантами, энергия которых превышает $\omega_{1\min}$. Можно выбрать область $\omega' > 0,1$ или $\omega' > 10$, однако, как показывает анализ, предпочтительнее работать в области $\omega' \simeq 1,2 \div 1,6$. В этой области получается максимальное число квантов определенной энергии на 1 см слоистой среды, при достаточно резкой зависимости числа квантов от энергии частицы.

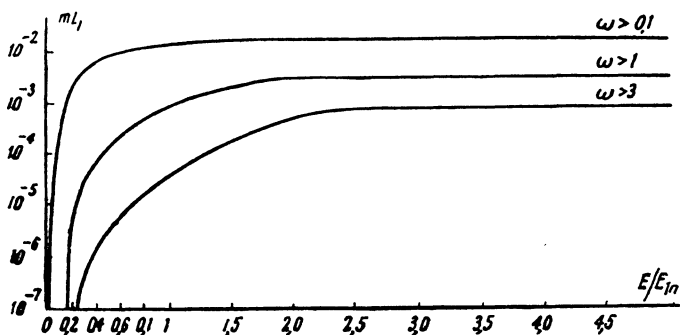


Рис. 60. Зависимость интегрального числа квантов резонансного излучения ml_1 для различных ω' при $\alpha = 1$ от энергии частицы.

Если выбрать $\omega' = 2$, но вести наблюдение на квантах той же энергии, что и при $\omega' = 1$, то толщину пластинки l_1 можно уменьшить вдвое. Пороговая энергия соответственно уменьшится вдвое. В противоположном случае картина будет обратной, например, при $\omega' = 0,1$ толщину пластинки l_1 (по сравнению со случаем $\omega' = 1$) надо увеличить в 10 раз; пороговая энергия увеличится во столько же раз. Выбором области ω' практически определяется весь дальнейший анализ.

Резонансное излучение испускается под очень малыми углами относительно направления движения первоначальной частицы (формула (28.6')). При детектировании частиц сверхвысоких энергий космических лучей регистрация излучения может быть осуществлена несколькими путями, каждый из которых обсуждается в отдельности.

б) Метод энерговыделения

Заряженная частица в сопровождении γ -квантов резонансного излучения после выхода из слоистой среды проходит через детектор, который реагирует на количество выделенной в нем энергии. Если выбрать детектор таким, чтобы излучение в определенной области частот в нем поглотилось, то можно по количеству энерговыделения установить энергию частицы (в области энергий начальной частицей, не достигшей эффекта насыщения) или, по крайней мере, ее зарегистрировать. Для этой цели следует выбрать поглотитель детектора с большим Z , так как при этом его поглощающая способность к излучению в сильной степени возрастает (сечение фотозффекта пропорционально Z^5), тогда как энергия, выделяемая заряженной частицей, почти не изменяется. Разумные оценки получаются для пропорционального счетчика, наполненного тяжелым газом. Оптимальная область энергий γ -квантов резонансного излучения, которые еще выходят из слоистой среды и существенным образом поглощаются в газе такого пропорционального счетчика, находится в интервале от 8 до 15 кэв. Вследствие этого слоистую среду следует собирать из вещества с минимальным Z (например, из бериллия).

Если обозначить через J отношение энергии, выделяемой γ -квантами резонансного излучения, к энергии, выделяемой заряженной частицей в пропорциональном счетчике, наполненном ксеноном, то зависимость величины J от энергии частицы будет иметь вид, представленный на рис. 61. Кривые рассчитаны для слоистой среды, состоящей из пластинок бериллия толщиной $l_1 = 3,1 \cdot 10^{-3}$ см, расположенных в воздухе, для трех различных значений α (полная длина слоистой среды и количество ксенона в пропорциональном счетчике выбираются равными соответственно $\frac{1}{\mu_{\text{Be}}}$ ($1 + \alpha$) и

$\frac{1}{\mu_{\text{Xe}}}$, где μ_{Be} и μ_{Xe} — коэффициенты поглощения Be и Xe для γ -квантов указанного интервала энергий). Из кривых видно, что J увеличивается с возрастанием α . Чрезмерное увеличе-

ние α в дальнейшем не увеличивает значения J , но приводит к громоздкости слоистой среды. Этот метод пригоден для измерения энергий частиц в области $\frac{E}{mc^2} \approx 2 \cdot 10^2 \div 2 \cdot 10^3$ и их детектирования с энергиями, выше указанных. Верхний и нижний пределы ограничены тем, что γ -кванты с энергиями,

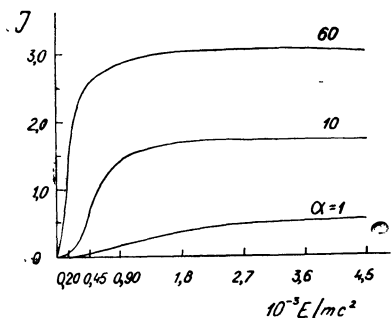


Рис. 61. Зависимость величины J от энергии μ -мезона для различных α .

выше, чем $8 \div 15$ кэв, относительно мало поглощаются в газе пропорционального счетчика, а с энергиями ниже — поглощаются в слоистой среде и не выходят из нее. Метод является сложным из-за трудностей изготовления вышеупомянутой слоистой среды.

в) Метод характеристического излучения

Частица и образованное ею излучение после выхода из слоистой среды проходят через газ-поглотитель. γ -кванты с энергиями выше, чем энергия связи электронов K -оболочки атомов данного газа — I_K , вызывают фотоэффект; газ при этом испускает характеристические кванты с энергией I_K . Коэффициент поглощения газа μ для характеристического излучения в $5 \div 7$ раз меньше, чем для проходящего излучения (это имеет место в основном для квантов с энергиями, слегка превышающими величину I_K). Поскольку характеристическое излучение распределено по углам изотропно, то его можно регистрировать в направлениях, отличных от направления движения частицы. В качестве поглотителя удобно использовать такие газы, как ксенон или криптон ($I_{K, Xe} = 35$ кэв, $I_{K, Kr} = 14,3$ кэв). Можно использовать также пластинки из

твердого вещества соответствующей толщины. При этом имеется возможность увеличить значение I_k до ~ 100 кэв. Слоистое вещество, как и в методе энерговыделения, должно выбираться с малым значением Z (бумага, полиэтилен и т. д.), поскольку энергии используемых квантов резонансного излучения в этом методе достигают $\sim 150 \div 200$ кэв.

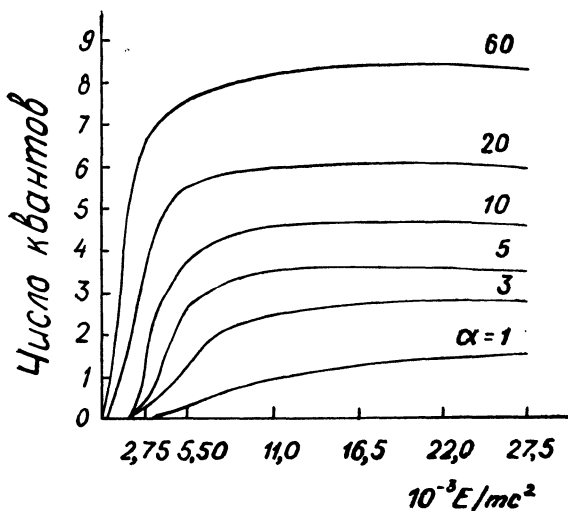


Рис. 62. Зависимость числа квантов характеристического излучения ксенона от энергии частицы для различных значений α .

Образующиеся характеристические γ -кванты с энергией I_k можно регистрировать с боковых сторон (вне направления движения первоначальной частицы) с помощью кристаллических сцинтилляторов, например NaJ(Tl), эффективность регистрации которых для квантов с энергиями до 100 кэв равна почти 100%. Для этой цели можно использовать также газовые пропорциональные счетчики под большим давлением.

Таким образом, экспериментальная установка представляет собой слоистую среду, за которой располагается газ-поглотитель. С боковых сторон объема газа-поглотителя устанавливаются сцинтилляторы, которые регистрируют характеристическое излучение.

На рис. 62 для различных α приводятся кривые зависимости числа характеристических квантов ксенона ($I_k \approx 35$ кэв)

от энергии частицы для слоистой среды, состоящей из полиэтиленовых пленок толщиной $l_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ см, расположенных в воздухе (число слоев равно 300). Из кривых видно, что это число квантов вполне достаточно для детектирования частицы.

Настоящий метод пригоден для измерения энергий частицы в области $\frac{E}{mc^2} \approx 5 \cdot 10^2 \div 10^4$ и детектирования частицы с энергией, выше указанной.

г) Метод комптоновского рассеяния

В двух предыдущих методах используется излучение, выходящее из слоистой среды в направлении движения частицы. Длина слоистой среды в этих случаях может быть доведена до определенного предела, выше которого число выходящих вперед резонансных квантов больше не возрастает, поскольку излучение поглощается из-за комптоновского рассеяния. Однако многократное комптоновское рассеяние будет приводить к тому, что основная часть излучения, образованного частицей, будет выходить с боковых сторон слоистой среды. В этом случае γ -кванты можно детектировать с боковых сторон одним из вышеупомянутых методов и длина слоистой среды будет ограничиваться лишь техническими возможностями и другими видами поглощения.

В данном методе энергии γ -квантов необходимо выбрать такими, чтобы фотоэффект был ничтожно малым по сравнению с комптон-эффектом. Например, для слоистой среды, состоящей из алюминиевых пластинок, расположенных в воздухе ($l_1 = 0,1$ см, $\alpha = 1$), получается $3 \cdot 10^{-2}$ квантов на 1 см слоистой среды, каждый с энергией свыше 0,5 Мэв. Для пластинок из бериллия ($l_1 = 3,24 \cdot 10^{-2}$ см, $\alpha = 1$) получается $9,23 \cdot 10^{-2}$ квантов с энергией свыше 0,1 Мэв. Очевидно, что слоистая среда общей протяженностью до ~ 100 см вполне достаточна для регистрации частицы с большой эффективностью. Поскольку регистрация резонансных квантов не связана с их поглощением вдоль пути частицы, то этим методом можно детектировать частицы в очень широком диапазоне энергий.

Из всех перечисленных методов наиболее удобным, с экспериментальной точки зрения, является, по нашему мнению, метод характеристического излучения. Перейдем к описанию эксперимента, который был осуществлен именно этим методом.

д) Эксперимент с μ -мезонами

Схема экспериментальной установки приводится на рис. 63. Слоистая среда (СС) представляет собой 300 слоев бумаги, толщиной $l_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ см каждый, расположенных в воздухе на расстоянии $l_2 = 1$ см друг от друга. Полная протяженность слоистой среды равна 306 см. Выбор бумаги ($Z \approx 6$)

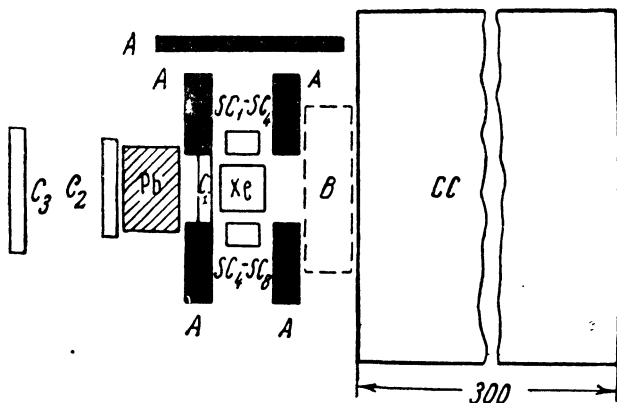


Рис. 63. Схема экспериментальной установки.

обусловлен малым поглощением излучения, образованного частицей, а также простотой изготовления слоистой среды больших поперечных размеров. В эксперименте поперечные размеры слоистой среды были равны 200×180 см². Для используемой слоистой среды $E_{\text{пор}} = 2,57 \cdot 10^4$ мс² и $\omega_{\text{imin}} = 36$ кэв. Дифференциальный спектр излучения, образуемый μ -мезонами различных энергий, приводится на рис. 59.

Зависимость среднего числа квантов \bar{n} с энергией $\hbar\omega \geq 35$ кэв от энергии μ -мезонов E (выраженной в Гэв) для указанной выше слоистой среды (без учета поглощения в са-

мой слоистой среде) приводится на рис. 64. Максимальное число γ -квантов при этом достигает 11.

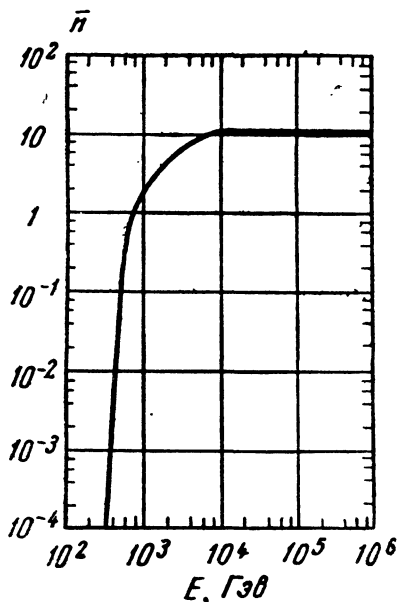


Рис. 64. Зависимость среднего числа квантов резонансного излучения с энергиями выше, чем 35 кэв, от энергии μ -мезона E .

Для генерации излучения в слоистой среде использовались μ -мезоны космического излучения, заключенные в интервале зенитных углов $73-90^\circ$. Преимущество использования горизонтального потока μ -мезонов космического излучения заключается в том, что в нем, в отличие от вертикального потока, меньше интенсивность частиц малых энергий ($E < 400$ Гэв), которые могут создать фоновое характеристическое излучение в газе-поглотителе. μ -мезоны регистрировались телескопом, состоящим из трех совпадательных рядов счетчиков Гейгера — Мюллера C_1 , C_2 и C_3 . Ливни космических лучей исключались антисовпадательными рядами счетчиков (A), а электронная компонента космического излучения с помощью свинцового фильтра (Pb) толщиной 67 рад. ед. длины, расположенного между C_1 и C_2 , а также веществом в 50 рад. ед. длины, расположенным перед экспериментальной установкой. Протоны могут образовать идентичное излучение в сло-

стой среде, но их энергия при этом должна быть в $\frac{m_p}{m_\mu}$ раз больше, чем энергия μ -мезонов. Кроме того, в горизонтальном потоке на высоте 1000 м над уровнем моря практически должны отсутствовать протоны и π -мезоны столь высоких энергий из-за большого количества вещества (до 40 кг/см² при зенитном угле 90°), проходимого ими.

В качестве газа-поглотителя использовался ксенон (Xe). Энергия связи электронов в *K*-оболочке атома ксенона равна $I_K \approx 35$ кэв. Характеристическое излучение с такой энергией, образованное в Xe, регистрировалось в двух направлениях (вверх и вниз) двумя группами ($SC_1 \div SC_4$ и $SC_5 \div SC_8$) кристаллических сцинтилляторов NaJ(Tl). Обе группы были включены на совпадение, что позволяло регистрировать не менее двух γ -квантов одновременно. Такое включение двух групп сцинтилляторов уменьшает вероятность регистрации фотонов характеристического излучения, образуемого непосредственно заряженной частицей в Xe. Установка регистрирует μ -мезон одновременно с появлением, по крайней мере, двух характеристических квантов. Число зарегистрированных γ -квантов фиксируется сцинтилляционным годоскопом.

Некоторая часть γ -квантов, образованных в слоистой среде, поглощается в ней же. Выбранная полная длина слоистой среды (306 см) является оптимальной, поскольку дальнейшее ее увеличение ограничено влиянием поглощения. Кроме того, не все γ -кванты, вышедшие из слоистой среды, вызывают фотоэффект в Xe. Обе эти причины приводят к тому, что 66% общего числа γ -квантов, образуемых в слоистой среде (см. рис. 64), теряются бесполезно и только 34% их превращается в характеристические γ -кванты с энергией $I_K \approx 35$ кэв. Поскольку абсолютное число этих γ -квантов мало, то следует учитывать флуктуации излучения и поглощения.

На рис. 65 приводится вычисленная зависимость эффективности (η) регистрации μ -мезона от его энергии E . Кривая эффективности имеет резкий ход с изменением энергии μ -мезона. Максимальная эффективность достигает 16% при $E \approx 7 \cdot 10^3$ Гэв.

Основные измерения периодически чередовались с контрольными, во время которых между слоистой средой и ксе-

ноновым контейнером помещался поглотитель (В) из оргстекла толщиной $11,5 \text{ г/см}^2$ (см. рис. 63). В таком поглотителе практически должно поглотиться излучение, образованное в слоистой среде, тогда как любое фоновое излучение остается таким же, как в основных измерениях (оргстекло является веществом, эквивалентным бумаге).

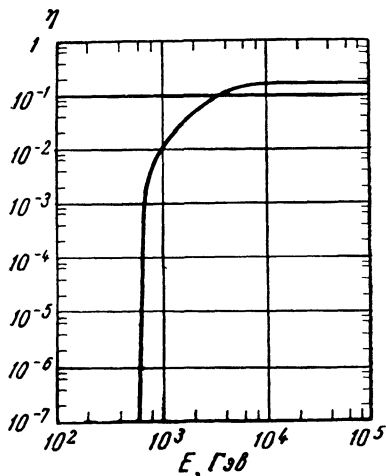


Рис. 65. Зависимость эффективности (η) регистрации μ -мезона от его энергии E .

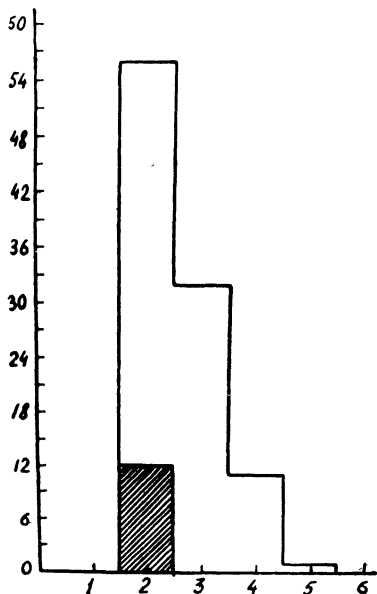
За 7300 часов основных измерений было зарегистрировано 100 событий, и, следовательно, среднее время между двумя последовательно зарегистрированными событиями составляло 73 часа. Распределение событий по числу зарегистрированных γ -квантов в каждом событии по данным сцинтилляционного годоскопа приводится на рис. 66.

За 1800 часов контрольных измерений было зарегистрировано всего три события, каждое из которых было зафиксировано только двумя сцинтилляторами. Это фоновое число событий, пересчитанное на полное время основных измерений, приводится на рис. 66 отдельно (заштрихованная часть) и составляет 12% числа событий основных измерений.

Число событий в контрольных измерениях не противоречит ожидаемому числу фоновых событий, обусловленному образованием характеристических квантов непосредственно μ -мезонами, проходящими через ксенон, а также теми γ -квантами резонансного излучения, которые проходят через поглотитель (В) и регистрируются.

Излучение в слоистой среде могло быть образовано только μ -мезонами. В самом деле, свинцовый фильтр (Pb) толщиной 67 радиационных единиц длины, расположенный между совпадательными рядами счетчиков C_1 и C_2 , а также вещество стен здания толщиной 50 радиационных единиц длины, расположенное перед экспериментальной установкой,

Рис. 66. Распределение событий по числу зарегистрированных γ -квантов в каждом событии.



исключает возможность регистрации электронов. Исключена также возможность регистрации ядерноактивных частиц, так как в горизонтальном потоке космических лучей они должны отсутствовать. Вышеизложенное дает основание предполагать, что наблюдаемые события вызваны излучением μ -мезонов в слоистой среде.

Для сравнения экспериментально полученного числа событий с ожидаемым использовались имеющиеся экспериментальные спектры вертикального потока μ -мезонов с энергией до 10^4 Гэв, так как данные для горизонтального потока в этой области энергий отсутствуют (кривые 1, 2 и 3, рис. 67). Эти спектры с помощью известной методики были пересчитаны для зенитных углов в интервале $73-90^\circ$ и для высоты

1000 м над уровнем моря. Затем, используя кривую эффективности рис. 65, было получено ожидаемое число событий по этим спектрам. Оно оказалось равным 42 (кривая 1), 63 (кривая 2) и 125 (кривая 3). Число же событий, зарегистрированных в эксперименте, было равно 88 (после вычета фона).

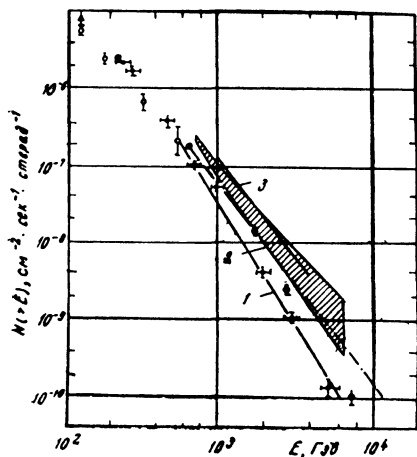


Рис. 67. Интегральный спектр μ -мезонов.

Это ясно указывает на то, что данные эксперимента согласуются с ожидаемыми. Интересно отметить, что хотя числа ожидаемых событий, согласно спектрам 1, 2, 3, заметно отличаются друг от друга, тем не менее энергии регистрируемых μ -мезонов по всем этим спектрам находятся в интервале от 700 до 6000 Гэв. Энергетический спектр зарегистрированных μ -мезонов имеет максимум в интервале энергий от 1000 до 3000 Гэв, а затем спадает в сторону высоких энергий, повторяя кривую спектра μ -мезонов.

Была предпринята обратная задача, а именно, на основании данных эксперимента был получен спектр μ -мезонов под зенитными углами $73 \div 90^\circ$ на высоте 1000 м над уровнем моря. Разумеется, что для этого за основу следует взять теорию резонансного излучения. Дифференциальный спектр, который наилучшим образом удовлетворяет полученным экспериментальным данным, оказался равным

$$\mu(E) dE = (4,63 \pm 0,5) E^{-3,29 \pm 0,12}, \quad 700 \text{ Гэв} < E < 6000 \text{ Гэв}.$$

Этот спектр, пересчитанный для вертикального потока, на рис. 67 приводится в виде заштрихованной области, размеры которой определяются ошибками измерений.

е) Эксперименты с электронами

Эксперимент был выполнен на электронном синхротроне ФИАН. Схема экспериментальной установки приводится на рис. 68. Электроны регистрировались телескопом, состоящим

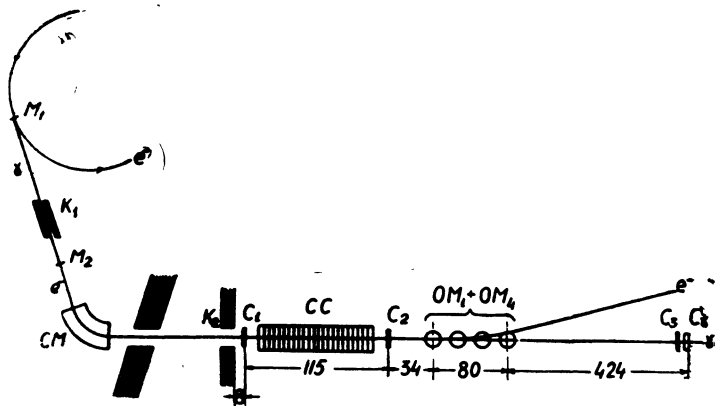


Рис. 68. Схема экспериментальной установки: M_1 , M_2 — внутренняя и внешняя мишени соответственно, K_1 , K_2 — коллиматоры, $СМ$ — магнитный спектрометр, $СС$ — слоистая среда, $ОМ_1 \div ОМ_4$ — отклоняющие магниты, $С_1$, $С_2$, $С_3$ — сцинтилляционные счетчики, $С_\gamma$ — γ -спектрометр.

из двух тонких пластических сцинтилляторов $С_1$ и $С_2$, расположенных по обе стороны слоистой среды $СС$ и включенных на совпадение. γ -кванты исследуемого излучения испускаются под малыми углами к направлению движения электрона. Чтобы иметь возможность их детектировать, электроны отклонялись от первоначального своего направления с помощью магнитного поля ($ОМ_1 \div ОМ_4$). Спектр излучения измерялся γ -спектрометром. Сцинтиллятор $С_3$ включался на антисовпадение, тем самым исключая события, когда в γ -спектрометр попадала заряженная частица.

В качестве γ -спектрометра использовался сцинтилляционный счетчик, сконструированный на основе кристалла $NaJ(Tl)$

диаметром и толщиной 7 см. Используемый кристалл полностью поглощает γ -кванты исследуемых энергий (до 100 кэв) и при этом имеет эффективность, близкую к 100%.

В эксперименте использовались различные слоистые среды. Каждая слоистая среда собиралась из листов бумаги, расположенных в воздухе параллельно друг другу. Выбор бумаги обусловлен в основном малым поглощением γ -квантов исследуемого интервала в самой слоистой среде, относительно малым выходом тормозного излучения и сравнительной простотой изготовления слоистой среды.

Использовалась бумага трех различных толщин: $l_1 = 2,43 \cdot 10^{-2}$ см (ватман), $l_1 = 9,3 \cdot 10^{-3}$ см (писчая бумага), $l_1 = 2,83 \cdot 10^{-3}$ см (копировальная бумага).

Многочисленные измерения толщины бумаги и периода в целом показали, что среднеквадратичная ошибка в знании их толщины меньше, чем 2%.

Исследования резонансного излучения были проведены в слоистых средах со следующими значениями толщины бумаги l_1 , α , длины всей слоистой среды $L = nl_1(1 + \alpha)$, числа слоев n и количества вещества t (табл. VI).

Таблица VI

l_1 (см)	$2,43 \cdot 10^{-2}$			$9,3 \cdot 10^{-3}$			$2,83 \cdot 10^{-3}$			
α	3,0	4,54	6,59	8,85	11,1	19,8	5,84	11,6	28,9	18,8
L (см)	29,2	40,2	55,1	71,3	87,2	49,5	49,7	91,4	38,0	58,6
n	300	300	300	300	300	100	780	780	130	1050
t (г/см ²)	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2	2,07	6,2	6,2	1,03	3,52
$\hbar\omega_{1\min}$ (кэв)	35,7	35,7	35,7	35,7	35,7	35,7	13,8	13,8	13,8	4,2
$E_{1\text{пор}}$ (Мэв)	3840	4490	5260	6000	6652	8770	1920	2610	4065	980

В табл. VI приводятся также соответствующие значения минимальной частоты первой гармоники резонансного излучения $\omega_{1\min}$ (см. § 28), и значения пороговой энергии для первой гармоники $E_{1\text{пор}}$.

При движении электрона в слоистой среде, кроме резонансного излучения, возникает также тормозное. Очевидно, что для выделения искомого спектра резонансного излучения, из суммарного спектра следует вычитать спектр тормозного излучения. Для этой цели были проведены измерения, в которых слоистая среда сжималась до $\alpha = 0$. Для проверки того обстоятельства, что незначительные воздушные промежутки, оставшиеся между отдельными слоями после их сжатия до $\alpha = 0$, не приводят к возникновению дополнительного излучения, те же измерения были проведены для сплошного блока оргстекла такой же толщины (оргстекло, как тормозящая среда, эквивалентно бумаге).

Спектры излучения, измеренные в обоих случаях, полностью совпадают друг с другом. Кроме того, высокоэнергичная часть спектров излучения (для излученных квантов, удовлетворяющих условию $\hbar\omega > 50 \div 60$ кэв, имеет место только тормозное излучение) в слоистых средах с различными значениями α и спектры излучения в сплошных средах также совпадают. Оказалось также, что спектры тормозного излучения для электронов с энергиями от 250 до 600 Мэв не зависят от энергии электрона, как и ожидалось согласно теории тормозного излучения.

Анализ показывает, что излучение, вызванное вторичными процессами (β -электронами, рождением электронно-позитронных пар и пр.) в веществе, толщина которого для всех используемых сред не превосходит 0,2 рад. единицы длины, составляет не более 10—15% тормозного излучения первичной частицы. Разумеется, что при вычитании фона вклад этих вторичных процессов также автоматически вычитается.

Отношение интенсивности излучения электронов с энергией 600 Мэв в различных слоистых средах к интенсивности излучения в таком же количестве вещества сплошной среды от энергии γ -кванта приводится на рис. 69. В начальной части спектра интенсивность излучения в слоистой среде существенно превышает интенсивность тормозного излучения. В зависимости от параметров слоистой среды в отдельных случаях достигается пятидесятикратное превышение. С увеличением энергии γ -кванта разница интенсивностей излучения в

слоистой среде и в сплошной среде постепенно исчезает и при $\hbar\omega \sim 50 \div 60$ кэв излучение в слоистой среде не отличается от излучения в сплошной среде. Для электронов меньших энергий это отношение имеет аналогичную зависимость от энергии γ -кванта с той лишь разницей, что выход излучения в слоистой среде по абсолютной величине уменьшается, а отношение интенсивностей сравнивается с единицей при меньших энергиях γ -квантов.

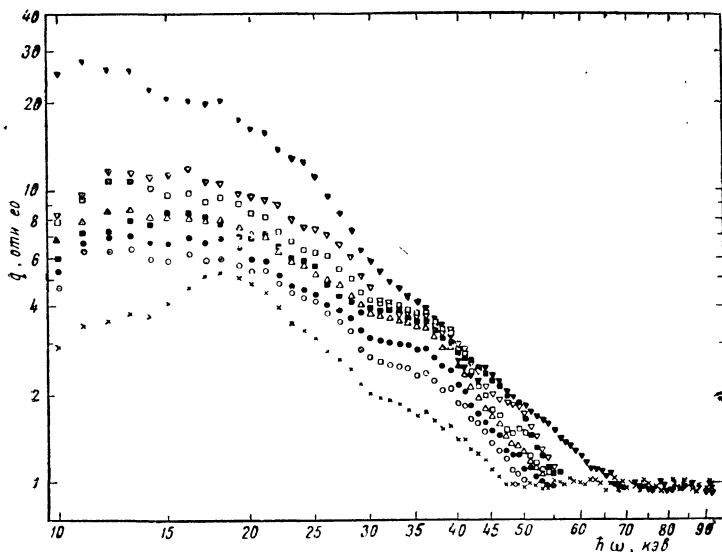


Рис. 69. Отношение интенсивностей излучения в слоистой и сплошной средах; $E=600$ Мэв. Параметры слоистых сред следующие:

	α	l_1 (см)
×	3,0	$2,43 \cdot 10^{-2}$
○	4,54	$2,43 \cdot 10^{-2}$
●	6,59	$2,43 \cdot 10^{-2}$
△	8,85	$2,43 \cdot 10^{-2}$
□	11,1	$2,43 \cdot 10^{-2}$
◐	5,84	$9,3 \cdot 10^{-3}$
▽	11,6	$9,3 \cdot 10^{-3}$
▼	18,8	$2,83 \cdot 10^{-3}$

На рис. 70 приводятся экспериментально измеренные спектры излучения электронов различных энергий в одной из слоистых сред. Там же приводятся спектры излучения в сплошной среде. Данные показывают, что для сравнительно малых энергий γ -квантов интенсивность излучения в слоистой среде в сильной степени зависит от энергии электрона. С увеличением энергии γ -квантов спектр излучения в слоистой среде постепенно переходит в спектр для сплошной среды, а последний при одном и том же количестве вещества не зависит от E , l_1 и α .

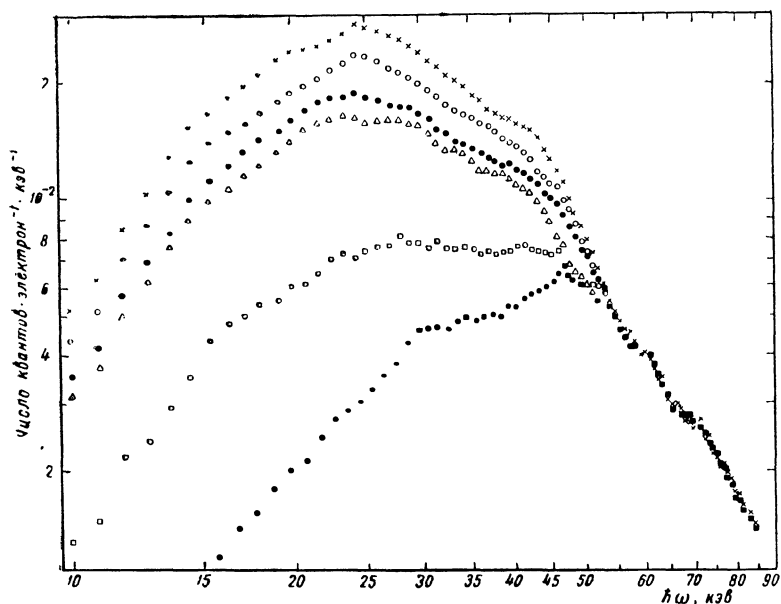


Рис. 70. Дифференциальный спектр излучения в слоистой среде с $l_1 = 2,43 \cdot 10^{-2}$ см, $\alpha = 11,1$, $n = 300$. Энергия электронов (в Мэв): \times —600, \circ —550, \bullet —500, \triangle —450, \square —300, \bullet (нижние) — тормозной спектр.

Аналогичные спектры излучения были получены для всех слоистых сред, параметры которых приведены в табл. VI.

Разность интенсивности излучения в слоистой и сплошной средах отождествляется с резонансным излучением. На рис. 71 и 72 приводятся экспериментальные спектры излучения вместе с соответствующими теоретическими спек-

трами резонансного излучения (с учетом поглощения в самой слоистой среде и на всем пути их движения) с учетом

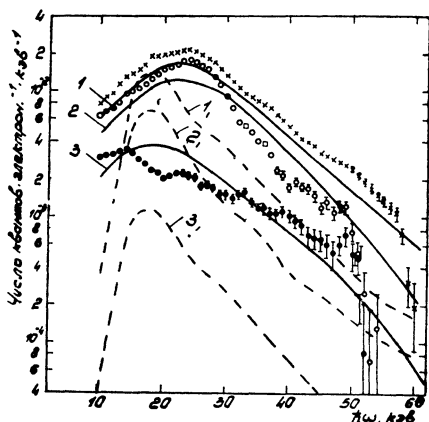
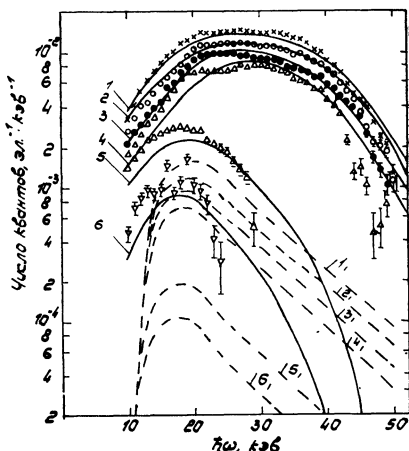


Рис. 71. Дифференциальный спектр резонансного излучения для слоистой среды с $l_1 = 2,83 \cdot 10^{-3}$ см, $\alpha = 18,8$, $n = 1050$. Кривые 1_1-3_1 — теория резонансного излучения без учета многократного рассеяния, $1-3$ — с учетом многократного рассеяния. Энергия электронов (в Мэв): 1, 1_1 , \times — 600; 2, 2_1 , \circ — 500; 3, 3_1 , \bullet — 300.

и без учета влияния многократного рассеяния. Как видно из этих рисунков, экспериментальные данные превышают соответствующую теорию без учета многократного рассеяния,

Рис. 72. Дифференциальный спектр резонансного излучения для слоистой среды с $l_1 = 2,43 \cdot 10^{-2}$ см, $\alpha = 8,85$, $n = 300$. Кривые 1_1-6_1 — теория резонансного излучения без учета многократного рассеяния, $1-6$ — с учетом многократного рассеяния. Энергия электронов (в Мэв): 1, 1_1 , \times — 600; 2, 2_1 , \circ — 550; 3, 3_1 , \bullet — 500; 4, 4_1 , \triangle (верхние) — 450; 5, 5_1 , \triangle (нижние) — 300; 6, 6_1 , ∇ — 250.



причем это расхождение увеличивается с увеличением энергии γ -квантов, а также с увеличением l_1 и α . Следует отметить, что согласно теории резонансного излучения без учета многократного рассеяния интенсивность излучения в исследуемых слоистых средах для электронов с энергиями до

600 Мэв при одних и тех же значениях толщины слоя l_1 и числа слоев n слабо зависит от α . Однако экспериментальные данные показывают, что с увеличением α интенсивность излучения возрастает в согласии с теоретическими расчетами, учитывающими влияние многократного рассеяния.

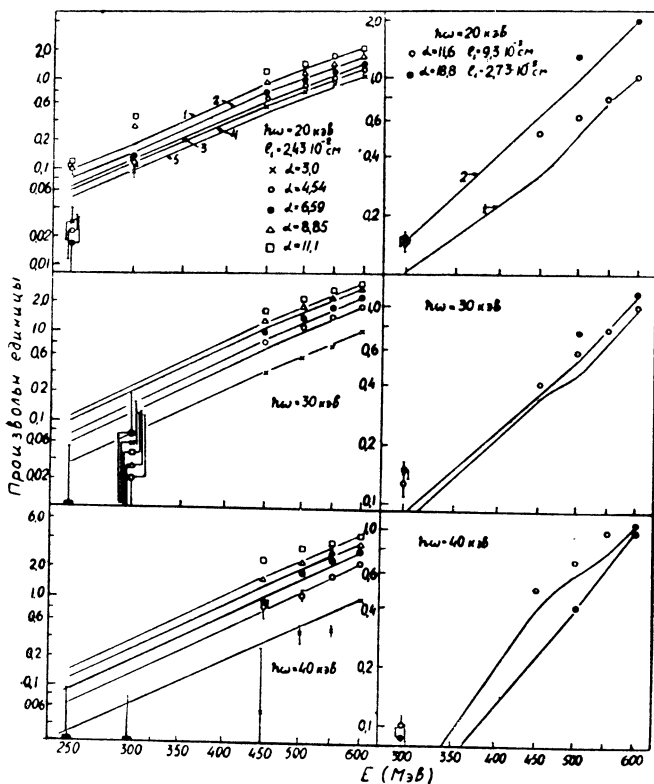


Рис. 73. Зависимость числа квантов резонансного излучения от энергии электрона для различных слоистых сред и энергий γ -квантов.

Зависимость интенсивности излучения от энергии электрона при различных энергиях γ -квантов и для различных слоистых сред приводится на рис. 73. Данные приводятся в произвольных единицах. На этих графиках теоретические кривые (без учета многократного рассеяния) совмещены с

экспериментом в точке $E = 600 \text{ Мэв}$. В области сравнительно низких энергий электронов экспериментально наблюдается более резкая зависимость интенсивности излучения от энергии электрона, чем это ожидается от упрощенной теории без учета многократного рассеяния. Во всем исследуемом интервале энергий от 250 до 600 Мэв эта зависимость имеет вид E^γ , где $\gamma \approx 3$. Расчеты теоретических кривых с учетом многократного рассеяния проводились по интерполяционной формуле, которая при малых изменениях плотности $\left(\frac{p}{\omega' r} \ll 1 \text{ и } \frac{p\alpha}{\omega' r} \ll 1\right)$ переходит в формулу (28.153), при $q \rightarrow 0$ переходит в формулу (28.98), а при $s \ll 1$ в поперечник тормозного излучения.

Интерполяционную формулу для числа излученных фотонов в единицу времени можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{I}_\omega}{\hbar\omega} = & -\frac{d\omega}{137\pi} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) F_0(s) - \\ & - \frac{(N_1 Z_1 - N_2 Z_2)^2 l^2 r_0^2 c^2}{137\pi^2} \frac{d\omega}{\omega^2} \sum_{r \neq 0} \frac{\sin^2 \left[\frac{\pi r l}{l} \left(1 - \frac{p}{\omega' r}\right) \right]}{r^4 \left(1 - \frac{p}{\omega' r}\right)^2 \left(1 + \frac{p\alpha}{\omega' r}\right)^2} \times \\ & \times \left[F(s) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{4\pi c r}{l\omega}\right) - F_0(s) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Через $F_0(s)$ обозначена функция $F(s)$ при $r = 0$ (см. формулы (28.116), (28.136), (28.134')). Величины ω_0 , p , ω' определяются по формулам (28.87), (28.96), (28.97).

Как мы убедились, отличие теоретических кривых с учетом многократного рассеяния от соответствующих кривых без учета многократного рассеяния определяется величиной параметра s (см. формулу (28.138)). Тот же самый параметр определяет отклонение экспериментальных данных от упрощенных теоретических кривых. Это иллюстрируется на рис. 74, где приводится зависимость отношения (η) экспериментально наблюдаемого выхода излучения к упрощенной тео-

рии от величины $l_1^2(1 + \alpha)$. Данные приводятся для $E = 600$ Мэв и трех энергий γ -квантов и показывают, что с увеличением $l_1^2(1 + \alpha)$ и частоты значение η увеличивается. С уменьшением энергии электрона расхождение эксперимента с теорией увеличивается. Эти закономерности указывают на необходимость учета многократного рассеяния и подтверждают теоретический критерий, выведенный в § 28.

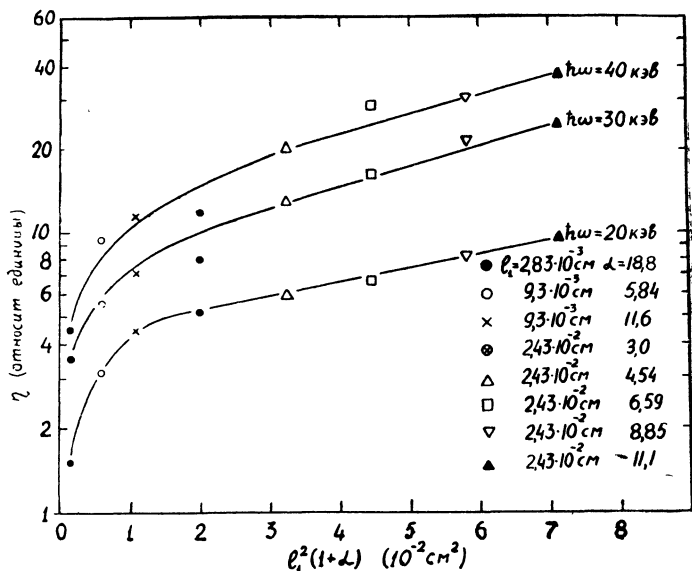


Рис. 74. Зависимость отношения (η) экспериментального выхода резонансного излучения к расчетам теории с учетом поглощения от величины $l_1^2(1 + \alpha)$ для различных слоистых сред.

Резюмируя, можно сказать, что излучение релятивистских электронов в слоистой среде в рентгеновской части спектра на два-три порядка превышает интенсивность тормозного излучения. Интенсивность излучения в сильной степени зависит от энергии электрона, что открывает возможность эффективного использования его для измерения энергии и детектирования частиц сверхвысоких энергий.

Если увеличить энергию детектируемых фотонов, то в качестве вещества пластин слоистой среды можно использо-

вать такие металлы, как алюминий или медь, а так как плотность электронов в этих пластинках во много раз больше, чем в бумаге, то выход излучения можно существенно увеличить. Максимальную энергию детектируемых фотонов в методе „характеристического излучения“ можно довести до ~ 100 кэв. Например, если в качестве поглотителя использовать не газ-ксенон, а свинцовую пластинку соответствующей толщины, то энергия характеристических квантов I_k будет равна ~ 88 кэв.

Увеличение интенсивности резонансного излучения, с одной стороны, и улучшение геометрии детектирования характеристических квантов, с другой, по оценкам авторов работ [23, 24], могут повысить эффективность такого прибора до $60 \div 80\%$. Наряду с простотой конструкции прибора, его размеры и стоимость будут на порядок меньше, чем размеры и стоимость современных установок, используемых для тех же целей. Прибор может быть эффективным и для экспериментов с частицами сверхвысоких энергий $\left(\frac{E}{mc^2} > 10^4\right)$.

§ 30. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ НА СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

а) Метод псевдофотонов

Настоящий параграф посвящен расчету излучения, возникающего при прохождении частиц с произвольной скоростью через среду со случайно расположенными неоднородностями. Фактически такой средой будет любая однородная среда, ввиду наличия в ней статистических флуктуаций плотности. Квазиклассический метод, изложенный в § 28, становится здесь неприменимым, поскольку задача теперь является трехмерной.

Отметим большое сходство, которое существует между явлением рассеяния света в мутных средах и рассматриваемым здесь явлением излучения. Прохождение частицы через вещество приводит к его поляризации (действием магнитного поля частицы, если мы отвлекаемся от специальных

магнитных явлений, всегда можно пренебречь), т. е. к созданию вторичного поля. Среднее значение вторичного поля в однородной среде благодаря интерференции волн, исходящих от различных участков среды, обращается в нуль (исключением является излучение Вавилова — Черенкова). Среднее же значение квадратов полей, которые важны для излучения, не исчезает благодаря наличию флуктуаций плотности.

Отличие от обычного рассеяния света заключается в том, что первичная поляризация вещества создается заряженной частицей, а не электромагнитной волной. Однако оказывается, что поле заряженной частицы в рассматриваемом случае можно заменить полем электромагнитной волны. Действительно, поскольку магнитные силы малы и в рассматриваемых ниже явлениях несущественны, всегда можно к электрическому полю движущейся частицы добавить такое магнитное поле, чтобы сумма была эквивалентна суперпозиции электромагнитных волн. Эти рассуждения справедливы для произвольной скорости [26]. Таким образом, для того чтобы найти число излученных в неоднородной среде квантов частоты ω , необходимо подсчитать, сколько эквивалентных псевдофотонов, соответствующих полю частицы в данном интервале частот, пройдет через 1 см^2 в данной точке вещества за все время пролета частицы. Эти псевдофотоны будут рассеиваться на неоднородностях среды согласно известным законам рассеяния света.

Неоднородности среды мы будем описывать переменной частью диэлектрической проницаемости среды:

$$\varepsilon(\omega, \vec{r}) = \varepsilon_0(\omega) + \varepsilon'(\vec{r}, \omega). \quad (28.1')$$

Для определения потока псевдофотонов будем исходить из макроскопических уравнений Максвелла ($\mu = 1$) для потенциалов. Рассмотрим случай равномерно движущейся частицы вдоль оси z :

$$\Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \frac{4\pi e}{c} \vec{v} \delta(z - vt), \quad (30.1),$$

$$\Delta \varphi - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{4\pi e}{\varepsilon_0} \delta(z - vt),$$

$$\frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (30.1)$$

Разлагая потенциалы в трехкратные интегралы Фурье по переменным x, y, z и используя (30.1), определим поле \vec{E} .

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{ie}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int dk_x dk_y dk_z \frac{\left(\frac{\omega \varepsilon_0}{c^2} \vec{v} - \vec{k} \right) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)}{\varepsilon_0 \left[k^2 - \frac{\varepsilon_0}{c^2} (k\vec{v})^2 \right]}, \quad (30.2)$$

где

$$\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}. \quad (30.3)$$

Использование макроскопических уравнений типа (30.1) предполагает, что эффективные в процессе излучения расстояния должны превышать межуатомные расстояния, другими словами, это означает, что

$$q = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} < \frac{\hbar}{R_{\text{междуат.}}} \quad (30.4)$$

Если бы мы учли пространственную дисперсию, то результаты были бы справедливы для произвольных q . Однако ввиду логарифмической зависимости результата от q приводимые ниже рассуждения при введении пространственной дисперсии существенным образом не изменяются.

Исходя из (30.2), вычислим поток энергии

$$S_\rho = \frac{cV\varepsilon_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E^2 dt \quad (30.5)$$

через площадку в 1 см^2 , отстоящую от оси движения на расстоянии ρ за все время движения частицы. Для определения потока энергии через всю перпендикулярную скорости частицы плоскость необходимо выражение (30.5) проинтегрировать по всем x, y (т. е. по всем прицельным параметрам).

Неприменимость макроскопических уравнений Максвелла на малых расстояниях будет означать, что результат интегрирования будет справедлив для значений q , удовлет-

воряющих условию (30.4). Полное число псевдофотонов в интервале частот $d\omega$ оказывается равным

$$dn_\omega = \frac{2V\sqrt{\varepsilon_0}}{137\pi} \frac{c^2}{v^2} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{q_{\max}} \frac{\left[q^2 + \left| 1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_0 \right| \frac{\omega^2}{c^2} \right] q dq}{|\varepsilon_0|^2 \left| q^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \varepsilon_0 \frac{v^2}{c^2} \right) \right|^2}. \quad (30.6)$$

Суммарное число фотонов всех частот получим, интегрируя выражение (30.6) по ω от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$.

Число квантов в интервале $d\omega$ за все время движения складывается из суммы по различным q , т. е. по различным прицельным параметрам. Если мы умножим (30.6) на коэффициент экстинкции, то получим полное число излученных квантов в интервале частот $d\omega$.

После интегрирования по q (нули знаменателя обходятся обычным образом и приводят к рассеянию черенковского излучения) и умножения на коэффициент экстинкции получим для полного числа излученных квантов на единицу пути в интервале частот $d\omega$ выражение [27, 2]:

$$dm_\omega = \frac{1}{137\pi} \frac{c^2}{v^2 \varepsilon_0^{3/2}} \frac{d\omega}{\omega} \left[\ln \frac{q_{\max}^2}{\left| 1 - \varepsilon_0 \frac{v^2}{c^2} \right| \frac{\omega^2}{v^2}} - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_0 \right] h(\omega). \quad (30.7)$$

Формула (30.7) дает решение задачи об излучении электромагнитных волн в изотропной среде, описываемой коэффициентом экстинкции $h(\omega)$. Напомним, что коэффициент экстинкции определяется как отношение числа рассеянных фотонов в единице объема и в единицу времени к плотности потока фотонов в падающем пучке. Следовательно, коэффициент экстинкции имеет размерность $см^{-1}$.

Формулу (30.7) можно применять для расчета полного числа излученных фотонов, длина волны которых превышает межуатомные расстояния в среде с заданным коэффициентом экстинкции. Нужно отметить, что, по-видимому, наибольший интерес будет представлять экспериментальное изучение излучения в веществах с большими флуктуациями (кри-

тическая опалесценция, переход в сверхпроводящее и сверхтекучее состояния и т. д.), а также излучение, возникающее в плазме при прохождении через нее пучка заряженных частиц.

Поскольку поле частицы содержит большие частоты, нам нужно исследовать зависимость $h(\omega)$ от ω , т. е. возможность излучения квантов, длина волны которых значительно меньше размеров неоднородности. Формальная подстановка (для частного случая рассеяния в газе) вместо $h(\omega)$ выражения Релея:

$$h(\omega) = \frac{2\omega^4}{3\pi c^4} \frac{(V\sqrt{\varepsilon_0} - 1)^2}{N}$$

приведет, как мы увидим ниже, для излучения частот, бо́льших атомных, к неправильному результату. Мы хотим подчеркнуть здесь, что так же, как и в случае периодически расположенных неоднородностей, для излучения жестких квантов будут существенны большие продольные расстояния пролета частицы. Это даст нам возможность применять макроскопическую электродинамику и в области очень жестких квантов. Ниже будет показано, что и в случае случайно расположенных неоднородностей релятивистские частицы будут возбуждать излучение, длина волны которого ничтожно мала по сравнению с размерами неоднородностей.

б) Излучение квантов произвольной частоты

Для детального расчета излучения мы будем использовать обычную теорию рассеяния света, заменяя в последней падающую электромагнитную волну суперпозицией электромагнитных волн, образующих поле движущейся частицы.

Будем исходить из макроскопических уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E}_\omega = \frac{i\omega}{c} \vec{H}_\omega, \tag{30.8}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}_\omega = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon(\omega) \vec{E}_\omega + \frac{2ev}{cv} \delta(x) \delta(y) e^{i\frac{\omega}{v}z},$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E}_\omega = \frac{2e}{v} \delta(x) \delta(y) e^{i \frac{\omega}{v} z}, \quad (30.8)$$

$$\operatorname{div} \vec{H}_\omega = 0.$$

Будем считать, что случайные изменения плотности мало сказываются на величине поля движущейся частицы. Используя теорию возмущений, найдем поля \vec{H}'_ω и \vec{E}'_ω , связанные с флуктуациями диэлектрической постоянной ε' (см. (28.1')). В нулевом приближении уравнения (30.8) сохраняют свой вид. Будем обозначать все величины в нулевом приближении нулевыми индексами $\vec{E}_{\omega 0}$, $\vec{H}_{\omega 0}$, ε_0 . Выражение для индукции имеет вид

$$\vec{D}'_\omega = \varepsilon_0 \vec{E}'_\omega + \varepsilon' \vec{E}_{\omega 0}. \quad (30.9)$$

Уравнения для флуктуационных полей перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}'_\omega &= \frac{i\omega}{c} \vec{H}'_\omega, \\ \operatorname{rot} \vec{H}'_\omega &= -\frac{i\omega}{c} \vec{D}'_\omega, \end{aligned} \quad (30.10)$$

$$\operatorname{div} \vec{D}'_\omega = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{H}'_\omega = 0.$$

Из (30.10) найдем уравнение для \vec{D}'_ω :

$$\Delta \vec{D}'_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 \vec{D}'_\omega = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} (\varepsilon' \vec{E}_{\omega 0}), \quad (30.11)$$

где $\vec{E}_{\omega 0}$ определяется выражением (30.2). Решение (30.11) в виде запаздывающих потенциалов имеет вид

$$\vec{D}'_\omega(r) = -\frac{1}{4\pi} \left[\vec{k}' \left[\vec{k}', \int \frac{\vec{E}_{\omega 0}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \varepsilon'(\vec{r}_1) e^{ik'|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV_{\vec{r}_1} \right] \right]. \quad (30.12)$$

Через

$$\vec{k}' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \vec{n} \quad (30.13)$$

обозначен волновой вектор излученного кванта. Для удобства дальнейших вычислений выделим из $E_{\omega 0}(\vec{r}_1)$ множитель, зависящий только от переменной z :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\omega 0}(\vec{r}_1) &= e^{i\frac{\omega}{v}z} \frac{ie}{2\pi^2 v} \int \left\{ \frac{\omega v}{c^2} - \frac{\vec{k}}{\varepsilon_0(\omega)} \right\} \frac{e^{ik_x x_1 + ik_y y_1}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0(u)} dk_x dk_y = \\ &= e^{i\frac{\omega}{v}z} \vec{E}_\omega(x_1, y_1). \end{aligned} \quad (30.14)$$

Исходя из (30.12), рассчитаем поле излучения на больших расстояниях от излучаемого объекта. Отметим, что $\varepsilon'(\vec{r}_1)$ является случайной величиной, среднее значение которой равно нулю. При нахождении среднего значения квадрата поля $\overline{\vec{E}'_0(\vec{r})^2}$ нам необходимо будет усреднить квадрат выражения (30.12), т. е. взять среднее от произведения двух ε' (умноженных на определенную экспоненциальную функцию, см. (30.15)), взятых в разных точках.

Рассмотрим теперь такие флуктуации, для которых длина корреляции l порядка межуатомных размеров, т. е. $\varepsilon'(\vec{r}_1)\varepsilon'(\vec{r}_2) \neq 0$, только если $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ порядка или меньше межуатомных размеров, обозначаемых ниже через l . Поскольку выражение (30.14) для полей справедливо для прицельных параметров, превышающих межуатомные расстояния, то мы можем брать различные $\vec{E}_\omega(x_1, y_1)$ в одной и той же точке. Запишем среднее значение квадрата флуктуационного поля в виде

$$\begin{aligned} \overline{|\vec{E}'_0|^2} &= \frac{\overline{|\vec{D}'_0|^2}}{\varepsilon_0^2} = \frac{1}{16\pi^2 R^2 \varepsilon_0^2} \int |\vec{k}' [\vec{k}' \vec{E}_\omega(x_1, y_1)]|^2 dV_{\vec{r}_1} \times \\ &\times \int \varepsilon'(\vec{r}_1)\varepsilon'(\vec{r}_2) \exp \left[i\vec{k}'(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + i\frac{\omega}{v}(z_1 - z_2) \right] dV_{\vec{r}_2}. \end{aligned} \quad (30.15)$$

Экспонентой в последнем интеграле можно пренебречь при условиях

$$\frac{\omega}{v} \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta \right) l \ll 1, \quad (30.16)$$

$$l \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \sin \theta \ll 1. \quad (30.17)$$

При выполнении (30.16) и (30.17) мы можем пользоваться хорошо известным из теории рассеяния света выражением

для величины $h(\omega) \sim \int \varepsilon'(\vec{r}_1) \varepsilon'(\vec{r}_2) dV_{\vec{r}_2}$. В случае, если неравенства (30.16) или (30.17) нарушаются, величина (30.15) становится малой и излучение исчезает.

Условия (30.16) и (30.17) выполняются всегда, если длина излученной волны превышает междуатомные расстояния. В случае же жестких квантов, когда

$$\hbar \ll l, \quad (30.18)$$

условие (30.17) будет выполнено для $\theta \ll \frac{\hbar}{l}$. Условие (30.16)

может выполняться только для релятивистских частиц и при учете $\theta \ll \frac{\hbar}{l}$ приводит сразу к двум неравенствам:

$$\omega \ll \frac{2c}{l} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2, \quad \omega \gg \frac{l\omega_0^2}{2c}. \quad (30.16')$$

Условия (30.16') подобны соответствующим неравенствам для излучения на периодически расположенных неоднородностях.

Энергия излучения в интервале частот $d\omega$ и интервале телесного угла $d\Omega$ равна

$$dI_{\omega, \vec{n}} = c \sqrt{\varepsilon_0} |\vec{E}_\omega|^2 R_0^2 d\Omega d\omega. \quad (30.19)$$

После подстановки (30.14) в (30.15) нам необходимо будет произвести интегрирование по k_x и k_y . Вначале произведем интегрирование по азимутальному углу φ , отсчитываемому от плоскости, содержащей векторы \vec{k}' и \vec{v} . Тогда линейные члены по $\cos \varphi$ исчезают и, воспользовавшись формулой

$$\int d\varphi \left[\vec{k}' \left(\frac{\omega^2}{c^2} \vec{v} - \frac{\vec{k}}{\varepsilon_0(\omega)} \right) \right]^2 = 2\pi \left(\frac{\omega}{c^2} v - \frac{\omega}{v\varepsilon_0} \right)^2 (k_y'^2 + k_x'^2) + \frac{2\pi}{\varepsilon_0^2} k_z'^2 q^2 + \frac{\pi q^2}{\varepsilon_0^2} (k_x'^2 + k_y'^2), \quad (30.20)$$

получим для углового распределения флуктуационного излучения выражение [2, 27]:

$$dI_{\omega, \vec{n}} = \frac{e^2 \omega^4 v T d\omega d\Omega}{32c^3 \varepsilon_0^{3/2} \pi^3 v^2} \left\{ (1 + \cos^2 \theta) \left[\ln \frac{q_{\max}^2}{\frac{\omega^2}{v^2} \left| 1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_0 \right|} - 1 \right] + 2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_0 \right) \sin^2 \theta \right\} \int \varepsilon'(\vec{r}_1) \varepsilon'(\vec{r}_2) dV_{\vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_1}. \quad (30.21)$$

Здесь vT есть длина пути частицы.

После интегрирования по углам излучения (пусть $\lambda \geq l$) для числа излученных квантов на единицу пути получим:

$$dm_{\omega} = \frac{dI_{\omega}}{\hbar \omega v T} = \frac{1}{137\pi} \frac{c^2}{v^2 \varepsilon_0^{3/2}} \frac{d\omega}{\omega} \times \left\{ \ln \frac{q_{\max}^2}{\left| 1 - \varepsilon_0 \frac{v^2}{c^2} \right| \frac{\omega^2}{v^2}} - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_0 \right\} h(\omega), \quad (30.7)$$

где

$$h(\omega) = \frac{1}{6\pi} \frac{\omega^4}{c^4} \int \varepsilon'(\vec{r}_1) \varepsilon'(\vec{r}_2) dV_{\vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_1} \quad (30.22)$$

совпадает с обычным определением коэффициента экстинкции.

Если выполняется условие (30.18), то интеграл по углам нужно распространить до углов порядка λ/l .

Обратим внимание на то, что для идеальных газов мы имеем

$$\int \varepsilon'(\vec{r}_1) \varepsilon'(\vec{r}_2) dV_{\vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_1} = \frac{4(V\bar{\varepsilon} - 1)^2}{N}. \quad (30.23)$$

Тогда для излучения на флуктуациях в случае плазмы или газа для частот, больших атомных, получим [2]

$$dm_{\omega} \sim 4\bar{\epsilon}N \frac{c^2}{l^2} \frac{d\omega}{\omega^3} \left\{ \ln \frac{q_{\max}^2}{\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2 \epsilon_0(\omega)} \right)} - 1 \right\}. \quad (30.24)$$

Формула (30.24), по своей структуре мало отличается от соответствующей формулы для числа излученных квантов на единицу пути в среде с периодическими флуктуациями.

Вопросы поляризации релеевского излучения рассмотрены в работе С. П. Капицы [27]. Учет пространственной дисперсии был произведен в работе В. В. Томойкина [28]. В цитируемой работе излучение рассчитывалось для случая плазмы, где флуктуации плотности электронов приводили к флуктуации диэлектрической постоянной. Как и следовало ожидать, обрезание логарифма происходит на расстояниях порядка дебаевского радиуса. Следовательно, $q_{\max} \sim \frac{\hbar}{R_{\text{Деб}}}$.

Расчеты [28], которые мы здесь опускаем, показывают, что в плазме происходит излучение не только обычных поперечных волн, но появляются и продольные электромагнитные волны. Потери энергии частицей в статистически неоднородной среде рассматривались в работах [29, 30].

§ 31. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ

а) Введение

В последнее время в литературе появились работы, посвященные рассмотрению точных методов расчета излучения при пролете зарядов через отверстия и вблизи экранов (см. [31]). Эти задачи являются обобщением аналогичных задач о дифракции света. Мы изложим в этом параграфе одну из типичных задач, которые решены точно. Однако прежде чем переходить к изложению точных методов расчета, остановимся на физической стороне дифракционного излучения.

Для быстрых частиц (когда поле частицы становится эквивалентным набору плоских волн) при решении вышеуказанного рода задач можно использовать простой метод [32], аналогичный широко известному методу расчета дифракции световых волн, основанному на принципе Гюйгенса.

Как хорошо известно, приближенный расчет дифракционных задач рассеяния (основанный на принципе Гюйгенса) справедлив, когда длина падающей на препятствие волны λ мала по сравнению с характерными размерами a препятствий (экранов и отверстий). Кроме того, углы отклонения от первоначального направления распространения должны быть малы (малые отклонения от законов геометрической оптики). Таким образом, необходимо выполнение следующих двух условий:

$$\lambda \ll a, \quad (31.1)$$

$$\theta \ll 1. \quad (31.2)$$

Поскольку процесс излучения можно рассматривать как процесс рассеяния псевдофотонов, то условия (31.1) и (31.2) должны быть сохранены. Однако применение принципа Гюйгенса к задачам излучения имеет некоторые особенности. Это связано с тем, что в отличие от плоской электромагнитной волны поле частицы зависит от расстояния до траектории.

Действительно, рассмотрим поле быстро движущейся заряженной частицы. В точке $\vec{r}(vt, \vec{\rho})$ от заряда оно имеет вид (см. формулу (1.1) и рис. 1)

$$E_{\perp} = \gamma \frac{e\rho}{(\rho^2 + v^2 t^2 \gamma^2)^{3/2}}; \quad E_{\parallel} \ll E_{\perp} \quad (1.4)$$

$$H \approx E \quad \text{при} \quad \beta = \frac{v}{c} \sim 1.$$

Здесь $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Если рассмотреть фурье-компоненту от E_{\perp} по времени, то легко увидеть, что $E_{\perp\omega}$ мало при $\rho > \lambda\gamma$. Это означает, что фурье-компонента поля частицы $E_{\perp\omega}$ пространственно ограничена и отлична от нуля в круге с радиусом $\rho \sim \lambda\gamma$. Естественно, что частица будет „чувствовать“

препятствие (будет излучать частоту ω) только в том случае, когда $k\gamma \lesssim \alpha$, в противном случае излучение частоты ω будет сильно подавлено. Следовательно, излучение частоты ω появляется лишь тогда, когда выполняется неравенство

$$\frac{k}{\alpha} \lesssim (1 - \beta^2)^{1/2}. \quad (31.3)$$

Очевидно, что интенсивность излучения будет тем больше, чем лучше будет выполняться условие (31.3). Приближенный метод решения, рассмотренный ниже, охватывает практически наиболее интересную для приложений область высоких энергий и малых углов излучения. Перейдем теперь к его изложению.

б) Метод расчета

Пусть заряженная частица, движущаяся равномерно вдоль оси z со скоростью $v \sim c$, пролетает через отверстие произвольной формы, вырезанное в бесконечном экране (или пересекает экран произвольной формы, расположенный в вакууме). Траектория заряда перпендикулярна плоскости отверстия (экрана), которое расположено в плоскости x, y . В дальнейшем экраны всегда предполагаются плоскими, абсолютно непрозрачными и бесконечно тонкими. Можно обобщить излагаемый здесь метод так, как это делается в оптической модели ядра, чтобы отказаться от этих ограничений. Этот вопрос, однако, мы здесь не рассматриваем.

Обозначим через U^0 любую из монохроматических компонент \vec{E}^0 или \vec{H}^0 поля частицы в свободном пространстве (без временного множителя вида $e^{-i\omega t}$). Будем предполагать, что в точках отверстия поле таково, каким оно было бы при отсутствии экрана. Все точки отверстия, согласно принципу Гюйгенса, становятся источником вторичных волн и каждый элемент отверстия $dS = dx dy$ создает в точке наблюдения r поле

$$\text{const} \cdot U^0(x, y) \frac{e^{i \frac{\omega}{c} R}}{R} dS. \quad (31.4)$$

Полное поле в точке p найдем, интегрируя (31.4) по всей площади отверстия S_1 (или по части плоскости $z = 0$, не занятой экраном):

$$U = \text{const} \int_{S_1} \frac{U^0(x, y)}{R} e^{i \frac{\omega}{c} R} dS. \quad (31.5)$$

R — расстояние от элемента площади отверстия dS до точки p . В дальнейшем будет рассматриваться излучение при пролете через отверстия, так как при пересечении экранов может возникнуть дополнительное излучение, связанное, например, с торможением частицы.

Выберем начало координат в произвольной точке внутри отверстия, обозначим через $\vec{\rho}$ радиус-векторы точек отверстия и через \vec{R}_0 расстояние от начала координат до точки p . Поскольку R_0 много больше размеров отверстия, то (сравни с рис. 37)

$$R = |\vec{R}_0 - \vec{\rho}| \simeq R_0 - \vec{n} \vec{\rho} \quad (31.6)$$

(\vec{n} — единичный вектор в направлении \vec{R}_0). Используя формулы (31.5) и (31.6), получаем

$$U = A \int_{S_1} U^0(x, y) e^{-i \vec{k} \vec{\rho}} dS, \quad (31.7)$$

где $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$, а A — некоторая постоянная. Для определения

A будем неограниченно увеличивать размеры отверстия. Тогда формула (31.7) в пределе переходит в формулу для обратного фурье-разложения функции $U^0(x, y)$, откуда следует,

что $A = \frac{1}{4\pi^2}$. Так как в точке наблюдения полное

поле складывается из поля излучения и поля самой частицы, то для нахождения поля излучения необходимо из суммарного поля вычесть поле частицы (т. е. выражение (31.7) при $S_1 \rightarrow \infty$). Следовательно, поле излучения будет равно:

$$U^\Phi(k_x, k_y) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{S_2} U^0(x, y) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} dS. \quad (31.8)$$

Здесь $S_2 = S - S_1$, где S — бесконечная плоскость $z = 0$. (В дальнейшем индекс Φ мы будем опускать). Формула (31.8) может быть математически обоснована более строго [32а].

в) Пролет через круглое отверстие

Пусть заряженная частица пролетает на расстоянии r_0 от центра через круглое отверстие радиуса a в бесконечном экране ($r_0 < a$). Найдем поля излучения E_x и E_y по формуле (31.8). Поле равномерно движущейся вдоль оси z заряженной частицы дается следующим выражением (сравни с формулой (30.2)):

$$E_{x,y}^0(\omega) = -\frac{ie}{2\pi^2 v} e^{i\frac{\omega}{v}z} \int \frac{k_{x,y} e^{i(k_x x + k_y y)}}{k_x^2 + k_y^2 + \alpha^2} dk_x dk_y; \quad (31.9)$$

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{v^2 \gamma^2}$$

или (что эквивалентно (31.9))

$$E_{x,y}^0 = \frac{e\alpha}{\pi v} e^{i\frac{\omega}{v}z} \frac{x, y}{\sqrt{x^2 + y^2}} K_1(\alpha \sqrt{x^2 + y^2}); \quad \alpha > 0, \quad (31.10)$$

где K_1 функция Ганкеля от мнимого аргумента.

Выберем начало координат в центре отверстия. Ось x направим вдоль линии, соединяющей начало координат с точкой пересечения траектории частицы с плоскостью отверстия $z = 0$. Введем полярную систему координат. Тогда, используя формулы сложения для цилиндрических функций [33]

$$K_0(\alpha \sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(\alpha r_0) K_n(\alpha \rho) e^{in\varphi} \quad \text{при } r_0 < \rho;$$

$$K_0(\alpha \sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(\alpha \rho) K_n(\alpha r_0) e^{in\varphi} \quad \text{при } r_0 > \rho;$$

$$\frac{K_1(\alpha \sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \varphi})}{\sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \varphi}} = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{I_n(\alpha r_0)}{r_0} \frac{K_n(\alpha \rho)}{\rho} \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$$

при $r_0 < \rho$;

$$\frac{K_1(\alpha \sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \varphi})}{\sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \varphi}} = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{I_n(\alpha \rho)}{\rho} \frac{K_n(\alpha r_0)}{r_0} \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$$

при $r_0 > \rho$

(31.11)

« I_n — функция Бесселя от мнимого аргумента), из (31.8) для полей излучения получаем

$$E_x = -\frac{e}{2\pi^2 c} \frac{qa}{q^2 + a^2} \frac{\partial}{\partial r_0} P_0(r_0, \psi), \quad (31.12)$$

$$E_y = \frac{e}{2\pi^2 c} \frac{qa}{q^2 + a^2} \frac{\partial}{r_0 \partial \psi} P_0(r_0, \psi), \quad (31.13)$$

где

$$P_0(r_0, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n I_n(\alpha r_0) \left\{ J_{n-1}(qa) K_n(\alpha a) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{q} J_n(q, a) K_{n-1}(\alpha a) \right\} \cos n\psi, \quad (31.14)$$

$$C_n = \begin{cases} 1 & \text{для } n = 0, \\ 2(-i)^n & \text{для } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$q = k \sin \theta$ — проекция волнового вектора на плоскость $z = 0$, θ — угол излучения, который отсчитывается от оси z , а ψ — угол между \vec{q} и осью x . При получении формул (31.12) и (31.13) мы воспользовались также следующими соотношениями для цилиндрических функций:

$$x J_{n-1}(x) + x J_{n+1}(x) = 2n J_n(x),$$

$$x K_{n-1}(x) - x K_{n+1}(x) = -2n K_n(x),$$

$$e^{-ia \sin x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a) e^{-inx},$$

$$\int_0^a x J_n(qx) K_n(ax) dx = (q^2 + a^2)^{-1} \left[\left(\frac{q}{a} \right)^n + qa J_{n+1}(qa) K_n(aa) - \right. \\ \left. - \alpha a J_n(qa) K_{n+1}(aa) \right].$$

Зная поля, можно вычислить угловое распределение излучения. Ввиду громоздкости общей формулы приведем результат для случая, когда выполняются следующие неравенства:

$$\alpha a \ll 1 \text{ и } r_0 \ll a.$$

Число квантов частоты ω , излученных в интервале углов $d\theta$ одним электроном, дается формулой

$$N_{\omega} d\omega d\theta = \frac{1}{137\pi} \frac{\theta^3 d\theta}{(1 - \beta^2 + \epsilon^2)^2} \left[J_0^2(qa) + \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 J_1^2(qa) \right] \frac{d\omega}{\omega}. \quad (31.15)$$

Результаты при $r_0 = 0$ совпадают с результатами работы [34]. Кроме того, имеем (при $\alpha a \ll 1$)

$$E_x = \frac{ie}{2\pi^2 c} \frac{q}{q^2 + \alpha^2} J_0(qa) \cos \psi, \quad (31.16)$$

$$E_y = \frac{ie}{2\pi^2 c} \frac{q}{q^2 + \alpha^2} J_0(qa) \sin \psi. \quad (31.17)$$

Формулы (31.16) и (31.17) определяют поляризацию излучения: электрический вектор лежит в плоскости, содержащей векторы \vec{v} и \vec{n} .

г) Пролет через щель

Пусть заряженная частица пролетает через щель шириной a в непрозрачном экране. Траектория частицы перпендикулярна плоскости щели — плоскости $z = 0$. Выберем начало координат в точке пересечения траектории частицы с плоскостью щели, а ось x направим параллельно ее краям.

Расстояния от начала координат до краев щели обозначим через a_1 и a_2 ($a_1 + a_2 = a$). Из формул (31.8) и (31.9) находим поля излучения:

$$E_x(k_x, k_y) = \frac{iek_x}{4\pi^2 cf} \left[\frac{e^{-a_1(f-ik_y)}}{f-ik_y} + \frac{e^{-a_2(f+ik_y)}}{f+ik_y} \right], \quad (31.18)$$

$$E_y(k_x, k_y) = \frac{e}{4\pi^2 c} \left[\frac{e^{-a_1(f-ik_y)}}{f-ik_y} - \frac{e^{-a_2(f+ik_y)}}{f+ik_y} \right], \quad (31.19)$$

где

$$f = \sqrt{k_x^2 + a^2}, \quad k_x = k \sin \theta \cos \varphi, \quad k_y = k \sin \theta \sin \varphi,$$

θ — полярный, а φ — азимутальный углы излучения. Для числа излученных квантов с энергией $\hbar\omega$ отсюда получаем

$$N_\omega d\omega d\Omega = \frac{e^2}{8\pi^2 \hbar c} \frac{k^2}{f^2 (f^2 + k_y^2)} \left\{ (f^2 + k_x^2) (e^{-2fa_1} + e^{-2fa_2}) - \right. \\ \left. - 2 \frac{a^2 e^{-af}}{f^2 + k_y^2} [(f^2 - k_y^2) \cos ak_y - 2fk_y \sin ak_y] \right\} \frac{d\omega}{\omega} d\Omega, \quad (31.20)$$

где $d\Omega$ — телесный угол.

Когда a_1 (или a_2) стремится к бесконечности, то задача сводится к задаче об излучении заряда при перпендикулярном пролете рядом с плоскостью. Интегрируя по частотам, в этом случае получаем результат, совпадающий с результатом работы [35], если в последнем перейти к пределу малых углов излучения и перпендикулярного пролета.

Отметим следующее обстоятельство: при $r_0 \ll a$ (введенные выше величины a_1 и a_2 выражаются через r_0 формулой $a_{1,2} = \frac{a}{2} \pm r_0$) формулы (31.15) и (31.20) не содержат r_0 в первой степени. Этот факт является общим для всех симметричных отверстий и справедлив не только при малых отклонениях. Действительно, пролет по центру симметрии представляет собой экстремальный случай. Если представить число излученных квантов в виде ряда по r_0

$$N_{\omega} = A + Br_0 + Cr_0^2 + \dots, \quad (31.21)$$

то из условия экстремума

$$\left. \frac{\partial N_{\omega}}{\partial r_0} \right|_{r_0=0} = 0 \quad (31.22)$$

следует, что $B = 0$.

Интенсивность излучения мала. Например, при $\omega \approx \approx 10^{13} \text{ сек}^{-1}$, $\alpha = 1 \text{ мм}$, $r_0 = 0,1 \text{ мм}$, $\frac{v}{c} \approx 0,9999$, $\theta = 4^\circ$,

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $d\omega \sim 10^{12} \text{ сек}^{-1}$ число квантов, излученных одним электроном при пролете через круглое отверстие, равно $N_{\omega} d\omega \approx 3 \cdot 10^{-5}$. При пролете через щель для тех же значений параметров $N_{\omega} d\omega \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$.

д) Дифракционное излучение (точные методы)

В последнее время при решении задач по дифракционному излучению получил широкое распространение метод Винера — Хопфа (см. [36, 31]).

Для иллюстрации метода Винера—Хопфа рассмотрим излучение заряженной частицы, пролетающей вблизи полубесконечного плоского экрана, представляющего бесконечно тонкий идеально проводящий металл [35, 37].

Выберем ось z вдоль ребра экрана и расположим ось x в плоскости экрана ($x > 0$) перпендикулярно ребру. Частица с произвольной постоянной скоростью движется в плоскости, параллельной плоскости (y, z) под углом θ к плоскости экрана (ребру) и на расстоянии a от ребра (рис. 75).

Введем $A^0 = \{\vec{A}^0, \varphi^0\}$ — потенциалы поля частицы в пустоте (в отсутствии экрана) и $A = \{\vec{A}, \varphi\}$ — потенциалы, созданные индуцированными токами и зарядами $J = \{j, \rho\}$ на экране, т. е. потенциалы полей излучения. Потенциалы A подчиним условию Лоренца:

$$\text{div } \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\varepsilon = \mu = 1).$$

В дальнейшем в этом параграфе скорость света c принимается равной единице. Потенциалы A удовлетворяют уравнению

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A = -4\pi J. \quad (31.23)$$

Разлагая A и J в интегралы Фурье:

$$A(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\omega}(x, y, x) e^{ixz - i\omega t} dx d\omega, \quad (31.24)$$

$$J(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J_{\omega}(x, x) e^{ixz - i\omega t} dx d\omega$$

и подставляя (31.24) в (31.23), получаем уравнение для $A_{\omega}(x, y, x)$, решение которого имеет вид:

$$A_{\omega}(x, y, x) = i\pi \int_0^{\infty} dx' H_0^{(1)}(p \sqrt{(x-x')^2 + y^2}) J_{\omega}(x', x), \quad (31.25)$$

где

$$p = \sqrt{\omega^2 - x^2}, \quad \text{а } H_0^{(1)} \text{ — функция Ганкеля.}$$

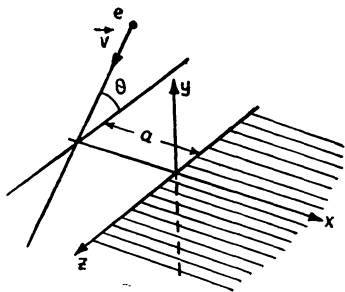


Рис. 75. Плоскость xz — плоскость идеально проводящего экрана. Частица движется в плоскости, параллельной плоскости yz под углом θ к ребру.

Умножим (31.25) при $y = 0$ на e^{ikx} и проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$. Введем обозначения:

$$\bar{A}^{\pm}(k) = \int_0^{\infty} \bar{A}_{\omega}(\pm x, x) e^{\pm ikx} dx, \quad (31.26)$$

$$J(k) = \int_0^{\infty} J_{\omega}(x, x) e^{ikx} dx.$$

(\bar{A} обозначает, что берется значение потенциалов на экране, т. е. при $y = 0$). Тогда из (31.25) получим функциональное уравнение типа Винера—Хопфа [36]:

$$\bar{A}^+(k) + \bar{A}^-(k) = h(k) J(k), \quad (31.27)$$

где

$$h(k) = \frac{2\pi i}{\sqrt{p^2 - k^2}}.$$

Функции со знаком „+“ или „—“ являются голоморфными, т. е. аналитическими функциями, не имеющими нулей соответственно в верхней и нижней полуплоскости комплексной переменной k [36]. $J(k)$ аналитична в верхней полуплоскости. Для определенности предположим, что $\text{Im } p = -\sigma < 0$. Тогда факторизация функции $h(k)$ (факторизация означает представление функции в виде произведения двух функций, одна из которых аналитическая и не имеет нулей на верхней полуплоскости, а другая — на нижней) дает

$$h(k) = \frac{h^+(k)}{h^-(k)}, \quad (31.28)$$

где

$$h^+(k) = \frac{2\pi i}{\sqrt{p-k}}, \quad h^-(k) = \sqrt{p+k}.$$

Легко видеть, что $h^+(k)$ аналитична и не имеет нулей в области $\text{Im } k > -\sigma$, а $h^-(k)$ — в области $\text{Im } k < \sigma$.

Из (31.28) и (31.27) получим

$$\bar{A}^+(k) h^-(k) + \bar{A}^-(k) h^-(k) = h^+(k) J(k). \quad (31.29)$$

Можно показать, что функцию $\bar{A}^+(k) h^-(k)$ можно представить в виде [36]

$$\bar{A}^+(k) h^-(k) = \lambda^-(k) - \lambda^+(k), \quad (31.30)$$

где

$$\lambda^\pm(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\delta}^{+\infty + i\delta} \bar{A}^+(k') h^-(k') \frac{dk'}{k' - k}, \quad 0 < \delta < \sigma. \quad (31.31)$$

Подставляя (31.30) в (31.29), получим

$$\lambda^-(k) + \bar{A}^-(k) h^-(k) = \lambda^+(k) + h^+(k) J(k). \quad (31.32)$$

Введем теперь функцию $P(k)$, равную правой части (31.32) в верхней полуплоскости и левой части (31.32) в нижней полуплоскости комплексной переменной k . Тогда, поскольку правая и левая части в (31.32) имеют общую полосу аналитичности $|\text{Im} k| < \sigma$, $P(k)$ будет голоморфна по всей плоскости. Изучение поведения функций $J(k)$ и $\bar{A}^\pm(k)$ при больших k сводится к рассмотрению поведения токов и потенциалов на ребре. Это поведение такое, что обеспечивает стремление к нулю функции $P(k)$ при $k \rightarrow \infty$. Однако если $P(k)$ голоморфна на всей плоскости и стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то, согласно теореме Лиувилля, $P(k) \equiv 0$. Тогда из (31.32) следует, что

$$J(k) = -\frac{\lambda^+(k)}{h^+(k)}. \quad (31.33)$$

Для определения $\lambda^+(k)$ нам надо знать $\bar{A}^+(k)$ (см. формулу (31.31)), которые являются фурье-образами компонент потенциалов полей излучения на поверхности экрана. Пользуемся для этого граничными условиями. На экране тангенциальная составляющая полного электрического поля равна нулю. Учитывая, что

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

и используя условие Лоренца, запишем граничное условие для скалярного потенциала в виде [38]

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + p^2 \bar{\varphi} = -\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial x^2} + x^2 \bar{\varphi}_0 + i\omega \frac{\partial \bar{A}_z^0}{\partial z}. \quad (31.34)$$

При выводе (31.34) было учтено, что $A_x^0 = 0$, $A_y = 0$.

Нулевые потенциалы равны

$$A^0 = \frac{e}{sv_y} e^{-\alpha(x+a)} \{0, \beta \cos \theta, \beta \sin \theta, 1\}, \quad (31.35)$$

где
$$s = \left[q^2 + \frac{1}{v_y^2} (\omega - xv_z)^2 - \omega^2 \right]^{1/2},$$

Из (31.34) и (31.35) получаем

$$\bar{\varphi} = C_1 e^{ipx} + C_2 e^{-ipx} - \frac{e}{sv_y} \left(1 - \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{1 - \frac{xv}{\omega} \cos \theta} \right) e^{-s(x+a)}. \quad (31.36)$$

Аналогичным образом из граничных условий найдем

$$\bar{A}_x = \frac{p}{\omega} C_1 e^{ipx} - \frac{p}{\omega} C_2 e^{-ipx} - \frac{e\beta^2}{i\omega v_y} \frac{\sin^2 \theta}{1 - \frac{xv}{\omega} \cos \theta} e^{-s(x+a)}, \quad (31.37)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Оставшаяся компонента A_z определяется из условия Лоренца.

Из требования ограниченности решения на больших расстояниях вытекает, что $C_1 = 0$. Определив затем C_2 из условия $j_x(x=0) = 0$ и используя (31.26), (31.31), (31.33), (31.36) и (31.37), получим

$$j_x(k) = B_{x\omega} \frac{p + is}{(k + is) \sqrt{p - k}}, \quad (31.38)$$

$$r(k) = -B_{x\omega} \left\{ \frac{\omega}{p(p-k)} - \frac{i\omega}{s} \left(\frac{1 - \frac{xv}{\omega} \cos \theta}{\beta^2 \sin^2 \theta} - 1 \right) \frac{\sqrt{p-k}}{k+is} \right\},$$

где

$$B_{x\omega} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{e\beta^2}{i\omega v_y} \frac{\sin^2 \theta \sqrt{p-is}}{1 - \frac{xv}{\omega} \cos \theta} e^{-sa}.$$

Введя сферическую систему координат $\{R, \psi, \varphi\}$, для энергии излучения находим [37]:

$$I(\psi, \varphi) = 2\pi \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 \sin \psi \left\{ |j_x(k_0, \alpha_0)|^2 \sin^2 \varphi + \right. \\ \left. + |j_x(k_0, \alpha_0) \cos \varphi - \rho(k_0, \alpha_0) \sin \psi|^2 \frac{1}{\cos^2 \psi} \right\}, \quad (31.39)$$

где

$$k_0 = \omega \sin \psi \cos \varphi, \quad \alpha_0 = \omega \cos \psi.$$

Подставляя сюда j_x и ρ из (31.38) и интегрируя по ω , получаем для углового распределения излучения формулу

$$I(\psi, \varphi) = \frac{e^{2\beta^2} \sin^2 \theta}{4\pi^2 a (1 - \beta \cos \theta \cos \psi)^{3/2}} \times \\ \times \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2} (\cos \psi - \beta \cos \theta)^2 + s_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (1 - \beta \cos \theta \cos \psi)}{s_0^3 |\beta_1 \sin \psi \cos \varphi - i s_0|^2}, \quad (31.40)$$

где

$$s_0^2 = \frac{(1 - \beta \cos \theta \cos \psi)^2 - \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi}{1 - \beta \cos \theta \cos \psi}, \quad (31.41)$$

$$\beta_1^2 = \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{1 - \beta \cos \theta \cos \psi}. \quad (31.42)$$

В работе [35] точно таким же методом рассмотрена аналогичная задача для случая, когда частица летит в плоскости (x, y) перпендикулярно ребру.

Метод Винера—Хопфа успешно применялся и в решении целого ряда других задач. Например, излучение линейного и точечного источников при пролете над проводящей пластинкой и системами пластинок, а также другие задачи, рассмотрены методом Винера—Хопфа [31]. При решении этих задач вместо уравнения (31.27) для неизвестной функции получается система парных интегральных уравнений вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(w) e^{iwy} dw = 0 \quad \text{при } y > 0, \quad (31.43)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(w) f(w) e^{iwy} dw = \psi(y) \quad \text{при } y < 0,$$

которая точно решается методом Винера—Хопфа. В зависимости от рассматриваемой задачи известные функции $\varphi(w)$ и $\psi(w)$ принимают конкретный вид (подробности см. в [31]).

П Р И Л О Ж Е Н И Я

I. Приведение формулы Бете—Гайтлера к переменным \vec{q} [1] (к § 5, 7)

В приближении малых углов и релятивистских энергий формула Бете—Гайтлера для поперечника тормозного излучения принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{\text{торм}} = & \frac{1}{\sigma} \frac{\varepsilon_2 d\omega}{(2\pi)^2 \varepsilon_1 \omega} \frac{[1 - F(q)]^2}{q^4} \theta_1 d\theta_1 \theta_2 d\theta_2 d\varphi_1 d\varphi_2 \times \\
 & \times \left\{ \frac{4\varepsilon_2^4 \theta_2^2}{(1 + \varepsilon_2^2 \theta_2^2)^2} (4\varepsilon_1^2 - q^2) + \frac{4\varepsilon_1^4 \theta_1^2}{(1 + \varepsilon_1^2 \theta_1^2)^2} (4\varepsilon_2^2 - q^2) - \right. \\
 & \cdot \frac{8\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \theta_1 \theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{(1 + \varepsilon_1^2 \theta_1^2)(1 + \varepsilon_2^2 \theta_2^2)} (4\varepsilon_1 \varepsilon_2 - q^2 + 2\omega^2) + \quad (1) \\
 & \left. + 8\omega^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\varepsilon_1^2 \theta_1^2 + \varepsilon_2^2 \theta_2^2}{(1 + \varepsilon_1^2 \theta_1^2)(1 + \varepsilon_2^2 \theta_2^2)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения: θ_1 и θ_2 — углы между импульсами начального и конечного электронов \vec{p}_1 и \vec{p}_2 и импульсом фотона \vec{k} , φ_1 (φ_2) — азимутальный угол между плоскостью \vec{k} , \vec{p}_1 (\vec{k} , \vec{p}_2) и произвольной плоскостью, проходящей через вектор \vec{k} (см. рис. 24). Используется система единиц $\hbar = c = m = 1$. Законы сохранения напишем в виде

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \omega, \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{k} + \vec{q}.$$

Перейдем от проекции переданного импульса q_x, q_y, q_z в системе координат x, y, z к проекциям переданного импульса $q_{\parallel}, q_{\perp} \cos \xi, q_{\perp} \sin \xi$ в системе координат x', y', z' . Ось x' направлена по импульсу начального электрона и составляет малый угол $\theta \ll 1$ со старой осью x , ξ — угол между \vec{q}_{\perp} и осью y' . Выпишем связь между проекциями \vec{q} в системах xyz и $x'y'z'$. Используя углы Эйлера θ, η, α (рис. 8), имеем:

$$\begin{aligned} q_y &= q_{\perp} \cos(\eta + \alpha + \xi) + q_{\parallel} \theta \sin \alpha, \\ q_z &= q_{\perp} \sin(\eta + \alpha + \xi) - q_{\parallel} \theta \cos \alpha, \\ q_x &= q_{\parallel} + q_{\perp} \theta \sin(\xi + \eta). \end{aligned} \quad (2)$$

Перейдем в формуле (1) от переменных $\{\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2$ к переменным $\theta_1, \theta_3, \psi_1, \psi_3$, где $\{\theta_3$ — угол рассеяния электрона, ψ_1 (ψ_3) — азимутальный угол, определяющий положение плоскости, проходящей через векторы \vec{k}, \vec{p}_1 (\vec{p}_2, \vec{p}_1) относительно произвольной плоскости, проходящей через вектор \vec{p}_1 (рис. 24). В кристалле последняя плоскость связывается с кристаллической решеткой. Заметим, что формула Бете-Гайтлера (1) зависит от разности $\varphi_2 - \varphi_1$, но не от φ_1 и φ_2 в отдельности. В этом случае переход от переменных $\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2$ к переменным $\theta_1, \theta_3, \psi_1, \psi_3$ осуществляется с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} \theta_2^2 &= \theta_1^2 + \theta_3^2 - 2\theta_1\theta_3 \cos(\psi_3 - \psi_1), \\ \theta_3^2 &= \theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \theta_1 d\theta_1 \theta_2 d\theta_2 d\varphi_1 d\varphi_2 &= \theta_1 d\theta_1 \theta_3 d\theta_3 d\psi_1 d\psi_3, \end{aligned} \quad (3)$$

которые легко получить, написав выражение для $\cos \theta_2$ и $\cos \theta_3$:

$$\cos \theta_2 = \cos \theta_1 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_3 \cos (\psi_1 - \psi_3),$$

$$\cos \theta_3 = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)$$

и переходя к пределу малых углов $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

Свяжем теперь углы $\psi = \psi_3 - \psi_1, \theta_1, \theta_3$ с введенными выше углами Эйлера θ, η, α . Воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} q_{\perp y'} &= q_{\perp} \cos \xi = -p_2 \theta_3 \cos \psi_3 - \omega \theta_1 \cos \psi_1, \\ q_{\perp z'} &= q_{\perp} \sin \xi = -p_2 \theta_3 \sin \psi_3 - \omega \theta_1 \sin \psi_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем вместо углов ψ_3 и ψ_1 углы $\psi = \psi_3 - \psi_1$ и ψ_1 . Тогда (4) можно переписать так:

$$\begin{aligned} q_{\perp y'} &= q_{\perp} \cos (\psi_1 + \beta), \\ q_{\perp z'} &= q_{\perp} \sin (\psi_1 + \beta), \end{aligned} \quad (5)$$

где угол β определяется из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} q_{\perp} \cos \beta &= -\omega \theta_1 - p_2 \theta_3 \cos \psi, \\ q_{\perp} \sin \beta &= -p_2 \theta_3 \sin \psi, \end{aligned} \quad (6)$$

откуда следует

$$q_{\perp}^2 = p_2^2 \theta_3^2 + \omega^2 \theta_1^2 + 2\omega p_2 \theta_1 \theta_3 \cos \psi. \quad (7)$$

Как видно из (5), введенный выше угол ξ равен $\xi = \psi_1 + \beta$.

Перейдем в формуле (1) к новым переменным:

$$\theta_1, \theta_2, \varphi \rightarrow \theta_1, \theta_3, \psi \rightarrow \theta_1, \theta_3, q_{\perp}, \quad (8)$$

используя уже полученные соотношения между новыми и старыми переменными (3) и (7). Далее, при переходе к новым переменным будем предполагать, что имеют место условия

$$q \ll \varepsilon_1, \quad q \ll \varepsilon_2, \quad q \ll \omega, \quad (9)$$

которые всегда выполняются при высоких энергиях и значительно облегчают намеченный переход.

Так как $d\sigma$ не зависит от угла ψ_1 , то интегрирование по ψ_1 сводится к умножению поперечника на 2π . Совершив указанные подстановки в (1), после простых преобразований придем к формуле

$$d\sigma_{\text{торм}} = 8\sigma \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{d\omega}{\omega} \frac{[1 - F(q)]^2}{q^4} \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \theta_1 d\theta_1 \theta_3 d\theta_3 d\psi \times$$

$$\times \left\{ -\frac{1}{(1 + \varepsilon_1^2 \theta_1^2)^2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_2^2 \theta_2^2)^2} + \frac{2 + q_{\perp}^2 (1 + \omega\delta)}{(1 + \varepsilon_1^2 \theta_1^2) (1 + \varepsilon_2^2 \theta_2^2)} \right\}. \quad (10)$$

Перейдем в (10) от ψ к переменной q_{\perp} . С помощью формулы (7) получим

$$d\psi = -\frac{dq_{\perp}^2}{\sqrt{4p_2^2 \omega^2 \theta_1^2 \theta_3^2 - (q_{\perp}^2 - p_2^2 \theta_3^2 - \omega^2 \theta_1^2)^2}}. \quad (11)$$

Переменные θ_1^2 и θ_3^2 в выражении (10) выразим через новые переменные q_{\parallel} и x , согласно соотношениям

$$2(q_{\parallel} - \delta) = \omega \theta_1^2 + p_2 \theta_3^2, \quad (12)$$

$$x = \omega^2 \theta_1^2 - p_2^2 \theta_3^2 - q_{\perp}^2 (1 - 2\varepsilon_2/\varepsilon_1).$$

Якобиан последнего преобразования равен: $\frac{\partial(\theta_1^2, \theta_3^2)}{\partial(q_{\parallel}, x)} =$
 $= -\frac{2}{\omega p_1 p_2}$. С учетом (11) и (12) перепишем формулу (10)

в виде

$$d\sigma_{\text{торм}} = 4\sigma \frac{\varepsilon_2^2 d\omega}{\pi \omega^2} \frac{dq_{\perp}^2 dq_{\parallel} dx}{\sqrt{4p_2^2 \omega^2 \theta_1^2 \theta_3^2 - (q_{\perp}^2 - p_2^2 \theta_3^2 - \omega^2 \theta_1^2)^2}} \times$$

$$\times \left\{ -\frac{1}{(1 + \varepsilon_1^2 \theta_1^2)^2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_2^2 \theta_2^2)^2} + \frac{2 + q_{\perp}^2 (1 + \omega\delta)}{(1 + \varepsilon_1^2 \theta_1^2) (1 + \varepsilon_2^2 \theta_2^2)} \right\}. \quad (13)$$

Нам осталось выразить подкоренное выражение и выражение в фигурных скобках через новые переменные q_{\parallel} и x .

Для корня получим:

$$[4p_2^2 \omega^2 \theta_1^2 \theta_3^2 + (q_{\perp}^2 - p_2^2 \theta_3^2 - \omega^2 \theta_1^2)^2]^{1/2} = \sqrt{\omega^2 - x^2}, \quad (14)$$

где

$$\omega^2 = 8 \frac{\omega \varepsilon_2}{\varepsilon_1} q_{\perp}^2 (q_{\parallel} - \delta - q_{\perp}^2 / 2\varepsilon_1).$$

Из условия положительности подкоренного выражения найдем пределы изменения переменной x :

$$-w \leq x \leq w, \quad (15)$$

что приводит к следующему условию для q_{\parallel} :

$$q_{\parallel} \geq \delta + q_{\perp}^2/2\varepsilon_1. \quad (16)$$

Выражение в фигурных скобках в (13) легко выразить через переменные q_{\parallel} и x , замечая, что

$$1 + \varepsilon_2^2 \theta_2^2 = \frac{1}{\delta} (q_{\parallel} - q_{\perp}^2/2\varepsilon_1),$$

$$1 + \varepsilon_1^2 \theta_1^2 = \frac{1}{2\delta\varepsilon_2} [x + 2\varepsilon_2 q_{\parallel} + q_{\perp}^2 (\omega - \varepsilon_2)/\varepsilon_1].$$

Отметим еще, что пределы интегрирования по q_{\perp}^2 равны 0 и ∞ и при изменении ψ от 0 до 2π переменная q_{\perp}^2 принимает значения в области $0 < q_{\perp}^2 < \infty$ дважды, поэтому, переходя от ψ к интегралу по q_{\perp}^2 , результат интегрирования нужно умножить на два. Формула (13) принимает теперь вид:

$$d\sigma_{\text{торм}} = 2\bar{\sigma} \frac{d\omega}{\pi\varepsilon_1^2} \int_0^{\infty} dq_{\perp}^2 \int_{\delta + q_{\perp}^2/2\varepsilon_1}^{\infty} dq_{\parallel} \frac{[1 - F(q)]^2}{q^4} \int_{-w}^w \frac{dx}{\sqrt{w^2 - x^2}} \times$$

$$\times \left\{ -\frac{1}{(q_{\parallel} - q_{\perp}^2/2\varepsilon_1)^2} - \frac{4\varepsilon_2^2}{x + 2\varepsilon_2 q_{\parallel} + q_{\perp}^2 (\omega - \varepsilon_2)/\varepsilon_1} + \right. \quad (17)$$

$$\left. + \frac{2\varepsilon_2 [2 + q_{\perp}^2 (1 + \omega\delta)]}{(q_{\parallel} - q_{\perp}^2/2\varepsilon_1) \left[x + 2\varepsilon_2 q_{\parallel} + q_{\perp}^2 \frac{\omega - \varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right]} \right\}.$$

Проинтегрировав эту формулу по x , после простых вычислений получим формулу Бете — Гайтлера для поперечника тормозного излучения в переменных q (см. формулу (5.1)):

$$d\sigma_{\text{норм}} = 2\sigma \frac{d\omega}{\varepsilon_1^2} \int_0^\infty dq_\perp^2 \int_{\delta + q_\perp^2/2\varepsilon_1} dq_\parallel \frac{[1 - F(q)]^2}{q^4} \left\{ - \frac{1}{(q_\parallel - q_\perp^2/2\varepsilon_1)^2} - \frac{q_\parallel + q_\perp^2(\omega - \varepsilon_2)/2\varepsilon_1\varepsilon_2}{[(q_\parallel - q_\perp^2/2\varepsilon_2)^2 + 4\delta^2 q_\perp^2]^{3/2}} + \frac{2 + q_\perp^2(1 + \omega\delta)}{(q_\parallel - q_\perp^2/2\varepsilon_1)[(q_\parallel - q_\perp^2/2\varepsilon_2)^2 + 4\delta^2 q_\perp^2]^{1/2}} \right\}. \quad (18)$$

Аналогично совершается переход к переменным \vec{q} в случае рождения электронно-позитронной пары фотонов в поле ядра. В приближении малых углов и больших энергий формула Бете—Гайтлера для поперечника рождения электронно-позитронной пары принимает вид

$$d\sigma_{\text{пары}} = -\frac{\varepsilon_+ \varepsilon_- d\varepsilon_+}{(2\pi)^2 \omega^3} \frac{[1 - F(q)]^2}{q^4} \theta_+ d\theta_+ \theta_- d\theta_- d\Phi_+ d\Phi_- \times \left\{ \frac{4\varepsilon_+^4 \theta_+^2}{(1 + \varepsilon_+^2 \theta_+^2)^2} (4\varepsilon_-^2 - q^2) + \frac{4\varepsilon_-^4 \theta_-^2}{(1 + \varepsilon_-^2 \theta_-^2)^2} (4\varepsilon_+^2 - q^2) + \frac{8\varepsilon_+^2 \varepsilon_-^2 \theta_+ \theta_- \cos \Phi}{(1 + \varepsilon_+^2 \theta_+^2)(1 + \varepsilon_-^2 \theta_-^2)} (4\varepsilon_+ \varepsilon_- + q^2 - 2\omega^2) - 8\omega^2 \varepsilon_+ \varepsilon_- \frac{\varepsilon_+^2 \theta_+^2 + \varepsilon_-^2 \theta_-^2}{(1 + \varepsilon_+^2 \theta_+^2)(1 + \varepsilon_-^2 \theta_-^2)} \right\}. \quad (19)$$

Здесь опять принято $\hbar = c = m = 1$. Обозначение углов показано на рис. 76.

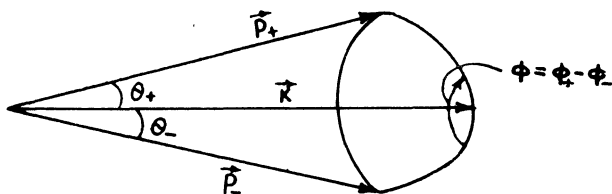


Рис. 76. Сферический треугольник, определяющий относительное расположение векторов \vec{p}_- , \vec{p}_+ , \vec{k} .

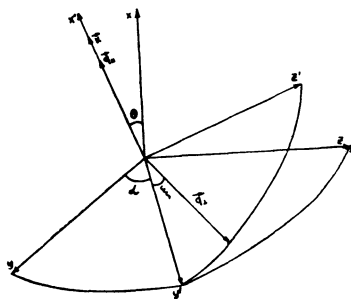


Рис. 77. Система координат xuz выбрана вдоль осей кристаллической решетки. Ось x' направлена вдоль направления влета кванта \vec{k} .

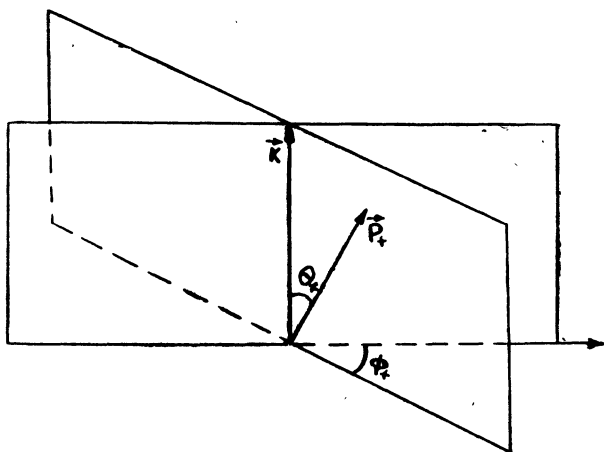


Рис. 78. Азимутальный угол Φ_+ определяет положение плоскости (\vec{k}, \vec{p}_+) относительно произвольной плоскости, проходящей через вектор \vec{k} .

С помощью законов сохранения

$$\omega = \varepsilon_+ + \varepsilon_-, \quad \vec{k} = \vec{p}_+ + \vec{p}_- + \vec{q}$$

выпишем следующие соотношения (см. рис. 77, 78):

$$\begin{aligned} q_{\perp y'} &= -p_+ \theta_+ \cos \Phi_+ - p_- \theta_- \cos \Phi_- = q_{\perp} \cos(\Phi_+ + \beta), \\ q_{\perp z'} &= -p_+ \theta_+ \sin \Phi_+ - p_- \theta_- \sin \Phi_- = q_{\perp} \sin(\Phi_+ + \beta). \end{aligned} \quad (20)$$

β определяется формулами

$$\begin{aligned} q_{\perp} \cos \beta &= -p_{+} \theta_{+} - p_{-} \theta_{-} \cos \Phi, \\ q_{\perp} \sin \beta &= -p_{-} \theta_{-} \sin \Phi, \end{aligned} \quad (21)$$

откуда

$$q_{\perp}^2 = \varepsilon_{+}^2 \theta_{+}^2 + \varepsilon_{-}^2 \theta_{-}^2 + 2\varepsilon_{+}\varepsilon_{-}\theta_{+}\theta_{-} \cos \Phi. \quad (22)$$

Дальнейшее преобразование поперечника совершается так же, как и в случае тормозного излучения. Предполагаем, что $q \ll \varepsilon_{+}$, $q \ll \varepsilon_{-}$, совершаем переход от Φ_{+} , Φ_{-} к Φ , $\Phi = \Phi_{+} - \Phi_{-}$, интегрируем поперечник по Φ_{-} , что сводится к умножению на 2π . Далее, от Φ переходим к q_{\perp}^2 по формуле (22). Тогда интегральный поперечник рождения электронно-позитронной пары в переменных θ_{+}^2 , θ_{-}^2 , q_{\perp}^2 примет вид

$$\begin{aligned} d\sigma_{\text{пары}} &= -\frac{4\varepsilon_{+}^3 \varepsilon_{-}^3 d\varepsilon_{+}}{\pi\omega^3} \int d\theta_{+}^2 \int d\theta_{-}^2 \int dq_{\perp}^2 \frac{|1-F(q)|^2}{q^4} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon_{+}^2 \varepsilon_{-}^2 \theta_{+}^2 \theta_{-}^2 - (\varepsilon_{+}^2 \theta_{+}^2 + \varepsilon_{-}^2 \theta_{-}^2 - q_{\perp}^2)^2}} \times \\ &\times \left\{ \frac{2 + q_{\perp}^2 (1 + \omega\delta)}{(1 + \varepsilon_{+}^2 \theta_{+}^2)(1 + \varepsilon_{-}^2 \theta_{-}^2)} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{+}^2 \theta_{+}^2)^2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{-}^2 \theta_{-}^2)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\delta = q_{\min} = \frac{\omega}{2\varepsilon_{+}\varepsilon_{-}}$. Перейдем, наконец, от переменных

θ_{+}^2 , θ_{-}^2 к переменным $q_{\parallel} - \delta$ и x по формулам

$$\begin{aligned} q_{\parallel} - \delta &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{+}^2 \theta_{+}^2 + \varepsilon_{-}^2 \theta_{-}^2), \\ x &= \varepsilon_{-}^2 \theta_{-}^2 - \varepsilon_{+}^2 \theta_{+}^2 + q_{\perp}^2 (\varepsilon_{+} - \varepsilon_{-})/\omega. \end{aligned} \quad (24)$$

Якобиан этого преобразования равен $\frac{\partial (\theta_{+}^2, \theta_{-}^2)}{\partial (x, q_{\parallel} - \delta)} = \frac{2}{\omega\varepsilon_{+}\varepsilon_{-}}$.

Пределы изменения x определяются условием положительности подкоренного выражения в (23):

$$-w \leq x \leq w, \quad (25)$$

где $w = 2q_{\perp} \sqrt{\frac{1}{\delta} (q_{\parallel} - \delta - q_{\perp}^2/2w)}$. Откуда следует, что $q_{\parallel} \geq \delta + q_{\perp}^2/2w$. Переходя в (23) от $\theta_{+}^2, \theta_{-}^2$ к q_{\parallel} и x по формулам (24) и произведя интегрирование по x , получим следующую формулу для поперечника рождения электронно-позитронной пары в переменных \vec{q} :

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{\text{пары}} = & \frac{4\varepsilon_{+}\varepsilon_{-}}{\omega^3} d\varepsilon_{+} \int_0^{\infty} dq_{\perp}^2 \int_{\delta + q_{\perp}^2/2w} dq_{\parallel} \frac{[1 - F(q)]^2}{q^4} \times \\
 & \times \left\{ \delta \frac{q_{\parallel} + q_{\perp}^2 (\varepsilon_{-} - \varepsilon_{+})/2w\varepsilon_{+}}{[(q_{\parallel} - q_{\perp}^2/2\varepsilon_{+})^2 + q_{\perp}^2/\varepsilon_{+}^2]^{3/2}} + \right. \\
 & \left. + \delta \frac{q_{\parallel} + q_{\perp}^2 (\varepsilon_{+} - \varepsilon_{-})/2w\varepsilon_{-}}{[(q_{\parallel} - q_{\perp}^2/2\varepsilon_{-})^2 + q_{\perp}^2/\varepsilon_{-}^2]^{3/2}} - \right. \\
 & \left. - [2 + q_{\perp}^2 (1 - w\delta)] \left[\frac{1}{2q_{\parallel} \varepsilon_{+} [(q_{\parallel} - q_{\perp}^2/2\varepsilon_{+})^2 + q_{\perp}^2/\varepsilon_{+}^2]^{1/2}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2q_{\parallel} \varepsilon_{-} [(q_{\parallel} - q_{\perp}^2/2\varepsilon_{-})^2 + q_{\perp}^2/\varepsilon_{-}^2]^{1/2}} \right] \right\}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

II. Учет тепловых колебаний (§ 7)

При расчете поперечников тормозного излучения необходимо учитывать также процессы с возбуждением фононов; при которых кристалл из состояния $\Psi_0(\tau)$ переходит в состояние $\Psi_n(\tau)$, где τ — координаты атомов решетки в конфигурационном пространстве. В таком случае в формулу

(7.4) вместо множителя $\left| \sum_i e^{i\vec{k}\vec{r}_i} \right|^2$ будет входить множитель [2]

$$\left| \sum_i \int \Psi_n^*(\tau) e^{i\vec{k}\vec{r}_i} \Psi_0(\tau) d\tau \right|^2. \quad (1)$$

Поскольку на эксперименте не фиксируется конечное состояние кристалла, необходимо просуммировать выражение (1) по всем конечным состояниям кристаллической решетки:

$$\sum_n \sum_{ij} \int \Psi_n^*(\tau) \Psi_n(\tau') e^{i\vec{k}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \Psi_0(\tau) \Psi_0^*(\tau') d\tau d\tau'. \quad (2)$$

Учитывая, что $\hbar\vec{k}$ соответствует передаваемому импульсу (см. гл. II), запишем законы сохранения:

$$\begin{aligned} \hbar\vec{k} &= \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \frac{\hbar\omega}{c}\vec{n}, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_1 - (E_n - E_0) - \hbar\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Энергия возбуждения кристалла $E_n - E_0$ порядка долей электронвольта и ею можно пренебречь по сравнению с начальной энергией электрона ε_1 . Тогда из (3) следует, что \vec{k} не зависит от E_n и, следовательно, в (2) можно вынести $e^{i\vec{k}\vec{r}_i}$ за знак суммы по n . Учитывая полноту функций $\Psi_n(\tau)$,

$$\sum_n \Psi_n^*(\tau) \Psi_n(\tau') = \delta(\tau' - \tau),$$

вместо (2) получим

$$\sum_{ij} \int e^{i\vec{k}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)} |\Psi_0(\tau)|^2 d\tau. \quad (4)$$

Таким образом, суммирование по всем возможным состояниям кристаллической решетки сводится к усреднению поперечника по начальному состоянию. При независимости тепловых колебаний отдельных атомов последнее означает обычное усреднение интерференционного множителя по тепловым колебаниям решетки, аналогично тому, как это делается в теории рентгеновских лучей. Произведем это усреднение [2, 3, 4, 5]. При изложении этого вопроса следуем работе [3].

Поскольку атомы кристаллической решетки совершают малые тепловые колебания около положений равновесия,

можно записать координаты \vec{r}_i атомов, входящие в интерференционный множитель $\left| \sum_i e^{i\vec{k}\vec{r}_i} \right|^2$, в виде

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i0} + \vec{u}_i, \quad (5)$$

где \vec{r}_{i0} — координата равновесного положения i -ого атома, \vec{u}_i — отклонение этого атома от положения равновесия.

Прямоугольные компоненты вектора \vec{u}_i обозначим через ξ_i , η_i , ζ_i . Тогда

$$\left| \sum_i e^{i\vec{k}\vec{r}_i} \right|^2 = \sum_{l,i} K_{il} e^{i\vec{k}(\vec{r}_{i0} - \vec{r}_{l0})}, \quad (6)$$

где

$$K_{il} = e^{i[k_x(\xi_i - \xi_l) + k_y(\eta_i - \eta_l) + k_z(\zeta_i - \zeta_l)]}$$

Усреднение интерференционного множителя сводится к усреднению K_{il} . При этом очевидно, что при $i=l$ $K_{il} = 1$.

Пусть колебания атомов настолько малы, что потенциальная энергия кристалла, связанная с отклонением атомов от положений равновесия, является квадратичной формой. В этом случае, обозначая компоненты смещения атомов вместо $\xi_1, \eta_1, \dots, \zeta_N$ через x_1, x_2, \dots, x_{3N} и используя распределения Гаусса для этих смещений, можем написать выражение для вероятности $W(x_1, x_2, \dots, x_{3N}) dx_1 dx_2 \dots dx_{3N}$ определенной конфигурации атомов в общем виде:

$$W = D^{1/2} (2\pi)^{-3N/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{3N} B_{mn} x_m x_n\right), \quad (7)$$

где $D = \text{Det}(B_{mn})$, N — число атомов в кристалле. Написанное выражение справедливо как в классической статистике, так и в квантовой, что непосредственно следует из вида выражения для квантовомеханической вероятности координаты осциллятора, которая так же, как и в классике, имеет

гауссову форму. Различие в статистиках приводит лишь к иной зависимости коэффициентов B_{mn} от температуры.

Обозначим в выражении для K_{il} компоненты k_x, k_y, k_z через t_i в соответствии с шестью переменными $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, -\xi_l, -\eta_l, -\zeta_l$, которые мы обозначим через x_i ($i=1, 2, \dots, 6$). Тогда, опуская индексы i, l , получим следующее выражение для среднего значения \bar{K} :

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \overline{\exp\left(i \sum_{i=1}^6 t_i x_i\right)} = \\ &= (2\pi)^{-3N/2} D^{1/2} \int \exp\left\{i \sum_{i=1}^6 t_i x_i - \frac{1}{2} \sum_{m, n=1}^{3N} B_{mn} x_m x_n\right\} dx_1 \cdots dx_{3N}. \end{aligned} \quad (8)$$

Результат интегрирования есть

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \text{const } e^{-P}, \\ P &= \sum_{i, j=1}^6 a_{ij} t_i t_j. \end{aligned} \quad (9)$$

Сравнивая (9) с двумя соотношениями

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial t_i \partial t_j}\right)_{t=0} &= - \int x_i x_j W dx_1 \cdots dx_{3N} = - \overline{x_i x_j}, \\ (\bar{K})_{t=0} &= \int W dx_1 \cdots dx_{3N} = 1, \quad (\text{условие нормировки}) \end{aligned}$$

мы находим

$$a_{ij} = \overline{x_i x_j} \quad \text{и} \quad \text{const} = 1.$$

Подставляя в (9), получаем:

$$\bar{K} = e^{-P}, \quad P = \frac{1}{2} \sum_{i, l=1}^6 \overline{x_i x_l} t_i t_l. \quad (10)$$

Квадратичная форма P содержит всего 21 неподобных членов. Выделим их в группы.

1) 12 членов типа $\frac{1}{2} k_x^2 \overline{\xi_i^2}, \dots, \frac{1}{2} k_x^2 \overline{\xi_l^2}, \dots, k_x k_y \overline{\xi_i \eta_i}, \dots,$ содержащих произведения смещений в одной и той же точке.

Величины $\overline{\xi_i \eta_i}$ представляют симметричный тензор, поэтому недиагональные компоненты этого тензора можно обратить в нуль, выбрав координатные оси x, y, z , направленными по главным осям этого тензора. Это сокращает число членов до 6. Далее, если пренебречь влиянием поверхности, то диагональные элементы не зависят от номера атома, т. е.

$$\overline{\xi_i^2} = \overline{\xi_l^2} = \overline{u_x^2}, \quad \overline{\eta_i^2} = \overline{\eta_l^2} = \overline{u_y^2}, \quad \overline{\zeta_i^2} = \overline{\zeta_l^2} = \overline{u_z^2}.$$

Тогда сумма остающихся трех членов есть

$$2M = k_x^2 \overline{u_x^2} + k_y^2 \overline{u_y^2} + k_z^2 \overline{u_z^2}.$$

2) 9 членов типа $k_x^2 \overline{\xi_i \xi_l}$, $k_x k_y \overline{\xi_i \eta_l}$, \dots , содержащие смещение в разных точках. Сумму этих членов мы обозначим через

$$R_{il} = k_x^2 \overline{\xi_i \xi_l} + k_x k_y \overline{\xi_i \eta_l} + \dots + k_z^2 \overline{\zeta_i \zeta_l}.$$

В величину P координаты разных точек входят с разными знаками, поэтому для P_{il} мы имеем сейчас следующее выражение:

$$P_{il} = 2M - R_{il},$$

Очевидно, имеет место равенство $R_{il} = 2M$. Следовательно, интерференционный множитель имеет вид

$$\begin{aligned} \left| \sum_i e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} \right|^2 &= e^{-2M} \sum_{i, l=1}^N e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_{i0} - \vec{r}_{l0})} - \\ &- e^{-2M} \sum_{i, l=1}^N (1 - e^{R_{il}}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_{i0} - \vec{r}_{l0})}. \end{aligned}$$

Если атомы совершают колебания независимо друг от друга, то $R_{il} = 0$ при $i \neq l$, ибо выражения типа $\overline{\xi_i \xi_l}$ в этом случае равны нулю. Тогда, введя обозначения $2M = k^2 \overline{u^2}$, мы приходим окончательно к следующему выражению для интерференционного множителя:

$$\left| \sum_i e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} \right|^2 = N [1 - e^{-k^2 \overline{u^2}}] + e^{-k^2 \overline{u^2}} \left| \sum_i e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_{i0}} \right|^2. \quad (11)$$

Здесь $\overline{u^2}$ — средний квадрат тепловых колебаний атомов в решетке: $\overline{u^2} = \overline{u_x^2} = \overline{u_y^2} = \overline{u_z^2}$. Значение $\overline{u_x^2}$ определяется в статистической физике и дается следующим выражением:

$$\overline{u^2} = \overline{u_x^2} = \frac{3\hbar^2}{4M_a k \theta_D} \left[1 + 4 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^2 \int_0^{\theta_D/T} \frac{y dy}{e^y - 1} \right], \quad (12)$$

M_a — масса атома решетки, θ_D — температура Дебая, k — постоянная Больцмана.

III. Основные свойства обратной решетки и вычисление структурного фактора [6, 7] (к § 8, 9)

Кристаллическую решетку можно построить, периодически перемещая (повторяя) „элементарную ячейку“. „Элементарная ячейка“ может содержать один (в этом случае она называется примитивной) или несколько атомов. Вектор, соединяющий два произвольных узла решетки, всегда можно представить в виде линейной комбинации с целочисленными коэффициентами небольшого количества базисных векторов решетки. Например, для простой кубической решетки базисными векторами являются три вектора, направленные вдоль кубических осей. Длина базисных векторов равна длине ребра куба.

Положение плоскости в решетке задается индексами Миллера. Они определяются следующим способом: найдем координаты тех точек, в которых данная плоскость пересекает основные координатные оси кристалла; возьмем обратные значения полученных чисел и приведем их к общему знаменателю (отрицательные числа обозначаются чертой сверху, например $(0\bar{1}0)$), тогда тройка числа (lmn) (знаменатель откидывается) будет определять семейство параллельных плоскостей. Например, грани кубического кристалла имеют индексы Миллера

$$(100), (010), (001), (\bar{1}00), (0\bar{1}0), (00\bar{1}).$$

Направления в кристалле определяются выражением $[lmn]$. l, m, n — есть набор наименьших целых чисел, которые так относятся друг к другу, как компоненты вектора, параллельного данному направлению. Например, отрицательное направление оси y обозначается символом $[0\bar{1}0]$.

Положения узлов элементарной ячейки задаются в единицах постоянных решетки. Положение начала координат совмещается с вершиной элементарной ячейки. Приведем основные сведения, касающиеся обратной решетки. Если обозначить через $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ базисные векторы элементарной ячейки прямой кристаллической решетки, то базисные векторы элементарной ячейки обратной решетки определяются так (введенный в главе II вектор обратной решетки отличается коэффициентом 2π):

$$\vec{g}_1 = \frac{[\vec{b}_2 \vec{b}_3]}{\Delta}, \quad \vec{g}_2 = \frac{[\vec{b}_3 \vec{b}_1]}{\Delta}, \quad \vec{g}_3 = \frac{[\vec{b}_1 \vec{b}_2]}{\Delta}, \quad (1)$$

где Δ — объем элементарной ячейки. Отметим, что

$$\vec{g}_i \vec{b}_k = \delta_{ik}. \quad (2)$$

Легко проверить, что объем обратной элементарной ячейки V и объем элементарной ячейки прямой решетки Δ связаны соотношением

$$\Delta = \frac{1}{V}. \quad (3)$$

Произвольный вектор в обратной решетке можно записать в виде

$$\vec{g} = l\vec{g}_1 + m\vec{g}_2 + n\vec{g}_3. \quad (4)$$

Покажем, что вектор $\vec{g}(l, m, n)$ обратной решетки перпендикулярен плоскости (lmn) прямой решетки. Легко видеть, что векторы $\frac{\vec{b}_1}{l} - \frac{\vec{b}_2}{m}$ и $\frac{\vec{b}_2}{m} - \frac{\vec{b}_3}{n}$ лежат в плоскости (lmn) .

Но вектор \vec{g} перпендикулярен обоим этим векторам. Для

доказательства этого утверждения необходимо использовать соотношение (2).

Покажем, что длина вектора $\vec{g}(l, m, n)$ обратной решетки равна $\frac{1}{d}$, где d — расстояние между плоскостями (lmn) прямой решетки.

Учитывая, что единичный вектор нормали к плоскостям (lmn) есть $\frac{\vec{g}}{|\vec{g}|}$, получим, что расстояние между соседними плоскостями с индексами (lmn) есть

$$d = \frac{\vec{g}\vec{b}_1}{l|\vec{g}|}.$$

Используя соотношение (2), получим

$$d = \frac{1}{|\vec{g}|}. \quad (5)$$

Наконец, докажем справедливость формулы (8.21). Рассмотрим

$$\sum_i e^{iq \vec{r}_{i0}/\hbar}. \quad (6)$$

Условие периодичности приводит к требованию, чтобы при прибавлении к \vec{r}_{i0} любого вектора типа $\vec{l}\vec{b}_1 + \vec{m}\vec{b}_2 + \vec{n}\vec{b}_3$ сумма (6) оставалась без изменения. Это будет выполнено, если вектор \vec{q}/\hbar имеет вид

$$\vec{q}/\hbar = 2\pi\vec{g}, \quad (7)$$

где \vec{g} — произвольный вектор обратной решетки (в гл. II коэффициент 2π введен в определение \vec{g}). Равенство (7) сразу следует из условия (2). Следовательно, сумма (6) отлична от нуля только при выполнении равенства (7).

Займемся теперь вычислением структурного фактора $S(\vec{g})$ для некоторых частных случаев. Как видно из (9.2), интерференционный множитель представляется в виде

$$\left| \sum_i e^{i\vec{k}\vec{r}_{i0}} \right|^2 = |S(\vec{k})|^2 \left| \sum_i e^{i\vec{k}\vec{r}_i} \right|^2, \quad (8)$$

где величина

$$S(\vec{k}) = \sum_j e^{i\vec{k}\vec{\rho}_j} = \sum_j e^{i(k_x \rho_{jx} + k_y \rho_{jy} + k_z \rho_{jz})} \quad (9)$$

называется структурным фактором.

Представим $\vec{\rho}_j$ в виде

$$\vec{\rho}_j = u_j \vec{b}_1 + v_j \vec{b}_2 + w_j \vec{b}_3, \quad (10)$$

так что

$$\rho_{jx} = u_j b_1, \quad \rho_{jy} = v_j b_2, \quad \rho_{jz} = w_j b_3,$$

где u_j, v_j, w_j — проекции $\vec{\rho}_j$ на оси $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ (или x, y, z), измеряемые в долях основных трансляционных длин b_1, b_2, b_3 .

Условие (7) означает, что должны иметь место следующие равенства:

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{2\pi}{b_1} l, \\ k_y &= \frac{2\pi}{b_2} m, \\ k_z &= \frac{2\pi}{b_3} n. \end{aligned} \quad (11)$$

Мы можем формально ввести $|S|^2$ под знак суммы по l, m, n (по векторам обратной решетки), подставив в (9) соответствующие вышеприведенные значения для векторов \vec{k} и $\vec{\rho}_j$. Под S в этом случае следует понимать

$$S_{lmn} = \sum_j e^{2\pi i(lu_j + mv_j + nw_j)}. \quad (12)$$

Очевидно, если атомы имеются лишь в узлах ячейки (т. е. если ячейка примитивная), то $u_j = v_j = w_j = 0$ и $S_{lmn} = 1$. Приведем пример расчета структурного фактора S_{lmn} для двух типов сложных кристаллических ячеек.

1. Гранецентрированная ячейка. Каждой такой ячейке принадлежат 4 атома со следующими тройками чисел u_j, v_j, w_j :

$$000, \quad \frac{1}{2} \frac{1}{2} 0, \quad \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}, \quad 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}.$$

В соответствии с этим, принимая во внимание, что l, m, n — целые числа, имеем:

$$\begin{aligned} S_{lmn} &= \sum_j e^{2\pi i(lu_j + mv_j + nw_j)} = \\ &= 1 + \cos \pi(l + m) + \cos \pi(l + n) + \cos \pi(m + n). \end{aligned} \quad (13)$$

Из последнего видно, что значение S_{lmn} определяется четностью индексов. Если четность всех трех индексов одинакова (знак не имеет значения), то $S_{lmn} = 4$, если же l, m, n — числа разной четности, то структурный фактор равен нулю.

2. Ячейка типа алмаза. Такой ячейкой обладают алмаз, кремний, германий, олово. Пространственная решетка алмаза является кубической гранецентрированной. Базис содержит два атома, координаты которых 000 и $1/4, 1/4, 1/4$. Решетку алмаза можно наглядно себе представить как две кубические гранецентрированные решетки, сдвинутые друг относительно друга вдоль пространственной диагонали куба на четверть его длины. Проекция решетки кристалла алмаза показана на рис. 79. Элементарная ячейка выбирается в виде куба и содержит 8 атомов со следующими u_j, v_j, w_j :

$$\begin{aligned} &000, \quad \frac{1}{2} \frac{1}{2} 0, \quad \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}, \quad 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}, \\ &\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{4} \frac{1}{4} \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{4} \frac{3}{4} \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Структурный фактор равен:

$$S_{lmn} = [1 + \cos \pi (l + m) + \cos \pi (l + n) + \cos \pi (m + n)] \times \\ \times \left[1 + \cos \frac{\pi}{2} (l + m + n) + i \sin \frac{\pi}{2} (l + m + n) \right]. \quad (14)$$

Если l, m, n числа неодинаковой четности, то $S_{lmn} = 0$.

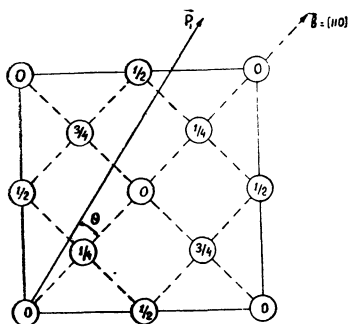


Рис. 79. Расположение атомов в элементарной ячейке алмаза (проекция на грань куба). Точки 0 и $1/2$ составляют гранецентрированную решетку, точки $1/4$ и $3/4$ соответствуют той же решетке, смещенной относительно первой вдоль пространственной диагонали куба на четверть ее длины.

Если же четность всех трех индексов одинакова, то имеют место следующие два случая, для которых S_{lmn} отлично от нуля:

- а) $l + m + n$ — нечетное число: $|S_{lmn}|^2 = 32$,
- б) $\frac{l + m + n}{2}$ — четное число: $|S_{lmn}|^2 = 64$.

Аналогично можно рассчитать структурные факторы для кристаллов с другого типа ячейками.

IV. К квантовой электродинамике в среде (к § 16)

1. Введение

Для расчета радиационных поправок в среде необходимо вывести правила написания матричных элементов. Для этого нужно определить и исследовать матрицу рассеяния с учетом влияния поляризации среды. Как мы увидим ниже, это сводится к замене микроскопических уравнений на макроскопические уравнения Максвелла.

Может возникнуть вопрос, насколько последовательным является использование макроскопических уравнений?

Известно, что система микроскопических уравнений квантовой электродинамики является достаточной для рассмотрения взаимодействия любого числа фотонов и электронов. Эту систему мы решаем обычно применительно к нескольким частицам, используя параметр разложения $\frac{e^2}{\hbar c}$. Можно надеяться, что использование макроскопической электродинамики позволит эффективно учесть влияние среды на распространение фотонов. Переход в микроскопические уравнения происходит при условии $\varepsilon \rightarrow 1$, то есть когда $\frac{Ne^2}{m(\omega_{ат}^2 - \omega^2)} \rightarrow 0$ (где N — плотность электронов, $\omega_{ат}$ — атомная частота). Вопросы квантовой электродинамики в среде были исследованы в работах В. Л. Гинзбурга [8], А. А. Соколова [9], Дж. Яуха и К. Ватсона [10], М. И. Рязанова [11] и других в основном применительно к теории излучения Вавилова—Черенкова. При изложении материала мы следуем работе [12].

2. Классическая теория

Будем пользоваться записью макроскопических уравнений Максвелла в форме, предложенной Л. И. Мандельштамом и И. Е. Таммом [13], и использовать систему единиц Хевисайда — Лоренца $\left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137}\right)$.

После введения тензора индукции G_{ik} и тензора поля F_{ik} макроскопические уравнения принимают следующий вид (индексы i, k пробегает значения 0, 1, 2, 3):

$$\frac{\partial G^{ik}}{\partial x^k} = J^i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0 \quad (i \neq k \neq l), \quad (2)$$

где

$$J^i = \left(\rho, \frac{\vec{j}}{c} \right), \quad x^i (ct, \vec{x}),$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$G^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & H_z & -H_y \\ -D_y & -H_z & 0 & H_x \\ -D_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

В последующем мы придерживаемся обозначений, принятых в книге [14]. Если мы введем потенциалы $A^i = (\varphi, \vec{A})$

$$F_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}, \quad (4)$$

то уравнение (2) выполняется автоматически. Запишем связь между тензорами G^{ik} и F_{ik} для однородной изотропной среды в следующем виде:

$$G^{ij} = \varepsilon^{i\alpha} \varepsilon^{j\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (5)$$

В системе покоя введенный четырехмерный тензор диэлектрической и магнитной проницаемости имеет вид:

$$\varepsilon^{i\alpha} = \begin{pmatrix} \varepsilon \sqrt{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В противоположность общепринятому написанию связи между F_{ik} и G_{ik}

$$C_{ij}u^j = \varepsilon F_{ik}u^k, \quad (7)$$

$$F_{kl}u_i + F_{li}u_k + F_{ik}u_l = \mu (G_{kl}u_i + G_{li}u_k + G_{ik}u_l),$$

условие (5) более компактно и не содержит скорость среды u . Легко проверить непосредственным вычислением, что соотношения (5) и (7) эквивалентны. Подставляя (5) в (1), мы имеем

$$\varepsilon^{il}\varepsilon^{km} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial A_m}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^m} \right) = -J^i. \quad (8)$$

Если наложить на потенциалы условие Лоренца

$$\varepsilon^{km} \frac{\partial A_m}{\partial x^k} = 0, \quad (9)$$

то (8) переписется в виде

$$\varepsilon^{il}\varepsilon^{km} \frac{\partial^2 A_l}{\partial x^k \partial x^m} = J^i. \quad (10)$$

Легко видеть, что к потенциалу A_k еще можно прибавить $\frac{\partial \chi}{\partial x^k}$, где функция χ удовлетворяет уравнению $\varepsilon^{km} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^m \partial x^k} = 0$.

Переход к обычной электродинамике в пустоте происходит при замене тензора ε^{ik} на метрический тензор g^{ik} ($g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$, $g^{ik} = 0$ при $i \neq k$).

Уравнение (10) следует из лагранжиана

$$L = -\frac{1}{2} \varepsilon^{km}\varepsilon^{ij} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{e}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) A_\mu \quad (11)$$

и дополнительного условия (9).

Выбор лагранжиана в форме (11), который не является градиентно-инвариантным, значительно упрощает все последующие выкладки. От обычного явно градиентно-инвариантного лагранжиана (мы опускаем сейчас член со взаимодействием)

$$L = -\frac{1}{4} G^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (12)$$

(в системе покоя $L = \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 - \mu H^2)$) лагранжиан (11) от-

дичается на величину четырехмерной дивергенции (с учетом выполнения условия Лоренца):

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \varepsilon^{lm\epsilon kj} \left(A_k \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - A_m \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \right).$$

Это обеспечит градиентную инвариантность теории [15].
Выпишем еще выражение для плотности энергии:

$$T^{00} = - \varepsilon^{0m\epsilon ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \frac{\partial A_i}{\partial x^0} + \frac{1}{2} \varepsilon^{km\epsilon ij} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \quad (13)$$

и плотность импульса

$$T^{0\alpha} = \varepsilon^{0m\epsilon ij} \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \frac{\partial A_j}{\partial x^\alpha}.$$

3. D-функция фотона в среде

D-функцию фотона в среде можно найти наглядным способом, следуя соответствующим рассуждениям Р. Фейнмана для случая вакуума [14, 14a].

Рассмотрим взаимодействие двух различных заряженных ферми-частиц. Пусть частица a переходит из состояния с четырехмерным импульсом p_1 в состояние с импульсом p_2 . При этом „ток перехода“

$$J^\mu(x) = \bar{e} u_a(p_2) \gamma_a^\mu u_a(p_1) e^{i(p_2 - p_1)x} \quad (15)$$

создает электромагнитное поле с потенциалом $A^\mu(x)$, которое в свою очередь вызывает переход второй частицы b из состояния q_1 в состояние q_2 . Матричный элемент, соответствующий этому переходу, имеет вид:

$$M = -ie \int d^4x \bar{u}^b(q_2) \gamma_b^\mu A_\mu(x) u_b(q_1) e^{i(q_2 - q_1)x}. \quad (16)$$

Отличие от случая вакуума состоит в том, что потенциалы $A^\mu(x)$ определяются из макроскопических уравнений Максвелла:

$$\Delta A^\alpha - \frac{\overset{\wedge}{\varepsilon} \overset{\wedge}{\mu}}{c^2} \frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial t^2} = - \overset{\wedge}{\mu} J^\alpha, \quad \alpha=1, 2, 3, \quad (17)$$

$$\Delta A^0 - \frac{\overset{\wedge}{\varepsilon} \overset{\wedge}{\mu}}{c^2} \frac{\partial^2 A^0}{\partial t^2} = - \frac{1}{\overset{\wedge}{\varepsilon}} J^0.$$

Вводя четырехмерный тензор диэлектрической и магнитной проницаемости, перепишем эти уравнения в следующем четырехмерном виде:

$$\varepsilon^{ik} \varepsilon^{lm} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^l \partial x^m} = J^i. \quad (10)$$

В системе, где среда покоится, тензор ε^{ik} диагонален: $\varepsilon^{ik} = 0$ при $i \neq k$. Отличные от нуля компоненты равны

$$\varepsilon^{00} = \varepsilon \sqrt{\overset{\wedge}{\mu}}, \quad \varepsilon^{\alpha\alpha} = - \frac{1}{\sqrt{\overset{\wedge}{\mu}}}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Уравнение (10) можно переписать в более удобном виде, вводя обратный тензор ε_{ik}^{-1} :

$$\varepsilon^{lm} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^l \partial x^m} = \varepsilon_{ik}^{-1} J^i. \quad (19)$$

Переход к вакууму соответствует замене ε^{lm} на метрический тензор g^{lm} ($g^{00} = 1$, $g^{\alpha\alpha} = -1$, $\alpha = 1, 2, 3$; $g^{ik} = 0$, $i \neq k$).

Условие Лоренца записывается в виде (9). Если теперь определить D_F в среде как решение уравнения

$$\varepsilon^{lm} \frac{\partial^2 D_F(x - x')}{\partial x^l \partial x^m} = -2i\delta(x - x'); \quad (20)$$

$$D_F(x - x') = \frac{2i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x-x')}}{\varepsilon^{lm} k_l k_m} d^4 k, \quad (21)$$

то решение уравнения (19) можно сразу записать в виде

$$A_k(x) = \frac{i}{2} \int \varepsilon_{ik}^{-1} J^i(x') D_F(x - x') d^4 x'. \quad (22)$$

Воспользовавшись (15) и (22), для матричного элемента (16) получим следующее выражение:

$$M = ie^2(2\pi)^4 \frac{[\bar{u}_b(q_2)\gamma_\mu^b u_b(q_1)] \varepsilon_{i\mu}^{-1} [\bar{u}_a(p_2)\gamma_\nu^i u_a(p_1)]}{\varepsilon^{lm} k_l k_m} \delta(p_2 - p_1 + q_2 - q_1). \quad (23)$$

Выражение (23) соответствует графику Фейнмана, показанному на рис. 80.

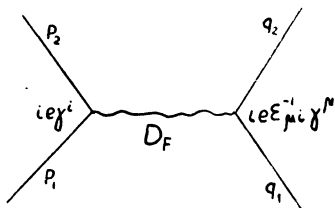


Рис. 80. Диаграмма Фейнмана для рассеяния электрона на электроне в приближении макроскопической электродинамики.

Отсюда сразу следует правило Фейнмана для написания матричных элементов в среде. Внутренняя линия фотона вносит в матричный элемент в среде выражение $D_F = -\frac{i\hbar c}{(2\pi)^4 \varepsilon^{lm} k_l k_m}$, концам внутренней линии соответствуют матрицы $ie\gamma^\mu$ и $ie\varepsilon_{\mu i}^{-1}\gamma^i$. Все остальные правила Фейнмана (за исключением свободных фотонных концов) без изменения переносятся на рассмотренный случай.

Отметим одно существенное обстоятельство, связанное с дисперсией и комплексностью тензора ε^{ik} . Для простоты рассмотрим систему координат, в которой среда покоится, и положим $\mu = 1$. Выражение (21) при известных аналитических свойствах $\varepsilon(\omega)$ однозначно, без дополнительных правил обхода Фейнмана, определяет D_F в координатном пространстве. Обычное введение „запаздывающей“ проницаемости $\varepsilon(\omega)$ основано на уравнении

$$D(t) = \int_0^\infty E(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Разлагая электромагнитную индукцию D в интеграл Фурье и беря зависимость от времени в виде $e^{-i\omega t}$, имеем

$$D_\omega = \varepsilon(\omega) E_\omega = E_\omega \int_0^\infty f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (25)$$

Из такого определения сразу следует, что мы фактически выбираем запаздывающую диэлектрическую проницаемость со всеми известными ее аналитическими свойствами [16]. Подставляя ее в формулу (21) и интегрируя по k_0 , мы получим запаздывающую функцию Грина, поскольку оба полюса подынтегрального выражения, из-за наличия мнимой части у ε , лежат ниже действительной оси. Аналогичным способом можно ввести и опережающую функцию Грина. Ясно, что обе эти функции не приводят к правильной энергии взаимодействия двух частиц. Это легко усмотреть из выражения (23), которое должно быть инвариантно при перестановке частиц. В действительности замена $p_2^0 - p_1^0$ на $q_2^0 - q_1^0$ в случае зависимости ε от $p_2^0 - p_1^0$ не оставляет энергию взаимодействия инвариантной, поскольку мнимая часть диэлектрической постоянной является нечетной функцией $p_2^0 - p_1^0$. Таким образом, для правильного введения комплексной диэлектрической проницаемости мы должны считать, что входящая в D_F диэлектрическая проницаемость для положительных ω совпадает с запаздывающей диэлектрической проницаемостью, а для отрицательных ω — с опережающей. Это эквивалентно тому, что под $\varepsilon(\omega)$, входящей во все дальнейшие расчеты, мы будем подразумевать

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= \varepsilon_R(\omega), & \omega > 0; \\ \varepsilon(\omega) &= \varepsilon_A(\omega) = \varepsilon_R^*(\omega), & \omega < 0. \end{aligned} \quad (26)$$

При таком введении дисперсии восстанавливается нужная инвариантность. При этом не нужно вводить дополнительных правил обхода Фейнмана, поскольку они автоматически следуют из свойств $\varepsilon(\omega)$.

Правила для написания внешних фотонных линий выводятся также просто, следуя известным рассуждениям Фейнмана [14а].

Используя найденную D -функцию фотона в среде, можно обычным способом рассчитать собственную энергию электрона.

Графику собственной энергии фермиона в среде соответствует следующий элемент второго порядка S -матрицы [14, 15, 17]:

$$S^{(2)} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{m}{E} \frac{T}{(2\pi)^4} \int \gamma^\mu \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \varepsilon_{\mu\nu}^{-1} \gamma^\nu \frac{d^4 k}{\varepsilon^{ik} k_i k_k}. \quad (27)$$

Дальнейший расчет собственной энергии в точности повторяет аналогичный расчет для случая вакуума. В результате мы приходим к формулам (16.2) и (16.3).

V. Исследование интегрального уравнения (19.11)

Как отмечалось, переход от интегро-дифференциального уравнения (19.11) к уравнению типа Фоккера—Планка (19.13) приводит к ошибке, связанной с ограничением на допустимые углы рассеяния в (19.26). Для выяснения этого вопроса приведем исследование интегрального уравнения (19.11), проведенное в работе [18].

Поскольку выражение для излученной энергии (19.9) зависит не от самой функции $W_{\vec{k}}(\vec{\theta}, \vec{\theta}'; \tau)$, входящей в формулу (19.11), а от интеграла, полезно сразу искать нужные для результата величины. Обозначим

$$\vec{U}(\vec{\theta}, \tau) = \int \vec{\theta}' W_{\vec{k}}(\vec{\theta}', \vec{\theta}; \tau) d\vec{\theta}', \quad d\vec{\theta}' = \theta' d\theta' d\varphi. \quad (1)$$

Начальное условие для $\vec{U}(\vec{\theta}, \tau)$ такое:

$$\vec{U}(\vec{\theta}, 0) = \vec{\theta}. \quad (2)$$

В окончательный результат войдет интеграл $\int_0^\infty \vec{U}(\vec{\theta}, \tau) d\tau$,

вместо которого удобно ввести функцию $\vec{\Phi}$:

$$\int_0^\infty \vec{U}(\vec{\theta}, \tau) d\tau = \vec{\Phi}(\vec{\theta}) + \frac{2}{i\omega} \frac{\vec{\theta}}{1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2}. \quad (3)$$

Для $\vec{\Phi}$ получаем неоднородное интегральное уравнение

$$\frac{i\omega}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2 \right) \vec{\Phi} = Nv \int d\vec{\theta}'_{\sigma} (\vec{\theta}' - \vec{\theta}) [\vec{\Phi}(\vec{\theta}') - \vec{\Phi}(\vec{\theta})] +$$

$$+ \frac{2Nv}{i\omega} \int d\vec{\theta}'_{\sigma} (\vec{\theta}' - \vec{\theta}) \left[\frac{\vec{\theta}'}{1 - v^2/c^2 + \theta'^2} - \frac{\vec{\theta}}{1 - v^2/c^2 + \theta^2} \right]. \quad (4)$$

При этом

$$dI_{\omega} = \frac{e^2 \omega^2 d\omega}{2\pi^2 c} \operatorname{Re} \int d\vec{\theta} (\vec{\theta} \vec{\Phi}(\vec{\theta})). \quad (5)$$

Поскольку ядро интегрального уравнения (4) зависит от разности $\vec{\theta}' - \vec{\theta}$, удобно произвести двумерное преобразование Фурье, полагая

$$\vec{\Phi}(\vec{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{x} \Psi(x) e^{-i\vec{x}\vec{\theta}} dx. \quad (6)$$

Для Ψ тогда получим дифференциальное уравнение

$$-\frac{i\omega}{2} \left(\Delta_{\vec{x}} + 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \vec{x} \Psi = Nv [S(x) - S(0)]_{\vec{x}} (\Psi + \Psi_0), \quad (7)$$

причем $\Delta_{\vec{x}}$ — двумерный лапласиан по переменной \vec{x} , S — фурье-образ сечения упругого рассеяния:

$$S(x) = \int \sigma(\vec{\theta}) e^{i\vec{x}\vec{\theta}} d\vec{\theta} = 2\pi \int_0^{\infty} \sigma(\theta) J_0(x\theta) \theta d\theta \quad (8)$$

(очевидно, что $S(0)$ есть полное сечение рассеяния) и, наконец,

$$\Psi_0 = \frac{4\pi}{\omega} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} K_1 \left(x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right). \quad (9)$$

Переход к приближению Фоккера — Планка в уравнении (7) соответствует разложению $S(x)$ в ряд и удержанию членов до второго порядка включительно.

Удобно перейти к новой независимой переменной

$$z = x^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (10)$$

Положим также

$$\Psi(x) = - \frac{4\pi(1 - v^2/c^2)}{i\omega z} f(z), \quad (11)$$

$$\frac{2Nv}{\omega(1 - v^2/c^2)} [S(0) - S(x)] = \frac{1}{8s^2} V(z).$$

Тогда получаем окончательное уравнение для $f(z)$:

$$f'' - \frac{1}{4z} \left[1 - \frac{i}{8s^2} V(z) \right] f = -g(z), \quad (12)$$

причем

$$s = \frac{1 - v^2/c^2}{8} \sqrt{\frac{\omega}{q}} \quad \text{и} \quad g(z) = \frac{V(z) K_1(\sqrt{z})}{32s^2 \sqrt{z}}. \quad (13)$$

Выражение для излученной энергии в единицу времени запишется через $f(z)$ в виде ($v \sim c$)

$$dI_\omega = \frac{4e^2\omega(1 - v^2/c^2)d\omega}{\pi c} \operatorname{Re} \left(\frac{f(z)}{z} \right)_{z=0}. \quad (14)$$

Окончательный результат зависит от выражения для сечения $\sigma(\theta)$. Для сравнения отметим, что если ограничиться приближением Фоккера — Планка, то в окончательный результат войдет лишь средний квадратичный угол рассеяния.

Как известно, решение неоднородного уравнения (12) можно выразить через два решения соответствующего однородного уравнения: $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Пусть $f_1(z)$ убывает при $z \rightarrow \infty$, а $f_2(z) \rightarrow z$ при $z \rightarrow 0$. Тогда

$$f(z) = f_1(z) \int_0^z f_2(\xi) g(\xi) d\xi + f_2(z) \int_z^\infty f_1(\xi) g(\xi) d\xi \quad (15)$$

и при малых z

$$f(z) \approx z \int_0^{\infty} f_1(\xi) g(\xi) d\xi. \quad (16)$$

Окончательный результат для излучаемой энергии можно записать в виде

$$dI_{\omega} = \frac{4e^2(1 - v^2/c^2)\omega d\omega}{\pi c} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} f_1(z) g(z) dz. \quad (17)$$

Причем $g(z)$ дается формулой (13), а $f_1(z)$ — решение однородного уравнения (12), убывающее при $z \rightarrow \infty$ и нормированное условием $f_1(0) = 1$.

Рассмотрим прежде всего предельные случаи. Пусть параметр $s \gg 1$, тогда можно упростить уравнение (12) и найти $f_1(z)$ из выражения

$$f'' - \frac{1}{4z} f = 0. \quad (18)$$

При этом

$$f_1(z) = V\bar{z} K_1(V\bar{z}). \quad (19)$$

Заметим теперь, что

$$\int_0^{\infty} K_1^2(V\bar{z}) z dz = \frac{2}{3}, \quad (20)$$

однако по сравнению с этим интегралом в (17) под знаком интеграла стоит медленно меняющаяся функция $\frac{V}{z}$, которую можно вынести из-под знака интеграла в некоторой точке $z \sim 1$ (с логарифмической точностью). Тогда получаем

$$dI_{\omega} = \frac{16}{3} \frac{r_0^2 Z^2 N c \hbar}{137} d\omega \ln \frac{mcR_{\text{ат}}}{\hbar}, \quad (21)$$

результат, в точности совпадающий с формулой Бете--Гайтлера.

Пусть теперь $s \ll 1$. Тогда $f_1(z)$ находим из уравнения

$$f'' + \frac{i}{32s^2} \frac{V}{z} f = 0. \quad (22)$$

Если положить $\frac{V}{z} = 1$ (это верно при $z \ll \left(\frac{mcR_{ял}}{\hbar}\right)^2$), то

$$f_1(z) = \exp\left(\frac{i-1}{8s} z\right), \quad (23)$$

откуда

$$dI_\omega = \frac{2e^2 \sqrt{\omega q}}{\pi c} d\omega. \quad (24)$$

В случае $s \ll 1$, ограничиваясь логарифмической точностью, вместо $\frac{V}{z}$ надо подставить ее значение при существенном

значении аргумента, т. е. при $x \sim 8s$. При этом сохраняется формула (24), только в q надо вместо $\ln \frac{R_{ат}}{R_{ял}}$ подставить

$\ln \frac{mcR_{ат}}{\hbar \sqrt{s}}$. Наконец, в области $s \sim 1$ надо пользоваться

интерполяционной формулой (19.20) с логарифмом $\ln \frac{mcR_{ат}}{\hbar \sqrt{s}}$.

VI. Интегрирование уравнения (19.10)

Исследуем уравнение (19.10), следуя работе А. Б. Мигдала. Будем отсчитывать углы рассеяния электрона и угол излучения кванта от направления начальной скорости движения \vec{v}_0 :

$$\theta = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{v_0}; \quad \theta' = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{v_0}; \quad \theta_k = \vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{v_0}. \quad (1)$$

Умножая (19.10) на $v_0^3 e^{ik(\vec{r}' - \vec{r})}$ и интегрируя по $\vec{r}' - \vec{r}$, получим

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} - ikv_1 W_k = Nv_0 \int \sigma(\vec{\eta}' - \vec{\eta}) [W_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}'; \tau) - W_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}; \tau)] d\vec{\eta}', \quad (2)$$

где

$$\vec{\xi} = \vec{\theta} - \vec{\theta}_k; \quad \vec{\eta} = \vec{\theta}' - \vec{\theta}_k. \quad (3)$$

Замечая, что $-ikv_1 = ikv_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right)$ и разложив $W_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}'; \tau)$

в ряд по $\vec{\eta}' - \vec{\eta}$, получим

$$\frac{\partial W_k}{\partial \tau} - ikv_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right) W_k = q \Delta_{\eta} W_k. \quad (4)$$

Начальное условие для $W_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}; \tau)$ получаем из (19.5):

$$W_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}; 0) = \delta(\vec{\xi} - \vec{\eta}). \quad (5)$$

Поскольку ответ зависит не от самой функции $W_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}; \tau)$, а от интеграла, входящего в формулу (19.9), полезно сразу искать нужные нам выражения. Так как коэффициенты уравнения (4) не зависят от $\vec{\xi}$, то вектор $\int \vec{\xi} W_k d\vec{\xi}$ также удовлетворяет уравнению (4). Полагая $\int \vec{\xi} W_k d\vec{\xi} = \vec{\eta} \varphi(\eta, \tau)$, получим уравнение для φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - ikv_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right) \varphi = q \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{3}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \quad (6)$$

с начальным условием

$$\varphi(\eta, 0) = 1. \quad (7)$$

Введя функцию f соотношением

$$f(z) = z \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} \varphi(z, \tau) d\tau + \frac{i}{\omega}, \quad z = \frac{\eta^2}{2}, \quad (8)$$

легко получить, используя (6), уравнение для определения f :

$$zf'' - \frac{i\omega}{2q} \left(1 - \frac{v}{c} + z\right) f = \frac{1 - \frac{v}{c}}{2q}. \quad (9)$$

Выражение для излученной энергии (19.9), используя функцию f , можно представить в виде ($v \sim c$):

$$dI_\omega = \frac{2e^2}{\pi c} \omega^2 d\omega \operatorname{Re} \int_0^\infty f(z) dz. \quad (10)$$

Условие в нуле, вытекающее из определения $f(z)$, следующее: $f(0) = \frac{i}{\omega}$. На бесконечности следует требовать ограниченности f . Уравнение (9) решаем методом Лапласа, полагая

$$U(p) = \int_0^\infty e^{-pz} f dz. \quad (11)$$

Для $U(p)$ получаем неоднородное уравнение первого порядка:

$$U'(p) - \frac{2p + \frac{i\omega}{2q} \left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\frac{i\omega}{2q} - p^2} U(p) = \frac{1}{\frac{i\omega}{2q} - p^2} \left(\frac{1 - \frac{v}{c}}{2qp} - \frac{i}{\omega} \right), \quad (12)$$

решение которого имеет вид

$$U(p) = \frac{i}{\omega} \frac{1}{p_1^2 - p^2} \left(\frac{p_1 + p}{p_1 - p} \right)^\mu \int_p^{\xi_1} \left(1 + i\omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{2q\xi} \right) \left(\frac{p_1 - \xi}{p_1 + \xi} \right)^\mu d\xi, \quad (13)$$

где

$$\mu = \frac{1 - \frac{v}{c}}{4} \sqrt{\frac{\omega}{q}} (1 + i), \quad p_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{q}} (1 + i). \quad (14)$$

Произвольная постоянная ξ_1 выбирается из условия ограниченности функции $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$. Для этого необходимо, чтобы функция $U(p)$ не имела особых точек в правой полуплоскости, т. е. $\xi_1 = p_1$. В выражение для излученной энергии (10) входит величина

$$\operatorname{Re} \int_0^{\infty} f(z) dz = \operatorname{Re} U(p). \quad (15)$$

Из уравнения (13) видно, что при $p = 0$ $U(p)$ имеет логарифмическую особенность, поэтому предел $\operatorname{Re} U(p)$ зависит от способа стремления p к нулю. Из выражения

$$\operatorname{Re} U(p) = \int_0^{\infty} e^{-p_0 z} (\cos p' z \operatorname{Re} f - \sin p' z \operatorname{Im} f) dz; \quad (p = p_0 + ip') \quad (16)$$

вытекает, что для выполнения условия $\int_0^{\infty} \operatorname{Re} f dz = \operatorname{Re} U(0)$

достаточно устремить p к нулю по вещественной оси. Произведя подстановку $\xi = p_1 x$ и выделяя в интеграле (13) расходимость при $x = 0$, получаем:

$$\operatorname{Re} U(p) = \operatorname{Re} \frac{i}{p_1 \omega} \left\{ \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\mu} dx + \right. \\ \left. + i \omega \frac{1-\frac{\nu}{c}}{2q p_1} \int_0^1 \left[\left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\mu} - 1 \right] \frac{dx}{x} \right\} - \frac{1-\frac{\nu}{c}}{2q} \operatorname{Re} \frac{1}{p \rightarrow 0} \frac{1}{p_1^2} \ln \frac{p_1}{p}. \quad (17)$$

Замечая, что $\operatorname{Re} \frac{1}{p \rightarrow 0} \frac{1}{p_1^2} \ln \frac{p_1}{p} = \frac{\pi q}{2\omega}$ и подставляя $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ в интегралы (17), получим

$$\int_0^{\infty} \operatorname{Re} f(z) dz = \frac{1-\frac{\nu}{c}}{\omega} \left\{ \frac{1}{8s} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\cos st + \sin st}{\operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}} dt + \right.$$

$$+ \int e^{-st} \frac{\sin st}{\operatorname{sh} t} dt - \frac{\pi}{4}, \quad (18)$$

где

$$s = \frac{1 - \frac{v}{c}}{4} \sqrt{\frac{\omega}{q}}. \quad (19.22)$$

Подставляя выражение (18) в формулу (10), запишем выражение для излученной энергии в следующем виде:

$$dI_{\omega}^M = dI_{\text{БГ}} \Phi(s), \quad (19.20)$$

где

$$dI_{\text{БГ}} = \frac{8e^2 q}{3\pi c (1 - \beta^2)}$$

обычное выражение Бете—Гайтлера для излученной энергии без учета многократного рассеяния.

Функция $\Phi(s)$ равна (см. (21.28)):

$$\begin{aligned} \Phi(s) = 3s \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\cos st + \sin st}{\operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}} dt + \\ + 24s^2 \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\sin st}{\operatorname{sh} t} dt - 6\pi s^2. \end{aligned} \quad (19)$$

При $s > 0$ формулу (19) можно привести к виду (19.21).

VII. Интегрирование формулы (20.15)

Проведем интегрирование формулы (20.15) для спектральной плотности энергии тормозного излучения.

Чтобы избежать расходящегося выражения, которое возникает при изменении порядка интегрирования, вычислим интеграл по z в конечных пределах от нуля до некоторого z_m и в конце вычислений устремим z_m к бесконечности. Для краткости введем следующее обозначение:

$$\alpha = \frac{\sigma x}{1 + \eta t x}. \quad (1)$$

Тогда формула (20.15) принимает вид:

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{e^{2\omega}}{\pi c g^2} \operatorname{Im} \int_0^T dt \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\sigma \eta / 2} \frac{dx}{x^2} \int_0^{z_m} \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \left(\eta t + \frac{\alpha z}{x} \right) e^{-\alpha z} dz. \quad (2)$$

Воспользовавшись следующими формулами:

$$\int_0^{z_m} e^{-\alpha z} dz = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha z_m},$$

$$\int_0^{z_m} e^{-\alpha z} z dz = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + z_m \right) e^{-\alpha z_m}, \quad (3)$$

получим

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{e^{2\omega}}{\pi c g^2} \operatorname{Im} \int_0^T dt \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\sigma \eta / 2} \frac{1}{\sigma x^2} \left[1 - \left(1 + \frac{\alpha^2 z_m}{\sigma x} \right) e^{-\alpha z_m} \right] dx. \quad (4)$$

Подставим теперь значение α и перейдем к новой переменной интегрирования y , связанной с x по формуле $x = \operatorname{th} y$:

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{e^{2\omega}}{\pi c g^2} \operatorname{Im} \int_0^T \frac{dt}{\sigma} \int_0^\infty \left(\frac{1 - \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} y} \right)^{\sigma \eta / 2} \times$$

$$\times \frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{\sigma z_m \operatorname{th} y}{(1 + t \eta \operatorname{th} y)^2} \right] \exp \left[- \frac{\sigma z_m \operatorname{th} y}{1 + t \eta \operatorname{th} y} \right] \right\} dy. \quad (5)$$

Заметим, что $\frac{1 - \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} y} = e^{-2y}$, внесем $1/\operatorname{sh}^2 y$ в фигурные скобки, а затем добавим и вычтем в ней $1/y^2$:

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{e^2\omega}{\pi c g^2} \operatorname{Im} \int_0^T dt \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma\gamma y}}{\sigma} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} - \frac{1}{y^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{y^2} - \left[1 + \frac{\sigma z_m \operatorname{th} y}{(1 + t\eta \operatorname{th} y)^2} \right] \frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} \exp \left[- \frac{\sigma z_m \operatorname{th} y}{1 + t\eta \operatorname{th} y} \right] \right\} dy. \quad (6)$$

Разобьем этот интеграл на сумму двух интегралов следующим образом:

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{e^2\omega}{\pi c g^2} \int_0^T (I_1 + I_2) dt, \quad (7)$$

$$I_1 = \operatorname{Im} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma\gamma y}}{\sigma} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} - \frac{1}{y^2} \right) dy, \quad (8)$$

$$I_2 = \operatorname{Im} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma\gamma y}}{\sigma} \left\{ \frac{1}{y^2} - \left[1 + \frac{\sigma z_m \operatorname{th} y}{(1 + t\eta \operatorname{th} y)^2} \right] \frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[- \frac{\sigma z_m \operatorname{th} y}{1 + t\eta \operatorname{th} y} \right] \right\} dy. \quad (9)$$

Рассмотрим сначала интеграл I_2 . Воспользуемся тем, что при больших z_m в него вносит вклад область малых значений y . Подставив экспоненту в фигурных скобках в виде

$$\exp \left[- \frac{\sigma z_m \operatorname{th} y}{1 + t\eta \operatorname{th} y} \right] = \exp \left[\sigma z_m y - \frac{\sigma z_m \operatorname{th} y}{1 + t\eta \operatorname{th} y} \right] \exp(-\sigma z_m y) \cdot \quad (10)$$

и разлагая множитель при $\exp(-\sigma z_m y)$ в ряд по степеням y , получим

$$I_2 = \operatorname{Im} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma\gamma y}}{\sigma} \left\{ \frac{1}{y^2} - \frac{e^{-\sigma z_m y}}{y^2} \left[1 + \sigma z_m y - \frac{1}{3} y^2 - \sigma\eta t z_m y^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma z_m y^3 \left(2\eta^2 t^2 - \frac{1}{3} + \sigma\eta t z_m \right) + \dots \right] \right\} dy \quad (11)$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' + I_2''' + I_2'''' + \dots, \quad (12)$$

$$I_2' = \text{Im} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma y^2} \left(e^{-\sigma \gamma y} - e^{-\sigma \gamma y - \sigma z_m y} \right) dy, \quad (13)$$

$$I_2'' = -\text{Im} z_m \int_0^{\infty} e^{-\sigma \gamma y - \sigma z_m y} \frac{dy}{y}, \quad (14)$$

$$I_2''' = \text{Im} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sigma \gamma y - \sigma z_m y}}{\sigma} \left(\frac{1}{3} + \sigma \eta t z_m \right) dy, \quad (15)$$

$$I_2'''' = \text{Im} z_m \int_0^{\infty} y e^{-\sigma \gamma y - \sigma z_m y} \left(\frac{1}{3} - 2\eta^2 t^2 - \sigma \eta t z_m \right) dy. \quad (16)$$

При выделении мнимых частей интегралов нужно иметь в виду, что σ и η — комплексны, а z_m и γ — действительны, а именно:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{kp}^*}} (1 + i), & \eta &= \sqrt{2i\omega q} = \frac{\sqrt{\omega \omega_{kp}^*}}{2g^2} (1 + i), \\ \gamma &= 1 + \frac{\omega_{kp}^2}{\omega^2}, & \omega_{kp} &= \omega_0 \frac{\epsilon_1}{mc^2}, & \omega_{kp}^* &= \frac{E_s^2 \epsilon_1^2}{(mc^2)^4} \frac{c}{L}, \\ & & q &= \frac{\omega_{kp}^*}{4q^4}, & z_m &> 0, & \gamma &> 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Вычислим I_2' . Интегрируя сначала по частям, получим:

$$\begin{aligned} I_2' &= \text{Im} \int_0^{\infty} [(\gamma + z_m) e^{-\sigma z_m y} - \gamma] e^{-\sigma \gamma y} \frac{dy}{y} = \\ &= \text{Im} z_m \int_0^{\infty} e^{-\sigma \gamma y - \sigma z_m y} \frac{dy}{y} + \text{Im} \ln \frac{\gamma}{\gamma + z_m} = \end{aligned} \quad (18)$$

$$= \operatorname{Im} z_m \int_0^{\infty} e^{-\sigma\gamma y - \sigma z_m y} \frac{dy}{y}.$$

Таким образом, $I_2' = -I_2''$ и сумма $I_2' + I_2''$ в (12) равна нулю.

Интегрирование первого члена в (15) дает результат, стремящийся к нулю при $z_m \rightarrow \infty$, а мнимая часть интеграла от второго члена равна нулю при любом значении z_m , что видно, если иметь в виду формулы (17). Таким образом, $\lim_{z_m \rightarrow \infty} I_2''' = 0$. Рассмотрим теперь интеграл I_2'''' . Легко ви-

деть, что результат интегрирования первых двух членов стремится к нулю при $z_m \rightarrow \infty$, а мнимая часть результата интегрирования третьего члена равна нулю при любом z_m . Таким образом, и $\lim_{z_m \rightarrow \infty} I_2'''' = 0$ и т. д. В результате имеем:

$$\lim_{z_m \rightarrow \infty} I_2 = 0. \quad (19)$$

Итак, в пределе при $z_m \rightarrow \infty$ получаем следующую формулу для интенсивности тормозного излучения:

$$\frac{dI_{\omega}}{d\omega} = \frac{e^2 \omega}{\pi c g^2} \operatorname{Im} \int_0^T dt \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} - \frac{1}{y^2} \right) e^{-\sigma\gamma y} dy. \quad (20)$$

Отсюда получим интенсивность за единицу времени:

$$\frac{d\dot{I}_{\omega}}{d\omega} = \frac{e^2 \omega \gamma}{\pi c g^2} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} - \frac{1}{y^2} \right) e^{-\sigma\gamma y} dy. \quad (21)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{d\dot{I}_{\omega}}{d\omega} = -\frac{e^2 \omega \gamma}{\pi c g^2} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \left(\operatorname{cth} y - \frac{1}{y} \right) e^{-\sigma\gamma y} dy. \quad (22)$$

Переходя к обозначению Мигдала $\sigma = 2s(1 + i)$,

$$\left(s = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{kp}^*}} = \frac{1}{8g^2} \sqrt{\frac{\omega}{q}} \right)$$

и введя новую переменную интегрирования $x = 2y$, перепишем формулу (22) в виде:

$$\frac{dI_{\omega}}{d\omega} = -\frac{e^{2\omega\gamma}}{2\pi c g^2} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \left(\operatorname{cth} \frac{x}{2} - \frac{2}{x} \right) e^{-\gamma s x (1+i)} dx. \quad (23)$$

Выделяя теперь мнимую часть, получим:

$$\frac{dI_{\omega}}{d\omega} = \frac{e^{2\omega\gamma}}{2\pi c g^2} \int_0^{\infty} \left(\operatorname{cth} \frac{x}{2} - \frac{2}{x} \right) e^{-\gamma s x} \sin \gamma s x dx. \quad (24)$$

Воспользовавшись формулой

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-x} \sin x dx = \frac{\pi}{4}, \quad (25)$$

будем иметь

$$\frac{dI_{\omega}}{d\omega} = \frac{e^{2\omega\gamma}}{2\pi c g^2} \left(\int_0^{\infty} \operatorname{cth} \frac{x}{2} e^{-\gamma s x} \sin \gamma s x dx - \frac{\pi}{2} \right). \quad (26)$$

Эта формула может быть переписана в виде

$$\frac{dI_{\omega}}{d\omega} = \left\{ \frac{dI_{\omega}}{d\omega} \right\}_0 \Phi(s), \quad (27)$$

где

$$\Phi(s) = 12 \gamma s^2 \int_0^{\infty} \operatorname{cth} \frac{x}{2} e^{-\gamma s x} \sin \gamma s x dx - 6\pi \gamma s^2, \quad (28)$$

а $\left\{ \frac{dI_{\omega}}{d\omega} \right\}_0$ — интенсивность тормозного излучения в разреженной среде:

$$\left\{ \frac{dI_{\omega}}{d\omega} \right\}_0 = \frac{8e^2 g^2 q}{3\pi c}. \quad (29)$$

На частотах $\omega \gg \omega_{kp}$ величина γ близка к единице и функция $\Phi(s)$ равна (результат Мигдала):

$$\Phi(s) = 12s^2 \int_0^{\infty} \operatorname{cth} \frac{x}{2} e^{-sx} \sin sx \, dx - 6\pi s^2. \quad (30)$$

При $\gamma s > 1$ существенный интервал интегрирования в (23) по x меньше единицы. Разложив $\operatorname{th} \frac{x}{2}$ под знаком интеграла по степеням x и интегрируя, получим результат, совпадающий с формулой (15.25):

$$\frac{dI_{\omega}}{d\omega} = \left\{ \frac{dI_{\omega}}{d\omega} \right\}_0 \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{84s^4\gamma^4} \right), \quad (\gamma s > 1). \quad (31)$$

VIII. Вывод формул ионизационных потерь методом псевдофотонов (к § 21, 16)

Полезно установить связь между различными расчетами ионизационных потерь энергии. Для этого рассчитаем потери энергии методом псевдофотонов. Определим поле равномерно и прямолинейно движущегося заряда в однородной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. Будем исходить из макроскопических уравнений Максвелла ($\mu = 1$):

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon}{c^2} \ddot{\vec{A}} &= -\frac{4\pi e v}{c} \delta(\vec{r} - \vec{v}t), \\ \Delta \varphi - \frac{\varepsilon}{c^2} \ddot{\varphi} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon} e \delta(\vec{r} - \vec{v}t). \end{aligned} \quad (1)$$

Условие Лоренца в среде имеет вид $\frac{\varepsilon}{c} \dot{\varphi} + \operatorname{div} \vec{A} = 0$.

Разложим потенциалы в тройные интегралы:

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varphi'_k e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}, \quad \vec{A} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \vec{A}'_k e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}. \quad (2)$$

Для фурье-компонент потенциалов получим уравнения

$$\begin{aligned} k^2 \vec{A}'_k + \frac{\varepsilon}{c^2} \ddot{\vec{A}}'_k &= \frac{4\pi e v}{c} e^{-i(\vec{k}\vec{v})t} \\ k^2 \varphi'_k + \frac{\varepsilon}{c^2} \ddot{\varphi}'_k &= \frac{4\pi e}{\varepsilon} e^{-i(\vec{k}\vec{v})t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Положим $\vec{A}'_{\vec{k}} = \vec{A}_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\vec{v})t}$, $\varphi'_{\vec{k}} = \varphi_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\vec{v})t}$. Тогда для $\vec{A}_{\vec{k}}$ и $\varphi_{\vec{k}}$ получим следующие выражения:

$$\varphi_{\vec{k}} = \frac{4\pi e}{\varepsilon \left[k^2 - \frac{\varepsilon}{c^2} (\vec{k}\vec{v})^2 \right]}; \quad \vec{A}_{\vec{k}} = \varepsilon \frac{\vec{v}}{c} \varphi_{\vec{k}}. \quad (4)$$

Отсюда компонента $\vec{E}_{\vec{k}}$ электрического поля равна

$$\vec{E}_{\vec{k}} = \frac{i\omega}{c} \vec{A}_{\vec{k}} - i\vec{k}\varphi_{\vec{k}} = i \left(\frac{\omega\varepsilon}{c^2} \vec{v} - \vec{k} \right) \varphi_{\vec{k}}, \quad (5)$$

где

$$\omega = \vec{k}\vec{v}.$$

Следовательно, значение электрического поля в точке \vec{r} в момент t дается выражением

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\vec{k}} \left(\frac{\omega\varepsilon}{c^2} \vec{v} - \vec{k} \right) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} dk_x dk_y dk_z. \quad (6)$$

Влиянием магнитного поля можно пренебречь, ибо скорость вторичных частиц предполагается малой. В таком случае действие поля налетающей частицы эквивалентно действию волн с таким же значением электрического вектора. Вычислим поток энергии через единицу поверхности в точке, где находится атом, за все время пролета частицы:

$$S = \frac{cn}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (E_{\parallel}^2 + E_x^2 + E_y^2) dt, \quad (7)$$

где n — действительный показатель преломления. Если у нас падает поток частиц, то нужно проинтегрировать еще по плоскости xy . Подставляя (6) в (7) и интегрируя по t , x , y от $-\infty$ до $+\infty$, получим:

$$S = \frac{cn}{2(2\pi)^4 v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega^2}{v^2} \left(\frac{v^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{v^2}{c^2} \varepsilon(-\omega) - 1 \right) + k_x^2 + k_y^2 \right] \varphi_{\vec{k}} \varphi_{-\vec{k}} dk_x dk_y dk_z, \quad (8)$$

где $\varphi_{\vec{k}}$ означает, что в выражении (4) все компоненты \vec{k} , а следовательно и ω , имеют противоположный знак. Подставляя $\varphi_{\vec{k}}$ и учитывая, что $\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega)$, получим (ог-

раничиваясь при интегрировании по $k_\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ верхним пределом $k_{\rho \max}$) выражение для потока энергии частоты ω :

$$S_\omega d\omega = \frac{2e^2 cn}{\pi v^2} \frac{d\omega}{|\varepsilon(\omega)|^2} \int_0^{k_{\rho \max}} k_\rho dk_\rho \frac{\frac{\omega^2}{v^2} \left| \frac{v^2}{c^2} \varepsilon - 1 \right|^2 + k_\rho^2}{\left| \left(\frac{v^2}{c^2} \varepsilon - 1 \right) \frac{\omega^2}{v^2} - k_\rho^2 \right|^2}. \quad (9)$$

Потери энергии на единицу пути будут

$$-\frac{dE}{dz} = N \int_0^\infty S_\omega \sigma(\omega) d\omega, \quad (10)$$

где $N\sigma(\omega)$ — коэффициент поглощения волн с частотой ω (см. (21.12)). Потери при далеких столкновениях легко поддаются вычислению при $v \sim c$. Для этого проинтегрируем выражение (10) в пределе $v \sim c$:

$$\frac{dE}{dz} = \frac{ie^2}{\pi v^2} \int_0^{k_{\rho \max}} k_\rho dk_\rho \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\omega \varepsilon}{|\varepsilon|^2} \frac{\frac{\omega^2}{v^2} \left| 1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon \right|^2 + k_\rho^2}{\left| \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon \right) \frac{\omega^2}{v^2} + k_\rho^2 \right|^2}. \quad (11)$$

Интегрируем сначала по ω . Поскольку ε в верхней полуплоскости комплексного переменного ω не имеет ни полюсов, ни нулей, то полюса подынтегрального выражения бу-

дут определяться нулями знаменателя. При частотах, много больших атомных, полюса расположены в точках

$$\omega_{1,2} = \pm iv \sqrt{\frac{k_p^2 + 4\pi NZe^2}{1 - v^2/c^2}}. \quad (12)$$

При энергиях

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \gg \frac{\omega_{ат}}{v \sqrt{k_p^2 + \frac{4\pi NZe^2}{mc^2}}} \quad (13)$$

условия $|\omega_{1,2}| \gg \omega_{ат}$ удовлетворяются. Замкнем контур интегрирования в верхнюю полуплоскость. Тогда интеграл по действительной оси будет равен интегралу вдоль замкнутого контура минус интеграл по полуокружности. Интегралы вычисляются очень просто:

$$\frac{dE}{dz} = \frac{4\pi NZe^4}{mv^2} \int_0^{k_{p\max}} \frac{k_p dk_p}{k_p^2 + \frac{4\pi NZe^2}{mc^2}} = \frac{2\pi NZe^4}{mv^2} \ln \frac{mc^2 k_{p\max}^2}{4\pi NZe^2}. \quad (14)$$

В результате приходим к известной формуле Ферми, справедливой для больших энергий.

В заключение этого приложения установим связь между формулой (11) и другими выражениями для потерь при далеких столкновениях. Для получения выражения Ферми [20] необходимо вместо переменной k_p ввести прицельный параметр ρ . Для этого в выражении (11) нужно проинтегрировать по всем k_x, k_y . Тогда получим перпендикулярную и параллельную составляющие электрического поля частицы, пролетающей на прицельном расстоянии $\rho > R_{ат}$ от атома. Для параллельной составляющей имеем

$$E_{\parallel}(\vec{r}, t) = \frac{i}{(2\pi)^3 v} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \varphi_{\vec{k}} \frac{\omega}{v} \left(\frac{v^2}{c^2} \varepsilon - 1 \right) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d\omega. \quad (15)$$

Для перпендикулярной:

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}, t) = -\frac{i}{(2\pi)^3 v} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \vec{k}_\rho \varphi_{\vec{k}} \epsilon^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\omega. \quad (16)$$

Интегрирование проводится с помощью формулы

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} \frac{dk_x dk_y}{\frac{\epsilon}{c^2} \omega^2 - k^2} = \\ & = 2\pi \int_0^\infty \frac{J_0(k_\rho \rho) dk_\rho}{\frac{\epsilon}{c^2} \omega^2 - k^2} = K_0 \left(\frac{\rho \omega}{v} \sqrt{1 - \epsilon \frac{v^2}{c^2}} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Окончательно

$$\begin{aligned} E_\parallel = & -\frac{ie}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left(\frac{\omega}{v} z - \omega t\right)} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon\right) \frac{\omega}{\epsilon(\omega)} \times \\ & \times K_0 \left(\frac{\rho \omega}{v} \sqrt{1 - \epsilon v^2/c^2} \right) d\omega, \end{aligned} \quad (18)$$

$$E_\perp = -\frac{ie}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left(\frac{\omega}{v} z - \omega t\right)} \sqrt{1 - \epsilon v^2/c^2} K_0 \left(\frac{\rho \omega}{v} \sqrt{1 - \epsilon v^2/c^2} \right) d\omega. \quad (19)$$

Поток энергии дается выражением

$$S = cn \int_0^\infty \{ |E_{\perp \omega}|^2 + |E_{\parallel \omega}|^2 \} d\omega. \quad (20)$$

Подставляя значения полей, для потока энергии через площадку в 1 см^2 , расположенную на прицельном расстоянии ρ перпендикулярно траектории, получим выражение:

$$S = \frac{ce^2 n}{\pi^2 v^4} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{|\epsilon|^2} \left| 1 - \epsilon \frac{v^2}{c^2} \right| \left| \left| K_1 \left(\frac{\rho \omega}{v} \sqrt{1 - \epsilon v^2/c^2} \right) \right|^2 + \right.$$

$$+ |1 - \varepsilon v^2/c^2| K_0 \left| \left(\frac{\omega \rho}{v} \sqrt{1 - \varepsilon v^2/c^2} \right) \right|^2 d\omega. \quad (21)$$

Это выражение эквивалентно выражению, которым пользовался Э. Ферми [19]. Что касается более простого выражения использованного в [16], то его из выражения (11) можно получить следующим образом.

Перепишем (11), учитывая, что $\varepsilon(\omega) = \varepsilon^*(-\omega)$:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{ie^2}{\pi v^2} \int_0^{k_{\rho, \max}} k_{\rho} dk_{\rho} \int_0^{\infty} \omega d\omega \frac{(\varepsilon - \varepsilon^*) \left[k_{\rho}^2 + \left| 1 - \varepsilon \frac{v^2}{c^2} \right| \frac{\omega^2}{v^2} \right]}{|\varepsilon|^2 \left| k_{\rho}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \varepsilon \frac{v^2}{c^2} \right) \right|^2}.$$

Числитель подынтегрального выражения легко преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \varepsilon^* \frac{v^2}{c^2} \right) \varepsilon \left[k_{\rho}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \varepsilon \frac{v^2}{c^2} \right) \right] - \\ & - \left(1 - \varepsilon \frac{v^2}{c^2} \right) \varepsilon^* \left[k_{\rho}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \varepsilon^* \frac{v^2}{c^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} = \frac{ie^2}{\pi} \int_0^{k_{\rho, \max}} k_{\rho} dk_{\rho} \int_0^{\infty} \omega d\omega & \left\{ \frac{\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon^*}{c^2}}{\varepsilon^* \left[k_{\rho}^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon^*}{c^2} \right) \right]} - \right. \\ & \left. - \frac{\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon}{c^2}}{\varepsilon \left[k_{\rho}^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon}{c^2} \right) \right]} \right\}. \end{aligned}$$

Окончательно приходим к выражению для потерь энергии на единицу пути:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{ie^2}{\pi} \int_0^{k_\rho \text{ max}} k_\rho dk_\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \omega d\omega \frac{\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon}{c^2}}{\varepsilon \left[k_\rho^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon}{c^2} \right) \right]}. \quad (22)$$

Это выражение можно также получить с помощью формулы (21.8), вычисляя тормозящую силу.

ЛИТЕРАТУРА

Введение и глава I

1. *Е. Л. Фейнберг*, УФН, **58**, 193 (1956).
2. *E. L. Feinberg and I. Pomerančuk*, Nuovo Cimento. Suppl., **3**, 652 (1956).
3. *И. Е. Тамм, И. М. Франк, П. А. Черенков*, Нобелевские лекции. М., Физматгиз, 1960; УФН, **68**, 377, 387, 397 (1959).
4. *Б. М. Болотовский*, УФН, **75**, 295 (1961); **62**, 201 (1957).
5. *E. Fermi*, Z. Phys., **29**, 315 (1924).
6. *E. Williams*, K. Danske Vidensk. Selsk., **13**, 4 (1935).
7. *C. Weizsacker*, Z. Phys., **88**, 612 (1934).
8. *Р. Беккер*, Теория электричества., т. 2, М.—Л., ОГИЗ—Гостехиздат, 1941.
9. *М. Л. Тер-Микаелян*, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **9**, № 5, 77 (1956).
10. *С. Швeбер*, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, М., ИЛ, 1963.
11. *H. Bethe*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **30**, 524 (1934).
12. *А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий*, Квантовая электродинамика, М., Физматгиз, 1959.
13. *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков*, Введение в теорию квантованных полей, М., Гостехиздат, 1957.
14. *В. Гайтлер*, Квантовая теория излучения, М., ИИЛ, 1956.
15. *Нильс Бор*, Прохождение атомных частиц через вещество, М., ИИЛ, 1950.
16. *Э. В. Сехпосян, М. Л. Тер-Микаелян*, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 4, 143, 1961.
17. *Michael M. May*, Phys. Rev., **84**, 265 (1951).
18. *M. May and C. C. Wick*, Phys. Rev., **81**, 628 (1951).
19. *М. Л. Тер-Микаелян, Б. В. Хачатрян*, ЖЭТФ, **35**, 1287 (1958).
20. *R. Dalitz and D. Yennie*, Phys. Rev., **105**, 1598 (1957).
21. *А. М. Бадалян, Я. А. Смородинский*, ЖЭТФ, **40**, 1231 (1961).
22. *В. Н. Грибов, В. А. Колкунов, Л. Б. Окунь, В. М. Шехтер*, ЖЭТФ, **41**, 1839 (1961).
23. *I. Ya. Pomerančuk and I. M. Shmushkevich*, Nucl. Phys., **23**, 452 (1961).

1. *E. Williams*, K. Danske Vidensk. Selsk., 13, 4 (1935).
2. *B. Ferretti*, Nuovo Cimento, 7, 118 (1950).
3. *М. Л. Тер-Микаелян*, ЖЭТФ, 25, 289 (1953).
4. *М. Л. Тер-Микаелян*, ЖЭТФ, 25, 296 (1953).
5. *М. Л. Тер-Микаелян*, Диссертация, ФИАН, 1953.
6. *Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук*, ДАН СССР, 92, 535, 735 (1953).
7. *М. Л. Тер-Микаелян*, ДАН СССР, 94, 1033 (1954).
8. *М. Л. Тер-Микаелян*, Изв. АН СССР, серия физ., 19, 657 (1955).
9. *F. Dyson, H. Uberall*, Phys. Rev., 99, 604 (1955).
10. *H. Überall*, Phys. Rev., 103, 1055 (1956).
11. *H. Überall*, Phys. Rev., 107, 223 (1957),
12. *М. Л. Тер-Микаелян*, Диссертация, ФИАН, 1961, гл. III.
13. *G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambri and G. P. Murtas*, Phys. Rev. Letters, 8, 112 (1962).
14. *G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambri and G. P. Murtas*, Phys. Rev. Letters, 8, 454 (1962).
15. *G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambri and G. P. Murtas*, Phys. Rev. Letters., 9, 46E (1962).
16. *G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambri and G. P. Murtas*, Phys. Rev. Letters, 9, 396 (1962).
17. *G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambri and G. P. Murtas*, Nuovo Cimento, 28, 435 (1963).
18. *G. Bologna, G. Lutz, H. D. Schulz, U. Timm and W. Zimmermann*, Nuovo Cimento, 42A, 844 (1966).
19. *T. Kifune, Y. Kimura, M. Kobayashi, K. Kondo and T. Nishikawa*, J. Phys. Soc. Japan, 21, 1905 (1966).
20. *L. I. Schiff*, Phys. Rev., 117, 1394 (1960).
21. *Н. П. Калашников*, ФТТ, 5, 1924 (1963).
22. *W. K. H. Panofsky and A. N. Saxena*, Phys. Rev. Letters, 2, 219 (1959).
23. *A. N. Saxena*, Phys. Rev. Letters, 4, 311 (1960).
24. *A. N. Saxena*, Phys. Rev., 125, 1720 (1962).
25. *O. R. Frisch and D. N. Olson*, Phys. Rev. Letters, 3, 141 (1959).
26. *G. Bologna, G. Diambri and G. P. Murtas*, Phys. Rev. Letters, 4, 134 (1960).
27. *G. Bologna, G. Diambri and G. P. Murtas*, Phys. Rev. Letters, 4, 572 (1960).
28. *L. Criegee, G. Lutz, H. D. Schulz, U. Timm and W. Zimmermann*, Phys. Rev. Letters, 16, 1031 (1966).
29. *S. Kato, T. Kifune, Y. Kimura, M. Kobayashi, K. Kondo, T. Nishikawa, H. Sasaki, K. Takamatsu, S. Kikuta, K. Kohra*, J. Phys. Soc. Japan, 20, 303 (1965).
30. *H. Überall*, Z. Naturforsch., 17a, 332 (1962).
31. *Э. В. Сехпосян, М. Л. Тер-Микаелян*, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, № 4, 143 (1961).

32. *Н. П. Калашников, М. И. Рязанов*, Письма ЖЭТФ, 6, 609, 1967.
33. *N. Cabibbo, G. Da Prato, G. De Franceschi and U. Mosco*, Phys. Rev. Letters, 9, 270 (1962).
34. *N. Cabibbo, G. Da Prato, G. De Franceschi and U. Mosco*, Phys. Rev. Letters, 9, 435 (1962).
35. *N. Cabibbo, G. Da Prato, G. De Franceschi and U. Mosco*, Nuovo Cimento, 27, 979 (1963).
36. *В. Гайтлер*, Квантовая теория излучения. М., ИИЛ, 1956.
37. *Р. Джеймс*, Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей, М., ИИЛ, 1950.
38. *H. Bethe*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 30, 524 (1934).
39. *L. I. Schiff*, Phys. Rev., 83, 252 (1951).
40. *Р. О. Авакян, А. А. Армагян, С. М. Дарбинян, Э. В. Сехпосян*, ДАН АрмССР, 45, № 1, 3 (1967).
41. *R. F. Mozley and J. De Wire*, Nuovo Cimento, 27, 1281 (1963).
42. *H. Olsen and L. C. Maximon*, Phys. Rev., 114, 887 (1959).
43. *G. Lutz, H. D. Schulz, U. Timm and W. Zimmermann*, Preprint DESY (1666).
44. *G. Diambrini Palazzi*, Review Report presented at the International Conference on electron and photon interaction, Stanford (USA), 1967.

Г л а в а III

1. *Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук*, ДАН СССР, 92, 535 (1953).
2. *Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук*, ДАН СССР, 92, 735 (1953).
3. *М. Л. Тер-Микаелян*, ДАН СССР, 94, 1033 (1954).
4. *М. Л. Тер-Микаелян*, Изв. АН СССР, серия физ., 19, 657 (1955).
5. *А. Б. Мидал*, ДАН СССР, 96, 49 (1954).
6. *А. Б. Мидал*, ЖЭТФ, 32, 633 (1957); Phys. Rev., 103, 1811 (1956).
- 6а. *А. Б. Мидал*, ДАН СССР, 105, 77 (1955).
- 6б. *А. Б. Мидал, Н. М. Полиевктов-Николадзе*, ДАН СССР, 105, 233 (1955).
7. *V. M. Galitsky and I. I. Gurevich*, Nuovo Cimento, 32, 396 (1964).
8. *В. М. Галицкий, В. В. Якимец*, ЖЭТФ, 46, 1066 (1964).
9. *Ф. Ф. Терновский*, ЖЭТФ, 39, 171 (1960).
10. *И. Н. Топтыгин*, ЖЭТФ, 46, 851 (1964).
11. *Е. Л. Фейнберг*, УФН, 58, 193 (1956).
12. *E. L. Feinberg and I. Poterancuk*, Nuovo Cimento Suppl., 3, 652 (1956).
13. *И. М. Франк*, УФН, 75, 231 (1961).
14. *М. Л. Тер-Микаелян*, Диссертация, ФИАН, 1961.
15. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, М., Физматгиз, 1967.
16. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
17. *В. Гайтлер*, Квантовая теория излучения, М., ИИЛ, 1956.

18. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, М., Физматгиз, 1959.
19. E. Fermi, Rev. Mod. Phys., 4, 87 (1932).
20. В. Б. Берестецкий, ЖЭТФ, 8, 148 (1938).
21. М. Л. Тер-Микаелян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 4, 13 (1958).
22. Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, Классическая теория поля, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
23. В. Н. Цытович, Вестник МГУ, № 11, 1951.
24. В. Л. Гинзбург, Г. Г. Гетманцев, ДАН СССР, 87, 187 (1952).
- 24а. В. Л. Гинзбург, УФН, 69, 537 (1959).
- 25а. А. А. Коломенский, ДАН СССР, 106, 982 (1956).
- 25б. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 36, 1335 (1959).
- 25в. К. А. Барсуков, ЖЭТФ, 36, 1485 (1959).
26. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., Физматгиз, 1960.
27. М. Л. Тер-Микаелян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 3, 95 (1959).
28. М. Л. Тер-Микаелян, ЖЭТФ, 38, 1167 (1960).
29. И. В. Андреев, ЖЭТФ, 46, 1764 (1964).
- 29а. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ, 30, 96, 386 (1956).
30. E. S. Fradkin, Nuclear Phys., 12, 465 (1959).
31. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., Физматгиз, 1962.
32. В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов, Метод функций Грина в статистической механике, М., Физматгиз, 1961.
33. М. И. Рязанов, ЖЭТФ, 32, 1244 (1957).
34. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, Изд. АН СССР, 1950, т. 1, стр. 273.
35. И. Е. Тамм, ЖРФХО, 56, 248 (1924).
36. R. P. Feynman, Phys. Rev., 76, 769 (1949).
37. С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, М., ИИЛ, 1963.
38. И. Линдхард, Сборник „Нильс Бор и развитие физики“, под ред. В. Паули, стр. 244, М., ИИЛ, 1958.
39. А. А. Соколов, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 30, 136 (1956),
40. В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 42, 457 (1962).
41. М. И. Рязанов, ЖЭТФ, 34, 1258 (1958).
42. С. Э. Беленький, Лавинные процессы в космических лучах, М.—Л., ОГИЗ—Гостехиздат, 1948.
43. Г. Бете, Д. Ашкин, Экспериментальные методы ядерной физики, под ред. Э. Сегре, М., ИИЛ, 1955.
44. М. Л. Тер-Микаелян, ЖЭТФ, 36, 253 (1959).
45. G. Moliere, Z. Naturforsch., 3a, 78 (1948).
46. H. Bethe, Phys. Rev., 89, 1256 (1953).
47. Б. Росси, К. Грейзен, Взаимодействие космических лучей с веществом, М., ИИЛ, 1948.

48. М. Л. Тер-Микаелян, ЖЭТФ, 25, 289, 296 (1953).
49. И. И. Гольдман, ЖЭТФ, 38, 1866 (1960).
50. В. Е. Пафомов, ЖЭТФ, 49, 1222 (1965); ЖЭТФ, 52, 208 (1967).
- 50а. R. H. Ritchie, J. C. Ashley, L. C. Emerson, Phys. Rev., 135, A 759 (1964).
51. Н. П. Калашиников, М. И. Рязанов, Взаимодействие излучения с веществом, М., Атомиздат, 1966.
- 51а. Н. П. Калашиников, М. И. Рязанов, ЖЭТФ, 47, 1055 (1964).
52. В. В. Якимец, Диссертация, Москва, 1966.
53. M. Schein, D. M. Haskin, R. G. Glasser, Phys. Rev., 95, 855 (1954).
54. F. Dyson, Proceedings of the Sixth Annual Rochester Conference, April. 3—7, 1956 (IX.29).
55. И. Л. Розенталь, М. Л. Тер-Микаелян, Е. Л. Фейнберг, ДАН СССР, 103, 581 (1955).
56. A. Debenedetti, C. M. Garelli, L. Tallone, M. Vigone and G. Wataghin, Nuovo Cimento, 12, 954 (1954); 2, 220 (1955).
57. M. Koshiba and M. F. Kaplon, Phys. Rev., 97, 193 (1955).
58. A. Debenedetti, C. M. Garelli, L. Tallone, M. Vigone and G. Wataghin, Nuovo Cimento, 3, 226 (1956).
59. L. Barbanti-Silva, C. Bonacini, C. De Pietri, I. Iori, G. Lovera, R. Perilli-Fedeli, A. Roveri, Nuovo Cimento, 3, 1465 (1956).
60. M. Miesowicz, O. Stanisiz and W. Wolter, Bull. Acad. Polon. Sci. CL. III, 4, 811 (1956); Nuovo Cimento, 5, 513 (1957).
61. A. Debenedetti, C. M. Garelli, L. Tallone and M. Vigone, Nuovo Cimento, 4, 1151 (1956).
62. K. Pinkau, Nuovo Cimento, 3, 1285 (1956).
63. H. Fay, Nuovo Cimento, 5, 293 (1957).
64. G. Wataghin, Proceedings of the Sixth Annual Rochester Conference, IX, 24, 1956.
65. Ф. Р. Арутюнян, К. А. Испирян, А. Г. Оганесян, А. А. Франиян, ДАН АрмССР, 44, 65 (1967).
66. А. А. Варфоломеев, Д. М. Голенко, И. А. Светлолобов, ДАН СССР, 122, 785 (1958).
67. А. А. Варфоломеев, И. А. Светлолобов, ЖЭТФ, 36, 1771 (1959).
68. А. А. Варфоломеев, Р. И. Герасимова, И. И. Гуревич, Л. А. Макарьина, А. С. Романцева, С. А. Чуева, ЖЭТФ, 38, 33 (1960). Труды международной конференции по космическим лучам, М., 1959.
69. Т. Г. Волконская, И. П. Иваненко, Г. А. Тимофеев, Proceedings of the Cosmic Ray Conference, Moscow, 1959; ЖЭТФ, 35, 293 (1958).
70. Г. А. Тимофеев, ЖЭТФ, 41, 1487 (1961).
71. А. К. Бахтадзе, И. П. Иваненко, Ядерная физика, 4, 161 (1966).
72. И. П. Иваненко, Б. Е. Самосудов, Ядерная физика, 4, 807 (1966); 5, 622 (1967).
73. И. П. Иваненко, Б. Е. Самосудов, Изв. АН СССР, серия физ., 30, 1651 (1966).
74. А. К. Бахтадзе, Вестник МГУ, физика, 4, 39 (1967).
75. Т. Харрис, Теория ветвящихся случайных процессов, М., „Мир“, 1966.

1. П. А. Черенков, ДАН, 2, 451 (1934).
2. С. И. Вавилов, ДАН, 2, 457 (1934).
3. И. Е. Тамм, И. М. Франк, ДАН, 14, 107 (1937).
4. П. А. Черенков, И. Е. Тамм, И. М. Франк, Нобелевские лекции, М., Физматгиздат, 1960.
5. Б. М. Болотовский, УФН, 62, 201 (1957); УФН, 75, 295 (1961).
6. J. V. Jelley, Serenkov Radiation and its Application. Pergamon Press, London, 1958.
7. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ, 16, 15 (1946); J. Phys. USSR, 9, 353 (1945).
8. Ф. Г. Басс, В. М. Яковенко, УФН, 86, 189 (1965).
9. И. М. Франк, УФН, 68, 397 (1959); УФН, 30, 149 (1946).
10. И. М. Франк, УФН, 87, 189 (1965); УФН, 75, 231 (1961).
11. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 10, 589 (1940); ДАН СССР, 24, 131 (1939).
12. В. Л. Гинзбург, УФН, 59, 537 (1959).
13. G. Vesck, Phys. Rev., 74, 795 (1948).
14. П. Клепиков, Вестник МГУ, 8, (5), 61 (1951).
15. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ, 33, 1403 (1957); ЖЭТФ, 37, 527 (1959).
16. В. Е. Пафомов, ЖЭТФ, 36, 1853 (1959).
17. М. Л. Тер-Микаелян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 4, 141 (1959).
18. Н. А. Корхмазян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 6, 87 (1958); 13, № 2, 139 (1960).
19. Г. М. Гарибян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 4, 7 (1958); ЖЭТФ, 38, 1814 (1960).
20. Н. А. Корхмазян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 1, 115 (1962).
21. В. Е. Пафомов, Изв. ВУЗов, Радиофизика, 5, 484 (1962).
22. В. Е. Пафомов, ЖЭТФ, 33, 1074 (1957); Труды ФИАН им. Л. Н. Лебедева, 16, 94 (1961).
23. В. А. Енибарян, Б. В. Хачатрян, Изв. АН АрмССР, физика, 1, 11 (1966).
24. Г. М. Гарибян, Г. А. Чаликян, ЖЭТФ, 35, 1282 (1958); Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 3, 49 (1959).
- 24а. Г. М. Гарибян, Изв. АН СССР, сер. физ., 26, 754 (1962).
25. В. Е. Пафомов, ЖЭТФ, 39, 134 (1960).
26. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., Госатомиздат, 1961.
27. Б. Л. Желнов, ЖЭТФ, 40, 170 (1961).
28. В. М. Яковенко, ЖЭТФ, 41, 385 (1961).
29. Э. А. Канер, В. М. Яковенко, ЖЭТФ, 42, 471 (1962).
30. А. Ц. Аматауни, ЖТФ, 34, 1354 (1964).
31. В. М. Яковенко, Укр. физ. ж., 8, 705 (1963); Изв. вузов, Радиофизика, 7, 657 (1964).

32. *V. P. Silin and E. P. Fetisov*, Phys. Rev. Letters, 7, 374 (1961); ЖЭТФ, 45, 1572 (1963).
33. *В. Я. Эйдман*, Изв. вузов, Радиофизика, 5, 478 (1962).
34. *В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург*, УФН, 76, 643 (1952); 77, 663 (1962).
35. *К. А. Барсуков*, ЖЭТФ, 37, 1106 (1959).
36. *Г. М. Гарибян, И. Я. Померанчук*, ЖЭТФ, 37, 1828 (1959).
- 36а. *Г. М. Гарибян*, ЖЭТФ, 39, 332 (1960).
37. *И. И. Гольдман*, ЖЭТФ, 38, 1866 (1960).
38. *Ф. Ф. Терновский*, ЖЭТФ, 39, 171 (1950).
39. *В. Е. Пафомов*, ДАН СССР, 133, 1316 (1960); ЖЭТФ, 47, 530 (1964).
40. *Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук*, ДАН СССР, 92, 535, 735, 1953.
41. *М. Л. Тер-Микаелян*, ДАН СССР, 94, 1033 (1954).
42. *А. Ц. Аматацни, Н. А. Корхмазян*, ЖЭТФ, 39, 1011 (1960).
43. *А. А. Галеев*, ЖЭТФ, 46, 1335 (1964).
44. *В. Н. Цытович*, ЖТФ, 31, 766, 1961.
45. *И. М. Франк, В. Е. Пафомов*, Ядерная физика, 5, 631 (1967).
46. *К. А. Барсуков, Б. М. Болотовский*, Изв. вузов, Радиофизика, 3, 336 (1960); *К. А. Барсуков, Л. Т. Нарышкина*, Изв. вузов, Радиофизика, 4, 574 (1961).
47. *В. Е. Пафомов*, ЖЭТФ, 36, 1853 (1959).
48. *Б. М. Болотовский, О. С. Мерелян*, Оптика и спектроскопия, 18, 3 (1965).
49. *Э. Д. Газазян, О. С. Мерелян*, ДАН АрмССР, 38, 3 (1964); Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 3, 87 (1964).
50. *R. H. Ritchie*, Phys. Rev., 106, 874 (1957).
51. *А. Г. Ситенко, В. С. Ткалич*, ЖТФ, 29, 1074 (1959).
52. *E. A. Stern, R. A. Ferrell*, Phys. Rev., 120, 130 (1960).
53. *Ю. А. Романов*, Изв. вузов, Радиофизика, 7, 242 (1964).
54. *В. Я. Эйдман*, Изв. вузов, Радиофизика, 8, 188 (1965).
55. *К. А. Барсуков, Л. Г. Нарышкина*, ЖЭТФ, 36, 225 (1966); 36, 800 (1966).
56. *В. Е. Пафомов, Е. П. Фетисов*, ЖЭТФ, 53, 965 (1967).
57. *O. von Baeyer*, Phys. Z., 10, 168 (1908); 10, 176 (1908).
58. *J. E. Lilienfeld*, Phys. Z., 20, 280 (1919).
59. *P. C. Foote, W. F. Meggers and R. L. Chenalt*, J. Opt. Soc. Amer., 9, 541 (1924).
60. *H. Seeman*, Phys. Z., 22, 581 (1921).
61. *F. Rother and W. M. Cohn*, Phys. Z., 31, 687 (1930); 75, 544 (1932).
62. *E. L. Mohler and C. Voeckner*, J. Res. Nat. Bur. Stand., 6, 673 (1931); 1, 751 (1931).
63. *F. L. Mohler*, J. Res. Nat. Bur. Stand., 8, 357 (1932).
64. *C. Voeckner*, J. Res. Nat. Bur. Stand., 9, 413 (1932).
65. *P. Goldsmith and J. V. Jelley*, Phil. Mag., 4, 836 (1959).
66. *С. Михалык*, Исследование переходного излучения, Диссертация, МГУ, 1961.

67. *C. Михалык*, Ядерная физика, 3, 89 (1966).
68. *R. W. Brown, P. Wessel and E. P. Troupson*, Phys. Rev. Letters, 5, 472 (1960).
69. *W. Steinmann*, Phys. Rev. Letters, 5, 470 (1960).
70. *W. Steinmann*, Z. Phys., 163, 92 (1961).
71. *P. Wessel*, Bull. Amer. Phys. Soc., 6, 310 (1961).
72. *E. A. Stern*, Phys. Rev. Letters, 8, 7 (1962).
73. *R. A. Ferrell*, Phys. Rev., 111, 1214 (1958).
74. *R. H. Ritchie and H. B. Eldridge*, Bull. Amer. Phys. Soc., 4, 384 (1959).
75. *R. A. Ferrell and E. A. Stern*, Amer. J. Phys., 30, 810 (1962).
76. *B. A. Lippman*, Preprint UCRL-6774 (1962).
77. *H. Boersch, C. Radeloff and G. Sauerbrey*, Phys. Rev. Letters., 7, 52 (1961).
78. *H. Boersch, C. Radeloff and G. Sauerbrey*, Z. Phys., 165, 464 (1961).
79. *G. Sauerbrey*, Fifth International Congress for Electro-Microscopy, 1962.
80. *H. Boersch, P. Dobberstein, D. Fritzsche and G. Sauerbrey*, Z. Phys., 187, 97 (1965).
81. *A. L. Frank, E. T. Arakawa and R. D. Birkhoff*, Phys. Rev., 126, 1947 (1962).
82. *E. T. Arakawa, A. L. Frank, R. D. Birkhoff and R. H. Ritchie*, Bull. Amer. Phys. Soc., 6, 266 (1961).
83. *A. L. Frank et al.* Optical Emission from Irradiated thin Metallic Foils, ORNL-3114, 1962.
84. *E. T. Arakawa et al.* Optical Emission from Metallic Foils Irradiated by High Energy Electrons, II-nd Intern Congress of Radiation Research Narrodate, England, 1962.
85. *L. C. Emerson et al.* Emission Spectra of Electron Irradiated Metal Foils, ORNL-3450, 1963.
86. *E. T. Arakawa, L. C. Emerson, D. C. Hammer, R. D. Birkhoff*, Phys. Rev., 131, 719 (1963).
87. *E. T. Arakawa, R. J. Herickhoff and R. D. Birkhoff*, Phys. Rev. Letters, 12, 319 (1964).
88. *R. J. Herickhoff, E. T. Arakawa and R. D. Birkhoff*, Phys. Rev., 137, A1433 (1965).
89. *S. Tanaka and Y. Katayama*, J. Phys. Soc. Japan., 19, 40 (1964).
90. *P. von Blanckenhagen, H. Boersch, D. Fritzsche, H. G. Seifert and G. Sauerbrey*, Phys. letters, 11, 296 (1964).
91. *Ф. Р. Арутюнян, Ж. В. Петросян, Р. А. Оганесян*, Письма ЖЭТФ, 3, 193 (1966).
92. *Ф. Р. Арутюнян, Ж. В. Петросян, Р. А. Оганесян*, Оптика и спектроскопия, 21, 399 (1966).
93. *Ф. Р. Арутюнян, Ж. В. Петросян, Р. А. Оганесян*, ЖЭТФ, 51, 760 (1966).
94. *Л. А. Ананова, Ф. Р. Арутюнян, Р. А. Оганесян, Ж. В. Петросян*, ДАН АрмССР, 43, 87 (1966).

95. С. J. Powell, J. B. Swan, Phys. Rev., 115, 869 (1959); 118, 640 (1960).
96. G. E. Jones, L. S. Cram, E. T. Arakawa, Phys. Rev., 147, 515 (1966).
97. В. Е. Пафомов, И. М. Франк, ФИАН им. Лебедева, препринт А-76, Лаборатория атомного ядра, 1965 г.

Г л а в а V

1. М. Л. Тер-Микаелян, ДАН СССР, 134, 318 (1960).
2. М. Л. Тер-Микаелян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, № 2, 103 (1961).
- 2а. M. L. Ter-Mikaelian, Nuclear Physics, 24, 43 (1961)
3. М. Л. Тер-Микаелян, А. Д. Газазян, ЖЭТФ, 39, 1693 (1960).
4. М. Л. Тер-Микаелян, Диссертация, ФИАН, 1961.
5. В. Я. Эйдман, Изв. вузов, Радиофизика, 5, 897 (1962).
6. Б. В. Хачатрян, С. С. Элбакян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 5, 127 (1964).
7. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, М., Гостехиздат, 1957.
8. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, М., ИЛ, 1949.
9. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, Изв. вузов, Радиофизика, 2, 331 (1959).
- 9а. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 36, 1823 (1959).
10. Б. В. Хачатрян, Изв. вузов, Радиофизика, 6, 904, 1963.
11. А. Ц. Амацуни, Н. А. Корхмазян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 13, № 5, 55 (1960).
12. Б. В. Хачатрян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 5, 103 (1964).
- 12а. Б. В. Хачатрян, ЖТФ, 34, 637 (1964).
13. К. А. Барсуков, ЖТФ, 34, 725 (1964).
- 13а. К. А. Барсуков, Б. М. Болотовский, Изв. вузов, Радиофизика, 7, 291 (1964).
14. И. М. Франк, УФН, 68, 397 (1959).
15. Я. Б. Файнберг, Н. А. Хижняк, ЖЭТФ, 32, 883 (1957).
- 15а. П. В. Блисх, Изв. вузов, Радиофизика, 2, 63 (1959).
- 15б. R. Pratesi, G. Toraldo di Francia, Nuovo Cimento, 25, 756 (1962).
- 15в. S. J. Smith, E. M. Purcell, Phys. Rev., 92, 1069 (1953).
- 15г. L. Ronchi, G. Toraldo di Francia, Alta Frequenza, 32, 1 (1963).
16. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ, 35, 1435 (1958).
17. Г. М. Гарибян, И. И. Гольдман, ДАН АрмССР, 31, 219 (1960).
18. В. А. Джрбашян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 6, 113 (1963).
19. В. Е. Пафомов, ЖТФ, 33, 557 (1957); ЖТФ, 39, 134 (1960).
- 19а. В. Е. Пафомов, ЖЭТФ, 49, 1222 (1965).
20. М. Л. Тер-Микаелян, Письма ЖЭТФ, 8, 100 (1968).

21. Ф. Р. Арутюнян, К. А. Испирян, А. Г. Оганесян, Изв. АН СССР, сер. физ., 28, 1864 (1964). Труды международной конференции по физике высоких энергий, Дубна, 1964, стр. 933.
22. Ф. Р. Арутюнян, К. А. Испирян, А. Г. Оганесян, Ядерная физика, 1, 842 (1965).
23. Ф. Р. Арутюнян, К. А. Испирян, А. Г. Оганесян, А. А. Франлян, Письма ЖЭТФ, 4, 277 (1966).
24. Ф. Р. Арутюнян, К. А. Испирян, А. Г. Оганесян, А. А. Франлян, ЖЭТФ, 52, 1121 (1967).
25. А. И. Алиханян, Ф. Р. Арутюнян, К. А. Испирян, М. Л. Тер-Микаелян, ЖЭТФ, 41, 2002 (1961).
26. E. Fermi, Z. Phys., 29, 315 (1924).
27. С. П. Капица, ЖЭТФ, 39, 1367 (1960).
28. В. В. Тамойкин, Изв. вузов, Радиофизика, 6, 257 (1963).
29. В. В. Тамойкин, С. Б. Бирагов, ЖЭТФ, 44, 1544 (1963).
30. Н. П. Калашников, М. И. Рязанов, ЖЭТФ, 45, 325 (1963).
31. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН, 88, 209 (1966).
32. М. Л. Тер-Микаелян, Б. В. Хачатрян, ДАН АрмССР, 40, 13 (1965).
- 32а. Б. В. Хачатрян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 2, 133 (1965).
33. И. Г. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1962.
34. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ДАН СССР, 124, 1026 (1959).
35. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, ДАН СССР, 147, 74 (1962).
36. Б. Нобл, „Метод Винера-Хопфа“, М., ИЛ, 1962.
37. Д. М. Седракян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 4, 103 (1964).
38. Г. А. Гринберг, Ю. В. Пименов, ЖТФ, 27, 2326 (1957).

П р и л о ж е н и я

1. H. Überall, Phys. Rev., 103, 1055 (1956).
2. М. Л. Тер-Микаелян, ЖЭТФ, 25, 289, 296 (1953).
3. С. Г. Калашников, М. А. Леонтович, ЖЭТФ, 10, 749 (1940).
4. Р. Джеймс, Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей, М., ИИЛ, 1953,
5. L. I. Schiff, Phys. Rev., 117, 1394 (1960).
6. Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела, М., Физматгиз, 1962.
7. Э. Ферми, Молекулы и кристаллы, М., ИЛ, 1947.
8. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 10, 589 (1940).
9. А. А. Соколов, ДАН СССР, 28, 415 (1940).
10. J. M. Jauch and K. M. Watson, Phys. Rev., 74, 950 (1948).
11. М. И. Рязанов, ЖЭТФ, 32, 1244 (1957).
12. М. Л. Тер-Микаелян, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 4, 13 (1958).

13. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, Изд. АН СССР, 1950, т. 1, стр. 273.
14. С. Швебер, Г. Бете, Ф. Гофман, Мезоны и поля, т. I, М. ИИЛ, 1957.
- 14а. R. P. Feynman, Phys. Rev., 76, 749 (1949).
15. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М., Гостехиздат, 1957, стр. 35.
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
17. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, М., Гостехиздат, 1959.
18. И. И. Гольдман, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 13, № 6, 55 (1960).
19. В. Е. Пафомов, ЖЭТФ, 49, 1222 (1965).
20. E. Fermi, Phys. Rev., 57, 485 (1940).

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка.

E, v, p — энергия, скорость и импульс частицы.

ω — частота фотона.

\vec{q} — импульс, передаваемый среде в данной реакции.

q_{\parallel} — проекция \vec{q} на направление движения частицы, вызывающей реакцию.

q_{\perp} — проекция \vec{q} на плоскость, перпендикулярную направлению движения.

q — полный импульс, передаваемый среде, а также характерная константа многократного рассеяния (формула (17.7)).

$\beta = v/c$ — формула (1.2).

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — формула (1.2).

ζ — прицельный параметр.

$R = R_0 Z^{-1/3}$ — радиус экранировки.

R_0 — боровский радиус атома водорода.

$R_{\text{яд}}$ — радиус ядра.

$\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c}$ — комптоновская длина волны электрона.

$\lambda = \frac{c}{\omega}$ — длина волны излученного фотона.

$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2}$ — классический радиус электрона.

\vec{E}, \vec{H} — напряженности электромагнитного поля.

A^i ($A^0 = \varphi, A^{1,2,3} = \vec{A}$) — потенциалы электромагнитного поля.

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}]$ — вектор Пойнтинга.

S_p — поток энергии через площадку 1 см^2 , отстоящую на прицельном расстоянии ρ от траектории и перпендикулярную ей, за все время движения электрона.

$S_{\omega\rho}$ — см. формулу (1.9).

S_z, S — полный поток энергии через плоскость, перпендикулярную движению электрона, за все время движения.

$dI_{n, \omega}^{\rightarrow}$ — излученная энергия частоты ω в направлении \vec{n} .

dI_{ω} — полная излученная энергия частоты ω .

I — полные потери энергии.

$d\dot{I}_{n, \omega}^{\rightarrow}, d\dot{I}_{\omega}, \dot{I}$ — соответствующие величины в единицу времени.

$dI_{n, \omega}^{\parallel, \perp} = I_{n, \omega}^{\parallel, \perp} d\Omega d\omega$ — энергия частоты ω , излученная в направлении \vec{n} , поляризованная либо в плоскости излучения (I^{\parallel}), либо в плоскости, перпендикулярной плоскости излучения (I^{\perp}).

$I_{n, \omega}^{\parallel, \perp}$ — соответствующая спектральная плотность.

k_1, k_2, k_3 — переменные метода псевдофотонов

$$\hbar k_1 = q_{\parallel} - \frac{cq^2}{2\varepsilon_1}, \quad \hbar k_2 = q_2, \quad \hbar k_3 = q_3$$

$$k_{\perp}^2 = k_2^2 + k_3^2, \quad d\vec{k} = dk_1 dk_2 dk_3.$$

θ — угол влета электрона в вещество (гл. II), угол излучения кванта и угол рассеяния электрона (гл. III, IV, V).

\bar{u}^2 — средний квадрат амплитуды тепловых колебаний (формула (11) приложения II), вдоль определенной оси.

Ze — заряд ядра.

N — полное число атомов в кристалле (гл. II), плотность атомов (гл. I, III, IV, V).

N_0 — число атомов в вершинах элементарных ячеек кристалла (гл. II).

N' — переменная часть плотности атомов (гл. V).

$\sigma = \frac{Z^2 r_0^2}{137}$ — характерная постоянная, входящая в поперечники тормозного излучения и рождения пар.

ω_k, ω'_k — частоты падающего и рассеянного псевдофотонов.

$\vec{\varepsilon}_1, \vec{p}_1; \vec{\varepsilon}_2, \vec{p}_2$ — энергия и импульс излучающего электрона до и после процесса.

$\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_1}$ — энергия кванта в единицах энергии электрона, а также диэлектрическая постоянная среды.

$\varepsilon_+, \varepsilon_-$ — энергия позитрона и электрона в процессе образования пары.

$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} \vec{n}$ — импульс кванта в среде.

$\theta_1, \chi = \frac{\varepsilon_1}{mc^2} \theta_1$ — угол между \vec{p}_1 и \vec{n} .

θ_2 — угол между \vec{p}_2 и \vec{n} .

θ_3 — угол рассеяния электрона.

θ_+ — угол между направлением движения позитрона и фотона (гл. II).

$\hbar\delta = \hbar k_{\min} = \frac{\hbar\omega mc^2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2} - mc$ — минимальный продольный импульс.

$l_{\text{ког}} = \frac{1}{\delta} = \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\hbar\omega mc^2} \lambda$ — когерентная длина.

$\delta_1 = \delta + \frac{2\pi NZe^2}{mc\omega}$ — минимальный продольный импульс с учетом поляризации среды.

δ_2 — минимальный продольный импульс с учетом многократного рассеяния (формула (18.4)).

$n_k dk_1$ — полное число псевдофотонов частоты $\omega_k = k_1 v \gamma$, эквивалентных прохождению одного электрона.

$d\sigma_{\text{ког}}$ — когерентная часть поперечника (формула (7.6)).

$d\sigma_{\text{инт}}$ — интерференционная часть поперечника (формула (7.6)).

$d\sigma_{\text{ам}}$ — аморфная часть поперечника (формула (8.1)).

$d^2\sigma^{\text{top}}$ — дифференциальный поперечник тормозного излучения фотонов частоты ω в направлении x (формула (3.7), (10.1)).

$d\sigma^{\text{top}}$ — поперечник тормозного излучения квантов частоты ω (формула (2.19), (7.7)).

$d^2\sigma^{\text{пар}}$ — дифференциальный поперечник образования пар (формула (9.5)).

$d\sigma^{\text{пар}}$ — поперечник образования пар (формула (4.3), (7.8)).

\vec{g} — вектор обратной решетки.

$S(\vec{g})$ — структурный фактор.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi N Z e^2}{m}}$ — ленгмюровская (плазменная) частота.

$\omega_{\text{кр}} = \frac{E}{mc^2} \omega_0$ — критическая частота (формула (14.5)).

ω_1, ω_2 — минимальная и максимальная частота интервала тормозного спектра (формула (18.21)), внутри которого существенно влияние многократного рассеяния.

E_0 — энергия, начиная с которой необходимо учитывать влияние многократного рассеяния (формула (18.22)).

L_R — резерфордовский логарифм (формула (17.8)).

$L_{\text{рад}} = \ln 183 Z^{-1/3}$ — радиационный логарифм (формула (17.11)).

$\Phi(s)$ — функция Мигдала (формулы (21.28) (19.21)).

$F(s)$ — усложненные функции Мигдала (формулы (21.34), (28.134')).

s — характерный параметр, определяющий влияние многократного рассеяния на тормозное (формулы (19.22), (18.27)) и резонансное излучение (формула (28.136)).

$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{1,2}} \sin \theta$ — проекция вектора импульса фотона \vec{k} на плоскость раздела.

$k_z = \pm x_{1,2}$ — проекция вектора \vec{k} на ось z (формула (24.14)).

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{1,2} - q^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{1,2}} \cos \theta \text{ — (формулы (24.9), (24.14)).}$$

k'_z — формула (25.7).

\vec{E}_t — проекция \vec{E} на плоскость раздела.

\vec{E}_n — проекция \vec{E} на нормаль к плоскости раздела.

$\vec{E}_1, (\vec{E}_2)$ — поле в среде с диэлектрической постоянной $\varepsilon_1, (\varepsilon_2)$.

$\vec{E}_{\vec{q}}$ — проекция \vec{E}_t на направление \vec{q} .

\vec{E}_x — проекция \vec{E}_t на направление оси x .

\vec{E}^{\parallel} — компонента \vec{E} , поляризованная в плоскости излучения (плоскость, содержащая вектор \vec{k} и нормаль к границе раздела).

\vec{E}^{\perp} — компонента \vec{E} , поляризованная в перпендикулярной плоскости.

E^+, \vec{E}^- — поля, распространяющиеся в направлении $z > 0$ и в направлении $z < 0$ соответственно.

ψ — угол между направлением скорости и осью z (формула (28.5)).

$\alpha = \frac{2\pi\nu}{l} r$ — „частота пролета“ периода среды (формула (28.59)).

$\omega_{\text{эф}} = \frac{2\pi\nu}{l} r$ — условие резонанса (формула (28.5)).

$\varepsilon_0(\omega)$ — постоянная часть диэлектрической постоянной.

$\varepsilon_1(\omega, z); \varepsilon'(\omega, \vec{r})$ — переменная часть диэлектрической постоянной (формулы (28.1), (28.1')).

l — период среды.

$\alpha = \frac{l_2}{l_1}$ — отношение толщины второй пластинки к толщине первой пластинки в периодической слоистой среде.

ω_{\min} , ω_{\max} — минимально и максимально излучаемые частоты на r -ой гармонике (формула (28.10')).

$E_{\text{пор}}$ — пороговое значение энергии для излучения r -ой гармоника.

$E_{1\text{пор}}$ — пороговая энергия для первой гармоника (28.90).

$y = \frac{\omega_{\min}}{\omega}$ — см. формулу (28.55).

m — число излученных квантов на единицу пути.

r_{\max} — см. формулу (28.91).

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
47	14 снизу	когерентного	конкретного
172	12 сверху	(см. (19.12))	(см. (19.10))
193	Формула (21.25)	$\left(1 + i \frac{\omega - kv}{4qp}\right)$	$\left(1 + i \frac{\omega - kv}{2qp}\right)$
194	2 сверху	(19.28)	(21.28)
222	Формула (24.21)	$\varepsilon^{1/2}$	$\varepsilon_1^{1/2}$
256	6—7 снизу	распространяющихся	для частиц, распростра- няющихся
256	3 снизу	в среде	при движении частицы в среде
285	4—7 снизу	(28.10), (28.11), (28.12), (28.13)	(28.10'), (28.11'), (28.12'), (28.13')
309	1 сверху	(28.74')	(28.74)
310	12 сверху	атомов	атомных
333	3 снизу	приятно	принято

Михаил Леонович Тер-Микаелян

**ВЛИЯНИЕ СРЕДЫ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ
ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ**

*Печатается по решению ученого совета
Института физических исследований*

Отв. редактор *С. М. Дарбинян*
Редактор издательства *В. Б. Андреасян*
Худож. оформление *К. К. Кафадаряна*
Технич. редакторы *М. А. Капланян, Г. Л. Гороян*
Корректор *Г. А. Абрамян*

ВФ 03328, заказ 276, изд. 2931, РИСО 1107, тираж 1500.
Сдано в производство 29/V 1968 г. Подписано к печати 4/II 1969 г.
Печ. л. 28,63, уч.-изд. л. 23,1, бум. л. 14,32. Бумага № 1, 60 × 90^{1/16}.
Цена 1 р. 82 к.

Типография Издательства АН АрмССР, Ереван, ул. Барекамутян, 24