
Я. П. ТЕРЛЕЦКИЙ, Ю. П. РЫБАКОВ

ЭЛЕКТРО- ДИНАМИКА

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов физических
специальностей университетов



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1980

ББК 22.313
Т35
УДК 538.3

Рецензенты—кафедра теоретической физики МГУ
и проф. О. С. Иваницкая (Институт физики АН БССР)

Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П.

Т35 Электродинамика: Учеб. пособие для студентов университетов—М.: Высш. школа, 1980.—335 с., ил.

В пер.: 95 к.

В предлагаемом учебном пособии дается изложение классической электродинамики в соответствии с существующей университетской программой этого курса. В первой части курса, посвященной электродинамике Максвелла—Лоренца, помимо традиционных вопросов рассмотрены явления сверхпроводимости, магнитная кумуляция, элементарная теория МГД-генераторов и др. Во второй части, посвященной релятивистской электродинамике, последовательно раскрываются релятивистские представления о пространстве-времени, значительное внимание уделено релятивистской формулировке законов сохранения, полевой теории массы, теории тахионов и другим принципиальным вопросам. В пособии много оригинальных задач, углубляющих и дополняющих излагаемый материал.

Предназначается для студентов физических специальностей университетов

Т $\frac{20407 - 437}{001 (01) - 80}$ 40 — 80

1704040000

537
ББК 22.313

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является отражением многолетней практики преподавания электродинамики на физических факультетах Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова и Университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы. Перед авторами стояла вдвойне трудная задача. С одной стороны, необходимо было отобрать из множества чрезвычайно интересных и глубоких результатов, достигнутых в электродинамике к настоящему времени, только самое существенное и необходимое для понимания предмета и для дальнейшей самостоятельной работы студентов в этой области. С другой стороны, пользуясь ограниченными математическими средствами, доступными студентам-физикам младших курсов, нужно было дать строгий вывод ряда фундаментальных положений, составляющих основу современной теории электромагнитного поля.

Чтобы выполнить эту программу, авторы решили прибегнуть к помощи самого читателя, рассчитывая на его активную работу по усвоению излагаемого материала. С этой целью в книгу включен ряд задач, зачастую составляющих неотъемлемую часть текста, решение которых представляется необходимым для понимания всего последующего. Хотя наиболее трудные задачи и снабжены решениями, помещенными в конце книги, читателю рекомендуется заглядывать в них лишь после того, как

многократные попытки найти самостоятельное решение не дали результатов.

Предполагается, что читатель знаком с элементами теории дифференциальных уравнений в частных производных и с основами векторного и тензорного анализа. Однако для удобства в конце книги имеется математическое приложение, в котором дано краткое изложение всех необходимых для понимания основного текста математических сведений. Поэтому, чтобы освежить их в памяти и вместе с тем привыкнуть к обозначениям, используемым в книге, рекомендуется сначала ознакомиться с приложением. Очень хорошим дополнением к настоящему курсу является «Сборник задач по электродинамике» В. В. Батыгина и И. Н. Топтыгина. Некоторый дополнительный материал, который при первом чтении может быть опущен, набран петитом.

Авторы благодарны проф. *О. С. Иваницкой* и проф. *Ю. М. Лоскутову*, которые внимательно прочитали рукопись и высказали ценные критические замечания, способствовавшие улучшению книги.

ВВЕДЕНИЕ

Почему возникают электрические силы? Как они передаются? Что при этом происходит в пространстве? Подобные вопросы возникают сами собой при первом же знакомстве с электричеством. Даже сегодня, когда картина во многом прояснилась и человечество достигло грандиозных успехов в изучении и использовании электричества, все еще нельзя дать на них исчерпывающие ответы. *Электродинамика*, изучающая электромагнитные процессы, является сейчас одной из самых разработанных областей человеческих знаний, а уравнения Максвелла, описывающие электромагнитное поле и получившие многочисленные подтверждения на опыте, не могут не вызывать чувства восхищения своим изяществом и красотой*.

В буквальном переводе «электродинамика» — это учение о движении и взаимодействии электрических зарядов. Но такая расшифровка не отражает существа дела, ибо главное содержание электродинамики есть *учение об электромагнитном поле* и его связи с зарядами и токами.

Первоначально делались попытки свести все электрические явления к прямому взаимодействию электрических зарядов, т. е. предполагалось, что электрические силы мгновенно пе-

* История создания уравнений Максвелла очень поучительна, и читатель может ознакомиться с нею, например, по увлекательно написанной книге В. П. Карцева «Приключения великих уравнений» (М., 1970).

редаются через пустоту, а само их существование является прирожденным свойством заряженных тел. Все внимание при таком подходе было сосредоточено на электрических зарядах и токах, поле же вводилось по аналогии с гравитационным полем лишь как удобное математическое понятие. Эти взгляды разделяли Ампер, Риман, Вебер, Кирхгоф, Гельмгольц и др. Это была эпоха господства *теории дальнего действия*.

Нужна была пронизательность *М. Фарадея*, чтобы искать причину не в самих зарядах и токах, а в окружающем их пространстве. Он представлял себе силовые линии как вполне реальные образования и провел множество хитроумнейших экспериментов по их обнаружению. Один из них привел его к открытию электромагнитной индукции. Но умозрительные представления Фарадея явно проигрывали в сравнении с безупречно математически оформленной электродинамикой дальнего действия и поэтому не могли считываться на признание.

Нужен был гений *Дж. К. Максвелла*, чтобы увидеть в неуклюжем языке фарадеевых силовых линий гармонию математики. Тщательно проштудировав труды Фарадея, Максвелл сумел сконцентрировать все их содержание в восьми коротких уравнениях, которым суждено было стать краеугольным камнем теории электромагнитного поля. Так благодаря трудам Фарадея и Максвелла стала пробивать себе дорогу *теория близкого действия*, в основе которой лежало фарадеево представление об особом материальном носителе электромагнитных сил — *электромагнитном поле*.

Эволюция представлений об электромагнитном поле имеет долгую историю. Отметим лишь наиболее значительные ее вехи.

Максвелл был сторонником механистической точки зрения и представлял электромагнитное поле в виде натяжений и деформаций особой всепроникающей среды — *эфира*. Исторически эти представления сыграли положительную роль, так как помогли Максвеллу найти правильную математическую форму для уравнений электродинамики. Одним из следствий этих уравнений было предсказание Максвеллом электромагнитной природы света.

Творец электронной теории *Г. А. Лоренц* тоже был сторонником эфира. Считая, что электромагнитное поле — это особое состояние эфира, он тем не менее уже не наделял последний какими-либо механическими свойствами. Напротив, в конце концов он пришел к выводу, что присутствие эфира не может быть замечено ни в одном электродинамическом опыте. Эфир у Лоренца оставался непознаваемой «вещью в себе». Созная его бесполозность, Лоренц все же не смог сделать последний решительный шаг — отказаться от эфира. Это было сделано создателем теории относительности *А. Эйнштейном*. Позже постепенно сложилось представление об электромагнитном поле как о самостоятельной материальной сущности, являющейся носителем электромагнитных взаимодействий и распределенной в пространстве. Это представление полностью разделяется и современной наукой.

Сейчас мы обладаем многими несомненными доказательствами разнообразнейших материальных проявлений электромагнитного поля. Сюда относятся и опыты *Г. Герца* (1887) по обнаружению электромагнитных волн, и опыты *П. Н. Лебедева* по измерению светового давления (1901), и прецизионные опыты *Р. Паунда* и *Г. Ребки* (1960) по «взвешиванию» света, и многие другие.

В настоящее время помимо электромагнитных сил известны также и наиболее универсальные, присущие всем объектам гравитационные силы, и мощные ядерные силы, действующие на чрезвычайно малых расстояниях порядка 10^{-13} см внутри ядер, и сравнительно небольшие, но важнейшие в микромире, слабые взаимодействия, вызывающие распады элементарных частиц. В первом (классическом) приближении современная атомистическая картина строения материи может выглядеть следующим образом: материя состоит из заряженных и нейтральных элементарных частиц (электронов и нуклонов) и различного вида полей (электромагнитного, ядерного, гравитационного и др.), обуславливающих взаимодействие элементарных частиц. При более детальном (квантовом) описании материи полям также нужно сопоставлять особые частицы — кванты поля (кванты электромагнитного поля — фотоны, ядерного — мезоны и т. д.).

Однако в отличие от короткодействующих ядерных и слабых сил электромагнитные и гравитационные силы являются далекодействующими, т. е. наиболее медленно убывающими с расстоянием между частицами. Именно это позволяет рассматривать электромагнитные и гравитационные поля как *макроскопические объекты* и ограничиться лишь классическим (а не квантовым) описанием.

Уравнения Максвелла как раз и представляют собой математически строгое и полное выражение законов движения электромагнитного поля как макроскопического объекта.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА КАК РЕЗУЛЬТАТ ОБОБЩЕНИЯ ОПЫТНЫХ ФАКТОВ

Глава

1

В данной главе, следуя индуктивному методу и опираясь на небольшое число опытных фактов, будут выведены основные уравнения макроскопической электродинамики — уравнения Максвелла. Вместе с тем для более глубокого усвоения основ электродинамики и для уяснения ее места среди других физических дисциплин безусловно будет полезен анализ взаимосвязи ряда экспериментальных фактов и таких фундаментальных физических законов, как законы сохранения энергии и импульса.

§ 1. АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ ОПЫТНЫХ ФАКТОВ

Электродинамика возникла на основе анализа и обобщения многих экспериментальных фактов. Перечислим наиболее важные из них, сыгравшие решающую роль в процессе ее становления.

Закон сохранения электрического заряда. Уже в простейших опытах по электризации тел трением и через влияние было установлено, что все они прекрасно согласуются с гипотезой о существовании двух видов «электрических жидкостей» — положительной и отрицательной (*Ш. Дюфэ, Б. Франклин, Р. Симмер, М. Фарадей*)*, взаимно притягивающихся, но отталкивающих себе подобную. Количество содержащейся в наэлектризованном теле «элект-

* *Тиндаль Дж.* Лекции об электричестве. С.-Петербург, 1885; *Льюици М.* История физики. М., 1970.

рической жидкости» стали называть *электрическим зарядом* Q этого тела, а о величине его судили по степени электрического влияния данного тела на другое.

Как выяснилось, электрический заряд не может быть уничтожен — при непосредственном контакте заряженных тел он лишь перераспределяется между ними.

Это как раз и составляет содержание закона *сохранения электрического заряда*, физический смысл которого стал ясным лишь после открытия в 1899 г. английским физиком Дж. Дж. Томсоном первой элементарной частицы — *электрона*. В классических опытах Р. Милликена (1909) было установлено, что заряд любого тела кратен заряду электрона ($e = -4,803242 \times 10^{-10}$ СГС_q), так что роль «электрических жидкостей» должны играть свободные электроны и ионы. Обозначая их заряды e_i , найдем для полного заряда Q в некотором объеме V выражение

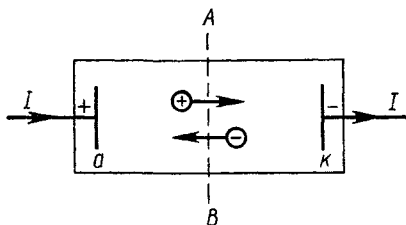


Рис. 1.1

$$Q = \sum_{i \in V} e_i, \quad (1.1)$$

где символ $i \in V$ означает, что суммирование проводится по всем зарядам из объема V .

Если объем V окружен замкнутой поверхностью S , то сохранение электрического заряда означает, что Q может измениться только в случае, когда заряды e_i пересекают поверхность S . Вводя силу электрического тока I , равную количеству электричества, вытекающему из объема V за 1 с, закон сохранения электрического заряда можно записать в виде

$$dQ/dt = -I. \quad (1.2)$$

Задача 1.1. Пусть через ванну с электролитом течет постоянный ток силой I (рис. 1.1). Если процесс установившийся, то положительные ионы нейтрализуются на катоде $к$ приходящими туда электронами. Поэтому сила тока положительных ионов равна $I^+ = I$. Аналогично, отрицательные ионы нейтрализуются на аноде $а$, и поэтому их сила тока равна $I^- = I$. В результате через сечение AB ванны проходит ток силой $I^+ + I^- = 2I$, что явно противоречит закону сохранения заряда (1.2). В самом деле, если окружить катод замкнутой поверхностью, то сила входящего в нее тока равна $2I$, а выходящего — I . Таким образом, на катоде должен накапливаться положительный заряд. Однако ничего подобного не наблюдается. Как можно разрешить этот парадокс? Указать ошибку в рассуждениях.

Закон Кулона для электрических зарядов. Этот закон был установлен французским ученым Ш. Кулоном в 1785 г. и определяет силу взаимодействия двух точечных покоящихся электрических зарядов e_1 и e_2 , находящихся на некотором расстоянии r друг от

друга в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 соответственно. Тогда сила, действующая на первый заряд со стороны второго, равна

$$\mathbf{F}_{12}^{(e)} = e_1 e_2 \mathbf{r} / r^3, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $r \equiv |\mathbf{r}|$.

Здесь и в дальнейшем при изложении законов электродинамики мы используем *абсолютную систему единиц Гаусса* (СГС). В основу этой системы положены механические единицы (сантиметр, грамм и секунда), а единичный заряд определяется из закона Кулона, записываемого в форме (1.3).

Интересно отметить, что сам Кулон установил свой закон довольно грубо, непосредственно измеряя силу взаимодействия двух зарядов с помощью крутильных весов. Однако еще в 1771 г., т. е. за 14 лет до Кулона, английский физик *Г. Кавендиш* с помощью необычайно простого опыта сумел вывести закон $1/r^2$ с гораздо большей точностью, но результат свой не опубликовал. Сейчас опыт Кавендиша известен каждому школьнику, однако не все догадываются, что из него непосредственно следует закон Кулона.



Рис. 1.2

Кавендиш взял металлический шар и две плотно облегающие его металлические полусферы с ручками из изолятора (рис. 1.2). Зарядив шар, он обжал его полусферами, а затем разнес их. Заряд шара, измеренный после этого, оказался равным нулю. Отсюда Кавендиш и сделал вывод, что между двумя точечными зарядами должна действовать сила вида $1/r^2$.

Задача 1.2. Предположив центральный характер взаимодействия двух электрических зарядов, т. е. записав силу взаимодействия в виде $\mathbf{F}_{12} = e_1 e_2 f(r) \mathbf{r} / r$, найти вид функции $f(r)$ на основании результатов опыта Кавендиша. Исследовать, как изменились бы эти результаты, если бы закон взаимодействия не подчинялся зависимости $1/r^2$.

Закон Кулона позволяет ввести понятие *электрического поля*, задаваемого напряженностью \mathbf{E} , т. е. силой, действующей на единичный положительный заряд. В частности, всякий неподвижный точечный заряд e окружен электрическим полем вида

$$\mathbf{E} = e\mathbf{r}/r^3. \quad (1.4)$$

Опыт показывает, что электрические поля от нескольких неподвижных зарядов складываются как обычные векторы. Это означает, что для электрических сил справедлив четвертый закон механики, или принцип независимости действия сил. Обычно это положение формулируется в виде *гипотезы о линейности взаимодействия*, больше известной как *принцип суперпозиции*.

Задача 1.3. Очень наглядным является изображение электрического поля \mathbf{E} с помощью линий напряженности, т. е. линий, в каждой точке которых направление касательной совпадает с направлением вектора напряженности \mathbf{E} поля. Воспользовавшись принципом суперпозиции,

найти картину линий напряженности электрического поля, создаваемого двумя равными и противоположными по знаку точечными зарядами $e_1 = -e_2 = -e$, разнесенными на расстояние l (рис. 1.3). Рассмотрим предельный случай асимптотического поля ($r \gg l$).

Взаимодействие магнитов и токов. С удивительными свойствами магнитов люди познакомились еще в далекой древности, но первое их систематическое экспериментальное изучение было проведено английским врачом и физиком *В. Гильбертом* в конце XVI в. Результаты его исследований были обстоятельно изложены в труде «О магните», вышедшем в 1600 г. В числе многих других Гильберт отметил два следующих свойства магнита:

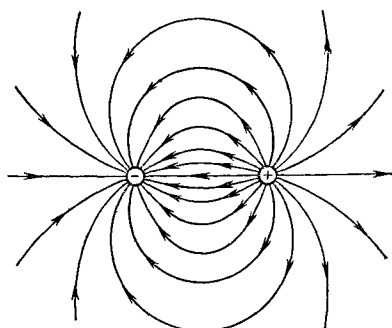


Рис. 1.3

а) магнит имеет два полюса: положительный (северный) и отрицательный (южный), причем одноименные полюсы отталкиваются, а разноименные — притягиваются;

б) невозможно получить магнит с одним полюсом.

Количественный закон взаимодействия магнитных полюсов был установлен гораздо позже (1785) Кулоном одновременно с его же законом для электрических зарядов. Эти законы оказались совпадающими по форме. А именно: если взять две достаточно длинные магнитные спицы (рис. 1.4), чтобы можно было пренебречь влиянием далеких полюсов, то сила взаимодействия двух ближайших полюсов имеет вид

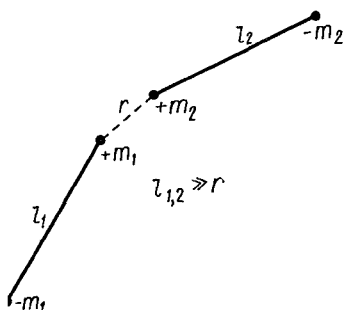


Рис. 1.4

$$F_{1,2}^{(m)} = m_1 m_2 \gamma / r^3. \quad (1.5)$$

Здесь $m_{1,2}$ — магнитные массы (или заряды) полюсов. Кроме того, мы ограничились случаем взаимодействия в пустоте, так как среда существенно искажает его.

Закон (1.5) позволяет по аналогии с электрическим полем ввести магнитное поле \mathbf{B} (или магнитную индукцию — не совсем удачное название, сложившееся исторически), определяемое как сила, действующая на единичный магнитный заряд. Так, точечный магнитный заряд m оказывается окруженным магнитным полем

$$\mathbf{B} = m\mathbf{r}/r^3. \quad (1.6)$$

Однако аналогия с электрическим полем здесь и кончается, ибо уже второе свойство магнитов, отмеченное Гильбертом, говорит о существенно различной природе магнитного и электрического

полей. В самом деле, в отличие от электрических зарядов магнитные заряды невозможно отделить от их антиподов. В том, что это действительно так, можно убедиться очень просто: отломив северный полюс магнита, мы увидим, что в месте разлома опять появляются полюсы противоположных знаков (рис. 1.5). Это свойство очень просто объясняется с точки зрения представлений о молекулярной структуре вещества. Действительно, достаточно лишь предположить, что каждая молекула представляет собой элементарный магнетик с полюсами $\pm m_i$, чтобы убедиться, что в любом объеме V , заключающем какое-то число молекул, суммарный магнитный заряд оказывается равным нулю:

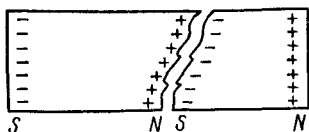


Рис. 1.5

$$\sum_{i \in V} m_i = 0. \quad (1.7)$$

Но истинная природа магнетизма стала проявляться лишь после знаменитого опыта Г. Эрстеда (1820), обнаружившего магнитное действие электрических токов. Поднеся компас к проводнику с током, он увидел, что магнитная стрелка устанавливается перпендикулярно проводу (рис. 1.6). Дальнейшие исследования французских физиков Ж. Б. Био и Ф. Савара показали, что магнитное поле

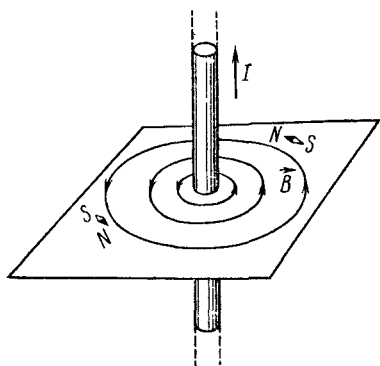


Рис. 1.6

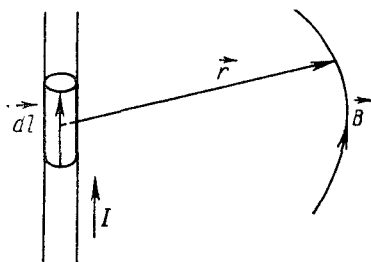


Рис. 1.7

спадает обратно пропорционально расстоянию от провода. П. С. Лаплас, узнав об этих опытах, высказал предположение, что, по-видимому, каждый элемент тока создает магнитное поле, индукция которого меняется по закону $1/r^2$. В дальнейшем эта гипотеза была подтверждена и положена в основу закона Био—Савара—Лапласа (1820), определяющего магнитную индукцию элемента тока Idl (рис. 1.7):

$$dB = \frac{1}{c} [dlr] \frac{1}{r^3}, \quad (1.8)$$

где c — электродинамическая постоянная, имеющая размерность скорости и равная $2,997925 \cdot 10^{10}$ см/с.

Однако все упомянутые исследователи исходили из неверного представления, предполагая, что проводник с током сам становится магнитом, почему и проявляет магнитное действие. Вскоре в опытах Фарадея (1821), а затем Эрстеда и Ампера было обнаружено и обратное воздействие магнитного поля на токи. Именно: оказалась, что сила, действующая в магнитном поле \mathbf{B} на элемент тока $I d\mathbf{l}$, равна

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} [d\mathbf{l}\mathbf{B}]. \quad (1.9)$$

Этот факт уже никак нельзя было объяснить, задавая какое-либо распределение магнитных масс вдоль провода, так как сила, действующая на них, была бы направлена вдоль \mathbf{B} в противоречии с (1.9).

Здесь-то и выступил с необычайно смелой гипотезой Ампер. Он предположил, что не проводник с током является магнитом, а сам магнит эквивалентен системе замкнутых токов (гипотеза молекулярных токов Ампера). Правильность своей точки зрения Ампер сумел доказать рядом убедительных опытов по взаимодействию токов между собой. Постулировав некоторый закон взаимодействия двух элементов тока, он вывел с его помощью закон Био—Савара—Лапласа и закон Кулона для магнитных полю-

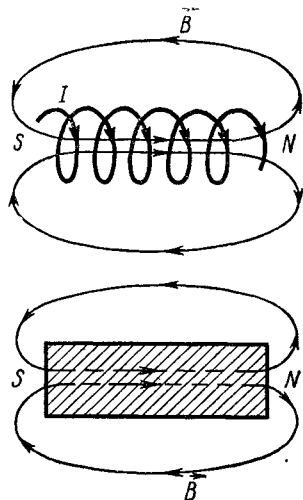


Рис. 1.8

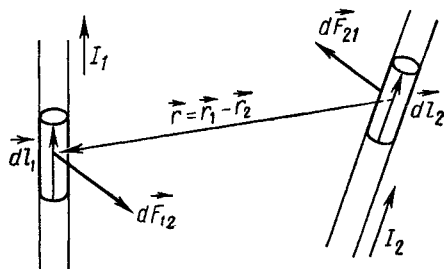


Рис. 1.9

сов. Кроме того, он сумел показать, что катушка с током ведет себя как прямой магнит (рис. 1.8) и что круговой ток эквивалентен магнитному листку (знаменитая теорема эквивалентности Ампера).

Закон взаимодействия двух элементов тока (рис. 1.9) может быть непосредственно выведен из (1.8) и (1.9):

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{c^2} I_1 I_2 [dl_1 [dl_2 \mathbf{r}]] \frac{1}{r^3}. \quad (1.10)$$

Очевидно, что он не согласуется с третьим законом механики:

$$d\mathbf{F}_{12} + d\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{c^2} I_1 I_2 [dl_2 (dl_1 \mathbf{r}) - dl_1 (dl_2 \mathbf{r})] \frac{1}{r^3} \neq 0.$$

Однако никакого противоречия здесь нет, ибо (по закону сохранения заряда) все реальные токи должны быть замкнутыми, а при взаимодействии двух замкнутых контуров C_1 и C_2 действие уже равно противодействию, поскольку

$$d\mathbf{F}_{12} + d\mathbf{F}_{21} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} [d\mathbf{l}_2 (d\mathbf{l}_1 \nabla_1) + d\mathbf{l}_1 (d\mathbf{l}_2 \nabla_2)] \frac{1}{r},$$

и поэтому согласно соотношению $\oint_C (d\mathbf{l} \nabla) \varphi = 0$ имеем

$$\oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\mathbf{F}_{12} + d\mathbf{F}_{21}) = 0.$$

Таким образом, с точки зрения Ампера, магнитные заряды не существуют вовсе, а единственным источником магнитного поля является электрический ток. В связи с этим магнитное поле \mathbf{B} физически более правильно определять не из закона Кулона (1.5), а из формулы Ампера (1.9) как силу, действующую на элементарный ток.

Отмечая фиктивный характер магнитных зарядов, следует все же иметь в виду, что во многих задачах использование этого понятия позволяет значительно облегчить выкладки. Этот прием особенно эффективен при расчете магнитных полей постоянных магнитов. Попробуйте, например, решить следующую качественную задачу, пользуясь молекулярными токами Ампера и фиктивными магнитными зарядами.

Задача 1.4. В цилиндрическом магните вдоль оси просверлено тонкое отверстие. Как направлен в нем вектор магнитной индукции?

Одним из важных следствий закона Био—Савара—Лапласа является следующее правило; или закон Ампера, утверждающий, что работа, совершаемая магнитным полем над единичным магнитным зарядом при обнесении его вокруг постоянного тока I по любому замкнутому контуру C , ориентированному по току, равна $4\pi I/c$, т. е.

$$\oint_C (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} I. \quad (1.11)$$

Задача 1.5. Вывести закон Ампера из закона Био—Савара—Лапласа, предварительно показав, что индукция магнитного поля, создаваемого замкнутым током I , может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c} I \text{ grad } \Omega, \quad (1.12)$$

где Ω —телесный угол, под которым виден контур тока из точки наблюдения.

Задача 1.6. Записав получающуюся из опыта Эрстеда силу $d\mathbf{F}_m$, действующую на магнитный заряд m со стороны элемента тока $Id\mathbf{l}$, в виде $d\mathbf{F}_m = mI [d\mathbf{l}r] f(r)/r$, найти функцию $f(r)$, используя тот опытный факт, что магнитное поле вне равномерной тороидальной обмотки с током отсутствует (если пренебречь составляющей тока вдоль тороида).

Задача 1.7. Показать, что формула Ампера (1.9) есть следствие закона Кулона для магнитных полюсов, закона Био—Савара—Лапласа и допущения, что при взаимодействии магнитного заряда с элементом тока выполняется третий закон механики.

Задача 1.8. Вывести из формулы Ампера (1.9), что на точечный заряд e , движущийся в магнитном поле \mathbf{B} со скоростью \mathbf{v} , действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e [\mathbf{v}\mathbf{B}]/c. \quad (1.13)$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея. В 1831 г. вышла работа английского физика *М. Фарадея*, в которой он описал ставший теперь классическим эксперимент, открывший новую главу электродинамики. В этом эксперименте, обнаружившем единство и взаимосвязь электрического и магнитного полей, мы впервые встречаемся с качественно новым объектом — *электромагнитным полем*

Фарадей взял железное кольцо с двумя обмотками, в одну из которых включил гальванометр G , а в другую — источник тока (рис. 1.10). При замыкании или размыкании ключа K стрелка

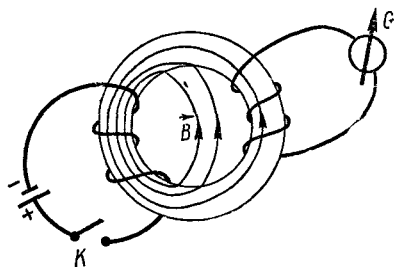


Рис. 1.10

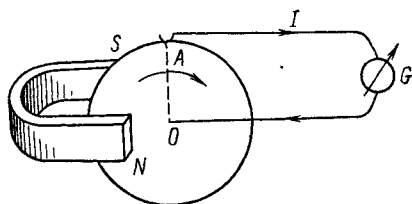


Рис. 1.11

гальванометра отклонялась. Токи, появившиеся при этом, Фарадей назвал *индукционными*. Их появление он связывал с тем, что линии магнитной индукции, возникавшие вблизи первичной обмотки при замыкании ключа K , расширяются, стремясь заполнить железное кольцо, и при этом пересекают вторичную обмотку.

В правильности этих заключений Фарадей убедился, выполнив еще один опыт (рис. 1.11): в металлическом диске, вращающемся в поле постоянного магнита, также обнаруживаются индукционные токи. Много раз повторяя свои опыты в различных вариантах, Фарадей пришел к выводу, что при всяком пересечении проводником магнитных линий индукции в последнем появляется индукционный ток, причем протекший заряд ΔQ пропорционален числу пересеченных силовых линий $\Delta\Phi$ и обратно пропорционален электрическому сопротивлению проводника R , т. е.

$$R \Delta Q = \Delta\Phi/c. \quad (1.14)$$

Следует отметить, что за несколько лет до Фарадея американский физик *Дж. Генри* проделал похожие эксперименты (рис. 1.12, а, б), но, считая, что накопленных фактов еще недостаточно, не торопился опубликовать свои результаты*.

* Так, еще в 1829 г. *Д. Генри* наблюдал явление самоиндукции. См.: *М. Уилсон*. Американские ученые и изобретатели. М., 1964.

Сформулированное Фарадеем положение (1.14) получило название закона электромагнитной индукции. Но надо сказать, что формулировка Фарадея при всей своей общности страдает рядом

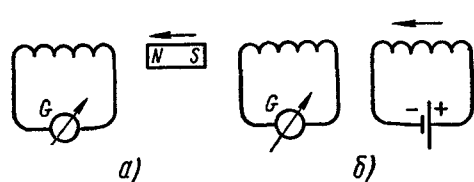


Рис. 1.12

недостатков, затрудняющих ее использование. Прежде всего в (1.14) смешиваются две существенно различные причины, порождающие $\Delta\Phi$. Именно: пересечение проводником магнитных силовых линий может происходить либо вследствие движения проводника, либо вследствие

изменения магнитного поля. В каждом из этих двух случаев $\Delta\Phi$ считается по-разному. Наконец, входящее в (1.14) электрическое сопротивление R — совершенно конкретная характеристика проводящего контура — не позволяет использовать этот закон для описания процессов в окружающем пространстве, к чему так стремился сам Фарадей.

Последний недостаток можно исправить, если привлечь открытый в 1827 г. немецким физиком Г. Ом закон, выражающий сопротивление R контура через силу тока I и электродвижущую силу (э. д. с.) \mathcal{E} , определяемую как работа, совершаемая над единичным зарядом при обходе им замкнутого контура:

$$R = \mathcal{E}/I. \quad (1.15)$$

Чтобы исправить первый недостаток, т. е. унифицировать определение $\Delta\Phi$, Максвелл ввел связанный с контуром C магнитный поток

$$\Phi = \int_S (\mathbf{Bn}) dS, \quad (1.16)$$

где S — натянутая на контур C правоориентированная поверхность (см. задачу 14 приложения), и предложил отождествить $\Delta\Phi$ с приращением Φ . В таком случае [если учесть законы (1.2) и (1.15)] вместо (1.14) получится

$$\mathcal{E} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.17)$$

Это и есть максвелловская формулировка закона электромагнитной индукции Фарадея.

Задача 1.9. Показать, что формулировки Максвелла и Фарадея закона электромагнитной индукции эквивалентны только для четко определенных и топологически неизменных (односвязных) контуров. Рассмотреть в качестве примеров опыт Фарадея (см. рис. 1.11) и опыт с тороидом (рис. 1.13; тороидальная обмотка с током охвачена металлическим челноком D , позволяющим перевести щупы гальванометра G , не разрывая его цепи, из точки A в точку B). Каким будет показание гальванометра?

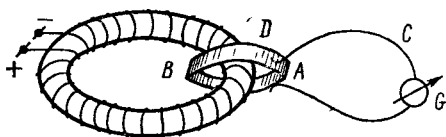


Рис. 1.13

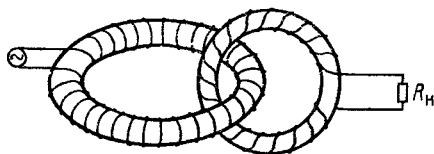


Рис. 1.14

Задача 1.10. Трансформатор имеет тороидальные обмотки, ветви одна в другую (рис. 1.14). Учитывая, что магнитное поле первичной обмотки сосредоточено внутри нее и не пересекает витки вторичной обмотки, выяснить, не противоречит ли работа этого трансформатора фарадеевской формулировке закона электромагнитной индукции.

Заметим, что знак минус в (1.17) выражает так называемое *правило Ленца* (1834), устанавливающее направление индукционного тока или э. д. с. индукции \mathcal{E} . Согласно ему индукционный ток направлен так, что противодействует вызвавшей его причине.

Задача 1.11. Вывести правило Ленца из закона сохранения энергии, предположив, что энергия электромагнитного поля положительна

Задача 1.12. Объяснить опыт Араго (1824), в котором вращающийся медный диск увлекал подвешенный над ним магнит (рис. 1.15).

При анализе экспериментов с магнитным полем Фарадей уподоблял магнитные силовые линии тонким и упругим резиновым шнурам, стремящимся сократиться и одновременно расширяться в поперечном направлении. Таким образом, по Фарадею, линии индукции испытывают продольные натяжения и оказывают поперечное давление на своих соседей. На основе этих представлений Фарадей пришел к двум правилам, которые нашли широкое применение в электротехнике и известны как правила «мотора» и «динамо»

Чтобы их сформулировать, рассмотрим проводник с током в магнитном поле \mathbf{V}_0 . Полное поле \mathbf{V} , очевидно, складывается из \mathbf{V}_0 и собственного поля тока \mathbf{V}_1 , т. е. $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1$. Тогда правило «мотора» гласит: проводник с током в

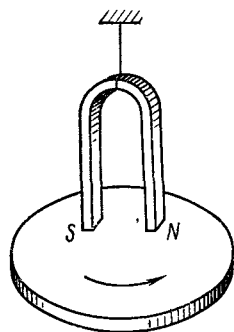


Рис. 1.15

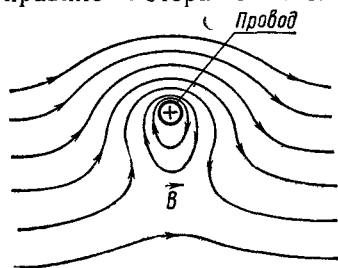


Рис. 1.16

магнитном поле движется в сторону слабейшего поля в его окрестности (из рис. 1.16 видно, что соответствующая сила обусловлена стремлением линий индукции «выпрямиться»). Согласно правилу «динамо», ток, индуцированный в движущемся проводнике, стремится увеличить индукцию магнитного поля в области, куда движется проводник.

Задача 1.13. Обосновать правила «мотора» и «динамо».

Задача 1.14. Показать, что закон Ампера (1.11) следует из закона электромагнитной индукции Фарадея и закона сохранения энергии.

Указание: обнести магнитный заряд вокруг провода с током и рассчитать работу э. д. с. индукции.

Задача 1.15. Зная силу тока I_1 холостого хода и силу тока I_2 торможения электродвигателя постоянного тока, найти его максимальную мощность при заданном напряжении питания \mathcal{E} . Как она изменится при увеличении магнитного поля статора в n раз?

Электромагнитные свойства вещества. До сих пор мы рассматривали взаимодействие зарядов и токов в вакууме, не учитывая влияния окружающей среды. Однако это влияние весьма существенно. Чтобы понять поведение вещества в электромагнитном поле, необходимо принять во внимание его молекулярную структуру и прежде всего то, что заряды, входящие в его состав, могут под действием внешних силовых полей либо перемещаться в пределах одной молекулы, т. е. оставаться *связанными*, либо переходить от одной молекулы к другой, т. е. быть *свободными*.

Обычно свободными являются электроны в металлах и ионы в электролитах и ионизованных газах. Они-то и вносят основной вклад в ток проводимости*. В случае приложенных электрических полей \mathbf{E} , малых по сравнению с молекулярными полями, ток проводимости удовлетворительно описывается *линейным законом Ома*

$$I = U_{12}/R_{12}, \quad (1.18)$$

где приложенное к образцу между точками 1 и 2 напряжение

$$U_{12} = \int_1^2 (\mathbf{E}d\mathbf{l}). \quad (1.19)$$

Важной характеристикой образца является его *проводимость* R_{12}^{-1} . Отнесенная к образцу длиной l см и площадью поперечного сечения 1 см^2 , она называется *удельной электрической проводимостью* или *электропроводностью* σ . В общем случае σ зависит от температуры T , концентрации примесей, напряженности поля \mathbf{E} и других факторов. По электропроводности σ все вещества условно делят на три группы: *проводники* ($\sigma > 10^{16} \text{ с}^{-1}$), *диэлектрики* ($\sigma < 10^2 \text{ с}^{-1}$) и *полупроводники* ($10^2 \text{ с}^{-1} < \sigma < 10^{16} \text{ с}^{-1}$).

Поскольку диэлектрики имеют относительно низкую электропроводность, их поведение в электрическом поле в основном определяется связанными зарядами. Последние, смещаясь под действием внешнего поля \mathbf{E}_0 , созданного, например, конденсатором, между обкладками которого помещен исследуемый образец, приводят к поляризации вещества, проявляющейся в ослаблении напряженности \mathbf{E} поля внутри диэлектрика:

$$\mathbf{E}_0 = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.20)$$

где ε — *диэлектрическая проницаемость* вещества. Надо сказать,

* Для полноты картины следует еще упомянуть о явлении *электрофореза*, т. е. движении в жидкости взвешенных заряженных частиц под действием внешнего электрического поля.

что зависимость (1.20) является очень грубым упрощением, справедливым лишь для не очень сильных полей и изотропных сред. Гораздо чаще связь \mathbf{E}_0 и \mathbf{E} является тензорной и нелинейной, т. е. типа

$$E_0^i = \varepsilon^{ik}(\mathbf{E}) E_k, \quad (1.21)$$

или еще более сложной*.

Для большинства газообразных веществ диэлектрическая проницаемость ε лишь немного превышает 1 ($\varepsilon - 1 \sim 10^{-4} \div 10^{-3}$), но в жидкостях и кристаллах она может быть весьма значительной ($\varepsilon \sim 10^2$). Особый интерес представляют *сегнетоэлектрики*, имеющие $\varepsilon \sim 10^4$. Для них характерно наличие областей с чрезвычайно высокими внутренними полями — *доменов*. При наложении электрических полей, превышающих некоторое критическое значение, может произойти пробой диэлектрика, в результате чего он превращается в проводник (резко растет σ).

Магнитные свойства сред также весьма разнообразны. Вещества, искажающие приложенное внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0 , называются *магнетиками*. В отличие от диэлектриков здесь принято выражать внутреннее поле \mathbf{B} образца через внешнее поле \mathbf{B}_0 , т. е.

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{B}_0, \quad (1.22)$$

где μ — *магнитная проницаемость* вещества (хотя по аналогии с диэлектриками более естественно было бы назвать так величину $1/\mu$). Как и (1.20), соотношение (1.22) является очень грубым приближением, верным лишь для слабых полей, и в большинстве случаев должно быть заменено более сложным.

Надо отметить, что всем веществам присущ *диамагнитный эффект*, т. е. эффект ослабления поля (для чистых *диамагнетиков* $\mu < 1$). Обусловлен он тем, что при включении внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 в веществе наводятся индукционные токи, которые по правилу Ленца ослабляют поле. Но эффект этот обычно очень слаб ($1 - \mu \sim \sim 10^{-6} \div 10^{-4}$), и на него накладываются более сильные, вызванные молекулярными токами (*парамагнетизм*). Последние всегда ориентируются по внешнему полю и увеличивают его (для парамагнетиков $\mu > 1$). Для большинства веществ парамагнитный эффект тоже очень слаб ($\mu - 1 \sim 10^{-6} \div 10^{-4}$) и существенно зависит от температуры. Однако имеются вещества с резко выраженной доменной структурой (*ферромагнетики*), для которых $\mu \sim 10^3$ и зависимость \mathbf{B} от \mathbf{B}_0 сильно нелинейна. Некоторые из них сочетают ферромагнитные и диэлектрические свойства (*ферродиэлектрики*).

Особого внимания заслуживает явление *сверхпроводимости*, открытое голландским физиком Г. Камерлинг-Оннесом (1911). Проявляется оно при чрезвычайно низкой температуре у некоторых металлов и сплавов и состоит не только в полном исчезновении сопротивления ($\sigma = \infty$), но и в выталкивании из образцов магнитного

* По поводу правила суммирования см. приложение.

поля (*эффект Мейсснера*). Тем самым сверхпроводник ведет себя как идеальный диамагнетик ($\mathbf{B} = 0$ эквивалентно $\mu = 0$). Удивительные свойства сверхпроводников получили объяснение лишь совсем недавно (1957).

§ 2. УСЛОВИЕ МАКРОСКОПИЧНОСТИ И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Ознакомившись с основными опытными фактами, лежащими в основе электродинамики, их необходимо, следуя индуктивному методу, сопоставить друг с другом, проверить взаимную согласованность и установить минимальный набор фундаментальных уравнений, из которых следуют все остальные. По существу, именно это и было сделано Дж. К. Максвеллом (1864).

Но сначала обратим внимание на то, что все упомянутые опыты проводились с *макроскопическими телами*, т. е. с телами, содержащими большое число заряженных частиц ($N \sim 10^{23}$). Поэтому и уравнения, которые могут быть выведены из этих опытов, тоже должны быть макроскопическими. Чтобы приспособить к новым условиям уже известный математический аппарат, проще всего положить в его основу понятие *физического бесконечно малого объема* ΔV . Под последним обычно понимается объем, достаточно малый по сравнению с объемом V макроскопического объекта, но вместе с тем содержащий достаточно много частиц, чтобы отношения типа $\Delta Q/\Delta V$, где $\Delta Q = \sum_{i \in \Delta V} e_i$ — полный заряд внутри ΔV , мало менялись при изменении ΔV . Последнее означает, что характерный размер $\Delta V^{1/3}$ намного превосходит среднее расстояние между частицами l . Если ввести характерный размер макроскопического объекта ($L \equiv V^{1/3}$), то станет ясно, что

$$l^3 \ll \Delta V \ll L^3. \quad (2.1)$$

В дальнейшем, называя теорию *макроскопической*, мы будем подразумевать, что так введенный масштаб $\Delta V^{1/3}$ является в ней минимально возможным, т. е. все рассматриваемые расстояния Δx превосходят его: $\Delta x \geq \Delta V^{1/3}$.

В макроскопической теории отношение $\Delta Q/\Delta V$ является вполне определенной функцией точки \mathbf{r} (которую естественно считать центром области ΔV) и называется *плотностью электрического заряда* ρ (макроскопической). Таким образом,

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i. \quad (2.2)$$

При этом заряд в произвольной области V представится в виде

$$Q(t) = \int_V \rho(t, \mathbf{r}) dV. \quad (2.3)$$

Введем теперь еще одно важное понятие — *плотности электрического тока* \mathbf{j} . Для этого рассмотрим площадку ΔS с нормалью \mathbf{n} (рис. 2.1) и подсчитаем заряд ΔQ , пересекающий ее за промежуток времени Δt . Выделим сначала заряды e_i , имеющие скорости \mathbf{v}_i , лежащие в некотором интервале $I_{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}/2, \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}/2)$ со средней скоростью \mathbf{v} . Тогда все такие заряды, находящиеся в объеме призмы с высотой $(\mathbf{n}\mathbf{v})\Delta t$ и основанием ΔS , пройдут за время Δt через площадку ΔS . Учитывая, что плотность выделенных электрических зарядов равна

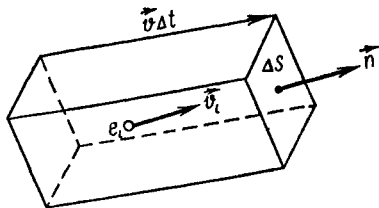


Рис. 2.1

$$\rho_{\mathbf{v}} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\substack{i \in \Delta V \\ \mathbf{v}_i \in I_{\mathbf{v}}}} e_i,$$

находим заряд, пересекающий площадку ΔS за отрезок времени Δt со средней скоростью \mathbf{v} :

$$\Delta Q_{\mathbf{v}} = (\mathbf{n}\mathbf{v})\Delta t \Delta S \rho_{\mathbf{v}} = \frac{\Delta t \Delta S}{\Delta V} \sum_{\substack{i \in \Delta V \\ \mathbf{v}_i \in I_{\mathbf{v}}}} (\mathbf{n}\mathbf{v}_i) e_i.$$

Теперь, чтобы найти полный заряд ΔQ , достаточно лишь просуммировать $\Delta Q_{\mathbf{v}}$ по всем возможным интервалам $I_{\mathbf{v}}$:

$$\Delta Q = \frac{\Delta t \Delta S}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} (\mathbf{n}\mathbf{v}_i) e_i \equiv (\mathbf{n}\mathbf{j}) \Delta t \Delta S, \quad (2.4)$$

где введена плотность электрического тока

$$\mathbf{j} \equiv \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i \mathbf{v}_i. \quad (2.5)$$

Из (2.4) сила тока через поверхность S равна

$$I = \int_S (\mathbf{n}\mathbf{j}) dS. \quad (2.6)$$

Запишем теперь закон сохранения электрического заряда (1.2) для некоторого объема V , окруженного замкнутой поверхностью S (рис. 2.2). В этом случае (2.6) и теорема Гаусса—Остроградского дают

$$I = \oint_S (\mathbf{n}\mathbf{j}) dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV.$$

В предположении, что поверхность S не изменяется со временем, (1.2) примет вид

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV.$$

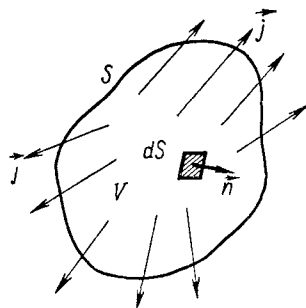


Рис. 2.2

Так как объем V выбран произвольно, то

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.7)$$

Так выражается закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме.

Задача 2.1. Показать, что при бесконечно малом смещении зарядов на вектор $d\mathbf{r}$ их плотность ρ изменяется на

$$\delta \rho = -\operatorname{div}(\rho d\mathbf{r}). \quad (2.8)$$

Мы уже говорили о делении зарядов на *связанные* и *свободные*. Сохраняя обозначения ρ и \mathbf{j} для плотностей свободных зарядов и токов, полные плотности, очевидно, можно представить в виде

$$\rho^{\text{полн}} = \rho + \rho^{\text{связ}}, \quad \mathbf{j}^{\text{полн}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}^{\text{связ}}. \quad (2.9)$$

Иногда* встречается несколько иное деление зарядов: на *собственные* (принадлежащие веществу) и *внесенные* (или сторонние), причем первые удовлетворяют условию нейтральности среды

$$Q^{\text{соб}} = \int_V \rho^{\text{соб}} dV = 0,$$

где интеграл берется по всему объему вещества. Мы, однако, не будем отличать собственные заряды от связанных, т. е. будем полагать $\rho^{\text{соб}} \equiv \rho^{\text{связ}}$, хотя такое отличие иногда бывает существенным (например, при описании ионизированной среды — плазмы). Если же связанные заряды не удовлетворяют *условию нейтральности*

$$\int_V \rho^{\text{связ}} dV = 0, \quad (2.10)$$

то избыточный заряд можно условно объявить свободным.

В большинстве электродинамических задач предполагается, что закон сохранения имеет место как для свободных, так и для связанных зарядов в отдельности, т. е. исключаются процессы перехода связанных зарядов в свободные и обратно. Поэтому разумно принять, что

$$\partial \rho^{\text{полн}} / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j}^{\text{полн}} = 0, \quad (2.11a)$$

$$\partial \rho^{\text{связ}} / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j}^{\text{связ}} = 0. \quad (2.11b)$$

Задача 2.2. Показать, что из условия нейтральности (2.10) и закона сохранения связанного заряда (2.11b) вытекает следующее представление для связанных зарядов и токов:

$$\rho^{\text{связ}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{j}^{\text{связ}} = \partial \mathbf{P} / \partial t + c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (2.13)$$

где введенные поляризованность \mathbf{P} и намагниченность \mathbf{M} исчезают вне вещества**. Выразить через \mathbf{P} и \mathbf{M} дипольный \mathbf{p} и магнитный \mathbf{m} моменты образца, определяемые следующим образом:

$$\mathbf{p} \equiv \int_V \rho^{\text{связ}} \mathbf{r} dV, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{m} \equiv \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}]^{\text{связ}} dV. \quad (2.15)$$

* Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М. 1957, гл. 2.

** Физический смысл векторов \mathbf{P} и \mathbf{M} будет выяснен в § 7, 8.

В дальнейшем мы изучим сначала наиболее простой случай: допустив, что распределение зарядов и токов задано, т. е. $\rho^{\text{полн}}$ и $\mathbf{j}^{\text{полн}}$ суть известные функции t и \mathbf{r} . Поскольку здесь не выделяются связанные заряды, то этот случай эквивалентен электромагнитному полю в вакууме. В последующем мы максимально приблизим задачу к реальной, приняв, что известно лишь распределение свободных зарядов и токов, т. е. ρ и \mathbf{j} . Этот случай является наиболее общим и соответствует рассмотрению электромагнитного поля в веществе.

§ 3. ЗАКОН КУЛОНА И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Рассмотрим совокупность точечных зарядов e_i , помещенных в точках \mathbf{r}_i . По закону Кулона, каждый из зарядов e_i создает в окружающем пространстве электрическое поле

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = e_i \mathbf{R}_i / R_i^3, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{R}_i \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$. Согласно принципу суперпозиции, полная напряженность поля равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{e_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i. \quad (3.2)$$

Для перехода к макроскопическому описанию разобьем все пространство на ячейки $\Delta V'_k$ с центрами \mathbf{r}'_k и перепишем (3.2) в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_k \sum_{i \in \Delta V'_k} \frac{e_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i.$$

С другой стороны [см. (2.1)], $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i \approx \mathbf{r} - \mathbf{r}'_k \equiv \mathbf{R}'_k$, и поэтому, вводя согласно (2.2) макроскопическую плотность заряда $\rho(\mathbf{r})$, найдем

$$\sum_{i \in \Delta V'_k} \frac{e_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i \approx \frac{R'_k}{(R'_k)^3} \sum_{i \in \Delta V'_k} e_i = \frac{R'_k}{(R'_k)^3} \rho(\mathbf{r}'_k) \Delta V'_k.$$

Заменив суммирование по ячейкам $\Delta V'_k$ объемным интегралом, вместо (3.2) получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R^3} \mathbf{R} dV', \quad (3.3)$$

где $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Выражения (3.2) и (3.3) являются исходными для установления одного из важнейших уравнений электродинамики, которому подчиняется *электрическое поле* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Рассматривая $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ как объективную реальность, мы как бы забываем о силовом происхождении \mathbf{E} ,

о лежащем в основе (3.2) законе Кулона. Принимая полевую гипотезу, мы предполагаем объективное существование в окружающем пространстве физической величины $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ независимо от того, помещается ли в точку \mathbf{r} пробный заряд или нет.

Подсчитаем поток поля \mathbf{E}_i сквозь замкнутую поверхность (рис. 3.1):

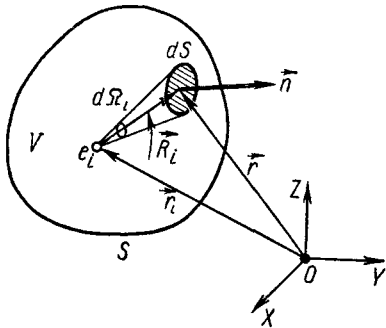


Рис. 3.1

$$N_i = \oint_S (\mathbf{n} \mathbf{E}_i) dS.$$

Вводя телесный угол

$$d\Omega_i = dS (\mathbf{n} \mathbf{R}_i) R_i^{-3},$$

под которым виден элемент поверхности dS из точки \mathbf{r}_i , заключаем, что

$$N_i = e_i \oint_S d\Omega_i = \begin{cases} 4\pi e_i & \text{при } \mathbf{r}_i \in V, \\ 0 & \text{при } \mathbf{r}_i \notin V, \end{cases}$$

где V — объем, заключенный внутри S . Поэтому поток полного поля \mathbf{E}

$$N = \oint_S (\mathbf{n} \mathbf{E}) dS = \sum_i N_i = 4\pi \sum_{i \in V} e_i \equiv 4\pi Q,$$

где Q — заключенный внутри поверхности S заряд.

Используя макроскопическое представление о распределенном заряде, получаем

$$\oint_S (\mathbf{n} \mathbf{E}) dS = 4\pi \int_V \rho dV. \quad (3.4)$$

Это есть *теорема Гаусса* в интегральной форме.

Применяя теорему Гаусса — Остроградского

$$\oint_S (\mathbf{n} \mathbf{E}) dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV$$

и учитывая, что объем V произволен, приходим к дифференциальной форме теоремы Гаусса:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (3.5)$$

Будем считать это уравнение справедливым для электромагнитного поля независимо от границ применимости закона Кулона, т. е. не только для статического, но и для зависящего от времени поля \mathbf{E} .

Выясним теперь, не противоречит ли (3.5) уравнению (3.3). Решение этой задачи, как и многих других, значительно облегчается, если использовать введенную английским физиком П. А. М. Дираком δ -функцию $\delta(x)$. Она является не обычной, а так называемой

обобщенной функцией*. Это означает, что сама она не определена, т. е. нельзя говорить о каких-либо ее значениях, определены лишь интегралы от ее произведения с какой-либо достаточно «хорошей» (например, непрерывной) функцией $f(x)$. При этом для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x) \delta(x) dx = f(0). \quad (3.6)$$

Трехмерная δ -функция определяется с помощью аналогичного равенства

$$\int_{V_\varepsilon} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) dV = f(0), \quad (3.7)$$

где $\mathbf{r} = 0 \in V_\varepsilon$.

В связи с анализом свойств δ -функции здесь будет уместно привести определение δ -функции, данное Л. Эйлером. В своей классической работе «Метод нахождения кривых линий...», посвященной решению изопериметрической задачи, он приходит к следующей формуле для вариации функционала $I[y(x)]$ в окрестности некоторой точки x^0 :

$$\delta I = \delta \int Z(y, y') dx = \int \delta y (x - x^0) [Z'_{y'} - (Z'_{y'})'_x] dx,$$

где $\delta y (x - x^0)$ — «треугольная» функция, график которой имеет вид равнобедренного треугольника с основанием dx и высотой a/dx , проведенной в точке x^0 .

Полагая в пределе $dx \rightarrow 0$, Эйлер из условия $\delta I = 0$ выводит свое знаменитое вариационное уравнение $Z'_{y'} = (Z'_{y'})'_x$. Нетрудно видеть, что при этом «треугольная» функция переходит в δ -функцию, т. е.

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{2}{a} \delta y (x - x^0) = \delta (x - x^0).$$

Что же касается возможности самого предельного перехода $dx \rightarrow 0$, то с точки зрения Эйлера он вполне допустим, так как Эйлер не был сторонником теории «монад» Лейбница и считал дифференциал dx безгранично делимым.

Задача 3.1. Выразить $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$ и $\delta(\mathbf{r})$ через одномерные δ -функции в декартовых, цилиндрических и сферических координатах

Задача 3.2 Показать, что если функция $\varphi(x)$ имеет набор однократных нулей $\{x_i\}$, то

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|\varphi'(x_i)|}. \quad (3.8)$$

* Первые истоки теории обобщенных функций следует искать еще в работах Эйлера, Коши и Пуассона, которые пользовались ими в связи с анализом расходящихся интегралов (см.: Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1959, вып. 1, с. 460, а также Б. ван дер Пооль, Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. М., 1952, гл. 5). Активно пользовался обобщенными функциями О. Хевисайд в связи с потребностями созданного им символического (операционного) исчисления. Однако строгая теория обобщенных функций была создана лишь в нашем веке трудами Н. М. Йютера (1924), С. Л. Соболева (1936) и Л. Шварца (1946), двухтомная монография которого «Теория распределений» (1950—1951) подытоживает все эти исследования.

Задача 3.3. Показать, что справедливо следующее представление для δ -функции:

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{r} \right), \quad (3.9)$$

которое физически можно интерпретировать как плотность точечного заряда. Убедиться с его помощью, что (3.3) является решением уравнения (3.5), удовлетворяющим условию потенциальности

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (3.10)$$

Задача 3.4. Сфера радиуса a заряжена равномерно зарядом Q . Найти напряженность \mathbf{E} поля вне сферы, внутри нее и на ее поверхности.

§ 4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

Для получения основного уравнения, которому подчиняется индукция магнитного поля, порождаемого постоянными токами $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, воспользуемся законом Ампера (1.11). С учетом (2.6) последний запишется так:

$$\oint_C (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{n} \mathbf{j}) dS, \quad (4.1)$$

где S — правоориентированная поверхность, натянутая на контур C . Применяя теорему Стокса, находим

$$\int_S (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{B}) dS = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{n} \mathbf{j}) dS.$$

Так как поверхность S произвольна, то

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}/c \quad (4.2)$$

(закон Ампера в дифференциальной форме).

Поскольку закон Ампера является следствием закона Био—Савара—Лапласа (см. задачу 1.5), то, очевидно, последний как раз и дает готовое решение уравнения (4.2). В самом деле, согласно (2.4),

$$I d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV. \quad (4.3)$$

Поэтому, если элемент тока $I d\mathbf{l}$ помещен в точке \mathbf{r}' , то вместо (1.8) имеем

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} dV' [\mathbf{j}' \mathbf{R}] R^{-3}, \quad (4.4)$$

где $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$; $\mathbf{j}' \equiv \mathbf{j}(\mathbf{r}')$.

Интегрируя (4.4) по всем распределенным токам, находим

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int [\mathbf{j}' \mathbf{R}] \frac{dV'}{R^3}. \quad (4.5)$$

Задача 4.1. Показать, что (4.5) есть решение (4.2), удовлетворяющее условию соленоидальности

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4.6)$$

Согласно (4.6), магнитные заряды в свободном виде не существуют. В самом деле, взаимодействия электрических и магнитных

зарядов тождественны. Поэтому можно применить теорему Гаусса (3.4) и к магнитному полю. Тогда магнитный поток Φ сквозь замкнутую поверхность S с учетом (1.7) равен

$$\Phi = \int_S (\mathbf{nB}) dS = 4\pi \sum_{i \in V} m_i = 0. \quad (4.7)$$

Отсюда по аналогии с (3.5) следует (4.6).

Из уравнения (4.7), выражающего факт неразделимости магнитных зарядов противоположных знаков, вытекает, что магнитные силовые линии всегда замкнуты. В связи с этим можно считать (4.6) справедливым не только для статических, но и для зависящих от времени магнитных полей \mathbf{B} . Что же касается закона Ампера (4.2), то (см. § 6) он нуждается в дальнейшем обобщении на нестационарный случай.

§ 5. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ФАРАДЕЯ

Найдем теперь дифференциальную форму закона электромагнитной индукции Фарадея. Для этого воспользуемся формулировкой Максвелла (1.17) и ограничимся случаем неподвижных контуров (как учесть движение контура, мы установим в § 50). Так как, по определению, э. д. с. индукции в контуре C равна

$$\mathcal{E} = \oint_C (\mathbf{Edl}), \quad (5.1)$$

то, применяя теорему Стокса, преобразуем (1.17) к виду

$$\oint_C (\mathbf{Edl}) = \int_S (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{E}) dS = -\frac{1}{c} \int_S \left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dS, \quad (5.2)$$

где S — правоориентированная поверхность, натянутая на контур C . Ввиду произвольности S из (5.2) следует, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5.3)$$

Это и есть дифференциальная форма закона электромагнитной индукции Фарадея.

Согласно (5.3), переменное магнитное поле \mathbf{B} порождает в каждой точке пространства вихревое электрическое поле \mathbf{E} (рис. 5.1) с отличной от нуля циркуляцией (5.1) (в противоположность потенциальному электростатическому полю, для которого $\mathcal{E} \equiv 0$, так как $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$). Взаимосвязь электрического и магнитного полей, выражаемая уравнением (5.3), позволяет рассматривать их как различные проявления единого электромагнитного поля.

Задача 5.1. Показать, что уравнение (4.6) можно рассматривать как начальное условие на поле \mathbf{B} .

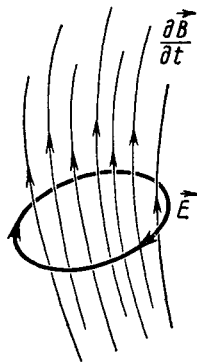


Рис. 5.1

§ 6. ТОК СМЕЩЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ВАКУУМЕ

Уравнение (4.2) не может быть справедливым в нестационарном случае, поскольку из него следует, что $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, тогда как согласно (2.7)

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t.$$

Противоречие исчезает только в стационарном пределе, когда $\partial \rho / \partial t = 0$. Поэтому уравнение (4.2) необходимо обобщить, добавив справа некоторый вектор, исчезающий в стационарном случае, т. е. вектор вида $\partial \mathbf{C} / \partial t$, названный Максвеллом *током смещения*:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \right). \quad (6.1)$$

Учитывая (2.7), получаем

$$\operatorname{div} (\partial \mathbf{C} / \partial t) = -\operatorname{div} \mathbf{j} = \partial \rho / \partial t,$$

или согласно (3.5)

$$\operatorname{div} \left(4\pi \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6.2)$$

Самым общим решением (6.2) будет $4\pi (\partial \mathbf{C} / \partial t) = \partial \mathbf{E} / \partial t + \operatorname{rot} \mathbf{a}$, где \mathbf{a} — произвольный вектор. Простейшее предположение $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$, сделанное Максвеллом, было обосновано им, пожалуй, лишь соображениями эстетического порядка*. В самом деле, в этом случае появляется некоторая симметрия основных уравнений, поскольку уравнение (6.1) приобретает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (6.3)$$

и внешне (при $\mathbf{j} = 0$) становится похожим на уравнение (5.3). Конечно, справедливость уравнения (6.3) в конце концов обосновывается экспериментальным подтверждением вытекающих из него следствий.

Итак, естественно сделать предположение, что в простейшем случае, когда электромагнитное поле возбуждается в вакууме заданными зарядами и токами, уравнениями для определения поля являются (3.5), (4.6), (5.3) и (6.3). Эта гипотеза была выдвинута Максвеллом, и вытекающие из нее следствия оказались в блестящем согласии с опытом.

Система уравнений

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \text{II} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{array} \quad (6.4)$$

называется *уравнениями Максвелла* для электромагнитного поля в вакууме при наличии заданных зарядов и токов. Уравнения, со-

* Памятная надпись, сделанная Дираком 3 октября 1956 г. на стене кабинета теоретической физики Московского государственного университета, гласит: «Physical law should have mathematical beauty», что означает: «Физический закон должен быть математически изящным».

держащие источники ρ и \mathbf{j} , обычно называют первой группой уравнений Максвелла, а уравнения, не содержащие ρ и \mathbf{j} , — второй группой.

Задача 6.1. Убедиться в непротиворечивости системы (6.4), доказав, что уравнение (3.5) можно рассматривать как начальное условие на поле \mathbf{E} .

Систему уравнений (6.4) можно записать и в интегральной форме, если воспользоваться теоремами Стокса и Гаусса — Остроградского:

$$\begin{aligned}\oint_C (\mathbf{B}d\mathbf{l}) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{nE}) dS + \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{nj}) dS, \\ \oint_S (\mathbf{nE}) dS &= 4\pi \int_V \rho dV, \\ \oint_C (\mathbf{E}d\mathbf{l}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{nB}) dS, \quad \oint_S (\mathbf{nB}) dS = 0.\end{aligned}\tag{6.5}$$

Выписанные уравнения выражают соответственно обобщенный закон Ампера, теорему Гаусса, закон электромагнитной индукции Фарадея и отсутствие магнитных зарядов*.

Задача 6.2. Доказать следующие теоремы Дж. Дж. Томсона: 1) если электромагнитное поле порождается системой зарядов, движущихся с постоянной скоростью $v < c$, то

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\mathbf{vE}];\tag{6.6}$$

2) если электромагнитное поле порождается системой постоянных токов, движущихся с постоянной скоростью $v < c$, то

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} [\mathbf{Bv}].\tag{6.7}$$

Задача 6.3. В 1949 г. итальянский физик Э. Ферми предложил теорию ускорения космических лучей, предположив, что причиной ускорения заряженных частиц может быть их взаимодействие с блуждающими магнитными «облаками», т. е. гигантскими скоплениями межзвездного газа, пронизанного магнитным полем. Обосновать механизм ускорения Ферми, пользуясь (6.7).

§ 7. ДИЭЛЕКТРИКИ. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Переходя к наиболее общему случаю — описанию электромагнитного поля в веществе, мы сразу же сталкиваемся с серьезными трудностями. Сложность проблемы обусловлена тем, что, рассматривая реальное вещество, мы имеем дело с громадным количеством заряженных частиц, движение которых невозможно точно описать. Чтобы продвинуться в решении вопроса, приходится строить определенные модели вещества, делая при этом упрощающие предположения о поведении составляющих его частиц.

* Поверхность S в (6.5) предполагается не изменяющейся со временем.

В первую очередь нас будет интересовать поведение в электромагнитном поле связанных зарядов и токов. В этом отношении наиболее просты в описании идеальные диэлектрики и магнетики.

Диэлектрик, как и любая другая макроскопическая среда, состоит из совокупности тесно связанных между собой положительных и отрицательных зарядов. В среднем диэлектрик электрически нейтрален, но под действием пронизывающего его электрического поля \mathbf{E} положительные и отрицательные заряды смещаются в противоположные стороны, т. е. происходит *поляризация вещества*. Пользуясь только условием нейтральности, можно установить (см. задачу 2.2), что возникшая при этом плотность связанного заряда $\rho^{\text{связ}}$ допускает представление

$$\rho^{\text{связ}} \equiv \rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (7.1)$$

где *поляризованность* \mathbf{P} исчезает вне вещества. Попытаемся выяснить физический смысл вектора \mathbf{P} .

Поскольку под действием поля \mathbf{E} в каждой молекуле происходит смещение положительных зарядов e_i^+ относительно отрицательных $e_i^- = -e_i^+$, то молекулы поляризованного диэлектрика можно рассматривать как электрические диполи с дипольными моментами $\mathbf{p}_i = e_i^+ \mathbf{q}_i$, где \mathbf{q}_i — смещение зарядов в молекуле (рис. 7.1). Сам же поляризованный диэлектрик макроскопически удобно представлять себе как совокупность двух взаимопроникающих сред, состоящих соответственно из положительных и отрицательных зарядов и смещенных одна относительно другой в каждой точке на некоторый вектор $\mathbf{q}(\mathbf{r})$. Если при $\mathbf{q} = 0$ заряды компенсируют друг друга и результирующая плотность заряда равна нулю, то при $\mathbf{q} \neq 0$ в неоднородном диэлектрике может появиться плотность связанного заряда $\rho_p \neq 0$.

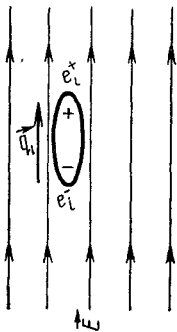


Рис. 7.1

Заметим, что смещение \mathbf{q} имеет порядок размера молекул и поэтому в макроскопической теории, где $|\mathbf{q}| \ll \Delta V^{1/3}$, может считаться бесконечно малым. В связи с этим результирующая плотность заряда ρ_p , возникающая вследствие смещения положительно заряженной среды на вектор \mathbf{q}^+ , а отрицательно заряженной — на вектор \mathbf{q}^- , может быть найдена из формулы (2.8). Полагая в ней соответственно $\delta \mathbf{r} = \mathbf{q}^\pm$ и $\rho = \rho^\pm$, получаем $\delta \rho^\pm = -\operatorname{div}(\rho^\pm \mathbf{q}^\pm)$. Таким образом,

$$\rho_p = \delta \rho^+ + \delta \rho^- = -\operatorname{div}(\rho^+ \mathbf{q}^+ + \rho^- \mathbf{q}^-) = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (7.2)$$

откуда с учетом приближенного равенства $\rho^+ \approx -\rho^-$ найдем (с точностью до ротора произвольного вектора)

$$\mathbf{P} = \rho^+ \mathbf{q}^+ + \rho^- \mathbf{q}^- \approx \rho^+ (\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-) = \rho^+ \mathbf{q}. \quad (7.3)$$

Несмотря на малость \mathbf{q} , вектор \mathbf{P} далеко не мал из-за чрезвычайно высокой плотности $\rho^+ \approx -\rho^-$.

Заметим, что формула (7.2) допускает следующую очень наглядную иллюстрацию. Предположим, что смещение положительно заряженной среды* на вектор $\mathbf{q}^+ = \mathbf{q}$ произошло в некотором объеме V (рис. 7.2). Тогда ясно, что в этом объеме возникает заряд Q , равный убыли положительного заряда:

$$Q = - \oint_S (\mathbf{nq}) \rho^+ dS = - \int_V \operatorname{div} (\rho^+ \mathbf{q}) dV,$$

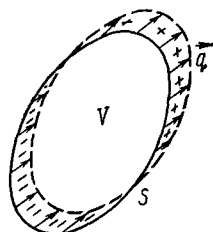


Рис. 7.2

что в точности соответствует (7.2).

Задача 7.1. Сопоставив (7.2) с (2.8) и (2.7), показать, что вектор \mathbf{q} может быть представлен в виде

$$\mathbf{q} = \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{p}_i / \sum_{i \in \Delta V} e_i^+, \quad (7.4)$$

где суммирование ведется только по положительным зарядам.

С помощью (7.4) и (7.3) приведем поляризованность к виду

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{p}_i, \quad (7.5)$$

что позволяет интерпретировать ее как среднюю (макроскопическую) плотность дипольного момента вещества. Заметим, что только на основании условия нейтральности (2.10) дать такую интерпретацию вектору \mathbf{P} еще было нельзя (см. задачу 2.2).

Очевидно, что электрическое поле \mathbf{E} создается как свободными, так и связанными зарядами. Поэтому внутри диэлектрика уравнение (3.5) должно быть записано в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi (\rho + \rho_p),$$

или с учетом (7.1)

$$\operatorname{div} (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = 4\pi \rho.$$

Вводя обозначение

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad (7.6)$$

получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho, \quad (7.7)$$

где \mathbf{D} — вектор электрической индукции. Он может быть интерпретирован как напряженность электрического поля, которое создавали бы свободные заряды плотностью ρ в вакууме.

В общем случае поляризованность \mathbf{P} может очень сложно зависеть от напряженности поля \mathbf{E} . Однако для большинства диэлектри-

* Заметим, что в реальном диэлектрике смещаются электроны, т. е. «отрицательно заряженная среда».

ков при не слишком большой напряженности эта зависимость линейная. В самом простом случае изотропного диэлектрика

$$P = \kappa E, \quad (7.8)$$

где κ — коэффициент поляризации вещества, или диэлектрическая восприимчивость.

С учетом (7.8)

$$D = (1 + 4\pi\kappa) E \equiv \epsilon E, \quad (7.9)$$

где $\epsilon = 1 + 4\pi\kappa$ — диэлектрическая проницаемость. Нетрудно видеть, что это определение ϵ согласуется с (1.20). В самом деле, для всех простейших диэлектриков $\kappa > 0$. Поэтому $\epsilon > 1$ и $D > E$. Согласно (7.7), поле D , создаваемое точечным зарядом e , совпадает с полем E , создаваемым тем же зарядом в вакууме [см. (1.4)]. Следовательно, напряженность поля, создаваемого зарядом e в диэлектрике, в ϵ раз меньше напряженности поля, создаваемого тем же зарядом в вакууме. Поэтому закон Кулона в диэлектрической среде имеет вид

$$F_{12}^{(e)} = e_1 e_2 \gamma / (\epsilon r^3). \quad (7.10)$$

§ 8. МАГНЕТИКИ. НАМАГНИЧЕННОСТЬ

Магнетик, или намагничивающуюся среду, удобно описывать как совокупность элементарных внутримолекулярных токов (гипотеза Ампера), часто называемых *токами намагничения**. Поскольку каждый молекулярный ток замкнут, то эффективно его можно представить в виде линейного тока I_i , охватывающего некоторую площадку S_i (рис. 8.1) с геометрическим моментом

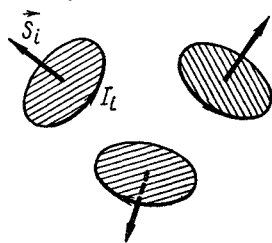


Рис. 8.1

$$S_i = \int_{S_i} n \, dS.$$

В таком случае магнитный момент молекулярного тока I_i , по определению, равен

$$m_i = I_i S_i / c. \quad (8.1)$$

Задача 8.1. Показать, что формула (8.1) согласуется с определением магнитного момента (2.15).

Макроскопически каждую точку магнетика можно характеризовать *намагниченностью* (намагничиванием)

$$M \equiv \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} m_i = \frac{1}{c \Delta V} \sum_{i \in \Delta V} I_i S_i, \quad (8.2)$$

равной, очевидно, средней плотности магнитного момента в среде. Для выяснения роли, которую играет этот вектор в описании магнетиков, удобно воспользоваться моделью двух сред. Иначе говоря,

* Эти токи обусловлены как движением электронов вокруг ядер в атомах, так и собственным вращением электронов (*спиновый магнетизм*).

по аналогии с диэлектриком будем рассматривать магнетик как наложение противоположно направленных распределенных токов \mathbf{j}^+ и \mathbf{j}^- , компенсирующих друг друга при отсутствии намагничивания. Эти токи можно представить себе в виде стационарных потоков двух сред, заряженных соответственно положительно и отрицательно. При намагничивании (например, под влиянием внешнего поля \mathbf{B}_0) токи \mathbf{j}^+ и \mathbf{j}^- сместятся в каждой точке друг относительно друга на некоторый вектор \mathbf{q} , в результате чего появится полный ток I через поверхность S , натянутую на некоторый контур C .

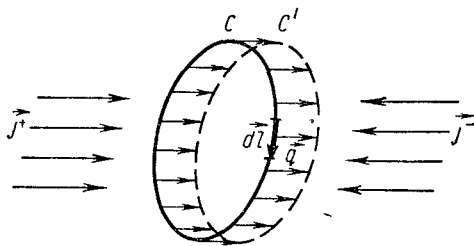


Рис. 8.2

В самом деле, элемент $d\mathbf{l}$ контура C опишет при смещении на вектор \mathbf{q} площадку $\mathbf{n}dS = [\mathbf{q}d\mathbf{l}]$ (рис. 8.2). Но $|\mathbf{q}|$ имеет порядок размера молекулы и в макроскопической теории может считаться бесконечно малым. Поэтому убыль потока \mathbf{j}^+ через S , которая и определяет ток I , равна

$$I = - \oint_C (\mathbf{j}^+ [\mathbf{q}d\mathbf{l}]). \quad (8.3)$$

Воспользовавшись теоремой Стокса, приведем (8.3) к виду

$$I = \int_S (\mathbf{n} \mathbf{j}_M) dS,$$

т.е.

$$\mathbf{j}_M \equiv \text{rot} [\mathbf{q} \mathbf{j}^+] \quad (8.4)$$

— плотность тока намагничивания.

Пользуясь модельной формулой (8.4), можно уже сравнительно просто показать, что

$$\mathbf{j}_M = c \text{rot } \mathbf{M}. \quad (8.5)$$

Для этого по аналогии с представлением

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V'} e_i \mathbf{v}_i = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \int_{\Delta V} e_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) dV'$$

введем сначала плотность \mathbf{j}_i молекулярных токов, т.е. положим

$$\mathbf{j} \equiv \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{j}_i dV'.$$

После этого введем смещения \mathbf{q}_i «положительных» молекулярных токов с плотностью \mathbf{j}_i^+ относительно «отрицательных» \mathbf{j}_i^- и при-

меним (8.4) для вычисления \mathbf{j}_M . Тогда \mathbf{M} в (8.5) имеет вид (с точностью до градиента произвольного скаляра)

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \int_{\Delta V} [\mathbf{q}_i \mathbf{j}_i^+] dV',$$

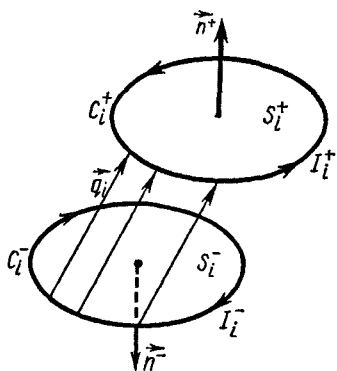


Рис. 8.3

или [см. (4.3)]

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} I_i^+ \oint_{C_i^+} [\mathbf{q}_i d\mathbf{l}]. \quad (8.6)$$

Предположим, что контур C_i^+ получается смещением из C_i^- (рис. 8.3). Тогда, поскольку геометрический момент замкнутой поверхности равен нулю, т. е.

$$\oint_S \mathbf{n} dS = 0,$$

находим

$$\oint_{C_i^+} [\mathbf{q}_i d\mathbf{l}] = \int_{S_i^+} \mathbf{n}_i^+ dS + \int_{S_i^-} \mathbf{n}_i^- dS \equiv \mathbf{S}_i^+ + \mathbf{S}_i^-.$$

Поэтому (8.6) с учетом равенства $I_i^+ = I_i^- \equiv I_i$ примет вид

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} I_i^+ (\mathbf{S}_i^+ + \mathbf{S}_i^-) \equiv \frac{1}{c\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} I_i \mathbf{S}_i,$$

что совпадает с (8.2).

Задача 8.2. Показать, что плотность тока намагничивания (8.5) не дает вклада в полный ток через какое-либо сечение образца.

§ 9. УЧЕТ ТОКОВ НАМАГНИЧЕНИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИИ

Если воспользоваться представлением (2.13) для плотности связанных токов $\mathbf{j}^{\text{связ}}$, то видно, что

$$\mathbf{j}^{\text{связ}} = \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M, \quad (9.1)$$

где $\mathbf{j}_M = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ — плотность тока намагничивания, а \mathbf{j}_P — дополнительная плотность тока, названная *плотностью тока поляризации*:

$$\mathbf{j}_P = \partial \mathbf{P} / \partial t. \quad (9.2)$$

Физический смысл этого тока проясняется, если воспользоваться представлением (7.5) для вектора \mathbf{P} :

$$\mathbf{j}_P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i^+ \frac{d\mathbf{q}_i}{dt}.$$

Очевидно, что плотность \mathbf{j}_P тока связана с изменением относительного расположения зарядов в молекулах, чем и обусловлено ее название.

Если имеется намагниченная и поляризованная среда, то в уравнении (6.3), содержащем плотность тока $\mathbf{j}^{\text{полн}}$, необходимо учесть токи намагничивания и поляризации. Очевидно, это уравнение следует записать в виде

$$\text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M).$$

Используя (8.5) и (9.2), получаем

$$\text{rot } (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (9.3)$$

Вводя обозначение

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \quad (9.4)$$

и замечая, что [см. (7.6)] $\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \equiv \mathbf{D}$, приводим уравнение (9.3) к виду

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (9.5)$$

где \mathbf{H} — вектор напряженности магнитного поля.

Отметим, что в общем случае намагниченность \mathbf{M} весьма сложно зависит от магнитного поля \mathbf{B} . Это хорошо видно на примере ферромагнетиков. Однако существуют и такие магнетики, у которых для не очень сильных полей намагниченность пропорциональна магнитному полю \mathbf{B} . К ним относится большинство диамагнетиков и парамагнетиков. Для них можно положить $\mathbf{M} = \alpha \mathbf{B}$, т. е. [см. (9.4)]

$$\mathbf{H} = (1 - 4\pi\alpha) \mathbf{B} = \mathbf{B}/\mu,$$

где $1/\mu = 1 - 4\pi\alpha$.

Эти линейные зависимости можно также записать в виде

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad (9.6)$$

$$\mathbf{B} = (1 + 4\pi\chi) \mathbf{H} \equiv \mu \mathbf{H}, \quad (9.7)$$

где $\chi = \alpha\mu = \frac{\mu - 1}{4\pi}$; $-\alpha = \frac{\mu^{-1} - 1}{4\pi}$.

Исторически первоначально магнитное поле вводилось посредством закона Кулона для фиктивных магнитных зарядов, поэтому χ названа магнитной восприимчивостью, а μ — магнитной проницаемостью*.

Как мы уже отмечали, существует два вида простейших магнетиков: диамагнетики и парамагнетики. Для диамагнетиков $0 < \mu < 1$, т. е. $-1/(4\pi) < \chi < 0$ ($\alpha < 0$), а для парамагнетиков $\mu > 1$, т. е. $\chi > 0$ ($\alpha > 0$).

* Однако ясно, что логичнее было бы, по аналогии с ϵ и ϵ для диэлектриков, назвать так соответственно $-\alpha$ и $1/\mu$, так как вектор \mathbf{B} , а не \mathbf{H} , служит для непосредственного описания магнитного поля.

§ 10. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ

Учитывая все вышесказанное, уравнения Максвелла для электромагнитного поля в среде можно представить в таком виде:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \text{II} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \end{array} \quad (10.1)$$

причем

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}, \quad (10.2)$$

где \mathbf{P} и \mathbf{M} зависят от \mathbf{E} и \mathbf{B} .

Для простейшего, но широко распространенного класса диэлектриков и магнетиков \mathbf{P} и \mathbf{M} пропорциональны \mathbf{E} и \mathbf{B} . Для таких веществ

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad (10.3)$$

где ε и μ , вообще говоря, суть функции координат и времени.

Система уравнений (10.1), (10.3) является уравнениями Максвелла в том виде, как они первоначально были сформулированы. Решая эту систему при заданных ρ , \mathbf{j} и ε , μ , можно определить \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} и \mathbf{H} .

В интегральной форме эта система переписывается так:

$$\begin{aligned} \oint_C (\mathbf{H}d\mathbf{l}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{nD}) dS &= \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{nj}) dS, \\ \oint_C (\mathbf{E}d\mathbf{l}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{nB}) dS &= 0, \\ \oint_S (\mathbf{nD}) dS &= 4\pi \int_V \rho dV, \quad \oint_S (\mathbf{nB}) dS = 0, \end{aligned} \quad (10.4)$$

причем правоориентированная поверхность S , натянутая на контур C , считается не зависящей от времени.

Задача 10.1. Записать уравнения Максвелла (10.1) в цилиндрических и сферических координатах.

§ 11. ЗАКОН ОМА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

В макроскопической физике и в инженерной электро- и радиотехнической практике токи создаются в проводниках под действием поля \mathbf{E} и *сторонних э. д. с.*, характеризующихся некоторой напряженностью $\mathbf{E}^{\text{стор}}$. Сторонними называются силы, отличные от сил, действующих на заряды в электромагнитном поле, но способные перемещать заряды и тем самым создавать токи. Сторонние силы могут

быть химического, диффузионного, механического и другого происхождения. Возникают они при наличии градиента плотности, температуры и вследствие других факторов. Сторонние силы действуют, например, в гальванических элементах, аккумуляторах, термopарах и т. п.

В широком классе проводников сила тока I пропорциональна напряжению U_{12} , т. е. справедлив линейный закон Ома (1.18). Однако при наличии сторонних э.д.с. этот закон должен быть обобщен и заменен законом Кирхгофа для участка цепи*:

$$IR_{12} = U_{12} + \mathcal{E}_{12}, \quad (11.1)$$

где по аналогии с (1.19)

$$U_{12} = \int_1^2 (\mathbf{E} d\mathbf{l}), \quad \mathcal{E}_{12} = \int_1^2 (\mathbf{E}^{\text{стор}} d\mathbf{l}). \quad (11.2)$$

При вычислении интегралов в (11.2) предполагается, что они мало меняются при изменении положений точек 1, 2, взятых где-то на поперечных сечениях проводника $S_{1,2}$ (рис. 11.1). Поэтому закон (11.1) справедлив только для *квазилинейных проводников*, для которых можно пренебречь поперечными размерами по сравнению с продольными, т. е. $\sqrt{S_{1,2}} \ll l_{12}$. Тогда, выбрав бесконечно малый участок проводника l_{12} , имеем

$$I = \int_S (\mathbf{n} j) dS \approx (\mathbf{n} j) S.$$

Так как $\mathbf{j} \parallel \mathbf{n} \parallel d\mathbf{l}$, то из (11.1) и (11.2) выводим, что

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}). \quad (11.3)$$

Здесь мы воспользовались определением электропроводности σ , согласно которому для цилиндрических проводников $R_{12} = l_{12}/(\sigma S)$.

Соотношение (11.3) известно как *дифференциальный закон Ома*. В случае анизотропных сред вместо σ следует писать тензор электропроводности $\hat{\sigma}$, т. е. полагать

$$j^i = \sigma^{ik} (E_k + E_k^{\text{стор}}). \quad (11.4)$$

Следует отметить, что, хотя закон Кирхгофа (11.1) верен лишь для стационарных токов, не зависящих от времени, соотношение (11.3) часто обобщают и на нестационарный случай.

Задача 11.1. Показать, что для квазилинейных проводников сопротивление участка может быть вычислено по формуле

$$R_{12} = \int_1^2 \frac{dl}{\sigma(r) S(r)}, \quad (11.5)$$

где $S(r)$ — площадь поперечного сечения, всюду нормального к линиям тока. Получить аналогичную формулу для анизотропных проводников.

* Как и в (10.4), проводник в (11.1) считается неподвижным.

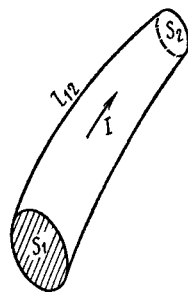


Рис. 11.1

Добавляя (11.3) к уравнениям (10.1) и (10.3), получаем систему уравнений, позволяющую вычислять поля \mathbf{E} и \mathbf{V} , если заданы сторонние э. д. с. и распределение зарядов на отдельных элементах рассматриваемой системы проводников, диэлектриков и магнетиков. Следует, однако, вновь отметить, что линейный закон (11.3) и соотношения (10.3) справедливы лишь для узкого, хотя и весьма распространенного, класса проводников, диэлектриков и магнетиков. В более общем случае все эти «законы» не верны и должны быть заменены более сложными функциональными связями.

§ 12. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

До сих пор предполагалось, что ϵ, μ, σ являются произвольными функциями t и \mathbf{r} . Однако, как правило, они оказываются кусочно-непрерывными функциями координат, т. е. претерпевают разрывы на некоторых границах раздела. Обусловлено это тем, что применяемые на практике технические устройства включают в себя элементы, обладающие различными ϵ, μ, σ .

В связи с этим можно получить решение уравнений Максвелла лишь в отдельных областях пространства, где коэффициенты ϵ, μ, σ непрерывны. Полученное таким образом общее решение системы дифференциальных уравнений содержит некоторые произвольные функции. Чтобы их определить и получить решение для всей совокупности областей, необходимо наложить граничные условия, или, как говорят, «сшить» решения на границах областей.

Эти условия «сшивания», налагаемые на векторы $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{V}, \mathbf{H}$, легко вывести, используя интегральную форму уравнений Максвелла (10.4). В самом деле, применять в пограничной области уравнения в дифференциальной форме нельзя, так как поля на границе могут терпеть разрывы, поэтому пространственные производные от них могут не существовать. Однако уравнения в интегральной форме, безусловно, должны выполняться, так как они являются непосредственным следствием экспериментальных фактов.

Используем, например, интегральную теорему Гаусса (3.4) в применении к вектору \mathbf{D} [см. (10.4)]. В качестве объема V возьмем бесконечно малый цилиндр с основанием S и высотой h , верхний и нижний торцы которого лежат соответственно в диэлектриках 2 и 1 (рис. 12.1). Так как цилиндр мал, то уравнение

$$\oint_S (\mathbf{nD}) dS = 4\pi \int_V \rho dV$$

запишется в виде

$$(\mathbf{nD}_2)S - (\mathbf{nD}_1)S + \langle D \rangle lh = 4\pi \rho hS,$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности раздела, l — длина окружности основания, $\langle D \rangle$ — среднее значение нормальной к боковой поверхности составляющей \mathbf{D} .

Пусть $h \rightarrow 0$ при фиксированном S . При вычислении предела учтем, что поле \mathbf{D} всюду ограничено, так что слагаемое $\langle D \rangle lh$ исчезает. Однако в пограничной области могут существовать столь большие скопления заряда, что даже в пределе $h \rightarrow 0$ заряд внутри цилиндра на элементе dS граничной поверхности может быть отличным от нуля и равным

$$dQ = \lim_{h \rightarrow 0} \rho h dS = \eta dS, \quad (12.1)$$

где η — поверхностная плотность электрического заряда. Окончательно при $h \rightarrow 0$

$$(\mathbf{nD}_2) - (\mathbf{nD}_1) = 4\pi\eta. \quad (12.2)$$

Следовательно, нормальная составляющая вектора электрической индукции не имеет разрыва на поверхности раздела двух диэлектриков только в том случае, когда на последней нет свободного поверхностного заряда. При наличии же поверхностного заряда нормальная составляющая \mathbf{D} изменяется на границе скачком на $4\pi\eta$.

Аналогично получаются граничные условия и для вектора магнитной индукции \mathbf{B} . Согласно последнему из уравнений (10.4),

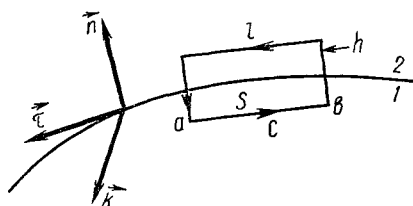


Рис. 12.2

$$\oint_S (\mathbf{nB}) dS = 0,$$

откуда

$$(\mathbf{nB}_2) - (\mathbf{nB}_1) = 0, \quad (12.3)$$

т. е. нормальная составляющая вектора магнитной индукции не имеет разрыва на поверхности раздела двух магнетиков.

Применим первое из интегральных уравнений Максвелла (10.4) к контуре C (рис. 12.2), получающемуся при рассечении цилиндра (рис. 12.1) вдоль нормали \mathbf{n} :

$$\oint_C (\mathbf{H} d\mathbf{l}) - \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{kD}) dS = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{kj}) dS,$$

где $\mathbf{k} = [\mathbf{n}\boldsymbol{\tau}]$; $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, касательный к поверхности раздела. Пусть теперь $h \rightarrow 0$ при малом фиксированном l . Тогда

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) l + (\mathbf{nH})_b h - (\mathbf{nH})_a h - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{kD}) lh = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{kj}) lh.$$

Примем во внимание конечность \mathbf{H} и $\partial\mathbf{D}/\partial t$, а также то, что в пограничной области могут протекать столь большие токи, что

даже в пределе $h \rightarrow 0$ сила тока, протекающего сквозь контур C на участке dl поверхности раздела, может быть отлична от нуля и равна

$$dI = \lim_{h \rightarrow 0} (\mathbf{k}j) h dl = (\mathbf{k}i) dl. \quad (12.4)$$

Вектор i называется в таких случаях *поверхностной плотностью тока*. В результате имеем

$$(\boldsymbol{\tau} \mathbf{H}_2) - (\boldsymbol{\tau} \mathbf{H}_1) = 4\pi (\mathbf{k}i)/c. \quad (12.5)$$

Подставив в (12.5) $\boldsymbol{\tau} = [\mathbf{k}\mathbf{n}]$, найдем, ввиду произвольной ориентации \mathbf{k} в касательной плоскости,

$$[\mathbf{n}\mathbf{H}_2] - [\mathbf{n}\mathbf{H}_1] = 4\pi i/c. \quad (12.6)$$

Таким образом, касательная проекция $[\mathbf{n}\mathbf{H}]$ вектора напряженности магнитного поля непрерывна на границе раздела двух сред, если отсутствует поверхностный ток проводимости. При наличии же последнего она испытывает на границе раздела скачок, равный $4\pi i/c$.

Аналогично выводится граничное условие для касательной проекции вектора напряженности электрического поля. Оно следует из второго уравнения (10.4) и имеет вид

$$[\mathbf{n}\mathbf{E}_2] - [\mathbf{n}\mathbf{E}_1] = 0, \quad (12.7)$$

т. е. касательная проекция вектора напряженности электрического поля не имеет разрыва на поверхности раздела двух сред

Итак, граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными ϵ и μ имеют такой вид:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}\mathbf{D}_2) - (\mathbf{n}\mathbf{D}_1) &= 4\pi \eta, \quad [\mathbf{n}\mathbf{E}_2] - [\mathbf{n}\mathbf{E}_1] = 0; \\ [\mathbf{n}\mathbf{H}_2] - [\mathbf{n}\mathbf{H}_1] &= \frac{4\pi}{c} i, \quad (\mathbf{n}\mathbf{B}_2) - (\mathbf{n}\mathbf{B}_1) = 0. \end{aligned} \quad (12.8)$$

§ 13. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗАРЯДЫ И ТОКИ

Рассмотрим макроскопический элементарный объем dV , которому соответствуют некоторый распределенный свободный электрический заряд $dQ = \rho dV$ и элемент тока $I dl = j dV$. Тогда согласно закону Кулона и формуле Ампера (1.9) на этот объем в электромагнитном поле будет действовать сила

$$d\mathbf{F} = dQE + \frac{1}{c} [dI\mathbf{B}] = \left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c} [j\mathbf{B}] \right) dV, \quad (13.1)$$

что позволяет ввести *плотность силы* $\mathbf{f} = d\mathbf{F}/dV$, действующей на распределенные заряды и токи:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c} [j\mathbf{B}]. \quad (13.2)$$

Естественным следствием (13.2) (см. задачу 1.8) является выражение для силы, действующей в электромагнитном поле на отдельный точечный заряд e и получившей название *силы Лоренца*:

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right). \quad (13.3)$$

По аналогии, выражение (13.2) называется *плотностью силы Лоренца* в электромагнитном поле.

Задача 13.1. Показать, что при отсутствии вещества плотность силы Лоренца может быть приведена к виду

$$\mathbf{f} = -\partial \mathbf{g} / \partial t + \operatorname{div} \hat{\mathbf{T}}, \quad (13.4)$$

или в компонентах

$$f^k = -\partial g^k / \partial t + \partial_i T^{ik},$$

где

$$\mathbf{g} = [\mathbf{E}\mathbf{B}] / (4\pi c), \quad (13.5a)$$

$\hat{\mathbf{T}}$ — тензор натяжений Максвелла, имеющий компоненты

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[E^i E^k + B^i B^k - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \delta^{ik} \right]. \quad (13.5b)$$

Для выяснения физического смысла \mathbf{g} и T^{ik} воспользуемся законом сохранения импульса и покажем, что электромагнитному полю необходимо приписать механический импульс. Пусть источники электромагнитного поля, т. е. свободные заряды и токи, сосредоточены в некотором объеме V , окруженном неподвижной поверхностью S , и обладают механическим импульсом \mathbf{P} . Если через \mathbf{G} обозначить импульс электромагнитного поля в том же объеме, то ясно, что суммарный импульс системы «поле + источники» может измениться лишь в результате перетекания импульса электромагнитного поля через поверхность S . Поэтому можно записать

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P} + \mathbf{G}) = - \oint_S n_i \xi^i dS, \quad (13.6)$$

где ξ^i — плотность потока импульса электромагнитного поля в i -м направлении.

В то же время, по второму закону динамики, сила, действующая на источники со стороны электромагнитного поля, равна

$$d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV,$$

или с учетом (13.4)

$$\mathbf{F} = - \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g} dV + \int_V \operatorname{div} \hat{\mathbf{T}} dV.$$

Преобразуя последний интеграл к поверхностному с помощью теоремы Гаусса — Остроградского (2П.6), находим

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{P} + \int_V \mathbf{g} dV \right) = \oint_S n_i T^{ik} dS.$$

Сравнение этой формулы с (13.6) показывает, что

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g} dV = \frac{1}{4\pi c} \int_V [\mathbf{E}\mathbf{B}] dV, \quad (13.7)$$

т. е. \mathbf{g} — плотность импульса электромагнитного поля, а T^{ik} — плотность потока k -й компоненты импульса электромагнитного поля в i -м направлении.

Здесь уместно отметить, что оправдать подобную интерпретацию \mathbf{g} и T^{ik} можно лишь соображениями простоты, ибо представление (13.5) не является единственным: нетрудно видеть, что существует бесчисленное множество комбинаций из полей и их производных, которые обращают правую часть (13.4) в тождественный ноль.

При рассмотрении электромагнитного поля в среде необходимо учитывать еще и силы, действующие на связанные заряды и токи. Однако их уже нельзя рассчитывать по формуле (13.2). В самом деле, макроскопическую плотность силы Лоренца естественно определить (см. § 2) как

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i \left(\mathbf{E}_i + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{B}_i] \right), \quad (13.8)$$

где \mathbf{E}_i , \mathbf{B}_i — электромагнитное поле в точке нахождения i -го заряда за вычетом его собственного поля. В случае свободных зарядов, распределение которых мало меняется в пределах ΔV , можно заменить \mathbf{E}_i , \mathbf{B}_i на среднее (макроскопическое) поле \mathbf{E} , \mathbf{B} , так что из (13.8) с учетом (2.2) и (2.5) сразу вытекает (13.2). Однако в случае связанных зарядов их распределение существенно меняется уже в пределах одной поляризованной молекулы, так что подобную замену сделать нельзя и, следовательно,

$$\mathbf{f}^{\text{связ}} \neq \rho^{\text{связ}} \mathbf{E} + [\mathbf{j}^{\text{связ}} \mathbf{B}] / c. \quad (13.9)$$

Если обобщить соотношение (13.4), выражающее закон сохранения импульса, на случай электромагнитного поля в среде, т. е. положить

$$\mathbf{f}^{\text{полн}} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^{\text{связ}} = -\partial \gamma / \partial t + \text{div } \hat{\Theta}, \quad (13.10)$$

то согласно (13.9) выражения для γ и $\hat{\Theta}$ будут уже отличаться от (13.5). Чтобы найти соответствующие изменения, необходимо вычислить $\mathbf{f}^{\text{связ}}$, т. е. плотность сил, действующих в электромагнитном поле на электрические и магнитные дипольные моменты молекул. Но даже и в этом случае γ и $\hat{\Theta}$, так же как \mathbf{g} и \hat{T} , еще нельзя определить однозначно

Задача 13.2. *Воспользовавшись законом сохранения момента импульса, показать, что тензор натяжений $\hat{\Theta}$ должен быть симметричным, т. е. $\Theta^{ik} = \Theta^{ki}$.*

Задача 13.3. *Рассчитать подъемную силу постоянного магнита, используя тензор натяжений Максвелла.*

§ 14. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Выясним теперь, как формулируется в электродинамике один из важнейших физических законов — закон сохранения энергии, и покажем, что электромагнитному полю в заданном объеме, как и всякому другому материальному объекту, можно приписать энергию*.

* То, что электромагнитному полю необходимо приписать механический импульс, было установлено в § 13.

Рассмотрим электромагнитное поле в системе, состоящей из *неподвижных* проводников, диэлектриков и магнетиков, т. е. в среде, характеризуемой определенным образом распределенными и не зависящими от времени $\sigma(\mathbf{r})$, $\varepsilon(\mathbf{r})$ и $\mu(\mathbf{r})$, или же соответствующими тензорами $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$, $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ и $\hat{\mu}(\mathbf{r})$ в анизотропной среде. Под действием силы (13.3) заряды в проводниках перемещаются и за 1 с поле совершает над каждым из них работу $(\mathbf{F}_i \mathbf{v}_i)$. Плотность мощности, затрачиваемой на перемещение свободных зарядов, определяется тогда как

$$\frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} (\mathbf{F}_i \mathbf{v}_i) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i (\mathbf{v}_i \mathbf{E}_i), \quad (14.1)$$

т. е. *работа совершается только электрическим полем.*

Задача 14.1 *Как понять, что магнитное поле \mathbf{B} может совершить работу над проводом с током или над железным шариком и в то же время не может изменить энергию отдельного заряда?*

Между тем ясно, что в стационарной системе по закону сохранения энергии совершаемая полем работа будет рассеиваться в виде теплоты, т. е. выражение (14.1) должно представлять собой плотность выделяемой тепловой мощности q . Поскольку рассматриваются свободные заряды, то (см. § 13) можно заменить в (14.1) поле \mathbf{E}_i на макроскопическое поле \mathbf{E} . Тогда с учетом (2.5) найдем, что

$$q = (\mathbf{j} \mathbf{E}). \quad (14.2)$$

Если же проводники подчиняются закону Ома, то

$$q = (\mathbf{j} \mathbf{E}) = \sigma E^2 = j^2 / \sigma. \quad (14.3)$$

Это дифференциальная форма закона Джоуля—Ленца, определяющего плотность тепловой мощности, выделяемой в проводящей среде*.

Общее количество теплоты, выделяемое во всем объеме проводников за 1 с, равно

$$P = \int_V (\mathbf{j} \mathbf{E}) dV. \quad (14.4)$$

Преобразуем теперь $(\mathbf{j} \mathbf{E})$, используя уравнения Максвелла (10.1):

$$(\mathbf{j} \mathbf{E}) = \frac{c}{4\pi} \left\{ (\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}) - \frac{1}{c} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \right\}.$$

Учитывая, что $(\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}) = (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}) - \operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}]$, и используя уравнения второй группы (10.1), получаем

$$(\mathbf{j} \mathbf{E}) = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) + \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \right\} - \operatorname{div} \left\{ \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}] \right\}. \quad (14.5)$$

Если выполняется простейшая линейная связь $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, где ε , μ не зависят от времени (неподвижная среда), то (14.5) пре-

* В присутствии сторонних сил, очевидно,

$$q = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{тор}}) = j^2 / \sigma,$$

образуется к виду

$$q = (\mathbf{jE}) = -\partial\omega/\partial t - \operatorname{div} \mathbf{S}, \quad (14.6)$$

где

$$\omega = \frac{1}{8\pi} [(\mathbf{ED}) + (\mathbf{BH})], \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]. \quad (14.7)$$

Таким образом, подстановка (14.6) в (14.4) с учетом независимости поверхности S от времени дает

$$P = -\frac{d}{dt} \int_V \omega dV - \oint_S (\mathbf{nS}) dS. \quad (14.8)$$

Последнее соотношение позволяет раскрыть физический смысл ω и \mathbf{S} . В самом деле, поскольку левая часть (14.8) представляет собой работу за одну секунду, совершаемую электромагнитным полем в объеме V над свободными зарядами, то, очевидно, правая часть (14.8) в соответствии с общим законом сохранения энергии должна быть связана с убылью энергии электромагнитного поля в объеме V или с притоком ее к этому объему. В частности, если рассмотреть стационарный процесс, когда $\partial\omega/\partial t = 0$, то энергия электромагнитного поля в объеме V не изменяется и джоулевы потери компенсируются притоком электромагнитной энергии извне. Таким образом, мы убеждаемся, что вектор \mathbf{S} имеет смысл *плотности потока электромагнитной энергии в среде*.

В другом частном случае, когда система не излучает и $\oint_S (\mathbf{nS}) dS = 0$, выделение джоулева тепла связано с убылью энергии электромагнитного поля в объеме V . Тем самым оказывается, что ω может быть интерпретирована как *плотность энергии электромагнитного поля в среде**

Теорема (14.6) впервые была доказана английским физиком Дж. Пойнтингом в 1884 г. и называется *теоремой Пойнтинга*, а \mathbf{S} — *вектором Пойнтинга*. Следует отметить, что теорема Пойнтинга является частным случаем более общей теоремы, доказанной русским ученым Н. А. Умовым в 1874 г., т. е. раньше Пойнтинга, для любого вида энергии, распределенной в пространстве с некоторой плотностью ω . Умов впервые ввел в науку понятие плотности потока энергии \mathbf{S} . Согласно ему, в случае когда теплота не выделяется,

$$\partial\omega/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0, \quad (14.9)$$

т. е. энергия ведет себя подобно распределенной субстанции, способной вытекать и втекать в заданный объем через окружающую его поверхность. Введенный Умовым вектор плотности потока энер-

* При этом очевидно, что только часть энергии ω следует отнести собственно к электромагнитному полю, другая же часть ее запасается средой в виде энергии связанных зарядов и токов. Аналогичное замечание в общем случае справедливо и для вектора \mathbf{S} .

гии получил название *вектора Умова*. Поэтому вектор Пойнтинга для плотности потока электромагнитной энергии часто называют еще и *вектором Умова — Пойнтинга*.

Задача 14.2. *Сформулировать теорему Пойнтинга при наличии сторонних в.д.с.*

§ 15. СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

Мы употребляли до сих пор абсолютную (гауссову) систему единиц СГС, основными механическими единицами которой являются сантиметр, грамм и секунда, а единица количества электричества определяется из закона Кулона (1.3). Но главным в системе Гаусса является форма записи уравнений электромагнитного поля и выражения для силы, действующей на заряд:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (15.1)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right),$$

причем для вакуума $\varepsilon = \mu = 1$ и $c = 2,997925 \cdot 10^{10}$ см/с. Преимуществом этой системы является то, что уравнения имеют симметричный вид и содержат лишь одну размерную постоянную c , имеющую физический смысл скорости света в пустоте, и один безразмерный множитель 4π . Кроме того, так как в пустоте $\varepsilon = \mu = 1$, то векторы индукций и напряженностей не различаются, что имеет простой физический смысл.

Хевисайд и Лоренц пользовались «рационализированной» системой Гаусса, в которой единицы количества электричества и силы тока выбраны так, что в основных уравнениях не содержится безразмерный коэффициент 4π . В системе Хевисайда—Лоренца уравнения поля и выражение для силы имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{1}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (15.2)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M} = \mu \mathbf{H},$$

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right),$$

причем для вакуума $\varepsilon = \mu = 1$.

Эта система отличается от системы Гаусса лишь тем, что в законы взаимодействия зарядов и токов входит множитель $1/(4\pi)$

[к примеру, закон Кулона имеет вид $F_{12} = e_1 e_2 / (4\pi r^2)$] и поэтому единица заряда в $\sqrt{4\pi}$ раз меньше, чем в системе Гаусса. Соответственно единицы напряженностей полей в $\sqrt{4\pi}$ раз больше, так как сила, действующая на заряд в поле, имеет одинаковый вид в обеих системах.

В последнее время в электро- и радиотехнике используется *рационализованная система* МКСА. В ней, как видно из названия, используются основные единицы: метр, килограмм, секунда и ампер и, кроме того, из уравнений изгоняется коэффициент 4π (как это делали Хевисайд и Лоренц). Однако главное отличие этой системы состоит в том, что в уравнениях Максвелла отсутствует множитель c , но при этом для вакуума выбираются отличные от единицы ϵ и μ , т. е. векторы напряженностей и индукций различаются между собой. В качестве единиц количества электричества, силы тока и напряжения выбираются соответственно кулон, ампер и вольт (так как они взаимозависимы, то достаточно выбрать лишь одну из этих единиц, например кулон).

Вместо (15.1) в рационализованной системе МКСА имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mu_0^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \\ \mathbf{F} &= e (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \mathbf{B}]). \end{aligned} \quad (15.3)$$

Чтобы выразить \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{j} , ρ через соответствующие величины в гауссовой системе \mathbf{E}_r , \mathbf{D}_r , \mathbf{B}_r , \mathbf{H}_r , \mathbf{j}_r , ρ_r , т. е. найти коэффициенты в уравнениях:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_r &= R\mathbf{r}, \quad m_r = Mm, \quad e_r = Qe, \quad \mathbf{E}_r = \epsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{D}_r &= d\mathbf{D}, \quad \mathbf{B}_r = b\mathbf{B}, \quad \mathbf{H}_r = h\mathbf{H}, \quad \mathbf{v}_r = R\mathbf{v}, \\ \rho_r &= Q\rho/R^3, \quad \mathbf{j}_r = \rho_r \mathbf{v}_r = Q\mathbf{j}/R^2, \quad c_r = Rc, \end{aligned}$$

где m — масса заряженной частицы, перепишем уравнения (15.1) в новых единицах и приведем их к виду (15.3), выбрав для этого соответствующие коэффициенты ϵ , d , b , h и считая, что $R = 10^2$; $M = 10^3$; $Q = 2,997925 \cdot 10^9$.

Если опустить уравнения второй группы, то уравнения (15.1) для вакуума в новых единицах примут такой вид:

$$\begin{aligned} h \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{d}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \frac{Q}{R^2} \mathbf{j}, \\ d \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \frac{Q}{R^2} \rho, \quad d\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \\ h\mathbf{H} &= b\mathbf{B}, \quad \mathbf{F} = \frac{Qe}{MR} \left(\epsilon \mathbf{E} + \frac{b}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right). \end{aligned} \quad (15.4)$$

Чтобы (15.4) было эквивалентно (15.3), необходимо положить:

$$\begin{aligned} ch/d = 1, \quad R^2 d/(4\pi Q) = 1; \quad c\varepsilon/b = 1; \\ MR/(Q\varepsilon) = 1; \quad \varepsilon_0 = \varepsilon/d; \quad \mu_0 = h/b. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Подставляя $c = 2,997925 \cdot 10^8$ м/с и указанные выше значения R , M и Q в (15.5), получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} = 2,997925 \cdot 10^4; \quad b = 10^4 \text{ м/с}; \quad h = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ с/м}; \\ d = 4\pi \cdot 2,997925 \cdot 10^6; \quad \varepsilon_0^{-1} = 4\pi (2,997925)^2 \cdot 10^9; \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ с}^2/\text{м}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, в рационализированной системе МКСА выполняется соотношение $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$.

СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

Глава 2

Простейшими задачами теории электромагнитного поля являются *стационарные задачи*, когда все входящие в основные уравнения (10.1) величины *не зависят от времени t* . В этом случае производные по времени равны нулю и система (10.1) разбивается на две подсистемы — Э) и М):

Э)	М)
$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho,$	$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c,$
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$
$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$	$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$
(в простейшем случае $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$).	(в простейшем случае $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$).

При решении электростатических задач используется система Э), а при решении магнито-статических — система М). Однако плотность тока \mathbf{j} , входящая в М), в наиболее распространенном случае определяется из закона Ома: $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}})$, т. е. зависит от \mathbf{E} . В этом случае для нахождения \mathbf{j} необходимо использовать решение системы Э).

Из-за наличия токов проводимости магнито-статические задачи в общем случае относятся к стационарным, но неравновесным системам, так как в последних происходит непрерывное выделение теплоты. Электростатические же задачи относятся к равновесным системам. Перейдем к рассмотрению электростатических задач.

§ 16. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ, СОЗДАВАЕМОЕ ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЗАРЯДОВ. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Уравнения электростатики Э) позволяют определять напряженность электрического поля:

- 1) во всем пространстве по заданному распределению зарядов,
- 2) в некоторой области V по заданным условиям на ее границе S и заданному распределению зарядов внутри V ;
- 3) в диэлектрической среде при наличии заряженных проводников,
- 4) в диэлектрической среде при наличии внешнего поля с напряженностью \mathbf{E}_0 .

Рассмотрим первую задачу. Уравнения электростатики в вакууме имеют такой вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (16.1)$$

Эти уравнения можно использовать и для определения поля \mathbf{E} в диэлектрике, если задано распределение связанных зарядов $\rho^{\text{связ}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$, которое надо добавить к плотности ρ свободных зарядов *

Поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, то

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \equiv -\nabla\varphi, \quad (16.2)$$

где φ — электростатический потенциал. Подставляя (16.2) в (16.1), получаем

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (16.3)$$

т. е. уравнение Пуассона для потенциала φ . В случае $\rho = 0$ оно превращается в уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \quad (16.4)$$

Уравнения Лапласа и Пуассона суть дифференциальные уравнения в частных производных эллиптического типа. Как известно, для их решения необходимо задавать определенные *граничные условия*, т. е. значения φ или (\mathbf{nE}) на границе S рассматриваемой области. В физике наиболее важно решение задач при естественных граничных условиях, когда $S \rightarrow \infty$. В этом случае обычно полагают, что $\varphi(\mathbf{r}) \rightarrow \operatorname{const}$ при $r \rightarrow \infty$. В простейшем случае $\varphi \rightarrow 0$.

При решении многих задач приходится использовать общее решение уравнения Лапласа. Чтобы найти его, изучим некоторые свойства этого уравнения.

Задача 16.1. Убедиться, что функция $\varphi_l = (\mathbf{ar})^l$ является решением (в общем случае комплексным) уравнения Лапласа, если при $l \geq 2$ считать, что \mathbf{a} — постоянный изотропный вектор, т. е. $a^2 = 0$.

* В случае однородной диэлектрической среды, когда $\epsilon = \operatorname{const}$, $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho/\epsilon$, т. е. можно использовать все результаты, вытекающие из (16.1), осуществив в последних замену $\rho \rightarrow \rho/\epsilon$. Имея это в виду, далее мы будем рассматривать лишь случай вакуума.

Чтобы удовлетворить условию $a^2 = 0$, выберем декартов вектор $\mathbf{a} = (i, 0, 1)$ и запишем φ_l в сферических координатах:

$$\varphi_l = r^l (\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \alpha)^l. \quad (16.5)$$

Заметим, что $\varphi_l r^{-l}$ можно представить в виде конечного ряда Фурье по α :

$$\begin{aligned} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \alpha)^l &= P_l(\cos \vartheta) + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^l \frac{(-i)^m l!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \vartheta) \cos m\alpha, \end{aligned} \quad (16.6)$$

коэффициентами которого являются полиномы Лежандра $P_l(\cos \vartheta) \equiv P_l^0(\cos \vartheta)$ и присоединенные полиномы Лежандра

$$P_l^m(\cos \vartheta) = i^m \frac{(l+m)!}{2^l l!} \int_0^{2\pi} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \alpha)^l \cos m\alpha \, d\alpha. \quad (16.7)$$

Задача 16.2. Вычислить $P_l^m(\cos \vartheta)$ при $l=0, 1, 2$.

Задача 16.3. Доказать, используя (16.7), справедливость разложения

$$\frac{1}{|r-\mathbf{a}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (\mathbf{a}\nabla)^l \frac{1}{r} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \vartheta) \quad (a < r), \quad (16.8)$$

из которого вытекает еще одно представление для полиномов Лежандра:

$$P_l(\cos \vartheta) = (-1)^l \frac{r^{l+1}}{a^l l!} (\mathbf{a}\nabla)^l \frac{1}{r}, \quad (16.9)$$

где $\cos \vartheta = (\mathbf{a}\mathbf{r})/(ar)$, \mathbf{a} — постоянный вектор.

Задача 16.4 Доказать, что если $\varphi(\mathbf{r})$ — решение уравнения Лапласа, то $r^{-1}\varphi(r\mathbf{r}^{-2})$ — также его решение при $r \neq 0$ (теорема Кельвина). Показать, что другими его решениями будут $(\mathbf{a}\nabla)\varphi(\mathbf{r})$ и $(\mathbf{a}[\mathbf{r}\nabla])\varphi(\mathbf{r})$, где \mathbf{a} — постоянный вектор

Знания вышеупомянутых свойств уравнения Лапласа вполне достаточно для построения его общего решения. В самом деле, по теореме Кельвина, решением, например, будет функция ($r \neq 0$)

$$r^{-1}\varphi_l(r\mathbf{r}^{-2}) = r^{-l-1} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \alpha)^l. \quad (16.10)$$

В частности, при $l=0$ отсюда находим простейшее решение $\varphi = 1/r$, отвечающее полю точечного заряда. Но тогда ясно, что (16.9) также является решением при $r \neq 0$, так как оно получается из $1/r$ l -кратным действием оператора $(\mathbf{a}\nabla)$.

Если рассмотреть оператор $(\mathbf{e}_3[\mathbf{r}\nabla]) = \partial/\partial\alpha$, то с его помощью можно выделить из (16.5) любую компоненту Фурье. В самом деле, если подействовать на (16.5) оператором

$$\prod_{\substack{m'=-l \\ (m' \neq m)}}^{+l} \left(im' + \frac{\partial}{\partial\alpha} \right),$$

то останется лишь член, содержащий $\exp(im\alpha)$. Таким образом, каждый член ряда Фурье в (16.5) или (16.10) является решением

уравнения Лапласа. Поэтому, используя принцип суперпозиции, общее решение уравнения Лапласа можно записать в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l r^l + b_l r^{-l-1}) \sum_{m=0}^l P_l^m(\cos \vartheta) (c_m \cos m\alpha + d_m \sin m\alpha), \quad (16.11)$$

где a_l, b_l, c_m, d_m — произвольные постоянные.

Задача 16.5. *Предположив, что потенциал φ не зависит от одной из координат, показать, что общее решение соответствующего двумерного уравнения Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид*

$$\begin{aligned} \varphi = & (b_0 + a_0 \ln r) (c_0 \alpha + d_0) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m r^m + b_m r^{-m}) (c_m \cos m\alpha + d_m \sin m\alpha), \end{aligned} \quad (16.12)$$

где a_m, b_m, c_m, d_m — произвольные постоянные; $m=0, 1, 2, \dots$

§ 17. ПОТЕНЦИАЛ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАРЯДОВ

Потенциал точечного заряда e , помещенного в начале координат, согласно (3.9) равен

$$\varphi = e/r.$$

Убедимся, что это решение можно использовать для нахождения потенциала пространственно распределенных зарядов. С этой целью представим с помощью δ -функции плотность произвольно распределенного заряда ρ в виде

$$\rho(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{R}) dV', \quad \mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}',$$

и подставим в уравнение Пуассона (16.3):

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -4\pi \int \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{R}) dV'. \quad (17.1)$$

С другой стороны, из (3.9)

$$\Delta(1/R) = -4\pi \delta(\mathbf{R}), \quad (17.2)$$

поэтому (17.1) можно переписать:

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \Delta \left(\frac{1}{R} \right) dV' = \Delta \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV'.$$

Следовательно, решение уравнения Пуассона (16.3) во всем пространстве имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV' + \varphi_0(\mathbf{r}), \quad (17.3)$$

где $\varphi_0(\mathbf{r})$ — некоторое решение уравнения Лапласа. По своему физическому смыслу потенциал φ_0 должен определяться распределением бесконечно удаленных зарядов, не входящих в $\rho(\mathbf{r})$. Поэтому если считать, что в распределении $\rho(\mathbf{r})$ учтен вклад всех имеющихся зарядов, в том числе и находящихся в бесконечности, то можно положить $\varphi_0(\mathbf{r}) \equiv 0$ и

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV', \quad (17.4)$$

или подробнее

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}}. \quad (17.5)$$

Такой выбор согласуется и с законом Кулона (3.3), который не противоречит (17.3) только при условии $\nabla\varphi_0 = 0$.

Задача 17.1. Записать решение уравнения Пуассона в случае сферически симметричного распределения заряда $\rho(r)$.

Задача 17.2. Показать, что решение (17.4) удовлетворяет естественному граничному условию $\varphi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, только если $\rho(r)$ убывает при $r \rightarrow \infty$ быстрее, чем r^{-2} .

В физических приложениях часто приходится искать решение уравнения Пуассона в некоторой области V , ограниченной замкнутой поверхностью S . В этом случае по аналогии с (17.3) положим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV' + \varphi_0(\mathbf{r}). \quad (17.6)$$

Как видно, (17.6) является решением уравнения Пуассона и удовлетворяет заданным граничным условиям на S , если φ_0 удовлетворяет уравнению Лапласа и определенным граничным условиям на S . Тем самым задача сводится к решению уравнения Лапласа в области V при некоторых граничных условиях на S .

Как мы убедимся позже, в физических задачах могут встречаться три типа граничных условий:

- 1) на S задан потенциал φ (задача Дирихле);
- 2) на S задана нормальная составляющая поля ($n\mathbf{E}$) (задача Неймана);
- 3) на одной части S задан потенциал φ , а на другой ее части — нормальная составляющая поля ($n\mathbf{E}$) (смешанная граничная задача).

Покажем, что в любом случае эти условия определяют напряженность поля \mathbf{E} однозначно. В самом деле, если это не так и существуют два разных решения уравнения Лапласа $\varphi_0^{(1)}$ и $\varphi_0^{(2)}$, то их разность $u \equiv \varphi_0^{(2)} - \varphi_0^{(1)}$ также удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$, причем на S либо $u = 0$, либо $(n\nabla)u = 0$. Поэтому если применить теорему Гаусса — Остроградского к вектору $u\nabla u$, для которого $\operatorname{div}(u\nabla u) = (\nabla u)^2$, то

$$\int_V (\nabla u)^2 dV = \oint_S u (n\nabla) u dS = 0, \quad (17.7)$$

что возможно только при $\nabla u \equiv 0$. Доказанная теорема единственности очень важна, так как вызывает уверенность в правильности найденных частных решений, если они удовлетворяют граничным условиям.

Задача 17.3. Вывести закон Ленгмюра для плоского диода, т. е. показать, что плотность j тока через диод связана с напряжением U на нем соотношением

$$j = \frac{1}{9\pi l^2} \sqrt{\frac{2|e|}{m}} U^{3/2},$$

где l — расстояние между катодом и анодом; e , m — заряд и масса электрона. Считать, что сила тока далека от насыщения, так что на катоде $E = 0$, т. е. электронное облако вблизи катода почти равномерно. Кроме того, принять, что начальная скорость эмиссионных электронов также равна нулю

§ 18. ПОТЕНЦИАЛ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ЗАРЯДОВ

Если заряд сосредоточен на некоторой поверхности S , то, вводя поверхностную плотность заряда $\eta(\mathbf{r})$, определяющую заряд на элементе поверхности dS согласно формуле $dQ = \eta dS$, легко получить из закона Кулона выражение для потенциала

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\eta(\mathbf{r}')}{R} dS'. \quad (18.1)$$

Но (18.1) можно вывести и из общей формулы (17.4). Так, если поверхность S задается уравнением $f(\mathbf{r}) = 0$, то удобно ввести новые координаты u^1, u^2, u^3 , в которых новое уравнение поверхности есть $u^3 = 0$. С этой целью положим

$$u^3 = f(\mathbf{r}) \quad (18.2)$$

и будем считать $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3)$. Но элемент объема $dV = dS dl$, где dl — смещение вдоль нормали к поверхности, которое с учетом (18.2) равно

$$dl = df / |\nabla f| = du^3 / |\nabla f|. \quad (18.3)$$

Теперь ясно, что для согласования (18.1) с (17.4) необходимо положить

$$\rho(\mathbf{r}) = \eta |\nabla f| \delta(u^3) = \eta |\nabla f| \delta[f(\mathbf{r})]. \quad (18.4)$$

При практическом использовании формулы (18.1) ее удобно записывать в координатах u^i . Для этого можно исходить из выражения для объема (см. задачу 9 приложения):

$$dV = \sqrt{g} du^1 du^2 du^3 = dS du^3 |\nabla f|^{-1}, \quad (18.5)$$

где

$$g = \det \|g_{ik}\|, \quad g_{ik} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \right). \quad (18.6)$$

Но на поверхности $u^3 = 0$ вектор $\partial \mathbf{r} / \partial u^3$ совпадает с нормалью, а векторы $\partial \mathbf{r} / \partial u^1, \partial \mathbf{r} / \partial u^2$ лежат в касательной плоскости. Поэтому

$$g_{13} = g_{23} = 0, \quad g_{33} = |\nabla f|^{-2}, \quad g = (g_{11}g_{22} - g_{12}^2) g_{33}$$

и из (18.5)

$$dS = |\nabla f| \sqrt{g} du^1 du^2 = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 du^2, \quad (18.7)$$

т. е. гауссова форма элемента поверхности, которая удобна, если поверхность задается параметрически уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$. Тогда (18.1) принимает вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\eta(u^1, u^2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(u^1, u^2)|} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 du^2. \quad (18.8)$$

Если заряд оказывается сосредоточенным вдоль некоторой линии C , то вводится *линейная плотность заряда* $\kappa(\mathbf{r})$, определяющая заряд на элементе длины dl по формуле $dQ = \kappa dl$. Тогда из закона Кулона

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_C \frac{\kappa(\mathbf{r}')}{R} dl'. \quad (18.9)$$

Задача 18.1. Показать, что объемная плотность заряда в случае, когда заряд с линейной плотностью $\kappa(\mathbf{r})$ распределен вдоль линии, задаваемой пересечением двух поверхностей $f_1(\mathbf{r}) = 0$, $f_2(\mathbf{r}) = 0$, равна

$$\rho(\mathbf{r}) = \kappa(\mathbf{r}) \delta[f_1(\mathbf{r})] \delta[f_2(\mathbf{r})] \frac{|\nabla f_1|^2 |\nabla f_2|^2}{|[\nabla f_1 \nabla f_2]|}. \quad (18.10)$$

Задача 18.2. Найти потенциал равномерно заряженного кольца радиуса a и заряда e . Результат выразить через полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \quad (0 \leq k \leq 1).$$

§ 19. ПОТЕНЦИАЛ ОГРАНИЧЕННОЙ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ (МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ)

Рассмотрим систему зарядов, сосредоточенную в некоторой области V , т. е. предположим, что $\rho \neq 0$ только внутри V . Пусть область V конечна и может быть включена в некоторый шар радиуса a . Поместим начало координат O в центр этого шара и введем обозначения: \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения, \mathbf{r}' — радиус-вектор произвольного заряда (рис. 19.1).

Очевидно, что потенциал данной системы зарядов может быть вычислен по формуле (17.4):

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (19.1)$$

Однако пусть нас интересует поле на больших расстояниях от системы, т. е. при $r \gg a$. Поскольку на таких расстояниях $\rho = 0$,

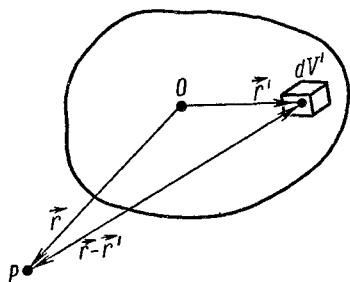


Рис. 19.1

то потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа и поэтому представляет собой убывающую часть общего решения (16.11):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l r^{-l-1} P_l^m(\cos \vartheta) (a_{lm} \cos m\alpha + b_{lm} \sin m\alpha). \quad (19.2)$$

Такое представление потенциала называется *мультипольным разложением*, коэффициенты a_{lm} и b_{lm} — *мультипольными моментами* порядка (l, m) данной системы зарядов, а число $n = 2^l$ — *мультипольностью*.

Очевидно, потенциал 2^l -поля имеет вид

$$\varphi_l = \sum_{m=0}^l r^{-l-1} P_l^m(\cos \vartheta) (a_{lm} \cos m\alpha + b_{lm} \sin m\alpha) \quad (19.3)$$

и убывает при $r \rightarrow \infty$ как r^{-l-1} . В частности, при $l=0$ ($n=1$) получаем поле одиночного заряда (*монополя*), при $l=1$ ($n=2$) — поле *диполя*, при $l=2$ ($n=4$) — поле *квадруполья* и т. д.

Коэффициенты мультипольного разложения (19.2) зависят от характера распределения заряда $\rho(\mathbf{r})$. Чтобы установить эту зависимость, обратимся к общей формуле (19.1) и произведем в ней разложение в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (\mathbf{r}' \nabla)^l \frac{1}{r}, \quad (19.4)$$

справедливое при $r > a > r'$. Тогда

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int_V \rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \nabla)^l \frac{1}{r} dV', \quad (19.5)$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int_V \rho(\mathbf{r}') x'^{i_1} \dots x'^{i_l} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \frac{1}{r} dV' \equiv \\ &\equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} Q^{i_1 \dots i_l} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (19.6)$$

где введен тензор 2^l -польного момента

$$Q^{i_1 \dots i_l} = \int_V \rho(\mathbf{r}') x'^{i_1} \dots x'^{i_l} dV'. \quad (19.7)$$

Одним из неудобств координатного мультипольного разложения (19.6) является то, что не все слагаемые в нем независимы, так как согласно (19.3) потенциал 2^l -поля должен содержать только $2l+1$ произвольную постоянную, а число независимых компонент у тензора $Q^{i_1 \dots i_l}$ равно

$$N = C_{l+2}^3 = 2l+1 + l(l-1)/2 \geq 2l+1. \quad (19.8)$$

Задача 19.1. Доказать формулу (19.8), предварительно убедившись в симметричности тензора $Q^{i_1 \dots i_l}$.

Таким образом, между потенциалами типа (19.6) должны существовать тождественные соотношения — по $l(l-1)/2$ соотношений на каждый 2^l -поль. Чтобы понять, в чем здесь дело, изучим поле отдельного мультиполя подробнее. Сначала построим 2^l -поль. Перенесем заряд e на вектор \mathbf{a}_1 и в точку, где он находился, поместим новый заряд $-e$. Так строится диполь ($l=1$). Сместим теперь диполь на вектор \mathbf{a}_2 и в точки, где размещались прежние заряды, поместим заряды противоположных знаков. Так получается квадруполь (рис. 19.2), соответствующий значению $l=2$. Совершив указанную операцию l раз, мы и получим 2^l -поль.

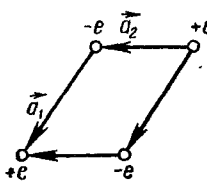


Рис. 19.2

Задача 19.2. Показать, что потенциал построенного выше 2^l -поля на больших расстояниях от него равен

$$\varphi_l = e(-1)^l \left[\prod_{i=1}^l (\mathbf{a}_i \nabla) \right] \frac{1}{r}. \quad (19.9)$$

Очевидно, что число различных 2^l -полей определяется числом независимых комбинаций l векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l$. Допустим, что k векторов мы установили вдоль оси Z . Тогда $l-k$ -оставшихся векторов можно установить либо вдоль оси X , либо вдоль оси Y . Таких комбинаций возможно $l-k+1$, так как вдоль оси X можно установить $0, 1, 2, \dots, l-k$ векторов. Следовательно, полное число комбинаций равно

$$N = \sum_{k=0}^l (l-k+1) = \frac{1}{2} (l+1)(l+2)$$

и совпадает с числом независимых компонент тензора $Q^{i_1 \dots i_l}$.

Однако не все эти комбинации приводят к независимым потенциалам. В самом деле, при $l \geq 2$ среди l векторов могут встретиться два одинаковых, т. е. $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = a\mathbf{e}_s$, где \mathbf{e}_s — один из базисных векторов. В этом случае между потенциалами (19.9) появится линейная связь, основанная на тождестве

$$\sum_{s=1}^3 (\mathbf{e}_s \nabla)^2 \frac{1}{r} = \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0. \quad (19.10)$$

Таких тождеств, очевидно, столько же, сколько существует возможностей выбора двух совпадающих векторов, т. е. C_l^2 . Отсюда ясно, что число независимых потенциалов φ_l равно

$$N_l = N - C_l^2 = 2l + 1, \quad (19.11)$$

как и должно быть согласно (19.3).

Задача 19.3. Показать, что если для некоторой системы зарядов $Q^{i_1 \dots i_k} = 0$ при $k < l$, то результат вычисления $Q^{i_1 \dots i_l}$ не зависит от выбора начала координат.

Вычислим теперь напряженность \mathbf{E} электрического поля, создаваемого диполем с дипольным моментом \mathbf{p} . Полагая в (19.9) $l=1$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{p}/e$, имеем:

$$\varphi_1 = -(\mathbf{p}\nabla)r^{-1} = (\mathbf{p}\mathbf{r})/r^3; \quad (19.12)$$

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = -\nabla(\mathbf{p}\mathbf{r})r^{-3} = [3\mathbf{r}(\mathbf{p}\mathbf{r}) - \mathbf{p}r^2]r^{-5}. \quad (19.13)$$

Картина линий напряженности этого поля изображена на рис. 19.3 (см. задачу 1.3).

Задача 19.4. Найти с помощью (19.9) напряженность \mathbf{E}_2 электрического поля квадруполь.

Рассмотрим более подробно квадрупольный член разложения потенциала произвольной ограниченной системы зарядов*. Согласно (19.6), имеем

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} Q^{ik} \partial_i \partial_k \left(\frac{1}{r} \right). \quad (19.14)$$

Учитывая тождества (19.10), к тензору квадрупольного момента Q^{ik} всегда можно добавить единичный тензор вида $\alpha \delta^{ik}$, где α — постоянная. Поэтому при расчете Q^{ik} вместо (19.7) удобно использовать формулу

$$Q^{ik} = \int \rho(\mathbf{r}') (x'^i x'^k - \delta^{ik} r'^2/3) dV'. \quad (19.15)$$

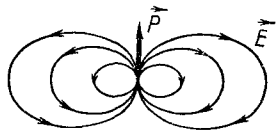


Рис. 19.3

Построенный тензор $\hat{\mathbf{Q}}$ удовлетворяет инвариантному условию

$$\text{Sp} \hat{\mathbf{Q}} = Q^i_i = 0 \quad (19.16)$$

и поэтому имеет не шесть, а только пять независимых компонент в полном согласии с (19.11).

Задача 19.5. Получить двумерное мультипольное разложение, справедливое для распределений заряда $\rho(\mathbf{r})$, не зависящих от одной из координат и сосредоточенных внутри некоторого цилиндра конечного радиуса a . Найти двумерный аналог формулы (19.9).

На практике, пользуясь мультипольными разложениями (19.2) или (19.6), обычно ограничиваются лишь первыми несколькими членами ряда. Для выяснения точности такого приближения воспользуемся оценкой; вытекающей из (19.6):

$$|\varphi_l| \leq r^{-l-1} \max_{\{i_1, \dots, i_l\}} |Q^{i_1 \dots i_l}| \equiv \frac{k_l}{r} \left(\frac{a}{r} \right)^l, \quad (19.17)$$

где $k_l = \max_{\{i_1, \dots, i_l\}} |Q^{i_1 \dots i_l}| a^{-l}$. В частности, если плотность заряда ограничена, т. е. $|\rho(\mathbf{r})| \leq \rho_0$, то согласно (19.7) $k_l < 4\pi\rho_0 a^3/3$. Сравнивая потенциалы ближайших мультиполей φ_l и φ_{l+1} , замечаем, что если k_l и k_{l+1} одного порядка, то

$$|\varphi_{l+1}/\varphi_l| \sim a/r. \quad (19.18)$$

* Результаты данного параграфа легко переносятся на случай ограниченной системы точечных зарядов, когда $\rho(\mathbf{r}) = \sum e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$.

Поэтому, ограничившись первыми не исчезающими членами разложения в (19.6), мы получаем тем лучшее приближение, чем меньше a/r .

§ 20. ПОТЕНЦИАЛ ДВОЙНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Среди систем, не имеющих полного электрического заряда, представляет интерес совокупность распределенных по некоторой поверхности S электрических диполей. Такую систему можно представить в виде *двойного электрического слоя*, т. е. в виде двух близких поверхностей, смещенных одна относительно другой на малое расстояние $l(\mathbf{r})$ и заряженных противоположно. Пусть \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности S , направленный от отрицательных зарядов к положительным. Тогда в точках, соединенных вектором смещения $\mathbf{l} = \mathbf{n}l$, поверхностные плотности заряда отличаются лишь знаком (рис. 20.1): $\eta_+ = -\eta_- = \eta$. Поэтому элемент двойного слоя dS обладает дипольным моментом

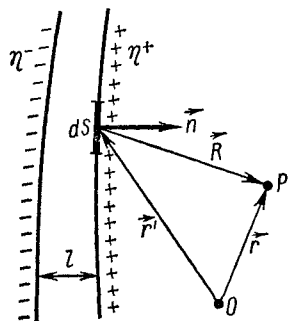


Рис. 20.1

$$d\mathbf{p} = \eta l dS \quad (20.1)$$

и потенциал в точке P наблюдения [см. (19.12)] равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_S \tau(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{n}'\mathbf{R})}{R^3} dS', \quad (20.2)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$; $\tau = \eta l$ — мощность двойного слоя, численно равная поверхностной плотности дипольного момента.

Замечая, что $dS'(\mathbf{n}'\mathbf{R}) = R^3 d\Omega$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла, под которым видна из точки наблюдения площадка dS' , имеем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_S \tau d\Omega. \quad (20.3)$$

В частном случае однородного двойного слоя, когда $\tau = \text{const}$,

$$\varphi = \tau\Omega, \quad (20.4)$$

где Ω — телесный угол, под которым видна из точки наблюдения вся поверхность S . При этом знак Ω положителен, если смотреть со стороны положительных зарядов, и отрицателен, если смотреть с противоположной стороны. Поэтому для однородного двойного слоя при переходе через поверхность потенциал испытывает скачок, равный

$$\varphi_+ - \varphi_- \equiv [\varphi] = 4\pi\tau. \quad (20.5)$$

Это нетрудно понять, так как в использованном нами дипольном приближении следует считать $l \rightarrow 0$, а при этом напряженность

электрического поля внутри двойного слоя согласно (12.2) должна неограниченно расти, если считать τ фиксированным:

$$-(nE) = 4\pi\eta = 4\pi\tau/l \rightarrow \infty. \quad (20.6)$$

Из (20.6) нетрудно получить, что разность потенциалов на слое равна $[\varphi] = -(E1) = 4\pi\tau$.

Задача 20.1. Показать, используя (20.3), что формула (20.5) справедлива и для неоднородного двойного слоя.

§ 21. ПОЛЕ СВЯЗАННЫХ ЗАРЯДОВ

Рассмотрим поляризованный диэлектрик, заполняющий некоторую ограниченную область V . Зная поляризованность $\mathbf{P}(\mathbf{r})$, можно определить, согласно (7.1), плотность связанных зарядов $\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}$, а затем по формуле (17.4) вычислить потенциал создаваемого ими электрического поля:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho'_p}{R} dV' = - \int_V \frac{\operatorname{div}' \mathbf{P}'}{R} dV', \quad (21.1)$$

где использовано обозначение $\rho'_p = \rho_p(\mathbf{r}')$, $\operatorname{div}' \mathbf{P}' = \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}')$.

Однако пользоваться формулой (21.1) не очень удобно, так как поляризованность \mathbf{P} может испытывать разрывы на границах между различными диэлектриками, а это, как известно, приводит к появлению связанных поверхностных зарядов, учет которых представляет дополнительную трудность.

Задача 21.1. Показать, что сингулярные части $\operatorname{div} \mathbf{P}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{M}$, обусловленные разрывами векторов \mathbf{P} и \mathbf{M} на некоторой поверхности S' , заданной уравнением $f(\mathbf{r}) = 0$, имеют такой вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{P}^{\text{синг}} = (\nabla f [\mathbf{P}]) \delta [f(\mathbf{r})], \quad (21.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{M}^{\text{синг}} = [\nabla f [\mathbf{M}]] \delta [f(\mathbf{r})], \quad (21.3)$$

где $[\mathbf{P}]$ и $[\mathbf{M}]$ — скачки \mathbf{P} и \mathbf{M} на S' .

От указанной трудности можно избавиться, если воспользоваться тождеством

$$\operatorname{div}' \frac{\mathbf{P}'}{R} = \frac{1}{R} \operatorname{div}' \mathbf{P}' + \frac{(\mathbf{P}' \cdot \mathbf{R})}{R^3} \quad (21.4)$$

и показать, что вклад в (21.1) $\operatorname{div}' (\mathbf{P}'/R)$ равен нулю. Нетрудно видеть, что это действительно так, если в нашем случае применима теорема Гаусса — Остроградского, ибо согласно ей

$$\int_V \operatorname{div}' \frac{\mathbf{P}'}{R} dV' = \oint_{S'} \frac{(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{P}')}{R} dS' = 0, \quad (21.5)$$

поскольку на поверхности S , охватывающей объем V и проходящей вне диэлектрика, $\mathbf{P} = 0$.

Чтобы убедиться в применимости теоремы Гаусса — Остроградского, исследуем сингулярности функции $\operatorname{div}' (\mathbf{P}'/R)$. Они могут

быть двух видов: либо за счет нуля знаменателя $R=0$, что соответствует выбору точки наблюдения внутри области V , либо за счет разрывов поляризованности \mathbf{P} . В первом случае окружим точку $R=0$ сферой малого радиуса a и с учетом (21.4) запишем неравенство

$$\left| \int_{V_a} \operatorname{div}' \frac{\mathbf{P}}{R} dV' \right| \leq \left| \int_{V_a} \frac{\rho'_P dV'}{R} \right| + \left| \int_{V_a} \frac{(\mathbf{P}' \cdot \mathbf{R})}{R^3} dV' \right|. \quad (21.6)$$

С другой стороны,

$$\left| \int_{V_a} \frac{\rho'_P dV'}{R} \right| \leq \max |\rho'_P| \int_{V_a} R dR d\Omega = \max |\rho'_P| 2\pi a^2,$$

$$\left| \int_{V_a} \frac{(\mathbf{P}' \cdot \mathbf{R})}{R^3} dV' \right| \leq \max |\mathbf{P}'| \int_{V_a} dR d\Omega = \max |\mathbf{P}'| 4\pi a$$

и поэтому

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left| \int_{V_a} \operatorname{div}' \frac{\mathbf{P}}{R} dV' \right| = 0.$$

Если же вектор \mathbf{P} терпит разрыв на некоторой поверхности S' , заданной уравнением $f(\mathbf{r})=0$, то здесь можно воспользоваться соотношением (21.2). Запишем сначала неравенство (21.6) для области V_ε , представляющей собой ε -окрестность S' (рис. 21.1). Для второго интеграла в (21.6) имеем оценку

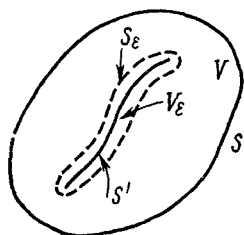


Рис. 21.1

$$\left| \int_{V_\varepsilon} \frac{(\mathbf{P}' \cdot \mathbf{R})}{R^3} dV' \right| \leq \max \frac{|\mathbf{P}'|}{R^2} V_\varepsilon,$$

и поэтому он исчезает при $\varepsilon \rightarrow 0$, в то время как оставшийся в (21.6) интеграл с учетом (21.2) принимает вид

$$\int_{V_\varepsilon} \frac{\operatorname{div}' \mathbf{P}'}{R} dV' = \int_{V_\varepsilon} \frac{1}{R} (\nabla' f' [\mathbf{P}']) \delta(f') dV'. \quad (21.7)$$

Вводя смещение dl' вдоль нормали \mathbf{n}' к S' и замечая, что $dV' = dS' dl'$ и $\nabla' f' = \mathbf{n}' df'/dl'$, преобразуем этот интеграл к виду

$$\int_{V_\varepsilon} \frac{1}{R} (\mathbf{n}' [\mathbf{P}']) \delta(f') df' dS' = \int_{S'} \frac{1}{R} (\mathbf{n}' [\mathbf{P}']) dS'. \quad (21.8)$$

Таким образом, в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\int_{V_\varepsilon} \operatorname{div}' \frac{\mathbf{P}'}{R} dV' = \int_{S'} \frac{(\mathbf{n}' [\mathbf{P}'])}{R} dS' = \oint_{S_\varepsilon} \frac{(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{P}')}{R} dS', \quad (21.9)$$

где S_ε — граница V_ε . Поэтому теорема Гаусса — Остроградского оказывается применимой даже к области сингулярности V_ε .

Обосновав таким образом применимость теоремы Гаусса—Остроградского к области V , получаем с учетом (21.1) и (21.5) следующее выражение для потенциала связанных зарядов:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{(\mathbf{P}' \cdot \mathbf{R})}{R^3} dV'. \quad (21.10)$$

Принимая во внимание соотношения (7.5) и (19.12), нетрудно убедиться, что это суммарный потенциал всех диполей из V :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i \in V} \frac{(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{R}_i)}{R_i^3}, \quad \mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i. \quad (21.11)$$

В некоторых случаях бывает удобно представить решение (21.10) в несколько ином виде, введя *электрический вектор Герца* Π :

$$\varphi = -\operatorname{div} \Pi. \quad (21.12)$$

Нетрудно видеть, что электрический вектор Герца Π просто связан с поляризованностью \mathbf{P} :

$$\Pi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (21.13)$$

В заключение отметим, что соотношение (21.9) могло бы быть выведено и на основании граничного условия (12.2). В самом деле, повторяя вывод условия (12.2) в применении к соотношению $\rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P}$, находим связь поверхностной плотности η_P связанных зарядов со скачком поляризованности $[\mathbf{P}]$:

$$\eta_P = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_1) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2) \equiv -(\mathbf{n} \cdot [\mathbf{P}]). \quad (21.14)$$

Поэтому соотношение (21.9) представляет вклад поверхностных связанных зарядов в общий потенциал:

$$\varphi^{\text{пов}} = \int_{S'} \frac{\eta'_P dS'}{R} = - \int_{S'} \frac{(\mathbf{n}' \cdot [\mathbf{P}'])}{R} dS'.$$

Задача 21.2. *Используя соотношения (21.2) и (21.3), получить граничные условия (12.8) с помощью уравнений Максвелла в дифференциальной форме.*

§ 22. ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ПРОВОДНИКОВ

Рассмотрим систему заряженных проводников, помещенных в диэлектрическую среду с проницаемостью $\epsilon(\mathbf{r})$. Внутри каждого проводника, обладающего конечной электропроводностью $\sigma(\mathbf{r})$, справедлив закон Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, из которого следует, что в статическом случае, когда $\mathbf{j} = 0$, внутри проводника

$$\mathbf{E} \equiv 0. \quad (22.1)$$

Учитывая потенциальность электрического поля, т. е. полагая $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, выводим отсюда, что внутри проводника и на его поверхности потенциал φ постоянен:

$$\varphi = \text{const}. \quad (22.2)$$

Кроме того, заряды в проводниках располагаются только на их поверхностях, поскольку объемная плотность заряда, согласно (22.1), исчезает:

$$4\pi\rho = \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (22.3)$$

В то же время в диэлектрике в соответствии с (7.7) потенциал φ должен удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div} (\epsilon \nabla \varphi) = -4\pi\rho \quad (22.4)$$

и граничным условиям (12.8):

$$(\mathbf{nD}_2) - (\mathbf{nD}_1) = 4\pi\eta, \quad [\mathbf{n}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = 0. \quad (22.5)$$

Но последнее условие вытекает из непрерывности потенциала на границе раздела S^* . В самом деле, если функция $f(\mathbf{r}) = \varphi_2 - \varphi_1$ обращается в нуль на поверхности S , то уравнение последней есть, очевидно, $f(\mathbf{r}) = 0$. Поэтому с учетом выражения для нормали $\mathbf{n} = \nabla f / |\nabla f|$ условие $[\mathbf{n}\nabla(\varphi_2 - \varphi_1)] = 0$ удовлетворяется тождественно.

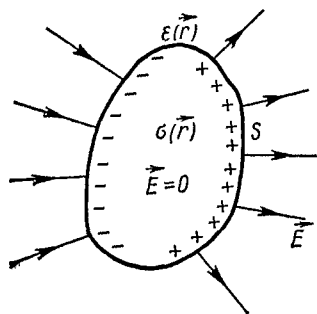


Рис. 22.1

Рассмотрим теперь оставшееся условие (22.5) на границе S проводника с диэлектриком (рис. 22.1). Поскольку в проводнике $\mathbf{D} = \mathbf{E} = 0$, то в диэлектрике вблизи границы с проводником выполняется равенство

$$(\mathbf{nD}) = -\epsilon (\mathbf{n}\nabla\varphi) = 4\pi\eta, \quad (22.6)$$

позволяющее записать полный заряд проводника в виде

$$Q = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \epsilon (\mathbf{n}\nabla) \varphi dS. \quad (22.7)$$

Итак, граничные условия, отбирающие нужные решения уравнения (22.4), имеют вид:

а) на поверхностях проводников S_i ($i = 1, 2, \dots$), несущих заданные заряды Q_i или поддерживаемых при заданных потенциалах φ_i ,

$$\varphi = \varphi_i = \text{const}, \quad Q_i = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_i} \epsilon (\mathbf{n}\nabla) \varphi dS; \quad (22.8)$$

б) на граничных поверхностях между диэлектриками при отсутствии свободных поверхностных зарядов

$$[\varphi] = 0, \quad (\mathbf{n}[\epsilon \nabla \varphi]) = 0. \quad (22.9)$$

При этом возможны две постановки основной задачи:

1) заданы потенциалы проводников φ_i , найти их заряды Q_i и потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в диэлектрике;

* Непрерывность потенциала необходима для конечности напряженности \mathbf{E} поля.

2) заданы заряды проводников Q_i , найти их потенциалы φ_i и потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в диэлектрике.

Докажем единственность решения этих задач. Будем исходить из противного, предположив, что имеется два разных решения φ_1 и φ_2 . Тогда их разность $u = \varphi_1 - \varphi_2$ согласно (22.4) удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{div}(\epsilon u \nabla u) = \epsilon (\nabla u)^2. \quad (22.10)$$

Интегрируя его по объему V диэлектрика, ограниченному поверхностями S_i проводников, найдем с помощью теоремы Гаусса — Остроградского

$$\int_V \epsilon (\nabla u)^2 dV = \sum_i \oint_{S_i} u \epsilon (\mathbf{n} \nabla) u dS. \quad (22.11)$$

Замечая, что для первой постановки задачи на поверхностях S_i будет $u = 0$, а для второй постановки $u = \text{const}$, но в то же время $\oint_{S_i} \epsilon (\mathbf{n} \nabla) u dS = 0$, убеждаемся, что правая часть в (22.11) исчезает.

Ввиду положительности ϵ это возможно только при условии, что $\nabla u \equiv 0$, т. е. напряженность \mathbf{E} поля определяется однозначно, а потенциалы φ_i и φ — с точностью до общей постоянной.

Задача 22.1. Показать, что поверхностная плотность заряда на проводниках максимальна в точках наибольшей кривизны поверхности. Предварительно доказать, что вблизи проводника

$$(\mathbf{n} \nabla) \ln (\mathbf{n} D) = -2K, \quad (22.12)$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности, K — ее средняя кривизна.

Задача 22.2. Показать, что замкнутая проводящая оболочка является экраном от внешних электрических полей, а в случае ее заземления, т. е. при ее контакте с проводником очень больших размеров, — еще и от внутренних. Показать также, что поле вне оболочки отсутствует, если она охватывает нейтральную систему зарядов.

Задача 22.3. Внутри металла вырезана сферическая полость радиуса a . Верхняя и нижняя ее половины заполнены диэлектриком с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 соответственно. В центре полости помещен точечный диполь с моментом \mathbf{p} . Найти потенциал φ в диэлектрике и распределение заряда на поверхности полости. Рассмотреть случаи ориентации диполя вдоль плоскости раздела сред и перпендикулярно ей. Рассмотреть также двумерный вариант задачи, т. е. цилиндрическую полость и двумерный диполь.

§ 23. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Получим выражение для энергии электростатического поля, создаваемого произвольной ограниченной системой зарядов, находящихся в диэлектрической среде. Выделим произвольную, но достаточно большую область V_0 , включающую систему зарядов и ограниченную некоторой замкнутой поверхностью S . Тогда энергия электростатического поля, содержащаяся в V_0 , согласно (14.7) равна

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{D} \mathbf{E}) dV. \quad (23.1)$$

Полагая $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ и интегрируя по частям, находим

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int_V \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} dV - \frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi (\mathbf{nD}) dS. \quad (23.2)$$

Будем теперь считать поверхность S сферой бесконечно большого радиуса R . Тогда при $R \rightarrow \infty$ потенциал φ убывает как $Q/(\epsilon_\infty R)$, где ϵ_∞ — диэлектрическая проницаемость среды на бесконечности, а Q — полный свободный заряд системы, равный по теореме Гаусса

$$Q = \frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{nD}) dS.$$

Все это позволяет получить следующую оценку для поверхностного интеграла в (23.2):

$$\frac{1}{8\pi} \left| \oint_S \varphi (\mathbf{nD}) dS \right| = \frac{Q^2}{2\epsilon_\infty R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Таким образом, при $R \rightarrow \infty$ (23.2) упрощается и с учетом (7.7) принимает вид

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV, \quad (23.3)$$

где V — область, занятая свободными зарядами.

Учтем теперь, что потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi(\rho + \rho_p)$ и поэтому может быть записан в форме

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{V'} \frac{\rho' + \rho'_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (23.4)$$

где V' — область, занятая свободными и связанными зарядами. Подставляя (23.4) в (23.3), получаем выражение для энергии электростатического поля в среде:

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_{V, V'} \frac{\rho(\rho' + \rho'_p)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV'. \quad (23.5)$$

В частном случае системы зарядов в вакууме ($\rho_p \equiv 0$) из (23.5) получается обычно используемое симметричное выражение

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_{V, V'} \frac{\rho\rho'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV'. \quad (23.6)$$

Если заряды считать точечными, то (23.6) будет содержать расходящиеся интегралы, отвечающие *собственным энергиям* отдельных зарядов. В самом деле, если заряд e равномерно распределен по поверхности шарика радиуса a , то энергия электростатического поля, очевидно, равна

$$W_e^{\text{соб}} = e^2/(2a) \quad (23.7)$$

и при $a \rightarrow 0$ оказывается бесконечной. Поэтому при рассмотрении системы точечных зарядов из (23.6) обычно исключают бесконечную собственную энергию, оставляя лишь энергию взаимодействия раз-

ных зарядов. Нетрудно видеть, что энергия поля в результате такой операции принимает вид

$$W'_e = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \frac{e_i e_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} = \frac{1}{2} \sum_i e_i \Phi_i, \quad (23.8)$$

где Φ_i — потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме i -го, в точке нахождения последнего.

Задача 23.1. Используя формулу (23.8), показать, что системы зарядов не может находиться в устойчивом равновесии только под действием электростатических сил (теорема Ирншоу).

Задача 23.2. В модели атома, предложенной Дж. Дж. Томсоном, положительный заряд непрерывно распределен подобно желе в шаре некоторого радиуса a , электроны же вкраплены в него словно изюм в пудинг. В модели простейшего атома водорода электрон находится в центре, и при малейшем смещении из положения равновесия на него действует возвращающая сила, очевидно, равная $\frac{4\pi e}{r^2} \int_{(0 \leq x < r)} x^2 \rho^+(x) dx$,

где ρ^+ — плотность положительного заряда-желе. Таким образом, в возбужденном атоме электрон должен колебаться вблизи устойчивого положения равновесия. Нет ли здесь противоречия с теоремой Ирншоу?

Изучим теперь более подробно вклад среды в энергию электростатического поля. Используя связь $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, этот вклад можно записать в виде

$$W_P = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}\mathbf{P}) dV. \quad (23.9)$$

Чтобы выяснить физический смысл этой величины, воспользуемся представлением поляризованности \mathbf{P} в форме (7.5):

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i^{\pm} \mathbf{q}_i, \quad (23.10)$$

где $|\mathbf{q}_i|$ — эффективное расстояние между зарядами e_i^{\pm} в i -й молекуле-диполе. Рассматривая молекулы как квазиупруго связанные заряды и вводя эффективный коэффициент упругости k , условие равновесия упругих и электрических сил можно записать в виде $e_i^{\pm} \mathbf{E}_i = k \mathbf{q}_i$, откуда вытекает следующее представление для энергии (23.9):

$$W_P = \frac{1}{2} \sum_i e_i^{\pm} (\mathbf{q}_i \mathbf{E}_i) = \frac{1}{2} \sum_i k q_i^2. \quad (23.11)$$

Таким образом, энергию электростатического поля, запасенную в диэлектрике, можно интерпретировать как потенциальную энергию растянутых упругих молекул.

Однако даже без привлечения каких-либо модельных представлений о молекулах-диполях, в предположении лишь линейности связи $\mathbf{P}(\mathbf{E}) = \kappa \mathbf{E}$, можно показать, что (23.9) представляет собой работу, которую необходимо затратить, чтобы создать в среде поляризацию \mathbf{P} . В самом деле, используя (23.10) и считая, что напряженность \mathbf{E} поля мало изменяется в пределах ячейки ΔV , элемен-

тарную работу электрического поля над связанными зарядами среды можно записать в виде

$$\delta W_e = \sum_i e_i (E_i \delta r_i) = \int (E \delta P) dV, \quad (23.12)$$

откуда в предположении линейной зависимости $\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}$ и вытекает (23.9). Таким образом, можно с уверенностью сказать, что выражение (23.9) представляет собой энергию, запасенную в диэлектрике при создании в нем электрического поля \mathbf{E} .

Задача 23.3. Показать, что если в поле заданной системы зарядов внести нейтральный диэлектрический образец с проницаемостью, отличающейся от проницаемости среды на малую величину $\delta\epsilon$, то в первом приближении энергия системы изменится на

$$\delta W_e = -\frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta\epsilon dV. \quad (23.13)$$

Показать также, что при внесении незаряженного проводника энергия системы уменьшится.

Энергия электростатического поля данной системы, очевидно, зависит от ее геометрических свойств, т. е. от некоторых обобщенных координат q_1, q_2, \dots . Поэтому знание функции $W_e(q_1, q_2, \dots)$ позволяет вычислить обобщенные силы F_i , действующие между элементами системы. Действительно, по принципу возможных перемещений,

$$\delta W_e = -\sum_i F_i \delta q_i, \quad (23.14)$$

откуда

$$F_i = -\partial W_e / \partial q_i. \quad (23.15)$$

Задача 23.4. Вычислить силу \mathbf{F} и момент сил \mathbf{L} , испытываемые диполем \mathbf{p} в поле другого диполя \mathbf{p}' , расположенного на расстоянии a от первого.

§ 24. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ПРОВОДНИКОВ

Поскольку в проводниках статический заряд распределен только по поверхностям, потенциал вдоль которых не меняется, то энергия такой системы [см. (23.3)] равна

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{S_i} \varphi \eta dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \eta dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i, \quad (24.1)$$

где φ_i и Q_i — соответственно потенциал и заряд i -го проводника. Решив основную задачу электростатики, т. е. найдя распределение потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ в окружающем пространстве, всегда можно, согласно (22.7), вычислить заряды проводников Q_i . В то же время, по теореме единственности (см. § 22), функция $\varphi(\mathbf{r})$ однозначно

определяется потенциалами проводников φ_i . Поэтому и заряды проводников Q_i — некоторые однозначные функции всех потенциалов $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Из-за линейности уравнений поля (22.4) эти функции могут быть только линейными. Поэтому должна существовать связь вида

$$Q_i = \sum_k C_{ik} \varphi_k, \quad (24.2)$$

и обратно:

$$\varphi_i = \sum_k S_{ik} Q_k. \quad (24.3)$$

Постоянные коэффициенты C_{ik} называются *емкостными коэффициентами* системы проводников, а S_{ik} — *потенциальными коэффициентами*. При этом коэффициенты C_{ii} называют *собственными емкостями*, а C_{ik} при $i \neq k$ — *коэффициентами взаимной емкости* или *коэффициентами электростатической индукции*.

Задача 24.1. Показать, что емкостные коэффициенты C_{ik} могут быть представлены в виде

$$C_{ii} = \sum_{k \neq i} a_{ik} + a_{i0}, \quad C_{ik} = -a_{ik} \quad (i \neq k), \quad (24.4)$$

где a_{ik} , $i \neq k$, определяются конфигурацией векторных линий поля \mathbf{D} . В частности, если среда характеризуется тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$ и векторная трубка, начинающаяся с площадки dS_i i -го проводника, имеет нормальное сечение $dS(\mathbf{r}) = dS_i f(\mathbf{r})$, то

$$a_{ik} = \int \left[4\pi \int_{\mathbf{D}_{ik}} (\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\epsilon}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{l} \right]^{-1} dS_i, \quad (24.5)$$

где линейный интеграл берется вдоль векторной линии $\mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} D$, а поверхностный — по той части поверхности i -го проводника, с которой начинаются линии \mathbf{D}_{ik} , связывающие i -й и k -й проводники; a_{i0} представляет собой вклад линий \mathbf{D} , уходящих в бесконечность.

Из (24.5) следует, что $a_{ik} > 0$, поэтому [см. (24.4)] $C_{ii} > 0$, тогда как $C_{ik} < 0$, $i \neq k$. Последнее обстоятельство является выражением того простого факта, что на проводниках всегда наводятся заряды противоположного знака. В самом деле, если заземлить все проводники, кроме k -го, то наведенный на i -м проводнике заряд [см. (24.2)] равен $Q_i = C_{ik} \varphi_k$. Но если $\varphi_k > 0$, то очевидно, что собственный заряд k -го проводника $Q_k > 0$, тогда как наведенные заряды $Q_i < 0$ при $i \neq k$.

Наконец, из (24.5) вытекает, что коэффициенты a_{ik} симметричны, т. е. $a_{ik} = a_{ki}$. Поэтому симметричными являются и емкостные коэффициенты:

$$C_{ik} = C_{ki}. \quad (24.6)$$

Выражение (24.6), известное как *соотношение взаимности*, часто формулируют в виде теоремы взаимности Грина, смысл которой состоит в следующем. Рассмотрим два состояния одной и той же системы проводников. Пусть в одном из них заряды и потенциалы

проводников Q_i, φ_i , а в другом — Q'_i, φ'_i . Тогда, используя (24.2) и (24.6), имеем

$$\sum_i Q'_i \varphi_i = \sum_{i,k} C_{ik} \varphi'_k \varphi_i = \sum_{i,k} C_{ki} \varphi_i \varphi'_k = \sum_k Q_k \varphi'_k. \quad (24.7)$$

Это и есть теорема взаимности Грина.

Для одиночного проводника

$$Q = C\varphi, \quad (24.8)$$

где C — собственная емкость проводника. В частности, для металлического шарика радиуса a , находящегося в однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ и несущего заряд Q , получаем $\varphi = Q/(\epsilon a)$, т. е. $C = \epsilon a$. В случае двух проводников, несущих равные и противоположные заряды $Q_1 = -Q_2 = Q$, из (24.2)

$$Q = C(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (24.9)$$

Такая система проводников обычно называется конденсатором, а коэффициент C — его емкостью.

Задача 24.2. Показать, что емкость конденсатора выражается через емкостные коэффициенты по формуле

$$C = (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)/(C_{11} + 2C_{12} + C_{22}). \quad (24.10)$$

Если обкладки конденсатора расположены очень близко друг от друга, то в соответствии с (24.5) имеем $a_{12} \gg a_{10}$ и $a_{12} \gg a_{20}$, так что приближенно можно считать $C_{11}C_{22} - C_{12}^2 \approx a_{12}(a_{10} + a_{20})$, тогда как $C_{11} + 2C_{12} + C_{22} = a_{10} + a_{20}$. Таким образом, согласно (24.10), емкость конденсатора примерно равна

$$C \approx a_{12} = |C_{12}|.$$

Задача 24.3. Два одинаковых проводящих тела, одно из которых имеет заряд Q , далеко отстоят друг от друга. При помощи первоначально незаряженного третьего проводника заряд переносится с одного тела на другое. Какими будут окончательные заряды всех трех проводников после многократного повторения операции переноса, если при первом контакте заряд Q первого тела уменьшился на $1/n$ часть?

Выразим теперь энергию системы заряженных проводников через их потенциалы или заряды. Подставляя в (24.1) последовательно (24.2) и (24.3), находим

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i,k} C_{ik} \varphi_i \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} S_{ik} Q_i Q_k. \quad (24.11)$$

Отсюда следует еще одно явно симметричное представление для емкостных и потенциальных коэффициентов:

$$C_{ik} = \frac{\partial^2 W_e}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k}, \quad S_{ik} = \frac{\partial^2 W_e}{\partial Q_i \partial Q_k}. \quad (24.12)$$

Из условия положительности квадратичной формы (24.11) получаем полезные неравенства

$$C_{ii} > 0; \quad C_{ii}C_{kk} - C_{ik}^2 > 0, \quad i \neq k. \quad (24.13)$$

Задача 24.4. Найти емкость конденсатора, образованного двумя большими плоскими пластинами площади S , наклоненными под углом β друг к другу. Минимальное и максимальное расстояния между пластинами d_1 и d_2 . Краевым эффектом пренебречь.

Задача 24.5. Как изменится емкость сферического конденсатора с радиусами оболочек a и $b > a$ при малой деформации внешней оболочки? Как изменится емкость при малом растяжении конденсатора на расстояние d в одном из его центральных сечений?

Задача 24.6. Найти емкость конденсатора, обкладки которого представляют собой усеченные конические поверхности с углами раствора α и $\beta > \alpha$, вложенные одна в другую (рис. 24.1). Радиусы усечения a и $b \gg a$. Краевым эффектом пренебречь.

Задача 24.7. Показать, что распределение поверхностного заряда на проводниках таково, что энергия электростатического поля минимальна (теорема В. Томсона).

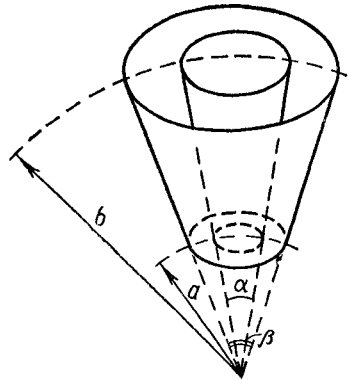


Рис. 24.1

§ 25. ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Можно выделить особый класс задач электростатики, относящихся к случаю, когда поле на бесконечности не исчезает, а стремится к некоторому постоянному однородному полю E_0 . Рассмотрим два простейших примера задач такого рода, когда во внешнем поле E_0 находятся проводящий либо диэлектрический шар.

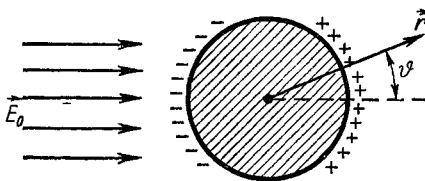


Рис. 25.1

Поместим начало координат в центр проводящего шара радиуса a и выберем сферические координаты (направление E_0 соответствует $\vartheta = 0$). Для простоты заземлим шар, тогда внутри него потенциал $\varphi = 0$. Вне шара при $r \rightarrow \infty$ потенциал совпадает с потенциалом внешнего поля $-E_0 r \cos \vartheta$. Чтобы удовлетворить граничному условию $\varphi(r = a) = 0$, из общего решения (16.11) уравнения Лапласа необходимо выбрать часть, пропорциональную $\cos \vartheta$:

$$\varphi = E_0 r \cos \vartheta (a^3/r^3 - 1). \quad (25.1)$$

Из полученного решения видно, что во внешнем поле E_0 шар поляризуется и приобретает дипольный момент $\mathbf{p} = E_0 a^3$. При этом поверхностная плотность заряда на нем оказывается равной (рис. 25.1)

$$\eta = -\frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \vartheta. \quad (25.2)$$

2. Рассмотрим диэлектрический шар с проницаемостью ϵ во внешнем поле E_0 . По аналогии с предыдущим случаем потенциал вне шара (область I) будем искать в виде

$$\varphi_1 = -E_0 r \cos \vartheta + (C_1/r^2) \cos \vartheta, \quad (25.3)$$

тогда как внутри шара (область 2) дипольный член должен отсутствовать, поскольку он расходится при $r=0$, а поле внутри шара должно быть конечным. Поэтому полагаем

$$\varphi_2 = C_2 r \cos \vartheta. \quad (25.4)$$

Подставляя потенциалы (25.3) и (25.4) в граничные условия (22.9), получаем систему уравнений для определения неизвестных постоянных C_1 и C_2 :

$$-E_0 a + C_1/a^2 = C_2 a, \quad E_0 + 2C_1/a^3 = -\epsilon C_2.$$

Разрешая ее, находим:

$$C_1 = a^3 E_0 (\epsilon - 1)/(\epsilon + 2), \quad C_2 = -3E_0/(\epsilon + 2),$$

что соответствует следующему виду потенциалов:

$$\varphi_1 = E_0 r \cos \vartheta \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{a^3}{r^3} - 1 \right), \quad \varphi_2 = -\frac{3E_0}{\epsilon + 2} r \cos \vartheta. \quad (25.5)$$

Анализируя решение (25.5), убеждаемся, что напряженность поля внутри шара постоянна и равна

$$\mathbf{E}_2 = 3E_0/(\epsilon + 2). \quad (25.6)$$

Это означает, что шар оказывается поляризованным с постоянным вектором поляризации

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}_2 = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \mathbf{E}_0, \quad (25.7)$$

который соответствует дипольному моменту шара

$$\mathbf{p} = a^3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \mathbf{E}_0 \quad (25.8)$$

и поверхностной плотности связанных зарядов

$$\eta_p = (\mathbf{nP}) = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_0 \cos \vartheta. \quad (25.9)$$

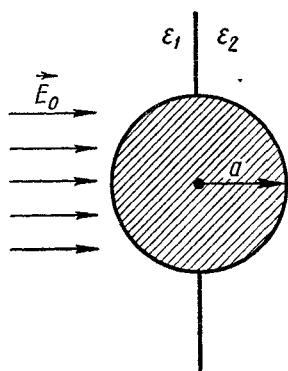


Рис. 25.2

Обратим внимание на то, что в пределе $\epsilon \rightarrow \infty$ решение задачи с диэлектрическим шаром переходит в соответствующее решение задачи с проводящим шаром. Физически это объясняется тем, что при $\epsilon \rightarrow \infty$ связанные заряды становятся свободными и диэлектрик ведет себя как проводник.

Задача 25.1. Проводящий шар радиуса a окружен диэлектрической оболочкой радиуса b с проницаемостью ϵ и помещен в постоянное внешнее поле \mathbf{E}_0 . Найти потенциал φ во всех областях и поверхностную плотность заряда на шаре.

Задача 25.2. Бесконечный проводящий цилиндр радиуса a помещен на плоской границе двух диэлектриков с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . В среде с проницаемостью ϵ_1 задано постоянное поле \mathbf{E}_0 , перпендикулярное плоскости раздела (рис. 25.2). Найти потенциал φ во всех областях и распределение заряда на цилиндре.

§ 26. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Изучим два популярных метода решения задач электростатики, основанные на использовании некоторых свойств симметрии исходных уравнений и граничных условий.

Метод отражений применяется в тех случаях, когда границы раздела сред плоские. Проще всего понять этот метод, рассмотрев случай проводящего полупространства. Пусть, скажем, плоскость $z=0$ разделяет проводник ($z < 0$) и диэлектрик ($z > 0$) с проницаемостью ϵ , в котором задано распределение свободных зарядов $\rho(\mathbf{r})$. Для нахождения потенциала φ в диэлектрике необходимо решить уравнение (22.4) с граничным условием $\varphi(z=0)=0$. Предварительно произведем симметричное продолжение функции $\epsilon(\mathbf{r})$ на область $z < 0$, т. е. положим

$$\epsilon_c(\mathbf{r}) \equiv \epsilon(x, y, |z|). \quad (26.1)$$

Допустим, что известно некоторое решение φ_c уравнения

$$\operatorname{div}(\epsilon_c \nabla \varphi_c) = -4\pi\rho \quad (26.2)$$

во всем пространстве (обратим внимание на то, что $\rho=0$ при $z < 0$). Рассмотрим теперь функцию $\varphi' = -\varphi_c(x, y, -z)$. Используя свойство инвариантности оператора $\operatorname{div}(\epsilon_c \nabla)$ относительно отражения $z \rightarrow -z$, нетрудно убедиться, что φ' удовлетворяет однородному уравнению

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \varphi') = 0 \quad (26.3)$$

в области $z > 0$. Очевидно, что φ' — потенциал, созданный отраженными источниками с плотностью $\rho' = -\rho(x, y, -z)$. С учетом всего сказанного ясно, что решением исходной задачи является функция

$$\varphi = \varphi_c(x, y, z) - \varphi_c(x, y, -z). \quad (26.4)$$

Физический смысл решения (26.4) очевиден из самого способа его построения: потенциалы φ_c и φ' создаются соответственно распределением заряда ρ при отсутствии проводящей среды и поверхностными зарядами, сосредоточенными на границе раздела $z=0$.

В качестве наглядного примера, иллюстрирующего метод отражений, рассмотрим следующую задачу. Пусть плоскость $z=0$ разделяет два диэлектрика с проницаемостями $\epsilon_1 (z < 0)$ и $\epsilon_2 (z > 0)$. В точке $A(0, 0, a)$ в области $z > 0$ расположен точечный заряд e . Используя метод отражений, потенциал поля будем искать в виде (рис. 26.1)

$$\varphi_1 = e''/(\epsilon_1 r_2), \quad \varphi_2 = e/(\epsilon_2 r_2) + e'/(\epsilon_2 r_1). \quad (26.5)$$

Иначе говоря, кроме истинного заряда e мы взяли еще два фиктивных заряда e' и e'' , помещенных в симметричные точки. С помощью этих фиктивных зарядов как раз и описывается поле поверхностных зарядов, сосредоточенных на границе раздела $z=0$. Подставляя (26.5) в граничные условия (22.9), получаем систему уравнений для определения неизвестных постоянных e' и e'' :

$$e''/\epsilon_1 = (e + e')/\epsilon_2, \quad e'' = e - e'.$$

Решение этой системы имеет такой вид:

$$e' = e(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad e'' = 2e\varepsilon_1/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (26.6)$$

С его помощью можно вычислить поверхностную плотность η_P связанных зарядов на границе раздела (рис. 26.1):

$$\eta_P = -(\mathbf{n}[\mathbf{P}]) = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{n}[\mathbf{E}]) = \frac{e \cos^3 \vartheta}{2\pi a^2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \quad (26.7)$$

Подсчитаем силу взаимодействия внесенного заряда e с этими связанными зарядами. Согласно (23.8), энергия взаимодействия равна

$$W'_e = \frac{1}{2} e \varphi'_2 = \frac{ee'}{4a\varepsilon_2} = \frac{e^2}{4a\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad (26.8)$$

откуда находим силу взаимодействия F_a , обычно называемую «силой изображения»:

$$F_a = -\frac{\partial W'_e}{\partial a} = \frac{e^2}{4a^2\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (26.9)$$

Метод инверсии основан на применении теоремы Кельвина (см. задачу 16.4). Суть его состоит в следующем. Допустим, что мы знаем решение уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ в некоторой области V . Совершим теперь преобразование инверсии радиуса a с центром в некоторой точке \mathbf{r}_0 :

$$\varphi'(\mathbf{r}) = a\varphi(\mathbf{r}')/R, \quad \mathbf{r}' \equiv a^2\mathbf{R}/R^2, \quad (26.10)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. При этом преобразовании область V перейдет в некоторую другую область V' , а уравнение Пуассона, согласно теореме Кельвина, примет вид

$$\Delta\varphi' = (a/R)^5 \Delta'\varphi(\mathbf{r}') = -4\pi(a/R)^5 \rho(\mathbf{r}'), \quad (26.11)$$

что эквивалентно введению в области V' нового распределения зарядов с плотностью

$$\rho'(\mathbf{r}) = (a/R)^5 \rho(\mathbf{r}'). \quad (26.12)$$

Таким образом, преобразование инверсии связывает между собой решения двух разных задач электростатики.

Используем метод инверсии для решения следующей задачи. Пусть имеется заземленная проводящая сфера радиуса a и вне ее задано некоторое распределение зарядов $\rho_+(\mathbf{r})$. Введем обозначения V_{\pm} для областей пространства вне и внутри сферы (рис. 26.2).

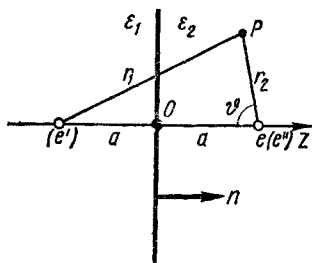


Рис. 26.1

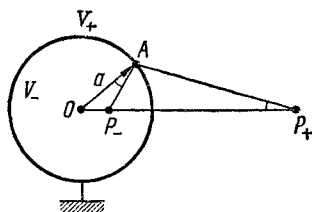


Рис. 26.2

Согласно (17.6), будем искать решение уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_+ \quad (26.13)$$

в области V_+ , удовлетворяющее граничному условию $\varphi=0$ на поверхности сферы, в виде

$$\varphi = \int_{V_+} \frac{\rho_+(r')}{|r-r'|} dV' + \varphi_0, \quad (26.14)$$

где φ_0 — некоторое решение уравнения Лапласа.

Для нахождения φ_0 поместим в области V_- инвертированные заряды, плотность которых, согласно (26.12), равна

$$\rho_-(r) = -(a/r)^5 \rho_+(a^2 r/r^2), \quad (26.15)$$

и рассмотрим создаваемый ими потенциал

$$\varphi_0 = \int_{V_-} \frac{\rho_-(r')}{|r-r'|} dV'. \quad (26.16)$$

Чтобы убедиться в выполнении граничного условия, вычислим потенциал φ_0 на поверхности сферы в некоторой точке A (рис. 26.2). Для удобства введем обозначения ($OP_{\pm} = r_{\pm}$, $AP_{\pm} = R_{\pm}$) и воспользуемся тем, что условие инверсии $r_+ r_- = a^2$ эквивалентно подобию $\triangle OAP_-$ и $\triangle OAP_+$, из которого следует, что

$$r_+/a = a/r_- = R_+/R_- = \text{const}. \quad (26.17)$$

Этот факт не удивителен и является выражением известного свойства окружности быть геометрическим местом точек, для которых отношение расстояний до двух заданных точек постоянно (*окружность Аполлония*). Используя (26.17), а также закон преобразования при инверсии элемента объема

$$dV_+ = r_+^2 dr_+ d\Omega = (a/r_-)^6 dV_-,$$

для точек на поверхности сферы имеем

$$\int_{V_-} \frac{\rho_-(P_-)}{R_-} dV' = - \int_{V_+} \frac{\rho_+(P_+) r'_-}{a R_-} dV' = - \int_{V_+} \frac{\rho_+(P_+)}{R_+} dV',$$

что эквивалентно выполнению граничного условия $\varphi=0$. Таким образом, решение задачи имеет вид

$$\varphi(r) = \int_{V_+} \frac{\rho_+(r')}{|r-r'|} dV' - \int_{V_-} \left(\frac{a}{r'}\right)^5 \rho_+ \left[\left(\frac{a}{r'}\right)^2 r' \right] \frac{dV'}{|r-r'|}. \quad (26.18)$$

Задача 26.1. На расстоянии l от проводящей плоскости параллельно ей помещен бесконечный проводящий цилиндр радиуса a с зарядом κ на l см длины. Считая окружающую среду однородным диэлектриком с проницаемостью ϵ , найти в ней потенциал φ и силу притяжения F цилиндра к плоскости.

§ 27. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Поскольку в проводниках объемная плотность электрического заряда равна нулю, то в электростатическом поле на них действует только поверхностная сила с некоторой поверхностной плотностью t . Очевидно, что сила dF , действующая на элемент поверхности dS , может быть представлена в виде

$$dF = t dS = \eta E' dS, \quad (27.1)$$

где E' — напряженность *действующего поля*, определяемая как напряженность E полного поля за вычетом вклада элемента dS .

Таким же методом, как в задаче 3.4, можно показать, что $E' = E/2$, и поэтому

$$t = \eta E/2. \quad (27.2)$$

В то же время [см. (22.6) и (22.8)]

$$\eta = \frac{1}{4\pi} (nD), \quad E = nE. \quad (27.3)$$

Все это позволяет представить поверхностную плотность сил, действующих на проводник, в виде

$$t = \frac{1}{8\pi} (DE) n \equiv \omega_e n. \quad (27.4)$$

Таким образом, проводники в электростатическом поле испытывают растяжение, очевидной причиной которого является расталкивание поверхностных зарядов. Интересно, что численно это растяжение совпадает с плотностью электростатической энергии ω_e .

Перейдем теперь к вычислению сил, действующих в электростатическом поле на диэлектрическую среду. Для этого воспользуемся выведенным ранее соотношением (23.13), согласно которому изменение энергии системы при малом изменении диэлектрической проницаемости среды равно

$$\delta W_e = - \frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta \epsilon dV. \quad (27.5)$$

В общем случае диэлектрическая проницаемость ϵ является сложной функцией плотности вещества $\tau(\mathbf{r})$, температуры T , напряжений в среде и многих других параметров. Для простоты предположим, что ϵ зависит лишь от плотности вещества и явно от точки \mathbf{r} , т. е. $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r}, \tau)$. В таком случае для вычисления сил, действующих на диэлектрик, можно воспользоваться принципом возможных перемещений и рассмотреть бесконечно малое смещение диэлектрика на вектор $\delta \mathbf{a}(\mathbf{r})$ в некоторой малой области V . Тогда

$$\begin{aligned} \delta \epsilon &= \epsilon[\mathbf{r} - \delta \mathbf{a}, \tau'(\mathbf{r})] - \epsilon[\mathbf{r}, \tau(\mathbf{r})] \equiv \\ &\equiv \epsilon[\mathbf{r} - \delta \mathbf{a}, \tau(\mathbf{r} - \delta \mathbf{a}) + \delta \tau] - \epsilon[\mathbf{r}, \tau(\mathbf{r})] \approx \\ &\approx -(\delta \mathbf{a} \nabla \epsilon) + \delta \tau (\partial \epsilon / \partial \tau), \end{aligned} \quad (27.6)$$

где $\delta \tau = \tau'(\mathbf{r}) - \tau(\mathbf{r} - \delta \mathbf{a}) \approx \tau'(\mathbf{r} + \delta \mathbf{a}) - \tau(\mathbf{r})$.

Воспользуемся законом сохранения массы вещества при деформации $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{a}$, согласно которому

$$\delta(\tau dV) = \tau'(\mathbf{r}') dV' - \tau(\mathbf{r}) dV = 0. \quad (27.7)$$

Преобразуем элемент объема dV' к старым переменным, введя якобиан преобразования \mathcal{J} , т. е. полагая $dV' = \mathcal{J}dV$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \det \|\partial_i(x^k + \delta a^k)\| = \det \|\delta_i^k + \partial_i(\delta a^k)\| \approx \\ &\approx \prod_{i=1}^3 [1 + \partial_i(\delta a^i)] \approx 1 + \operatorname{div} \delta\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (27.8)$$

Подставляя (27.8) в (27.7), получаем

$$\delta\tau = -\tau \operatorname{div} \delta\mathbf{a}. \quad (27.9)$$

Таким образом, из (27.6) находим

$$\delta\varepsilon = -(\delta\mathbf{a}\nabla\varepsilon) - \tau(\partial\varepsilon/\partial\tau) \operatorname{div} \delta\mathbf{a}. \quad (27.10)$$

Подставляя (27.10) в (27.5), находим для изменения энергии выражение

$$\delta W_e = \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 \left[(\delta\mathbf{a}\nabla\varepsilon) + \tau \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} \operatorname{div} \delta\mathbf{a} \right] dV. \quad (27.11)$$

С другой стороны, (27.11) должно быть пропорционально, согласно принципу возможных перемещений, элементарной работе внешних сил. Вводя плотность сил $\mathbf{f}_e^{\text{связ}}$, действующих на диэлектрик, имеем

$$\delta W_e = - \int_V (\mathbf{f}_e^{\text{связ}} \delta\mathbf{a}) dV. \quad (27.12)$$

Для того чтобы привести δW_e к виду (27.12), выполним во втором слагаемом (27.11) интегрирование по частям. Возникающий при этом поверхностный интеграл обращается в нуль, поскольку вне области V , по условию, $\delta\mathbf{a} = 0$. Таким образом,

$$\delta W_e = \frac{1}{8\pi} \int_V \left[E^2 (\delta\mathbf{a}\nabla\varepsilon) - \delta\mathbf{a} \cdot \nabla \left(\tau \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} E^2 \right) \right] dV. \quad (27.13)$$

Сравнивая (27.13) и (27.12), находим следующее выражение для плотности сил, действующих на диэлектрик в электростатическом поле:

$$\mathbf{f}_e^{\text{связ}} = - \frac{1}{8\pi} E^2 \nabla\varepsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left(\tau \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} E^2 \right). \quad (27.14)$$

Задача 27.1. Показать, что при электризации тел трением или при их близком контакте положительно заряжается вещество с большей диэлектрической проницаемостью (закон Кёна).

Для разреженных диэлектриков выражение для плотности силы (27.14) упрощается. В этом случае ε можно считать линейной функ-

цией τ , положив $\varepsilon \approx 1 + \sigma\tau$. В этом приближении $\tau(\partial\varepsilon/\partial\tau) \approx \varepsilon - 1$ и (27.14) принимает вид

$$\mathbf{f}_e^{\text{связ}} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \nabla E^2. \quad (27.15)$$

Формулу (27.15) можно получить и в микроскопической теории. В самом деле, как следует из решения задачи 23.4, на диполь \mathbf{p} в электростатическом поле \mathbf{E} действует сила

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p}\mathbf{E}) = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E}. \quad (27.16)$$

Суммируя (27.16) по всем диполям \mathbf{p}_i из физического бесконечно малого объема ΔV и считая напряженность \mathbf{E}_i действующего поля совпадающей с напряженностью \mathbf{E} среднего поля в среде, что справедливо для разреженных диэлектриков, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e^{\text{связ}} &= \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{F}_i = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} (\mathbf{p}_i \nabla) \mathbf{E}_i \approx \\ &\approx \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} (\mathbf{p}_i \nabla) \mathbf{E} \equiv (\mathbf{P}\nabla) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (27.17)$$

Нетрудно видеть, что (27.17) сводится к (27.15), если учесть, что $4\pi\mathbf{P} = (\varepsilon - 1)\mathbf{E}$, и использовать тождество (2П.4д), согласно которому

$$(\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E} = \nabla E^2/2 - [\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{E}] = \nabla E^2/2, \quad (27.18)$$

поскольку $\text{rot } \mathbf{E} = 0$.

Если в диэлектрике имеются свободные заряды, распределенные с плотностью ρ , то плотность сил, действующих на среду в электростатическом поле, равна

$$\mathbf{f}_e = \rho\mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left(E^2 \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right). \quad (27.19)$$

Иногда бывает удобно, поступая так же, как при решении задачи 13.1, представить (27.19) в виде

$$\mathbf{f}_e = \text{div } \hat{T}_{(e)}, \quad (27.20)$$

где $\hat{T}_{(e)}$ — тензор электрических натяжений, имеющий компоненты

$$T^{ik}_{(e)} = \frac{\varepsilon}{4\pi} E^i E^k - \frac{1}{8\pi} E^2 \left(\varepsilon - \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right) \delta^{ik}. \quad (27.21)$$

Согласно (27.20), полная сила \mathbf{F}_e , действующая на диэлектрик в некоторой области V , равна

$$\mathbf{F}_e = \int_V \mathbf{f}_e dV = \int_V \text{div } \hat{T}_{(e)} dV. \quad (27.22)$$

Используя теорему Гаусса — Остроградского в форме (2П.6), сведем объемный интеграл в (27.22) к интегралу по поверхности S , окру-

жающей объем V :

$$\mathbf{F}_e = \oint_S (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}}_{(e)}) dS = \oint_S \left[\frac{\varepsilon}{4\pi} (\mathbf{nE}) \mathbf{E} - \frac{E^2}{8\pi} \left(\varepsilon - \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right) \mathbf{n} \right] dS. \quad (27.23)$$

§ 28. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, СОЗДАВАЕМОЕ ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТОКОВ. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Перейдем к рассмотрению магнитостатических задач. В этом случае к основным уравнениям являются:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}'/c, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M} \quad (\text{в простейшем случае } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}).$$

С их помощью можно определить индукцию \mathbf{B} магнитного поля, возникающего в магнетиках при наличии:

- 1) токов с заданной плотностью \mathbf{j} ;
- 2) постоянных магнитов;
- 3) внешнего магнитного поля с напряженностью \mathbf{H}_0 ;
- 4) сверхпроводников (с заданными полными токами).

Найдем сначала индукцию магнитного поля, создаваемого заданными токами в вакууме*, т. е. решим систему уравнений:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}'/c, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (28.1)$$

Плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, согласно первому уравнению (28.1), подчиняется стационарному закону сохранения:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (28.2)$$

Чтобы удовлетворить второму из уравнений (28.1), воспользуемся тождеством $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ и положим

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (28.3)$$

введя *векторный потенциал* \mathbf{A} .

Подставляя (28.3) в первое из уравнений (28.1), имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 4\pi \mathbf{j}'/c, \quad (28.4)$$

или с учетом соотношения (2П.13)

$$\Delta \mathbf{A} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j}'/c. \quad (28.5)$$

Заметим, что из уравнения (28.3) при заданном магнитном поле \mathbf{B} вектор-потенциал \mathbf{A} определяется неоднозначно. В самом деле, согласно тождеству $\operatorname{rot} \nabla \psi = 0$, вместо \mathbf{A} всегда можно взять другой вектор \mathbf{A}' , отличающийся на градиент произвольного скаляра ψ^{**} :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi. \quad (28.6)$$

Но последний всегда можно выбрать так, чтобы $\operatorname{div} \mathbf{A}' = 0$. Для

* Случай однородного магнетика получается умножением \mathbf{j} на μ .

** Преобразование (28.6) называется *градиентным* или *калибровочным преобразованием* вектор-потенциала \mathbf{A} .

этого достаточно подчинить ψ уравнению

$$\Delta\psi = -\operatorname{div} \mathbf{A}.$$

Таким образом, всегда можно положить $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ и находить вектор-потенциал \mathbf{A} как решение системы уравнений:

$$\Delta\mathbf{A} = -4\pi\mathbf{j}/c, \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (28.7)$$

Замечая, что в декартовых координатах любая из компонент вектора \mathbf{A} удовлетворяет уравнению типа Пуассона, можно по аналогии с (17.4) записать решение уравнений (28.7) для всего пространства в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV', \quad (28.8)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. При этом нетрудно убедиться, что (28.8) удовлетворяет условию $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. В самом деле, переходя в (28.8) к новой переменной интегрирования \mathbf{R} , имеем

$$c \operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}-\mathbf{R})}{R} dV_R = \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}-\mathbf{R})}{R} dV_R,$$

что действительно обращается в нуль [см. (28.2)].

Отметим, что к решению (28.8) следует еще добавить вектор \mathbf{A}_0 , удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta\mathbf{A}_0 = 0$ и условию $\operatorname{div} \mathbf{A}_0 = 0$. Однако если система токов ограничена и физически приемлемыми считаются только решения, исчезающие на бесконечности, то ясно, что $\mathbf{A}_0 \equiv 0$. Это следует из того, что \mathbf{A}_0 является векторной гармонической функцией и по принципу максимума может удовлетворять граничному условию $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{A}_0 = 0$ только при $\mathbf{A}_0 \equiv 0$.

Применяя к (28.8) операцию ротора, находим индукцию магнитного поля:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \int \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right) dV' = \frac{1}{c} \int \left[\nabla \frac{1}{R} \mathbf{j}' \right] dV',$$

откуда следует закон Био—Савара—Лапласа:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}' \mathbf{R}]}{R^3} dV'. \quad (28.9)$$

Тем самым еще раз доказана эквивалентность (28.1) и (28.9). Для однородного магнетика в (28.9) вместо \mathbf{B} нужно поставить \mathbf{H} .

Задача 28.1. Найти вектор-потенциал \mathbf{A} и индукцию \mathbf{B} магнитного поля, создаваемого: а) прямым током I ; б) бесконечной прямой катушкой с током силой I , имеющей n витков на 1 см и радиус a .

Перейдем теперь к задаче о нахождении индукции \mathbf{B} в неоднородном магнетике, характеризующемся магнитной проницаемостью $\mu(\mathbf{r})$. В этом случае необходимо использовать уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (28.10)$$

подставляя в которое (28.3), находим

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (28.11)$$

Допустим, что требуется найти индукцию \mathbf{B} в некоторой области V , ограниченной замкнутой поверхностью S . При этом можно выделить три типа граничных задач:

1) на поверхности S задан вектор $[\mathbf{nA}]$, где \mathbf{n} — внешняя нормаль к S ;

2) на поверхности S задан вектор $[\mathbf{nH}]$;

3) на части поверхности S задан вектор $[\mathbf{nA}]$, а на другой ее части — вектор $[\mathbf{nH}]$.

Покажем, что во всех этих задачах магнитное поле определяется однозначно, а векторный потенциал — с точностью до градиентного преобразования.

Предположив противное, примем, что существуют два разных решения \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 . Тогда их разность $\mathbf{u} \equiv \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$, согласно (28.11) и (2П.4а), будет удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{u}}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{u} \right] = \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \mathbf{u})^2. \quad (28.12)$$

Интегрируя (28.12) по области V и применяя теорему Гаусса — Остроградского, находим

$$\int_V \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \mathbf{u})^2 dV = \oint_S \frac{1}{\mu} ([\mathbf{nu}] \operatorname{rot} \mathbf{u}) dS. \quad (28.13)$$

Очевидно, что поверхностный интеграл в (28.13) исчезает с учетом наложенных граничных условий, ибо во всех случаях либо $[\mathbf{nu}]$, либо $[\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{u}]$ обращаются в нуль на поверхности S . Но тогда из (28.13) вытекает, что $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$. Это и доказывает теорему единственности.

Наконец, остановимся на граничных условиях (12.3) и (12.6), которые должны накладываться в тех случаях, когда магнитная проницаемость испытывает разрыв на некоторой поверхности S' внутри области V . Прежде всего необходимо наложить условие непрерывности вектор-потенциала \mathbf{A} на поверхности S' :

$$[\mathbf{A}] = 0. \quad (28.14)$$

Это делается для того, чтобы индукция \mathbf{B} была конечной. В самом деле, если принять, что \mathbf{A} может иметь скачок $[\mathbf{A}]$ на S' , то согласно (21.3) индукция на S' имеет сингулярную часть

$$\mathbf{B}_{\text{синг}} = [\nabla f[\mathbf{A}]] \delta[f(\mathbf{r})],$$

где $f(\mathbf{r}) = 0$ — уравнение поверхности S' . Таким образом, поле \mathbf{B} принимает бесконечные значения в точках поверхности S' , что физически недопустимо.

Задача 28.2. Показать, что граничное условие $(\mathbf{n}[\mathbf{B}]) = 0$ является следствием (28.14).

Таким образом, с учетом (12.6) на границе раздела двух магнетиков должны выполняться следующие условия:

$$[\mathbf{A}] = 0, \quad \left[n \left[\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right] \right] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \quad (28.15)$$

где \mathbf{i} — поверхностная плотность токов проводимости на границе раздела.

§ 29. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ОГРАНИЧЕННОЙ СИСТЕМЫ ТОКОВ (МАГНИТНОЕ МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ)

Предположим, что токи с плотностью \mathbf{j} сосредоточены в некоторой области пространства V , которую можно заключить в сферу конечного радиуса a . Подставив в общее выражение для вектор-потенциала

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (29.1)$$

разложение (19.4), найдем для $r > a > r'$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{c l!} \int_V \mathbf{j}'(\mathbf{r}' \nabla)^l \frac{1}{r} dV' = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \mathcal{M}^{i_1 \dots i_l} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \frac{1}{r}, \quad (29.2)$$

где введен тензор 2^l -польного магнитного момента

$$\mathcal{M}^{i_1 \dots i_l} \equiv \frac{1}{c} \int_V x'^{i_1} \dots x'^{i_l} \mathbf{j}' dV', \quad (29.3)$$

каждая компонента которого является вектором.

Вычислим низшие мультипольные моменты $\mathcal{M}_{(0)}$ и $\mathcal{M}_{(1)}$ [которыми на основании оценки типа (19.18) можно ограничиться при определении \mathbf{A} , если $r \gg a$]. Для этого удобно воспользоваться соотношением (28.2) и условием ограниченности системы токов, согласно которому $\mathbf{j} = 0$ при $r > a$. Умножим (28.2) на произвольную функцию $f(\mathbf{r})$ и проинтегрируем по области V , применив теорему Гаусса — Остроградского:

$$\int_V f(\mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{j} dV = - \int_V (\mathbf{j} \nabla) f dV + \oint_{S \rightarrow \infty} f(\mathbf{r}) (\mathbf{n} \mathbf{j}) dS = 0. \quad (29.4)$$

Но поверхностный интеграл в (29.4) исчезает, так как $\mathbf{j} = 0$ при $r > a$. В результате получается тождество

$$\int_V (\mathbf{j} \nabla) f(\mathbf{r}) dV = 0. \quad (29.5)$$

Подставляя $f(\mathbf{r}) = x^i$ в (29.5), находим

$$\int_V (\mathbf{j} \nabla) x^i dV = \int_V j^i dV = 0.$$

Иначе говоря,

$$\mathcal{M}_{(0)} = \int_V \mathbf{j} dV = 0. \quad (29.6)$$

Далее, выбирая в (29.5) $f(\mathbf{r}) = r x^k$, имеем

$$\int_V (\mathbf{j} \nabla) r x^k dV = \int_V (\mathbf{j} x^k + r \mathbf{j}^k) dV = 0. \quad (29.7)$$

С помощью (29.7) первый член мультипольного разложения (29.2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= -\frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}' (\mathbf{r}' \nabla) \frac{1}{r} dV' = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{r}' (\mathbf{j} \nabla) \frac{1}{r} dV' = \\ &= \frac{1}{2c} \int_V [-\mathbf{j}' (\mathbf{r}' \nabla) + \mathbf{r}' (\mathbf{j}' \nabla)] \frac{1}{r} dV' = -\frac{1}{2c} \int_V [[\mathbf{r}' \mathbf{j}'] \nabla] \frac{1}{r} dV', \end{aligned}$$

или, если ввести магнитный момент системы токов

$$\mathbf{m} \equiv \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \mathbf{j}] dV, \quad (29.8)$$

к виду

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{m} \mathbf{r}] / r^3. \quad (29.9)$$

Используя тождество (справедливое при $r > 0$)

$$\text{rot} \frac{[\mathbf{m} \mathbf{r}]}{r^3} = -\nabla \frac{(\mathbf{m} \mathbf{r})}{r^3}, \quad (29.10)$$

доказанное при решении задачи 1.5, индукцию, соответствующую векторному потенциалу (29.9), можно записать по аналогии с электростатикой:

$$\mathbf{B}_1 = -\nabla \frac{(\mathbf{m} \mathbf{r})}{r^3} \equiv -\nabla \psi_1, \quad (29.11)$$

т. е. введя *магнитный скалярный потенциал* ψ_1 , отвечающий магнитному диполю с моментом \mathbf{m} :

$$\psi_1 = (\mathbf{m} \mathbf{r}) / r^3. \quad (29.12)$$

Нетрудно видеть, что, повторяя процедуру построения электрических мультиполей и взяв за исходное векторный потенциал (29.9) магнитного диполя, можно прийти к магнитостатическому аналогу формулы (19.9):

$$\mathbf{A}_l = (-1)^{l-1} \left[\prod_{i=1}^{l-1} (\mathbf{a}_i \nabla) \right] \frac{[\mathbf{m} \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (29.13)$$

В качестве конкретного случая системы ограниченных токов рассмотрим замкнутый линейный ток силой I , текущий по некоторому контуру C . Поскольку для линейного тока $\mathbf{j} dV = i d\mathbf{l}$ и сила тока I постоянна в любом сечении контура C в соответствии с (28.2), то формула (29.1) в этом случае примет вид

$$\mathbf{A} = \frac{I}{c} \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{R}. \quad (29.14)$$

Применяя теорему Стокса (2П.8а), приводим (29.14) к интегралу по правоориентированной поверхности S , натянутой на контур C :

$$\mathbf{A} = \frac{I}{c} \int_S [\mathbf{n}' \nabla'] \frac{1}{R} dS' = \frac{I}{c} \int_S \frac{[\mathbf{n}' \mathbf{R}]}{R^3} dS'. \quad (29.15)$$

Очевидно, что (29.15) можно представить как вектор-потенциал двойного магнитного слоя (*магнитного листка*):

$$\mathbf{A} = \int_S \frac{[d\mathbf{m}' \mathbf{R}]}{R^3}, \quad (29.16)$$

где элементарный магнитный момент равен

$$d\mathbf{m}' = I \mathbf{n}' dS', \quad (29.17)$$

что соответствует мощности двойного магнитного слоя $\tau_m = I/c$.

Нетрудно видеть, что если ввести скалярный магнитный потенциал ψ , отвечающий (29.15), то он будет иметь такой же вид, как и для двойного электрического слоя:

$$\psi = \int_S \frac{(d\mathbf{m}' \mathbf{R})}{R^3} = \frac{I}{c} \Omega, \quad (29.18)$$

где Ω — телесный угол, под которым виден контур C из точки наблюдения (см. задачу 1.5). Очевидно, что потенциал ψ не является однозначной функцией точки — при обходе вокруг контура с током он испытывает приращение, равное

$$[\psi] = 4\pi \tau_m = 4\pi I/c. \quad (29.19)$$

Но если в случае двойного электрического слоя скачок потенциала на его поверхности обусловлен тем, что внутри бесконечно тонкого двойного слоя напряженность электрического поля оказывается бесконечно большой [см. (20.6)], то отмеченная неоднозначность магнитного скалярного потенциала обусловлена двусвязностью области определения функции ψ (все пространство, за исключением контура с током). Эту область можно сделать односвязной, проведя разрез по некоторой поверхности S , натянутой на контур, и считая, что на ней потенциал ψ испытывает скачок (29.19). Но поскольку поверхность S можно произвольно сместить так, чтобы точка наблюдения не попала на нее, то всегда оказывается справедливым преобразование (29.15) и представление скалярного магнитного потенциала в виде (29.18).

Таким образом, мы пришли к выводу, что *магнитное поле замкнутого линейного тока силой I тождественно полю магнитного листка мощностью $\tau_m = I/c$, натянутого на контур тока (теорема эквивалентности Ампера)*. В пользу этого утверждения говорит и результат задачи 8.1, согласно которому магнитные моменты замкнутого линейного контура с током и магнитного листка оказываются одинаковыми и имеют вид

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \oint_C [\mathbf{r} d\mathbf{l}] = \frac{I}{c} \int_S \mathbf{n} dS. \quad (29.20)$$

Задача 29.1. Найти индукцию магнитного поля линейного кругового тока. Результат выразить через полные эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \beta}}; \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} d\beta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \beta}. \quad (29.21)$$

Найти асимптотическое выражение для поля вблизи контура с током и вдали от него.

§ 30. ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ

В постоянном магните отсутствует ток проводимости, однако в каждой его точке существуют намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ и обусловленный ею ток намагничения с плотностью $\mathbf{j}_M = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$. Поэтому вектор-потенциал, создаваемый этим током, может быть определен как

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\operatorname{rot}' \mathbf{M}'}{R} dV'. \quad (30.1)$$

Однако использование этой формулы представляет значительные неудобства, вызванные необходимостью учета поверхностных токов намагничения, возникающих на границах раздела двух магнетиков. В связи с этим (см. § 21) преобразуем формулу (30.1), воспользовавшись тождеством

$$\operatorname{rot}' \left(\frac{\mathbf{M}'}{R} \right) = \frac{1}{R} \operatorname{rot}' \mathbf{M}' - [\mathbf{M}' \mathbf{R}] \frac{1}{R^3}. \quad (30.2)$$

С учетом соотношения (21.3) можно обосновать применимость в данном случае теоремы Остроградского (2П.5в), по которой

$$\int_V \operatorname{rot}' \left(\frac{\mathbf{M}'}{R} \right) dV' = \oint_S \left[\frac{\mathbf{n}' \mathbf{M}'}{R} \right] dS' = 0, \quad (30.3)$$

поскольку вне магнетика $\mathbf{M} = 0$. Поэтому, интегрируя тождество (30.2) по объему магнетика V и используя (30.3), имеем

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{[\mathbf{M}' \mathbf{R}]}{R^3} dV', \quad (30.4)$$

что совпадает в соответствии с (29.9) с векторным потенциалом распределенного магнитного момента с плотностью \mathbf{M}

Формулу (30.4) иногда записывают и в иной форме, полагая

$$\mathbf{A} = \int_V \left[\nabla \frac{1}{R} \mathbf{M}' \right] dV' \equiv \operatorname{rot} \mathbf{Z}, \quad (30.5)$$

где введен вспомогательный вектор

$$\mathbf{Z} = \int_V \frac{\mathbf{M}'}{R} dV', \quad (30.6)$$

называемый *магнитным вектором Герца*. Согласно (30.6), вектор \mathbf{Z} , очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{Z} = -4\pi \mathbf{M}, \quad (30.7)$$

с учетом которого магнитная индукция может быть представлена в виде

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot rot } \mathbf{Z} = \nabla \text{div } \mathbf{Z} - \Delta \mathbf{Z} = \nabla \text{div } \mathbf{Z} + 4\pi \mathbf{M}. \quad (30.8)$$

Отсюда следует, что напряженность магнитного поля равна

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} = \nabla \text{div } \mathbf{Z}. \quad (30.9)$$

С другой стороны, для того чтобы удовлетворить уравнению $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, справедливому при отсутствии токов проводимости, можно ввести скалярный магнитный потенциал ψ , положив

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi. \quad (30.10)$$

Сравнение с (30.9) показывает, что

$$\psi = -\text{div } \mathbf{Z}, \quad (30.11)$$

т. е. знание магнитного вектора Герца \mathbf{Z} позволяет вычислить как векторный, так и скалярный потенциалы магнитного поля.

В качестве иллюстрации отмеченных выше особенностей поля постоянных магнитов рассмотрим конкретный случай цилиндрического магнита, однородно намагниченного вдоль оси. Поскольку намагниченность \mathbf{M} внутри магнита постоянна, а вне его исчезает, то ток намагничения с плотностью $\mathbf{j}_M = c \text{rot } \mathbf{M}$ течет только по поверхности. Поверхностную плотность тока намагничения находим так же, как в задаче 21.2, используя уравнение $\mathbf{j}_M = c \text{rot } \mathbf{M}$:

$$\mathbf{i}_M = c [\mathbf{n} [\mathbf{M}]]. \quad (30.12)$$

Таким образом, цилиндрический магнит эквивалентен соленоиду с током силой $i_M = cM$ на 1 см (рис. 30.1).

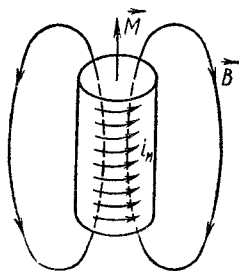


Рис. 30.1

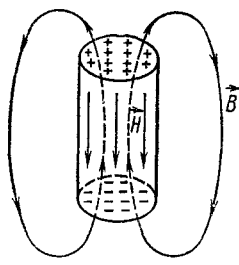


Рис. 30.2

В то же время (см. § 29) поле линейных токов соленоида совпадает с потенциальным полем магнитных листов, если точка наблюдения не попадает на их поверхность. Следовательно, для расчета индукции \mathbf{B} вне магнита можно заменить его стопкой магнитных листов. Вследствие постоянства \mathbf{M} внутренние магнитные заряды компенсируют друг друга и вся стопка оказывается эквивалентной поверхностным магнитным зарядам, расположенным на торцах ци-

ликдра (рис. 30.2). При этом плотность связанных магнитных зарядов может быть введена по аналогии с (7.1) и (21.14):

$$\rho_M = -\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{H}, \quad \eta_M = -(\mathbf{n} [\mathbf{M}]), \quad (30.13)$$

свободных же магнитных зарядов не существует, так как $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.

На практике расчет поля постоянных магнитов представляет значительные трудности, поскольку зависимость $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ зачастую описывается сложной нелинейной функцией, значения которой к тому же определяются способом достижения заданного поля \mathbf{H} (*гистерезис*). Вот почему иногда бывает полезным *идеализированное приближение*, когда полагают

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}_0, \quad (30.14)$$

где $\mathbf{M}_0(\mathbf{r})$ — известная функция, задающая постоянное (остаточное) намагничение образца. Очевидно, что вектор $(\mu - 1) \mathbf{H} / (4\pi)$ представляет собой индуцированное намагничение. Если воспользоваться методом скалярного магнитного потенциала, положив $\mathbf{H} = -\nabla\psi$, то уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ дает

$$\operatorname{div} (\mu \nabla\psi) = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}_0. \quad (30.15)$$

Таким образом, задача оказывается аналогичной соответствующей задаче электростатики. При этом граничные условия на поверхности раздела двух магнетиков имеют такой вид:

$$[\psi] = 0, \quad (\mathbf{n} [\mu \nabla\psi]) = 4\pi (\mathbf{n} [\mathbf{M}_0]). \quad (30.16)$$

Задача 30.1. *Магнит представляет собой шар радиуса a с постоянной намагниченностью \mathbf{M}_0 и проницаемостью μ . Найти индукцию магнитного поля вне и внутри магнита.*

Задача 30.2. *Маленький магнитик с моментом \mathbf{m} находится на расстоянии a от стенки из мягкого железа ($\mu \gg 1$). Найти индукцию магнитного поля.*

Нетрудно видеть, что задачи на определение индукции магнитного поля в магнетиках при наличии однородного внешнего поля \mathbf{H}_0 аналогичны соответствующим задачам электростатики и их решение поэтому достигается заменой $\epsilon \rightarrow \mu$, $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ в известных решениях электростатических задач.

§ 31. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Поведение сверхпроводников в магнитном поле обладает некоторыми особенностями, изучению которых мы и посвятим данный параграф. Как известно, впервые сверхпроводимость была обнаружена Г. Камерлинг-Оннесом в 1911 г. при исследовании электрических свойств ртути в области низких температур. Оказалось, что при температуре $T_{кр} = 4,19$ К сопротивление ртути становится неощутимо малым, причем спад сопротивления очень резок (рис. 31.1). Впоследствии сверхпроводимость была обнаружена у многих металлов и сплавов (белое олово, цинк, алюминий, ... — всего более 300).

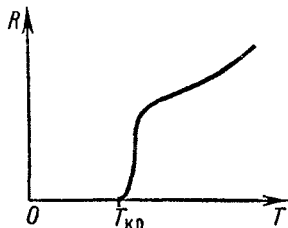


Рис. 31.1

Для того чтобы проверить, действительно ли сопротивление сверхпроводников строго обращается в нуль при $T < T_{кр}$, английский физик *Коллинз* провел следующий опыт. При температуре, превышающей критическую ($T_1 > T_{кр}$), он помещал оловянное кольцо в магнитное поле и охлаждал его до некоторой температуры $T_2 < T_{кр}$, при которой олово становилось сверхпроводником. После этого магнитное поле выключалось и время от времени проводилось измерение наведенного в кольце тока. Это измерение осуществлялось косвенно: к кольцу подносилась небольшая обмотка, и по силе тока, наведенного в ней, можно было судить о силе тока в самом кольце. Никаких изменений силы тока в кольце не было обнаружено в течение 2,5 лет. Поэтому для оценки сопротивления кольца *Коллинз* взял за основу предел точности измерительной аппаратуры и нашел, что удельная проводимость сверхпроводящего кольца не меньше

$$\sigma \approx 3 \cdot 10^{22} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1} \approx 3 \cdot 10^{34} \text{ с}^{-1}, \quad (31.1)$$

т. е. примерно в 10^{16} раз выше, чем у меди. Таким образом, можно с большой уверенностью сказать, что сопротивление сверхпроводников действительно обращается в нуль при температуре, меньшей критической.

Вскоре выяснилось, что на критическую температуру $T_{кр}$, которая обычно меньше 20 К, сильно влияет внешнее магнитное поле. Если для определенности брать образцы цилиндрической формы и помещать их в магнитное поле, параллельное оси, то при заданной температуре $T < T_{кр}$ найдется такое поле $H_{кр}(T)$, при котором сверхпроводимость пропадает. Для большинства сверхпроводников зависимость $H_{кр}(T)$ неплохо аппроксимируется параболой (рис. 31.2):

$$H_{кр}(T) = H_{кр}(0) (1 - T^2/T_{кр}^2). \quad (31.2)$$

Таким образом, сверхпроводимость наблюдается только при температуре и напряженности внешнего магнитного поля, не превышающих некоторых критических значений. Обычно напряженность критического поля невелика и составляет сотни эрстед (за исключением некоторых сплавов — сверхпроводников второго рода, примером которых может служить сплав ниобия с оловом Nb_3Sn , имеющий $H_{кр} = 2 \cdot 10^5$ Э и $T_{кр} = 18,1$ К).

В первые годы изучения сверхпроводимости многие исследователи склонны были рассматривать сверхпроводники как идеальные проводники, т. е. проводники с бесконечной проводимостью ($\sigma = \infty$). Однако в 1933 г. немецкие физики *В. Мейсснер* и

Р. Оксенфельд открыли явление, которое опровергало эту гипотезу: ими было доказано, что *сверхпроводники являются идеальными диамагнетиками*. Это означает, что сверхпроводники полностью выталкивают из себя магнитное поле, т. е. внутри них всегда $\mathbf{B} = 0$ (или формально $\mu = 0$).

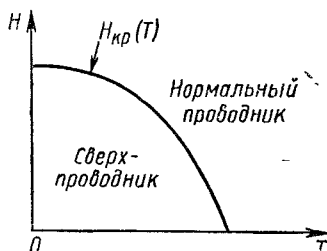


Рис. 31.2

В идеальный же проводник ($\sigma = \infty$) магнитное поле проникать может. Чтобы понять, в чем здесь дело, рассмотрим подробнее опыт Мейсснера—Оксенфельда. Они выбрали сферический образец из сверхпроводника и при $T > T_{кр}$ поместили его в магнитное поле. При этом поле полностью проникало в образец, поскольку он находился в нормальном (несверхпроводящем) состоянии и имел $\mu \approx 1$. Затем температура была понижена до критической, так что образец стал сверхпроводящим. Если бы это был идеальный проводник, то он сохранил бы захваченный магнитный поток, поскольку при $\sigma = \infty$ и конечной плотности тока \mathbf{j} было бы $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma = 0$ и, по закону электромагнитной индукции Фарадея,

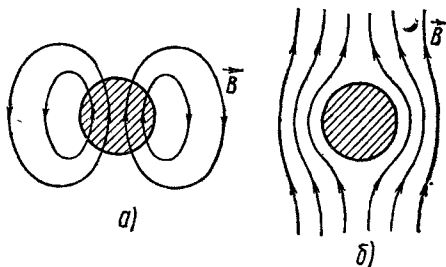


Рис. 31.3

$$-\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E} = \oint (\mathbf{E} d\mathbf{l}) = 0. \quad (31.3)$$

Поэтому при выключении внешнего магнитного поля наведенные в образце токи создали бы в точности такой же магнитный поток, как прежний (рис. 31.3, а). Однако измерения конфигурации линий индукции вблизи образца при включенном внешнем поле H_0 показали (рис. 31.3, б), что поле в образец не проникает. В то же время при выключенном внешнем поле никакого собственного магнитного поля у образца не оказалось.

Задача 31.1. Убедиться, что отсутствие сопротивления у сверхпроводников является следствием эффекта Мейсснера.

Более детальные исследования показали, что магнитное поле **В** все же проникает в сверхпроводник на небольшую глубину $\lambda \approx 10^{-5}$ см, затухая в нем по закону $\exp(-x/\lambda)$. Однако если ограничиться макроскопическим описанием массивных образцов, размеры которых значительно превышают глубину проникновения магнитного поля в образец, то можно считать, что внутри сверхпроводников $\mathbf{B} = 0$ (и точно так же $\mathbf{H} = \mathbf{M} = 0$). Поэтому из основных уравнений магнитостатики

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}/c \quad (31.4)$$

следует, что сверхпроводящие токи текут лишь в тонком поверхностном слое образца. При этом поверхностная плотность тока может быть найдена из граничных условий (12.3) и (12.6), согласно которым

$$(\mathbf{nB}) = 0, \quad \mathbf{i} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{nH}]. \quad (31.5)$$

Это означает, что вблизи сверхпроводника вектор индукции **В** направлен касательно к его поверхности, а касательная составляющая **Н** определяет силу и направление поверхностного тока.

Поскольку в сверхпроводниках $\text{rot } \mathbf{H} \neq 0$, то удобно воспользоваться методом векторного потенциала, а не скалярного. Полагая $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, находим, что внутри сверхпроводников $\text{rot } \mathbf{A} = 0$, т. е.

$$\mathbf{A} = \nabla \chi. \quad (31.6)$$

Если сверхпроводящая область V односвязна, то скалярная функция χ однозначна. Это видно из того, что в этом случае на любой замкнутый контур C , проведенный в V , всегда можно натянуть поверхность S , целиком лежащую в V . Но тогда на S будет $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ и приращение χ при обходе контура C , согласно теореме Стокса, оказывается равным

$$[\chi] = \oint_C (\mathbf{A} d\mathbf{l}) = \int_S (\mathbf{n} \text{rot } \mathbf{A}) dS = 0. \quad (31.7)$$

Учитывая однозначность χ и то, что вектор-потенциал \mathbf{A} задан с точностью до градиента, можно считать, что внутри односвязного сверхпроводника

$$\mathbf{A} = \text{const}. \quad (31.8)$$

Если же область V многосвязна (например, кольцо), то не на всякий контур C можно натянуть поверхность, целиком лежащую в V . Поэтому, используя (31.7), убеждаемся, что функция χ оказывается неоднозначной. В этом случае необходимо пользоваться представлением (31.6), а не (31.8), т. е. избавиться от $\nabla \chi$ с помощью калибровочного преобразования (28.6) невозможно.

Уравнение (31.8) наводит на мысль, что роль сверхпроводников в магнитостатике аналогична роли проводников в электростатике. Однако тот факт, что в магнитостатике сверхпроводников приходится пользоваться векторным, а не скалярным потенциалом, приводит к некоторым существенным отличиям. Особенно наглядно это проявляется в задачах с плоской сверхпроводящей границей, в которых работает метод отражений. В качестве примера рассмотрим классический опыт *В. К. Аркадьева* с «парящим» магнитом.

Если небольшой магнитик уронить на поверхность сверхпроводника, то он не долетит до нее, оттолкнется вверх и, немного покачавшись, застынет на некотором расстоянии от поверхности. Причина такого поведения магнитика очень проста: при падении магнита его поле наводит в сверхпроводнике вихревые токи, а магнитное поле этих токов препятствует, по закону Ленца, проникновению внешнего магнитного поля в сверхпроводник. Поле этих токов и выталкивает магнит вверх.

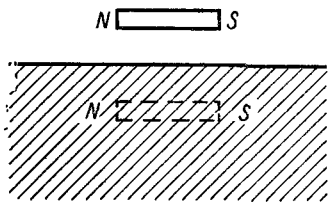


Рис. 31.4

То же самое получается и при использовании метода отражений. Чтобы выполнить граничное условие $(\mathbf{nB}) = 0$ или (31.8), необходимо, чтобы отраженные магнитные заряды (рис. 31.4) имели те же знаки,

что и отражаемые (заметьте, что в методе скалярного потенциала заряды отражаются в свои антиподы). Нетрудно видеть, что при соответствующем отражении токов знак их изменяется: $\mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{j}$.

Задача 31.2. Найти вектор-потенциал магнитного поля небольшого магнита с моментом \mathbf{m} , расположенного на расстоянии a от сверхпроводящей стенки. Сравнить с результатом задачи 30.2.

Задача 31.3. Два сверхпроводящих провода радиуса a расположены на расстоянии $2l$ друг от друга в среде с проницаемостью μ . По проводам текут равные и противоположно направленные токи силой I . Найти вектор-потенциал в окружающем пространстве.

Задача 31.4. Сверхпроводящий шар радиуса a помещен в однородное внешнее поле \mathbf{H}_0 . Найти индукцию магнитного поля вне шара и плотность поверхностных токов на нем. То же, в случае цилиндра в поперечном поле \mathbf{H}_0 .

Задача 31.5. Показать, что в односвязном сверхпроводнике при отсутствии внешних магнитных полей не могут протекать стационарные поверхностные токи.

Рассмотрим влияние формы сверхпроводящего образца на его поведение во внешнем магнитном поле. Если, скажем, взять сферический образец, то из результатов задачи 31.4 следует, что во внешнем поле \mathbf{H}_0 , удовлетворяющем условию

$$2/3 H_{кр} \leq H_0 \leq H_{кр}, \quad (31.9)$$

поле на экваторе будет превышать критическое $H_{кр}$. Но тогда в экваториальной области сверхпроводник должен перейти в нормальное состояние (рис. 31.5, заштрихованная область), причем на границе нормальной и сверхпроводящей областей внутри шара поле H , очевидно, равно $H_{кр}$. Но это обстоятельство тотчас же приводит к противоречию. Действительно, в области V , включающей в себя все пространство вне шара и нормальную зону образца, очевидно, $\text{rot } \mathbf{V} = 0$. Поэтому с учетом уравнения $\text{div } \mathbf{V} = 0$ имеем

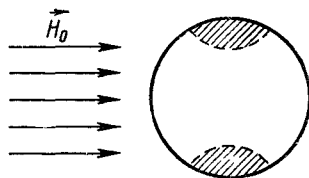


Рис. 31.5

$$\Delta \mathbf{V} = \nabla \text{div } \mathbf{V} - \text{rot rot } \mathbf{V} = 0, \quad (31.10)$$

т. е. \mathbf{V} является векторной гармонической функцией. В таком случае, согласно принципу максимума*, она должна принимать свои экстремальные значения на границах области V . В соответствии с результатами задачи 31.4 на границах V имеем:

$$\max B = H_c, \quad \min B = 0. \quad (31.11)$$

Но тогда всюду в области V справедливо неравенство $0 \leq B \leq H_{кр}$, из которого следует, что заштрихованная область должна быть не нормальной, а сверхпроводящей.

Чтобы разрешить указанное противоречие, Р. Пайерлс и Ф. Лондон в 1936 г. высказали гипотезу, согласно которой в интервале (31.9) образец переходит в особое состояние, названное ими *промежуточным*. В этом состоянии весь образец распадается на очень мелкие чередующиеся нормальные и сверхпроводящие области, причем в нормальных областях $B = H_{кр}$, а в сверхпроводящих $B = 0$. В 1937 г. Л. Д. Ландау сделал дальнейшее предположение о ламинарной структуре промежуточного состояния. Согласно Ландау, должны существовать отдельные нити в нормальном состоянии, пронизывающие толщу сверхпроводника параллельно друг другу и выходящие на поверхность образца. Вскоре такая структура действительно была обнаружена на опыте.

* См. приложение.

§ 32. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

Рассмотрим ограниченную систему токов, погруженную в магнетик с проницаемостью $\mu(\mathbf{r})$. Выделим некоторую область V_0 с границей S , включающую нашу систему токов. Тогда [см. (14.7)] энергия магнитного поля, содержащаяся в V_0 , равна

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{H}\mathbf{H}) dV. \quad (32.1)$$

Полагая $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ и применяя теорему Гаусса — Остроградского, с учетом тождества $\text{div} [\mathbf{H}\mathbf{A}] = (\mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{H}) - (\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{A})$ находим

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{H}) dV - \frac{1}{8\pi} \oint_S (\mathbf{n} [\mathbf{H}\mathbf{A}]) dS. \quad (32.2)$$

Для ограниченной системы токов, согласно (29.9), асимптотическое поведение вектор-потенциала \mathbf{A} при $r \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\mathbf{A} = [\mathbf{m}\mathbf{r}]/r^3,$$

где \mathbf{m} — полный магнитный момент системы. Отсюда нетрудно получить следующую оценку для поверхностного интеграла в (32.2), приняв, что поверхность S представляет собой сферу как угодно большого радиуса R :

$$\frac{1}{8\pi} \left| \oint_S (\mathbf{n} [\mathbf{H}\mathbf{A}]) dS \right| = \frac{m^2}{3\mu(R) R^3} + O\left(\frac{1}{R^4}\right). \quad (32.3)$$

Таким образом, при $R \rightarrow \infty$ поверхностный интеграл в (32.2) исчезает и выражение для энергии магнитного поля с учетом уравнения $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c$ принимает вид

$$W_m = \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j}\mathbf{A}) dV, \quad (32.4)$$

где V — область, занятая токами проводимости.

Замечая, что поле \mathbf{B} создается как токами проводимости, так и токами намагничения, можно записать следующее уравнение для векторного потенциала \mathbf{A} :

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_M).$$

Решение его [см. (28.8)] имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}' + \mathbf{j}'_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (32.5)$$

Подставляя (32.5) в (32.4), получаем следующее выражение для энергии магнитного поля постоянных токов:

$$W_m = \frac{1}{2c^2} \int_V \int_{V'} \frac{\mathbf{j} \cdot (\mathbf{j}' + \mathbf{j}'_M)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV', \quad (32.6)$$

где V' — область, занятая токами проводимости и намагничения.

Для однородного магнетика с постоянной проницаемостью μ вместо (32.5), очевидно, имеем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}' dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (32.7)$$

и поэтому (32.6) упрощается:

$$W_m = \frac{\mu}{2c^2} \int_V \int_V \frac{(\mathbf{j}\mathbf{j}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV dV'. \quad (32.8)$$

Интересно отметить далеко идущую аналогию между магнито- и электростатикой, которая, в частности, проявляется в сходстве формул (32.6) и (23.5), а также (32.8) и (23.6). В обоих случаях энергия взаимодействия элементарных токов или зарядов изменяется с расстоянием по закону $1/R$.

Обычно токи текут по проводникам, занимающим некоторые области V_1, V_2, \dots . В то же время из условия стационарности токов $\text{div } \mathbf{j} = 0$ вытекает, что линии тока являются замкнутыми. Выделяя области V_i , отвечающие полным токам силой I_i , очевидно, можно положить $\mathbf{j}_i \equiv I_i \mathbf{f}_i(\mathbf{r})$ и переписать (32.8) в виде

$$W_m = \frac{1}{2c^2} \sum_{i, k} L_{ik} I_i I_k, \quad (32.9)$$

где введены коэффициенты

$$L_{ik} = \mu \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{(\mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \mathbf{f}_k(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV dV', \quad (32.10)$$

называемые *взаимной индуктивностью* при $i \neq k$ и *индуктивностью* при $i = k$. Для квазилинейных проводников подстановкой $\mathbf{j}_i dV = I_i d\mathbf{l}$ каждый объемный интеграл в (32.10) сводится к линейному:

$$L_{ik} = \mu \oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{(d\mathbf{l}_i d\mathbf{l}_k)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}. \quad (32.11)$$

Однако такое упрощение допустимо только при вычислении взаимной индуктивности L_{ik} непересекающихся квазилинейных проводников, когда $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_k$. В противном случае необходимо пользоваться общим выражением (32.10).

Задача 32.1. Полагая в (32.10) $\mathbf{f}_i = \text{rot } \mathbf{g}_i$, где $\text{div } \mathbf{g}_j = 0$, показать, что для L_{ik} справедливо представление

$$L_{ik} = 4\pi\mu \int_V (\mathbf{g}_i \mathbf{g}_k) dV. \quad (32.12)$$

Для квазилинейных проводников смысл коэффициентов L_{ik} становится особенно понятным. В самом деле, в этом случае, вводя магнитный поток Φ_i через контур C_i i -го проводника, находим

$$W_m = \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j}\mathbf{A}) dV = \frac{1}{2c} \sum_i \oint_{C_i} I_i (\mathbf{A} d\mathbf{l}) \equiv \frac{1}{2c} \sum_i I_i \Phi_i. \quad (32.13)$$

Сравнение с формулой (32.9) показывает, что

$$\Phi_i = \frac{1}{c} \sum_k L_{ik} I_k \equiv \sum_k \Phi_{ik}, \quad (32.14)$$

где $\Phi_{ik} = L_{ik} I_k / c$ — магнитный поток, создаваемый током силой I_k и пронизывающий контур S_i . Таким образом, для квазилинейных проводников коэффициенты L_{ik} можно определять либо из энергии [см. (32.9)], либо из магнитного потока [см. (32.14)].

Задача 32.2. Рассчитать индуктивность L тороидальной катушки, имеющей N витков. Максимальный и минимальный радиусы тороида равны соответственно b и a .

Посмотрим теперь, как изменится выражение для энергии магнитного поля в присутствии сверхпроводников. Если сверхпроводящая область V односвязна, то внутри нее [см. (31.8)] $\mathbf{A} = \text{const}$ и поэтому ее вклад в энергию равен

$$W_m = \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \mathbf{A}) dV = \frac{1}{2c} \mathbf{A} \cdot \int_V \mathbf{j} dV = 0$$

на основании (29.6). Это означает, что односвязный сверхпроводник не может быть самостоятельным источником магнитного поля в полном соответствии с задачей 31.5.

Допустим теперь, что сверхпроводящая область V многосвязна. Ясно, что, проведя достаточное число разрезов S_i , область V всегда можно сделать односвязной. В этом случае, полагая [см. (31.6)] $\mathbf{A} = \nabla \chi$, имеем

$$W_m = \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \nabla \chi) dV = \sum_i \frac{1}{2c} \int_{S_i} (\mathbf{n} \mathbf{j}) [\chi]_i dS = \sum_i \frac{1}{2c} I_i [\chi]_i, \quad (32.15)$$

где $[\chi]_i$ — скачок χ на разрезе S_i , I_i — сила тока через разрез S_i . Сравнение (32.15) с (32.13) показывает, что в квазилинейном случае скачок $[\chi]_i$ соответствует магнитному потоку Φ_i .

Задача 32.3. Вычислить индуктивность L тонкого сверхпроводящего кольца радиуса a . Радиус сечения провода $r_0 \ll a$.

Задача 32.4. Тонкое сверхпроводящее кольцо находится в магнитном поле \mathbf{H}_0 , перпендикулярном его плоскости. Найти зависимость силы тока I в кольце от напряженности H_0 , меняющейся от нуля до критического значения $H_{кр}$ и затем вновь спадающей до нуля.

Найдем еще выражение для энергии магнитного поля в присутствии постоянных магнитов. В этом случае уже нельзя полагать $\omega_m = (\mathbf{B} \mathbf{H}) / (8\pi)$, поскольку $\mathbf{B} \neq \mu \mathbf{H}$. Рассматривая идеализированное приближение (30.14), для изменения плотности энергии магнитного поля, согласно (14.5), получим

$$\delta \omega_m = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \delta \mathbf{B}) = \frac{\mu}{4\pi} (\mathbf{H} \delta \mathbf{H}) = \delta \left(\frac{\mu}{8\pi} H^2 \right).$$

Таким образом, можно считать, что в случае идеализированных постоянных магнитов

$$\omega_m = \frac{\mu}{8\pi} H^2 = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B} \mathbf{H}) - \frac{1}{2} (\mathbf{M}_0 \mathbf{H}) \quad (32.16)$$

и полная энергия магнитного поля равна

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{B}\mathbf{H}) dV - \frac{1}{2} \int (\mathbf{M}_0\mathbf{H}) dV. \quad (32.17)$$

Первый интеграл в (32.17), как и (32.1), сводится к (32.4) и исчезает, если $\mathbf{j} = 0$, т. е. если поле создается лишь самим магнитом. Таким образом, полная энергия магнитного поля постоянных магнитов равна

$$W_m = -\frac{1}{2} \int (\mathbf{M}_0\mathbf{H}) dV. \quad (32.18)$$

Нетрудно видеть, что $W_m > 0$, так как \mathbf{M}_0 и \mathbf{H} антипараллельны.

Наконец, для ферромагнетиков, когда гистерезисные явления не позволяют ввести однозначную функцию $\mathbf{B}(\mathbf{H})$, нельзя определить энергию магнитного поля. В этом случае можно лишь вычислять ее изменения. Замечая, что

$$4\pi\delta\omega_m = (\mathbf{H}\delta\mathbf{B}) = \delta(\mathbf{H}\mathbf{B}) - (\mathbf{B}\delta\mathbf{H}),$$

при изменении напряженности поля от \mathbf{H}_1 до \mathbf{H}_2 получим следующее изменение энергии:

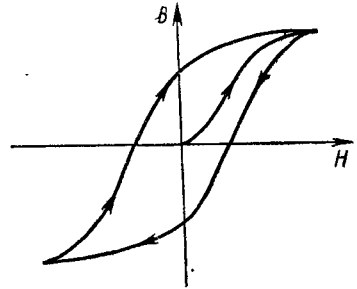


Рис. 32.1

$$W_{m2} - W_{m1} = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[(\mathbf{B}_2\mathbf{H}_2) - (\mathbf{B}_1\mathbf{H}_1) - \int_{\mathbf{H}_1}^{\mathbf{H}_2} (\mathbf{B}\delta\mathbf{H}) \right] dV. \quad (32.19)$$

При возвращении в ту же точку, т. е. при обходе гистерезисной петли (рис. 32.1), в 1 см^3 ферромагнетика, согласно второму началу термодинамики, должно выделяться количество теплоты

$$\oint \delta\omega_m = -\frac{1}{4\pi} \oint (\mathbf{B}\delta\mathbf{H}) > 0. \quad (32.20)$$

Это происходит потому, что при перемагничивании домены поворачиваются, что сопровождается разрывом сцепления между ними, т. е. работой против сил «трения».

Задача 32.5. Показать, что если в магнитное поле, созданное заданными постоянными токами, внести магнетик с проницаемостью, отличающейся на $\delta\mu$ от проницаемости окружающей среды, то изменение энергии поля равно

$$\delta W_m = \frac{1}{8\pi} \int H^2 \delta\mu dV. \quad (32.21)$$

Показать также, что при внесении сверхпроводника энергия поля уменьшается.

§ 33. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА СВЕРХПРОВОДНИКИ И МАГНЕТИКИ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Начнем с вычисления силы, действующей на сверхпроводник. Так как в объеме сверхпроводника $\mathbf{j} = 0$, то исчезает и объемная плотность силы Лоренца $\mathbf{f}_m = [\mathbf{j}\mathbf{B}]/c = 0$, тем более что внутри сверхпроводника $\mathbf{B} = 0$. Поэтому ясно, что на сверхпроводник могут действовать лишь поверхностные силы. Очевидно, что поверхностная плотность силы Лоренца равна

$$\mathbf{t} = [i\mathbf{B}']/c, \quad (33.1)$$

где $i = c[\mathbf{nH}]/(4\pi)$ — поверхностная плотность тока, \mathbf{B}' — индукция действующего магнитного поля. Поскольку внутри сверхпроводника $\mathbf{B} = 0$, то, повторяя рассуждения задачи 3.4, нетрудно убедиться, что $\mathbf{B}' = \mathbf{B}/2$, где \mathbf{B} — индукция магнитного поля у поверхности сверхпроводника, удовлетворяющая граничному условию $(\mathbf{nB}) = 0$. Таким образом,

$$\mathbf{t} = [i\mathbf{B}]/(2c) = -\mathbf{n}(\mathbf{BH})/(8\pi) \equiv -\mathbf{n}w_m, \quad (33.2)$$

откуда видно, что сверхпроводник в магнитном поле испытывает поверхностное давление, численность w_m равно плотности энергии магнитного поля (*магнитное давление*). Причину этого давления, очевидно, следует искать во взаимодействии поверхностных токов.

Для того чтобы найти силы, действующие в магнитном поле на магнетик, характеризующийся проницаемостью $\mu(\mathbf{r})$, воспользуемся соотношением (32.21). Как и в § 27, рассмотрим бесконечно малое смещение магнетика на вектор $\delta\mathbf{a}(\mathbf{r})$ в некоторой малой области V . Тогда из (32.21) по аналогии с (27.11) получим

$$\delta W_m = -\frac{1}{8\pi} \int_V H^2 \left[(\delta\mathbf{a}\nabla\mu) + \tau \frac{\partial\mu}{\partial\tau} \operatorname{div} \delta\mathbf{a} \right] dV. \quad (33.3)$$

Однако, как было выяснено в задаче 14.1, энергия системы зарядов может измениться лишь за счет работы δA_e вихревого электрического поля, возникающего при смещении магнетика. Эта работа равна и противоположна по знаку работе δA_m магнитного поля над молекулярными токами. В итоге, приравнивая убыль энергии магнитного поля работе вихревого электрического поля, имеем

$$\delta W_m = -\delta A_e = \delta A_m. \quad (33.4)$$

Вводя плотность сил $\mathbf{f}_m^{\text{связ}}$, действующих на магнетик в магнитном поле, можно записать

$$\delta A_m = \int_V (\mathbf{f}_m^{\text{связ}} \delta\mathbf{a}) dV. \quad (33.5)$$

Подставляя выражения (33.3) и (33.5) в (33.4), имеем

$$\mathbf{f}_m^{\text{связ}} = -\frac{H^2}{8\pi} \nabla\mu + \frac{1}{8\pi} \nabla \left(\tau \frac{\partial\mu}{\partial\tau} H^2 \right) \quad (33.6)$$

в полной аналогии с (27.14).

Для разреженных магнетиков, когда $\mu \approx 1 + \sigma\tau \approx 1$, формула (33.6) упрощается и принимает вид

$$\mathbf{f}_m^{\text{связ}} \approx (\mu - 1) \nabla H^2 / (8\pi). \quad (33.7)$$

К этому выражению можно прийти и в микроскопической теории. В самом деле, из соотношения (33.4) следует, что если известно выражение для энергии W_m магнитного поля как функции некоторых обобщенных координат q_1, q_2, \dots , то обобщенные силы F_i могут быть найдены по формуле

$$F_i = \partial W_m / \partial q_i. \quad (33.8)$$

Задача 33.1. Найти силу и момент сил, действующие на точечный магнитный момент \mathbf{m} в магнитном поле \mathbf{B}_0 .

Представим теперь магнетик как совокупность молекул, обладающих магнитными моментами \mathbf{m}_i . Тогда плотность силы, действующей на магнетик в магнитном поле \mathbf{B} , согласно результату задачи 33.1 равна

$$\mathbf{f}_m^{\text{связ}} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} (\mathbf{m}_i \nabla) \mathbf{B}_i. \quad (33.9)$$

Заменяя индукцию \mathbf{B}_i действующего поля на среднюю индукцию \mathbf{B} , что допустимо для разреженных сред, и вводя намагниченность

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{m}_i = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathbf{H},$$

из (33.9) с учетом тождества $(\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} = \nabla H^2 / 2$, справедливого при $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, находим

$$\mathbf{f}_m^{\text{связ}} = (\mathbf{M} \nabla) \mathbf{B} \approx \mu (\mu - 1) \nabla H^2 / (8\pi),$$

что согласуется с (33.7) для $\mu \approx 1$.

Нетрудно видеть, что согласно (33.7) парамагнетики ($\mu > 1$) должны втягиваться в область сильнейшего магнитного поля, а диамагнетики ($\mu < 1$) — выталкиваться из этой области.

Наконец, в том случае, когда в магнетике текут токи проводимости, плотность сил, действующих на магнетик в магнитостатическом поле, очевидно, равна

$$\mathbf{f}_m = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}] - \frac{H^2}{8\pi} \nabla \mu + \frac{1}{8\pi} \nabla \left(\tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} H^2 \right). \quad (33.10)$$

Поступая так же, как при решении задачи 13.1, иногда бывает удобно представить (33.10) в виде

$$\mathbf{f}_m = \text{div } \hat{T}_{(m)}, \quad (33.11)$$

где $\hat{T}_{(m)}$ — тензор магнитных натяжений, имеющих компоненты

$$T_{(m)}^{ik} = \frac{\mu}{4\pi} H^i H^k - \frac{H^2}{8\pi} \left(\mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \delta^{ik}. \quad (33.12)$$

С помощью формулы (33.11) полную силу, действующую на магнетик, занимающий некоторую область V , можно свести к поверхностному интегралу по границе области S :

$$\mathbf{F}_m = \oint_S \left[\frac{\mu}{4\pi} (\mathbf{nH}) \mathbf{H} - \frac{H^2}{8\pi} \left(\mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \mathbf{n} \right] dS. \quad (33.13)$$

§ 34. СТАЦИОНАРНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

До сих пор мы считали токи проводимости заданными, не останавливаясь на причинах того, как практически можно поддерживать их неизменными во времени. Однако ясно, что в проводящей среде, в которой согласно закону Джоуля—Ленца (14.3) происходит постоянное выделение теплоты, стационарный ток может поддерживаться лишь сторонними электродвижущими силами. Вводя напряженность $\mathbf{E}^{\text{стор}}$ поля этих сторонних сил, запишем основные уравнения, определяющие плотность тока \mathbf{j} и напряженность \mathbf{E} электрического поля в среде, характеризуемой электропроводностью $\sigma(\mathbf{r})$ и диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, & \mathbf{j} &= \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}), \\ \operatorname{div} (\epsilon \mathbf{E}) &= 4\pi \rho, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \quad (34.1)$$

Как и в электростатике, решение уравнений (34.1) сводится к отысканию потенциала φ , поскольку уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ удовлетворяется подстановкой $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. В итоге система (34.1) сводится к одному уравнению

$$\operatorname{div} [\sigma (-\nabla\varphi + \mathbf{E}^{\text{стор}})] = 0, \quad (34.2)$$

тогда как уравнение $\operatorname{div} (\epsilon \mathbf{E}) = 4\pi \rho$ используется для определения плотности свободного заряда ρ уже после того, как найдено электрическое поле \mathbf{E} . Ясно, что любая задача магнитостатики, сводящаяся к решению уравнения (34.2), аналогична соответствующей электростатической задаче, ибо получается из последней заменами:

$$\epsilon \rightarrow \sigma, \quad \mathbf{D} \rightarrow -\sigma \nabla\varphi, \quad 4\pi \rho \rightarrow -\operatorname{div} (\sigma \mathbf{E}^{\text{стор}}). \quad (34.3)$$

Как уже отмечалось, для обычных проводников при не очень сильных полях \mathbf{E} электропроводность σ можно считать не зависящей от \mathbf{E} . В простейшем частном случае однородных проводников σ является постоянной в каждой точке заданного проводника, и тогда уравнение (34.2) сводится к следующему:

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \mathbf{E}^{\text{стор}}, \quad (34.4)$$

т. е. к уравнению Пуассона с плотностью «сторонних» зарядов

$$\rho^{\text{стор}} = -\operatorname{div} \mathbf{E}^{\text{стор}} / (4\pi). \quad (34.5)$$

Весьма распространен класс сторонних сил, для которых в отдельных областях можно ввести сторонний потенциал, т. е. положить

$$\mathbf{E}^{\text{стор}} = -\nabla\varphi^{\text{стор}}. \quad (34.6)$$

Примером таких сил могут служить диффузионные силы $E^{\text{стор}} = \alpha \nabla \tau$, термоэлектрические силы $E^{\text{стор}} = \beta \nabla T$ и др. Используя (34.6), вместо (34.4) в соответствующих областях найдем

$$\Delta(\varphi + \varphi^{\text{стор}}) = 0. \quad (34.7)$$

Очевидно, что во всем пространстве соотношение (34.6) не может выполняться, ибо тогда циркуляция $E^{\text{стор}}$ по любому замкнутому контуру, т. е. сторонняя э.д.с., оказалась бы равной нулю. В качестве примера возьмем термоэлектрические силы $E^{\text{стор}} = \beta \nabla T$. Пусть замкнутая цепь C образована двумя кусками разных металлов 1 и 2, спаи которых A и B нагреты до температур T_A и T_B соответственно (рис. 34.1). Характеризуя каждый металл своей постоянной β , для сторонней э.д.с. находим выражение

$$\mathcal{E} = \oint_C \beta dT = (T_B - T_A)(\beta_1 - \beta_2) \neq 0.$$

В большинстве практических задач приходится определять потенциал φ и плотность тока \mathbf{j} в системе однородных проводников с электропроводностями σ_i , соприкасающихся по некоторым границам раздела (рис. 34.2). При этом сторонние э.д.с. появляются лишь

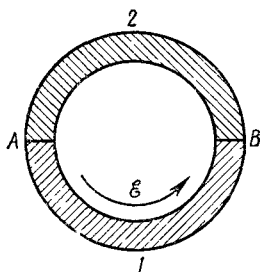


Рис. 34.1

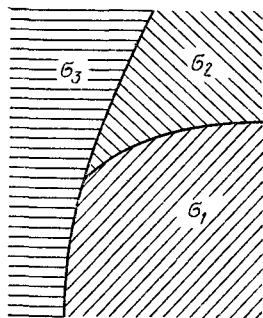


Рис. 34.2

на границах раздела, исчезая в толще проводников. Поэтому внутри проводников и граничащих с ними однородных диэлектриков выполняется уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$. При сшивании решений в разных областях необходимо использовать граничные условия, вытекающие из (34.1). Так, уравнение $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ приводит к граничному условию

$$[nE_2] = [nE_1], \quad (34.8)$$

которое (см. § 22) эквивалентно условию непрерывности потенциала φ или условию $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$. Уравнение $\text{div } \mathbf{j} = 0$ приводит к граничному условию

$$(nj_2) = (nj_1), \quad (34.9)$$

т. е. к непрерывности нормальной составляющей тока.

Задача 34.1. Найти поверхностную плотность свободного заряда и закон преломления линий тока на границе двух сред с удельными проводимостями σ_1, σ_2 и диэлектрическими проницаемостями ϵ_1, ϵ_2 .

Наконец, третье условие получается из уравнения

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E}^{\text{стор}} - \nabla\varphi) \quad (34.10)$$

интегрированием вдоль линии, перпендикулярной поверхности раздела S (рис. 34.3). С учетом (34.9) находим

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \int_1^2 (\mathbf{E}^{\text{стор}} dl) = \int_1^2 (\mathbf{n}\mathbf{j}) \frac{dl}{\sigma} = (\mathbf{n}\mathbf{j}) \int_1^2 \frac{dl}{\sigma}. \quad (34.11)$$

Устремляя точки 1 и 2 друг к другу и вводя сопротивление

$$R_{12} \equiv \left\{ \int_S \left[\int_1^2 \frac{dl}{\sigma} \right]^{-1} dS \right\}^{-1} \quad (34.12)$$

поверхности раздела по отношению к протекающему нормально ей току I , перепишем (34.11) в виде

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}, \quad (34.13)$$

где введена сторонняя э.д.с.

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 (\mathbf{E}^{\text{стор}} dl). \quad (34.14)$$

При этом предполагается, что \mathcal{E}_{12} постоянна на поверхности S . Обычно это условие хорошо выполняется для квазилинейных проводников, в сечении которых \mathcal{E}_{12} меняется весьма незначительно.

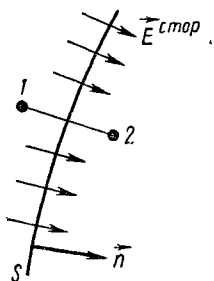


Рис. 34.3

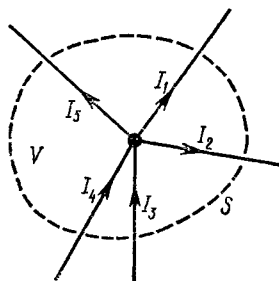


Рис. 34.4

Суммируя соотношение (34.13) для ряда последовательных участков некоторой квазилинейной цепи, получаем *второй закон Кирхгофа* для участка цепи:

$$\sum_k I_k R_k = \varphi_1 - \varphi_2 + \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (34.15)$$

В частном случае замкнутой цепи, полагая $\varphi_1 = \varphi_2$, находим

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k \equiv \mathcal{E}. \quad (34.16)$$

Если цепь изолирована и имеет полное сопротивление R , то получаем обычный закон Ома $\mathcal{E} = IR$.

Наконец, если проинтегрировать уравнение $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ по некоторой малой области V , в которой сходятся несколько квазилинейных проводников (рис. 34.4), то с помощью теоремы Гаусса — Остроградского найдем

$$\oint_S (\mathbf{n}\mathbf{j}) dS = \sum_k I_k = 0, \quad (34.17)$$

где S — граница области V . Полученное соотношение называется *первым законом Кирхгофа* и, очевидно, выражает закон сохранения электрического заряда.

Полученные выше граничные условия имеют разный вид на поверхностях раздела проводник — проводник и проводник — диэлектрик. В первом случае уравнения (34.8) и (34.10) при дополнительном предположении

$$\mathbf{E}_{1,2}^{\text{стор}} = 0, \quad (34.18)$$

означающем, что сторонние силы действуют только на границе, приводят к скачку касательной составляющей плотности тока на границе:

$$[\mathbf{n}\mathbf{j}_1]/\sigma_1 = [\mathbf{n}\mathbf{j}_2]/\sigma_2. \quad (34.19)$$

Далее, из условия (34.9) находим

$$(\mathbf{n}\mathbf{j}) = \sigma_1 (\mathbf{n}\mathbf{E}_1) = \sigma_2 (\mathbf{n}\mathbf{E}_2), \quad (34.20)$$

что позволяет [см. (22.5)] выразить поверхностную плотность заряда на границе через нормальную плотность тока:

$$\eta = \frac{1}{4\pi} [\varepsilon_2 (\mathbf{n}\mathbf{E}_2) - \varepsilon_1 (\mathbf{n}\mathbf{E}_1)] = \frac{(\mathbf{n}\mathbf{j})}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} \right). \quad (34.21)$$

В случае границы проводник — диэлектрик $(\mathbf{n}\mathbf{j}) = 0$, откуда с учетом (22.6) находим:

$$(\mathbf{n}\mathbf{E}^{\text{пров}}) = 0, \quad \varepsilon (\mathbf{n}\mathbf{E}^{\text{диэл}}) = 4\pi\eta. \quad (34.22)$$

В то же время из условия (34.8) следует, что

$$[\mathbf{n}\mathbf{E}^{\text{диэл}}] = [\mathbf{n}\mathbf{E}^{\text{пров}}] = \frac{1}{\sigma} [\mathbf{n}\mathbf{j}]. \quad (34.23)$$

§ 35. СИСТЕМА ИДЕАЛЬНЫХ ПРОВОДНИКОВ В СРЕДЕ С МАЛОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Рассмотрим систему хороших проводников-электродов с удельной проводимостью $\sigma_0 \rightarrow \infty$, погруженных в плохо проводящую среду с удельной проводимостью $\sigma \ll \sigma_0$. В этом случае определение потенциала φ в проводящей среде сводится к основной задаче электростатики. В самом деле, поверхностная плотность заряда на электродах [см. (34.21)] равна

$$\eta = \frac{(\mathbf{n}\mathbf{j})}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} - \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \right) \approx \frac{\varepsilon (\mathbf{n}\mathbf{j})}{4\pi\sigma} = \frac{\varepsilon (\mathbf{n}\mathbf{E})}{4\pi}, \quad (35.1)$$

как и в электростатике. Кроме того, токи I_i , стекающие с электродов, обычно бывают известны, поэтому плотность тока \mathbf{j} является ограниченной величиной, порядок которой определяется отношением $\mathbf{j} \sim I_i/S_i$, где S_i — площади поверхностей электродов. Отсюда следует, что внутри электродов напряженность поля \mathbf{E} оказывается исчезающе малой:

$$E \sim I_i/(\sigma_0 S_i) \rightarrow 0.$$

Поэтому потенциал φ внутри электродов можно считать постоянным:

$$\varphi = \varphi_i = \text{const}_i. \quad (35.2)$$

При этом силы токов I_i , стекающих с электродов, определяются напряженностью поля \mathbf{E} в окружающей среде:

$$I_i = \oint_{S_i} (\mathbf{n} \mathbf{j}) dS = \oint_{S_i} \sigma (\mathbf{n} \mathbf{E}) dS. \quad (35.3)$$

Таким образом, задача определения потенциала φ в проводящей среде сводится к решению уравнения $\text{div}(\sigma \nabla \varphi) = 0$ с граничными условиями (35.1) — (35.3). Но в § 22 для этой задачи была доказана теорема единственности, по которой потенциал φ однозначно определяется либо заданием потенциалов электродов φ_i , либо заданием стекающих с них токов I_i^* . В связи с этим ясно, что между силами токов I_i и потенциалами φ_i должна существовать линейная связь, аналогичная связи зарядов Q_i и потенциалов φ_i в электростатике:

$$\varphi_i = \sum_k R_{ik} I_k. \quad (35.4)$$

Коэффициенты R_{ik} , определяемые геометрией электродов и удельной проводимостью среды $\sigma(\mathbf{r})$, называются *коэффициентами сопротивления*.

Задача 35.1. Показать, что обратная матрица сопротивления R_{ik}^{-1} для случая проводящей среды, характеризуемой тензором проводимости $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$, может быть представлена в виде

$$R_{ii}^{-1} = b_{i0} + \sum_{k \neq i} b_{ik}, \quad R_{ik}^{-1} = -b_{ik}, \quad i \neq k, \quad (35.5)$$

где

$$b_{ik} = \int \left[\int_{l_{ik}} f(\mathbf{r}) (\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}) dl \right]^{-1} dS_i, \quad (35.6)$$

причем интегрирование осуществляется по всем линиям тока, соединяющим электроды номеров i и k . Обозначения те же, что и в задаче 24.1.

Если среда однородна и изотропна, т. е. ее электропроводность σ и диэлектрическая проницаемость ϵ постоянны, то сила стекающего с электрода тока может быть выражена через заряд электрода:

$$I_i = \sigma \oint_{S_i} (\mathbf{n} \mathbf{E}) dS = \frac{\sigma}{\epsilon} \oint_{S_i} (\mathbf{n} \mathbf{D}) dS = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} Q_i. \quad (35.7)$$

* В последнем случае потенциал определяется с точностью до постоянной.

Подставляя (35.7) в (35.4), находим

$$\varphi_i = \sum_k \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} R_{ik} Q_k. \quad (35.8)$$

Сравнение (35.8) с (24.3) показывает, что коэффициенты сопротивления для однородной среды оказываются пропорциональными потенциальным коэффициентам S_{ik} :

$$R_{ik} = \varepsilon S_{ik} / (4\pi\sigma). \quad (35.9)$$

Рассмотрим теперь важный случай двух проводников-электродов. Задавая силу токов $I_1 = -I_2 \equiv I$, мы предполагаем, что проводники имеют «стоки» (рис. 35.1). Используя соотношение (35.4), нетрудно найти, что в данном случае

$$\varphi_1 - \varphi_2 = I(R_{11} - 2R_{12} + R_{22}) \equiv IR, \quad (35.10)$$

что по форме совпадает с законом Ома. Введенная здесь величина

$$R \equiv R_{11} - 2R_{12} + R_{22} \quad (35.11)$$

называется *полным сопротивлением* системы двух электродов. Нетрудно видеть, что в однородной среде сопротивление системы [см. (35.9)] обратно пропорционально ее емкости:

$$R = \varepsilon / (4\pi\sigma C). \quad (35.12)$$

Если электроды 1 и 2 заземлены и поверхность земли является плоскостью симметрии системы (рис. 35.2), то вместо (35.12) имеем

$$R = \varepsilon / (2\pi\sigma C). \quad (35.13)$$

В заключение этого параграфа подсчитаем тепловую мощность, выделяемую в проводящей среде при наличии системы идеальных

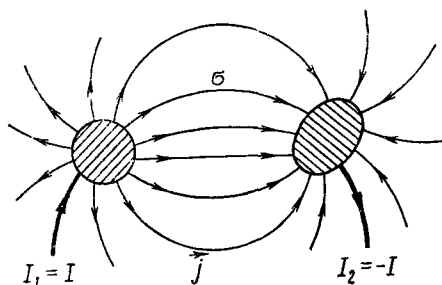


Рис. 35.1

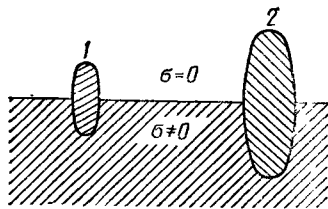


Рис. 35.2

проводников-электродов. Если проводящая среда занимает область V , то выделяемая тепловая мощность (14.4) равна

$$P = \int_V \sigma E^2 dV = \int_V (\mathbf{jE}) dV. \quad (34.14)$$

Делая подстановку $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ и интегрируя по частям, получаем с учетом уравнения $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и граничного условия (35.2)

$$\begin{aligned} P &= - \int_V (\mathbf{j} \nabla \varphi) dV = \sum_i \oint_{S_i} (\mathbf{n} \mathbf{j}) \varphi dS = \\ &= \sum_i \varphi_i \oint_{S_i} (\mathbf{n} \mathbf{j}) dS = \sum_i \varphi_i I_i = \sum_{i,k} R_{ik} I_i I_k. \end{aligned} \quad (35.15)$$

Полученная квадратичная форма должна быть положительна, откуда вытекают полезные ограничения на коэффициенты R_{ik} :

$$R_{ii} > 0, \quad R_{ii} R_{kk} - (R_{ik})^2 > 0, \quad (35.16)$$

а также еще одно важное представление этих коэффициентов:

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial I_i \partial I_k} = R_{ki}. \quad (35.17)$$

Задача 35.2. Показать, что в проводящей среде распределение токов, стекающих с идеальных электродов, таково, что тепловыделение минимально.

§ 36. ПОЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДНИКА С ТОКОМ И ПРЕВРАЩЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Поставим задачу об определении поля бесконечного цилиндрического проводника с током. Ее можно рассматривать как идеализацию реальной задачи, в которой проводник с током является замкнутым и в некоторой его части включена сторонняя э.д.с. Пусть проводник находится в вакууме, имеет радиус a и постоянную электропроводность σ . Выберем цилиндрические координаты, направив ось Z вдоль проводника. Тогда простейшим решением уравнения Лапласа, удовлетворяющим условию $E_r = 0$ внутри проводника, является

$$\varphi (r < a) \equiv \varphi_1 = -Ez, \quad j = j_z = \sigma E, \quad E = \text{const}, \quad (36.1)$$

т. е. напряженность поля \mathbf{E} и плотность тока \mathbf{j} постоянны внутри проводника и направлены вдоль его оси.

Потенциал вне провода $\varphi (r > a) \equiv \varphi_2$ также должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0 \quad (36.2)$$

и граничному условию при $r = a$

$$\varphi_2 = \varphi_1 = -Ez. \quad (36.3)$$

Из (36.3) выводим, что $\varphi_2 = -Ez f(r)$, где $f(a) = 1$. Поэтому из (36.2) следует, что $f(r)$ удовлетворяет уравнению

$$(rf')' = 0$$

с очевидным решением

$$f(r) = (\ln r + C)/(\ln a + C),$$

где C — произвольная постоянная. Полагая $C = -\ln r_0$, получаем

окончательное выражение для потенциала вне провода:

$$\varphi_2 = - Ez \frac{\ln(r/r_0)}{\ln(a/r_0)}. \quad (36.4)$$

Таким образом, появляется некоторая поверхность $r = r_0$, на которой $\varphi = 0$. Физически она соответствует поверхности проводника, по которому течет обратный ток. Появление этой поверхности — одно из следствий идеализации задачи, т. е. предположения о бесконечности провода. По сути дела, решение (36.4) описывает потенциал в коаксиальном кабеле, по внутренней жиле которого (радиуса a)

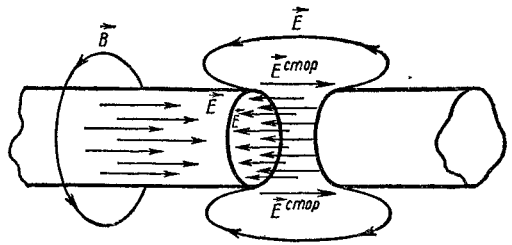


Рис. 36.1

течет прямой ток, а по внешней оболочке (радиуса r_0) — обратный.

Из (36.4) с помощью (34.22) находим распределение поверхностного заряда на проводе:

$$\eta = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{Ez}{4\pi a \ln(a/r_0)}. \quad (36.5)$$

Следовательно, заряд распределен симметрично относительно плоскости $z = 0$.

В решении был исключен из рассмотрения участок провода со стороны э.д.с. Предположим, что она действует в некотором сечении провода на малом участке длиной Δl . Тогда на этом сечении потенциал испытывает скачок, равный $IR_{12} - \mathcal{E}_{12}$. Пренебрегая сопротивлением участка ($R_{12} \rightarrow 0$), можно считать, что

$$[\varphi]_{12} \approx - \mathcal{E}_{12} = - E^{\text{сноп}} \Delta l. \quad (36.6)$$

Участок с э.д.с. подобен конденсатору, в котором вектор напряженности \mathbf{E} направлен противоположно полю в остальной части проводника. Картина такого поля изображена на рис. 36.1.

В то же время линии индукции представляют собой систему колец с центрами на оси проводника. Следовательно, на поверхности провода вектор Пойнтинга \mathbf{S} направлен внутрь проводника и равен

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} E B = \frac{c}{4\pi} \frac{j}{\sigma} \frac{2I}{ca} = \frac{j^2 a}{2\sigma}. \quad (36.7)$$

Поэтому на длину l провода приходится поток электромагнитной энергии

$$|\mathbf{S}| 2\pi a l = \pi a^2 j^2 / \sigma,$$

равный тепловой мощности, рассеиваемой в объеме $V = \pi a^2 l$ провода в согласии с законом Джоуля — Ленца. Однако в области действия сторонней э.д.с. вектор электрической напряженности имеет противоположное направление при неизменности вектора магнитной индукции. Поэтому на этом участке вектор Пойнтинга направлен от

проводника наружу. Таким образом, область действия сторонней э.д.с. является источником энергии, которая впоследствии поглотится в толще проводника. Для замкнутого проводника картина векторных линий вектора Пойнтинга \mathbf{S} изображена на рис. 36.2

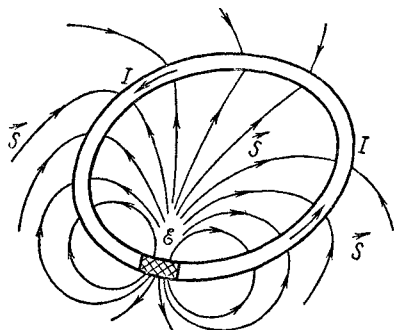


Рис. 36.2

Проведенный анализ этой задачи обнаруживает ошибочность распространенного мнения, будто энергия переносится движущимися электронами вдоль провода с током. На самом же деле она поступает в проводник из окружающего его пространства в виде энергии электромагнитного поля. При этом источником электромагнитной энергии, из которого она поступает в окружающее пространство, является область действия сторонней э.д.с.

Таким образом, электромагнитная энергия переносится от источника тока к омическим сопротивлениям, где она превращается в теплоту, не по проводу, а в свободном пространстве.

Задача 36.1. Как изменятся результаты данного параграфа, если учесть, что на движущиеся в проводнике электроны кроме электрического поля \mathbf{E} действует также и магнитное поле тока?

§ 37. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ОМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОВОДНИКОВ

Электрический ток в проводящей среде образуется движущимися электронами и ионами. Следуя определению плотности тока

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i \mathbf{v}_i$$

и считая для простоты, что носителями тока являются положительно заряженные ионы с зарядом e_+ и отрицательно заряженные электроны (или ионы) с зарядом e_- , находим

$$\mathbf{j} = \frac{e_+}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{v}_i^+ + \frac{e_-}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{v}_i^- \quad (37.1)$$

Вводя среднюю скорость зарядов

$$\mathbf{v}^\pm = \frac{1}{N_\pm \Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{v}_i^\pm,$$

где N_\pm — средняя концентрация частиц, имеем

$$\mathbf{j} = e_+ N_+ \mathbf{v}^+ + e_- N_- \mathbf{v}^- \quad (37.2)$$

При не слишком большой напряженности \mathbf{E} средняя скорость ионов линейно зависит от приложенного поля (закон Ома), т. е.

$$\mathbf{v}^\pm = \beta_\pm \mathbf{E}, \quad (37.3)$$

где β_{\pm} — подвижность ионов. Ее физический смысл проясняется, если рассмотреть стационарное движение зарядов в проводнике под действием поля \mathbf{E} и эффективной силы трения — $\gamma\mathbf{v}$. Тогда из условия стационарности выводим:

$$\gamma\mathbf{v} = e\mathbf{E}, \quad \beta = e/\gamma, \quad (37.4)$$

т. е. подвижность β обратно пропорциональна коэффициенту трения γ .
С учетом (37.3) находим

$$\mathbf{j} = (N_+e_+\beta_+ + N_-e_-\beta_-) \mathbf{E} \equiv \sigma\mathbf{E},$$

откуда получается следующее выражение для удельной проводимости:

$$\sigma = N_+e_+\beta_+ + N_-e_-\beta_-. \quad (37.5)$$

Если носители тока ионизованы однократно, то $e_{\pm} = \pm e$ и

$$\sigma = e(N_+\beta_+ - N_-\beta_-),$$

или с учетом (37.4)

$$\sigma = e^2(N_+/\gamma_+ + N_-/\gamma_-). \quad (37.6)$$

Итак, удельная проводимость среды определяется средними концентрациями ионов N_{\pm} и их коэффициентами трения γ_{\pm} .

В металлах и твердых проводниках с электронным механизмом проводимости $\gamma_+ = \infty$ и (37.6) сводится к

$$\sigma = e^2N_-/\gamma_-. \quad (37.7)$$

Учтем теперь, что чаще всего проводники электрически нейтральны, т. е. не имеют свободного избыточного заряда, так как в среднем концентрация свободных зарядов N_- компенсируется зарядами кристаллической решетки: $N_- \approx N_+ \equiv N$. Если все же избыточный заряд ρ и имеется, то он обычно очень мал (см. задачу 36.1), т. е. можно положить $\rho = e(N_+ - N_-) \ll eN$ и считать

$$\sigma = \frac{e^2N}{\gamma} \left(1 - \frac{N_+ - N_-}{N}\right) = \sigma_0 \left(1 - \frac{\rho}{eN}\right) \approx \sigma_0, \quad (37.8)$$

где $\sigma_0 = e^2N/\gamma$; $\gamma \equiv \gamma_-$. Таким образом, практически электропроводность σ не зависит от ρ . В предыдущих параграфах мы использовали именно это предположение.

Согласно вышесказанному, для вычисления удельной проводимости σ нужно знать коэффициент трения γ . Одной из простейших моделей металлического проводника, позволяющей вычислить γ , является *электронная модель Друде*. В этой модели ионы кристаллической решетки считаются неподвижными, характер же движения электронов предполагается следующим. В промежутке между двумя последовательными столкновениями с ионами решетки электроны ускоряются действующим электрическим полем \mathbf{E} , однако в процессе столкновения вся приобретенная ими энергия теряется. Пусть l — средняя длина свободного пробега электрона, $v_0 = (3kT/m)^{1/2}$ — его тепловая скорость, $\tau = l/v_0$ — среднее время свободного пробега.

Тогда средняя направленная скорость свободного движения электрона

$$\mathbf{u} = e\mathbf{E}\tau/(2m), \quad (37.9)$$

откуда находим среднюю плотность тока:

$$\mathbf{j} = Ne\mathbf{u} = Ne^2\tau\mathbf{E}/(2m) = \sigma\mathbf{E}$$

и удельную проводимость:

$$\sigma = Ne^2\tau/(2m) = Ne^2l/(2mv_0) = Ne^2l/(2\sqrt{3mkT}). \quad (37.10)$$

Полученная оценка σ основывалась на предположении, что $\tau = l/v_0$, т. е. $u \ll v_0$ или $eEl \ll kT$. Очевидно, что модель Друде оказывается несостоятельной в области низких температур и сильных электрических полей.

В заключение рассмотрим один интересный эффект, связанный с предположением о справедливости закона Ома $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Если среда однородна и изотропна, т. е. обладает постоянными ϵ и σ , то из уравнений

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho/\epsilon,$$

нетрудно получить, что

$$\partial\rho/\partial t + 4\pi\sigma\rho/\epsilon = 0. \quad (37.11)$$

Очевидным решением этого уравнения является

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}) \exp(-4\pi\sigma t/\epsilon), \quad (37.12)$$

где $\rho_0(\mathbf{r})$ — распределение заряда в момент $t = 0$. Из этого решения следует, что в проводящей среде всякое локальное скопление заряда рассасывается за характерное время — время релаксации, равное

$$t^{\text{рел}} = \epsilon/(4\pi\sigma). \quad (37.13)$$

Чем больше удельная проводимость среды, тем быстрее происходит рассасывание свободных зарядов, очевидной причиной которого является их кулоновское расталкивание.

Задача 37.1. Проинтегрировав соотношение (37.12) по всему пространству, получим

$$Q = \int \rho \, dV = \exp(-4\pi\sigma t/\epsilon) \int \rho_0 \, dV = Q_0 \exp(-4\pi\sigma t/\epsilon), \quad (37.14)$$

что представляется противоречащим закону сохранения заряда Q . Выяснить, в чем здесь дело.

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Глава 3

§ 38. ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ИЛИ ВАКУУМЕ

Перейдем к рассмотрению наиболее общего случая электромагнитных полей, подчиняющихся системе уравнений Максвелла (10.1) в однородной среде с постоянными ϵ и μ (или в вакууме, если $\epsilon = \mu = 1$). Соответствующая система уравнений имеет такой вид:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.\end{aligned}$$

Сначала рассмотрим электромагнитное поле в той области пространства, где отсутствуют свободные токи и заряды. Тогда выполняются уравнения:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.\end{aligned}\tag{38.1}$$

С учетом постоянства ϵ и μ перепишем эти уравнения в таком виде:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1), \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (3) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2), \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (4)\end{aligned}\tag{38.2}$$

Дифференцируя первое из уравнений (38.2) по t , имеем

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

или с учетом второго уравнения

$$-\frac{c}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{e}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, то

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$$

и поэтому

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v_{\Phi}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (38.3)$$

где

$$v_{\Phi} = c/\sqrt{\epsilon\mu}. \quad (38.4)$$

Таким образом, мы получили *волновое уравнение*, описывающее распространение волн со скоростью v_{Φ} . Нетрудно убедиться, что вектор \mathbf{H} подчиняется такому же уравнению

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{1}{v_{\Phi}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (38.5)$$

Итак, можно сказать, что любая компонента векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} подчиняется общему волновому уравнению

$$\Delta \psi - \frac{1}{v_{\Phi}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (38.6)$$

Решение этого уравнения записывается наиболее просто в случае, когда ψ зависит лишь от x и t . Тогда уравнение (38.6) сводится к следующему:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v_{\Phi}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0. \quad (38.7)$$

Замечая, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v_{\Phi}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v_{\Phi}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_{\Phi}} \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

сделаем замену переменных ($\xi = x - v_{\Phi}t$, $\eta = x + v_{\Phi}t$), в соответствии с которой

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v_{\Phi}} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_{\Phi}} \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

и (38.7) принимает вид $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

Отсюда следует, что общим решением волнового уравнения (38.7) является функция

$$\psi(t, x) = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x - v_{\Phi}t) + f_2(x + v_{\Phi}t), \quad (38.8)$$

где f_1 , f_2 — произвольные функции. Полученное решение представляет собой суперпозицию двух возмущений, распространяющихся соответственно вправо и влево со скоростью v_{Φ} .

Для электромагнитных волн в вакууме уравнение (38.6) принимает вид *уравнения Даламбера*

$$\square \psi = 0, \quad (38.9)$$

где введен *оператор Даламбера* $\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Изучим свойства решений уравнения Даламбера в трехмерном случае в некоторой области V . Прежде всего докажем, что всякое решение уравнения Даламбера однозначно определяется заданием в начальный момент времени $t=0$ двух функций (ψ и $\partial\psi/\partial t$), а также заданием на границе области S для $t > 0$ либо функции ψ , либо $(\mathbf{n}\nabla)\psi$. В самом деле, предположим, что это не так и что найдутся два различных решения уравнения Даламбера ψ_1 и ψ_2 , удовлетворяющие одним и тем же начальным и граничным условиям. Тогда их разность $u \equiv \psi_1 - \psi_2$ также является решением уравнения Даламбера $\square u = 0$ с нулевыми начальными и граничными условиями. В то же время интеграл

$$I \equiv \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{\dot{u}^2}{c^2} + (\nabla u)^2 \right] dV, \quad \dot{u} \equiv \frac{\partial u}{\partial t},$$

сохраняется во времени, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_V \left[\frac{\dot{u}}{c^2} \ddot{u} + (\nabla u \nabla \dot{u}) \right] dV = \int_V [\dot{u} \Delta u + (\nabla u \nabla \dot{u})] dV = \\ &= \int_V \operatorname{div} (\dot{u} \nabla u) dV = \oint_S \dot{u} (\mathbf{n}\nabla) u dS = 0, \end{aligned}$$

ибо на поверхности S для любого момента времени $t \geq 0$ $\dot{u}(\mathbf{n}\nabla)u = 0$. Однако $u = \dot{u} = 0$ в момент $t = 0$, т. е. $\nabla u = 0$ и $I = 0$, что возможно только при $u \equiv 0$, откуда и следует единственность решения.

Итак, общее решение уравнения Даламбера содержит две произвольные функции, соответствующие заданию в начальный момент времени ψ и $\partial\psi/\partial t$. Однако нахождение этого общего решения упрощается, если заметить, что всякому решению ψ можно сопоставить независимое от него решение $\partial\psi/\partial t$. Таким образом, достаточно найти решение, содержащее лишь одну произвольную функцию.

Если разыскиваемое решение ψ уравнения Даламбера сферически симметрично, т. е. $\psi = \psi(t, r)$, то (38.9) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Тем самым для функции $r\psi$ получается уравнение типа (38.7). Пользуясь общим решением (38.8) этого уравнения, убеждаемся, что любое сферически симметричное решение уравнения Даламбера имеет вид

$$\psi(t, r) = \frac{1}{r} [f(r-ct) + g(r+ct)], \quad (38.10)$$

где f и g — произвольные функции. Следует только иметь в виду, что, за исключением выбора $g(x) = -f(-x)$, функция (38.10) имеет в точке $r=0$ особенность и поэтому удовлетворяет уравнению Даламбера всюду, кроме этой точки.

Если же разыскиваемое решение уравнения Даламбера не является сферически симметричным, то для его нахождения приходится пользоваться специальными методами математической физики. Ознакомимся с одним из них, предложенным Пуассоном и получившим название *метода сферических средних* *. Делая подстановку $\psi = tv$, приведем уравнение Даламбера к виду

$$\Delta v = \frac{1}{tc^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (tv) = \frac{1}{ct} \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} (ctv). \quad (38.11)$$

Сравнение (38.11) с (2П.16) показывает, что v можно считать сферическим средним от некоторой функции $f(r)$ по сфере радиуса $a = ct$, т. е. согласно (2П.15)

$$\psi = tv = t \langle f(r) \rangle_{ct} \equiv \frac{t}{4\pi} \oint_{|\xi|=1} f(r + ct\xi) dS_\xi. \quad (38.12)$$

Второе независимое решение получается дифференцированием (38.12) по t , и, таким образом, общее решение уравнения Даламбера имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(t, r) &= \frac{\partial}{\partial t} (t \langle f(r) \rangle_{ct}) + t \langle g(r) \rangle_{ct} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi} \oint_{|\xi|=1} f(r + ct\xi) dS_\xi \right] + \frac{t}{4\pi} \oint_{|\xi|=1} g(r + ct\xi) dS_\xi. \end{aligned} \quad (38.13)$$

Задача 38.1. Получить сферически симметричное решение (38.10) с помощью (38.13).

Особую роль в теории электромагнитного поля играет частное решение уравнения Даламбера, обозначаемое $D_0(t, r)$. Оно является сферически симметричным и удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$D_0(0, r) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} D_0|_{t=0} = \delta(r). \quad (38.14)$$

Пользуясь представлением δ -функции в сферических координатах (см. задачу 3.1): $\delta(\mathbf{r}) = -(2\pi r)^{-1} \delta'(r)$, с помощью (38.14) и (38.10) находим, что для D_0

$$f(r) = -g(r), \quad \frac{c}{r} [-f'(r) + g'(r)] = -\frac{1}{2\pi r} \delta'(r),$$

откуда $f(r) = \delta(r)/(4\pi c)$ и, таким образом,

$$D_0(t, r) = \frac{1}{4\pi rc} [\delta(r - ct) - \delta(r + ct)]. \quad (38.15)$$

Задача 38.2. Показать, что решение уравнения Даламбера, отвечающее начальным условиям $\psi|_{t=0} = f(\mathbf{r})$; $\partial\psi/\partial t|_{t=0} = g(\mathbf{r})$, можно записать в виде

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \int \left[D_0(t, R) g(\mathbf{r}') + \frac{\partial}{\partial t} D_0(t, R) f(\mathbf{r}') \right] dV', \quad (38.16)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

§ 39. ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим случай, когда электромагнитное поле зависит лишь от $x - v_\phi t$, т. е. распространяется со скоростью $v_\phi = c/\sqrt{\epsilon_\mu}$ вдоль

* Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964, с. 694.

оси X . Тогда уравнения (38.2), записанные для компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , примут такой вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (39.1)$$

Решение этой системы выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} E_y &= E^{(1)}(x - v_\Phi t), \quad H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^{(1)}(x - v_\Phi t), \quad E_x = \text{const}_1, \\ E_z &= E^{(2)}(x - v_\Phi t), \quad H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^{(2)}(x - v_\Phi t), \quad H_x = \text{const}_2, \end{aligned} \quad (39.2)$$

где $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ — произвольные функции $x - v_\Phi t$. Исключая неинтересные с физической точки зрения постоянные поля E_x и H_x , получаем два независимых решения исходной системы уравнений:

$$E_y = E^{(1)}(x - v_\Phi t), \quad \sqrt{\varepsilon} E_y = \sqrt{\mu} H_z, \quad E_x = E_z = H_x = H_y = 0; \quad (39.3)$$

$$E_z = E^{(2)}(x - v_\Phi t), \quad \sqrt{\varepsilon} E_z = -\sqrt{\mu} H_y, \quad E_x = E_y = H_x = H_z = 0. \quad (39.4)$$

Направив вдоль оси X единичный вектор \mathbf{s} , убеждаемся, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} должны быть связаны соотношением

$$\mathbf{V} \sqrt{\mu} \mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon} [\mathbf{sE}], \quad (39.5)$$

или

$$\mathbf{B} = \mathbf{V} \sqrt{\varepsilon \mu} [\mathbf{sE}] = c [\mathbf{sE}] / v_\Phi.$$

Полученные независимые решения уравнений (38.2) отвечают двум возможным видам *линейной поляризации плоской электромагнитной волны*. Особенностью этих решений является *поперечность электромагнитного поля*, выражающаяся равенствами $(\mathbf{sE}) = (\mathbf{sB}) = 0$.

Используя (39.5), плотность энергии электромагнитного поля и вектор Пойнтинга для полученных решений можно представить в следующем виде:

$$\omega = \varepsilon E^2 / (4\pi) = \mu H^2 / (4\pi), \quad \mathbf{S} = \mathbf{s} v_\Phi \omega = \mathbf{s} c \omega / \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (39.6)$$

Частным случаем отмеченного решения являются монохроматические плоские волны, для которых функции $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ выбираются в виде

$$A \cos [k(x - v_\Phi t) + \varphi],$$

где A и φ — некоторые постоянные. При этом A называется *амплитудой волны*, а φ — *фазовой постоянной*. Часто используют более удобную комплексную форму, имея в виду, что физический смысл имеют соответственно действительная или мнимая части решения, объединение которых возможно вследствие линейности исходных уравнений. С учетом этого монохроматическую плоскую *линейно поляризованную* волну удобно описывать следующим образом:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i[(\mathbf{k}r) - \omega t + \varphi]}, \quad \mathbf{E}_0^* = \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{B} = \frac{c}{v_\Phi} [\mathbf{sE}], \quad (\mathbf{sE}) = 0, \quad \mathbf{k} = \mathbf{s} \frac{\omega}{v_\Phi}. \quad (39.7)$$

Аналогично, для монохроматической плоской эллиптически поляризованной волны

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (\mathbf{E}_0^{(1)} + i\mathbf{E}_0^{(2)}) e^{i[(\mathbf{k}\mathbf{r}) - \omega t + \varphi]}, \quad \mathbf{E}_0^{*(1,2)} = \mathbf{E}_0^{(1,2)}, \\ \mathbf{B} &= \frac{c}{v_\Phi} [\mathbf{sE}], \quad (\mathbf{sE}) = 0, \quad (\mathbf{E}_0^{(1)}\mathbf{E}_0^{(2)}) = 0, \quad \mathbf{k} = \mathbf{s} \frac{\omega}{v_\Phi}, \end{aligned} \quad (39.8)$$

причем в случае равенства $|\mathbf{E}_0^{(1)}| = |\mathbf{E}_0^{(2)}|$ получается волна, поляризованная по кругу.

Задача 39.1. Рассмотреть суперпозицию двух эллиптически поляризованных плоских монохроматических волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= [(\mathbf{E}_1^{(1)} + i\mathbf{E}_1^{(2)}) e^{-i\omega t} + (\mathbf{E}_2^{(1)} + i\mathbf{E}_2^{(2)}) e^{i\omega t}] e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})}; \\ \mathbf{E}_r^{(s)} &= \mathbf{e}_s E_r^{(s)}, \quad (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_s) = \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2. \end{aligned}$$

Вычислить усредненные по времени плотность энергии \tilde{w} и вектор Пойнтинга $\tilde{\mathbf{S}}$, понимая под усреднением по времени операцию

$$\tilde{f} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (39.9)$$

Итак, монохроматическая плоская волна всегда может быть представлена в виде суперпозиции линейно поляризованных волн, каждая из которых характеризуется амплитудой E_0 , единичным вектором поляризации \mathbf{e}_r , $r = 1, 2$, и волновым вектором \mathbf{k} . При этом два возможных вектора поляризации $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и вектор \mathbf{k} образуют ортогональную тройку векторов. Каждому вектору \mathbf{k} соответствуют два возможных значения частоты $\omega = \pm kv_\Phi$, отличающиеся лишь знаком, что приводит к изменению направления распространения волны. Следовательно, для получения общего решения уравнений Максвелла без источников в однородной среде достаточно взять суперпозицию решений вида

$$[\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) e^{-ikv_\Phi t} + \mathbf{E}_2(\mathbf{k}) e^{ikv_\Phi t}] e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (39.10)$$

т. е. рассмотреть интеграл Фурье

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int [\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_2(\mathbf{k}) e^{i\omega t}] e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d^3k, \quad (39.11)$$

где $\omega = |\mathbf{k}|v_\Phi$, $(\mathbf{k}\mathbf{E}_{1,2}) = 0$, $d^3k = dk_x dk_y dk_z$. Эта формула описывает действительное поле \mathbf{E} , если

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) = \mathbf{E}_2^*(-\mathbf{k}). \quad (39.12)$$

В последнем нетрудно убедиться, взяв комплексное сопряжение от (39.11) и сделав замену переменной интегрирования $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$. Воспользовавшись соотношением (39.5), находим индукцию магнитного поля, отвечающую решению (39.11):

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = c \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \{[\mathbf{k}\mathbf{E}_1] e^{-i\omega t} - [\mathbf{k}\mathbf{E}_2] e^{i\omega t}\} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} \frac{d^3k}{\omega}. \quad (39.13)$$

Во многих физических задачах приходится рассматривать *волновые пакеты*, представляющие собой решения уравнений Максвелла типа (39.11), (39.13), которые достаточно быстро спадают на бесконечности. Очевидно, что волновые пакеты описывают сгустки электромагнитного поля, занимающие некоторые ограниченные области пространства. Для описания движения волнового пакета удобно ввести понятие его *центра масс*, т. е. точки с радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \frac{\int \mathbf{r} \omega dV}{\int \omega dV}. \quad (39.14)$$

Задача 39.2. Найти закон движения центра масс волнового пакета в однородной среде; убедиться, что его скорость не превышает $v_{\text{ф}}$. Показать, что если волновой пакет не расплывается, перемещаясь в вакууме как единое целое, то его скорость равна c , а между энергией W и импульсом \mathbf{G} существует связь

$$c^2 \mathbf{G} = c \mathbf{W}. \quad (39.15)$$

Обратимся теперь к знаменитым опытам П. Н. Лебедева по измерению давления света. Этими опытами впервые была доказана электромагнитная природа света. Если поместить некоторое поглощающее тело в поле электромагнитной волны, то согласно (13.4) на него действует сила с плотностью

$$\mathbf{f} = -\partial \mathbf{g} / \partial t + \text{div } \hat{\mathbf{T}}. \quad (39.16)$$

Если соотношение (39.16) усреднить по времени, то $\partial \mathbf{g} / \partial t$, очевидно, исчезает и для средней плотности силы имеем

$$\bar{\mathbf{f}} = \text{div } \hat{\mathbf{T}}. \quad (39.17)$$

Интегрируя (39.17) по объему V тела и применяя теорему Гаусса — Остроградского в форме (2П.6), найдем полную силу, действующую на тело:

$$\bar{\mathbf{F}} = \int_V \bar{\mathbf{f}} dV = \oint (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}}) dS. \quad (39.18)$$

Таким образом, электромагнитное поле оказывает на поверхность тела давление

$$p = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}}). \quad (39.19)$$

Если тело занимает полупространство $x > 0$ и электромагнитные волны падают на его поверхность нормально, то с учетом (13.5б) и того, что $E_x = B_x = 0$, имеем

$$p = p_x = -\tilde{T}_{xx} = \tilde{w}. \quad (39.20)$$

В другом частном случае изотропного излучения, когда вследствие статистической независимости различных компонент полей

$$\tilde{E}_i \tilde{E}_k = \tilde{E}^2 \delta_{ik} / 3, \quad \tilde{B}_i \tilde{B}_k = \tilde{B}^2 \delta_{ik} / 3, \quad \tilde{T}_{ik} = \tilde{w} \delta_{ik} / 3,$$

электромагнитное давление равно

$$p = \tilde{w} / 3. \quad (39.21)$$

Пользуясь полученными результатами, уже нетрудно объяснить и опыты Лебедева. В этих опытах на поглощающее тело некоторой массы M падает пакет электромагнитных волн, занимающий некоторый объем $V = Sl$ (рис. 39.1).

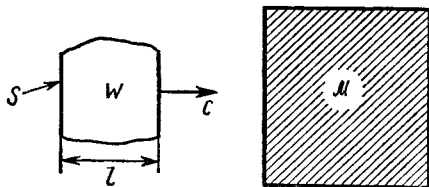


Рис. 39.1

Поскольку пакет поглощается телом в течение времени l/c , то импульс, сообщенный телу согласно соотношению (39.20), справедливому в пренебрежении распылением пакета, т. е. при условии $E_x \ll E$, $B_x \ll B$, равен

$$P = Fl/c = Vp/c = V\tilde{\omega}/c = \tilde{W}/c = W/c,$$

где $W = \omega V$ — энергия волнового пакета, не зависящая от времени по закону сохранения энергии. Вводя массу μ_f волнового пакета, т. е. принимая его импульс равным $G = \mu_f c$, из закона сохранения импульса получаем

$$G = \mu_f c = W/c. \quad (39.22)$$

Отсюда вытекает важная связь между энергией и массой волнового пакета, которая независимо могла быть получена и из соотношения (39.15):

$$W = \mu_f c^2. \quad (39.23)$$

§ 40. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Изучим распространение электромагнитных волн в пространстве, заполненном двумя однородными средами, разделенными плоскостью $z = 0$ и характеризующимися постоянными проницаемостями ϵ, μ ($z < 0$) и ϵ', μ' ($z > 0$). Скорость распространения плоских электромагнитных волн в каждой из сред согласно (38.4) равна соответственно

$$v_\phi = c/\sqrt{\epsilon\mu}, \quad v'_\phi = c/\sqrt{\epsilon'\mu'}. \quad (40.1)$$

В простейшем частном случае при наличии плоской границы раздела $z = 0$ электромагнитное поле описывается тремя монохроматическими плоскими волнами: в области $z < 0$ имеются падающая \mathbf{E}, \mathbf{B} (волновой вектор \mathbf{k}) и отраженная $\mathbf{E}'', \mathbf{B}''$ (волновой вектор \mathbf{k}'') волны, а в области $z > 0$ — преломленная волна \mathbf{E}', \mathbf{B}' (волновой вектор \mathbf{k}'). Падающую волну будем считать линейно поляризованной, т. е. представимой в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i[(\mathbf{k}\mathbf{r}) - \omega t]}, \quad \mathbf{B} = \sqrt{\epsilon\mu} [\mathbf{sE}], \quad (\mathbf{sE}) = 0, \quad \mathbf{k} = \mathbf{s}\omega/v_\phi. \quad (40.2)$$

При этом на границе $z = 0$ с нормалью \mathbf{n} должны выполняться граничные условия (12.8), которые при отсутствии свободных поверхностных зарядов и токов проводимости имеют такой вид:

$$\epsilon' (\mathbf{nE}') = \epsilon \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}''), \quad (\mathbf{nB}') = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}''), \quad (40.3)$$

$$[\mathbf{nE}'] = [\mathbf{n}(\mathbf{E} + \mathbf{E}'')], \quad \frac{1}{\mu'} [\mathbf{nB}'] = \frac{1}{\mu} [\mathbf{n}(\mathbf{B} + \mathbf{B}'')]. \quad (40.4)$$

Замечая, что в этих уравнениях стоят векторы, содержащие фазовые множители типа $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r}) - i\omega t]$, мы приходим к выводу, что граничные условия могут быть выполнены только при совпадении всех фаз. Это означает, что для любого вектора \mathbf{r} , лежащего в плоскости раздела, т. е. удовлетворяющего условию $(\mathbf{nr}) = z = 0$, должны выполняться равенства

$$(\mathbf{k}\mathbf{r}) = (\mathbf{k}'\mathbf{r}) = (\mathbf{k}''\mathbf{r}). \quad (40.5)$$

Из (40.5) следует, что векторы \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' лежат в плоскости векторов \mathbf{k} , \mathbf{n} . Вводя углы падения α , отражения α'' и преломления α' , перепишем условие (40.5) в виде (рис. 40.1)

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha' = k'' \sin \alpha''.$$

Замечая, что $k'' = k$, и вводя показатели преломления сред $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ и $n' = \sqrt{\epsilon'\mu'}$, получаем известные законы геометрической оптики:

$$\alpha'' = \alpha, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{k'}{k} = \frac{v_\phi}{v'_\phi} = \frac{n'}{n}, \quad (40.6)$$

т. е. равенство углов падения и отражения и закон Снеллиуса.

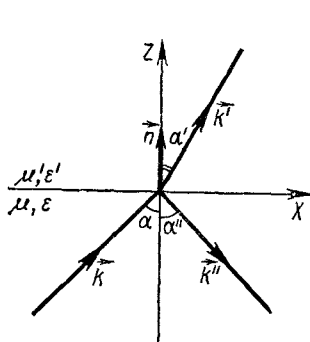


Рис. 40.1

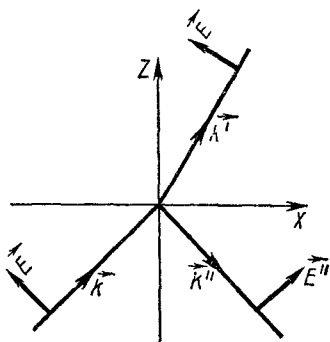


Рис. 40.2

Для разрешения уравнений (40.3), (40.4) удобно различать два возможных случая в зависимости от того, лежит ли вектор \mathbf{E} в плоскости падения \mathbf{k} , \mathbf{n} или перпендикулярен ей.

В первом случае, когда вектор \mathbf{E} лежит в плоскости падения \mathbf{k} , \mathbf{n} , очевидно, $(\mathbf{n}\mathbf{E}) = 0$ и уравнения (40.3) и (40.4) с учетом (40.2) и закона Снеллиуса дают (рис. 40.2):

$$\frac{\mu \sin \alpha}{\mu' \sin \alpha'} E'_0 = E_0 + E''_0, \quad \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} E'_0 = E_0 - E''_0,$$

откуда после несложных преобразований находим:

$$E'_0 = \frac{2E_0 (n/n') \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha' + (\mu/\mu') \sin 2\alpha}, \quad E''_0 = E_0 \frac{(\mu/\mu') \sin 2\alpha - \sin 2\alpha'}{\sin 2\alpha' + (\mu/\mu') \sin 2\alpha}. \quad (40.7)$$

При $\mu = \mu'$ эти формулы упрощаются:

$$E'_0 = \frac{2E_0 \sin \alpha' \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha') \cos(\alpha - \alpha')}, \quad E''_0 = E_0 \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \alpha')}{\operatorname{tg}(\alpha + \alpha')}. \quad (40.8)$$

Во втором случае, когда вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости падения \mathbf{k} , \mathbf{n} , т. е. $(\mathbf{n}\mathbf{E}) = 0$, граничные условия дают (рис. 40.3):

$$E'_0 = E_0 + E''_0, \quad \sqrt{\epsilon'/\mu'} E'_0 \cos \alpha' = \sqrt{\epsilon/\mu} (E_0 - E''_0) \cos \alpha,$$

откуда

$$E'_0 = \frac{2E_0}{1 + (\mu/\mu') (\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \alpha')}, \quad E''_0 = E_0 \frac{1 - (\mu/\mu') (\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \alpha')}{1 + (\mu/\mu') (\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \alpha')}. \quad (40.9)$$

При $\mu = \mu'$ эти формулы упрощаются:

$$E_0' = 2E_0 \frac{\cos \alpha \sin \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')}, \quad E_0'' = E_0 \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha' + \alpha)}. \quad (40.10)$$

Очевидно, что падающая волна с произвольной поляризацией может быть представлена в виде суперпозиции линейно поляризованных волн, векторы поляризации которых либо лежат в плоскости падения, либо перпендикулярны ей. Таким образом, к рассмотренным выше двум случаям сводится любая задача о распространении электромагнитных волн при наличии плоской границы раздела двух сред*.

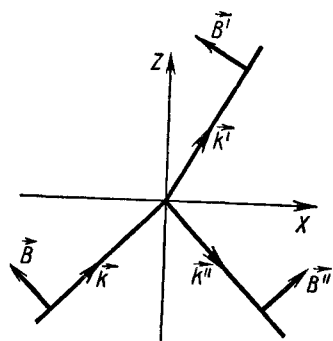


Рис. 40.3

При нормальном падении следует положить $\alpha \rightarrow 0$ и в соответствии с законом Снеллиуса $\alpha' = \alpha n/n' \rightarrow 0$. Тогда из формулы (40.7) получаем:

$$E_0' = 2E_0/(1 + \kappa), \quad (40.11)$$

$$E_0'' = E_0(\kappa - 1)/(\kappa + 1),$$

где $\kappa = \mu n' / (\mu' n) = \sqrt{\epsilon' \mu / (\epsilon \mu')}$. Пользуясь выражением (39.6) для вектора Пойнтинга $\mathbf{S} = \mathbf{s} \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2$, нетрудно подсчитать коэффициенты отражения \mathcal{R} и прохождения \mathcal{D} , которые определяются соответственно как отношения интенсивностей отраженной или преломленной волн к интенсивности падающей волны. Таким образом,

$$\mathcal{R} = \frac{|S'|}{|S|} = \left(\frac{E_0'}{E_0}\right)^2; \quad \mathcal{D} = \frac{|S''|}{|S|} = \sqrt{\frac{\epsilon' \mu}{\epsilon \mu'}} \left(\frac{E_0''}{E_0}\right)^2. \quad (40.12)$$

В частности, для нормального падения, согласно (40.11), находим:

$$\mathcal{R} = \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^2, \quad \mathcal{D} = \kappa \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^2, \quad \kappa \equiv \sqrt{\frac{\epsilon' \mu}{\epsilon \mu'}}. \quad (40.13)$$

Нетрудно убедиться, что в соответствии с законом сохранения энергии $\mathcal{R} + \mathcal{D} = 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu = \mu'$ и волна падает на границу под углом Брюстера $\alpha = \beta$, определяемым условием

$$\operatorname{tg} \beta = n'/n. \quad (40.14)$$

Очевидно, что

$$\sin \alpha' = \sin \beta (n/n') = \cos \beta.$$

Иначе говоря, выполнено соотношение

$$\alpha' + \beta = \pi/2. \quad (40.15)$$

* Соотношения (40.8) и (40.10) известны как формулы Френеля.

Поскольку в этом случае $\operatorname{tg}(\alpha + \alpha') = \infty$, то, как видно из (40.8), $E_0' = 0$, т. е. отсутствует отраженная волна, поляризованная в плоскости падения. Таким образом, если падающая под углом Брюстера волна имеет смешанную поляризацию, то отраженная волна будет поляризована перпендикулярно плоскости падения, т. е. будет удовлетворять условию $(\mathbf{nE}') = 0$. Этим явлением можно воспользоваться для получения плоскополяризованных световых пучков.

Другое интересное явление имеет место при падении волны из более плотной среды в менее плотную ($n > n'$) под углом

$$\alpha = \alpha_0 = \arcsin(n'/n). \quad (40.16)$$

При этом $\sin \alpha' = 1$, т. е. $\alpha' = \pi/2$. Это означает, что преломленная волна идет вдоль границы раздела двух сред. Отмеченное явление называется *полным внутренним отражением*. Исследуем в этом случае поле в области $z > 0$ более подробно. Если $\alpha > \alpha_0$, то

$$\sin \alpha' = \sin \alpha \frac{n}{n'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} > 1,$$

откуда

$$\cos \alpha' = \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha_0}\right)^{1/2} = \pm i \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha_0} - 1\right)^{1/2}. \quad (40.17)$$

Физически это означает, что в полученном решении, описывающем поле преломленной волны, волновой вектор k'_z является мнимым. Так, считая плоскостью падения (X, Z) , убеждаемся, что поля \mathbf{E}' и \mathbf{B}' содержат множитель вида

$$\begin{aligned} & \exp[ik'(x \sin \alpha' + z \cos \alpha')] = \\ & = \exp[\pm k'z(\sin^2 \alpha / \sin^2 \alpha_0 - 1)^{1/2}] \exp[ik'x \sin \alpha / \sin \alpha_0]. \end{aligned} \quad (40.18)$$

Решение со знаком плюс соответствует растущему на бесконечности полю, и поэтому оно должно быть отброшено как физически нереализуемое. Оставшееся решение (40.18) описывает электромагнитную волну с затухающей в направлении Z амплитудой. При этом волна распространяется вдоль границы раздела двух сред.

В заключение отметим, что вся развитая выше теория отражения и преломления электромагнитных волн легко обобщается на случай комплексных проницаемостей ϵ и μ (см. § 61). Как легко убедиться, в этом случае амплитуды электромагнитных волн содержат затухающие множители такого же типа, как при полном внутреннем отражении.

Задача 40.1. Найти коэффициент отражения света от металлического зеркала и оказываемое на него давление при нормальном падении.

§ 41. ПОЛЕ ЗАДАННЫХ ЗАРЯДОВ И ТОКОВ В ВАКУУМЕ

Ранее нами было установлено, что уравнения Максвелла допускают существование решений, описывающих свободное электромагнитное поле и представляющих собой суперпозицию электромагнитных

волн, распространяющихся в вакууме со скоростью света c . Рассмотрим теперь электромагнитное поле в присутствии зарядов и токов.

Предположим, что известны плотности зарядов $\rho(t, \mathbf{r})$ и токов $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$, удовлетворяющие закону сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{r}) + \operatorname{div} \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (41.1)$$

Для нахождения полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , порожденных этими источниками, воспользуемся уравнениями Максвелла (6.4):

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (\text{а}), \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho \quad (\text{б}), \quad (41.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{в}), \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{г}).$$

Чтобы удовлетворить уравнению (41.2г), положим

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (41.3)$$

Тогда уравнение (41.2в) примет вид

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

с очевидным решением

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (41.4)$$

Подстановка (41.3), (41.4) в оставшиеся уравнения (41.2) приводит к следующим уравнениям для потенциалов φ и \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \Delta \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} &= -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (41.5)$$

Однако равенства (41.3), (41.4) определяют электромагнитные потенциалы φ и \mathbf{A} неоднозначно, так как поля \mathbf{E} и \mathbf{B} не изменяются при замене:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\psi, \quad \varphi = \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (41.6)$$

где ψ — произвольный скаляр. Преобразование (41.6) называется *калибровочным*.

Неоднозначностью определения потенциалов можно воспользоваться для упрощения полученных уравнений (41.5). К примеру, Лоренц предложил накладывать на потенциалы условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (41.7)$$

известное как *условие Лоренца*. Если первоначально введенные потенциалы φ' , \mathbf{A}' не удовлетворяют этому условию, то новые потенциалы φ , \mathbf{A} , связанные со старыми калибровочным преобразованием (41.6), будут ему удовлетворять, если скаляр ψ считать решением уравнения

$$\square \psi = - \left(\operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right).$$

При этом очевидно, что ψ определено с точностью до решения ψ_0 уравнения Даламбера $\square\psi_0=0$.

Итак, наложив на потенциалы условие Лоренца (41.7), получим для их определения следующую систему уравнений:

$$\square\varphi = -4\pi\rho, \quad \square\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \text{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \quad (41.8)$$

Задача 41.1. Использовать «вывернутые» потенциалы φ , \mathbf{a} , \mathbf{A} , сделав подстановку $\mathbf{E} = -\nabla\varphi + \text{rot}\mathbf{a}$, $\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} + \text{rot}\mathbf{A}$. Получить для них уравнения, наложив дополнительные условия $\text{div}\mathbf{a} = \text{div}\mathbf{A} = 0$.

Заметим, что вместо условия Лоренца можно наложить на потенциалы и любое другое условие. Например, часто встречается условие кулоновской, или поперечной, калибровки

$$\text{div}\mathbf{A} = 0. \quad (41.9)$$

В этом случае из (41.5) вытекают следующие уравнения для потенциалов:

$$\square\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right), \quad (41.10)$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad \text{div}\mathbf{A} = 0.$$

Как видно, уравнение для потенциала φ оказывается статическим, чем и обусловлено первое название использованной калибровки — «кулоновская». Второе название показывает, что для плоских волн, когда $\mathbf{A} \sim \exp[i(\mathbf{kr})]$, (41.9) эквивалентно условию «поперечности» $(\mathbf{kA}) = 0$.

Несмотря на множество возможных дополнительных условий, система уравнений (41.8) используется чаще других, ибо содержит одинаковые уравнения для φ и \mathbf{A} . В связи с этим вполне достаточно решить только уравнение для скалярного потенциала φ , а векторный потенциал \mathbf{A} получится формальной заменой $\rho \rightarrow \mathbf{j}/c$. Таким образом, нахождение электромагнитного поля, порожденного заданными источниками, сводится к решению уравнения

$$\square\varphi = -4\pi\rho. \quad (41.11)$$

Существует несколько методов его решения. Воспользуемся наиболее простым и физически наглядным методом функций Грина. Функцией Грина оператора Даламбера называется функция $G(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}')$, удовлетворяющая уравнению

$$\square G = -\delta(t-t')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (41.12)$$

Нетрудно видеть, что знание функции Грина позволяет получить решение уравнения (41.11) простым интегрированием:

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int G(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') \rho(t', \mathbf{r}') dV' + \varphi_0, \quad (41.13)$$

где φ_0 — некоторое решение уравнения Даламбера.

Физически функция Грина представляет собой потенциал, порожденный точечным мгновенно действующим источником. Заменой переменных $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $T = t - t'$ всегда можно добиться, чтобы этот источник находился в начале координат $\mathbf{R} = 0$ и включался в момент времени $T = 0$. Поэтому простейшая функция Грина является сферически симметричной по переменной \mathbf{R} и удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (RG) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} = \frac{1}{2\pi R} \delta'(R) \delta(T), \quad (41.14)$$

где мы воспользовались представлением трехмерной δ -функции в сферических координатах (см. задачу 3.1): $\delta(\mathbf{r}) = -(2\pi r)^{-1} \delta'(r)$.

Сделаем теперь замену переменных, уже использованную в § 38:

$$\xi = R - cT, \quad \eta = R + cT, \quad u = RG. \quad (41.15)$$

Тогда уравнение (41.14) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{c}{4\pi} \delta(\eta - \xi) \delta'(\xi). \quad (41.16)$$

Нам достаточно указать какое-либо частное решение u_1 уравнения (41.16), что легко сделать, дважды проинтегрировав его правую часть. Однако результат будет зависеть от выбора пределов интегрирования, для установления которых нужно привлечь некоторые дополнительные сведения об искомом решении.

В частности, если принять *физический принцип причинности*, согласно которому поле порождается источниками и до их включения должно отсутствовать, то необходимо наложить условие $G(T < 0) = 0$. Соответствующая функция Грина называется *запаздывающей*. Для ее получения нужно выбрать частное решение u_1 , исчезающее при $T \rightarrow -\infty$. Замечая, что при фиксированном R и $T \rightarrow -\infty$, очевидно, $\xi \rightarrow +\infty$, $\eta \rightarrow -\infty$, искомое решение u_1 можно получить следующим интегрированием правой части (41.16):

$$u_1(\xi, \eta) = -\frac{c}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} d\xi' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \delta(\eta' - \xi') \delta'(\xi'). \quad (41.17)$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся формулой, вытекающей из свойств δ -функции:

$$\int_{-\infty}^x f(x') \delta(x' - y) dx' = \theta(x - y) f(y), \quad (41.18)$$

где $\theta(x - y)$ — ступенчатая функция Хевисайда [$\theta(x) = (1 + \text{sign } x)/2$]. С учетом (41.18) находим

$$u_1(\xi, \eta) = -\frac{c}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} \theta(\eta - \xi') \delta'(\xi') d\xi'.$$

Выполняя интегрирование по частям и замечая, что согласно (41.18) $\theta'(x) = \delta(x)$, имеем

$$u_1 = \frac{c}{4\pi} \theta(\eta - \xi) \delta(\xi) - \frac{c}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} \delta(\eta - \xi') \delta(\xi') d\xi' = \frac{c}{4\pi} \theta(\eta - \xi) [\delta(\xi) - \delta(\eta)]$$

Возвращаясь к переменным R и T и учитывая (38.15), находим

$$u_1(T, R) = \frac{c}{4\pi} \theta(T) [\delta(R - cT) - \delta(R + cT)] = c^2 R \theta(T) D_0(T, R).$$

Поскольку $u_1(T < 0) = 0$, то функция Грина $G = u_1 R^{-1}$ является запаздывающей и имеет вид

$$G^{\text{зап}}(T, R) = c^2 \theta(T) D_0(T, R). \quad (41.19)$$

Далее, так как при подстановке (41.19) в (41.13) вклад в интеграл будет давать только область $T > 0$, в которой $\theta(T) = 1$ и $D_0(T, R) = \delta(R - cT)/(4\pi R c)$, то (41.19) эквивалентно представлению

$$G^{\text{зап}}(T, R) = \frac{c}{4\pi R} \delta(R - cT), \quad (41.19a)$$

которое обычно и используется. Полученное решение описывает сферическую волну, расходящуюся от источника

Приведем еще другой метод решения уравнения (41.12), использующий преобразование Фурье по времени. В теории интеграла Фурье доказывается справедливость следующего представления для δ -функции.

$$\delta(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega T} d\omega.$$

Используя его и записывая преобразование Фурье для функции Грина

$$G(T, \mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega T} G_\omega(\mathbf{R}) d\omega,$$

находим, что $G_\omega(\mathbf{R})$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + \omega^2/c^2) G_\omega(\mathbf{R}) = -\delta(\mathbf{R}).$$

Соответствующее однородное уравнение (при $R \neq 0$) имеет простые решения вида $\exp(\pm i\omega R/c)/R$. Поэтому метод вариации постоянных подсказывает подстановку $G_\omega(\mathbf{R}) = v(R)/R$. Учитывая (3.6) и свойство δ -функции, выражающееся соотношением $f(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{R}) = f(0) \delta(\mathbf{R})$, найдем, что $v(R)$ подчиняется уравнению

$$-4\pi \cdot (0) \cdot v(R) + \frac{1}{R} \left(v'' + \frac{\omega^2}{c^2} v \right) = -\delta(R),$$

которое, в частности, удовлетворяется, если

$$v(0) = 1/(4\pi), \quad v'' + \omega^2 v/c^2 = 0.$$

Таким образом, частное решение уравнения для $G_\omega(\mathbf{R})$ имеет вид

$$G_\omega(R) = \frac{1}{4\pi R} \left[A \exp\left(i \frac{\omega R}{c}\right) + B \exp\left(-i \frac{\omega R}{c}\right) \right],$$

где постоянные A и B связаны условием $A + B = 1$. Для $A = 1, B = 0$ это решение приводит к функции Грина

$$G(T, R) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i \frac{\omega}{c} (R - cT)\right] \frac{d\omega}{R} = \frac{c}{4\pi R} \delta(R - cT) = G^{\text{зап}}.$$

Замечая, что уравнение (41.14) инвариантно относительно замены $T \rightarrow -T$, другое его решение можно получить из (41.19) указанной заменой. Оно будет соответствовать опережающей функции Грина

$$G^{\text{опер}}(T, R) = -c^2 \theta(-T) D_0(T, R) = \frac{c}{4\pi R} \delta(R + cT), \quad (41.20)$$

исчезающей при $T > 0$, а при $T < 0$ описывающей сферическую волну, сходящуюся к источнику. Очевидно, что такое решение противоречит физическому принципу причинности и на этом основании обычно отбрасывается. Однако следует заметить, что разность запаздывающей и опережающей функций Грина [см. (38.15)] равна

$$G^{\text{зап}} - G^{\text{опер}} = c^2 D_0, \quad (41.21)$$

т. е. соответствует решению уравнения Даламбера, которое физически можно интерпретировать как влияние бесконечно удаленных источников. Поэтому, если такое влияние не исключено, отбрасывать опережающие решения нецелесообразно.

Очевидно, что произвольную функцию Грина G оператора Даламбера всегда можно представить в виде

$$G(T, \mathbf{R}) = G^{\text{зап}}(T, R) + G_0(T, \mathbf{R}), \quad (41.22)$$

где G_0 — некоторое решение уравнения Даламбера. В частности, можно рассмотреть функцию Грина

$$G^{(a)} = G^{\text{зап}} - ac^2 D_0, \quad a = \text{const}, \quad (41.23)$$

которая при $a=0$ совпадает с запаздывающей, а при $a=1$ — с опережающей. Если принять физический принцип причинности и ограничиться запаздывающей функцией Грина, то согласно (41.13) получится следующее частное решение уравнений поля (41.8):

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{r}) &= \int \rho \left(t - \frac{R}{c}, \mathbf{r}' \right) \frac{dV'}{R}, \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) &= \int \mathbf{j} \left(t - \frac{R}{c}, \mathbf{r}' \right) \frac{dV'}{cR}, \end{aligned} \quad (41.24)$$

известное как *запаздывающие потенциалы*.

Аналогично, если в (41.13) использовать опережающую функцию Грина (41.20), то получится другое частное решение — *опережающие потенциалы*, — отличающееся от (41.24) тем, что в подынтегральных выражениях стоит $t + R/c$ вместо $t - R/c$.

Задача 41.2. Показать, что запаздывающие потенциалы удовлетворяют условию Лоренца.

Чтобы получить общее решение уравнений Максвелла, необходимо к запаздывающему решению (41.24) добавить произвольное решение φ_0, \mathbf{A}_0 уравнения Даламбера, удовлетворяющее условию Лоренца. Например, если воспользоваться представлением (38.16) для решения уравнения Даламбера, то наиболее общее выражение для скалярного потенциала φ , удовлетворяющее уравнениям поля (41.8), можно записать в виде

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \int \rho \left(t - \frac{R}{c}, \mathbf{r}' \right) \frac{dV'}{R} + \int \left[D_0(t, R) g(\mathbf{r}') + \frac{\partial}{\partial t} D_0(t, R) f(\mathbf{r}') \right] dV', \quad (41.25)$$

где f и g — произвольные функции. Аналогичное выражение можно получить и для векторного потенциала A .

Выбор того или иного решения обусловлен характером физической задачи, принятыми граничными и начальными условиями. В обычной постановке задачи зависящая от времени часть ρ и \mathbf{j} включается лишь в некоторый момент времени t_0 . Естественно, что влияние такого включения источников должно проявиться несколько позже, т. е. при $t > t_0$ (принцип причинности), и поэтому физически допустимым решением является лишь запаздывающее. Однако не исключена и другая возможность, когда электромагнитное поле порождается бесконечно удаленными источниками. В таком случае соответствующее решение будет выглядеть как свободное и должно добавляться к запаздывающему решению.

Физическая выделенность запаздывающих решений обусловлена тем, что в обычной постановке задачи мы хотим описать будущее некоторой системы, зная ее прошлое. Однако вполне допустима и другая постановка задачи, когда прошлое системы необходимо восстановить по ее настоящему и будущему, т. е. рассмотреть обратную эволюцию системы. Нетрудно видеть, что в этом случае должны использоваться опережающие решения. Одно из интересных проявлений опережающих решений будет рассмотрено нами позже в связи с задачей о реакции излучения (см. § 47).

В заключение отметим, что наличие двух типов равноправных решений — запаздывающих и опережающих — у системы уравнений (41.8) связано с инвариантностью оператора Даламбера при отражении времени. Выбор же запаздывающего решения выделяет направление течения времени, что неизбежно при описании макроскопических электромагнитных процессов.

Отбрасывание опережающих потенциалов можно обосновать, исходя из более общих — *термодинамических* соображений. Согласно второму закону термодинамики, невозможно создать тепловую машину второго рода, которая непрерывно совершала бы работу за счет охлаждения единственного резервуара теплоты. Если окружающее излучатель пространство, заполненное электромагнитным излучением, рассматривать как тепловой резервуар, то излучатель может извлекать из него полезную работу лишь при отрицательном среднем потоке электромагнитной энергии (т. е. при потоке энергии к излучателю) и будет затрачивать работу на излучение при положительном среднем потоке. Но средний поток энергии положителен в случае использования запаздывающих потенциалов и отрицателен в случае опережающих (см. § 43). Второе начало запрещает отрицательный поток энергии от излучателя, поэтому можно считать опережающие потенциалы запрещаемыми вторым началом термодинамики.

§ 42. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ И МАГНИТНЫЙ ВЕКТОРЫ ГЕРЦА

Если система источников нейтральна, т. е. удовлетворяет условию

$$\int \rho dV = 0, \quad (42.1)$$

то (см. задачу 2.2) закон сохранения заряда (41.1) будет тождест-

венно выполнен, если ввести поляризованность \mathbf{P} и намагниченность \mathbf{M} , положив:

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t + c \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (42.2)$$

В таком случае электромагнитные потенциалы φ и \mathbf{A} могут быть найдены из уравнений:

$$\begin{aligned} \square \varphi &= 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}, \\ \square \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (42.3)$$

Для того чтобы выполнить условие Лоренца, удобно ввести электрический $\mathbf{\Pi}$ и магнитный \mathbf{Z} векторы Герца, сделав подстановку:

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{Z}. \quad (42.4)$$

Тогда уравнения (42.3) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\square \mathbf{\Pi} + 4\pi \mathbf{P}) + \operatorname{rot} (\square \mathbf{Z} + 4\pi \mathbf{M}) &= 0, \\ \operatorname{div} (\square \mathbf{\Pi} + 4\pi \mathbf{P}) &= 0. \end{aligned} \quad (42.5)$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\square \mathbf{\Pi} + 4\pi \mathbf{P} = \operatorname{rot} \mathbf{a},$$

где \mathbf{a} — произвольный вектор. Тогда первое из уравнений (42.5) сводится к следующему:

$$\operatorname{rot} \left(\square \mathbf{Z} + 4\pi \mathbf{M} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right) = 0.$$

Из него в свою очередь вытекает, что

$$\square \mathbf{Z} + 4\pi \mathbf{M} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \nabla \chi,$$

где χ — произвольный скаляр.

Воспользуемся теперь неоднозначностью векторов \mathbf{P} и \mathbf{M} (см. задачу 2.2), замечая, что подстановка

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} - \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{a}, \quad \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} - \frac{1}{4\pi} \nabla \chi + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$$

не меняет источников ρ , \mathbf{j} , а тем самым и поля, ими порождаемые. Поэтому без ограничения общности можно положить $\mathbf{a} = 0$ и $\chi = 0$. В результате уравнения для векторов Герца $\mathbf{\Pi}$ и \mathbf{Z} упростятся:

$$\square \mathbf{\Pi} = -4\pi \mathbf{P}, \quad \square \mathbf{Z} = -4\pi \mathbf{M}. \quad (42.6)$$

Выбирая запаздывающее решение этих уравнений как наиболее соответствующее физической постановке задачи*, имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}(t, \mathbf{r}) &= \int \mathbf{P}\left(t - \frac{R}{c}, \mathbf{r}'\right) \frac{dV'}{R}; \\ \mathbf{Z}(t, \mathbf{r}) &= \int \mathbf{M}\left(t - \frac{R}{c}, \mathbf{r}'\right) \frac{dV'}{R}.\end{aligned}\quad (42.7)$$

Легко видеть, что в статическом пределе ($c \rightarrow \infty$) формулы (42.7) переходят соответственно в (21.13) и (30.6), т. е. векторы $\mathbf{\Pi}$ и \mathbf{Z} переходят в соответствующие статические векторы Герца.

Используя решение (42.7), по формулам (42.4) нетрудно найти потенциалы φ , \mathbf{A} , а затем поля \mathbf{E} и \mathbf{B} . Последние можно выразить непосредственно через векторы Герца:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -4\pi\mathbf{P} + \text{rot rot } \mathbf{\Pi} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{Z}, \\ \mathbf{B} &= \text{rot rot } \mathbf{Z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{\Pi}.\end{aligned}\quad (42.8)$$

§ 43. ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ВИБРАТОРОВ ГЕРЦА

В качестве полезного применения векторов Герца вычислим электромагнитное поле, создаваемое изменяющимся во времени дипольным моментом $\mathbf{p}(t)$. Конкретной реализацией такого переменного диполя может служить, например, поляризованная молекула с переменным расстоянием $l(t)$ между ее разделенными зарядами или простейшая антенна — *электрический вибратор Герца*, длина которого l постоянна, а заряд отдельного полюса меняется со временем (рис. 43.1). Если рассматривать поле вибратора на расстоянии $r \gg l$, то его можно считать сосредоточенным диполем и положить $\mathbf{P} = \mathbf{p}(t) \delta(\mathbf{r})$, $\mathbf{M} = 0$. Тогда из (42.7) находим векторы Герца:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{r} \mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad \mathbf{Z} = 0. \quad (43.1)$$

Для получения поля вибратора используем формулы (42.8) с учетом того, что вне вибратора $\mathbf{P} = 0$, т. е.

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{\Pi}.$$

Согласно (2П.4в), имеем

$$\text{rot } \mathbf{\Pi} = \text{rot } \frac{\mathbf{p}(t - r/c)}{r} = -\frac{1}{r^3} [\mathbf{r}\mathbf{p}] - \frac{1}{r^2 c} [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}],$$

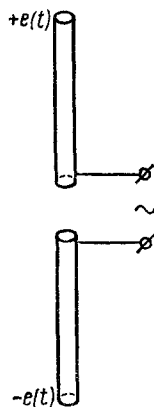


Рис. 43.1

* Предполагается, что векторы \mathbf{P} и \mathbf{M} изменяются со временем лишь начиная с некоторого момента времени t_0 .

где \mathbf{p} — функция запаздывающего аргумента $t' = t - r/c$; точкой обозначено дифференцирование по времени. Далее, используя (2П.4г), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Pi &= -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \operatorname{div} \mathbf{p} + \mathbf{p} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} - (\mathbf{p} \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{r^3} (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{p} - \\ &= -\frac{\mathbf{r}}{r^2 c} \operatorname{div} \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^2 c} - (\dot{\mathbf{p}} \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^2 c} + \frac{1}{r^2 c} (\mathbf{r} \nabla) \dot{\mathbf{p}} = \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r^2 c} (\mathbf{r} \ddot{\mathbf{p}}) - \frac{\mathbf{p}}{r^3} + 3 \frac{\mathbf{r} (\mathbf{p} \dot{\mathbf{r}})}{r^5} - \frac{\dot{\mathbf{p}}}{r^2 c} + \frac{\mathbf{r}}{r^3 c^2} (\mathbf{r} \ddot{\mathbf{p}}) + 2 \frac{\mathbf{r} (\dot{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{r}})}{r^4 c} - \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{r c^2}. \end{aligned}$$

В результате получаем следующие выражения для поля вибратора:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{r^3} \left\{ 3\mathbf{n} (\mathbf{n} \dot{\mathbf{p}}) - \dot{\mathbf{p}} + \frac{r}{c} [3\mathbf{n} (\mathbf{n} \ddot{\mathbf{p}}) - \ddot{\mathbf{p}}] + \frac{r^2}{c^2} [\mathbf{n} [\mathbf{n} \ddot{\ddot{\mathbf{p}}}}] \right\}, \\ \mathbf{B} &= -\frac{1}{r^2 c} [\mathbf{n} \dot{\mathbf{p}}] - \frac{1}{r c^2} [\mathbf{n} \ddot{\mathbf{p}}], \end{aligned} \quad (43.2)$$

где введен единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

В выражениях (43.2) можно выделить три составные части:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)}$$

в зависимости от степени их убывания при $r \rightarrow \infty$. Первая часть, убывающая как r^{-3} , представляет собой поле квазистатического диполя в ближней (квазистационарной) зоне:

$$\mathbf{E}^{(0)} = \frac{1}{r^3} [3\mathbf{n} (\mathbf{n} \dot{\mathbf{p}}) - \dot{\mathbf{p}}], \quad \mathbf{B}^{(0)} = 0. \quad (43.3)$$

Вторая часть, убывающая как r^{-2} , представляет собой поле квазистатического тока поляризации $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{r^2 c} [3\mathbf{n} (\mathbf{n} \ddot{\mathbf{p}}) - \ddot{\mathbf{p}}], \quad \mathbf{B}^{(1)} = -\frac{1}{r^2 c} [\mathbf{n} \dot{\mathbf{p}}]. \quad (43.4)$$

Но если магнитное поле $\mathbf{B}^{(1)}$ возникает в полном соответствии с законом Био—Савара—Лапласа (1.8), то появление электрического поля $\mathbf{E}^{(1)}$ обязано исключительно запаздыванию. Нетрудно видеть, что на малых расстояниях этот член можно не учитывать, так как

$$\mathbf{p}(t - r/c) \approx \mathbf{p}(t) - \dot{\mathbf{p}} r/c$$

и слагаемое в \mathbf{E} , пропорциональное r^{-2} , исчезает. Однако имеется область, в которой этот член существенен.

Наибольший интерес представляет третья часть поля вибратора, зависящая от $\ddot{\mathbf{p}}$ и убывающая на больших расстояниях как r^{-1} :

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{r c^2} [\mathbf{n} [\mathbf{n} \ddot{\ddot{\mathbf{p}}}}], \quad \mathbf{B}^{(2)} = -\frac{1}{r c^2} [\mathbf{n} \ddot{\mathbf{p}}]. \quad (43.5)$$

Это слагаемое, обычно называемое *полем излучения*, соответствует *дальней (волновой) зоне*. Поскольку при достаточно больших r это поле является преобладающим, то именно им определяется поток излучаемой вибратором электромагнитной энергии.

Для оценки размеров ближней и дальней зон введем следующие длины:

$$a_1 = \min_{\{t\}} \frac{p_0 c}{|\dot{\mathbf{p}}|}, \quad a_2 = \min_{\{t\}} c \left(\frac{p_0}{|\dot{\mathbf{p}}|} \right)^{1/2},$$

где $p_0 = \max_{\{t\}} p(t)$. Тогда с помощью (43.2) нетрудно установить, что ближняя и дальняя зоны определяются соответственно неравенствами

$$r \ll \min \{a_1, a_2\}, \quad r \gg (a_2/a_1) \max \{a_1, a_2\}.$$

Замечая, что векторы $\mathbf{E}^{(2)}$, $\mathbf{B}^{(2)}$, \mathbf{n} образуют ортогональную тройку:

$$\mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{B}^{\text{изл}} = -\frac{1}{rc^2} [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}}], \quad \mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}^{\text{изл}} = [\mathbf{B}^{\text{изл}}\mathbf{n}], \quad (43.6)$$

нетрудно подсчитать вектор Пойнтинга (рис. 43.2):

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}^{\text{изл}}\mathbf{B}^{\text{изл}}] = \frac{n}{4\pi c^3 r^2} [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}}]^2. \quad (43.7)$$

Интегрируя (43.7) по сфере радиуса r , находим мощность, излучаемую вибратором:

$$P_1 = \oint (\mathbf{nS}) r^2 d\Omega = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2. \quad (43.8)$$

Особенность формулы (43.8) состоит в том, что $\ddot{\mathbf{p}}$ необходимо брать в запаздывающий момент времени $t' = t - r/c$.

Задача 43.1. Показать, что импульс, уносимый электромагнитным излучением вибратора Герца, равен нулю.

Формулу (43.8) можно использовать для вычисления мощности излучения медленно движущегося одиночного заряда. В самом деле, для этого достаточно рассмотреть диполь, один из зарядов которого неподвижен. Примером такой системы может служить атом водорода, в котором легкий электрон движется вокруг практически неподвижного тяжелого протона (рис. 43.3). Поскольку

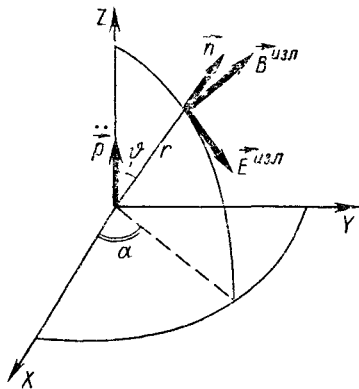


Рис. 43.2

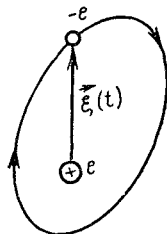


Рис. 43.3

неподвижный заряд создает лишь статическое поле, то вся излучаемая энергия определяется подвижным зарядом e . Поэтому, полагая в (43.8) $\mathbf{p} = e\boldsymbol{\xi}(t)$, для мощности излучения одиночного заряда

находим

$$P_1 = \frac{2}{3c^3} \left| e \ddot{\xi} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 = \frac{2e^2}{3c^3} \left| \dot{v} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2. \quad (43.9)$$

Это соотношение известно как *формула Лармора*.

Практический интерес представляет *гармонический вибратор Герца*, когда зависимость $p(t)$ имеет вид

$$p = p_0 \cos \omega t. \quad (43.10)$$

В этом случае применение формулы (43.2) дает:

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{-i\omega(t-r/c)}), \quad \mathbf{B} = \text{Re}(\mathbf{B}_0 e^{-i\omega(t-r/c)}),$$

где амплитуды \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 удобно представить в виде разложения по степеням $kr = \omega r/c = 2\pi r/\lambda$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= [3n(\mathbf{np}_0) - p_0](1 - ikr)/r^3 - [n[\mathbf{np}_0]]k^2/r, \\ \mathbf{B}_0 &= [n\mathbf{p}_0](1 - ikr)ik/r^2. \end{aligned} \quad (43.11)$$

При этом в *ближней зоне*, как и в статике, получим ($kr \ll 1$)*:

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla[(\mathbf{p}_0 r)/r^3], \quad \mathbf{B}_0 = 0,$$

тогда как в *волновой зоне* ($kr \gg 1$)

$$\mathbf{E}_0 = k^2 [n[\mathbf{np}_0]]/r, \quad \mathbf{B}_0 = [n\mathbf{E}_0].$$

В этом случае мощность излучения равна

$$P_1 = \frac{2\omega^4 p_0^2}{3c^3} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right), \quad (43.12)$$

или после усреднения по времени

$$\bar{P}_1 = \omega^4 p_0^2 / (3c^3) = (2\pi/\lambda)^4 (p_0^2 c/3). \quad (43.13)$$

Отметим важное для практики обстоятельство: мощность излучения вибратора обратно пропорциональна λ^4 .

Полученные результаты можно применить и для расчета излучения простейшей антенны, для которой $p(t) = le(t)$, $\dot{p} = l\dot{I}$. Считая ток возбуждения в антенне периодическим ($I = I_0 \cos \omega t$), для средней мощности излучения найдем**

$$\bar{P}_1 = \bar{I}^2 2l^2 \omega^2 / (3c^3) = \bar{I}^2 R_1, \quad (43.14)$$

где

$$R_1 \equiv \frac{2l^2 \omega^2}{3c^3} = \frac{2}{c} \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \right)^2 \quad (43.15)$$

называется *сопротивлением излучения антенны* или ее *эквивалентным сопротивлением*, поскольку потери на излучение эквивалентны тепловым потерям на омическом сопротивлении R_1 .

Задача 43.2. Рассчитать энергию, теряемую электроном при расщеплении на ядре с порядковым номером Z .

* Нетрудно видеть, что в этом случае $a_1 = a_2 = \lambda/(2\pi) = k^{-1}$.

** В данном случае дипольное приближение применимо, если $\lambda \gg l$ (см. § 44).

В качестве другого применения векторов Герца рассмотрим магнитный вибратор Герца, представляющий собой, например, небольшую рамку с током, обладающую магнитным моментом $\mathbf{m}(t)$. Рассматривая поле рамки на большом расстоянии от нее, магнитный момент можно считать точечным, т. е. положить $\mathbf{M} = \mathbf{m}(t) \delta(\mathbf{r})$, $\mathbf{P} = 0$. Тогда с помощью (42.7) находим следующие векторы Герца:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{r} \mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right), \quad \mathbf{H} = 0. \quad (43.16)$$

Вычисление электромагнитного поля по векторам Герца (43.16) аналогично случаю электрического вибратора Герца, что позволяет использовать результаты последних расчетов, если в них совершить подстановку: $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}$, $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{V}$, $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{E}$. В итоге находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{cr} [\mathbf{nm}\dot{}] + \frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{m}}], \\ \mathbf{V} &= \frac{1}{r^3} \left\{ 3\mathbf{n}(\mathbf{nm}) - \mathbf{m} + \frac{r}{c} [3\mathbf{n}(\mathbf{nm}\dot{}) - \dot{\mathbf{m}}] + \frac{r^2}{c^2} [\mathbf{n}[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{m}}]] \right\}. \end{aligned} \quad (43.17)$$

При этом мощность излучения равна

$$P_1 = 2(\ddot{\mathbf{m}})^2 / (3c^3). \quad (43.18)$$

Для монохроматического магнитного вибратора Герца

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \cos \omega t, \quad \mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{i(kr - \omega t)}), \quad \mathbf{V} = \text{Re}(\mathbf{V}_0 e^{i(kr - \omega t)}),$$

где амплитуды \mathbf{E}_0 и \mathbf{V}_0 имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= -[\mathbf{nm}_0](1 - ikr) ik/r^2, \\ \mathbf{V}_0 &= [3\mathbf{n}(\mathbf{nm}_0) - \mathbf{m}_0](1 - ikr)/r^3 - [\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{m}_0]] k^2/r. \end{aligned} \quad (43.19)$$

Усредненная по времени мощность излучения, очевидно, равна

$$\tilde{P}_1 = \omega^4 m_0^2 / (3c^3) = (m_0^2 c / 3) (2\pi/\lambda)^4. \quad (43.20)$$

Если в качестве примера взять рамочную антенну с током силой $I = I_0 \cos \omega t$ и постоянной площадью рамки S , то ее магнитный момент равен $m = IS/c$, а средняя по времени мощность излучения

$$\tilde{P}_1 = \tilde{I}^2 \omega^4 S^2 / (3c^5) = \tilde{I}^2 R_1, \quad (43.21)$$

где введено эквивалентное сопротивление антенны

$$R_1 = \frac{2\omega^4 S^2}{3c^5} = \frac{2}{3c} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 S^2. \quad (43.22)$$

44. МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассмотрим систему источников ρ , \mathbf{j} , занимающую некоторую ограниченную область V , которую можно заключить в сферу конечного радиуса a . При подсчете мощности излучения этой системы уже на основании оценок типа (43.14) и (43.21) можно заключить, что следует исключить из рассмотрения статические части ρ и \mathbf{j} . Поэтому

систему можно заведомо считать *нейтральной*. Кроме того, если задаться некоторой минимальной допустимой мощностью излучения (порог чувствительности детектора), то следует исключить и низкочастотную составляющую источников ρ и \mathbf{j} , т. е. можно считать, что их разложения в интеграл Фурье начинаются с некоторой минимальной частоты ω_0 :

$$\begin{aligned}\rho(t, \mathbf{r}) &= \int_{|\omega| \geq \omega_0} \exp(-i\omega t) \rho_\omega(\mathbf{r}) d\omega; \\ \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) &= \int_{|\omega| \geq \omega_0} \exp(-i\omega t) \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) d\omega.\end{aligned}\quad (44.1)$$

Из закона сохранения заряда (41.1) выводим, что

$$-i\omega\rho_\omega + \operatorname{div} \mathbf{j}_\omega = 0, \quad (44.2)$$

т. е. справедливо верное для нейтральных систем представление

$$\rho(t, \mathbf{r}) = -\operatorname{div} \int_{|\omega| \geq \omega_0} \frac{i}{\omega} \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (44.3)$$

Производя также разложение в интеграл Фурье запаздывающих потенциалов (41.24), представим их фурье-образы в виде

$$\Phi_\omega(\mathbf{r}) = \int_V \rho_\omega(\mathbf{r}') \frac{\exp(ikR)}{R} dV', \quad \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') \frac{\exp(ikR)}{cR} dV', \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (44.4)$$

Если нас интересует поле вне системы источников, т. е. при $r > a$, то можно воспользоваться разложением в ряд Тейлора

$$\frac{\exp(ikR)}{R} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (-\mathbf{r}' \cdot \nabla)^l \frac{\exp(ikr)}{r}. \quad (44.5)$$

Подставляя (44.5) в (44.4), получаем мультипольное разложение запаздывающих потенциалов, которое с учетом нейтральности системы принимает вид

$$\begin{aligned}\Phi_\omega(\mathbf{r}) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int_V \rho_\omega(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^l \frac{\exp(ikr)}{r} dV', \\ \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{c l!} \int_V \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^l \frac{\exp(ikr)}{r} dV'.\end{aligned}\quad (44.6)$$

Вводя фурье-образы тензоров электрического и магнитного мультипольных моментов:

$$Q_\omega^{i_1 \dots i_l} \equiv \int_V \rho_\omega(\mathbf{r}') x^{i_1} \dots x^{i_l} dV', \quad (44.7)$$

$$\mathcal{M}_\omega^{i_1 \dots i_l} \equiv \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') x^{i_1} \dots x^{i_l} dV', \quad (44.8)$$

разложение (44.6) можно переписать в координатной форме:

$$\begin{aligned}\Phi_{\omega}(\mathbf{r}) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} Q_{\omega}^{i_1 \dots i_l} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \frac{\exp(ikr)}{r}, \\ \mathbf{A}_{\omega}(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \mathcal{M}_{\omega}^{i_1 \dots i_l} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \frac{\exp(ikr)}{r}.\end{aligned}\quad (44.9)$$

Рассмотрим теперь поведение потенциалов в волновой зоне, т. е. в области, где выполнено неравенство

$$kr \gg 1. \quad (44.10)$$

Ввиду неравенства $|\omega| \geq \omega_0 \equiv k_0 c$ (44.10) вытекает из условия

$$k_0 r \gg 1, \quad (44.11)$$

при выполнении которого можно положить

$$(\mathbf{r}' \nabla)^l \frac{e^{ikr}}{r} \approx \frac{e^{ikr}}{r} [ik(n\mathbf{r}')]^l \equiv \frac{e^{ikr}}{r} [i(k\mathbf{r}')]^l,$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$. Но тогда разложение (44.5) принимает вид

$$\frac{e^{ikR}}{R} \approx \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} [-i(k\mathbf{r}')]^l \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{e^{i(k\mathbf{R})}}{r}. \quad (44.12)$$

Подстановка (44.12) в (44.4) дает представление фурье-образов потенциалов в волновой зоне:

$$\Phi_{\omega}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{r} \int \rho_{\omega}(\mathbf{r}') e^{i(k\mathbf{R})} dV'; \quad \mathbf{A}_{\omega}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{rc} \int \mathbf{J}_{\omega}(\mathbf{r}') e^{i(k\mathbf{R})} dV', \quad (44.13)$$

откуда преобразованием Фурье получаются сами потенциалы:

$$\begin{aligned}\varphi(t, \mathbf{r}) &\approx \frac{1}{r} \int_V \rho \left[t - \frac{(n\mathbf{R})}{c}, \mathbf{r}' \right] dV', \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) &\approx \frac{1}{rc} \int_V \mathbf{J} \left[t - \frac{(n\mathbf{R})}{c}, \mathbf{r}' \right] dV',\end{aligned}\quad (44.14)$$

а также их мультипольное разложение:

$$\begin{aligned}\varphi(t, \mathbf{r}) &\equiv \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_l \approx \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{r l!} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^l Q^{i_1 \dots i_l} \left(t - \frac{r}{c} \right) n_{i_1} \dots n_{i_l}, \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) &\equiv \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{A}_l \approx \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r l!} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^l \mathcal{M}^{i_1 \dots i_l} \left(t - \frac{r}{c} \right) n_{i_1} \dots n_{i_l}.\end{aligned}\quad (44.15)$$

Задача 44.1. Показать, что в волновой зоне между потенциалами Φ и \mathbf{A} , а также между их мультипольными членами φ_l и \mathbf{A}_l выполняется связь

$$\Phi = (n\mathbf{A}), \quad \varphi_l = (n\mathbf{A}_{l-1}). \quad (44.16)$$

Из (44.13) следует, что ряды в (44.15) сходятся тем быстрее, чем лучше выполнено неравенство $ka \ll 1$, поскольку отношение последовательных мультипольных членов по порядку величины равно

$$|A_l/A_{l-1}| \sim |\Phi_{l+1}/\Phi_l| \sim ka,$$

где предполагается, что частота $\omega = kc$ дает наиболее существенный вклад в фурье-разложение потенциалов.

Используя полученные представления для потенциалов, нетрудно вычислить в волновой зоне и сами поля \mathbf{E} и \mathbf{B} . При этом [см. (44.14)] можно пользоваться правилом

$$\nabla = -\frac{n}{c} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (44.17)$$

В итоге получаем:

$$\mathbf{B}^{\text{изл}} = -\frac{1}{c} [\mathbf{n}\dot{\mathbf{A}}], \quad \mathbf{E}^{\text{изл}} = -[\mathbf{n}\mathbf{E}^{\text{изл}}], \quad (44.18)$$

где \mathbf{A} определяется выражением (44.15). Аналогично получаем в волновой зоне и вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{n}{4\pi c} [\mathbf{n}\mathbf{A}]^2. \quad (44.19)$$

Задача 44.2. Показать, что если в разложении (44.15) ограничиться двумя первыми членами, что допустимо при выполнении условий типа $|\rho|a \ll c|\rho|$, то мощность излучения может быть представлена в виде суммы электрического дипольного, магнитного дипольного и электрического квадрупольного излучений:

$$P_I = \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{p}})^2 + \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{m}})^2 + \frac{1}{60c^5} [3\ddot{\mathbf{Q}}:\ddot{\mathbf{Q}} - (\text{Sp } \ddot{\mathbf{Q}})^2]. \quad (44.20)$$

Исходя из соотношений (44.2) и (44.16), можно утверждать, что электрический 2^l -поль будет давать мощность излучения того же порядка, что магнитный 2^{l-1} -поль при условии, что соответствующие мультипольные моменты отличны от нуля. Это обстоятельство имеет большое практическое значение и часто используется при оценке мощности излучения реальных систем.

§ 45. ИЗЛУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ

Пусть имеется линейная антенна длины l , в которой возбуждается ток частоты ω . Направляя ось Z вдоль антенны и замечая, что на ее концах $\mathbf{j} = 0$, исследуем тот простейший случай, когда в антенне возбуждена гармоническая стоячая волна тока плотностью

$$\mathbf{j} = \mathbf{I}_0 \sin[\pi N(z/l + 1/2)] \delta(x) \delta(y) \exp(-i\omega t), \quad (45.1)$$

где $\mathbf{I}_0 = I_0 \mathbf{e}_z$; N — некоторое целое число, определяющее тип возбуждения антенны. Особый интерес представляет резонансное возбуждение, когда $k \equiv \omega/c = \pi N/l$. В этом случае N представляет собой число полуволн тока, укладывающихся в длине антенны.

В соответствии с (44.3) можно положить

$$\rho = -\text{div } \mathbf{P}, \quad \mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t, \quad \mathbf{P} = i\mathbf{j} / \omega \quad (45.2)$$

и ввести электрический вектор Герца $\mathbf{\Pi}$, который в волновой зоне [см. (44.14)] может быть записан в виде

$$\mathbf{\Pi} \approx \frac{i}{\omega r} \int \mathbf{j} \left[t - \frac{(\mathbf{nR})}{c}, \mathbf{r}' \right] dV'. \quad (45.3)$$

Подставляя (45.1) в (45.3), находим

$$\mathbf{\Pi} \approx \frac{i}{\omega r} \mathbf{I}_0 e^{-i\omega t} \int_{-l/2}^{+l/2} \sin \left[\pi N \left(\frac{z'}{l} + \frac{1}{2} \right) \right] e^{i(\mathbf{kR})} dz'. \quad (45.4)$$

Используя сферические координаты, начало которых помещено в середину антенны, имеем $(\mathbf{kR}) = k(r - z' \cos \vartheta)$, и (45.4) принимает вид

$$\mathbf{\Pi} \approx \frac{i}{\omega r} \mathbf{I}_0 e^{-i\omega(t-r/c)} \int_{-l/2}^{+l/2} \sin \left[\pi N \left(\frac{z'}{l} + \frac{1}{2} \right) \right] e^{-ikz' \cos \vartheta} dz'. \quad (45.5)$$

Вычисление интеграла (45.5) дает

$$\mathbf{\Pi} \approx \frac{i\pi N}{l\omega r} \mathbf{I}_0 e^{-i\omega(t-r/c)} e^{i\pi N/2} \frac{\sin \left[\pi N/2 - (kl/2) \cos \vartheta \right]}{(\pi N/l)^2 - k^2 \cos^2 \vartheta}. \quad (45.6)$$

Заметим, что $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{\Pi}}/c = -ik\mathbf{\Pi}$. Поэтому [см. (44.19)] усредненная по времени угловая плотность мощности излучения равна

$$\frac{d\tilde{P}_1}{d\Omega} = r^2 |\tilde{\mathbf{S}}| = r^2 \frac{k^2 c}{4\pi} [\tilde{\mathbf{nA}}]^2 = r^2 \frac{k^2 c}{4\pi} [\tilde{\mathbf{n\Pi}}]^2,$$

или с учетом (45.6)

$$\frac{d\tilde{P}_1}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{8\pi c} \left(k \frac{\pi N}{l} \right)^2 \sin^2 \vartheta \frac{\sin^2 \left[\pi N/2 - (kl/2) \cos \vartheta \right]}{[(\pi N/l)^2 - k^2 \cos^2 \vartheta]^2}. \quad (45.7)$$

В дальнейшем нас будет интересовать случай резонансного излучения, когда $k = \pi N/l$ и (45.7) принимает вид

$$\frac{d\tilde{P}_1}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{8\pi c} \frac{\sin^2 \left[\pi N \sin^2 (\vartheta/2) \right]}{\sin^2 \vartheta}. \quad (45.8)$$

Из (45.8) видно, что минимумы излучения определяются условием $\sin \left[\pi N \sin^2 (\vartheta/2) \right] = 0$, откуда

$$\vartheta_m = 2 \arcsin \sqrt{m/N}; \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad (45.9)$$

т. е. число минимумов равно $N + 1$, а число максимумов совпадает с N и равно, таким образом, числу полуволн, укладываемых в длине антенны. Угловое распределение мощности излучения (диаграмма направленности) для $N = 1, 2, 3$ изображено на рис. 45.1.

Если N велико ($N \gg 1$), то первый максимум излучения приходится на угол $\vartheta \approx$

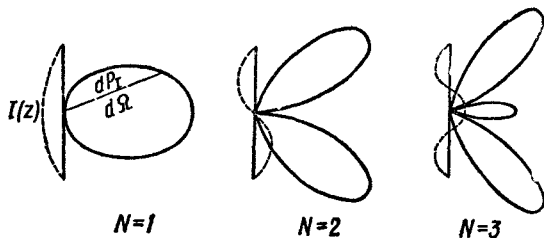


Рис. 45.1

$\approx \vartheta_1/2 \approx N^{-1/2}$. В этом случае

$$\frac{\sin [\pi N \sin^2 (\vartheta/2)]}{\sin \vartheta} \approx \sqrt{\frac{N}{2}},$$

в то время как для центрального максимума (если $N = 2n + 1$) $\vartheta = \pi/2$, т. е.

$$\frac{\sin [\pi N \sin^2 (\vartheta/2)]}{\sin \vartheta} = \pm 1.$$

Поэтому интенсивность первого бокового лепестка излучения антенны больше интенсивности центрального лепестка в $N/2$ раз, т. е. в основном излучение идет в направлении проводника антенны, который играет в этом случае роль ведущей линии (волновода).

Усредненная по времени полная мощность излучения антенны [см. (45.8)] равна

$$\widetilde{P}_1 = \oint \frac{d\widetilde{P}_1}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{2} R_1 I_0^2, \quad (45.10)$$

где сопротивление излучения

$$R_1 = \frac{1}{2c} \int_0^\pi \sin^2 \left(\pi N \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta}. \quad (45.11)$$

Заменой переменной $2\pi N \sin^2 (\vartheta/2) = x$ (45.11) приводится к виду

$$R_1 = \frac{1}{4c} \int_0^{2\pi N} (1 - \cos x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{4c} [\ln (2\pi N \gamma) - \text{Ci} (2\pi N)], \quad (45.12)$$

где $\gamma = 1,7811\dots$ — постоянная Эйлера, а $\text{Ci} (x) = - \int_x^\infty \cos x \frac{dx}{x}$ — интегральный косинус.

Очевидно, что при $N \gg 1$ членом $\text{Ci} (2\pi N)$ можно пренебречь. Тогда

$$R_1 \approx \ln (2\pi N \gamma) / (4c). \quad (45.13)$$

§ 46. ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА

Пусть точечный заряд e движется по заданной траектории $\mathbf{r} = \xi(t)$ со скоростью $\mathbf{v}(t) = \dot{\xi}(t)$. Для описания электромагнитного поля, порождаемого таким зарядом, введем плотности заряда и тока:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = e\delta[\mathbf{r} - \xi(t)]; \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = e\mathbf{v}(t)\delta[\mathbf{r} - \xi(t)]. \quad (46.1)$$

Кроме того, будем предполагать, что применимо запаздывающее решение уравнений поля, т. е. отсутствует как излучение, приходящее из бесконечности, так и тепловое излучение («температура вакуума равна нулю»).

В данном случае удобнее записать запаздывающие потенциалы в форме (41.13), воспользовавшись запаздывающей функцией Грина (41.19):

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{r}) &= c \int \rho(t', \mathbf{r}') R^{-1} \delta(R - cT) dV' dt'; \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) &= \int \mathbf{j}(t', \mathbf{r}') R^{-1} \delta(R - cT) dV' dt', \end{aligned} \quad (46.2)$$

где $T = t - t'$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Подставляя (46.1) в (46.2) и выполняя объемное интегрирование с учетом свойств δ -функции, находим:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{r}) &= e \int \delta\left[t' - t + \frac{1}{c} R(t', \mathbf{r})\right] R^{-1}(t', \mathbf{r}) dt'; \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) &= \frac{e}{c} \int \delta\left[t' - t + \frac{1}{c} R(t', \mathbf{r})\right] \mathbf{v}(t') R^{-1}(t', \mathbf{r}) dt', \end{aligned} \quad (46.3)$$

где $R(t', \mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(t')| = |\mathbf{R}|$.

Используем свойство (3.8) δ -функции, согласно которому для всякой функции $f(t')$, имеющей однократные нули $t' = t_i$, справедливо представление

$$\delta[f(t')] = \sum_i \frac{\delta(t' - t_i)}{|f'(t_i)|}. \quad (46.4)$$

В данном случае

$$f(t') = t' - t + R(t', \mathbf{r})/c, \quad (46.5)$$

поэтому

$$f'(t') = 1 - (\mathbf{n}\mathbf{v})/c, \quad (46.6)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$. Если считать, что заряд движется со скоростью $v < c$, то $f'(t') > 0$. При этом функция $f(t')$ монотонна и уравнение $f(t') = 0$ имеет единственный корень $t' = \zeta$:

$$\zeta = t - R(\zeta, \mathbf{r})/c. \quad (46.7)$$

Таким образом, согласно (46.4) и (46.6), имеем

$$\delta\left[t' - t + R(t', \mathbf{r})/c\right] = \delta(t' - \zeta) [1 - (\mathbf{n}\mathbf{v})/c]^{-1}. \quad (46.8)$$

Подставляя (46.8) в (46.3), преобразуем запаздывающие потенциалы:

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \frac{ec}{[cR - (\mathbf{v}\mathbf{R})]_{\zeta}}; \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \left[\frac{e\mathbf{v}}{cR - (\mathbf{v}\mathbf{R})} \right]_{\zeta}, \quad (46.9)$$

где индекс ζ означает, что выражение в скобке берется в запаздывающий момент времени, определяемый уравнением (46.7). Полученное решение (46.9) известно как *потенциалы Льенара — Вихерта*. Особенность их состоит в том, что электромагнитные потенциалы в точке наблюдения \mathbf{r} в момент времени t определяются положением и скоростью заряда в некоторый предшествующий момент времени $\zeta(t, \mathbf{r})$, вычисляемый из (46.7).

С помощью потенциалов Льенара—Вихерта нетрудно вычислить и поля \mathbf{E} и \mathbf{B} , создаваемые произвольно движущимся зарядом. Предварительно замечая, что

$$\partial \xi / \partial t = [1 - (\mathbf{n}\mathbf{v})/c]^{-1}, \quad \nabla \xi = -\mathbf{n} [c - (\mathbf{n}\mathbf{v})]^{-1}, \quad (46.10)$$

находим последовательно, опуская индекс запаздывания ξ :

$$\nabla(\mathbf{v}\mathbf{R}) = \mathbf{v} + \nabla \xi \partial(\mathbf{v}\mathbf{R}) / \partial \xi = \mathbf{v} - \mathbf{n} [(\dot{\mathbf{v}}\mathbf{R}) - v^2] [c - (\mathbf{n}\mathbf{v})]^{-1},$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = [\nabla \xi \dot{\mathbf{v}}] = -[\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}] [c - (\mathbf{n}\mathbf{v})]^{-1},$$

$$\begin{aligned} -\nabla\varphi &= \frac{ec}{[cR - (\mathbf{v}\mathbf{R})]^2} \nabla [cR - (\mathbf{v}\mathbf{R})] = \\ &= \frac{ec}{R^2 [c - (\mathbf{n}\mathbf{v})]^2} \left[-\mathbf{v} + \mathbf{n} \frac{c^2 - v^2 + (\dot{\mathbf{v}}\mathbf{R})}{c - (\mathbf{n}\mathbf{v})} \right], \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{e\dot{\mathbf{v}}}{R [c - (\mathbf{n}\mathbf{v})]^2},$$

$$-\frac{e\mathbf{v}}{R^2 [c - (\mathbf{n}\mathbf{v})]^3} [c(\mathbf{n}\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\mathbf{R}) - v^2];$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = c^{-1} \text{rot}(\varphi\mathbf{v}) = (\varphi/c) \text{rot } \mathbf{v} + c^{-1} [\nabla\varphi\mathbf{v}] =$$

$$= -\frac{e[\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}]}{R [c - (\mathbf{n}\mathbf{v})]^2} - \frac{e[\mathbf{n}\mathbf{v}]}{R^2 [c - (\mathbf{n}\mathbf{v})]^3} [c^2 - v^2 + (\dot{\mathbf{v}}\mathbf{R})].$$

В результате получаем следующие выражения для полей:

$$\mathbf{E} = e \left\{ \frac{(c^2 - v^2)(c\mathbf{n} - \mathbf{v})}{[c - (\mathbf{n}\mathbf{v})]^3 R^2} + \frac{[\mathbf{n} \{ (c\mathbf{n} - \mathbf{v}) \mathbf{v} \}]}{[c - (\mathbf{n}\mathbf{v})]^3 R} \right\}_{\xi}; \quad (46.11)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n}\mathbf{F}]_{\xi}. \quad (46.12)$$

Для подсчета мощности, теряемой неравномерно движущимся зарядом на излучение, нужно составить выражение для вектора Пойнтинга \mathbf{S} и оставить в нем члены, обратно пропорциональные R^2 , поскольку интегрирование будет производиться по бесконечно удаленной поверхности. Иначе говоря, необходимо рассмотреть волновую зону. Поскольку в ней поле поперечно, т. е. удовлетворяет условию $(\mathbf{n}\mathbf{E}^{\text{изл}}) = 0$, то вектор Пойнтинга имеет вид

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n} (\mathbf{E}^{\text{изл}})^2, \quad (46.13)$$

где

$$\mathbf{E}^{\text{изл}} = e \left\{ \frac{[\mathbf{n} \{ (c\mathbf{n} - \mathbf{v}) \dot{\mathbf{v}} \}]}{[c - (\mathbf{n}\mathbf{v})]^3 R} \right\}_{\xi}. \quad (46.14)$$

Подставляя (46.14) в (46.13), для углового распределения мощности излучения $dP_1/d\Omega = (\mathbf{n}\mathbf{S}) R^2$ находим выражение

$$\frac{dP_1}{d\Omega} = \frac{e^2 c}{4\pi} \left\{ \frac{(\dot{\mathbf{v}})^2}{[c - (\mathbf{n}\mathbf{v})]^4} + \frac{2(\mathbf{n}\mathbf{v})(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{[c - (\mathbf{n}\mathbf{v})]^5} - (\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})^2 \frac{c^2 - v^2}{[c - (\mathbf{n}\mathbf{v})]^6} \right\}_{\xi}. \quad (46.15)$$

Интегрируя (46.15) по бесконечно удаленной замкнутой поверхности, можно получить полную мощность излучения P_1 , однако она не совпадет с истинными потерями энергии заряда на излучение.

Чтобы понять, почему это так, окружим заряд некоторой замкнутой и жестко связанной с ним поверхностью, например сферой радиуса R с центром в точке нахождения заряда в запаздывающий момент времени ξ . Очевидно, что поток энергии сквозь такую поверхность и определяет истинные потери энергии заряда P_E . Но поскольку поверхность перемещается в пространстве со скоростью \mathbf{v} заряда, то поток энергии сквозь нее определяется не только вектором Пойнтинга, но еще и переносной плотностью потока энергии, равной $-\omega\mathbf{v}$. Таким образом, результирующая плотность потока энергии сквозь поверхность определяется вектором

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \omega\mathbf{v}. \quad (46.16)$$

Замечая, что для поля излучения плотность энергии равна

$$\omega = (\mathbf{E}^{\text{изл}})^2 / (4\pi) = (\mathbf{nS}) / c,$$

для скорости потерь энергии зарядом в данном направлении найдем

$$\frac{dP_E}{d\Omega} = R^2 (\mathbf{nS}') = R^2 (\mathbf{nS}) \left[1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c} \right] = \frac{dP_1}{d\Omega} \left[1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c} \right], \quad (46.17)$$

или с учетом (46.10)

$$\frac{dP_E}{d\Omega} d\xi = \frac{dP_1}{d\Omega} dt. \quad (46.18)$$

Таким образом, если некоторая порция электромагнитной энергии была испущена зарядом за время $d\xi$, то в точке наблюдения она регистрируется в течение времени $dt = d\xi [1 - (\mathbf{n}\mathbf{v})/c]$. Это обстоятельство позволяет записать скорость потерь энергии зарядом на излучение в виде

$$P_E = - \left(\frac{dE}{d\xi} \right)^{\text{изл}}. \quad (46.19)$$

Задача 46.1. Показать, что полная мощность излучения и скорость потерь энергии на излучение точечным зарядом e имеют такой вид:

$$P_1 = \frac{2e^2c}{15} \left\{ (\dot{\mathbf{v}})^2 \frac{c^2 (5c^2 + v^2)}{(c^2 - v^2)^4} - 2 [\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]^2 \frac{2c^2 + v^2}{(c^2 - v^2)^4} \right\}_{\xi}, \quad (46.20)$$

$$P_E = \frac{2e^2c}{3} \left\{ (\dot{\mathbf{v}})^2 \frac{c^2}{(c^2 - v^2)^3} - [\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]^2 (c^2 - v^2)^{-3} \right\}_{\xi}. \quad (46.21)$$

Соотношение (46.21) впервые было получено *А. Льенаром* в 1898 г. Не трудно видеть, что в пределе $v/c \rightarrow 0$

$$P_1 \rightarrow P_E \rightarrow \frac{2e^2}{3c^3} (\dot{\mathbf{v}})_{\xi}^2, \quad (46.22)$$

т. е. получается уже известный нам результат *Лармора* (43.9). В этом случае в волновой зоне

$$\mathbf{E}^{\text{изл}} = \frac{e}{c^2} \left\{ \frac{1}{R} [\mathbf{n} [\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}]] \right\}_{\xi}, \quad \mathbf{B}^{\text{изл}} = [\mathbf{n}\mathbf{E}^{\text{изл}}]_{\xi}, \quad (46.23)$$

что соответствует дипольному излучению, описываемому вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{\mathbf{n}}{R^2} (\dot{\mathbf{v}})^2 \sin^2 \vartheta \right\}_{\xi}. \quad (46.24)$$

В случае, когда $v \rightarrow c$, наблюдается резкая анизотропия излучения. Так, $E^{\text{изл}} \sim (1 - v/c)^{-2} \rightarrow \infty$ в направлении движения заряда, т. е. при $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$, и $E^{\text{изл}}$ конечно при $\mathbf{n} = -\mathbf{v}/v$. Это говорит о том, что излучение в основном направлено вперед, будучи сосредоточенным в узком конусе вблизи вектора скорости частицы. Примером такого направленного излучения может служить *синхротронное излучение*, испускаемое ультрарелятивистским зарядом, движущимся в магнитном поле со скоростью, приближающейся к световой.

Задача 46.2. Показать, что максимум излучения ультрарелятивистской частицы приходится на направление, составляющее с вектором скорости \mathbf{v} угол

$$\vartheta \approx \alpha (\alpha) (1 - v^2/c^2)^{1/2}, \quad (46.25)$$

где $\alpha(\alpha)$ — коэффициент, зависящий от угла α между векторами \mathbf{v} и \mathbf{v} . В частности, если $\alpha \approx \pi/2$, то $\alpha = (\sqrt{34} - 1)^{1/2} / \sqrt{3}$, если же $\alpha \neq \pi/2$, то $\alpha = \sqrt{7}/2$.

Задача 46.3. Найти потенциалы Φ , \mathbf{A} электромагнитного поля, создаваемого точечным зарядом e , движущимся с постоянной скоростью \mathbf{v} . Рассмотреть также гипотетический случай сверхсветовой скорости $v > c$.

§ 47. СИЛА РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим заряженную частицу с энергией E и импульсом \mathbf{P} , взаимодействующую с электромагнитным полем, занимающим некоторую область V , граничную поверхность которой S мы впоследствии расширим до бесконечности. Запишем, основываясь на теореме Пойнтинга, закон сохранения энергии для данной системы:

$$\frac{d}{dt} (E + W) = - \oint_S (\mathbf{nS}) dS = - P_I, \quad (47.1)$$

где W — энергия электромагнитного поля в области V , а P_I — мощность излучения. Для оценки P_I воспользуемся дипольным приближением, допустив, что вклад высших мультипольных моментов ничтожно мал. Наконец, будем считать скорость заряда малой по сравнению со скоростью света ($v \ll c$). В таком случае [см. (43.9)], приняв, что поверхность S — сфера бесконечно большого радиуса R , в центре которой расположен заряд e , имеем

$$P_I = \frac{2e^2}{3c^3} \left[\dot{\mathbf{v}} \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]^2. \quad (47.2)$$

С другой стороны, при $v \ll c$, согласно (46.10), $d\xi \approx dt$, что позволяет перейти в (47.1) от времени наблюдения t к времени испускания излучения $\xi = t - R/c$:

$$\frac{d}{d\xi} (E + W) = - \frac{2e^2}{3c^3} [\dot{\mathbf{v}}(\xi)]^2. \quad (47.3)$$

Наконец, используя результат задачи 43.1, запишем еще и закон сохранения импульса для системы:

$$\frac{d}{d\xi} (\mathbf{P} + \mathbf{G}) = \frac{d}{d\xi} (\mathbf{P} + \mathbf{G}) = 0, \quad (47.4)$$

где \mathbf{G} — импульс электромагнитного поля в области V . Из соотношений (47.3) и (47.4) вытекает, что всякий излучающий заряд должен испытывать дополнительную силу со стороны испускаемого им электромагнитного поля. Согласно (47.4), эта сила, обычно называемая *силой реакции излучения*, равна

$$\mathbf{F}_R = d\mathbf{P}/d\zeta = -d\mathbf{G}/d\zeta, \quad (47.5)$$

где \mathbf{G} — импульс электромагнитного поля, порожденного зарядом. Замечая, что по теореме живых сил $dE = (\mathbf{v}d\mathbf{P})$, из (47.5) и (47.3) выводим

$$-\frac{dW}{d\zeta} = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\zeta} \right)^2 + (\mathbf{v} \mathbf{F}_R). \quad (47.6)$$

Поскольку левая часть (47.6) имеет вид полной производной, то наиболее общее решение этого уравнения относительно \mathbf{F}_R есть

$$\mathbf{F}_R = \nabla U(\mathbf{r}) + [\mathbf{v} \mathbf{K}] + \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^2\mathbf{v}}{d\zeta^2}, \quad (47.7)$$

где \mathbf{K} — произвольный вектор, $U(\mathbf{r})$ — произвольная скалярная функция точки. Но, согласно (47.5), $\mathbf{F}_R = -d\mathbf{G}/d\zeta$, т. е. имеет вид полной производной. В связи с этим в (47.7) следует положить $U = \mathbf{K} = 0$ и оставить член $2e^2\ddot{\mathbf{v}}/(3c^3)$, определяемый состоянием движения самого заряда и описывающий силу реакции излучения

$$\mathbf{F}_R = 2e^2\ddot{\mathbf{v}}/(3c^3). \quad (47.8)$$

Если заряженная частица имеет массу m и движется в поле внешних сил \mathbf{F} , то с учетом силы реакции излучения (47.8) уравнение ее движения можно записать в виде

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + 2e^2\ddot{\mathbf{v}}/(3c^3). \quad (47.9)$$

Чтобы проиллюстрировать, к каким изменениям в характере движения частицы приводит учет силы реакции излучения, рассмотрим случай однородной внешней силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$. Вводя обозначения $2e^2/(3mc^3) \equiv \kappa$, $\mathbf{F}/m \equiv \mathbf{g}(t)$, перепишем уравнение движения (47.9) в виде

$$\dot{\mathbf{v}} - \kappa\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(t). \quad (47.10)$$

Для решения этого уравнения найдем сначала функцию Грина задачи $\hat{G}(T)$, где $T = t - t'$. Последняя удовлетворяет уравнению

$$\dot{\hat{G}} - \kappa\ddot{\hat{G}} = \delta(T). \quad (47.11)$$

Замечая, что \hat{G} задана с точностью до постоянной и при $T \neq 0$ удовлетворяет однородному уравнению $\dot{\hat{G}} - \kappa\ddot{\hat{G}} = 0$ с решением

$$G_0(T) = C_1 + C_2 e^{T/\kappa},$$

будем искать $G(T)$ в виде

$$G(T) = C_1 e^{T/\kappa} + \theta(T) (C_2 e^{T/\kappa} + C_3). \quad (47.12)$$

Подставляя (47.12) в (47.11), находим $C_3 = -C_2 = 1$, т. е.

$$G(T) = Ce^{T/\kappa} + \theta(T)(1 - e^{T/\kappa}), \quad (47.13)$$

где C — произвольная постоянная, выбор которой приводит к важным физическим последствиям. В частности, если ограничиться запаздывающим решением, исчезающим при $T < 0$, то

$$G^{\text{зап}}(T) = \theta(T)(1 - e^{T/\kappa}). \quad (47.14)$$

Физически $G^{\text{зап}}$ представляет собой скорость покоившейся при $T < 0$ частицы, на которую действует импульсная сила $\delta(T)$. Однако $G^{\text{зап}} = 1 - e^{T/\kappa}$ при $T > 0$, т. е. частица начинает самоускоряться в направлении, противоположном действию силы. Такое решение, очевидно, не поддается физической интерпретации. Поэтому выберем функцию Грина из условия ее ограниченности при $T > 0$. В таком случае необходимо выбрать $C = 1$, т. е.

$$G(T) = \theta(T) + [1 - \theta(T)]e^{T/\kappa}. \quad (47.15)$$

Решение уравнения движения (47.10), отвечающее такому выбору функции Грина, имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(t') G(t-t') dt', \quad (47.16)$$

где $\mathbf{v}_0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{v}(t)$, если считать, что $\mathbf{g}(t)$ достаточно быстро убывает при $t \rightarrow -\infty$ [в большинстве физических задач $\mathbf{g}(t) = 0$ при $t < t_0$]. Подставляя (47.15) в (47.16), находим

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{-\infty}^t \mathbf{g}(t') dt' + \int_t^{\infty} \mathbf{g}(t') e^{(t-t')/\kappa} dt'. \quad (47.17)$$

Если первые слагаемые в (47.17) имеют обычный ньютоновский вид, то последнее слагаемое несколько необычно. Нетрудно видеть, что оно соответствует учету опережающих воздействий, появление которых связано с высшими производными в уравнении движения. Если бы при оценке мощности излучения P , мы учитывали высшие мультипольные моменты (магнитный дипольный, электрический квадрупольный и т. д.), то эффект опережения был бы еще более сильным.

Появление опережающего воздействия можно было бы понять, если бы частица была протяженной. Так, например, заряженный шарик радиуса a испытывает воздействие электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ в тот момент, когда его центр находится на расстоянии a от точки \mathbf{r} . В данном же случае время опережения по порядку величины равно κ , а эффективный размер $\kappa c = 2e^2/(3mc^2)$. Таким образом, излучающий точечный заряд ведет себя как протяженная частица, эффективная структура которой обусловлена полем излучения. Например, электрону, масса которого $m = 9,1 \cdot 10^{-28}$ г, соответствует эффективный

размер *, получивший название *классического радиуса электрона* и равный

$$r_0 \equiv e^2/(mc^2) = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (47.18)$$

Задача 47.1. Найти затухание скорости заряженной частицы в постоянном магнитном поле \mathbf{B} , считая силу реакции излучения малой.

§ 48. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СВОБОДНЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ (ФОРМУЛА ТОМСОНА)

Рассмотрим произвольную неизлучающую систему зарядов и токов. Если эта система окажется в поле электромагнитной волны с заданной плотностью потока энергии \mathbf{S}_0 , то под действием поля волны в системе возникнут изменяющиеся во времени мультипольные моменты, а это [см. (44.15)] приведет к тому, что система начнет излучать.

Очевидно, что мощность излучения dP_l в некоторый телесный угол $d\Omega$ пропорциональна $|\mathbf{S}_0|$. Поэтому одной из важных характеристик такой системы зарядов и токов должно быть отношение

$$d\sigma = dP_l / |\mathbf{S}_0|, \quad (48.1)$$

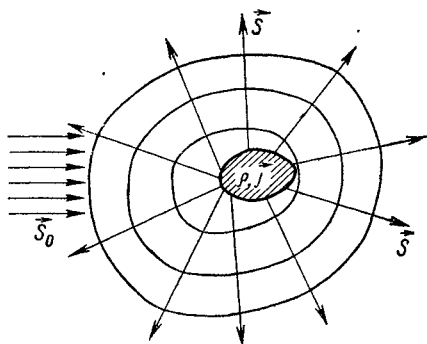


Рис. 48.1

имеющее размерность площади и называемое *дифференциальным сечением рассеяния системы*. Если воспользоваться квантовыми представлениями об электромагнитном поле, т. е. ввести кванты света — *фотоны*, то $d\sigma$ будет численно равно площади, на которую падают фотоны, рассеянные в телесный угол $d\Omega$ (рис. 48.1). Интегрируя (48.1) по всем направлениям, получаем *полное сечение рассеяния*

$$\sigma = \oint \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{P_l}{|\mathbf{S}_0|}. \quad (48.2)$$

В качестве примера рассмотрим рассеяние электромагнитных волн свободным электроном. Уравнение его движения в поле волны [см. (47.9)] можно записать в виде

$$m\dot{\mathbf{v}} = e(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]/c) + 2e^2\ddot{\mathbf{v}}/(3c^3). \quad (48.3)$$

* Следует отметить, что в квантовой теории появляется другой характерный размер электрона — *комптоновская длина волны* $\Lambda \equiv \hbar/(mc)$, где \hbar — постоянная Планка. Возникающее при этом отношение

$$\alpha \equiv r_0/\Lambda = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$$

является универсальной безразмерной постоянной, называемой *постоянной тонкой структуры*. Пока еще не существует теории, позволившей бы вывести числовое значение этой постоянной.

Считая движение электрона достаточно медленным, т. е. полагая $v \ll c$, и учитывая, что для плоской электромагнитной волны $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$, можно пренебречь членом $[\mathbf{v}\mathbf{B}]/c$ по сравнению с \mathbf{E} и переписать (48.3) так:

$$m\dot{\mathbf{v}} \approx e\mathbf{E} + 2e^2\ddot{\mathbf{v}}/(3c^3). \quad (48.4)$$

Полагая в (48.4) $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \exp(-i\omega t)$, т. е. рассматривая только вынужденное движение электрона и пренебрегая зависимостью \mathbf{E} от \mathbf{r} , находим

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \left(1 + i \frac{2e^2\omega}{3mc^3}\right)^{-1} \mathbf{E}. \quad (48.5)$$

Поскольку для плоской падающей волны $|\mathbf{S}_0| = c|\mathbf{E}|^2/(4\pi)$, а мощность излучения в телесный угол $d\Omega$ [см. (46.24)] равна

$$dP_l = \frac{e^2}{4\pi c^3} |[\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}]|^2 d\Omega, \quad (48.6)$$

то с помощью (48.5) нетрудно найти дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{e^4 d\Omega}{c^4 m^2 |1 + i2\omega r_0/(3c)|^2} \frac{|[\mathbf{n}\mathbf{E}]|^2}{|\mathbf{E}|^2} = \frac{r_0^2 \sin^2 \vartheta d\Omega}{1 + [2\omega r_0/(3c)]^2}, \quad (48.7)$$

где ϑ — угол между направлением излучения \mathbf{n} и вектором поляризации $\mathbf{e} = \mathbf{E}_0/E_0$ падающей волны, r_0 — классический радиус электрона.

Теперь уже нетрудно подсчитать и полное сечение рассеяния

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + [2\omega r_0/(3c)]^2}, \quad \sigma_0 \equiv \frac{8\pi}{3} r_0^2, \quad (48.8)$$

зависимость которого от частоты представлена на рис. 48.2. В предельном случае низких частот, когда $\omega r_0 \ll c$, находим

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma(\omega) = \sigma_0 = 8\pi r_0^2/3. \quad (48.9)$$

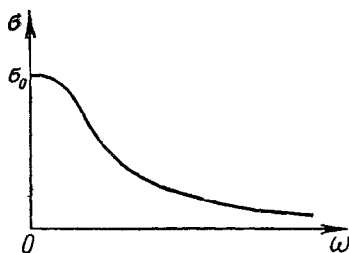


Рис. 48.2

Эта формула впервые была получена Дж. Дж. Томсоном и названа его именем. Из нее следует, что полное сечение рассеяния электромагнитных волн свободным электроном имеет порядок площади круга радиуса r_0 . Поэтому $r_0 = e^2/(mc^2)$ можно вполне обоснованно рассматривать как характерный

размер электрона, его классический радиус.

Задача 48.1. Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния эллиптически поляризованных плоских электромагнитных волн свободным электроном.

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТОКИ И ПОЛЯ

Глава

4

При решении многих электродинамических задач весьма полезным оказывается так называемое *приближение квазистационарного поля*. Его применяют при анализе линейных цепей переменного тока, при расчете длинных линий, в магнитной гидродинамике и в других областях. Чаще всего это приближение эффективно в тех случаях, когда характерные частоты изменения токов и полей не очень велики и поэтому длины λ электромагнитных волн, которые могут излучаться системой, значительно превосходят ее линейные размеры l . Иначе говоря, если ввести характерное время T изменения полей, то предполагается выполнение условия

$$l \ll cT, \quad (\text{IV.1})$$

которое можно назвать *достаточным условием квазистационарности*. Электромагнитное поле в этом случае напоминает по структуре поле вибратора Герца в ближней зоне и получило название квазистационарного. Уравнения для полей в квазистационарном приближении оказываются более простыми, что позволяет эффективно использовать их для решения широкого круга задач.

§ 49. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ

Квазистационарное приближение, основанное на условии (IV.1), соответствует предположению о *медленности* процессов. Это означает,

что всякое изменение поля в какой-либо части системы практически мгновенно передается в любую ее точку, т. е. фаза изменения поля во всех точках системы практически одна и та же. Иными словами, при анализе процессов в системе можно пренебречь запаздыванием, заменив, например, в выражении для запаздывающих потенциалов (41.24) аргумент $t - R/c$ на t . В результате потенциалы φ и \mathbf{A} можно записать в виде

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{\rho(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'; \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (49.1)$$

откуда следует, что они являются решениями уравнений

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad \Delta\mathbf{A} = -4\pi\mathbf{j}/c,$$

не отличающихся от стационарных. Особенность этих уравнений состоит в том, что время t все же входит в них параметрически — через источники ρ и \mathbf{j} . Поэтому при вычислении полей \mathbf{E} и \mathbf{B} воспользуемся обычным определением

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (49.2)$$

учитывающим вихревой характер электрического поля.

Таким образом, уравнения для полей в квазистационарном приближении действительно упрощаются. Для получения этих упрощенных уравнений в случае неоднородной среды с проницаемостями $\epsilon(\mathbf{r})$ и $\mu(\mathbf{r})$, а также при наличии проводников с удельной проводимостью $\sigma(\mathbf{r})$ воспользуемся методом электромагнитных потенциалов в специальной калибровке

$$\text{div}(\epsilon\mathbf{A}) = 0. \quad (49.3)$$

Тогда уравнения Максвелла принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{div}(\epsilon\nabla\varphi) &= -4\pi\rho, \\ \text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot } \mathbf{A}\right) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right). \end{aligned} \quad (49.4)$$

Если в области с линейным размером l рассматривать решения этих уравнений, существенно изменяющиеся за некоторое время T , то при выполнении условия (IV.1) в среднем по области

$$\left| \text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot } \mathbf{A}\right) \right| \gg \left| \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} \right|. \quad (49.5)$$

В самом деле, в среднем по области $|\text{rot}(\mu^{-1}\text{rot } \mathbf{A})|$ имеет порядок $A/(l^2\mu)$, тогда как порядок $|\epsilon c^{-2} \partial^2\mathbf{A}/\partial t^2|$ есть $\epsilon A/(c^2 T^2)$. Поэтому (49.5) является следствием (IV.1). С учетом неравенства (49.5) уравнения Максвелла для квазистационарных процессов можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned} \text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{B}\right) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{\epsilon}{c} \nabla \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \text{div}(\epsilon\nabla\varphi) = -4\pi\rho, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (49.6)$$

Они отличаются от полных уравнений Максвелла (10.1) тем, что в первой группе уравнений сделано пренебрежение вихревой частью \mathbf{E} по сравнению с потенциальной частью, что можно выразить неравенством

$$|\nabla\varphi| \gg \frac{1}{c} \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|. \quad (49.7)$$

Это неравенство можно считать *определяющим условием квазистационарности* вместо (IV.1). Такое предпочтение оправдано тем, что, например, для длинных линий условие (IV.1) нарушено, тогда как уравнения (49.6) справедливы, ибо выполнено неравенство (49.7).

Наконец, для хороших проводников уравнения (49.6) могут быть подвергнуты дальнейшему упрощению, если предположить выполнение неравенства

$$\sigma T \gg \varepsilon. \quad (49.8)$$

Поскольку согласно закону Ома $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}})$, то (49.8) сводится к предположению о малости плотности тока смещения по сравнению с плотностью тока проводимости:

$$\frac{1}{4\pi} \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{j}|. \quad (49.9)$$

С учетом (49.9) уравнения (49.6) принимают такой вид:

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho, \\ \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (49.10)$$

Как видно, индукция \mathbf{B} подчиняется уравнениям магнитоэлектродинамики, что позволяет использовать все результаты этого раздела. Вместе с тем необходимо учитывать, что электрическое поле \mathbf{E} не является безвихревым.

§ 50. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТОКИ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДНИКАХ

Из общих уравнений Максвелла для квазистационарных процессов нетрудно получить основные уравнения для токов в системе квазилинейных проводников, обычно используемые при расчете линейных цепей, содержащих такие элементы, как резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности. Однако проще всего эти расчетные уравнения вывести из закона сохранения электрического заряда и закона электромагнитной индукции Фарадея. Но если в (10.4) закон Фарадея был сформулирован в виде

$$\oint_l (\mathbf{E} d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c} \int_S \left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dS = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (50.1)$$

где Φ — магнитный поток сквозь неподвижный контур l , то наиболее общая его формулировка (1.17) предполагает произвольно деформирующийся проводящий контур (см., однако, задачу 1.9). При этом э. д. с. в контуре оказывается равной

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (50.2)$$

Покажем, что уравнение (50.2) может быть выведено из (50.1), если учесть движение контура. Для этого введем скорость \mathbf{u} движения произвольной точки контура (рис. 50.1). Поскольку за время dt элемент контура $d\mathbf{l}$ опишет ориентированную площадку

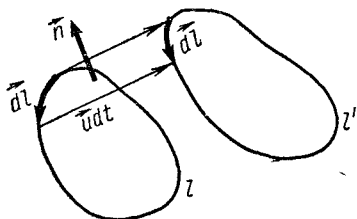


Рис. 50.1

$$\mathbf{n} dS = [d\mathbf{l} \mathbf{u}] dt,$$

то вызванное движением контура изменение магнитного потока равно

$$\delta\Phi = -dt \oint_l (\mathbf{B} [d\mathbf{l} \mathbf{u}]). \quad (50.3)$$

В результате полная скорость изменения магнитного потока

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \oint_l ([\mathbf{uB}] d\mathbf{l}). \quad (50.4)$$

С учетом (50.1) соотношение (50.4) можно переписать в виде

$$\oint_l (\mathbf{E}' d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (50.5)$$

где

$$\mathbf{E}' \equiv \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{uB}] \quad (50.6)$$

— эффективная, или действующая, напряженность электрического поля в движущемся контуре.

Отсюда видно, что если

$$\mathcal{E} \equiv \oint_l (\mathbf{E}' d\mathbf{l}), \quad (50.7)$$

то (50.5) эквивалентно (50.2). Легко понять, что в движущемся проводнике истинная э. д. с. описывается именно формулой (50.7), поскольку на заряды, создающие ток в движущемся проводе, действует полная сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{uB}] \right) = e\mathbf{E}'.$$

Задача 50.1. Найдите э.д.с. \mathcal{E} униполярной машины, представляющей собой постоянный сферический магнит радиуса a , вращающийся с угловой скоростью ω . Один из подвижных контактов расположен на полюсе, а другой — на экваторе (рис. 50.2).

Итак, будем исходить из уравнения (50.5), которое применим для описания токов в некоторой системе квазилинейных проводников (включающих различные омические нагрузки, катушки самоиндукции, трансформаторы, цепи электродвигателей и тому подобное), которые могут содержать и разрывы в виде конденсаторов.

Заметим, что внутри движущегося проводника, согласно закону Ома, $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E}' + \mathbf{E}^{\text{стор}}$, или

$$\mathbf{E}' = -\mathbf{E}^{\text{стор}} + \mathbf{j}/\sigma, \quad (50.8)$$

а внутри конденсатора, по условию (49.7),

$$\mathbf{E}' = -\nabla\varphi. \quad (50.9)$$

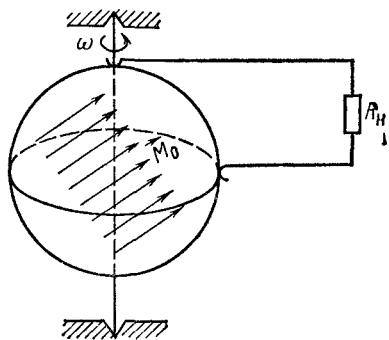


Рис. 50.2

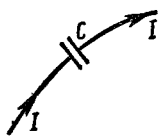
Используем (50.8) и (50.9) для вычисления контурного интеграла в (50.5). При этом для проводящего участка контура Δl с сопротивлением R

$$\int_{\Delta l} (\mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}) = - \int_{\Delta l} (\mathbf{E}^{\text{стор}} \cdot d\mathbf{l}) + \int_{\Delta l} \frac{(\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l})}{\sigma} = -\mathcal{E}^{\text{стор}} + IR. \quad (50.10)$$

В то же время для участка с конденсатором емкостью C (рис. 50.3)

$$\int_1^2 (\mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}) = - \int_1^2 (\nabla\varphi \cdot d\mathbf{l}) = \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{e(t)}{C}, \quad (50.11)$$

где $e(t)$ — заряд конденсатора. Зная силу тока, проходящего через конденсатор, и принимая для простоты $e(0) = 0$, имеем



$$e(t) = - \int_0^t I(t) dt.$$

С учетом соотношений (50.10) и (50.11) для некоторого замкнутого контура l_s

$$\oint_{l_s} (\mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}) = \sum_{i \in l_s} \left(-\mathcal{E}_i^{\text{стор}} + I_i R_i + \frac{1}{C_i} \int_0^t I_i dt \right), \quad (50.12)$$

где сумма распространяется на все элементы контура. Вводя взаимную индуктивность L_{ik} двух элементов, по которым протекают токи

силой I_i и I_k , для магнитного потока Φ_s , связанного с контуром l_s и входящего [см. (50.5)] в левую часть (50.12), получаем

$$\Phi_s = \frac{1}{c} \sum_{i \in l_s} \sum_k L_{ik} I_k. \quad (50.13)$$

В результате (50.12) принимает вид

$$\sum_{i \in l_s} \left(\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \sum_k L_{ik} I_k + I_i R_i + \frac{1}{C_i} \int_0^t I_i dt \right) = \sum_{i \in l_s} \mathcal{E}_i^{\text{стоп}}. \quad (50.14)$$

Мы получили *второй закон Кирхгофа* для линейной цепи переменного тока: *сумма сторонних э. д. с., взятая по некоторому замкнутому контуру, равна сумме падений напряжений на всех индуктивных, емкостных и омических элементах этого контура.*

Наконец, для разветвленных цепей уравнения (50.14) следует дополнить первым законом Кирхгофа. Для его получения воспользуемся соотношением

$$\text{div} \left(\mathbf{j} - \frac{\epsilon}{4\pi} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0, \quad (50.15)$$

являющимся очевидным следствием (49.6) и выражающим закон сохранения электрического заряда в квазистационарном приближении. Интегрируя (50.15) по некоторому объему, включающему точку разветвления цепи, и используя теорему Гаусса — Остроградского, получим

$$\oint_S (\mathbf{n} \mathbf{j}) dS - \oint_S \frac{\epsilon}{4\pi} (\mathbf{n} \nabla) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dS = 0,$$

или

$$\sum_k I_k = 0, \quad (50.16)$$

где сумма берется по всем ответвлениям, сходящимся в данной точке, а под токами I_k понимаются как токи проводимости, так и квазистационарные токи смещения. Соотношение (50.16) и представляет собой *первый закон Кирхгофа: сумма сил токов, притекающих к точке разветвления цепи, равна нулю.*

Итак, для расчета линейных цепей с квазистационарными токами достаточно составить и решить систему уравнений Кирхгофа (50.14) и (50.16). В наиболее распространенном случае, когда токи и э. д. с. зависят от времени гармонически:

$$I_k = I_k^0 e^{-i\omega t}, \quad \mathcal{E}_k^{\text{стоп}} = \mathcal{E}_k^0 e^{-i\omega t},$$

а C_i и L_{ik} не зависят от времени, второй закон Кирхгофа принимает вид

$$\sum_{i \in l_s} \sum_k Z_{jk} I_k^0 = \sum_{i \in l_s} \mathcal{E}_i^0, \quad (50.17)$$

где введена *матрица комплексного сопротивления (импеданс)*

$$Z_{jk} \equiv R_j \delta_{jk} + i [\delta_{jk} (\omega C_j)^{-1} - \omega L_{jk} c^2], \quad (50.18)$$

действительная часть которой содержит *активные сопротивления* R_{jk} , а мнимая — *реактивные сопротивления* $X_{jk} = \delta_{jk}(\omega C_j)^{-1} - \omega L_{jk}c^{-2}$.

В качестве примера рассмотрим простую цепь, состоящую из последовательно включенных индуктивности L , емкости C и сопротивления R (рис. 50.4). В этом случае

$$\mathcal{E}^0 = I^0 Z, \quad (50.19)$$

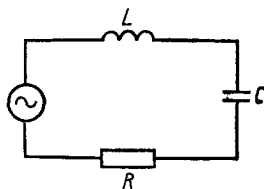


Рис. 50.4

где

$$Z = R + iX, \quad X = (\omega C)^{-1} - \omega L/c^2. \quad (50.20)$$

Отсюда видно, что между током и э.д.с. появляется сдвиг фаз φ :

$$I^0 = \frac{\mathcal{E}^0}{|Z|} e^{-i\varphi}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{1}{\omega CR} - \frac{\omega L}{Rc^2}, \quad (50.21)$$

что принято изображать на диаграмме ток — напряжение (рис. 50.5). Если подсчитать выделяющуюся в цепи тепловую мощность, то найдем

$$R\bar{I}^2 = R |I^0|^2 / 2 = \cos \varphi |\mathcal{E}^0 I^0| / 2. \quad (50.22)$$

В связи с этим сдвиг фаз φ , определяемый соотношением (50.21), часто называют *углом потерь*. Будучи весьма важной характеристикой линейной цепи, позволяющей определить в ней тепловые потери, $\cos \varphi$ обычно всегда указывается в паспортах различных технических устройств, например электродвигателей переменного тока.

Замечая, что импеданс Z системы является функцией частоты ω приложенной э.д.с., нетрудно определить ту частоту ω_0 , при которой сила тока в цепи максимальна, т. е. наступает *резонанс*. Согласно (50.21), при этой частоте $|Z|$ минимально, откуда $\operatorname{Im} Z = 0$, т. е.

$$\omega_0 = c(LC)^{-1/2}. \quad (50.23)$$

Соотношение (50.23) для резонансной частоты известно как *формула Томсона**. Нетрудно видеть, что при этой частоте $\varphi = 0$, т. е. потери в цепи максимальны — контур отбирает от источника максимальную энергию.

Часто в реальных конденсаторах и катушках индуктивности также наблюдаются потери, что связано с проводимостью используемых материалов. Эти потери удобно описывать с помощью формализма комплексных проницаемостей** $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, $\mu = \mu' + i\mu''$. По-

* Речь идет о В. Томсоне (Кельвине).

** Формализм комплексных проницаемостей применяется при описании распространения электромагнитных волн в поглощающих средах (см., в частности, задачу 40.1).

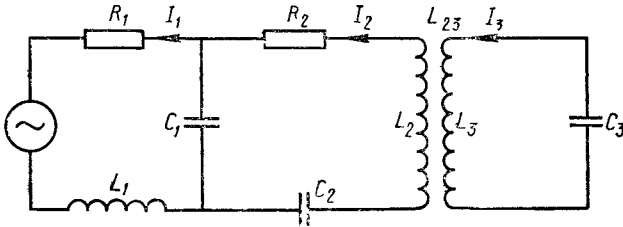
лагая $C = \epsilon C_0$ и $L = \mu L_0$, импедансы конденсатора и катушки индуктивности можно представить в следующей форме:

$$Z_C = \frac{i\epsilon' + \epsilon''}{\omega C_0 |\epsilon|^2}, \quad Z_L = -i\omega L_0 (\mu' + i\mu'')/c^2. \quad (50.24)$$

Тогда соответствующие углы потерь имеют такой вид:

$$\varphi_C = \text{arctg}(\epsilon'/\epsilon''), \quad \varphi_L = -\text{arctg}(\mu'/\mu''). \quad (50.25)$$

Задача 50.2. Записать уравнения Кирхгофа для линейной цепи, изображенной на рис. 50.6.



Р.с. 50.6

§ 51. ПРЕВРАЩЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ЦЕПИ ЛИНЕЙНЫХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ТОКОВ.⁷ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Из уравнений Максвелла в квазистационарном приближении нетрудно получить теорему Пойнтинга, которая выглядит так же, как и в общем случае:

$$(\mathbf{jE}) = -\partial w/\partial t - \text{div } \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = c[\mathbf{EH}]/(4\pi), \quad (51.1)$$

но с тем отличием, что выражение для плотности энергии электромагнитного поля равно

$$w = w_e + w_m = \epsilon (\nabla\varphi)^2/(8\pi) + \mu H^2/(8\pi), \quad (51.2)$$

т. е. оставляется лишь потенциальная часть электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. В связи с этим w_e отлична от нуля практически только в конденсаторах, т. е. полная электрическая энергия равна

$$W_e = \int w_e dV = \frac{1}{2} \sum_k \frac{e_k^2}{C_k}, \quad (51.3)$$

в то время как магнитная энергия W_m имеет обычный вид, как и для системы постоянных токов:

$$W_m = \int w_m dV = \frac{1}{2c^2} \sum_{i, k} L_{ik} I_i I_k. \quad (51.4)$$

Запишем теперь интегральную теорему Пойнтинга:

$$\int (\mathbf{jE}) dV = -\frac{d}{dt} (W_e + W_m) - \oint_{S \rightarrow \infty} (\mathbf{nS}) dS. \quad (51.5)$$

Поверхностный интеграл в (51.5), описывающий потери системы на излучение, в квазистационарном приближении исчезает, так как [см. 49.6)] на поверхности S , которую будем считать сферой бесконечно большого радиуса R , имеем:

$$E \sim R^{-2}, H \sim R^{-2}, |S| \sim R^{-4}.$$

Наконец, преобразуем интеграл в левой части (51.5). Полагая в соответствии с законом Ома

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{u} + \sigma (\mathbf{E} + [\mathbf{u}\mathbf{B}]/c + \mathbf{E}^{\text{стоп}}),$$

где \mathbf{u} — скорость движения проводников или обкладок конденсаторов, находим

$$\int (\mathbf{j}\mathbf{E}) dV = \int [j'^2/\sigma - (\mathbf{j}'\mathbf{E}^{\text{стоп}}) + (\mathbf{u}\mathbf{f})] dV. \quad (51.6)$$

Здесь $\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho \mathbf{u}$ — плотность тока в неподвижных проводниках, $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + c^{-1} [\mathbf{j}\mathbf{B}]$ — плотность силы Лоренца. Поскольку для линейных токов $\mathbf{j}' dV = I dl$, то

$$\int [j'^2/\sigma - (\mathbf{j}'\mathbf{E}^{\text{стоп}})] dV = \sum_k (I_k^2 R_k - I_k \mathcal{E}_k^{\text{стоп}}).$$

Наконец, слагаемое $\int (\mathbf{u}\mathbf{f}) dV$ в (51.6) представляет собой мощность силы Лоренца и в соответствии с теоремой живых сил может быть приведено к виду $\int (\mathbf{u}\mathbf{f}) dV = dT/dt$, где T — кинетическая энергия системы. В результате уравнение (51.6) можно переписать:

$$\int (\mathbf{j}\mathbf{E}) dV = \sum_k (I_k^2 R_k - I_k \mathcal{E}_k^{\text{стоп}}) + dT/dt. \quad (51.6a)$$

Подстановка (51.6a) в (51.5) позволяет записать закон сохранения энергии в системе квазистационарных токов в виде

$$\frac{d}{dt} \left(T + \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k + \frac{1}{2} \sum_k \frac{e_k^2}{C_k} \right) = \sum_k (I_k \mathcal{E}_k^{\text{стоп}} - I_k^2 R_k). \quad (51.7)$$

Структура этого уравнения подсказывает мысль о существовании далеко идущей аналогии между системой квазистационарных токов и механической системой с диссипацией. В самом деле, если заряды e_i рассматривать как обобщенные координаты, то силы токов $I_i = -e_i$ должны играть роль обобщенных скоростей. При этом уравнения Кирхгофа (50.14) и (50.16) можно записать в форме уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial I_i} \right) + \frac{\partial \Lambda}{\partial e_i} = - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial I_i}, \quad (51.8)$$

в которых функция Лагранжа и диссипативная функция Рэлея имеют соответственно такой вид:

$$\Lambda = W_m - W_e = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k - \frac{1}{2} \sum_i \frac{e_i^2}{C_i}; \quad (51.9)$$

$$\mathcal{D} = \sum_i \left(\frac{1}{2} I_i^2 R_i - I_i \mathcal{E}_i^{\text{стоп}} \right). \quad (51.10)$$

Таким образом, энергия W_m магнитного поля играет роль кинетической, а энергия W_e электрического поля — роль потенциальной энергии, что полностью согласуется с выведенными ранее выражениями для обобщенных сил (23.15) и (33.8).

Отмеченное обстоятельство позволяет легко вычислять механические силы взаимодействия токов и зарядов, обычно называемые *пондеромоторными силами*. Так, если коэффициенты C_i или L_{ik} , входящие в Λ , явно зависят от некоторых геометрических параметров q_s (обычно размеров или расстояний), которые могут изменяться со временем, то соответствующие им обобщенные силы находят по обычному правилу:

$$F_s = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_s} = \sum_{i, k} \frac{1}{2c^2} I_i I_k \frac{\partial L_{ik}}{\partial q_s} - \sum_i \frac{e_i^2}{2} \frac{\partial}{\partial q_s} \left(\frac{1}{C_i} \right). \quad (51.11)$$

Если к лагранжиану Λ добавить соответствующую механическую часть, зависящую от q_s и q_s , то нетрудно получить и уравнения движения для параметров q_s с учетом пондеромоторных сил (51.11), действующих на элементы системы со стороны электромагнитного поля.

В качестве примера возьмем катушку самоиндукции длины l , поперечного сечения πr^2 , с обмоткой из N витков провода. Тогда сила, действующая на катушку в направлении l , равна

$$F_l = \frac{I^2}{2c^2} \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{4\pi^2 N^2 r^2}{l} \right) = - \frac{I^2 2\pi^2 N^2 r^2}{c^2 l^2} < 0, \quad (51.12)$$

т. е. соленоид стремится сократиться, что качественно объясняется притяжением двух соседних витков с током. В то же время сила, действующая вдоль r , равна

$$F_r = \frac{I^2}{2c^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{4\pi^2 N^2 r^2}{l} \right) = \frac{I^2 4\pi^2 N^2 r}{c^2 l} > 0, \quad (51.13)$$

т. е. соленоид стремится растянуться, что качественно объясняется отталкиванием тех элементов витков, токи в которых противоположны.

Так, в известных опытах П. Л. Капицы по созданию сверхсильных магнитных полей сила тока достигала миллионов ампер и зачастую катушки разрывались, не выдерживая нагрузок.

Задача 51.1. Катушка индуктивности массы m , подвешенная за один конец, подключенный к источнику постоянного напряжения с э.д.с. \mathcal{E} (рис. 51.1), свободным концом опущена в ртуть. Найти закон движения свободного конца катушки и закон изменения силы тока в ней.

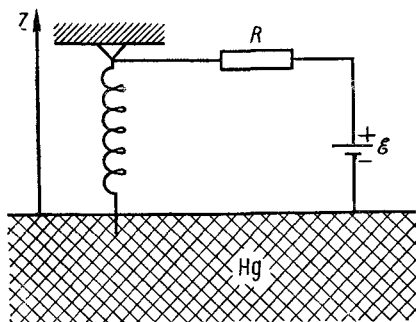


Рис. 51.1

§ 52. СКИН-ЭФФЕКТ

Рассматривая в § 36 задачу о поле прямого провода с постоянным током, мы обнаружили, что ток равномерно распределен по сечению провода. Но оказывается, что для переменного тока это уже не так. В самом деле, магнитный поток сквозь контур в продольном сечении провода (рис. 52.1) в случае переменного тока изменяется со временем, а это означает, что циркуляция напряженности \mathbf{E} электрического поля по этому контуру отлична от нуля. Отсюда следует, что поле \mathbf{E} меняется в радиальном направлении, поэтому распределение плотности тока $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ также оказывается неравномерным по сечению провода. Расчеты показывают, что практически ток протекает в тонком поверхностном слое провода, откуда и происходит название этого явления — *скин-эффект*.

Для высокопроводящих материалов толщина скин-слоя оказывается очень малой. Если она мала по сравнению с радиусом провода, то расчеты, выполненные для цилиндрического провода, не-

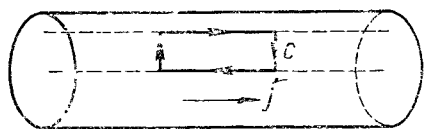


Рис. 52.1

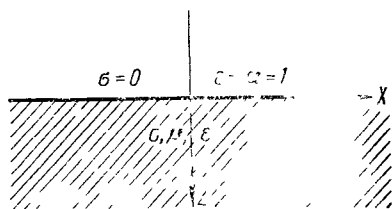


Рис. 52.2

значительно отличаются от расчетов скин-эффекта в проводящем полупространстве. Рассмотрим поэтому именно эту задачу. Пусть однородная проводящая среда занимает полупространство $z > 0$, обладает электропроводностью σ , проницаемостями ϵ , μ и граничит с вакуумом (рис. 52.2). Запишем уравнения Максвелла в квазистационарном приближении внутри проводника:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} \quad (\text{a}), \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (\text{б}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (\text{в}), \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (\text{г}). \end{aligned} \quad (52.1)$$

Здесь $\rho = 0$, так как рассматривается установившийся процесс и все внесенные свободные заряды [см. (37.12)] должны рассосаться за время релаксации $\tau = \epsilon / (4\pi\sigma)$.

Дифференцируя по t уравнение (52.1а), находим

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{c}{\mu} \Delta \mathbf{E},$$

откуда

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (52.2)$$

Аналогичное уравнение получается и для магнитного поля:

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (52.3)$$

Задача 52.1. Показать, что уравнения (52.2) и (52.3) допускают в области V при граничных условиях $[\mathbf{nE}] = 0$ или $[\mathbf{nH}] = 0$ только затухающие во времени решения.

На основании результата задачи 52.1 можно сделать вывод, что квазистационарное поле в области $z > 0$ может существовать долгое время только при условии, что на границе области $z = 0$ поддерживается некоторое внешнее поле (в случае задачи о проводнике это соответствует заданию внешнего напряжения, приложенного к проводу). В частности, если на границе задано периодическое поле $E_0 \exp(-i\omega t)$, направленное по оси X , то решение задачи следует искать в виде

$$\mathbf{E} = (E, 0, 0); \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = (j, 0, 0).$$

Тогда из $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ выводим, что $\partial E / \partial x = 0$, т. е. E зависит только от y и z . Но поскольку нас интересует задача о распределении плотности тока в цилиндрическом проводнике, которую мы упростили, то зависимость от y можно не рассматривать, имея в виду лишь азимутально-симметричные решения. Поэтому полагаем $E = E(z) \exp(-i\omega t)$ и запишем (52.2) в виде

$$E''(z) = -i4\pi\sigma\mu\omega c^{-2}E(z). \quad (52.4)$$

Решение уравнения (52.4) очевидно:

$$E(z) = E_0 e^{\kappa z}, \quad \kappa = \pm ic^{-1} \sqrt{i4\pi\sigma\mu\omega}.$$

Отбрасывая нарастающее в глубь проводника поле как физически неосуществимое, выбираем решение с $\operatorname{Re} \kappa < 0$, т. е.

$$\kappa = (i - 1)/\delta, \quad \delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}. \quad (52.5)$$

Таким образом, напряженность электрического поля в проводнике изменяется по закону

$$E(t, z) = E_0 e^{-z/\delta} e^{i(z/\delta - \omega t)}. \quad (52.6)$$

Как видно, она экспоненциально затухает в глубь проводника. При этом роль эффективной глубины проникновения поля в проводник играет параметр δ , называемый *толщиной скин-слоя* и определяемый формулой (52.5). Числовые оценки, выполненные для меди ($\mu = 1$, $\sigma = 5 \cdot 10^{17} \text{с}^{-1}$) при частоте 50 Гц, показывают, что $\delta \approx 2 \text{см}$. Поэтому в проводниках обычных сечений скин-эффект проявляется лишь при гораздо большей частоте.

Для нахождения магнитного поля в проводнике воспользуемся уравнением (52.1в), из которого для периодических полей

$$\mathbf{H} = -i \frac{c}{\mu\omega} \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (52.7)$$

Подставляя (52.6) в (52.7), находим:

$$\mathbf{H} = (0, H, 0); \quad H = -Ec(1+i)/(\mu\omega\delta). \quad (52.8)$$

Используем полученное решение для расчета сопротивления 1 см цилиндрического провода радиусом a . Если $a \ll \delta$, то очевидно, что результат будет такой же, как при постоянной силе тока, так как плотность тока почти постоянна по сечению провода.

Если же $a \gg \delta$, то результат будет иным и получить его можно с помощью (52.6), положив

$$E(t, r) \approx E_0 \exp[(a-r)(i-1)/\delta] \exp(-i\omega t). \quad (52.9)$$

Прежде всего вычислим на основе (52.9) полную силу тока через сечение провода:

$$I = 2\pi\sigma \int_0^a E r dr \approx (1+i)\pi a\sigma\delta E_0 e^{-i\omega t}. \quad (52.10)$$

Теперь воспользуемся законом Джоуля—Ленца, согласно которому тепловые потери в 1 см провода определяются его сопротивлением R и равны

$$R\tilde{I}^2 = 2\pi \int_0^a (r/\sigma) \tilde{j}^2 dr = \pi\sigma E_0^2 \int_0^a e^{-2(a-r)/\delta} r dr \approx \pi a\sigma\delta E_0^2/2. \quad (52.11)$$

Замечая, что $\tilde{I}^2 = (\pi a\sigma\delta E_0)^2$, находим сопротивление 1 см провода:

$$R = (2\pi a\sigma\delta)^{-1}. \quad (52.12)$$

Анализ этой формулы показывает, что фактически нужно учитывать лишь сопротивление самого скин-слоя (рис. 52.3), т. е. в обычной формуле для сопротивления $R = (\sigma S)^{-1}$ вместо поперечного сечения $S = \pi a^2$ нужно подставлять площадь кольца толщиной δ . Приближение такого рода, основанное на неравенстве $a \gg \delta$, обычно называется приближением Рэлея.

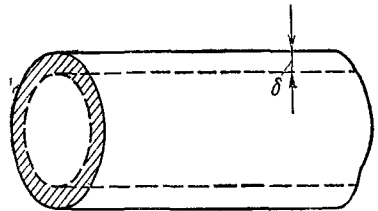


Рис. 52.3

Задача 52.2. Подсчитать внутреннюю индуктивность 1 см провода радиусом a в рэлеевском приближении.

Однако опыт показал, что зависимость сопротивления провода от частоты типа $R \sim \sqrt{\omega}$, как предписывает формула (52.12), сохраняется далеко не для всех частот, удовлетворяющих условию квазистационарности (49.8). Оказалось, что в области достаточно высоких частот, при которых глубина проникновения поля в проводник и длина свободного пробега l_0 электронов в металле сравнимы, т. е. $\delta \lesssim l_0$ или

$$c^2/(2\pi\sigma\mu l_0^2) \lesssim \omega \lesssim \sigma/\epsilon, \quad (52.13)$$

наблюдается более быстрый рост сопротивления с частотой. Это явление, получившее название *аномального скин-эффекта*, объясняется тем, что при $\delta \lesssim l_0$ перестает быть справедливым локальный закон Ома $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. В самом деле, если, например, воспользоваться электронной моделью Друде, то электрическое поле будет разгонять электроны не в течение времени их свободного пробега, как предполагалось в этой модели, а в течение времени их пребывания в скин-слое, причем поле существенно меняется на протяжении этого слоя. Таким образом, электроны будут находиться в области ускоряющего их поля гораздо меньшее время, что приведет к уменьшению силы тока или эквивалентному возрастанию сопротивления.

Как можно показать*, длина свободного пробега электронов растет с убыванием температуры T быстрее, чем T^{-1} , так что условие (52.13) выполнено и для обычных частот, но при низких температурах. Таким образом, условия для проявления аномального скин-эффекта выполняются как при высоких частотах и нормальных температурах, так и в области обычных частот, но низких температур.

Удовлетворительное объяснение аномального скин-эффекта было дано Г. Рейтером и Э. Зондхаймером в 1948 г. Они пришли к следующей нелокальной связи \mathbf{j} и \mathbf{E} , обобщающей локальный закон Ома:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{3\sigma}{4\pi l_0} \int \frac{\mathbf{R}(\mathbf{R}\mathbf{E}')}{R^4} e^{-R/l_0} dV', \quad (52.14)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Таким образом, согласно (52.14), плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ определяется значениями поля \mathbf{E} в некоторой окрестности точки \mathbf{r} с размерами порядка l_0 .

Задача 52.3. Показать, что в пределе $l_0 \rightarrow 0$ закон Рейтера—Зондхаймера (52.14) переходит в обычный закон Ома.

Задача 52.4. Показать, что в рэлеевском приближении сила, действующая на проводящее тело в переменном магнитном поле частоты ω , может быть записана в виде

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{\delta\sigma}{2c} \oint_S [\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{B}] dS, \quad (52.15)$$

где S — поверхность тела.

§ 58. ДЛИННЫЕ ЛИНИИ

Рассмотрим длинную двухпроводную линию (рис. 53.1). Введем емкость C , индуктивность L и сопротивление R линии на 1 см которые будем считать постоянными величинами. Тогда для участка δx линии эти параметры, очевидно, равны:

$$\delta C = C\delta x, \quad \delta L = L\delta x, \quad \delta R = R\delta x.$$

Найдем уравнения для силы тока I и напряжения U в линии, являющихся некоторыми функциями t и x . В качестве исходных возьмем уравнения (49.6), из которых, в частности, вытекает закон сохранения заряда в обычной форме: $\partial\rho/\partial t + \text{div } \mathbf{j} = 0$.

Заряд $\delta Q = \delta x C U$ участка линии δx может изменяться как из-за разности сил токов в точках x и $x + \delta x$, так и из-за утечки (разряд

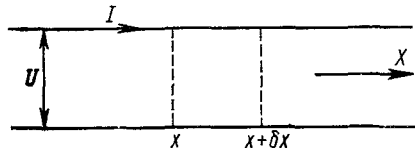


Рис. 53.1

линии). Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta Q = \delta x C \frac{\partial U}{\partial t} = I(x) - I(x + \delta x) - G\delta x U, \quad (53.1)$$

где последний член, в котором $G = \text{const}$, описывает утечку в линии согласно закону Ома. Переходя в (53.1) к пределу $\delta x \rightarrow 0$, находим

$$C\delta U/\partial t + \partial I/\partial x + GU = 0. \quad (53.2)$$

* Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М., 1963, с. 338—342.

Наконец, запишем второй закон Кирхгофа для участка линии δx :

$$\delta x RI = -\delta x Lc^{-2} \partial I / \partial t + U(x) - U(x + \delta x),$$

откуда после перехода к пределу $\delta x \rightarrow 0$ выводим

$$IR = -Lc^{-2} \partial I / \partial t - \partial U / \partial x. \quad (53.3)$$

Уравнения (53.2) и (53.3) называются *телеграфными* и являются основными при описании процессов в длинных линиях.

Дифференцируя (53.2) по x , а (53.3), умноженное на C , — по t и вычитая полученные уравнения одно из другого, находим

$$(L/c^2) C \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - G \frac{\partial U}{\partial x} + RC \frac{\partial I}{\partial t} = 0. \quad (53.4)$$

Подставляя в (53.4) $\partial U / \partial x$, взятое из (53.3), приходим к уравнению

$$\left[LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (GL + c^2 RC) \frac{\partial}{\partial t} + c^2 GR \right] I = 0. \quad (53.5)$$

Замечая, что уравнение (53.5) содержит волновой оператор, отвечающий скорости распространения волны

$$v_{\Phi} = c(LC)^{-1/2}, \quad (53.6)$$

попробуем искать решение этого уравнения в виде

$$I(t, x) = f(x - v_{\Phi} t) \xi(x), \quad (53.7)$$

что соответствует *неискаженной волне*, форма которой сохраняется, а амплитуда изменяется вдоль линии.

Подставляя (53.7) в (53.5) и приравнявая нулю коэффициенты при независимых функциях f и f' , имеем:

$$\xi'' - GR\xi = 0, \quad 2c^2\xi' + \xi v_{\Phi}(GL + c^2 RC) = 0,$$

откуда

$$\xi(x) = e^{-\sqrt{GR}x}, \quad -2c^2(GR)^{1/2}v_{\Phi}^{-1} + GL + c^2 RC = 0. \quad (53.8)$$

Последнее соотношение в (53.8) с учетом (53.6) принимает вид

$$(\sqrt{GL} - c\sqrt{RC})^2 = 0,$$

и поэтому *неискаженная волна существует только при выполнении условия*

$$c^{-1}\sqrt{L/C} = \sqrt{R/G} \equiv a. \quad (53.9)$$

Как видно из (53.8), амплитуда *неискаженной волны* экспоненциально затухает вдоль линии. Для определения волны напряжения $U(t, x)$ воспользуемся уравнением (53.3), подставляя в которое (53.7) имеем

$$\partial U / \partial x = a\xi(f' - \sqrt{GR}f),$$

откуда

$$U(t, x) = a\xi f = aI(t, x), \quad (53.10)$$

т. е. вдоль линии сохраняется постоянным отношение

$$U(t, x) / I(t, x) = a = c^{-1}\sqrt{L/C}, \quad (53.11)$$

называемое *волновым сопротивлением линии*.

Если на конце линии поставить нагрузку R_n , то для непрерывности U и I необходимо выполнение условия

$$R_n = c^{-1} \sqrt{L/C}, \quad (53.12)$$

называемого *условием согласования нагрузки с линией*. В этом случае в линии по-прежнему нет искажений, т. е. отсутствует отраженная волна.

Итак, мы нашли волны тока и напряжения в двухпроводной линии без искажений. Однако в произвольной линии условие (53.9) может и не выполняться. В этом случае форма волны оказывается более сложной. Для ее нахождения удобно воспользоваться методом Фурье, положив

$$I(t, x) = \int I(\omega) \exp[ik(\omega)x - i\omega t] d\omega, \quad (53.13)$$

где $k(\omega)$ — неизвестная функция, подбираемая так, чтобы $I(t, x)$ удовлетворяло уравнению (53.5). Нетрудно видеть, что это выполняется при условии

$$c^2 k^2(\omega) = \omega^2 LC + i\omega(GL + c^2 RC) - c^2 GR. \quad (53.14)$$

Уравнение (53.14), называемое *дисперсионным уравнением двухпроводной линии*, имеет для $k(\omega)$ два очевидных решения, отличающихся знаком и соответствующих двум типам бегущих волн в линии — прямой и отраженной.

§ 54. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ В МЕДЛЕННО ДВИЖУЩИХСЯ ДЕФОРМИРУЮЩИХСЯ ПРОВОДНИКАХ (МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА)

Одним из важнейших приложений теории квазистационарных полей является описание электромагнитных процессов в движущихся проводящих жидкостях и газах (астрофизика, физика плазмы). Если среда характеризуется значительной удельной проводимостью σ (обычно $\sigma \sim 10^{17} \text{с}^{-1}$) и магнитной проницаемостью $\mu \approx 1$, то уравнения Максвелла в квазистационарном приближении примут такой вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{4\pi}{c} \left\{ \rho \mathbf{u} + \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{uB}] \right) \right\}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (54.1)$$

где $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ — локальная скорость движения среды. Эта скорость подчиняется гидродинамическим уравнениям движения, в которых кроме обычных сил давления, вязкости, тяготения и других внешних сил необходимо учитывать и силу Лоренца

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + [\mathbf{jB}]/c. \quad (54.2)$$

Если ограничиться наиболее простым случаем несжимаемой среды и пренебречь силами вязкости и тяготения, то основные уравнения гидродинамики запишутся в виде

$$\begin{aligned} \tau [\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}] &= -\nabla p + \rho \mathbf{E} + [\mathbf{jB}]/c, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0, \quad \tau = \text{const.} \end{aligned} \quad (54.3)$$

Здесь τ — плотность массы; p — давление, определяемое из уравнения состояния среды как некоторая функция плотности τ и температуры T : $p = p(\tau, T)$.

Если допустить, что среда квазинейтральна, т. е. $\rho \approx 0$, что оправдано в случае высокой проводимости (эффект рассасывания), то можно положить

$$\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{B} / (4\pi) \approx \sigma (\mathbf{E} + [\mathbf{uB}] / c)$$

и выразить напряженность электрического поля через скорость \mathbf{u} жидкости и магнитное поле \mathbf{B} :

$$\mathbf{E} = -([\mathbf{uB}] - v_m \operatorname{rot} \mathbf{B}) / c, \quad (54.4)$$

где введена магнитная вязкость $v_m \equiv c^2 / (4\pi\sigma)$. Подставляя (54.4) в уравнение $c \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, находим

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \operatorname{rot} [\mathbf{uB}] - v_m \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

или с учетом уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \operatorname{rot} [\mathbf{uB}] + v_m \Delta \mathbf{B}. \quad (54.5)$$

Как видно, уравнение (54.5) кроме диффузионного члена $v_m \Delta \mathbf{B}$, присутствие которого приводит (см. задачу 52.1) к затухающим во времени решениям, содержит еще вихревой член $\operatorname{rot} [\mathbf{uB}]$. Поэтому вполне можно ожидать, что при соответствующих движениях среды уравнение (54.5) будет допускать и незатухающие решения. Поиск таких решений представляет собой сложную математическую задачу, известную как *проблема генерации магнитного поля*. К решению этой задачи сводится, в частности, объяснение земного магнетизма.

Задача 54.1. Показать, что вращательное движение среды не приводит к генерации магнитного поля.

Соотношение (54.4) позволяет исключить напряженность \mathbf{E} электрического поля из исходных уравнений, в результате чего получается следующая система уравнений для определения скорости \mathbf{u} движения среды и индукции \mathbf{B} магнитного поля:

$$\begin{aligned} \tau [\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}] &= -\nabla p - [\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{B}] / (4\pi), \\ \partial \mathbf{B} / \partial t &= \operatorname{rot} [\mathbf{uB}] + v_m \Delta \mathbf{B}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (54.6)$$

Разрешив ее, можно найти напряженность \mathbf{E} электрического поля и плотность заряда $\rho = \operatorname{div} \mathbf{E} / (4\pi)$, используя (54.4). Приближение, основанное на уравнениях (54.4) и (54.6), называется в связи с этим *приближением магнитной гидродинамики*.

Характер решений уравнений магнитной гидродинамики, как и в обычной гидродинамике, существенно зависит от числового значения одного безразмерного параметра, получившего название *магнитного числа Рейнольдса*. Это число возникает при оценке диффузионного члена в правой части уравнения (54.5). Если область характерного изменения магнитного поля имеет размер l , а средняя

скорость движения среды равна v , то порядок вихревого члена $\text{rot}[\mathbf{uB}]$ есть vB/l , тогда как порядок диффузионного члена $\nu_m \Delta B$ есть $\nu_m B/l^2$. Отношение этих двух величин и есть магнитное число Рейнольдса:

$$R_m = vl/\nu_m = 4\pi\sigma vl/c^2. \quad (54.7)$$

В качестве примера оценим магнитное число Рейнольдса для солнечного пятна с характерным размером $l \sim 10^4$ км, средней скоростью солнечной плазмы $v \sim 1$ км/с и электропроводностью $\sigma \sim 10^{13}$ с⁻¹. Подстановка этих данных в (54.7) дает $R_m = 10^7$. Оказывается, что для большинства космических объектов магнитное число Рейнольдса велико. Оно становится малым лишь в равновесии, когда малы скорости движения среды.

В дальнейшем мы ограничимся случаем больших чисел R_m , когда магнитно-диффузионным членом можно пренебречь, т. е. считать $\nu_m \rightarrow 0$. В этом приближении, согласно (54.4), можно положить

$$\mathbf{E}' \equiv \mathbf{E} + [\mathbf{uB}]/c = 0. \quad (54.8)$$

Но это означает в соответствии с законом электромагнитной индукции (50.5), что для всякого контура C , связанного со средой,

$$\oint_C (\mathbf{E}' d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad (54.9)$$

т. е. магнитный поток сквозь такой контур остается неизменным. Отсюда следует, что в процессе движения среды магнитное поле не отстает от нее, т. е. линии индукции оказываются как бы привязанными к веществу, или, образно говоря, «вмороженными» в него.

Эффект «вмороженности» магнитного поля в вещество играет чрезвычайно важную роль во многих астрофизических явлениях. Например, американский астрофизик *Э. Паркер* использовал этот эффект для объяснения происхождения магнитных полей на Солнце (теория солнечных пятен). Согласно ему, генерация магнитного поля на Солнце обязана нерегулярному турбулентному движению солнечной плазмы.

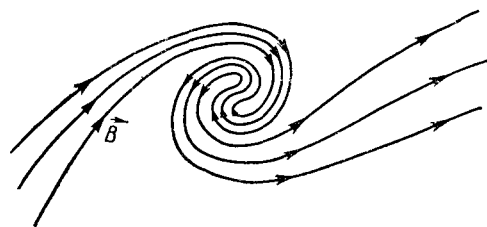


Рис. 54.1

Качественно это объясняется тем, что при турбулентном движении линии индукции, увлекаясь средой, сильно закручиваются, что и приводит к увеличению интенсивности поля (рис. 54.1). Чтобы понять, почему это происходит, рассмотрим участок магнитной силовой трубки длиной l и с поперечным сечением S . Учитывая закон сохранения массы вещества в трубке и магнитного потока сквозь ее сечение, имеем:

$$\tau l S = \text{const}, \quad B S = \text{const}.$$

Отсюда выводим соотношение

$$B/(\tau l) = \text{const}, \quad (54.10)$$

из которого следует, что при всяком удлинении векторной трубки и незначительном изменении плотности среды должно происходить усиление индукции магнитного поля. Нетрудно видеть, что при турбулентном движении среды как раз и происходит удлинение векторных трубок вследствие сильного закручивания линий индукции.

Еще одним важным следствием эффекта «вмороженности» магнитного поля в вещество являются *магнитогидродинамические волны*, или *волны Альвеена*, названные так по имени известного шведского астрофизика, впервые предсказавшего их. Физическая природа этих волн такова. Если проводящая жидкость (или газ) находится в постоянном магнитном поле \mathbf{B}_0 и перпендикулярно вектору индукции этого поля в жидкости возникли некоторые локальные смещения, то вследствие «вмороженности» поля в веществе линии индукции должны изогнуться. Но при этом в среде возникают силы, препятствующие этому изгибу, в чем нетрудно убедиться, проанализировав структуру силы Лоренца в магнитной гидродинамике.

Задача 54.2. Показать, что плотность силы Лоренца в магнитной гидродинамике можно представить в виде

$$\mathbf{f} = \frac{nB^2}{4\pi R} + \frac{\mathbf{B}}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial s} - \mathbf{V} \left(\frac{B^2}{8\pi} \right), \quad (54.11)$$

где R — радиус кривизны линии индукции, \mathbf{n} — главная нормаль к ней, s — «ордината вдоль линии. Дать интерпретацию каждого члена в (54.11).

Таким образом, мы убеждаемся, что линии индукции сопротивляются своему изгибу и ведут себя как упругие струны (вспомните наглядные представления Фарадея о магнитных силовых линиях — шнурах). Поэтому неудивительно, что вдоль магнитного поля в проводящей жидкости могут распространяться волны искривления. Для их количественного описания воспользуемся основными уравнениями магнитной гидродинамики (54.6). Предположим, что невозмущенная жидкость движется с постоянной скоростью \mathbf{u}_0 в постоянном и однородном магнитном поле \mathbf{B}_0 . Для возмущенной жидкости

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b},$$

где возмущения скорости \mathbf{v} и индукции \mathbf{b} магнитного поля подчиним условиям

$$(\mathbf{v}\mathbf{B}_0) = (\mathbf{b}\mathbf{B}_0) = 0, \quad [\mathbf{b}\mathbf{v}] = 0. \quad (54.12)$$

Для того чтобы удовлетворить уравнениям $\text{div } \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{b} = 0$, предположим, что все величины не меняются при смещении вдоль \mathbf{v} или \mathbf{b} , т. е. будем рассматривать возмущения типа плоских волн, зависящие лишь от одной из координат плоскости, перпендикулярной \mathbf{v} или \mathbf{b} . Иначе говоря, примем, что

$$(\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} = (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{b} = 0. \quad (54.13)$$

С учетом (54.12) и (54.13) уравнения (54.6) примут такой вид:

$$\begin{aligned} \tau \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{v} \right] &= - \nabla \left(p + \frac{b^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{b}, \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= \text{rot} [\mathbf{u}_0 \mathbf{b}] + \text{rot} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] + v_m \Delta \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (54.14)$$

Умножая первое уравнение (54.14) скалярно на \mathbf{B}_0 и принимая во внимание (54.12), находим $(\mathbf{B}_0 \nabla) [p + b^2/(8\pi)] = 0$, откуда вытекает, что

$$p + b^2/(8\pi) = \text{const}, \quad (54.15)$$

т. е. сумма гидродинамического и магнитного давлений для рассмотренного типа возмущений остается постоянной. Учитывая (54.15) и замечая, что $\text{rot} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] = (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{v}$, $\text{rot} [\mathbf{u}_0 \mathbf{b}] = -(\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{b}$, преобразуем (54.14):

$$\begin{aligned} [\partial/\partial t + (\mathbf{u}_0 \nabla)] \mathbf{v} &= (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{b}/(4\pi\tau), \\ [\partial/\partial t + (\mathbf{u}_0 \nabla)] \mathbf{b} &= (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{v} + v_m \Delta \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (54.16)$$

Действуя на второе уравнение (54.16) оператором $\partial/\partial t + (\mathbf{u}_0 \nabla)$ и учитывая первое уравнение, для поля \mathbf{b} получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \nabla) \right]^2 \mathbf{b} = \frac{1}{4\pi\tau} (\mathbf{B}_0 \nabla)^2 \mathbf{b} + v_m \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \nabla) \right] \Delta \mathbf{b} \quad (54.17)$$

и такое же уравнение для скорости \mathbf{v} .

Предположим сначала, что магнитное число Рейнольдса R_m достаточно велико и поэтому магнитной диффузией можно пренебречь, положив $v_m = 0$. В таком случае, полагая, что волны в жидкости распространяются в направлении \mathbf{s} со скоростью v_A , имеем:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{u}_0 t - s v_A t), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r} - \mathbf{u}_0 t - s v_A t).$$

Тогда из (54.17) выводим

$$4\pi\tau v_A^2 (s \nabla)^2 \mathbf{b} = (\mathbf{B}_0 \nabla)^2 \mathbf{b}. \quad (54.18)$$

Замечая, что $(\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{b} = (\mathbf{B}_0 \mathbf{s})(s \nabla) \mathbf{b}$, из (54.18) находим *скорость распространения волн Альвеена*:

$$v_A = (\mathbf{B}_0 \mathbf{s}) / \sqrt{4\pi\tau} = \cos \vartheta B_0 / \sqrt{4\pi\tau}, \quad (54.19)$$

где ϑ — угол между направлением распространения волны и вектором индукции \mathbf{B}_0 . Таким образом, скорость волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, оказывается максимальной и равной $B_0 / \sqrt{4\pi\tau}$. Особенность волн Альвеена состоит в том, что они поперечны и могут иметь как угодно большую амплитуду, ибо нигде в процессе вывода не делалось предположения о ее малости.

Если же не пренебрегать магнитной вязкостью, то волны Альвеена должны затухать. Так, рассматривая монохроматическую волну вида

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r}) - i\omega t],$$

из (54.17) получаем дисперсионное уравнение

$$[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{u}_0)]^2 - (\mathbf{B}_0 \mathbf{k})^2 / (4\pi\tau) + i v_m k^2 [\omega - (\mathbf{k}\mathbf{u}_0)] = 0. \quad (54.20)$$

Полагая $\omega = \omega' + i\omega''$, $\omega'' \ll \omega'$, из (54.20) находим:

$$\omega' \approx (k\mathbf{u}_0) \pm (k\mathbf{B}_0)/\sqrt{4\pi}, \quad \omega'' \approx -\nu_m k^2/2, \quad (54.21)$$

что соответствует волне Альвеена, амплитуда которой затухает по закону

$$b \sim \exp(-\nu_m k^2 t/2). \quad (54.22)$$

Задача 54.3. Во многих астрофизических исследованиях делается гипотеза о существовании в космическом пространстве бессильных магнитных полей \mathbf{B} , обращающихся в нуль силу Лоренца и тем самым не нарушающих равновесия среды. Бессильное поле подчиняется уравнению

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}, \quad (54.23)$$

где α — некоторая постоянная. Найти общий вид бессильного поля и показать, что в пренебрежении магнитной вязкостью оно реализует минимум энергии магнитного поля в области, на границе которой поле стационарно.

§ 55. МАГНИТНАЯ КУМУЛЯЦИЯ

В 1952 г. была теоретически предсказана возможность генерации сверхсильных магнитных полей (десятки миллионов эрстед) при быстром пластическом обжатии проводящих оболочек, охватывающих магнитный поток. Достаточно быстрое обжатие оболочек предполагалось осуществить с помощью направленного (кумулятивного) взрыва. Впоследствии были сконструированы и практически реализованы специальные взрывомагнитные устройства, в которых сходящаяся взрывная ударная волна производила пластическое сжатие и деформацию проводящего цилиндра или иного вида массивного контура, охватывающего магнитный поток.

Открытое явление, получившее название *магнитной кумуляции* и основанное на действии закона электромагнитной индукции Фарадея, может осуществляться и в естественных условиях. Например, сверхсильные магнитные поля пульсаров, по-видимому, возникают в результате взрывоподобного сжатия (коллапса) звезд.

Чтобы понять суть магнитной кумуляции, рассмотрим некоторый деформируемый проводящий контур, имеющий сопротивление $R(t)$ и индуктивность $L(t)$. Тогда, по закону электромагнитной индукции,

$$\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (LI) = -RI = -\frac{R}{L} (LI), \quad (55.1)$$

откуда

$$LI = L_0 I_0 \exp(-t/\tau), \quad (55.2)$$

где $L_0 = L(0)$, $I_0 = I(0)$, τ — эффективное время релаксации контура:

$$\tau \equiv t \left(c^2 \int_0^t \frac{R(t)}{L(t)} dt \right)^{-1}. \quad (55.3)$$

Допустим теперь, что контур сжимается за время $t \ll \tau$. Тогда из (55.2) следует, что $LI \approx L_0 I_0$, т. е. магнитный поток Φ , связанный с контуром, практически не успевает измениться за время сжатия. Поскольку

$$\Phi = \int_S (\mathbf{nB}) dS \approx BS,$$

то при сжатии контура, когда уменьшается площадь охватываемой им поверхности S , должно происходить возрастание индукции магнитного поля:

$$B \approx B_0 S_0 / S. \quad (55.4)$$

В качестве проводящего контура возьмем медный цилиндр с начальным радиусом $r_0 = 5$ см, толщиной стенок $d_0 = 1$ см и некоторой

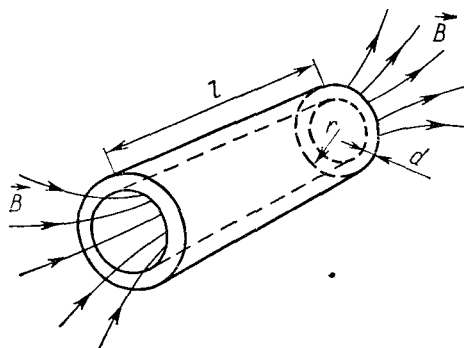


Рис. 55.1

высотой l , которая не войдет в окончательные расчетные формулы (рис. 55.1). Тогда сопротивление цилиндра вихревым токам, очевидно, равно

$$R \approx 2\pi r / (\sigma dl), \quad (55.5)$$

если считать, что $d \ll r$. Оценивая индуктивность по формуле $L = 4\pi^2 r^2 / l$, находим

$$c^2 R / L = (2\pi \sigma r d)^{-1} c^2. \quad (55.6)$$

Поскольку при сжатии металла плотность его почти не меняется, то из постоянства объема цилиндра выводим, что $rd = \text{const}$ и отношение R/L также неизменно при сжатии цилиндра. В итоге время релаксации оказывается равным

$$\tau = 2\pi \sigma r_0 d_0 c^{-2} \approx 0,02 \text{ с}. \quad (55.7)$$

Отсюда видно, что единственный путь для осуществления сжатия медного цилиндра за время, гораздо меньшее вычисленного, — это использование кумулятивного взрыва. Только взрывная волна может обеспечить столь большие скорости пластической деформации металла и создать давление, способное противодействовать магнитному давлению $p_m = B^2 / (8\pi)$, оказываемому на проводящую среду магнитным полем (так, $p_m = 10^8$ атм при $B = 5 \cdot 10^6$ Гс).

Магнитная кумуляция представляет собой концентрированное превращение химической энергии взрывчатого вещества в энергию магнитного поля, создаваемого вихревыми токами, протекающими в сжимаемой взрывом проводящей оболочке. Соответствующий энергетический расчет элементарен:

1. Плотность силы, действующей на проводящую среду в магнитном поле, линии индукции которого почти прямолинейны, согласно (54.6) и (54.11) равна

$$\mathbf{f} = -\nabla p - [\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{B}]/(4\pi) \approx -\nabla(p + p_m).$$

2. Чтобы противодействовать магнитному давлению p_m , во взрывной волне должна быть сконцентрирована энергия с плотностью $\omega = p_m$. В частности, $\omega = 4 \cdot 10^{10}$ эрг/см³ при $B = 10^6$ Гс. Такую энергию можно высвободить при взрыве 1 г тринитротолуола.

Практическое применение магнитной кумуляции весьма многообразно:

а) создание компактных магнитно-кумулятивных ускорителей элементарных частиц на энергии свыше миллиарда электронвольт (хотя подобный ускоритель может быть использован всего один раз, стоимость получения импульса ускоренных частиц оказывается гораздо меньшей, чем в обычных стационарных ускорителях);

б) получение сверхвысокотемпературной плазмы при сжатии магнитного потока с «замороженной» в него плазмой магнитно-кумулятивным способом (такая плазма может быть использована для осуществления управляемого термоядерного синтеза);

в) использование магнитной кумуляции для передачи сверхвысоких давлений на металлические поверхности и для разгона небольших металлических объектов до космических скоростей, что неосуществимо другими известными методами.

§ 56. ЭФФЕКТ ХОЛЛА И МГД-ГЕНЕРАТОРЫ

Рассмотрим проводящую среду, обладающую несколькими типами носителей тока, каждый из которых вносит свой вклад в плотность тока и электропроводность. Обозначая различные типы носителей тока индексом α , для неподвижной в целом среды, помещенной в электромагнитное поле, имеем

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} \mathbf{j}_{\alpha} = \sum_{\alpha} N_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{B}] \right), \quad (56.1)$$

где e_{α} , N_{α} , \mathbf{u}_{α} — соответственно заряд, средняя концентрация (плотность числа частиц) и средняя скорость носителей тока типа α . Кроме того, будем считать среду квазинейтральной, т. е. удовлетворяющей условию

$$\sum_{\alpha} N_{\alpha} e_{\alpha} = 0.$$

Соотношение (56.1) можно переписать в виде обычного закона Ома

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \cdot \mathbf{E}, \quad (56.2)$$

если ввести тензор электропроводности $\hat{\sigma}$, зависящий от индукции магнитного поля. При этом среда, помещенная в магнитное поле, приобретает анизотропные свойства, т. е. сила токов, протекающих в ней, оказывается зависящей от направления электрического поля. Для получения $\hat{\sigma}$ запишем соотношение (56.1) для отдельного носителя тока:

$$\mathbf{j}_{\alpha} = \sigma_{\alpha} \mathbf{E} + \kappa_{\alpha} [\mathbf{j}_{\alpha} \mathbf{B}], \quad (56.3)$$

где $\kappa_{\alpha} = \sigma_{\alpha}/(N_{\alpha} e_{\alpha} c)$. Разрешая (56.3) относительно \mathbf{j}_{α} , получаем век-

торное соотношение

$$j_{\alpha} = \frac{\sigma_{\alpha}}{1 + (\kappa_{\alpha} B)^2} \{ \mathbf{E} + \kappa_{\alpha} [\mathbf{E}\mathbf{B}] + \kappa_{\alpha}^2 \mathbf{B} (\mathbf{E}\mathbf{B}) \}. \quad (56.4)$$

Записав его в координатной форме, находим:

$$\hat{\sigma} = \sum_{\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha}, \quad \sigma_{\alpha}^{ik} = \frac{\sigma_{\alpha}}{1 + (\kappa_{\alpha} B)^2} (\delta^{ik} + \kappa_{\alpha} \epsilon^{ikl} B_l + \kappa_{\alpha}^2 B^l B^k). \quad (56.5)$$

В частности, если векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} перпендикулярны, то из (56.4) следует, что наличие магнитного поля \mathbf{B} сказывается в двух отношениях:

- 1) электропроводность в направлении \mathbf{E} уменьшается в $1 + \kappa_{\alpha}^2 B^2$ раз;
- 2) появляется ток Холла плотностью

$$j_{\alpha}^{\text{Холл}} = \frac{\sigma_{\alpha} \kappa_{\alpha}}{1 + (\kappa_{\alpha} B)^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}], \quad (56.6)$$

перпендикулярный вектору \mathbf{E} и обусловленный действием силы Лоренца (e_{α}/c) $[\mathbf{u}_{\alpha}\mathbf{B}]$. Очевидно, что в сильных магнитных полях, когда велик параметр Холла $\beta_{\alpha} \equiv \kappa_{\alpha} B \gg 1$, ток Холла является преобладающим.

Эффект Холла находит многочисленные применения в технике, а в последние годы он стал активно использоваться для прямого

преобразования тепловой энергии в электрическую, представляющего собой одну из самых перспективных отраслей энергетики. К генераторам такого типа относятся и *магнетогазодинамические генераторы* (МГД-генераторы). Принцип их действия состоит в следующем. Если в пространстве между двумя электродами создать магнитное поле \mathbf{B} и направить туда поток ионизованного газа (плазмы), то под действием силы Лоренца заряды разных знаков будут разделяться, скапливаясь на электродах (рис.

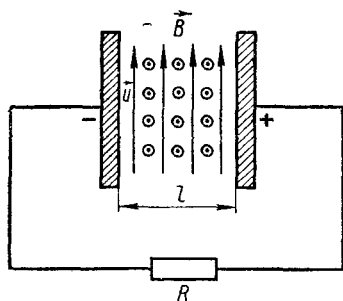


Рис. 56.1

56.1). Возникающая при этом разность потенциалов может быть подключена к некоторой нагрузке R . Э. д. с. такого генератора, очевидно, равна

$$\mathcal{E} = uBl/c, \quad (56.7)$$

где u — скорость потока плазмы, l — расстояние между электродами. Сила тока в нагрузке при этом определяется законом Ома:

$$I = jS = \sigma S (-E + uB/c) = U/R, \quad (56.8)$$

где $U = El$ — напряжение на генераторе, S — площадь электродов.

Вводя внутреннее сопротивление $r = l/(\sigma S)$ генератора и параметр нагрузки

$$k = R/(R + r) = U/\mathcal{E} = Ec/(Bu), \quad (56.9)$$

нетрудно вычислить мощность МГД-генератора:

$$P = IU = lSjE = \sigma lS (uB/c)^2 k(1 - k). \quad (56.10)$$

Отсюда видно, что генераторный режим ($P > 0$) осуществляется только при $k < 1$, т. е. при

$$u > cE/B. \quad (56.11)$$

Если же приложить к электродам достаточно большое внешнее напряжение U и добиться нарушения неравенства (56.11), то плазма будет выталкиваться из магнитного поля силой плотностью $c^{-1}[\mathbf{j}\mathbf{B}] \sim \sim [\mathbf{E}\mathbf{V}]$. Так работают плазменные двигатели и насосы для жидкого металла. Таким образом, МГД-генератор оказывается обратимым и может работать как в генераторном, так и в моторном режимах.

Из формулы (56.10) следует, что мощность МГД-генератора определяется магнитной индукцией \mathbf{B} , электропроводностью σ плазмы и скоростью \mathbf{u} ее потока. Поскольку основной вклад в электропроводность плазмы дают электроны, то на практике часто используют в качестве рабочего тела благородные газы с небольшими примесями (присадками) легкоионизируемых щелочных металлов. Важной характеристикой МГД-генератора является его *электрический коэффициент полезного действия* η_e , равный отношению генерируемой электрической мощности P к механической мощности N , затрачиваемой на проталкивание плазмы в магнитном поле и, очевидно, равной

$$N = (\mathbf{u} [\mathbf{j}\mathbf{B}]) lS/c. \quad (56.12)$$

Для вычисления плотности тока в (56.12) можно воспользоваться условием квазинейтральности плазмы и перейти в систему отсчета потока, в которой справедлива формула (56.2). При этом вследствие квазинейтральности плотность тока не изменится, а напряженность электрического поля станет равной $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{u}\mathbf{B}]/c$. Таким образом,

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \cdot \mathbf{E}' = \hat{\sigma} \cdot (\mathbf{E} + [\mathbf{u}\mathbf{B}]/c). \quad (56.13)$$

Подставляя (56.13) в (56.12), нетрудно вычислить и коэффициент η_e . Поскольку генерируемая электрическая мощность возникает в результате торможения и охлаждения плазмы в процессе прохождения плазменного потока по МГД-каналу, то для наиболее эффективного использования энергии плазмы важно на выходе канала получить плазму как можно более холодную и с наименьшей возможной скоростью потока. Расчеты показывают, что выбор оптимального режима работы МГД-генератора существенно определяется изменением профиля канала вдоль течения.

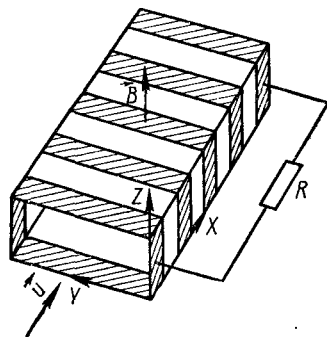


Рис. 56.2

Задача 56.1. Рассчитать мощность и коэффициент η_e для генератора Холла, имеющего короткозамкнутые секционированные электроды и единую нагрузку R (рис. 56.2).

ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ СРЕД

Глава

5

В основе макроскопической электродинамики Максвелла, как мы убедились в предыдущих главах, лежит описание электромагнитных процессов в средах, свойства которых задаются феноменологически с помощью соотношений

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}, \mathbf{B}),$$

рассматриваемых как результат обобщения данных макроскопических опытов. Однако в конце XIX в., когда с открытием электрона стало ясно, что в состав атомов входят заряженные частицы, заряд которых кратен заряду электрона, возникла задача «объяснения» макроскопических параметров типа ϵ , μ , σ на основе моделирования атомной структуры. С исчерпывающей полнотой эта задача была поставлена и в основном решена замечательным голландским физиком *Г. А. Лоренцем* (1853—1928). В главном своем труде «Теория электронов», говоря о недостаточности описания вещества с помощью коэффициентов ϵ , μ , σ , он писал: «Если мы хотим понять, каким образом электрические и магнитные свойства зависят от температуры, плотности, химического строения или кристаллического состояния вещества, то мы не можем удовлетвориться простым введением для каждого вещества этих коэффициентов, значения которых должны определяться из опыта; мы будем принуждены обратиться к какой-нибудь гипотезе относительно механизма, лежащего в основе всех этих явлений»*.

* *Лоренц Г. А.* Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. Л.—М., 1934, с. 21—22.

С точки зрения Лоренца фундаментальная роль в этом механизме должна отводиться «электронам», под которыми он понимал все заряженные частицы, входящие в состав атомов, т. е. отрицательно заряженные электроны и положительно заряженные ядра атомов. Для построения «электронной теории» в соответствии с намеченной программой Лоренц сформулировал в 1888 г. следующие исходные гипотезы:

1. Все вещество состоит из положительно и отрицательно заряженных электронов. Никаких других материальных объектов, кроме электронов, не существует.

2. Электроны находятся в электромагнитном эфире, состояние которого описывается электромагнитным полем, подчиняющимся уравнениям Максвелла в вакууме.

3. Электрон можно представить себе в виде заряда, распределенного с некоторой плотностью ρ в очень малом объеме.

4. Движение электронов определяется действующей на них электромагнитной силой с плотностью $\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}\mathbf{B}])$.

5. Макроскопические поля суть средние по времени и пространству от микроскопических полей.

6. Эфир неподвижен в определенной инерциальной системе отсчета.

Не все из этих постулатов могут быть оправданы с современной точки зрения. Прежде всего следует отметить, что для описания структуры атомов уже нельзя использовать законы классической механики, их место должны занять новые закономерности — квантовые. В частности, помимо заряда необходимо учитывать и такие характеристики микрочастиц, как спин, магнитный момент и т. д. В основном квантовые эффекты проявляются при описании взаимодействия микрочастиц: наряду с известными электромагнитными силами существуют еще обменные силы, спин-орбитальные, спин-спиновые и др. Наконец, совершенно излишней является гипотеза Лоренца о неподвижном электромагнитном эфире, анализ которой дан в части курса, посвященной теории относительности.

Будучи ограниченными классическим описанием материи, мы не в силах исправить все недостатки схемы Лоренца, но для получения основных следствий электронной теории вполне достаточно следующих исходных постулатов:

1. Вещество имеет атомистическую структуру. Его электромагнитные свойства обусловлены легкими отрицательно заряженными электронами с зарядом $e = -4,803242 \text{ СГС}_q$ и тяжелыми положительно заряженными ядрами с зарядами, кратными заряду электрона.

2. Эти элементарные заряды являются источниками микроскопического электромагнитного поля, которое вне зарядов подчиняется уравнениям Максвелла — Лоренца, т. е. уравнениям Максвелла в пустоте.

3. Модели атомов, молекул и самих электронов нельзя построить без допущения сил неэлектромагнитного происхождения, структура которых должна разумно постулироваться.

4. Макроскопические поля \mathbf{E} и \mathbf{B} суть средние по пространству и времени от соответствующих микроскопических полей \mathbf{e} и \mathbf{b} .

5. Наконец, забегаю несколько вперед, следует потребовать, чтобы уравнения Максвелла — Лоренца для полей \mathbf{e} и \mathbf{b} и уравнения движения зарядов были ковариантны по отношению к преобразованиям Лоренца. В связи с этим введение неподвижного электромагнитного эфира оказывается излишним.

§ 57. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА — ЛОРЕНЦА И МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Согласно вышеизложенным постулатам, уравнения Максвелла — Лоренца для микрополей \mathbf{e} и \mathbf{b} имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{b} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\text{микро}}, & \operatorname{div} \mathbf{e} &= 4\pi \rho^{\text{микро}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{e} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{b} &= 0. \end{aligned} \quad (57.1)$$

При этом микроскопические плотности заряда и тока могут быть представлены в форме

$$\rho^{\text{микро}}(t, \mathbf{r}) = \sum_i \rho_i(t, \mathbf{r}); \quad \mathbf{j}^{\text{микро}}(t, \mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{j}_i(t, \mathbf{r}),$$

где ρ_i , \mathbf{j}_i — плотности заряда и тока для отдельной заряженной частицы номера i . Если частицы считать точечными, то

$$\begin{aligned} \rho_i &= \rho_i^{\text{точ}}(t, \mathbf{r}) = e_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)], \\ \mathbf{j}_i &= \mathbf{j}_i^{\text{точ}}(t, \mathbf{r}) = e_i \mathbf{v}_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)], \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}_i(t)$ — радиус-вектор положения частицы, $\mathbf{v}_i(t)$ — ее скорость, e_i — заряд. Но в таком случае не учитывается, например, тот важный факт, что заряженные частицы могут обладать собственными магнитными и электрическими дипольными моментами. Используя представления (2.12) и (2.13) для плотностей связанных зарядов и токов, учтем подобные структурные эффекты, добавив к $\rho_i^{\text{точ}}$ и $\mathbf{j}_i^{\text{точ}}$ следующие источники:

$$\rho'_i = -\operatorname{div} \boldsymbol{\pi}_i, \quad \mathbf{j}'_i = \partial \boldsymbol{\pi}_i / \partial t + c \operatorname{rot} \boldsymbol{\mu}_i,$$

где $\boldsymbol{\pi}_i$ и $\boldsymbol{\mu}_i$ — вспомогательные векторы, исчезающие вне частицы номера i и в практических расчетах принимаемые δ -образными. Таким образом,

$$\begin{aligned} \rho^{\text{микро}}(t, \mathbf{r}) &= \sum_i \{e_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] - \operatorname{div} \boldsymbol{\pi}_i\}, \\ \mathbf{j}^{\text{микро}}(t, \mathbf{r}) &= \sum_i \{e_i \mathbf{v}_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] + \partial \boldsymbol{\pi}_i / \partial t + c \operatorname{rot} \boldsymbol{\mu}_i\}. \end{aligned} \quad (57.2)$$

Поскольку заряженные частицы движутся по сложным, запутанным траекториям, то порождаемые ими микрополя \mathbf{e} и \mathbf{b} имеют нерегулярную, случайную структуру. В то же время макроскопические поля \mathbf{E} и \mathbf{B} , подчиняющиеся уравнениям Максвелла (10.1), являются регулярными функциями, ибо порождаются макроскопическими источниками $\rho^{\text{полн}}$ и $\mathbf{j}^{\text{полн}}$, получающимися усреднением соот-

ветствующих микроскопических источников (57.2). Поэтому и макроскопические уравнения Максвелла должны получаться усреднением микроскопических уравнений Максвелла — Лоренца (57.1).

Под усреднением какой-либо микроскопической величины $f(t, \mathbf{r})$ мы будем понимать усреднение по физическому бесконечно малому объему ΔV , определенному соотношением (2.1), и по физическому бесконечно малому интервалу времени Δt , определение которого мы сейчас дадим. Если усреднение по объему необходимо потому, что в макроскопической теории рассматриваются объекты, состоящие из большого числа частиц, то усреднение по времени вызвано тем, что микроскопические поля, даже усредненные по пространству, остаются хаотически изменяющимися во времени в связи с беспорядочным движением порождающих их частиц. Если v_0 — средняя тепловая скорость движения частиц, а l — среднее расстояние между ними, то характерное время изменения микроскопических величин имеет порядок $t_0 = l/v_0$. С другой стороны, всегда можно ввести характерное время T изменения макроскопических величин, в качестве которого обычно берут время релаксации системы (37.13), либо период колебаний в случае периодических процессов. В таком случае физический бесконечно малый интервал времени Δt должен удовлетворять условию

$$t_0 \ll \Delta t \ll T. \quad (57.3)$$

Тогда усреднение некоторой микроскопической величины $f(t, \mathbf{r})$ определяется следующим образом:

$$\langle f(t, \mathbf{r}) \rangle \equiv \frac{1}{\Delta t \Delta V} \int_{\Delta t} \int_{\Delta V} f(t+t', \mathbf{r}+\mathbf{r}') dt' dV'. \quad (57.4)$$

Отсюда видно, что операция усреднения $\langle \dots \rangle$ линейна и обладает свойствами

$$\nabla \langle f \rangle = \langle \nabla f \rangle, \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle. \quad (57.5)$$

Применяя операцию усреднения (57.4) к уравнениям Максвелла — Лоренца и используя (57.5), находим:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \langle \mathbf{b} \rangle &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{e} \rangle + \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j}^{\text{микр}} \rangle, \quad \operatorname{div} \langle \mathbf{e} \rangle = 4\pi \langle \rho^{\text{микр}} \rangle, \\ \operatorname{rot} \langle \mathbf{e} \rangle &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{b} \rangle, \quad \operatorname{div} \langle \mathbf{b} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (57.6)$$

Сравнивая систему уравнений (57.6) с уравнениями Максвелла (10.1), убеждаемся, что для их согласования необходимо положить:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e} \rangle &= \mathbf{E}, \quad \langle \rho^{\text{микр}} \rangle \equiv \rho^{\text{полн}} = \rho - \operatorname{div} \mathbf{P}, \\ \langle \mathbf{b} \rangle &= \mathbf{B}, \quad \langle \mathbf{j}^{\text{микр}} \rangle \equiv \mathbf{j}^{\text{полн}} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (57.7)$$

Выясним теперь более подробно, пользуясь представлением (57.2) для микроскопических источников, какова структура ρ , \mathbf{j} , \mathbf{P} и \mathbf{M} .

Прежде всего, пользуясь свойством δ -функции, найдем вклад точечных источников в $\rho^{\text{полн}}$ и $\mathbf{j}^{\text{полн}}$:

$$\langle \rho^{\text{точ}}(t, \mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\Delta t \Delta V} \int_{\Delta t} \sum_{i \in \Delta V'} e_i dt',$$

$$\langle \mathbf{j}^{\text{точ}}(t, \mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\Delta t \Delta V} \int_{\Delta t} \sum_{i \in \Delta V'} e_i \mathbf{v}_i(t+t') dt',$$
(57.8)

где символ $i \in \Delta V'$ означает, что суммирование проводится по всем зарядам, которые в момент времени $t+t'$ оказались в объеме ΔV с центром в точке \mathbf{r} . Отсюда видно, что выражения (57.8) отличаются от (2.2) и (2.5) только дополнительным усреднением по времени.

Оценим теперь вклад в (57.8) связанных зарядов, которые будем обозначать индексом α . Пусть некоторая молекула номера k имеет объем V_k . Чтобы найти ее вклад в $\rho^{\text{точ}}$ и $\mathbf{j}^{\text{точ}}$, заметим (на основе неравенства $V_k \ll \Delta V$), что для всякого заряда номера α , принадлежащего молекуле, $|\mathbf{r}_\alpha|^3 \ll \Delta V$, если начало координат поместить в центр масс молекулы. Поскольку в дальнейшем будет производиться усреднение по объему ΔV , то в $\rho^{\text{точ}}$ можно провести разложение по степеням \mathbf{r}_α . В таком случае, обозначая $\rho_{(k)}^{\text{точ}}$ — вклад молекулы номера k в $\rho^{\text{точ}}$, имеем

$$\rho_{(k)}^{\text{точ}}(t, \mathbf{r}) = \sum_{\alpha \in V_k} e_\alpha \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\alpha \in V_k} (\mathbf{r}_\alpha \mathbf{V})^n e_\alpha \delta(\mathbf{r}),$$

что соответствует обычному разложению по мультиполям. Если же учесть условие нейтральности молекулы, согласно которому

$$\sum_{\alpha \in V_k} e_\alpha = 0,$$

то

$$\rho_{(k)}^{\text{точ}}(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\alpha \in V_k} (\mathbf{r}_\alpha \mathbf{V})^n e_\alpha \delta(\mathbf{r}) = -\text{div } \mathbf{P}_{(k)}^{\text{точ}},$$
(57.9)

где

$$\mathbf{P}_{(k)}^{\text{точ}} = \sum_{\alpha \in V_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} e_\alpha \mathbf{r}_\alpha (\mathbf{r}_\alpha \mathbf{V})^{n-1} \delta(\mathbf{r}).$$
(57.10)

Задача 57.1. Показать, что вклад отдельной молекулы номера k в $\mathbf{j}^{\text{точ}}$ может быть представлен в виде $\partial \mathbf{P}_{(k)}^{\text{точ}} / \partial t + \text{rot } \mathbf{M}_{(k)}^{\text{точ}}$, где

$$\mathbf{M}_{(k)}^{\text{точ}} = \sum_{\alpha \in V_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n e_\alpha}{(n+1)!} \frac{1}{c} [\mathbf{r}_\alpha \mathbf{v}_\alpha] (\mathbf{r}_\alpha \mathbf{V})^{n-1} \delta(\mathbf{r}).$$
(57.11)

Теперь уже нетрудно получить явное выражение для поляризованности \mathbf{P} и намагниченности \mathbf{M} . Для этого достаточно просуммировать (57.10) и (57.11) по всем молекулам и учесть в соответствии с (57.2) собственные магнитные и дипольные моменты заряженных частиц. В результате после усреднения получаем:

$$\mathbf{P} = \sum_i \langle \pi_i \rangle + \frac{1}{\Delta V} \sum_{\alpha \in \Delta V} e_\alpha \widetilde{\mathbf{r}}_\alpha, \quad \mathbf{M} = \sum_i \langle \mu_i \rangle + \frac{1}{2c\Delta V} \sum_{\alpha \in \Delta V} e_\alpha \widetilde{[\mathbf{r}_\alpha \mathbf{v}_\alpha]},$$
(57.12)

где волнистой чертой обозначено усреднение по интервалу времени Δt . При выводе этих формул мы, используя неравенство $|\mathbf{r}_\alpha|^3 \ll \Delta V$, пренебрегли высшими членами разложения ($n > 1$) в (57.10) и (57.11), относящимися к высшим мультипольным моментам.

Из вида формул (57.12) следует, что векторы \mathbf{P} и \mathbf{M} , возникающие в электронной теории, отличаются от ранее введенных векторов (7.5) и (8.2) практически лишь дополнительным усреднением по времени. Это обстоятельство позволяет интерпретировать их как средние плотности дипольного и магнитного моментов среды.

Наконец, очевидно, что ρ и \mathbf{j} получаются при усреднении точечных частей микроскопических плотностей свободных зарядов и токов. Обозначая свободные заряды индексом β , имеем:

$$\rho = \sum_{\beta} e_{\beta} \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\beta}) \rangle, \quad \mathbf{j} = \sum_{\beta} e_{\beta} \langle \mathbf{v}_{\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\beta}) \rangle, \quad (57.13)$$

что после усреднения приводится к виду (57.8).

Таким образом, установлено, что макроскопические уравнения Максвелла для электромагнитного поля в среде получаются в электронной теории путем пространственно-временного усреднения соответствующих микроскопических уравнений Максвелла — Лоренца. Теперь остается выяснить, как в электронной теории могут быть получены конкретные уравнения состояния вещества типа $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B})$.

Задача 57.2. Введя микроскопические потенциалы электромагнитного поля, т. е. положив $\mathbf{e} = -\nabla\phi - c^{-1} d\mathbf{a}/dt$, $\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}$, показать, что уравнения Максвелла — Лоренца (57.1) могут быть получены из вариационного принципа

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\frac{1}{8\pi} (\mathbf{e}^2 - \mathbf{b}^2) + \frac{1}{c} (\mathbf{a} \mathbf{j}_{\text{микр}}) - \phi \rho_{\text{микр}} \right] dt dV = 0 \quad (57.14)$$

при условии, что вариации $\delta\phi$ и $\delta\mathbf{a}$ исчезают на границах области интегрирования. Вывести отсюда выражение для силы Лоренца.

§ 58. ДИЭЛЕКТРИКИ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Особенность диэлектриков, т. е. сред, поляризующихся под действием электрического поля, состоит в том, что их молекулы обладают электрическими дипольными моментами \mathbf{p} , в общем случае зависящими от действующего на них поля \mathbf{E}' . Как будет ниже показано, действующее на отдельные молекулы поле \mathbf{E}' , часто называемое локальным, отличается от среднего поля $\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle$ в среде и совпадает с последним лишь для достаточно разреженных веществ.

Считая поле \mathbf{E}' слабым по сравнению с внутримолекулярным, можно произвести разложение функции $\mathbf{p}(\mathbf{E}')$ в ряд Маклорена и ограничиться линейным приближением:

$$\mathbf{p}(\mathbf{E}') \approx \mathbf{p}(0) + \left(\mathbf{E}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}'} \right) \mathbf{p}(\mathbf{E}') \Big|_{\mathbf{E}'=0} \equiv \mathbf{p}_0 + \hat{\alpha} \cdot \mathbf{E}', \quad (58.1)$$

где $\hat{\alpha}$ — тензор поляризуемости молекулы, имеющий компоненты

$$\alpha_{ik} = \partial p_i / \partial E'^k |_{E'=0}. \quad (58.2)$$

Таким образом, в общем случае в дипольном моменте молекулы можно выделить постоянную часть \mathbf{p}_0 , не зависящую от поля \mathbf{E}' и называемую *собственным дипольным моментом* молекулы, а также часть $\hat{\alpha} \cdot \mathbf{E}'$, линейно зависящую от поля и называемую в связи с этим *индуцированным дипольным моментом*. При этом, вообще говоря, направление индуцированного момента не совпадает с направлением поля \mathbf{E}' , что является проявлением анизотропии молекул. В простейшем случае изотропных молекул можно положить

$$\alpha_{ik} = \alpha \delta_{ik}, \quad (58.3)$$

поэтому

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \alpha \mathbf{E}'. \quad (58.4)$$

Подобная зависимость имеет место, например, в случае, когда заряды $\pm e$, разделяемые в поляризуемой молекуле, удерживаются в положении равновесия квазиупругой силой, пропорциональной смещению: $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$. Нетрудно показать, что в этом случае поляризуемость $\alpha = e^2/k$, поскольку при равновесии $k\mathbf{r} = e\mathbf{E}'$ и индуцированный дипольный момент равен $e\mathbf{r} = \mathbf{E}' e^2/k$.

В связи с зависимостью (58.4) интересно выделить два крайних типа изотропных молекул, наблюдаемых в природе:

1) *квазиупругие молекулы*, у которых $\mathbf{p}_0 = 0$, т. е. $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}'$ (в качестве примера можно указать молекулы CH_4 и CCl_4);

2) *дипольные молекулы*, у которых $\mathbf{p}_0 \neq 0$, а квазиупругий член $\alpha \mathbf{E}'$ мал по сравнению с собственно дипольным \mathbf{p}_0 (примером являются молекулы H_2O , HCl , CH_3Cl).

Диэлектрики, состоящие из квазиупругих молекул, называются диэлектриками I класса (или *неполярными*), а состоящие из дипольных молекул — диэлектриками II класса (или *полярными*). Поляризация диэлектриков I класса возникает за счет растягивания зарядов в каждой из молекул под влиянием поля \mathbf{E}' , в диэлектриках же II класса она возникает за счет поворачивания «жестких» диполей по направлению вектора \mathbf{E}' .

Для нахождения поляризованности \mathbf{P} среды необходимо в соответствии с (57.12) просуммировать дипольные моменты отдельных молекул по физическому бесконечно малому объему ΔV и произвести усреднение по времени. В статическом случае, когда время усреднения Δt велико по сравнению с временем установления термодинамического равновесия, усреднение по времени может быть заменено усреднением по равновесному статистическому ансамблю систем, находящихся в различных состояниях, как это доказывается в статистической физике. В рассматриваемом случае, когда взаимодействие молекул друг с другом и с внешним полем может быть представлено в виде суммы взаимодействий отдельных молекул с некоторым эффективным внешним полем (роль которого в данном случае выполняет локальное поле \mathbf{E}'), для усреднения величин, относящихся

к отдельным молекулам, можно использовать *распределение Больцмана* *. Согласно этому распределению, вероятность встретить молекулу в состоянии с обобщенными координатами q , лежащими в некоторой области конфигурационного пространства с объемом dq , равна

$$dW = Z^{-1} e^{-U(q)/(kT)} dq, \quad (58.5)$$

где $U(q)$ — энергия взаимодействия молекулы с эффективным внешним полем, Z — постоянная нормировки, k — постоянная Больцмана, T — температура среды.

Для нахождения энергии взаимодействия $U(q)$ заметим, что [см. (27.16)] сила, действующая на диполь \mathbf{p} в электрическом поле \mathbf{E}' , равна

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E}' = (\mathbf{p}_0\nabla)\mathbf{E}' + \alpha(\mathbf{E}'\nabla)\mathbf{E}',$$

откуда просто вычислить потенциальную энергию взаимодействия **:

$$U = - \int^{\mathbf{r}} (\mathbf{F} d\mathbf{r}) = - (\mathbf{p}_0\mathbf{E}') - \frac{\alpha}{2} (\mathbf{E}')^2. \quad (58.6)$$

Для вычисления поляризованности \mathbf{P} нужно найти среднее значение дипольного момента молекулы:

$$\langle \mathbf{p} \rangle \equiv \int \mathbf{p} dW = Z^{-1} \int \mathbf{p} e^{-U(q)/(kT)} dq. \quad (58.7)$$

Считая поле \mathbf{E}' однородным и замечая, что постоянная нормировки, определяемая условием $\int dW = 1$, равна

$$Z = \int e^{-U(q)/(kT)} dq,$$

убеждаемся, что

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \mathbf{E}' (\alpha + p_0 \langle \cos \vartheta \rangle / E'), \quad (58.8)$$

где ϑ — угол между векторами \mathbf{p}_0 и \mathbf{E}' . При этом

$$\langle \cos \vartheta \rangle = \int_0^\pi \cos \vartheta e^{\beta \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta \left(\int_0^\pi e^{\beta \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta \right)^{-1}, \quad (58.9)$$

где $\beta \equiv p_0 E' / (kT)$.

Интеграл (58.9) легко вычисляется дифференцированием по параметру β :

$$\langle \cos \vartheta \rangle = \frac{d}{d\beta} \ln \int_0^\pi e^{\beta \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{d}{d\beta} \ln \left(\frac{\operatorname{sh} \beta}{\beta} \right) \equiv L(\beta),$$

* Терлецкий Я. П. Статистическая физика. М., 1973, § 15.

** Потенциальность силы легко установить, положив $\mathbf{E}' = -\nabla\Phi'$ и учитывая (27.18).

где $L(\beta)$ — функция Ланжевена (рис. 58.1), имеющая следующее асимптотическое поведение при малых и больших β :

$$L(\beta) = \text{cth } \beta - \frac{1}{\beta} \approx \begin{cases} \beta/3, & \beta \ll 1; \\ 1 - \beta^{-1}, & \beta \gg 1. \end{cases} \quad (58.10)$$

Если среда однородна и плотность числа молекул (концентрация) равна N , то [см. (58.8)] поляризованность оказывается равной

$$P = NE' \left[\alpha + \frac{p_0}{E'} L \left(\frac{p_0 E'}{kT} \right) \right]. \quad (58.11)$$

Для обычных условий, когда $T \sim 300$ К, $p_0 \sim 10^{-17}$ СГСЭ, $E \sim 1$ СГСЭ, получаем $\beta \sim 10^{-4} \ll 1$. Поэтому можно воспользоваться приближением $L(\beta) \approx \beta/3$ и привести (58.11) к виду

$$P = NE' \left[\alpha + p_0^2 / (3kT) \right]. \quad (58.12)$$

Тогда критические поля, при которых приближение (58.12) перестает быть справедливым, определяются условием $\beta \sim 1$ и имеют порядок $E_{\text{кр}} \sim 10^4 T$ В/см. Из (58.11) следует, что при сверхнизкой температуре, когда $\beta \gg 1$, может наступить насыщение диэлектрика, т. е. поляризованность примет максимально возможное значение

$$P_{\text{макс}} = NE' (\alpha + p_0/E'). \quad (58.13)$$

При комнатной температуре насыщение практически неосуществимо, так как достигается при столь высокой напряженности поля, что в диэлектрике наступает пробой.

Формулой (58.11) можно воспользоваться для вычисления диэлектрической проницаемости среды, если известны поляризуемость молекул α , их собственный дипольный момент p_0 , а также связь действующего поля E' со средним полем E . Что касается поляризуемости молекул, то она может быть обусловлена как деформацией под действием поля E' электронных орбит, так и смещением ионов, составляющих молекулу. Считая смещения электронов и ионов малыми, можно предположить, что они сопровождаются действием возвращающей квазиупругой силы $F = -kr = -m\omega^2 r$, где ω — соответствующая резонансная частота поглощения, которая в случае электронов лежит в оптическом диапазоне, а в случае ионов — в инфракрасном. Суммируя дипольные моменты всех зарядов, составляющих молекулу, нетрудно вывести следующее выражение для поляризуемости:

$$\alpha = \sum_i e_i^2 / (m_i \omega_i^2). \quad (58.14)$$

Надо сказать, что квантовая теория подтверждает справедливость формулы (58.14), причем в большинстве случаев основной вклад в поляризуемость дают электроны.

Таким образом, выяснить природу поляризуемости можно, если привлечь некоторые модельные представления о молекулах. Из (58.14) следует, что поляризуемость α имеет размерность объема и поэтому должна быть пропорциональна объему молекулы, т. е.

$$\alpha \sim a^3, \quad (58.15)$$

где a — радиус молекулы. Этот результат в самом деле получается во всех известных модельных схемах, как классических, так и квантовых.

Задача 58.1. Вычислить поляризуемость α для следующих моделей молекул: а) молекула — металлический шарик (Моссоти); б) молекула — пудинг (Дж. Дж. Томсон); в) планетарная модель Бора — Резерфорда.

Займемся теперь вычислением напряженности E' действующего поля. По определению, E' — напряженность поля, действующего на заряды внутри некоторой выделенной молекулы. Ясно, что $E' \neq E$, ибо в E' существенный вклад дают ближайшие молекулы, тогда как E получается усреднением молекулярных полей по достаточно большому объему ΔV . Для нахождения E' воспользуемся методом, предложенным Лоренцем. Окружим молекулу сферой некоторого радиуса R , такого, чтобы вне сферы распределение молекул можно было считать в среднем равномерным, а сам диэлектрик рассматривать как непрерывную среду, т. е. рассчитывать в нем поле методами макроскопической электродинамики. Таким образом, напряженность поля E' , вычисляемую в центре сферы, можно разбить на две части:

$$E' = E_1 + E_2, \quad (58.16)$$

где E_1 — напряженность поля, создаваемого всеми молекулами, расположенными внутри сферы, а E_2 — напряженность внешнего поля и поля молекул, расположенных вне сферы. При этом, конечно, нужно исключить и напряженность поля самой выделенной молекулы, ибо его действие на поляризуемый заряд учитывается в квазиупругой силе $F = -kr$.

Нахождение поля E_2 сводится к решению известной задачи о поле внутри сферической полости, вырезанной в однородно поляризованном диэлектрике с поляризованностью P и полем E на бесконечности. Электростатический потенциал φ_2 для этой задачи может быть найден методом, изложенным в § 25. Очевидно,

$$\varphi_2(r < R) = - (E_2 r), \quad \varphi_2(r > R) = (Cr) r^{-3} - (Er), \quad (58.17)$$

где C — дипольный момент поверхностных зарядов на границе полости, равный, как нетрудно видеть, дипольному моменту вырезанного шара, взятому со знаком минус, т. е. $C = - (4\pi/3) R^3 P$. Поэтому из условия непрерывности потенциала на границе шара выводим

$$E_2 = E - C/R^3 = E + 4\pi P/3. \quad (58.18)$$

Вычисление же E_1 представляет гораздо большие трудности. Считая, например, молекулы точечными диполями с моментами p , ориентированными по вектору E , для напряженности E_1 в центре шара находим выражение

$$E_1 = \sum_{i \in V_R} [-3r_i(p r_i) + p r_i^2]/r_i^5. \quad (58.19)$$

Результат вычисления этой суммы существенно зависит от расположения молекул внутри шара. Если считать, что молекулы расположены симметрично (например, в случае простой кубической кристаллической решетки) или же хаотично (газ, жидкость), то все слагаемые компенсируются, так как сумма сводится к сферическому среднему виду

$$\oint [p - 3n(pn)] d\Omega = 0.$$

В других случаях (например, для кристаллических решеток с некубической симметрией) это, однако, не так и $E_1 \neq 0$. Для простоты будем все же полагать $E_1 = 0$. Тогда

$$E' = E + 4\pi P/3. \quad (58.20)$$

Для большинства изотропных сред формула (58.20) достаточно хорошо описывает связь действующего и среднего полей.

Задача 58.2. В методе Лоренца напряженность действующего поля E' вычисляется в предположении, что дипольные моменты молекул ориентированы по полю E . Это предположение можно считать оправданным для неполярных сред или же для полярных веществ в относительно сильных полях. Если же поле слабо, то дезориентирующее влияние соседних молекул в полярных средах может оказаться значительным. Чтобы его учесть, американский физик Л. Онсагер предложил в 1936 г. следующий метод. Если рассмотреть сферическую полость столь малого радиуса R , чтобы внутри нее могла поместиться лишь одна молекула, то напряженность поля в полости и есть, очевидно, E' . Вне полости она описывается выражением (58.17). Показать, что в этом случае*

$$E' = E3\epsilon/(2\epsilon + 1). \quad (58.21)$$

Подставляя (58.20) в (58.12) и выражая оттуда P , находим

$$P = \frac{N\alpha_n}{1 - 4\pi N\alpha_n/3} E \equiv \kappa E, \quad (58.22)$$

где α_n — полная поляризуемость молекулы, выражаемая формулой Ланжевена — Дебая

$$\alpha_n = \alpha + p_0^2/(3kT) \quad (58.23)$$

и включающая в себя наряду с электронной и ионной составляющими еще и ориентационную часть $p_0^2/(3kT)$, обусловленную средней проекцией собственного дипольного момента p_0 . Зная восприимчивость κ , нетрудно подсчитать и диэлектрическую проницаемость:

$$\epsilon = 1 + 4\pi\kappa = 1 + \frac{4\pi N\alpha_n}{1 - 4\pi N\alpha_n/3}. \quad (58.24)$$

* С другими методами расчета действующего поля можно ознакомиться по монографии: Фрелих Г. Теория диэлектриков, М., 1960.

В предельном случае малых плотностей, когда $N\alpha_n \ll 1$,

$$\epsilon \approx 1 + 4\pi N\alpha_n, \quad (58.25)$$

что фактически предполагает совпадение напряженностей среднего и действующего полей.

Разрешая (58.24) относительно $N\alpha_n$, получаем более удобное для проверки на опыте соотношение Клаузиуса—Мосотти:

$$(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2) = 4\pi N\alpha_n/3. \quad (58.26)$$

Замечая, что концентрация N связана с массовой плотностью τ вещества соотношением $\tau N_A/\mathcal{M} = N$, где \mathcal{M} — молекулярный вес, N_A — постоянная Авогадро, перепишем (58.26) в виде

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{\mathcal{M}}{\tau} = \frac{4\pi}{3} N_A \alpha_n, \quad (58.27)$$

где $4\pi N_A \alpha_n/3 = 2,54 \cdot 10^{24} \alpha_n$ — молярная поляризуемость вещества. Ее линейная зависимость от обратной температуры, вытекающая из (58.23), хорошо подтверждается на опыте (рис. 58.2). Однако выяснилось, что формула (58.27) непригодна для описания чисто полярных веществ, обладающих значительными собственными дипольными моментами. В этом случае можно считать выполненным неравенство

$$p_0^2/(3kT) \gg \alpha, \quad (58.28)$$

с учетом которого (58.24) принимает вид

$$\epsilon = 1 + 4\pi N p_0^2/[3k(T - T_{кр})], \quad (58.29)$$

где

$$T_{кр} = 4\pi N p_0^2/(9k). \quad (58.30)$$

Отсюда видно, что формула (58.29) неприменима в области температур, близких к критической, где ϵ может принимать как угодно большие и даже отрицательные значения. Отмеченное явление получило название *поляризационной катастрофы*.

Как было показано Л. Онсагером, причина возникновения этой «катастрофы» лежит в неприменимости метода Лоренца для вычисления напряженности действующего поля. Как следует из (58.29), это выражение имеет смысл лишь при $\nu \equiv 4\pi N p_0^2/(3kT) \ll 1$, когда оно сводится к следующему:

$$\epsilon = 1 + \nu(1 - \nu/3)^{-1} \approx 1 + \nu + \nu^2/3. \quad (58.31)$$

Поэтому метод Лоренца может быть оправдан лишь при $\nu \ll 1$. Если же $\nu \sim 1$, то этот метод не работает и должен быть заменен другим. В частности, если воспользоваться методом Онсагера, то в соответствии с (58.21)

$$\epsilon = 1 + 3\epsilon\nu/(2\epsilon + 1). \quad (58.32)$$

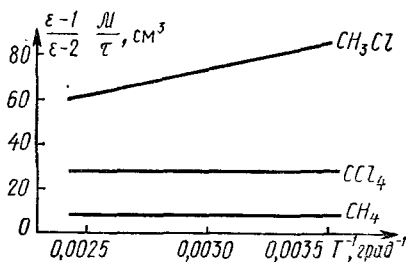


Рис. 58.2

Разрешая это соотношение относительно ϵ и выбирая положительное решение, имеем

$$\epsilon = \frac{1}{4} \left[1 + 3v + 3 \left(1 + \frac{2}{3} v + v^2 \right)^{1/2} \right]. \quad (58.33)$$

Как видно, выражение (58.33) имеет смысл при всех значениях v , т. е. исключает поляризационную катастрофу, а при $v \ll 1$ дает

$$\epsilon \approx 1 + v + 5v^2/3, \quad (58.34)$$

что незначительно отличается от (58.31).

Задача 58.3. *Цилиндр из диэлектрика с полной поляризуемостью α_n вращается с малой угловой скоростью ω вокруг своей оси в постоянном магнитном поле \mathbf{B}_0 (рис. 58.3). Найти напряженность электрического поля \mathbf{E} и распределение связанного заряда $\rho^{св\ddot{y}z}$ в цилиндре, пренебрегая краевым эффектом, т. е. считая, что длина цилиндра намного превосходит его радиус a .*



Рис. 58.3

§ 59. ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ НАМАГНИЧИВАНИЯ

Приступая к объяснению магнитных свойств вещества в рамках электронной теории, следует отметить, что строгая теория магнетизма может быть только квантовой. Тем не менее наглядные полуклассические представления электронной теории оказываются очень полезными для понимания физического механизма намагничивания. Нашей задачей будет вычисление намагниченности \mathbf{M} , возникающей в магнетиках под влиянием внешнего магнитного поля \mathbf{H} :

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad \chi = (\mu - 1)/(4\pi), \quad (59.1)$$

причем согласно (57.12)

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \widetilde{\mathbf{m}}_i(t), \quad (59.2)$$

где $\widetilde{\mathbf{m}}_i(t)$ — магнитные моменты отдельных молекул вещества, усредненные по времени. Замечая, что в плотность молекулярных токов основной вклад дают легкие электроны, а не тяжелые, почти неподвижные ядра атомов, магнитный момент отдельной молекулы можно представить в виде

$$\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_c + \sum_i \frac{e}{2c} [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i], \quad (59.3)$$

где \mathbf{m}_c — сумма собственных магнитных моментов зарядов, составляющих молекулу; e — заряд электрона. Второе слагаемое в (59.3) обычно называют *орбитальным магнитным моментом* молекулы, поскольку он обусловлен движением молекулярных электронов [см. (57.12)]; вектор \mathbf{m}_c называют *спиновым магнитным моментом*.

При вычислении намагниченности \mathbf{M} мы будем различать *слабо-* и *сильномагнитные* вещества. В первом случае магнитным взаимодействием ближайших молекул можно пренебречь и считать индукцию \mathbf{V}' действующего поля практически совпадающей со средней индукцией $\mathbf{V} = \langle \mathbf{b} \rangle$. К этому классу веществ относятся диа- и парамагнетики, обладающие малой магнитной восприимчивостью χ . В то же время в сильномагнитных веществах, к которым относятся, например, ферромагнетики*, магнитное взаимодействие ближайших молекул настолько велико, что именно оно в основном определяет индукцию действующего поля $V' \gg V$. Описание магнитных свойств сильномагнитных веществ требует дополнительной гипотезы о взаимосвязи индукций среднего и действующего полей и дано отдельно (см. § 60).

Итак, начнем с простейшего случая слабомагнитных сред. При помещении такой среды в магнитное поле \mathbf{B} последнее оказывает на нее двоякое воздействие. С одной стороны, магнитные моменты молекул будут стремиться повернуться вдоль вектора \mathbf{B} , а с другой стороны, возникающие при включении поля вихревые молекулярные токи несколько изменят сами магнитные моменты молекул. Чтобы учесть последний эффект, заметим, что при включении магнитного поля \mathbf{B} возникает вихревое электрическое поле напряженностью $\mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t$, которое разгоняет электроны, сообщая им дополнительный импульс

$$\mathbf{P}' = \int_0^t e \mathbf{E} dt = -e \mathbf{A} / c. \quad (59.4)$$

Если поле \mathbf{B} однородно, то $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \mathbf{r}] / 2$ и поэтому дополнительный импульс (59.4) принимает вид

$$\mathbf{P}' = m_e [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}], \quad (59.5)$$

где

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv -e \mathbf{B} / (2m_e c) \quad (59.6)$$

— *ларморова угловая скорость* **.

Соотношение (59.5) составляет содержание знаменитой *теоремы Лармора* (1897), согласно которой при включении магнитного поля электроны в молекулах приобретают дополнительное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$.

Задача 59.1. Показать, что $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор угловой скорости прецессии электронных орбит в магнитном поле, если произвести усреднение по быстрым движениям электронов в атомах.

Для того чтобы учесть эффект ориентации магнитных моментов молекул в магнитном поле \mathbf{B} , воспользуемся, как и в § 58, статистическим методом, т. е. запишем энергию взаимодействия молекулы с магнитным полем и произведем усреднение магнитного момента

* Из других сильномагнитных веществ можно назвать еще антиферромагнетики и ферриты.

** Здесь и в дальнейшем m_e — масса электрона.

молекулы по распределению Больцмана (58.5). Принимая во внимание теорему Лармора и учитывая результат задачи 33.1, согласно которому лагранжиан взаимодействия спинового магнитного момента \mathbf{m}_e молекулы с индукцией \mathbf{B} равен $(\mathbf{m}_e \mathbf{B})$, составим гамильтониан:

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_e} (\mathbf{P}_i + m_e [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_i])^2 - (\mathbf{m}_e \mathbf{B}), \quad (59.7)$$

где \mathbf{P}_i — невозмущенные импульсы электронов. С учетом (59.6) и (59.3) это выражение можно преобразовать к виду

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_e} P_i^2 - (\mathbf{m}_0 \mathbf{B}) + \frac{e^2}{8m_e c^2} \sum_i [\mathbf{B} \mathbf{r}_i]^2, \quad (59.8)$$

где \mathbf{m}_0 — невозмущенный магнитный момент молекулы. Возмущенный же магнитный момент, учитывающий ларморову прецессию, очевидно, равен

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \sum_i \frac{e}{2c} [\mathbf{r}_i [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_i]]. \quad (59.9)$$

Из (59.8) легко получить энергию взаимодействия* молекулы с внешним магнитным полем \mathbf{B} :

$$U = - (\mathbf{m}_0 \mathbf{B}) + \frac{e^2}{8m_e c^2} \sum_i [\mathbf{B} \mathbf{r}_i]^2, \quad (59.10)$$

которую мы используем при составлении распределения Больцмана (58.5). Сравнение (59.9) с (58.4) и (59.10) с (58.6) показывает, что при вычислении среднего магнитного момента молекулы можно воспользоваться результатами предыдущего параграфа. Таким образом, усредняя (59.9), находим

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \mathbf{B} \frac{|\mathbf{m}_0|}{|\mathbf{B}|} \langle \cos \vartheta \rangle + \sum_i \frac{e}{2c} \langle [\mathbf{r}_i [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_i]] \rangle, \quad (59.11)$$

где ϑ — угол между векторами \mathbf{m}_0 и \mathbf{B} . Пользуясь аналогией с диэлектриками, заменим $\langle \cos \vartheta \rangle$ функцией Ланжевена $L [|\mathbf{m}_0| B / (kT)]$, хотя, строго говоря, такую замену делать нельзя, ибо в квантовой теории показывается, что магнитный момент может иметь лишь дискретный набор проекций на направление магнитного поля, причем две ближайшие проекции отличаются на $eh / (4\pi m_e c)$ — магнетон Бора. Таким образом, можно сказать, что замена $\langle \cos \vartheta \rangle$ функцией Ланжевена допустима лишь при выполнении неравенства

$$|\mathbf{m}_0| \gg eh / (4\pi m_e c), \quad (59.12)$$

т. е. при достаточно больших магнитных моментах, когда дискретный характер их проекций становится неощутимым. Кроме того, полагая,

* Следует отметить, что это не потенциальная энергия взаимодействия, ибо она включает в себя и дополнительную кинетическую энергию, возникающую в соответствии с теоремой Лармора.

что каждая молекула содержит Z электронов, которые распределены почти сферически симметрично, получаем оценку

$$\sum_i \frac{e}{2c} \langle [\mathbf{r}_i [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_i]] \rangle \approx - \frac{Ze^2}{6m_e c^2} \langle r^2 \rangle \mathbf{B}.$$

В результате для среднего магнитного момента молекулы найдем следующее приближенное выражение:

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \mathbf{B} \left[\frac{|\mathbf{m}_0|}{B} L \left(\frac{|\mathbf{m}_0| B}{kT} \right) - \frac{Ze^2}{6m_e c^2} \langle r^2 \rangle \right]. \quad (59.13)$$

В частности, если $|\mathbf{m}_0| B \ll kT$, т. е. если достаточно высока температура T магнетика или же слабо поле \mathbf{B} , то можно воспользоваться приближением $L(x) \approx x/3$ и, умножив (59.13) на концентрацию N молекул, записать намагниченность \mathbf{M} в виде

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3} N \mathbf{B} \left(\frac{m_0^2}{kT} - \frac{Ze^2}{2m_e c^2} \langle r^2 \rangle \right). \quad (59.14)$$

Отсюда нетрудно найти и магнитную проницаемость среды:

$$\mu = \left[1 - \frac{4\pi N}{3} \left(\frac{m_0^2}{kT} - \frac{Ze^2}{2m_e c^2} \langle r^2 \rangle \right) \right]^{-1}. \quad (59.15)$$

В частности, если при отсутствии магнитного поля молекулы вещества не обладают магнитным моментом, т. е. $\mathbf{m}_0 = 0$, то среда *диамагнитна* и магнитная проницаемость ее описывается *формулой Ланжевена — Паули*:

$$\mu = [1 + 2\pi N Z e^2 \langle r^2 \rangle / (3m_e c^2)]^{-1} < 1. \quad (59.16)$$

Если же молекулы обладают при отсутствии поля отличным от нуля магнитным моментом \mathbf{m}_0 , то обычно всегда выполняется неравенство

$$\frac{m_0^2}{kT} \gg \frac{Ze^2}{2m_e c^2} \langle r^2 \rangle,$$

и согласно (59.15) магнитная проницаемость среды равна

$$\mu = [1 - 4\pi N m_0^2 / (3kT)]^{-1} > 1. \quad (59.17)$$

Таким образом, такое вещество оказывается *парамагнитным*. Если учесть, что обычно $\mu - 1 \ll 1$, то магнитную восприимчивость парамагнетика можно представить в виде

$$\chi = C/T, \quad (59.18)$$

где $C = N m_0^2 / (3k)$ — *постоянная Кюри*. Зависимость (59.18) парамагнитной восприимчивости от температуры была впервые экспериментально обнаружена французским физиком П. Кюри в 1895 г. и известна как *закон Кюри*. Теоретически этот закон был обоснован П. Ланжевеном в 1905 г.

Задача 59.2. Вычислить магнитную проницаемость слабомагнитной среды с учетом отличия индукции \mathbf{B}' действующего поля от средней индукции поля \mathbf{B} . Убедиться, что вычисление \mathbf{B}' соответственно по методам Лоренца и Онсагера дает следующие выражения:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - 8\pi \mathbf{M} / 3, \quad \mathbf{B}' = 3\mathbf{B} / (2\mu + 1). \quad (59.19)$$

§ 60. ТЕОРИЯ ФЕРРОМАГНЕТИЗМА ПО ВЕЙССУ

Из сильномагнитных веществ мы рассмотрим только *ферромагнетики*, основным свойством которых является способность намагничиваться почти до насыщения даже в относительно слабых магнитных полях порядка 100 Э. Ферромагнетики широко распространены в природе, хотя из чистых химических элементов только *шесть* обладают ферромагнитными свойствами. К ним относятся железо, никель, кобальт, гадолиний и при очень низкой температуре — эрбий и диспрозий. Ферромагнитными являются многие сплавы, в том числе и сплавы из неферромагнитных элементов, получившие название *гейслеровых*.

Перечислим главные свойства ферромагнетиков, обнаруженные на опыте.

1. Ферромагнетики обладают чрезвычайно большой магнитной восприимчивостью $\chi \sim 10^3 \div 10^5$ и уже в слабых полях приходят в состояние насыщения (рис. 60.1, где M_s и H_s — намагничение и напряженность насыщения). Экспериментально зависимость $\chi(H)$ (рис. 60.2) впервые была измерена А. Г. Столетовым, который во избежание размагничивающего влияния полюсов использовал торoidalные образцы.

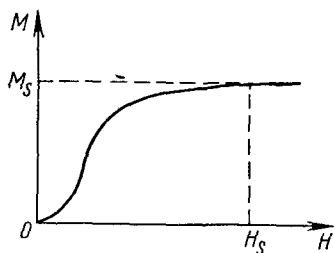


Рис. 60.1

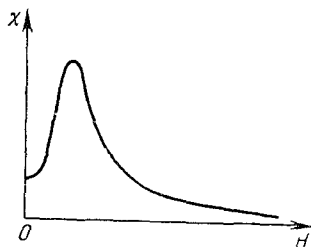


Рис. 60.2

2. Для ферромагнетиков характерны *гистерезисные явления*, обнаруживающиеся при перемагничивании образцов. Это означает, что зависимость $M(H)$ оказывается функциональной, т. е. M зависит

от всей предыдущей истории изменения $H(t)$. В частности, при выключении внешнего магнитного поля наблюдается *остаточное намагничение* $M_r = M(0)$, для уничтожения которого необходимо приложить противоположно направленное поле H_c , называемое *задерживающим полем* (или *коэрцитивной силой*) (рис. 60.3). H_c может быть порядка 1 Э для магнитно-мягких материалов (железо, пермаллой) и порядка 100 Э для магнитно-жестких материалов (хромистая сталь, кобальтовая сталь).

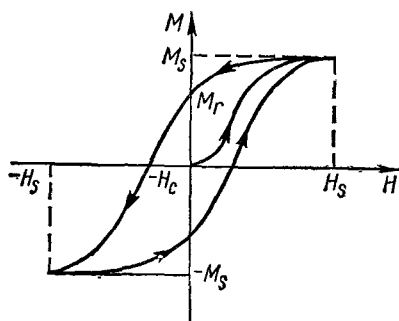


Рис. 60.3

3. В монокристаллических ферромагнитных образцах были обнаружены области самопроизвольного (спонтанного) намагничивания, получившие название *доменов*. Обычно это области правильной формы, намагничение в которых достигает насыщения даже при отсутствии внешних магнитных полей. Однако образец в целом, содержащий много по-разному намагниченных доменов, практически не обладает намагничением, поскольку магнитный поток каждого домена замыкается на ближайших к нему соседях (рис. 60.4). Реальность существования доменов была подтверждена многими опытами и, в частности, методом порошковых фигур (метод Акулова — Биттера). С помощью этих фигур можно проследить распределение намагничивания на поверхности ферромагнитных кристаллов. Кроме того, детальный анализ хода кривой намагничивания на ее крутом участке показал, что намагничение меняется скачкообразно при плавном нарастании H (скачки Баркгаузена, 1919). Возникают эти скачки при перемагничивании отдельных доменов (рис. 60.5).

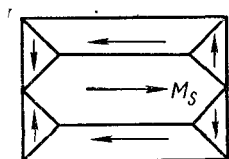


Рис. 60.4

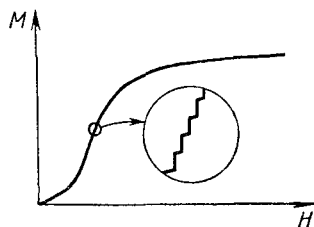


Рис. 60.5

4. Магнитные свойства ферромагнитных кристаллов оказываются сильно *анизотропными*. В частности, в монокристаллах существует направление легкого намагничивания, обычно совпадающее с кристаллографической осью. При намагничивании кристалла в этом направлении кривая намагничивания идет наиболее круто. Например, в монокристалле кобальта направление легкого намагничивания совпадает с гексагональной осью (рис. 60.6; ось OO'). Ход кривых намагничивания при намагничивании кристалла кобальта вдоль этой оси и перпендикулярно изображен на рис. 60.7 (кривые 1 и 2 соответственно).

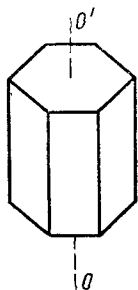


Рис. 60.6

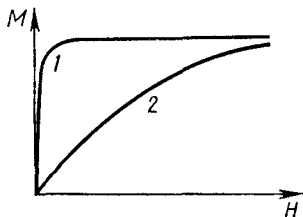


Рис. 60.7

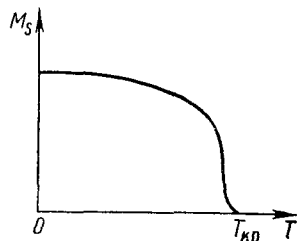


Рис. 60.8

5. Ферромагнитные свойства образцов (в частности, спонтанное намагничение) наблюдаются лишь в кристаллическом состоянии при температуре, не превышающей предельную температуру T_C , называемую *ферромагнитной точкой Кюри*. При нагревании выше этой температуры спонтанное намагничение исчезает (рис. 60.8) и ферромагнетик становится парамагнетиком, восприимчивость которого меняется по *закону Кюри — Вейсса*

$$\chi = C/(T - \Theta) \quad (60.1)$$

где Θ — *парамагнитная точка Кюри*. Опыт показывает, что $\Theta > T_C$ и разность $\Theta - T_C$ составляет 15—40 К. Значения T_C для некоторых материалов приведены в следующей таблице:

Материал	Fe	Co	Ni	Gd	Dy	MnBi	CrTe
T_C , К	1043	1400	631	289	105	630	336

В области низкой температуры ($T \ll T_C$) спонтанное намагничение меняется по *закону «трех вторых» Ф. Блоха*:

$$M_s(T) = M_s(0) (1 - \alpha T^{3/2}), \quad (60.2)$$

где постоянная $\alpha \sim 10^{-6}$; $M_s(0)$ — намагничение *абсолютного насыщения*, устанавливающегося в образце при помещении его в чрезвычайно сильное внешнее магнитное поле.

6. В опыте *Эйнштейна — де Гааза* (1915) было установлено, что при перемагничивании ферромагнитного образца он приобретает дополнительный момент импульса

$$\Delta K = e \Delta m / (m_e c)$$

вокруг направления перемагничивания, где Δm — изменение магнитного момента образца. Таким образом, отношение $|\Delta K| / |\Delta m|$ оказалось равным отношению собственных механического и магнитного моментов электрона. Все это указывало на *спиновую природу ферромагнетизма*. Позднее, в работах *Я. И. Френкеля* и *В. Гайзенберга* (1928), было установлено, что это действительно так. Ими было показано, что учет *квантовых обменных сил* приводит к следующей энергии взаимодействия U двух атомов со спиновыми моментами S_1 и S_2 :

$$U = -2J(S_1 S_2),$$

где J — *обменный интеграл*, который оказывается положительным, если в атомах имеются внутренние незаполненные электронные оболочки, радиус которых меньше радиуса атомов более чем в 1,5 раза. В таком случае, согласно распределению Больцмана, наиболее вероятным состоянием будет то, когда спины атомов (а значит, и их магнитные моменты) направлены в одну сторону. Таким образом,

оказывается выгодным образование областей, в которых магнитные моменты атомов одинаково ориентированы (домены). Очевидно, что беспредельный рост доменов также невыгоден, ибо при этом возрастает энергия магнитного поля, порождаемая магнитными моментами атомов. Поэтому в конце концов устанавливаются некоторые промежуточные размеры доменов, в общем случае зависящие от размеров образца

Итак, мы убедились, что ферромагнетизм является *коллективным эффектом*: если бы в парамагнетике существовало взаимодействие, заставляющее магнитные моменты атомов ориентироваться в одном направлении, то получился бы ферромагнетик. Последовательное описание такого взаимодействия (обменного) возможно только в рамках квантовой теории, однако неплохие качественные результаты получаются и в классической полуфеноменологической теории, с самого начала принимающей гипотезу о существовании этого взаимодействия и определенной его структуре. Описанием ферромагнетизма в рамках такой теории мы и ограничимся.

Впервые представление об особом молекулярном поле, выстраивающем магнитные моменты атомов в ферромагнетике, было введено в 1892 г. русским физиком *Б. Л. Розингом*. Позднее, в 1907 г., французский физик *П. Вейсс* построил теорию, основанную на предположении о том, что индукция действующего магнитного поля в ферромагнетике, названного им *внутренним*, имеет вид

$$\mathbf{B}' = \mathbf{H} + \gamma \mathbf{M}, \quad (60.3)$$

где γ — некоторая постоянная порядка 10^4 . Здесь следует отметить, что если бы *молекулярное поле Вейсса* имело магнитное происхождение, то [см (59.19)] было бы $\gamma = 4\pi/3 \ll 10^4$

Оценить индукцию \mathbf{B}' внутреннего поля можно из следующих соображений. Очевидно, что тепловое движение атомов противодействует ориентирующему влиянию поля \mathbf{B}' и при температуре $T = T_C$ эти эффекты должны быть равными. Допуская, что $T_C \approx 1000$ К, а магнитный момент атома имеет порядок магнетона Бора $\mu_B = 0,9 \times 10^{-20}$ эрг/Гс, приравниваем тепловую энергию энергии магнитного взаимодействия:

$$\mu_B B' \sim kT_C,$$

откуда $B' \sim 10^7$ Гс.

В том, что на самом деле в ферромагнетике таких магнитных полей быть не может, убеждает простой расчет. Поскольку среднее расстояние между атомами $l \sim 10^{-8}$ см, то индукция магнитного поля примерно равна

$$B \sim \mu_B / l^3 \sim 10^3 \text{ Гс.}$$

В опытах советского физика *Я. Г. Дорфмана* (1927) по рассеянию электронов в намагниченном до насыщения ферромагнетике было прямым путем показано, что молекулярное поле Вейсса имеет немагнитную природу (по квантовой теории оно представляет собой часть кулоновского взаимодействия электронов, зависящую от ориентации их спинов).

Итак, примем гипотезу Вейсса (60.3) и используем ее для описания отдельной области спонтанного намагничивания, или *области Вейсса* (домена). Если m_0 — собственный магнитный момент атома, а N — концентрация атомов, то намагничение абсолютного насыщения, очевидно, равно $M_\infty = Nm_0$. Дальнейшие рассуждения такие же, как в теории парамагнетизма Ланжевена. В частности, для намагничивания M (в предположении, что M и H параллельны) получаем

$$M = M_\infty L\left(\frac{|m_0| B'}{kT}\right) = M_\infty L\left(\frac{|m_0| H}{kT} + \frac{\gamma |m_0|}{kT} M\right). \quad (60.4)$$

Соотношение (60.4) можно рассматривать как трансцендентное уравнение относительно M . Для анализа этого уравнения его удобно представить в параметрической форме, введя новые переменные:

$$x \equiv |m_0| H / (kT) + \gamma |m_0| M / (kT), \quad y \equiv M / M_\infty.$$

Тогда

$$y = ax - b = L(x) \equiv \text{cth } x - x^{-1}, \quad (60.5)$$

где

$$a = kT / (\gamma |m_0| M_\infty) = kT / (\gamma m_0^2 N), \quad b = H / (\gamma M_\infty) = H / (\gamma |m_0| N).$$

Графическое решение уравнения (60.5) сводится к нахождению точки пересечения кривой Ланжевена $y = L(x)$ и прямой $y = ax - b$ (рис. 60.9). Замечая, что

$$L'(x) = x^{-2} - \text{sh}^{-2} x \leq 1/3,$$

рассмотрим две области значений параметра a : $a > 1/3$ и $a < 1/3$.

1. $a > 1/3$ ($\beta > \alpha$).

В этом случае существует единственная точка пересечения, отвечающая *парамагнитной восприимчивости*, т. е. отсутствию спонтанного намагничивания (если $H = 0$, то $M = 0$). Поэтому температура, определяемая условием $a = 1/3$, должна играть роль точки Кюри:

$$T_C = \gamma m_0^2 N / (3k). \quad (60.6)$$

В частности, для высоких температур $T \gg T_C$, когда $x \ll 1$, можно положить $L(x) \approx x/3$, что соответствует $y = 3b(3a - 1)^{-1}$. В результате получается намагничение зида

$$M = M_\infty y = 3HT_C / [\gamma(T - T_C)], \quad (60.7)$$

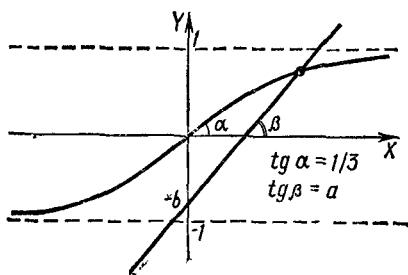


Рис. 60.9

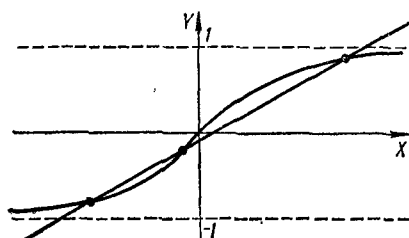


Рис. 60.10

изменяющееся с температурой по закону Кюри — Вейсса (60.1), в котором ферромагнитная и парамагнитная точки Кюри совпадают (последнее говорит о грубости теории Вейсса).

$$2. a < 1/3 \quad (\beta < \alpha).$$

В этом случае при малых магнитных полях ($b \ll 1$) возможны три точки пересечения (рис. 60.10), но из них только одна термодинамически устойчива. Так, при $H \geq 0$ устойчива точка, отвечающая $M > 0$. Это и есть область спонтанного намагничивания. В частности, если $H = 0$ и $T \ll T_c$, т. е. $b = 0$, $a \ll 1$ и $x \gg 1$, то получается уравнение

$$ax = L(x) \approx 1 - x^{-1},$$

откуда $x \approx a^{-1} - 1$ и $y = ax \approx 1 - a$, что соответствует линейной зависимости спонтанного намагничивания от температуры:

$$M = M_\infty [1 - T/(3T_c)]. \quad (60.8)$$

Таким образом, в теории Вейсса не получается закон «трех вторых» Блоха.

Если изменить направление приложенного внешнего поля, т. е. взять $H < 0$, то термодинамически устойчивой становится точка, отвечающая минимальному значению $M < 0$. Иначе говоря, область Вейсса будет перемагничиваться. Далее, поскольку при достаточно больших $H < 0$ решение с $M > 0$ пропадает, то зависимость $M(H)$ будет разрывной (рис. 60.11), чем и объясняются скачки Баркгаузена.

Таким образом, уже для элементарных областей Вейсса возникает явление гистерезиса. Если же предположить, что реальный макроскопический образец состоит из многих областей Вейсса (доменов), то нетрудно видеть, что при его перемагничивании также наблюдается явление гистерезиса, хотя оно и осложнено эффектами анизотропии, наличием дефектов кристаллической решетки и т. д. Гладкая кривая (петля гистерезиса) получается при этом усреднении по многим областям Вейсса (см. рис. 60.5).

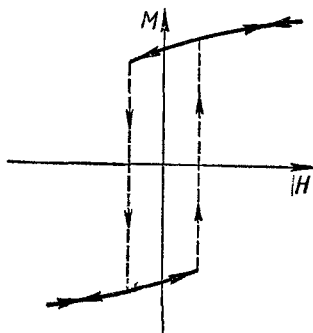


Рис. 60.11

§ 61. ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ ДИСПЕРСИИ И ПОГЛОЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В оптике хорошо известно явление *дисперсии света*, т. е. зависимость скорости v_ϕ распространения света в среде от его частоты ω . Поскольку [см. (38.4)]

$$v_\phi = c/\sqrt{\epsilon\mu} \equiv c/n,$$

то показатель преломления среды $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ также зависит от частоты. Подобная зависимость наблюдается не только в оптическом диапазоне, но и для электромагнитных волн любых других частот.

Первое удовлетворительное объяснение явления дисперсии и одновременно поглощения электромагнитных волн в средах было дано в рамках электронной теории Лоренца.

Очевидно, что явление дисперсии в первую очередь связано с влиянием электромагнитного поля распространяющейся в среде волны на дипольные моменты молекул: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \alpha \mathbf{E}'$. Для упрощения примем, что молекулы достаточно массивны, а частота ω достаточно велика, поэтому можно пренебречь изменением \mathbf{p}_0 со временем*. Таким образом, будем учитывать лишь индуцированный дипольный момент $\alpha \mathbf{E}'$.

В качестве модели молекулы рассмотрим отдельный электрон с зарядом e и массой m_e , смещенный на $\mathbf{r}(t)$ относительно положительно заряженного остова. Если скорость электрона мала по сравнению со скоростью света, т. е. $|\dot{\mathbf{r}}| \ll c$, то в выражении для силы Лоренца $e(\mathbf{E}' + c^{-1}[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{B}'])$ можно пренебречь вкладом магнитной индукции \mathbf{B}' волны, поскольку $B' \sim E'$. Принимая еще, что электрон удерживается в молекуле квазиупругой силой $-k\mathbf{r}$, и учитывая силу реакции излучения, запишем уравнение движения электрона в виде

$$m_e \ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = e\mathbf{E}' + 2e^2 \ddot{\mathbf{r}} / (3c^3). \quad (61.1)$$

Решение этого уравнения можно использовать для вычисления полной плотности тока $\mathbf{j}^{\text{полн}}$ в среде, если предположить, что основной вклад в нее дают электроны. В частности, считая среду однородной с электронной концентрацией N_e , имеем

$$\mathbf{j}^{\text{полн}} = \langle \mathbf{j}^{\text{микр}} \rangle = N_e e \dot{\mathbf{r}}. \quad (61.2)$$

Запишем теперь усредненные уравнения Максвелла — Лоренца (57.6):

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\text{полн}}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho^{\text{полн}}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \end{aligned}$$

и будем считать все величины в них периодическими во времени:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \\ \rho^{\text{полн}} &= \rho_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{j}^{\text{полн}} = \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

С другой стороны, замечая, что по закону сохранения количества электричества

$$\rho_\omega = -i \text{div } \mathbf{j}_\omega / \omega \equiv -\text{div } \mathbf{P}_\omega,$$

где

$$\mathbf{P}_\omega = i \mathbf{j}_\omega / \omega \quad (61.3)$$

— поляризованность, запишем уравнения Максвелла в таком виде:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B}_\omega + i\omega \mathbf{D}_\omega / c &= 0, \quad \text{div } \mathbf{D}_\omega = 0, \\ \text{rot } \mathbf{E}_\omega - i\omega \mathbf{B}_\omega / c &= 0, \quad \text{div } \mathbf{B}_\omega = 0. \end{aligned} \quad (61.4)$$

* Дебай П., Закк Г. Теория электрических свойств молекул. ОНТИ, 1936, § 17.

Здесь

$$\mathbf{D}_\omega \equiv \mathbf{E}_\omega + 4\pi\mathbf{P}_\omega. \quad (61.5)$$

Для нахождения поляризованности \mathbf{P}_ω воспользуемся уравнениями (61.1) и (61.2). Именно: рассматривая лишь установившееся движение электрона, т. е. полагая

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} \quad (61.6)$$

и считая, что напряженность \mathbf{E}' мало меняется в пределах молекулы, из (61.2) выводим

$$\mathbf{P}_\omega = N_e e \mathbf{r}_0. \quad (61.7)$$

Наконец, принимая напряженность действующего поля равной

$$\mathbf{E}'_\omega = \mathbf{E}_\omega + 4\pi\mathbf{P}_\omega/3$$

и учитывая (61.6) и (61.7), находим из (61.1)

$$\mathbf{P}_\omega = \frac{\omega_p^2 (4\pi)}{\omega_c^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_\omega. \quad (61.8)$$

Здесь $\gamma = 2e^2\omega^2/(3m_e c^3)$; $\omega_c^2 = \omega_0^2 - \omega_p^2/3$, $\omega_0^2 = k/m_e$, $\omega_p^2 = 4\pi N_e e^2/m_e$, где γ — коэффициент лучистого трения; ω_0 — собственная частота колебаний электрона в изолированном атоме; ω_c — собственная частота электронных колебаний в атоме в среде (т. е. измененная под влиянием полей окружающих атомов); ω_p — плазменная частота, соответствующая колебаниям свободных электронов в квазинейтральной среде (плазменные или ленгмюровские колебания).

Задача 61.1. Показать, что поляризационная плотность заряда ρ_p , возникающая при малом смещении электронов в квазинейтральной плазме, подчиняется уравнению колебаний $\ddot{\rho}_p + \omega_{\text{пр}}^2 \rho_p = 0$.

Имея выражение (61.8) для поляризованности, нетрудно найти и вектор электрической индукции:

$$\mathbf{D}_\omega = \mathbf{E}_\omega + 4\pi\mathbf{P}_\omega = \epsilon \mathbf{E}_\omega, \quad (61.9)$$

где введена комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\epsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2 / (\omega_c^2 - \omega^2 - i\gamma\omega). \quad (61.10)$$

Здесь уместно заметить, что γ в (61.10) можно считать коэффициентом лучистого трения только в предположении, что столкновения молекул друг с другом и со свободными электронами маловероятны. В самом деле, в результате столкновений часть энергии электронов переходит в энергию движения самих молекул, т. е. в тепло. Эти потери энергии электронами необходимо добавить к чисто электромагнитным потерям на излучение. Феноменологически это делается добавлением к γ некоторой не зависящей от ω части.

Полученное выше выражение для $\epsilon(\omega)$ характерно для *однорезонансной осцилляторной модели вещества*, в которой предполагается, что собственные частоты всех электронов одинаковы и равны ω_c . На самом же деле это не так, тем более что нужно учитывать еще и колебания ионов, собственные частоты которых обычно

лежат в инфракрасной области. Для того чтобы учесть все электронные частоты, обычно вводят функцию распределения дисперсионных электронов по частотам $f(\omega_c)$. Нормируя ее на единицу, т. е. полагая

$$\int_0^{\infty} f(\omega_c) d\omega_c = 1,$$

$N_e f(\omega_c) d\omega_c$ можно интерпретировать как концентрацию электронов, собственные частоты которых лежат в интервале $(\omega_c - d\omega_c/2, \omega_c + d\omega_c/2)$. В таком случае выражение (61.10) принимает вид

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2 \int_0^{\infty} \frac{f(\omega_c) d\omega_c}{\omega_c^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (61.11)$$

Интересно, что такое же выражение получается и в квантовой теории, где $f(\omega_c)$ называется силой осциллятора.

Каков физический смысл комплексной диэлектрической проницаемости? Для выяснения этого выделим действительную и мнимую части $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$. Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) &= 1 + \omega_p^2 \int_0^{\infty} \frac{(\omega_c^2 - \omega^2) f(\omega_c) d\omega_c}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \\ \varepsilon''(\omega) &= \int_0^{\infty} \frac{f(\omega_c) \gamma \omega \omega_p^2 d\omega_c}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (61.12)$$

Из (61.12) следует, что ε' является четной, а ε'' — нечетной функциями частоты:

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega), \quad \varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega), \quad (61.13)$$

и, кроме того, справедливо неравенство

$$\omega \varepsilon''(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{f(\omega_c) \gamma \omega^2 \omega_p^2 d\omega_c}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \geq 0. \quad (61.14)$$

Как было показано еще в § 50, ε'' связано с тепловыми потерями. Для того чтобы убедиться, что это действительно так и что тепловые потери пропорциональны явно положительному значению $\omega \varepsilon''$, подсчитаем среднюю за период $T = 2\pi/\omega$ мощность силы «трения» $\mathbf{F}_{\text{тр}} = -m_e \gamma \dot{\mathbf{r}}$, действующей на отдельный электрон:

$$\langle \mathbf{F}_{\text{тр}} \dot{\mathbf{r}} \rangle = -m_e \gamma \langle \dot{\mathbf{r}}^2 \rangle = -m_e \gamma \omega^2 |\mathbf{r}_0|^2/2.$$

Выделяемая тепловая мощность получается отсюда умножением на концентрацию электронов $N_e f(\omega_c)$ и интегрированием по ω_c :

$$\tilde{q} = N_e (m_e/2) \gamma \omega^2 \int_0^{\infty} |\mathbf{r}_0|^2 f(\omega_c) d\omega_c.$$

Подстановка сюда выражения для $|\mathbf{r}_0|^2$, вытекающего из (61.13) и (61.8), дает в соответствии с (61.14)

$$\tilde{q} = \frac{\gamma}{8\pi} \omega_n^2 \omega^2 |\mathbf{E}_\omega|^2 \int_0^\infty \frac{f(\omega_c) d\omega_c}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = \frac{\omega}{8\pi} \varepsilon'' |\mathbf{E}_\omega|^2. \quad (61.15)$$

Сравнивая соотношение (61.15) с известным выражением для джоулевых потерь

$$\tilde{q} = \sigma \tilde{E}^2 = \sigma |\mathbf{E}_\omega|^2 / 2,$$

приходим к выводу, что электропроводность $\sigma(\omega)$ среды и $\varepsilon''(\omega)$ связаны между собой:

$$\sigma(\omega) = \frac{\omega}{4\pi} \varepsilon''(\omega) = \frac{\gamma \omega^2 \omega_n^2}{4\pi} \int_0^\infty \frac{f(\omega_c) d\omega_c}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (61.16)$$

В частности, для металлов, в которых основной вклад в проводимость дают свободные электроны с $\omega_c = 0$, имеем

$$\sigma(\omega) = \gamma \omega_n^2 / [4\pi (\omega^2 + \gamma^2)]. \quad (61.17)$$

Это соотношение известно как *формула Друде — Зинера*, выражающая зависимость электропроводности металлов от частоты.

Заметим, что с помощью (61.16) выражение для ε приводится к виду

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i4\pi\sigma(\omega)/\omega, \quad (61.18)$$

откуда следует, что для металлов в статическом пределе ε имеем полюсную особенность типа

$$\varepsilon(\omega \rightarrow 0) \approx i4\pi\sigma/\omega, \quad (61.19)$$

где σ — статическая электропроводность.

Особый интерес представляет структура ε для плазмы, в которой основную роль играют свободные электроны с $\omega_c = \omega_p$, т. е. можно положить $f(\omega_c) = 2\delta(\omega_c)$ и, согласно (61.11),

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / [\omega(\omega + i\gamma)]. \quad (61.20)$$

Очевидно, что такое поведение диэлектрической проницаемости характерно для любой среды в пределе чрезвычайно высоких частот, поскольку при $\omega \rightarrow \infty$ все электроны можно считать свободными. Если в формуле (61.20) пренебречь потерями, т. е. положить $\omega \gg \gamma$, то

$$\varepsilon(\omega) = 1 - (\omega_p/\omega)^2. \quad (61.21)$$

Изучим теперь распространение электромагнитных волн в диспергирующей среде. Начнем с самых простых плоских монохроматических волн, т. е. положим в уравнениях (61.4)

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad \mathbf{B}_\omega = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})},$$

где \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 — постоянные векторы. Тогда с учетом (61.9) имеем:

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}\mathbf{B}_0] &= -\omega\varepsilon\mathbf{E}_0/c, & \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{E}_0) &= 0, \\ [\mathbf{k}\mathbf{E}_0] &= \omega\mathbf{B}_0/c, & (\mathbf{k}\mathbf{B}_0) &= 0. \end{aligned} \quad (61.22)$$

Исключая из этих уравнений \mathbf{B}_0 , приходим к волновому уравнению

$$\omega^2 \varepsilon \mathbf{E}_0 / c^2 = k^2 \mathbf{E}_0 - \mathbf{k} (\mathbf{k} \mathbf{E}_0), \quad (61.23)$$

которое допускает два типа решений, соответствующих поперечным и продольным волнам.

Поперечные волны удовлетворяют условию $(\mathbf{k} \mathbf{E}_0) = 0$, т. е. векторы \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 , \mathbf{k} образуют правую ортогональную тройку (рис. 61.1). В этом случае из волнового уравнения (61.23) выводим, что

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon (\omega) / c^2, \quad (61.24)$$

т. е. волновой вектор \mathbf{k} является комплексным. Считая, что волна распространяется вдоль оси Z , т. е. полагая $\mathbf{k} = (0, 0, k)$, имеем

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon} / c = \omega \eta / c, \quad (61.25)$$

где

$$\eta = n + in' = \sqrt{\varepsilon} \quad (61.26)$$

— комплексный показатель преломления.

Для выяснения физического смысла n и n' запишем электромагнитное поле волны:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-2\pi n' z / \lambda_0} e^{-i\omega(t - nz/c)}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 e^{-2\pi n' z / \lambda_0} e^{-i\omega(t - nz/c)}, \end{aligned} \quad (61.27)$$

где $\lambda_0 = 2\pi c / \omega$ — длина волны в вакууме. Отсюда следует, что n' определяет затухание амплитуды волны на расстоянии порядка длины

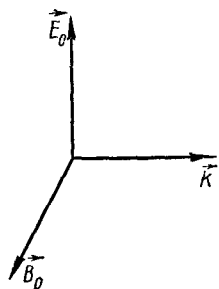


Рис. 61.1

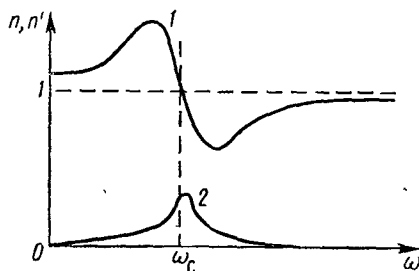


Рис. 61.2

волны λ_0 и поэтому называется коэффициентом поглощения. Что же касается n , то это обычный показатель преломления, определяющий скорость перемещения поверхности постоянной фазы $\Phi = \omega(t - nz/c) = \text{const}$, т. е. фазовую скорость волны $v_\Phi = c/n$.

Разделяя действительную и мнимую части в соотношении $\sqrt{\varepsilon} = n + in'$, находим:

$$n = 2^{-1/2} (|\varepsilon| + \varepsilon')^{1/2}, \quad n' = 2^{-1/2} (|\varepsilon| - \varepsilon')^{1/2} = \varepsilon'' / (2n). \quad (61.28)$$

Зависимость $\eta(\omega)$ в простейшем случае, когда вблизи частоты ω имеется лишь одна изолированная собственная частота ω_c и поэтому можно ограничиться однорезонансным приближением, дана на рис. 61.2

$[n(\omega) — \text{кривая 1, } n'(\omega) — \text{кривая 2}]$. Анализ зависимости $n'(\omega)$ показывает, что коэффициент γ , обычно удовлетворяющий условию $\gamma \ll \omega_c$, имеет смысл *ширины линии поглощения*.

В частности, в области прозрачности вещества, т. е. вдали от линии поглощения, когда $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$ и можно положить $n \approx \sqrt{\varepsilon'}$ и $n' \approx \varepsilon'' / (2\sqrt{\varepsilon'})$, в однорезонансном приближении

$$n^2 \approx \varepsilon' \approx 1 + \omega_p^2 / (\omega_c^2 - \omega^2). \quad (61.29)$$

Вспоминая, что $\omega_c^2 = \omega_0^2 - \omega_p^2/3$, и разрешая (61.29) относительно ω_p^2 , приходим к соотношению

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{\omega_p^2}{3(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{4\pi N_e e^2 / (3m_e)}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (61.30)$$

известному как *формула Лоренца — Лоренца*. Она была выведена в 1880 г. независимо голландцем Г. А. Лоренцем и датчанином Л. Лоренцем. Согласно этой формуле, при заданной частоте $(n^2 - 1) \times (n^2 + 2)^{-1}$ оказывается пропорциональным концентрации электронов. Очевидно, что формула Лоренца — Лоренца является обобщением (при $\omega \neq 0$) соотношения Клаузиуса — Мосотти (58.26).

Перейдем к рассмотрению второго типа плоских волн в среде — *продольных*. В этом случае $[\mathbf{kE}_0] = 0$, поэтому из уравнений (61.22) следует, что

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{D}_0 = \varepsilon \mathbf{E}_0 = 0, \quad (61.31)$$

т. е. эти волны чисто электрические и могут существовать только для тех частот ω_i , которые являются корнями уравнения

$$\varepsilon(\omega_i) = 0. \quad (61.32)$$

Если ω достаточно велико, то в пренебрежении потерями можно воспользоваться упрощенным выражением (61.21), из которого следует, что $\omega_i = \omega_p$. Таким образом, в соответствии с результатом задачи 61.1 продольные волны связаны с поляризационными колебаниями электронов в среде и поэтому часто называются *волнами поляризации* или *волнами Бора*, который впервые использовал их для расчета потерь энергии заряженной частицы, движущейся в среде.

Задача 61.2. Показать, что в области прозрачности средняя по времени плотность энергии периодического электромагнитного поля в среде имеет вид

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{16\pi} \left[|\mathbf{E}_\omega|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \varepsilon') + |\mathbf{B}_\omega|^2 \right] \quad (61.33)$$

В реальных физических задачах часто приходится исследовать распространение в среде не только плоских электромагнитных волн, но и волновых пакетов. Волновой пакет в диспергирующей среде можно построить по аналогии с (39.11) и (39.13). Ограничившись

поперечными волнами, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \operatorname{Re} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}) - i\omega(\mathbf{k})t} d^3k, \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) &= c \operatorname{Re} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{k} \mathbf{E}_0(\mathbf{k})] e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}) - i\omega(\mathbf{k})t} \frac{d^3k}{\omega(\mathbf{k})}, \end{aligned} \quad (61.34)$$

где $d^3k = dk_x dk_y dk_z$, $(\mathbf{k} \mathbf{E}_0) = 0$, $\omega(\mathbf{k})$ — решение дисперсионного уравнения (61.24).

Рассмотрим достаточно узкие волновые пакеты, т. е. примем, что функция $|\mathbf{E}_0(\mathbf{k})|$ имеет резко выраженный максимум в некоторой точке $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$. Для описания поведения такого волнового пакета удобно ввести понятие о его центре, который можно считать совпадающим с радиус-вектором

$$\xi(t) \equiv \int \mathbf{r} \tilde{E}^2 dV / \left(\int \tilde{E}^2 dV \right), \quad (61.35)$$

где усреднение производится по периоду $T_0 = 2\pi/(c k_0)$.

Задача 61.3. Показать, что скорость центра волнового пакета совпадает с групповой скоростью, которая может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{v} = \dot{\xi}(t) = \left. \frac{\partial \omega'}{\partial \mathbf{k}} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}, \quad (61.36)$$

где $\omega' = \operatorname{Re} \omega(\mathbf{k})$. Предполагается, что время t удовлетворяет неравенству $t\omega''(\mathbf{k}_0) \ll 2\pi$; $\omega'' = \operatorname{Im} \omega(\mathbf{k})$.

Таким образом, практически для любого времени вычислять групповую скорость по формуле (61.36) можно только в прозрачной области, в которой $\omega'' \ll \omega'$. В этом случае, дифференцируя по \mathbf{k} соотношение (61.24), находим

$$\mathbf{v} = \frac{2\mathbf{k}c^2}{(d/d\omega)(\omega^2\epsilon')},$$

или

$$\mathbf{v} = \frac{c}{(d/d\omega)(n\omega)} = \frac{v_{\text{ф}}}{1 + \{(\omega/n)(dn/d\omega)\}}. \quad (61.37)$$

Отсюда видно, что в области нормальной дисперсии, когда $dn/d\omega > 0$, групповая скорость не превосходит фазовую, т. е. $v < v_{\text{ф}} = c/n$. Однако в области аномальной дисперсии, когда $dn/d\omega < 0$, будет $v > v_{\text{ф}}$, а поскольку при этом возможны значения $n < 1$, то групповая скорость может превосходить скорость света. Между тем, как видно, например, из рис. 61.2, область аномальной дисперсии совпадает с областью поглощения, в которой пользоваться формулой (61.36) нельзя и выводы из нее неправомерны.

Задача 61.4. Показать, что в области прозрачности групповая скорость совпадает со скоростью центра масс волнового пакета, т. е. является скоростью переноса энергии.

Помимо фазовой и групповой скоростей часто употребляются еще понятия скорости сигнала и скорости фронта сигнала. Под *сигналом* обычно понимается волновой пакет с резко ограниченными краями. Его передняя кромка называется фронтом. Можно показать, что *скорость фронта сигнала в любой среде равна скорости света в вакууме* [теорема Т. Леви-Чивита (1913)]. Причину этого нетрудно понять, если заметить, что в области фронта поле испытывает резкие изменения, а это, в свою очередь, связано с присутствием в фурье-разложении поля бесконечно больших частот. Но согласно (61.21) $\epsilon(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow 1$, поэтому среда ведет себя по отношению к таким изменениям поля как вакуум. Очевидно, что это связано с инертностью заряженных частиц.

Структура фронта сигнала в диспергирующей среде была подробно изучена А. Зоммерфельдом и Л. Бриллюэном в 1914 г. Они обнаружили, что в среде с поглощением в промежутке между фронтом и основной группой можно выделить две области с заметно повышенной интенсивностью поля. Бриллюэн назвал их *первым и вторым предвестниками**. Как и следовало ожидать, скорости их не превышают c , а скорость основной группы, или *скорость сигнала*, отличается от групповой скорости v , вычисленной по формуле (61.36), только в области поглощения. Зависимость скорости сигнала от частоты схематически изображена на рис. 61.3 (на примере однорезонансной модели).

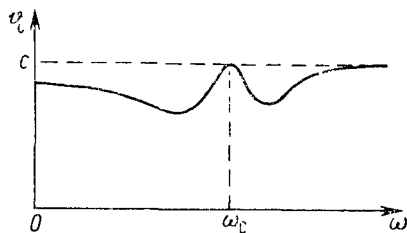


Рис. 61.3

* С некоторыми подробностями этих расчетов можно ознакомиться в кн.: Рыбаков Ю. П. Электродинамика сплошных сред. Ч. 1. М., 1972.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава 6

В предыдущем изложении основных законов электродинамики умышленно обходились вопросы, связанные с выбором системы отсчета координат и времени, к которой эти законы относились. Не затрагивалась и проблема перехода от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой. Приступая в настоящей главе к анализу этих вопросов, следует признать, что опираться при этом можно лишь на достижения механики, под влиянием которых и формировались представления человечества о пространстве и времени. Развитие механики убеждает в полном равноправии всех инерциальных систем отсчета, что нашло свое отражение в известном *принципе относительности Галилея*. Согласно этому принципу, уравнения механики Ньютона имеют один и тот же вид во всех инерциальных системах отсчета, или, как говорят, являются *ковариантными** относительно преобразований Галилея, осуществляющих переход от одной инерциальной системы отсчета к другой.

В связи с этим было бы естественно ожидать, что и в электродинамике равноправие инерциальных систем отсчета не будет нарушено, т. е. что уравнения Максвелла — Лоренца имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета. Однако положение оказалось не столь простым, как это представлялось на первый взгляд, и расширение принци-

* О понятиях ковариантности и инвариантности см. приложение, а также в кн.: Бергман П. Г. Введение в теорию относительности. М., 1947, гл. 2.

па относительности на электродинамику потребовало пересмотра установившихся представлений о пространстве и времени*. Чтобы понять суть возникших противоречий, рассмотрим более подробно принцип относительности Галилея в классической механике.

§ 62. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ И ГИПОТЕЗА ЭФИРА

Принцип относительности Галилея опирается на два основных допущения:

1) время является *абсолютным*, т. е. единым для всех инерциальных систем отсчета;

2) скорости складываются как *евклидовы векторы***.

Из этих допущений и вытекают известные преобразования Галилея, связывающие между собой две инерциальные системы отсчета. Пусть, например, система отсчета Σ' движется относительно системы отсчета Σ со скоростью \mathbf{v} . Считая оси координат в обеих системах параллельными и совпадающими в момент времени $t=0$ (рис. 62.1), имеем:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' = t,$$

или, направляя ось X вдоль \mathbf{v} :

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (62.1)$$

Нетрудно убедиться, что *преобразования Галилея* (62.1) являются прямым следствием соотношения $t' = t$, выражающего абсолютный характер времени, и закона сложения скоростей:

$$u_x = u'_x + v, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z, \quad (62.2)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v},$$

где $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ и $\mathbf{u}' = d\mathbf{r}'/dt'$ — скорости материальной точки в системах Σ и Σ' соответственно.

Рассмотрим уравнения механики Ньютона для замкнутой системы материальных точек с массами m_i , между которыми действуют силы F_{ik} ($i \neq k$), зависящие от относительных расстояний:

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i). \quad (62.3)$$

* Отметим, что под принципом относительности здесь понимается общее утверждение о равноправии при описании законов природы всех инерциальных систем отсчета вне зависимости от используемых преобразований пространственно-временных координат.

** Это допущение можно заменить постулатом об евклидовости пространства.

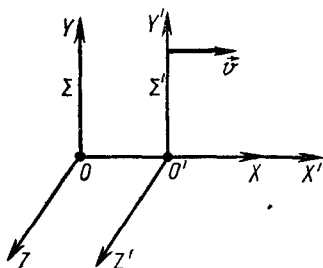


Рис. 62.1

Замечая, что ускорения точек, а также относительные расстояния являются инвариантами преобразований Галилея:

$$d^2\mathbf{r}_i/dt^2 = d^2\mathbf{r}'_i/dt'^2, \quad \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_k, \quad (62.4)$$

убеждаемся, что уравнения (62.3) *инвариантны* относительно этих преобразований. Однако в случае действия произвольных сил уравнения Ньютона только *ковариантны* по отношению к преобразованиям Галилея и инвариантные силы следует при этом рассматривать как внешние, т. е. механическую систему нельзя считать замкнутой.

Задача 62.1. *Из требования ковариантности силы Лоренца относительно преобразований Галилея вывести закон преобразования электромагнитных полей \mathbf{E} и \mathbf{V} .*

Что касается уравнений электродинамики Максвелла — Лоренца, то они оказались нековариантными относительно преобразований Галилея, а все попытки получить желанную ковариантность, как-то изменив форму уравнений, не принесли успеха, ибо приводили к противоречию с опытом*.

Задача 62.2. *Убедиться в нековариантности относительно преобразований Галилея волнового уравнения и уравнений электродинамики Максвелла — Лоренца.*

Нековариантность уравнений электродинамики по отношению к преобразованиям Галилея представлялась, однако, естественной с позиций «эфирных» теорий, вводивших гипотетический электромагнитный эфир и рассматривавших электромагнитное поле как особого рода натяжения в нем (по аналогии с натяжениями в упругой среде). Подобное представление об электромагнитном поле было еще у Максвелла. Фактически его придерживался и Лоренц, считавший электромагнитное поле особым состоянием электромагнитного эфира, покоящегося относительно некоторой выделенной системы отсчета.

Если принять существование электромагнитного эфира, то очевидно, что уравнения Максвелла — Лоренца могут быть справедливыми лишь в единственной системе отсчета, связанной с эфиром. Во всякой другой системе отсчета эфир будет двигаться, а это должно сказаться на уравнениях поля. Иначе говоря, в любой «эфирной» теории предполагается существование «эфирного ветра», а это означает, что в уравнениях поля должна содержаться в качестве параметра скорость рассматриваемой системы отсчета относительно эфира. Таким образом, представление об эфире оказывается несовместимым с принципом относительности Галилея, в чем наглядно убеждает следующий мысленный эксперимент.

Рассмотрим электромагнитную волну, порождаемую точечным источником света в момент времени $t=0$, и выясним, как будет выглядеть ее распространение в двух инерциальных системах от-

* Об одном из таких обобщений уравнений Максвелла, предложенном в 1890 г. Г. Герцем, см.: Франкфурт У. И. Специальная и общая теория относительности. Исторические очерки. М., 1968, с. 6. Очень обстоятельно история создания релятивистской электродинамики изложена в кн.: Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., 1972.

счета, движущихся друг относительно друга со скоростью v . Пусть, скажем, система Σ связана с неподвижным эфиром, а система Σ' движется вдоль оси X со скоростью v , так что в момент $t=0$ их начала отсчета совпадают с положением источника. Тогда в момент $t=T > 0$ свет достигает точек, расположенных на расстоянии $R = cT$ от начала координат $\mathbf{r}=0$. Поэтому в системе Σ уравнение фронта волны имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2T^2 = 0. \quad (62.5)$$

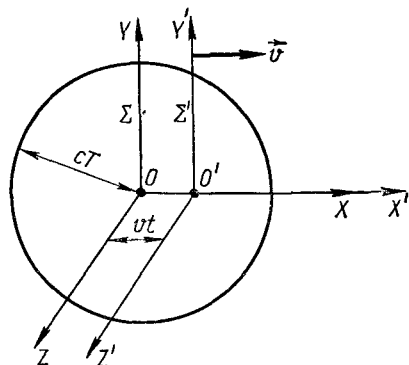


Рис. 62.2

Однако в системе Σ' к моменту $t=T$ положение источника сместится вдоль оси X на отрезок $-vT$ и уравнение той же волновой поверхности примет вид (рис. 62.2)

$$(x' + vT)^2 + y'^2 + z'^2 - c^2T^2 = 0. \quad (62.6)$$

Таким образом, в системах Σ и Σ' уравнение волнового фронта выглядит по-разному. Но, как хорошо известно из теории дифференциальных уравнений в частных производных, волновая поверхность является *характеристической* и ее вид определяется только коэффициентами соответствующих уравнений. Поэтому уравнения электромагнитного поля, в результате решения которых и получаются соответствующие волновые фронты (62.5) и (62.6), также должны выглядеть по-разному, что говорит об их нековариантности*.

Итак, «эфирная» концепция электромагнитного поля отрицает принцип относительности Галилея и допускает возможность опытного обнаружения эфирного ветра. В конце прошлого века «эфирная» концепция считалась единственно возможной и для обнаружения эфирного ветра были поставлены многочисленные эксперименты, на важнейших из которых мы и остановимся.

§ 63. ПОПЫТКИ ОБНАРУЖЕНИЯ ЭФИРНОГО ВЕТРА

Вопрос о возможности обнаружения движения относительно эфира стал обсуждаться еще в первой половине прошлого века**, т. е. до создания Максвеллом электромагнитной теории света. Возник этот вопрос в оптике, где к тому времени на смену корпускулярной теории света Ньютона пришли волновые представления Гюйгенса — Френеля, согласно которым свет рассматривался как возмущение в эфире, распространяющееся в нем наподобие волн в твердом теле. Из многочисленных экспериментов, касающихся проверки «эфирной» концепции, мы остановимся лишь на двух — опытах А. И. Физо и А. Майкельсона.

Опыт Физо был поставлен в 1851 г., т. е. до появления гео-

* См. также задачу 62.2.

** Лорентц Г. А. Теории и модели эфира. М.— Л., 1936.

рии Максвелла, с целью обнаружить возможное увлечение светового эфира движущимся телом. Схема опыта следующая (рис. 63.1). Световой луч от источника S с помощью полупрозрачной посеребренной пластинки a расщепляется на два луча, которые системой зеркал направляются по замкнутому пути навстречу один другому. На этом пути световые лучи проходят водяной поток, движущийся со скоростью v , и на выходе образуют интерференционную картину i .

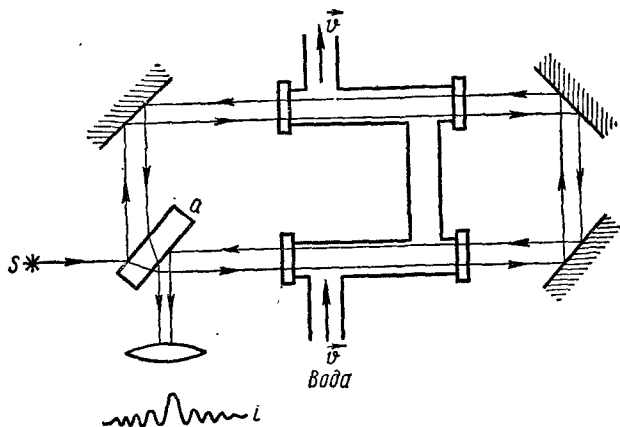


Рис. 63.1

На опыте обнаруживается смещение интерференционных полос в зависимости от скорости потока v , что соответствует частичному увлечению эфира водой. При этом скорость света в движущейся воде оказывается равной

$$v_{\phi} = c/n + (1 - 1/n^2)v, \quad (63.1)$$

где c/n — скорость света в неподвижной воде (n — ее показатель преломления). Формула (63.1) и, в частности, выражение для коэффициента увлечения

$$\alpha = 1 - 1/n^2 \quad (63.2)$$

были теоретически выведены Френелем, исходящим из представлений об эфире как непрерывной среде, заполняющей все тела с плотностью, пропорциональной n^2 . В связи с этим α назван коэффициентом увлечения Френеля.

Задача 63.1. Объяснить опыт Физо: 1) с помощью электронной теории Лоренца; 2) исходя из квантовых представлений о свете как о совокупности частиц — фотонов.

Как видно, опыт Физо позволяет определить скорость среды по отношению к прибору (в данном случае — интерферометру), но не по отношению к неподвижному эфиру. Позднее Лоренц показал, что во всех опытах первого порядка*, в которых наблюдаемый

* О других экспериментах см. в кн.: Вавилов С. И. Экспериментальные основания теории относительности. М.—Л., 1928; Франкфурт У. И., Френк А. М. Оптика движущихся тел. М., 1972.

эффект пропорционален скорости v , измерить скорость эфирного ветра невозможно. Такое измерение можно провести лишь в опытах второго порядка, в которых наблюдаемый эффект пропорционален v^2 . Классическим примером последних является знаменитый опыт Майкельсона.

Опыт Майкельсона впервые был поставлен в 1881 г., а затем повторился в 1887 г. и 1904—1905 гг. (рис. 63.2). Измерения проводились с помощью специально сконструированного для этого опыта интерферометра Майкельсона, располагавшегося вместе с источником света S на массивной каменной плите, плавающей в ванне со ртутью. Если v — скорость движения Земли относительно эфира, то вращением плиты можно так ориентировать интерферометр, чтобы либо плечо l_1 , либо плечо l_2 было направлено вдоль v .

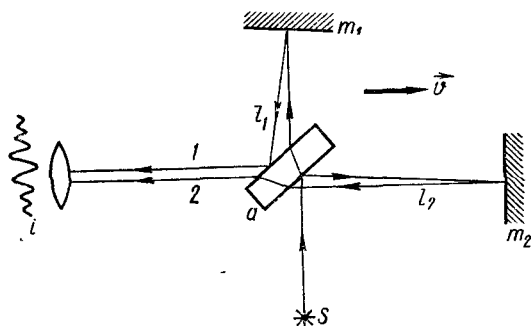


Рис. 63.2

Если плечо l_2 ориентировано вдоль скорости v , то, следуя «эфирной» концепции, нетрудно рассчитать время t_2 , которое требуется второму лучу для прохождения плеча l_2 туда и обратно:

$$t_2 = \frac{l_2}{c-v} + \frac{l_2}{c+v} = \frac{2l_2}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}. \quad (63.3)$$

Время t_1 , требующееся первому лучу для прохождения плеча l_1 туда и обратно, легко находится из рассмотрения треугольника am_1a' (рис. 63.3). Длина основания этого треугольника равна смещению пластинки a за время t_1 , т. е. vt_1 , и поэтому длина боковой стороны равна $L = (l_1^2 + v^2 t_1^2/4)^{1/2}$. Поскольку свет следует вдоль траектории am_1a' длиной $2L = ct_1$, то

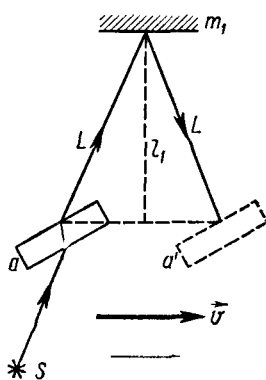


Рис. 63.3

$$t_1 = \frac{2l_1}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (63.4)$$

Теперь легко можно подсчитать разность $t_1 - t_2$, определяющую вид интерференционной картины:

$$\theta \equiv t_1 - t_2 = \frac{2}{c} \left[\frac{l_1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - \frac{l_2}{1 - v^2/c^2} \right]. \quad (63.5)$$

Если же вдоль скорости \mathbf{v} ориентировать плечо l_1 , то лучи 1 и 2 поменяются местами и^{*} получится другая разность

$$\theta' \equiv t'_1 - t'_2 = \frac{2}{c} \left[\frac{l_1}{1 - v^2/c^2} - \frac{l_2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right], \quad (63.6)$$

в результате чего интерференционная картина изменится. При длине волны λ света смещение интерференционных полос определяется изменением разности хода лучей (в долях λ)

$$\delta = \frac{c}{\lambda} (\theta' - \theta) = \frac{2}{\lambda} (l_1 + l_2) \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \right]. \quad (63.7)$$

Для оценки δ разумно предположить, что скорость v порядка скорости движения Земли вокруг Солнца, т. е. $v/c \sim 10^{-4}$. В таком случае

$$\delta \approx \frac{l_1 + l_2}{\lambda} \left(\frac{v}{c}\right)^2. \quad (63.8)$$

В первом опыте Майкельсона сумма длин плеч интерферометра $l_1 + l_2$ составляла 25 м, а в последующих — еще больше. Поэтому для $\lambda = 10^{-6}$ м из (63.8) следует, что $\delta > 1/4$. Такое смещение интерференционных полос может быть надежно зарегистрировано визуально, однако в опытах оно не наблюдалось. Таким образом, эфирный ветер обнаружить не удалось, что послужило основанием для сомнений в справедливости «эфирной» концепции^{*}.

§ 64. ГИПОТЕЗЫ ФИЦДЖЕРАЛЬДА И ЛОРЕНЦА

В 1891 г. для объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона ирландский физик Дж. Фицджеральд выдвинул гипотезу, согласно которой все тела, движущиеся относительно эфира со скоростью \mathbf{v} , сокращаются в направлении движения по закону

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (64.1)$$

где l_0 — продольные размеры тела, неподвижного относительно эфира. Подстановка (64.1) в (63.5) и (63.6) дает

$$\theta = \frac{2(l_1 - l_2)}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \theta', \quad (63.5a)$$

откуда $\delta = 0$ в соответствии с опытом.

Но даже примирившись с гипотезой Фицджеральда, несмотря на всю ее искусственность, все же нельзя было исключить возможность обнаружения эфирного ветра в каком-нибудь другом опыте. В самом деле, заметим, что скорость \mathbf{v} в (63.7) может быть пред-

^{*} Надо сказать, что в строгой теории опыта Майкельсона необходимо еще учитывать и изменение частоты света при отражении от движущегося зеркала. Однако подобные уточнения почти не меняют ожидаемого эффекта (Вавилов С. И. Экспериментальные основания теории относительности. М.—Л., 1928).

ставлена в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_3,$$

где \mathbf{v}_c — скорость Солнца относительно эфира, \mathbf{v}_3 — скорость Земли относительно Солнца. Поскольку в течение года \mathbf{v}_3 заметно меняется, то при $l_1 \neq l_2$ [см. (63.5a)] интерференционная картина также меняется. Такой опыт по наблюдению интерференционной картины в течение длительного времени был поставлен в 1932 г. американским физиком *Р. Кеннеди*, но дал отрицательный результат.

Отрицательный результат опыта Майкельсона Лоренц считал убедительным аргументом в пользу пересмотра концепции эфира, которую он до этого защищал. Не удовлетворившись формальной гипотезой Фицджеральда и своими собственными доказательствами ее, основанными на некоторых допущениях о характере сил взаимодействия атомов в веществе, Лоренц стал искать такое обобщение преобразований Галилея, которое гарантировало бы невозможность обнаружения эфирного ветра в любом оптическом или электродинамическом опыте второго порядка. В 1904 г. ему удалось найти такие преобразования. Первоначально он их представил в таком виде:

$$x' = \gamma x_\Gamma, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t/\gamma - \gamma v x_\Gamma/c^2, \quad (64.2)$$

где $x_\Gamma = x - vt$ — координата x , преобразованная по Галилею; $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — множитель, отражающий сокращение тел по гипотезе Фицджеральда. Но самым ценным в предложении Лоренца было введение нового времени t' , не совпадающего со старым временем t вопреки представлению об абсолютном времени*. Исключив из (64.2) переменную x_Γ , найдем:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - vx/c^2). \quad (64.3)$$

Следует отметить, что подобные преобразования рассматривались еще в 1887 г. немецким физиком *В. Фохтом* в статье, посвященной принципу Доплера, но в форме (64.3) впервые были получены в 1900 г. *Дж. Лармором* в книге «Эфир и материя». В 1904 г. эти преобразования были использованы *А. Пуанкаре* и по предложению последнего были названы *преобразованиями Лоренца*.

Однако Лоренц считал новые координаты x' , y' , z' и время t' лишь формально вводимыми переменными, использование которых удобно, так как позволяет сохранить неизменной форму уравнений электродинамики**. Истинными же координатами и истинным временем он считал исходные переменные x , y , z , t . Таким образом, Лоренц не смог до конца отказаться от концепции эфира и признать, что принцип относительности справедлив и в электродинамике при условии замены преобразований Галилея преобразованиями

* Комбинацию $t - vx/c^2$ Лоренц называл *местным временем*.

** Лоренцем была доказана неизменность при преобразованиях (64.3) лишь свободных уравнений Максвелла, а обобщение этого свойства на уравнения Максвелла с источниками было дано Пуанкаре.

Лоренца. Он не сумел распространить принцип относительности на все физические явления, как это сделал в 1905 г. А. Эйнштейн, доказавший универсальный характер преобразований Лоренца, выведя их из принципа относительности. Если бы Лоренц четко указал, что новые переменные x' , y' , z' , t' так же реальны и столь же полно описывают пространство и время, как и старые переменные x , y , z , t , то он первым утвердил бы принцип относительности и первым обратил бы внимание на относительность одновременности пространственно-разобщенных событий, следующую из предложенных им преобразований. Все эти и последующие достижения принадлежат Эйнштейну, построившему теорию относительности.

§ 65. ПОСТУЛАТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Отрицательные результаты опыта Майкельсона и ряда электродинамических опытов (типа опытов Траутона—Нобля, Эйхенвальда и др *) поставили под сомнение концепцию эфира и дали основание к распространению принципа относительности на электродинамические явления. Необходимость возврата к принципу относительности была глубоко осознана Эйнштейном, который впервые предложил исходить не из концепции эфира, а из утверждения, что *электромагнитные явления описываются одними и теми же уравнениями Максвелла—Лоренца во всех инерциальных системах отсчета*. Но поскольку уравнения электродинамики нековариантны по отношению к преобразованиям Галилея, Эйнштейн поставил задачу—отыскать новые преобразования, по отношению к которым уравнения электродинамики были бы ковариантными и которые соответствовали бы новым, измененным представлениям о пространстве и времени. Такими преобразованиями оказались преобразования Лоренца.

Эйнштейн вывел преобразования Лоренца, исходя из двух основных постулатов—относительности и постоянства скорости света, используя при этом некоторые общие представления о свойствах пространства и времени. Постулаты Эйнштейна содержат следующие утверждения:

1. *Во всех инерциальных системах отсчета все физические явления протекают одинаково, т. е. по одним и тем же законам (постулат или принцип относительности).*

2. *Скорость света не зависит от движения источника света и одинакова во всех инерциальных системах отсчета (постулат постоянства скорости света).*

Если первый постулат является распространением принципа относительности Галилея на все физические явления, а не только на электродинамические, то второй постулат фактически содержится в первом, поскольку процесс распространения электромагнитной

* Беккер Р. Теория электричества. М.—Л., 1941, т. 2, § 45; Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., 1972.

световой волны, согласно первому постулату, должен во всех инерциальных системах отсчета протекать одинаково. Однако второй постулат представляется особо важным, так как он в явной форме отрицает «эфирную» концепцию в оптике и электродинамике и одновременно раскрывает фундаментальную роль электродинамической постоянной c в общей теории пространства и времени.

Если исходить из концепции электромагнитного эфира, опирающейся на преобразования Галилея, то постулаты Эйнштейна представляются противоречивыми. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть мысленный опыт со светом (см. § 62). В самом деле, фронт световой волны в системе Σ в момент времени $t = T$ будет иметь вид сферы \mathcal{R} радиуса cT с центром в точке $\mathbf{r} = 0$. Однако в системе Σ' фронт той же самой световой волны должен, согласно постулатам Эйнштейна, изображаться сферой \mathcal{R}' того же радиуса cT , но с центром в точке $\mathbf{r}' = 0$ (рис. 65.1). Таким образом, волновые фронты одной и той же световой волны в разных системах отсчета не совпадают!

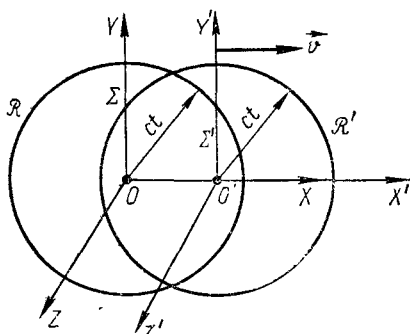


Рис. 65.1

На первый взгляд кажется, что для разрешения этого «очевидного» противоречия нужно либо отказаться от принципа постоянства скорости света, т. е. считать, что скорость света зависит от скорости движения источника, либо отказаться от обоих постулатов и принять «эфирную» концепцию. Однако более внимательное рассмотрение парадокса показывает, что причина его возникновения лежит в неявном использовании укоренившегося в нашем сознании представления об абсолютном времени, когда мы молчаливо полагаем $t' = t$ и отождествляем принцип относительности с требованием ковариантности по отношению к преобразованиям Галилея.

В самом деле, если отказаться от условия $t' = t$ и считать, что $t' = f(t, x)$, как это было, например, предложено Лоренцем, то становится очевидным, что сферы \mathcal{R} и \mathcal{R}' не должны совпадать, поскольку каждая из них является *геометрическим местом одновременных событий** в своей системе отсчета, а одновременные события в системе Σ , вообще говоря, не являются таковыми в системе Σ' , и наоборот. Таким образом, в системе Σ сфера \mathcal{R}' также является фронтом световой волны, но каждая из его точек взята в свой момент времени.

Итак, кажущаяся противоречивость постулатов Эйнштейна устраняется, если отказаться от представления об абсолютном времени

* Событием здесь является приход световой волны в точку \mathbf{r} в момент времени t . В дальнейшем, независимо от рассматриваемого процесса, событием будет называться совокупность (t, \mathbf{r}) .

и считать одновременность пространственно-разобщенных событий относительной, т. е. связывать пространственные координаты и время в движущихся друг относительно друга системах отсчета не преобразованиями Галилея, а иными преобразованиями, удовлетворяющими постулатам Эйнштейна. Как выяснится, таковыми являются преобразования Лоренца.

§ 66. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОДНОВРЕМЕННОСТИ

Для вывода преобразований Лоренца нам понадобятся некоторые общие представления о свойствах пространства и времени.

Пространство и время суть формы существования материи. Эти формы являются *всеобщими*: никакая материя не существует вне пространства и времени, как и пространство и время немислимы без материи. Поэтому, говоря о свойствах пространства и времени, необходимо иметь в виду, что они являются отражением наиболее общих свойств материи и законов, управляющих ее движением. Опираясь на законы, лежащие в основе механики и электродинамики и не вызывающие в настоящее время сомнения, можно выделить следующие наиболее общие свойства пространства. *трехмерность, изотропность и однородность*. Важнейшим же свойством времени является его *однородность**.

Для пояснения этих свойств отметим, что наглядно пространство изображается *координатной сеткой*, служащей для регистрации всех возможных положений, которые могут занимать материальные объекты. Координатная сетка может быть привязана к некоторому избранному материальному телу, называемому *телом отсчета*. Если тело отсчета абсолютно жесткое, то его точки могут считаться изображающими точки координатной сетки. Для нумерации последних используются три числа — координаты (в простейшем случае — декартовы), что и является выражением *трехмерности пространства*. Равноправие всех трех декартовых координат отражает *изотропию пространства*, а произвольность выбора начала координат — его *однородность*.

Отвлеченным изображением времени может служить упорядоченная от прошедшего к будущему последовательность моментов времени, которые могут отсчитываться некоторыми идеальными (стандартными) часами. В каждой пространственной точке могут быть установлены свои часы, отсчитывающие время в данной точке. При этом все идеальные часы считаются тождественными, т. е. ритм их хода при переносе часов в одну и ту же пространственную точку должен быть одинаковым. Свобода выбора начала отсчета времени является отражением его *однородности*.

Координатная сетка, связываемая с избранным телом отсчета, и упорядоченные последовательности моментов времени, сопостав-

* Из механики известно, что перечисленные свойства пространства-времени проявляются в законах сохранения энергии, импульса и момента импульса замкнутых систем.

ляемые каждой точке пространства и отсчитываемые помещенными туда стандартными часами, образуют в своей совокупности то, что называют *системой отсчета*. При этом само тело отсчета (или их набор) совместно с установленными в каждой пространственной точке стандартными часами образуют *базис системы отсчета**. Среди всевозможных систем отсчета физически выделяются *инерциальные системы отсчета*, движущиеся по закону инерции, т. е. связываемые с телами отсчета, на которые не действуют никакие внешние силы (практически такие тела отсчета могут быть реализованы лишь приближенно).

Выбрав некоторую инерциальную систему отсчета, исследуем понятие одновременности событий. Как было замечено раньше, понятие одновременности относительно, поэтому необходимо дать строгое его определение, согласованное с постулатами Эйнштейна. При этом речь будет идти о пространственно-разобщенных событиях, поскольку для событий, происходящих в одной точке, одновременность не отличается от галилеевской.

При определении одновременности пространственно-разобщенных событий воспользуемся конкретным физическим процессом — распространением света в вакууме, скорость которого, согласно второму постулату Эйнштейна, постоянна и равна c . Пусть имеются два события, происходящие в точках M_1 и M_2 соответственно. Для синхронизации часов C_1 и C_2 , помещенных в этих точках, пусть световой сигнал из точки M_1 в момент времени t_1 (по часам C_1) предположим, что этот сигнал пришел в точку M_2 в момент t_2 (по часам C_2), мгновенно отразился и возвратился в точку M_1 в момент t'_1 (по часам C_1).

Очевидно, что время, затрачиваемое на путь туда или обратно, должно быть одинаковым (вследствие постоянства скорости света). Поэтому необходимо считать, что $t_2 - t_1 = t'_1 - t_2$, или

$$t_2 = (t_1 + t'_1)/2. \quad (66\ 1)$$

Иначе говоря, часы C_2 должны быть установлены так, чтобы в момент прихода сигнала в точку M_2 их показание было t_2 [в соответствии с (66 1)] Такого рода световая синхронизация часов и была положена Эйнштейном в основу *определения одновремен-*

* Следует особо различать систему отсчета и систему координат. Последняя, включающая в себя координатную сетку и способ отсчета моментов времени и не включающая тела отсчета, имеет вспомогательный характер и в значительной мере может быть выбрана произвольно, хотя, конечно, существуют и привилегированные системы координат, наиболее просто и точно отражающие свойства рассматриваемого явления. Этот вопрос особенно важен в общей теории относительности (Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1955, § 1—2) Отметим, что, выбрав некоторую систему отсчета, привязанную к реальному телу отсчета, можно рассмотреть другое, воображаемое, тело отсчета с заданным законом движения и связать с ним новую систему отсчета (однако в общей теории относительности принято систему отсчета связывать только с реальными телами).

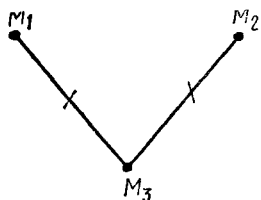


Рис. 66.1

ности пространственно-разобитенных событий.

Очевидно, что возможны и другие способы синхронизации часов. Например, световой сигнал может высылаться в точки M_1 и M_2 из некоторой равноудаленной от них точки M_3 (рис. 66.1). Тогда время, показываемое часами C_1 и C_2 в момент прихода сигнала, должно быть одинаковым*.

§ 67. ВЫВОД ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА — ЭЙНШТЕЙНА

При выводе преобразований Лоренца будем считать принятыми следующие положения:

1) *однородность пространства и времени*, означающая, что вид преобразований не должен зависеть от выбора начала отсчета пространственных координат или времени;

2) *изотропность пространства*, т. е. равноправие всех пространственных направлений;

3) *принцип относительности*, т. е. полное равноправие всех инерциальных систем отсчета;

4) *постулат постоянства скорости света*, т. е. одинаковость скорости света во всех инерциальных системах отсчета.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета Σ и Σ' , с которыми свяжем декартовы системы координат. Систему отсчета Σ условно назовем неподвижной, а систему Σ' (также условно) — движущейся в системе Σ со скоростью v . Если рассматривать пространственно-временное описание некоторого материального процесса в системах Σ и Σ' , то эти описания должны быть эквивалентными, т. е. связанными между собой. Иначе говоря, в различных системах отсчета лишь по-разному изображается один и тот же пространственно-временной континуум, свойства которого являются отражением свойств материи. Поэтому должны существовать формулы преобразования от одной системы отсчета к другой, которые мы сначала запишем в самом общем виде:

$$t' = \varphi(t, \mathbf{r}); \quad \mathbf{r}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}), \quad (67.1)$$

где φ и \mathbf{f} — некоторые неизвестные функции. Для определения их конкретного вида воспользуемся сформулированными выше четырьмя требованиями.

1. Если рассмотреть два различных события (t_1, \mathbf{r}_1) и (t_2, \mathbf{r}_2) , то разности $t_2 - t_1$ и $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ могут зависеть только от $t_2 - t_1$ и $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, как того требует принцип однородности пространства-времени. Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi(t_2, \mathbf{r}_2) - \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) &= \Phi(t_2 - t_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1); \\ \mathbf{f}(t_2, \mathbf{r}_2) - \mathbf{f}(t_1, \mathbf{r}_1) &= \mathbf{F}(t_2 - t_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \end{aligned} \quad (67.2)$$

* Нетрудно убедиться, что подобную синхронизацию часов можно осуществить и с помощью частиц равной массы, выбрасываемых из точки M_3 , если только обеспечить равенство их импульсов.

где Φ и F — некоторые новые функции. Принимая, что в момент $t=0$ начала отсчета в системах Σ и Σ' совпадают, имеем: $\varphi(0, 0)=0$, $f(0, 0)=0$. Поэтому, полагая в (67.2) $t_1=0$, $r_1=0$, находим:

$$\varphi(t_2, r_2) = \Phi(t_2, r_2); \quad f(t_2, r_2) = F(t_2, r_2).$$

Тогда уравнения (67.2) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \varphi(t_2, r_2) - \varphi(t_1, r_1) &= \varphi(t_2 - t_1, r_2 - r_1); \\ f(t_2, r_2) - f(t_1, r_1) &= f(t_2 - t_1, r_2 - r_1), \end{aligned} \quad (67.3)$$

из которого следует, что функции φ и f линейны по t и r .

2. Будем теперь считать оси координат в системах Σ и Σ' параллельными и совпадающими в момент времени $t=0$. Тогда вследствие изотропности пространства единственным выделенным направлением будет направление скорости \mathbf{v} . Иначе говоря, единственным вектором, от которого параметрически могут зависеть функции преобразования φ и f в (67.1), является вектор скорости \mathbf{v} . Ориентируя ось X вдоль \mathbf{v} и учитывая линейность функций φ , f , а также совпадение плоскостей $x'=0$ и $x=vt$, заметим, что из параллельности осей координат в системах Σ и Σ' следует пропорциональность x' , y' , z' и соответственно $x-vt$, y , z . При этом коэффициенты пропорциональности в y' и z' одинаковы вследствие равноправия осей Y и Z . Наконец, t' может зависеть лишь от t и x вследствие выделенности направления X . Учитывая все сказанное, запишем преобразование (67.1) в таком виде:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = \alpha y, \quad z' = \alpha z, \quad t' = \mu(t - vx/\eta), \quad (67.4)$$

где коэффициенты α , γ , μ , η могут зависеть лишь от v^2 , поскольку при изменении направления осей X и X' на обратное и одновременном обращении знака скорости v преобразование (67.4) не должно меняться, как это следует из изотропности пространства.

Нетрудно понять, что все вышеприведенные рассуждения эквивалентны утверждению, что \mathbf{r}' — полярный вектор, а t' — скаляр, линейно зависящие от t и \mathbf{r} . В самом деле, \mathbf{r}' может быть только линейной комбинацией векторов \mathbf{r} , $\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{v})$ и $v\mathbf{t}$, а t' — комбинацией скаляров t и $(\mathbf{v}\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{v}) - \gamma v\mathbf{t}, \\ t' &= \mu t + \varepsilon(\mathbf{r}\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (67.5)$$

где α , β , γ , μ , ε , как скаляры, могут зависеть лишь от v^2 . Далее, поскольку в системе Σ система Σ' движется со скоростью \mathbf{v} , то $\mathbf{r}'=0$ эквивалентно $\mathbf{r}=\mathbf{v}t$. Но тогда из (67.5) следует, что $\alpha + \beta v^2 - \gamma = 0$, и (67.5) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \alpha\mathbf{r} + (\gamma - \alpha)\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{v})/v^2 - \gamma v\mathbf{t}, \\ t' &= \mu t + \varepsilon(\mathbf{r}\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (67.6)$$

что эквивалентно (67.4), если считать ось X параллельной \mathbf{v} .

3. Воспользуемся принципом относительности и рассмотрим обратный переход — от системы Σ' к системе Σ . Вследствие равноправия систем отсчета Σ и Σ' этот переход описывается теми же формулами (67.4), но с заменой v на $-v$ (рис. 67.1):

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = \alpha y', \quad z = \alpha z', \quad t = \mu(t' + vx'/\eta). \quad (67.7)$$

Подставляя (67.4) в (67.7), находим:

$$x = \gamma [\gamma (x - vt) + \mu t - \mu v^2 x / \eta], \quad y = \alpha^2 y,$$

$$z = \alpha^2 z, \quad t = \mu^2 t - \mu^2 v x / \eta + \mu v \gamma (x - vt) / \eta.$$

Поскольку полученные соотношения должны выполняться тождественно, то функции α , γ , μ , η оказываются связанными между собой:

$$\alpha^2 = 1, \quad \gamma(\gamma - \mu v^2 / \eta) = 1, \quad \gamma v(\mu - \gamma) = 0,$$

$$\mu^2 - \mu \gamma v^2 / \eta = 1, \quad \mu(\mu - \gamma) / \eta = 0$$

Отсюда сразу находим, что $\alpha = \pm 1$. Однако случай $\alpha = -1$ соответствует преобразованию $y' = -y$, $z' = -z$; мы же предполагали направления осей координат в Σ и Σ' одинаковыми. Поэтому остается единственный выбор

$$\alpha = 1. \quad (67.8)$$

Далее, поскольку $v \neq 0$ и $\gamma \neq 0$ (иначе $x' \equiv 0$), то

$$\mu = \gamma, \quad \gamma^2 = (1 - v^2 / \eta)^{-1}. \quad (67.9)$$

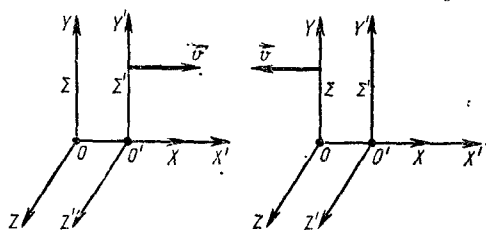


Рис. 67.1

В результате преобразование (67.4) принимает вид

$$x' = \gamma (x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma (t - vx / \eta), \quad (67.10)$$

где $\gamma^2 = (1 - v^2 / \eta)^{-1}$.

Итак, нам осталось определить только одну неизвестную функцию $\eta(v^2)$. Для этого воспользуемся еще раз принципом относительности и рассмотрим новую инерциальную систему отсчета Σ'' , движущуюся относительно Σ' вдоль оси X' со скоростью v' . По принципу относительности преобразование от системы Σ к системе Σ'' также должно иметь вид (67.10) с некоторой новой скоростью \bar{v} и новыми значениями $\bar{\gamma} \equiv \gamma(\bar{v}^2)$, $\bar{\eta} \equiv \eta(\bar{v}^2)$:

$$x'' = \bar{\gamma} (x - \bar{v}t), \quad y'' = y, \quad z'' = z, \quad t'' = \bar{\gamma} (t - \bar{v}x / \bar{\eta}). \quad (67.11)$$

Однако то же самое преобразование можно получить, совершив сначала переход от Σ к Σ' , а затем от Σ' к Σ'' *. При этом

$$x'' = \gamma \gamma' [x - vt - v' (t - vx / \eta)],$$

$$t'' = \gamma \gamma' [t - (vx / \eta) - v' (x - vt) / \eta']. \quad (67.12)$$

Сравнив (67.11) и (67.12) и, в частности, коэффициенты при x в выражении для x'' и коэффициенты при t в выражении для t'' , найдем:

$$\bar{\gamma} = \gamma \gamma' (1 + v v' / \eta), \quad \bar{v} = \gamma \gamma' (1 + v v' / \eta').$$

* Это является выражением группового характера разыскиваемых преобразований.

Отсюда следует, что

$$\eta' = \eta = \text{const}, \quad (67.13)$$

т. е. η не зависит от v . Таким образом, согласно (67.9) и (67.13), γ есть функция v^2 и фундаментальной постоянной η :

$$\gamma = \pm (1 - v^2/\eta)^{-1/2}.$$

Однако решение, отвечающее отрицательным γ , следует отбросить, так как при $v=0$ должно получаться тождественное преобразование, т. е. $\gamma(0) = 1$. Окончательно

$$\gamma = (1 - v^2/\eta)^{-1/2}. \quad (67.14)$$

4. Для определения постоянной η воспользуемся постулатом постоянства скорости света. Рассмотрим плоскую световую волну, распространяющуюся вдоль оси X . Уравнение волнового фронта этой волны в системе отсчета Σ имеет вид

$$x - ct = 0. \quad (67.15)$$

Однако в системе Σ' , согласно постулату о постоянстве скорости света, уравнение волнового фронта должно выглядеть точно так же:

$$x' - ct' = 0. \quad (67.16)$$

Преобразуя левую часть (67.16) с помощью (67.10) и учитывая (67.15), находим

$$\gamma vt (1 - c^2/\eta) = 0.$$

Поскольку $v \neq 0$ и $\gamma \neq 0$, то

$$\eta = c^2. \quad (67.17)$$

В итоге преобразования Лоренца, выведенные на основании постулатов Эйнштейна, принимают такой вид:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (67.18)$$

Обратные преобразования получаются заменой v на $-v$:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (67.19)$$

С помощью (67.6) нетрудно получить преобразования Лоренца и в общем случае, когда скорость \mathbf{v} имеет произвольное направление. Тогда в векторной записи имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \gamma \mathbf{v} t + (\gamma - 1) (\mathbf{r} \mathbf{v}) \mathbf{v} / v^2, \\ t' &= \gamma [t - (\mathbf{r} \mathbf{v}) / c^2], \end{aligned} \quad (67.20)$$

где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Итак, нами получены преобразования координат и времени, осуществляющие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. В этих преобразованиях в концентрированной форме и содержатся новые представления о пространстве и времени, вытекающие из принципа относительности, распространенного на все физические явления, включая электродинамические.

Задача 67.1. Убедиться в инвариантности оператора Даламбера \square относительно преобразований Лоренца [установить на основании этого ковариантность волнового уравнения $\square \psi = 0$ и уравнения Клейна—Гордона $(\square - m^2) \psi = 0$ ($m = \text{const}$) для скалярного поля ψ]. Показать, что уравнения механики Ньютона нековариантны относительно преобразований Лоренца.

§ 68. ОБЩИЕ СЛЕДСТВИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Рассмотрим некоторые следствия преобразований Лоренца, выявляющие то новое, что они вносят в представления о пространстве и времени.

Предельный случай медленных движений ($v \ll c$). В механике макроскопических тел, имеющей дело со скоростями, гораздо меньшими скорости света, хорошо подтверждается принцип относительности, основанный на преобразованиях Галилея. Поэтому в пределе медленных движений преобразования Лоренца должны сводиться к преобразованиям Галилея. Однако если считать $v/c \rightarrow 0$, т. е. $\gamma \rightarrow 1$, то преобразования (67.18) принимают такой вид:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t - vx/c^2. \quad (68.1)$$

Как видно, они отличаются от преобразований Галилея тем, что вместо абсолютного времени $t' = t$ вводится местное время Лоренца $t' = t_{\text{мест}} = t - vx/c^2$. Однако для реальных физических задач пространственные координаты можно считать ограниченными. Поэтому, исключая бесконечно удаленные точки, т. е. полагая $vx \ll c^2 t$, убеждаемся, что преобразования (68.1) в самом деле переходят в преобразования Галилея.

Таким образом, новая теория пространства-времени, основанная на преобразованиях Лоренца, удовлетворяет принципу соответствия, переходя в пределе медленных движений в старую теорию Ньютона—Галилея. Выполнение принципа соответствия является необходимым условием, предъявляемым ко всякой новой теории, поскольку старая, хорошо проверенная теория обязательно должна содержаться в новой в качестве предельного случая, т. е. при изменении входящих в теорию параметров в некоторой ограниченной области.

Преобразования Лоренца теряют физический смысл при $v > c$. В самом деле, в этом случае $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ становится мнимой величиной, а вместе с ней мнимыми оказываются и новые координаты x' и время t' . Но результаты любых измерений пространства и времени выражаются в действительных числах, поэтому физический смысл имеют лишь действительные координаты и время. Следовательно, системы отсчета, движущиеся со скоростью, превышающей скорость света в вакууме, не имеют физического смысла и должны быть изъяты из рассмотрения. Вместе с тем преобразования, осуществляющие переход к таким системам и рассматриваемые формально математически, безусловно могут оказаться полезными при решении некоторых задач.

Задача 68.1. Рассмотреть комплексное преобразование Лоренца вида:

$$x' = \tilde{\gamma}(x - vt), \quad y' = iy, \quad z' = iz, \quad t' = \tilde{\gamma}(t - vx/c^2),$$

где $\tilde{\gamma} = [(v^2/c^2) - 1]^{-1/2}$, $v > c$, и убедиться, что относительно этого преобразования остается инвариантным уравнение Даламбера, но не уравнение Клейна—Гордона*.

Относительность одновременности. Ранее, анализируя распространение световой волны в двух инерциальных системах отсчета Σ и Σ' , находящихся в относительном движении, мы пришли к выводу, что постулаты Эйнштейна непротиворечивы только при допущении *относительности одновременности пространственно-разобщенных событий*. Убедимся теперь в этом с помощью преобразований Лоренца. При этом для упрощения картины вообще не будем рассматривать координаты y и z .

Пусть в неподвижной системе отсчета Σ зафиксированы два пространственно-разобщенных события (t_1, x_1) и (t_2, x_2) , $x_2 \neq x_1$. Посмотрим, как будут выглядеть эти события в системе Σ' , движущейся со скоростью v . Применяя преобразования Лоренца, имеем:

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= \gamma[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)], \\ t'_2 - t'_1 &= \gamma \left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) \right]. \end{aligned} \quad (68.2)$$

Допустим, что в системе Σ события одновременны, т. е.

$$t_2 = t_1. \quad (68.3)$$

Тогда в системе Σ' , согласно (68.2), справедливы соотношения

$$t'_2 - t'_1 = - (x_2 - x_1) v \gamma / c^2, \quad x'_2 - x'_1 = \gamma (x_2 - x_1), \quad (68.4)$$

откуда

$$t'_2 - t'_1 = - (x'_2 - x'_1) v / c^2 \neq 0. \quad (68.5)$$

Таким образом, события, одновременные в системе Σ , становятся неодновременными в системе Σ' , т. е. *одновременность пространственно разобщенных событий относительна***. Это обстоятельство является тем существенно новым, что вносится преобразованиями Лоренца в наши представления о пространстве-времени.

В самом деле, в классической механике Ньютона, основанной на принципе относительности Галилея, время считалось абсолютным и

* О более общих преобразованиях, оставляющих инвариантным волновое уравнение, см. в кн. *Бейтмен Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн*. М., 1958, § 13, 51. В связи с преобразованием в задаче 68.1 см. кн.: «*Tachyons, Monopoles, and Related Topics*» ed. by *E. Recami*, Amsterdam, 1978.

** Время $t'_2 - t'_1$ можно назвать *временем десинхронизации*, ибо события, синхронизированные в одной системе отсчета, десинхронизируются в другой. Это время является количественным выражением относительности одновременности. Отметим, что эффект десинхронизации имеет первый порядок по v/c и вытекает уже из приближенных преобразований (68.1).

признавалась лишь пространственная относительность, т. е. относительность одновременности событий, разделенных во времени. Так, если в системе Σ события (t_1, x_1) и (t_2, x_2) происходят в одной точке ($x_1 = x_2$) и в разные моменты времени ($t_1 \neq t_2$), то в системе Σ' , согласно преобразованиям Галилея, они будут разделены отрезком $x'_2 - x'_1 = v(t_1 - t_2) \neq 0$. Что же касается одновременности событий, то она считалась абсолютной: $t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1$.

Чтобы нагляднее представить себе относительность одновременности, рассмотрим ее проявление на конкретной модели. Допустим, что в системе Σ' одновременно вспыхнули расставленные вдоль оси X' лампочки. Тогда в системе Σ вспышки не будут одновременными и лампочки зажигаются последовательно одна за другой, причем фронт вспышек, согласно (68.2), перемещается со скоростью

$$u = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = c^2/v.$$

Эта скорость связана с относительной скоростью v систем Σ и Σ' соотношением

$$uv = c^2, \quad (68.6)$$

использованным в свое время Луи де Бройлем для описания «волн материи». Де Бройль предположил, что со всякой неподвижной частицей массы m_0 связан некоторый периодический процесс частоты $\omega_0 = m_0 c^2/\hbar$, где $2\pi\hbar \equiv h$ — постоянная Планка. Иначе говоря, он постулировал существование волнового поля

$$\psi(t, x) = \psi_0 e^{-i\omega_0 t},$$

изменяющегося по гармоническому закону одновременно во всех точках пространства. Если же частица движется со скоростью v , то, считая поле ψ скалярным, найдем, что в системе Σ' , связанной с частицей, поле де Бройля имеет вид

$$\psi'(t', x') = \psi_0 e^{-i\omega_0 t'},$$

а в системе Σ , согласно преобразованиям Лоренца,

$$\psi(t, x) = \psi'(t', x') = \psi_0 e^{-i\omega(t - x/u)},$$

где $u = c^2/v$, $\omega = \omega_0 \gamma$, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Таким образом, с каждой движущейся со скоростью v частицей связано поле де Бройля в виде плоской волны, распространяющейся в пространстве с фазовой скоростью u , определяемой соотношением (68.6).

Ограниченность скорости распространения сигнала. Формулы (68.2) позволяют также сделать вывод о том, что *скорость любого сигнала, т. е. возмущения, переносящего информацию, не может превышать скорость света c* . В самом деле, пусть сигнал, посылаемый из точки x_1 в момент времени t_1 , принимается в точке x_2 в момент

времени t_2 (рис. 68.1). Очевидно, что момент испускания сигнала предшествует моменту его приема, т. е. $t_1 < t_2$, а скорость распространения сигнала равна

$$v_c = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1). \quad (68.7)$$

В то же время в движущейся системе отсчета Σ' [см. (68.2) и (68.7)]

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1) \gamma (1 - v v_c / c^2). \quad (68.8)$$

Поскольку для всех реальных систем отсчета $v < c$, то при $v_c < c$ всегда $v v_c < c^2$ и поэтому из (68.8) $t'_1 < t'_2$, т. е. последовательность моментов испускания сигнала и его приема сохраняется неизменной во всех реальных инерциальных системах отсчета.

Однако если $v_c > c$, то найдутся системы отсчета, удовлетворяющие условию

$$\frac{c}{v_c} < \frac{v}{c} < 1,$$

для которых $v v_c > c^2$, поэтому $t'_2 < t'_1$. Но такое изменение последовательности моментов испускания и поглощения сигнала в зависимости от выбора системы отсчета (всегда произвольного) несовместимо с принципом причинности, по крайней мере в той форме, в какой он выполняется для всех макроскопических процессов. Согласно этому принципу, всякая информация сначала посылается (причина), а затем принимается (следствие), обращение же причины и следствия местами невозможно.

Итак, принимая принцип причинности, мы вынуждены признать, что скорость передачи информации не может превышать скорость света c . Однако этот вывод не следует переносить на все без исключения физические процессы, поскольку не все процессы можно превратить в сигналы, т. е. использовать для передачи информации. Примером таких процессов могут быть, скажем, вышеупомянутые волны де Бройля, распространяющиеся с фазовой скоростью, превышающей скорость света. Это связано с тем, что бесконечная монохроматическая волна не несет никакой информации и поэтому не может быть сигналом. Передать информацию можно лишь с помощью группы волн, центр которой распространяется с групповой скоростью (61.36). В частности, для волн де Бройля, как можно показать, групповая скорость совпадает со скоростью v частицы, ассоциируемой с этой волной, и связана с фазовой скоростью u и волны соотношением (68.6). При этом $u > c$, так как $v < c$, ибо предполагается, что с частицей всегда можно связать систему отсчета.

Допустимо существование и реальных частиц, движущихся со скоростью, большей скорости света, если отказаться от обычно подразумеваемой независимости процессов их испускания и поглощения. Для обычных, *досветовых*, частиц ($u < c$) процесс испускания (эмиссии) во всех возможных системах отсчета предшествует процессу поглощения (абсорбции). Для *сверхсветовых* же частиц ($u > c$) последовательность процессов эмиссии и абсорбции зависит от выбора системы

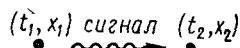


Рис. 68.1

отсчета [см. (68.8)], т. е. произвольна. Таким образом, если допустить, что сверхсветовая частица, испущенная в точке x_1 эмиттером E , поглощается в точке x_2 регистрирующим прибором — абсорбером A , то в некоторой другой возможной системе отсчета процесс абсорбции в точке x'_2 предшествует процессу эмиссии в точке x'_1 . Тем самым нарушается макроскопическая причинность, так как следствие (регистрация частицы) предшествует причине (испусканию частицы). Если же для сверхсветовых частиц не противопоставлять процессы поглощения и испускания, а рассматривать их как единый процесс эмиссии — абсорбции, или абсорбции — эмиссии, т. е. не считать возможной регистрацию лишь одного процесса поглощения частицы, а полагать осуществимой только регистрацию всего процесса сразу в обеих точках x_1 и x_2 , то противоречия с принципом причинности не возникнет.

Таким образом, теории относительности не противоречит допущение о существовании точечных объектов, движущихся со сверхсветовой скоростью, испускаемых и поглощаемых обычными частицами в различных пространственных точках. Однако последовательность процессов эмиссии и абсорбции для этих объектов относительна, т. е. зависит от выбора системы отсчета. Такие гипотетические сверхсветовые частицы (*тахियोны*) представляются в одной системе отсчета движущимися от точки x_1 к точке x_2 , а в другой — от x_2 к x_1 . Подробнее о свойствах тахионов будет сказано в § 96.

Помимо эффекта десинхронизации имеются еще два кинематических эффекта теории относительности (уже второго порядка), наиболее поражающие воображение: это эффекты сокращения движущихся масштабов и замедления движущихся часов.

§ 69. ИЗМЕНЕНИЕ ДЛИНЫ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ

Пусть некоторое тело движется относительно неподвижной системы отсчета Σ со скоростью v . Свяжем с ним подвижную систему отсчета Σ' и допустим, что сравнением с эталонными масштабами, установленными в той же системе, найдено, что длина тела равна l_0^* . Под длиной же движущегося тела следует, очевидно, понимать расстояние между положениями его концов, зарегистрированными в неподвижной системе отсчета в один и тот же момент времени. *Одновременность* измерения положений концов тела является существенно необходимым условием опыта. Нарушение этого условия привело бы к тому, что измеренная длина могла бы оказаться какой угодно, в том числе даже отрицательной.

Если концы тела расположены в плоскости, перпендикулярной вектору скорости v (рис. 69.1), то измерение его длины в обеих системах Σ и Σ' даст одно и то же значение l_0 , поскольку [см. (67.18)] $y' = y$ и $z' = z$. Выбор же момента измерения тоже никак не сказывается на измеряемой длине, так как подстановка $x_2 = x_1$ и $t_2 = t_1$ в (68.2) дает $t'_2 = t'_1$, т. е. регистрация положений концов тела производится одновременно как в системе Σ , так и в системе Σ' .

Однако картина существенно изменится, если тело будет вытянуто вдоль оси X , т. е. вдоль направления движения (рис. 69.2).

* Длину l_0 обычно называют *собственной длиной* тела, а систему Σ' — его *собственной системой отсчета*.

Если в системе Σ моменты регистрации положений концов тела совпадают ($t_2 = t_1$), то из-за относительности одновременности пространственно-разобренных событий в системе Σ' эти моменты уже не совпадают, поэтому результат измерения длины отличается от l_0 , ибо l_0 может получиться только при условии $t'_1 = t'_2$.

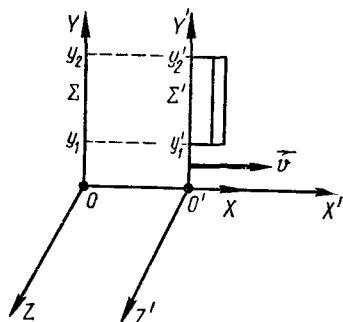


Рис. 69.1

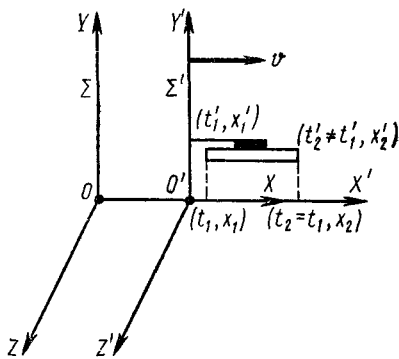


Рис. 69.2

С точки зрения наблюдателя в системе Σ длина тела, очевидно, равна

$$l = x_2 - x_1 \quad (69.1)$$

при условии $t_2 = t_1$. Поскольку $x'_2 - x'_1 = l_0$, то [см. (68.2)] имеем $l_0 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l$, откуда

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (69.2)$$

Таким образом, движущееся тело сокращается в направлении своего движения. Формула сокращения (69.2) имеет такой же вид, как и формула Фицджеральда (64.1), но входящая в нее скорость v является уже не скоростью тела относительно эфира, как в (64.1), а относительной скоростью систем отсчета Σ и Σ' . Поэтому в отличие от формулы сокращения Фицджеральда соотношение (69.2) имеет относительный, обратимый характер.

Действительно, если связать с телом систему Σ , а длину его измерять в системе Σ' , то надо считать $l_0 = x_2 - x_1$ и

$$l = x'_2 - x'_1, \quad t'_2 = t'_1. \quad (69.3)$$

Теперь уже для нахождения связи между l и l_0 нужно использовать не формулы (68.4), а аналогичные соотношения, вытекающие из обратных преобразований Лоренца (67.19):

$$x_2 - x_1 = \gamma[(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)], \quad (69.4)$$

$$t_2 - t_1 = \gamma[(t'_2 - t'_1) + v(x'_2 - x'_1)/c^2].$$

Полагая согласно (69.3) в первой из этих формул $t'_2 = t'_1$, получаем $x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1)$, т. е. опять $l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Таким образом, при измерении длины движущегося тела всегда обнаруживается его сокращение. В то же время по формуле Фицджеральда (64.1) тело сокращается лишь в случае, когда оно наблюдается из системы отсчета, связанной с неподвижным эфиром; если же тело покоится относительно эфира, то из движущейся системы отсчета оно должно представляться удлинненным.

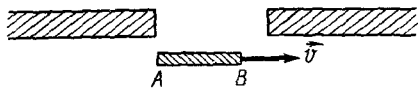


Рис. 69.3

Итак, в эфирной теории эффект сокращения абсолютен, тогда как в теории относительности он относителен и обусловлен относительностью одновременности пространственно-разобценных событий.

Задача 69.1. Стержень собственной длины l_0 движется вдоль оси X неподвижной системы отсчета Σ со скоростью u . Каков будет результат измерения его длины l' в системе Σ' , движущейся относительно Σ со скоростью v ?

Задача 69.2. Стержень AB собственной длины l_0 скользит со скоростью v вдоль стенки, имеющей отверстие той же ширины l_0 (рис. 69.3). В тот момент, когда стержень поравнялся с отверстием, он получает извне некоторый импульс по направлению к стенке и проходит через отверстие. Как будет выглядеть этот процесс в системе отсчета Σ' , движущейся вдоль стенки со скоростью v *?

Задача 69.3. Два электрона помещены в постоянное электрическое поле E плоского конденсатора. В момент времени $t=0$ электроны неподвижны и расстояние между ними равно l . Каково расстояние между электронами в момент, когда они приобретут скорость v ?

§ 70. ИЗМЕНЕНИЕ ХОДА ДВИЖУЩИХСЯ ЧАСОВ

Для измерения хода часов C' , движущихся со скоростью v относительно неподвижной системы отсчета Σ , свяжем с ними систему отсчета Σ' и сравним их показания с показаниями синхронизованных часов C_1 и C_2 , помещенных соответственно в точках x_1 и x_2

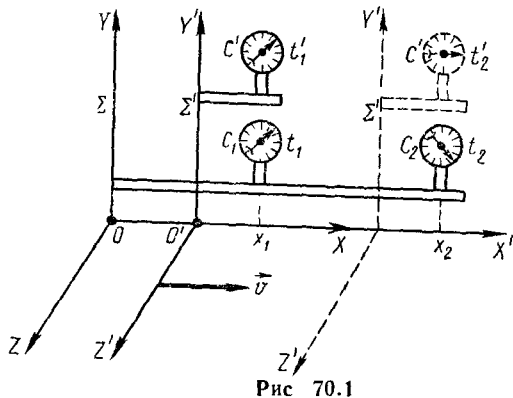


Рис. 70.1

системы Σ . Сравнение будем производить в те моменты, когда часы C' проходят через данные точки (рис. 70.1). Пусть в эти моменты показания часов C_1 и C_2 равны соответственно t_1 и t_2 , а показания часов C' — t'_1 и t'_2 . Вводя соответствующие промежутки времени ** $\tau_0 = t_2 - t_1$ и $\tau = t'_2 - t'_1$ и замечая, что в системе Σ' положение часов C' не из-

* Стержень считать безынерционным и неупругим.

** τ_0 обычно называется собственным временем подвижной системы отсчета.

меняется, т. е. $x'_2 = x'_1$, из (69.4) выводим $t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1)$, или

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (70.1)$$

Таким образом, промежуток времени, отмечаемый движущимися часами, оказывается меньшим, т. е. ход часов замедляется. Это означает, что в неподвижной системе отсчета все процессы в движущихся объектах протекают замедленно. Вследствие равноправия систем Σ и Σ' этот эффект должен быть обратимым, т. е. не только ход часов C' замедляется по отношению к ходу часов C системы Σ , но и, наоборот, наблюдение в системе Σ' должно показать замедление хода часов C по отношению к ходу часов C' . Непротиворечивость этого утверждения можно пояснить следующим образом.

При измерении хода часов C системы Σ из движущейся системы Σ' мы должны иметь в Σ' двое часов C'_1 и C'_2 , расположенных в некоторых точках x'_1 и x'_2 , и сравнивать их показания с показаниями часов C в те моменты, когда положения последних суть x'_1 и x'_2 (рис. 70.2). Поскольку эта процедура не отличается от предыдущей, проделанной в системе Σ , то неудивительно, что получается тот же результат, что и в (70.1).

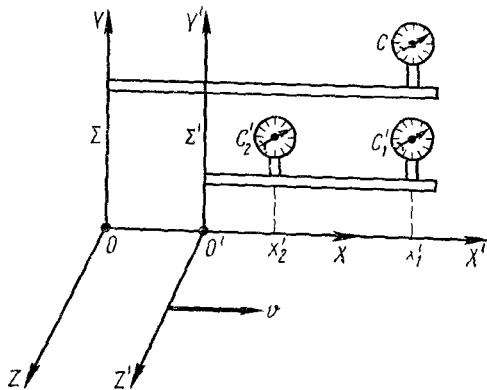


Рис. 70.2

Как видно, все вновь сводится к относительности одновременности пространственно-разобщенных событий: совпадающие показания часов C'_1 и C'_2 не будут таковыми в системе Σ , и, наоборот, совпадающие показания часов C_1 и C_2 оказываются различными в движущейся системе отсчета Σ' . Обратимый характер соотношения (70.1) наглядно иллюстрируется следующими задачами.

Задача 70.1 Часы движутся вдоль оси X системы Σ со скоростью u . Каков их ход при измерении в системе Σ' , движущейся относительно Σ со скоростью v ?

Задача 70.2. Выберем в качестве модели часов цилиндрическую полость высотой l с отражающими стенками, между которыми циркулирует световой импульс. Период колебаний для этих часов, очевидно, равен $\tau = 2l/c$. Показать, что если часы движутся со скоростью v (рис. 70.3), то период колебаний вследствие изменения формы полости станет равным $\tau' = \gamma 2l/c$

Как мы убедились, эффект замедления хода движущихся часов можно получить из эффекта сокращения движущихся масштабов, и поэтому относительный, обратимый характер обоих эффектов обусловлен одной и той же причиной — относительностью одновременности пространственно-разобщенных событий.

Формула (70.1) впервые была экспериментально проверена при исследовании космического излучения. В верхних слоях атмосферы оно представляет собой в основном быстрые протоны. При их торможении происходит интенсивное рождение более легких заряженных частиц, в частности электронов e^- , позитронов e^+ и μ^\pm -мезонов. Последние нестабильны и распадаются по закону

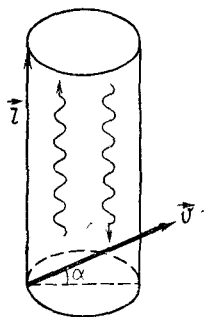
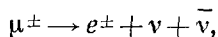


Рис. 70.3

переходя в пару нейтрино-антинейтрино $\nu\bar{\nu}$ и электрон (позитрон). Период полураспада для медленных μ -мезонов составляет примерно $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ с. За это время μ -мезоны, даже если бы они двигались со скоростью света, сумели бы проникнуть в атмосферу лишь на глубину $l = c\tau_0 \approx 0,66$ км, т. е. не достигли бы поверхности Земли. На самом же деле интенсивный поток быстрых μ -мезонов обнаруживается и вблизи Земли, что говорит об увеличении времени жизни быстрых μ -мезонов по сравнению с медленными.

Замедление времени, выражаемое формулой (70.1), повседневно проверяется при измерениях времен жизни нестабильных элементарных частиц, порождаемых в экспериментах с высокоэнергичными частицами, получаемыми на ускорителях.

§ 71. ПАРАДОКС ЧАСОВ

В предыдущем параграфе мы установили, что эффект замедления хода часов, равномерно движущихся относительно системы отсчета наблюдателя, сам по себе еще не является парадоксальным, так как объясняется относительностью одновременности пространственно-разобщенных событий. Однако забвение этого обстоятельства или слишком вольное с ним обращение иногда приводят к противоречию, обычно формулируемому в виде *парадокса часов*, или *парадокса близнецов*. Суть его состоит в следующем.

Пусть имеются двое часов A и B , причем с часами A связана инерциальная система отсчета Σ , считающаяся неподвижной. Часы B первоначально находились вместе с часами A , но затем были отнесены от них на достаточно большое расстояние l и вновь возвращены к часам A . Для простоты допустим, что часы B удалялись и возвращались с одной и той же постоянной скоростью v , а время, в течение которого их скорость изменялась, мало по сравнению с $2l/v$ (рис. 71.1).

В этом приближении время путешествия часов B , измеренное часами A , очевидно, равно

$$\tau = 2l/v. \quad (71.1)$$

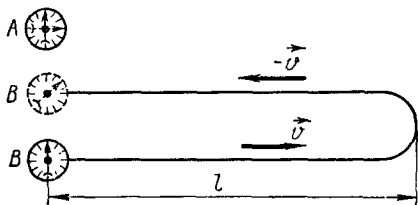


Рис. 71.1

Между тем часы B [см. (70.1)] отсчитают время

$$\tau_0 = \tau(1 - v^2/c^2)^{1/2}, \quad (71.2)$$

если считать, что испытываемое ими ускорение мало и почти не влияет на их ход. Следовательно, по возвращении из путешествия показания часов B будут меньше показаний часов A на

$$\Delta\tau = \tau - \tau_0 = \frac{2l}{v} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right). \quad (71.3)$$

Если расстояние l достаточно велико, то это время может быть весьма значительным даже при движении с нерелятивистской скоростью $v \ll c$. Действительно, в этом случае

$$\Delta\tau \approx lv/c^2. \quad (71.4)$$

Парадокс возникает, если в соответствии с принципом относительности повторить рассуждения, принимая неподвижными не часы A , а часы B . Тогда представляется, что на то же самое время $\Delta\tau$ показания часов A должны быть меньше показаний часов B . Но в действительности отстать должны лишь вполне определенные часы, поскольку в конце эксперимента часы A и B оказываются в одной точке и связь их показаний является реальным фактом, не зависящим от процедуры измерения.

Если меньшими оказались показания часов B , то это означает, что в системе Σ' , связанной с ними, все процессы, в том числе и биологические, шли замедленно. Поэтому если одного из двух близнецов поместить в систему Σ , а другого — в Σ' , то второй близнец вернется из путешествия более молодым, чем первый. Однако при выборе в качестве исходной системы Σ' более молодым должен оказаться именно первый близнец.

Парадокс разрешается тем, что в действительности системы Σ и Σ' неравноправны, ибо система Σ' неинерциальна вследствие изменения скорости часов B . Поэтому при описании эксперимента в системе Σ' нельзя уже использовать формулу (70.1), выведенную в предположении инерциальности системы отчета наблюдателя. При торможении часов B , очевидно, должна быть но-новому произведена синхронизация часов в системе Σ' и возникшее таким образом расогласование, как нетрудно видеть, приведет к замедлению хода часов B по сравнению с часами A .

Чтобы в этом убедиться, установим в системе Σ' двое часов B и B' , разделенных расстоянием $l\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (именно на такое расстояние в системе Σ' должны удалиться часы A), показания которых мы будем сравнивать с показаниями часов A . Вследствие симметрии процесса рассмотрим только первую его половину, когда часы удаляются друг от друга и тормозятся (рис. 71.2). Пока система Σ' движется с постоянной скоростью v и является тем самым инерци-

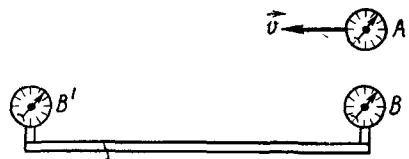


Рис 71.2

альной, показания часов B и B' , измеренные в системе Σ , должны различаться на Δt , определяемое формулой (69.4):

$$\Delta t = \gamma l (1 - v^2/c^2)^{1/2} v/c^2 = lv'/c^2. \quad (71.5)$$

Именно это рассогласование и должно быть учтено при торможении системы Σ' . В самом деле, в момент торможения часы B' , очевидно, должны показывать время $\tau'_0 = (l/v) \sqrt{1 - v^2/c^2}$, тогда как часы A , совмещенные с ними, в соответствии с формулой (70.1) должны были бы показывать время $\tau' = (l/v)(1 - v^2/c^2)$. Однако, как мы уже выяснили, при торможении системы Σ' пользоваться этой формулой нельзя, ибо синхронизацию часов B и B' необходимо произвести по-новому. Поэтому истинное показание часов A в момент торможения отличается от τ' именно на величину рассогласования (71.5) и равно

$$\tau' + \Delta t = l/v. \quad (71.6)$$

Отсюда легко вывести, что разность показаний часов A и B с учетом второй половины процесса вновь описывается формулой (71.3).

Совсем недавно* этот эффект был подтвержден прямыми опытами, в которых сравнивались показания цезевых часов, облетевших вокруг Земли на реактивном самолете, и таких же часов, остававшихся на Земле.

§ 72. ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Пространство и время всегда выступают неизменными спутниками при описании физических процессов. Поэтому мысль об их объединении в единое четырехмерное многообразие возникла довольно давно. Еще в 1764 г. Ж. А. Даламбер писал об этом в своей статье «Размерность» во французской энциклопедии. Однако геометрическое описание такого многообразия во времена Даламбера выглядело бы очень искусственно, так как при своем физическом обосновании оно могло опираться только на классическую механику и лежащий в ее основе принцип относительности Галилея. Замечая, что относительно преобразований Галилея остаются инвариантными как расстояние между двумя точками $R = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, так и промежуток времени между двумя событиями $T = t_2 - t_1$, в качестве «расстояния» между двумя пространственно-временными точками (t_1, \mathbf{r}_1) и (t_2, \mathbf{r}_2) можно было бы взять некоторую положительную функцию R и T . В частности, выбор «расстояния» в виде

$$s^{\text{евкл}} = (R^2 + \alpha^2 T^2)^{1/2}, \quad (72.1)$$

где α — некоторая постоянная с размерностью скорости, отвечал бы *евклидову* варианту геометрии пространства-времени. Физический

* Hafele J. C., Keating R. E. Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains—Science, 1972, 177, n° 4044, p. 168.

смысл постоянной α в этой схеме остается неясным, что и подтверждает ее искусственность.

Совершенно в ином свете предстает эта проблема, если привлечь принцип относительности Эйнштейна. Оказывается, что, хотя величины R и T изменяются при преобразованиях Лоренца, из них единственным образом строится инвариантная квадратичная форма

$$s^2 = c^2 T^2 - R^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - |r_2 - r_1|^2. \quad (72.2)$$

Задача 72.1. Убедиться в инвариантности квадратичной формы (72.2) при преобразованиях Лоренца.

Опираясь на этот факт, известный геометр Г. Минковский построил новую геометрию пространства-времени. Выступая в 1908 г. в Кельне на собрании немецких естествоиспытателей и врачей*, он предложил в качестве «расстояния» между двумя пространственно-временными точками взять величину

$$s = [c^2 (t_2 - t_1)^2 - |r_2 - r_1|^2]^{1/2}, \quad (72.3)$$

получившую название *интервала*. Поскольку фундаментальная форма (72.2) является знакопеременной, то геометрия Минковского существенно отличается от четырехмерной евклидовой геометрии и, чтобы отметить это различие, часто называется *псевдоевклидовой*.

По терминологии Минковского, пространственно-временное многообразие, т. е. совокупность всех возможных значений x, y, z, t , называется *миром*, а отдельное событие, происходящее в пространственной точке x, y, z в момент времени t , — *мировой точкой*. Множество мировых точек, изображающее движение отдельной материальной точки, называется *мировой линией* этой точки.

В геометрии Минковского интервал s , связывающий два события, т. е. две мировые точки, может быть действительной или мнимой величиной в зависимости от знака квадратичной формы (72.2). В связи с этим выделим следующие качественно различные интервалы:

- 1) *временноподобный* ($s^2 > 0$);
- 2) *пространственно-подобный* ($s^2 < 0$);
- 3) *нулевой* ($s^2 = 0$).

Происхождение этих названий связано с тем, что вследствие инвариантности интервала при преобразованиях Лоренца существует такая система отсчета, в которой при $s^2 > 0$ оказывается $R = 0$ и $s = cT$, т. е. длина интервала измеряется при помощи часов. Аналогично, при $s^2 < 0$ существует такая система отсчета, в которой $T = 0$, но $R \neq 0$, т. е. длина интервала измеряется масштабной линейкой.

События, разделенные пространственно-подобным интервалом, очевидно, не могут быть связаны причинно. В самом деле, если в некоторой системе отсчета $T = 0$, но $R \neq 0$, то сигнал, связывающий эти два события, должен был бы распространяться с бесконечной скоростью, что невозможно (см. § 68).

* Минковский Г. Пространство и время.— В сб.: Принцип относительности. М., 1973, с. 167.

Если же события разделены времениподобным интервалом, то они могут быть связаны причинно. Это позволяет ввести порядок следования событий, остающийся неизменным в любой системе отсчета, несмотря на относительность одновременности.

Выясним теперь, что представляют собой в геометрии Минковского преобразования Лоренца. Вводя обозначения

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (72.4)$$

и полагая

$$v/c \equiv \beta = \operatorname{th} \psi, \quad (72.5)$$

запишем преобразования Лоренца, отвечающие движению системы отсчета вдоль оси X^1 , в таком виде:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \operatorname{ch} \psi x^0 - \operatorname{sh} \psi x^1, \\ x'^1 &= -\operatorname{sh} \psi x^0 + \operatorname{ch} \psi x^1, \\ x'^2 &= x^2, \quad x'^3 = x^3, \end{aligned} \quad (72.6)$$

где, очевидно,

$$\operatorname{ch} \psi = \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \operatorname{sh} \psi = \beta\gamma. \quad (72.7)$$

Не рассматривая для простоты координаты x^2 и x^3 , изобразим преобразование (72.6) на обычной декартовой плоскости X^0, X^1 . Плоскость X^0, X^1 , на которой расстояние между двумя точками измеряется интервалом, называется *плоскостью Минковского*. Очевидно, преобразования (72.6) представляют собой переход от прямоугольной системы координат к косоугольной с дополнительным растяжением. Поскольку при таком переходе каждая точка плоскости занимает некоторое положение на соответствующей ей гиперболе

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = \operatorname{const}, \quad (72.8)$$

то преобразования (72.6) иногда называют *гиперболическим поворотом*. Так как $\operatorname{ch} \psi = \cos i\psi$ и $\operatorname{sh} \psi = -i \sin i\psi$, то гиперболический поворот можно еще представить в виде поворота на мнимый угол $\alpha = i\psi$ в плоскости X^1, X^1 , где $x^4 \equiv ix^0$:

$$x'^4 = \cos \alpha x^4 - \sin \alpha x^1, \quad x'^1 = \sin \alpha x^4 + \cos \alpha x^1. \quad (72.9)$$

На плоскости Минковского могут быть наглядно проиллюстрированы все следствия преобразований Лоренца. Но предварительно полезно выяснить некоторые особенности псевдоевклидовой геометрии Минковского. Прежде всего отметим, что роль окружностей на плоскости Минковского играют гиперболы $s^2 = \operatorname{const}$, т. е. кривые вида

$$(x^0 - a)^2 - (x^1 - b)^2 = \pm d^2,$$

с центром в точке (a, b) и с минимальным расстоянием до него d .

Задача 72.1. Показать, что во всяком треугольнике ABC на плоскости Минковского, вершины которого соединены интервалами одного рода (либо пространственно-подобными, либо времениподобными), большая сторона превосходит сумму двух других. Например,

$$|AB| > |BC| + |CA|. \quad (72.10)$$

Изучим теперь свойства гиперболического поворота (72.6). На плоскости Минковского X^0, X^1 новые оси координат X'^0 и X'^1 имеют вид прямых

$$x^0 = \beta^{-1}x^1, \quad x^0 = \beta x^1,$$

причем биссектрисой угла между ними является прямая $x^0 = x^1$ (рис. 72.1). Пусть единичные отрезки $|OA|$ и $|OB|$ изображают соответственно масштабы измерения времени и длины в неподвижной системе отсчета Σ . При гиперболическом повороте точка A перейдет в точку C , лежащую на гиперболе $(x^0)^2 - (x^1)^2 = 1$, а точка B — в точку D , лежащую на гиперболе $(x^0)^2 - (x^1)^2 = -1$. Так как гиперболы играют роль окружностей, то $|OC| = |OA| = 1$ и $|OD| = |OB| = 1$, т. е. новыми масштабами (в движущейся системе отсчета Σ') будут единичные отрезки $|OC|$ и $|OD|$.

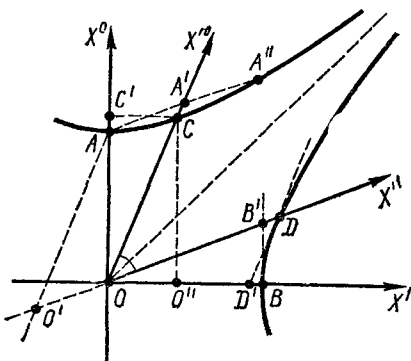


Рис. 72.1

Задача 72.2. Показать, что хорды типа AA'' (рис. 72.1), проведенные параллельно оси X'^1 , пересекаются осью X'^0 пополам (аналогичным свойством обладает, очевидно, и ось X'^1 по отношению к хордам гиперболы BD).

Из указанной теоремы, в частности, вытекает, что касательная к гиперболе в точке C параллельна оси X'^1 . Нетрудно видеть, что эта теорема является псевдоевклидовым вариантом известной теоремы евклидовой геометрии, гласящей, что диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. В самом деле, гипербола ACA'' играет в псевдоевклидовой геометрии роль окружности с центром в точке O , а ось X'^0 является ее диаметром. Следовательно, отрезки $|AA''|$ и $|OA''|$ должны быть ортогональными в псевдоевклидовом смысле. Это действительно так, поскольку их скалярное произведение [см. (72.6)] исчезает. Забегая несколько вперед, укажем, что псевдоевклидово скалярное произведение двух векторов $a = (a^0, a^1)$ и $b = (b^0, b^1)$ на плоскости Минковского X^0, X^1 определяется следующим образом (см. § 73):

$$(ab) \equiv a^0 b^0 - a^1 b^1. \quad (72.11)$$

Рассмотрим теперь на плоскости Минковского эффекты сокращения длин движущихся масштабов и замедления хода движущихся часов. Начнем с измерения длин. Пусть единичный масштаб $|OB|$ (рис. 72.1) неподвижен в системе Σ , т. е. мировые линии его концов суть прямые $x^1 = 0$ (ось X^0) и $x^1 = 1$ (касательная к гиперболе в точке B). При измерении длины этого масштаба в системе Σ' мы сравниваем его с масштабом $|OD|$ в момент $x^0 = 0$ (ось X'^1). Пересечение мировой линии $x^1 = 1$ и оси X'^1 дает точку B' . Таким образом, измеренная длина есть $|OB'|$. Подставляя в (72.6) $x^0 = 0$, $x^1 = 1$, находим $x'^1 = |OB'| = \gamma^{-1}$ в соответствии с (69.5).

Чтобы убедиться в обратимости этого эффекта, рассмотрим единичный масштаб $|OD|$ в системе Σ' . Мировые линии его концов

суть $x'^1 = 0$ (ось X'^0) и $x'^1 = 1$ (касательная к гиперболе в точке D). При измерении длины этого масштаба в системе Σ мы сравниваем его с соответствующим масштабом $|OB|$ в момент $x^0 = 0$ (ось X^1). Пересечение мировой линии $x'^1 = 1$ и оси X^1 дает точку D' . Подставляя в (72.6) $x'^1 = 1$ и $x^0 = 0$, получаем $|OD'| = \gamma^{-1}$ в соответствии с (69.2).

Перейдем теперь к измерению промежутков времени. Возьмем часы в системе Σ (мировая линия — ось X^0) и для измерения их хода в системе Σ' установим в последней еще двое часов (мировые линии — прямая $O'A$ и ось X'^0). Пересечение мировых линий неподвижных и движущихся часов и определяет показание неподвижных часов — отрезок времени $|OA| = 1$, который, очевидно, нужно сравнивать с отрезком $|OA'|$ — показанием движущихся часов. Отрезок $|OA'| = |O'A|$ найдем из (72.6), подставляя туда $x'^1 = 0$ и $x^0 = 1$. При этом получим $|OA'| = x'^0 = \gamma$ в соответствии с (70.1).

Если же имеются часы в системе Σ' (мировая линия — ось X'^0), то для измерения их хода в системе Σ установим в последней двое часов (мировые линии — ось X^0 и прямая $O''C$). Пересечение указанных мировых линий и определяет показание движущихся часов — отрезок $|OC| = 1$, который следует сравнить с $|OC'|$ — показанием неподвижных часов. Отрезок $|OC'|$ найдем из (72.6), подставляя туда $x'^1 = 0$ и $x'^0 = 1$, что дает $|OC'| = x^0 = \gamma$, как и должно быть.

На плоскости Минковского наглядно разъясняется и парадокс часов. На рис. 72.2 изображены мировые линии часов A ($OB'B''A$) и часов B (OBA). Длины этих мировых линий, деленные на скорость света, и определяют показания часов A и B . Поскольку отрезки, образующие треугольник OAB , времениподобны, то можно применить неравенство (72.10), из которого выводим, что

$$|AO| > |AB| + |BO|, \quad (72.12)$$

т. е. часы B покажут меньшее время, чем часы A . В нашем примере (рис. 72.2) $|AO| = 7$, $|AB| + |BO| = 6$, причем линии синхронизации (одновременности) для часов A изображены штрих-пунктиром, а для часов B — штрихом.

Поскольку неравенство (72.12) содержит лишь интервалы, т. е. имеет инвариантный характер, то эффект отставания часов B от часов A также инвариантен, т. е. должен наблюдаться в любой инерциальной системе отсчета. Однако система Σ' , связанная с часами B , неинерциальна, поэтому, строго говоря, парадокс часов может быть разрешен только в результате распространения понятия интервала на неинерциальные системы отсчета (неинерциальное движение тел), что достигается заменой (72.2) выражением для бесконечно малого интервала $ds = (c^2 dT^2 - dR^2)^{1/2}$.

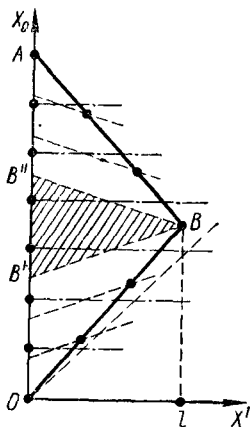


Рис. 72.2

Тем не менее на плоскости Минковского можно отчетливо увидеть, как проявляется этот эффект неинерциальности. В самом деле, на участке OB , где система Σ' инерциальна, ход часов A отстает от хода часов B , так как $|OB'| < |OB|$. Однако в окрестности точки B , где скорость системы Σ' изменяется, происходит поворот линий синхронизации часов B на угол $B'BB''$ и при этом возникает поправка $|B'B''|$ в оценке показаний часов A в системе Σ' . Ее учет и позволяет разрешить парадокс, так как, несмотря на дополнительное отставание хода часов A от хода часов B на участке BA ($|B'A| < |BA|$), окончательный результат определяется неравенством (72.12).

Здесь, пожалуй, уместно привести слова известного немецкого физика-теоретика *А. Зоммерфельда*, который в примечании к очередному изданию статьи Г. Минковского «Пространство и время»* писал: «Как отметил Минковский в одной из бесед со мною, элемент собственного времени dt не есть полный дифференциал. Таким образом, если соединить две мировые точки O и P двумя различными мировыми линиями 1 и 2, то $\int_1 dt \neq \int_2 dt$. Если первая мировая линия проходит параллельно оси t , вследствие чего первый переход в координатной системе, положенной в основу, означает покой, то легко видеть, что $\int_1 dt = t$, $\int_2 dt < t$ Для того чтобы можно было сравнивать движущиеся часы с часами, покоящимися в мировой точке P , первые, конечно, должны быть ускорены (путем изменения скоростей или направлений). Отставание движущихся часов указывает, следовательно, не столько на «движение», сколько на «ускоренное движение». Поэтому здесь нет противоречия с принципом относительности».

§ 73. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ

Преобразования Лоренца представляют собой действительные линейные преобразования координат x^0, x^1, x^2, x^3 , сопоставляемых каждой точке четырехмерного пространственно-временного континуума:

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}; \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (73.1)$$

При этом матрица преобразования Λ , называемая иногда *матрицей Лоренца*, для перехода к системе отсчета, движущейся вдоль оси X^1 , имеет вид

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (73.2)$$

* Минковский Г. Пространство и время. — В сб.: Принцип относительности, ОНТИ, 1935, с. 208—209.

где $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Обратное же преобразование осуществляется с помощью матрицы $\Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$. В дальнейшем для упрощения записи мы будем принимать правило суммирования Эйнштейна с условием, что латинские индексы i, j, k, l, \dots нумеруют пространственные координаты (компоненты) 1, 2, 3, а греческие $\mu, \nu, \sigma, \tau, \dots$ — пространственно-временные 0, 1, 2, 3.

Закон преобразования (73.1) можно положить в основу четырехмерной классификации всех физических величин совершенно аналогично тому, как это было сделано в трехмерном случае (см. приложение). Начнем с определения четырехмерного вектора (сокращенно—4-вектор). Именно: *контравариантными компонентами* 4-вектора a назовем совокупность четырех величин a^0, a^1, a^2, a^3 , которые при преобразовании Лоренца изменяются так же, как координаты x^μ , т. е. по закону

$$a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu. \quad (73.3)$$

Контравариантными компонентами 4-тензора ранга n назовем величины $T^{\nu_1 \dots \nu_n}$, которые при преобразованиях Лоренца изменяются так же, как произведения соответствующих компонент 4-векторов:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\mu_n}_{\nu_n} T^{\nu_1 \dots \nu_n}. \quad (73.4)$$

Используем теперь важную особенность физического пространства-времени, открытую Минковским и состоящую в том, что геометрия пространственно-временного континуума является псевдоевклидовой. Согласно Минковскому, мерой расстояния между двумя близкими точками x и $x + dx$ является элементарный интервал ds , квадрат которого равен

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (73.5)$$

Здесь мы ввели псевдоевклидов четырехмерный метрический тензор $g_{\mu\nu}$, определяемый диагональной матрицей

$$\|g_{\mu\nu}\| = \text{diag}[1, -1, -1, -1] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (73.6)$$

и, очевидно, совпадающий со своим обратным:

$$(g^{-1})^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}.$$

Задача 73.1. Показать, что метрический тензор (73.6) инвариантен при преобразованиях Лоренца.

С помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}$ можно ввести *ковариантные компоненты* 4-вектора a , полагая

$$a_\mu \equiv g_{\mu\nu} a^\nu, \quad (73.7)$$

т. е. $a_0 = a^0$, $a_i = -a^i$. Закон преобразования ковариантных компонент следует из инвариантности интервала относительно преобразо-

ваний Лоренца. Вводя соответствующую матрицу преобразования $\tilde{\Lambda}$:

$$a'_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu^\nu a_\nu, \quad (73.8)$$

с учетом (73.7) имеем

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = dx'_\mu dx'^\mu = dx_\nu \tilde{\Lambda}_\mu^\nu \Lambda_\sigma^\mu dx^\sigma.$$

Отсюда

$$\tilde{\Lambda}_\mu^\nu \Lambda_\sigma^\mu = \delta_\sigma^\nu = \begin{cases} 1, & \nu = \sigma, \\ 0, & \nu \neq \sigma, \end{cases} \quad (73.9)$$

т. е. ковариантные компоненты преобразуются с помощью обратной транспонированной матрицы Лоренца $\tilde{\Lambda} = [\Lambda^{-1}]^T$. Из этого результата сразу же следует, что псевдоевклидово скалярное произведение двух 4-векторов $a = (a^0, \mathbf{a})$ и $b = (b^0, \mathbf{b})$, определенное как

$$(ab) \equiv a^0 b^0 - (\mathbf{a}\mathbf{b}) = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu, \quad (73.10)$$

является инвариантным при преобразованиях Лоренца.

В зависимости от знака своего квадрата $a^2 \equiv (aa)$ 4-вектор a называется *временеподобным* ($a^2 > 0$), *пространственно-подобным* ($a^2 < 0$) или *изотропным* ($a^2 = 0$).

Задача 73.2. Показать, что два ортогональных изотропных 4-вектора параллельны, т. е. из $a^2 = b^2 = (ab) = 0$ следует, что $a^\mu = \lambda b^\mu$, где λ — некоторый скаляр.

По аналогии с (73.7) нетрудно определить ковариантные компоненты тензора ранга n :

$$T_{\mu_1 \dots \mu_n} = g_{\mu_1 \nu_1} \dots g_{\mu_n \nu_n} T^{\nu_1 \dots \nu_n}, \quad (73.11)$$

а также его смешанные компоненты:

$$T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_l} = g_{\nu_1 \sigma_1} \dots g_{\nu_m \sigma_m} T^{\sigma_1 \dots \sigma_m \mu_1 \dots \mu_l}, \quad (73.12)$$

где $n = m + l$. Закон их преобразования очевиден:

$$T'_{\mu_1 \dots \mu_n} = \tilde{\Lambda}_{\mu_1}^{\nu_1} \dots \tilde{\Lambda}_{\mu_n}^{\nu_n} T_{\nu_1 \dots \nu_n}, \quad (73.13)$$

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_m} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots \tilde{\Lambda}_{\nu_m}^{\sigma_m} \Lambda_{\tau_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\tau_l}^{\mu_l} T^{\tau_1 \dots \tau_l}_{\sigma_1 \dots \sigma_m}.$$

Из структуры (73.6) метрического тензора $g_{\mu\nu}$ вытекает, что при опускании или подъеме некоторого индекса ν компонента тензора не меняется, если $\nu = 0$, и меняет знак, если $\nu = i = 1, 2, 3$.

Тензор ранга $n \geq 2$ называется либо *симметричным*, либо *антисимметричным* по некоторым индексам ν_r и ν_s , если при их перестановке его компоненты не меняются либо соответственно меняют знак, т. е.

$$T^{\nu_1 \dots \nu_r \dots \nu_s \dots \nu_n} = \pm T^{\nu_1 \dots \nu_s \dots \nu_r \dots \nu_n}.$$

Задача 73.3. Показать, что при преобразованиях Лоренца свойство симметрии или антисимметрии тензора сохраняется. Подсчитать число независимых компонент симметричного тензора ранга n .

Имея два тензора M^{\dots} и N^{\dots} рангов m и n соответственно, можно образовать новый тензор ранга $m+n$ с компонентами

$$T^{\mu_1 \dots \mu_m \nu_1 \dots \nu_n} = M^{\mu_1 \dots \mu_m} N^{\nu_1 \dots \nu_n}.$$

Эта операция называется *внешним* или *тензорным умножением*. Ее можно дополнить операцией *свертки*, когда некоторые верхние индексы полагаются равными соответствующим нижним индексам и по ним производится суммирование:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_m \nu_1 \dots \nu_n} = M^{\mu_1 \dots \mu_{m-s} \alpha_1 \dots \alpha_s} N_{\nu_1 \dots \nu_{n-s} \alpha_1 \dots \alpha_s}.$$

Очевидно, что каждая свертка уменьшает ранг тензора на 2. В частности, свертка в тензоре второго ранга приводит к скалярной величине, называемой *шпуром* или *следом* этого тензора:

$$T^{\nu}_{\nu} \equiv \text{Sp } \hat{T}.$$

Построенная нами четырехмерная классификация физических величин, т. е. представление их в виде компонент релятивистских тензоров различных рангов*, не является, однако, полной, поскольку мы ограничились *собственными преобразованиями Лоренца*, представляющими собой лишь частный случай общих преобразований Лоренца. Последние обычно определяются как линейные преобразования вида (73.1), оставляющие инвариантной фундаментальную квадратичную форму (73.5). Очевидно, что *общие преобразования Лоренца* включают в себя помимо чистых преобразований Лоренца типа (73.2) еще *трехмерные повороты*, задаваемые ортогональными матрицами вида

$$\Lambda_0^0 = 1, \quad \Lambda_0^i = \Lambda_i^0 = 0, \quad |\Lambda| \equiv \det \Lambda = 1,$$

а также *отражения пространства и времени*, для которых соответственно

$$\Lambda = \pm \text{diag}[1, -1, -1, -1] = \pm |g_{\mu\nu}|.$$

Задача 73.4. Вывести из инвариантности ds^2 , что $|\Lambda| = \pm 1$ и

$$(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2 \geq 1. \quad (73.14)$$

В связи с неравенством (73.14) общие преобразования Лоренца разделяются на два класса:

- а) *ортохронные* ($\Lambda_0^0 \geq 1$), сохраняющие направление времени;
- б) *антихронные* ($\Lambda_0^0 \leq -1$), изменяющие направление времени на обратное.

В большинстве физических рассмотрений обычно ограничиваются ортохронными преобразованиями Лоренца, которые в свою очередь делятся на *собственные преобразования Лоренца*, отвечающие $|\Lambda| = +1$, и *несобственные преобразования Лоренца*, выделенные условием $|\Lambda| = -1$ и включающие отражение пространства.

* При этом надо, конечно, иметь в виду, что многие физические величины, например углы, не являясь сами компонентами релятивистских тензоров, тем не менее представляются функциями от них.

Поскольку дважды повторенное пространственное отражение эквивалентно тождественному преобразованию, т. е. $\Lambda^2 = I \equiv \equiv \text{diag}[1, 1, 1, 1]$, то поведение любой физической величины при пространственном отражении допускает лишь две возможности: либо она ведет себя при этом как соответствующая компонента тензора, либо приобретает дополнительный знак минус, преобразуясь как компонента *псевдотензора* [см. (1П.9)]. При классификации физических величин относительно пространственных отражений полезную роль играет четырехмерный полностью антисимметричный псевдотензор Леви-Чивита $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$, меняющий знак при перестановке любых двух индексов и связанный с трехмерным символом Леви-Чивита ε^{ijk} условием

$$\varepsilon^{0ijk} = \varepsilon^{ijk} \quad (73.15)$$

Задача 73.5. Показать, что $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ инвариантно относительно ортохронных преобразований Лоренца

Если имеется некоторый несимметричный тензор не выше четвертого ранга, то его можно свернуть с $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$. Полученный таким путем новый псевдотензор называется *дуальным* исходному, а сама операция — *дуальным сопряжением*. Так, скаляру φ , вектору φ^μ и антисимметричным тензорам $\varphi^{\mu\nu}$, $\varphi^{\mu\nu\sigma}$, $\varphi^{\mu\nu\sigma\tau}$ можно сопоставить дуальные им псевдовеличины:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\mu\nu\sigma\tau} &= \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \varphi, & \tilde{\varphi}_{\mu\nu\sigma} &= \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \varphi^\tau, & \tilde{\varphi}_{\mu\nu} &= \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \varphi^{\sigma\tau} / 2, \\ \tilde{\varphi}_\mu &= \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \varphi^{\nu\sigma\tau} / 3!, & \tilde{\varphi} &= \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \varphi^{\mu\nu\sigma\tau} / 4!. \end{aligned}$$

Важным примером дуального сопряжения является вычисление объема 4-параллелепипеда $\Omega(a, b, c, d)$, построенного на четырех линейно независимых векторах a, b, c, d :

$$\Omega(a, b, c, d) = -\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} a^\mu b^\nu c^\sigma d^\tau = \begin{vmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & a^3 \\ b^0 & b^1 & b^2 & b^3 \\ c^0 & c^1 & c^2 & c^3 \\ d^0 & d^1 & d^2 & d^3 \end{vmatrix}. \quad (73.16)$$

Задача 73.6. Доказать справедливость соотношения

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \varepsilon_{\lambda\rho\xi\eta} = - \begin{vmatrix} \delta_\lambda^\mu & \delta_\rho^\mu & \delta_\xi^\mu & \delta_\eta^\mu \\ \delta_\lambda^\nu & \delta_\rho^\nu & \delta_\xi^\nu & \delta_\eta^\nu \\ \delta_\lambda^\sigma & \delta_\rho^\sigma & \delta_\xi^\sigma & \delta_\eta^\sigma \\ \delta_\lambda^\tau & \delta_\rho^\tau & \delta_\xi^\tau & \delta_\eta^\tau \end{vmatrix} \quad (73.17a)$$

и вывести из него последовательными свертками тождества:

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \varepsilon_{\lambda\rho\xi\tau} = - \begin{vmatrix} \delta_\lambda^\mu & \delta_\rho^\mu & \delta_\xi^\mu \\ \delta_\lambda^\nu & \delta_\rho^\nu & \delta_\xi^\nu \\ \delta_\lambda^\sigma & \delta_\rho^\sigma & \delta_\xi^\sigma \end{vmatrix}, \quad (73.17b)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \varepsilon_{\lambda\rho\sigma\tau} = 2 (\delta_\rho^\mu \delta_\lambda^\nu - \delta_\lambda^\mu \delta_\rho^\nu), \quad (73.17b)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \varepsilon_{\lambda\nu\sigma\tau} = -6\delta_\lambda^\mu. \quad (73.17g)$$

§ 74. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Основные операции трехмерного векторного анализа легко распространяются и на четырехмерный случай. Так, четырехмерным аналогом оператора Гамильтона ∇ является оператор дифференцирования (4-градиент)

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (74.1)$$

который при преобразованиях Лоренца ведет себя как 4-вектор, в чем можно легко убедиться*, рассмотрев дифференциал скалярной функции

$$d\varphi = dx^\mu \partial\varphi/\partial x^\mu = dx^\mu \partial_\mu \varphi.$$

Очевидно, что величины $\partial_\mu \varphi$ являются ковариантными компонентами 4-вектора. Векторные свойства 4-градиента сохраняются и в случае, когда он применяется к произвольному тензору. Объясняется это тем, что матрица преобразований Λ не зависит от координат:

$$\begin{aligned} \partial'_\mu T^{\nu_1 \dots \nu_n} (x') &= \partial_\nu (\Lambda_{\nu_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\nu_n}^{\mu_n} T^{\nu_1 \dots \nu_n} (x)) \partial x^\nu / \partial x'^\mu = \\ &= \tilde{\Lambda}_\nu^\mu \Lambda_{\nu_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\nu_n}^{\mu_n} \partial_\nu T^{\nu_1 \dots \nu_n} (x). \end{aligned}$$

Производя свертку в выражении $\partial_\mu T^{\mu \dots}$, получаем четырехмерный аналог дивергенции

$$\partial_\mu T^\mu \equiv \text{Div } T \dots. \quad (74.2)$$

В результате этой операции возникает новый тензор, ранг которого на единицу меньше. Так, в применении к вектору получается скаляр ($\partial_\mu A^\mu = \text{inv}$), а в применении к тензору второго ранга — 4-вектор ($\partial_\mu T^{\mu\nu} = B^\nu$).

С помощью ∂_μ оператор Даламбера можно представить в виде

$$\square \equiv - \partial_\mu \partial^\mu = - g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu. \quad (74.3)$$

Четырехмерным аналогом *ротора* некоторого 4-вектора A является антисимметричный тензор

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \equiv (\text{Rot } A)_{\mu\nu}. \quad (74.4)$$

Перейдем теперь к некоторым интегральным теоремам в четырехмерном случае. Прежде всего построим элементарный 4-объем $d\Omega$ как объем 4-параллелепипеда с направляющими 4-векторами cdt , dx , dy , dz :

$$d\Omega = - \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} cdt^\mu dx^\nu dy^\sigma dz^\tau. \quad (74.5)$$

Отсюда очевидна инвариантность 4-объема относительно собственных преобразований Лоренца. Если выбрать направляющие векторы ортогональными, положив

$$\begin{aligned} cdt^\mu &= (dx^0, 0, 0, 0); \quad dx^\mu = (0, dx^1, 0, 0); \\ dy^\mu &= (0, 0, dx^2, 0); \quad dz^\mu = (0, 0, 0, dx^3), \end{aligned}$$

* См. задачу 67.1.

то получим обычное выражение

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (74.6)$$

Задача 74.1. Убедиться в инвариантности 4-объема (74.6) при собственных преобразованиях Лоренца. Вывести отсюда инвариантность четырехмерной δ -функции:

$$\delta(x) \equiv \delta(x^0) \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3). \quad (74.7)$$

Соотношение (74.5) можно также переписать в виде

$$d\Omega = cd t^\mu d\sigma_\mu, \quad (74.8)$$

введя направленный элемент гиперповерхности

$$d\sigma_\mu \equiv -\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} dx^\nu dy^\sigma dz^\tau. \quad (74.9)$$

Поскольку все физические величины (заряд, масса, энергия, импульс и т. д.) получаются как интегралы по 3-объему от соответствующих плотностей, то чаще всего приходится иметь дело с пространственно-подобными гиперповерхностями, для которых псевдовектор $d\sigma_\mu$ является времениподобным, т. е. $d\sigma_\mu d\sigma^\mu > 0$. В таком случае можно ввести инвариантный элемент гиперповерхности (псевдоскаляр)

$$d\sigma \equiv (d\sigma_\mu d\sigma^\mu)^{1/2} \quad (74.10)$$

и записать $d\sigma_\mu$ в виде

$$d\sigma_\mu = n_\mu d\sigma, \quad (74.11)$$

где $n_\mu = d\sigma_\mu/d\sigma$ — единичный времениподобный вектор нормали к гиперповерхности.

Задача 74.2. В приложениях часто используется инвариантная трехмерная δ -функция $\delta(x|\sigma)$, заданная на пространственно-подобной гиперповерхности σ (с нормалью n_μ) и связанная с четырехмерной δ -функцией соотношением

$$\delta(x) = \delta(n_\mu x^\mu) \delta(x|\sigma). \quad (74.12)$$

Убедиться, что $\delta(x|\sigma)$ обладает обычным свойством δ -функции:

$$\int_\sigma f(x') \delta(x' - x|\sigma) d\sigma' = \begin{cases} 0, & x \notin \sigma; \\ f(x), & x \in \sigma, \end{cases}$$

и показать что $n^\mu \partial_\mu \delta(x|\sigma) = 0$.

Задача 74.3. Доказать справедливость следующего интегрального представления 4-градиента:

$$\partial_\mu = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \oint_\sigma d\sigma_\mu, \quad (74.13)$$

где σ — замкнутая гиперповерхность, охватывающая 4-объем Ω , стягивающийся в точку.

Из представления (74.13) вытекает важная в приложениях четырехмерная теорема Гаусса — Остроградского:

$$\int_\Omega \partial_\mu T^{\nu_1 \dots \nu_n} d\Omega = \oint_\sigma T^{\nu_1 \dots \nu_n} d\sigma_\mu, \quad (74.14)$$

где σ — замкнутая гиперповерхность, окружающая 4-объем Ω .

Задача 74.4. Доказать четырехмерную теорему Стокса:

$$\oint_C A_\mu dx^\mu = \int_S (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dS^{\mu\nu}, \quad (74.15)$$

где S — правоориентированная поверхность, натянутая на замкнутый контур C , $dS^{\mu\nu}$ — ее элемент, определяемый двумя бесконечно малыми касательными к S векторами dx и δx :

$$dS^{\mu\nu} = 2^{-1} (dx^\mu \delta x^\nu - dx^\nu \delta x^\mu).$$

Вышеперечисленных сведений вполне достаточно для формулировки законов электродинамики в ковариантной четырехмерной форме. Но прежде чем переходить к этой формулировке, выясним некоторые особенности релятивистской кинематики точки.

§ 75. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

В пространстве Минковского всякая движущаяся материальная точка изображается мировой линией (рис. 75.1). Поскольку элементом длины такой мировой линии является элементарный времениподобный интервал* $ds = (dx_\mu dx^\mu)^{1/2}$, то единичный касательный вектор к мировой линии имеет компоненты

$$dx^\mu/ds = dx^\mu / \sqrt{(dx^0)^2 - (dx)^2}. \quad (75.1)$$

Вспоминая, что собственное время τ в системе отсчета Σ' , связанной с материальной точкой, определяется длиной интервала

$$d\tau = ds/c = dt \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (75.2)$$

где u — трехмерная скорость точки с компонентами dx^i/dt , можно ввести 4-вектор U , имеющий размерность скорости и пропорциональный касательному вектору к мировой линии:

$$U^\mu \equiv c dx^\mu/ds = dx^\mu/d\tau. \quad (75.3)$$

Этот 4-вектор называется *четырёхмерной скоростью точки* и имеет следующие компоненты:

$$U^\mu = (U^0, \mathbf{U}) = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right). \quad (75.4)$$

В предельном случае медленных движений, когда $u \ll c$, получим

$$U^\mu \approx (c, \mathbf{u}),$$

т. е. 4-вектор U фактически сводится к трехмерной скорости \mathbf{u} и удовлетворяет, таким образом, принципу соответствия.

Очевидно, компоненты 4-скорости U^μ преобразуются по закону (73.3), т. е.

$$U'^0 = \gamma(U^0 - \beta U^1), \quad U'^1 = \gamma(U^1 - \beta U^0), \quad U'^2 = U^2, \quad U'^3 = U^3. \quad (75.5)$$

* Рассматривается частица, движущаяся со скоростью, меньшей скорости света.

Важным свойством четырехмерной скорости является постоянство ее длины:

$$U^2 = U_\mu U^\mu = (U^0)^2 - \mathbf{U}^2 = c^2. \quad (75.6)$$

Дифференцируя (75.6) по τ , найдем интересное соотношение

$$U_\mu dU^\mu/d\tau = 0, \quad (75.7)$$

выражающее факт ортогональности четырехмерных скорости и ускорения точки. Последнее тоже является 4-вектором и имеет следующие компоненты:

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = \left(\frac{(\mathbf{u}\mathbf{a})}{c(1-u^2/c^2)^2}, \frac{\mathbf{a}}{1-u^2/c^2} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{a}\mathbf{u})}{c^2(1-u^2/c^2)^2} \right), \quad (75.8)$$

где $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$ — трехмерное ускорение точки. В предельном случае медленных движений, очевидно,

$$dU^\mu/d\tau \approx (0, \mathbf{a}). \quad (75.9)$$

Задача 75.1. Убедиться в том, что 4-вектор ускорения пространственно-подобен.

§ 76. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Поскольку $\mathbf{U} = \mathbf{u}U^0/c$ [см. (75.4)], то из (75.5) вытекает следующий закон преобразования трехмерных скоростей:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \gamma^{-1}}{1 - u_x v/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z \gamma^{-1}}{1 - u_x v/c^2}. \quad (76.1)$$

Обратные преобразования получаются из (76.1) заменой $v \rightarrow -v$:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2}, \quad u_y = \frac{u'_y \gamma^{-1}}{1 + u'_x v/c^2}, \quad u_z = \frac{u'_z \gamma^{-1}}{1 + u'_x v/c^2}. \quad (76.2)$$

Иногда бывает удобной и векторная запись формул (76.2):

$$\mathbf{u} = [1 + (\mathbf{u}'\mathbf{v})/c^2]^{-1} [\gamma^{-1}\mathbf{u}' + \mathbf{v} + (1 - \gamma^{-1})(\mathbf{u}'\mathbf{v})\mathbf{v}/v^2]. \quad (76.3)$$

Если при $v \ll c$ из (76.3) вытекает нерелятивистский закон сложения скоростей ($\mathbf{u} \approx \mathbf{u}' + \mathbf{v}$), то в области $v \approx c$ законы евклидовой геометрии в пространстве скоростей оказываются уже несправедливыми*.

Из (76.3), в частности, следует, что если $v \rightarrow c$, то и $u \rightarrow c$. Иначе говоря, если складывать две скорости, близкие к скорости

* Знаменательно, что закон (76.3) сложения скоростей около 150 лет тому назад был исследован гениальным русским геометром *Н. И. Лобачевским*, доказавшим возможность логически непротиворечивого построения новой геометрии, в которой уже не выполняется постулат Евклида о параллельных. Тот удивительный факт, что законы абстрактной геометрии Лобачевского приложимы к физическому пространству скоростей в теории относительности, является еще одним подтверждением тесной взаимосвязи геометрии и физики: если в физике оказываются чрезвычайно плодотворными геометрические построения, то и сама геометрия нуждается в физическом обосновании. *Н. И. Лобачевский* был одним из самых последовательных и активных защитников этих взглядов.

света, то вновь получается околосветовая скорость. Здесь особенно отчетливо проявляется отклонение релятивистского закона сложения скоростей от нерелятивистского. Другой его особенностью является *некоммутативность*: результат сложения двух скоростей u' и v отличается от результата сложения скоростей v и u' . Очевидно, что это обусловлено неравноправием складываемых скоростей, среди которых выделенную роль играет относительная скорость двух систем отсчета.

Из условия инвариантности интервала $dx_\mu dx^\mu = dx'_\mu dx'^\mu$, которое можно переписать в виде

$$(c^2 - u^2) dt^2 = (c^2 - u'^2) dt'^2, \quad (76.4)$$

следует, что

$$\text{sign}(c^2 - u^2) = \text{sign}(c^2 - u'^2).$$

Это означает, что при переходе к любой инерциальной системе отсчета досветовые скорости ($u < c$) остаются досветовыми ($u' < c$), световые скорости ($u = c$) остаются световыми ($u' = c$), а сверхсветовые скорости ($u > c$) — сверхсветовыми ($u' > c$).

Задача 76.1. Вывести из (76.3) соотношение

$$u = [1 + (u'v)/c^2]^{-1} \{ (u' + v)^2 - [u'v]^2/c^2 \}^{1/2} \quad (76.5)$$

и убедиться, что оно согласуется с формулой, вытекающей из (76.4):

$$\sqrt{1 - u^2/c^2} = \gamma^{-1} [1 + (vu')/c^2]^{-1} \sqrt{1 - u'^2/c^2}. \quad (76.6)$$

Релятивистские формулы сложения скоростей позволяют легко объяснить результат опыта Физо (см. § 63). Здесь необходимо сложить две скорости: скорость света в неподвижной воде $u' = c/n$ и параллельную ей скорость v водяного потока. Применяя (76.2), получаем следующую скорость распространения света в движущейся воде:

$$u = (u' + v) (1 + u'v/c^2)^{-1} = c/n + v (1 - n^{-2}) [1 + v/(cn)]^{-1}.$$

Учитывая малость отношения v/c , нетрудно вывести подтвержденную в опыте Физо формулу Френеля

$$u \approx c/n + v (1 - 1/n^2).$$

§ 77. АБЕРРАЦИЯ И ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА ДЛЯ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ

Суть этих классических эффектов состоит в том, что если источник света и наблюдатель находятся в относительном движении, то наблюдаемый закон движения источника и частота испускаемого им света изменяются при изменении скорости наблюдателя. Посмотрим, как объясняются эти явления в теории неподвижного эфира.

Начнем с явления аберрации. Пусть, скажем, световая волна распространяется под прямым углом к скорости наблюдателя v по

отношению к неподвижному эфиру. Световой луч (рис. 77.1) достигает глаза наблюдателя только в том случае, если последний наклонит зрительную трубу по направлению движения на угол

$$\varphi' = \arctg(v/c). \quad (77.1)$$

Что касается изменения частоты света, то его происхождение также нетрудно понять. Так, если наблюдатель A движется к источнику B со скоростью v относительно эфира $*$ (рис. 77.2), то за 1 с он, очевидно, насчитает больше гребней волн, чем неподвижный наблюдатель, в $1 + v/c$ раз. Таким образом, наблюдаемая частота света ω' связана с частотой ω , регистрируемой неподвижным наблюдателем, соотношением Доплера

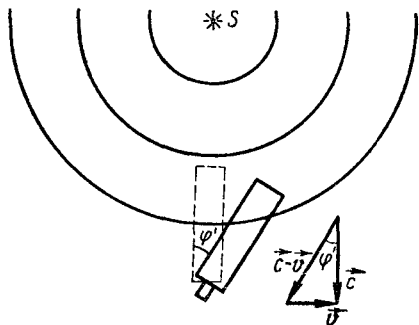


Рис. 77.1

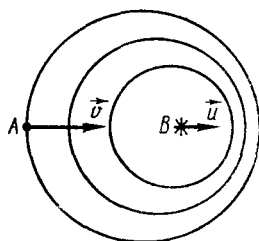


Рис. 77.2

точно B со скоростью v относительно эфира $*$ (рис. 77.2), то за 1 с он, очевидно, насчитает больше гребней волн, чем неподвижный наблюдатель, в $1 + v/c$ раз. Таким образом, наблюдаемая частота света ω' связана с частотой ω , регистрируемой неподвижным наблюдателем, соотношением Доплера

$$\omega' = \omega(1 + v/c). \quad (77.2)$$

В отличие от классических «эфирных» теорий, которыми указанные эффекты объясняются раздельно, в теории относительности они оказываются связанными и описываются единым образом. При этом выясняется, что происхождение этих эффектов чисто кинематическое.

Если источник света достаточно удален, то порождаемые им волны можно считать плоскими. Рассмотрим поэтому распространяющуюся в вакууме плоскую монохроматическую электромагнитную волну. Введем две инерциальные системы отсчета Σ и Σ' , оси которых будем считать параллельными, а скорость системы Σ' относительно Σ — направленной по оси X и равной $v = \beta c$. Пусть в системе Σ волна распространяется

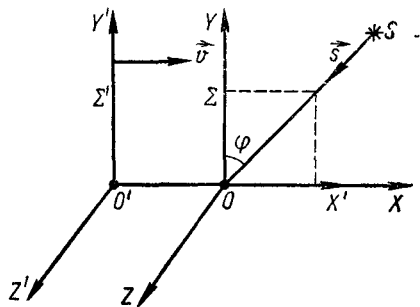


Рис. 77.3

* При этом источник сам может двигаться относительно эфира с некоторой скоростью u .

в направлении \mathbf{s} (рис. 77.3). Тогда каждая компонента электромагнитного поля содержит фазовый множитель

$$\exp(-i\Phi) = \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r}) - i\omega t], \quad (77.3)$$

где $\mathbf{k} = \omega/c$ — волновой вектор. Согласно принципу относительности, уравнение поверхности волнового фронта $d\Phi = 0$ ковариантно относительно преобразований Лоренца. Это означает, что левая часть уравнения, т. е. фаза Φ , представляет собой некоторый 4-тензор. Но единственным 4-тензором с одной компонентой является 4-скаляр, поэтому фаза Φ должна быть релятивистским скаляром. Ее действительно можно представить в виде скаляра

$$\Phi = \omega t - (\mathbf{k}\mathbf{r}) = k_{\mu}x^{\mu}, \quad (77.4)$$

если ввести волновой 4-вектор

$$k^{\mu} = (\omega/c, \omega\mathbf{s}/c), \quad (77.5)$$

важным свойством которого является *изотропность*:

$$k^2 = k_{\mu}k^{\mu} = 0. \quad (77.6)$$

Получим теперь компоненты 4-вектора k'^{μ} в системе отсчета Σ' . Очевидно, в системе Σ

$$\mathbf{k} = (-k^0 \sin \varphi, -k^0 \cos \varphi, 0); \quad k^0 = \omega/c,$$

и преобразованием Лоренца получаем:

$$k'^0 = \gamma(k^0 - \beta k^1), \quad k'^1 = \gamma(k^1 - \beta k^0), \quad k'^2 = k^2, \quad k'^3 = k^3. \quad (77.7)$$

Поскольку в системе Σ'

$$\mathbf{k}' = (-k'^0 \sin \varphi', -k'^0 \cos \varphi', 0); \quad k'^0 = \omega'/c,$$

то из (77.7) находим:

$$\omega' = \omega\gamma(1 + \beta \sin \varphi), \quad \sin \varphi' = (\beta + \sin \varphi)/(1 + \beta \sin \varphi). \quad (77.8)$$

Эти общие формулы и дают объединенное описание аберрации и эффекта Доплера. В частности, при $\varphi = 0$ получаем чистую аберрацию, а при $\varphi = \pi/2$ — чистый эффект Доплера (продольный). Так, при $\varphi = 0$

$$\sin \varphi' = \beta, \quad \omega' = \omega\gamma = \omega(1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (77.9)$$

Видно, что релятивистский угол аберрации $\varphi' = \arcsin \beta$ отличается от угла аберрации $\arctg \beta$ в «эфирной» теории. Совпадение получается лишь для малых скоростей $v \ll c$. Другим важным отличием релятивистской аберрации от классической является изменение частоты света $\omega' = \omega\gamma$, часто называемое *поперечным эффектом Доплера*.

Задача 77.1. Показать, что в «эфирной» теории получается правильный угол аберрации, если учесть сокращение Лоренца—Фитцджеральда.

Задача 77.2. Источник света движется относительно наблюдателя со скоростью \mathbf{v} . Как связаны между собой видимое и истинное положение источника? Рассмотреть случай двойной звезды, неподвижной относительно наблюдателя и вращающейся с некоторой угловой скоростью

(рис. 77.4). Можно ли утверждать, что в соответствии с формулой (77.8) в том положении, когда компоненты звезды находятся на одной линии с наблюдателем ($\varphi=0$), они будут казаться пространственно разделенными?

Для описания релятивистского эффекта Доплера предположим в (77.8) $\varphi = \pi/2$ и найдем:

$$\varphi' = \pi/2, \quad \omega' = \omega \gamma (1 + \beta) = \omega \sqrt{(c+v)/(c-v)}. \quad (77.10)$$

Очевидно, что релятивистская формула для продольного эффекта Доплера совпадает с классической формулой (77.2) лишь в пределе медленных движений.

Задача 77.3. Найти закон отражения света от движущегося зеркала, скорость v которого ориентирована произвольно относительно зеркала

Задача 77.4. Описать aberrацию и эффект Доплера для света в прозрачной среде с показателем преломления $n(\omega)$. Найти поправку к коэффициенту увлечения Френеля, обусловленную эффектом Доплера.

Задача 77.5. Описать aberrацию и эффект Доплера для полей $\psi^\pm(x)$, подчиняющихся уравнениям $(\square \mp m^2) \psi^\pm = 0$.

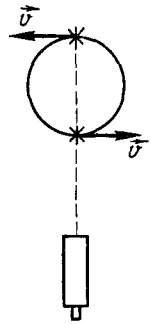


Рис. 77.4

§ 78. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА В КОВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ

Ковариантность какого-либо закона природы по отношению к преобразованиям Лоренца, очевидно, соблюдается, если этот закон удастся представить в виде системы четырехмерных тензорных уравнений. Попробуем представить в явно ковариантной форме уравнения Максвелла в вакууме:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi\rho, & \text{II} \quad \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (78.1)$$

Но сначала обратим внимание на то, что из уравнений (78.1) вытекает уравнение непрерывности

$$\partial \rho / \partial t + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (78.2)$$

выражающее закон сохранения электрического заряда. Этот закон универсален, т.е. выполняется в любой инерциальной системе отсчета, и поэтому уравнение (78.2) должно быть лоренц-ковариантным. Это возможно лишь в случае, когда его левая часть является релятивистским скаляром. Такое представление левой части (78.2) оказывается действительно возможным, если ввести 4-вектор плотности тока j^μ с компонентами*

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}); \quad c\rho \equiv j^0. \quad (78.3)$$

* Здесь еще раз проявляется присущая теории относительности тенденция к объединению компонент различных трехмерных тензоров в один четырехмерный тензор. Эту тенденцию мы неоднократно будем наблюдать и в дальнейшем.

Тогда уравнение (78.2) принимает вид

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0, \quad (78.4)$$

т. е. его левая часть является четырехмерной дивергенцией.

Закон сохранения электрического заряда можно записать и в интегральной форме, если проинтегрировать (78.4) по некоторому 4-объему Ω , окруженному замкнутой гиперповерхностью σ , и использовать четырехмерную теорему Гаусса — Остроградского (74.14):

$$\int_{\Omega} \partial_{\mu} j^{\mu} d\Omega = \oint_{\sigma} j^{\mu} d\sigma_{\mu} = 0. \quad (78.5)$$

Предположим теперь, что заряды и токи, как это обычно имеет место, сосредоточены в некоторой ограниченной области пространства. Тогда в качестве четырехмерной области Ω можно взять 4-объем, заключенный между двумя пространственно-подобными гиперповерхностями σ_1 и σ_2 (рис. 78.1). Поскольку вклад бесконечно удаленных областей в интеграл (78.5) будет исчезающим, равенство (78.5) примет вид

$$\int_{\sigma_2} j^{\mu} d\sigma_{\mu} = \int_{\sigma_1} j^{\mu} d\sigma_{\mu}. \quad (78.6)$$

Оно означает, что инвариантный интеграл

$$Q[\sigma] = \frac{1}{c} \int_{\sigma} j^{\mu} d\sigma_{\mu} = \frac{1}{c} \int_{\sigma} n_{\mu} j^{\mu} d\sigma \quad (78.7)$$

оказывается не зависящим от выбора пространственно-подобной гиперповерхности σ . Поэтому в качестве последней можно, например, выбрать гиперповерхность $x^0 = \text{const}$, для которой вектор нормали имеет компоненты $n_{\mu} = (1, 0, 0, 0)$, поэтому $d\sigma_{\mu} = (dV, 0, 0, 0)$. Тем самым равенство (78.7) принимает вид

$$Q = \int \rho dV = \text{const} \quad (78.8)$$

■ выражает, таким образом, интегральный закон сохранения электрического заряда.

Из структуры 4-вектора плотности тока $j^{\mu} = (c\rho, \mathbf{j})$ нетрудно вывести закон преобразования плотностей заряда ρ и тока \mathbf{j} при преобразованиях Лоренца (67.18):

$$\rho = \gamma(\rho' + j'^1 v/c^2), \quad j^1 = \gamma(j'^1 + \rho' v), \quad j^2 = j'^2, \quad j^3 = j'^3. \quad (78.9)$$

В частности, если в системе отсчета Σ' заряды были неподвижны и распределены с некоторой плотностью ρ' , то $j'^{\mu} = (c\rho', 0, 0, 0)$ и поэтому в системе Σ , относительно которой заряды движутся со скоростью v вдоль оси X , согласно (78.9) имеем

$$\rho = \gamma\rho', \quad \mathbf{j} = \gamma\rho' \mathbf{v} = \rho\mathbf{v}. \quad (78.10)$$

Таким образом, появляется конвекционный ток с плотностью $\rho\mathbf{v}$ и вследствие лоренцева сокращения масштабов в направлении движения происходит увеличение плотности заряда.

В другом частном случае, когда в системе отсчета Σ' имелась лишь плотность тока $\mathbf{j} \neq 0$, а плотность заряда была равна нулю, т.е. $j'^{\mu} = (0, \mathbf{j}')$, в системе Σ найдем:

$$j^1 = \gamma j'^1, \quad j^2 = j'^2, \quad j^3 = j'^3, \quad \rho = j'^1 \gamma v / c^2 = j^1 v / c^2. \quad (78.11)$$

Если увеличение плотности тока можно объяснить тем же лоренцевым сокращением масштабов, приводящим к уплотнению движущихся зарядов, то появление некоторой плотности заряда ρ представляется на первый взгляд парадоксальным и противоречащим закону сохранения заряда. Однако на самом деле никакого противоречия здесь нет. Действительно, если $\rho' = 0$ в системе Σ' , то из уравнения непрерывности (78.2) следует, что $\text{div}' \mathbf{j}' = 0$, т.е. токи должны быть замкнутыми (рис. 78.2). Поэтому, если проводник с током привести в поступательное движение со скоростью \mathbf{v} , то согласно (78.11) на участках с противоположными токами возникнут и противоположные плотности заряда*. При этом результирующий заряд Q в проводе, очевидно, равен нулю, что следует уже из инвариантности заряда:

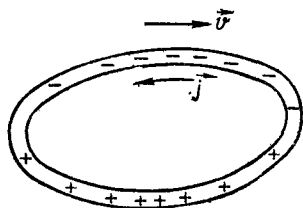


Рис. 78.2

$$Q = \int \rho dV = Q' = \int \rho' dV' = 0.$$

Задача 78.1. Вычислить электрический и магнитный дипольные моменты плоского линейного кругового тока I радиуса a , перемещающегося со скоростью \mathbf{v}

§ 79. КОВАРИАНТНАЯ ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Поскольку в уравнения Максвелла (78.1) кроме источников ρ и \mathbf{j} , образующих 4-вектор, входят только векторы электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{B} , то лоренц-ковариантность уравнений (78.1) может лишь означать, что пара векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} при преобразованиях Лоренца выражается сама через себя. Иначе говоря, векторы электромагнитного поля являются компонентами некоторого четырехмерного тензора. Единственным 4-тензором с шестью компонентами является антисимметричный тензор второго ранга. Обозначая компоненты этого тензора $F^{\mu\nu}$, попытаемся определить его структуру, приведя к явно ковариантной форме левые части уравнений (78.1).

Начнем с первой группы уравнений Максвелла. Для удобства

* См. задачу 6.2.

запишем их в декартовых координатах*:

$$\begin{aligned} 0 + \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 &= (4\pi/c) j^0, \\ -\partial_0 E_1 + 0 + \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 &= (4\pi/c) j^1, \\ -\partial_0 E_2 - \partial_1 B_3 + 0 + \partial_3 B_1 &= (4\pi/c) j^2, \\ -\partial_0 E_3 + \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 + 0 &= (4\pi/c) j^3. \end{aligned} \quad (79.1)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (79.1) можно представить в четырехмерной форме:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu/c. \quad (79.2)$$

При этом контравариантные компоненты тензора $F^{\mu\nu}$, обычно называемого *тензором электромагнитного поля*, изображаются антисимметричной матрицей

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{vmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (79.3)$$

Что касается второй группы уравнений Максвелла, то, предварительно записав их в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} 0 + \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 &= 0, \\ -\partial_0 B_1 + 0 - \partial_2 E_3 + \partial_3 E_2 &= 0, \\ -\partial_0 B_2 + \partial_1 E_3 + 0 - \partial_3 E_1 &= 0, \\ -\partial_0 B_3 - \partial_1 E_2 + \partial_2 E_1 + 0 &= 0, \end{aligned}$$

убеждаемся, что они также допускают явно ковариантное представление:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (79.4)$$

где компоненты тензора $\tilde{F}^{\mu\nu}$ изображаются антисимметричной матрицей

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = -\tilde{F}^{\nu\mu} = \begin{vmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (79.5)$$

Легко проверить, что тензор $\tilde{F}^{\mu\nu}$ является дуально сопряженным тензору $F^{\mu\nu}$, т. е. связан с ним соотношением

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau}/2. \quad (79.6)$$

Вследствие этого (79.4) можно переписать и как уравнения для $F_{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0. \quad (79.7)$$

* Напомним, что у трехмерных векторов \mathbf{E} , \mathbf{B} ковариантные и контравариантные компоненты совпадают, т. е. $E_i = E^i$ и $B_i = B^i$.

Задача 79.1. Убедиться в эквивалентности уравнений (79.7) и (79.4).

Итак, ковариантная запись уравнений электродинамики Максвелла в вакууме дается системой уравнений (79.2) и (79.7).

§ 80. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Для получения формул преобразования векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} электромагнитного поля при переходе к движущейся системе отсчета можно, безусловно, воспользоваться законом преобразования компонент тензора $F^{\mu\nu}$:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda_{\sigma}^{\mu} \Lambda_{\tau}^{\nu} F^{\sigma\tau}.$$

Однако существует и более короткий путь, основанный на использовании свойства антисимметрии тензора электромагнитного поля. Заметим прежде всего, что компонента тензора второго ранга $F^{\mu\nu}$ преобразуется как произведение соответствующих компонент двух 4-векторов $A^{\mu}B^{\nu}$. Поэтому, если направить ось X вдоль скорости движущейся системы отсчета \mathbf{v} , то вследствие инвариантности поперечных компонент 4-вектора A^2 и A^3 компоненты $F^{2\nu}$ и $F^{3\nu}$ должны преобразовываться как 4-векторы. Это обстоятельство с учетом свойства антисимметрии $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ позволяет установить закон преобразования всех компонент тензора $F^{\mu\nu}$, кроме F^{01} . Однако [см (79.6)] $F^{01} = \tilde{F}^{23}$, т. е. F^{01} преобразуется как инвариантная составляющая дуально сопряженного тензора \tilde{F}^{23} . Учитывая все сказанное, можно записать следующие формулы преобразования для тензора электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} F'^{01} &= F^{01}, & F'^{02} &= \gamma(F^{02} - \beta F^{12}), & F'^{03} &= \gamma(F^{03} - \beta F^{13}), \\ F'^{23} &= F^{23}, & F'^{12} &= \gamma(F^{12} - \beta F^{02}), & F'^{13} &= \gamma(F^{13} - \beta F^{03}), \end{aligned} \quad (80.1)$$

или с учетом (79.3):

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta B_3), & E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta B_2), \\ B'_1 &= B_1, & B'_2 &= \gamma(B_2 + \beta E_3), & B'_3 &= \gamma(B_3 - \beta E_2). \end{aligned} \quad (80.2)$$

Эти формулы можно записать и в компактной векторной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]/c), \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - [\mathbf{v}\mathbf{E}]/c), \end{aligned} \quad (80.3)$$

где символами \parallel и \perp обозначены соответственно продольная и поперечная составляющие векторов. Обратные преобразования, очевидно, получаются заменой $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$.

В полученных законах преобразования (80.3) отчетливо выявляется тесная взаимосвязь и глубокое внутреннее единство электрического и магнитного полей, выступающих как различные проявления единого электромагнитного поля. В частности, одним из ярких свидетельств этого единства являются уже известные нам теоремы Дж. Дж. Томсона*, непосредственно вытекающие из (80.3). Так,

* См. задачу 6.2.

если в движущейся системе отсчета Σ' имеется только магнитное поле \mathbf{B}' , то в неподвижной системе Σ , согласно (80.3), появится поперечное электрическое поле $\mathbf{E} = -[\mathbf{v}\mathbf{B}']/c$. Аналогично если в системе Σ' имеется лишь электрическое поле \mathbf{E}' , то в системе Σ появится поперечное магнитное поле $\mathbf{B} = [\mathbf{v}\mathbf{E}']/c$.

Задача 80.1. Приняв закон преобразования для поперечной составляющей силы $\mathbf{F}'_{\perp} = \gamma \mathbf{F}_{\perp}$ (см. § 84), вывести из (80.3) выражение для силы Лоренца, действующей на заряд в магнитном поле \mathbf{B} .

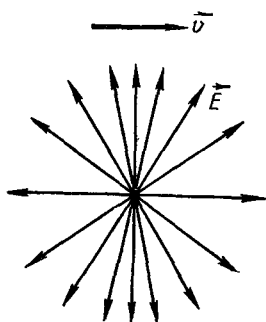


Рис. 80.1

В качестве важного применения формул (80.3) рассмотрим задачу о нахождении электромагнитного поля, создаваемого точечным зарядом e , движущимся с постоянной скоростью \mathbf{v} . Очевидно, что в собственной системе отсчета Σ' заряда имеется лишь электрическое поле с напряженностью

$$\mathbf{E}' = e\mathbf{r}'/r'^3. \quad (80.4)$$

Применив формулы преобразования, обратные (80.3) и предварительно записанные в компактной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (1 - \gamma) \mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{E}')/v^2 + \gamma (\mathbf{E}' - [\mathbf{v}\mathbf{B}']/c), \\ \mathbf{B} &= (1 - \gamma) \mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{B}')/v^2 + \gamma (\mathbf{B}' + [\mathbf{v}\mathbf{E}']/c), \end{aligned} \quad (80.5)$$

найдем, что в неподвижной системе Σ

$$\mathbf{E} = \gamma \mathbf{E}' + (1 - \gamma) \mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{E}')/v^2, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{v}\mathbf{E}']/c. \quad (80.6)$$

Подставляя сюда (80.4) и учитывая, что согласно (67.20)

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma \mathbf{v}t + (\gamma - 1) (\mathbf{r}\mathbf{v})\mathbf{v}/v^2,$$

после несложных преобразований находим

$$\mathbf{E} = \gamma \frac{e}{r'^3} (\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = \frac{e (\mathbf{r} - \mathbf{v}t) (1 - \beta^2)}{[(x - vt)^2 + (y^2 + z^2) (1 - \beta^2)]^{3/2}}. \quad (80.7)$$

Анализ этой формулы показывает, что при больших скоростях v , когда $\beta \approx 1$, поле практически концентрируется в плоскости, перпендикулярной движению (рис. 80.1). Показателем релятивистского сжатия поля является отношение

$$\frac{E(x - vt = a, y = z = 0)}{E(x - vt = 0, y = z = a/\sqrt{2})} = (1 - \beta^2)^{3/2}.$$

Задача 80.2. Металлический шарик радиуса a и заряда e движется с постоянной скоростью \mathbf{v} . Показать, что сила Лоренца, действующая на элементарный заряд на поверхности шарика, может быть представлена в виде $\mathbf{F} = -\nabla\psi$, где ψ — конвекционный потенциал. Найти форму эквипотенциальной поверхности $\psi = \text{const}$ (эллипсоид Хевисайда).

Задача 80.3. Найти электромагнитное поле точечного электрического диполя с моментом \mathbf{p} , движущегося с постоянной скоростью \mathbf{v} .

§ 81. ИНВАРИАНТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Во многих приложениях неоценимую пользу может оказать знание инвариантных комбинаций, составленных из компонент электромагнитного поля. Можно указать две такие инвариантные комбинации:

$$\mathcal{I}_1 = -F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/2, \quad \mathcal{I}_2 = -F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}/4, \quad (81.1)$$

в которых для удобства выбраны числовые коэффициенты $-1/2$ и $-1/4$. Воспользовавшись матричными представлениями (79.3) и (79.5) для тензоров $F^{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}$ электромагнитного поля, инварианты (81.1) можно выразить через \mathbf{E} и \mathbf{B} :

$$\mathcal{I}_1 = E^2 - B^2, \quad \mathcal{I}_2 = (\mathbf{E}\mathbf{B}). \quad (81.2)$$

Отметим, что согласно (81.1) только \mathcal{I}_1 является истинным скаляром, тогда как \mathcal{I}_2 является псевдоскаляром, т. е. изменяет знак при пространственном отражении.

Задача 81.1. Показать, что характеристические числа матрицы F_{ν}^{μ} выражаются через инварианты (81.2).

Из существования инвариантов (81.2) можно вывести ряд полезных свойств электромагнитного поля. Например, из явного вида \mathcal{I}_1 следует, что с помощью преобразования Лоренца нельзя перевести чисто магнитное поле в чисто электрическое, и наоборот. Это связано с тем, что инвариант \mathcal{I}_1 изменил бы при этом знак, что невозможно. Далее, из явного вида инварианта \mathcal{I}_2 вытекает, что если векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} ортогональны в некоторой системе отсчета, т. е. $\mathcal{I}_2 = 0$, то и в любой другой системе отсчета они будут оставаться ортогональными. Таким образом, свойство ортогональности векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} является инвариантным относительно преобразований Лоренца.

Интересной особенностью обладает плоская электромагнитная волна. Поскольку для нее $E = B$ и $(\mathbf{E}\mathbf{B}) = 0$, то $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = 0$. Поэтому в любой инерциальной системе отсчета плоская электромагнитная волна остается плоской волной.

Задача 81.2. Каким условиям должны удовлетворять векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} , чтобы существовала такая система отсчета, в которой либо $\mathbf{E} = 0$, либо $\mathbf{B} = 0$?

Существует и другой способ вывода инвариантов (81.2), основанный на использовании формул преобразования электромагнитного поля (80.3) и позволяющий просто установить отсутствие других инвариантов, кроме \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 . Именно: применим формулы (80.3) к комплексному вектору

$$\mathbf{X} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}, \quad (81.3)$$

впервые введенному английским физиком Л. Зильберштейном в 1907 г. Тогда для преобразованного вектора \mathbf{X}' найдем

$$\mathbf{X}'_{\parallel} = \mathbf{X}_{\parallel}, \quad \mathbf{X}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{X}_{\perp} - i[\mathbf{v}\mathbf{X}]/c). \quad (81.4)$$

Воспользуемся теперь комплексным представлением (72.9) для гиперболического поворота, положив

$$\gamma = \cos \alpha, \quad i\gamma\beta = \sin \alpha, \quad \alpha = i \operatorname{arth} \beta.$$

Тогда формулы (81.4) примут такой вид:

$$\mathbf{X}'_{\parallel} = \mathbf{X}_{\parallel}, \quad \mathbf{X}'_{\perp} = \cos \alpha \mathbf{X}_{\perp} - \sin \alpha [\mathbf{v} \mathbf{X}] / v. \quad (81.5)$$

Нетрудно видеть, что преобразование (81.5) представляет собой трехмерный поворот вокруг направления \mathbf{v} , при котором, как известно, квадрат вектора остается неизменным, т. е.

$$\mathbf{X}'^2 = \mathbf{X}^2 = \text{inv},$$

или

$$(\mathbf{E} + i\mathbf{B})^2 = E^2 - B^2 + 2i(\mathbf{E}\mathbf{B}) = \text{inv}. \quad (81.6)$$

Разделяя в (81.6) действительную и мнимую части, убеждаемся, что существуют только два независимых инварианта (81.2) электромагнитного поля.

§ 82. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

По аналогии с введением трехмерных скалярного φ и векторного \mathbf{A} потенциалов электромагнитного поля, для решения системы уравнений Максвелла в четырехмерной форме удобно ввести четырехмерный векторный потенциал A^{μ} электромагнитного поля, положив

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}. \quad (82.1)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (82.1) является ковариантной записью соответствующих трехмерных уравнений $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t$, $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, если считать, что 4-потенциал A имеет компоненты

$$A^{\mu} = (\varphi, \mathbf{A}). \quad (82.2)$$

Заметим, что подстановкой (82.1) автоматически удовлетворяется вторая группа уравнений Максвелла. В самом деле,

$$\partial_{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\tau} \partial_{\mu} (\partial_{\sigma} A_{\tau} - \partial_{\tau} A_{\sigma}) / 2 \equiv 0$$

как свертка антисимметричного тензора $\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ с симметричными тензорами $\partial_{\mu}\partial_{\sigma}A_{\tau}$ и $\partial_{\mu}\partial_{\tau}A_{\sigma}$.

Обратим внимание на то, что соотношением (82.1) 4-потенциал A определен неоднозначно, а именно: новый 4-потенциал с компонентами

$$A_{\mu} \equiv A_{\mu} + \partial_{\mu}\Phi, \quad (82.3)$$

отличающийся от старого на 4-градиент произвольного скаляра Φ , тоже удовлетворяет (82.1), поскольку

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} = \partial_{\mu} A'_{\nu} - \partial_{\nu} A'_{\mu}.$$

Это свойство 4-потенциала является выражением уже известной нам *градиентной*, или *калибровочной*, *инвариантности* электромагнитного поля

$$\varphi' = \varphi + c^{-1}\partial\Phi/\partial t, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\Phi$$

Чтобы уменьшить произвольность выбора 4-потенциала, на него можно наложить некоторое дополнительное условие. Если считать это условие линейным и лоренц-ковариантным, то оно определяется

однозначно и известно как *условие Лоренца*

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \partial_{\mu} A^{\mu} = 0. \quad (82.4)$$

Очевидно, ему всегда можно удовлетворить, совершив калибровочное преобразование (82.3) с подходящей скалярной функцией Φ . В самом деле, подстановка (82.3) в (82.4) дает

$$-\partial_{\mu} \partial^{\mu} \Phi \equiv \square \Phi = -\partial_{\mu} A^{\mu},$$

т. е. скаляр Φ удовлетворяет неоднородному уравнению Даламбера, решение которого задается с точностью до произвольного решения Φ_0 свободного уравнения Даламбера $\square \Phi_0 = 0$. Таким образом, даже при наложенном условии Лоренца (82.4) 4-потенциал A_{μ} остается определенным с точностью до 4-градиента $\partial_{\mu} \Phi_0$, где Φ_0 — скалярное решение уравнения Даламбера.

Перепишем теперь в терминах 4-потенциала первую группу уравнений Максвелла в вакууме. Подставляя (82.1) в (79.2), имеем

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \partial_{\mu} \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial_{\mu} \partial^{\nu} A^{\mu} = (4\pi/c) j^{\nu},$$

или с учетом условия Лоренца (82.4)

$$\square A^{\mu} = - (4\pi/c) j^{\mu}. \quad (82.5)$$

Очевидно, что уравнения (82.5) являются ковариантной записью трехмерных уравнений (41.8) для потенциалов электромагнитного поля:

$$\square \varphi = - 4\pi\rho, \quad \square \mathbf{A} = - (4\pi/c) \mathbf{j}.$$

Задача 82.1. Показать, что запаздывающее решение уравнений (82.5) может быть представлено в форме, ковариантной относительно ортохронных преобразований Лоренца:

$$A^{\mu}(x) = \frac{2}{c} \int \theta(x^0 - x'^0) \delta[(x - x')^2] j^{\mu}(x') d\Omega', \quad (82.6)$$

или в эквивалентной форме Конвея—Герглотца:

$$A^{\mu}(x) = \frac{i}{\pi c} \int_C \frac{j^{\mu}(x')}{(x - x')^2} d\Omega', \quad (82.7)$$

где контур C в комплексной плоскости x^0 изображен на рис. 82.1.

Задача 82.2. Найти ковариантное представление для потенциалов Льебара—Вихерта

Задача 82.3. Дать ковариантную формулировку метода векторов Герца.

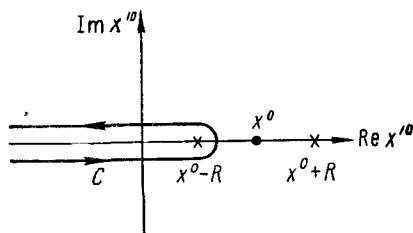


Рис. 82.1

§ 83. КОВАРИАНТНАЯ ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СРЕДЕ

При наличии среды, очевидно, изменится лишь первая группа уравнений Максвелла, содержащая плотности связанных зарядов и токов. Поэтому нам следует записать в ковариантной форме только уравнения связи между поляризованностью \mathbf{P} и намагниченностью \mathbf{M} , с одной стороны, и плотностями связанных зарядов $\rho^{\text{связ}}$ и токов $\mathbf{j}^{\text{связ}}$ — с другой. Как известно, эти уравнения имеют такой вид:

$$\rho^{\text{связ}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \mathbf{j}^{\text{связ}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \partial \mathbf{P} / \partial t. \quad (83.1)$$

Вводя 4-вектор плотности связанного тока $j_{\text{связ}}^{\mu} = (c\rho^{\text{связ}}, \mathbf{j}^{\text{связ}})$ и антисимметричный тензор поляризации — намагниченности $S^{\mu\nu}$, заданный матрицей

$$S^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ -P_1 & 0 & -M_3 & M_2 \\ -P_2 & M_3 & 0 & -M_1 \\ -P_3 & -M_2 & M_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (83.2)$$

уравнения (83.1) можно переписать в явно ковариантной форме:

$$j_{\text{связ}}^{\nu} = c \partial_{\mu} S^{\mu\nu}. \quad (83.3)$$

Задача 83.1. Показать, что диэлектрик с поляризованностью \mathbf{P} , движущийся со скоростью \mathbf{v} , приобретает намагниченность $\mathbf{M} = [\mathbf{P}\mathbf{v}]/c$.

Поскольку электромагнитное поле в среде порождается плотностью полного 4-тока $j + j^{\text{связ}}$, то в соответствии с (79.2) имеем

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = (4\pi/c) (j^{\nu} + j_{\text{связ}}^{\nu}), \quad (83.4)$$

или с учетом (83.3)

$$\partial_{\mu} G^{\mu\nu} = (4\pi/c) j^{\nu}, \quad (83.5)$$

где введен новый антисимметричный тензор

$$G^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - 4\pi S^{\mu\nu}. \quad (83.6)$$

Соотношение (83.6) представляет собой ковариантную запись известных трехмерных уравнений:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}.$$

Поэтому структура тензора $G^{\mu\nu}$ задается следующей антисимметричной матрицей:

$$G^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (83.7)$$

Предположим теперь, что нам известны трехмерные тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$, входящие в феноменологические уравнения состояния неподвижного вещества (система отсчета Σ'):

$$D'^i = \epsilon_k^i E'^k, \quad B'^i = \mu_k^i H'^k. \quad (83.8)$$

Очевидно, что этими уравнениями, записанными предварительно в ковариантной форме, и следует дополнить системы уравнений (83.5) и (79.7). Поскольку уравнения (83.8) задают линейную связь двух 4-тензоров $G^{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu}$, то их ковариантная запись должна иметь вид

$$G^{\mu\nu} = \lambda_{\sigma\tau}^{\mu\nu} F^{\sigma\tau}. \quad (83.9)$$

Введенный здесь 4-тензор проницаемостей $\lambda_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$, очевидно, антисимметричен по верхним и нижним индексам*. Чтобы выписать его компоненты в собственной системе вещества Σ' , воспользуемся соотношениями, вытекающими из структуры тензоров $G^{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu}$:

$$G'^{0i} = -D'^i, \quad F'^{0i} = -E'^i, \quad G'^{ik} = -\varepsilon^{ikj} H'_j, \quad B'_i = -\varepsilon_{ikj} F'^{kj}/2. \quad (83.10)$$

С помощью (83.10) уравнение (83.8) можно представить в виде

$$G'^{0i} = \varepsilon_k^i F'^{0k}, \quad G'^{ik} = \varepsilon^{ikj} \varepsilon_{lmn} (\hat{\mu}^{-1})_j^l F'^{mn}/2. \quad (83.11)$$

Сравнивая (83.11) с (83.9), находим следующую структуру тензора $\lambda_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$ в собственной системе Σ' среды:

$$\lambda_{0k}^{0i} = \varepsilon_k^i/2; \quad \lambda_{kl}^{0i} = \lambda_{0i}^{kl} = 0, \quad \lambda_{mn}^{ik} = \varepsilon^{ikj} \varepsilon_{lmn} (\hat{\mu}^{-1})_j^l/2. \quad (83.12)$$

В частном случае изотропной среды, когда $\varepsilon_k^i = \varepsilon \delta_k^i$ и $\mu_k^i = \mu \delta_k^i$,

$$\lambda_{0k}^{0i} = \varepsilon \delta_k^i/2, \quad \lambda_{mn}^{ik} = \varepsilon^{ikj} \varepsilon_{jmn}/(2\mu) = (\delta_m^i \delta_n^k - \delta_n^i \delta_m^k)/(2\mu). \quad (83.13)$$

Переходя к системе отсчета Σ , относительно которой среда движется с некоторой скоростью \mathbf{u} , с помощью (83.12) или (83.13) всегда можно восстановить компоненты тензора $\lambda_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$ в системе Σ и записать, таким образом, уравнения Максвелла в среде в ковариантной форме:

$$\begin{aligned} \partial_\mu G^{\mu\nu} &= (4\pi/c) j^\nu, \quad G^{\mu\nu} = \lambda_{\sigma\tau}^{\mu\nu} F^{\sigma\tau}, \\ \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (83.14)$$

В случае изотропной среды, как было впервые показано Минковским, уравнения связи (83.9) могут быть значительно упрощены. В самом деле, используя 4-скорость U среды, введем 4-векторы:

$$\begin{aligned} E^\mu &= F^{\mu\nu} U_\nu/c, \quad B^\mu = \tilde{F}^{\mu\nu} U_\nu/c, \\ D^\mu &= G^{\mu\nu} U_\nu/c, \quad H^\mu = \tilde{G}^{\mu\nu} U_\nu/c, \end{aligned}$$

обладающие тем свойством, что в собственной системе среды они сводятся соответственно к \mathbf{E}' , \mathbf{B}' , \mathbf{D}' , \mathbf{H}' , между которыми существует связь

$$\mathbf{B}' = \mu \mathbf{H}', \quad \mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E}'.$$

Однако известно, что если два 4-вектора параллельны в некоторой системе отсчета, то они параллельны и в любой другой. Поэтому, вводя скалярные величины ε и μ , определяемые соответ-

* Релятивистский тензор проницаемостей впервые был введен советским физиком *И. Е. Таммом*.

венно как диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в ее собственной системе отсчета, уравнения связи (83.9) можно заметить следующей парой уравнений:

$$D^\alpha = \varepsilon E^\alpha, \quad B^\alpha = \mu H^\alpha,$$

или

$$G^{\alpha\beta} U_\beta = \varepsilon F^{\alpha\beta} U_\beta, \quad \tilde{F}^{\alpha\beta} U_\beta = \mu \tilde{G}^{\alpha\beta} U_\beta. \quad (83.15)$$

Уравнения (83.15) известны как *уравнения Минковского для движущихся сред*. В трехмерной форме они принимают такой вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} + [\mathbf{uH}]/c &= \varepsilon (\mathbf{E} + [\mathbf{uB}]/c), \\ \mathbf{B} - [\mathbf{uE}]/c &= \mu (\mathbf{H} - [\mathbf{uD}]/c). \end{aligned} \quad (83.16)$$

Задача 83.2. Показать, что из уравнений Минковского (83.15) вытекают следующие соотношения между тензорами $G^{\alpha\beta}$ и $F^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} (G^{\alpha\beta} - \varepsilon F^{\alpha\beta}) (\tilde{G}_{\alpha\beta} - \varepsilon \tilde{F}_{\alpha\beta}) &= (F^{\alpha\beta} - \mu G^{\alpha\beta}) (\tilde{F}_{\alpha\beta} - \mu \tilde{G}_{\alpha\beta}) = \\ &= (\tilde{G}^{\alpha\beta} - \varepsilon \tilde{F}^{\alpha\beta}) (F_{\alpha\beta} - \mu G_{\alpha\beta}) = 0, \end{aligned} \quad (83.17)$$

или в трехмерной форме.

$$\begin{aligned} (\mathbf{D} - \varepsilon \mathbf{E}) \cdot (\varepsilon \mathbf{B} - \mathbf{H}) &= (\mathbf{B} - \mu \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{E} - \mu \mathbf{D}) = 0, \\ (\mathbf{D} - \varepsilon \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{E} - \mu \mathbf{D}) + (\mathbf{B} - \mu \mathbf{H}) \cdot (\varepsilon \mathbf{B} - \mathbf{H}) &= 0. \end{aligned} \quad (83.18)$$

Задача 83.3. Показать, что ковариантной формой дифференциального закона Ома в среде с изотропной электропроводностью σ является уравнение

$$j^\mu = (\sigma/c) F^{\mu\nu} U_\nu. \quad (83.19)$$

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Глава 7

В этой главе мы изучим движение точечной заряженной частицы в электромагнитном поле. Для этого нам потребуются уравнения динамики материальной точки, которые согласовывались бы с релятивистской кинематикой (см. § 75). Ясно, что уравнения динамики Ньютона

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}$$

не годятся для этой цели, поскольку они ковариантны по отношению к преобразованиям Галилея, а не Лоренца, и поэтому справедливы лишь для медленных движений ($u \ll c$). Следовательно, необходимо обобщить уравнения динамики Ньютона и сделать это так, чтобы новые уравнения были лоренц-ковариантными и в предельном случае скоростей, малых по сравнению со скоростью света, переходили в уравнения Ньютона. Именно такое обобщение уравнений динамики материальной точки и было предложено *Г. Минковским*.

§ 84. УРАВНЕНИЯ МИНКОВСКОГО

Уравнения динамики материальной точки, предложенные Минковским, внешне имеют ту же форму, что и уравнения Ньютона, но оперируют с четырехмерными величинами (4-координатами, 4-скоростями, 4-ускорениями и 4-силами), характеризующими движение частицы в псевдоевклидовой геометрии Минковского.

Уравнения Минковского имеют вид

$$\mathcal{M} \frac{dU^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}^\mu. \quad (84.1)$$

Скалярная числовая величина \mathcal{M} в этих уравнениях характеризует инерционные свойства частицы и называется ее *собственной массой*. Роль времени в уравнениях Минковского играет инвариантное *собственное время* τ частицы, роль скорости — 4-скорость U , а роль силы — 4-вектор силы \mathcal{F} , являющийся обобщением трехмерной ньютоновской силы \mathbf{F} .

В предельном случае медленных движений, когда $u \ll c$, пространственные компоненты 4-скорости U переходят в обычную трехмерную скорость \mathbf{u} , а собственное время $d\tau = dt(1 - u^2/c^2)^{1/2}$ перестает отличаться от ньютоновского времени dt . Поэтому если потребовать, чтобы пространственные компоненты 4-вектора силы \mathcal{F} также переходили в этом пределе в ньютоновскую силу \mathbf{F} , то пространственные уравнения Минковского, очевидно, будут удовлетворять нужному принципу соответствия с уравнениями динамики Ньютона.

Остается лишь выяснить смысл временного уравнения Минковского ($\mu = 0$). Для этого воспользуемся тождеством $U_\mu U^\mu = c^2$, или

$$U_\mu dU^\mu/d\tau = 0, \quad (84.2)$$

с учетом которого из (84.1) выводим

$$U_\mu \mathcal{F}^\mu = U_0 \mathcal{F}^0 - (\mathbf{U}\mathcal{F}) = 0. \quad (84.3)$$

Соотношение (84.3) позволяет выразить \mathcal{F}^0 через \mathcal{F} :

$$\mathcal{F}^0 = (\mathcal{F}\mathbf{U})/U^0 = (\mathcal{F}\mathbf{u})/c. \quad (84.4)$$

Таким образом, $c\mathcal{F}^0$ при $u \ll c$ совпадает с мощностью внешней силы, т. е.

$$c\mathcal{F}^0 = (\mathcal{F}\mathbf{u}) \approx (\mathbf{F}\mathbf{u}).$$

Это обстоятельство наводит на мысль, что временное уравнение Минковского является ковариантным обобщением теоремы живых сил в механике Ньютона. Чтобы проверить эту догадку, запишем $\mathcal{M}cU^0$ в предельном случае $u \ll c$:

$$\mathcal{M}cU^0 = \frac{\mathcal{M}c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \mathcal{M}c^2 + \frac{1}{2} \mathcal{M}u^2 + \dots \quad (84.5)$$

Поскольку $\mathcal{M}c^2$ является постоянной величиной, то временное уравнение Минковского в этом приближении принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}u^2 \right) = (\mathbf{F}\mathbf{u}),$$

т. е. в самом деле совпадает с теоремой живых сил.

Итак, мы пришли к выводу, что уравнения Минковского выражают закон изменения энергии и импульса частицы под влиянием внешних сил. В связи с этим введем понятие 4-импульса частицы

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}U, \quad (84.6)$$

компоненты которого удобно представить в виде

$$\mathcal{P}^\mu = (mc, m\mathbf{u}), \quad (84.7)$$

где

$$m \equiv \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \quad (84.8)$$

Тогда уравнения Минковского записываются в следующей ковариантной форме:

$$d\mathcal{P}^\mu/d\tau = \mathcal{F}^\mu. \quad (84.9)$$

Замечая, что $d\tau = dt(1-u^2/c^2)^{1/2}$, и вводя обозначение

$$\mathbf{F} = \mathcal{F} \sqrt{1-u^2/c^2}, \quad (84.10)$$

уравнения Минковского можно записать и в следующей трехмерной форме

$$\frac{d}{dt}(mc^2) = (\mathbf{F}\mathbf{u}), \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) = \mathbf{F}. \quad (84.11)$$

Трактуя первое из уравнений (84.11) как теорему живых сил, мы видим, что *энергией частицы* в релятивистской механике следует назвать величину

$$E = mc^2, \quad (84.12)$$

а релятивистским импульсом — вектор

$$\mathbf{P} = m\mathbf{u}. \quad (84.13)$$

По аналогии с ньютоновским выражением для импульса величину m называют *инертной* или *динамической массой*. В отличие от собственной массы \mathcal{M} частицы она переменна, т. е. зависит от скорости u частицы в соответствии с (84.8) и, кроме того, является не скаляром, а временной компонентой 4-вектора. Таким образом, в трехмерной интерпретации уравнения релятивистской динамики описывают движение частицы с переменной массой $m(u)$, которая оказывается связанной с энергией E частицы соотношением (84.12). Последнее было впервые получено Эйнштейном и часто называется *соотношением эквивалентности энергии и массы*.

Задача 84.1. Вывести соотношение эквивалентности Эйнштейна, воспользовавшись допущением, что взаимодействие между частицами передается со скоростью света, а также приняв, что в дополнение к закону сохранения энергии выполняется закон сохранения инертной массы. Получить отсюда зависимость (84.8).

В связи с соотношением эквивалентности Эйнштейна обратим внимание на важную особенность релятивистской энергии $E = mc^2$: для неподвижной частицы она не обращается в нуль, как нерелятивистская кинетическая энергия $mu^2/2$, а оказывается равной постоянной величине

$$E_0 = \mathcal{M}c^2, \quad (84.14)$$

называемой *собственной энергией частицы*. Если в нерелятивистской механике энергия материальной точки определяется из теоремы

живых сил $dE = (\mathbf{u}d\mathbf{P})$ с точностью до аддитивной постоянной, то в релятивистской теории отбросить постоянную E_0 , не нарушив тензорных свойств E , очевидно, нельзя. В самом деле, разность $E - E_0$ уже не является компонентой какого-либо 4-тензора, поскольку E_0 — скаляр, а E — временная составляющая 4-вектора.

Отметим, что согласно определению (84.6) 4-импульса свободной частицы $\mathcal{P}^\mu = (E/c, \mathbf{P})$ его инвариантная длина связана с важной характеристикой частицы — ее собственной массой \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} = (\mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu)^{1/2}/c = (E^2 - c^2 \mathbf{P}^2)^{1/2}/c^2 = \text{inv}. \quad (84.15)$$

Задача 84.2. Показать, что элемент объема $d\Gamma$ фазового пространства частицы с собственной массой \mathcal{M} , определяемый как

$$d\Gamma = d\mathcal{P}^1 d\mathcal{P}^2 d\mathcal{P}^3 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (84.16)$$

является инвариантом ортохронных преобразований Лоренца. Показать также, что инвариантом собственных преобразований Лоренца является величина

$$d\sigma_{\mathcal{P}} = d\mathcal{P}^1 d\mathcal{P}^2 d\mathcal{P}^3 / \mathcal{P}^0. \quad (84.17)$$

§ 85. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Если материальная точка обладает электрическим зарядом e и находится во внешнем электромагнитном поле, то на нее действует сила Лоренца, которую необходимо записать в четырехмерной ковариантной форме, т. е. выразить 4-вектор силы \mathcal{F} через тензор $F^{\mu\nu}$ электромагнитного поля и 4-скорость U частицы.

Известно, что всегда можно однозначно восстановить 4-вектор силы \mathcal{F} по нерелятивистской силе \mathbf{F} . Существует несколько методов такого восстановления. Самый наглядный среди них — *прямой метод*. Он состоит в следующем. Допустим, что в некоторый момент времени t_0 частица имеет скорость \mathbf{u} . Тогда можно рассмотреть ее движение в инерциальной системе отсчета Σ' , движущейся именно с этой скоростью.

Ясно, что для моментов времени, бесконечно мало отличающихся от момента t_0 , скорость частицы близка к \mathbf{u} , т. е. движение ее в системе Σ' заведомо нерелятивистское. Поэтому уравнения движения в системе Σ' имеют известную нерелятивистскую форму:

$$dE'/dt' = (\mathbf{u}'\mathbf{F}'), \quad d\mathbf{P}'/dt' = \mathbf{F}', \quad (85.1)$$

где предполагается известным вид силы \mathbf{F}' . Теперь, чтобы найти 4-вектор силы \mathcal{F} , достаточно лишь совершить переход к неподвижной системе отсчета.

Задача 85.1. Найти прямым методом 4-вектор силы Лоренца \mathcal{F} .

Однако на практике прямым методом пользуются довольно редко из-за его громоздкости, тем более что в большинстве случаев удается восстановить 4-силу \mathcal{F} исходя лишь из принципа соответствия и требования релятивистской ковариантности. Покажем, что таким путем можно восстановить и 4-вектор силы Лоренца.

Замечая, что нерелятивистская сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + [\mathbf{uB}]/c) \quad (85.2)$$

линейна по электромагнитному полю, попытаемся построить 4-вектор силы \mathcal{F} так, чтобы он был линейен по тензору $F^{\mu\nu}$ электромагнитного поля. Поскольку из других тензоров, согласно (85.2), можно использовать лишь 4-вектор скорости U частицы, то единственное приемлемое выражение для \mathcal{F}^μ имеет вид

$$\mathcal{F}^\mu = \alpha F^{\mu\nu} U_\nu, \quad (85.3)$$

где постоянная α должна определяться из принципа соответствия*.

В пределе медленных движений выражение (85.3) сводится к следующему:

$$\mathcal{F}^\mu = \alpha \{(\mathbf{E}\mathbf{u}), c\mathbf{E} + [\mathbf{uB}]\},$$

и его сравнение с (85.2) показывает, что необходимо выбрать $\alpha = e/c$, т. е.

$$\mathcal{F}^\mu = eF^{\mu\nu} U_\nu/c. \quad (85.4)$$

Таким образом, уравнения Минковского, описывающие движение заряда в электромагнитном поле, принимают вид

$$\mathcal{M} \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} U_\nu. \quad (85.5)$$

Отделяя в (85.5) временную и пространственные компоненты, находим:

$$\mathcal{M} \frac{dU^0}{d\tau} = \frac{e}{c} (\mathbf{UE}), \quad \mathcal{M} \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \frac{e}{c} \{U^0\mathbf{E} + [\mathbf{UB}]\}, \quad (85.6)$$

или после подстановки $d\tau = dt(1 - u^2/c^2)^{1/2}$ и введения инертной массы m :

$$\frac{d}{dt}(mc^2) = e(\mathbf{uE}), \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{uB}]\right). \quad (85.7)$$

Временное уравнение в (85.7), очевидно, представляет собой *релятивистскую теорему живых сил* и получается из пространственных уравнений скалярным умножением на \mathbf{u} .

Задача 85.2. Найти закон движения заряженной частицы массы \mathcal{M} в параллельных электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{B} полях, которые считаются постоянными и однородными

В заключение отметим, что в полученных релятивистских уравнениях движения заряда во внешнем электромагнитном поле не учитывается собственное поле заряда, т. е. сила реакции излучения считается пренебрежимо малой. Такое предположение оправдано только для движений в слабых электромагнитных полях, когда ускорения, испытываемые заряженной частицей, малы. В дальнейшем мы снимем это ограничение и получим релятивистское выражение для силы реакции излучения.

* Другая возможная комбинация $\tilde{F}^{\mu\nu}U_\nu$, также линейная по $F^{\mu\nu}$, отпадает, так как является псевдовектором.

§ 86. ЛАГРАНЖЕВА ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Полученные выше релятивистские уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле, так же как и соответствующие нерелятивистские уравнения, могут быть выведены из принципа наименьшего действия, т. е. записаны в лагранжевой форме. Как известно из классической механики, для голономных систем, подверженных действию консервативных сил, можно построить главную функцию Гамильтона, или функцию действия,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt, \quad (86.1)$$

выражаемую через лагранжиан L системы, являющийся некоторой функцией обобщенных координат q и скоростей \dot{q} . В частности, для точечной частицы массы \mathcal{M} , движущейся в силовом поле с потенциальной функцией $V(\mathbf{r})$, лагранжиан равен

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathcal{M} \dot{\mathbf{r}}^2 / 2 - V(\mathbf{r}). \quad (86.2)$$

При этом основные уравнения механики имеют вид уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (86.3)$$

которые могут быть получены из вариационного принципа

$$\delta S = 0 \quad (86.4)$$

при дополнительном условии $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.

В релятивистском случае вариационный принцип (86.4) должен быть представлен в лоренц-ковариантной форме. Для этого необходимо, чтобы действие S было релятивистским скаляром. Если рассматривается движение частицы во внешнем поле, то, как известно из классической механики, элементарное действие dS можно записать в виде

$$dS = (\mathbf{P} d\mathbf{r}) - H dt,$$

где \mathbf{P} — обобщенный импульс частицы, H — гамильтониан. dS можно представить в форме скалярного произведения:

$$dS = - \mathcal{P}_\mu dx^\mu, \quad (86.5)$$

если ввести 4-вектор $\mathcal{P}^\mu = (H/c, \mathbf{P})$. В частности, для свободной частицы собственной массы \mathcal{M} имеем $\mathcal{P} = \mathcal{M}U$, поэтому

$$dS = - \mathcal{M}U_\mu dx^\mu = - \mathcal{M}U_\mu U^\mu d\tau = - \mathcal{M}c^2 d\tau.$$

Таким образом, для свободной релятивистской частицы

$$L = dS/dt = - \mathcal{M}c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (86.6)$$

В нерелятивистском пределе ($u \ll c$) лагранжиан сводится к

$$- \mathcal{M}c^2 + \mathcal{M}u^2/2 + \dots,$$

т. е., с точностью до аддитивной постоянной, к кинетической энергии частицы.

Чтобы установить структуру обобщенного 4-импульса \mathcal{P} для заряженной частицы в электромагнитном поле, заметим, что лагранжиан L , отвечающий нерелятивистскому движению заряда e в электростатическом поле с потенциалом φ , содержит член $-e\varphi$. Таким образом, обобщенный 4-импульс \mathcal{P} должен быть линейным по электромагнитным потенциалам. Единственным таким 4-вектором будет лишь комбинация вида

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}U + \alpha A. \quad (86.7)$$

Следовательно, член $-e\varphi$ появится в лагранжиане при $\alpha = e/c$. Итак, в присутствии электромагнитного поля

$$\mathcal{P}^\mu = \mathcal{M}U^\mu + eA^\mu/c, \quad (86.8)$$

что приводит к функции Лагранжа

$$L = - \mathcal{M}c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2} - e\varphi + e(\mathbf{u}\mathbf{A})/c \quad (86.9)$$

и функции действия

$$S = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\mathcal{M}c^2 + \frac{e}{c} A_\mu U^\mu \right) d\tau. \quad (86.10)$$

Задача 86.1. Показать, что лагранжиан (86.9) приводит к правильным уравнениям движения заряженной частицы в электромагнитном поле.

В качестве поучительного примера использования релятивистских уравнений Лагранжа рассмотрим классическую задачу о бетатроне, т. е. задачу о движении заряженной частицы в переменном аксиально симметричном магнитном поле \mathbf{B} . Пусть в цилиндрических координатах r , α , z компоненты магнитной индукции \mathbf{B} имеют такой вид:

$$B_r = B_r(t, r, z); \quad B_\alpha = 0; \quad B_z = B_z(t, r, z).$$

Введем вектор-потенциал \mathbf{A} , положив

$$A_r = A_z = 0; \quad A_\alpha = A(t, r, z); \quad B_r = -\partial A/\partial z; \quad B_z = r^{-1}\partial(rA)/\partial r.$$

Тогда

$$A = \frac{1}{2\pi r} \int_0^r B_z 2\pi r dr \equiv \frac{\Phi}{2\pi r} \equiv \frac{r}{2} \langle B_z \rangle, \quad (86.11)$$

где Φ — магнитный поток сквозь окружность радиуса r ; $\langle B_z \rangle$ — средняя индукция магнитного поля внутри этой окружности.

Запишем теперь лагранжиан (86.9) в цилиндрических координатах:

$$L = - \mathcal{M}c^2 [1 - (\dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2)/c^2]^{1/2} + (e/c) r\dot{\alpha}A.$$

С его помощью получают следующие уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{r}) &= m r \dot{\alpha}^2 + \frac{e}{c} \dot{\alpha} r B_z, \\ \frac{d}{dt} \left(m r^2 \dot{\alpha} + \frac{e}{c} r A \right) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) &= -\frac{e}{c} r \dot{\alpha} B_r, \end{aligned} \quad (86.12)$$

где точкой обозначена полная производная по времени и введена инертная масса

$$m = \mathcal{M} [1 - (r^2 + r^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2)/c^2]^{-1/2}.$$

Выясним теперь возможность существования стационарной круговой орбиты $z=0$, $r=R$. В этом случае уравнения (86.12) будут удовлетворены, если $B_r=0$, т. е. $B_z=B$, и

$$m\dot{\alpha} + \frac{e}{c} B = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(m R \dot{\alpha} + \frac{e}{c} A \right) = 0. \quad (86.13)$$

Отсюда с учетом (86.11) находим необходимое условие существования стационарной круговой орбиты, получившее название *бета-тронного условия*:

$$\frac{d}{dt} \left(B - \frac{1}{2} \langle B \rangle \right) = 0. \quad (86.14)$$

Оно означает, что индукция магнитного поля на стационарной круговой орбите меняется в два раза медленнее, чем средняя индукция внутри орбиты. Если в начальный момент времени $B=0$, то из (86.14) получается более простое *условие Видероз*:

$$2B = \langle B \rangle. \quad (86.15)$$

Найдем закон изменения энергии частицы $E = mc^2$ с изменением индукции B магнитного поля. Для этого достаточно воспользоваться теоремой живых сил

$$\frac{d}{dt}(mc^2) = -\frac{e}{c} R \dot{\alpha} A$$

и исключить $\dot{\alpha}$ с помощью (86.13). Тогда

$$\frac{d}{dt}(E^2) = -2emcR\dot{\alpha}A = \frac{d}{dt}(e^2R^2B^2),$$

что соответствует следующему закону изменения энергии с ростом индукции магнитного поля:

$$E = (e^2R^2B^2 + \text{const})^{1/2}. \quad (86.16)$$

§ 87. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Релятивистские уравнения движения заряда в электромагнитном поле можно также представить в форме канонических уравнений Гамильтона:

$$q_i = \partial H / \partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i. \quad (87.1)$$

Для этого следует, пользуясь лагранжианом (86.9), определить канонические обобщенные импульсы:

$$p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i, \quad (87.2)$$

разрешить уравнения (87.2) относительно обобщенных скоростей q_i и, наконец, построить гамильтониан системы

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad (87.3)$$

выразив его через обобщенные координаты и импульсы q_i , p_i .

Однако в декартовых координатах эту процедуру можно сократить, воспользовавшись соотношением (86.8) и тождеством $U_\mu U^\mu = = c^2$. Учитывая, что обобщенный 4-импульс \mathcal{P} имеет компоненты $\mathcal{P}^\mu = (H/c, \mathbf{P})$, находим

$$\mathcal{M}^2 U_\mu U^\mu = \mathcal{M}^2 c^2 = (\mathcal{P}_\mu - eA_\mu/c)(\mathcal{P}^\mu - eA^\mu/c) = (H - e\varphi)^2/c^2 - (\mathbf{P} - e\mathbf{A}/c)^2. \quad (87.4)$$

Разрешая (87.4) относительно H , получаем

$$H = c [(\mathbf{P} - e\mathbf{A}/c)^2 + \mathcal{M}^2 c^2]^{1/2} + e\varphi. \quad (87.5)$$

Найденное выражение и представляет собой функцию Гамильтона, соответствующую релятивистскому движению заряженной частицы в электромагнитном поле.

Задача 87.1. Получить канонические уравнения Гамильтона, отвечающие гамильтониану (87.5)

Замечая, что $\mathbf{P} - (e/c)\mathbf{A} = \mathcal{M}\mathbf{U}$, в нерелятивистском случае выражение (87.5) можно упростить, воспользовавшись малостью отношения

$$(\mathbf{P} - e\mathbf{A}/c)^2 / (\mathcal{M}^2 c^2) \ll 1$$

Ограничившись первым негравитальным членом разложения, имеем

$$H \approx \mathcal{M}c^2 + \frac{1}{2\mathcal{M}} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi, \quad (87.6)$$

что при отсутствии магнитного поля ($\mathbf{A} = 0$) совпадает с обычным нерелятивистским гамильтонианом с точностью до аддитивной постоянной $\mathcal{M}c^2$.

На основании выражения (87.5) нетрудно получить и релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби для функции действия S . Для этого заметим, что [см. (86.5)]

$$\mathcal{P}_\mu = -\partial_\mu S. \quad (87.7)$$

Поэтому подстановка (87.7) в (87.4) дает

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 c^2 &= \left(\partial_\mu S + \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(\partial^\mu S + \frac{e}{c} A^\mu \right) = \\ &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi \right)^2 - \left(\nabla S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2, \end{aligned} \quad (87.8)$$

т. е. релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби для заряда в электромагнитном поле.

Задача 87.2. Исследовать методом Гамильтона — Якоби движение электрона в кулоновском поле ядра с порядковым номером Z .

§ 88. СИЛА РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Как уже отмечалось выше, в уравнениях движения (85.5) учитывается лишь внешнее электромагнитное поле $F^{\mu\nu}$, действующее на заряд e , но игнорируется поле излучения самого заряда. Иными словами, в этих уравнениях не учитывается сила реакции излучения, которая в нерелятивистском случае, согласно (47.8), равна

$$\mathbf{F}_R = 2e^2 \ddot{\mathbf{u}} / (3c^3). \quad (88.1)$$

В релятивистском случае, когда скорость частицы сравнима со скоростью света, это выражение должно быть обобщено и заменено 4-вектором \mathcal{F}_R , сводящимся к (88.1) лишь в пределе медленных движений.

Имея в виду, что всегда можно однозначно восстановить 4-вектор \mathcal{F}_R по его нерелятивистскому аналогу \mathbf{F}_R , применив прямой метод (см. § 85), попытаемся выявить структуру релятивистской силы реакции излучения, наложив условие, чтобы в мгновенно сопутствующей системе отсчета она имела компоненты

$$\mathcal{F}'^{\mu} = (0, \mathbf{F}'_R). \quad (88.2)$$

Из структуры \mathbf{F}_R следует, что \mathcal{F}_R может зависеть лишь от характера движения заряда, но не от вида внешних сил. Иначе говоря, в \mathcal{F}_R могут входить различные производные от U , но не выше второго порядка. Всем этим условиям, очевидно, удовлетворяет 4-вектор

$$\mathcal{F}_R = \alpha \frac{d^2 U}{d\tau^2} + \beta \frac{dU}{d\tau} + \gamma U, \quad (88.3)$$

где α , β , γ — некоторые скалярные функции, зависящие от $dU/d\tau$ и U^* .

Заметим теперь, что \mathcal{F}_R , как любой 4-вектор силы, должен удовлетворять условию (84.3):

$$U_{\mu} \mathcal{F}_R^{\mu} = 0. \quad (88.4)$$

Поэтому, подставляя (88.3) в (88.4), находим

$$\alpha U_{\mu} \frac{d^2 U^{\mu}}{d\tau^2} + \beta U_{\mu} \frac{dU^{\mu}}{d\tau} + \gamma U_{\mu} U^{\mu} = 0.$$

Отсюда с учетом тождества (84.2) и вытекающего из него соотношения

$$\frac{d}{d\tau} \left(U_{\mu} \frac{dU^{\mu}}{d\tau} \right) = \frac{dU_{\mu}}{d\tau} \frac{dU^{\mu}}{d\tau} + U_{\mu} \frac{d^2 U^{\mu}}{d\tau^2} = 0$$

* Еще одна возможная комбинация $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} U_{\nu} \frac{dU_{\sigma}}{d\tau} \frac{d^2 U_{\lambda}}{d\tau^2}$ нами отброшена, так как является псевдовектором.

получим

$$\gamma = -\frac{\alpha}{c^2} U_\mu \frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} = \frac{\alpha}{c^2} \frac{dU_\mu}{d\tau} \frac{dU^\mu}{d\tau}. \quad (88.5)$$

Таким образом, нам остается определить лишь две скалярные функции: α и β . Воспользуемся для этого свойством нечетности \mathcal{F}_R при отражении времени:

$$\mathcal{F}_R(-\tau) = -\mathcal{F}_R(\tau), \quad (88.6)$$

вытекающим из аналогичного свойства \mathbf{F}_R . Для того чтобы структура (88.3) была согласована с (88.6), необходимо, чтобы функции α и β обладали следующими свойствами симметрии:

$$\alpha(-\tau) = \alpha(\tau), \quad \beta(-\tau) = -\beta(\tau). \quad (88.7)$$

Поскольку α и β можно строить только из U и $dU/d\tau$, то из (88.7) следует, что β должно быть пропорциональным $U_\mu dU^\mu/d\tau = 0$, т. е. $\beta \equiv 0$, а α может быть произвольной функцией от инварианта $(dU/d\tau)^2$, который в нерелятивистском пределе сводится к $-\dot{\mathbf{u}}^2$. Однако сравнение с (88.1) показывает, что в этом пределе α совпадает с постоянной $2e^2/(3c^3)$, т. е. не может зависеть от $\dot{\mathbf{u}}^2$. Таким образом, $\alpha = 2e^2/(3c^3)$ и с учетом (88.5) получаем окончательно

$$\mathcal{F}_R^\mu = \frac{2e^2}{3c^3} \left[\frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} + \frac{U^\mu}{c^2} \left(\frac{dU_\nu}{d\tau} \frac{dU^\nu}{d\tau} \right) \right]. \quad (88.8)$$

Задача 88.1. Получить формулу (88.8) прямым методом.

Теперь уже нетрудно записать и релятивистские уравнения движения заряда в электромагнитном поле с учетом силы реакции излучения. Для этого достаточно добавить 4-силу \mathcal{F}_R в правую часть уравнений Минковского (85.5):

$$\mathcal{M} \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} U_\nu + \frac{2e^2}{3c^3} \left[\frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} + \frac{U^\mu}{c^2} \left(\frac{dU^\nu}{d\tau} \right)^2 \right]. \quad (88.9)$$

Эти уравнения движения впервые были получены в 1938 г. английским физиком *П. А. М. Дираком* и обычно называются *классическими уравнениями движения Дирака—Лоренца*.

Задача 88.2. Показать, что скорость потерь энергии заряженной частицы на излучение является инвариантом и определяется формулой

$$P_E = -\frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{dU}{d\tau} \right)^2. \quad (88.10)$$

В качестве полезного примера использования уравнений движения (88.9) рассмотрим задачу о синхротронном излучении, т. е. об излучении ультрарелятивистского заряда, движущегося в сильном магнитном поле \mathbf{B} . В этом случае скорость заряда близка к скорости света, т. е. $u \approx c$ и $U^0 \approx |\mathbf{U}| \gg c$. В первом приближении примем, что заряд e движется по окружности некоторого радиуса R поперек магнитного поля \mathbf{B} , а сила реакции излучения оказывает незначительное влияние на характер его движения, т. е. ее можно считать малой по сравнению с силой Лоренца.

Чтобы убедиться в обоснованности этого допущения, запишем в указанном приближении пространственную часть уравнений (88.9):

$$\mathcal{M} \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \frac{e}{c} [\mathbf{U}\mathbf{B}], \quad (88.11)$$

Поскольку $(\mathbf{U}\mathbf{B}) = 0$ и для движения по окружности радиуса R

$$|d\mathbf{U}/d\tau| = |\mathbf{U}|^2/R,$$

то из (88.11) выводим

$$\left| \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} \right| = \frac{|\mathbf{U}|^2}{R} = \frac{eB}{\mathcal{M}c} |\mathbf{U}|. \quad (88.12)$$

Таким образом, энергия частицы оказывается связанной с радиусом орбиты соотношением

$$E = \mathcal{M}cU^0 \approx \mathcal{M}c |\mathbf{U}| = eRB. \quad (88.13)$$

Оценим теперь $|\mathfrak{F}_R|$. Дифференцируя (88.11) по τ , находим

$$\left| \frac{d^2\mathbf{U}}{d\tau^2} \right| = \frac{eB}{\mathcal{M}c} \left| \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} \right| = \left(\frac{eB}{\mathcal{M}c} \right)^2 |\mathbf{U}|. \quad (88.14)$$

Наконец, из уравнений (88.9), записанных в форме

$$\mathcal{M} \frac{dU^0}{d\tau} = \frac{1}{U^0} (\mathbf{U}\mathfrak{F}_R), \quad \mathcal{M} \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \frac{e}{c} [\mathbf{U}\mathbf{B}] + \mathfrak{F}_R, \quad (88.15)$$

следует, что отношения

$$\lambda \equiv \frac{|\mathfrak{F}_R|}{e|\mathbf{U}\mathbf{B}|/c}, \quad \mu \equiv \frac{|dU^0/d\tau|}{|d\mathbf{U}/d\tau|}$$

должны быть одного порядка малости. Поэтому второе слагаемое в (88.8) для \mathfrak{F}_R приближенно равно

$$-\frac{2e^2}{3c^5} \mathbf{U} \left(\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} \right)^2 = -\frac{2e^2}{3c^5} \mathbf{U} |\mathbf{U}|^2 \left(\frac{eB}{\mathcal{M}c} \right)^2$$

и тем самым намного (в $|\mathbf{U}|^2/c^2$ раз) превосходит первое слагаемое, пропорциональное (88.14). В результате получается следующая оценка для интересующего нас отношения:

$$\lambda \approx \frac{2e^3 |\mathbf{U}|^2 B}{3\mathcal{M}^2 c^6} = \frac{2e^3}{3\mathcal{M}^2 c^4} \left(\frac{E}{\mathcal{M}c^2} \right)^2 B. \quad (88.16)$$

В частности, для электрона

$$\lambda \approx 10^{-16} [E/(\mathcal{M}c^2)]^2 B,$$

т. е. $\lambda \ll 1$ для практически достижимых значений энергии электрона и индукции магнитного поля.

Подсчитаем теперь скорость энергетических потерь на излучение. Согласно (88.15) и (88.16), имеем

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{c^2}{U_0^2} (\mathbf{U}\mathfrak{F}_R) = \lambda e c B = \frac{2e^4}{3\mathcal{M}^2 c^3} \left(\frac{E}{\mathcal{M}c^2} \right)^2 B^2,$$

или в другой форме, с учетом (88.13),

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2c}{3R^3} \left(\frac{E}{Mc^2} \right)^4. \quad (88.17)$$

Таким образом, скорость потерь энергии на синхротронное излучение пропорциональна четвертой степени энергии заряженной частицы*.

Практически важным показателем являются относительные потери энергии частицы на излучение за один оборот:

$$-\frac{\Delta E}{E} = -\frac{dE}{dt} \frac{2\pi R}{Ec} = 2\pi\lambda = \frac{4\pi e^3}{3Mc^4} \left(\frac{E}{Mc^2} \right)^2 B. \quad (88.18)$$

В частности, для электрона с энергией $E = 10$ ГэВ в магнитном поле с индукцией $B = 10^4$ Гс имеем

$$-\Delta E/E \approx 10^{-16} 2\pi [E/(Mc^2)]^2 B \approx 2,5 \cdot 10^{-3},$$

т. е. относительные потери энергии на излучение составляют 0,25% на оборот.

* Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974, § 10; Schott G. A. *Electromagnetic Radiation*. Cambridge, 1912, Иваненко Д. Д., Померанчук И. Я. О максимальной энергии, достижимой в бетатроне.—ДАН СССР, 1944, 44, с. 343.

ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ И РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ

Глава

8

В этой главе мы дадим релятивистскую формулировку законов сохранения энергии и импульса для электромагнитного поля, для системы зарядов, взаимодействующих посредством электромагнитного поля, и для произвольной системы взаимодействующих материальных частиц.

§ 89. ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Начнем с релятивистской формулировки теоремы Пойнтинга, рассмотренной в § 14 в трехмерном виде. Введем 4-вектор f плотности силы Лоренца, положив

$$f^\mu = c^{-1} F^{\mu\nu} j_\nu. \quad (89.1)$$

Подробно расписав это выражение, убеждаемся, что 4-вектор f имеет следующие компоненты:

$$f^\mu = \{(\mathbf{jE})/c, \rho\mathbf{E} + [\mathbf{jB}]/c\} = (q/c, \mathbf{f}), \quad (89.2)$$

т. е. его временная часть пропорциональна плотности тепловой мощности $q = (\mathbf{jE})$, выделяющейся в проводниках с током, а пространственная часть совпадает с плотностью силы Лоренца \mathbf{f} , действующей со стороны электромагнитного поля на распределенные заряды и токи.

Преобразуем теперь выражение (89.1) с помощью уравнений Максвелла — Лоренца. Полу-

чая из (79.2)

$$j^\alpha = \frac{c}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\alpha},$$

имеем

$$f_\nu = \frac{1}{c} F_{\nu\alpha} j^\alpha = \frac{1}{4\pi} F_{\nu\alpha} \partial_\mu F^{\mu\alpha},$$

или после тождественного преобразования

$$4\pi f_\nu = \partial_\mu (F_{\nu\alpha} F^{\mu\alpha}) - F^{\mu\alpha} \partial_\mu F_{\nu\alpha}. \quad (89.3)$$

Перестановка немых индексов $\alpha \leftrightarrow \mu$ с учетом антисимметрии $F^{\mu\alpha}$ позволяет привести второе слагаемое в (89.3) к виду

$$F^{\mu\alpha} \partial_\mu F_{\nu\alpha} = F^{\mu\alpha} (\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\nu})/2.$$

Но [см. (79.7)]

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = -\partial_\nu F_{\alpha\mu} = \partial_\nu F_{\mu\alpha},$$

так что

$$F^{\mu\alpha} \partial_\mu F_{\nu\alpha} = F^{\mu\alpha} \partial_\nu F_{\mu\alpha}/2 = \partial_\nu (F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})/4.$$

В результате соотношение (89.3) принимает вид

$$f_\nu = -\partial_\mu \Theta_\nu^\mu, \quad (89.4)$$

где введен тензор $\hat{\Theta}$ с компонентами

$$\Theta_\nu^\mu = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu (F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) \right], \quad (89.5)$$

важным свойством которого является исчезающий след

$$\text{Sp } \hat{\Theta} = \Theta_\mu^\mu \equiv 0. \quad (89.6)$$

Для дальнейшего будет более удобным перейти в (89.4) к контравариантным компонентам

$$f^\nu = -\partial_\mu \Theta^{\mu\nu}, \quad (89.7)$$

где

$$\Theta^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} (F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) \right]. \quad (89.8)$$

Очевидно, что тензор $\hat{\Theta}$ симметричен, т. е. $\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}$. Распишем его отдельные компоненты:

$$\begin{aligned} \Theta^{00} &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), & \Theta^{0i} &= \Theta^{i0} = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}]_i, \\ \Theta^{ik} &= -\frac{1}{4\pi} \left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right]. \end{aligned} \quad (89.9)$$

Таким образом, тензор $\hat{\Theta}$ имеет следующую пространственно-временную структуру:

$$\Theta^{\mu\nu} = \left\| \begin{array}{cc} \omega & c\mathbf{g} \\ \mathbf{S}/c & -\hat{\mathbf{T}} \end{array} \right\|, \quad (89.10)$$

где ω — плотность энергии электромагнитного поля, \mathbf{S} — вектор Пойнтинга, $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$ — плотность импульса электромагнитного поля, \hat{T} — тензор натяжений Максвелла. В связи с такой структурой тензор $\hat{\Theta}$ получил название *тензора энергии — импульса электромагнитного поля*.

Разделяя временную и пространственную части уравнения (89.7), убеждаемся, что оно является ковариантной записью известных соотношений (13.4) и (14.6):

$$f^k = -\partial g^k/\partial t + \partial_i T^{ik}, \quad q = -\partial\omega/\partial t - \text{div } \mathbf{S},$$

анализ которых позволил нам в свое время выяснить физический смысл ω , \mathbf{g} , \mathbf{S} и T^{ik} . Повторим теперь те же рассуждения, но уже в четырехмерной ковариантной форме.

Допустим, что источниками электромагнитного поля являются движущиеся заряженные частицы, сосредоточенные в некоторой ограниченной области V и обладающие полным 4-импульсом

$$\mathcal{P}_{(m)}^\mu = (E_{(m)}/c, \mathbf{P}_{(m)}).$$

Тогда теорему живых сил и второй закон Ньютона для системы зарядов можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}_{(m)}^\nu = \int_V f^\nu dV. \quad (89.11)$$

Однако эта запись не является релятивистски ковариантной. Чтобы сделать ее таковой, введем понятие *центра масс системы зарядов*, который движется как материальная точка с собственной массой $\mathcal{M} = (\mathcal{P}_{\mu(m)} \mathcal{P}_{(m)}^\mu)^{1/2} c^{-1}$, равной собственной массе системы, и 4-импульсом $\mathcal{P}_{(m)}$. 4-скорость центра масс, очевидно, равна $U = \mathcal{P}_{(m)}/\mathcal{M}$, и поэтому можно считать известной мировую линию центра масс $x^\mu(\tau)$, параметрически определяемую его собственным временем τ .

Построим теперь гиперплоскость $\sigma(\tau)$ с нормалью $n = U/c$, т. е. ортогональную мировой линии центра масс. Если dx^μ — элемент этой мировой линии, а $d\sigma^\mu$ — элемент гиперплоскости $\sigma(\tau)$, то [см. (74.8) и (74.11)] элемент 4-объема $d\Omega$ можно представить в виде

$$d\Omega = cd\tau dV = dx^\mu d\sigma_\mu = cd\tau d\sigma. \quad (89.12)$$

Вспомня, что $d\tau = dt(1 - u^2/c^2)^{1/2}$, где \mathbf{u} — скорость центра масс, из (89.12) выводим

$$d\sigma = dV(1 - u^2/c^2)^{-1/2}. \quad (89.13)$$

Таким образом, чтобы получить ковариантную формулировку уравнения (89.11), достаточно поделить его на $(1 - u^2/c^2)^{1/2}$:

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{P}_{(m)}^\nu = \int_\sigma f^\nu d\sigma. \quad (89.14)$$

Проинтегрируем уравнение (89.14) по τ от момента τ_1 до момента τ_2 , которым соответствуют гиперплоскости σ_1 и σ_2 (рис. 89.1), и учтем соотношения (89.7) и (89.12). В результате получим

$$\mathcal{P}_{(m)}^v[\sigma_2] - \mathcal{P}_{(m)}^v[\sigma_1] = \frac{1}{c} \int_{\Omega} f^v d\Omega = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} \partial_{\mu} \Theta^{\mu v} d\Omega, \quad (89.15)$$

где Ω — 4-объем, заключенный между гиперплоскостями σ_1 и σ_2 . Если считать, что в промежутке времени $\tau_2 - \tau_1$ электромагнитное поле сосредоточено в некоторой ограниченной области пространства*, то по теореме Гаусса — Остроградского (74.14) имеем

$$\int_{\Omega} \partial_{\mu} \Theta^{\mu v} d\Omega = \int_{\sigma_2} \Theta^{\mu v} d\sigma_{\mu} - \int_{\sigma_1} \Theta^{\mu v} d\sigma_{\mu}, \quad (89.16)$$

поскольку вклад гиперповерхности, замыкающей 4-объем Ω на пространственной бесконечности, равен нулю.

Подставляя (89.16) в (89.15), получаем

$$\mathcal{P}_{(m)}^v[\sigma_1] + \frac{1}{c} \int_{\sigma_1} \Theta^{\mu v} d\sigma_{\mu} = \mathcal{P}_{(m)}^v[\sigma_2] + \frac{1}{c} \int_{\sigma_2} \Theta^{\mu v} d\sigma_{\mu}, \quad (89.17)$$

т. е. 4-вектор

$$\mathcal{P}^v \equiv \mathcal{P}_{(m)}^v[\sigma] + \frac{1}{c} \int_{\sigma} \Theta^{\mu v} d\sigma_{\mu}$$

не зависит от выбора пространственно-подобной гиперплоскости σ и, следовательно, сохраняется во времени. В связи с этим равенство (89.17) естественно интерпретировать как закон сохранения энергии — импульса системы «источники + электромагнитное поле», а 4-вектор

$$\mathcal{P}_{(t)}^v[\sigma] \equiv \frac{1}{c} \int_{\sigma} \Theta^{\mu v} d\sigma_{\mu} \quad (89.18)$$

рассматривать как 4-импульс электромагнитного поля. Выбирая гиперплоскость σ ортогональной оси X^0 , получим

$$\mathcal{P}_{(t)}^v = \frac{1}{c} \int \Theta^{0v} dV, \quad (89.19)$$

т. е. 4-вектор $\mathcal{P}_{(t)}^{\mu} = (E_t/c, \mathbf{P}_t)$ имеет следующие компоненты:

$$E_t = \int \omega dV = W, \quad \mathbf{P}_t = \int \mathbf{g} dV = \mathbf{G}. \quad (89.20)$$

Задача 89.1. Показать, что 4-вектор $\mathcal{P}_{(t)}$ является времениподобным или изотропным.

Обратим внимание на неоднозначность выбора тензора энергии — импульса электромагнитного поля $\hat{\Theta}$. В самом деле, если рассмат-

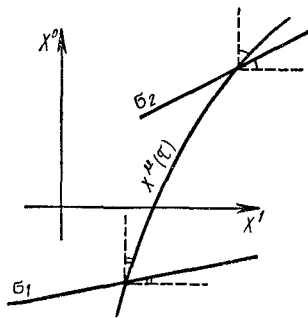


Рис. 89.1

* Системы с такими свойствами обычно называют *островными*.

ривать (89.7) как уравнение относительно $\Theta^{\mu\nu}$ при заданном f^ν , то наряду с тензором $\hat{\Theta}$, определяемым формулой (89.8), этому уравнению будет удовлетворять и всякий другой тензор вида

$$\bar{\Theta}^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\alpha X^{\alpha\mu\nu}, \quad (89.21)$$

если $X^{\alpha\mu\nu} = -X^{\mu\alpha\nu}$. Справедливость этого утверждения вытекает из очевидного тождества $\partial_\mu \partial_\alpha X^{\alpha\mu\nu} \equiv 0$.

Задача 89.2. Показать, что преобразование (89.21) не меняет величину 4-импульса (89.19) для островной системы.

Отмеченное обстоятельство имеет общий характер и присуще релятивистской теории поля (а не только электродинамике). Это объясняется тем, что в релятивистской теории поля закон сохранения энергии — импульса описывается уравнением типа (89.4), допускающим калибровочное преобразование (89.21). Обычно это преобразование используется для симметризации тензора энергии — импульса, если первоначально найденный тензор $\hat{\Theta}$ этим свойством не обладает. При этом для замкнутой системы полей всегда можно подобрать такой вспомогательный тензор $X^{\alpha\mu\nu}$, что будет справедливо равенство $\bar{\Theta}^{\mu\nu} = \bar{\Theta}^{\nu\mu}$ (см. § 95).

Однако построенный нами тензор (89.8) уже является симметричным, поэтому отпадает необходимость в выборе вспомогательного тензора $X^{\alpha\mu\nu}$. Оказывается, можно строго показать, что симметричные тензоры $\hat{\Theta}$ не допускают калибровочного преобразования (89.21) и, таким образом, определяются однозначно. Для доказательства воспользуемся следующим простым алгебраическим результатом.

Задача 89.3. Показать, что тензор третьего ранга $X^{\alpha\mu\nu}$, антисимметричный по первым двум индексам и симметричный по последним, тождественно равен нулю.

Таким образом, мы приходим к выводу, что требование симметрии тензора энергии — импульса определяет его однозначно. Остается лишь выяснить, на чем основано само это требование. Как было установлено в задаче 13.2, требование симметрии тензора натяжений Максвелла $T^{ik} = T^{ki}$ вытекает из закона сохранения момента импульса, поэтому остается доказать только равенство $\Theta^{0i} = \Theta^{i0}$, или в векторной форме

$$\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2, \quad (89.22)$$

известное как теорема Планка.

Задача 89.4. Доказать теорему Планка, исходя из симметрии тензора натяжений Максвелла.

Нетрудно видеть, что по своему физическому смыслу теорема Планка является выражением эквивалентности энергии и массы для электромагнитного поля. Это особенно ясно при сравнении (89.22) с релятивистским соотношением

$$\mathbf{P} = E\mathbf{u}/c^2, \quad (89.23)$$

вытекающим из (84.12) и (84.13).

§ 90. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ МАССЫ

Тот замечательный факт, что электромагнитное поле обладает энергией и импульсом, составляющими 4-вектор

$$\mathcal{P}_{(l)}^{\nu} = \frac{1}{c} \int_{\sigma} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_{\mu}, \quad (90.1)$$

привел многих физиков и, в частности, первооткрывателя электрона Дж. Дж. Томсона к заманчивой и простой идее об электромагнитном происхождении массы электрона*. Качественно электромагнитный механизм появления инертных свойств у электрона действительно выглядит очень просто: если неподвижный электрон окружен только электрическим полем, то движущийся — еще и магнитным, на создание которого необходимы некоторые затраты энергии. Однако более пристальный анализ проблемы показывает, что чисто электромагнитное объяснение массы электрона все же невозможно. Причин для этого несколько.

Прежде всего для вычисления электромагнитной массы электрона необходимо рассмотреть конкретную его модель, т. е. задать распределение зарядов и токов внутри электрона. В простейшей статической модели электрона, предложенной Г. Лоренцем и М. Абрагамом, $\rho = \rho(r)$, $\mathbf{j} = 0$, т. е. распределение заряда считается сферически симметричным**. Однако ясно, что отдельные элементы такого электрона, будучи одинаково заряженными, должны расталкиваться и для их сдерживания необходимо вводить какие-то дополнительные силы неэлектромагнитного происхождения. Очевидно, эти сдерживающие силы должны иметь какой-то материальный носитель, т. е. кроме электромагнитного должно существовать по крайней мере еще одно поле, взаимодействие которого с электромагнитным и приводит к появлению сдерживающих сил. Но всякое материальное поле обладает 4-импульсом $\mathcal{P}_{(m)}$, дающим вклад в полный 4-импульс системы $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{(m)} + \mathcal{P}_{(l)}$.

С отмеченным обстоятельством связана и другая трудность электромагнитной теории массы. Именно: при вычислении электромагнитного 4-импульса (90.1) обнаруживается, что результат зависит от выбора гиперплоскости интегрирования σ , т. е. не является однозначным. Чтобы понять причину неоднозначности, достаточно проинтегрировать уравнение (89.7) по некоторому 4-объему Ω , заключенному между двумя пространственно-подобными гиперповерхностями σ_1 и σ_2 (рис. 90.1), и преобразовать интеграл в поверхно-

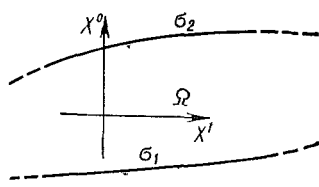


Рис. 90.1

* Thomson J. J. Recent Researches on Electricity and Magnetism. Oxford, 1893, p. 24.

** М. Абрагам (1902) считал электрон жестким, согласно же Г. Лоренцу форма электрона при движении менялась, а именно: сферическая поверхность переходила в эллипсоид Хевисайда (см. задачу 80.2).

стный с помощью теоремы Гаусса—Остроградского. В результате, предполагая островной характер системы, найдем

$$\int_{\Omega} f^{\nu} d\Omega = \int_{\sigma_1} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_{\mu} - \int_{\sigma_2} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_{\mu}. \quad (90.2)$$

Отсюда, поскольку $f^{\nu} \neq 0$, и вытекает, что электромагнитный 4-импульс $\mathcal{P}_{(t)}^{\nu}$ в общем случае зависит от выбора гиперповерхности интегрирования σ .

Однако указанный недостаток легко устраняется, если ввести вспомогательное поле, обуславливающее сдерживающие силы. Сопоставляя этому полю тензор энергии—импульса $\hat{\Theta}_{(m)}$ и 4-импульс

$$\mathcal{P}_{(m)}^{\nu} = \frac{1}{c} \int_{\sigma} \Theta_{(m)}^{\mu\nu} d\sigma_{\mu}, \quad (90.3)$$

можно определить сдерживающие силы равенством $f_{\text{сдер}}^{\nu} = -f^{\nu}$ и по аналогии с (89.7) положить

$$f_{\text{сдер}}^{\nu} = -\partial_{\mu} \Theta_{(m)}^{\mu\nu} = -f^{\nu}. \quad (90.4)$$

Подставляя (90.4) в (90.2) и применяя теорему Гаусса—Остроградского (74.14), находим

$$\int_{\sigma_1} T^{\mu\nu} d\sigma_{\mu} = \int_{\sigma_2} T^{\mu\nu} d\sigma_{\mu}, \quad (90.5)$$

где введен полный тензор энергии—импульса системы $\hat{T} \equiv \hat{\Theta}_{(m)} + \hat{\Theta}$, согласно (90.4) и (89.7) удовлетворяющий дифференциальному закону сохранения

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (90.6)$$

Равенство (90.5), вытекающее из (90.6) в предположении островного характера системы, известно как *теорема Беккера*. Оно выражает закон сохранения полного 4-импульса системы

$$\mathcal{P}^{\nu} = \mathcal{P}_{(m)}^{\nu} + \mathcal{P}_{(t)}^{\nu} = \frac{1}{c} \int_{\sigma} T^{\mu\nu} d\sigma_{\mu} \quad (90.7)$$

и независимость последнего от выбора поверхности интегрирования σ . В частности, считая σ гиперплоскостью σ_0 , ортогональной оси X^0 , получаем обычно используемое выражение для 4-импульса:

$$\mathcal{P}^{\nu} = \frac{1}{c} \int T^{0\nu} dV = \frac{1}{c} \int (\Theta_{(m)}^{0\nu} + \Theta^{0\nu}) dV. \quad (90.8)$$

Таким образом, на основании теоремы Беккера указанное выше противоречие разрешается.

Между тем, если не вводить сдерживающие силы, но условиться о выборе единственной поверхности интегрирования σ , например гиперплоскости σ_0 , ортогональной к оси X^0 , то противоречие все же возникнет [и вновь в связи с уравнением (90.2)]. Чтобы лучше понять причину этого, полезно сначала ознакомиться с двумя пространственными точками зрения на преобразования Лоренца.

Пусть некоторый объект \mathfrak{D} описывается набором физических величин $X = \{A, B, C, \dots\}$, являющихся компонентами некоторых 4-тензоров. При преобразовании Лоренца набор X перейдет в новый набор $X' = \{A', B', C', \dots\}$, являющийся некоторой функцией старого. Возникающие при этом отношения между наборами X, X' и объектом \mathfrak{D} могут рассматриваться с двух различных точек зрения, отождествление которых приводит к принципу относительности*.

1. *Пассивная точка зрения*, или точка зрения двух наблюдателей, рассматривает наборы X и X' как соответствующие одному и тому же объекту \mathfrak{D} , описываемому двумя разными наблюдателями из своих систем отсчета Σ и Σ' . Таким образом, получается соответствие

$$\mathfrak{D} \begin{cases} \nearrow X \rightarrow \Sigma \\ \searrow X' \rightarrow \Sigma' \end{cases}$$

2. *Активная точка зрения*, или точка зрения одного наблюдателя, рассматривает наборы X и X' как соответствующие двум тождественным объектам \mathfrak{D} и \mathfrak{D}' , находящимся в различных состояниях и описываемым из одной системы отсчета Σ . В этом случае имеем соответствие

$$\begin{matrix} \mathfrak{D} \rightarrow X & \searrow & \Sigma \\ \mathfrak{D}' \rightarrow X' & \nearrow & \end{matrix}$$

В первом подходе преобразования Лоренца, связывающие наборы X и X' , осуществляют лишь «перевод» физических величин с языка наблюдателя в Σ на язык наблюдателя в Σ' . При этом уравнения для X также должны «переводиться» с одного языка на другой и форма их при этом может существенно меняться. Лишь с принятием принципа относительности, который в данном случае является дополнительным постулатом, из всех возможных уравнений отбираются те, форма которых при преобразованиях Лоренца остается неизменной.

Во втором же подходе вследствие тождественности объектов \mathfrak{D} и \mathfrak{D}' наборы X и X' должны соответствовать разным решениям одних и тех же уравнений. Таким образом, активная точка зрения предполагает, что преобразования Лоренца образуют *группу инвариантности* исходных уравнений, т. е. переводят одно их возможное решение в некоторое другое возможное же решение. Преобразования с такими свойствами были хорошо известны в физике еще до создания теории относительности. Классическим их примером являются канонические преобразования в механике, переводящие один возможный набор канонических переменных $X = \{q, p; t, H\}$, подчиняющихся уравнениям Гамильтона с гамильтонианом $H = H(t, q, p)$, в другой возможный набор канонических переменных $X' = \{q', p'; t', H'\}$, также подчиняющихся уравнениям Гамильтона, но с новым гамильтонианом $H' = H'(t', q', p')$. Можно сказать, что

* Bargmann V. Relativity — Reviews of Modern Physics, 1957, 29, p. 161.

с активной точки зрения, одним из ярких представителей которой был Лоренц, преобразования Лоренца рассматриваются как особого рода канонические преобразования, выделенные из всех других своей универсальностью.

Поскольку при активном преобразовании Лоренца система отсчета остается неизменной и физический смысл придается лишь непреобразованным координатам и времени, то становится понятной ошибочность широко распространенного мнения о том, что активная точка зрения содержит в себе принцип относительности Эйнштейна. На самом же деле последний предполагает единство активной и пассивной точек зрения, когда преобразованным пространственно-временным координатам придается такой же физический смысл, как и непреобразованным.

Вернемся теперь к электромагнитной теории массы, ограничившись статической моделью электрона и приняв, что при вычислении 4-импульса (90.1) выбирается фиксированная гиперплоскость σ_0 , ортогональная оси X^0 . Очевидно, такой выбор соответствует активной точке зрения на преобразования Лоренца, когда система отсчета остается неизменной, а преобразуются лишь полевые величины, т. е. $\Theta^{\mu\nu}$. Покажем, что так определенные компоненты 4-импульса

$$\mathcal{P}_{(t)}^\nu = \frac{1}{c} \int_{\sigma_0} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_\mu = \frac{1}{c} \int \Theta^{0\nu} dV \quad (90.9)$$

не образуют 4-вектор*. В самом деле, если считать, что 4-импульс (90.9) соответствует движущемуся электрону, то для неподвижного электрона

$$\mathcal{P}_{(t)}^{\nu'} = \frac{1}{c} \int \Theta'^{0\nu}(\mathbf{r}) dV,$$

или после переобозначения переменных интегрирования ($\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$)

$$\mathcal{P}_{(t)}^{\nu'} = \frac{1}{c} \int \Theta'^{0\nu}(\mathbf{r}') dV' \equiv \frac{1}{c} \int \Theta'^{\mu\nu}(x') d\sigma'_\mu. \quad (90.10)$$

Напомним, что σ_0 — гиперплоскость, ортогональная оси X^0 . Отсюда, используя тензорный закон преобразования $\Theta'^{\mu\nu}$ и $d\sigma'_\mu$ через $\Theta^{\alpha\beta}$ и $d\sigma_\alpha$, находим

$$\mathcal{P}_{(t)}^{\nu'} = \frac{1}{c} \int \Lambda_\beta^\nu \Theta^{\alpha\beta}(x) d\sigma_\alpha, \quad (90.11)$$

где Λ — матрица Лоренца, а гиперплоскость σ связана с σ_0 преобразованием Лоренца. Сравнивая (90.11) с (90.9), убеждаемся, что правильный закон преобразования $\mathcal{P}_{(t)}^{\nu'} = \Lambda_\mu^\nu \mathcal{P}_{(t)}^\mu$ получается лишь

* Во избежание недоразумений следует отметить, что при пассивных преобразованиях Лоренца 4-импульс $\mathcal{P}_{(t)}^\nu$ всегда ведет себя как 4-вектор по определению входящих в него $\Theta^{\mu\nu}$ и $d\sigma'_\mu$ как компонент соответствующих 4-тензоров. См.: Широков Ю. М. Релятивистская теория системы частиц. — Кандидатская диссертация. МГУ, 1951, гл. III.

в случае, когда

$$\int_{\sigma} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_{\mu} = \int_{\sigma_0} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_{\mu}. \quad (90.12)$$

Анализируя это соотношение в рамках статической модели электрона, немецкий физик *М. Лауэ* пришел к утверждению, ставшему известным как *теорема Лауэ*, которую можно сформулировать следующим образом.

Для того чтобы электромагнитный 4-импульс $\mathcal{P}_{(4)}^{\mu}$, вычисленный для статической модели электрона по формуле (90.9), преобразовывался как 4-вектор при активных преобразованиях Лоренца, необходимо и достаточно, чтобы в собственной системе отсчета электрона выполнялись условия

$$\int \Theta^{ik} dV = 0. \quad (90.13)$$

Задача 90.1. Доказать теорему Лауэ, опираясь на соотношения (90.2) и (90.12).

Однако из существования нулевого следа у тензора энергии — импульса электромагнитного поля

$$\Theta_{\mu}^{\mu} = \Theta_i^i + \Theta_0^0 = - \sum_{i=1}^3 \Theta^{ii} + w = 0$$

вытекает, что в любой электромагнитной модели электрона

$$\sum_{i=1}^3 \int \Theta^{ii} dV = \int w dV > 0,$$

т. е. условия теоремы Лауэ не выполнены. Поэтому компоненты электромагнитного 4-импульса $\mathcal{P}_{(4)}^{\mu}$, вычисленные для движущегося электрона, не удовлетворяют правильному релятивистскому соотношению (89.23).

Задача 90.2. Вычислить $\mathcal{P}_{(4)}^{\mu}$ в моделях электрона Абрагама и Лоренца. Убедиться в нарушении соотношения (89.23).

Итак, мы убедились, что электромагнитная теория массы без введения сдерживающих сил противоречива. Впервые в рамках статической модели электрона сдерживающие силы были введены *А. Пуанкаре*, который, по аналогии с гидродинамикой, предложил записывать их в виде

$$f_{\text{сдер}}^{\nu} = - \partial_{\mu} \Theta_{\text{P}}^{\mu\nu}. \quad (90.14)$$

При этом в собственной системе отсчета электрона

$$\Theta_{\text{P}}^{\mu\nu} = \text{diag}[0, p, p, p], \quad (90.15)$$

где p — давление Пуанкаре. Таким образом, в собственной системе сдерживающая сила равна $f_{\text{сдер}} = - \nabla p$ и условие равновесия имеет вид

$$p\mathbf{E} - \nabla p = 0. \quad (90.16)$$

Переписав (90.16) в произвольной системе отсчета как $f^{\nu} = -\int_{\text{сдер}}^{\nu}$, получаем дифференциальный закон сохранения энергии — импульса

$$\partial_{\mu}(\Theta^{\mu\nu} + \Theta_{\text{P}}^{\mu\nu}) \equiv \partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0. \quad (90.17)$$

Таким образом, полный тензор энергии-импульса $\hat{T} = \hat{\Theta} + \hat{\Theta}_{\text{P}}$ удовлетворяет условиям теоремы Беккера, что позволяет записать полный 4-импульс в виде

$$\mathcal{P}^{\mu} = \mathcal{P}_{\text{th}}^{\mu} + \mathcal{P}_{\text{P}}^{\mu} = \frac{1}{c} \int (\Theta^{0\mu} + \Theta_{\text{P}}^{0\mu}) dV. \quad (90.18)$$

Вычисляя его в собственной системе электрона, где $\mathbf{P} = 0$, находим собственную энергию E_0 электрона, которая вследствие (90.15) оказывается совпадающей с электростатической энергией:

$$E_0 = \int T^{00} dV = \int \Theta^{00} dV = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 dV. \quad (90.19)$$

Представляя электрон в виде шарика радиуса a , заряженного по поверхности зарядом e , имеем

$$E_0 = e^2/(2a), \quad (90.20)$$

что позволяет вычислить собственную массу электрона:

$$\mathcal{M} = E_0/c^2 = e^2/(2ac^2). \quad (90.21)$$

Обратно: задавшись собственной массой \mathcal{M} , с помощью (90.21) можно получить характерный размер

$$r_0 = e^2/(\mathcal{M}c^2) \approx 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (90.22)$$

условно называемый *электромагнитным радиусом электрона*.

Очевидно, в произвольной системе отсчета, в которой электрон имеет 4-скорость U , в соответствии с (90.18) и (90.21) полный 4-импульс электрона может быть записан в виде

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{th}} + \mathcal{P}_{\text{P}} = \mathcal{M}U = e^2U/(2ac^2). \quad (90.23)$$

При этом помимо электромагнитного 4-импульса \mathcal{P}_{th} существенный вклад в \mathcal{P} дает 4-импульс \mathcal{P}_{P} , обусловленный давлением Пуанкаре. В соответствии с вышесказанным каждый из этих 4-импульсов порознь не является 4-вектором относительно активных преобразований Лоренца — таковым является лишь полный 4-импульс. Что же касается собственной массы электрона (90.21), то в схеме Пуанкаре она является чисто электромагнитной.

§ 91. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ И ПОЛЕЙ

В предыдущих параграфах мы получили законы сохранения энергии и импульса для системы зарядов, взаимодействующих посредством электромагнитного поля. Рассмотрим теперь произвольную совокупность частиц, взаимодействующих посредством некоторой

системы полей, которой, по аналогии с электромагнитным случаем, припишем тензор энергии—импульса $\hat{\Theta}_{(t)}$, такой, что плотность 4-силы f^ν , действующей на частицы со стороны полей, оказывается равной

$$f^\nu = -\partial_\mu \Theta_{(t)}^{\mu\nu}. \quad (91.1)$$

Если, с другой стороны, по аналогии с (90.14), эту плотность 4-силы представить в виде дивергенции некоторого «материального» тензора $\hat{\Theta}_{(m)}$, то для полного тензора $\hat{T} = \hat{\Theta}_{(t)} + \hat{\Theta}_{(m)}$, очевидно, справедливо равенство

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (91.2)$$

В таком случае выполняются условия теоремы Беккера, что позволяет записать сохраняющийся полный 4-импульс в виде

$$\mathcal{P}^\nu = \frac{1}{c} \int T^{0\nu} dV = \frac{1}{c} \int (\Theta_{(t)}^{0\nu} + \Theta_{(m)}^{0\nu}) dV. \quad (91.3)$$

Обычно в полном 4-импульсе выделяют 4-импульсы отдельных материальных частиц $\mathcal{P}_{(n)}$ и 4-импульс полей $\mathcal{P}_{(t)}$, полагая

$$\mathcal{P} = \sum_n \mathcal{P}_{(n)} + \mathcal{P}_{(t)}, \quad (91.4)$$

или в компонентах:

$$E = \sum_n E_n + E_t, \quad (91.5)$$

$$\mathbf{P} = \sum_n \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_t, \quad (91.6)$$

где E_n —энергия n -й частицы; \mathbf{P}_n —ее трехмерный импульс; E_t и \mathbf{P}_t —соответственно энергия и трехмерный импульс полей, переносящих взаимодействие.

Производя такое разбиение полного 4-импульса, следует помнить (см. § 90) что каждый из 4-импульсов $\mathcal{P}_{(n)}$ или $\mathcal{P}_{(t)}$ в отдельности, вообще говоря, уже не является 4-вектором в отличие от полного 4-импульса \mathcal{P} . 4-векторами они будут лишь в случае, когда частицы практически не взаимодействуют друг с другом и с рассматриваемой системой полей. В самом деле, только тогда каждую частицу можно окружить некоторой замкнутой поверхностью S_n , в точках которой выполнено равенство

$$T^{\mu\nu} = 0. \quad (91.7)$$

Нетрудно видеть, что условия (91.7) и (91.2) эквивалентны условиям теоремы Беккера, поэтому можно определить 4-импульс частицы как

$$\mathcal{P}_{(n)}^\nu = \frac{1}{c} \int_{V_n} T^{\nu 0} dV,$$

т. е. произвести интегрирование по объему V_n , ограниченному поверхностью S_n . Из той же теоремы Беккера следует, что компоненты $\mathcal{P}_{(n)}^\nu$ образуют 4-вектор, т. е. справедливо соотношение (89.23).

Аналогично строится и 4-импульс полей, переносящих взаимодействие:

$$\mathcal{P}_{(f)}^\nu = \frac{1}{c} \int_{V_f} T^{\nu\sigma} dV,$$

где V_f — все пространство за вычетом областей V_n . Очевидно, что компоненты $\mathcal{P}_{(f)}^\nu$ также образуют 4-вектор.

Указанные выше условия (91.7) можно считать всегда выполненными в реальных физических экспериментах с элементарными частицами. В этих экспериментах обычно изучается взаимодействие частиц, выводимых из ускорителя, с частицами неподвижной мишени. Сам процесс взаимодействия падающих частиц с мишенью занимает ничтожные доли секунды, а большую часть времени частицы находятся в свободном состоянии. Поэтому если рассматривать состояния нашей системы частиц лишь в моменты времени, достаточно отдаленные от момента непосредственного взаимодействия (т. е. рассматривать либо сближение частиц, либо их разлет), то все частицы можно считать практически невзаимодействующими. Такие состояния принято называть *асимптотически свободными*.

Каждой системе взаимодействующих частиц можно сопоставить *инвариантную сохраняющуюся величину — собственную массу этой системы*

$$\mathcal{M} = \frac{1}{c} (\mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu)^{1/2} = \frac{1}{c^2} \left[\left(\sum_n E_n + E_f \right)^2 - c^2 \left(\sum_n \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_f \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (91.8)$$

Если же состояние асимптотически свободно, то можно определить и собственные массы поля и отдельных частиц:

$$\mathcal{M}_f = \frac{1}{c^2} (E_f^2 - c^2 \mathbf{P}_f^2)^{1/2}, \quad \mathcal{M}_n = \frac{1}{c^2} (E_n^2 - c^2 \mathbf{P}_n^2)^{1/2}. \quad (91.9)$$

Нетрудно убедиться, что имеет место неравенство

$$\mathcal{M} \geq \sum_n \mathcal{M}_n + \mathcal{M}_f, \quad (91.10)$$

выражающее *неаддитивность собственной массы*, т. е. несовпадение собственной массы системы с суммой собственных масс составляющих ее частей.

Для доказательства неравенства (91.10) выберем систему отсчета, связанную с центром масс системы частиц (коротко — система центра масс), в которой $\mathbf{P} = 0$. Тогда собственная масса системы равна

$$\mathcal{M} = \sum_n \mathcal{M}_n \gamma_n + E_f/c^2, \quad (91.11)$$

где $\gamma_n = (1 - \beta_n^2)^{-1/2}$, $c\beta_n = u_n$ — скорость n -й частицы в системе центра масс. Отсюда с учетом очевидных неравенств $\gamma_n \geq 1$ и $E_f \geq \mathcal{M}_f c^2$ и следует (91.10).

В современной теории элементарных частиц каждому полю сопоставляются особые частицы — кванты этого поля (в частности, электромагнитному полю сопоставляются *фотоны* — кванты света). Предполагая кванты поля асимптотически свободными, можно произвести разбиение:

$$\mathcal{P}_{(t)} = \sum_k \mathcal{P}_{(k)}$$

и таким образом свести систему частиц, взаимодействующих посредством поля, к совокупности свободных частиц. В этом случае неравенство (91.10) принимает вид

$$\mathcal{M} \geq \sum_i \mathcal{M}_i, \quad (91.12)$$

где \mathcal{M}_i — собственные массы асимптотически свободных частиц, включая и кванты поля*.

Так как скорость фотона $u = c$, то убеждаемся с помощью (89.23), что для него

$$\mathbf{P} = E\mathbf{u}/c^2 = E\mathbf{s}/c, \quad (91.13)$$

где \mathbf{s} — единичный вектор, направленный вдоль импульса фотона. Следовательно, собственная масса отдельного фотона равна нулю:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{c^2} (E^2 - c^2 \mathbf{P}^2)^{1/2} = 0. \quad (91.14)$$

Поэтому для совокупности фотонов неравенство (91.12) принимает вид

$$\mathcal{M} \geq 0, \quad (91.15)$$

т. е. собственная масса произвольного поля излучения, вообще говоря, отлична от нуля, хотя собственные массы отдельных фотонов, составляющих это поле, равны нулю. Этот результат легко понять, если с учетом (91.13) записать собственную массу совокупности фотонов**:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{1}{c^2} \left[\left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i E_i \mathbf{s}_i \right)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ \sum_{ik} E_i E_k [1 - (\mathbf{s}_i \mathbf{s}_k)] \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (91.16)$$

Это выражение равно нулю только в случае, когда все векторы \mathbf{s}_i одинаково направлены, т. е. все фотоны движутся в одном направлении. В общем же случае произвольно движущихся фотонов $(\mathbf{s}_i \mathbf{s}_k) < 1$ и $\mathcal{M} > 0$.

* Разность $\mathcal{M} - \sum_i \mathcal{M}_i$ обычно называется *дефектом массы*.

** См. также задачу 89.1.

Задача 91.1. Частица с массой \mathcal{M}_1 налетает на неподвижную частицу с массой \mathcal{M}_2 (мишень), и в результате их столкновения рождаются частицы с массами $\mathcal{M}'_i \neq 0$ ($i=1, 2, \dots$), т. е. идет реакция $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \rightarrow \sum_i \mathcal{M}'_i$. Найти порог реакции T_0 , т. е. минимальную кинетическую энергию налетающей частицы, при которой данная реакция может идти.

Задача 91.2. При описании реакций типа $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_4$ удобно использовать инвариантные переменные Мандельстама

$$s = (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)^2, \quad t = (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_3)^2, \quad u = (\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3)^2.$$

Показать, что они удовлетворяют тождеству $s + t + u = \sum_{i=1}^4 \mathcal{M}_i^2 c^2$, в свою очередь эквивалентному тождеству

$$(\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2) - (\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_3) - (\mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3) = (\mathcal{M}_4^2 - \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2 - \mathcal{M}_3^2) c^2 / 2. \quad (91.17)$$

Задача 91.3. Найти порог реакции $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \rightarrow \sum_i \mathcal{M}'_i + \gamma$, в которой рождается фотон γ с энергией E и частицы с массами $\mathcal{M}'_i \neq 0$.

§ 92. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Изучим более подробно релятивистский закон сохранения энергии для системы частиц и полей, выражаемый равенством (91.5):

$$\sum_n E_n + E_{\text{f}} = E = \text{const}. \quad (92.1)$$

Чтобы выяснить физический смысл входящих сюда величин, запишем $\sum_n E_n$ в нерелятивистском приближении, полагая $\beta_n \ll 1$:

$$\sum_n E_n = \sum_n \mathcal{M}_n c^2 (1 - \beta_n^2)^{-1/2} \approx \sum_n (\mathcal{M}_n c^2 + \mathcal{M}_n u_n^2 / 2). \quad (92.2)$$

Что касается полевой энергии E_{f} , то ее всегда можно представить в виде энергии взаимодействия источников, если предварительно выразить поля через источники, решив уравнения поля. Поэтому в нерелятивистском приближении полевая энергия E_{f} переходит в потенциальную энергию U взаимодействия частиц, как это имеет место, например, в электродинамике в квазистационарном случае (см. § 51) и как это видно из выражения (87.6) для гамильтониана заряда во внешнем электромагнитном поле. Таким образом, в нерелятивистском приближении

$$E = \sum_n \mathcal{M}_n c^2 + \left(\sum_n \mathcal{M}_n u_n^2 / 2 + U \right) \equiv \sum_n \mathcal{M}_n c^2 + E^{\text{нер}}, \quad (92.3)$$

где $E^{\text{нер}}$ — обычная нерелятивистская энергия системы взаимодействующих частиц.

Отсюда следует, что если не наблюдается превращений частиц друг в друга, т. е. $\sum_n \mathcal{M}_n$ остается неизменной, то в нерелятивистском приближении справедлив обычный закон сохранения энергии:

$E^{\text{нер}} = \text{const}$. Однако в том случае, когда наблюдаются взаимопревращения частиц, $\sum_n \mathcal{M}_n$ может измениться и закон сохранения энергии должен формулироваться в виде (92.3).

Учитывая все сказанное, в релятивистском случае удобно ввести понятие *активной энергии*

$$\mathcal{E} \equiv E - \mu c^2, \quad (92.4)$$

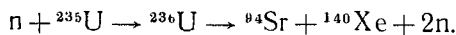
где $\mu \equiv \sum_i \mathcal{M}_i$ (все поля заменяются соответствующими частицами — квантами поля). Нетрудно видеть, что в нерелятивистском приближении при отсутствии превращений частиц активная энергия играет роль полной энергии и в различных макроскопических процессах именно она переходит в тепловую энергию. В связи с этим активную энергию вполне обоснованно можно назвать энергией в термодинамическом смысле.

При превращениях частиц активная энергия изменяется на величину

$$\Delta \mathcal{E} = - \Delta \mu c^2, \quad (92.5)$$

называемую *энергетическим выходом реакции*. Таким образом, *всякое уменьшение суммы собственных энергий системы частиц сопровождается увеличением активной энергии*. Этот закон порождения активной энергии системы за счет собственных энергий составляющих ее частиц лежит в основе всей ядерной энергетики. Для его иллюстрации обратимся к некоторым простейшим примерам.

Начнем с наиболее важной в практическом отношении ядерной реакции деления, которая осуществляется в топках атомных электростанций — атомных реакторах. Эта реакция происходит следующим образом. Ядро урана-235, поглощая медленный нейтрон, переходит в короткоживущее ядро урана-236, которое делится на два тяжелых ядра-осколка, испуская при этом два-три нейтрона. Например, если испускаются два нейтрона и образуются ядра стронция-94 и ксенона-140, эта реакция записывается следующим образом:



Применяя формулу (92.5), для энергетического выхода реакции получаем выражение

$$\Delta \mathcal{E} = c^2 (\mathcal{M}_U - \mathcal{M}_{\text{Sr}} - \mathcal{M}_{\text{Xe}} - \mathcal{M}_n) \quad (92.6)$$

Формулу (92.6) можно упростить, если ввести понятие *энергии связи ядра* $E_A^{\text{св}}$, которая только знаком отличается от активной энергии ядра, рассматриваемого как совокупность нуклонов. Так, если ядро имеет атомный номер A и состоит из Z протонов и $A - Z$ нейтронов, то его энергия связи равна

$$E_A^{\text{св}} \equiv - \mathcal{E}_A = [\mathcal{M}_p Z + \mathcal{M}_n (A - Z)] c^2 - \mathcal{M}_A c^2, \quad (92.7)$$

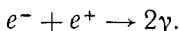
где \mathcal{M}_p и \mathcal{M}_n — собственные массы протона и нейтрона соответственно. С помощью (92.7) формулу (92.6) можно привести к прак-

тически более удобному виду:

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_U - \mathcal{E}_{Sr} - \mathcal{E}_{Xe}. \quad (92.8)$$

Используя опытные данные по энергиям связи интересующих нас ядер [^{235}U (1746 МэВ), ^{94}Sr (799 МэВ), ^{140}Xe (1141 МэВ)], для активной энергии, выделяющейся в урановом котле при каждом акте деления, находим $\Delta \mathcal{E} \approx 194$ МэВ

В качестве второго простейшего примера рассмотрим реакцию аннигиляции электрона и позитрона, т. е. их превращение в два фотона:



Очевидно, $\Delta m = -2m_e$, так как фотон не имеет собственной массы. Таким образом, выделяющаяся активная энергия равна

$$\Delta \mathcal{E} = 2m_e c^2 \approx 1 \text{ МэВ} \quad (92.9)$$

Часто в физической литературе процесс порождения активной энергии при превращениях частиц, сопровождающихся изменением суммы их собственных масс, называют «превращением массы в энергию». Однако подобная терминология не выражает содержания данного процесса и может привести лишь к ошибочным философским выводам о якобы исчезающей материи или уничтожимом движении.

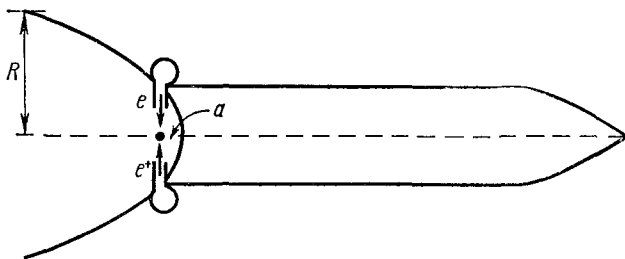


Рис. 92.1

На самом деле во всех таких процессах не изменяется ни релятивистская энергия E , ни релятивистская собственная масса системы M , т. е. никаких превращений массы в энергию не происходит. Если все же процесс порождения активной энергии обозначать термином «превращение», то можно лишь говорить о превращении скрытой внутренней энергии системы в ее активную форму. Мерой скрытой внутренней энергии системы является при этом сумма собственных энергий отдельных составных частей системы.

Задача 92.1. Фотонный звездолет массы M , работающий на реакции $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$, имеет параболический отражатель с фокусом a и радиусом раствора R (рис. 92.1). Каждую секунду вблизи фокуса происходит N аннигиляций электронов и позитронов, поступающих туда навстречу друг другу со скоростью v . Найти силу тяги двигателя и закон изменения скорости звездолета со временем.

§ 93. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВСТРЕЧНЫЕ ПУЧКИ

Одним из основных источников получения частиц высоких энергий в лабораторных условиях являются ускорители элементарных частиц. Современные ускорители представляют собой грандиозные сооружения, строительство и обслуживание которых требуют колоссальных затрат средств и энергетических ресурсов. О масштабах этих затрат можно судить на основании элементарной формулы

$$E = eBR,$$

вытекающей из (86.16) и выражающей энергию E ультрарелятивистской заряженной частицы, движущейся в магнитном поле B . Из этой формулы видно, что размеры ускорителя R растут линейно с энергией частицы, поскольку технических возможностей для увеличения магнитных полей в настоящее время почти не существует. Все это заставляет физиков либо искать новые методы ускорения элементарных частиц, либо более эффективно использовать частицы уже достигнутых энергий.

Последнее как раз и осуществляется в ускорителях на встречных пучках. Если в обычных ускорителях пучок ускоренных частиц направляется на неподвижную мишень, то здесь осуществляется лобовое столкновение двух встречных пучков (это могут быть либо пучки от двух отдельных ускорителей, либо, если это частицы разных по знаку зарядов, два встречных пучка в одном накопительном кольце). Оказывается, что таким способом — при заданной энергии ускоряемого пучка, значение которой ограничивается параметрами ускорителя, — можно многократно увеличить долю активной энергии, идущую на порождение новых элементарных частиц.

Чтобы проиллюстрировать возможности ускорителей на встречных пучках, рассмотрим процесс лобового столкновения двух частиц с массами \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 . Пусть \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 и \mathcal{P}'_1 , \mathcal{P}'_2 суть 4-импульсы наших частиц соответственно в лабораторной системе отсчета, где $\mathbf{P}_2 = 0$, и в системе центра масс, где $\mathbf{P}'_1 = -\mathbf{P}'_2$. Запишем в обеих системах очевидный инвариант

$$(\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2) = (\mathcal{P}'_1 \mathcal{P}'_2). \quad (93.1)$$

Тогда

$$E_1 \mathcal{M}_2 = E'_1 E'_2 / c^2 + (\mathbf{P}'_1)^2,$$

откуда, замечая, что

$$(\mathbf{P}'_1)^2 = (\mathbf{P}'_2)^2 = (E_1'^2 + E_2'^2) / (2c^2) - (\mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2) c^2 / 2,$$

находим

$$E_1 \mathcal{M}_2 = (E_1 + E_2)^2 / (2c^2) - (\mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2) c^2 / 2. \quad (93.2)$$

Вводя активные энергии частиц, т. е. полагая

$$\mathcal{E} \equiv E_1 - \mathcal{M}_1 c^2, \quad 2\mathcal{E}' \equiv E_1 + E_2 - (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) c^2,$$

из (93.2) получим

$$\mathcal{E} \mathcal{M}_2 c^2 = 2\mathcal{E}'^2 + 2\mathcal{E}' (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) c^2. \quad (93.3)$$

Для анализа этой формулы удобно перейти к безразмерным переменным $\varepsilon = \mathcal{E}/(m_2 c^2)$, $\varepsilon' = \mathcal{E}'/(m_2 c^2)$. Тогда (93.3) принимает вид

$$\varepsilon = 2\varepsilon'^2 + 2\varepsilon' (1 + m_1/m_2). \quad (93.4)$$

В нерелятивистском случае $\varepsilon' \ll 1$ и поэтому

$$\varepsilon \approx 2\varepsilon' (1 + m_1/m_2), \quad (93.5)$$

что для частиц одинаковой массы соответствует хорошо известному учетверению кинетической энергии при удвоении скорости.

Однако в ультрарелятивистском случае, когда $\varepsilon' \gg 1$, можно считать

$$\varepsilon \approx 2\varepsilon'^2, \quad (93.6)$$

т. е. $\varepsilon \gg \varepsilon'$. Это означает, что относительно незначительные затраты активной энергии ($2\varepsilon'$) при столкновении встречных пучков оказываются по своей эффективности эквивалентными намного большим (в ε' раз) затратам активной энергии (ε) в случае падения на неподвижную мишень. Это обстоятельство говорит о чрезвычайной эффективности ускорителей на встречных пучках в ультрарелятивистской области.

§ 94. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Как и уравнения механики, уравнения Максвелла могут быть записаны в лагранжевой форме, часто применяемой в современной теории поля. Для вывода полевых уравнений Лагранжа экономнее всего воспользоваться принципом наименьшего действия, или вариационным принципом. Важным преимуществом вариационного подхода является единообразие вывода как уравнений поля, так и вытекающих из них законов сохранения. Ради общности разумно сформулировать вариационный принцип для произвольного поля, а электромагнитное поле рассмотреть в качестве примера, иллюстрирующего общий метод.

Пусть n и некоторое поле описывается n независимыми функциями $u_s(x)$, $s = 1, 2, \dots, n$, пространственно-временных координат. В основе вариационного подхода к теории поля лежит выбор гамильтонова действия S , которое должно быть некоторым функционалом от поля и обычно берется в виде

$$S[u_s | \Omega] = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \mathcal{L}(u_s, \partial_\nu u_s) d\Omega. \quad (94.1)$$

Здесь Ω — некоторый 4-объем; \mathcal{L} — плотность функции Лагранжа, или лагранжева плотность, являющаяся релятивистски инвариантной функцией от поля и его первых производных.

Для формулировки вариационного принципа * зададим произвольное бесконечно малое преобразование координат и полей

$$\delta x^\mu(x) \equiv x'^\mu(x) - x^\mu, \quad \delta u_s(x) \equiv u'_s(x') - u_s(x). \quad (94.2)$$

Кроме *полной вариации поля* δu_s нам понадобится еще *вариация формы поля*, определяемая как

$$\delta u_s(x) \equiv u'_s(x) - u_s(x). \quad (94.3)$$

* Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1976; Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М., 1961.

Из (94.3) следует важное свойство вариации формы:

$$\bar{\delta} \partial_{\mu} u_s(x) \equiv \partial_{\mu} u'_s(x) - \partial_{\mu} u_s(x) = \partial_{\mu} \bar{\delta} u_s(x). \quad (94.4)$$

Ограничиваясь величинами первого порядка малости, имеем

$$\bar{\delta} u_s(x) = u'_s(x') - u_s(x) = (u'_s(x') - u'_s(x)) + (u'_s(x) - u_s(x)) \approx \delta u_s(x) - \partial_{\mu} u_s \delta x^{\mu}.$$

Таким образом, полная вариация связана с вариацией формы соотношением

$$\delta u_s = \bar{\delta} u_s + \partial_{\mu} u_s \delta x^{\mu}. \quad (94.5)$$

С помощью (94.4) и (94.5) нетрудно установить, что

$$\delta \partial_{\mu} u_s = \partial_{\mu} \bar{\delta} u_s + \delta x^{\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} u_s. \quad (94.6)$$

Получим, наконец, вариацию элементарного 4-объема $\delta d\Omega \equiv d\Omega' - d\Omega$, предварительно найдя якобиан \mathcal{J} преобразования координат с точностью до величин первого порядка малости по δx :

$$\mathcal{J} = \det \|\partial_{\mu} x'^{\nu}\| = \det \|\delta_{\mu}^{\nu} + \partial_{\mu} \delta x^{\nu}\| \approx \prod_{\nu=0}^3 (1 + \partial_{\nu} \delta x^{\nu}) \approx 1 + \partial_{\nu} \delta x^{\nu},$$

откуда

$$\delta d\Omega = d\Omega (\mathcal{J} - 1) = d\Omega \partial_{\mu} \delta x^{\mu}. \quad (94.7)$$

Теперь у нас есть все подготовительные формулы для вычисления вариации действия:

$$\begin{aligned} \delta S &= S' - S = \frac{1}{c} \int_{\Omega'} \mathcal{L}(u'_s(x'), \partial'_{\mu} u'_s(x')) d\Omega' - \\ &- \frac{1}{c} \int_{\Omega} \mathcal{L}(u_s(x), \partial_{\mu} u_s(x)) d\Omega \approx \frac{1}{c} \int_{\Omega} (\mathcal{L} \delta d\Omega + \delta \mathcal{L} d\Omega), \end{aligned} \quad (94.8)$$

Вводя обобщенный полевой импульс

$$\pi_s^{\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} u_s)} \quad (94.9)$$

и используя соотношения (94.5) и (94.6), находим

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_s} \delta u_s + \pi_s^{\mu} \delta (\partial_{\mu} u_s) \right) = \\ &= \sum_{s=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_s} (\bar{\delta} u_s + \partial_{\nu} u_s \delta x^{\nu}) + \pi_s^{\mu} (\partial_{\mu} \bar{\delta} u_s + \delta x^{\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} u_s) \right], \end{aligned}$$

что с учетом соотношения

$$\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_s} \partial_{\nu} u_s + \pi_s^{\mu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} u_s \right) = \partial_{\nu} \mathcal{L}$$

преобразуется к виду

$$\delta \mathcal{L} = \partial_{\nu} \mathcal{L} \delta x^{\nu} + \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_s} \bar{\delta} u_s + \pi_s^{\mu} \partial \bar{\delta} u_s \right). \quad (94.10)$$

Подстановка (94.10) и (94.7) в (94.8) дает

$$\delta S = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left[\partial_{\mu} \left(\sum_{s=1}^n \pi_s^{\mu} \bar{\delta} u_s + \mathcal{L} \delta x^{\mu} \right) + \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_s} - \partial_{\mu} \pi_s^{\mu} \right) \bar{\delta} u_s \right] d\Omega. \quad (94.11)$$

Первое слагаемое в (94.11), имеющее вид четырехмерной дивергенции, можно привести с помощью теоремы Гаусса—Остроградского к интегралу по замкнутой гиперповерхности σ , окружающей 4-объем Ω . В результате получается следующее выражение для полной вариации действия, известное в вариационном исчислении как *формула Адамара*:

$$\delta S [u_s | \Omega] = \frac{1}{c} \oint_{\sigma} \left(\sum_{s=1}^n \pi_s^{\mu} \delta u_s + \mathcal{L} \delta x^{\mu} \right) d\sigma_{\mu} + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_s} - \partial_{\mu} \pi_s^{\mu} \right) \delta u_s d\Omega. \quad (94.12)$$

Исключая из поверхностного интеграла δu_s при помощи (94.5) и вводя *канонический тензор энергии—импульса*

$$T^{\mu\nu} \equiv \sum_{s=1}^n \pi_s^{\mu} \partial^{\nu} u_s - \mathcal{L} g^{\mu\nu}, \quad (94.13)$$

можно привести δS к форме, наиболее часто используемой в физике:

$$\delta S [u_s | \Omega] = \frac{1}{c} \oint_{\sigma} \left(\sum_{s=1}^n \pi_s^{\mu} \delta u_s - T^{\mu\nu} \delta x_{\nu} \right) d\sigma_{\mu} + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_s} - \partial_{\mu} \pi_s^{\mu} \right) \delta u_s d\Omega. \quad (94.14)$$

Формула Адамара (94.14) является основой вариационной формулировки теории поля и позволяет получить как уравнения поля в лагранжевой форме, так и вытекающие из них законы сохранения. Для этого необходимо принять следующий вариационный принцип.

Уравнения, которым подчиняются полевые функции u_s , таковы, что их решения реализуют экстремум функционала действия $S [u_s | \Omega]$ среди всех функций, принимающих заданные значения на границе области Ω .

Согласно этому принципу, объемный интеграл в (94.14) должен исчезать, а так как вариации δu_s произвольны, то для этого необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\partial_{\mu} \pi_s^{\mu} - \partial \mathcal{L} / \partial u_s = 0 \quad (s=1, 2, \dots, n), \quad (94.15)$$

которые согласно (94.9) принимают вид

$$\partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} u_s)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_s} = 0 \quad (s=1, 2, \dots, n). \quad (94.16)$$

Это и есть *лагранжева форма уравнений поля*.

Очевидно, что с учетом уравнений (94.15) формула (94.14) упрощается и вариация действия δS оказывается зависящей лишь от вариаций поля и координат на граничной гиперповерхности σ :

$$\delta S = \frac{1}{c} \oint_{\sigma} \left(\sum_{s=1}^n \pi_s^{\mu} \delta u_s - T^{\mu\nu} \delta x_{\nu} \right) d\sigma_{\mu}. \quad (94.17)$$

Применим теперь изложенный формализм к электромагнитному полю. В этом случае роль полевых функций будут играть 4-потенциалы A^{μ} , а в качестве лагранжевой плотности можно использовать инвариант

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_{\mu} A^{\mu}.$$

Чтобы убедиться в том, что предложенная лагранжева плотность является правильной, вычислим сначала обобщенный полевой импульс π_λ^μ . Учитывая, что $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, находим

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A^\lambda)} = \delta_{\alpha\beta}^\mu g_{\beta\lambda} - \delta_{\beta\alpha}^\mu g_{\alpha\lambda},$$

поэтому

$$\pi_\lambda^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\lambda)} = -\frac{1}{8\pi} F^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A^\lambda)} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha} g_{\alpha\lambda}. \quad (94.19)$$

С другой стороны,

$$\partial \mathcal{L} / \partial A^\lambda = -j_\lambda / c,$$

так что уравнения Лагранжа (94.15) принимают вид

$$-\frac{1}{4\pi} \partial_\mu (F^{\mu\alpha} g_{\alpha\lambda}) + \frac{1}{c} j_\lambda = 0.$$

После поднятия индекса λ эти уравнения, очевидно, совпадают с (79.2), т. е. с первой группой уравнений Максвелла. Что же касается второй группы уравнений Максвелла (79.4), то она, как известно, эквивалентна соотношению $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$.

§ 95. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ КАК СЛЕДСТВИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА

Формула Адамара позволяет получить не только уравнения поля, но и явный вид всех сохраняющихся в силу этих уравнений величин. При этом выясняется, что каждый закон сохранения оказывается тесно связанным с инвариантностью действия относительно некоторого преобразования координат или полевых функций. Чтобы установить эту связь, рассмотрим N различных бесконечно малых преобразований вида

$$\delta^{(r)} x_\nu = X_\nu^{(r)}(x) \delta \lambda_r, \quad \delta^{(r)} u_s = U_s^{(r)}(x) \delta \lambda_r \quad (r=1, 2, \dots, N), \quad (95.1)$$

где $X_\nu^{(r)}$ и $U_s^{(r)}$ — некоторые функции координат, $\delta \lambda_r$ — постоянные бесконечно малые параметры. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема Нетер. Если действие S инвариантно относительно N бесконечно малых преобразований (95.1), то существует N сохраняющихся в силу уравнений поля величин

$$\mathcal{J}_r[\sigma] = \frac{1}{c} \int_\sigma \left(\sum_{s=1}^n \pi_s^\mu U_s^{(r)} - T^{\mu\nu} X_\nu^{(r)} \right) d\sigma_\mu \quad (r=1, 2, \dots, N), \quad (95.2)$$

не зависящих в случае островной системы от выбора пространственно-подобной гиперповерхности σ .

Доказательство теоремы основано на использовании формулы Адамара. Из инвариантности действия относительно преобразований (95.1) следует, что $\delta^{(r)} S = 0$. Поэтому при подстановке (95.1) в (94.17) находим

$$\delta^{(r)} S = \delta \lambda_r \frac{1}{c} \oint_\sigma \left(\sum_{s=1}^n \pi_s^\mu U_s^{(r)} - T^{\mu\nu} X_\nu^{(r)} \right) d\sigma_\mu = 0. \quad (95.3)$$

Для островной системы в случае 4-объема Ω , ограниченного двумя пространственно-подобными гиперповерхностями σ_1 и σ_2 , из (95.3) следует равенство

$$\mathcal{J}_r[\sigma_1] = \mathcal{J}_r[\sigma_2], \quad (95.4)$$

полностью доказывающее теорему.

Поскольку пространственно-подобная гиперповерхность σ в (95.2) совершенно произвольна, то ее можно немного деформировать в окрестности некоторой точки x (рис. 95.1) и записать равенство (95.4), выбрав $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma + \delta\sigma$:

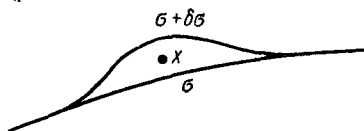


Рис. 95.1

$$\mathcal{J}_r [\sigma + \delta\sigma] - \mathcal{J}_r [\sigma] = 0.$$

Отсюда, пользуясь формулой (74.13), нетрудно вывести соответствующие дифференциальные законы сохранения:

$$\partial_\mu \left(\sum_{s=1}^n \pi_s^\mu U_s^{(r)} - T^{\mu\nu} X_\nu^{(r)} \right) = 0. \quad (95.5)$$

В качестве иллюстрации теоремы Нетер рассмотрим преобразования сдвига и поворота в четырехмерном пространстве, предполагая, что действие S инвариантно относительно этих преобразований. В случае бесконечно малого сдвига на постоянный вектор $\delta\lambda$ имеем

$$\delta^{(\alpha)} x_\mu = \delta_\mu^\alpha \delta\lambda_\alpha, \quad \delta u_s = 0,$$

т. е.

$$X_\nu^{(\alpha)} = \delta_\nu^\alpha, \quad U_s^{(\alpha)} = 0. \quad (95.6)$$

Подстановка (95.6) в (95.5) приводит к дифференциальному закону сохранения

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (95.7)$$

что соответствует интегральной сохраняющейся величине

$$\mathcal{P}^\nu = \frac{1}{c} \int_\sigma T^{\mu\nu} d\sigma_\mu. \quad (95.8)$$

В конце этого параграфа на примере электромагнитного поля мы убедимся, что 4-вектор (95.8) является 4-импульсом системы

Рассмотрим теперь преобразование бесконечно малого четырехмерного поворота

$$\delta x_\mu = \delta\lambda_{\mu\nu} x^\nu, \quad (95.9)$$

где $\delta\lambda_{\mu\nu}$ — бесконечно малый «угол» поворота в плоскости X^μ, X^ν . Очевидно, что индекс r в (95.1) соответствует в этом случае двойному индексу $(\mu\nu) \equiv r$. Таким образом, $\delta\lambda_{ik}$ — обычный угол трехмерного поворота, а $-c\delta\lambda_{0i} = v_i$ — относительная скорость двух систем отсчета, задающая некоторое бесконечно малое преобразование Лоренца.

Задача 95.1. Показать, что $\delta\lambda_{\mu\nu} = -\delta\lambda_{\nu\mu}$, воспользовавшись инвариантностью интервала относительно преобразований (95.9).

С учетом антисимметрии $\delta\lambda_{\mu\nu}$ представим наше преобразование координат и полей в таком виде

$$\delta x_\tau = 1/2 \delta\lambda_{\mu\nu} X_\tau^{(\mu\nu)}; \quad \delta u_s = 1/2 U_s^{(\mu\nu)} \delta\lambda_{\mu\nu}, \quad (95.10)$$

где $X_\tau^{(\mu\nu)} = \delta_\tau^\mu x^\nu - \delta_\tau^\nu x^\mu$, $U_s^{(\mu\nu)} = -U_s^{(\nu\mu)}$ — некоторая функция, определяемая тензорными свойствами полей u_s . Тогда соответствующий дифференциальный закон сохранения (95.5) имеет вид

$$\partial_\lambda \bar{M}^{\lambda\mu\nu} = 0, \quad (95.11)$$

где введены обозначения:

$$\bar{M}^{\lambda\mu\nu} \equiv x^\mu T^{\lambda\nu} - x^\nu T^{\lambda\mu} + S^{\lambda\mu\nu}, \quad (95.12)$$

$$S^{\lambda\mu\nu} \equiv \sum_{s=1}^n \pi_s^\lambda U_s^{(\mu\nu)} = -S^{\lambda\nu\mu}. \quad (95.13)$$

Сохраняющаяся величина, очевидно, имеет вид

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int_\sigma \bar{M}^{\lambda\mu\nu} d\sigma_\lambda. \quad (95.14)$$

Физический смысл ее мы выясним на примере электромагнитного поля в конце параграфа.

Заметим теперь, что канонический тензор энергии — импульса \hat{T} , вообще говоря, не является симметричным, т. е. $T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}$. Поэтому подстановка (95.12) в (95.11) с учетом (95.7) дает

$$\partial_\lambda S^{\lambda\mu\nu} = T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}. \quad (95.15)$$

Оказывается, что равенство (95.15) можно использовать для построения нового тензора

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda X^{\lambda\mu\nu}, \quad (95.16)$$

симметричного и удовлетворяющего дифференциальному закону сохранения

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0, \quad (95.17)$$

если $X^{\lambda\mu\nu} = -X^{\mu\lambda\nu}$. Именно: оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема Белинфанте*. Тензор (95.16) удовлетворяет дифференциальному закону сохранения (95.17) и симметричен, если

$$X^{\lambda\mu\nu} = (S^{\lambda\mu\nu} - S^{\nu\lambda\mu} - S^{\mu\nu\lambda})/2. \quad (95.18)$$

Для доказательства убеждаемся, что $X^{\lambda\mu\nu} = -X^{\mu\lambda\nu}$, поскольку $S^{\lambda\mu\nu} = -S^{\lambda\nu\mu}$ [см. (95.13)]. Поэтому (95.17) является следствием (95.7):

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Далее, с помощью (95.15) тензор $\hat{\Theta}$ можно привести к виду

$$\Theta^{\mu\nu} = (T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu})/2 - \partial_\lambda (S^{\nu\lambda\mu} + S^{\mu\lambda\nu})/2, \quad (95.19)$$

откуда очевидна его симметрия. Теорема доказана.

Из теоремы Белинфанте с учетом результата задачи 89.2 следует, что сохраняющийся 4-вектор \mathcal{P} может быть записан в виде

$$\mathcal{P}^\nu = \frac{1}{c} \int_{\sigma} T^{\mu\nu} d\sigma_\mu = \frac{1}{c} \int_{\sigma} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_\mu. \quad (95.20)$$

Покажем, что и $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ также может быть выражено через тензор $\hat{\Theta}$. Для этого образуем новый тензор

$$M^{\lambda\mu\nu} \equiv x^\mu \Theta^{\lambda\nu} - x^\nu \Theta^{\lambda\mu}, \quad (95.21)$$

который вследствие (95.17) и свойства симметрии $\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}$ удовлетворяет дифференциальному закону сохранения

$$\partial_\lambda M^{\lambda\mu\nu} = 0, \quad (95.22)$$

Подставляя (95.16) в (95.21), имеем

$$\begin{aligned} M^{\lambda\mu\nu} &= x^\mu T^{\lambda\nu} - x^\nu T^{\lambda\mu} + x^\mu \partial_\tau X^{\tau\lambda\nu} - x^\nu \partial_\tau X^{\tau\lambda\mu} - \\ &= x^\mu T^{\lambda\nu} - x^\nu T^{\lambda\mu} + \partial_\tau (x^\mu X^{\tau\lambda\nu} - x^\nu X^{\tau\lambda\mu}) - \lambda^{\mu\nu\lambda} + X^{\nu\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Но [см. (95.18)] $X^{\nu\lambda\mu} - X^{\mu\lambda\nu} = S^{\lambda\mu\nu}$, поэтому

$$M^{\lambda\mu\nu} = \bar{M}^{\lambda\mu\nu} - \partial_\tau K^{\tau\lambda\mu\nu}, \quad (95.23)$$

где

$$K^{\tau\lambda\mu\nu} \equiv x^\mu X^{\tau\lambda\nu} + x^\nu X^{\tau\lambda\mu} = -K^{\lambda\tau\mu\nu}. \quad (95.24)$$

Благодаря антисимметрии тензора (95.24) можно использовать результат задачи 89.2 и с учетом (95.11) и (95.22) получить

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int_{\sigma} \bar{M}^{\lambda\mu\nu} d\sigma_\lambda = \frac{1}{c} \int_{\sigma} M^{\lambda\mu\nu} d\sigma_\lambda. \quad (95.25)$$

* *Belinfante F. J.* On the spin angular momentum of mesons—*Physica*, 1939, 6, p. 887; *Rosenfeld L.* Sur tenseur impulsion—énergie—*Mémoires de l'Acad. Roy. Belg.*, 1940, 18, fasc. 6, n° 1536.

Итак, с помощью симметричного тензора энергии — импульса $\hat{\Theta}$ можно вычислять сохраняющиеся величины \mathcal{P}^{ν} и $\mathcal{M}^{\mu\nu}$. Чтобы выяснить их физический смысл, рассмотрим конкретный пример свободного электромагнитного поля ($j^{\mu} = 0$).

Прежде всего на основании (94.19) и (94.13) вычислим $T^{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha} \partial^{\nu} A_{\alpha} + \frac{1}{16\pi} (F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) g^{\mu\nu}. \quad (95.26)$$

Поскольку $T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}$, то необходимо строить симметричный тензор $\hat{\Theta}$. Замечая, что A является 4-вектором, найдем вариацию δA^{μ} при преобразовании (95.9) по аналогии с δx^{μ} :

$$\delta A_{\tau} = \delta \lambda_{\tau\nu} A^{\nu} = \delta \lambda_{\mu\nu} (\delta_{\tau}^{\mu} A^{\nu} - \delta_{\tau}^{\nu} A^{\mu})/2. \quad (95.27)$$

Сравнением (95.27) с (95.10) находим

$$U_{\tau}^{(\mu\nu)} = \delta_{\tau}^{\mu} A^{\nu} - \delta_{\tau}^{\nu} A^{\mu}. \quad (95.28)$$

Поэтому согласно (95.13)

$$S^{\lambda\mu\nu} = \pi_{\tau}^{\lambda} U^{\tau(\mu\nu)} = (F^{\lambda\nu} A^{\mu} - F^{\lambda\mu} A^{\nu})/(4\pi), \quad (95.29)$$

что позволяет найти тензор Белинфанте (95.18):

$$X^{\lambda\mu\nu} = -F^{\lambda\mu} A^{\nu}/(4\pi). \quad (95.30)$$

Теперь уже нетрудно с помощью (95.16) и уравнений поля $\partial_{\lambda} F^{\lambda\mu} = 0$ вычислить симметричный тензор энергии — импульса $\hat{\Theta}$:

$$\Theta^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} (F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) g^{\mu\nu} \right], \quad (95.31)$$

очевидно, совпадающий с (89.8). Таким образом, 4-вектор (95.20) совпадает с 4-импульсом $\mathcal{P}_{(i)}$ электромагнитного поля.

Рассмотрим сохраняющийся антисимметричный тензор $\mathcal{M}^{\mu\nu} = -\mathcal{M}^{\nu\mu}$. Для выяснения его физического смысла вычислим сначала его пространственные компоненты

$$\mathcal{M}^{ik} = \frac{1}{c} \int M^{0ik} dV. \quad (95.32)$$

Замечая, что $\varepsilon_{ikj} M^{0kj}/(2c) = [rg]_i$, где \mathbf{g} — плотность импульса электромагнитного поля, имеем

$$\mathcal{M}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikj} \mathcal{M}^{kj} = \int [rg]_i dV, \quad (95.33)$$

т. е. \mathcal{M} — вектор момента импульса электромагнитного поля.

Что касается \mathcal{M}^{0i} , то, вводя радиус-вектор центра масс электромагнитного поля

$$R^i = \frac{1}{c\mathcal{P}^0} \int x^i \Theta^{00} dV, \quad (95.34)$$

с учетом (95.20) получаем

$$\mathcal{M}^{0i} = \frac{1}{c} \int (x^0 \Theta^{0i} - x^i \Theta^{00}) dV = x^0 \mathcal{P}^i - R^i \mathcal{P}^0. \quad (95.35)$$

Дифференцируя (95.35) по времени, находим

$$dR^i/dt = c\mathcal{P}^i/\mathcal{P}^0 \equiv u^i, \quad (95.36)$$

т. е. сохранение величин \mathcal{M}^{0i} выражает не что иное, как закон равномерного поступательного движения центра масс электромагнитного поля.

Сохраняющийся антисимметричный тензор $\hat{\mathcal{M}}$ обычно называют *релятивистским тензором момента импульса* полевой системы, а соответствующий тензор третьего ранга $M^{\lambda\mu\nu}$ — *релятивистским тензором плотности момента импульса*.

Возвращаясь к фундаментальной теореме Нетер, лежащей в основе вариационной формулировки законов сохранения, можно сказать, что сохранение 4-импульса \mathcal{P} является следствием инвариантности действия относительно 4-сдвигов, а сохранение релятивистского момента импульса \hat{M} — следствием инвариантности действия относительно 4-поворотов, включающих в себя как пространственные повороты, так и собственные преобразования Лоренца.

§ 96. ТАХИОНЫ

Как отмечалось в § 68, гипотеза о существовании частиц, движущихся со сверхсветовой скоростью, физически приемлема и не противоречит теореме Эйнштейна о предельности скорости сигнализации, если отказаться от одного привычного представления. Имеется в виду представление о возможности создания эмиттера, испускающего сверхсветовую частицу в заранее обусловленный момент времени из заданной пространственной области, и абсорбера (детектора), регистрирующего поглощение такой частицы в определенной пространственной области. Иначе говоря, сверхсветовые частицы физически допустимы как точечные объекты, удовлетворяющие *принципу переключения*, согласно которому абсорбер становится эмиттером, а эмиттер — абсорбером при переходе к системе отсчета, в которой изменяется последовательность моментов поглощения и испускания в пространственно разобнесенных точках.

На возможность существования сверхсветовых частиц было обращено внимание * в 1960 г. Впоследствии (1967 г.) американским физиком *Дж. Фейнбергом* эти частицы были названы *тахиионами*. Соответственно обычные, досветовые, частицы называют *брадионами*, а частицы, движущиеся со скоростью света, — *люксонами*.

Если тахион, как и всякая реальная физическая частица, имеет импульс \mathbf{P} , энергию E и собственную массу \mathcal{M} , причем согласно (84.13) и (84.15)

$$\mathbf{P} = E\mathbf{u}/c^2, \quad \mathcal{M}^2 c^2 = (E/c)^2 - \mathbf{P}^2,$$

то

$$\mathcal{M}^2 = (E/c^2)^2 (1 - u^2/c^2) < 0, \quad (96.1)$$

так как для тахиона $u > c$. Иначе говоря, собственная масса тахиона — не действительная, а *мнимая* величина. Последнее очевидно также из определения 4-импульса (84.6), так как компоненты U^μ при $u > c$ суть мнимые величины и поэтому при действительных \mathcal{P}^μ собственная масса \mathcal{M} должна быть мнимой.

Мнимость собственной массы тахиона не представляется чем-то более удивительным, чем мнимость пространственно-подобного интервала. Для тахиона собственная масса \mathcal{M} уже не имеет смысла массы покоя, так как эта частица во всех реальных системах отсчета имеет сверхсветовую скорость (см. § 76), т. е. не может не двигаться. Поэтому интуитивно наглядные представления о собственной массе обычных частиц не могут быть перенесены на случай тахионов.

Вместо мнимой величины \mathcal{M} для характеристики тахиона можно ввести действительную величину μ , положив

$$\mathcal{M} = i\mu. \quad (96.2)$$

Тогда основное соотношение (84.15) для тахиона и компоненты 4-импульса (84.6) примут такой вид:

$$\mathbf{P}^2 - (E/c)^2 = \mu^2 c^2, \quad (96.3)$$

$$\mathcal{P}^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{P} \right) = \left(\frac{\mu c}{\sqrt{u^2/c^2 - 1}}, \frac{\mu \mathbf{u}}{\sqrt{u^2/c^2 - 1}} \right), \quad (96.4)$$

т. е. будут явно действительны при $u > c$.

* *Терлецкий Я. П.* Принцип причинности и второе начало термодинамики — ДАН СССР, 1960, 133, с. 329.

Согласно последним формулам, энергия тахиона стремится к нулю при $u \rightarrow \infty$ и бесконечно растет при приближении u к наименьшему предельному значению c . Что касается импульса тахиона, то $|P| \rightarrow \mu c$ при $u \rightarrow \infty$, $|P| \rightarrow E/c$ при $u \rightarrow c$. Таким образом, в отличие от обычных частиц (брадионов) импульс тахиона по абсолютному значению всегда превышает μc , а энергия не имеет нетривиального наименьшего значения.

Следует еще раз отметить принципиальное отличие тахионов от обычных частиц, состоящее в том, что тахион никогда не может находиться в покое, т. е. не существует реальной системы отсчета, в которой скорость тахиона обратилась бы в нуль. Однако существует система отсчета, в которой скорость тахиона бесконечна. В этой системе отсчета тахион можно представлять себе не как движущуюся точку, а как на мгновение возникающий и исчезающий объект, вытянутый вдоль прямой линии, соединяющей точки абсорбции — эмиссии *

Экспериментально тахионы еще не обнаружены. Однако неизвестны и теоретические опровержения возможности существования тахионов, которые были бы логически неуязвимы.

* Эти свойства тахионов напоминают свойства виртуальных частиц, вводимых в квантовой теории поля. Тахионы можно рассматривать как реально представимые виртуальные частицы с пространственно-подобным 4-импульсом. Подробнее см.: Терлецкий Я. П. Парадоксы теории относительности. М., 1966.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Приложение

1П. КЛАССИФИКАЦИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. ТЕНЗОРЫ

Все физические величины поддаются простой и естественной классификации, возникшей исторически и основанной на использовании одного из важнейших методов познания — метода аналогий. Начнем с описания простейшего физического явления — движения материальной точки. Положение точки по отношению к некоторому телу отсчета задается тремя числами x^1, x^2, x^3 , которые определяют радиус-вектор \mathbf{r} точки и называются его *компонентами* или *координатами*. Закон, по которому устанавливается соответствие между положением \mathbf{r} точки в пространстве и числами x^i ($i = 1, 2, 3$), определяется выбором *системы координат* (декартовой, цилиндрической, сферической и др.). Иначе говоря, задание системы координат равносильно заданию одно-однозначной векторной функции

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) \equiv \mathbf{r}(x). \quad (1П.1)$$

Если бы мы выбрали другой способ задания положения точки, скажем, с помощью чисел x'^i ($i = 1, 2, 3$), то из-за однозначности соответствия должно было бы быть

$$\mathbf{r}(x') = \mathbf{r}(x), \quad (1П.2)$$

откуда сразу же следует, что x' и x связаны между собой, т. е.

$$x'^i = f^i(x). \quad (1П.3)$$

Принято говорить, что соотношение типа (1П.3) задает *преобразование координат*.

Рассмотрим бесконечно малое смещение точки $d\mathbf{r}$. В этом случае из (1П.3) следует, что

$$dx'^i = df^i(x) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f^i}{\partial x^k} dx^k \equiv \partial_k f^i dx^k. \quad (1П.4)$$

Здесь мы ввели обозначение для частной производной $\partial_k \equiv \partial/\partial x^k$ и использовали очень удобное правило суммирования Эйнштейна, согласно которому по повторяющимся верхнему и нижнему индексам всегда производится суммирование.

Мы видим, что соотношение (IП.4) позволяет вычислить бесконечно малое смещение точки в любой системе координат и задает, таким образом, закон преобразования бесконечно малых смещений dx^i (или скоростей) при преобразовании координат. Ввиду универсальности соотношения (IП.4), которое справедливо для произвольных преобразований координат (IП.3), удобно именно его положить в основу классификации физических величин.

Прежде всего дадим определение вектора. Три величины a^i ($i=1, 2, 3$) определяют *трехмерный вектор* \mathbf{a} , если они при преобразовании координат изменяются так же, как и dx^i , т. е.

$$a'^i = \partial_k f^i a^k. \quad (\text{IП.5})$$

Числа a^i называются в этом случае *контравариантными компонентами вектора* \mathbf{a} . Примером вектора может служить вектор скорости материальной точки $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$.

Если мы возьмем n векторов $\mathbf{a}_{(1)}, \mathbf{a}_{(2)}, \dots, \mathbf{a}_{(n)}$, то из их компонент можно образовать произведения вида $a_{(1)}^{i_1} a_{(2)}^{i_2} \dots a_{(n)}^{i_n}$, где $i_\alpha = 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Величины $T^{i_1 \dots i_n}$, которые при преобразовании координат изменяются так же, как эти произведения, т. е. по закону

$$T'^{i_1 \dots i_n} = \partial_{k_1} f^{i_1} \dots \partial_{k_n} f^{i_n} T^{k_1 \dots k_n}, \quad (\text{IП.6})$$

определяют *тензор ранга n* (или валентности n) и называются его *контравариантными компонентами*.

Полезно отметить, что с этой точки зрения радиус-вектор точки \mathbf{r} не является настоящим вектором (тензором первого ранга), поскольку его закон преобразования (IП.3) совпадает с (IП.5) только для линейных преобразований координат вида

$$x'^i = A_k^i x^k, \quad (\text{IП.7})$$

где A_k^i — не зависящая от x матрица. Компоненты ускорения $d^2\mathbf{r}/dt^2$ также образуют вектор только по отношению к линейным преобразованиям.

Частным случаем преобразований (IП.7) являются вращения, включающие в себя повороты координатных осей и отражения. Если ограничиться только вращениями, то данная классификация физических величин совпадает с хорошо известным разбиением величин по тензорным представлениям группы вращений*. В частности, преобразование отражения в декартовых координатах принимает вид

$$x'^i = -x^i,$$

поэтому для тензора ранга n

$$T'^{i_1 \dots i_n} = (-1)^n T^{i_1 \dots i_n}. \quad (\text{IП.8})$$

Однако встречаются еще и такие физические величины, которые при отражении приобретают дополнительный знак минус по сравнению с (IП.8). Подобные величины получили название *псевдовеличин* (или *аксиальных величин*). Для псевдотензоров, обозначаемых $\tilde{T}^{i_1 \dots i_n}$, получается тогда следующий закон преобразования при отражении:

$$\tilde{T}'^{i_1 \dots i_n} = (-1)^{n+1} \tilde{T}^{i_1 \dots i_n}, \quad (\text{IП.9})$$

при поворотах же они ведут себя как нормальные тензоры.

* Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро Э. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., 1958.

Рассмотрим теперь закон преобразования координат (IП.3) в случае, когда координаты x' — декартовы, а x — произвольные другие. В декартовых координатах всегда можно ввести ортогональную тройку базисных единичных векторов e_i и положить

$$\mathbf{r} = e_i x'^i. \quad (\text{IП.10})$$

Если заданы два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} с декартовыми компонентами a^i и b^i соответственно, то ортогональность базиса позволяет записать их скалярное произведение в виде

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^3 a^i b^i, \quad (\text{IП.11})$$

что является простым следствием теоремы Пифагора.

Выберем две близкие точки \mathbf{r} и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ и вычислим квадрат расстояния между ними, воспользовавшись произвольными координатами x . Из (IП.4) и (IП.10) имеем

$$d\mathbf{r} = e_i dx'^i = e_i \partial_{k^i} dx^k \equiv \mathbf{h}_k dx^k, \quad (\text{IП.12})$$

где $\mathbf{h}_k \equiv e_i \partial_{k^i}$. Поэтому квадрат расстояния

$$dl^2 \equiv (d\mathbf{r} d\mathbf{r}) = (\mathbf{h}_i \mathbf{h}_k) dx^i dx^k \equiv g_{ik} dx^i dx^k, \quad (\text{IП.13})$$

где

$$g_{ik} \equiv (\mathbf{h}_i \mathbf{h}_k) = \sum_{j=1}^3 \partial_i^j \partial_{k^j} = g_{ki}. \quad (\text{IП.14})$$

Величины g_{ik} образуют *метрический тензор*, характеризующий выбранную систему координат x^i . В частности, в декартовых координатах

$$dl^2 = \sum_{i=1}^3 (dx'^i)^2 \equiv \sum_{i,k=1}^3 g'_{ik} dx'^i dx'^k, \quad (\text{IП.15})$$

т. е. $g'_{ik} = \delta_{ik} \equiv \delta_k^i$ — символ Кронекера, равный 1 при $i=k$ и 0 при $i \neq k$. Координаты, для которых $g_{ik} = 0$ при $i \neq k$, называются *ортогональными*.

Задача 1. Найти векторы \mathbf{h}_i и вычислить с их помощью компоненты метрического тензора g_{ik} в цилиндрических и сферических координатах.

Очевидно, что ортогональные координаты характеризуются тремя параметрами $h_i \equiv |\mathbf{h}_i|$, называемыми *параметрами Ламе*. При этом

$$dl^2 = \sum_{i=1}^3 h_i^2 (dx^i)^2. \quad (\text{IП.16})$$

Заметим, что dl^2 можно всегда привести к *инвариантной*, т. е. не зависящей от вида используемых координат, форме, если ввести обозначение

$$dx_i \equiv g_{ik} dx^k. \quad (\text{IП.17})$$

В таком случае для декартовых координат $dx'_i = dx'^i$, и поэтому

$$dl^2 = dx'_i dx'^i = dx_i dx^i. \quad (\text{IП.18})$$

Подставляя в (IП.18) закон преобразования (IП.4), находим

$$dx'_i dx'^i = dx'_i \partial_{k^i} dx^k \equiv dx_k dx^k,$$

откуда

$$dx_k = dx'_i \partial_{k^i}. \quad (\text{IП.19})$$

Величины a_i , преобразующиеся так же, как dx_i , т. е. по закону (IП.19), и совпадающие с a'^i в декартовых координатах, называются *ковариантными компонентами вектора a*.

Задача 2. Показать, что $a_i = g_{ik} a^k$.

По аналогии с (1П.18), квадрат длины вектора \mathbf{a} и скалярное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} можно определить как

$$\begin{aligned} a^2 &\equiv a_i a^i = g_{ik} a^i a^k, \\ (\mathbf{a}\mathbf{b}) &\equiv a_i b^i = g_{ik} a^i b^k. \end{aligned} \quad (1П.20)$$

Задача 3. Показать, что скалярное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} не зависит от выбора системы координат, т. е. является инвариантом.

Инвариантные величины часто называют скалярами или тензорами нулевого ранга.

Задача 4. Показать, что величины $\partial_i \varphi$, где $\varphi(x)$ — скалярная функция точки, являются ковариантными компонентами вектора, обозначаемого $\nabla \varphi \equiv \text{grad } \varphi(x)$ (градиент). Здесь ∇ (набла) — так называемый векторный оператор Гамильтона. Убедиться, что $\nabla \varphi = \mathbf{h}_i \partial^i \varphi$ и $d\varphi = (d\mathbf{r} \nabla \varphi)$. Записать $\nabla \varphi$ в цилиндрических и сферических координатах.

Определим теперь ковариантные компоненты $T_{i_1 \dots i_n}$ тензора ранга n как величины, преобразующиеся как произведения ковариантных компонент n векторов $a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \dots a_{i_n}^{(n)}$ и совпадающие с $T'^{i_1 \dots i_n}$ в декартовой системе координат. Таким образом, в соответствии с (1П.19)

$$T_{i_1 \dots i_n} = \partial_{i_1} f^{k_1} \dots \partial_{i_n} f^{k_n} T'_{k_1 \dots k_n}. \quad (1П.21)$$

Аналогично определяются смешанные компоненты тензора $T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}$, т. е. m раз ковариантные и n раз контравариантные. Они преобразуются как произведения соответствующих компонент векторов $a_{i_1}^{(1)} \dots a_{i_m}^{(m)} a_{j_1}^{(m+1)} \dots a_{j_n}^{(n)}$ и в декартовой системе координат совпадают с $T'^{i_1 \dots i_n}$.

Задача 5. Показать, что $T_{i_1 \dots i_n} = g_{i_1 k_1} \dots g_{i_n k_n} T^{k_1 \dots k_n}$.

Задача 6. Показать, что преобразование, обратное (1П.21), имеет вид

$$T'_{k_1 \dots k_n} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x'^{k_n}} T_{i_1 \dots i_n}. \quad (1П.22)$$

Задача 7. Получить закон преобразования смешанных компонент тензора и показать, что

$$T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} = g_{i_1 k_1} \dots g_{i_m k_m} T^{k_1 \dots k_m j_1 \dots j_n}.$$

Из определения тензора сразу следует, что произведение компонент двух тензоров M^{\dots} и N^{\dots} рангов m и n дает компоненты нового тензора T^{\dots} ранга $m+n$. При этом, например,

$$M_{i_1 \dots i_m} N^{k_1 \dots k_n} \equiv T_{i_1 \dots i_m}^{k_1 \dots k_n}.$$

Такой способ получения новых тензоров называется *внешним* или *тензорным умножением*. Кроме того, применяется еще и дополнительная операция, называемая *сверткой* и состоящая в суммировании по некоторым парам индексов разной вариантности. Внешнее умножение, дополненное сверткой, называется *внутренним умножением тензоров*. Примером внутреннего умножения является образование скалярного произведения двух векторов.

Задача 8. Показать, что каждая свертка уменьшает ранг тензора на 2. В частности,

$$M_{i_1 \dots i_m} N^{i_1 \dots i_m k_1 \dots k_n} = T^{k_1 \dots k_n}.$$

Чаще всего приходится иметь дело с тензорами второго ранга T^{ik} , обозначаемыми \hat{T} . Внутреннее умножение в таких случаях обозначается точкой, а свертка в самом тензоре \hat{T} — знаком Sp . Тогда, к примеру, равенства

$$\begin{aligned} a^i &= T^{ik} b_k, \quad \varphi = T^{ik} a_i b_k, \\ T^{ik} &= M^i / N_j^k, \quad \varphi = M^i N_j^i, \end{aligned}$$

перепишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \hat{T} \cdot \mathbf{b}; \quad \varphi = \mathbf{a} \cdot \hat{T} \cdot \mathbf{b}; \\ \hat{T} &= \hat{M} \cdot \hat{N}; \quad \varphi = \text{Sp} (\hat{M} \cdot \hat{N}) \equiv \hat{M} : \hat{N}. \end{aligned}$$

Из тензоров третьего ранга нам нужен всего один — *единичный псевдотензор Леви-Чивита* ϵ^{ijk} , который полностью антисимметричен, т. е. меняет знак при перестановке любых двух индексов, а в декартовых координатах $\epsilon^{123} = 1$. В силу псевдотензорности при отражениях ϵ^{ijk} остается неизменным. С помощью ϵ^{ijk} можно двум векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} сопоставить псевдовектор $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$, называемый их *векторным произведением*:

$$[\mathbf{a}\mathbf{b}]^i \equiv \epsilon^{ijk} a_j b_k. \quad (1П.23)$$

Задача 9. Убедиться в тензорных свойствах символа Леви-Чивита ϵ^{ijk} и найти его выражение в произвольной системе координат, исходя из того, что инвариантный элемент объема может быть записан либо в виде $dV = g^{1/2} dx^1 dx^2 dx^3$, где $g \equiv \det \|g_{ik}\| \equiv |g_{ik}|$, либо как элемент объема, построенный на трех векторах dx, dy, dz , т. е. $dV = \epsilon_{ijk} dx^i dy^j dz^k$.

По аналогии с (1П.23), каждому вектору \mathbf{a} можно сопоставить псевдовектор, обозначаемый $[\nabla \mathbf{a}] \equiv \text{rot } \mathbf{a}$ и называемый *ротором* или *вихрем* вектора \mathbf{a} . Его контравариантные компоненты образуются по правилу

$$(\text{rot } \mathbf{a})^i \equiv \epsilon^{ijk} \partial_j a_k. \quad (1П.24)$$

Задача 10. Убедиться, что формула (1П.24) определяет компоненты псевдовектора. Записать $\text{rot } \mathbf{a}$ в цилиндрических и сферических координатах, используя физические компоненты $h_i a^i$ (без суммирования) вектора \mathbf{a} .

Мы ознакомились с двумя дифференциальными операциями векторного анализа — взятием градиента и ротора. Существует еще и третья операция — взятие *дивергенции* вектора, обозначаемая $\text{div } \mathbf{a} \equiv (\nabla \mathbf{a})$ и определяемая следующим образом:

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv g^{-1/2} \partial_i (g^{1/2} a^i). \quad (1П.25)$$

Задача 11. Показать, что $\text{div } \mathbf{a}$ является скаляром. Выразить $\text{div } \mathbf{a}$ в цилиндрических и сферических координатах.

В заключение этого параграфа разясним смысл часто используемых в физике понятий ковариантности и инвариантности уравнений. Уравнение принято называть *ковариантным* относительно некоторого преобразования координат, если в результате преобразования оно не меняет своей формы, т. е. левая и правая его части преобразуются одинаково. Если же еще окажется, что преобразованное уравнение, будучи выраженным в новых координатах, не содержит параметров преобразования, то оно называется *инвариантным* относительно этого преобразования*. В этом же смысле используется и понятие *инвариантных тензоров*. Именно: тензор называется инвариантным относительно некоторого преобразования координат, если преобразованный тензор, будучи выраженным в новых координатах, оказывается неизменным, т. е. не зависящим от параметров преобразования. К примеру, относительный радиус-вектор $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ двух точек инвариантен относительно сдвига $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$, а тензоры δ_k^i и ϵ^{ijk} инвариантны относительно вращений ($\delta_k^i = \delta_k^i, \epsilon^{ijk} = \epsilon^{ijk}$).

2П. ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Для получения практически важных соотношений, используемых в векторном анализе, оказывается полезным следующее интегральное представление для опе-

* Например, уравнение плоскости $(\mathbf{nr}) = a$ только ковариантно, а уравнение сферы $r^2 = a^2$ еще и инвариантно относительно вращений.

ратора Гамильтона:

$$\nabla = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{n} \, dS. \quad (2П.1)$$

Смысл этой записи состоит в том, что три основные дифференциальные операции grad, div и rot могут быть представлены в таком виде:

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \varphi \mathbf{n} \, dS, \quad (2П.2a)$$

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv (\nabla \mathbf{a}) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S (\mathbf{n} \mathbf{a}) \, dS, \quad (2П.2б)$$

$$\text{rot } \mathbf{a} \equiv [\nabla \mathbf{a}] = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S [\mathbf{n} \mathbf{a}] \, dS. \quad (2П.2в)$$

Здесь V — бесконечно малый объем, содержащий точку \mathbf{r} , в которой вычисляются grad φ , div \mathbf{a} , rot \mathbf{a} ; S — замкнутая поверхность, окружающая V ; dS — ее элемент; \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к S ; $\lim_{S \rightarrow 0}$ означает, что поверхность S стягивается к точке \mathbf{r} .

Формулы (2П.2) проясняют смысл обозначений $(\nabla \mathbf{a})$ и $[\nabla \mathbf{a}]$. В связи с представленным (2П.1) оператор Гамильтона ∇ часто называется оператором *объемного дифференцирования*.

Задача 12. Убедиться в справедливости представления (2П.2), взяв в качестве объема V шар с центром в точке \mathbf{r} .

Задача 13. Пользуясь (2П.2), вычислить div \mathbf{r} , rot \mathbf{r} , grad $(\mathbf{a} \mathbf{r})$, rot $[\mathbf{a} \mathbf{r}]$, grad $\varphi(\mathbf{r})$, div $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, rot $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где \mathbf{a} — постоянный вектор, $\mathbf{r} \equiv |\mathbf{r}|$.

В дальнейшем, если специально не оговорено, мы будем пользоваться декартовыми координатами, в которых оператор ∇ выглядит особенно просто:

$$\nabla = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \partial_i. \quad (2П.3)$$

Если объект действия оператора ∇ зафиксирован, то в соответствии с (2П.2) с ним можно обращаться, как с обычным вектором. В то же время [см. (2П.3)] он является оператором дифференцирования. В частности, в соответствии с правилом $d(AB) = (dA)B + A dB$ имеем

$$\nabla(AB) = (\nabla A)B + A \nabla B,$$

или, помечая объект действия оператора ∇ жирной точкой (\cdot) внизу, условимся писать

$$\nabla(AB) = \nabla \cdot AB + \nabla \cdot AB.$$

Вычислим, к примеру, div $[\mathbf{a} \mathbf{b}]$:

$$\text{div } [\mathbf{a} \mathbf{b}] \equiv (\nabla [\mathbf{a} \mathbf{b}]) = (\nabla \cdot [\mathbf{a} \mathbf{b}]) + (\nabla \cdot [\mathbf{a} \mathbf{b}]).$$

С каждым слагаемым, помеченным точкой \cdot , можно работать уже по правилам векторной алгебры, т. е.

$$(\nabla \cdot [\mathbf{a} \mathbf{b}]) = (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a}) \equiv (\mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a}),$$

$$(\nabla \cdot [\mathbf{a} \mathbf{b}]) = -(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b}) \equiv -(\mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b}).$$

В результате находим

$$\text{div } [\mathbf{a} \mathbf{b}] = (\mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b}). \quad (2П.4a)$$

Аналогично можно доказать и многие другие полезные тождества:

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a} \nabla \varphi), \quad (2П.4б)$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\nabla \varphi, \mathbf{a}], \quad (2П.4в)$$

$$\operatorname{rot}[\mathbf{a} \mathbf{b}] = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b}, \quad (2П.4г)$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a} \mathbf{b}) = [\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}] + (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b}, \quad (2П.4д)$$

где в последних двух тождествах использовано обозначение $(\mathbf{a} \nabla) \equiv a^i \partial_i$ для оператора дифференцирования вдоль вектора \mathbf{a} .

Из представления (2П.2) вытекают также и некоторые полезные интегральные теоремы. Для их получения выберем некоторый объем V , окруженный поверхностью S , и разобьем его на достаточно большое число N ячеек. Пусть i -я ячейка имеет объем ΔV_i , окруженный поверхностью ΔS_i . Тогда, по теореме Лагранжа*, внутри ΔV_i найдутся такие точки $\mathbf{r}_i^{(1)}$, $\mathbf{r}_i^{(2)}$, $\mathbf{r}_i^{(3)}$, что будут справедливы соотношения:

$$\Delta V_i \nabla \varphi(\mathbf{r}_i^{(1)}) = \oint_{\Delta S_i} \varphi \mathbf{n} dS,$$

$$\Delta V_i \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}_i^{(2)}) = \oint_{\Delta S_i} (\mathbf{n} \mathbf{a}) dS,$$

$$\Delta V_i \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}_i^{(3)}) = \oint_{\Delta S_i} [\mathbf{n} \mathbf{a}] dS.$$

Произведем теперь суммирование по всем ячейкам и положим $N \rightarrow \infty$. Тогда в пределе левые части перейдут в интегралы по объему V , а правые части — в интегралы по внешней поверхности S , поскольку интегрирование по внутренним поверхностям ΔS_i производится дважды, с противоположными значениями нормали \mathbf{n} . В результате получим следующие интегральные соотношения, являющиеся различными вариантами общей теоремы Остроградского:

$$\int_V \nabla \varphi dV = \oint_S \varphi \mathbf{n} dS. \quad (2П.5а)$$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \oint_S (\mathbf{n} \mathbf{a}) dS, \quad (2П.5б)$$

$$\int_V \operatorname{rot} \mathbf{a} dV = \oint_S [\mathbf{n} \mathbf{a}] dS. \quad (2П.5в)$$

Наиболее часто используемое соотношение (2П.5б) известно как теорема Гаусса—Остроградского

Теорему Остроградского можно применять и к компонентам тензоров. Подставим, например, в (2П.5а) вместо φ компоненту тензора T^{ik} . Тогда

$$\int_V \partial_j T^{ik} dV = \oint_S n_j T^{ik} dS.$$

Свертка по i и j дает

$$\int_V \operatorname{div} \hat{T} dV = \oint_S (\mathbf{n} \cdot \hat{T}) dS, \quad (2П.6)$$

где $\operatorname{div} \hat{T}$ — вектор с компонентами $\partial_i T^{ik}$.

* Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1966, т. 1, § 112.

Если в (2П.5а) положить $\varphi = uv$, то получается широко используемая формула интегрирования по частям:

$$\int_V u \nabla v \, dV = \int_S u n v \, dS - \int_V v \nabla u \, dV. \quad (2П.7)$$

Отметим, что здесь u и v можно считать произвольными тензорами.

Задача 14. Получить с помощью (2П.5а), (2П.5в) следующие теоремы Стокса:

$$\int_S [n \nabla \varphi] \, dS = \oint_C \tau \varphi \, dI, \quad (2П.8а)$$

$$\int_S (n \operatorname{rot} a) \, dS = \oint_C (\tau a) \, dI, \quad (2П.8б)$$

где S — поверхность, натянутая на замкнутый контур C ; τ — единичный вектор, касательный к контуру и направленный по правому винту относительно n (т. е. поверхность S является правоориентированной относительно контура C). Вывести (2П.8а) из (2П.8б).

Указание: выбрать в качестве объема V бесконечно малый цилиндр.

Задача 15. Вывести из теорем Стокса следующие полезные тождества:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0, \quad (2П.9)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} a \equiv 0. \quad (2П.10)$$

Вектор e , удовлетворяющий условию $\operatorname{rot} e \equiv 0$, называется *потенциальным* или *безвихревым*. Как следует из (2П.9), в этом случае $e = -\nabla \varphi$, где φ — произвольный скаляр (*скалярный потенциал*). Вектор b , удовлетворяющий условию $\operatorname{div} b \equiv 0$, называется *соленоидальным*. В этом случае $b = \operatorname{rot} a$, где a — произвольный вектор (*векторный потенциал*).

Задача 16. Убедиться, что для уравнений

$$\nabla \varphi = e(x), \quad \operatorname{rot} a = b(x), \quad \operatorname{div} d = f(x),$$

где $e(x)$, $b(x)$ и $f(x)$ суть заданные функции, наиболее общими решениями являются соответственно:

$$\varphi = \int_0^1 r \cdot e(\lambda x) \, d\lambda + \operatorname{const},$$

$$a = \int_0^1 \lambda [b(\lambda x) r] \, d\lambda + \nabla \psi(x),$$

$$d = r \int_0^1 \lambda^2 f(\lambda x) \, d\lambda + \operatorname{rot} c(x)$$

при произвольных $\psi(x)$ и $c(x)$. Найти условия на векторы $e(x)$ и $b(x)$, при которых эти решения существуют.

Изучим теперь важнейший для приложений оператор Лапласа $\Delta \equiv (\nabla \nabla)$. Его особенность состоит в том, что он является *инвариантным* (скалярным) оператором как в применении к скалярной, так и к векторной функции. В применении к скаляру $\varphi(x)$ он определяется так:

$$\Delta \varphi \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi. \quad (2П.11)$$

Используя определения div и grad в произвольных координатах, имеем

$$\Delta \varphi = g^{-1/2} \partial_i (g^{1/2} \partial^i \varphi).$$

С другой стороны, $\partial_k \varphi = g_{ki} \partial^i \varphi$, откуда

$$\partial^i \varphi = \sum_{k=1}^3 g^{ik} \partial_k \varphi = g^{ik} \partial_k \varphi,$$

где g^{ik} — контравариантные компоненты метрического тензора, определяемые условием $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$. Итак,

$$\Delta \varphi = g^{-1/2} \partial_i (g^{1/2} g^{ik} \partial_k \varphi). \quad (2П.12)$$

Задача 17. Записать $\Delta \varphi$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

В применении к вектору \mathbf{a} оператор Δ определяется следующим образом:

$$\Delta \mathbf{a} \equiv \text{grad div } \mathbf{a} - \text{rot rot } \mathbf{a}. \quad (2П.13)$$

Задача 18. Показать, что в декартовых координатах $(\Delta \mathbf{a})_i = \Delta a_i \equiv \text{div grad } a_i$, т. е. (2П.13) согласуется с (2П.11). Найти физические компоненты вектора $\Delta \mathbf{a}$ в цилиндрических и сферических координатах.

Задача 19. Используя разложение скалярной функции φ в ряд Тейлора

$$\varphi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\boldsymbol{\xi} \nabla)^n \varphi(\mathbf{r}),$$

доказать справедливость следующего представления для $\Delta \varphi$:

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{10}{a^2} \Delta_a \varphi(\mathbf{r}), \quad (2П.14)$$

где $\Delta_a \varphi$ — среднее уклонение функции φ в объеме шара радиуса a с центром в точке \mathbf{r} , т. е.

$$\Delta_a \varphi(\mathbf{r}) \equiv \frac{3}{4\pi a^3} \int_{V_a} [\varphi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) - \varphi(\mathbf{r})] dV_{\boldsymbol{\xi}}.$$

В приложениях часто приходится иметь дело с гармоническими функциями. Функция φ называется гармонической в области V , если внутри нее она удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$. Важным свойством гармонической в области V функции является то, что она принимает свои наименьшее и наибольшее значения на границе области V (принцип максимума).

Задача 20. Доказать принцип максимума, пользуясь представлением (2П.14) для $\Delta \varphi$.

В заключение обратим внимание на важное свойство сферических средних, часто используемое при решении уравнений, содержащих оператор Лапласа. Сферическим средним некоторой функции $\varphi(\mathbf{r})$ называется величина

$$\langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle_a = \frac{1}{4\pi} \oint_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \varphi(\mathbf{r} + a\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (2П.15)$$

представляющая собой среднее значение функции $\varphi(\mathbf{r})$ на сфере радиуса a с центром в точке \mathbf{r} .

Задача 21. Показать, что

$$\Delta \langle \varphi \rangle_a = \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} (a \langle \varphi \rangle_a). \quad (2П.16)$$

Замечая, что $\varphi(\mathbf{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle_a$, выводим из (2П.16) еще одно интересное представление для оператора Лапласа:

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} [a \langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle_a]. \quad (2П.17)$$

СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

A — вектор-потенциал электромагнитного поля; A^μ — 4-потенциал электромагнитного поля; **a** — трехмерное ускорение
B — индукция магнитного поля; **B'** — индукция действующего магнитного поля; **b** — напряженность (индукция) микроскопического магнитного поля
C — емкость конденсатора; C_{ik} — емкостные коэффициенты; **c** — скорость света в вакууме
D — индукция электрического поля; \mathcal{D} — диссипативная функция Рэлея, коэффициент прохождения электромагнитной волны
E — напряженность электрического поля; **E'** — напряженность действующего электрического поля; $E^{\text{стор}}$ — напряженность сторонних электродвижущих сил; E — релятивистская энергия; E_0 — собственная энергия частицы; \mathcal{E} — электродвижущая сила, активная энергия; **e** — напряженность микроскопического электрического поля; e_i — базисные векторы; e_i — электрический заряд отдельной частицы; e — заряд электрона
F — трехмерная сила; F_R — сила реакции излучения; \mathcal{F}^μ — 4-вектор силы; $F^{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля; $\bar{F}^{\mu\nu}$ — тензор, дуальный $F^{\mu\nu}$; **f** — объемная плотность силы; f^μ — 4-вектор плотности силы; $\langle f \rangle$ — среднее по углам или по статистическому ансамблю от f ; \bar{f} — среднее по времени от f ; $[f]$ — скачок f
G — импульс электромагнитного поля; G — функция Грина; **g** — плотность импульса электромагнитного поля; $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор
H — напряженность магнитного поля; $H_{\text{кр}}$ — критическая напряженность магнитного поля; H_c — коэрцитивная сила; H — гамильтониан
I — сила электрического тока; \mathcal{J} — якобиан преобразования; **i** — поверхностная плотность тока проводимости; i_M — поверхностная плотность тока намагничивания
j — плотность тока проводимости; j_p — плотность тока поляризации; j_M — плотность тока намагничивания; j^λ — 4-вектор плотности тока
k — трехмерный волновой вектор; k — волновое число,

параметр нагрузки; k^μ — четырехмерный волновой вектор
 L — момент сил; L — индуктивность, лагранжиан; L_{ik} — взаимная индуктивность;
 \mathcal{L} — лагранжева плотность
 M — намагниченность; M_s — намагничение насыщения; M_r — остаточное намагни-
 чение; $M^{\lambda\mu\nu}$ — релятивистский тензор плотности момента импульса; \mathcal{M} — соб-
 ственная масса, молекулярный вес; $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ — релятивистский тензор момента
 импульса; $M^{i_1 \dots i_l}$ — тензор магнитного мультипольного момента; m — магнитный
 момент; m_s — спиновый магнитный момент; m_0 — невозмущенный магнитный мо-
 мент молекулы, m — инертная масса, магнитный заряд
 N — концентрация (плотность числа частиц), механическая мощность; n — единич-
 ный вектор внешней нормали; n — показатель преломления (действительный);
 n' — коэффициент поглощения электромагнитных волн
 P — поляризованность, трехмерный импульс; P — тепловая мощность (джоулева);
 P_1 — мощность электромагнитного излучения; P_E — скорость потерь энергии
 заряженной частицы на излучение; \mathcal{P}^μ — 4-вектор импульса; p — электрический
 дипольный момент; p — давление, обобщенный импульс; p_m — магнитное давление
 Q — полный электрический заряд; $Q^{i_1 \dots i_l}$ — тензор электрического мультипольно-
 го момента; q — плотность тепловой мощности, обобщенная координата
 R — электрическое (активное) сопротивление, расстояние между двумя точками;
 R_{ik} — коэффициенты сопротивления, R_1 — сопротивление излучения; R_m — магнит-
 ное число Рейнольдса; \mathcal{R} — коэффициент отражения электромагнитной волны;
 r — радиус-вектор; $R = r - r'$
 S — вектор Пойнтинга; S — гамильтоново действие; S_{ik} — потенциальные коэффи-
 циенты; s — единичный лучевой вектор; s — пространственно-временной интервал
 T — температура, $T = t - t'$; $T_{кр}$ — критическая температура; T_C — ферромагнит-
 ная точка Кюри; \hat{T} — тензор натяжений Максвелла; $T^{\mu\nu}$ — канонический тензор
 энергии — импульса; t — поверхностная плотность силы; t — время
 $U^\mu = (U^0, \mathbf{U})$ — 4-скорость частицы; U — электрическое напряжение, потенциа-
 льная энергия; \mathbf{u} — трехмерная скорость частицы
 V — объем; ΔV — физический бесконечно малый объем; \mathbf{v} — относительная скорость
 двух систем отсчета, групповая скорость, скорость частицы; v_ϕ — фазовая ско-
 рость; v_c — скорость сигнала
 W — энергия электромагнитного поля; w — плотность энергии электромагнитного
 поля
 X_{jk} — матрица реактивного сопротивления; x^i — пространственные координаты
 точки; x^μ — четырехмерные координаты точки
 Z_{jk} — матрица комплексного сопротивления (импеданс)
 α — поляризуемость молекулы, азимутальный угол; $\hat{\alpha}$ — тензор поляризуемости
 молекулы, α_p — полная поляризуемость молекулы
 β — угол Брюстера; $\beta = v/c$
 γ — коэффициент лучистого трения; $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$
 δ — толщина скин-слоя; δ^{ik} — символ Кронекера; $\delta(x)$ — дельта-функция
 ε — диэлектрическая проницаемость (в том числе комплексная); $\varepsilon' = \text{Re } \varepsilon$; $\varepsilon'' = \text{Im } \varepsilon$;
 $\hat{\varepsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости; ε^{ijk} — трехмерный символ Леви-Чи-
 вита; $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ — четырехмерный символ Леви-Чивита
 Z — магнитный вектор Герца; ζ — запаздывающее время
 η — поверхностная плотность свободного электрического заряда, комплексный
 показатель преломления; η_p — поверхностная плотность связанного электрического
 заряда
 Θ — парамагнитная точка Кюри; $\Theta^{\mu\nu}$ — симметричный тензор энергии — импульса;
 $\theta(x)$ — функция Хевисайда
 χ — диэлектрическая восприимчивость
 Λ — электромеханическая функция Лагранжа; Λ^μ — матрица Лоренца; λ — длина
 волны; $\lambda_{от}^{\mu\nu}$ — 4-тензор проницаемости
 μ — магнитная проницаемость (в том числе комплексная); $\mu' = \text{Re } \mu$, $\mu'' = \text{Im } \mu$;
 $\hat{\mu}$ — тензор магнитной проницаемости; μ_B — магнетон Бора
 ν_m — магнитная вязкость

\vec{H} — электрический вектор Герца; \vec{L}_s^H — обобщенный полевой импульс
 ρ — плотность свободного электрического заряда, ρ_p — плотность связанного электрического заряда
 Σ — инерциальная система отсчета; o — электропроводность, полное сечение рассеяния; $\hat{\sigma}$ — тензор электропроводности
 \vec{t} — единичный касательный вектор; τ — мощность электрического двойного слоя, плотность массы, время релаксации, собственное время; τ_m — мощность двойного магнитного слоя
 Φ — магнитный поток, фаза электромагнитной волны; φ — скалярный потенциал электрического поля, угол потерь
 χ — магнитная восприимчивость
 ψ — скалярный потенциал магнитного поля
 Ω — ларморова угловая скорость; Ω — телесный угол, четырехмерный объем;
 ω — круговая частота; ω_c — частота собственных электронных колебаний в атоме;
 ω_p — плазменная (ленгмюровская) частота

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

1.1. Следует учесть, что вблизи электродов диссоциация молекул идет более интенсивно, чем рекомбинация ионов. Пусть сила тока ионов, рождающихся у катода, равна $I_{\text{к}}^+ = I_{\text{к}}^-$, а у анода $I_{\text{а}}^+ = I_{\text{а}}^-$. На катоде нейтрализуются рожденные положительные ионы $I_{\text{к}}^+$ и приходящие от анода $I_{\text{а}}^+$, т. е. сила катодного тока равна $I_{\text{к}}^+ + I_{\text{а}}^+ = I$. Аналогично, на аноде $I_{\text{а}}^- + I_{\text{к}}^- = I$, и через сечение АВ течет ток силой $I_{\text{а}}^+ + I_{\text{к}}^- = I_{\text{а}}^- + I_{\text{к}}^+ = I$.

1.2. Приравнявая нулю силу, действующую со стороны равномерно заряженной сферы радиуса r на заряд в точке А ($r_0 < r$), имеем

$$\int_{-1}^{+1} \left(1 - \frac{r}{r_0} x\right) \frac{f(R)}{R} dx = 0,$$

где $R = (r_0^2 + r^2 - 2rr_0x)^{1/2}$, $x = \cos \theta$. Переходя к переменной интегрирования R , сводим уравнение к следующему:

$$\frac{\partial}{\partial r_0} \int_{r-r_0}^{r+r_0} \frac{R}{rr_0} \Phi(R) dR = 0.$$

где $\Phi'(R) = f(R)$. Решение этого уравнения дает $\Phi(R) = a + b/R$, где a, b — постоянные интегрирования. Таким образом, $f(R) = -b/R^2$ и при всякой другой зависимости шар в опыте Кавендиша оставался бы заряженным.

1.3. В полярных координатах (рис. 1) уравнение линий напряженности имеет вид $(r_1^{-1} + r_2^{-1}) [l^2 - (r_2 - r_1)^2] = \text{const}$, где $r_{1,2} = (l^2/4 + r^2 \pm rl \cos \theta)^{1/2}$, вдали от зарядов $r^{-1} \sin^2 \theta = \text{const}$.

1.5. По закону Био—Савара—Лапласа, в точке Р контура C_1 , охватывающего проводник C_2 с током, индукция магнитного поля равна

$$\mathbf{B} = \frac{I}{c} \oint_{C_2} [\boldsymbol{\tau}_2 \mathbf{r}] \frac{dl_2}{r^3},$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — единичные касательные векторы к C_1 и C_2 . После скалярного умножения на постоянный вектор \mathbf{a} это выражение с учетом теоремы Стокса принимает вид

$$(\mathbf{a}\mathbf{V}) = \frac{I}{c} \int_S (\text{rot}_2 [\mathbf{r}\mathbf{a}] r^{-3}) dS_2,$$

где $r \neq 0$, т. е. P не лежит на поверхности S , натянутой на C_2 . Из (2П. 4г) выводим $\text{rot}_2 [\mathbf{r}\mathbf{a}] r^{-3} = -(\mathbf{a}\mathbf{V}) \mathbf{r} r^{-3}$, так что

$$(\mathbf{a}\mathbf{V}) = -\frac{I}{c} (\mathbf{a}\mathbf{V}) \int_S (\text{nr}) r^{-3} dS_2.$$

Отсюда, вводя элемент телесного угла $d\Omega = dS_2 (\text{nr}) r^{-3}$, получаем (1.12). Учитывая неоднозначность функции $\Omega(\mathbf{r})$, изменяющейся на 4π при обходе C_1 , приходим к закону Ампера:

$$\oint_{C_1} (\mathbf{B} d\mathbf{l}_1) = -\frac{I}{c} \oint_{C_1} (\nabla_1 \Omega d\mathbf{l}_1) = \frac{4\pi}{c} I.$$

1.6. Приравняв нулю индукцию магнитного поля вне бесконечного прямого цилиндра радиуса R , приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial R} \int_0^\pi d\alpha \int_u^\infty \frac{r\Phi(r)}{(r^2 - u^2)^{1/2}} dr = 0,$$

где $\Phi'(r) = f(r)$, $u = (R^2 + a^2 + 2Ra \sin \alpha)^{1/2}$, $a > R$ (рис. 2). Решением этого уравнения является $r\Phi(r) = b = \text{const}$, т. е. $f(r) = -br^{-2}$.

1.9. Если проводящий контур является четко определенным и топологически неизменным, то эквивалентность формулировок Максвелла и Фарадея следует из того, что при всяком изменении магнитного потока, связанного с контуром, линии индукции пересекают его. В противном случае верна лишь фарадеевская формулировка. Так, в опыте Фарадея (рис. 1.11) контур не является четко определенным, ибо неизвестно, по какому пути следуют электроны внутри диска. Если же связать магнитный поток Φ с воображаемым контуром $OAGO$, то $d\Phi/dt = 0$, но э. д. с. индукции $\mathcal{E} \neq 0$, ибо диск пересекает линии индукции, т. е. $\Delta\Phi \neq 0$. В опыте же с тороидом контур C гальванометра не является топологически неизменным, ибо к нему прирастает петля челнока D . Поэтому, хотя $d\Phi/dt \neq 0$, все же $\mathcal{E} = 0$, так как контур C не пересекает линий индукции.

1.11. Если бы правило Ленца было неверным, то ток индукции был бы направлен так, что, взаимодействуя с магнитным полем, обеспечил бы дальнейший свой рост, а значит, и неограниченный рост связанной с ним энергии в противоречии с законом ее сохранения.

1.14. Приравняем работу A , совершаемую магнитным полем тока I над магнитным зарядом m при его медленном обходе вокруг тока, и работу A' возникающей при этом э. д. с. индукции:

$$A = m \oint_C (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = A' = \int \mathcal{E} I dt = \frac{I}{c} \Phi = \frac{4\pi m}{c} I,$$

где $\Phi = 4\pi m$ — магнитный поток полюса m .

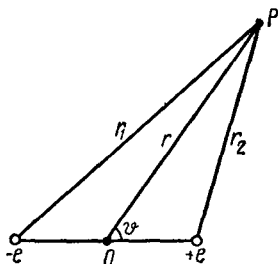


Рис. 1

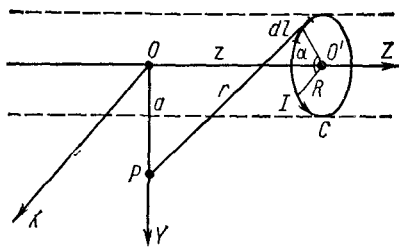


Рис. 2

1.15. $N_{\max} = (I_2 - I_1)^2 \mathcal{G} / (4I_2)$, где $I_1 \sim B_{\text{стат}}^{-1}$.

2.1. Положить в (2.7) $\mathbf{j} = \rho \delta \mathbf{r} / \delta t$.

$$2.2. \mathbf{p} = \int_V \mathbf{P} dV, \quad m = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V [r\mathbf{P}] dV + \int_V \mathbf{M} dV.$$

3.1. В сферических координатах из (3.7) выводим: $\delta(\mathbf{r}) = (2\pi r^2)^{-1} \delta(r) = = -(2\pi r)^{-1} \delta'(r)$; $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \delta(r - a) \delta(\vartheta - \vartheta_a) \delta(\alpha - \alpha_a) / (r^2 \sin \vartheta)$.

3.2. Формула (3.8) получается переходом к переменной интегрирования $y = \varphi(x)$ в интеграле $\int f(x) \delta[\varphi(x)] dx$.

3.3. Заменяя сингулярное выражение $g r^{-3}$ на $\lim_{\alpha \rightarrow +0} g [r(r^2 + \alpha)]^{-1}$ и замечая, что $\text{div}(\mathbf{r} r^{-3}) = 0$ при $r \neq 0$, преобразуем (3.7) по теореме о среднем и теореме Гаусса—Остроградского:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{V_\epsilon} \frac{f(\mathbf{r})}{4\pi} \text{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{r(r^2 + \alpha)} \right) dV = \frac{f(0)}{4\pi} \oint_{S_\epsilon} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{dS}{r^2 + \alpha} = f(0).$$

3.4. $E = E_r = \theta(r - a) Q r^{-2}$, где $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, т. е. $\theta(x > 0) = 1$, $\theta(x < 0) = 0$. Для нахождения $E(r = a)$ вычисляем силу dF , действующую на элемент заряда dQ со стороны всех остальных зарядов, т. е. $E(r = a) = = dF/dQ$. Но $dF/dQ = E - E^{\text{соб}}$, где $E = Q/a^2$ — напряженность поля вне сферы, $E^{\text{соб}} = Q/2a^2$ — напряженность собственного поля элемента заряженной поверхности, совпадающая вблизи этой поверхности с напряженностью поля равномерно заряженной бесконечной плоскости.

4.1. Так как $[\mathbf{j}' \mathbf{R}] R^{-3} = \text{rot}(\mathbf{j}' R^{-1})$, то (4.6) очевидно. Далее, $\text{rot rot}(\mathbf{j}' R^{-1}) = = \nabla \text{div}(\mathbf{j}' R^{-1}) - \mathbf{j}' \Delta(R^{-1})$. Поэтому, взяв ротор от (4.5) и учитывая (3.9), находим

$$\text{rot } \mathbf{B} = c^{-1} \nabla \text{div} \int \mathbf{j}' R^{-1} dV' + (4\pi/c) \mathbf{j}.$$

Переходим к переменной интегрирования $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$: $\nabla \text{div} \int \mathbf{j}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) R^{-1} dV_R = = \nabla \int R^{-1} \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) dV_R = 0$, так как $\text{div } \mathbf{j} = 0$. Отсюда и следует (4.2).

5.1. Взяв дивергенцию от (5.3), найдем $\partial(\text{div } \mathbf{B})/\partial t = 0$. Поэтому, если (4.6) верно при $t = 0$, то оно верно всегда.

6.1. Полагая $K \equiv \text{div } \mathbf{E} - 4\pi\rho$, из (6.3) находим $\partial K/\partial t = -4\pi(\text{div } \mathbf{j} + \partial\rho/\partial t) \equiv 0$ с учетом (2.7). Поэтому, если $K = 0$ при $t = 0$, то $K \equiv 0$. С учетом результата задачи 5.1 убеждаемся, что для отыскания полей \mathbf{E} и \mathbf{B} достаточно решить уравнения (5.3) и (6.3), т. е. система (6.4) непротиворечива.

6.2. В первом случае $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ и $\rho, \mathbf{E}, \mathbf{B}$ суть функции от $\mathbf{r} - \mathbf{v}t$. Поэтому вектор $\mathbf{X} \equiv \mathbf{B} - c^{-1}[\mathbf{v}\mathbf{E}]$, согласно (6.4), удовлетворяет уравнениям $\text{rot } \mathbf{X} = 0$, $\text{div } \mathbf{X} = = c^{-2}(\mathbf{v}\nabla)(\mathbf{v}\mathbf{X})$ или $\mathbf{X} = \nabla\varphi$ и $\Delta\varphi = c^{-2}(\mathbf{v}\nabla)^2\varphi$. Для ограниченной системы зарядов $\mathbf{X} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Поэтому умножение последнего уравнения на φ и интегрирование по частям дает $\int [(\nabla\varphi)^2 - c^{-2}(\mathbf{v}\nabla\varphi)^2] dV = 0$. При $v < c$ подынтегральное выражение строго положительно, т. е. $\nabla\varphi = \mathbf{X} \equiv 0$.

Во втором случае для вектора $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ получаем уравнения $\text{div } \mathbf{Y} - - c^2(\mathbf{v}\nabla)(\mathbf{v}\mathbf{Y}) = 4\pi[\rho - c^{-2}(\mathbf{v}\mathbf{j})]$, $\text{rot } \mathbf{Y} = 0$. Однако для равномерного движения зарядов необходимо, чтобы в тех точках, где $\rho \neq 0$, было $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}\mathbf{B}]) = 0$, или $\mathbf{Y} = 0$. Но тогда в этих точках $\rho = c^{-2}(\mathbf{v}\mathbf{j})$, и всюду $\text{div } \mathbf{Y} - c^{-2}(\mathbf{v}\nabla)(\mathbf{v}\mathbf{Y}) = 0$. Тем самым все сводится к первому случаю.

6.3. Согласно (6.7), в магнитном облаке, движущемся со скоростью \mathbf{u} , существует электрическое поле $\mathbf{E} = c^{-1}[\mathbf{B}\mathbf{u}]$. На частицу заряда e , входящую в облако со скоростью \mathbf{v}_0 , действует сила $(e/c)[(\mathbf{v}_0 - \mathbf{u})\mathbf{B}]$, и прирост кинетической энергии

по выходе из облака равен $\Delta T = - (e/c) (\mathbf{u} [\mathbf{B} \Delta \mathbf{r}])$. Но $e (\mathbf{v}_0 [\mathbf{B} \Delta \mathbf{r}]) > 0$ (рис. 3) и поэтому $\text{sign } \Delta T = - \text{sign} (\mathbf{u} \mathbf{v}_0)$. Таким образом, частица будет приобретать энергию, двигаясь навстречу облаку, и терять ее, его нагоняя. Однако первое более вероятно, и в среднем частица ускоряется. Это видно из следующего. Пусть распределение облаков по скоростям изотропно и задается функцией $f(u)$. Тогда число столкновений частицы с облаками за 1 с пропорционально $f(u) |\mathbf{u} - \mathbf{v}_0|$, а среднее значение $(\mathbf{u} \mathbf{v}_0)$ пропорционально $\int f(u) |\mathbf{u} - \mathbf{v}_0| (\mathbf{u} \mathbf{v}_0) d^3u < 0$.

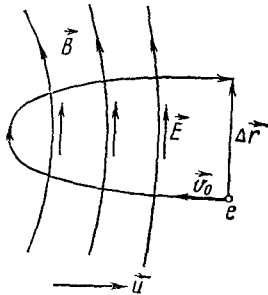


Рис. 3

7.1. Рассматривая (7.2) как (2.7), проинтегрированное по малому промежутку времени, имеем $\rho^+ dq/dt = j$ и с учетом (2.2) и (2.5)

$$\sum_{i \in \Delta V} e_i \frac{dr_i}{dt} = \sum_{i \in \Delta V} e_i^+ \frac{dq}{dt},$$

откуда после интегрирования по времени получаем (7.4).

8.1. Умножая скалярно магнитный момент линейного тока

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c} \oint [\mathbf{r} d\mathbf{l}]$$

на постоянный вектор \mathbf{a} и применяя теорему Стокса, находим

$$(\mathbf{m} \mathbf{a}) = \frac{I}{2c} \int_S (\mathbf{n} \text{rot} [\mathbf{a} \mathbf{r}]) dS = \frac{I}{c} \int_S (\mathbf{n} \mathbf{a}) dS,$$

откуда и следует (8.1).

$$11.1. R_{12} = \int_1^2 \frac{(\mathbf{n} \cdot \hat{\sigma}^{-1} \cdot \mathbf{n})}{S(\mathbf{r})} dl, \text{ где } \mathbf{n} = j/j.$$

13.2. Умножая (13.10) векторно на \mathbf{r} и интегрируя по объему V , занятому источниками (включая среду), находим

$$\varepsilon^{ijk} \int_V x_j \left(I_k^{\text{полн}} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial t} \right) dV = \varepsilon^{ijk} \int_V x_j \partial_i \Theta_k^t dV. \quad (1)$$

Последний интеграл преобразуется интегрированием по частям:

$$-\varepsilon^{ijk} \int_V \Theta_{jh} dV + \varepsilon^{ijk} \int_S x_j n_i \Theta_k^t dS. \quad (2)$$

Левая часть (1) по второму закону динамики приводится к виду $(d/dt) (\mathcal{M}_{(m)}^i + \mathcal{M}_{(f)}^i)$, где $\mathcal{M}_{(m)}$ и $\mathcal{M}_{(f)}$ суть моменты импульсов источников и поля. Поэтому правая часть (1) должна сводиться к потоку момента импульса поля через окружающую поверхность S . Но тогда объемный интеграл в (2) должен исчезать, откуда $\Theta_{ik} = \Theta_{ki}$.

13.3. Интегрируя по поверхности S тела, находим $F = F_3 = \oint_S n_i \Theta_3^t dS = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[(\mathbf{n} \mathbf{B}) B_3 - \frac{1}{2} B^2 n_3 \right] dS \approx B^2 S_0 / (8\pi)$, где S_0 — площадь полюсов магнита

14.1. Если \mathbf{u} — скорость перемещения провода с током, $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{u}$ — скорость свободного заряда e_i относительно провода, то плотность мощности силы Лоренца равна

$$\frac{1}{c \Delta t} \sum_{i \in \Delta V} e_i (\mathbf{v}_i [\mathbf{v}_i \mathbf{B}]) = \frac{1}{c \Delta t} \sum_{i \in \Delta V} e_i \{ (\mathbf{u} [\mathbf{u} \mathbf{B}]) + (\mathbf{u}_i [\mathbf{u} \mathbf{B}]) \} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{c} (\mathbf{u} | \mathbf{jB}) + \frac{1}{c} (\mathbf{j} | \mathbf{uB}) \equiv 0.$$

Первое слагаемое, очевидно, характеризует видимую работу магнитного поля над проводом с током, а второе — его невидимую работу по смещению зарядов в проводе, которую можно еще рассматривать как работу вихревого электрического поля $\mathbf{E} = c^{-1} [\mathbf{uB}]$.

14.2. $q = (\mathbf{jE}^{\text{стор}}) - \partial w / \partial t - \text{div } S$

16.1. $\Delta \varphi_l = l(l-1) a^2 \varphi_{l-2}$.

16.2. $P_0 = 1, P_1 = \cos \vartheta, P_1^1 = -\sin \vartheta, P_2 = (3\cos^2 \vartheta - 1)/2, P_2^1 = -(3/2) \sin 2\vartheta, P_2^2 = 3 \sin^2 \vartheta$.

17.1. $\varphi(r) = 4\pi \int_r^\infty \rho(r') r' dr' + \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(r') (r')^2 dr'$.

17.3. В плоском диоде уравнение Пуассона имеет вид $\varphi''(x) = -4\pi \rho(x)$ с граничными условиями: на катоде $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, на аноде $\varphi(l) = U$. Из закона сохранения энергии найдем скорость эмиссионных электронов $v(x) = (2|e|\varphi/m)^{1/2}$, откуда $\rho(x) = -j/v$, где $j = \text{const}$. Поэтому φ удовлетворяет уравнению $\varphi'' = (\alpha^2/4) \varphi^{-1/2}$ при $\alpha^2 = 8\pi j (2m/|e|)^{1/2}$. Его первый интеграл имеет вид $(\varphi')^2 = \alpha^2 \varphi^{1/2}$. Отсюда $\varphi' = \alpha \varphi^{1/4}$ и $4\varphi^{3/4} = 3\alpha x$. Отсюда и следует закон Ленгмюра.

18.2. В сферических координатах (рис 4)

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{ekK(k)}{\pi \sqrt{ar \sin \vartheta}}, \quad k^2 \equiv \frac{4ar \sin \vartheta}{a^2 + r^2 + 2ar \sin \vartheta}.$$

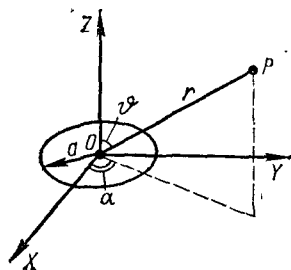


Рис. 4

Так как $K(k) \approx \ln(4/\sqrt{1-k^2})$ при $k \approx 1$, то вблизи кольца ($\vartheta \approx \pi/2, r \approx a$) $\varphi \approx -[e/(\pi a)] \ln[r'/(8a)]$, где введено расстояние от точки наблюдения до кольца $r' = (a^2 + r^2 - 2ar \sin \vartheta)^{1/2}$.

Если $k \ll 1$, то $K(k) \approx (1 + k^2/4 + 9k^4/64 + \dots) \pi/2$ и вдали от кольца ($r \gg a$)

$$\varphi \approx \frac{e}{r} \left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^2}{4r^2} \sin^2 \vartheta + \dots \right).$$

19.2. Учтем, что при $r \gg a_l$

$$\varphi_l(r) = \varphi_{l-1}(r - a_l) - \varphi_{l-1}(r) \approx -(\mathbf{a}_l \nabla) \varphi_{l-1}(r).$$

19.4. Используя (19.9) и (19.13), находим

$$\mathbf{E}_2 = 3er^{-7} \{ 5\mathbf{r}(\mathbf{a}_1 \mathbf{r})(\mathbf{a}_2 \mathbf{r}) - r^2 [a_2(\mathbf{a}_1 \mathbf{r}) + \mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \mathbf{r}) - r(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2)] \}.$$

19.5. Если заряд сосредоточен в цилиндрической области с поперечным сечением S , то из (19.1) находим

$$\varphi(\mathbf{r}) = -2 \int_S \rho(r') \ln |r - r'| dS',$$

где \mathbf{r} — двумерный радиус-вектор. Отсюда по аналогии с (19.6) получаем мультипольное разложение ($r > a > r'$):

$$\varphi(\mathbf{r}) = -2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} Q^{i_1 \dots i_l} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \ln r,$$

где тензор мультипольного момента равен

$$Q^{i_1 \dots i_l} = \int_S \rho(r') x^{i_1} \dots x^{i_l} dS'; \quad i_s = 1, 2.$$

Очевидным аналогом формулы (19.9) является

$$\varphi_l(r) = (-1)^{l+1} 2\pi \left[\prod_{i=0}^l (a_i \nabla) \right] \ln r.$$

20.1. Согласно (20.3), вклад элемента $dS \ni \mathbf{r}$ поверхности двойного слоя в потенциалы φ_{\pm} справа и слева от слоя равен $\pm 2\pi l(r)$. Если φ' — вклад всех остальных элементов, то $\varphi_{\pm} = \varphi' \pm 2\pi l(r)$, откуда и вытекает (20.5).

21.1. Учтем, что вблизи S' $\mathbf{r}_{\text{синг}} = [P] \theta \{f(r)\}$, $\mathbf{M}_{\text{синг}} = [M] \theta \{f(r)\}$, и использовать формулу $\theta'(x) = \delta(x)$.

22.1. Запишем для элемента векторной трубки поля \mathbf{D} (рис. 5) теорему Гаусса: $(\mathbf{n}_2 \mathbf{D}_2) dS_2 = (\mathbf{n}_1 \mathbf{D}_1) dS_1$. Вводя главные радиусы кривизны R_1 и R_2 поверхности проводника (рис. 6), имеем: $dS_1 = R_1 R_2 d\alpha_1 d\alpha_2$, $dS_2 = (R_1 + dl)(R_2 + dl) d\alpha_1 d\alpha_2$.

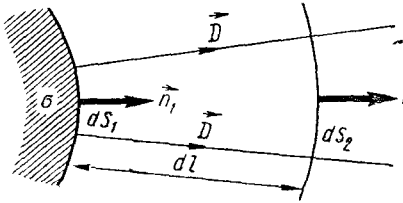


Рис. 5

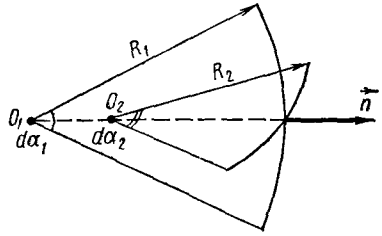


Рис. 6

Поэтому $(\mathbf{n}_2 \mathbf{D}_2) - (\mathbf{n}_1 \mathbf{D}_1) = -2K(\mathbf{n}_2 \mathbf{D}_2) dl$, где $K = (R_1^{-1} + R_2^{-1})/2$ — средняя кривизна. При $dl \rightarrow 0$ получаем (22.12).

22.3. Используем сферические координаты ($\theta = 0$ — направление \mathbf{p}). Если диполь ориентирован вдоль или перпендикулярно плоскости раздела, то имеем соответственно:

$$1. \varphi = \frac{2p \cos \theta}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) r^2} \left(1 - \frac{r^3}{a^3}\right), \quad \eta_i = \epsilon_i \frac{6p \cos \theta}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) a^3} \quad (i = 1, 2);$$

$$2. \varphi_i = \frac{p \cos \theta}{\epsilon_i r^2} \left(1 - \frac{r^3}{a^3}\right), \quad \eta = \frac{3p}{a^3} \cos \theta \quad (i = 1, 2).$$

В двумерном случае (цилиндрические координаты):

$$1. \varphi = \frac{4p \cos \alpha}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad \eta_i = \epsilon_i \frac{12p \cos \alpha}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) a^2} \quad (i = 1, 2);$$

$$2. \varphi_i = \frac{2p \cos \alpha}{\epsilon_i r} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad \eta = \frac{6p}{a^2} \cos \alpha \quad (i = 1, 2).$$

23.1. При смещении заряда e_i на вектор $d\mathbf{r}$ энергия системы W'_e изменится на $e_i (d\mathbf{r} \nabla)^2 \varphi_i / 2$. Полученная квадратичная форма знакопеременная, так как сумма диагональных элементов ее матрицы равна $e_i \Delta \varphi_i / 2 = 0$. Поэтому положение равновесия системы зарядов не может быть устойчивым.

23.2. В модели атома Томсона напряженность поля равна

$$E = -\frac{e}{r^2} + \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r r^2 \rho^+ dr \quad (r < a),$$

т. е. $E < 0$ вследствие нейтральности атома. Поэтому, чтобы удержать положительные заряды в равновесии, необходимо ввести неэлектростатические отталкивающие силы, так что противоречия с теоремой Ирншоу нет.

23.3. Пусть \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{E}' , \mathbf{D}' — соответственно поля до и после внесения диэлектрического образца. Из теоремы Гаусса — Остроградского $\int \mathbf{E} \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV = 0$, так

как $\operatorname{div}(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) = 0$. Поэтому изменение энергии поля равно $W'_e - W_e = \frac{1}{8\pi} \int [(\mathbf{D}'\mathbf{E}') - (\mathbf{D}\mathbf{E})] dV = \frac{1}{8\pi} \int (\varepsilon - \varepsilon') (\mathbf{E}\mathbf{E}') dV$, откуда и следует (23.13). Если в область V_0 вносится незаряженный проводник, то

$$W'_e - W_e = -\frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{D}\mathbf{E}) dV + \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} [(\mathbf{D}'\mathbf{E}') - (\mathbf{D}\mathbf{E})] dV,$$

где V_1 — область, не занятая проводником. Применяя теорему Гаусса — Остроградского к области V_1 с границей S_1 , имеем

$$\int_{V_1} \mathbf{E}' \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV = \int_{V_1} \varphi' \operatorname{div}(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV - \oint_{S_1} \varphi' \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dS = 0,$$

так как $\operatorname{div}(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) = 0$ и проводник нейтрален. Поэтому

$$W'_e - W_e = -\frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{D}\mathbf{E}) dV - \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) dV < 0.$$

23.4. Из (23.8) и (19.13) находим энергию взаимодействия двух диполей $W'_e = -(\mathbf{p}\mathbf{E}') = -3(\mathbf{p}\mathbf{a})(\mathbf{p}'\mathbf{a})/a^5 + (\mathbf{p}\mathbf{p}')/a^3$, где \mathbf{E}' — напряженность поля диполя \mathbf{p}' (рис. 7). С помощью (23.15) находим:

$$\mathbf{F} = \frac{3}{a^2} \{5\mathbf{a}(\mathbf{p}\mathbf{a})(\mathbf{p}'\mathbf{a}) - a^2[\mathbf{p}(\mathbf{p}'\mathbf{a}) + \mathbf{p}'(\mathbf{p}\mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{p}\mathbf{p}')]\},$$

$$\mathbf{L} = [\mathbf{p}\mathbf{E}'] = 3[\mathbf{p}\mathbf{a}](\mathbf{p}'\mathbf{a})/a^5 - [\mathbf{p}\mathbf{p}']/a^3.$$

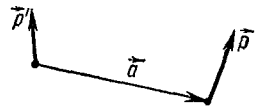


Рис. 7

24.1. Построим векторные трубки поля \mathbf{D} , соединяющие проводники с потенциалами φ_1, φ_2 и зарядами Q_1, Q_2 соответственно. По теореме Гаусса, $(\mathbf{n}\mathbf{D}) dS(\mathbf{r}) = 4\pi\eta_1 dS_1$, где η_1 — поверхностная плотность заряда на первом проводнике. Поэтому $\mathbf{D} = 4\pi\tau\eta_1 f(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E} = \hat{\varepsilon}^{-1} \cdot \mathbf{D}$, что позволяет записать разность потенциалов в виде $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{D_{12}} (\mathbf{E}\boldsymbol{\tau}) d\mathbf{l} = 4\pi\eta_1 \int_{D_{12}} (\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\varepsilon}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{l}$. Суммируя по всем взаимным векторным линиям D_{12} , находим связанный с ними заряд первого проводника $Q_{12} = \int \eta_1 dS_1 = a_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)$. В случае системы проводников, аналогично, $Q_{ik} = a_{ik}(\varphi_i - \varphi_k)$, откуда получаем соотношение $Q_i = \sum_{k \neq i} Q_{ik} = \sum_{k \neq i} a_{ik}(\varphi_i - \varphi_k)$, из которого и вытекает (24.4).

24.3. $Q_1 = Q_2 = Q(n-1)/(2n-1)$, $Q_3 = Q/(2n-1)$.

24.4. В цилиндрических координатах $\varphi = a\alpha + b$, где a, b — постоянные. Поэтому емкость равна $C = S \sin(\beta/2) [2\pi\beta(d_2 - d_1)]^{-1} \ln(d_2/d_1)$.

24.5. Если при деформации конденсатора объем, занятый полем, изменился на δV , то изменение энергии поля равно $\delta W_e = [E^2/(8\pi)] \delta V = -Q^2 \delta C / (2C^2)$. Поэтому $\delta C_1 = -a^2 \delta V [4\pi b^2(b-a)^2]^{-1}$; $\delta C_2 = d(a+b) [4(a-b)]^{-1}$.

24.6. В сферических координатах $\varphi = C_1 \ln \operatorname{tg}(\vartheta/2) + C_2$, где $C_{1,2}$ — постоянные. Поэтому емкость равна $C = \frac{b-a}{2} \left[\ln \frac{\operatorname{tg}(\beta/4)}{\operatorname{tg}(\alpha/4)} \right]^{-1}$.

24.7. Изменение энергии поля при произвольном изменении распределения зарядов в проводниках равно

$$W'_e - W_e = \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{D}'\mathbf{E}') dV + \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} [(\mathbf{D}'\mathbf{E}') - (\mathbf{D}\mathbf{E})] dV,$$

где V_0 — область, занятая проводниками, а V_1 — диэлектриком. Как и в задаче 23.3,

$$\int_{V_1} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV = 0, \text{ откуда}$$

$$W'_e - W_e = \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{D}' \cdot \mathbf{E}') dV + \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} \epsilon (\mathbf{E}' - \mathbf{E})^2 dV > 0.$$

25.1. $\eta = 9\lambda E_0 \cos \theta / (4\pi)$; $\varphi (r < b) = 3\lambda E_0 r \cos \theta (a^3/r^3 - 1) \theta (r - a)$; $\varphi (r > b) = -E_0 r \cos \theta \{1 - (\lambda/r^3) [b^3 (\epsilon - 1) + a^3 (2\epsilon + 1)]\}$, где $\lambda \equiv [\epsilon + 2 + 2(\epsilon - 1) a^3/b^3]^{-1}$.

25.2. $\varphi (r < a) = 0$, $\varphi_1 = -E_0 r \cos \theta (1 - a^2/r^2)$, $\varphi_2 = -(\epsilon_1/\epsilon_2) E_0 r \cos \theta (1 - a^2/r^2)$; $\eta = 3\epsilon_1 E_0 \cos \theta / (4\pi)$

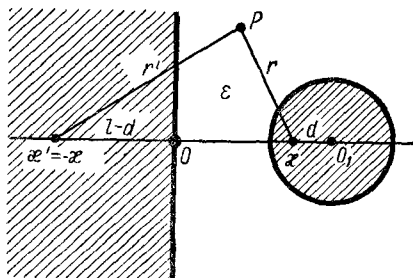


Рис. 8

26.1. В диэлектрике $\varphi = -(2\kappa/\epsilon) \times \ln(r/r')$ (рис. 8), т. е. эффективно поле создается двумя параллельными нитями с зарядами $\pm \kappa$, положение которых ($OO_1 = l$, $d = l - \sqrt{l^2 - a^2}$) находится из (26.17). Потенциал цилиндра $\varphi_0 = (2\kappa/\epsilon) \times \ln(a/d)$, что позволяет вычислить энергию поля $W_e = \kappa\varphi_0/2$ и силу притяжения цилиндра к плоскости (на 1 см длины) $F = -\partial W_e / \partial l = -\kappa^2 a / (\epsilon \sqrt{l^2 - a^2})$.

27.1. Допустим, что под действием электрического поля в пограничном слое некоторое количество электронов δN перешло из области $V_1 = V$ в среде 1 в область $V_2 = V$ в среде 2, вызывая локаль-

ное изменение проницаемости $\delta\epsilon \sim \delta N$, т. е. $\delta\epsilon_1 = -\delta\epsilon_2 < 0$. Так как поле при этом совершает работу, то его энергия уменьшится, т. е. $[\text{см} (23.13)] 8\pi \delta W_e = -E_1^2 \delta\epsilon_1 V_1 - E_2^2 \delta\epsilon_2 V_2 = D^2 / |\delta\epsilon_1| (\epsilon_1^{-2} - \epsilon_2^{-2}) V < 0$. Отсюда $\epsilon_1 > \epsilon_2$.

28.1. В цилиндрических координатах имеем:

а) $I = I_z$, $B = B_\alpha = 2I/(cr)$, $A = A_z = -(2I/c) \ln r$;
 б) $I = j\alpha$, $B = B_z = (4\pi/c) nI\theta (a - r)$, $A = A_\alpha = Br/2 + \theta (r - a) 2\pi n I a^2 / (cr)$.

29.1. В сферических координатах (рис. 4) имеем:

$$A = A_\alpha = \frac{2I}{kc} \left(\frac{a}{r \sin \theta} \right)^{1/2} [(2 - k^2) K - 2E], \quad k^2 \equiv \frac{4ar \sin \theta}{a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta}.$$

Вдали от тока ($k \ll 1$): $K \approx [1 + k^2/4 + k^4/64] (\pi/2)$, $E \approx [1 - k^2/4 - 3k^4/64] (\pi/2)$, т. е. $A \approx \pi a^2 \frac{I \sin \theta}{c(a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta)^{3/2}}$. Вблизи от тока ($k \approx 1$): $E \approx 1$, $K \approx$

$\approx \ln(4/\sqrt{1 - k^2})$, т. е. $A \approx (2I/c) [\ln(8a/r') - 2]$, где $r' = (a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta)^{1/2}$ — расстояние от точки наблюдения до контура.

30.1. Магнитный потенциал имеет вид $\psi (r > a) = -a' (H_0 r) r^{-3}$, $\psi (r < a) = -(H_0 r)$, где $H_0 = -4\pi M_0 (\mu + 2)^{-1} = H (r < a)$.

30.2. $\psi = (mr)/r^3 + (m'r')/(r')^3$, где $m' = -m + 2\pi (mn)$, n — нормаль к стенке; r, r' — расстояния до магнита и его отражения соответственно.

31.1. Магнитный поток Φ , связанный со сверхпроводящим контуром C , не может измениться, ибо в сверхпроводнике $\mathbf{B} = 0$ и линии индукции не могут пересечь контур. Поэтому справедливо равенство (31.3), откуда $R = 0$.

31.2. $A = [mr]/r^3 + [m'r']/(r')^3$, где $m' = m - 2\pi (mn)$.

31.3. $A = A_z = -(2I\mu/c) \ln(r_1/r_2)$ (рис. 9; $d = l - \sqrt{l^2 - a^2}$).

31.4. $\mathbf{B}^{\text{вн}} = \mu\theta (r - a) \{H_0 [1 + a^3/(2r^3)] - 3\Gamma (H_0 r) a^3/(2r^5)\}$, $\mathbf{B}^{\text{вн}} = \mu\theta (r - a) [H_0 (1 + a^2/r^2) - 2\Gamma (H_0 r) a^2/r^4]$.

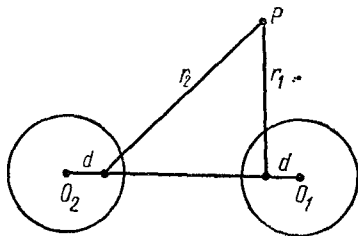


Рис. 9

31.5. Применим теорему Стокса к одной из линий индукции C , касающейся, согласно граничному условию $(\mathbf{nB})=0$, поверхности сверхпроводника. Имеем

$$\oint_C (\mathbf{B} \, dl) = \oint_C B \, dl = \int_S (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{B}) \, dS = 0,$$

так как поверхность S можно расположить вне образца благодаря его односвязности. Отсюда $\mathbf{B} \equiv 0$.

32.2. $L = 4\pi\mu N^2 (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2.$

32.3. Согласно результату задачи 29.1, вблизи кольца $A = A_\alpha = = (2l/c) [\ln(8a/r_0) - 2]$, откуда $L = 4\pi a [\ln(8a/r_0) - 2]$.

32.4. Вначале сила тока растет линейно с напряженностью H_0 поля (рис. 10, участок OA), поскольку $\Phi = \pi a^2 H_0 - Ll/c$, где $L = 4\pi a \times \times [\ln(8a/r_0) - 2]$. Но при $H_0 = H_A$ напряженность поля вблизи внешнего обода кольца, где она максимальна, станет равной $H_{кр}$ и кольцо перейдет в промежуточное состояние. При этом $H_{кр} = [2l/(cr_0)] + 2H_0$, т. е. поле складывается из поля тока $2l/(cr_0)$ и искаженного внешнего поля $2H_0$ (см. задачу 31.4) — участок AB . Отсюда $H_A = \frac{1}{2} H_{кр} \left(1 + \frac{\pi a^2}{Lr_0}\right)^{-1}$. При

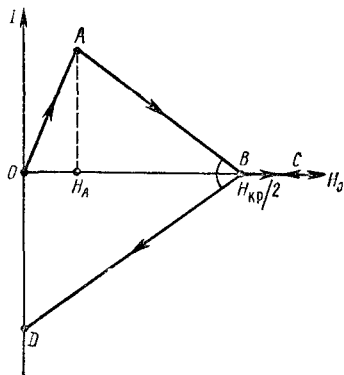


Рис. 10

$H_0 \geq H_{кр}/2$ кольцо перестает быть сверхпроводящим и наведенный в нем ток отсутствует (участок BCB). С убыванием поля, т. е. при $H_0 < H_{кр}/2$, кольцо вновь переходит в промежуточное состояние, когда напряженность поля вблизи внутреннего обода равна $H_{кр} = = 2H_0 - 2l/(cr_0)$ (участок BD). В самом деле, если бы при этом кольцо было сверхпроводящим, то магнитный поток через него был бы постоянным: $\Phi = \pi a^2 H_0 - Ll/c = \pi a^2 H_{кр}/2$, откуда $l = (2H_0 - H_{кр}) \pi a^2 \times \times c/(2L)$, и вблизи внутреннего обода $H = 2H_0 - 2l/(cr_0) = 2H_0 - (2H_0 - H_{кр}) \pi a^2/(Lr_0)$. Оценим разность $H - H_{кр} = (2H_0 - H_{кр}) [1 - \pi a^2/(Lr_0)]$. Положив $x \equiv a/(4r_0)$, имеем $y \equiv \pi a^2/(Lr_0) = x (\ln 32x - 2)^{-1} > x (\ln x + 1,5)^{-1}$, ибо $\ln 32 < 3,5$. Таким образом, уже при $x > 3$ будет $y > 1$ и $H > H_{кр}$, т. е. достаточно тонкое кольцо не будет сверхпроводящим.

32.5. Поскольку при внесении магнетика $\operatorname{rot}(\mathbf{H}' - \mathbf{H}) = 0$, то $\mathbf{H}' - \mathbf{H} = \nabla\chi$ и $\int_V \mathbf{B} \cdot (\mathbf{H}' - \mathbf{H}) \, dV = - \int_V \chi \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = 0$. Аналогично получаем $\int_V \mathbf{B}' \cdot (\mathbf{H}' - \mathbf{H}) \, dV = 0$, откуда и следует (32.21).

Если в область V_0 с границей S_0 вносится сверхпроводник, то

$$\mathcal{W}'_m - \mathcal{W}_m = - \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{BH}) \, dV + \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} \{(\mathbf{B}'\mathbf{H}') - (\mathbf{BH})\} \, dV,$$

где V_1 — область, не занятая сверхпроводником. Поскольку $(\mathbf{nB}')|_{S_0} = 0$ и $\mathbf{H}' - \mathbf{H} = \nabla\chi$ в области V_1 , то

$$\int_{V_1} \mathbf{B}' \cdot (\mathbf{H}' - \mathbf{H}) \, dV = - \int_{V_1} \chi \operatorname{div} \mathbf{B}' \, dV - \oint_{S_0} (\mathbf{nB}') \chi \, dS = 0,$$

В результате

$$\mathcal{W}'_m - \mathcal{W}_m = - \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{BH}) \, dV - \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\mathbf{B}' - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{H}' - \mathbf{H}) \, dV < 0.$$

33.1. Сопоставим точечному магнитному моменту \mathbf{m} плотность тока $\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \{\operatorname{mb}(\mathbf{r})\}$. Энергия его взаимодействия с магнитным полем $\mathbf{B}_0 = \operatorname{rot} \mathbf{A}_0$

равна $W'_m = \frac{1}{c} \int (\mathbf{j} \mathbf{A}_0) dV = (\mathbf{m} \mathbf{B}_0)$. Отсюда (см. задачу 23.4) $\mathbf{F} = \nabla W'_m = (\mathbf{m} \nabla) \mathbf{B}_0$, $\mathbf{L} = [\mathbf{m} \mathbf{B}_0]$.

34.1. Из уравнений (34.8) и (34.9) находим (рис. 11):

$$\sigma_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 = \sigma_2 \operatorname{ctg} \alpha_2, \quad 4\pi\eta = (\mathbf{n}) (\varepsilon_2/\sigma_2 - \varepsilon_1/\sigma_1).$$

35.1. Для любого сечения трубки тока, соединяющей проводники с потенциалами Φ_1 и Φ_2 , $(\mathbf{n}) dS = (\mathbf{n}_1 \mathbf{j}_1) dS_1$, где dS_1 — элемент поверхности первого проводника. Выбирая $\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{j}/j$, находим $\mathbf{E} = \hat{\sigma}^{-1} \cdot \mathbf{j} = \hat{\sigma}^{-1} j f(\mathbf{r}) (\hat{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau})$, где $f(\mathbf{r}) = dS_1/dS(\mathbf{r})$. Интегрируя \mathbf{E} вдоль линии тока, находим

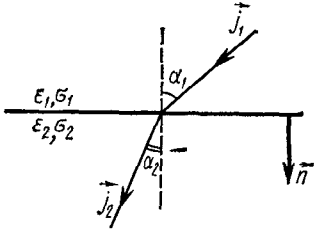


Рис. 11

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_1^2 (\mathbf{E} d\mathbf{l}) = j_1 \int_1^2 f(\mathbf{r}) (\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\mathbf{l}.$$

Суммируя j_1 по всем линиям тока, связывающим проводники, получим $\int j_1 dS_1 \equiv I_{12} = (\Phi_1 - \Phi_2) b_{12}$, где b_{12} задается (35.6). Для произвольного набора проводников $I_l = \sum_k I_{lk} = \Phi_l (b_{l0} + \sum_{k \neq l} b_{lk}) - \sum_{k \neq l} b_{lk} \Phi_k$, где b_{l0} относится к линиям тока, уходящим в бесконечность. Отсюда и вытекает представление (35.5).

35.2. Если заданы силы токов I_i , стекающих с электродов S_i , то при любом изменении распределения токов в проводящей области V

$$\int_V \mathbf{E} \cdot (\mathbf{j}' - \mathbf{j}) dV = \int_V \varphi \operatorname{div} (\mathbf{j}' - \mathbf{j}) dV + \sum_i \oint_{S_i} \varphi \mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}' - \mathbf{j}) dS = 0.$$

Поэтому изменение джоулевых потерь равно

$$\int_V [(j' E') - (j E)] dV = \int_V \sigma (E' - E)^2 dV > 0.$$

36.1. Записывая закон Ома в виде $\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + c^{-1} [\mathbf{v} \mathbf{B}])$, где $\mathbf{v} = (0, 0, -v)$ — скорость электронов проводимости, находим поле внутри провода в цилиндрических координатах: $B = B_\alpha = 2\pi r j/c$, $E_r = -2\pi r j v/c^2$, $E_z = j/\sigma$, и вектор Пойнтинга: $S_r = -r j^2/(2\sigma)$, $S_z = -\pi r^2 j^2 v/c^2$, что соответствует плотности заряда $\rho = (\boldsymbol{\nabla})/c^2$, где $j = j_z = I/(\pi a^2)$. Потенциал вне провода $\varphi = j \left(\frac{\pi a^2 v}{c^2} - \frac{z}{\sigma} \right) \frac{\ln(r/r_0)}{\ln(a/r_0)}$, что соответствует поверхностной плотности заряда $\eta = j (\pi a^2 v/c^2 + z/\sigma) [4\pi a \times \ln(a/r_0)]^{-1}$.

37.1. Противоречия с законом сохранения заряда не возникнет, если записать (37.14) в виде $-dQ/dt = 4\pi\sigma Q/\varepsilon = \sigma \oint (\mathbf{n} \mathbf{E}) dS$ — сила тока сквозь бесконечную сферу

$$39.1. \quad \tilde{\omega} = \frac{e}{8\pi} \sum_{r,s=1}^2 (E_r^{(s)})^2, \quad \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{s} \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sum_{r,s=1}^2 (-1)^{r+1} (E_r^{(s)})^2.$$

39.2. Учитывая, что энергия волнового пакета $W = \int \omega dV$ есть интеграл движения, и используя теорему Умова—Пойнтинга $\partial\omega/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0$, имеем $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt = W^{-1} \int \mathbf{r} (\partial\omega/\partial t) dV = -W^{-1} \int \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{S} dV = W^{-1} \int \mathbf{S} dV$, т. е. центр масс пакета движется с постоянной скоростью \mathbf{v} (так как $\int \mathbf{S} dV$ — интеграл движения).

Так как $|S| \leq cEH/(4\pi) = 2\sqrt{\epsilon}EHv_{\Phi}/(8\pi) \leq (eE^2 + \mu H^2)v_{\Phi}/(8\pi) = v_{\Phi}\omega$, то $v \leq v_{\Phi}$. Если волновой пакет движется в вакууме как единое целое, то $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)$, где $v \leq c$. Если $v < c$, то из теоремы Томсона (6.6) и (6.7) выводим: $c\mathbf{E} = [\mathbf{v}\mathbf{v}]$, $c\mathbf{B} = [\mathbf{v}\mathbf{E}]$, т. е. $\mathbf{E}(v^2 - c^2) = \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}) = 0$, или $\mathbf{E} \equiv 0$, что невозможно. Поэтому остается принять, что $v = c$. Но в таком случае $\mathbf{S} = c\boldsymbol{\omega}$, $(\mathbf{E}\mathbf{v}) = 0$, $E = v$ и плотность импульса $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2 = \boldsymbol{\omega}/c$, откуда и вытекает (39.15). Заметим, что если пакет движется вдоль оси z , то напряженность $\mathbf{E}(\mathbf{r}-c\mathbf{t})$ поля удовлетворяет уравнению $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\mathbf{E} = 0$, т. е. двумерному уравнению Лапласа. Поэтому если $\mathbf{E}(x, y \rightarrow \infty) = 0$, то по принципу максимума $\mathbf{E} \equiv 0$. Это означает, что в поперечном направлении пакет не должен быть ограниченным, т. е. $\mathbf{E}(x, y \rightarrow \infty) \neq 0$. Как следует из (16.12), так же поле должно иметь вид $\mathbf{E}(z-ct)$ (плоская волна).

40.1. Для монохроматических волн металл можно рассматривать как среду с комплексной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon' + i4\pi\sigma/\omega$. Поэтому, полагая в (40.13) $\kappa = \sqrt{\epsilon}$, имеем $\mathcal{R} = |(\sqrt{\epsilon} - 1)/(\sqrt{\epsilon} + 1)|^2$ или для $\sigma \gg \omega$ $\mathcal{R} \approx 1 - \sqrt{2\omega/(\pi\sigma)}$.

Для расчета давления света на зеркало используем (39.20), полагая $\mathbf{B} = [\mathbf{s}\mathbf{E}]$ и $\mathbf{B}'' = [\mathbf{s}''\mathbf{E}''] = -[\mathbf{s}\mathbf{E}'']$: $p = \bar{\omega} = (\mathbf{E} + \mathbf{E}'')^2/(8\pi) + (\mathbf{B} + \mathbf{B}'')^2/(8\pi) = \bar{E}^2(1 + \mathcal{R})/(4\pi)$.

43.1. Согласно (13.4) и (13.5б), импульс, уносимый излучением в одну секунду, с учетом (43.6) равен

$$\oint_S (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}}) dS = \oint_S \mathbf{n} [B^2/(4\pi)] dS = \oint_S \mathbf{n} [n\dot{\mathbf{p}}]^2 d\Omega/(4\pi c^4) = 0.$$

43.2. Орбитой электрона будет гипербола (рис. 12) $p/r = 1 + \epsilon \cos(\vartheta - \vartheta_0)$, где $\epsilon = (1 + 4E^2b^2/\alpha^2)^{1/2}$, $p = 2b^2E/\alpha$, $\alpha = Ze^2$, $E = m_0c^2v_0/2$, $\tan \vartheta_0 = -2Eb/\alpha$. Считая излучение слабым, используем интеграл движения $r^2\dot{\vartheta} = bv_0$ и запишем потерю энергии на излучение в виде

$$\Delta W = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^2}{3c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 dt = \frac{4e^2\alpha^2}{3m_0^2c^3bv_0} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{r^2} = \frac{Z^4e^{10}}{3m_0^2c^3b^5E^2v_0} \left[\vartheta_0 \left(\frac{3}{2} + \frac{2E^2b^2}{Z^2e^4} \right) + \frac{3Eb}{Ze^2} \right].$$

В случае рассеяния на малые углы $Eb \gg \alpha$ и получается известная формула Бора $\Delta W \approx \pi Z^2e^8/(3m_0^2c^3b^3v_0)$.

44.1. Используя потенциалы Герца, из (44.14) выводим $\varphi = c^{-1}(\mathbf{n}\dot{\mathbf{P}})$, $\mathbf{A} = c^{-1}\dot{\mathbf{P}} - c^{-1}[\mathbf{n}\dot{\mathbf{Z}}]$, откуда и следует (44.16).

44.2. В указанном приближении $\mathbf{A} \approx (\mathcal{M} + c^{-1}\mathcal{M}'n_i)/r$, откуда $P_1 = \frac{2}{3c}(\mathcal{M})^2 + \frac{1}{c^3} \langle [\mathbf{n}\dot{\mathcal{M}}^i] \cdot [\mathbf{n}\dot{\mathcal{M}}^k] n_i n_k \rangle$, где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по углам. Умножая (44.2)

на x^i и интегрируя по объему, находим $\mathcal{M} = \dot{\mathbf{p}}/c$, а после умножения (44.2) на $x^i x^k$ и интегрирования получаем $\mathcal{M}'n_i = -[\mathbf{n}\dot{\mathbf{m}}] + \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{Q}}/(2c)$, где $\dot{\mathbf{Q}}$ — тензор квадрупольного момента системы. В результате второе слагаемое в мощности излучения преобразуется к виду $\frac{1}{c^3} \left([\dot{\mathbf{n}}\dot{\mathbf{m}}]^2 + \frac{1}{4c^2} [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}]^2 + \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{m}}[\mathbf{n}\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}]) \right)$. Но последнее слагаемое исчезает, так как с учетом симметричности тензора $\dot{\mathbf{Q}}$ и равенства $3\langle n_i n_k \rangle = \delta_{ik}$ оно сводится к $\ddot{Q}^{ik} \dot{m}^l \epsilon_{kli} = 0$. При вычислении скаляра $K \equiv \langle [\mathbf{n}\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}]^2 \rangle$ используем в качестве осей координат главные оси тензора $\ddot{\mathbf{Q}}$, в которых $\ddot{Q}^{ik} = \ddot{Q}^i \delta^{ik}$. Поэтому $K = \ddot{Q}^i \ddot{Q}^k \langle n_i n_k - n_i^2 n_k^2 \rangle = \ddot{Q}^i \ddot{Q}^i / 5 - \left(\sum_i \ddot{Q}^i \right)^2 / 15$, так как

$15 \langle n_i^2 n_k^2 \rangle = 1 + 2\delta_{ik}$. Отсюда и вытекает (44.20).

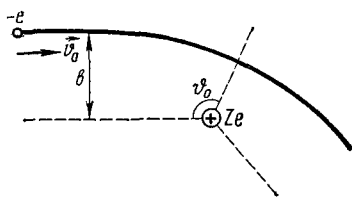


Рис. 12

46.1. Для получения P_I и P_E нужно проинтегрировать по сфере выражения (46.15) и (46.17). Из сферического треугольника, натянутого на векторы \mathbf{v} , $\dot{\mathbf{v}}$, \mathbf{n} (рис. 13), находим $\cos \chi = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos \phi$. Поэтому усреднение по углу ϕ дает $\langle (\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})^2 \rangle_\phi = \langle \dot{\mathbf{v}} \rangle^2 \langle (\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})^2/v^2 + [1-3(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})^2/v^2][\dot{\mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}}]^2(2v^2)^{-1}, \langle (\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}) \rangle_\phi = (\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}) \langle \dot{\mathbf{v}} \rangle/v^2$.

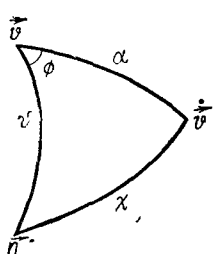


Рис. 13

Наконец, после усреднения по θ получаем (46.20) и (46.21).

46.2. Исследуя на максимум выражение $\langle dP_E/d\Omega \rangle_\phi$, полученное в задаче 46.1, приходим к уравнению $\lambda u^2 (\lambda + 1)^{-1} + 8u/3 + v^2/c^2 - 1 = 0$, где $u = 1 - (\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})c/v^2$, $\lambda = \{c^2 \langle \dot{\mathbf{v}} \rangle^2 / [\dot{\mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}}]^2\} - 3c^2/(2v^2) - 1/2$. Из этого уравнения с учетом того, что при $v \approx c$ (рис. 13) $\lambda \approx \text{ctg}^2 \alpha - 1$, $\lambda + 1 \approx \text{ctg}^2 \alpha - 2^{-1}(1 - v^2/c^2)$, получается нужный результат.

46.3. Используя цилиндрические координаты и полагая $v = v_z$, $x = z - v\zeta$, приводим уравнение (46.7) к форме

$$y(x) = (r^2 + x^2)v^2/c^2 - (x - z + vt)^2 = 0.$$

Проанализируем его решения в двух случаях: $v < c$ и $v > c$. 1. $v < c$. В этом случае корни равны

$$x_{1,2} = \gamma^2 \{ (z - vt) \pm (v/c) [(z - vt)^2 + r^2/\gamma^2]^{1/2} \}; \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

Поскольку $y(z - vt) = (v^2/c^2) [r^2 + (z - vt)^2] > 0$, то $x_2 > z - vt > x_1$ и условию запаздывания $\zeta < t$ удовлетворяет лишь x_2 . Подстановку этого корня в потенциалы Льенара—Вихерта дает:

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = e\gamma [r^2 + \gamma^2 (z - vt)^2]^{-1/2}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{v}\varphi/c.$$

2. $v > c$. В этом случае корни равны $x_{1,2} = v^2 \{ (vt - z) \pm (v/c) \{ (z - vt)^2 - r^2/v^2 \}^{1/2} \}; \gamma = \{ (v^2/c^2) - 1 \}^{-1/2}$. Поскольку $y(z - vt) > 0$, то условию запаздывания удовлетворяют оба корня, если $2^{-1}(x_1 + x_2) = -v^2(z - vt) > z - vt$, или $z < vt$. Отсюда $\varphi = 2ev \{ (z - vt)^2 v^2 - r^2 \}^{-1/2} \theta (vt - z - r/v)$, $\mathbf{A} = \mathbf{v}\varphi/c$. Это поле представляет собой коническую электромагнитную ударную волну, аналогичную сверхзвуковой ударной волне—конусу Маха.

47.1. $u = u_0 \exp \{-2c^4 B^2 / (3m^2 c^5) t\}$.

48.1. Для эллиптически поляризованной плоской волны

$$\mathbf{E} = E_0 (\mathbf{e} + i\alpha [\mathbf{se}]) \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r}) - i\omega t], \quad \mathbf{k} = s\omega/c, \quad (es) = 0, \quad \alpha \neq 1.$$

Согласно (48.1), (48.5) и (48.6), дифференциальное сечение равно

$$d\sigma = r_0^2 d\Omega [1 + (\mathbf{ne})^2 (\alpha^2 - 1) + \alpha^2 (\mathbf{ns})^2] (1 + \alpha^2)^{-1} \{1 + [2\omega r_0 / (3c)]^2\}^{-1},$$

полное же сечение совпадает с (48.8).

50.1. Согласно (50.7) и задаче 30.1, $\mathcal{G} = (m\omega)/(ac)$, где $m = M_0 4\pi a^3 (\mu + 2)^{-1}$ —магнитный момент шара.

50.2. Полагая $I_i = -\dot{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$), имеем:

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{e}_1/c^2 + (e_1 - e_2)/C_1 &= \mathcal{G} - R_1 \dot{e}_1, \\ L_2 \ddot{e}_2/c^2 + L_{23} \ddot{e}_3/c^2 - (e_1 - e_2)/C_1 + e_2/C_2 &= -R_2 \dot{e}_2, \\ L_3 \ddot{e}_3/c^2 + L_{23} \ddot{e}_2/c^2 - e_3/C_3 &= 0. \end{aligned}$$

51.1. Обозначая через z координату свободного конца катушки и считая, что разрыв цепи происходит при $z = 0$, имеем:

$$\Lambda = m\dot{z}^2/6 - mgz/2 + L\dot{z}^2/(2c^2), \quad \mathcal{D} = R\dot{z}^2/2 - I\mathcal{G}\theta(-z),$$

где $L = a(l - z)^{-1}$, $a = 4\pi^2 N^2 r^2$. Уравнения движения имеют такой вид:

$$2\ddot{z} + 3g = 3y^2/(ma), \quad \dot{y} + y(l - z)Rc^2/a = \mathcal{G}\theta(-z), \quad y = LI/c^2.$$

График процесса представлен на рис. 14.

52.1. После скалярного умножения (52.3) на \mathbf{H} и интегрирования по частям с учетом граничных условий находим

$$\frac{2\sigma\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V H^2 dV = - \int_V (\text{rot } \mathbf{H})^2 dV < 0, \quad \text{т. е. } \partial H/\partial t < 0.$$

52.2. Записав (52.10) в виде $I = E_0 \exp(-i\omega t) Z^{-1}$, находим импеданс $Z = (2\pi a \delta)^{-1} (1 - i)$, откуда $L^{\text{внутр}}/c^2 = -\text{Im } Z/\omega = (2\pi a \delta \omega)^{-1}$.

54.1. Полагая в цилиндрических координатах $u = u_\alpha$, для B_r и B_z , согласно (54.5), получим уравнения $\partial B_r/\partial t = v_m (\Delta - r^{-2}) B_r$, $\partial B_z/\partial t = v_m \Delta B_z$, из которых, как и в задаче 52.1, вытекает, что B_r , B_z затухают с течением времени. Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ $[\mathbf{uB}] \rightarrow 0$ и (54.5) принимает вид $\partial \mathbf{B}/\partial t = v_m \Delta \mathbf{B}$, т. е. в соответствии с задачей 52.1 $\mathbf{B} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

54.3. $\mathbf{B} = (\alpha + \text{rot } \mathbf{C}) \text{ rot } \mathbf{C}$, где \mathbf{C} удовлетворяет уравнению Гельмгольца $(\Delta + \alpha^2) \mathbf{C} = 0$. Согласно (54.23) и (54.5), векторный потенциал \mathbf{A} удовлетворяет уравнениям $\text{rot } \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A}$, $\partial \mathbf{A}/\partial t = [\mathbf{u} \text{ rot } \mathbf{A}]$. Поэтому для его реальных вариаций $\delta \mathbf{A} = [\mathbf{u} \text{ rot } \mathbf{A}] \delta t$, $(\delta \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{A}) = 0$ и вариация магнитной энергии в области V с границей S равна

$$\begin{aligned} \delta W_m &= \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{B} \cdot (\text{rot } \delta \mathbf{A} - \alpha \delta \mathbf{A}) dV = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V \delta \mathbf{A} \cdot (\text{rot } \mathbf{B} - \alpha \mathbf{B}) dV. \end{aligned}$$

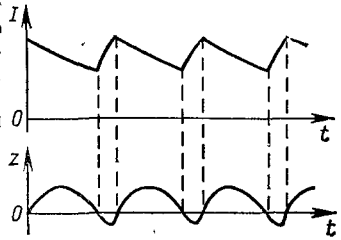


Рис. 14

Здесь выполнено интегрирование по частям с учетом того, что $\delta \mathbf{A}|_S = 0$. Поэтому с учетом (54.23) $\delta W_m = 0$, т. е. бессильное поле реализует минимум энергии магнитного поля.

56.1. Считая проводимость электронной и полагая $\mathbf{E} = (-E, 0, 0)$; $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + c^{-1} [\mathbf{uB}] = (-E, -uB/c, 0)$; $\mathbf{j} = (j_x, j_y, 0)$, согласно (56.13) и (56.5), получаем $j_x = \sigma' (1 - k) \beta V u/c$; $j_y = -\sigma' (1 + \beta^2 k) V u/c$, где $k = U/\mathcal{E} = Ec/(\beta u V)$ — параметр нагрузки, $\sigma' = \sigma (1 + \beta^2)^{-1}$. Отсюда для объема $V = 1 \text{ см}^3$ находим электрическую P и механическую N мощности: $P = -j_x E_x = \sigma' \beta^2 B^2 (u/c)^2 k (1 - k)$, $N = -j_y V u/c = \sigma' (1 + \beta^2 k) B^2 u^2/c^2$ и $\eta = P/N = \beta^2 k (1 - k) (1 + \beta^2 k)^{-1}$.

58.1. 1. Согласно (25.1), дипольный момент металлического шарика радиуса a равен $p = a^3 E$, т. е. $\alpha = a^3$. 2. Считая, что в атоме Томсона (см. задачу 23.2) положительный заряд равномерно распределен по объему шарика радиуса a , находим возвращающую силу, возникающую при смещении электрона: $\mathbf{F} = -ge^2/a^3$. Отсюда $\alpha = a^3$. 3. Усредняя по времени и по ориентации орбиты уравнение движения электрона в атоме $m_e \ddot{\mathbf{r}} = -e^2 r r^{-3} + e \mathbf{E}$ и полагая $\langle r r^{-3} \rangle \approx a^{-3} \langle r \rangle$, где $a = \hbar^2/m_e e^2$ — боровский радиус атома водорода, находим $\langle r \rangle = E a^3/e$, т. е. опять $\alpha = a^3$. Строгий квантовый расчет дает $\alpha = 9a^3/2$.

58.2. Подстановка в граничные условия (22.9) потенциала $\phi(r < R) = -E'r \cos \theta$, $\phi(r > R) = \cos \theta (C/r^2 - Er)$ дает уравнения $E' = E - CR^{-3}$, $E' = \varepsilon (E + 2CR^{-3})$, разрешая которые приходим к (58.21).

58.3. Учитывая действие Лоренца и центробежный эффект, находим напряженность действующего поля $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (4\pi/3) \mathbf{P} + m_e \omega \mathbf{r} (\Omega + \omega)/e$, где $\Omega = eB_0/(m_e c)$, и поляризованность $\mathbf{P} = N_e \alpha_n \mathbf{E}' = N_e \alpha_n [E + m_e \omega \mathbf{r} (\Omega + \omega)/e] \times \times (1 - 4\pi N_e \alpha_n/3)^{-1}$. Отсюда $\rho^{\text{связ}} = -2N_e \alpha_n (m_e \omega/e) (\omega + \Omega) (1 + 8\pi N_e \alpha_n/3)^{-1}$, $\mathbf{E} = 2\rho^{\text{связ}} \mathbf{r} (a - r)$, $\eta^{\text{связ}} = -\rho^{\text{связ}} a/2$.

59.1. Момент силы Лоренца представим в виде $(e/c) [\mathbf{r} \times \mathbf{vB}] = [\Omega \mathbf{K}] + \frac{d}{dt} \left(\frac{e}{2c} [\mathbf{r} \times \mathbf{rB}] \right)$, где $\Omega = -e\mathbf{B}/(2m_e c)$, $\mathbf{K} = m_e [\mathbf{r}\mathbf{v}]$. При усреднении по быстрым электронным движениям последнее слагаемое исчезает и получается уравнение прецессии момента $\tilde{\mathbf{K}}$ с угловой скоростью Ω (теорема Резалы): $\dot{\tilde{\mathbf{K}}} = [\Omega \tilde{\mathbf{K}}]$.

59.2. По Лоренцу и Онсагеру имеем соответственно: $\mu = (3 + 2\nu) (3 - \nu)^{-1}$,

$$\mu = (1/4) [3\nu + 1 + 3(1 + 2\nu/3 + \nu^2)^{1/2}],$$

где $\nu = (4\pi N_e/3) [m_0^2/(kT) - Ze^2 \langle r^2 \rangle / (2m_e c^2)]$.

61.1. Пусть $\mathbf{q}(t, \mathbf{r})$ — отклонение электрона от среднего положения \mathbf{r} . Тогда поляризованность равна $\mathbf{P} = N_e e \mathbf{q}$ и $\dot{\mathbf{P}} = EN_e e^2/m_e$. С учетом квазинейтральности плазмы имеем $\rho P = -\text{div } \mathbf{P} = \text{div } \mathbf{E}/(4\pi)$, т. е. $\rho P + \omega_p^2 \rho P = 0$.

61.2. Учитывая, что энергия отдельного электрона равна $m_e(\omega^2 + \omega_c^2) r^2/2$, при усреднении получаем

$$\bar{\omega} = \frac{1}{16\pi} (|E_\omega|^2 + |B_\omega|^2) + \frac{m_e}{4} N_e \int_0^\infty (\omega^2 + \omega_c^2) |r_0|^2 f(\omega_c) d\omega_c,$$

что приводится к виду (61.33) в области прозрачности.

61.3. Выражение $\int r \bar{E}^2 dV$, пользуясь представлением $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = (2\pi)^{-3} \int e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} dV$, запишем в форме

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int E_0(\mathbf{k}) \cdot \bar{E}_0(\mathbf{k}') e^{i t [\bar{\omega}(\mathbf{k}') - \omega(\mathbf{k})]} i \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} d^3 k d^3 k' dV = \\ & = -4\pi^3 \operatorname{Re} \int E_0(\mathbf{k}) \cdot \bar{E}_0(\mathbf{k}') e^{i t [\bar{\omega}(\mathbf{k}') - \omega(\mathbf{k})]} i \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d^3 k d^3 k', \end{aligned}$$

что после интегрирования по частям сводится к следующему: $4\pi^3 t \int |E_0(\mathbf{k})|^2 \times \times \exp[2\omega''(\mathbf{k}) t] (\partial\omega'/\partial\mathbf{k}) d^3 k$. Если $\omega'' t \ll 2\pi$, то $\exp(2\omega'' t) \approx 1$, поэтому $\xi(t) = \frac{t \int |E_0|^2 (\partial\omega'/\partial\mathbf{k}) d^3 k}{\int |E_0|^2 d^3 k}$. Учитывая, что функция $|E_0(\mathbf{k})|$ отлична от нуля лишь

в малой окрестности точки $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$, приводим $\xi(t)$ с помощью теоремы о среднем к (61.36).

61.4. Согласно результату задачи 39.2 и с учетом сильной локализации функции $|E_0(\mathbf{k})|$ вблизи $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ скорость центра масс волнового пакета записывается в виде $\mathbf{v} = W^{-1} \int S dV = \bar{S}/\bar{\omega}$, где в соответствии с (61.22) и (61.33)

$$\bar{S} = \frac{k_0 c^2}{8\pi\omega(k_0)} |E_0(k_0)|^2, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{16\pi\omega} |E_0(k_0)|^2 \frac{\partial}{\partial\omega} (\omega^2 e') \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}.$$

Поэтому $\mathbf{v} = \frac{2k_0 c^2}{\partial(\omega^2 e')} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} \right) \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}$.

62.1. $E' = E + c^{-1} [\mathbf{v}B]$, $B' = B$.

63.1. 1. Поляризованность и плотность тока в диэлектрике, движущемся со скоростью \mathbf{v} , имеют такой вид:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i \mathbf{q}_i(t, \mathbf{r}); \quad \mathbf{j}^{\text{полн}} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i \frac{d\mathbf{q}_i(t, \mathbf{r})}{dt} + \mathbf{v} \rho^{\text{полн}},$$

где $\mathbf{q}_i(t, \mathbf{r})$ — смещение заряда e_i относительно точки \mathbf{r} образа, выбранной центром ячейки ΔV . Поскольку $d\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i(t + dt, \mathbf{r} + \mathbf{v}dt) - \mathbf{q}_i(t, \mathbf{r}) = dt [\partial/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)] \mathbf{q}_i$, то $\mathbf{j}^{\text{полн}} = \partial\mathbf{P}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{P} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{P}$ и уравнения Максвелла принимают такой вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) + \frac{4\pi}{c} [(\mathbf{v}\nabla) \mathbf{P} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{P}],$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 0, \quad \mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}B] \right).$$

Отсюда, пренебрегая членами порядка v^2/c^2 , получаем уравнение $\Delta B - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + 2 \frac{1-\varepsilon}{c^2} (\mathbf{v}\nabla) \frac{\partial B}{\partial t} = 0$ с решением в виде плоской волны $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}) - i\omega t}$, где $\mathbf{k} = s \frac{\omega}{c} n \left[1 - \frac{2n}{c} (\mathbf{sv}) \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right]^{1/2}$, $n = \sqrt{\varepsilon}$, s — единичный вектор. Фазовая скорость волны равна

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \approx \frac{c}{n} + (\mathbf{sv}) \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

2. Если рассмотреть движение отдельного фотона в неподвижном диэлектрике в течение времени Δt , то в среднем в течение времени $\Delta t/n$ фотон находится в свободном состоянии, двигаясь со скоростью c , все же остальное время он находится в поглощенном состоянии в атомах. Поэтому средняя скорость фотона равна c/n . Если диэлектрик движется со скоростью \mathbf{v} , то время свободного движения фотона в том же направлении равно $c \Delta t / [(c-v)n]$, длительность же поглощенного состояния останется прежней, т. е. $\Delta t (1 - 1/n)$. Таким образом, за время $\Delta T = \frac{c}{c-v} \frac{\Delta t}{n} + \Delta t \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ фотон пройдет путь $\Delta l = \frac{c}{c-v} \frac{\Delta t}{n} c + \Delta t \left(1 - \frac{1}{n} \right) v$, т. е. его средняя скорость равна $v_\phi = \Delta l / \Delta T \approx c/n + v(1 - n^{-2})$.

69.1. $l' = l_0 (1 - v^2/c^2)^{1/2} (1 - u^2/c^2)^{1/2} (1 - uv/c^2)^{-1}$.

69.2. В системе Σ' ширина отверстия $l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} < l_0$ и, казалось бы, стержень не сможет пройти сквозь него. Но если в системе Σ моменты прохождения концов стержня A и B через отверстие совпадают, то в системе Σ' они отличаются на $l_0 v/c^2$, т. е. сначала через отверстие проходит конец B , а затем A . Очевидно, что стержень при этом изогнется.

69.3. Расстояние останется неизменным. Преобразование Лоренца здесь неприменимо, ибо начальное и конечное состояния системы, как не отвечающие тождественным объектам, не могут быть им связаны.

70.1. $\tau' = \tau (1 - v^2/c^2)^{-1/2} (1 - uv/c^2)$, $\tau = \tau_0 (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$.

70.2. Для движущихся часов вектор l (рис. 70.3) переходит в $l' = 1 + \sin \alpha \mathbf{v} (\gamma^{-1} - 1) l/v$, и для промежутков времени t_\pm , затрачиваемых световым импульсом на прохождении цилиндра соответственно туда и обратно, получаются уравнения $c^2 t_\pm^2 = v^2 t_\pm^2 + (l')^2 \pm 2 (\mathbf{v}l') t_\pm$. Отсюда $t_+ + t_- = \tau' = 2\gamma l/c$.

72.1. Пусть сторона AB в треугольнике ABC на плоскости Минковского (рис. 15) — наибольшая. Проведем через точку C две гиперболы CD и CE с центрами в точках A и B соответственно. Тогда (72.10) вытекает из того, что $|AC| = |AD|$ и $|CB| = |EB|$ по построению.

73.2. Любой 4-вектор вида $c^\mu = a^\mu - \lambda b^\mu$, где λ — некоторый скаляр, является изотропным. Если в некоторой системе отсчета $b^0 \neq 0$, то, взяв $\lambda = a^0/b^0$, в той же системе отсчета получим $c^0 = 0$, $c^2 = (c^0)^2 = 0$, т. е. $c^\mu = 0$, или $a^\mu = \lambda b^\mu$.

73.3. Согласно задаче 19.1,

$$N = \sum_{s=0}^n C_{s+2}^n = C_{n+3}^n.$$

73.4. Из инвариантности ds^2 следует, что $\Lambda_\beta^\mu \Lambda_\alpha^\nu g_{\mu\nu} = g_{\beta\alpha}$. Взяв детерминант от этого матричного уравнения, находим $|\Lambda|^2 = 1$, а положив в нем $\beta = \alpha = 0$, имеем $\Lambda_0^\mu \Lambda_0^\nu g_{\mu\nu} = 1$, или $(\Lambda_0^0)^2 - \sum_i (\Lambda_0^i)^2 = 1$.

73.5. Применяя (73.4) и учитывая, что для собственных преобразований Лоренца $|\Lambda| = 1$, получаем $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \Lambda_\gamma^\sigma \Lambda_\delta^\tau \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} |\Lambda| = \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$. Инвариантность же $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ при пространственных отражениях вытекает из (73.15).

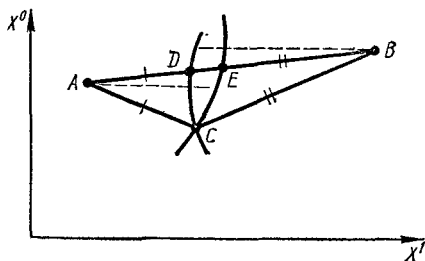


Рис. 15

73.6. Используя полную антисимметрию $\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$, достаточно проверить (73.17а) для компоненты $\epsilon^{0123}\epsilon_{0123} = -1$.

77.1. Вводя векторы I и I' , задающие положение неподвижной и движущейся зрительных труб соответственно, с учетом сокращения Лоренца—Фидджеральда

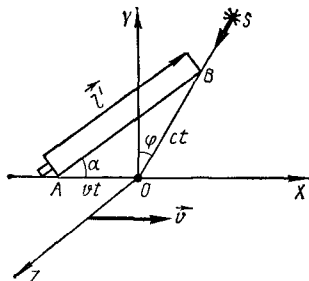


Рис. 16

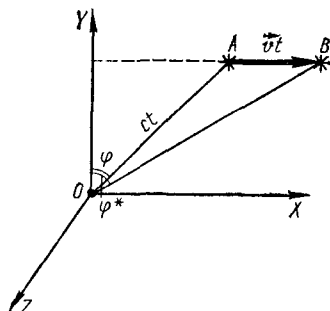


Рис. 17

имеем $I' = 1 + v(\gamma - 1)(vI)v^{-2}$. Из треугольника AOB (рис. 16) находим $\cos^2 \alpha = (vI')^2 / (v^2 I'^2) = (\beta^2 + 2\beta \sin \varphi + \sin^2 \varphi) (1 + \beta^2 + 2\beta \sin \varphi)^{-1}$. Отсюда, полагая $(vI) = vI' \sin \varphi'$, выводим основное уравнение абберации $\sin \varphi' = (\beta + \sin \varphi) (1 + \beta \sin \varphi)^{-1}$.

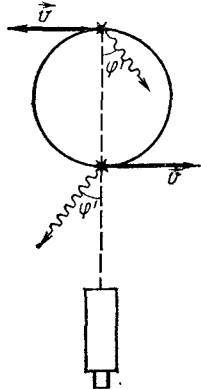


Рис. 18

77.2. Различие в видимом A и истинном B положениях источника обусловлено запаздыванием светового сигнала. Из треугольника AOB (рис. 17) находим $\tan \varphi^* = (\beta + \sin \varphi) / \cos \varphi$. Как видно, угол φ^* отличается от угла φ' в (77.8), определяющего в собственной системе источника (в положении A) направление, в котором должен быть испущен световой сигнал, чтобы достичь наблюдателя B в частности, в примере с двойной звездой, если скорости ее компонент равны $v = \beta c$, то в положении, когда они находятся на линии наблюдения, в соответствии с (77.8) $\sin \varphi' = \pm \beta$. Но это вовсе не означает, что видимый угловой размер звезды должен быть равным $2 \arcsin \beta$. Напротив, в этом положении он равен нулю, а под углами $\varphi' = \pm \arcsin \beta$ должны быть испущены фотоны, чтобы попасть к наблюдателю под углом $\varphi = 0$ (рис. 18).

77.3. Пусть n —внешняя нормаль к поверхности зеркала, v —его скорость. Если в неподвижной системе падающий луч задается волновым 4-вектором $k^\mu = (\omega/c, s\omega/c)$, то отраженный луч описывается 4-вектором \tilde{k} с компонентами:

$$\tilde{k}^0 = k^0 \left\{ 1 - \frac{2\gamma}{c} (n\mathbf{v}) \left[(ns) - \frac{\gamma}{c} (n\mathbf{v}) + \frac{\gamma-1}{v^2} (s\mathbf{v})(n\mathbf{v}) \right] \right\},$$

$$\tilde{\mathbf{k}} = k^0 \left\{ s - 2 \left(n + \frac{\gamma-1}{v^2} (n\mathbf{v}) \mathbf{v} \right) \left[(ns) - \frac{\gamma}{c} (n\mathbf{v}) + \frac{\gamma-1}{v^2} (s\mathbf{v})(n\mathbf{v}) \right] \right\}.$$

77.4. В среде с показателем преломления $n(\omega)$ волновой 4-вектор k для света, распространяющегося в направлении s , имеет вид $k^\mu = \left\{ \frac{\omega}{c}, s \frac{\omega}{c} n(\omega) \right\}$. Если среда движется относительно наблюдателя со скоростью v и волновой 4-вектор в ее собственной системе есть k' , то в системе наблюдателя $k^0 = \gamma k'^0 [1 + (v\mathbf{s}') n'/c]$,

$\mathbf{k} = k'^0 [\mathbf{s}'n' + \mathbf{v}\gamma/c + (\gamma-1)n'(s'\mathbf{v})\mathbf{v}/v^2]$. Отсюда находим фазовую скорость света в системе наблюдателя при $[\mathbf{s}'\mathbf{v}] = 0$ и в линейном приближении по $\beta = v/c$:

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{k} = c \frac{1 + \beta n(\omega')}{n(\omega') + \beta} \approx \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right).$$

Полученное выражение для коэффициента увеличения α отвечает условиям опыта Физо и впервые было найдено *Г. А. Лоренцем*. В общем случае α определяется способом вхождения света в движущуюся среду. Так, в опыте Физо свет сначала попадает в переходный слой неподвижной воды, прилегающий к трубе, т. е. можно считать, что источник света находится в самой среде. Однако в опытах с твердыми телами свет сразу входит в движущуюся среду. Поэтому в собственной системе среды для света вне ее $k^0 = \gamma k'^0 + \gamma k'^0 (s'\mathbf{v})/c$, или $\omega' - \omega \approx - (s'\mathbf{v}) \omega/c$. Так что при $[\mathbf{s}'\mathbf{v}] = 0$ $\alpha = 1 - n^{-2} + [(dn/d\omega)\omega]/n^2$. Если же $(s'\mathbf{v}) = 0$, то в линейном приближении $\alpha = 1 - n^{-2}$.

78.1. В собственной системе кругового тока $j'^{\mu} = (0, \mathbf{j}')$, а в неподвижной системе $j^{\mu} = \{(\mathbf{j}')\gamma/c, \mathbf{j}' + (\gamma-1)(\mathbf{j}')\mathbf{v}/v^2\}$. При вычислении дипольного момента $\mathbf{p} = \int \rho \mathbf{r} dV$ кольца с током делаем замену переменных интегрирования $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + (\gamma^{-1}-1)(\mathbf{v}\mathbf{r}')\mathbf{v}/v^2$, $dV = dV'\gamma^{-1}$ и полагаем $\mathbf{j}'dV' = \mathbf{j}'dV$. Простые вычисления дают $\mathbf{p} = I/c^2 S' \{ \mathbf{v} \mathbf{m}' \} = c^{-1} \{ \mathbf{v} \mathbf{m}' \}$, где \mathbf{m}' — собственный магнитный момент кольца с током

При вычислении магнитного момента учитываем конвекционный ток с плотностью $\rho\mathbf{v}$, т. е. $\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r}(\mathbf{j} + \rho\mathbf{v})] dV = \mathbf{m}' + (\gamma^{-1}-1)(\mathbf{v}\mathbf{m}')\mathbf{v}/v^2$.

80.2. Согласно (80.6) и (80.7), на элементарный заряд q действует сила $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}\mathbf{B}]) = eq\xi^{-3}[\mathbf{r}_{||} - \mathbf{v}t + \mathbf{r}_{\perp}(1-\beta^2)] = -\nabla\psi$, где $\xi^2 = (x-vt)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2)$, $\psi = eq(1-\beta^2)/\xi$. Поверхность $\psi = \text{const}$ является эллипсоидом Хевисайда: $\xi^2 = a^2(1-\beta^2)$.

80.3. Если \mathbf{p}' — дипольный момент в собственной системе диполя и $\xi = \mathbf{r}_{||} - \mathbf{v}t + \gamma^{-1}\mathbf{r}_{\perp}$, то $\mathbf{E} = \gamma^{-3}\xi^{-5}[\mathbf{r}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)(\mathbf{p}'\xi) - \xi^2(\mathbf{p}'_{||} + \gamma\mathbf{p}'_{\perp})]$, $\mathbf{B} = c^{-1}[\mathbf{v}\mathbf{E}]$.

81.1. Характеристическое число λ матрицы F_{ν}^{μ} является корнем уравнения $|F_{\nu}^{\mu} - \lambda\delta_{\nu}^{\mu}| = \lambda^4 - \lambda^2(E^2 - B^2) - (\mathbf{B}\mathbf{E})^2 = 0$.

81.2. В первом случае $\mathbf{B} = c^{-1}[\mathbf{v}\mathbf{E}]$, а во втором $\mathbf{E} = c^{-1}[\mathbf{v}\mathbf{B}]$, где $|\mathbf{v}| < c$.

82.1. С помощью (41.19) запаздывающее решение уравнений (82.5) запишем в виде $A^{\mu}(x) = 4\pi c^{-2} \int G^{3\alpha\mu}(x-x')j^{\mu}(x')d\Omega'$. Но с учетом (3.8) $G^{3\alpha\mu} = \theta(T)\delta(c^2T^2 - R^2)c/(2\pi)$, откуда и следует (82.6).

Контурный интеграл в (82.7) сводится к вычету в полюсе $x'^0 = x^0 - R$, что приводит к обычному выражению для запаздывающих потенциалов.

82.2. Пользуясь инвариантной трехмерной δ -функцией (см. задачу 74.2), плотность 4-гока для точечного заряда e можно записать в виде $j^{\mu}(x) = eU^{\mu}(x)\delta(x - \xi(\tau))\delta(\tau(t))$, где τ — собственное время частицы, $x^{\mu} = \xi^{\mu}(\tau)$ — ее мировая линия, $\sigma(\tau)$ — пространственно-подобная гиперплоскость с нормалью $n^{\mu} = U^{\mu}/c$, проходящая через точку $\xi^{\mu}(\tau)$. Учитывая, что [см. (74.8)] $d\Omega' = cdt'd\sigma'$, преобразуем (82.6) к виду $A^{\mu}(x) = 2e \int \theta[x^0 - \xi^0(\tau')]U^{\mu}(\tau')\delta[(x - \xi(\tau'))^2]d\tau'$, где выполнено интегрирование по $d\sigma'$. Но [см. (3.8)] $\theta[x^0 - \xi^0(\tau')]\delta[(x - \xi(\tau'))^2] = \delta(\tau - \tau') [2(x^{\mu} - \xi^{\mu}(\tau))U_{\mu}(\tau)]^{-1}$, где $\tau(x)$ — запаздывающий корень уравнения $(x - \xi(\tau))^2 = 0$. В результате получаем следующее ковариантное представление для потенциалов Льенара-Вихерта: $A^{\mu}(x) = eU^{\mu}(\tau)[(x^{\nu} - \xi^{\nu}(\tau))U_{\nu}(\tau)]^{-1}$.

82.3. Вводя антисимметричные 4-тензоры

$$S^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ -P_1 & 0 & -M_3 & M_2 \\ -P_2 & M_3 & 0 & -M_1 \\ -P_3 & -M_2 & M_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad Z^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \\ -\Pi_1 & 0 & -Z_3 & Z_2 \\ -\Pi_2 & Z_3 & 0 & -Z_1 \\ -\Pi_3 & -Z_2 & Z_1 & 0 \end{vmatrix},$$

запишем уравнения (42.2), (42.4) и (42.6) в таком виде: $j^{\nu} = c\partial_{\mu}S^{\mu\nu}$, $A^{\nu} = \partial_{\mu}Z^{\mu\nu}$, $\square Z^{\mu\nu} = -4\pi S^{\mu\nu}$.

83.1. Из закона преобразования тензора (83.2) выводим:

$$P' = \gamma \left(P - \frac{1}{c} [\mathbf{v}M] \right) + \frac{1-\gamma}{v^2} \mathbf{v} (\mathbf{v}P);$$

$$M' = \gamma \left(M + \frac{1}{c} [\mathbf{v}P] \right) + \frac{1-\gamma}{v^2} \mathbf{v} (\mathbf{v}M).$$

Поэтому, если в собственной системе среды $M' = 0$, то в неподвижной системе $M = c^{-1}[\mathbf{P}\mathbf{v}]$. То же получается и из уравнений Максвелла—Лоренца. Так, согласно задаче 63.1, в движущемся диэлектрике $j^{\nu\alpha\mu} = \partial P/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)P - \mathbf{v} \operatorname{div} P = \partial P/\partial t + \operatorname{rot}[\mathbf{P}\mathbf{v}] = \partial P/\partial t + c \operatorname{rot} M$, откуда $M = c^{-1}[\mathbf{P}\mathbf{v}]$.

83.3. 4-векторы j^{μ} и $F^{\mu\nu}U_{\nu}$ параллельны, так как в собственной системе среды они сводятся соответственно к векторам \mathbf{j} и cE , связанным законом Ома $\mathbf{j} = \sigma E$. Отсюда и следует (83.19).

84.1. Рассмотрим произвольную частицу с инертной массой m , энергией E и импульсом P . Согласно предположению о распространении взаимодействия со скоростью света, любой акт взаимодействия включает в себя некоторый элементарный процесс с участием частиц, движущихся со скоростью света $u = c$ (рис. 19). Поскольку для такого процесса выполняются законы сохранения энергии и инертной массы, то $dE + d\varepsilon = 0$; $dm + d\mu = 0$, где ε , μ и $\mathbf{p} = \mu c$ суть соответственно энергия, инертная масса и импульс «световой» частицы. Так как $\varepsilon^2 = c^2\mu^2 = \text{const}$, то $(c d\varepsilon/c) = 0$ и из теоремы живых сил имеем $d\varepsilon = (c d\mathbf{p}) = c^2 d\mu$. Отсюда $dE = -d\varepsilon = -c^2 d\mu = c^2 dm$, т. е. соотношение эквивалентности Эйнштейна. Далее, из теоремы живых сил выводим $dE = (u d\mathbf{P}) = u^2 dm + 2^{-1} m du^2 = c^2 dm$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид (84.8), где M — постоянная интегрирования.

84.2. Рассмотрим элемент $d\Sigma_{\mu}$ гиперповерхности $\mathcal{F}^{\mu} \mathcal{F}_{\mu} = M^2 c^2$ в \mathcal{F} -пространстве, построенный на 4-векторах $d\mathcal{F}^{\nu}$, $d\mathcal{Q}^{\sigma}$, $d\mathcal{R}^{\tau}$. Так как $\mathcal{F}^{\mu} d\mathcal{F}_{\mu} = \mathcal{F}^{\mu} d\mathcal{Q}_{\mu} = \mathcal{F}^{\mu} d\mathcal{R}_{\mu} = 0$, то $d\Sigma_{\mu} = -\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} d\mathcal{F}^{\nu} d\mathcal{Q}^{\sigma} d\mathcal{R}^{\tau} \equiv N_{\mu} d\Sigma$, где $N_{\mu} = \mathcal{F}_{\mu}/(Mc)$ — 4-вектор нормали к гиперповерхности. Таким образом, временноподобные 4-векторы $d\Sigma^{\mu}$ и \mathcal{F}^{μ} параллельны, поэтому отношение их временных компонент есть инвариант. При этом $d\Sigma^0/\mathcal{F}^0 = d\sigma/\varphi$, если выбрать $d\mathcal{F}^{\nu} = (d\mathcal{F}^0, d\mathcal{F}^1, 0, 0)$; $d\mathcal{Q}^{\sigma} = (d\mathcal{Q}^0, 0, d\mathcal{F}^2, 0)$; $d\mathcal{R}^{\tau} = (d\mathcal{R}^0, 0, 0, d\mathcal{F}^3)$.

Далее, рассмотрим гиперповерхность в x -пространстве с элементом $d\sigma_{\mu} = -\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} dx^{\nu} dy^{\sigma} dz^{\tau}$, построенном на пространственно-подобных 4-векторах dx^{ν} , dy^{σ} , dz^{τ} . Если выбрать $dx^{\nu} = (0, dx^1, 0, 0)$; $dy^{\sigma} = (0, 0, dx^2, 0)$; $dz^{\tau} = (0, 0, 0, dx^3)$, т. е. считать $d\sigma_{\mu}$ элементом гиперповерхности с нормалью $n_{\mu} = (1, 0, 0, 0)$, то $d\Sigma_{\mu} d\sigma^{\mu} = d\Sigma_0 d\sigma^0 = d\Gamma$.

85.2. Пусть $E = (0, 0, E)$; $B = (0, 0, B)$, а начальные условия при $\tau = 0$ имеют такой вид: $x^{\mu} = 0$; $\mathcal{F}^{\mu} = (\mathcal{E}_0/c, \mathbf{p})$. Вводя обозначения $\omega \equiv eB/(Mc)$; $\lambda \equiv eE/(Mc)$, запишем уравнения Минковского (85.5): $\ddot{x}^0 = \lambda x^3$; $\ddot{x}^1 = \omega x^2$; $\ddot{x}^2 = -\omega x^1$; $\ddot{x}^3 = \lambda x^0$, обозначая точкой дифференцирование по τ . Интегрирование с учетом начальных условий дает:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix} &= \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \begin{pmatrix} \operatorname{sh} \lambda \tau \\ \operatorname{ch} \lambda \tau \end{pmatrix} + \frac{cp_3}{eE} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \lambda \tau - 1 \\ \operatorname{sh} \lambda \tau \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{M\omega} \left[\sin \omega \tau \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + (1 - \cos \omega \tau) \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

87.2. В данном случае $A^{\mu} = (Ze/r, 0)$ и движение является плоским. Запишем уравнение Гамильтона—Якоби в полярных координатах r, α :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{Ze^2}{r} \right)^2 = c^2 \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial S}{r \partial \alpha} \right)^2 + M^2 c^4.$$

Используя два интеграла движения: энергии $\partial S/\partial t = -E = \text{const}$ и момента импульса $\partial S/\partial \alpha = K = \text{const}$, находим $S = K\alpha - Et + \int^r \frac{dr}{r} \left\{ r^2 \left(\frac{E^2}{c^2} - \mathcal{M}^2 c^2 \right) + 2E \frac{Ze^2}{c^2} r + \left(\frac{Z^2 e^4}{c^2} - K^2 \right) \right\}^{1/2}$.

Для определения траектории электрона положим $\partial S/\partial K = \alpha_0 = \text{const}$, т. е.

$$\alpha_0 = \alpha + K \int^{r-1} du \left[\frac{E^2}{c^2} - \mathcal{M}^2 c^2 + 2E \frac{Ze^2}{c^2} u + \left(\frac{Z^2 e^4}{c^2} - K^2 \right) u^2 \right]^{-1/2}.$$

1. Если $Ze^2/(Kc) \equiv \rho < 1$, то траектория имеет вид $r = p_1 [1 + \varepsilon_1 \cos \sqrt{1 - \rho^2} \times (\alpha - \alpha_0)]^{-1}$, где $\varepsilon_1 \equiv \rho^{-1} [1 - \mathcal{M}^2 c^4 (1 - \rho^2)/E^2]^{1/2}$; $p_1 \equiv Kc(1 - \rho^2)/\rho E$. Если $E < \mathcal{M}c^2$, то $\varepsilon_1 < 1$ и траектория «эллипсовидна» (вращающийся эллипс). Если $E = \mathcal{M}c^2$, то $\varepsilon_1 = 1$ и траектория «параболовидна» (инфинитное движение). Если $E > \mathcal{M}c^2$, то $\varepsilon_1 > 1$ и траектория «гиперболовидна»: электрон приходит из бесконечности, совершает несколько оборотов вокруг ядра и уходит в бесконечность.

2. Если $\rho > 1$, то траектория имеет вид $r = p_2 [\varepsilon_2 \text{ch} \sqrt{\rho^2 - 1} (\alpha - \alpha_0) - 1]^{-1}$, где $\varepsilon_2 \equiv \rho^{-1} [1 + \mathcal{M}^2 c^4 (\rho^2 - 1)/E^2]^{1/2}$; $p_2 \equiv Kc(\rho^2 - 1)/(\rho E)$. В этом случае траектория закручивается вокруг начала координат. При $E < \mathcal{M}c^2$ движение финитно ($\varepsilon_2 > 1$), а при $E > \mathcal{M}c^2$ — инфинитно ($\varepsilon_2 < 1$).

88.2. Согласно (46.19), $P_E = -(dE)^{\text{изл}}/d\xi$, причем в мгновенно сопутствующей системе отсчета $P'_E = |2e^2/(3c^3)| (du'/dt')^2$. Далее, $(dE)^{\text{изл}} = \gamma (dE)^{\text{изл}} + \gamma (u d\mathbf{P}^{\text{изл}}) = \gamma (dE)^{\text{изл}}$, так как согласно задаче 43.1 $d\mathbf{P}^{\text{изл}} = 0$. С учетом равенства $dt' = dt = \gamma^{-1} d\xi$, откуда следует, что $P'_E = P_E$.

89.2. Используя (89.21), составим разность $\delta\mu = \overline{\mathcal{F}}^{\mu}_{(f)} - \mathcal{F}^{\mu}_{(f)} = \frac{1}{c} \int (\Theta^{0\mu} - \Theta^{0\mu}) dV = \frac{1}{c} \int \partial_\alpha X^{\alpha 0\mu} dV$. Но так как $X^{\alpha 0\mu} = -X^{0\alpha\mu}$, то $\alpha = i = 1, 2, 3$ и по теореме Гаусса — Остроградского с учетом островного характера системы имеем $\delta\mu = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \oint_S n_i X^{i 0\mu} dS = 0$. Очевидно, что для островной системы

любой тензор K^{\dots} со свойством $K^{\lambda\tau\dots} = -K^{\tau\lambda\dots}$ удовлетворяет соотношению $\int \partial_\lambda K^{\lambda\mu\dots} d\sigma_\mu = 0$, где σ — пространственно-подобная поверхность.

89.3. Циклически переставляем индексы: $X^{\alpha\mu\nu} = -X^{\mu\alpha\nu} = -X^{\mu\nu\alpha} = X^{\nu\mu\alpha} = X^{\nu\alpha\mu} = -X^{\alpha\nu\mu} = -X^{\alpha\mu\nu} \equiv 0$.

89.4. Пусть $A^{\mu\nu} = 2^{-1}(\Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu})$. Если $\Theta^{ik} = \Theta^{ki}$, то в любой системе отсчета $A^{ik} \equiv 0$, что возможно только при условии, что $A^{i0} \equiv 0$.

90.1. Запишем соотношение (90.2), считая, что электрон движется со скоростью \mathbf{v} , и выбирая в качестве поверхностей σ_1, σ_2 соответственно гиперплоскости $\sigma(x^0 = 0)$ и $\sigma_0 [x^0 = (\mathbf{r}\mathbf{v})/c]$ (рис. 20), связанные друг с другом преобразованием Лоренца. С учетом (90.12) имеем

$$\mathcal{F}^\nu \equiv \int_{\Omega} f^\nu d\Omega = \int_{\sigma} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_\mu - \int_{\sigma_0} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_\mu = 0.$$

В собственной системе отсчета электрона $f^\nu = -\partial_i \Theta^{i\nu}(\mathbf{r})$, т. е.

$$\mathcal{F}^\nu = \int dV \int_0^{(\mathbf{r}\mathbf{v})/c} dx^0 f^\nu(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \int (\mathbf{r}\mathbf{v}) \partial_i \Theta^{i\nu} dV = 0.$$

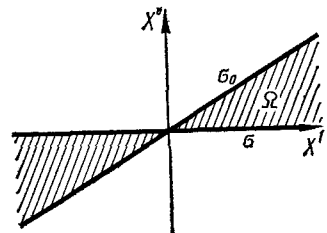


Рис. 20

Предполагая систему островной (так как $E \sim r^{-2}$, $\hat{\Theta} \sim r^{-4}$ при $r \rightarrow \infty$), после интегрирования по частям находим $\mathcal{F}^v = \frac{v_i}{c} \int \Theta^{iv} dV = 0$, или $\int \Theta^{iv} dV = 0$, что эквивалентно (90.13), так как в собственной системе электрона $\int \Theta^{i0} dV = c \mathcal{P}_{(f)}^i = 0$.

90.2. Для электрона, движущегося со скоростью \mathbf{v} , имеем:

$$\mathbf{B} = c^{-1} [\mathbf{v} \mathbf{E}], \quad \omega = (1 + \beta^2 \sin^2 \vartheta) E^2 / (8\pi); \quad \mathbf{g} = [\mathbf{v} E^2 - E(\mathbf{v} \mathbf{E})] / (4\pi c^2),$$

где ϑ — угол между векторами $\mathbf{r} - \mathbf{v}t$ и \mathbf{v} . Считая электрон поверхностью заряженным эллипсоидом Хевисайда (модель Лоренца) $|\mathbf{r} - \mathbf{v}t| = a\gamma^{-1}(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{-1/2}$, поле \mathbf{E} определяем из (80.7). Интегрирование ω и \mathbf{g} по объему дает: $E_f = (1 + \beta^2/3) e^2 \gamma / (2a)$; $\mathbf{P}_f = \mathbf{v} 2e^2 \gamma / (3ac^2)$. В модели Абрагама напряженность поля рассчитывается более сложно и сводится к напряженности поля эллипсоида*.

91.1. Порог реакции соответствует минимальной энергии системы, когда в системе центра масс все образовавшиеся частицы неподвижны. Запишем поэтому сохраняющуюся собственную массу системы до реакции в лабораторной системе, а после реакции — в системе центра масс: $[(E_1 + \mathcal{M}_2 c^2)^2 - \mathbf{P}_1^2 c^2]^{1/2} = \sum_i \mathcal{M}'_i c^2$.

$$\text{Отсюда } T_0 = E_1 - \mathcal{M}_1 c^2 = \{c^2 / (2c \mathcal{M}_2)\} \left[\left(\sum_i \mathcal{M}'_i \right)^2 - (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)^2 \right].$$

91.2. Из закона сохранения 4-импульса $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4$ и условий $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{M}'_i c^2$ выводим $\mathcal{P}_4^2 = \mathcal{M}'_4 c^2 = (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3)^2 = \sum_{i=1}^3 \mathcal{M}'_i c^2 + 2[(\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2) - (\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_3) - (\mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3)]$.

91.3. Если \mathcal{M}'_i — собственная масса системы частиц \mathcal{M}'_i , то полная энергия системы минимальна, когда частицы \mathcal{M}'_i относительно неподвижны. Тогда $\mathcal{M}' = \sum_i \mathcal{M}'_i$ и реакцию можно представить в виде $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_4$, где $\mathcal{M}_3 = 0$, $\mathcal{M}_4 = \mathcal{M}'$. Из тождества (91.17) выводим $c^2 E_1 \mathcal{M}_2 - E_1 E + c P_1 E \cos \vartheta - E_0 \mathcal{M}_2 c^2 = (\mathcal{M}'^2 - \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2) c^4 / 2$, где ϑ — угол рассеяния фотона в лабораторной системе. Отсюда $\partial E_1 / \partial \vartheta = E \sin \vartheta (P_1 c)^2 [E E_1 \cos \vartheta + c P_1 (\mathcal{M}_2 c^2 - E)]^{-1}$, т. е. минимальное значение E_1 соответствует углу $\vartheta = 0$, если $E E_1 + c P_1 (\mathcal{M}_2 c^2 - E) > 0$, и углу $\vartheta = \pi$, если $c P_1 (\mathcal{M}_2 c^2 - E) - E E_1 < 0$. В обоих случаях $\cos^2 \vartheta = 1$ и $(E P_1 c)^2 = [\lambda + E_1 (E - \mathcal{M}_2 c^2)]^2$, где $\lambda = (\mathcal{M}'^2 - \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2) c^4 / 2 + E_0 \mathcal{M}_2 c^2$. Корни этого уравнения относительно E_1 имеют вид (для $\lambda > 0$)

$$E_1^\pm = [\mathcal{M}_2 c^2 (\mathcal{M}_2 c^2 - 2E)]^{-1} \{ \lambda (\mathcal{M}_2 c^2 - E) \pm E [\lambda^2 + \mathcal{M}_2 \mathcal{M}'_1 c^6 (2E - \mathcal{M}_2 c^2)]^{1/2} \}.$$

Отсюда видно, что если $\mathcal{M}_2 c^2 > 2E$, то $E_1^+ > E_1^- > \lambda / (\mathcal{M}_2 c^2) > 0$, а если $2E > \mathcal{M}_2 c^2$, то $E_1^- > \lambda / (\mathcal{M}_2 c^2) > 0 > E_1^+$. Таким образом, $T_0 = E_1^- - \mathcal{M}_1 c^2$.

92.1. Рассчитаем силу тяги двигателя в собственной системе звездолета. При подсчете импульса вылетающих фотонов следует иметь в виду, что по свойству параболического отражателя лучи, выходящие из фокуса, при отражении становятся параллельными. Область зеркала разобьем на две части: I — где отражаются все фотоны; II — где отражается половина фотонов (рис. 21). Замечая, что импульс фотона $\mathbf{P}'_v = \mathcal{M}_e c (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, и считая распределение рождающихся фотонов изотропным, в областях I и II имеем соответственно:

$$dP'_1/dt' = -2P'_v N \cos \vartheta_1; \quad dP'_{II}/dt' = -2^{-1} P'_v N (1 - \cos \vartheta_1 + 2^{-1} \sin^2 \vartheta_1),$$

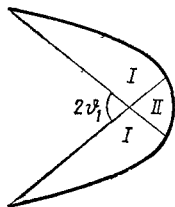


Рис. 21.

* Лорентц Г. А. Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. ОНТИ, 1934, с. 329.

где $\operatorname{tg} \vartheta_1 = 4aR/(R^2 - 4a^2)$. Поэтому сила тяги равна

$$F'_T = -\frac{d}{dt'} (P'_i + P'_{i1}) = 2N \mathcal{M} e c (1 - v^2/c^2)^{-1/2} (R^4 - 8a^4 + 4a^2 R^2)/(R^2 + 4a^2)^2.$$

Чтобы составить уравнение движения звездолета, заметим, что сила тяги является инвариантом. Полезно доказать это двумя разными способами. Во-первых, из закона преобразования 4-силы

$$\mathbf{F}' = F U^0/c - \mathbf{u} (F U) \gamma/c^2 + (\gamma - 1) (\mathbf{u} F) U^0 \mathbf{u}/(c u^2); \quad \gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2},$$

вытекает, что $\mathbf{F}'_{\parallel} = \mathbf{F}_{\parallel}$. Во-вторых, импульс, получаемый звездолетом в лабораторной системе отсчета, есть разность между импульсом вылетевших фотонов и импульсом использованного горючего (e^{\pm}). Таким образом, $\mathbf{F}_T = -d(\mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}_e)/dt$. С другой стороны, $dt' = dt/\gamma$ и $\mathbf{P}_{\gamma, e} = \gamma(\mathbf{P}'_{\gamma, e} - \mathbf{u} E'_{\gamma, e}/c^2)$. Но $\mathbf{P}'_e = 0$ и $E'_e = E'_e$. Так что $\mathbf{F}_T = -d\mathbf{P}'_{\gamma}/dt' = \mathbf{F}'_T$.

Разделим теперь импульс \mathbf{P} звездолета на две части: импульс корпуса \mathbf{P}_1 и горючего \mathbf{P}_2 , т. е. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$. Рассмотрим два близких момента времени t и $t + \Delta t$, выделив долю горючего, сгорающего к моменту времени $t + \Delta t$. Тогда из закона сохранения импульса имеем $\mathbf{P}^*(t) + \Delta \mathbf{P}_2^{(e)}(t) = \mathbf{P}(t + \Delta t) + \Delta \mathbf{P}_2^{(v)}(t + \Delta t)$, где очевидно, $\mathbf{P}^*(t) = \mathcal{M}(t + \Delta t) \mathbf{U}$, $\mathbf{P}(t + \Delta t) = \mathcal{M}(t + \Delta t) (\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U})$. Отсюда получаем уравнение движения $\mathcal{M}(t) d\mathbf{U}/dt = -d(\mathbf{P}_2^{(v)} - \mathbf{P}_2^{(e)})/dt = \mathbf{F}_T = \mathbf{F}'_T$. Полагая $\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}_0 - \alpha t$, где $\alpha = 2N \mathcal{M}_0 e c (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, и интегрируя это уравнение с начальным условием $u(0) = 0$, находим:

$$u = c(\lambda - 1)/(\lambda + 1), \quad \lambda = [\mathcal{M}_0/(\mathcal{M}_0 - \alpha t)]^k; \quad k \equiv 2F_T/(\alpha c).$$

Решения и ответы к задачам приложения

1. В цилиндрических координатах $x^1 = r$, $x^2 = \alpha$, $x^3 = z$ (рис. 22) имеем: $\mathbf{h}_1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{h}_2 = \mathbf{e}_{\alpha r}$, $\mathbf{h}_3 = \mathbf{e}_z$, $g_{ik} = \operatorname{diag}[1, r^2, 1]$. В сферических координатах $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \alpha$ (рис. 23) имеем: $\mathbf{h}_1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{h}_2 = \mathbf{e}_{\vartheta r}$, $\mathbf{h}_3 = \mathbf{e}_{\alpha r} \sin \vartheta$, $g_{ik} = \operatorname{diag}[1, r^2, r^2 \sin^2 \vartheta]$.

9. Запишем элемент объема в произвольных координатах: $dV = dx^1 dx^2 dx^3 = \mathcal{J} dx^1 dx^2 dx^3$, где $\mathcal{J} = |\partial_i f^k|$ — якобиан преобразования. Взяв детерминант от матричного соотношения (IП.14), находим $g = |g_{ik}| = |\partial_i f^j|^2 = \mathcal{J}^2$, т. е. $dV = g^{1/2} dt^1 dx^2 dx^3$.

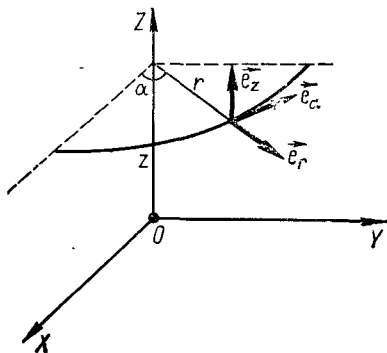


Рис. 22

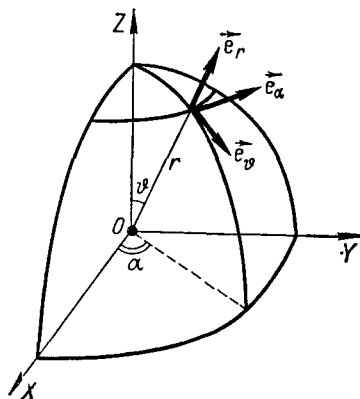


Рис. 23

Закон преобразования ε_{ijk} вытекает из инвариантности элемента объема, построенного на трех векторах dx, dy, dz

$$dV = (dx \{ dy dz \}) = \varepsilon'_{ijk} dx'^i dy'^j dz'^k = \\ = \varepsilon'_{ijk} \partial_i f^i \partial_m f^j \partial_n f^k \varepsilon_{lmn} dx^l dy^m dz^n \equiv \varepsilon_{lmn} dx^l dy^m dz^n.$$

Таким образом, $\varepsilon_{lmn} = \partial_i f^i \partial_m f^j \partial_n f^k \varepsilon'_{ijk} = |\partial_k f^i| \varepsilon'_{lmn} = g^{1/2} \varepsilon'_{lmn}$. Аналогично получим $\varepsilon'^{ijk} = g^{-1/2} \varepsilon^{ijk} = g^{-1} \varepsilon_{ijk}$.

10. В произвольных координатах $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{h}_i (\text{rot } \mathbf{a})^i = \mathbf{h}_i \varepsilon^{ijk} \partial_j a_k$.

11. Выведем (1П.25), исходя из декартовых координат: $\text{div } \mathbf{a} = \partial_i a^i = \partial_i (\partial_k f^k a^i) \partial x^i / \partial x'^i = \partial_k a^k + a^k \partial_k \partial_j f^i \partial x^j / \partial x'^i$.

Прямым дифференцированием якобиана \mathcal{J} убеждаемся, что $\mathcal{J}^{-1} \partial_k \mathcal{J} = \partial_k \partial_j f^i \partial x^j / \partial x'^i$, так что $\text{div } \mathbf{a} = \mathcal{J}^{-1} \partial_k (\mathcal{J} a^k)$. Отсюда

$$(\text{div } \mathbf{a})^{\text{цил}} = r^{-1} \partial (r a_r) / \partial r + r^{-1} \partial a_\alpha / \partial \alpha + \partial a_z / \partial z,$$

$$(\text{div } \mathbf{a})^{\text{сфер}} = r^{-2} \partial (r^2 a_r) / \partial r + [\partial (\sin \vartheta a_\vartheta) / \partial \vartheta + \partial a_\alpha / \partial \alpha] (r \sin \vartheta)^{-1}.$$

13. $\text{div } \mathbf{r} = 3, \text{rot } \mathbf{r} = 0, \nabla (\mathbf{a} \mathbf{r}) = \mathbf{a}, \text{rot } [\mathbf{a} \mathbf{r}] = 2\mathbf{a}, \nabla \varphi (\mathbf{r}) = \varphi' \mathbf{n}, \text{div } \mathbf{A} (\mathbf{r}) = (\mathbf{n} \mathbf{A}'), \text{rot } \mathbf{A} (\mathbf{r}) = [\mathbf{n} \mathbf{A}'], \mathbf{n} \equiv \mathbf{r} / r$.

14. Зависим соотношение (2П.5а) для цилиндра (рис. 24):

$$\nabla \varphi = \frac{1}{2h \Delta S_0} \oint_S \mathbf{n} \varphi dS = \frac{1}{\Delta S_0} \oint_C \mathbf{n}' \varphi dl + \mathbf{n}_0 (\mathbf{n}_0 \nabla) \varphi.$$

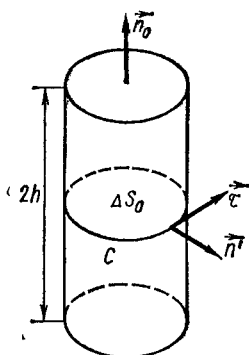


Рис. 24

Отсюда после векторного умножения на \mathbf{n}_0 и следует (2П.8а). Аналогично, (2П.8б) вытекает из (2П.5в):

$$\text{rot } \mathbf{a} = \frac{1}{2h \Delta S_0} \oint_S |\mathbf{n} \mathbf{a}| dS = \frac{1}{\Delta S_0} \oint_C |\mathbf{n}' \mathbf{a}| dl + |\mathbf{n}_0 \dots|$$

после скалярного умножения на \mathbf{n}_0 . Заметим, что если в (2П.8б) положить $\mathbf{a} = \mathbf{c} \varphi$, где \mathbf{c} — постоянный вектор, то получается (2П.8а). Поэтому теоремой Стокса обычно называют только соотношение (2П.8б).

16. Условия существования решений: $\text{rot } \mathbf{e} = 0, \text{div } \mathbf{b} = 0$.

17. В произвольных ортогональных координатах

$$\Delta \varphi = \sum_{i=1}^3 (h_1 h_2 h_3)^{-1} \partial_i (h_1 h_2 h_3 h_i^{-2} \partial_i \varphi);$$

$$\Delta \varphi_{\text{дек}} = \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 \varphi; \Delta \varphi_{\text{цил}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2};$$

$$\Delta \varphi_{\text{сфер}} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right].$$

$$19. \Delta_a \varphi (\mathbf{r}) = \frac{3}{8\pi a^3} \int_{V_a} (\xi \nabla)^2 \varphi (\mathbf{r}) dV_\xi + O(a^4) = 0, \text{I } a^2 \Delta \varphi (\mathbf{r}) + O(a^4).$$

20. Допустим, что гармоническая функция φ принимает максимальное значение φ_0 в некоторой внутренней точке O . Рассмотрим шар малого радиуса a с центром в этой точке. Среднее уклонение φ в этом шаре $\Delta_a \varphi = O(a^4)$, в то время как $\varphi(a) - \varphi_0 = O(a^2)$. Поэтому внутри шара найдутся как точки, где $\varphi < \varphi_0$, так и точки, где $\varphi > \varphi_0$, что противоречит исходному допущению.

21. Из определения (2П.15) сферического среднего имеем

$$\Delta \int_0^a \langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle_s 4\pi s^2 ds = \Delta \int_{V_a} \varphi(\mathbf{r} + \xi) dV_\xi = \int_{V_a} \Delta_\xi \varphi(\mathbf{r} + \xi) dV_\xi,$$

что преобразуется по теореме Гаусса—Остроградского к

$$\begin{aligned} \oint_{S_a} (n\nabla) \varphi(\mathbf{r} + \xi) dS_\xi &= a^2 \oint_{|\xi|=1} (\xi\nabla) \varphi(\mathbf{r} + a\xi) dS_\xi = \\ &= a^2 \oint_{|\xi|=1} \frac{\partial}{\partial a} \varphi(\mathbf{r} + a\xi) dS_\xi = 4\pi a^2 \frac{\partial}{\partial a} \langle \varphi \rangle_a. \end{aligned}$$

Дифференцирование полученного равенства по a и дает (2П.16).

ПРЕДМЕТНО-ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрация 238, 239, 240
Абрагам М. 271
Ампер 6, 13
Амплитуда волны 111, 112
Антенна 132
Аркадьев В. К. 88
- Базис системы отсчета 209
Био Ж. Б. 12
Брадионы 291
Бриллюэн Л. Л. 197
- Вебер 6
Вектор волновой 112, 194
— Герца магнитный 83, 84, 124
— — электрический 61, 124
— Пойнтинга 44, 111, 132, 136, 137
— поляризации волны 142
— трехмерный 294
— Умова 45
— Умова—Пойнтинга 45
Вибратор Герца гармонический 128
— — магнитный 129
— — электрический 125, 129
Восприимчивость магнитная 35
— диэлектрическая 32
Время десинхронизации 215
— релаксации 106
— собственное 220, 254
Выход реакции энергетический 281
- Гамильтониан 258, 261
Генри Дж. 15
Геометрия Минковского 225, 226
Герц Г. 7
Гильберт В. 11
Гипотеза Лоренца 205
— Фицджеральда 204
- Градисент 296
Гюнтер Н. М. 25
- Давление магнитное 94
— Пуанкаре 275
— электромагнитное 113
Даламбер Ж. А. 224
Дефект массы 279
Диамagnetики 19, 35, 86, 95
Диэлектрики 18, 29, 69
Дивергенция 297
Диполь 55
Дирак П. А. М. 24, 263
Дисперсия 196
Длина волны комптоновская 141
Домены 19
Дюфэ Ш. 8
- Емкости собственные 67, 68
Емкость 68
- Задача Дирихле 52
— Неймана 52
Закон Ампера 13, 14, 18, 26, 29
— Био—Савара—Лапласа 12, 13
— взаимодействия полюсов магнитных 11
— Джоуля—Ленца 43
— индукции электромагнитной 16, 18, 27, 29
— Кена 75
— Кирхгофа 37
— — второй 98, 148
— — первый 99, 148
— Кулона 9, 10, 23
— Ома 36, 37, 61, 104
— оптики геометрической 115

— Рейтера — Зондхаймера 156
— Снеллиуса 115
— сохранения заряда электрического
9, 21, 22, 99, 118, 145, 241, 242
— — импульса 41, 42, 138
— — 4-импульса 272
— — энергии 138, 151, 280
— — энергии-импульса 269, 277
Заряд 20, 21, 22
— проводника 62
Зильберштейн Л. 247
Зоммерфельд А. 197, 229
Зондхаймер Э. 156

Излучение синхротронное 138
Изотропия пространства 208
Изотропность 240
Импеданс 148
Импульс 114
Индуктивность 91
— взаимная 91
Индукция магнитная 11, 12, 13, 84
— электрическая 31
Интервал 225
— времениподобный 225
— пространственно-подобный 225
— нулевой 225

Кавендиш Г. 10
Камерлинг Оннес Г. 19, 85
Капица П. Л. 152
Квадруполь 55
Кванты 279
Кэньеди Р. 205
Компоненты ковариантные 230, 295
— контравариантные 230, 294
— — смешанные 296
Конденсатор 68
Координаты 293
— ортогональные 295
Коэффициент поглощения 194
— отражения 116
— прохождения 116
— увлечения 202
Коэффициенты взаимной индукции 67
— емкостные 67
— потенциальные 67

Лагранжиан 258, 259
Лаплас П. С. 12
Ландау Л. Д. 89
Лармор Дж. 181, 205
Лауэ М. 275
Лебедев П. Н. 7, 113
Линия мировая 225, 236, 268
Линии силовые магнитные 27
Лобачевский Н. И. 237
Лондон Ф. 89
Лоренц Г. А. 6, 45, 195, 205, 271
Лоренц Л. 195

Льенар А. 137
Люксоны 291

Масса инертная 255
— пакета волнового 114
— собственная 254, 256, 268, 278, 279
Магнетизм спиновый 32
Магнетики 19, 32
Майкельсон А. 201
Максвелл Дж. К. 6, 16, 20, 28
Матрица Лоренца 229
Мейсснер В. 86
Метод инверсии 71
— отражений 71
— сферических средних 110
Милликен Р. 9
Минковский Г. 225, 229, 253
Мир 225
Модель Друде электронная 105, 106
— электрона статическая 271
Момент дипольный 30, 58
— — шара 70
— магнитный 82
— — системы токов 91
— мультипольный 55
Монополь 55
Мощность излучения 128, 132, 134, 136, 137
— — слоя двойного электрического 58
— — — магнитного 82
Мультипольность 55

Намагниченность 22, 32, 35, 83, 85, 94, 124, 250
Напряженность поля магнитного 35
— — электрического 23, 57, 146

Пайерлс Р. 89
Пакет волновой 113
Парадокс часов 222, 223
Парамагнетизм 19
Парамагнетики 35, 95
Плотность заряда 20, 134
— — линейная 54
— — объемная 44, 62
— — поверхностная 39, 53, 97, 99
— зарядов связанных 59, 70
— — сторонних 96
— мощности излучения 133
— — тепловой 43
— потока энергии электромагнитной 44
— силы 40, 94, 95, 74, 75
— — Лоренца 41, 42, 94
— тока 21, 77, 104, 106, 134
— — намагничения 33, 34, 84
— — поверхностная 40, 80, 94
— — поляризации 34
— энергии поля магнитного 94, 111, 137, 195
— — — электрического 150
— — — электромагнитного 150

- Плотность функции Лагранжа 284
 Поворот гиперболический 226
 Повороты трехмерные 232
 Подвижность ионов 105
Пойнтинг Дж. 44
 Показатель преломления комплексный 194
 Поле гравитационное 7
 — магнитное 11, 26, 27, 77
 — электрическое 10, 27
 — электромагнитное 6, 7, 15, 27, 107, 110
 — ядерное 7
 Полиномы Лежандра 50
 Полупроводники 18
 Поляризация 30, 111
 Поляризованность 30, 31, 59, 60, 61, 65, 70, 116, 124, 250
 Постоянная тонкой структуры 141
 — фазовая 111
 — электродинамическая 12
 Постулаты теории относительности 206
 Потенциал векторный 77—80, 82, 83
 — запаздывающий 122
 — конвекционный 246
 — магнитный 82
 — опережающий 122
 — поля электрического 56
 — слоя электрического 58
 — скалярный 81
 — четырехмерный 248
 Потенциалы Льенара—Вихерта 135
 Поток поля магнитного 92, 148
 — — электрического 24
 — энергии электромагнитной 102
 Правило Ленца 17
 — суммирования Эйнштейна 294
 Преобразование калибровочное 77, 118
 Преобразования Галилея 199, 214
 — координат 293
 — Лоренца 210, 214, 225, 226, 232
 — Лоренца—Эйнштейна 213
 Приближение магнитной гидродинамики 159
 — Ээля 155
 Принцип вариационный 286
 — максимума 301
 — наименьшего действия 284
 — относительности Галилея 198, 199
 — переключения 291
 — причинности физический 120
 — суперпозиции 10
 Произведение векторное 297
 Проницаемость диэлектрическая 18, 32, 193
 — магнитная 19, 35
 Псевдовеличины 294
 Псевдотензоры 294
Пуанкаре А. 205, 275
- Радиус электрона классический 141
 Разложение потенциалов мультипольное 55, 130, 131
 Реакторы атомные 281
 Рассеяние волн электромагнитных 141
Рейтер Г. 156
 Резонанс 149
 Ротор 297
- Савар Ф.* 12
 Самоиндукция 15
 Свертка 296
 Сверхпроводимость 19
 Сверхпроводники 86, 88
 Свойства пространства—времени 208
 Сегнетоэлектрики 19
 Сечение рассеяния системы дифференциальное 141, 142
 — — — полное 141, 142
 Сила электродвижущая 27, 97, 146
 — Лоренца 41, 200, 246
 — реакции излучения 139
 Силы гравитационные 7
 — диффузионные 97
 — пондеромоторные 152
 — термоэлектрические 97
 — электромагнитные 152
 Символ Кронекера 295
Симмер Р. 8
 Скаляры 296
 Скин-эффект 153
 — аномальный 155
 Скорость волн электромагнитных 114
 — волны фазовая 194
 — групповая 196
 — потеря энергии 137, 263
 — сигнала 197
 — точки четырехмерная 236
 — фронта сигнала 197
 Слой двойной электрический 58
Соболев С. Л. 25
 Соотношение взаимности 67
 — Доплера 239
 — Клаузиуса—Мосотти 195
 — эквивалентности массы и энергии 255
 Сопротивление активное 149
 — излучения антенны 128, 129, 134
 — линии волновое 157
 — реактивное 149
 — системы 101
- Тахионы 218, 291, 292
 Тело отсчета 208
 Тензор Беллифанте 290
 — Леви—Чивита 233
 — метрический 295
 — момента—импульса 290
 — — , плотность 290
 — натяжений 41, 42, 95
 — поля электромагнитного 244, 2 5

Тензор поляризации — намагничения 250
— ранга 294
— четырехмерный 230
— энергии — импульса поля электромагнитного 268, 272, 290
Теорема Беккера 272
— Белинфанте 289
— взаимности Грина 67, 68
— Гаусса 24, 29
— Гаусса — Остроградского 24, 59, 299, 235
— единственности 52, 63, 79, 109
— живых сил 254, 257, 260, 268
— Ирншоу 65
— Ксальвина 50
— Лармора 181
— Лауэ 275
— Леви — Чивита 197
— Остроградского 299
— Нейтер 287
— Планка 270
— Пойнтинга 44, 150
— сложения скоростей 237
— Стокса 300, 236
— Томсона 69
— эквивалентности Ампера 82
Теория близкодействия 6
— дальнего действия 6
— относительности 206
Толщина скин-слоя 154
Ток смещения 28
Токи индукционные 15
Томсон Дж. Дж. 9, 29, 65, 142, 271
Точка мировая 225

Угол Брюстера 116
— потерь 149, 150
Умножение тензорное 233, 296
Умов Н. А. 44
Уравнение волновое 108, 194
— Гамильтона — Якоби 261
— Даламбера 108, 109, 110
— дисперсионное линии двухпроводной 158
— Лапласа 49
— Пуассона 49
— фронта волны 201
Уравнения Гамильтона 260
— движения Дирака — Лоренца 263
— Лагранжа 260

Уравнения Максвелла 28, 36, 118, 144, 153, 158, 250
— Минковского 252, 253, 254, 255
— телеграфные 157
— электродинамики 248
— электростатики 49
Ускорение четырехмерное 237
Ускорители 283
Условие бетатронное 260
— Видероз 260
— каллибровки 119
— квазистационарности достаточное 143
— — определяющее 145
— Лоренца 118, 249
— согласования нагрузки с линией 158

Фарадей М. 6, 8, 13, 15, 16
Фейнберг Дж. 29
Ферми Э. 29
Ферродизэлектрики 19
Ферромагнетики 19, 93
Физо А. И. 201
Фицджеральд Дж. 204
Форма уравнений поля лагранжова 286
Формула Адамара 287
— Друде — Зивера 193
— Лармора 128
— Лоренца — Лоренца 195
— Томсона 149
Формулы Френеля 116, 238
Фотоны 279
Фохт В. 203
Функлин Б. 8
Функция Грина 119, 120—122
— действия 259
— Лагранжа 151, 259
— обобщенная 25
— Рэлея диссипативная 151

Центр масс пакета волнового 113
— — системы зарядов 268

Число Рейнольдса магнитное 159

Шварц Л. 25
Ширина линии поглощения 195
Штур 232

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Предисловие	3
	Введение	5
Глава 1	Уравнения Максвелла как результат обобщения опытных фактов	
	§ 1. Анализ основных опытных фактов	8
	§ 2. Условие макроскопичности и закон сохранения электрического заряда	20
	§ 3. Закон Кулона и электрическое поле	23
	§ 4. Магнитное поле постоянных токов	26
	§ 5. Закон электромагнитной индукции Фарадея	27
	§ 6. Ток смещения и уравнения Максвелла в вакууме	28
	§ 7. Диэлектрики. Электрическая поляризация	29
	§ 8. Магнетики. Намагниченность	32
	§ 9. Учет токов намагничивания и поляризации	34
	§ 10. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в среде	36
	§ 11. Закон Ома в дифференциальной форме	36
	§ 12. Граничные условия	38
	§ 13. Силы, действующие на заряды и токи	40
	§ 14. Энергия электромагнитного поля	42
	§ 15. Системы единиц	45
Глава 2	Стационарные поля	
	§ 16. Электрическое поле, создаваемое заданным распределением зарядов. Уравнение Лапласа	49
	§ 17. Потенциал пространственно распределенных зарядов	51
	§ 18. Потенциал поверхностных и линейных зарядов	53
	§ 19. Потенциал ограниченной системы зарядов (мультипольное разложение)	54
	§ 20. Потенциал двойного электрического слоя	58
	§ 21. Поле связанных зарядов	59
	§ 22. Поле заряженных проводников	61
	§ 23. Энергия электростатического поля	63
	§ 24. Энергия системы заряженных проводников	66
	§ 25. Проводники и диэлектрики во внешнем поле	69

§ 26.	Некоторые специальные методы решения задач электростатики	71
§ 27.	Силы, действующие на проводники и диэлектрики в электростатическом поле	74
§ 28.	Магнитное поле, создаваемое заданным распределением токов Векторный потенциал	77
§ 29.	Магнитное поле ограниченной системы токов (магнитное мультипольное разложение)	80
§ 30.	Поле постоянных магнитов	83
§ 31.	Магнитные свойства сверхпроводников	85
§ 32.	Энергия магнитного поля постоянных токов	90
§ 33.	Силы, действующие на сверхпроводники и магнетики в постоянном магнитном поле	94
§ 34.	Стационарный электрический ток	96
§ 35.	Система идеальных проводников в среде с малой проводимостью	99
§ 36.	Поле цилиндрического проводника с током и превращение энергии в цепи постоянного тока	102
§ 37.	Простейшая модель омического сопротивления проводников	104

Глава

3

Переменное электромагнитное поле

§ 38.	Переменное электромагнитное поле в однородной среде или вакууме	107
§ 39.	Плоские электромагнитные волны	110
§ 40.	Отражение и преломление электромагнитных волн на плоской границе раздела двух сред	114
§ 41.	Поле заданных зарядов и токов в вакууме	117
§ 42.	Электрический и магнитный векторы Герца	123
§ 43.	Поля электрического и магнитного вибраторов Герца	125
§ 44.	Мультипольное разложение запаздывающих потенциалов	129
§ 45.	Излучение линейной антенны	132
§ 46.	Поле произвольно движущегося заряда	134
§ 47.	Сила реакции излучения	138
§ 48.	Рассеяние электромагнитных волн свободными электронами (формула Томсона)	141

Глава

4

Квазистационарные токи и поля

§ 49.	Уравнения Максвелла в квазистационарном случае	143
§ 50.	Квазистационарные токи в линейных проводниках	145
§ 51.	Превращение энергии в цепи линейных квазистационарных токов. Электромеханическая аналогия	150
§ 52.	Скин-эффект	153
§ 53.	Длинные линии	156
§ 54.	Квазистационарные поля в медленно движущихся деформирующихся проводниках (магнитная гидродинамика)	158
§ 55.	Магнитная кумуляция	163
§ 56.	Эффект Холла и МГД-генераторы	165

Глава

5

Электронная теория сред

§ 57.	Уравнения Максвелла—Лоренца и макроскопические уравнения Максвелла	170
-------	--	-----

§ 58.	Диэлектрики в постоянном электрическом поле	173
§ 59.	Электронная теория намагничивания	180
§ 60.	Теория ферромагнетизма по Вейссу	184
§ 61.	Электронная теория дисперсии и поглощения электромагнитных волн	189

Глава 6

Релятивистская кинематика и электродинамика

§ 62.	Принцип относительности Галилея и гипотеза эфира	199
§ 63.	Попытки обнаружения эфирного ветра	201
§ 64.	Гипотезы Фицджеральда и Лоренца	204
§ 65.	Постулаты теории относительности	206
§ 66.	Общие свойства пространства-времени и определение одновременности	208
§ 67.	Вывод преобразований Лоренца—Эйнштейна	210
§ 68.	Общие следствия преобразований Лоренца	214
§ 69.	Изменение длины движущихся тел	218
§ 70.	Изменение хода движущихся часов	220
§ 71.	Парадокс часов	222
§ 72.	Четырехмерная геометрическая интерпретация преобразований Лоренца	224
§ 73.	Четырехмерные векторы и тензоры	229
§ 74.	Четырехмерный векторный анализ	234
§ 75.	Четырехмерные скорость и ускорение точки	236
§ 76.	Теорема сложения скоростей	237
§ 77.	Аберрация и эффект Доплера для световой волны	238
§ 78.	Закон сохранения электрического заряда в ковариантной форме	241
§ 79.	Ковариантная запись уравнений электродинамики	243
§ 80.	Формулы преобразования для электромагнитного поля	245
§ 81.	Инварианты электромагнитного поля	247
§ 82.	Четырехмерный потенциал электромагнитного поля	248
§ 83.	Ковариантная запись уравнений Максвелла в среде	250

Глава 7

Движение заряда в электромагнитном поле

§ 84.	Уравнения Минковского	253
§ 85.	Уравнения движения заряда во внешнем электромагнитном поле	256
§ 86.	Лагранжева форма уравнений движения заряда в электромагнитном поле	258
§ 87.	Гамильтонова форма уравнений движения заряда в электромагнитном поле	260
§ 88.	Сила реакции излучения	262

Глава 8

Энергия и импульс в электродинамике и релятивистской механике

§ 89.	Энергия и импульс электромагнитного поля	266
§ 90.	Электромагнитная теория массы	271
§ 91.	Законы сохранения энергии и импульса для системы частиц и полей	276
§ 92.	Закон сохранения энергии	280

§ 93. Релятивистские встречные пучки	283
§ 94. Принцип наименьшего действия для электромагнитного поля	284
§ 95. Законы сохранения как следствие вариационного принципа	287
§ 96. Тахионы	291

Приложение

Основные сведения из векторного анализа

1П. Классификация физических величин. Тензоры	293
2П. Важнейшие формулы и теоремы векторного анализа	297
Список принятых обозначений	302
Решения и ответы к задачам	305
Предметно-именной указатель	328

Яков Петрович Терлецкий
Юрий Петрович Рыбаков

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Зав. редакцией литературы по физике и математике

Е. С. Гридасова

Редактор Г. Г. Чернышева

Младшие редакторы С. А. Доровских Н. П. Майкова

Художественный редактор В. И. Пономаренко

Технический редактор Н. В. Яшукова

Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 2163

Изд. № ФМ-612. Сдано в набор 13.03.80. Подп. в печать 10.10.80. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 21 усл. печ. л. 20,28 уч.-изд. л. Тираж 15000 экз. Зак № 2222 Цена 95 коп

Издательство «Высшая школа».

Москва, К-51, Неглиная ул., д. 29/14

Отпечатано с матриц ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

в Московской типографии № 4 Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Москва, 129041, Б. Переяславская ул., 46