По Засимовичу
ПИСАРЕВСКИЙ

M. Tikhomandritzky.

Éléments de la théorie des intégrales Abéliennes.

А. Писаревский

Osnovaniia teorii

ОСНОВАНІЯ ТЕОРІИ

abelevykh integralov

АБЕЛЕВЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

M Tikhomandritskago

М. ТИХОМАНДРИЦКАГО,

Орд. проф. Императорскаго Харьковскаго Университета.

Izdanie Khar'kovskago Matematicheskago obshchestva

Изданіе Харьковскаго Математическаго Общества.

no. 2,
1911,

Khar'kov

ХАРЬКОВЪ.

Типографія Адольфа Дарре. Рыбная, № 28.

1895.

На основаніи § 9-го устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать разрѣшается.

Предсѣдатель Общества проф. *К. Андреевъ.*

13 Мая 1894 г.

QA 345
T5
Math.

287570

Предисловіе.

Теорія Абелевыхъ интеграловъ, начало которой положено безсмертнымъ Норвежскимъ математикомъ *Абелемъ* знаменитою теоремой, носящей, какъ и интегралы, которыхъ она касается, его имя, трудами самого Абеля, а затѣмъ германскихъ ученыхъ: *Якоби*, Ришело, Гёпселя, Розенгайна, особенно *Римана* и его учениковъ, каковы Рохъ, Нейманъ, Кёнигсбергеръ, Веберъ, Примъ, Крацеръ, Томэ; далѣе *Клебша* и Гордана, и ихъ учениковъ, Линдемана, Клейна, особенно *Нётера*, и наконецъ *Вейерштрасса*, во Франціи Эрмита, Бріо и Букэ и другихъ, настолько уже хорошо разработана, главные моменты настолько хорошо уяснены, что въ настоящее время *вся теорія Абелевыхъ интеграловъ легко развивается изъ одного тождества.* Первый, кто нашелъ это, былъ *Вейерштрассъ*, затѣмъ къ тому же пришелъ и *Нётеръ*, разрабатывая алгебраическую часть Клебшевской теоріи Абелевыхъ интеграловъ. Въ своихъ лекціяхъ именно, по теоріи гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ, Вейерштрассъ вывелъ изъ этого тождества сперва формы нормальныхъ интеграловъ второго и третьяго рода, соотношенія между періодами интеграловъ перваго и второго рода, выраженія Абелевыхъ интеграловъ и алгебраическихъ функцій чрезъ примфункціи (отвѣчающія линейнымъ множителямъ раціональной функціи независимой перемѣнной x); отсюда, какъ простое слѣдствіе, теорему Абеля; изъ частнаго случая послѣдней задачу Якоби и наконецъ теорію Θ-функцій, при помощи которой рѣшается эта задача. Этотъ капитальнѣйшій результатъ изслѣдованій Вейерштрасса въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ, не смотря на то, что подкрѣпленъ глубокими изслѣдованіями Нётера, пришедшаго къ тому же независимо другимъ путемъ, все еще остается, повидимому, не настолько замѣченнымъ и оцѣненнымъ, какъ онъ того заслуживаетъ, даже въ самой Германіи, гдѣ много учениковъ Вейерштрасса. Главной причиной этому служитъ увлеченіе каждаго ученаго изслѣдователя своимъ направленіемъ — наиболѣе послѣдователей имѣютъ Риманъ и Клебшъ, — отчасти и то, что лекціи Вейерштрасса до сихъ поръ не изданы, слѣд., рѣдко доступны не ученикамъ его; наконецъ, можетъ быть и самый методъ изложенія, къ которому надобно такж привыкнуть; у Вейерштрасса всѣ выводы и доказательства основаны на формѣ разложенія въ ряды функцій, имъ разсматриваемыхъ, вблизи особыхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ; это постоянное употребленіе рядовъ затягиваетъ изложеніе, дѣлаетъ его слишкомъ абстрактнымъ и утомляетъ читателя, который, занявшись деталями разсужденій и доказательствъ, не получаетъ часто столь яснаго, какъ желательно, представленія существеннѣйшихъ моментовъ теоріи. Я склоненъ объяснять успѣхъ моего скораго ознакомленія съ теоріей Вейерштрасса по его лекціямъ, рукопись которыхъ я встрѣтилъ въ 1884 г. въ Лейпцигскомъ математическомъ семинарѣ, тѣмъ именно обстоятельствомъ, что вслѣдствіе особеннаго интереса, который я ранѣе получилъ къ его работамъ, отчасти вслѣдствіе моихъ изысканій въ теоріи эллиптическихъ и гиперэллиптическихъ интеграловъ до поѣздки за границу, особенно же вслѣдствіе знакомства съ изслѣдованіями въ этой области Нётера, любезно переданными мнѣ профессоромъ Клейномъ; какъ только онъ получилъ ихъ отъ автора, желая поскорѣе составить себѣ понятіе о сущности этой теоріи, я ограничился сперва бѣглымъ просмотромъ записокъ, не останавливаясь на подробностяхъ доказательствъ. Переходя потомъ къ разсмотрѣнію доказательствъ, я живо замѣтилъ, какъ много они выиграли бы въ краткости и ясности, и легкости усвоенія, если бы Вейерштрассъ дозволилъ себѣ прибѣгнуть къ Римановой поверхности. Восхищенный сущностью Вейерштрассовской теоріи Абелевыхъ интеграловъ, въ которой я нашелъ то, къ чему стремился, я тогда же задался мыслію поскорѣе познакомить моихъ соотечественниковъ съ нею, и по пріѣздѣ въ Берлинъ написалъ тамъ свою докторскую диссертацію подъ заглавіемъ „Обращеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ“, въ которой изложилъ теорію Вейерштрасса въ примѣненіи къ гиперэллиптическимъ интеграламъ. Тогда же я задумалъ изложить и теорію Абелевыхъ интеграловъ вообще, но былъ остановленъ въ осуществленіи этого намѣренія сознаніемъ необходимости поработать надъ усовершенствованіемъ нѣкоторыхъ важныхъ пунктовъ алгебраической части этой теоріи, не будучи удовлетворенъ тѣмъ, что я нашелъ въ заграничной литературѣ по этому предмету. Мнѣ хотѣлось именно алгебраическое выводить при помощи однихъ алгебраическихъ дѣйствій, раціональное при помощи однихъ раціональныхъ, прибѣгать къ рядамъ лишь тамъ, гдѣ не можетъ быть другихъ средствъ, не основывать ничего на теоріи кривыхъ, какъ то дѣлается послѣдователями Клебша, чтобы не ставить изслѣдованіе отвлеченныхъ величинъ въ зависимость отъ изслѣдованія спеціальныхъ величинъ, протяженныхъ, разсматривать функціи, а не формы, какъ то принято въ школѣ Клебша и Клейна, ибо понятіе о функціяхъ элементарнѣе понятія о формахъ. Однимъ

словомъ я хотѣлъ устранить всѣ тѣ сложности и трудности, которыя были внесены въ теорію Абелевыхъ интеграловъ извнѣ, методами изслѣдованія, системою изложенія, вспомогательными теоріями, чтобы идти прямой дорогой въ развитіи теоріи и имѣть дѣло лишь съ тѣми, которыя присущи самому предмету. Конечно, всякій изслѣдователь воленъ употреблять тѣ орудія и методы изслѣдованій, которыми онъ лучше владѣетъ; расширять науку всѣ средства, ведущія къ цѣли, хороши; но углубленіе науки требуетъ, чтобы всѣ выводы и доказательства вытекали изъ существа дѣла, а не основывались на постороннихъ теоріяхъ. При этомъ я рѣшительно отдаю предпочтеніе выводу предъ доказательствомъ, ибо доказательство часто только принуждаетъ къ признанію истины, не раскрывая вполнѣ эволюціи одной изъ другой.

Приступивъ ради этого къ переработкѣ того, что болѣе меня удовлетворяло въ изслѣдованіяхъ иностранныхъ ученыхъ, я вскорѣ однако надолго былъ отвлеченъ другими обязанностями отъ начатой работы. Тѣмъ временемъ Нётеръ успѣлъ дальше обработать свои изслѣдованія и издать сущность своихъ лекцій по теоріи Абелевыхъ интеграловъ (Mathem. Ann. Bd. 37). Это снова воротило меня къ моимъ изысканіямъ, и въ іюнѣ 1892 года мнѣ удалось найти методъ опредѣленія рода (ранга по Вейерштрассу) алгебраической функціи, опредѣляемой неприводимымъ уравненіемъ самаго общаго вида, и тѣхъ функцій, которыя, будучи приравнены нулю, даютъ присоединенныя кривыя (adjungirte Curven) Нётера, при помощи раціональныхъ дѣйствій, именно алгориѳма общаго наибольшаго дѣлителя,—что я считаю весьма важнымъ результатомъ, въ виду фундаментальнаго значенія этихъ моментовъ въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ, такъ какъ способы, предложенные для этого Нётеромъ и Раффи, сложны и теоретически, и практически. Когда такимъ образомъ главная удерживавшая меня трудность была преодолѣна, я рѣшился вновь сдѣлать попытку изложенія основаній Вейерштрассовской теоріи Абелевыхъ интеграловъ, принявъ во вниманіе также изслѣдованія Римана, Неймана, особенно Нётера, Бріо и Букэ и мои собственныя. Свой опытъ нынѣ предлагаю вниманію отечественныхъ любителей математики. Вотъ вкратцѣ его содержаніе.

Во введеніи я даю опредѣленіе того, что называется Абелевымъ интеграломъ, и мимоходомъ вывожу Аронгольдовскую форму этихъ интеграловъ, хотя дальше ею нигдѣ не пользуюсь.

Въ первой главѣ изслѣдую свойства неявной алгебраической функціи, объясняю Риманову поверхность для этой функціи, ея рангъ; вывожу по Нейману формулу Римана, дающую связь между рангомъ съ одной стороны, и числомъ листовъ и винтовыхъ точекъ съ другой; затѣмъ по Бріо и Букэ съ моими собственными дополненіями излагаю способъ вычисленія рода (ранга); затѣмъ перехожу къ дискриминанту уравненія, опредѣляю по Бріо и Букэ степень кратности каждаго его корня и разлагаю на два множителя, существенный и несущественный, по Кронекеру.

Вторая глава посвящена раціональнымъ функціямъ отъ x и y, алгебраической функціи перваго (однозначныхъ на Римановой поверхности для y). Послѣ нѣкоторыхъ общихъ предложеній, доказанныхъ по Риману и Вейерштрассу, перехожу къ опредѣленію *присоединенныхъ функцій* вообще, въ частности же перваго, втораго и третьяго рода, по Нётеру и на основаніи моихъ изслѣдованій. Свойства этихъ функцій выводятся по Нётеру съ тѣми отступленіями, которыя вызваны тѣмъ, что я разсматриваю функціи, а не формы, какъ Нётеръ. Затѣмъ показываю разложеніе алгебраической функціи, однозначной на Римановой поверхности, на функціи этихъ трехъ родовъ (éléments simples Hermite'a), наконецъ здѣсь же выводится вышеупомянутое тождество, служащее источникомъ всей теоріи Вейерштрасса.

Въ третьей главѣ разсматриваются уже интегралы: установляются три рода интеграловъ и ихъ обозначеніе, и выполняется приведеніе къ нимъ общаго Абелева интеграла.

Въ четвертой главѣ изъ вышеупомянутаго тождества при помощи интегрированія выводятся соотношенія между періодами интеграловъ перваго и втораго рода, примъ-функціи и выраженіе чрезъ нихъ интеграловъ трехъ родовъ.

Въ пятой главѣ дается выраженіе чрезъ примъ-функціи раціональной функціи отъ x, y, однозначной на Римановой поверхности для y, и отсюда получается теорема Абеля.

Въ шестой главѣ разсматривается задача Якоби и Абелевы трансцендентныя втораго и третьяго рода; разсмотрѣніе частныхъ производныхъ функцій втораго рода приводитъ къ одной особой функціи, къ которой сперва все и сводится; затѣмъ примѣненіе теоремы Абеля къ одному частному случаю чрезъ посредство интеграловъ третьяго рода даетъ выраженіе логариѳма алгебраической функціи, однозначной на Римановой поверхности для y, чрезъ ту же вспомогательную функцію; слѣдующій затѣмъ переходъ отъ логариѳма къ числу приводитъ насъ къ Θ-функціи. Затѣмъ дается рѣшеніе задачи Якоби съ помощію Θ-функцій согласно съ Клебшемъ и Горданомъ, Бріо и Букэ.

Послѣдняя, седьмая, глава посвящена выводу свойствъ общей Θ-функціи изъ ея опредѣленія, даннаго въ предыдущей главѣ, и сведенію общей къ Якобіевской. Здѣсь мы придерживались во многомъ послѣдней главы нашего „Обращенія гиперэллиптическихъ интеграловъ“.

Въ настоящемъ сочиненіи мы ограничились лишь изложеніемъ основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ, а вовсе не думаемъ предлагать полный трактатъ, исчерпывающій все, что сдѣлано по этому предмету различными учеными: на это у насъ теперь нѣтъ времени, да не много нашлось бы, пожалуй, и читателей, такъ какъ у насъ только что начинаютъ заниматься теоріей Абелевыхъ интеграловъ. Буду очень радъ, если предлагаемый трудъ, знакомя съ основаніями самой простой, естественной и изящной теоріи Абелевыхъ интеграловъ, будетъ способствовать расширенію круга лицъ, интересующихся этимъ предметомъ; полагаю, что это не невозможно, такъ какъ я не требую отъ читателя большой учености: свѣдѣній, даваемыхъ обыкновенными нашими университетскими курсами по высшей алгебрѣ, дифференціальному и интегральному исчисленію, да основаній теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, вполнѣ достаточно, чтобы вполнѣ овладѣть нашимъ изложеніемъ основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ.

М. Тихомандрицкій.

31 Марта 1893 г.

Оглавленіе.

Введеніе.

1. Пусть дано неприводимое алгебраическое уравненіе между перемѣнными x, y:

$$\overset{m\;n}{F(x, y)} = 0, \tag{1}$$

первая часть котораго, слѣд., есть неразлагающаяся на раціональные множители цѣлая функція этихъ перемѣнныхъ, — степени m относительно x и степени n относительно y; изъ этого уравненія чрезъ дифференцированіе легко получается такое соотношеніе между дифференціалами обѣихъ перемѣнныхъ:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}; \tag{2}$$

помножая обѣ части на раціональную функцію x и y, напр. $f(x,y)$, и интегрируя, мы будемъ имѣть въ двоякой формѣ самый общій Абелевъ интегралъ:

$$\int f(x,y)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = -\int f(x,y)\frac{dy}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}. \tag{3}$$

Къ такому виду приводится и всякій другой интегралъ отъ раціональной функціи x и y, напр.

$$\int \Phi(x,y)dx: \tag{4}$$

стоитъ только помножить и раздѣлить $\Phi(x,y)$ на $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$; тогда, полагая

$$\Phi(x,y)\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = f(x,y), \tag{5}$$

мы будемъ имѣть интегралъ лѣвой части (3).

Если x принять за независимую перемѣнную, то $f(x,y)$, раціональную функцію x, y, всегда можно привести къ такому виду, какъ то показалъ Абель:

$$f(x,y) = \frac{f(x, \overset{n-1}{y})}{\psi(x)}, \tag{6}$$

гдѣ $f(x,\overset{n-1}{y})$ и $\psi(x)$ цѣлыя функціи своихъ аргументовъ, такъ что интегралъ лѣвой части (3) окончательно приметъ такой видъ:

$$\int \frac{f(x,\overset{n-1}{y})}{\psi(x)} \cdot \frac{dx}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}. \tag{7}$$

Въ этой формѣ, установленной Абелемъ, мы и будемъ его разсматривать.

2. Послѣдователи Клебша принимаютъ Аронгольдовскую форму для Абелевыхъ интеграловъ, которую можно такъ вывести изъ предыдущей. Полагая

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \tag{1}$$

и введя эти новыя перемѣнныя x_1, x_2, x_3 въ уравненіе (1) пред. §, мы дадимъ ему, умножая на x^μ, гдѣ $\mu = m + n$, такой видъ:

$$x_3^\mu F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = f(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{2}$$

гдѣ $f(x_1, x_2, x_3)$ цѣлая однородная функція перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3 измѣренія μ. Слѣд., по теоремѣ Эйлера будетъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} x_3 = \mu f = 0, \tag{3}$$

тогда какъ дифференцированіе даетъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = 0; \tag{4}$$

изъ этихъ двухъ уравненій получаемъ:

$$\frac{x_2 dx_3 - x_3 dx_2}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}} = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{\dfrac{\partial f}{\partial x_3}} = \frac{\sum \pm c_1 x_2 dx_3}{\sum\limits_{i=1}^{i=3} c_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}}, \tag{5}$$

гдѣ c_1, c_2, c_3 совершенно произвольныя величины, а $\sum \pm c_1 x_2 dx_3$ обозначаетъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Но

$$dx = d\,\frac{x_1}{x_3} = \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{x_3^2}, \tag{7}$$

и изъ (2), дифференцируя по x_2, получаемъ:

$$x_3^\mu \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{1}{x_3} = \frac{\partial f}{\partial x_2}; \tag{8}$$

слѣд.,

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = x_3^{\mu-3} \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}} = x_3^{\mu-3} \frac{\sum \pm c_1 x_2 dx_3}{\sum\limits_{i=1}^{i=3} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} c_i}; \tag{9}$$

помножая на

$$f(x,y) = f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Phi(x_1, x_2, x_3)}{\Psi(x_1, x_2, x_3)}, \tag{10}$$

— что будетъ однородная функція, числитель и знаменатель которой будутъ одинаковаго измѣренія, пусть ν', мы будемъ имѣть:

$$f(x,y) \frac{dx}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = \frac{\Phi(x_1, x_2, x_3)}{\Psi(x_1, x_2, x_3)} x_3^{\mu-3} \frac{\sum \pm c_1 x_2 dx_3}{\sum\limits_{i=1}^{i=3} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} c_i}, \tag{11}$$

или, скрывая множитель $x_3^{\mu-3}$ подъ знакомъ функціи, стоящей въ числителѣ:

$$f(x,y) \frac{dx}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = \frac{\Theta(x_1, x_2, x_3)}{\Psi(x_1, x_2, x_3)} \frac{\sum \pm c_1 x_2 dx_3}{\sum\limits_{i=1}^{i=3} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} c_i}; \tag{12}$$

гдѣ измѣреніе числителя $\nu = \nu' + \mu - 3$.

Интегрируя, будемъ имѣть Абелевъ интегралъ въ Аронгольдовской формѣ:

$$\int f(x,y) \frac{dx}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = \int \frac{\Theta(x_1, x_2, x_3)}{\Psi(x_1, x_2, x_3)} \frac{\sum \pm c_1 x_2 dx_3}{\sum\limits_{i=1}^{i=3} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} c_i}, \tag{13}$$

гдѣ перемѣнныя связаны уравненіемъ

$$f(x_1, \overset{\mu}{x_2}, x_3) = 0, \tag{14}$$

и гдѣ измѣреніе однородной функціи $\Theta(x_1, x_2, x_3)$ превышаетъ на $\mu - 3$ измѣреніе однородной функціи $\Psi(x_1, x_2, x_3)$. Клебшъ и Горданъ въ своей книгѣ показали, что такъ необходимо должно быть, чтобы при условіи (14) интегралъ (13) зависѣлъ отъ одной перемѣнной. Въ теоріи ихъ, также у Нётера и Клейна, роль dx играетъ

$$(15) \qquad d\omega_x = \frac{\sum \pm c_1 x_2 dx_3}{\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial f}{\partial x_i} c_i},$$

и дифференцировать однородную функцію $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, или *форму*, предполагая перемѣнныя связанными уравненіемъ (14), по Клейну значитъ полный дифференціалъ этой функціи: $d\varphi(x_1, x_2, x_3)$ раздѣлить на dx, такъ что роль производной принимаетъ на себя $\frac{d\varphi}{d\omega_x}$. Выгода, представляемая Аронгольдовской формой Абелевыхъ интеграловъ (13), заключается въ томъ, что она освобождаетъ отъ обязанности разсматривать особо безконечныя значенія перемѣнныхъ, такъ какъ x и y обращаются въ безконечности для $x_3 = 0$ при x_1 и x_2 отличныхъ отъ нуля; разсматриваніе же въ связи съ теоріей кривыхъ даетъ бо́льшую, такъ сказать, наглядность многимъ предложеніямъ; но взамѣнъ того такое изслѣдованіе интеграловъ требуетъ отъ читателя большей подготовки въ геометріи и теоріи формъ, и кромѣ того представляетъ ту невыгоду, теоретическую, что ставитъ изученіе свойствъ отвлеченныхъ величинъ въ зависимость отъ изученія величинъ частнаго рода протяженныхъ. Поэтому мы будемъ разсматривать Абелевы интегралы въ прежней формѣ, Абелевской, (7) § 1, и если дали здѣсь выводъ Аронгольдовской формы, то для того только, чтобы облегчить читателя, который пожелалъ бы заглянуть въ мемуары авторовъ, слѣдующихъ Клебшевскому направленію въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ.

3. Такъ какъ каждому значенію x по уравненію (1) § 1 отвѣчаетъ n значеній y, вообще различныхъ, то интегралъ (7) § 1 получитъ опредѣленный смыслъ только тогда, когда будетъ данъ рядъ послѣдовательныхъ значеній x:

$$(1) \qquad x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \ X,$$

и рядъ соотвѣтственныхъ значеній y:

$$(2) \qquad y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots y_n, \ Y,$$

т. е. такихъ, что для каждаго значенія i будетъ имѣть мѣсто уравненіе:

$$(3) \qquad F(x_i, y_i) = 0.$$

Вслѣдствіе этого опредѣленные Абелевы интегралы многіе пишутъ такъ:

$$(4) \qquad \int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} \frac{f(x, y)}{\psi(x)} \frac{dx}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}.$$

Совокупность значеній x_i, y_i перемѣнныхъ x и y, удовлетворяющихъ условію (3), Бріо и Букэ называютъ *аналитическою точкою* (выраженіе, которое мы будемъ иногда употреблять), и измѣненіе пары (x, y) отъ пары (x_0, y_0) до пары (X, Y) чрезъ рядъ паръ (x_i, y_i), гдѣ x_i и y_i суть соотвѣтственные члены рядовъ (1) и (2), *движеніемъ* аналитической точки по этому пути. Говоря точка x, мы будемъ представлять себѣ ту точку плоскости, которой абсцисса будетъ равна вещественной части x, а ордината коэффиціенту при $\sqrt{-1}$, предполагая x вообще комплексною величиною. При измѣненіи въ нѣкоторой зависимости составныхъ частей комплексной величины x, отвѣчающая указаннымъ образомъ точка плоскости будетъ чертить по ней кривую линію, которая будетъ сомкнутою, когда x вернется къ своему первоначальному значенію. Аналогичное построеніе можно сдѣлать и для перемѣнной y; тогда каждой точкѣ x въ первой плоскости будетъ отвѣчать вообще n различныхъ точекъ во второй плоскости (и каждой точкѣ y во второй m вообще различныхъ точекъ въ первой), которыя будутъ чертить столько же кривыхъ въ этой второй плоскости, когда точка x будетъ чертить кривую въ своей плоскости. Если x опишетъ въ своей плоскости сомкнутую кривую, то соотвѣтственныя n точекъ въ плоскости (y) опишутъ кривыя, которыя могутъ и не быть сомкнутыми, по крайней мѣрѣ нѣкоторыя. Про аналитическую точку (x, y) говорятъ, что она описала сомкнутую кривую, когда не только точка x описала таковую въ своей плоскости, но и избранная изъ n соотвѣтственныхъ точекъ y въ своей плоскости (y). Разсмотрѣніе заразъ двухъ плоскостей представляетъ методъ, легко распространимый на функціи какого угодно числа комплексныхъ перемѣнныхъ, независимыхъ или зависимыхъ, для обозрѣванія всей совокупности соотвѣтственныхъ значеній этихъ перемѣнныхъ, но въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ гораздо удобнѣе придуманныя для этого Риманомъ многолиственныя поверхности, съ которыми мы познакомимъ читателя въ первой же главѣ. Вейерштрассъ въ своихъ лекціяхъ обходится безъ нихъ; но если вникнуть въ его выраженія, то можно подмѣтить неявное ихъ употребленіе, — такъ онѣ естественны въ этой теоріи. Но въ такомъ случаѣ лучше уже явное ихъ употребленіе, ибо чрезъ это значительно выигрывается для автора легкость изложенія, для читателя легкость представленія и пониманія излагаемаго. Пользованіе тѣмъ пособіемъ, какое представляютъ эти поверхности, не будетъ противорѣчить чисто аналитическому характеру, который мы желаемъ придать нашему изложенію, ибо мы намѣрены пользоваться этимъ пособіемъ только какъ средствомъ краткаго и точнаго указанія *пути интегрированія*, т. е. ряда паръ соотвѣтственныхъ значеній x и y, чрезъ которыя проходитъ аналитическая точка отъ одного предѣла интеграла до другого.

4. Свойства Абелеваго интеграла [(7) § 1] зависятъ прежде всего отъ свойствъ функціи y отъ x, опредѣляемой уравненіемъ (1) § 1, затѣмъ отъ свойствъ функціи $\frac{f(x,y)}{\psi(x)}$; поэтому мы должны начать изложеніе теоріи Абелевыхъ интеграловъ съ изслѣдованія и описанія свойствъ функціи y, опредѣляемой уравненіемъ (1) § 1, —это составитъ содержаніе первой главы; здѣсь мы ознакомимся, какъ сказано, и съ Римановой поверхностью; затѣмъ мы должны перейти къ изслѣдованію функцій раціональныхъ отъ x, y — что составитъ предметъ второй главы; въ ней же мы выведемъ основное тождество, о которомъ было упомянуто въ предисловіи.

ГЛАВА I.

Свойства неявной функціи, опредѣляемой неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ.

5. Изъ уравненія

$$F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0, \tag{1}$$

гдѣ

$$F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=f_0(\overset{m}{x_0})y^n+f_1(\overset{m}{x})y^{n-1}+\cdots+f_{n-1}(\overset{m}{x})y+f_n(\overset{m}{x}), \tag{2}$$

и $f_0(\overset{m}{x})$, $f_1(\overset{m}{x})$, $f_2(\overset{m}{x})\,\ldots\,f_{n-1}(\overset{m}{x})$, $f_n(\overset{m}{x})$ цѣлыя функціи x степени m, для каждаго значенія x получается для y n значеній вообще различныхъ и конечныхъ, какъ то слѣдуетъ изъ Высшей Алгебры; исключеніе можетъ имѣть мѣсто только для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію

$$f_0(\overset{m}{x})=0, \tag{3}$$

— когда одно или нѣсколько значеній y дѣлаются безконечными, и также для тѣхъ значеній x, которыя вмѣстѣ съ соотвѣтственными значеніями y удовлетворяютъ кромѣ (1) также и такому уравненію:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0, \tag{4}$$

когда нѣсколько значеній y дѣлаются равными. Исключая y изъ уравненія (4) при помощи (1), получимъ уравненіе

$$\Delta(x)=0, \tag{5}$$

гдѣ

$$\Delta(x)=[f_0(\overset{m}{x})]^{n-2}\prod_{i=1}^{i=n}\frac{\partial F(x,y_i)}{\partial y_i}, \tag{6}$$

а $y_1, y_2, \ldots y_n$ значенія y для разсматриваемаго значенія независимой перемѣнной x. Функція $\Delta(x)$ называется *дискриминантомъ* уравненія (1) по y; уравненіе (5) даетъ тѣ значенія x, для которыхъ нѣкоторыя изъ значеній y, опредѣляемыхъ уравненіемъ (1), дѣлаются равными. Результантъ уравненій (1) и (4) только численнымъ множителемъ отличается отъ результанта уравненія (4) и слѣдующаго:

$$nF(x, y) - \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} y = 0, \tag{7}$$

которое тоже степени $n-1$ относительно y, какъ и (4); слѣд., онъ будетъ степени $n-1$ относительно коэффиціентовъ каждаго изъ этихъ уравненій, слѣд., степени $2(n-1)$ относительно коэффиціентовъ даннаго уравненія (1), а какъ тѣ степени m относительно x, то отсюда заключаемъ, что степень дискриминанта $\Delta(x)$ относительно x будетъ

$$2m(n-1); \tag{8}$$

слѣд., для такого числа значеній x уравненіе (1) можетъ давать для y равныя значенія. Эти значенія x однако вообще не будутъ всѣ различныя; другими словами, уравненіе (5) вообще можетъ имѣть равные корни. Различныя значенія x такого рода найдутся изъ уравненія степени $\mu < 2m(n-1)$ относительно x:

$$\Delta_1(x) = 0, \tag{9}$$

если $\Delta_1(x)$ есть частное отъ дѣленія $\Delta(x)$ на общаго наибольшаго дѣлителя $\Delta(x)$ и его производной, т. е. если

$$\Delta_1(x) = \Delta(x) : D[\Delta(x), \Delta'(x)]. \tag{10}$$

6. Всю совокупность значеній пары x и y, удовлетворяющихъ уравненію (1), Вейерштрассъ называетъ *алгебраическимъ образомъ* (algebraische Gebilde); каждое отдѣльное значеніе x вмѣстѣ съ однимъ изъ соотвѣтствующихъ значеній y *мѣстомъ* алгебраическаго образа (eine Stelle der alg. Geb.); если x не удовлетворяетъ ни одному изъ уравненій (3) и (9), то такое мѣсто алгебраическаго образа онъ называетъ *обыкновеннымъ;* въ противномъ случаѣ, т. е. если x удовлетворяетъ одному изъ названныхъ сейчасъ уравненій, онъ называетъ его *особеннымъ мѣстомъ*. Мѣста алгебраическаго образа, гдѣ одна изъ перемѣнныхъ x, или y, или обѣ, получаютъ безконечно-большое значеніе, Вейерштрассъ называетъ *безконечно-удаленными* мѣстами алгебраическаго образа (unendlich-ferne Stelle der alg. Geb.). Значенія x, удовлетворяющія одному изъ уравненій (3) или (9) Briot et Bouquet называютъ *особенными алгебраическими точками;* въ частности тѣ, въ которыхъ y обращается въ безконечность, но такъ что обратная его величина $\frac{1}{y}$ остается конечною, *полюсами*, а тѣ, въ которыхъ нѣкоторыя изъ значеній y дѣлаются равными, они называютъ *критическими точками;* Риманъ называетъ послѣднія *точками развѣтвленія* функціи (Verzweigungspunct); причины этихъ названій будутъ ниже объяснены.

Особенная точка можетъ быть заразъ и полюсомъ, и точкою развѣтвленія, или критическою, если именно нѣсколько изъ значеній y обращаются въ безконечность.

7. Для тѣхъ значеній x, которыя удовлетворяютъ заразъ уравненіямъ:

$$\overset{m}{f_0}(x) = 0 \quad \text{и} \quad \overset{m}{f_n}(x) = 0, \tag{1}$$

нѣкоторыя изъ значеній y будутъ равны нулю, другія безконечности. Этого обстоятельства можно избѣгнуть, введя вмѣсто y новую функцію, положивъ

$$y = z + c, \tag{2}$$

и опредѣливъ c такъ, чтобы послѣдній членъ преобразованнаго уравненія, который будетъ

$$= \overset{m\ n}{F}(x, c), \tag{3}$$

и первый коэффиціентъ, который останется тотъ же $\overset{m}{f_0}(x)$, не имѣли общихъ корней, что всегда возможно: стоитъ только искать общаго наибольшаго дѣлителя

$$\overset{m\ n}{F}(x, c) \quad \text{и} \quad \overset{m}{f_0}(x);$$

послѣдній остатокъ будетъ функція одного c:

$$\varphi(c);$$

надобно дать c значеніе, отличное отъ корней уравненія

$$\varphi(z) = 0,$$

чтобы не было

$$\varphi(c) = 0,$$

и тогда уравненія

$$\overset{m}{f_0}(x) = 0 \quad \text{и} \quad \overset{m\ n}{F}(x, c) = 0$$

не будутъ имѣть общихъ корней. Если $\overset{m}{f_0}(x) = 1$, то y ни для какого конечнаго значенія x не будетъ обращаться въ безконечность, подобно цѣлой раціональной функціи; почему алгебраическая функція, опредѣляемая уравненіемъ:

$$y^n + \overset{m}{f_1}(x) y^{n-1} + \overset{m}{f_2}(x) y^{n-2} + \cdots + \overset{m}{f_{n-1}}(x) y + \overset{m}{f_n}(x) = 0, \tag{4}$$

гдѣ $\overset{m}{f_1}(x), \overset{m}{f_2}(x) \ldots \overset{m}{f_n}(x)$ цѣлыя раціональныя функціи x, называется *цѣлою алгебраическою функціей* (ganze algebraische Function, Kronecker). Если въ уравненіи (1) § 5 положить

$$y = \frac{z}{\overset{m}{f}(x_0)} \tag{5}$$

и затѣмъ освободить отъ знаменателей, то оно обратится въ такое:

$$z^n+\overset{m}{f_1(x)}z^{n-1}+\overset{m}{f_2(x)}\overset{m}{f_0(x)}z^{n-2}+\cdots+\overset{m}{f_{n-1}(x)}\,[\overset{m}{f_0(x)}]^{n-2}z+ \overset{m}{f_n(x)}\,[\overset{m}{f_0(x)}]^{n-1}=0, \tag{6}$$

откуда видно, что z будетъ цѣлая функція x. Такимъ образомъ, съ помощью подстановки (5) вопросъ объ изслѣдованіи свойствъ алгебраической функціи y сводится на изслѣдованіе свойствъ *цѣлой* алгебраической функціи z. Это сдѣлалъ Кронекеръ въ своемъ интересномъ мемуарѣ о дискриминантѣ (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 91. S. 301) и пришелъ чисто алгебраическимъ путемъ къ выводу интересныхъ свойствъ его; но для нашей цѣли этого не требуется. Мы замѣтимъ только, что подстановка (5) показываетъ намъ, что функція y будетъ обращаться въ безконечность всегда конечнаго порядка, ибо если α есть k-кратный корень уравненія (3) § 5, то изъ (5) будетъ слѣдовать, что

$$\text{пред.}(x-\alpha)^k y_{x=\alpha} = \text{пред.} \left.\frac{z}{\dfrac{f_0(x)}{(x-\alpha)^k}}\right|_{x=\alpha} = \frac{z_{x=\alpha}}{\dfrac{f_0^{(k)}(\alpha)}{k!}}, \tag{7}$$

гдѣ $z_{x=\alpha}$ будетъ величина конечная, ибо z цѣлая функція.

8. Пусть $x^{(0)}$ обыкновенная точка (слѣд., отлична отъ корней уравненій (3) и (9) § 5); тогда значенію $x=x^{(0)}$ будетъ отвѣчать *n различныхъ, конечныхъ* значеній y, которыя означимъ такъ:

$$y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ y_3^{(0)},\ \ldots\ y_n^{(0)}; \tag{1}$$

всѣ разности

$$y_i - y_j \tag{2}$$

будутъ конечныя величины, отличныя отъ нуля въ точкѣ $x^{(0)}$. Если x изъ $x^{(0)}$ перемѣстится безконечно мало, получитъ, слѣд., приращеніе $dx^{(0)}$, то каждое изъ значеній y_i получитъ безконечно малое приращеніе, главная часть котораго будетъ:

$$dy_i^{(0)} = \left(-\frac{\partial F(x^{(0)}, y_i^{(0)})}{\partial x^{(0)}} : \frac{\partial F(x^{(0)}, y_i^{(0)})}{\partial y_i^{(0)}}\right) dx^{(0)}; \tag{3}$$

слѣд., всѣ значенія y будутъ непрерывныя функціи x вблизи $x^{(0)}$, и, какъ это любая изъ обыкновенныхъ точекъ, то всѣ значенія y будутъ конечными и непрерывными функціями x, а слѣд., и ихъ разности $y_i - y_j$, которыя притомъ будутъ отличны отъ нуля, пока x не придетъ

въ одну изъ особенныхъ точекъ: тамъ нѣкоторыя изъ этихъ разностей могутъ обратиться либо въ нуль, либо въ безконечность, и, слѣд., при дальнѣйшемъ движеніи x можетъ возникнуть сомнѣніе на счетъ того, какой рядъ значеній изъ дѣлающихся въ этой точкѣ равными считать продолженіемъ предыдущаго ряда значеній, ибо нѣсколько примыкаетъ къ нему по закону непрерывности. Вотъ почему точки, гдѣ нѣсколько значеній дѣлаются равными, называются критическими; вотъ почему также онѣ названы Риманомъ точками развѣтвленія: здѣсь нѣсколько рядовъ значеній y становятся продолженіями предыдущихъ по закону непрерывности.

9. Если x, описавъ сомкнутую кривую, незаключающую внутри себя ни одной изъ критическихъ точекъ, вернется въ $x^{(0)}$, то и каждое изъ значеній y_i вернется въ свое начальное по закону непрерывности, ибо ни одна изъ разностей $y_i - y_j$ на всемъ пути x не обратится въ нуль. Если же внутри сомкнутаго пути будетъ находиться точка развѣтвленія, то по приходѣ въ $x^{(0)}$ вмѣсто $y_i^{(0)}$ можетъ получиться $y_j^{(0)}$, если въ этой критической точкѣ дѣлаются $y_i = y_j$; ибо такой путь чрезъ непрерывное измѣненіе можетъ быть сдѣланъ безконечно-близко идущимъ около разсматриваемой точки развѣтвленія, и тогда возможенъ будетъ переходъ по закону непрерывности одного корня y въ другой изъ дѣлающихся въ ней равными. Такимъ образомъ, послѣ обхода точки развѣтвленія въ точкѣ $x^{(0)}$ вмѣсто ряда значеній (1) § 8 можемъ получить другой:

$$y_{i_1}^{(0)},\ y_{i_2}^{(0)},\ y_{i_3}^{(0)},\ \ldots\ y_{i_n}^{(0)}, \tag{1}$$

который будетъ состоять однако изъ тѣхъ же самыхъ элементовъ, какъ сейчасъ упомянутый, — такъ какъ другихъ значеній въ точкѣ $x^{(0)}$ функція y не можетъ имѣть, — въ другомъ только порядкѣ. Эффектъ обхода точки развѣтвленія выразится такимъ образомъ подстановкою:

$$\begin{pmatrix} y_{i_1}^{(0)} & y_{i_2}^{(0)} & y_{i_3}^{(0)} & \ldots & y_{i_n}^{(0)} \\ y_1^{(0)} & y_2^{(0)} & y_3^{(0)} & \ldots & y_n^{(0)} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Здѣсь, если $y_h^{(0)}$ переходитъ само въ себя, будетъ $i_h = h$; но невозможно, чтобы это было во всѣхъ критическихъ точкахъ для всякаго h; ибо въ такомъ случаѣ каждое y_h, возвращаясь постоянно само въ себя, каковъ бы ни былъ путь точки x, было бы однозначною функціей x, конечною и непрерывною, за исключеніемъ нѣкоторыхъ полюсовъ, слѣд., раціональной функціей x:

$$y_h = \varphi_h(x); \tag{3}$$

но тогда мы имѣли бы

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = f_0(x)\prod_{h=1}^{h=n}(y-\varphi_h(x)), \tag{4}$$

гдѣ всѣ множители были бы раціональные; слѣд., уравненіе $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$ не было бы неприводимымъ вопреки предположенію. И такъ, непремѣнно хотя нѣкоторымъ изъ критическихъ точекъ будутъ принадлежать подстановки вида (4), гдѣ хотя для нѣкоторыхъ значеній h не будетъ $i_h = h$. Вся совокупность такихъ подстановокъ съ составными изъ нихъ, получающимися вслѣдствіе обходовъ заразъ нѣсколькихъ точекъ развѣтвленія, образуетъ *транзитивную группу*, т. е. допускающую переходъ любого изъ значеній y въ точкѣ $x^{(0)}$ въ каждое изъ прочихъ его значеній въ этой точкѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы группа корней:

$$y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \dots\ y_p^{(0)}, \tag{5}$$

гдѣ $p < n$, обладала свойствомъ, что всякій путь переводилъ бы каждый изъ членовъ этого ряда всегда въ одинъ изъ членовъ этого же самаго ряда, то всякая симметрическая функція величинъ (5) была бы однозначною функціей x, и какъ она непрерывна за исключеніемъ нѣкоторыхъ полюсовъ, то она была бы раціональной функціей x; слѣд., можно было бы составить уравненіе степени p относительно y съ раціональными относительно x коэффиціентами, которому удовлетворяли бы эти значенія y; но корни неприводимаго уравненія степени n относительно y не могутъ удовлетворять никакому уравненію степени низшей; слѣд., наше предположеніе на счетъ группы (5) ведетъ къ противорѣчію, и потому должно быть отброшено.

10. Всякая подстановка вида (2) пред. § можетъ быть разложена на рядъ круговыхъ: стоитъ только писать послѣ каждаго элемента тотъ, который его замѣщаетъ въ данной подстановкѣ, начавши съ любого, до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ тому, съ котораго начали; тогда, взявъ любой изъ невошедшихъ въ этотъ циклъ элементовъ, поступаемъ съ нимъ точно также, т. е. пишемъ послѣ него тотъ, который его замѣщаетъ въ разсматриваемой подстановкѣ, и такъ далѣе, до тѣхъ поръ, пока не вернемся къ нему же, продолжая это до тѣхъ поръ, пока не обойдемъ всѣ элементы данной подстановки. Если элементъ замѣщается самимъ собою, то онъ одинъ составитъ цѣлый циклъ. Каждый циклъ пишется въ отдѣльныхъ скобкахъ. Такъ, напр., подстановка:

$$\begin{pmatrix} y_2 & y_3 & y_4 & y_1 & y_8 & y_9 & y_6 & y_5 & y_7 & y_{10} \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} \end{pmatrix} = (y_1\, y_2\, y_3\, y_4)\ (y_5\, y_8)\ (y_6\, y_9\, y_7)\ (y_{10}) \tag{1}$$

состоитъ изъ цикловъ перваго, втораго, третьяго и четвертаго порядка — по числу буквъ цикла. Циклъ изъ двухъ буквъ, (какъ $(y_5\, y_8)$), назы-

вается *переложеніемъ* (transposition). Всякій другой циклъ равносиленъ послѣдовательности переложеній въ числѣ, на единицу меньшемъ порядка цикла. Въ виду этого можемъ сказать, что *для каждой точки развѣтвленія имѣется свое распредѣленіе корней, дѣлающихся въ ней равными, на группы переходящихъ, при обходѣ этой точки по безконечно-малому кругу, одинъ въ другой въ круговомъ порядкѣ.* Зная точки развѣтвленія и круговыя группы для каждой, можно всегда указать, съ какимъ значеніемъ y вернется въ исходную точку $x^{(0)}$, когда вышли изъ нея съ $y_0^{(0)}$, какъ скоро будетъ дана форма пути, описаннаго точкою x. Въ самомъ дѣлѣ, всякій путь отъ точки $x^{(0)}$ до точки X чрезъ непрерывную постепенную деформацію, произведенную такимъ образомъ, чтобы при этомъ путь не переходилъ ни черезъ которую изъ критическихъ точекъ, можетъ быть приведенъ къ нѣкоторой опредѣленной послѣдовательности обходовъ нѣкоторыхъ изъ критическихъ точекъ по путямъ опредѣленнаго вида, именно: изъ $x^{(0)}$ по прямой къ точкѣ очень близкой къ критической, вокругъ этой критической точки по безконечно-малому кругу, описанному изъ нея какъ центра, и назадъ по прежней прямой въ точку $x^{(0)}$; напослѣдокъ же изъ $x^{(0)}$ въ конечную точку пути, X, по прямой линіи, или кривой, но неокружающей уже критическихъ точекъ; для сомкнутаго пути $X = x^{(0)}$, и этой послѣдней части пути не существуетъ. Только что описанные обходы разсматривалъ уже Коши, особенно же Клебшъ и Горданъ, которые ихъ называли *Schleife*, и Бріо и Букэ, которые ихъ называли *lacet*. Каждый такой путь или не оказываетъ вліянія на значеніе y, — это, если разсматриваемое значеніе само одно составляетъ циклъ, или же переводитъ въ опредѣленное другое, входящее съ нимъ въ одинъ циклъ въ принадлежащей разсматриваемой точкѣ подстановкѣ. Мы будемъ называть эти послѣдніе обходы *элементарными*.

11. *Риманъ* придумалъ особаго рода многолиственную поверхность, на которой алгебраическая функція y, опредѣляемая даннымъ уравненіемъ, (1) § 5, была бы однозначна. Возьмемъ n совпадающихъ плоскостей, какъ бы n положенныхъ одинъ на другой листовъ бумаги, и примемъ въ каждомъ за оси, какъ вещественной — такъ и мнимой части x прямыя, лежащія одна надъ другой; отмѣтимъ въ каждомъ листѣ точку $x^{(0)}$ и пріурочимъ къ каждому листу въ этой точкѣ одно изъ значеній $y_i^{(0)}$, напр. въ первомъ $y_1^{(0)}$, во второмъ $y_2^{(0)}$, ... наконецъ, въ n-омъ $y_n^{(0)}$; затѣмъ отмѣтимъ всѣ точки развѣтвленія и скрѣпимъ между собою въ нихъ мысленно листы, отвѣчающіе тѣмъ изъ значеній y, которыя дѣлаются между собою равными и составляютъ одинъ циклъ переходящихъ одинъ въ другой въ круговомъ порядкѣ; послѣ того проведемъ общій прорѣзъ чрезъ всѣ n листовъ отъ каждой точки развѣтвленія по линіямъ, непересѣкающимъ ни себя, ни другъ друга, идущимъ отъ точки развѣтвленія до безконечности; затѣмъ соединяемъ края разрѣзовъ: правый каждаго листа съ лѣвымъ того изъ другихъ, на которомъ y будетъ имѣть то же самое значеніе. Такъ, для примѣра (1) § 10 соединяемъ правый край перваго листа съ лѣвымъ второго, правый второго съ лѣвымъ третьяго, правый третьяго съ лѣвымъ четвертого, и правый четвертаго съ лѣвымъ перваго; далѣе правый пятаго съ лѣвымъ восьмого, и наоборотъ; потомъ правый шестого съ лѣвымъ девятаго; правый девятаго съ лѣвымъ седьмого, и правый седьмого съ лѣвымъ шестого; наконецъ, правый десятаго съ лѣвымъ его же. Это потому, что если мы съ лѣвой стороны перваго перейдемъ по пути, идущему отъ разсматриваемой точки вдоль разрѣза по лѣвой его сторонѣ до разсматриваемой точки развѣтвленія, вокругъ нея по безконечно-малому кругу въ положительномъ направленіи (обратномъ движенію часовой стрѣлки), затѣмъ оттуда по правой сторонѣ въ точку противоположную начальной, то придемъ туда съ y_2, если вышли съ y_1; съ y_3, если вышли съ y_2; съ y_4, если вышли съ y_3; съ y_1, если вышли съ y_4; слѣд., направо въ первомъ листѣ y будетъ имѣть то же значеніе, какъ во второмъ налѣво; направо во второмъ, какъ налѣво въ третьемъ, и т. д. Съ одного края разрѣза на другой въ томъ же листѣ чрезъ линію разрѣза нельзя попасть, ибо, переходя чрезъ линію разрѣза, спускаемся, или поднимаемся въ другой листъ. Эти линіи называются поэтому *переходными линіями*, тогда какъ исходныя точки, точки развѣтвленія функціи y, Риманъ называлъ *винтовыми точками* (Windungspunct) своей поверхности, ибо при обходѣ ихъ по кругу x спускается или поднимается изъ одного листа въ другой, какъ бы по винтовой лѣстницѣ. — На такой поверхности въ каждой точкѣ ея y будетъ имѣть одно опредѣленное значеніе: проведя изъ точки $x^{(0)}$ какую нибудь линію по этой поверхности въ точку X, мы придемъ въ точку X съ совершенно-опредѣленнымъ значеніемъ y, именно тѣмъ самымъ, которое пріурочено къ этой точкѣ въ томъ листѣ Римановой поверхности, въ которомъ лежитъ она. Этотъ путь можно чрезъ постепенное деформированіе привести къ опредѣленной послѣдовательности элементарныхъ обходовъ — lacets, идущихъ отъ $x^{(0)}$, взятаго въ одномъ листѣ, къ винтовой точкѣ, лежащей въ этомъ же листѣ, вокругъ нея переходя въ другой листъ, отъ нея назадъ по пути, лежащему въ этомъ второмъ листѣ подъ первымъ, въ точку $x^{(0)}$ этого второго листа; оттуда къ слѣдующей винтовой точкѣ въ томъ же листѣ, вокругъ нея въ новый листъ, оттуда въ этомъ новомъ листѣ по пути, лежащему подъ предыдущимъ, въ $x^{(0)}$ этого новаго листа и такъ далѣе, наконецъ, въ послѣднемъ листѣ изъ x_0 въ X того же листа. Такимъ образомъ, дѣйствительно на построенной нами *Римановой поверхности* наша функція y будетъ однозначная функція независимой перемѣнной x.

12. Вообразимъ теперь сферу, состоящую изъ n листовъ, діаметра равнаго единицѣ, каждый листъ которой касается въ точкѣ $x=0$ (точка O) къ соотвѣтственному листу Римановой плоской поверхности пред. § (которую предположимъ горизонтальною), такъ что внутренній листъ сферы къ нижнему, второй ко второму, ... верхній къ верхнему. Проведя діаметръ OO' чрезъ точку касанія, перенесемъ по прямымъ, соединяющимъ съ точкою O' сферы, діаметрально противоположной точкѣ касанія, точки Римановой поверхности на сферу въ соотвѣтственный листъ ея. Винтовыя точки перейдутъ въ опредѣленныя точки сферы; отъ нихъ по линіямъ сферическимъ, въ которыя перейдутъ переходныя линіи Римановой поверхности, сдѣлаемъ прорѣзы чрезъ всѣ листы сферы, а затѣмъ соединимъ правый край каждаго разрѣза съ лѣвымъ другого, какъ то было сдѣлано на плоскости; мы получимъ тогда *Риманову многолиственную сферу*, построенную впервые Нейманомъ, съ винтовыми точками и переходными линіями. На сферѣ переходныя линіи сойдутся въ точкѣ O', которая не смотря на то можетъ оказаться обыкновенною, — если въ каждомъ изъ листовъ сферы точка x послѣ обхода точки O' возвращается въ тотъ же листъ, и винтовою, — если въ нѣкоторыхъ листахъ взятая послѣ обхода она окажется въ другомъ листѣ. Въ обоихъ случаяхъ точка O' Римановой сферы можетъ оказаться и полюсомъ функціи y, если для $x=\infty$ нѣкоторыя изъ значеній y обращаются въ безконечность. — Если вообразимъ въ точкѣ O' сферы касательную плоскость, состоящую тоже изъ n листовъ, и касающихся верхній къ внутреннему листу сферы, второй ко второму и т. д. по порядку, и на эту многолиственную плоскость перенесемъ точки со сферы по прямымъ, соединяющимъ ихъ съ точкою O, то послѣ перенесенія и разрѣзовъ и пересоединеній листовъ, какъ то было выше дѣлаемо, получимъ *антиподную Риманову плоскую поверхность*, какъ называетъ ее Нейманъ, на которой легко изслѣдовать ходъ измѣненія функціи для безконечно-большихъ значеній x. Этому переходу съ горизонтальной Римановой поверхности на поверхность антиподовъ отвѣчаетъ преобразованіе уравненія съ помощью подстановки $x=\frac{1}{x'}$. На поверхности антиподовъ переходныя линіи образуютъ звѣзду, лучи которой изъ точки O' идутъ къ винтовымъ точкамъ.

13. Если точка O' окажется винтовою, то можно построеніе Римановой поверхности сдѣлать и такимъ образомъ. Выберемъ какую либо изъ обыкновенныхъ точекъ, пусть a, и соединимъ ее съ каждою изъ точекъ развѣтвленія функціи, лежащихъ въ конечномъ, и проведемъ также линію въ безконечность; затѣмъ сдѣлаемъ по этимъ линіямъ прорѣзы чрезъ всѣ n листовъ и соединимъ листы вдоль этихъ разрѣзовъ, какъ то выше было сдѣлано: мы получимъ тогда плоскую Риманову поверхность, которую такимъ же точно образомъ, какъ въ пред. §, преобразуемъ въ Риманову сферу. Эта поверхность отъ построенной въ предыдущемъ § будетъ отличаться тѣмъ, что точка схода переходныхъ линій будетъ обыкновенная точка, и всѣ винтовыя точки, безконечно-удаленныя, какъ и лежащія въ конечномъ, будутъ какъ бы равно-правныя (gleichberechtigt), какъ то было раньше лишь въ томъ частномъ случаѣ, когда точка O' оказывалась обыкновенною. Однако, въ такомъ построеніи нѣтъ настоятельной необходимости, потому что, какъ нетрудно видѣть, на Римановой сферѣ § 12 обходъ точки O' эквивалентенъ обходу всѣхъ точекъ, лежащихъ въ конечномъ.

14. Римановы поверхности суть поверхности *многосвязныя*. Если всякая сомкнутая линія, проведенная по сомкнутой поверхности (каковы Римановы сферы), раздѣляетъ эту поверхность на части такъ, что съ одной стороны этой линіи нельзя попасть на другую иначе, какъ пересѣкая эту линію, то такая поверхность называется *односвязною;* такова обыкновенная однолиственная сфера, какъ легко видѣть. Но бываютъ и такія поверхности, что иная сомкнутая кривая, проведенная по ней, не устанавливаетъ полнаго разобщенія прилегающихъ частей поверхности, такъ что все-таки можно попасть по другую сторону этой линіи, не пересѣкая ея; такова кольцевая поверхность: если проведемъ меридіанъ ея, то съ одной стороны его можно попасть на другую, напр. по параллели; если провести параллель, то можно съ одной стороны ея перейти на другую, напр. по меридіану; слѣд., сомкнутыя кривыя, въ первомъ случаѣ меридіанъ, во второмъ случаѣ параллель, не устанавливаютъ полнаго разобщенія прилегающихъ къ нимъ частей поверхности; откуда и слѣдуетъ многосвязность поверхности.

Сомкнутыя поверхности могутъ быть раздѣлены на *ранги* по наибольшему числу сомкнутыхъ кривыхъ, не устанавливающихъ полнаго разобщенія прилегающихъ частей, которыя можно провести заразъ по поверхности, такимъ образомъ: если нельзя провести ни одной сомкнутой кривой, не устанавливающей полнаго разобщенія прилегающихъ частей, то такая поверхность будетъ *нулевого ранга;* если можно провести не болѣе одной такой кривой заразъ, то поверхность будетъ *перваго ранга;* если не болѣе двухъ такихъ кривыхъ заразъ, то *второго ранга;* вообще, если можно провести заразъ не болѣе p сомкнутыхъ кривыхъ, не устанавливающихъ полнаго разобщенія прилегающихъ частей поверхности, то поверхность будетъ *ранга p.* Такъ, обыкновенная однолиственная сфера будетъ поверхность нулевого ранга, ибо нельзя на сферѣ провести ни одной сомкнутой кривой, неустанавливающей полнаго разобщенія прилегающихъ частей. Кольцевая поверхность будетъ поверхность перваго ранга, ибо заразъ можно провести либо одинъ меридіанъ, либо одну параллель, не препятствующихъ сообщенію прилегающихъ частей; два меридіана уже будутъ препятствовать переходу съ одной стороны на другую каждаго; точно также и двѣ параллели; меридіанъ и параллель, проведенные заразъ, тоже не установятъ полнаго разобщенія прилегающихъ частей, но только одна изъ нихъ можетъ считаться сомкнутою кривою, именно первая по порядку проведенія; другая же, начинаясь по одну сторону первой линіи, и кончаясь по другую, будетъ уже поперечною линіей. Если по этимъ линіямъ сдѣлать сѣченіе, то первое будетъ *сомкнутымъ сѣченіемъ* (Rückerschnitt), второе *поперечнымъ* (Querschnitt), какъ соединяющее двѣ точки получившихся послѣ перваго краевъ поверхности. Поверхность обыкновенной вѣсовой гири съ одною ручкою будетъ другимъ примѣромъ поверхности перваго ранга; поверхность такой же гири съ двумя ручками будетъ примѣромъ поверхности второго ранга; и вообще поверхность гири съ p ручками будетъ примѣромъ поверхности ранга p, ибо можно вокругъ каждой изъ p ручекъ провести сомкнутую кривую, не устанавливающую полнаго разобщенія прилегающихъ частей, слѣд., всего заразъ p такихъ линій. Каждое сомкнутое сѣченіе, разъ оно проведено по поверхности, понижаетъ рангъ поверхности на единицу, если оно не устанавливаетъ полнаго разобщенія прилегающихъ частей, увеличивая число контуровъ на двѣ единицы; поперечное сѣченіе по линіи, соединяющей противоположныя точки сомкнутаго сѣченія, не вліяетъ на рангъ, но соединяетъ въ одинъ оба прежніе контура.

15. Докажемъ теперь выставленное въ началѣ пред. § положеніе, что Римановы сферы суть многосвязныя поверхности; для этого нужно только показать, что всегда можно провести по этой поверхности сомкнутыя линіи, не устанавливающія полнаго разобщенія прилегающихъ частей. Пусть x, исходя изъ какой нибудь обыкновенной точки, напр. $x^{(0)}$ въ верхнемъ листѣ Римановой сферы, движется къ какой либо винтовой точкѣ a, въ этомъ листѣ находящейся, пусть порядка k, и послѣ $k-1$ оборотовъ вокругъ нея спустится въ k-ый сверху листъ; въ этомъ листѣ, вмѣсто того, чтобы подняться въ первый, пойдетъ къ другой винтовой точкѣ, напр. b, порядка l, послѣ $l-1$ оборотовъ вокругъ нея спустится въ $k+l$-ый листъ и т. д.; наконецъ, придя въ такой листъ, изъ котораго есть переходная линія въ первый листъ, чрезъ эту линію въ первый листъ и тамъ въ точку $x^{(0)}$: линія такимъ образомъ получится сомкнутая, которая не устанавливаетъ полнаго разобщенія прилегающихъ частей, ибо мы оставили нѣсколько мѣстъ выхода въ первый листъ и другіе: напр., около первой точки a можно изъ k-ого листа подняться въ первый и достигнуть другой стороны проведенной сомкнутой кривой. И такъ, дѣйствительно, Риманова поверхность есть многосвязная. Въ каждомъ частномъ случаѣ, когда дана такая поверхность, можно провести сомкнутыя кривыя, неустанавливающія полнаго разобщенія прилегающихъ частей, и по числу ихъ опредѣлить рангъ поверхности. Такъ, это легко сдѣлать для гиперэллиптическихъ Римановыхъ поверхностей, относящихся къ ирраціональности, опредѣляемой уравненіемъ:

(1) $$y^2 - R(x) = 0,$$

гдѣ $R(x)$ полиномъ степени $2p-1$ (см. наше сочиненіе: „Обращеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ". Харьковъ. 1885), и въ нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ (см. Neumann. Theorie der Abelschen Integrale, Leipzig, 1884). Въ общемъ случаѣ получить формулу, показывающую связь ранга поверхности съ числомъ листовъ и числомъ и порядкомъ винтовыхъ точекъ, можно лишь на основаніи нѣкоторыхъ новыхъ соображеній, что мы сдѣлаемъ ниже по Нейману.

16. Нейманъ называетъ односвязную поверхность съ однимъ контуромъ, стало быть такую, что изъ каждой ея точки можно перейти въ каждую другую, *элементарною площадью*, или *поверхностью:* таковы площади круга, эллипса, прямоугольника, трапеціи и т. д. Риманъ опредѣляетъ *порядокъ связности* многосвязной поверхности, сомкнутой, или съ контурами, все равно, числомъ поперечныхъ сѣченій, потребныхъ для превращенія ея въ элементарную, такимъ образомъ: если не требуется проведенія поперечныхъ сѣченій для обращенія данной поверхности въ элементарную, слѣд., она уже есть таковая, то порядокъ связности будетъ единица, если нужно одно сѣченіе (примѣръ представляетъ плоское кольцо), то поверхность будетъ двухсвязная, если нужно сдѣлать два сѣченія, то трехсвязная; вообще, если нужно сдѣлать n сѣченій, то поверхность будетъ $n+1$-связная. Такимъ образомъ, по Риману, порядокъ связности поверхности на единицу болѣе числа поперечныхъ сѣченій, потребныхъ для превращенія ея въ элементарную. Для сомкнутой поверхности, какова Риманова сфера, порядокъ связности на единицу болѣе удвоеннаго ранга, слѣд., выражается формулою

(1) $$2p+1,$$

если p есть рангъ поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

(2) $$A_1, A_2, A_3, \ldots . A_p$$

будутъ всѣ тѣ сомкнутыя кривыя, не устанавливающія полнаго разобщенія прилегающихъ частей разсматриваемой поверхности, которыя можно по ней провести заразъ; по самому опредѣленію такихъ линій возможенъ переходъ съ одной стороны на другую для каждой изъ этихъ линій по линіямъ, не пересѣкающимъ ни самихъ себя, ни себѣ подобныхъ, ни линій (2); такія линіи мы означимъ чрезъ

(3) $$B_1, B_2, B_3 \ldots . B_p,$$

такъ что B_i будетъ та изъ линій, по которой совершается переходъ съ одной стороны линіи A_i въ противоположную точку на другой ея сторонѣ. Если сдѣлать сѣченія поверхности по линіямъ (2), то мы данную намъ сомкнутую поверхность превратимъ въ поверхность съ $2p$ контурами; сдѣлавъ затѣмъ сѣченія по линіямъ (3), мы соединимъ въ одинъ оба края каждаго сомкнутаго сѣченія, такъ что получимъ поверхность съ вдвое меньшимъ числомъ контуровъ, т. е. съ p контурами. Если теперь провести отъ каждой линіи B_i линію C_i къ линіи A_{i+1}, такъ чтобы эта линія не пересѣкала ни себя, ни другихъ линій C_j, ни линій A и B, то всего будемъ имѣть $p-1$ такихъ линій:

$$C_1, C_2, C_3, \ldots . C_{p-1}, \tag{4}$$

и если по нимъ сдѣлать прорѣзы, то всѣ контуры соединятся въ одинъ, такъ что съ помощію p поперечныхъ сѣченій (3) и $p-1$ поперечныхъ сѣченій (4), всего при помощи $2p-1$ поперечныхъ сѣченій сверхъ p сомкнутыхъ наша поверхность превращается въ поверхность съ однимъ контуромъ, причемъ рангъ ея будетъ уже нуль, такъ какъ сѣченіе по каждой линіи A_i понижаетъ его на единицу, сѣченія же по линіямъ B_i не вліяютъ на рангъ, равно и по C_i. И такъ, при помощи сейчасъ указанныхъ сѣченій мы получили поверхность нулевого ранга съ однимъ контуромъ, слѣд., элементарную. Но проведенныя сѣченія можно и такъ разсматривать: первое по A_1 есть сомкнутое; слѣдующее B_1 будетъ поперечное; совокупность $C_1 + A_2$ можно разсматривать какъ одно поперечное, ибо оно начинается нъ точкѣ контура B_1 и кончается въ своей раньше пройденной точкѣ; B_2 и $C_2 + A_3$, и вообще всѣ B_i и $C_i + A_{i+1}$ для $i = 1, 2, 3, \ldots . p-1$ будутъ все поперечныя сѣченія, такъ что всѣхъ поперечныхъ сѣченій будетъ $2p-1$ и одно сомкнутое. Но и это послѣднее можно причислить къ поперечнымъ, если по примѣру Неймана всякую сомкнутую поверхность разсматривать какъ поверхность съ безконечно малымъ отверстіемъ и, слѣд., безконечно малымъ контуромъ. Такимъ образомъ и оказывается, что поверхность ранга p превращается въ элементарную при помощи $2p$ поперечныхъ сѣченій и, слѣд., есть $2p+1$-связная.—Риманъ обозначалъ свою поверхность въ первоначальномъ видѣ чрезъ T, послѣ же превращенія указанными сѣченіями въ элементарную, чрезъ T'.

17. Нетрудно провѣрить, что дѣйствительно эти сѣченія превращаютъ данную поверхность въ элементарную, т. е. односвязную съ однимъ цѣльнымъ контуромъ. Прежде всего легко провѣряется послѣднее обстоятельство. Мы условимся называть положительнымъ направленіемъ сѣченія A_i то, котораго нужно держаться, чтобы имѣть слѣва точки развѣтвленія, которыя эта линія окружаетъ; то же будемъ разумѣть и подъ положительнымъ направленіемъ линіи B_i; что касается до линіи C_i, то подъ положительнымъ направленіемъ такой линіи будемъ разумѣть направленіе ея отъ B_i къ A_{i+1}. Взявъ за исходную точку ту, которая лежитъ въ пересѣченіи путей A_1 и B_1 съ правой стороны положительнаго направленія обоихъ, мы пойдемъ по A_1 въ положительномъ направленіи, слѣд., по правой сторонѣ, и придемъ въ точку на противоположной сторонѣ B_1, т. е. на лѣвой; отсюда пойдемъ по B_1, въ отрицательномъ направленіи по лѣвой сторонѣ, и придемъ въ точку противоположную, лежащую на лѣвой сторонѣ A_1; отсюда, идя по лѣвой сторонѣ A_1 въ отрицательномъ направленіи, перейдемъ въ точку противоположной исходной на правой сторонѣ B_1; отсюда, идя по правой сторонѣ B_1 въ положительномъ направленіи, придемъ къ началу пути C_1, лежащему на правой сторонѣ B_1. По правой сторонѣ C_1, идя въ положительномъ направленіи, приходимъ въ точку, лежащую на правой сторонѣ A_2; далѣе, идя по правой сторонѣ линіи A_2 до точки встрѣчи ея съ линіей B_2 на правой сторонѣ A_2 и лѣвой B_2, продолжаемъ путь по лѣвой сторонѣ B_2 въ отрицательномъ направленіи до встрѣчи съ A_2 на лѣвой его сторонѣ, и по этой сторонѣ его, идя въ отрицательномъ направленіи, приходимъ въ точку встрѣчи съ B_2 на правой сторонѣ послѣдней; отсюда идемъ по правой сторонѣ B_2 до начала C_2, лежащаго на правой сторонѣ; отсюда идемъ по правой сторонѣ C_2 до A_3, и т. д.; для каждой пары путей $C_i + A_{i+1}$ и B_{i+1} это будетъ повторяться; наконецъ придемъ къ началу C_{p-1} на правой сторонѣ B_{p-1}. Идя отсюда по правой сторонѣ C_{p-1} до начала послѣдняго A_p, потомъ по правой сторонѣ этого послѣдняго въ положительномъ направленіи, приходимъ въ точку встрѣчи его съ B_p на лѣвой сторонѣ послѣдняго; отсюда идемъ по лѣвой сторонѣ B_p въ отрицательномъ направленіи и приходимъ въ точку встрѣчи его съ A_p на лѣвой сторонѣ послѣдняго; идя по ней въ отрицательномъ направленіи, приходимъ въ точку встрѣчи съ B_p на правой сторонѣ послѣдняго, по которой продолжаемъ путь до встрѣчи съ A_p на правой сторонѣ обоихъ. Отсюда идемъ по правой сторонѣ A_p до точки его встрѣчи съ C_{p-1} на лѣвой сторонѣ послѣдняго; затѣмъ по этой лѣвой сторонѣ C_{p-1} въ отрицательномъ направленіи до встрѣчи съ B_{p-1}; отсюда по правой сторонѣ B_{p-1} до точки встрѣчи съ A_{p-1} на правой сторонѣ обоихъ; отсюда начнется повтореніе той же послѣдовательности (съ понижающимися нумерами) движенія по A въ положительномъ направленіи до встрѣчи съ C, по C въ отрицательномъ до встрѣчи съ B, и по B въ положительномъ до встрѣчи съ слѣдующимъ A, т. е. съ меньшимъ на единицу нумеромъ, и т. д., пока не придемъ по правой сторонѣ B_1 въ точку его встрѣчи съ A_1, на правой сторонѣ обоихъ, т. е. въ исходную точку. Такимъ образомъ, дѣйствительно поверхность T'' имѣетъ одинъ цѣльный контуръ. Теперь легко видѣть, что дѣйствительно изъ любой точки этой поверхности

можно перейти въ каждую другую, по произволу выбранную: стоитъ только соединить каждую изъ этихъ точекъ линіями, всецѣло лежащими на этой поверхности T'', съ какими либо точками контура.

18. Разность между числомъ поперечныхъ сѣченій, которыя превращаютъ данную систему поверхностей въ извѣстное число элементарныхъ поверхностей, и этимъ послѣднимъ числомъ есть число постоянное, характеристичное для данной системы поверхностей.

Для доказательства этого предложенія Неймана, предположимъ, что нѣкоторая система S поверхностей при помощи поперечныхъ сѣченій q' въ числѣ ν' превращается въ систему S', состоящую изъ α' элементарныхъ поверхностей, и что та же система S при помощи другихъ поперечныхъ сѣченій q'' въ числѣ ν'' превращается въ систему S'', состоящую изъ α'' элементарныхъ поверхностей. Произведемъ теперь сѣченія системы поверхностей S при помощи совокупности сѣченій q' и q'': означимъ чрезъ A число элементарныхъ поверхностей, на которыя тогда разобьется данная система S. Послѣ проведенія поперечныхъ сѣченій q' система S превращается въ систему S', и эту систему изъ α' элементарныхъ поверхностей мы теперь преобразуемъ при помощи сѣченій q''. Эти послѣднія, пересѣкаясь съ поперечными сѣченіями q' въ δ точкахъ, разобьются на сѣченія Q'', число которыхъ будетъ равно половинѣ числа концевъ ихъ; концы же эти лежатъ частью на краяхъ системы поверхностей S — таковыхъ $2\nu''$, частью въ δ точкахъ пересѣченія съ q' — таковыхъ 2δ; слѣд., всѣхъ концевъ сѣченій Q'' будетъ $2\nu''+2\delta$, а потому всѣхъ сѣченій Q'' будетъ $\nu''+\delta$. Но элементарная поверхность каждымъ поперечнымъ сѣченіемъ раздѣляется на двѣ; слѣд., каждое новое поперечное сѣченіе увеличиваетъ на единицу число элементарныхъ поверхностей, имѣвшихся въ системѣ S', такъ что послѣ проведенія $\nu''+\delta$ поперечныхъ сѣченій Q'' число ихъ увеличится на $\nu''+\delta$ единицъ, и потому будетъ

$$A = \alpha' + \nu'' + \delta. \tag{1}$$

Точно также, начавъ съ проведенія сѣченій q'', потомъ проводя сѣченія q', мы получимъ для того же числа A элементарныхъ поверхностей, на которыя разобьется данная система S поверхностей совокупностью сѣченій q' и q'', такое выраженіе:

$$A = \alpha'' - \nu' + \delta; \tag{2}$$

изъ сравненія (1) и (2), получаемъ:

$$\nu' - \alpha' = \nu'' - \alpha'', \tag{3}$$

что и выражаетъ предложеніе Неймана. Это постоянное для данной системы S поверхностей число, увеличенное на 2 единицы, онъ называетъ *основнымъ числомъ* (Grundzahl) *системы поверхностей* S, и обозначаетъ буквою N, такъ что, слѣд.,

(4) $$N = \nu' - \alpha' + 2.$$

19. Каждое новое поперечное сѣченіе понижаетъ на единицу основное число системы.

Дѣйствительно, пусть по преобразованіи данной системы поверхностей S съ основнымъ числомъ N въ систему S' съ основнымъ числомъ N' при помощи одного поперечнаго сѣченія q требуется произвести еще ν сѣченій $q_1, q_2, \ldots q_\nu$ для того, чтобы превратить данную систему S въ α элементарныхъ поверхностей; тогда основное число данной системы будетъ

(1) $$N = \nu + 1 - \alpha + 2;$$

система же S' превращается въ α элементарныхъ поверхностей при помощи ν сѣченій $q_1, q_2, \ldots q_\nu$; слѣд., ея основное число будетъ

(2) $$N' = \nu - \alpha + 2;$$

сравнивая (1) со (2), находимъ

(3) $$N = N' + 1,$$

что и требовалось доказать.

Каждое сомкнутое сѣченіе не имѣетъ вліянія на основное число системы. Дѣйствительно, пусть нѣкоторое сомкнутое сѣченіе s преобразуетъ данную систему S поверхностей въ систему S'; произведемъ теперь поперечное сѣченіе q по линіи, соединяющей какую либо точку сѣченія s съ точкою ближайшаго изъ краевъ системы S'; оно превратитъ послѣднюю въ новую S''. Пусть N, N', N'' означаютъ основныя числа этихъ системъ. Но совокупность сѣченій сомкнутаго s и поперечнаго q можно разсматривать также какъ одно поперечное сѣченіе r, которое переводитъ данную систему S прямо въ систему S''; потому на основаніи первой теоремы этого § будемъ имѣть:

(4) $$N = N'' + 1,$$

(5) $$N' = N'' + 1,$$

откуда слѣдуетъ

(6) $$N' = N,$$

что и требовалось доказать.

20. Примѣнимъ теорему Неймана къ Римановой поверхности. Въ § 16 мы видѣли, что Риманова сфера ранга p, при помощи сомкнутаго сѣченія A_1 и $2p-1$ поперечныхъ сѣченій B_i, и $C_i + A_{i+1}$, гдѣ $i = 1, 2, 3, \ldots p-1$, превращается въ *одну* элементарную поверхность T'; слѣд., здѣсь $\nu' = 2p - 1$ и $\alpha' = 1$; а потому будетъ

(1) $$\nu' - \alpha' = 2p - 1 - 1 = 2p - 2.$$

Теперь мы возьмемъ другую систему сомкнутыхъ и поперечныхъ сѣченій, и опредѣлимъ для нея ν'' и α''. Предположимъ, что на нашей Римановой сферѣ находится r группъ винтовыхъ точекъ, лежащихъ одна надъ другою; пусть въ h-ой группѣ находится $\lambda_k^{(h)}$ винтовыхъ точекъ k-го порядка (т. е. соединяющихъ k листовъ), гдѣ $k = 1, 2, 3, \ldots g_h$; $\lambda_k^{(h)}$, слѣд., цѣлое положительное число, которое можетъ быть и нулемъ для нѣкоторыхъ изъ этихъ значеній k [1]). Проведемъ теперь два параллельныхъ круга на верхнемъ листѣ Римановой сферы такъ, чтобы въ поясѣ между ними проэктировались изъ центра сферы всѣ r группъ винтовыхъ точекъ, и сдѣлаемъ по этимъ кругамъ прорѣзы чрезъ всѣ листы: это будутъ сомкнутыя сѣченія, числомъ $2n$. Затѣмъ проведемъ въ верхнемъ листѣ отъ одной параллели къ другой r линій такъ, чтобы въ промежутокъ между двумя такими линіями проэктировалась изъ центра только одна группа винтовыхъ точекъ, лежащихъ одна надъ другою, и сдѣлаемъ по этимъ линіямъ прорѣзы чрезъ всѣ n листовъ: это будутъ все поперечныя сѣченія, числомъ $r.n = \nu''$. Сосчитаемъ теперь число α'' элементарныхъ поверхностей, на которыя разбивается Риманова сфера этими сѣченіями. Во первыхъ, мы имѣемъ $2n$ сегментовъ, отрѣзанныхъ сомкнутыми сѣченіями; далѣе, въ каждой изъ r частей пояса между этими сѣченіями число элементарныхъ поверхностей такъ опредѣлится. Въ той части, гдѣ находится h-ая группа винтовыхъ точекъ, каждая k-кратная винтовая точка, соединяя k листовъ вмѣстѣ, отнимаетъ $k-1$ листовъ отъ числа n всѣхъ листовъ; но каждая такая часть поверхности съ k-кратною винтовою точкою будетъ поверхность съ однимъ контуромъ, какъ легко видѣть, изъ каждой точки которой возможенъ переходъ въ каждую изъ прочихъ, слѣд., есть элементарная. Слѣд., число всѣхъ элементарныхъ поверхностей въ этой части будетъ:

$$n - \sum_{k=2}^{k=g_h} \lambda_k^{(h)}(k-1); \tag{2}$$

а потому число всѣхъ элементарныхъ поверхностей:

$$\alpha'' = \sum_{h=1}^{h=r} \left(n - \sum_{k=2}^{k=g_h} \lambda_k^{(h)}(k-1) \right) + 2n, \tag{3}$$

и, слѣд., будетъ

$$\nu'' - \alpha'' = rn - \sum_{h=1}^{h=r} \left(n - \sum_{k=2}^{k=g_h} \lambda_k^{(h)}(k-1) \right) - 2n, \tag{4}$$

[1]) При $k = 1$ будемъ имѣть обыкновенную точку.

или, упрощая:

$$(5) \qquad \nu'' - \alpha'' = \sum_{h=1}^{h=r} \sum_{k=2}^{k=g_h} \lambda_k^{(h)}(k-1) - 2n.$$

Внося это, а также и изъ (1) въ равенство (3) § 18, мы будемъ имѣть

$$(6) \qquad 2p - 2 = w - 2n,$$

гдѣ

$$(7) \qquad w = \sum_{h=1}^{h=r} \sum_{k=2}^{k=g_h} \lambda_k^{(h)}(k-1)$$

есть число всѣхъ *простыхъ* винтовыхъ точекъ, эквивалентное всей совокупности винтовыхъ точекъ нашей Римановой сферы. Простою винтовою точкою Риманъ называлъ ту, при обходѣ которой только два корня переходятъ одинъ въ другой, т. е. которой подстановка есть переложеніе. Такъ какъ круговая подстановка k-ого порядка равносильна послѣдовательности $k-1$ переложеній по два, то и говорятъ: винтовая точка k-ого порядка эквивалентна $k-1$ простымъ винтовымъ точкамъ. Изъ (6) выводимъ формулу Римана:

$$(8) \qquad 2p = w - 2n + 2,$$

выражающую число всѣхъ поперечныхъ сѣченій, необходимое для превращенія Римановой сферы въ элементарную поверхность чрезъ w и n. Отсюда рангъ p такъ выразится чрезъ тѣ же величины:

$$(9) \qquad p = \frac{1}{2}w - n + 1.$$

(Изъ этой формулы видно, что w есть четное число, такъ какъ p и n числа цѣлыя). Такимъ образомъ, зная число простыхъ винтовыхъ точекъ, эквивалентное всей совокупности наличныхъ винтовыхъ точекъ данной Римановой поверхности, мы по этой формулѣ сейчасъ опредѣлимъ рангъ ея. Это число Риманъ обозначалъ буквой p. Клебшъ, разсматривая основное уравненіе

$$(10) \qquad F(x, y) = 0$$

какъ уравненіе основной кривой, называлъ это число *родомъ* этой кривой (Geschlecht) и обозначалъ тою же буквой. Кэли называетъ это число *дефектомъ* кривой, потому что оно показываетъ, насколько число двойныхъ точекъ и точекъ возврата кривой (10) меньше максимальнаго числа ихъ, возможнаго вообще для кривой этого порядка. Вейерштрассъ называетъ это число *рангомъ* алгебраическаго образа, представляемаго уравненіемъ (10), и обозначаетъ буквою ρ. Такъ какъ каждому алгебраическому образу, представляемому уравненіемъ (10), отвѣчаетъ опредѣленная Риманова сфера, то естественнымъ представляется перенести этотъ терминъ и на эту поверхность. Самъ Вейерштрассъ опредѣляетъ рангъ такой теоремой:

„Для каждаго алгебраическаго образа существуетъ такое цѣлое положительное число ρ, что всегда можно составить такую раціональную функцію (x, y) и (x', y') (причемъ $F(x', y') = 0$), которая обращалась бы въ ∞^1, т. е. въ безконечность перваго порядка въ мѣстѣ (x', y') и еще въ ρ произвольныхъ мѣстахъ:

$$(a_1 b_1), \ (a_2 b_2), \ \ldots . \ (a_\rho b_\rho) \qquad (11)$$

алгебраическаго образа (слѣд., $F(a_i, b_i) = 0$), тогда какъ нѣтъ такой раціональной функціи, которая обращалась бы въ ∞^1 только въ этихъ ρ мѣстахъ".

Вейерштрассовское доказательство, данное имъ на его лекціяхъ, здѣсь однако мы не будемъ излагать; въ слѣдующей главѣ мы увидимъ, что это число, увеличенное на единицу, $\rho+1$, или, по Риману и Клебшу, $p+1$, есть наименьшее число точекъ, гдѣ раціональная функція отъ x и y, связываемыхъ уравненіемъ (10), можетъ обращаться въ ∞^1, которыя могутъ быть заданы произвольно.

21. Для нахожденія числа w необходимо, какъ то слѣдуетъ изъ формулы (7) пред. §, опредѣлить число и порядокъ всѣхъ круговыхъ группъ корней, дѣлающихся равными между собою въ каждой изъ точекъ развѣтвленія разсматриваемой функціи, тогда какъ самыхъ точекъ развѣтвленія, т. е. соотвѣтственныхъ значеній x, y, для точекъ, гдѣ нѣкоторыя изъ значеній y дѣлаются равными, знать ненужно. Способъ для опредѣленія числа и порядка всѣхъ круговыхъ группъ корней, дѣлающихся равными между собою въ какой либо точкѣ развѣтвленія, для самаго общаго случая уравненія (1) § 5 данъ былъ *Бріо* и *Букэ*, во 2-мъ изданіи ихъ теоріи эллиптическихъ функцій, но въ такомъ видѣ, который предполагаетъ извѣстными значенія x и y въ точкѣ развѣтвленія. Эти послѣднія однако, вообще говоря, могутъ быть найдены изъ опредѣляющихъ ихъ уравненій только приблизительно; а этого для многихъ цѣлей недостаточно; кромѣ того, цѣлое число p, какъ раціональное, должно быть и находимо при помощи раціональныхъ дѣйствій. Первый способъ опредѣленія числа p при помощи раціональныхъ дѣйствій принадлежитъ *Нётеру;* второй принадлежитъ *Раффи;* но оба эти способа требуютъ преобразованія даннаго уравненія въ другія, а потому не прямые, и оба теоретически далеко не просты; поэтому мы искали болѣе простого и прямого способа, и намъ удалось показать въ статьѣ нашей подъ заглавіемъ: Esquise d'une méthode pour obtenir le genre et les courbes adjointes d'une courbe algébrique donnée au moyen des operations rationnelles" (Annales de l'Ecole normale, Май 1893 г.), что для этой цѣли достаточно одного алгориѳма общаго наибольшаго дѣлителя. Тамъ мы это показали, примѣняясь къ изложенію Бріо въ его „Theorie des fonctions abeliènnes"; здѣсь мы изложимъ этотъ вопросъ примѣнительно къ принятой нами въ § (5) формѣ (1) основного уравненія, опредѣляющаго алгебраическій образъ, пользуясь при этомъ первой главой названнаго сейчасъ сочиненія. Такъ какъ чрезъ подстановку $\frac{1}{x}$ вмѣсто x и $\frac{1}{y}$ вмѣсто y изслѣдованіе функціи въ безконечно-удаленныхъ мѣстахъ алгебраическаго образа можетъ быть сведено на изслѣдованіе функціи въ конечныхъ мѣстахъ, то мы можемъ въ дальнѣйшемъ ограничиться разсмотрѣніемъ, какъ опредѣляется число и порядокъ круговыхъ группъ значеній y — корней уравненія (1) § 5, дѣлающихся равными въ точкахъ, лежащихъ въ конечномъ.

22. Пусть a есть критическая точка, въ которой нѣкоторыя изъ значеній y дѣлаются $= b$; слѣд., имѣемъ заразъ:

$$F(\overset{m}{a}, \overset{n}{b}) = 0, \tag{1}$$

$$\Delta_1(a) = 0. \tag{2}$$

Положимъ въ основномъ уравненіи (1) § 5 $x = a + \xi$, $y = b + \eta$; будемъ имѣть, разлагая $F(a + \xi,\ b + \eta)$ по строкѣ Тэйлора, уравненіе вида:

$$\sum A_{\alpha\beta}\,\eta^\alpha \xi^\beta = 0, \tag{3}$$

гдѣ $A_{\alpha\beta}$ будутъ раздѣленныя на извѣстныя цѣлыя числа значенія частныхъ производныхъ отъ $F(x,y)$ по x и y всѣхъ порядковъ по x до m, по y до n включительно, при $x = a$, $y = b$. Они будутъ неизвѣстны, пока будутъ неизвѣстны a и b; но для опредѣленія числа и порядка круговыхъ группъ, въ которыя распредѣляются значенія y, дѣлающіяся $= b$ при $x = a$, достаточно знать лишь, которыя изъ нихъ обращаются въ нуль для $x = a$, $y = b$; ибо въ такомъ случаѣ будутъ извѣстны показатели α и β всѣхъ остающихся въ уравненіи (3) членовъ, отъ которыхъ показателей, какъ увидимъ ниже, и зависятъ число и порядокъ круговыхъ группъ, о которыхъ идетъ рѣчь.

Въ слѣдующемъ § мы покажемъ, что всегда можно представить нѣсколькими парами уравненій вида:

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(x,y) = 0;\\ &\psi(x) = 0; \end{aligned}\right. \tag{4}$$

тѣ значенія x и y, которыя, удовлетворяя уравненіямъ (1) и (9) § 5, въ то же время обращаютъ въ нуль избранныя изъ частныхъ производныхъ $F(x,y)$ по x и y; такъ что, разумѣя подъ a и b въ (3) рѣшенія паръ уравненій (4), мы будемъ знать, какія изъ $A_{\alpha\beta}$ въ этомъ уравненіи (3) равны нулю, не зная самихъ a и b, и это при помощи только однихъ раціональныхъ дѣйствій, именно алгориѳма общаго наибольшаго дѣлителя.

23. Пусть дана такая система уравненій съ двумя неизвѣстными x и y:

$$f_1(x,y) = 0,\ f_2(x,y) = 0,\ \ldots\ f_p(x,y) = 0; \tag{1}$$

требуется найти ихъ общія рѣшенія, если таковыя существуютъ, или констатировать въ противномъ случаѣ несовмѣстность этихъ уравненій.

Взявъ первыя два изъ уравненій (1), станемъ искать ихъ общія рѣшенія по способу общаго наибольшаго дѣлителя; тогда на основаніи теоремы Лабати (Labatie; см. Serret, Cours d'Algèbre superieure, ed. 3-me, p. 198; также нашъ „Краткій курсъ Высшей Алгебры, изданіе 2-е. Харьковъ, 1892 г., гл. XIV, § 214, стр. 299) эти рѣшенія представятся рядомъ такихъ паръ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_i(x,y) = 0,\\ &\psi_i(x) = 0. \end{aligned}\right\}\quad (i = 1, 2, 3 \ldots g) \tag{2}$$

Если слѣдующее уравненіе въ (1), именно

$$f_3(x,y) = 0 \tag{3}$$

имѣетъ общія рѣшенія съ первыми двумя уравненіями изъ (1), то они должны заключаться между рѣшеніями пары уравненій (2); а потому станемъ искать по тому же способу рѣшенія, общія уравненіямъ (3) и первому изъ (2), т. е.

$$\varphi_i(x,y) = 0; \tag{4}$$

по той же теоремѣ Лабати эти рѣшенія представятся такими парами уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{i,j}(x,y) = 0,\\ &\psi_{i,j}(x) = 0; \end{aligned}\right\}\quad (j = 1, 2, 3 \ldots h_i) \tag{5}$$

теперь ищемъ общаго наибольшаго дѣлителя $\psi_i(x)$ и $\psi_{i,j}(x)$,

$$\vartheta_{i,j}(x) = D\left(\psi_i(x), \psi_{i,j}(x)\right); \tag{6}$$

если окажется

$$\vartheta_{i,j}(x) = 1, \tag{7}$$

или вообще постоянному, то это будетъ означать, что между рѣшеніями пары (5) для разсматриваемыхъ значеній i и j нѣтъ рѣшеній, заключающихся во (2); въ противномъ случаѣ пара уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{i,j}(x) = 0;\\ &\vartheta_{i,j}(x) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

представитъ рѣшенія, общія первымъ тремъ изъ уравненій (1). Если для всѣхъ значеній i и j будетъ имѣть мѣсто равенство (7), то это будетъ означать, что три первыя уравненія, а слѣд., и вся система уравненій (1) несовмѣстны. Если для нѣкоторыхъ значеній i и j не будетъ имѣть мѣсто (7), то первыя три уравненія изъ (1) будутъ совмѣстны и ихъ рѣшенія представятся парами уравненій (8), для тѣхъ i и j, для которыхъ не имѣетъ мѣста (7). Присоединяя въ послѣднемъ случаѣ къ каждой такой парѣ уравненій (8) четвертое изъ уравненій, и точно также поступая, мы или констатируемъ несовмѣстность первыхъ четырехъ изъ уравненій (1), а слѣд., и всей системы, или придемъ къ тому, что представимъ общія рѣшенія первыхъ четырехъ уравненій данной системы (1) парами уравненій вида:

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_{i,j,k}(x,y)=0, \\ \psi_{i,j,k}(x)=0; \end{array}\right.$$

и т. д., пока не придемъ къ тому, что или докажемъ несовмѣстность системы изъ q первыхъ уравненій данной системы (1), а слѣд., и всей этой системы, или же представимъ ея рѣшенія парами уравненій вида:

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi(x,y)=0, \\ \psi(x)=0. \end{array}\right.$$

Здѣсь уравненія (1) были какія угодно; если предположимъ, что первое изъ нихъ есть данное основное уравненіе:

$$(11)\qquad F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0,$$

второе

$$(12)\qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0,$$

а прочія имѣютъ своими первыми частями избранныя нами изъ другихъ частныхъ производныхъ $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})$ по x и y, то мы и придемъ къ предложенію конца предыдущаго §. — Этотъ методъ въ первый разъ былъ нами указанъ въ нашей статьѣ „О розысканіи особенныхъ точекъ плоскихъ алгебраическихъ кривыхъ", помѣщенной въ сообщеніяхъ Харьковскаго Математ. Общества за 1888 г., а затѣмъ и во 2-мъ изданіи нашего „Краткаго курса Высшей Алгебры".

24. Избирая по нѣскольку всѣми возможными способами частныя производныя $F(x,y)$ по x и y различныхъ порядковъ и присоединяя полученныя чрезъ приравниваніе каждой изъ нихъ нулю уравненій къ парѣ уравненій (11) и (12) пред. §, общія рѣшенія каждой полученной

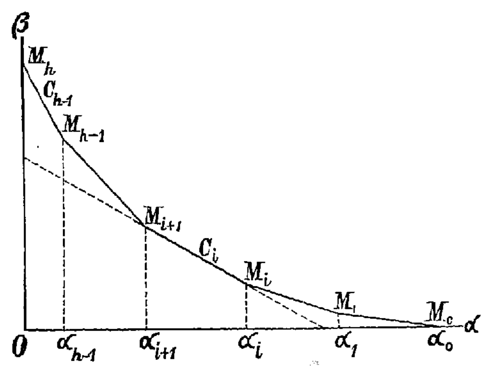
такимъ образомъ системы уравненій мы представимъ парами уравненій вида (10) пред. §. — Пусть

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x,y)=0 \\ \psi(x)=0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

будетъ одной изъ такихъ паръ рѣшеній для одной изъ этихъ системъ уравненій. Разумѣя подъ a и b одно изъ рѣшеній этой пары уравненій (1), мы знаемъ напередъ, какія изъ частныхъ производныхъ $F(x,y)$ по x и y обращаются въ нуль для $x=a$, $y=b$; выбрасывая ихъ изъ разложеннаго по строкѣ Тэйлора уравненія $F(a+\xi,b+\eta)=0$, мы будемъ имѣть уравненіе вида

$$\sum A_{\alpha\beta}\,\eta^{\alpha}\xi^{\beta}=0, \qquad (2)$$

въ которомъ всѣ α и β будутъ намъ извѣстны. Между членами этой суммы найдется хотя одинъ, содержащій только ξ, и хотя одинъ, содержащій только η; въ противномъ случаѣ либо $\xi=x-a$, либо $\eta=y-b$ въ нѣкоторыхъ цѣлыхъ положительныхъ степеняхъ были бы общими множителями всѣхъ членовъ первой части уравненія (2), слѣд., и даннаго уравненія $F(x,y)=0$, что противорѣчитъ предположенной неприводимости этого уравненія. Возьмемъ теперь, по примѣру Ньютона, прямоугольную систему координатъ, и на горизонтальной оси будемъ откладывать значенія показателя α, на вертикальной значенія показателя β; тогда каждому члену первой части уравненія (2) будетъ отвѣчать точка (α,β). Для значеній ξ и η безконечно-малыхъ, члены низшаго порядка найдутся такимъ образомъ. Пусть α_0 обозначаетъ наименьшее изъ значеній α въ тѣхъ членахъ, въ которыхъ $\beta=0$, и β_0 наименьшее изъ значеній β въ тѣхъ членахъ, въ которыхъ $\alpha=0$; точка α_0, слѣд., лежитъ на оси $O\alpha$, точка β_0 на оси $O\beta$.



Возьмемъ прямую, первоначально совпадавшую съ осью $O\alpha$, и станемъ ее вращать по направленію часовой стрѣлки около точки M_0 на оси $O\alpha$, для которой $\alpha = \alpha_0$, $\beta = 0$, до тѣхъ поръ, пока она не встрѣтитъ одну или нѣсколько изъ точекъ $(\alpha\beta)$; пусть M_1 будетъ послѣдняя изъ точекъ, встрѣченныхъ прямой; тогда станемъ вращать прямую около точки M_1 въ томъ же направленіи, пока она не встрѣтитъ новый рядъ точекъ (α, β), изъ которыхъ послѣдняя пусть будетъ M_2; тогда вращаемъ прямую въ томъ же направленіи около этой точки до встрѣчи новаго ряда точекъ (α, β), и т. д., пока не дойдемъ до точки M_{h-1}, вращая прямую около которой, встрѣтимъ, кромѣ можетъ быть нѣкоторыхъ другихъ точекъ, также и точку M_h, для которой $\alpha = 0$, $\beta = \beta_0$. Послѣдовательными положеніями прямой опредѣлится ломанная линія: $M_0 M_1 M_2 \ldots M_i M_{i+1} \ldots M_{h-1} M_h$, — которую будемъ обозначать короче чрезъ P, — состоящая изъ h колѣнъ:

$$C_0, C_1, \ldots C_i, \ldots C_{h-1},$$

выпуклая къ началу. Всѣ прочія точки (α, β), относящіяся къ различнымъ членамъ уравненія (2), будутъ по отношенію къ началу лежать выше этой линіи. Остановимъ наше вниманіе на колѣнѣ C_i, какъ представителѣ всѣхъ прочихъ; его уравненіе по формулѣ Аналитической Геометріи для прямой, проходящей чрезъ точки $M_i(\alpha_i, \beta_i)$ и $M_{i+1}(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1})$, будетъ такое:

(3) $$\frac{\beta - \beta_i}{\alpha_i - \alpha} = \frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} = \frac{q}{p} = \mu,$$

гдѣ $\frac{q}{p}$ несократимая дробь, которую мы для краткости означили чрезъ μ. Изъ (3) получаемъ:

(4) $$\alpha_i\mu + \beta_i = \alpha\mu + \beta = \alpha_{i+1}\mu + \beta_{i+1};$$

это представляетъ ординату β въ началѣ координатъ для прямой C_i. Если въ (2) сдѣлаемъ подстановку

(5) $$\eta = v\xi^{\mu},$$

гдѣ μ опредѣляется изъ (3), то оно (2) приметъ такой видъ:

(6) $$\sum A_{\alpha\beta}\, v^{\alpha}\, \xi^{\alpha\mu+\beta} = 0,$$

и, слѣд., $\alpha\mu + \beta$ будетъ степенью члена (α, β) относительно ξ, когда η выражается формулою (5) чрезъ ξ; она представится ординатою въ началѣ координатъ прямой, проведенной чрезъ точку (α, β) параллельно колѣну C_i. Если продолжить это колѣно до встрѣчи въ A и B съ осями $O\alpha$ и $O\beta$, то легко увидѣть, что всѣ эти ординаты будутъ больше опредѣляемой равенствомъ (4), отвѣчающей точкамъ, лежащимъ на колѣнѣ C_i. Для полученія главной части v въ выраженіи (5) η чрезъ ξ

нужно отдѣльно приравнять нулю въ (6) сумму членовъ съ низшею степенью ξ, слѣд., сумму тѣхъ, которые отвѣчаютъ точкамъ (α, β), лежащимъ на колѣнѣ C_i. Отбрасывая общій множитель всѣхъ этихъ членовъ — степень $\xi^{\alpha_i\mu+\beta_i} = \xi^{\alpha\mu+\beta} = \xi^{\alpha_{i+1}\mu+\beta_{i+1}}$, мы получимъ для опредѣленія главной части v такое уравненіе:

$$A_{\alpha_i\beta_i}\, v^{\alpha_i} + \sum' A_{\alpha\beta}\, v^{\alpha} + A_{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}}\, v^{\alpha_{i+1}} = 0, \qquad (7)$$

гдѣ значекъ (′) у знака суммы долженъ напоминать, что эта сумма распространяется лишь на тѣ члены суммы въ (6), которые отвѣчаютъ точкамъ, лежащимъ на колѣнѣ C_i ломанной линіи P, которыхъ α и β, слѣд., связаны уравненіемъ (4). Такъ какъ $v = 0$ не отвѣчаетъ занимающему насъ вопросу, ибо тогда членъ съ самой низшей степенью ξ въ разложеніи η по степенямъ ξ имѣлъ бы показателемъ этой степени не μ, а число большее μ; то, отбрасывая это неудовлетворяющее вопросу рѣшеніе, можно будетъ первую часть уравненія (7) сократить на $v^{\alpha_{i+1}}$, и тогда оно обратится въ такое:

$$A_{\alpha_i\beta_i}\, v^{\alpha_i-\alpha_{i+1}} + \sum' A_{\alpha\beta}\, v^{\alpha-\alpha_{i+1}} + A_{\alpha_{i+1},\beta_{i+1}} = 0. \qquad (8)$$

Но изъ (3), такъ какъ дробь $\frac{q}{p}$ несократима, слѣдуетъ, что

$$\left.\begin{aligned} \beta - \beta_i &= kq, \\ \alpha_i - \alpha &= kp; \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_{i+1} - \beta_i &= k_i q, \\ \alpha_i - \alpha_{i+1} &= k_i p; \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

изъ послѣднихъ равенствъ въ каждой парѣ выводимъ чрезъ вычитаніе еще такое:

$$\alpha - \alpha_{i+1} = (k_i - k)p; \qquad (11)$$

съ помощію второго изъ (10) и послѣдняго можно (8) дать такой видъ:

$$A_{\alpha_i\beta_i}\, v^{k_i p} + \sum' A_{\alpha\beta}\, v^{(k_i-k)p} + A_{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}} = 0. \qquad (12)$$

Здѣсь всѣ показатели кратныя числа p; потому, полагая

$$v^p = \lambda, \qquad (13)$$

будемъ имѣть:

$$A_{\alpha_i\beta_i}\lambda^{k_i} + \sum' A_{\alpha\beta}\lambda^{k_i-k} + A_{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}} = 0, \qquad (14)$$

или короче:

$$L_i = 0, \qquad (14')$$

полагая

(15) $$L_i = A_{\alpha_i\beta_i}\lambda^{k_i} + \sum' A_{\alpha\beta}\lambda^{k_i-k} + A_{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}} = 0.$$

Найдя изъ уравненія (14) k_i значеній для λ, для каждаго изъ нихъ изъ (13) найдемъ p значеній для v, именно:

(16) $$v_j = \varepsilon^j \sqrt[p]{\lambda}, \quad (j = 0, 1, 2, \ldots p-1)$$

гдѣ ε корень уравненія

(17) $$\varepsilon^p - 1 = 0,$$

слѣд.,

(18) $$\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}.$$

Подставляя въ (5) изъ (16), мы для главной части η получимъ:

(19) $$v_j \xi^{\mu} = e^{\frac{2j\pi}{p}\sqrt{-1}} \sqrt[p]{\lambda}\, \xi^{\frac{q}{p}}.$$

Если ξ опишетъ кругъ безконечно-малаго радіуса около точки $\xi = 0$, то множитель $\xi^{\frac{q}{p}}$ пріобрѣтетъ множителя $e^{\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}}$, и это значеніе (16) перейдетъ въ такое:

(20) $$e^{\frac{2(j+q)\pi}{p}\sqrt{-1}} \sqrt[p]{\lambda}\, \xi^{\frac{q}{p}};$$

послѣ второго оборота перейдетъ въ

(21) $$e^{\frac{2(j+2q)\pi}{p}\sqrt{-1}} \sqrt[p]{\lambda}\, \xi^{\frac{q}{p}},$$

послѣ третьяго въ такое:

(22) $$e^{\frac{2(j+3q)\pi}{p}\sqrt{-1}} \sqrt[p]{\lambda}\, \xi^{\frac{q}{p}},$$

и т. д.; наконецъ послѣ $p-1$ оборотовъ въ такое:

(23) $$e^{\frac{2(j+(p-1)q)\pi}{p}\sqrt{-1}} \sqrt[p]{\lambda}\, \xi^{\frac{q}{p}};$$

но какъ числа

(24) $$j,\ j+q,\ j+2q,\ j+3q,\ \ldots j+(p-1)q;$$

такъ какъ q простое съ p, будутъ представлять по модулю p рядъ чиселъ

(25) $$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots p-1,$$

(см. теорію сравненій П. Чебышева, СПб. 1847 г.) въ другомъ лишь порядкѣ, то (19), (20), (21), (22), (23) представятъ всѣ значенія, которыя даетъ первая формула, т. е. (19) для $j = 0, 1, 2, \ldots p-1$, въ другомъ только порядкѣ; именно, нужно для полученія этого порядка написать эти значенія въ точкахъ дѣленія круга на p равныхъ частей и брать послѣ перваго то, которое будетъ стоять чрезъ q дѣленій отъ него, послѣ этого то, которое слѣдуетъ за нимъ чрезъ q дѣленій, и такъ далѣе, пока не вернемся къ первому, что случится послѣ того, какъ будетъ такимъ образомъ прибавлено $(p-1)q$ дѣленій, ибо, еще q дѣленій прибавивъ, получимъ pq дѣленій, что $\equiv 0$ (мод. p). Такъ какъ изъ самаго способа полученія формулъ (19)—(23) видно, что послѣ одного обхода точкою ξ нулевого своего значенія по безконечно малому кругу въ положительномъ направленіи каждое изъ нихъ переходитъ въ слѣдующее, и послѣднее въ первое, то мы видимъ, что дѣйствительно главныя части p значеній η, отвѣчающихъ одному простому корню уравненія (14), образуютъ группу p членовъ, переходящихъ одинъ въ другой въ круговомъ порядкѣ. Правда, сказанное относится пока лишь къ главнымъ частямъ этихъ значеній η, но легко показать, что и полныя ихъ значенія будутъ слѣдовать тому же закону. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$\eta_j = (v_j + \eta'_j)\,\xi^{\mu}, \tag{26}$$

гдѣ η'_j безконечно-малая величина, представляетъ полное значеніе одного изъ членовъ группы; послѣ обхода точкою ξ нулевого своего значенія вторая часть перейдетъ въ такую:

$$(v_j + \eta'_j)\,\xi^{\mu} e^{\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}} = \left(v_{j+q} + \eta'_j e^{\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)\xi^{\mu}; \tag{27}$$

нужно доказать, что вторая часть этого равенства равна η_{j+q}. Допустимъ, что она не равна этой величинѣ; тогда она будетъ равна нѣкоторой другой, напр. η_{j+q+r}, такъ что, слѣд., будетъ

$$\left(v_{j+q} + \eta'_j e^{\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)\xi^{\mu} = \eta_{j+q+r}, \tag{28}$$

или, подставляя вмѣсто η_{j+q+r} его выраженіе и сокращая на ξ^{μ}:

$$v_{j+q} + \eta'_j e^{\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}} = v_{j+q+r} + \eta'_{j+q+r}; \tag{29}$$

отсюда имѣемъ:

$$v_{j+q} - v_{j+q+r} = \eta'_{j+q+r} - \eta'_j e^{\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}}, \tag{30}$$

или, вводя вмѣсто ε ихъ выраженія по (16) формулѣ:

$$(31)\qquad \sqrt[p]{\lambda}\left(e^{\frac{2(j+q)\pi}{p}\sqrt{-1}}-e^{\frac{2(j+q+r)\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)=\eta'_{j+q+r}-\eta'_j e^{\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}};$$

но здѣсь лѣвая часть конечная, отличная отъ нуля, если r не $\equiv 0$ (мод. p), а правая безконечно-малая; получается таквмъ образомъ противорѣчіе вслѣдствіе допущенія (28), которое потому должно быть отвергнуто. Такимъ образомъ, дѣйствительно и полныя значенія η, отвѣчающія одному простому корню уравненія (14), образуютъ группу p элементовъ, переходящихъ одинъ въ другой въ томъ же круговомъ порядкѣ, какъ и ихъ главныя части.

И такъ, каждому простому корню уравненія (14) будетъ отвѣчать одна круговая група p корней, дѣлающихся равными b. Если всѣ корни уравненія $L_i=0$, отвѣчающаго колѣну C_i, будутъ простые, то мы будемъ имѣть k_i круговыхъ группъ порядка p.

25. Если же уравненіе (14) пред. § будетъ имѣть кратные корни, то всякому корню кратности r будетъ отвѣчать r значеній v равныхъ, слѣд., и каждое изъ приближенныхъ значеній η, котораго $v\xi^\mu$ составляетъ главную часть, будетъ r-кратнымъ. Въ этомъ случаѣ перваго приближеннаго значенія корня уже недостаточно для ихъ раздѣленія; надобно найти главную часть η' въ точномъ выраженіи величины η:

$$(1)\qquad \eta=(v+\eta')\xi^\mu,$$

т. е. надобно сдѣлать второе приближеніе. Прежде чѣмъ показать, какъ это дѣлается, мы должны показать, какимъ образомъ, не зная a и b, можно все таки знать, для какихъ изъ рѣшеній пары уравненій (1) пред. § разсматриваемое уравненіе $L_i=0$ [(14′) пред. §] для колѣна C_i ломанной линіи P не будетъ имѣть кратныхъ корней, для какихъ будетъ имѣть таковые; для первыхъ задача опредѣленія числа и порядка круговыхъ группъ значеній y, дѣлающихся равными, будетъ рѣшена по пред. § съ перваго приближенія для разсматриваемаго колѣна C_i, ибо, какъ видѣли, будемъ имѣть k_i группъ порядка p. Если это будетъ имѣть мѣсто и для прочихъ колѣнъ, т. е. уравненія $L_i=0$ и для всѣхъ другихъ значеній i будутъ имѣть лишь простые корни, тогда будемъ знать для каждаго изъ рѣшеній пары (1) пред. § число и порядокъ круговыхъ группъ въ каждой изъ аналитическихъ точекъ, представляемыхъ этою парою уравненія (1). Число же таковыхъ аналитическихъ точекъ [если предположить оба уравненія пары освобожденными отъ кратныхъ множителей, что всегда можно сдѣлать по способамъ Высшей Алгебры и что во всемъ дальнѣйшемъ всегда будемъ предполагать уже выполненнымъ] найдется, если показатель степени перваго уравненія

относительно y помножить на показатель степени второго уравненія относительно x. И такъ, покажемъ, какимъ способомъ можно узнать, будетъ ли уравненіе $L_i=0$ имѣть кратные корни, или нѣтъ, для нѣкоторыхъ изъ рѣшеній пары (1) пред. §, и когда будетъ, то для какихъ именно изъ этихъ рѣшеній.

26. Уравненіе

$$L_i=0 \tag{1}$$

[(14) § 24] (въ которомъ a и b, какъ неизвѣстныя, замѣнимъ чрезъ x, y) относительно неизвѣстной λ (x, y принимаются за извѣстныя) будетъ тогда имѣть кратные корни, когда общій наибольшій дѣлитель функціи L_i отъ λ и его первой производной по λ:

$$D\left(L_i, \frac{dL_i}{d\lambda}\right) \tag{2}$$

будетъ функція отъ λ, а не величина независящая отъ λ, или, иначе говоря, когда будутъ имѣть общія рѣшенія уравненіе (1) и уравненіе

$$\frac{dL_i}{d\lambda}=0. \tag{3}$$

Отыскивая ихъ по способу общаго наибольшаго дѣлителя, намъ, можетъ быть, придется помножать дѣлимыя на нѣкоторыхъ множителей вида $\varphi(x, y)$ и изъ дѣлителей выводить множителей такого же вида, общихъ всѣхъ его членамъ, за скобки; а потому и здѣсь будетъ имѣть примѣненіе теорема Лабати, и по ней общія рѣшенія пары уравненій (1) и (3) представятся парами уравненій такого вида:

$$\left.\begin{aligned} f_j^{(i)}(x, y; \lambda)=0,\\ \chi_j^{(i)}(x, y)=0. \end{aligned}\right\}\ (j=1, 2, 3\ldots g^{(i)}) \tag{4}$$

Но коэффиціенты при различныхъ степеняхъ λ въ L_i, а слѣд., и въ $\frac{dL_i}{d\lambda}$ суть функціи значеній x и y, опредѣляемыхъ парою уравненій (1) § 24; потому мы должны отыскать, для какихъ изъ рѣшеній этой пары удовлетворяется второе изъ этихъ уравненій, т. е.:

$$\chi_j^{(i)}(x, y)=0. \tag{5}$$

Отыскивая общія рѣшенія этого уравненія и уравненія

$$\varphi(x, y)=0 \tag{6}$$

по способу общаго наибольшаго дѣлителя, мы по теоремѣ Лабати представимъ ихъ парами уравненій вида:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_h^{(i,j)}(x, y)=0,\\ \psi_h^{(i,j)}(x)=0; \end{aligned}\right\}\ (h=1, 2, \ldots l) \tag{7}$$

но значенія x должны удовлетворять второму изъ уравненій пары (1) § 24, т. е.:

$$(8) \qquad \psi(x) = 0,$$

а потому ищемъ общаго наибольшаго дѣлителя $\psi(x)$ и $\psi_h^{(i,j)}(x)$, который пусть будетъ $\Theta_h^{(i,j)}(x)$, такъ что, слѣд.:

$$(9) \qquad \Theta_h^{(i,j)}(x) = D\big(\psi(x), \psi_h^{(i,j)}(x)\big);$$

тогда рѣшенія пары (1) § 24, удовлетворяющія уравненію (5) наст. §, и, слѣд., такихъ, для которыхъ уравненія (1) и (3) настоящаго § будутъ имѣть общія рѣшенія, представятся такими парами уравненій:

$$(10) \qquad \begin{cases} \varphi_h^{(i,j)}(x,y) = 0, \\ \Theta_h^{(i,j)}(x) = 0, \end{cases}$$

для тѣхъ значеній h, для которыхъ $\Theta_h^{(i,j)}(x)$ не $=1$ (или вообще постоянной), а самыя значенія λ, представляющія эти общія рѣшенія уравненій (1) и (3), слѣд., кратные корни перваго, такими системами трехъ уравненій:

$$(11) \qquad \begin{cases} f_j^{(i)}(x,y,\lambda) = 0, \\ \Phi_h^{(i,j)}(x,y) = 0, \\ \Theta_h^{(i,j)}(x) = 0. \end{cases} \qquad \begin{matrix} (j = 1, 2 \ldots g^{(i)}) \\ (h = 1, 2 \ldots l) \end{matrix}$$

Исключая изъ рѣшеній, представляемыхъ парою (1) § 24, рѣшенія, представляемыя парою (10), мы получимъ тѣ изъ рѣшеній этой пары (1) § 24, для которыхъ уравненіе $L_i = 0$ не будетъ имѣть кратныхъ корней. Эти рѣшенія представятся такими парами. Если $\Theta(x)$ обозначаетъ наименьшее кратное всѣхъ $\Theta_h^{(i,j)}(x)$ (которые мы предполагаемъ уже освобожденными, какъ и $\psi(x)$, отъ кратныхъ множителей), слѣд.,

$$(12) \qquad \Theta(x) = M(\ldots \Theta_h^{(i,j)}(x,y) \ldots),$$

то упомянутыя сейчасъ рѣшенія пары (1) § 24, для которыхъ уравненіе $L_i = 0$ не имѣетъ кратныхъ корней, будутъ рѣшеніями такихъ паръ:

$$(13) \qquad \begin{cases} \varphi(x,y) = 0, \\ \psi(x) : \Theta(x) = 0, \end{cases}$$

и

$$(14) \qquad \begin{cases} \varphi(x,y) : \Phi_h^{(i,j)}(x,y) = 0, \\ \Theta_h^{(i,j)}(x) = 0, \end{cases}$$

гдѣ i, j, h пробѣгаютъ тѣ же значенія, какъ и въ (11). Это и суть тѣ уравненія, которыя разумѣлись въ концѣ пред. §. Степени каждаго изъ этихъ уравненій, очевидно, извѣстны, слѣд., извѣстно будетъ и число аналитическихъ точекъ разсматриваемой категоріи.

27. Для дальнѣйшаго необходимо отдѣлить корни уравненія $L_i = 0$ каждой кратности отъ корней другихъ кратностей. Это можно сдѣлать такимъ образомъ. Корень λ будетъ r-кратнымъ корнемъ уравненія $L_i = 0$, если онъ, кромѣ уравненій (1) и (3) пред. §, удовлетворяетъ также и слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\frac{d^2 L_i}{d\lambda^2} = 0, \quad \frac{d^3 L_i}{d\lambda^3} = 0, \quad \ldots \frac{d^{r-1} L_i}{d\lambda^{r-1}} = 0, \qquad (1)$$

и потому станемъ искать, какія изъ значеній λ, опредѣляемыхъ системами трехъ уравненій (11) пред. §, удовлетворяютъ первому изъ уравненій (1) этого §, первымъ двумъ, первымъ тремъ, и т. д.; наконецъ, всѣмъ этимъ уравненіямъ, по способу § 23. Для упрощенія изложенія напишемъ безъ значковъ одну изъ системъ (11) пред. §:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,\lambda) &= 0, \\ \Phi(x,y) &= 0, \\ \Theta(x) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Станемъ теперь искать общія рѣшенія перваго изъ этихъ уравненій и перваго изъ (1) наст. §, считая x за извѣстное; тогда по теоремѣ Лабати эти рѣшенія представятся парами такого вида:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y;\lambda) &= 0, \\ \Phi_1(x,y) &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

но x и y должны удовлетворять послѣднимъ двумъ изъ уравненій (2); а потому будемъ искать теперь общія рѣшенія уравненій $\Phi(x,y) = 0$ и $\Phi_1(x,y) = 0$; они представятся парами уравненій вида:

$$\left.\begin{aligned} \chi(x,y) &= 0, \\ \Theta(x) &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

но x долженъ удовлетворять послѣднему изъ уравненій (2), а потому ищемъ общаго наибольшаго дѣлителя $\Theta(x)$ и $\Theta(x)$; пусть онъ будетъ $\vartheta(x)$, такъ что, слѣд.,

$$\vartheta(x) = D\big(\Theta(x), \Theta(x)\big); \qquad (5)$$

тогда рѣшенія, общія первому изъ уравненій (1) и первому изъ уравненій (2), представятся системою:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y;\lambda) &= 0, \\ \chi(x,y) &= 0, \\ \vartheta(x) &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

а тѣ аналитическія точки, въ которыхъ это будетъ имѣть мѣсто, парою послѣднихъ двухъ изъ этихъ уравненій, именно парою:

$$(7)\qquad \begin{cases} \chi(x, y) = 0, \\ \vartheta(x) = 0. \end{cases}$$

Исключая эти рѣшенія изъ рѣшеній послѣднихъ двухъ уравненій системы (2), получимъ пары уравненій, которыя послужатъ для опредѣленія тѣхъ значеній x и y, для которыхъ уравненіе $L_i = 0$ будетъ имѣть только двукратные корни, а также, исключая рѣшенія (6) изъ рѣшеній (2), системы уравненій для опредѣленія этихъ двукратныхъ корней. Означая чрезъ $\bar{\vartheta}(x)$ наименьшее кратное всѣхъ $\vartheta(x)$, отвѣчающихъ одному и тому же первому уравненію системы, очевидно, что пары уравненій:

$$(8)\qquad \begin{cases} \Phi(x, y) = 0, \\ \Theta(x) : \bar{\vartheta}(x) = 0, \end{cases}$$

и

$$(9)\qquad \begin{cases} \Phi(x, y) : \chi(x, y) = 0, \\ \bar{\vartheta}(x) = 0, \end{cases}$$

представятъ тѣ аналитическія точки, для которыхъ уравненіе въ λ $L_i = 0$ будетъ имѣть только двукратные корни; системы же изъ трехъ уравненій:

$$(10)\qquad \begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0, \\ \Theta(x) : \bar{\vartheta}(x) = 0: \end{cases}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0, \\ \Phi(x, y) : \chi(x, y) = 0, \\ \vartheta(x) = 0; \end{cases}$$

$$(12)\qquad \begin{cases} f(x, y, \lambda) : f_1(x, y, \lambda) = 0, \\ \chi(x, y) = 0, \\ \vartheta(x) = 0; \end{cases}$$

опредѣлятъ каждая эти самые двукратные корни уравненія въ λ $L_i = 0$.

Комбинируя такимъ же образомъ системы уравненій (6) со вторымъ изъ уравненій (1), опять представимъ трехъ-кратные корни уравненія въ λ $L_i = 0$ системами трехъ видовъ (10), (11) и (12), а тѣ аналитическія точки, въ которыхъ это будетъ имѣть мѣсто, парами уравненій видовъ (8) и (9); аналитическія же точки, гдѣ уравненіе $L_i = 0$ будетъ имѣть корни кратности выше третьей, парами вида (4), самыя же кратныя значенія λ системами трехъ уравненій вида (6). И т. д., пока не

дойдемъ до послѣдняго изъ уравненій (1), когда такими же парами уравненій, какъ (4), представимъ аналитическія точки, въ которыхъ уравненіе $L_i = 0$ будетъ имѣть r-кратные корни, которые сами найдутся изъ системы въ три уравненія вида (6).

28. Показавъ, какъ находятся пары уравненій, опредѣляющихъ тѣ аналитическія точки, въ которыхъ уравненіе $L_i = 0$ имѣетъ r-кратный корень λ, а также какъ получаются системы трехъ уравненій, опредѣляющія эти r-кратные корни λ, мы покажемъ теперь, какъ въ такомъ случаѣ нужно поступать, чтобы найти вторыя приближенія величинъ η [§ 25].

Пусть будетъ

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, \lambda) &= 0, \\ \Phi(x, y) &= 0, \\ \psi(x) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

одна изъ системъ трехъ уравненій, опредѣляющихъ r-кратный корень уравненія $L_i = 0$; послѣднія два изъ этихъ уравненій опредѣляютъ тѣ аналитическія точки, въ которыхъ это имѣетъ мѣсто. Такъ какъ $\lambda = v^p$, то эту систему можно такъ написать, что она прямо будетъ давать значенія v:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, v^p) &= 0, \\ \Phi(x, y) &= 0, \\ \psi(x) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Точное значеніе η въ этомъ случаѣ представится формулою (1) § 25, именно:

$$\eta = (v + \eta')\, \xi^{\mu}, \qquad (3)$$

гдѣ v опредѣляется по формулѣ (16) § 24 и каждое изъ p значеній его, отвѣчающихъ r-кратному корню уравненія $L_i = 0$, опредѣляемому системой (1) этого §, будетъ повторяться r разъ; для отдѣленія одного отъ другого значеній η, имѣющихъ одинаковую главную часть, надобно опредѣлить главную часть η' въ формулѣ (3). Съ этою цѣлью положимъ

$$\xi = \xi'^{\,p}; \qquad (4)$$

тогда, такъ какъ $\mu = \dfrac{p}{q}$, будетъ по (3):

$$\eta = (v + \eta')\, \xi'^{\,q}. \qquad (5)$$

Внося изъ (4) и (5) выраженія ξ и η чрезъ ξ' и η' въ уравненіе (2) § 24 и по раскрытіи скобокъ располагая результатъ по степенямъ ξ' и η', мы получимъ такое уравненіе между этими величинами:

$$\sum A'_{\alpha'\beta'}\,\eta'^{\alpha'}\,\xi'^{\beta'}=0, \tag{6}$$

гдѣ коэффиціенты $A'_{\alpha'\beta'}$ будутъ полиномы, расположенные по степенямъ v, съ коэффиціентами, которые будутъ линейныя функціи тѣхъ $A_{\alpha\beta}$, которыя входятъ въ уравненіе (2) § 24, и суть функціи значеній x и y, которыя въ свою очередь представляютъ рѣшенія послѣднихъ двухъ изъ уравненій (1). Можетъ случиться, что для нѣкоторыхъ значеній v, опредѣляемыхъ системою (2), нѣкоторые изъ полиномовъ $A'_{\alpha'\beta'}$ отъ v обратятся въ нуль; поэтому прежде всего надобно отыскать такія изъ рѣшеній системы (2), для которыхъ избранные изъ этихъ коэффиціентовъ обращаются въ нуль, комбинируя для этого всѣми возможными способами уравненія, получаемыя отъ приравниванія этихъ полиномовъ нулю, съ системою уравненій (2) этого §. По способу, тождественному съ тѣмъ, который былъ изложенъ въ §§ 26 и 27, мы придемъ къ тому, что представимъ тѣ изъ рѣшеній системы (2), для которыхъ напередъ намѣченные изъ полиномовъ $A'_{\alpha'\beta'}$ обращаются въ нуль, системами трехъ уравненій такого же вида, какъ (2). Пусть

$$\left\{\begin{aligned} &f_1(x,y,v)=0,\\ &\Phi_1(x,y)=0,\\ &\psi_1(x)=0,\end{aligned}\right. \tag{7}$$

будетъ одна изъ такихъ системъ [1]). Выбрасывая изъ (6) тѣ члены, коэффиціенты которыхъ обращаются въ нуль для рѣшеній этой системы (7), мы будемъ знать α', β' всѣхъ остальныхъ членовъ уравненія (7), и можемъ построить, какъ то было сдѣлано въ § 24, при помощи прямоугольной системы координатъ съ осями $O\alpha'$ и $O\beta'$ выпуклую къ началу ломанную линію P', начинающуюся отъ наименьшаго α'_0 изъ значеній α' при $\beta'=0$, до наименьшаго β'_0 изъ β', для которыхъ $\alpha'=0$. Каждому колѣну $C'_{i'}$, этой ломанной линіи будетъ отвѣчать своя группа членовъ низшей степени относительно ξ', когда положимъ

$$\eta'=v'\,\xi'^{\mu'}, \tag{8}$$

[1]) Относительно перваго изъ этихъ уравненій весьма важно замѣтить, что если ему удовлетворяетъ одно какое либо значеніе радикала

$$v=\sqrt[p]{\lambda},$$

то ему будутъ удовлетворять и всѣ прочія значенія этого радикала при томъ же λ. Въ самомъ дѣлѣ, всѣ они различаются лишь множителемъ ε^j [по (16) § 24], который не можетъ входить въ уравненія (7), ибо они получены раціональнымъ путемъ изъ уравненій, не содержащихъ эту величину. Отсюда слѣдуетъ, что $f_1(x,y,v)$ содержитъ только степени v съ показателями кратными p, подобно первому во (2), и, слѣд., зависитъ только отъ $v^p=\lambda$.

гдѣ μ' угловой коэффиціентъ этого колѣна, уравненіе котораго будетъ:

$$\frac{\beta'-\beta'_{i'}}{\alpha'_{i'}-\alpha'}=\frac{\beta'_{i'+1}-\beta'_{i'}}{\alpha'-\alpha'_{i'+1}}=\frac{q'}{p'}=\mu'. \tag{9}$$

Для полученія главнаго значенія v' надо приравнять нулю сумму членовъ, содержащихъ ξ' въ самой низшей степени, которая будетъ $\xi'^{\alpha'_{i'}\mu+\beta'_{i'}}$; слѣд., нужно приравнять нулю сумму членовъ, α', β' въ которыхъ отвѣчаютъ точкамъ, лежащимъ на колѣнѣ $C'_{i'}$; это доставитъ такое уравненіе:

$$A'_{\alpha'_{i'}\beta'_{i'}}\,v'^{\alpha'_{i'}}+\sum' A'_{\alpha'\beta'}\,v'^{\alpha'}+A'_{\alpha'_{i'+1}\beta'_{i'+1}}\,v'^{\alpha'_{i'+1}}=0. \tag{10}$$

Отбрасывая рѣшеніе $v'=0$, какъ неидущее къ дѣлу по такой же причинѣ, какъ и раньше, мы можемъ это уравненіе сократить на $v'^{\alpha'_{i+1}}$, и тогда оно приметъ такой видъ:

$$A'_{\alpha'_{i'}\beta'_{i'}}\,v'^{\alpha'_{i'}-\alpha'_{i'+1}}+\sum' A'_{\alpha'\beta'}\,v'^{\alpha'-\alpha_{i'+1}}+A'_{\alpha'_{i'+1}\beta'_{i'+1}}=0. \tag{11}$$

Но изъ (9), такъ какъ $\frac{q'}{p'}$ несократимая дробь, слѣдуютъ такія равенства:

$$\left.\begin{aligned}\beta'-\beta'_{i'}&=k'q'\\ \alpha'_{i'}-\alpha'&=k'p',\end{aligned}\right\}\ (12)\qquad\qquad \left.\begin{aligned}\beta'_{i'+1}-\beta'_{i'}&=k'_{i'}q'\\ \alpha'_{i'}-\alpha'_{i'+1}&=k'_{i'}p',\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

вычитая послѣднія изъ этихъ равенствъ, получимъ еще

$$\alpha'-\alpha'_{i'+1}=(k'_i-k)p', \tag{14}$$

на основаніи этого, и полагая еще

$$v'^{p'}=\lambda', \tag{15}$$

$$L'_{i'}=A'_{\alpha'_{i'}\beta'_{i'}}\,\lambda'^{k'_{i'}}+\sum' A'_{\alpha'\beta'}\,\lambda'^{k'_{i'}-k}+A'_{\alpha'_{i'+1}\beta'_{i'+1}}, \tag{16}$$

мы приведемъ уравненіе (11) къ такому:

$$L'_{i'}=0. \tag{17}$$

Каждому корню λ' этого уравненія будутъ по (15) отвѣчать p' значеній v' вида:

$$v'_{j'}=\varepsilon^{j'}\sqrt[p']{\lambda'}\quad (j'=0,1,2,3\ldots p'-1) \tag{18}$$

гдѣ $\varepsilon=e^{\frac{2\pi}{p'}\sqrt{-1}}$, и, слѣд., p' приближенныхъ значеній η', именно:

$$\eta'_{j'}=v'_{j'}\,\xi'^{\mu'}, \tag{19}$$

тогда какъ точныя будутъ

$$\eta'_{1j'} = (v'_{j'} + \eta''_{1j'})\,\xi'^{\mu'}. \tag{20}$$

Если это внести въ (5) пред. §, то будемъ имѣть:

$$\eta_1 = \left(v_j + (v'_{j'} + \eta''_{1j'})\,\xi'^{\mu'}\right)\xi'^{q}; \tag{21}$$

но по (4) того же § имѣемъ

$$\xi' = \xi^{\frac{1}{p}}; \tag{22}$$

внося это въ (21) и раскрывая скобки; въ виду (9) будемъ имѣть:

$$\eta_1 = v_j\,\xi^{\frac{q}{p}} + (v'_{j'} + \eta''_{1j'})\,\xi^{\frac{qp'+q'}{pp'}}. \tag{23}$$

гдѣ $j = 0, 1, 2 \ldots p-1$ [1]; $j' = 0, 1, 2 \ldots p'-1$, такъ что эта формула дастъ всего pp' значеній для η_1, а слѣд., и для $y = b + \eta_1$. Эти значенія тоже образуютъ круговую группу изъ pp' элементовъ, ибо второй членъ этой формулы только послѣ pp' оборотовъ вернется къ прежнему своему значенію, послѣ которыхъ вернется къ своему и первый, ибо $\xi^{\frac{q}{p}} = \xi^{\frac{qp'}{pp'}}$. Это докажется, какъ относительно главной части значеній (т. е. безъ $\eta''_{1j'}$), такъ и относительно полныхъ значеній совершенно также, какъ въ § 24; поэтому мы на этомъ останавливаться не будемъ. Что касается до числа такихъ круговыхъ группъ порядка pp', то оно будетъ равно произведенію числа простыхъ корней уравненія $L'_{i'} = 0$ на показатель степени относительно $\lambda = v^p$ перваго изъ уравненій (8) наст. §, ибо каждый простой корень уравненія $L_{i'} = 0$ можетъ комбинироваться съ каждымъ изъ корней сейчасъ названнаго уравненія и это для каждой аналитической точки, представляемой парою послѣднихъ двухъ уравненій въ системѣ (7). Для r'-кратнаго корня уравненія $L'_{i'} = 0$ нужно новое приближеніе, т. е. нужно найти главное значеніе η''_1 въ формулѣ

$$\eta'_1 = (v' + \eta''_1)\,\xi'^{\mu'}, \tag{24}$$

которая будетъ представлять полное значеніе η'_1 для каждаго v', отвѣчающаго r'-кратному корню уравненія $L'_{i'} = 0$. Но для этого сперва надобно показать, какъ можно знать, для какихъ изъ рѣшеній системы (2) этого § уравненіе $L'_{i'} = 0$ будетъ имѣть кратные корни λ', для какихъ не будетъ.

---

[1] См. примѣчаніе выше.

29. Будемъ искать по способу общаго наибольшаго дѣлителя, принимая λ' и v за неизвѣстныя, а x и y за данныя величины, общія рѣшенія двухъ уравненій:

$$L'_{i'} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dL'_{i'}}{d\lambda'} = 0; \tag{2}$$

по теоремѣ Лабати они представятся такими парами уравненій:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, v, \lambda') &= 0, \\ f_2(x, y, v) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

причемъ x, y, v должны удовлетворять системѣ уравненій (7) пред. §; поэтому будемъ искать общія рѣшенія уравненій $f_1(x, y, v) = 0$ и $f_2(x, y, v) = 0$, принимая v и y за неизвѣстныя, и по теоремѣ Лабати они представятся парами такихъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} f_3(x, y, v) &= 0, \\ \varphi_1(x, y) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

гдѣ x и y должны удовлетворять послѣднимъ двумъ изъ уравненій (7) пред. §; поэтому будемъ искать общія рѣшенія уравненія $\Phi_1(x, y) = 0$ и $\varphi_1(x, y) = 0$; по той же теоремѣ они представятся такими парами уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_2(x, y) &= 0, \\ \psi_2(x) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

гдѣ x долженъ удовлетворять послѣднему изъ уравненій (7) пред. §; поэтому будемъ искать общаго наибольшаго дѣлителя $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$; пусть онъ $\Theta(x)$, такъ что, слѣд.,

$$\Theta(x) = D\big(\psi_1(x), \psi_2(x)\big); \tag{6}$$

тогда рѣшенія, общія уравненіямъ (1) и (2) для x, y, v, удовлетворяющихъ уравненіямъ (7) пред. §, представятся такою системою четырехъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, v, \lambda') &= 0, \\ f_3(x, y, v) &= 0, \\ \Phi_2(x, y) &= 0, \\ \Theta(x) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Послѣднія три изъ этихъ уравненій характеризуютъ тѣ изъ аналитическихъ точекъ, характеризуемыхъ уравненіями (7) пред. §, въ которыхъ уравненіе $L'_{i'} = 0$ въ λ' имѣетъ кратные корни; послѣдніе даются первымъ изъ этихъ уравненій, для x, y, v, удовлетворяющихъ остальнымъ уравненіямъ (7). Чтобы получить тѣ изъ аналитическихъ точекъ, характеризуемыхъ уравненіями (7) пред. §, въ которыхъ уравненіе $L'_{v'}=0$ имѣетъ только простые корни, надобно исключить изъ рѣшеній системы (7) пред. § рѣшенія системы изъ трехъ послѣднихъ изъ уравненій (7) наст. §. Если $\vartheta(x)$ будетъ наименьшее кратное всѣхъ $\Theta(x)$ (для одного и того же верхняго уравненія), то рѣшенія системы (7) пред. §, остающіяся послѣ сказаннаго исключенія изъ нея рѣшеній системы трехъ послѣднихъ уравненій изъ (7) наст. §, представятся системами трехъ уравненій,—системами такихъ трехъ видовъ:

$$(8)\qquad \left|\begin{array}{l} f_1(x,y,v)=0,\\ \Phi_1(x,y)=0,\\ \psi_1(x):\vartheta(x)=0; \end{array}\right.$$

$$(9)\qquad \left|\begin{array}{l} f_1(x,y,v)=0,\\ \Phi_1(x,y):\Phi_2(x,y)=0,\\ \Theta(x)=0; \end{array}\right.$$

$$(10)\qquad \left|\begin{array}{l} f_1(x,y,v):f_2(x,y,v)=0,\\ \Phi_2(x,y)=0,\\ \Theta(x)=0. \end{array}\right.$$

Относительно всѣхъ этихъ группъ можно сдѣлать то же замѣчаніе, которое мы сдѣлали въ § 28 относительно уравненій (7), именно, что они въ сущности зависятъ отъ $v^p=\lambda$, ибо удовлетворяются всѣми значеніями радикала $\sqrt[p]{\lambda}$ при одномъ и томъ же λ; поэтому можно говорить о степени этихъ уравненій относительно λ. Тогда, по сдѣланному въ концѣ § 28 замѣчанію, число круговыхъ группъ порядка pp' будетъ равно суммѣ произведеній степени относительно λ' уравненія $L'_{v'}=0$ на степень относительно λ перваго уравненія изъ трехъ уравненій каждой группы изъ (8), (9) и (10) и это для каждой аналитической точки, представляемой парою послѣднихъ двухъ уравненій той же группы.

Для рѣшеній, представляемыхъ системою (7) наст. §, нужно новое приближеніе, третье; но для этого надобно знать предварительно порядокъ кратности каждаго кратнаго корня уравненія $L'_{v'}=0$; какъ этого можно достигнуть, будетъ показано въ слѣдующемъ §.

30. Для опредѣленія кратности каждаго r' изъ корней λ' уравненія $L'_{v'}=0$, опредѣляемаго системою уравненій (7) пред. §, ищемъ, для какихъ значеній x, y, v эти значенія λ' удовлетворяютъ одному, двумъ, тремъ первымъ, наконецъ, $r'-2$ изъ слѣдующихъ уравненій:

$$(1)\qquad \frac{d^2L'_{v'}}{d\lambda'^2}=0,\quad \frac{d^3L'_{v'}}{d\lambda'^3}=0,\ \ldots\ \frac{d^{r'-1}L'_{v'}}{d\lambda'^{r'-1}}=0.$$

Такъ какъ эти уравненія такого же вида, какъ первое изъ (7) пред. §, то, присоединяя къ этой системѣ (7) пред. § первое изъ уравненій (1), именно:

$$\frac{d^2L'_{v'}}{d\lambda'^2}=0, \qquad (2)$$

будемъ искать, какъ въ пред. §, какія изъ рѣшеній этой системы (7) ему удовлетворяютъ; эти рѣшенія представятся системами четырехъ уравненій такого же вида, какъ сама система (7) пред. §. Пусть одна изъ нихъ будетъ:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x,y,v,\lambda)=0,\\ f'_3(x,y,v)=0,\\ \Phi'_2(x,y)=0,\\ \Theta'(x)=0; \end{array}\right| \qquad (3)$$

исключая эти рѣшенія изъ рѣшеній системы (7) пред. §, мы представимъ тѣ рѣшенія этой системы, характеризующей тѣ аналитическія точки, въ которыхъ уравненіе $L'_{v'}=0$ имѣетъ только двукратные корни, системами уравненій такихъ четырехъ видовъ (гдѣ $\bar{\Theta}'(x)$ наименьшее кратное всѣхъ $\Theta'(x)$, относящихся къ тому же верхнему уравненію):

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,v,\lambda')=0,\\ f_3(x,y,v)=0,\\ \Phi_2(x,y)=0,\\ \Theta'(x):\bar{\Theta}'(x)=0; \end{array}\right| \qquad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,v,\lambda')=0,\\ f_3(x,y,v)=0,\\ \Phi_2(x,y):\Phi'_2(x,y)=0,\\ \Theta'(x)=0; \end{array}\right| \qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,v,\lambda')=0,\\ f_3(x,y,v):f'_3(x,y,v)=0,\\ \Phi'_2(x,y)=0,\\ \Theta'(x)=0; \end{array}\right\} \qquad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,v,\lambda'):f'(x,y,v,\lambda')=0,\\ f'_3(x,y,v)=0,\\ \Phi'_2(x,y)=0,\\ \Theta'(x)=0. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Присоединяя къ каждой системѣ уравненій (3) второе изъ уравненій (1), именно:

$$\frac{d^3L'_{v'}}{d\lambda'^3}=0, \qquad (8)$$

и трактуя полученную систему такимъ же точно образомъ, мы представимъ системами, подобными системамъ (4) — (7), тройные корни λ' уравненія $L'_{i'}=0$, и системами вида (3) корни λ' того же уравненія высшей кратности. Присоединяя къ этой послѣдней слѣдующее изъ уравненій и трактуя новую систему такимъ же точно образомъ, мы, продолжая это дѣлать, наконецъ, придемъ къ тому, что представимъ системами вида (3) r'-кратные корни λ' уравненія $L'_{i'}=0$, тогда какъ системами видовъ (4) — (7) рѣшенія низшей кратности.

31. Пусть будетъ

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &f''(x, y, v, \lambda')=0,\\ &f'(x, y, v)=0,\\ &\Phi'(x, y)=0,\\ &\Theta'(x)=0,\end{aligned}\right.$$

одна изъ системъ, опредѣляющихъ r'-кратный корень v' уравненія $L'_{i'}=0$. Такъ какъ $\lambda'=v'^{p'}$, то эту систему мы можемъ представить въ такомъ видѣ:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &f''(x, y, v, v'^{p'})=0,\\ &f'(x, y, v)=0,\\ &\Phi'(x, y)=0,\\ &\Theta'(x)=0.\end{aligned}\right.$$

Для r'-кратнаго корня λ' уравненія $L'_{i'}=0$ мы будемъ имѣть r' приближенныхъ значеній η'_1, между собою равныхъ, вида (8) § 28; поэтому для распредѣленія по круговымъ группамъ корней даннаго уравненія, нужно новое приближеніе, третье. Съ этою цѣлью положимъ

$$(3)\qquad \xi'=\xi''^{p'};$$

тогда по (24) § 28 будетъ:

$$(4)\qquad \eta'=(v'+\eta'')\,\xi''^{q'},$$

гдѣ v' одно изъ p' значеній $\sqrt[p]{\lambda'}$, а λ' r'-кратный корень уравненія $L'_{i'}=0$, слѣд., одно изъ рѣшеній системы (1); вводя ξ'' и η'' при помощи (3) и (4) въ (6) § 28 (безъ тѣхъ его членовъ, въ которыхъ $A'_{\alpha'\beta'}=0$ для рѣшеній (7) § 28) и располагая по степенямъ новыхъ перемѣнныхъ, мы получимъ уравненіе вида:

$$(5)\qquad \sum A''_{\alpha''\beta''}\,\eta''^{\alpha''}\,\xi''^{\beta''}=0,$$

въ которомъ коэффиціенты $A''_{\alpha''\beta''}$ будутъ полиномы относительно v', въ которыхъ коэффиціентами при степеняхъ этой перемѣнной будутъ линейныя функціи отъ $A'_{\alpha'\beta'}$, слѣд., полиномы отъ v съ коэффиціентами — линейными функціями отъ $A_{\alpha\beta}$, слѣд., раціональными функціями отъ x, y. Для нѣкоторыхъ изъ значеній x, y, v, v', удовлетворяющихъ уравненіямъ (2), нѣкоторые изъ коэффиціентовъ $A''_{\alpha''\beta''}$ могутъ обратиться въ нуль; чтобы отыскать такія значенія этихъ перемѣнныхъ, мы будемъ искать общія рѣшенія системы изъ (2) и тѣхъ уравненій, которыя получимъ, приравнявъ нулю избранные изъ коэффиціентовъ $A''_{\alpha''\beta''}$ въ (5). Пусть будетъ

$$\left.\begin{aligned} &f'_1(x, y, v, v')=0,\\ &f''_1(x, y, v)=0,\\ &\Phi'_1(x, y)=0,\\ &\Theta'_1(x)=0,\end{aligned}\right\}\qquad (6)$$

одна изъ такихъ системъ; предполагая, что въ (5) x, y, v, v' имѣютъ значенія, удовлетворяющія этой системѣ уравненій, мы будемъ знать, какіе члены тамъ останутся по выбрасываніи равныхъ нулю, слѣд., будемъ знать всѣ α'', β'', и можемъ, слѣд., построить выпуклую къ началу ломанную линію P'' и для каждаго колѣна ея $C''_{i''}$ уравненіе

$$L''_{i''}=0, \qquad (7)$$

степени $k''_{i''}$ относительно λ'', гдѣ

$$\lambda''=v''^{p''}, \qquad (8)$$

если положимъ

$$\eta''=v''\,\xi''^{\mu''}, \qquad (9)$$

гдѣ

$$\mu''=\frac{\beta''_{i''}-\beta''_{i''+1}}{\alpha''_{i''+1}-\alpha''_{i''}}, \qquad (10)$$

а $\alpha''_{i''}, \beta''_{i''}$ координаты начала колѣна $C''_{i''}$, и $\alpha''_{i''+1}, \beta''_{i''+1}$ координаты его конца. Опять, подобно тому, какъ было сдѣлано нами при первомъ и второмъ приближеніи, мы можемъ и здѣсь выдѣлить изъ рѣшенія системы (6) уравненій тѣ рѣшенія, для которыхъ уравненіе (7) будетъ имѣть только простые корни λ''; эти рѣшенія представятся системами четырехъ уравненій видовъ (4) — (7) § 30, тогда какъ тѣ, для которыхъ то же уравненіе будетъ имѣть кратные корни, представятся системой четырехъ уравненій вида (3) того же § 30. Для первыхъ третье приближеніе послужитъ къ распредѣленію корней на круговыя группы, ибо точное значеніе η будетъ имѣть такой видъ:

$$\eta=v\xi^{\frac{q}{p}}+v'\xi^{\frac{qp'+q'}{pp'}}+(v''+\eta'')\,\xi^{\frac{(p'q+q')p''+q''}{pp'p''}}, \qquad (11)$$

гдѣ v одно изъ p значеній радикала $\sqrt[p]{\lambda}$ при одномъ и томъ же значеніи λ, v' одно изъ p' значеній радикала $\sqrt[p']{\lambda'}$ при одномъ и томъ же значеніи λ', v'' одно изъ p'' значеній радикала $\sqrt[p'']{\lambda''}$ при одномъ и томъ же значеніи λ''. Такъ какъ каждое значеніе каждаго изъ этихъ радикаловъ можно комбинировать съ каждымъ значеніемъ каждаго изъ прочихъ двухъ, то число значеній η, которыя представляются формулою (11) для избранныхъ значеній $\lambda, \lambda', \lambda''$, будетъ равно произведенію $pp'p''$. Приведя всѣ показатели въ названной формулѣ къ одному знаменателю $pp'p''$, легко видѣть, что каждый изъ этихъ корней только послѣ $pp'p''$ оборотовъ точки ξ вокругъ нулевого его значенія вернется къ своему начальному значенію; при меньшемъ же числѣ оборотовъ будетъ переходить въ какой либо другой того же вида; слѣд., всѣ эти корни можно размѣстить въ такомъ порядкѣ, что при обходѣ точкою ξ своего нулевого значенія каждый корень будетъ переходить въ слѣдующій, а послѣдній въ первый (подобно тому, какъ это было сдѣлано нами въ § 24); слѣд., эти корни составляютъ круговую группу порядка $pp'p''$. Такихъ круговыхъ группъ будетъ столько, сколько единицъ въ произведеніи числа значеній λ на число значеній λ' при каждомъ λ, на число значеній λ'' при каждой комбинаціи значеній λ и λ'. Примѣчаніе § 28 имѣетъ силу и относительно уравненій (6): въ нихъ входятъ лишь степени v кратныя p, степени v' кратныя p', такъ что лѣвыя части ихъ можно разсматривать какъ функціи λ, λ'; тогда, если μ_i степень второго изъ уравненій (6) относительно λ, $\mu'_{i'}$ степень перваго изъ тѣхъ же уравненій относительно λ', наконецъ, $\mu''_{i''}$ число простыхъ корней уравненія $L''_{i''}=0$, это число круговыхъ группъ порядка $pp'p''$, выражаемыхъ формулой 11, будетъ

$$(12) \qquad = \mu_i \mu'_{i'} \mu''_{i''}.$$

Число всѣхъ круговыхъ группъ этого порядка во всѣхъ аналитическихъ точкахъ, представляемыхъ парами послѣднихъ двухъ изъ уравненій (6), получится, когда это число (12) помножимъ на число аналитическихъ точекъ, представляемыхъ этой парой, которое равно произведенію степени третьяго уравненія относительно y на степень четвертаго относительно x.

32. Въ случаѣ кратныхъ корней уравненія $L''_{i''}=0$ потребуется четвертое приближеніе, которое приведетъ къ такимъ же дѣйствіямъ; ходъ ихъ достаточно выяснился въ пред. §, чтобы нужно было на этомъ останавливаться. Продолжая также поступать, если потребуются и дальнѣйшія приближенія, мы все таки придемъ, наконецъ, къ такому уравненію, $L^{(r)}_{i(r)}=0$, котораго всѣ корни будутъ простые, и тогда будутъ

извѣстны число и порядокъ всѣхъ круговыхъ группъ въ каждой особенной аналитической точкѣ; слѣд., будетъ извѣстно и число w [(7) § 20]. Системы, характеризующія каждую особенную точку, будутъ всегда состоять изъ нѣсколькихъ уравненій съ убывающимъ на единицу числомъ неизвѣстныхъ: $x, y, v, v', \ldots v^{(r-1)}$, начиная съ послѣдней; если степени этихъ уравненій относительно той изъ перемѣнныхъ: $\lambda = v^p$, $\lambda' = v^{p'}$ $\ldots \lambda^{(r-1)} = v^{p^{(r-1)}}$ (ибо и относительно этихъ уравненій будетъ имѣть мѣсто примѣчаніе § 28), которая не входитъ въ слѣдующія уравненія, будутъ $\mu, \mu', \mu'', \ldots \mu^{(r-1)}$, а степень уравненія $L^{(r)}_{i^{(r)}}=0$ относительно $\lambda^{(r)} = v^{(r)p^{(r)}}$ будетъ $\mu^{(r)}$, то число круговыхъ группъ порядка

$$pp'p''\ldots p^{(r-1)}p^{(r)} \tag{1}$$

будетъ

$$\mu\mu'\mu''\ldots\mu^{(r-1)}\mu^{(r)}, \tag{2}$$

и для всѣхъ особенныхъ точекъ этой категоріи число ихъ будетъ равно произведенію этого послѣдняго числа (2) на число точекъ разсматриваемой категоріи, которое будетъ равно произведенію степени относительно y предпослѣдняго уравненія системы на степень относительно x послѣдняго уравненія ея. Значенія же y, составляющія одну круговую группу, представятся формулою:

$$y = b + v\xi^{\frac{q}{p}} + v'\xi^{\frac{p'q+q'}{pp'}} + v''\xi^{\frac{(p'q+q')p''+q''}{pp'p''}} + \cdots + (v^{(r)} + \eta^{(r)})\xi^{\frac{Q}{pp'p''\ldots p^{(r)}}}, \tag{3}$$

гдѣ Q цѣлая функція всѣхъ предшествующихъ p и q со значками, которая вычисляется по тому же закону, какъ и всѣ предшествующіе числители показателей, который состоитъ въ томъ, что числитель предшествующаго показателя помножается на слѣдующее p и къ произведенію придается соотвѣтственное q, такъ что

$$Q = \Bigg\{\Bigg(\Big(\big(((qp'+q')p''+q'')p'''+q'''\big)p^{(\text{IV})}+q^{(\text{IV})}\Big)p^{(\text{V})}+\cdots+ \\ + q^{(r-2)}\Bigg)p^{(r-1)}+q^{(r-1)}\Bigg\}p^{(r)}+q^{(r)}. \tag{4}$$

Изъ этой формулы (3), гдѣ для v нужно взять каждое изъ значеній радикала $\sqrt[p]{\lambda}$, для v' каждое изъ значеній радикала $\sqrt[p']{\lambda'}$, для v'' каждое изъ значеній радикала $\sqrt[p'']{\lambda''}, \ldots$ наконецъ, для $v^{(r)}$ каждое изъ значеній радикала $\sqrt[p^{(r)}]{\lambda^{(r)}}$, для одной какой либо системы значеній $\lambda, \lambda', \lambda'' \ldots \lambda^{(r)}$ изъ всего числа ихъ (2), видно, что каждый корень y возвратится къ своему прежнему значенію только послѣ $pp'p''\ldots p^{(r)}$ оборотовъ; для меньшаго числа оборотовъ перейдетъ въ другой той же группы, такъ что ихъ можно расположить въ такомъ порядкѣ, что каждый будетъ переходить въ слѣдующій, а послѣдній въ первый, откуда и слѣдуетъ, что отвѣчающіе избранной системѣ значеній $\lambda, \lambda', \ldots \lambda^{(r)}$ составятъ круговую группу порядка (1), и что такихъ группъ будетъ всего по (2) $\mu\mu'\mu''\ldots\mu^{(r)}$.

33. Для опредѣленія ранга Римановой поверхности не только необходимо, но и достаточно было знать число и порядокъ всѣхъ круговыхъ группъ для каждой изъ особенныхъ аналитическихъ точекъ; но для построенія Римановой поверхности этого еще недостаточно: надобно еще знать, какихъ именно изъ значеній $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots y_n^{(0)}$ функціи y при $x = x^{(0)}$, гдѣ $x^{(0)}$ обыкновенная точка, суть аналитическія продолженія элементы каждой круговой группы въ каждой особенной точкѣ. Для этого уже надобно знать съ большимъ приближеніемъ значенія x и y въ такихъ точкахъ. Тѣ пары уравненій, которыми мы ихъ представляли въ пред. §§, значительно облегчаютъ эту задачу. Точныхъ значеній для опредѣленія, продолженія какихъ изъ $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots y_n^{(0)}$ перемѣщаются въ круговомъ порядкѣ при обходѣ особенной точки независимою перемѣнною x, и не требуется; достаточно, если можно приближеніе сдѣлать сколь угодно большимъ; тогда, вычисляя съ неменьшею, чѣмъ нужно, точностью аналитическія продолженія $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots y_n^{(0)}$, мы и рѣшимъ вопросъ, какія изъ этихъ продолженныхъ значеній y въ $x^{(0)}$ образуютъ круговую группу и въ какомъ порядкѣ перемѣщаются; а тогда можно, хотя приближенно, построить винтовыя точки и переходныя линіи.

34. Для приближеннаго вычисленія аналитическихъ продолженій значеній y въ точкѣ $x = x_0$, надобно прибѣгнуть къ разложенію функцій въ ряды. Для обыкновенныхъ мѣстъ алгебраическаго образа это можно сдѣлать, разлагая y по степенямъ приращенія x по строкѣ Тэйлора; такъ, въ точкѣ $x = x_0$, $y = y_0$, будемъ имѣть:

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{1}{1.2} y_0''(x - x_0)^2 + \ldots \tag{1}$$

Если $x - x_0$ выразить сходящимся рядомъ, расположеннымъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ вспомогательной величины t, который обращается въ нуль при $t = 0$, то, внося этотъ рядъ въ (1), выразимъ x и y, оба, рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ t:

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 + t\mathfrak{P}_1(t), \\ y &= y_0 + t\mathfrak{P}_2(t), \end{aligned}\right. \tag{2}$$

гдѣ нѣмецкое $\mathfrak{P}$ всегда будетъ обозначать, по примѣру Вейерштрасса, рядъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ степенямъ своего аргумента (Potenzreihe). Въ точкахъ развѣтвленія строка Тэйлора непримѣнима; но и для такихъ точекъ можно найти аналогичныя (2)

выраженія. Если въ (3) § 32 положить $\xi = \xi^{(r)^{pp'p''\ldots p^{(r)}}}$, и внести это въ формулы: $x = a + \xi$, $y = b + \eta$, то мы будемъ имѣть такую пару:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \xi^{(r)^{pp'p''\ldots p^{(r)}}}, \\ y &= b + v\xi^{(r)^{qp'p''\ldots p^{(r)}}} + v'\xi^{(r)^{(qp'+q')p''\ldots p^{(r)}}} + \\ &+ v''\xi^{(r)^{((qp'+q')p''+q'')p'''\ldots p^{(r)}}} + \cdots + (v^{(r)} + \eta^{(r)})\xi^{(r)^{Q_r}}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

гдѣ Q_r имѣетъ значеніе (4) § 32. Здѣсь $\eta^{(r)}$, возвращаясь къ своему значенію вмѣстѣ съ $\xi^{(r)}$, будетъ представлять рядъ, расположенный по степенямъ $\xi^{(r)}$. Слѣд., формулы (3) даютъ x и y разложенными въ рядъ по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ $\xi^{(r)}$, сходящійся для достаточно малыхъ значеній $\xi^{(r)}$. Эти ряды останутся таковыми, если вмѣсто $\xi^{(r)}$ подставить его выраженіе чрезъ t въ формѣ степеннаго ряда $\mathfrak{P}(t)$ (Potenzreihe). Но въ то время, какъ въ обыкновенной аналитической точкѣ *одна* пара функцій (Functionen-paar) (2) представляла элементъ алгебраическаго образа, въ точкѣ особенной $x = a$, $y = b$ ихъ требуется *нѣсколько*, ибо пара (3) представитель всѣхъ, получающихся изъ нея, давая $v, v', \ldots v^{(r)}$ всѣ ихъ значенія; поэтому такія мѣста называются *многоэлементными мѣстами* алгебраическаго образа (mehrelementige Stellen, Nöther, Weierstrass). Представленіе элементовъ алгебраическаго образа парами функцій описаннаго вида играетъ большую роль въ теоріи Вейерштрасса, котораго всѣ выводы и доказательства основаны на такомъ представленіи элементовъ алгебраическаго образа [1]). Мы будемъ къ этому прибѣгать лишь очень рѣдко, а потому не будемъ входить въ бóльшія подробности относительно этого; остановимся только на числѣ паръ функцій многоэлементнаго мѣста. Когда требуется одно первое приближеніе, слѣд., въ (3) входитъ только одно v, то число всѣхъ паръ функцій будетъ равно числу всѣхъ значеній v для всѣхъ колѣнъ линіи P. Для одного колѣна C_i этой ломанной линіи число значеній v будетъ равно (по § 24) $k_i p = \alpha_i - \alpha_{i+1}$; слѣд., для всѣхъ колѣнъ оно представится суммою:

$$\sum_{i=0}^{i=h-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) = \alpha_0, \tag{4}$$

ибо $\alpha_h = 0$. Если $L_i = 0$ имѣетъ кратные корни, такъ что потребуется второе приближеніе, то каждый его кратный корень приведетъ къ полигону P', для каждаго изъ которыхъ такое же разсужденіе дастъ α_0' для числа всѣхъ значеній v', отвѣчающихъ одному такому полигону; слѣд., обозначая чрезъ $\sum_1 \alpha_0'$ сумму, распространенную на всѣ такіе

[1]) См. *Biermann:* Theorie der analytischen Functionen. Leipzig, 1887. Стр. 205 и слѣдующія.

полигоны, отвѣчающіе всѣмъ кратнымъ корнямъ всѣхъ уравненій $L_i=0$, мы будемъ имѣть для числа всѣхъ элементовъ въ алгебраическомъ мѣстѣ (a, b) такую формулу:

$$\alpha_0+\sum\nolimits_1\alpha'_0. \tag{5}$$

Если уравненіе $L'_{i'}=0$ для какого либо колѣна P' имѣетъ кратные корни, то тогда α''_0 представитъ число значеній v' для всѣхъ колѣнъ полигона P'', отвѣчающаго одному такому корню. Означая чрезъ $\sum_2\alpha''_0$ сумму, распространенную на всѣ колѣна всѣхъ полигоновъ P'', отвѣчающихъ всѣмъ полигонамъ P', которые отвѣчаютъ всѣмъ полигонамъ P, мы получимъ для числа элементовъ въ алгебраическомъ мѣстѣ (a, b) такую формулу:

$$\alpha_0+\sum\nolimits_1\alpha'_0+\sum\nolimits_2\alpha''_0. \tag{6}$$

И т. д. Послѣ $r+1$ приближеній будемъ имѣть такую формулу для числа всѣхъ элементовъ въ мѣстѣ (a, b) алгебраическаго образа, когда требуется $r+1$ приближеній:

$$\alpha_0+\sum\nolimits_1\alpha'_0+\sum\nolimits_2\alpha''_0+\cdots+\sum\nolimits_r\alpha_0^{(r)}, \tag{7}$$

гдѣ каждая сумма распространяется на всю серію зависящихъ одинъ отъ другого полигоновъ до носящаго номеръ, равный значку суммы включительно.

35. Число элементарныхъ обходовъ (lacets binaires) въ точкѣ развѣтвленія (a, b), или, что то же, ей эквивалентное число двойныхъ точекъ, перемѣщающихъ лишь два корня одинъ въ другой (равное числу переложеній, на которыя разбивается каждая круговая группа), въ случаѣ, когда уравненія $L_i=0$ имѣютъ для всѣхъ колѣнъ полигона P простые корни, будетъ

$$N_{ab}=\sum_{i=0}^{i=h-1}k_i(p_i-1), \tag{1}$$

ибо для C_i будемъ имѣть k_i круговыхъ группъ порядка p_i. Это число можно выразить еще иначе:

$$N_{ab}=\sum_{i=0}^{i=h-1}k_ip_i-\sum_{i=0}^{i=h-1}k_i=\sum_{i=0}^{i=h-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})-\sum_{i=0}^{i=h-1}k_i=\alpha_0-\sum_{i=1}^{i=h-1}k_i. \tag{2}$$

Эту послѣднюю формулу можно получить и такъ: α_0 значеній y дѣлаются равными; слѣд., α_0 буквъ въ подстановкѣ, отвѣчающей разсматриваемой особенной аналитической точкѣ, распредѣляются на k_i группъ порядка p_i, гдѣ $i=0, 1, 2, \ldots h-1$; число переложеній круговой подстановки порядка p_i есть p_i-1; таково и число элементарныхъ обходовъ (lacets binaires), если отбросить послѣдній, переводящій послѣд-

нюю букву въ первую; слѣд., число всѣхъ элементарныхъ обходовъ для точки (a, b) равно числу всѣхъ переложеній, а оно равно числу всѣхъ буквъ подстановки безъ числа круговыхъ группъ, на которыя разбивается подстановка. Въ случаѣ, требующемъ нѣсколькихъ послѣдовательныхъ приближеній проще всего получить число элементарныхъ обходовъ (lacets binaires) для точки развѣтвленія по слѣдующему способу Briot. И въ этомъ случаѣ число элементарныхъ обходовъ будетъ равно числу значеній y, дѣлающихся равными, безъ числа всѣхъ круговыхъ группъ, на которыя разбиваются эти равныя значенія y; теперь каждому простому корню $\lambda^{(r)}$ уравненія $L^{(r)}_{i(r)}=0$ будетъ отвѣчать круговая группа порядка $pp'p''\ldots p^{(r)}$, какъ мы видѣли въ § 32; число же простыхъ корней такого уравненія равно его степени, уменьшенной на сумму порядковъ кратности всѣхъ кратныхъ корней этого уравненія; слѣд., число всѣхъ круговыхъ группъ этого порядка къ точкѣ (a, b) будетъ

$$=\sum\nolimits_r k_i^{(r)}-\sum\nolimits_{r+1}\alpha_0^{(r+1)}, \tag{3}$$

гдѣ первая сумма распространена на всѣ уравненія $r+1$-го приближенія, т. е. на всѣ $L_i^{(r)}=0$, а вторая на всѣ уравненія слѣдующаго приближенія. Такимъ образомъ, число всѣхъ круговыхъ группъ значеній y, дѣлающихся $=b$ при $x=a$, будетъ:

$$\begin{aligned}&\left(\sum k-\sum\nolimits_1\alpha'_0\right)+\left(\sum\nolimits_1 k'-\sum\nolimits_2\alpha''_0\right)+\cdots+\\ &\qquad+\left(\sum\nolimits_{g-2}k^{g-2}-\sum\nolimits_{g-1}\alpha_0^{(g-1)}\right)+\sum\nolimits_{g-1}k^{(g-1)},\end{aligned} \tag{4}$$

если g приближеній потребовалось, гдѣ суммы относятся ко всѣмъ колѣнамъ P, всѣхъ P, P', всѣхъ P, P', P'', ... наконецъ, всѣхъ $P, P' \ldots P^{(g-1)}$. Если это число вычесть изъ числа α_0 всѣхъ значеній y, дѣлающихся $=b$ при $x=a$, то будемъ имѣть число всѣхъ элементарныхъ обходовъ (lacets binaires) для точки (a, b):

$$\begin{aligned}N_{ab}=\alpha_0+\sum\nolimits_1\alpha'+\sum\nolimits_2\alpha''_0+\cdots+\sum\nolimits_{g-1}\alpha^{(g-1)}-\\ -\sum k-\sum\nolimits_1 k'-\sum\nolimits_2 k_2-\cdots-\sum\nolimits_{g-1}k^{(g-1)}.\end{aligned} \tag{5}$$

Оно равняется числу элементовъ алгебраическаго образа въ точкѣ $x=a$, $y=b$, уменьшенному на сумму степеней относительно $\lambda, \lambda', \lambda''\ldots$ всѣхъ уравненій, которыя потребовались намъ для распредѣленія на круговыя группы значеній y, дѣлающихся $=b$ при $x=a$.

36. Степенью аналитической точки (dégré du point analytique, Briot) называется степень $\xi=x-a$, въ которой этотъ множитель входитъ въ дискриминантъ. Для опредѣленія этой степени обратимся къ равенству (6) § 5, опредѣляющему дискриминантъ, и формуламъ пред. §§, выражающимъ послѣдовательныя приближенія y. Въ опредѣленіе дискриминанта входитъ произведеніе $\prod\frac{\partial F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})}{\partial y}$, которое мы теперь и изслѣдуемъ. Подстановка $x=a+\xi$, $y=b+\eta$, $\eta=v\xi^{\mu}$ приводитъ $F(x,y)$ по § 24 къ такому виду:

(1) $$F(x,y)=F(a+\xi,\,b+v\xi^{\mu})=\xi^{\alpha_i\mu+\beta_i}F_1(\xi,v);$$

дифференцируя по v, получимъ:

(2) $$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\xi^{\alpha_i\mu+\beta_i}\frac{\partial F_1(\xi,v)}{\partial v};$$

но

(3) $$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial\eta}{\partial v}=\xi^{\mu};$$

дѣля на это предыдущее равенство, будемъ имѣть:

(4) $$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\xi^{(\alpha_i-1)\mu+\beta_i}\frac{\partial F_1(\xi,v)}{\partial v}.$$

Внося это въ произведеніе, будемъ имѣть:

(5) $$\prod\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\xi^{\sum\limits_{i=0}^{i=h-1}k_ip[(\alpha_i-1)\mu+\beta_i]}\prod\frac{\partial F_1(\xi,v)}{\partial v},$$

ибо v имѣетъ k_ip значеній, которымъ отвѣчаетъ одинъ и тотъ же множитель $\xi^{(\alpha_i-1)\mu+\beta_i}$. Но по (10) § 24 $\alpha_i-\alpha_{i+1}=k_ip$, и $\beta_{i+1}-\beta_i=k_iq$; посему показатель ξ въ этой формулѣ такъ представится:

(6) $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{i=h-1}k_ip[(\alpha_i-1)\mu+\beta_i]&=\sum_{i=0}^{i=h-1}k_i[(\alpha_i-1)q+\beta_ip]=\\&=\sum_{i=0}^{i=h-1}[(\beta_{i+1}-\beta_i)(\alpha_i-1)+\beta_i(\alpha_i-\alpha_{i+1})]=\\&=\sum_{i=0}^{i=h-1}(\alpha_i\beta_{i+1}-\beta_i\alpha_{i+1}+\beta_i-\beta_{i+1})=\\&=\sum_{i=0}^{i=h-1}(\alpha_i\beta_{i+1}-\beta_i\alpha_{i+1})-\beta_h;\end{aligned}$$

это число мы для краткости означимъ чрезъ $\mathfrak{D}_{ab}$, такъ что, слѣд., будетъ

$$\mathfrak{D}_{ab}=\sum_{i=0}^{i=h-1}(\alpha_i\beta_{i+1}-\beta_i\alpha_{i+1})-\beta_h. \tag{7}$$

Внося это въ (5), будемъ имѣть:

$$\prod\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\xi^{\mathfrak{D}_{ab}}\prod\frac{\partial F_1(\xi,v)}{\partial v}. \tag{8}$$

Такова будетъ степень $\xi=x-a$ въ дискриминантѣ, если одного перваго приближенія достаточно для распредѣленія на круговыя группы корней $y=b$ при $x=a$; ибо тогда произведеніе, направо стоящее, не будетъ содержать множителемъ степени ξ; но иначе дѣло будетъ, если потребуется второе приближеніе для раздѣленія корней на круговыя группы: тогда въ названное произведеніе войдетъ множителемъ степень ξ. Для второго приближенія полагаемъ [§ 28]:

$$\xi=\xi'^{p}; \tag{9}$$

$$v=v_1+\eta',\qquad \eta'=v'\xi'^{\mu'}; \tag{10}$$

гдѣ v_1 одно изъ частныхъ приближенныхъ значеній v; тогда будетъ:

$$F_1(\xi,v)=\xi'^{\alpha'_{i'}\mu'+\beta'_{i'}}F_2(\xi',v'). \tag{11}$$

Дифференцируя это по v', получимъ:

$$\frac{\partial F_1(\xi,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v'}=\xi'^{\alpha'_{i'}\mu'+\beta'_{i'}}\frac{\partial F_2(\xi',v')}{\partial v'}; \tag{12}$$

но

$$\frac{\partial v}{\partial v'}=\frac{\partial\eta'}{\partial v'}=\xi'^{\mu'}; \tag{13}$$

дѣля на это предыдущее, получимъ:

$$\frac{\partial F_1(\xi,v)}{\partial v}=\xi'^{(\alpha'_{i'}-1)\mu'+\beta'_{i'}}\frac{\partial F_2(\xi',v')}{\partial v'}. \tag{14}$$

Поэтому будетъ

$$\prod\frac{\partial F_1(\xi,v)}{\partial v}=\xi'^{\Sigma pk'_{i'}p'[(\alpha'_{i'}-1)\mu'+\beta'_{i'}]}\prod\frac{\partial F_2(\xi',v')}{\partial v'}, \tag{15}$$

ибо v_1 имѣетъ p и v' $k'p'$ значеній, для которыхъ получится одинъ и тотъ же множитель въ (14). Но для одного полигона P':

$$\sum_{i'} k'_i p'((\alpha'_{i'}-1)\mu'+\beta'_{i'}) = \sum_{i'} k'_i((\alpha'_{i'}-1)q'+\beta'_{i'}p') =$$

(16)

$$= \sum_{i'}(\alpha'_{i'}\beta'_{i'+1}-\beta'_{i'}\alpha'_{i'+1}) - \beta'_{h'} = \mathfrak{D}'_{ab},$$

гдѣ сумма распространена на всѣ колѣна полигона P', тогда какъ въ (15) она распространялась на всѣ колѣна всѣхъ такихъ полигоновъ. Имѣя въ виду (9), и внося изъ (16) въ (15), оттуда въ (8), будемъ имѣть для случая, когда требуются два приближенія:

$$\prod \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \xi^{\mathfrak{D}_{ab}+\Sigma_1 \mathfrak{D}'_{ab}} \prod \frac{\partial F_2(\xi', v')}{\partial v'}. \tag{17}$$

Когда потребуется три приближенія, то, полагая [§ 31]:

$$\xi' = \xi''^{v'}, \tag{18}$$

$$\eta' = v'_1 + \eta'', \qquad \eta'' = v''\xi''^{\mu''}, \tag{19}$$

мы подобно предыдущему получимъ:

$$F_2(\xi', v') = \xi''^{\alpha''_{i''}\mu''+\beta''_{i''}} F_3(\xi'', v''), \tag{20}$$

откуда

$$\frac{\partial F_2(\xi', v')}{\partial v'} = \xi''^{(\alpha''_{i''}-1)\mu''+\beta''_{i''}} \frac{\partial F_3(\xi'', v'')}{\partial v''}. \tag{21}$$

Входящій сюда множитель будетъ одинъ и тотъ же для pp' комбинацій значеній v_1 и v'_1 и $k''_{i''}p''$ значеній v'', а потому будемъ имѣть:

$$\prod \frac{\partial F_2(\xi', v')}{\partial v'} = \xi''^{\Sigma pp'k''_{i''}p''((\alpha''_{i''}-1)\mu''+\beta''_{i''})} \prod \frac{\partial F_3(\xi'', v'')}{\partial v''} =$$

(22)

$$= \xi^{\Sigma_2 \mathfrak{D}''_{ab}} \prod \frac{\partial F_3(\xi'', v'')}{\partial v''},$$

и, слѣд.,

$$\prod \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \xi^{\mathfrak{D}_{ab}+\Sigma_1\mathfrak{D}'_{ab}+\Sigma_2\mathfrak{D}''_{ab}} \prod \frac{\partial F_3(\xi'', v'')}{\partial v''}. \tag{23}$$

Продолжая эти разсужденія, придемъ для случая, когда нужно g приближеній, къ такой формулѣ:

$$\prod \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \xi^{D_{ab}} \prod \frac{\partial F_g(\xi^{(g-1)}, v^{(g-1)})}{\partial v^{(g-1)}}, \tag{24}$$

гдѣ

$$D_{ab} = \mathfrak{D}_{ab} + \sum_1 \mathfrak{D}'_{ab} + \sum_2 \mathfrak{D}''_{ab} + \cdots + \sum_{g-1} \mathfrak{D}^{(g-1)}_{ab}. \tag{25}$$

Это D_{ab} и есть степень аналитической точки $x=a$, $y=b$. Здѣсь суммы распространяются на всѣ полигоны до имѣющаго значекъ одинаковаго нумера съ суммою.

37. Вычтемъ N_{ab} изъ D_{ab}; можно показать, что разность будетъ четное число: оно имѣетъ фундаментальное значеніе въ нашей теоріи, почему мы остановимся на этой разности. Производя сказанное вычитаніе, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} & D_{ab} - N_{ab} = \\ & = \mathfrak{D}_{ab} - \alpha_0 + \sum k + \\ & + \sum_1 \mathfrak{D}'_{ab} - \sum_1 \alpha'_0 + \sum_1 k' + \\ & + \sum_2 \mathfrak{D}''_{ab} - \sum_2 \alpha''_0 + \sum_2 k'' + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + \sum_{g-1} \mathfrak{D}^{(g-1)}_{ab} - \sum_{g-1} \alpha^{(g-1)}_0 + \sum_{g-1} k^{(g-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Но

$$\left.\begin{aligned} & \mathfrak{D}_{ab} - \alpha_0 + \sum k = \\ & = \sum_{i=0}^{i=h-1} [(\alpha_i\beta_{i+1} - \alpha_{i+1}\beta_i) + k_i] - \alpha_0 - \beta_h = 2\mathfrak{A}_{ab}; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} & \mathfrak{D}'_{ab} - \alpha'_0 + \sum k' = \\ & = \sum_{i'=0}^{i'=h'-1} [(\alpha'_{i'}\beta'_{i'+1} - \alpha'_{i'+1}\beta'_{i'}) + k'_{i'}] - \alpha'_0 - \beta'_{h'} = 2\mathfrak{A}'_{ab}; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned} & \mathfrak{D}^{(g-1)}_{ab} - \alpha^{(g-1)}_0 + \sum'_{g-1} k^{(g-1)} = \\ & = \sum_{i^{(g-1)}=0}^{i^{(g-1)}=h^{(g-1)}-1} \left[\left(\alpha^{(g-1)}_{i^{(g-1)}}\beta^{(g-1)}_{i^{(g-1)}+1} - \alpha^{(g-1)}_{i^{(g-1)}+1}\beta^{(g-1)}_{i^{(g-1)}}\right) + k^{(g-1)}_{i^{(g-1)}}\right] - \\ & \qquad - \alpha^{(g-1)}_0 - \beta^{(g-1)}_{h^{(g-1)}} = 2\mathfrak{A}^{(g-1)}_{ab}; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

гдѣ $2\mathfrak{A}_{ab}$, $2\mathfrak{A}'_{ab}$, $\ldots 2\mathfrak{A}^{(g-1)}_{ab}$ пока сокращенныя обозначенія стоящихъ налѣво выраженій, очевидно цѣлыхъ чиселъ; но мы увидимъ ниже, что это дѣйствительно четныя числа, ибо ниже докажемъ, что всѣ $\mathfrak{A}_{ab}$ суть цѣлыя числа. На основаніи этихъ равенствъ, полагая:

$$(5) \qquad A_{ab} = \mathfrak{A}_{ab} + \sum\nolimits_1 \mathfrak{A}'_{ab} + \sum\nolimits_2 \mathfrak{A}''_{ab} + \cdots + \sum\nolimits_{g-1} \mathfrak{A}^{(g-1)}_{ab},$$

равенство (1) можемъ короче такъ представить:

$$(6) \qquad D_{ab} - N_{ab} = 2A_{ab},$$

откуда

$$(7) \qquad D_{ab} = N_{ab} + 2A_{ab}.$$

Имѣя это въ виду, мы можемъ дискриминантъ такъ написать:

$$(8) \qquad \Delta = \prod (x-a)^{D_{ab}} = \prod (x-a)^{N_{ab}} \Big(\prod (x-a)^{A_{ab}} \Big)^2,$$

или, полагая

$$(9) \qquad V = \prod (x-a)^{N_{ab}},$$

$$(10) \qquad W = \Big(\prod (x-a)^{A_{ab}} \Big)^2,$$

короче:

$$(11) \qquad \Delta = V.\ W.$$

Первый множитель, т. е. V, Кронекеръ называлъ [1]) *существеннымъ* (wesentlicher), второй *несущественнымъ* (unwesentlicher Factor); Нётеръ называетъ первый Verzweigungsfactor, второй Doppelfactor, ибо первый даетъ значенія x въ точкахъ развѣтвленія функціи y, второй есть полный квадратъ. Послѣдній отвѣчаетъ *взаимноснимающимся* точкамъ развѣтвленія по выраженію Римана (sich-aufhebende Windungspuncte). Если положимъ:

$$(12) \qquad N = \sum N_{ab},$$

$$(13) \qquad A = \sum A_{ab},$$

гдѣ суммы распространяются на всѣ точки развѣтвленія (a, b), то N будетъ степень существеннаго множителя, а $2A$ степень несущественнаго. Такъ какъ

$$(14) \qquad D = \sum D_{ab},$$

[1]) Discriminante d. algebr. Functionen einer Variabeln. Crelle J., Bd. 91, S. 301.

гдѣ сумма опять распространена на всѣ точки развѣтвленія (a, b), есть степень дискриминанта Δ, которая съ другой стороны, какъ мы видѣли въ § 5, равна $2m(n-1)$, то имѣемъ:

$$D = 2m(n-1). \qquad (15)$$

Суммируя (7) по всѣмъ точкамъ (a, b), на основаніи (12)—(15), получимъ:

$$2m(n-1) = N + 2A; \qquad (16)$$

на основаніи этого равенства нахожденіе одного изъ чиселъ N и A сводится на другое. Имѣя въ виду, что w § 20 означаетъ число простыхъ винтовыхъ точекъ, эквивалентное всей совокупности винтовыхъ точекъ Римановой сферы, простой же винтовой точкѣ отвѣчаетъ переложеніе двухъ значеній y, слѣд., одинъ lacet, мы заключаемъ, что

$$w = N. \qquad (17)$$

Введя вмѣсто w N или по (16) A въ формулу Римана (9) § 20, получимъ такія два выраженія ранга p разсматриваемаго алгебраическаго образа и отвѣчающей ему Римановой сферы:

$$p = \frac{1}{2} N - n + 1; \qquad (18)$$

$$p = (m-1)(n-1) - A. \qquad (19)$$

Обѣ формулы сразу дадутъ p, какъ скоро удастся разложить дискриминантъ на два множителя, существенный и несущественный. Прежде, однако, намъ нужно еще показать, что числа $\mathfrak{A}_{ab}$, $\mathfrak{A}'_{ab}, \ldots \mathfrak{A}^{(g-1)}_{ab}$ суть цѣлыя числа [1]).

[1]) Вычисляя дискриминантъ уравненія (1) § 5 по формулѣ (6) того же §, мы можемъ иногда получить функцію x степени низшей D ((15) этого §): это всегда будетъ служить признакомъ того, что нѣкоторые изъ корней дискриминанта для разсматриваемаго частнаго вида основного уравненія удалились въ безконечность. Такъ, для гиперэллиптическихъ интеграловъ основное уравненіе, опредѣляющее ирраціональность, (1) § 5, принимаетъ такой видъ:

$$y^2 - R(x) = 0, \qquad (20)$$

гдѣ $R(x)$ полиномъ степени m; дискриминантъ этого уравненія будетъ:

$$\Delta(x) = \prod_{i=1}^{i=2} 2y_i = +2\sqrt{R(x)}\,.\, -2\sqrt{R(x)} = -4R(x); \qquad (21)$$

степень его есть m; но по формулѣ (15) этого § она должна быть $2m$, ибо $n=2$; слѣд., m корней дискриминанта находятся въ безконечности. Если $m=2\rho$, т. е. четное число, то значенію $x=\infty$ будутъ отвѣчать двѣ точки O' Римановой сферы, по одной въ каждомъ листѣ, въ каждую изъ которыхъ упадетъ по $\rho = \frac{m}{2}$ безконечностей функціи y, какъ убѣждаемся, полагая $x = \frac{1}{t}$. Эти безконечные корни дискриминанта, $x=\infty$, будутъ въ этомъ случаѣ принадлежать несущественному множителю его. Если $m = 2\rho + 1$, то

38. Это достаточно показать для перваго изъ нихъ, такъ какъ прочіе имѣютъ аналогичныя выраженія. Изъ (2) пред. § имѣемъ:

$$(1)\qquad \mathfrak{A}_{ab}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=h-1}(\alpha_i\beta_{i+1}-\alpha_{i+1}\beta_i+k_i)-\frac{\alpha_0+\beta_h}{2};$$

если въ скобкахъ придать и отнять $\alpha_{i+1}\beta_{i+1}$, то это можно такъ представить:

$$(2)\qquad \mathfrak{A}_{ab}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=h-1}\Big((\alpha_i-\alpha_{i+1})\beta_{i+1}+\alpha_{i+1}(\beta_{i+1}-\beta_i)+k_i\Big)-\frac{\alpha_0+\beta_h}{2};$$

прибавляя и отнимая $(\alpha_i-\alpha_{i+1})\beta_i$, будемъ имѣть:

$$(3)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{A}_{ab}&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=h-1}\Big((\alpha_i-\alpha_{i+1})(\beta_i+\beta_{i+1})-\alpha_i\beta_i+\alpha_{i+1}\beta_{i+1}+k_i\Big)-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}=\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=h-1}\Big((\alpha_i-\alpha_{i+1})(\beta_i+\beta_{i+1})+k_i\Big)-\frac{\alpha_0+\beta_h}{2},\end{aligned}$$

такъ какъ $\alpha_0\beta_0$ и $\alpha_h\beta_h$ равны нулю, ибо $\beta_0=0$ и $\alpha_h=0$; вычитая въ скобкахъ каждаго множителя по единицѣ, это можно такъ представить:

$$(4)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{A}_{ab}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=h-1}\Big((\alpha_i-\alpha_{i+1}-1)(\beta_i+\beta_{i+1}-1)+(\alpha_i-\alpha_{i+1})+\\+(\beta_i+\beta_{i+1})+k_i-1\Big)-\frac{\alpha_0+\beta_h}{2},\end{aligned}$$

или, такъ какъ $\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=h-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})=\frac{1}{2}\alpha_0$ и, слѣд., сократится съ $-\frac{\alpha_0}{2}$ послѣдняго члена, и кромѣ того перенося β_{i+1} въ слѣдующее по порядку слагаемое, и имѣя въ виду, что послѣднее $\frac{\beta_h}{2}$ опять сократится съ $-\frac{\beta_h}{2}$ послѣдняго члена; окончательно:

$$(5)\qquad \mathfrak{A}_{ab}=\sum_{i=0}^{i=h-1}\left\{\frac{1}{2}\Big((\alpha_i-\alpha_{i+1}-1)(\beta_i+\beta_{i+1}-1)+k_i-1\Big)+\beta_i\right\}.$$

$x=\infty$ будетъ отвѣчать одна точка O' Римановой сферы, которая будетъ винтовою; полагая въ этомъ случаѣ $x=\frac{1}{t^2}$, увидимъ, что при $t=0$ будетъ $y=\infty^m$; слѣд., m безконечностей и въ этомъ случаѣ упадутъ въ безконечность, въ винтовую точку O'. Изъ этихъ $m=2\rho+1$ безконечныхъ корней дискриминанта несущественному множителю его будетъ принадлежать $2\rho=m-1$ и одинъ существенному. Такимъ образомъ, въ случаѣ уравненія (20) и $m=2\rho$ всѣ корни несущественнаго множителя дискриминанта, а въ случаѣ $m=2\rho+1$ и одинъ корень существеннаго, удаляются въ безконечность, и дискриминантъ приводится къ $R(x)$, произведенію линейныхъ множителей существеннаго множителя дискриминанта, отвѣчающихъ его корнямъ, лежащимъ въ конечномъ.

Но $\frac{1}{2}(\alpha_i-\alpha_{i+1}-1)(\beta_i+\beta_{i+1}-1)$ представляетъ число точекъ (α,β), лежащихъ внутри трапеціи, которой параллельныя стороны суть ординаты β_i и β_{i+1} концевъ колѣна C_i, а остальныя ось $O\alpha$ и само колѣно C_i, и также раздѣленное на 2 число точекъ, лежащихъ на самомъ колѣнѣ въ числѣ k_i-1 безъ крайнихъ; къ половинѣ ихъ числа, тамъ заключающагося, еще придается $\frac{1}{2}(k_i-1)$ и затѣмъ ко всему еще число β_i точекъ на правой сторонѣ трапеціи; потому все выраженіе въ скобкахъ $\{\ \}$ представитъ число всѣхъ точекъ, лежащихъ внутри трапеціи, на самомъ колѣнѣ и на правой его ординатѣ; слѣд., все выраженіе (5) представитъ число точекъ, лежащихъ на полигонѣ P и ниже его, но не на осяхъ $O\alpha$ и $O\beta$. Это число $\mathfrak{A}_{ab}$, слѣд., есть число цѣлое, что и требовалось доказать. Оно будетъ играть весьма важную роль въ слѣдующей главѣ.

39. Число $\mathfrak{A}_{ab}$, обозначающее число точекъ, лежащихъ на полигонѣ P и ниже его, за исключеніемъ лежащихъ на осяхъ, будетъ $=0$ только тогда, когда этотъ полигонъ сводится къ прямой, соединяющей точку α_0 (для которой $\beta=0$, напомнимъ) съ точкою $\beta_h=1$ (для которой $\alpha=0$), ибо тогда на полигонѣ P не будетъ никакихъ другихъ точекъ, кромѣ концевъ, которые въ счетъ не идутъ, ибо лежатъ на осяхъ $O\alpha$, $O\beta$. И въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ формула (1) пред. § даетъ, когда $h=1$:

$$\mathfrak{A}_{ab}=\frac{1}{2}(\alpha_0\beta_1-\beta_0\alpha_1+1)-\frac{\alpha_0+\beta_1}{2}=\frac{1}{2}(\alpha_0+1)-\frac{\alpha_0+1}{2}=0,$$

ибо $\beta_h=\beta_1=1$, $\beta_0=0$, въ разсматриваемомъ случаѣ. Но тогда

$$A_{0,1}=\left.\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right|_{x=a,\ y=b}\neq 0; \qquad (1)$$

слѣд., въ несущественный множитель дискриминанта не войдутъ лишь множители, отвѣчающіе такимъ $x=a$, $y=b$, для которыхъ

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\neq 0; \qquad (2)$$

для значеній же x, вмѣстѣ съ соотвѣтственными y удовлетворяющихъ уравненіямъ:

$$F(x,y)=0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0, \qquad (4)$$

для которыхъ будетъ также и

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=0, \tag{5}$$

непремѣнно хотя одна точка (1,1) будетъ лежать на полигонѣ P или ниже его, и, слѣд., не будетъ $\mathfrak{A}_{ab}=0$, и потому хотя одинъ множитель $x-a$ войдетъ, и притомъ въ квадратѣ [(8) § 37], въ несущественный множитель. И такъ, несущественный множитель въ дискриминантѣ появляется, и притомъ въ квадратѣ, лишь для значеній x, для которыхъ всѣ три уравненія (3), (4), (5) имѣютъ общее рѣшеніе; и наоборотъ, для значеній x, для которыхъ эти три уравненія имѣютъ общія рѣшенія, всегда появляется, и притомъ въ квадратѣ, множитель въ дискриминантѣ, отвѣчающій такому значенію x.

Составимъ теперь по примѣру Кронекера произведеніе:

$$\left(f_0(x)\right)^{n-2}\prod_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial F(x,y_i)}{\partial x}u+\frac{\partial F(x,y_i)}{\partial y_i}v\right), \tag{6}$$

гдѣ u и v неопредѣленныя величины: какъ симметрическая функція всѣхъ значеній $y_1, y_2, \dots y_n$, корней уравненія (3) при данномъ x, оно выразится раціональной функціей его коэффиціентовъ и величинъ u и v, слѣд., будетъ однородная функція этихъ величинъ, коэффиціенты которой будутъ цѣлыя функціи x. Для значеній x, для которыхъ уравненія (3), (4) и (5) имѣютъ общія рѣшенія, эта функція x будетъ обращаться въ нуль; слѣд., будетъ дѣлиться на $x-a$, если a одно изъ такихъ значеній x. Пусть оно отличное отъ тѣхъ, которыя обращаютъ $f_0(x)$ въ нуль; тогда произведеніе въ (6) будетъ дѣлиться на $(x-a)^2$. Для доказательства по Кронекеру положимъ:

$$Y=y-(x-a)w, \tag{7}$$

гдѣ w всегда можно выбрать такъ, что отношеніе $\frac{x-a}{Y-b}$, въ которомъ при $x=a$, $y=b$ будутъ и числитель, и знаменатель равны нулю, будетъ имѣть конечное значеніе; дѣйствительно, при $x=a$, $y=b$. будетъ и $Y-b=0$; слѣд.,

$$\left.\frac{x-a}{Y-b}\right|_{x=a,\,y=b}=\frac{1}{Y'_{a,b}}, \tag{8}$$

гдѣ $Y'_{a,b}$ производная отъ Y по x въ точкѣ (a,b); но, какъ изъ (7) имѣемъ:

$$y=Y+(x-a)w, \tag{9}$$

то уравненіе (3) обратится въ такое:

$$F(x,y)=F(x,\,Y+(x-a)w)=0; \tag{10}$$

производное отъ него будетъ:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}w+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}Y'=0, \tag{11}$$

гдѣ y играетъ роль посредствующей перемѣнной. Отсюда получаемъ:

$$\frac{1}{Y'}=-\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}w}; \tag{11'}$$

всегда можно выбрать w такъ, что при $x=a$ знаменатель этого выраженія будетъ содержать $y-b$ не въ большей степени, чѣмъ числитель, а тогда по (8) и будетъ достигнуто то, что отношеніе $\frac{x-a}{Y-b}$ будетъ конечное при $x=a$, $y=b$. Замѣтивъ это, введемъ вмѣсто y перемѣнную Y, опредѣляемую равенствомъ (7), гдѣ w опредѣлено, какъ сейчасъ сказано, въ выраженіе (6). Такъ какъ тождественно:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}u+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}v&=\\=\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial F(a,Y)}{\partial a}\right)u+\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial F(a,Y)}{\partial Y}\right)v&+\\+\frac{\partial F(a,Y)}{\partial a}u+\frac{\partial F(a,Y)}{\partial Y}v&,\end{aligned} \tag{12}$$

гдѣ вторые изъ членовъ въ скобкахъ ( ) содержатъ значенія первыхъ для $x=a$ (ибо по (9) при $x=a$, $y=Y$), такъ что изъ выраженій въ скобкахъ ( ) каждое дѣлится на $x-a$, члены же въ третьей строчкѣ (12) дѣлятся каждый на $Y-b$ (ибо при $x=a$, $y=Y=b$), то мы видимъ, что вторую часть (12) можно представить въ видѣ линейной однородной функціи $x-a$ и $Y-b$, коэффиціенты которой цѣлыя функціи x, y, коэффиціенты которыхъ въ свою очередь суть однородныя линейныя функціи величинъ u и v. Вслѣдствіе этого произведеніе въ (6) приметъ такой видъ:

$$\begin{aligned}&\left(f_0(x)\right)^{n-2}\prod_{i=1}^{i=n}\left(\varphi_i(Y_i-b)+\psi_i(x-a)\right)=\\&=f_0(x)^{(n-2)}\prod_{i=1}^{i=n}(Y_i-b)\prod_{i=1}^{i=n}\left(\varphi_i+\psi_i\frac{x-a}{Y_i-b}\right)=\\&=(-1)^nF\left(x,b+w(x-a)\right)\cdot f_0(x)^{(n-3)}\prod_{i=1}^{i=n}\left(\varphi_i+\psi_i\frac{x-a}{Y_i-b}\right),\end{aligned} \tag{13}$$

ибо

$$f_0(x)\prod_{i=1}^{i=n}(Y_i-b)=(-1)^n f_0(x)\prod_{i=1}^{i=n}(b-Y_i)=$$

(14) $$=(-1)^n f_0(x)\prod_{i=1}^{i=n}(b+w(x-a)-y_i)=$$

$$=(-1)^n F\Big(x, b+w(x-a)\Big);$$

но

$$F\Big(x, b+w(x-a)\Big)=F(x,b)+\frac{\partial F(x,b)}{\partial b}w(x-a)+$$

(15) $$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(x,b)}{\partial b^2}w^2(x-a)^2+\cdots$$

при $x=a$, будетъ $F(a,b)=0$, $\dfrac{\partial F(a,b)}{\partial b}=0$, слѣд., вторая часть приведется къ

(16) $$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(a,b)}{\partial b^2}w^2(x-a)^2+\cdots,$$

откуда и видно, что $x-a$ войдетъ въ (13), а слѣд., и въ (6) не ниже второй степени, ибо второй множитель въ (13) конеченъ при $x=a$, ибо и тамъ, гдѣ $Y_j=b$, по доказанному выше $\dfrac{x-a}{Y_j-b}$ будетъ конечно. Такъ какъ послѣдній членъ въ (6) по разложеніи его по степенямъ u и v будетъ $v^n\Delta(x)$, какъ легко видѣть, то $(x-a)$ въ (6) не можетъ (по произвольности u и v) войти въ степени высшей, чѣмъ онъ входитъ въ $\Delta(x)$. Онъ будетъ входить, слѣд., во второй степени въ выраженіе (6), если въ дискриминантъ входитъ во второй степени. Легко доказать, что произведеніе (6) не можетъ дѣлиться ни на какой множитель, независящій отъ u и v, для котораго не будутъ заразъ имѣть мѣсто уравненія (3), (4) и (5); дѣйствительно, чтобы выраженіе (6) было равно нулю, необходимо, чтобы былъ одинъ его множитель равенъ нулю, напр.,

(17) $$\frac{\partial F(x,y_j)}{\partial x}u+\frac{\partial F(x,y_j)}{\partial y_j}v=0,$$

что при произвольныхъ u и v возможно, когда

(18) $$\frac{\partial F(x,y_j)}{\partial x}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F(x,y_j)}{\partial y_j}=0,$$

причемъ x и y_j связаны уравненіемъ (3), слѣд., для значеній, удовлетворяющихъ уравненіямъ (3), (4) и (5). И такъ, выраженіе (6) изъ независящихъ отъ u и v множителей вида $x-a$ дѣлится только на тѣхъ, которые входятъ въ несущественный множитель дискриминанта $\overset{m}{F}(x,\overset{n}{y})=0$; а изъ такихъ, которые входятъ въ несущественный множитель дискриминанта, содержитъ каждый въ степени не ниже второй, не выше той, въ который онъ входитъ въ дискриминантъ.

Можно теперь составить такую функцію z:

$$z=w_0+w_1y+w_2y^2+\cdots+w_{n-1}y^{n-1}, \tag{19}$$

гдѣ $w_0, w_1, w_2\ldots w_{n-1}$ произвольныя величины; обозначимъ такъ уравненіе степени n, которому она будетъ удовлетворять:

$$G(z,x)=0, \tag{20}$$

гдѣ

$$G(z,x)=\Big(f_0(x)\Big)^{n-1}\prod_{i=1}^{i=n}(z-z_i), \tag{21}$$

а z_i результатъ перемѣны y на y_i въ (19); какъ симметрическая функція корней уравненія (3) она выразится раціонально чрезъ его коэффиціенты; такъ какъ порядокъ симметрической функціи есть $n-1$, то помножаемъ на $\big(f_0(x)\big)^{n-1}$, чтобы первая часть была цѣлая функція x и z; но $\big(f_0(x)\big)^{n-1}$ не будетъ общимъ множителемъ, ибо произойдетъ сокращеніе (см. мой „Краткій курсъ Высшей Алгебры", изданіе 2-е, Харьковъ 1892 г.). Составимъ для этого уравненія выраженіе подобное (6):

$$\Big(f_0(x)\Big)^{(n-1)(n-2)}\prod_{i=1}^{i=n}\Big(\frac{\partial G(x,z_i)}{\partial x}u+\frac{\partial G(x,z_i)}{\partial z_i}v\Big); \tag{22}$$

это выраженіе будетъ дѣлиться на квадратъ каждаго линейнаго несущественнаго множителя дискриминанта уравненія (20), именно:

$$\Big(f_0(x)\Big)^{(n-1)(n-2)}\prod_{i=1}^{i=n}\frac{\partial G(x,z_i)}{\partial z_i}; \tag{23}$$

а какъ при произвольныхъ w_0, w_1, $w_2\ldots w_{n-1}$ всѣ они различны, то, слѣд., и на ихъ произведеніе; но произведеніе квадратовъ всѣхъ несущественныхъ множителей и будетъ въ этомъ случаѣ полный несущественный множитель дискриминанта (23). Итакъ, въ этомъ случаѣ полный независящій отъ u и v дѣлитель (22) будетъ несущественный множитель дискриминанта. Но если мы положимъ всѣ $w_i=0$, за исключеніемъ w_1, который положимъ $=1$, то z перейдетъ въ y, G въ F, (22) въ (6), (23) въ дискриминантъ $\Delta(x)$, несущественный множитель (23) въ несущественный множитель дискриминанта [1]), и мы получаемъ такое предложеніе:

„Несущественный множитель дискриминанта даннаго уравненія (3) есть наибольшій (по степени x) дѣлитель, независящій отъ u и v, выраженія (6)".

Слѣд., для нахожденія его нужно найти общій наибольшій дѣлитель всѣхъ коэффиціентовъ, выраженія (6), когда по вычисленіи этой симметрической функціи корней уравненія (3) расположимъ ее по степенямъ u и v. Если въ этомъ выраженіи принять $u=0$, $v=1$, то будемъ имѣть и самый дискриминантъ; имѣя дискриминантъ и его небудемъ имѣть и самый дискриминантъ; имѣя дискриминантъ и его несущественный множитель, раздѣляя на послѣдній, будемъ имѣть и существенный множитель дискриминанта, а тогда по формуламъ (18) или (19) § 37, какъ сказано уже въ томъ §, найдемъ рангъ алгебраическаго образа, опредѣляемаго уравненіемъ (3). Такимъ образомъ, этотъ способъ можетъ замѣнить тотъ, основанный на вычисленіи величинъ α, β, α', β', ..., который былъ нами раньше данъ. Но тѣ уравненія, которыя мы при этомъ встрѣчали, понадобятся намъ еще разъ при опредѣленіи такъ называемыхъ „присоединенныхъ функцій" (adjungirte Curven у Нётера); но и тутъ изложенный способъ разложенія дискриминанта на два множителя, принадлежащій *Кронекеру* (также и *Нётеру*), можетъ быть практически полезенъ, сокращая работу составленія тѣхъ паръ уравненій, для рѣшеній которыхъ обращается извѣстное число частныхъ производныхъ, впередъ намѣченныхъ, въ нуль, ибо нѣкоторыя изъ возможныхъ à priori комбинацій этихъ частныхъ производныхъ можно, послѣ разсмотрѣнія дискриминанта, отбросить. Но мы на этомъ не будемъ останавливаться, ибо эта первая глава и безъ того вышла очень большая; желающіе могутъ найти указаніе въ работѣ Нётера, помѣщенной въ Math. Ann. Bd. 23: Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen: также Raffy: Sur le genre d'une courbe algébrique, тамъ же.

---

[1]) Отбрасывая при этомъ множитель $\left(f_0(x)\right)^{(n-2)^2}$, какъ то слѣдуетъ изъ сравненія названныхъ въ текстѣ формулъ; если, какъ у Кронекера, $f_0(x)=1$, то тогда этого добавленія не требуется.

ГЛАВА II.

О раціональныхъ функціяхъ отъ независимой перемѣнной и ея неявной функціи, опредѣляемой даннымъ неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ.

40. Пусть $R(x,y)$ обозначаетъ раціональную функцію отъ x и y, которыя связаны неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ:

$$\overset{m}{F}(x,\overset{n}{y})=0; \tag{1}$$

общій видъ ея по Абелю есть слѣдующій:

$$R(x,y)=\frac{f(x,y)}{\varphi(x)}, \tag{2}$$

гдѣ $f(x,y)$ и $\varphi(x)$ цѣлыя раціональныя функціи своихъ аргументовъ, степень первой изъ которыхъ относительно y не превосходитъ $n-1$. Очевидно, функція $R(x,y)$ однозначна на Римановой поверхности для алгебраическаго образа (1). Значенія x, y, для которыхъ, или, иначе, точки Римановой поверхности, гдѣ

$$R(x,y)=z, \tag{3}$$

— z данная величина — найдутся чрезъ рѣшеніе системы уравненій (1) и (3), или, что тоже по (2), такой:

$$\left.\begin{aligned} &\overset{m}{F}(x,\overset{n}{y})=0,\\ &f(x,y)-z\varphi(x)=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

По теоремѣ Лабати рѣшенія этой системы представятся такими парами уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &f_i(x,y,z)=0,\\ &\Theta_i(x,z)=0,\end{aligned}\right\} \quad (i=1,2,\ldots\lambda) \tag{5}$$

гдѣ лѣвыя части неприводимыя функціи своихъ аргументовъ въ областяхъ раціональности (x,y,z), соотвѣтственно (x,z), ибо этого всегда можно достигнуть при помощи конечнаго числа раціональныхъ дѣйствій. Извѣстно также (см. Serret, Cours d'Algèbre superieure, T. I, p. 203, формула (12), изд. 3-е, или нашъ „Краткій курсъ Высшей Алгебры", изданіе 2-е, стр. 103), что произведеніе всѣхъ вторыхъ уравненій паръ (5), т. е.

(6) $$\prod_{i=1}^{i=\lambda}\Theta_i(x, z) = 0,$$

будетъ результантомъ системы (4) по y; изъ этого уравненія (6) найдутся тѣ значенія x, при которыхъ имѣетъ мѣсто уравненіе (3), послѣ чего изъ (5) найдутся соотвѣтственныя значенія y. Нетрудно однако убѣдиться, что всѣ $\Theta_i(x, z)$ могутъ различаться лишь постояннымъ множителемъ. Дѣйствительно, пусть для даннаго z и разсматриваемаго значенія x, y_k будетъ удовлетворять условію (3); тогда будемъ имѣть

(7) $$\Theta_i(x, z) = 0;$$

или по (3):

(8) $$\Theta_i\Big((x, R(x, y_k)\Big) = 0;$$

по неприводимости уравненія (1) и всякій другой корень его y_l тоже будетъ удовлетворять уравненію:

(9) $$\Theta_i\Big(x, R(x, y)\Big) = 0,$$

т. е. точно также будетъ:

(10) $$\Theta_i\Big(x, R(x, y_l)\Big) = 0,$$

— конечно x при этомъ мы считаемъ принадлежащимъ къ обыкновенному мѣсту алгебраическаго образа. Отсюда видимъ, что разъ уравненіе (7) удовлетворяется значеніемъ $z_k = R(x, y_k)$, то ему будутъ удовлетворять и всѣ остальныя изъ ряда значеній z при разсматриваемомъ значеніи x, а именно:

(11) $$z_1 = R(x, y_1), \quad z_2 = R(x, y_2), \quad \ldots . z_n = R(x, y_n).$$

Это справедливо для всякаго i; отсюда слѣдуетъ, что при разсматриваемомъ значеніи x, одномъ во всѣхъ уравненіяхъ (7) при $i = 1, 2, 3, \ldots \lambda$, всѣ они будутъ имѣть общія рѣшенія по z, и, слѣд., по неприводимости ихъ, первая часть каждаго изъ этихъ уравненій будетъ дѣлиться на первую часть каждаго изъ прочихъ, т. е. всѣ $\Theta_i(x, z)$ могутъ различаться лишь постоянными множителями. Отбрасывая этихъ постоянныхъ множителей и обозначая функціи послѣ того просто чрезъ $\Theta(x, z)$, будемъ имѣть для результанта (6):

(12) $$[\Theta(x, z)]^\lambda = 0.$$

Отсюда видимъ, что z удовлетворяетъ уравненію, которое или неприводимо:

$$\Theta(x, z) = 0 \tag{13}$$

— когда $\lambda = 1$, или степень неприводимаго уравненія, когда $\lambda > 1$.

Результантъ можно получить и на основаніи теоріи симметрическихъ функцій, и тогда будетъ на основаніи доказаннаго:

$$\prod_{k=1}^{k=n}\Big(z - R(x, y_k)\Big) = \left(\frac{\Theta(x, z)}{\psi(x)}\right)^\lambda, \tag{14}$$

гдѣ $\psi(x)$ коэффиціентъ при наивысшей степени z въ $\Theta(x, z)$, какъ то слѣдуетъ изъ сравненія коэффиціентовъ наивысшихъ степеней z въ обѣихъ частяхъ равенства. Если z^p есть наивысшая степень z въ $\Theta(x, z)$, то изъ сравненія старшихъ членовъ направо и налѣво отъ знака $=$, найдемъ:

$$n = p\lambda, \tag{15}$$

т. е. p есть дѣлитель n, или, число различныхъ значеній функціи $z = R(x, y)$ всегда дѣлитель числа n; слѣд., если n число простое, то всегда $p = n$. Изъ (14) кромѣ того видно, когда n не простое, слѣд., $\lambda > 1$, что при данномъ z каждому x отвѣчаетъ λ множителей въ произведеніи налѣво, и, слѣд., λ значеній y. Если случится, что $\lambda = 1$, то каждому значенію x при данномъ z будетъ отвѣчать одно значеніе y; слѣд., каждой парѣ (x, z) будетъ отвѣчать одно значеніе y; слѣд., *y будетъ однозначной функціей* (x, z), при $\lambda = 1$. Въ этомъ случаѣ уравненій $f_i(x, y, z) = 0$ [(5)] будетъ всегда одно, и притомъ первой степени относительно y; слѣд., въ этомъ случаѣ y будетъ раціональной функціей (x, z). Этотъ случай $\lambda = 1$ всегда представится, когда n число простое, когда, слѣд., $p = n$.

Если степень функціи $\Theta(x, z)$ относительно x есть q, то каждое значеніе z функція $R(x, y)$ будетъ принимать въ $q\lambda$ точкахъ Римановой поверхности, ибо каждому значенію x отвѣчаетъ λ значеній y, какъ видѣли. Это число

$$\mu = q\lambda, \tag{16}$$

называется *степенью* раціональной функціи. Оно вообще не можетъ быть меньше $p + 1$, если p есть рангъ алгебраическаго образа (1), за исключеніемъ совсѣмъ спеціальныхъ случаевъ, какъ увидимъ ниже.

Мы ограничивались въ предыдущемъ обыкновенными мѣстами алгебраическаго образа; но они могутъ какъ угодно близко лежать къ особеннымъ, а потому по способу предѣловъ наши выводы распространятся и на особенныя; то же можно сдѣлать и при помощи Вейерштрассовскихъ паръ функцій (Functionenpaar), но мы на этомъ не будемъ останавливаться.

41. Случай, когда $\lambda > 1$, легко можетъ быть сведенъ чрезъ линейную подстановку къ случаю $\lambda = 1$. Для этого нужно только положить

(1) $$\begin{cases} x = x' - hy', \\ y = y', \end{cases}$$

или, иначе,

(1′) $$\begin{cases} x' = x + hy, \\ y' = y, \end{cases}$$

гдѣ h нѣкоторая постоянная, которую нужно такъ выбрать, чтобы всѣ значенія x', для которыхъ при соотвѣтственныхъ y' функція $R(x, y)$ получаетъ данное значеніе z, были бы различны. Чрезъ подстановку (1) уравненія (4) пред. § обратятся въ слѣдующія:

(2) $$\begin{cases} F(x' - hy', y') = 0, \\ f(x' - hy', y') - z\psi(x' - hy') = 0; \end{cases}$$

исключая y', по пред. § получимъ результантъ такого вида:

(3) $$\left(\frac{\Theta(x', z)}{\Psi(x)}\right)^{\lambda'} = 0,$$

ибо, какъ то мы видѣли въ пред. §, результантъ будетъ или неприводимая функція, или степень неприводимой функціи; но тогда z въ функціи x' опредѣлится изъ уравненія

(4) $$\Theta(x', z) = 0,$$

— степени μ относительно x', ибо иначе не могло бы получаться для даннаго значенія z μ паръ (x', y') съ различными не только y', но и x', какъ то должно быть въ силу равенствъ (1′), гдѣ всѣ y различны, ибо точка (x, y) обыкновенная, и h выбрано по предположенію такъ, что не имѣетъ мѣста ни одно изъ равенствъ

(5) $$x_i + hy_i = x_j + hy_j,$$

гдѣ одинаковыми значками, какъ всегда, отмѣчены соотвѣтственныя значенія x и y; слѣд., по (16) пред. §, ибо теперь $q = \mu$, будетъ $\lambda' = 1$.

42. Возьмемъ теперь двѣ раціональныя функціи отъ x, y:

(1) $$\xi = R_1(x, y),$$

(2) $$\eta = R_2(x, y),$$

изъ которыхъ первая степени μ, т. е. каждое значеніе получаетъ въ μ различныхъ точкахъ Римановой поверхности, вторая степени ν. Исключая отсюда x и y при помощи уравненія (1) § 40, мы получимъ уравненіе:

$$\Phi(\xi, \eta) = 0, \tag{3}$$

которое будетъ степени μ относительно η и степени ν относительно ξ. Это уравненіе (3) будетъ или неприводимо, или степень неприводимаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, если пары:

$$(x_1, y_1),\quad (x_2, y_2),\quad (x_3, y_3)\ldots(x_\mu, y_\mu) \tag{4}$$

будутъ тѣ самыя, для которыхъ $R_1(x, y) = \xi$, то произведеніе

$$\prod_{i=1}^{i=\mu}\Big(\eta - R_2(x_i, y_i)\Big), \tag{5}$$

и представитъ результантъ (2) относительно системы:

$$\begin{rcases} F(x, y) = 0, \\ R_1(x, y) - \xi = 0. \end{rcases} \tag{6}$$

Это выраженіе и приведется къ $\Phi(\xi, \eta)$, относительно которой будетъ имѣть мѣсто только что высказанное предложеніе. Для доказательства его положимъ, какъ въ пред. §:

$$\begin{rcases} x' = x + hy, \\ y' = y, \end{rcases} \tag{7}$$

гдѣ h должно быть такъ выбрано, чтобы всѣ значенія обоихъ элементовъ паръ (x'_i, y'_i), для которыхъ $R_1(x, y) = \xi$, были бы различны; тогда по пред. § перемѣнныя x' и ξ будутъ связаны неприводимымъ уравненіемъ

$$\Theta(x', \xi) = 0, \tag{8}$$

которое будетъ степени μ относительно x', и въ то же время y' выразится раціонально чрезъ ξ и x', такъ что будетъ:

$$y' = R(x', \xi), \tag{9}$$

гдѣ R раціональная функція своихъ аргументовъ. На основаніи (9) уравненія (7) обратятся въ такія:

$$\begin{rcases} x = x' - hR(x', \xi), \\ y = R(x', \xi), \end{rcases} \tag{10}$$

слѣд., x и y выразятся раціонально чрезъ x' и ξ. Если теперь (x'_i, y'_i) тѣ пары значеній x', y', числомъ μ, для которыхъ $R_1(x, y) = \xi$, то по (10) будетъ:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_i = x_i' - hR(x_i', \xi), \\ y_i = R(x_i', \xi); \end{array} \right.$$

внося это въ (5), и обозначая чрезъ $R_3(x_i', \xi)$ то, во что обратится чрезъ эту подстановку $R_2(x_i, y_i)$, мы будемъ имѣть:

$$(12) \qquad \prod_{i=1}^{i=\mu} \left(\eta - R_3(x_i', \xi) \right) = \left(\frac{\Theta_2(\xi, \eta)}{\psi_2(\xi)} \right)^{\lambda_2},$$

когда находящуюся налѣво симметрическую функцію корней x_i' уравненія (8) выразимъ чрезъ его коэффиціенты, — по § 40, гдѣ $\Theta_2(\xi, \eta)$ неприводимая функція своихъ аргументовъ. Но это и будетъ искомый результантъ исключенія x и y изъ (1) и (2) при помощи (1) § 40; слѣд.:

$$(13) \qquad \Phi(\xi, \eta) = \left(\frac{\Theta_2(\xi, \eta)}{\psi_2(\xi)} \right)^{\lambda_2},$$

что и выражаетъ наше предложеніе. $\Theta_2(\xi, \eta)$ степени p_2 относительно η, причемъ будетъ

$$(14) \qquad p_2 \lambda_2 = \mu,$$

какъ то слѣдуетъ изъ сравненія степеней η въ обѣихъ частяхъ (12). Если бы начали съ исключенія x' изъ (1) § 40 и (2) наст. §, то такимъ же точно образомъ пришли бы къ тому выводу, что та же функція $\Theta_2(\xi, \eta)$ будетъ степени q_2 относительно ξ, причемъ

$$(15) \qquad q_2 \lambda_2 = \nu,$$

что и подтверждаетъ наши апріорныя соображенія относительно степеней $\Phi(\xi, \eta)$. Но если $\lambda_2 \neq 1$, то p_2 и q_2 будутъ въ λ_2 разъ меньше μ, соотвѣтственно ν, и перемѣнныя ξ и η будутъ связаны уравненіемъ

$$(16) \qquad \Theta_2(\overset{q_2}{\xi}, \overset{p_2}{\eta}) = 0;$$

слѣд., каждому значенію ξ будутъ отвѣчать p_2 различныхъ (ибо $\Theta_2(\xi, \eta)$ неприводима) значеній η, и каждому значенію η будетъ отвѣчать q_2 различныхъ значеній ξ. Когда же будетъ $\lambda_2 = 1$, то будетъ $p_2 = \mu$, $q_2 = \nu$, и перемѣнныя ξ и η будутъ связаны уравненіемъ степени ν и μ относительно этихъ перемѣнныхъ:

$$(17) \qquad \Theta_2(\overset{\nu}{\xi}, \overset{\mu}{\eta}) = 0.$$

Въ этомъ замѣчательномъ случаѣ по § 40 и x' выразится раціонально чрезъ ξ и η, а слѣд., по (10) и x и y выразятся раціонально чрезъ ξ и η. Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ каждая пара: (x, y), связанныхъ уравненіемъ:

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0, \qquad (18)$$

и (ξ, η), связанныхъ уравненіемъ:

$$\Phi(\overset{\nu}{\xi}, \overset{\mu}{\eta}) = 0, \qquad (19)$$

будетъ выражаться одна черезъ другую раціонально; въ этомъ случаѣ не только уравненіе (19) получается чрезъ раціональную подстановку изъ (18), но также и наоборотъ и это послѣднее получается изъ (19) чрезъ раціональную подстановку. Оба уравненія въ этомъ случаѣ будутъ, какъ говорятъ, *раціонально-обратимыя*. Совокупность всѣхъ алгебраическихъ функцій, раціонально преобразуемыхъ одна въ другую, раціонально-обратимыхъ, составляютъ *классъ* алгебраическихъ функцій.

43. *Всѣ раціонально-обратимыя функціи имѣютъ тотъ же рангъ.* Это предложеніе фундаментальнаго значенія доказано Клебшемъ и Горданомъ въ ихъ „Theorie der Abelschen Functionen" (Leipzig 1866. § 52 u. f.) при помощи геометрическихъ предложеній и теоріи формъ; Вейерштрассъ въ своихъ лекціяхъ далъ другое доказательство на основаніи свойствъ *главной функціи*, имъ впервые введенной въ эту теорію, при помощи своихъ Functionenpaar x_t, y_t. Проще всѣхъ доказательствъ однако будетъ слѣдующее, въ сущности схожее съ Римановымъ. Мы опредѣлили рангъ алгебраическаго образа $F(x, y) = 0$, или соотвѣтствующей ему Римановой поверхности, какъ наибольшее число p такихъ сомкнутыхъ кривыхъ, которыя можно провести заразъ по Римановой поверхности, не устанавливая полнаго разобщенія прилегающихъ къ нимъ частей поверхности; такія сомкнутыя кривыя мы означили чрезъ A_k $(k = 1, 2, \ldots p)$. Когда точка x опишетъ такую линію, то какъ и y вернется къ своему значенію, то также вернутся къ своимъ и обѣ раціональныя функціи перемѣнныхъ x и y:

$$\xi = R_1(x, y) \qquad (1)$$

и

$$\eta = R_2(x, y); \qquad (2)$$

слѣд., на Римановой поверхности для ихъ связывающаго уравненія:

$$\Phi(\xi, \eta) = 0 \qquad (3)$$

точка ξ опишетъ сомкнутую линію α_k, притомъ неустанавливающую полнаго разобщенія прилегающихъ частей. Дѣйствительно, если точку x

заставимъ по какой либо кривой, не пересѣкающей A_k, напр. B_k, перейти съ одной стороны этой линіи A_k въ противоположную точку на другой сторонѣ, то по однозначности функцій $R_1(x, y)$ и $R_2(x, y)$ то же сдѣлаетъ и точка ξ на своей Римановой поверхности. Такимъ образомъ, каждой линіи A_k будетъ отвѣчать каждая линія α_k на другой Римановой поверхности; слѣд., послѣднихъ линій будетъ не менѣе, чѣмъ линій A_k. Но по раціональной обратимости уравненій $F(x, y) = 0$ и $\Phi(\xi, \eta) = 0$, точно также число сомкнутыхъ линій A_k будетъ не менѣе числа линій α_k; слѣд., число линій α_k, не устанавливающихъ полнаго разобщенія прилегающихъ къ ней частей Римановой поверхности для $\Phi(\xi, \eta) = 0$, которыя по ней можно провести заразъ, равно числу линій A_k, не устанавливающихъ полнаго разобщенія прилегающихъ къ нимъ частей Римановой поверхности для $F(x, y) = 0$, которыя можно провести по ней заразъ; отсюда и слѣдуетъ, что рангъ раціонально-преобразуемыхъ одно въ другое уравненій одинъ и тотъ же, что и требовалось доказать.

Примѣчаніе. Отъ двухъ линій A_k и A_l на поверхности для $F(x, y) = 0$ не могутъ получиться линіи α_k и α_l одной категоріи отъ того, что линіи одной категоріи, какъ на одной, такъ и на другой поверхности могутъ быть получены чрезъ непрерывное видоизмѣненіе, что невозможно для линій разныхъ категорій, такъ какъ онѣ обходятъ различныя винтовыя точки, по крайней мѣрѣ нѣкоторыя.

44. Цѣлую раціональную функцію мѣста (x, y) алгебраическаго образа

(1) $$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$$

— означимъ ее чрезъ z:

(2) $$z = f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}),$$

всегда можно опредѣлить, и притомъ *при помощи однихъ только раціональныхъ дѣйствій*, такъ, что во всѣхъ точкахъ развѣтвленія функціи y, опредѣляемой уравненіемъ (1), лежащихъ въ конечныхъ мѣстахъ алгебраическаго образа, степень ея относительно вспомогательной перемѣнной t (см. § 24) будетъ равна степени выраженія:

(3) $$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} : \frac{dx}{dt},$$

относительно t; а въ точкахъ, лежащихъ въ безконечно-удаленныхъ мѣстахъ, такъ чтобы были одинаковы степени выраженій:

(4) $$f_1(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{\bar{y}}) = \bar{y}^{\nu} f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{\frac{1}{\bar{y}}}) \quad \text{и} \quad \left(F_1(x, \bar{y}) : \frac{dx}{dt}\right) \bar{y}^{\nu-(n-2)},$$

$$\left(\text{гдѣ } F_1(x, y) = \bar{y}^{n-2} \frac{\partial F(x, \frac{1}{\bar{y}})}{\partial (\frac{1}{\bar{y}})} = a_{n-1} \bar{y}^{n-2} + 2a_{n-2} \bar{y}^{n-3} + \cdots (n-1) a_1 \right) \quad (4')$$

— для значеній x, для которыхъ $a_0 = 0$, и $y = 0$;

$$f_2(\overset{\mu}{\bar{x}}, \overset{\nu}{y}) = \bar{x}^{\mu} f(\overset{\mu}{\frac{1}{\bar{x}}}, \overset{\nu}{y}) \quad \text{и} \quad \left(F_2(\bar{x}, y) : \frac{d\bar{x}}{dt}\right) \bar{x}^{\mu-(m-2)}, \quad (5)$$

$$\left(\text{гдѣ } F_2(\bar{x}, y) = \bar{x}^{m} \frac{\partial F(\frac{1}{\bar{x}}, y)}{\partial y}\right) \quad (5')$$

— для значеній $x = \infty$, y конечное; и наконецъ

$$f_3(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^{\mu} \bar{y}^{\nu} f\left(\overset{\mu}{\frac{1}{\bar{x}}}, \overset{\nu}{\frac{1}{\bar{y}}}\right) \quad \text{и} \quad \left(F_3(\bar{x}, \bar{y}) : \frac{d\bar{x}}{dt}\right) \bar{x}^{\mu-(m-2)} \bar{y}^{\nu-(n-2)}, \quad (6)$$

$$\left(\text{гдѣ } F_3(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^{m} F_1(\frac{1}{\bar{x}}, \bar{y})\right) \quad (6')$$

— для $x = \infty$, $y = \infty$, такъ что выраженіе

$$\frac{f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad (7)$$

будетъ конечно во всѣхъ точкахъ первой категоріи, одного порядка съ $\bar{y}^{n-2-\nu}\big|_{y=0}$ во всѣхъ точкахъ второй, съ $\bar{x}^{m-2-\mu}\big|_{\bar{x}=0}$ — третьей и наконецъ съ $\bar{x}^{m-2-\mu}\big|_{x=0} \bar{y}^{n-2-\nu}\big|_{\bar{y}=0}$ — четвертой категоріи.

Функціи, удовлетворяющія всѣмъ этимъ условіямъ, мы будемъ называть присоединенными къ уравненію (1), подражая Нётеру (adjungirte Curven). Изъ нихъ особенно замѣчательны тѣ, для которыхъ $\mu = m-2$, $\nu = n-2$: для нихъ выраженіе (7) будетъ всегда конечно; ихъ будемъ обозначать чрезъ

$$\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}). \quad (8)$$

Покажемъ теперь, какъ на самомъ дѣлѣ это можно сдѣлать. При первомъ приближеніи по (4) § 36 будемъ имѣть:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \xi^{(\alpha_i - 1)\mu + \beta_i} \frac{\partial F_1(\xi, v)}{\partial v}; \quad (9)$$

полагая $\xi = \xi'^p$, мы дадимъ этому равенству такой видъ:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \xi'^{(\alpha_i-1)q+\beta_i p}\frac{\partial F_1(\xi, v)}{\partial v}; \tag{10}$$

но какъ $x = a + \xi = a + \xi'^p$, то, дифференцируя, получимъ отсюда:

$$\frac{dx}{d\xi'} = p\xi'^{p-1}; \tag{11}$$

дѣля (10) на (11), будемъ имѣть:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} : \frac{dx}{d\xi'} = \xi'^{(\alpha_i-1)q+(\beta_i-1)p+1}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{\partial F_1(\xi'^p, v)}{\partial v}; \tag{12}$$

такъ выражается это отношеніе для всякаго значенія v, которое есть корень уравненія $L_i = 0$. Полагая $x = a + \xi$, $y = b + \eta$ также въ $f(x,y)$, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum B'_{\gamma'\delta'}\eta^{\gamma'}\xi^{\delta'} = \xi^{\gamma'_i\mu+\delta'_i}\sum B'_{\gamma'\delta'}v^{\gamma'}\xi^{(\gamma'-\gamma'_i)\mu+(\delta'-\delta'_i)} = \\ &= \xi^{\gamma'_i\mu+\delta'_i}f_1(\xi, v); \end{aligned} \tag{13}$$

а полагая здѣсь $\xi = \xi'^p$, слѣдующее:

$$f(x,y) = \xi'^{\gamma'_i q+\delta'_i p}f_1(\xi'^p, v). \tag{14}$$

Сравнивая это съ (12), видимъ, что для колѣна C_i полигона P (котораго угловой коэффиціентъ есть $-\mu$) должно быть:

$$\gamma'_i q + \delta'_i p = (\alpha_i - 1)q + (\beta_i - 1)p + 1, \tag{15}$$

для того, чтобы функціи $f(x,y)$ и $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} : \frac{dx}{d\xi'}$ были одного и того же порядка безконечно-малыя величины при ξ' безконечно-маломъ. Условію (15) можно дать болѣе простую форму, если принять:

$$\gamma' = \gamma - 1, \qquad \delta' = \delta - 1: \tag{16}$$

тогда оно превратится въ такое:

$$\gamma_i q + \delta_i p = \alpha_i q + \beta_i p + 1, \tag{17}$$

и (13) въ такое:

$$f(x,y) = \sum B_{\gamma\delta}\eta^{\gamma-1}\xi^{\delta-1}, \tag{13'}$$

если обозначенія коэффиціентовъ такъ измѣнимъ, что вмѣсто $B'_{\gamma-1,\delta-1}$ напишемъ проще $B_{\gamma,\delta}$. Послѣ этой перемѣны (14) приметъ такой видъ:

$$f(x,y) = \xi'^{(\gamma_i-1)q+(\delta_i-1)p}f_1(\xi'^p, v). \tag{14'}$$

Если (17) раздѣлимъ на p, то будемъ имѣть:

$$\gamma_i\mu + \delta_i = \alpha_i\mu + \beta_i + \frac{1}{p}; \tag{18}$$

отсюда слѣдуетъ, что всѣ $B_{\gamma\delta}$, отвѣчающія точкамъ (γ, δ), лежащимъ на полигонѣ P и ниже его, должны быть равны нулю:

$$B'_{\gamma\delta} = 0; \tag{19}$$

отсюда и получатся условія, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты полинома $f(x,y)$, для того чтобы онъ представлялъ то, что мы назвали присоединенною функціей къ уравненію (1) пред. §. $B_{\gamma\delta}$ суть линейныя относительно этихъ коэффиціентовъ, ибо суть значенія частныхъ производныхъ разныхъ порядковъ функціи $f(x,y)$ по x и y, раздѣленныхъ на извѣстныя числа, при $x = a$ и $y = b$. Если

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,y) &= 0, \\ \psi(x) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

есть пара уравненій, опредѣляющихъ такую точку (a,b), для которой v есть корень уравненія $L_i = 0$, то первая часть (19) должна обращаться въ нуль для всѣхъ рѣшеній системы (20); слѣд., $B_{\gamma\delta}$ (гдѣ мы напишемъ x, y вмѣсто a и b) должно, будучи расположено по убывающимъ степенямъ y, дѣлиться безъ остатка на $\varphi(x,y)$ для всѣхъ x, удовлетворяющихъ уравненію $\psi(x) = 0$; а потому, раздѣливъ $B_{\gamma\delta}$ на $\varphi(x,y)$, приравниваемъ нулю коэффиціенты остатка этого дѣленія: получимъ рядъ уравненій, которыя должны удовлетворяться всѣми рѣшеніями уравненія $\psi(x) = 0$; потому первая часть каждаго изъ этихъ уравненій должна дѣлиться на $\psi(x)$ безъ остатка; поэтому приравниваемъ нулю коэффиціенты при каждой степени x въ остаткахъ дѣленія на $\psi(x)$ нулю: это и доставитъ искомыя соотношенія между коэффиціентами $f(x,y)$, линейныя относительно нихъ.

45. Эти условія необходимы одинаково, будетъ ли v простой корень уравненія $L_i = 0$, или кратный; но въ послѣднемъ случаѣ къ нимъ присоединяются новыя условія, ибо въ этомъ случаѣ требуется второе приближеніе для распредѣленія на круговыя группы значеній $y=b$ при $x=a$. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ по § 36 будетъ:

(1) $$\frac{\partial F_1(\xi, v)}{\partial v}=\xi'^{(\alpha'_{i'}-1)p'+\beta'_{i'}}\frac{\partial F_2(\xi', v')}{\partial v'};$$

если положить по (18) того же §

(2) $$\xi'=\xi''^{p'},$$

то оно преобразуется въ такое:

(3) $$\frac{\partial F_1(\xi, v)}{\partial v}=\xi''^{(\alpha'_{i'}-1)q'+\beta'_{i'}p'}\frac{\partial F_2(\xi''^{p'}, v')}{\partial v'};$$

внося это въ (10) пред. §, будемъ имѣть:

(4) $$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\xi'^{(\alpha_i-1)q+\beta_i p}\cdot\xi''^{(\alpha'_{i'}-1)q'+\beta'_{i'}p'}\frac{\partial F_2(\xi''^{p'}, v')}{\partial v'}.$$

Но теперь по (11) пред. § и (2) настоящаго имѣемъ:

(5) $$\frac{dx}{d\xi''}=\frac{dx}{d\xi'}\cdot\frac{d\xi'}{d\xi''}=p\xi'^{p-1}\cdot p'\xi''^{p'-1};$$

дѣля (4) на (5), получимъ:

(6) $$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}:\frac{dx}{d\xi''}=\xi'^{(\alpha_i-1)q+(\beta_i-1)p+1}\cdot\xi''^{(\alpha'_{i'}-1)q'+(\beta'_{i'}-1)p'+1}\times$$
$$\times\frac{1}{pp'}\frac{\partial F_2(\xi''^{p'}, v')}{\partial v'}.$$

Дѣлая въ $f_1(\xi'^p, v)$ подстановку:

(7) $$v=v_1+\eta',$$

гдѣ v_1 кратный корень уравненія $L_i=0$, далѣе:

(8) $$\eta'=v'\xi'^{\mu'},$$

(9) $$\xi'=\xi''^{p'},$$

мы будемъ имѣть для колѣна $C'_{i'}$ полигона P', слѣдующее:

$$f_1(\xi'^p, v)=\sum B'_{\gamma',\delta'}\eta'^{\gamma'-1}\xi'^{\delta'-1}=$$
$$=\xi'^{(\gamma'_{i'}-1)\mu'+\delta'_{i'}-1}\sum B'_{\gamma'\delta'}v'^{(\gamma'-\gamma'_{i'})\mu'+\delta'-\delta'_{i'}}= \tag{10}$$
$$=\xi''^{(\gamma'_{i'}-1)q'+(\delta'_{i'}-1)p'}f_2(\xi''^{p'}, v');$$

внося это въ (14′) пред. §, будемъ имѣть:

$$f(x,y)=\xi'^{(\gamma_i-1)q+(\delta_i-1)p}\,\xi''^{(\gamma'_{i'}-1)q'+(\delta'_{i'}-1)p'}\cdot f_2(\xi''^{p'}, v'). \tag{11}$$

Для всякаго корня уравненія $L_i=0$ должно быть

$$\gamma_i q+\delta_i p=\alpha_i q+\beta_i p+1, \tag{12}$$

какъ мы видѣли въ пред. §; теперь чрезъ сличеніе (11) съ (6) находимъ, что должно быть еще:

$$\gamma'_{i'}q'+\delta'_{i'}p'=\alpha'_{i'}q'+\beta'_{i'}p'+1, \tag{13}$$

для колѣна $C'_{i'}$ полигона P'. Отсюда, какъ и выше, выведемъ то заключеніе, что для всѣхъ γ' и δ', которыя отвѣчаютъ точкамъ ниже и на самомъ полигонѣ P', должно быть

$$B'_{\gamma'\delta'}=0. \tag{14}$$

Эти $B'_{\gamma'\delta'}$ суть полиномы отъ v_1, которые расположимъ по степенямъ этой величины (которую обозначимъ теперь просто v), при чемъ коэффиціентами при этихъ степеняхъ будутъ линейныя функціи выраженій $B_{\gamma\delta}$, слѣд., полиномы отъ x, y, коэффиціенты которыхъ будутъ линейныя функціи коэффиціентовъ искомой $f(x,y)$. Значенія v_1 опредѣляются системой трехъ уравненій вида:

$$\left.\begin{array}{l}\chi_1(x,y,v)=0,\\ \varphi_1(x,y)=0,\\ \psi_1(x)=0;\end{array}\right\} \tag{15}$$

для всѣхъ рѣшеній этой системы должны быть выполнены условія (14); поэтому дѣлимъ $B'_{\gamma'\delta'}$ на $\chi_1(x,y,v)$, расположивъ по степенямъ v, и приравниваемъ нулю коэффиціенты при степеняхъ v въ полученномъ остаткѣ; мы будемъ имѣть уравненія съ неизвѣстными x и y, которыя должны удовлетворяться всѣми рѣшеніями остальныхъ двухъ изъ уравненiй (15); потому, расположивъ каждый изъ этихъ коэффицiентовъ по степенямъ y, дѣлимъ его на $\varphi(x, y)$, и приравниваемъ нулю каждый коэффицiентъ имѣющаго получиться остатка: будемъ имѣть уравненiя съ одной неизвѣстной x, которымъ должны удовлетворять всѣ рѣшенiя уравненiя $\psi(x)=0$; а потому, расположивъ ихъ по убывающимъ степенямъ x, будемъ дѣлить на $\psi(x)$: приравнивая нулю коэффицiенты при каждой степени x имѣющаго получиться остатка, будемъ имѣть искомыя условныя уравненiя для коэффицiентовъ $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$, линейныя относительно ихъ.

46. Такъ находятся условiя для коэффицiентовъ, когда требуется для распредѣленiя корней $y=b$ при $x=a$ на круговыя группы второе приближенiе; этихъ условiй достаточно, когда v' есть простой корень уравненiя $L'_{i'}=0$; если же v' будетъ кратный корень этого уравненiя, то съ помощiю третьяго приближенiя точно также найдемъ для стороны $C''_{i''}$ полигона P'':

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} : \frac{dx}{d\xi'''} = \xi'^{(\alpha_i-1)q+(\beta_i-1)p+1} \cdot \xi''^{(\alpha'_{i'}-1)q'+(\beta'_{i'}-1)p'+1} \times \tag{1}$$
$$\times \xi'''^{(\alpha''_{i''}-1)q''+(\beta''_{i''}-1)p''+1} \cdot \frac{1}{pp'p''} \frac{\partial F_3(\xi'''^{p''}, v'')}{\partial v''},$$

и также

$$f(x, y) = \xi'^{(\gamma_i-1)q+(\delta_i-1)p} \cdot \xi''^{(\gamma'_{i'}-1)q'+(\delta'_{i'}-1)p'} \times \tag{2}$$
$$\times \xi'''^{(\gamma''_{i''}-1)q''+(\delta''_{i''}-1)p''} f_3(\xi'''^{p''}, v'').$$

Отсюда чрезъ сравненiе, въ виду (12) и (13) пред. §, находимъ, что должно быть также

$$\gamma''_{i''}q''+\delta''_{i''}p''=\alpha''_{i''}q''+\beta''_{i''}p''+1, \tag{3}$$

изъ котораго опять будетъ слѣдовать, что для всѣхъ значенiй γ'' и δ'', отвѣчающихъ точкамъ, находящимся ниже и на самомъ полигонѣ P, должно быть:

$$B''_{\gamma''\delta''}=0. \tag{4}$$

Здѣсь $B''_{\gamma''\delta''}$ суть полиномы, расположенные по степенямъ v', коэффицiенты при которыхъ суть полиномы, расположенные по степенямъ v; коэффицiенты при этихъ послѣднихъ будутъ полиномы, расположенные по степенямъ y съ коэффицiентами, которые будутъ полиномы, расположенные по степенямъ x, которыхъ коэффицiенты будутъ линейныя функцiи коэффицiентовъ искомой $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$. Эти значенiя v' опредѣляются системами четырехъ уравненiй такого вида:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_2(x, y, v, v')=0, \\ &\chi_2(x, y, v)=0, \\ &\varphi_2(x, y)=0, \\ &\psi_2(x)=0; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

такъ какъ уравненiя (4) должны имѣть мѣсто для всѣхъ рѣшенiй этой системы, то будемъ дѣлить $B''_{\gamma''\delta''}$ на $\Phi_2(x, y, v, v')$; коэффицiенты имѣющаго получиться остатка при степеняхъ v' приравниваемъ нулю: получимъ уравненiя, которыя должны удовлетворяться всѣми рѣшенiями послѣднихъ трехъ изъ уравненiй (5); поэтому первую часть каждаго изъ полученныхъ такимъ образомъ уравненiй дѣлимъ на $\chi_2(x, y, v)$ и приравниваемъ нулю коэффицiенты при степеняхъ v въ имѣющемъ получиться такимъ образомъ остаткѣ: будемъ имѣть уравненiя, которымъ должны удовлетворять всѣ рѣшенiя послѣднихъ двухъ изъ уравненiй (5); поэтому первую часть каждаго изъ нихъ дѣлимъ на $\varphi_2(x, y)$ и приравниваемъ нулю коэффицiенты при y въ имѣющихъ получиться остаткахъ: будемъ имѣть уравненiя съ однимъ x, которымъ должны удовлетворять всѣ рѣшенiя послѣдняго изъ уравненiй (5); поэтому дѣлимъ первыя части этихъ уравненiй на $\psi_2(x)$ и приравниваемъ нулю коэффицiенты при степеняхъ x въ имѣющихъ получиться остаткахъ: это и будутъ искомыя условiя для коэффицiентовъ $f(x, y)$, линейныя относительно ихъ.

Такъ слѣдуетъ идти и дальше, если потребуется четвертое приближенiе для распредѣленiя на круговыя группы значенiй $y=b$ при $x=a$; и т. д.

47. Опредѣленiе функцiи $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$ согласно остальнымъ условiямъ § 44 потребуетъ дѣйствiй того же рода. Такъ, въ точкахъ, гдѣ x равенъ корню уравненiя $a_0=0$ (пусть онъ a), и $y=\infty$, полагая $x=a+\xi$, $y=\frac{1}{\bar{y}}$, мы будемъ имѣть:

$$f_1(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{\bar{y}})=\sum\nolimits_{\gamma\delta} B_{\gamma\delta}\, \bar{y}^{\gamma-1}\, \xi^{\delta-1}=\xi^{(\gamma_i-1)\mu+(\delta_i-1)} f_1^{(1)}(\xi, \bar{v}), \tag{1}$$

гдѣ $\bar{y}=\bar{v}\xi^{\mu}$, $\mu=\frac{q}{p}$, и

$$f_1^{(1)}(\xi, \bar{v})=\sum\nolimits_{\gamma\delta} B_{\gamma\delta}\, \bar{v}\xi^{(\gamma-\gamma_i)\mu+(\delta-\delta_i)}; \tag{2}$$

и

$$(3)\qquad \bar{y}^{n} \overset{m\ n}{F}\left(x,\frac{1}{\bar{y}}\right)=\sum A_{\alpha\beta}\,\bar{y}^{\alpha}\,\xi^{\beta}=\xi^{\alpha_i\mu+\beta_i}\,F^{(1)}(\xi,\bar{v}).\bar{v},$$

гдѣ

$$(4)\qquad F^{(1)}(\xi,\bar{v})=\sum A_{\alpha\beta}\,\bar{v}^{\,\alpha-1}\,\xi^{(\alpha-\alpha_i)\mu+\beta_i-\beta_i},$$

ибо по причинѣ $a_0=0$ $\bar{y}$ будетъ общій множитель всѣхъ членовъ въ (3). Дифференцируя (3) по $\bar{v}$, получимъ:

$$(5)\quad \left(n\bar{y}^{n-1}F\left(x,\frac{1}{\bar{y}}\right)-\bar{y}^{n-2}\frac{\partial F\left(x,\frac{1}{\bar{y}}\right)}{\partial\left(\frac{1}{\bar{y}}\right)}\right)\xi^{\mu}=\xi^{\alpha_i\mu+\beta_i}\left(\frac{\partial F^{(1)}(\xi,\bar{v})}{\partial\bar{v}}\bar{v}+F^{(1)}(\xi,\bar{v})\right),$$

откуда [см. (4′) § 44] будемъ имѣть:

$$(6)\qquad F_1(x,\bar{y})=\xi^{(\alpha_i-1)\mu+\beta_i}\left[(n-1)F^{(1)}(\xi,\bar{v})-\bar{v}\frac{\partial F^{(1)}(\xi,\bar{v})}{\partial\bar{v}}\right].$$

Полагая въ (1) и (6) $\xi=\xi'^{p}$ и дѣля послѣднее на

$$(7)\qquad \frac{dx}{d\xi'}=\frac{d\xi}{d\xi'}=p\xi'^{p-1},$$

будемъ имѣть:

$$(8)\qquad \overset{\mu\ \nu}{f_1}(x,\bar{y})=\xi'^{(\gamma_i-1)q+(\delta_i-1)p}f_1^{(1)}(\xi'^{p},\bar{v}),$$

$$(9)\quad \frac{F_1(x,\bar{y})}{\frac{dx}{d\xi'}}=\xi'^{(\alpha_i-1)q+(\beta_i-1)p+1}\left[(n-1)F^{(1)}(\xi'^{p},\bar{v})-\bar{v}\frac{\partial F^{(1)}(\xi'^{p},\bar{v})}{\partial\bar{v}}\right];$$

слѣд., для одинаковости степеней (8) и (9), умноженнаго на $\bar{y}^{\nu-(n-2)}$, должно быть:

$$(10)\qquad \gamma_i q+\delta_i p=\alpha_i q+\beta_i p+1+(\nu-n+2)q,$$

откуда заключаемъ опять, что для всѣхъ (γ,δ), отвѣчающихъ точкамъ, лежащимъ ниже и на полигонѣ P_1 (для разсматриваемой особенной точки), передвинутаго параллельно самому себѣ на $(\nu-n+2)q$ дѣленій оси $O\alpha$, смотря по знаку, въ ту или другую сторону, должны имѣть мѣсто уравненія

$$(11)\qquad B_{\gamma,\delta}=0.$$

Здѣсь лѣвыя части суть функціи x, коэффиціенты при степеняхъ котораго суть линейныя функціи коэффиціентовъ $\overset{\mu\ \nu}{f}(x,y)$; слѣд., остатки отъ дѣленія ихъ на $\varphi(x)$ должны быть $=0$; здѣсь $\varphi(x)=0$ уравненіе, дающее тѣ корни уравненія $a_0=0$, для которыхъ обращается въ нуль избранная группа коэффиціентовъ $A_{\alpha\beta}$. И т. д.

Всѣхъ условій, вмѣстѣ съ прежними такимъ образомъ полученныхъ, будетъ $A=\sum A_{ab}$ [§ 37, (13)].

48. Всѣхъ коэффиціентовъ въ функціи $\overset{\mu\ \nu}{f}(x,y)$ будетъ числомъ

$$(\mu+1)(\nu+1); \tag{1}$$

но такъ какъ въ случаѣ $\mu\geq m$, $\nu\geq n$ значенія этой функціи для всѣхъ значеній (x,y), принадлежащихъ къ алгебраическому образу $\overset{m\ n}{F}(x,y)=0$, будутъ равны значеніямъ функціи:

$$\overset{\mu\ \nu}{f}(x,y)+\chi(\overset{\mu-m}{x},\overset{\nu-n}{y})\overset{m\ n}{F}(x,y), \tag{2}$$

гдѣ $\chi(\overset{\mu-m}{x},\overset{\nu-n}{y})$ цѣлая функція x и y указанныхъ степеней соотвѣтственно съ $(\mu-m+1)(\nu-m+1)$ произвольными коэффиціентами, то можно этой произвольностью воспользоваться для того, чтобы такому же числу коэффиціентовъ функціи $\overset{\mu\ \nu}{f}(x,y)$ дать разъ навсегда установленныя значенія, напримѣръ, равныя нулю; тогда останется неопредѣленныхъ коэффиціентовъ всего:

$$\begin{aligned}(\mu+1)(\nu+1)-(\mu-m+1)(\nu-n+1)&=\\ =m(\nu+1)+n(\mu+1)-mn&=\\ =m\nu+n\mu-(m-1)(n-1)+1&,\end{aligned} \tag{3}$$

которые должны удовлетворять вышеупомянутымъ условіямъ присоединенности; такъ что въ присоединенной функціи $\overset{\mu\ \nu}{f}(x,y)$ будетъ всего только

$$m\nu+n\mu-(m-1)(n-1)+1-A \tag{4}$$

неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Когда $\mu<m$, $\nu<n$, то неопредѣленныхъ коэффиціентовъ будетъ всего

$$(\mu+1)(\nu+1)-A; \tag{5}$$

для $\mu = m - 2$, $\nu = n - 2$ получаемъ такое число неопредѣленныхъ коэффиціентовъ въ присоединенной функціи $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$:

(6) $$(m-1)(n-1) - A = p$$

по (19) § 37. Если $\mu = m - 1$, $\nu = n - 1$, то число неопредѣленныхъ коэффиціентовъ въ присоединенной функціи $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ будетъ $=$

(7) $$mn - A = p + m + n - 1.$$

49. Значенія x, для которыхъ будетъ:

(1) $$f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}) = 0,$$

найдутся изъ уравненія, получаемаго чрезъ исключеніе y отсюда при помощи основного уравненія (fundamentale Curve)

(2) $$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0,$$

именно изъ уравненія

(3) $$\Phi(x) = a_0^{\nu} \prod_{i=1}^{i=n} f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y_i}) = 0.$$

Это уравненіе степени

(4) $$m\nu + \mu n$$

относительно неизвѣстной x; ибо оно степени ν относительно коэффиціентовъ уравненія (2), которые степени m относительно x, и степени n относительно коэффиціентовъ уравненія (1), которые степени μ относительно x. Но въ числѣ корней этого уравненія (3) будутъ и тѣ значенія x, которыя отвѣчаютъ точкамъ развѣтвленія (a, b), причемъ каждый такой множитель $x - a$ войдетъ въ $\Phi(x)$ въ степени $2A_{ab}$. Въ самомъ дѣлѣ, по (14′) § 44 имѣемъ вблизи этой точки:

(5) $$f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}) = \xi'^{(\gamma_i - 1)q + (\delta_i - 1)p} f_1(\xi'^{p}, v),$$

но по (17) того же §

(6) $$\gamma_i q + \delta_i p = \alpha_i q + \beta_i p + 1,$$

слѣд.,

(7) $$f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}) = \xi'^{\alpha_i q + \beta_i p + 1 - q - p} f_1(\xi'^{p}, v);$$

такъ какъ одинъ и тотъ же множитель предъ $f_1(\xi'^{p}, v)$ будетъ отвѣчать p значеніямъ v для каждаго корня уравненія $L_i = 0$, степени k_i относительно λ, отвѣчающаго колѣну C_i полигона P, то будетъ произведеніе соотвѣтственныхъ $k_i p$ множителей:

$$\prod_{j=1}^{j=k_i p} f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y_j}) = \xi'^{p[(\alpha_i k_i q + \beta_i k_i p + k_i) - k_i q - k_i p]} \prod f_1(\xi'^{p}, v), \tag{8}$$

но $k_i q = \beta_{i+1} - \beta_i$, $k_i p = \alpha_i - \alpha_{i+1}$; потому, и такъ какъ $\xi'^{p} = \xi$, это приведется къ такому:

$$\prod_{j=1}^{j=k_i p} f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y_j}) = \xi^{[(\alpha_i \beta_{i+1} - \beta_i \alpha_{i+1} + k_i) - (\beta_{i+1} - \beta_i) - (\alpha_i - \alpha_{i+1})]} \prod f_1(\xi'^{p}, v); \tag{9}$$

взявъ же такія же произведенія для всѣхъ колѣнъ полигона P и перемноживъ, имѣя въ виду, что $\beta_0 = 0$, $\alpha_h = 0$, получимъ:

$$\prod f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y_j}) = \xi^{\sum_{i=0}^{i=h-1} (\alpha_i \beta_{i+1} - \beta_i \alpha_{i+1} + k_i) - \alpha_0 - \beta_h} \prod f_1(\xi'^{p}, v), \tag{10}$$

а это по (1) § 38 такъ можетъ быть представлено:

$$\prod f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y_j}) = \xi^{2\mathfrak{A}_{ab}} \prod f_1(\xi'^{p}, v). \tag{11}$$

Если λ кратный корень уравненія $L_i = 0$, то точно также найдемъ, что входящее въ (10) произведеніе

$$\prod f_1(\xi'^{p}, v) = \xi^{2\Sigma_1 \mathfrak{A}'_{ab}} \prod f_2(\xi''^{p'}, v), \tag{12}$$

гдѣ сумма $\sum_1 \mathfrak{A}'_{ab}$ распространена на всѣ колѣна линій P', отвѣчающихъ всѣмъ кратнымъ корнямъ всѣхъ уравненій $L_i = 0$ для всѣхъ колѣнъ линіи P, ибо внѣшній множитель

$$\xi''^{[(\alpha'_i \beta'_{i+1} - \beta'_i \alpha'_{i+1} + k_i) - (\beta'_{i+1} - \beta'_i) - (\alpha'_i - \alpha'_{i+1})]}$$

для p значеній $v = \sqrt[p]{\lambda}$, каждому изъ которыхъ отвѣчаетъ p' значеній $v' = \sqrt[p]{\lambda'}$, будетъ одинъ и тотъ же; поэтому этотъ множитель войдетъ pp' разъ; но $\xi''^{pp'} = \xi'^{p} = \xi$, и это будетъ для каждаго колѣна полигона P и подчиненнаго ему полигона P'; отсюда и получается показанный въ (12) множитель. Внося это въ (10), будемъ имѣть:

$$\prod_{j=1}^{j=p} f_1(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}) = \xi^{2\mathfrak{A}_{ab} + 2\Sigma_1 \mathfrak{A}'_{ab}} \prod f_2(\xi''^{p'}, v'). \tag{13}$$

Здѣсь $v'^{p'} = \lambda'$, гдѣ λ' корень уравненія $L'_i = 0$. Опять всѣ множители входящаго направо произведенія, которые будутъ отвѣчать кратному корню этого уравненія, будутъ имѣть множителемъ одну и ту же степень ξ'''; та же степень войдетъ во всѣ множители, числомъ $pp'p''$, отвѣчающіе всѣмъ значеніямъ $v=\sqrt[p]{\lambda}$, $v'=\sqrt[p']{\lambda'}$, $v''=\sqrt[p'']{\lambda''}$ при избранныхъ значеніяхъ $\lambda, \lambda', \lambda''$, ибо коэффиціенты уравненія $L_i=0$ зависятъ отъ λ и λ', какъ мы видѣли въ § 28 (примѣчаніе); поэтому множитель

$$\xi''^{[(\alpha''_{i''}\beta''_{i''+1}-\alpha''_{i''+1}\beta''_{i''})-(\beta''_{i''+1}-\beta''_{i''})-(\alpha''_{i''}-\alpha''_{i''+1})]}$$

войдетъ въ степени $pp'p''$ для каждой комбинаціи значеній λ, λ' и λ'', отвѣчающихъ каждому колѣну P и ему подчиненныхъ P' и P'', и мы будемъ имѣть, такъ какъ $\xi'''^{p\,p'p''}=\xi''^{p\,p'}=\xi^{p}=\xi$:

$$(14) \qquad \prod f_2(\xi''^{p'}v')=\xi^{2\Sigma_2\mathfrak{A}''_{ab}}\prod f_3(\xi'''^{p''},v''),$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ колѣна полигоновъ P'', отвѣчающихъ всѣмъ полигонамъ P', которыя въ свою очередь отвѣчаютъ всѣмъ полигонамъ P. Внося это въ (13), будемъ имѣть:

$$(15) \qquad \prod_{j=1}^{j=p} f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y_j})=\xi^{2(\mathfrak{A}_{ab}+\Sigma_1\mathfrak{A}'_{ab}+\Sigma_2\mathfrak{A}''_{ab})}\prod f_3(\xi'''^{p''},v'').$$

Продолжая эти разсматриванія, увидимъ, что окончательно будетъ:

$$(16) \qquad \Phi(x)=a_0^{\nu}\prod_{j=1}^{j=p} f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y_j})=a_0^{\nu}\,\xi^{2A_{ab}}\prod f_{g-1}\left(\xi^{(g-1)^{p^{(g-2)}}},v^{(g-2)}\right),$$

гдѣ A_{ab} опредѣляется формулою (5) § 37. Отсюда видно, что значеніе $x=a$, отвѣчающее винтовой точкѣ (a,b), будетъ $2A_{ab}$-кратнымъ корнемъ уравненія $\Phi(x)=0$ (ибо $\xi=x-a$). Слѣд., всего въ винтовыхъ точкахъ будетъ лежать $2A$ нулей функціи $\Phi(x)$. Сверхъ этихъ $2A$ нулей, эта функція, какъ степени $m\nu+\mu n$, будетъ имѣть еще

$$(17) \qquad m\nu+\mu n-2A$$

нулей; всѣхъ же неопредѣленныхъ коэффиціентовъ въ случаѣ $\mu\geqq m$, $\nu\geqq n$, по (4) пред. § будетъ въ $f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$:

$$(18) \qquad m\nu+\mu n-(m-1)(n-1)+1-A;$$

отношеній всѣхъ этихъ коэффиціентовъ къ одному изъ нихъ будетъ, слѣд.,

$$(19) \qquad m\nu+\mu n-(m-1)(n-1)-A;$$

вычитая это число изъ числа (17) всѣхъ прочихъ нулей функціи $\Phi(x)$, мы будемъ имѣть въ остаткѣ

$$(20) \qquad (m-1)(n-1)-A=p;$$

слѣд., число нулей функціи превосходитъ на p число неопредѣленныхъ коэффиціентовъ $f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$; отсюда мы заключаемъ, что p нулей изъ всего числа ихъ не могутъ быть заданы произвольно, а опредѣляются по прочимъ. Въ случаѣ $\mu=m-2$, $\nu=n-2$ число отношеній всѣхъ произвольныхъ коэффиціентовъ функціи $\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$ къ одному по (6) пред. § будетъ:

$$(m-1)(n-1)-A-1=p-1, \tag{21}$$

число же всѣхъ нулей будетъ:

$$\begin{aligned} &m(n-2)+n(m-2)-2A= \\ &=2\{(m-1)(n-1)-A-1\}=2(p-1); \end{aligned} \tag{22}$$

отсюда видимъ, что изъ нихъ только $p-1$ могутъ быть заданы произвольно, остальныя же $p-1$ по нимъ опредѣляются. Въ случаѣ $\mu=m-1$, $\nu=n-1$ число отношеній произвольныхъ коэффиціентовъ функціи $\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$ къ одному изъ нихъ по (7) пред. § будетъ:

$$mn-A-1=p+m+n-2; \tag{23}$$

число же нулей:

$$\begin{aligned} &m(n-1)+n(m-1)-2A= \\ &=2mn-m-n-2A= \\ &=2(p+m+n-1)-m-n= \\ &=2p+m+n-2; \end{aligned} \tag{24}$$

сличая съ предыдущимъ, заключаемъ, что и для этой функціи $\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$ число нулей, опредѣляющихся по остальнымъ, равно рангу, какъ въ случаѣ $\mu\geqq m$, $\nu\geqq n$.

50. Пусть

$$\psi(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y}) \quad \text{и} \quad \chi(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y}) \tag{1}$$

будутъ двѣ присоединенныя функціи, какъ $f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$ послѣднихъ шести §§, одинаковыхъ степеней относительно x и y соотвѣтственно, содержащія каждая по (4) § 47

$$m\nu+\mu n-(m-1)(n-1)+1-A \tag{2}$$

неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Какъ присоединенныя функціи, обѣ функціи (1) будутъ въ точкахъ развѣтвленія одинаковаго порядка съ

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}:\frac{dx}{dt}, \tag{2}$$

и, слѣд., между собою; какъ присоединенныя функціи и одинаковой степени относительно x и y соотвѣтственно будутъ одинаковаго порядка и въ безконечно-удаленныхъ мѣстахъ алгебраическаго образа:

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0; \tag{3}$$

потому отношеніе ихъ:

$$z = \frac{\psi(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})}{\chi(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})} \tag{4}$$

представитъ функцію, имѣющую конечное значеніе во всѣхъ особенныхъ мѣстахъ алгебраическаго образа. Что касается до обыкновенныхъ мѣстъ алгебраическаго образа, то, если только μ и ν достаточно велики, всегда можно докончить опредѣленіе этихъ функцій (1) такимъ образомъ, что z будетъ въ произвольно назначенныхъ m' точкахъ Римановой поверхности обращаться въ безконечность перваго порядка ∞^1. Въ самомъ дѣлѣ, для того, чтобы это можно было сдѣлать, необходимо и достаточно, чтобы число отношеній неопредѣленныхъ коэффиціентовъ въ $\chi(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$ къ одному изъ нихъ было больше m':

$$m\nu + n\mu - (m-1)(n-1) - A > m' \text{ [1]}; \tag{5}$$

тогда всегда можно опредѣлить эту функцію $\chi(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$ такъ, чтобы она обращалась въ данныхъ m' точкахъ въ нуль перваго порядка: 0^1; остальнымъ коэффиціентамъ можно дать какія либо значенія, по произволу выбранныя; тогда всѣ остальные корни будутъ вполнѣ опредѣлены; послѣ того, такъ какъ $\psi(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$ той же степени относительно x, соотвѣтственно y, можно опредѣлить ее такъ, чтобы она обращалась въ нуль перваго порядка: 0^1 въ этихъ остальныхъ

$$m\nu + n\mu - 2A - m' \tag{6}$$

нуляхъ функціи $\chi(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$, если только это число не болѣе числа отношеній неопредѣленныхъ коэффиціентовъ этой функціи къ одному, т. е. если имѣетъ мѣсто неравенство:

$$m\nu + n\mu - 2A - m' < m\nu + n\mu - (m-1)(n-1) - A,$$

или, перенося члены изъ одной части въ другую:

$$(m-1)(n-1) - A < m', \tag{7}$$

[1]) Случай $m' = p$ разсмотримъ ниже особо [см. § 53].

т. е. если

$$m' > p. \tag{8}$$

Число произвольныхъ коэффиціентовъ, которое послѣ того останется, будетъ

$$m' - p + 1, \tag{9}$$

включая общій множитель. Это число не можетъ быть < 2; въ самомъ дѣлѣ, тѣ же самыя безконечности, какъ функція z, будетъ имѣть также и функція $\alpha z + \beta$. Итакъ непремѣнно

$$m' - p + 1 > 2, \tag{10}$$

откуда

$$m' > p + 1. \tag{11}$$

Такимъ образомъ, если число $m' \geqslant p + 1$, то задача наша всегда возможна, ибо тогда наша функція z (4) дѣйствительно только въ m' точкахъ будетъ обращаться въ безконечность перваго порядка. Наименьшее возможное число точекъ, гдѣ раціональная функція мѣста алгебраическаго образа (3) должна обращаться въ ∞^1, которыя могутъ быть заданы произвольно, какъ видимъ, есть $p + 1$. Это предложеніе *Вейерштрассъ* беретъ за самое опредѣленіе ранга алгебраическаго образа (3), и показываетъ въ своихъ лекціяхъ, какъ можно построить такую функцію, которая обращалась бы въ ∞^1 въ мѣстѣ (x', y') алгебраическаго образа и еще только въ p мѣстахъ неподвижныхъ (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3 \ldots p)$. Онъ называетъ эту функцію главною, и обозначаетъ чрезъ $H(x, y; x', y')$; изъ нея онъ выводитъ всѣ другія функціи [1]). Число произвольныхъ коэффиціентовъ, которое послѣ этого останется, будетъ, какъ видѣли:

$$m' - p + 1; \tag{12}$$

но это есть только низшій предѣлъ этого числа; ибо вслѣдствіе случайнаго выбора нулей можетъ случиться, что нѣкоторыя изъ условныхъ уравненій будутъ слѣдствіемъ остальныхъ. Точное число ихъ опредѣляется теоремою, извѣстной подъ именемъ Римано-Роховой теоремы (Riemann-Rochsche Satz); но это выходитъ за предѣлы, которые мы себѣ назначили, и въ дальнѣйшемъ не найдетъ приложеній. Принимая во вниманіе значенія x въ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ наша функція

[1]) См. замѣтку *Hettner*'a: „Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen" въ Gött. Nachrichten 1884 г.

должна обращаться въ ∞^1, мы видимъ, что самая общая однозначная на Римановой поверхности для $F(x, y) = 0$ функція будетъ зависѣть всего отъ

$$2m' - p + 1 \tag{10}$$

произвольныхъ величинъ. По даннымъ значеніямъ этихъ точекъ она опредѣляется при помощи раціональныхъ дѣйствій, и только нахожденіе y къ данному x требуетъ рѣшенія уравненія. Если $m' = p$, то построить такую однозначную функцію, которая бы въ p данныхъ точкахъ обращалась въ ∞^1, возможно лишь при помощи присоединенныхъ функцій $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$, какъ увидимъ ниже.

51. Всѣ уравненія, получающіяся одно изъ другого чрезъ раціональное преобразованіе, образуютъ *классъ* уравненій, опредѣляющихъ *классъ* алгебраическихъ функцій, какъ мы видѣли въ § 42. Всѣ раціональныя функціи x и y, разсматриваемыя какъ функціи одной изъ нихъ, образуютъ систему одинаково-развѣтвленныхъ функцій. Такимъ образомъ всякое уравненіе приводитъ къ классу системъ одинаково-развѣтвленныхъ функцій, которыя чрезъ введеніе одной функціи системы вмѣсто независимой перемѣнной преобразуются одна въ другую и притомъ такъ, что всѣ уравненія одного класса приводятъ къ тому же классу системъ алгебраическихъ функцій, и наоборотъ всякій классъ такихъ системъ приводитъ къ одному классу уравненій.

Если область алгебраическаго образа $F(x, y) = 0$ есть ранга p, и функція ζ обращается въ μ точкахъ ея въ ∞^1, то число точекъ развѣтвленія этой фунціи, какъ степени μ, по формулѣ (6) § 20 будетъ

$$w = 2(\mu + p - 1),$$

тогда какъ число всѣхъ постоянныхъ, отъ которыхъ такая функція зависитъ, по (10) пред. § равно $2\mu - p + 1$. Ихъ можно такъ опредѣлить, что таковое число точекъ развѣтвленія займетъ данное положеніе на Римановой поверхности; остальныя

$$2(\mu + p - 1) - (2\mu - p + 1) = 3p - 3$$

точекъ развѣтвленія, оставаясь произвольными, и мѣняясь отъ одного класса къ другому системъ одинаково-развѣтвленныхъ функцій, названы были Риманомъ *модулями класса* (Klassen-Module) [1]), какъ его опредѣляющія постоянныя.

52. Послѣ этихъ общихъ разсматриваній, переходимъ къ спеціальному разсмотрѣнію присоединенныхъ функцій $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ и $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$, имѣющихъ фундаментальное значеніе въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ,

[1]) См. *Riemann*, Gesammelte Werke, 2-te Auflage, Leipzig 1892. Theorie der Abelschen Functionen, S. 122.

начиная съ первой, которую и назовемъ *присоединенной функціей перваго рода*. Число произвольныхъ коэффиціентовъ присоединенной функціи $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ по (6) § 47 равно p; слѣд., общая функція перваго рода есть линейная съ произвольными коэффиціентами однородная функція p частныхъ функцій этого рода, въ которыхъ тѣ произвольные коэффиціенты получаютъ p системъ частныхъ значеній, такъ что эти частныя функціи такимъ образомъ получаются при помощи однихъ раціональныхъ дѣйствій; такія p частныхъ функцій $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ мы будемъ такъ обозначать:

$$\bar{\varphi}_i(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}), \tag{1}$$

такъ что общая такъ выразится:

$$\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = \sum_{i=1}^{i=p} C_i \bar{\varphi}_i(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}). \tag{2}$$

Эти функціи (1) можно назвать *естественными*, или *натуральными*, такъ какъ онѣ получаются весьма просто и раціонально. Во (2) можно всегда опредѣлить произвольныя постоянныя такъ, что функція $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ будетъ обращаться въ $p - 1$ изъ данныхъ точекъ:

$$(a_1 b_1),\ (a_2 b_2), \ldots (a_p b_p) \tag{3}$$

въ нуль (болѣе нулей по произволу мы не можемъ назначить для этой функціи), и въ остальной въ единицу, если только эти $(a_j b_j)$ таковы, что опредѣлитель

$$\left| \bar{\varphi}_i(a_j, b_j) \right| \neq 0. \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ j = 1, 2, \ldots p \end{pmatrix} \tag{4}$$

Въ самомъ дѣлѣ, подставляя значенія (3) во (2) и обозначая ту изъ разсматриваемыхъ функцій, которая равна единицѣ при $x = a_k$, $y = b_k$, а въ остальныхъ точкахъ ряда (3) обращается въ нуль, чрезъ $\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$, такъ что, слѣд.,

$$\varphi_k(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}) = 1, \tag{5}$$

$$\varphi_k(\overset{m-2}{a_l}, \overset{n-2}{b_l}) = 0, \qquad (l \neq k) \tag{6}$$

мы будемъ имѣть такую систему уравненій для опредѣленія коэффиціентовъ C_j:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 \bar{\varphi}_1(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}) + C_2 \bar{\varphi}_2(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}) + \cdots + C_p \bar{\varphi}_p(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}), \\ 0 &= C_1 \bar{\varphi}_1(\overset{m-2}{a_l}, \overset{n-2}{b_l}) + C_2 \bar{\varphi}_2(\overset{m-2}{a_l}, \overset{n-2}{b_l}) + \cdots + C_p \bar{\varphi}_p(\overset{m-2}{a_l}, \overset{n-2}{b_l}); \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

гдѣ $l \neq 1, 2, 3 \ldots k-1, k+1, \ldots p$, откуда и найдемъ C_j. Исключая эти C_j и -1 изъ (2) и (7), получимъ для опредѣленія функціи $\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ такое уравненіе въ формѣ опредѣлителя:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \varphi_k(x,y) & \bar\varphi_1(x,y) & \bar\varphi_2(x,y)\ldots & \bar\varphi_k(x,y)\ldots & \bar\varphi_p(x,y) \\ 0 & \bar\varphi_1(a_1,b_1) & \bar\varphi_2(a_1,b_1)\ldots & \bar\varphi_k(a_1,b_1)\ldots & \bar\varphi_p(a_1,b_1) \\ 0 & \bar\varphi_1(a_2,b_2) & \bar\varphi_2(a_2,b_2)\ldots & \bar\varphi_k(a_2,b_2)\ldots & \bar\varphi_p(a_2,b_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \bar\varphi_1(a_k,b_k) & \bar\varphi_2(a_k,b_k)\ldots & \bar\varphi_k(a_k,b_k)\ldots & \bar\varphi_p(a_k,b_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \bar\varphi_1(a_p,b_p) & \bar\varphi_2(a_p,b_p)\ldots & \bar\varphi_k(a_p,b_p)\ldots & \bar\varphi_p(a_p,b_p) \end{vmatrix} = 0,$$

(гдѣ для краткости опущены показатели $m-2$ высшей степени x, и $n-2$ высшей степени y). Систему функцій

$$(9)\qquad \varphi_1(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}),\ \varphi_2(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})\ \ldots\ \varphi_p(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}),$$

такимъ образомъ опредѣленную, мы будемъ называть *нормальною*, а точки (3) *фундаментальными* точками нормальной системы. Такъ какъ опредѣлитель

$$(10)\qquad |\varphi_k(a_j, b_j)| = 1, \qquad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \ldots p \\ k = 1, 2, \ldots p \end{pmatrix}$$

какъ легко видѣть, ибо элементы его, расположенные по главной діагонали, каждый равенъ единицѣ, прочіе же всѣ равны нулю, то всякую $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ можно выразить и чрезъ нормальную систему (9) присоединенныхъ функцій перваго рода. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$(11)\qquad \varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = \sum_{i=1}^{i=p} C_i \varphi_i(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y});$$

полагая здѣсь $x = a_k$, $y = b_k$, будемъ имѣть на основаніи (5) и (6):

$$(12)\qquad \varphi(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}) = C_k;$$

внося это въ (11), будемъ имѣть:

$$(13)\qquad \varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = \sum_{i=1}^{i=p} \varphi(\overset{m-2}{a_i}, \overset{n-2}{b_i})\varphi_i(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}).$$

Въ частности чрезъ нормальную систему присоединенныхъ функцій (9) можетъ быть выражена и естественная система функцій того же рода.

Постоянныя C_k можно получить также и такимъ способомъ. Если (α_i, β_i) суть тѣ точки, гдѣ $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$ обращается въ нуль за исключеніемъ (α_h, β_h), гдѣ она $= 1$, то, полагая въ (11) вмѣсто (x, y) $(\alpha_i, \beta_i)_1^p$, получимъ строку уравненій, аналогичныхъ (7), откуда найдемъ

$$C_k = (-1)^{h+k-2}\frac{D'_{hk}}{D'}, \tag{14}$$

гдѣ

$$D' = |\varphi_i(\alpha_j, \beta_j)|, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ j = 1, 2, \ldots p \end{pmatrix} \tag{15}$$

а D'_{hk} миноръ, отвѣчающій элементу, стоящему въ пересѣченіи h-ой строки и k-ого столбца. Сравнивая оба выраженія C_k, будемъ имѣть:

$$\varphi_h(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \alpha_j, \beta_j\big|_1^p) = (-1)^{h+k-2}\frac{D'_{hk}}{D'}, \tag{16}$$

гдѣ мы для ясности подъ знакомъ функціи φ поставили ея нули, какъ характеризующіе параметры, и привѣсили значекъ h, указывающій на то изъ p значеній α_j, β_j, для котораго она $= 1$. Формула (16) найдетъ примѣненіе дальше.

53. Съ помощію разсмотрѣнныхъ функцій перваго рода можно построить функцію, обращающуюся въ безконечность перваго порядка ∞^1 въ p данныхъ точкахъ, если онѣ только выбраны надлежащимъ образомъ [1]) и содержащую minimum двѣ произвольныя величины. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i \varphi_i(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})}{\sum_{i=1}^{i=p} \beta_i \varphi_i(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})}, \tag{1}$$

и опредѣлимъ отношенія всѣхъ β_i къ β_1 такъ, чтобы знаменатель обращался въ $p-1$ данныхъ точкахъ въ нуль: 0^1; β_1 можно дать произвольное значеніе (напр., принять $\beta_1 = 1$), ибо въ (1) имѣемъ всего $2p-1$ отношеній всѣхъ α и β къ β_1. Но этотъ знаменатель обращается еще въ $p-1$ точкахъ въ 0^1; опредѣлимъ α_i такъ, чтобы числитель въ $p-2$ изъ этихъ точекъ обращался въ 0^1; это даетъ $p-2$ условій между коэффиціентами α_i, и мы будемъ имѣть функцію, обращающуюся въ ∞^1 въ p точкахъ, изъ которыхъ одна опредѣляется по

[1]) Ибо мы видѣли въ § 50, что наименьшее число произвольно выбранныхъ точекъ, гдѣ алгебраическая функція, однозначная на Римановой поверхности, обращается въ ∞^1, есть $p+1$; слѣд., если задано p, то изъ нихъ только $p-1$ могутъ быть заданы произвольно.

остальнымъ $p-1$, содержащую линейно двѣ произвольныя постоянныя. Функціи, которыя въ меньшемъ числѣ точекъ Римановой поверхности обращаются въ ∞^1, представляютъ частный случай сейчасъ разсмотрѣнной функціи z.

54. Переходимъ теперь къ присоединенной функціи $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$. По (7) § 48 она содержитъ еще, кромѣ общаго множителя,

(1) $$p+m+n-2$$

неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, а по (26) § 49 имѣетъ

(2) $$2p+m+n-2$$

„подвижныхъ нулей“, т. е. мѣняющихся отъ одной функціи этого рода къ другой; но изъ нихъ только $p+m+n-2$ могутъ быть назначены по произволу, остальныя же по нимъ опредѣляются. Подчинимъ эту функцію теперь тому условію, чтобы она обращалась въ нуль перваго порядка 0^1 для всѣхъ рѣшеній системы уравненій:

(3) $$\begin{cases} F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0, \\ ax+by+c=0, \end{cases}$$

за исключеніемъ двухъ, которыя мы означимъ чрезъ (ξ, y_ξ) и (η, y_η). Исключая изъ перваго при помощи второго y, будемъ имѣть для опредѣленія значеній x такое уравненіе:

(4) $$F\left(\overset{m}{x}, -\overset{n}{\frac{ax+c}{b}}\right)=0.$$

Это уравненіе будетъ степени $m+n$ относительно x; такъ какъ по второму изъ (3) y есть однозначная функція x, то ясно, что всѣхъ рѣшеній системы (3) будетъ $m+n$. Но изъ нихъ только отвѣчающія ξ и η не будутъ обращать въ нуль функціи $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$; для всѣхъ же остальныхъ будетъ по условію:

(5) $$\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}) = 0.$$

Внося сюда значеніе y изъ второго (3), мы получимъ:

(6) $$\psi\left(\overset{m-1}{x}, -\overset{n-1}{\frac{ax+c}{b}}\right)=0;$$

это уравненіе степени $m+n-2$ относительно x. По условію оно будетъ удовлетворяться всѣми значеніями x, удовлетворяющими уравне-

нію (4), за исключеніемъ ξ и η; слѣд., первая часть его лишь постояннымъ множителемъ можетъ отличаться отъ первой части получаемаго изъ (4) чрезъ освобожденіе его отъ рѣшеній ξ и η, т. е. будетъ:

$$\psi\left(\overset{m-1}{x}, -\overset{n-1}{\frac{ax+c}{b}}\right) = C\,\frac{F\left(\overset{m}{x}, -\overset{n}{\frac{ax+c}{b}}\right)}{(x-\xi)(x-\eta)}. \qquad (7)$$

Слѣд., выполняя дѣленіе направо, и сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ этого равенства, мы будемъ имѣть линейныя относительно коэффиціентовъ функціи $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ уравненія для ихъ опредѣленія. Этихъ уравненій будетъ числомъ $m+n-2+1$; всѣхъ коэффиціентовъ же вмѣстѣ съ C будетъ по (1): $p+m+n-2+1$; но какъ эти уравненія однородны, то изъ нихъ $m+n-2$ коэффиціентовъ опредѣлятся функціями C и остальныхъ p, такъ что останется еще $p+1$ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Слѣд., можно сказать, что общая $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ функція, опредѣленная согласно этимъ условіямъ, есть линейная функція $p+1$ частныхъ функцій этого рода. Мы увидимъ ниже, что всѣ такія функціи, по раздѣленіи ихъ на $ax+by+c$, кромѣ общаго множителя будутъ еще различаться только на общую присоединенную функцію перваго рода $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$. Постоянный множитель опредѣляется по новому требованію отъ функціи $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$, какъ увидимъ въ слѣдующемъ §.

55. Такъ какъ

$$F(\overset{m}{\xi}, \overset{n}{y_\xi}) = 0 \quad \text{и} \quad F(\overset{m}{\eta}, \overset{n}{y_\eta}) = 0, \qquad (1)$$

гдѣ

$$y_\xi = -\frac{a\xi+c}{b}, \quad \text{и} \quad y_\eta = -\frac{a\eta+c}{c}, \qquad (2)$$

то, полагая еще для краткости

$$\bar{y} = -\frac{ax+c}{b}, \qquad (3)$$

равенство (7) можно такъ представить:

$$\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{\bar{y}}) = \frac{C}{(\xi-\eta)(x-\xi)(x-\eta)} \begin{vmatrix} F(x,\bar{y}) & F(\xi, y_\xi) & F(\eta, y_\eta) \\ x & \xi & \eta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

(откуда видна сократимость правой части на $x-\xi$, $x-\eta$, $\xi-\eta$).

Съ помощію этой формулы легко найти значеніе функціи $\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$ при $x=\xi$, $y=y_\xi$, а также при $x=\eta$, $y=y_\eta$. Вычитая второй столбецъ изъ перваго и дѣля первый на $x-\xi$, будемъ имѣть, какъ нетрудно видѣть:

(5) $$\psi(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=\frac{C}{x-\eta}\cdot\frac{F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})-F(\overset{m}{\xi},\overset{n}{y_\xi})}{x-\xi};$$

подводя точку (x,y) къ точкѣ (ξ,y_ξ), получимъ въ предѣлѣ:

(6) $$\psi(\overset{m-1}{\xi},\overset{n-1}{y_\xi})=\frac{C}{\xi-\eta}\frac{dF(\xi,y_\xi)}{d\xi};$$

но

(7) $$\frac{dF(\xi,y_\xi)}{d\xi}=\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial\xi}+\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}\cdot\frac{dy_\xi}{d\xi}$$

и изъ (2)

(8) $$\frac{dy_\xi}{d\xi}=-\frac{a}{b}=\frac{y_\eta-y_\xi}{\eta-\xi}=\frac{y_\xi-y_\eta}{\xi-\eta};$$

внося отсюда въ (7), и оттуда въ (6), получимъ:

(9) $$\psi(\overset{m-1}{\xi},\overset{n-1}{y_\xi})=-\frac{C}{(\eta-\xi)^2}\left(\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial\xi}(\eta-\xi)+\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}(y_\eta-y_\xi)\right).$$

Точно также найдемъ:

(10) $$\psi(\overset{m-1}{\eta},\overset{n-1}{y_\eta})=-\frac{C}{(\xi-\eta)^2}\left(\frac{\partial F(\eta,y_\eta)}{\partial\eta}(\xi-\eta)+\frac{\partial F(\eta,y_\eta)}{\partial y_\eta}(y_\xi-y_\eta)\right).$$

Мы видимъ, что значенія всѣхъ присоединенныхъ функцій этого рода въ точкахъ (ξ,y_ξ) и (η,y_η) при надлежащемъ выборѣ постоянной C будутъ одни и тѣ же. Пусть $\psi_1(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$ будетъ другая также функція, съ постоянною C_1; тогда разность

(11) $$\frac{1}{C_1}\psi_1(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})-\frac{1}{C}\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$$

въ точкахъ, сейчасъ названныхъ, не будетъ обращаться въ безконечность.

Если раздѣлить эту разность на $ax+by+c$, то получимъ функцію

$$\left[\frac{1}{C_1}\psi_1(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})-\frac{1}{C}\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})\right]:(ax+by+c),\qquad(12)$$

которая будетъ тоже присоединенною, которая притомъ будетъ одного порядка съ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}:\frac{dx}{dt}$ и въ тѣхъ точкахъ, гдѣ $y=\infty$, ибо порядокъ функціи $\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$ въ этихъ точкахъ будетъ отъ порядка этой послѣдней разниться множителемъ $\bar{y}^{-1}$; по перенесеніи же его въ дѣлитель для произведенія $\bar{y}(ax+b\frac{1}{\bar{y}}+c)$ получимъ конечное значеніе b; слѣд., это частное (12) будетъ присоединенная функція перваго рода, такъ какъ степень ея, равная степени числителя безъ степени знаменателя, относительно x будетъ $m-2$, а относительно y $n-2$, и порядокъ ея въ каждой точкѣ будетъ равенъ порядку $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}:\frac{dx}{dt}$. И такъ имѣемъ

$$\left[\frac{1}{C_1}\psi_1(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})-\frac{1}{C}\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})\right]:(ax+by+c)=\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}),\qquad(13)$$

откуда

$$\psi_1(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})=C\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})+(ax+by+c)\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}),\qquad(14)$$

означая $\frac{C_1}{C}$ чрезъ C, и включая множитель C_1 въ $\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$. Такъ выражаются одна чрезъ другую различныя функціи $\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$, опредѣленныя, какъ выше было показано, при помощи уравненія

$$ax+by+c=0,\qquad(16)$$

[геометрически выражаясь, обращающіяся въ нуль во всѣхъ точкахъ пересѣченія этой прямой съ фундаментальной кривой за исключеніемъ точекъ (ξ,y_ξ) и (η,y_η)]. Остававшіеся произвольными $p+1$ коэффиціентовъ входятъ въ общую функцію перваго рода $\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$ и множитель C.

При $x=\xi$, $y=y_\xi$ функція $ax+by+c$ обращается въ нуль; но отношеніе ея къ $x-\xi$ будетъ величина конечная и отличная отъ нуля; то же и для другой точки $x=\eta$, $y=y_\eta$. Дѣйствительно:

$$\left.\frac{ax+by+c}{x-\xi}\right|_{x=\xi}=\frac{a+b\dfrac{dy_\xi}{d\xi}}{1};\qquad(17)$$

но точка (ξ, y_ξ) лежитъ на фундаментальной кривой, т. е. эти величины ξ и y_ξ удовлетворяютъ уравненію $F(x,y)=0$; а посему будетъ

$$\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial\xi}+\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}\frac{dy_\xi}{d\xi}=0; \tag{18}$$

взявъ отсюда значеніе $\frac{dy_\xi}{d\xi}$ и внося въ (17), будемъ имѣть:

$$\left.\frac{ax+by+c}{x-\xi}\right|_{x=\xi}=\frac{a\frac{\partial F}{\partial y_\xi}-b\frac{\partial F}{\partial \xi}}{\frac{\partial F}{\partial y_\xi}}=$$

$$=-\frac{b}{\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}}\left(\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial\xi}-\frac{a}{b}\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}\right)= \tag{19}$$

$$=\frac{b}{\xi-\eta}\,\frac{\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial\xi}(\eta-\xi)+\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}(y_\eta-y_\xi)}{\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}}.$$

Отсюда и изъ (9) слѣдуетъ, что

$$\text{пред.}\left[\frac{\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})}{(ax+by+c)\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}(x-\xi)\right]_{x=\xi}=-\frac{C}{b(\xi-\eta)}. \tag{20}$$

Точно также найдемъ, что

$$\text{пред.}\left[\frac{\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})}{(ax+by+c)\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}(x-\eta)\right]_{x=\eta}=+\frac{C}{b(\xi-\eta)}, \tag{21}$$

ибо

$$\text{пред.}\left.\frac{ax+by+c}{x-\eta}\right|_{x=\eta}=$$

$$=-\frac{b}{\xi-\eta}\,\frac{\frac{\partial F(\eta,y_\eta)}{\partial\eta}(\xi-\eta)+\frac{\partial F(\eta,y_\eta)}{\partial y_\eta}(y_\xi-y_\eta)}{\frac{\partial F(\eta,y_\eta)}{\partial y}}. \tag{22}$$

Если принять, чтобы докончить опредѣленіе функціи $\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$:

$$C=b(\xi-\eta), \tag{23}$$

то (21) и (22) обратятся въ такія:

$$\text{пред.}\left[\frac{\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})}{(ax+by+c)\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}(x-\xi)\right]_{x=\xi}=-1, \tag{24}$$

$$\text{пред.}\left[\frac{\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})}{(ax+by+c)\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}(x-\eta)\right]_{x=\eta}=+1. \tag{25}$$

Отсюда слѣдуютъ для функціи

$$\frac{\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})}{(ax+by+c)\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} \tag{26}$$

такія разложенія: вблизи $x=\xi$, $y=y_\xi$ такое:

$$\frac{\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})}{(ax+by+c)\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=-\frac{1}{x-\xi}+\mathfrak{P}(x-\xi) \tag{27}$$

и вблизи другой точки $x=\eta$, $y=y_\eta$ слѣдующее:

$$\frac{\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})}{(ax+by+c)\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=+\frac{1}{x-\eta}+\mathfrak{P}(x-\eta), \tag{28}$$

гдѣ нѣмецкое $\mathfrak{P}$ обозначаетъ рядъ, расположенный по положительнымъ степенямъ своего аргумента.

56. Функцію

$$\frac{\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})}{ax+by+c}, \tag{1}$$

гдѣ $\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$ разсмотрѣнная въ пред. § присоединенная къ уравненію

$$F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0 \tag{2}$$

функція, обращающаяся въ нуль для всѣхъ паръ значеній x и y, удовлетворяющихъ уравненію (2) совмѣстно съ уравненіемъ:

$$ax+by+c=0, \tag{3}$$

за исключеніемъ рѣшеній:

(4) $$x=\xi,\ y=y_\xi;\quad x=\eta,\ y=y_\eta,$$

мы будемъ обозначать по Нётеру такъ:

(5) $$\frac{\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})}{ax+by+c}=P_{\xi,\eta}(x,y;a_i,\overset{p}{\underset{1}{}}b_i),$$

если (a_i,b_i) $(i=1,2,3\ldots p)$ суть тѣ изъ значеній (x,y), для которыхъ эта функція обращается въ нуль перваго порядка: 0^1, и которыя могутъ быть назначены по произволу, ибо всегда можно опредѣлить произвольныя постоянныя C_j, входящія въ общую $\varphi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$ при помощи какой либо частной $\psi_1(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$ по (14) пред. §, такъ что функція $\psi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$ будетъ обращаться въ нуль: 0^1, при $x=a_i$, $y=b_i$; для этого только необходимо и достаточно, чтобы опредѣлитель

(6) $$\left.\varphi_k(\overset{m-2}{a_i},\overset{n-2}{b_i})\right|\ \text{не}\ =0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ равенствѣ (14) пред. §, которое мы теперь, мѣняя роли ψ и ψ_1, такъ напишемъ:

(7) $$\frac{\psi(x,y)}{ax+by+c}=\frac{\psi_1(x,y)}{ax+by+c}+\sum_{j=1}^{j=p}C_j\varphi_j(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y}),$$

$x=a_i$, $y=b_i$, мы будемъ имѣть для опредѣленія коэффиціентовъ C_j такую систему уравненій:

(8) $$0=\frac{\psi_1(a_i,b_i)}{aa_i+bb_i+c}+\sum_{j=1}^{i=p}C_j\varphi_j(\overset{m-2}{a_i},\overset{n-2}{b_i}),$$

откуда найдемъ:

(9) $$C_k=-\frac{D^{(k)}}{D},$$

гдѣ

(10) $$D=\left|\ \varphi_j(a_i,b_i)\right|,\quad (i,j=1,2,3\ldots p)$$

а $D^{(k)}$ получается изъ него чрезъ замѣну k-ого столбца чрезъ

(11) $$\frac{\psi_1(a_i,b_i)}{aa_i+bb_i+c}.\qquad (i=1,2,3\ldots p)$$

Числитель и знаменатель выраженія C_k [(19)] суть знакоперемѣнныя функціи паръ величинъ (a_i,b_i), а потому C_k будутъ симметрическія функціи этихъ величинъ. Мы будемъ въ дальнѣйшемъ разумѣть подъ $(a_i,\overset{p}{\underset{1}{}}b_i)$ фундаментальныя точки нормальной системы присоединенныхъ функцій перваго рода $\varphi_i(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$ [(9) § 52]; тогда болѣе общая присоединенная функція разсматриваемаго теперь рода, съ нулями въ точкахъ $(\alpha_i,\overset{p}{\underset{1}{}}\beta_i)$, представится по (14) пред. § такъ:

$$P_{\xi\eta}(x,y;\alpha_i,\overset{p}{\underset{1}{}}\beta_i)=P_{\xi\eta}(x,y;a_i,\overset{p}{\underset{1}{}}b_i)+\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}),\tag{12}$$

гдѣ

$$\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})=\sum_{i=1}^{i=p}C_i\varphi_i(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}).\tag{13}$$

Всѣ эти функціи называются присоединенными функціями *третьяго рода;* постоянныя ξ,η суть *параметры* этой функціи.

57. Присоединенная функція третьяго рода съ параметрами ξ и η однозначно опредѣляется по даннымъ нулямъ ея, $(\alpha_i,\overset{p}{\underset{1}{}}\beta_i)$; ибо уравненіе (12) пред. § линейное относительно величинъ C_i, входящихъ по (13) того же § въ функцію $\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$. Съ помощію этого замѣчанія легко доказать многія свойства этихъ функцій, играющія большую роль въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ. Первое свойство выражается слѣдующимъ равенствомъ:

$$P_{\xi\zeta}(x,y;a_i,\overset{p}{\underset{1}{}}b_i)+P_{\zeta\eta}(x,y;a_i,\overset{p}{\underset{1}{}}b_i)=P_{\xi\eta}(x,y;a_i,\overset{p}{\underset{1}{}}b_i).\tag{1}$$

Для доказательства этого равенства замѣтимъ, что лѣвая часть его представляетъ присоединенную функцію третьяго рода, обращающуюся въ ∞^1 въ точкахъ (ξ,y_ξ) и (η,y_η) такъ, что

$$\text{пред.}\left.\left(\frac{P_{\xi\zeta}+P_{\zeta\eta}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}\right)(x-\xi)\right|_{x=\xi}=-1,\tag{2}$$

$$\left(\text{ибо пред.}\left.\frac{P_{\xi\zeta}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}(x-\xi)\right|_{x=\xi}=-1,\quad \text{пред.}\left.\frac{P_{\zeta\eta}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}(x-\xi)\right|_{x=\xi}=0\right)$$

и

$$\text{пред.}\left.\left(\frac{P_{\xi\zeta}+P_{\zeta\eta}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}\right)(x-\eta)\right|_{x=\eta}=+1,\tag{3}$$

(ибо

(4) пред. $\dfrac{P_{\xi\zeta}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}(x-\eta)\Big|_{x=\eta}=0$, пред. $\dfrac{P_{\xi\eta}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}(x-\eta)\Big|_{x=\eta}=+1$);

далѣе для $i=1,2,3\ldots p$ будетъ

(5) $$\left(P_{\xi\zeta}+P_{\zeta\eta}\right)_{x=a_i,\,y=b_i}=0;$$

всѣми же этими свойствами функція $P_{\xi\eta}$ вполнѣ опредѣлена; отсюда имѣемъ равенство (1), что и требовалось доказать.

Равенство (1) можно еще такъ представить:

(6) $$P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)-P_{\zeta\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)=P_{\xi\zeta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i);$$

или, перемѣняя названія η и ζ одно на другое:

(7) $$P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)=P_{\xi\zeta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)-P_{\eta\zeta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i);$$

(впрочемъ это равенство легко доказать и прямо, какъ (1)). Если здѣсь переставимъ ξ и η одно съ другимъ, то правая часть перемѣнитъ только знакъ; слѣд.,

(8) $$P_{\eta\xi}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)=-P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i).$$

Оба послѣднія равенства выражаютъ новыя свойства: послѣднее, что функція $P_{\eta\xi}$ есть знакоперемѣнная функція обоихъ параметровъ, т. е. мѣняетъ знакъ отъ перестановки одного на мѣсто другого, откуда въ свою очередь слѣдуетъ, что она $=0$ при $\xi=\eta$, $y_\xi=y_\eta$ (что, впрочемъ, видно и изъ (7)); предпослѣднее, что она разбивается на разность двухъ функцій, зависящихъ каждая лишь отъ одного изъ параметровъ этой функціи.

58. Вернемся опять къ равенству (12) § 56; внося въ него изъ (13) того же §, будемъ имѣть:

(1) $$P_{\xi\eta}(x,y;\alpha_i,{}^{p}_{1}\beta_i)=P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)+\sum_{j=1}^{j=p}C_j\varphi_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}).$$

Полагая $x=a_{j'}$, $y=b_{j'}$, и имѣя въ виду свойства нормальной системы присоединенныхъ функцій перваго рода, мы будемъ имѣть:

(2) $$P_{\xi\eta}(a_{j'},b_{j'};\ \alpha_i,{}^{p}_{1}\beta_i)=C_{j'},$$

внеся это въ (1), будемъ имѣть:

$$P_{\xi\eta}(x,y;\alpha_i,{}^{p}_{1}\beta_i)=P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)+\sum_{j=1}^{j=p}P_{\xi\eta}(a_j,b_j;\alpha_i,{}^{p}_{1}\beta_i)\varphi_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}). \quad (3)$$

Отсюда, полагая:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=x\\ \beta_1=y\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}\alpha_2=a_2\\ \beta_2=b_2\end{array}\right\}\ \ldots\ \left.\begin{array}{l}\alpha_p=a_p\\ \beta_p=b_p\end{array}\right\} \quad (4)$$

и имѣя въ виду, что

$$P_{\xi\eta}(x,y;\ x,y,a_j,{}^{p}_{2}b_j)=0, \quad (5)$$

$$P_{\xi\eta}(a_i,b_i;\ x,y,a_j,{}^{p}_{2}b_j)=0, \quad (6)$$

для $i=2,3,\ldots p$, мы получимъ:

$$0=P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)+P_{\xi\eta}(a_1,b_1;x,y,a_i,{}^{p}_{2}b_i)\varphi_1(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}), \quad (7)$$

откуда

$$P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)=-P_{\xi\eta}(a_1,b_1;x,y;a_i,{}^{p}_{2}b_i)\varphi_1(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}); \quad (8)$$

т. е. если переставить въ функціи $P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)$ пару (x,y) съ (a_1,b_1) и помножить ее на $-\varphi_1(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$, то получимъ опять эту функцію. И вообще, если переставить x,y съ a_k,b_k, и помножить на $-\varphi_k(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$, то опять получимъ функцію $P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)$.

59. Положимъ въ равенствѣ (7) § 57:

$$\eta=\xi+\Delta\xi,$$

и раздѣлимъ его на $\Delta\xi$; тогда получимъ:

$$\frac{\Delta P_{\xi\zeta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)}{\Delta\xi}=-\frac{P_{\xi,\,\xi+\Delta\xi}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)}{\Delta\xi}; \quad (1)$$

по мѣрѣ приближенія $\Delta\xi$ къ нулю, лѣвая часть будетъ стремиться къ производной функціи $P_{\xi\eta}$ по ξ, правая къ той функціи, въ которую переходитъ $\dfrac{\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})}{ax+by+c}$, когда въ (7) § 54 положимъ $\eta=\xi$, и $\dfrac{C}{\Delta\xi}=b$ по (23) § 55 (геометрически выражаясь, когда сѣкущая прямая

$ax+by-c=0$, проведенная чрезъ (ξ, y_ξ), обращается въ касательную въ этой точкѣ къ основной кривой), ибо по (8) § 57:

$$-P_{\xi,\,\xi+\Delta\xi}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = P_{\xi+\Delta\xi,\,\xi}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}).$$

Это двоякое происхожденіе новой функціи раскрываетъ легко ея главныя свойства. Происхожденіе ея, выражаемое правой частью этого равенства (1), говоритъ тотчасъ, что это будетъ присоединенная функція, которая обращается въ точкѣ (ξ, y_ξ) въ ∞^2, иначе выражаясь, обращается въ ∞^1 въ двухъ совпадающихъ точкахъ. Кромѣ того изъ этого ея опредѣленія видно, что она не зависитъ отъ ζ, которая формально фигурируетъ въ лѣвой части этого равенства. Впрочемъ, эту независимость новой функціи отъ ζ можно и такъ доказать: дифференцируя по ξ равенство (7) § 57, будемъ имѣть:

(2) $$\frac{dP_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{d\xi} = \frac{dP_{\xi\zeta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{d\xi},$$

ибо второй членъ второй части, вовсе независящій отъ ξ, выпадетъ при дифференцированіи по ξ; лѣвая же часть его получается изъ правой чрезъ замѣну ζ чрезъ η, откуда и слѣдуетъ сказанное. Эту функцію по умноженіи ея на $\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}$ означимъ чрезъ $E_\xi(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$, такъ что будетъ

(3) $$E_\xi(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}\,\frac{dP_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{d\xi}.$$

Отсюда легко видѣть, что при $x=a_i$, $y=b_i$ будетъ $E_\xi(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = 0$. Это опредѣленіе ея прямо даетъ видъ ея разложенія вблизи $x=\xi$, $y=y_\xi$; по (5) § 56 и (27) § 55 имѣемъ:

(4) $$P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = -\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{x-\xi} + \mathfrak{P}_2(x-\xi)$$

вблизи разсматриваемой точки; слѣд.,

(5) $$E_\xi(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = -\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}{(x-\xi)^2} + \mathfrak{P}_3(x-\xi).$$

Эти функціи называются *присоединенными функціями второго рода*. Такимъ же образомъ можно получить функціи второго рода высшаго порядка съ однимъ параметромъ ξ, которыя при $x=\xi$, $y=y_\xi$ будутъ обращаться въ безконечности высшаго порядка. Дифференцируя $P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ k разъ по ξ и умножая затѣмъ на $\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}$, получимъ функцію, которую такъ означимъ:

(6) $$E_\xi^{(k-1)}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}\,\frac{d^k P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{d\xi^k}.$$

Иногда операцію k-кратнаго дифференцированія по ξ и затѣмъ умноженія на $\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}$ мы будемъ обозначать чрезъ D_ξ^k, такъ что (5) и (6) примутъ такой видъ:

(7) $$E_\xi(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}});$$

(8) $$E_\xi^{(k-1)}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = D_\xi^k P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}).$$

Всѣ эти функціи будутъ обращаться въ нуль при $x=a_i$, $y=b_i$. Дифференцируя (4) по ξ k разъ и умножая на $\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}$, т. е. совершая операцію D_ξ^k, будемъ имѣть для окрестности точки (ξ, y_ξ):

(9) $$E_\xi^{(k-1)}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = -k!\,\frac{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}\cdot\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{(x-\xi)^{k+1}} + \mathfrak{P}_k(x-\xi).$$

Соотношеніе между присоединенными функціями второго рода съ тѣмъ же параметромъ и того же порядка, но разнящихся нулями, получится, совершая операцію D_ξ^k надъ равенствомъ (3) § 58; мы будемъ имѣть тогда по (8):

(10) $$E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,\beta_i}}) = E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}}) + \sum_{j=1}^{j=p} E_\xi^{(k-1)}(a_j,b_j;\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,\beta_i}})\,\varphi_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}).$$

Отсюда, перенося сумму налѣво и мѣняя системы $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,\beta_i}})$ и $(\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})$ одну на другую, получимъ:

(11) $$E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,\beta_i}}) = E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}}) + \sum_{j=1}^{j=p} E_\xi^{(k-1)}(\alpha_j,\beta_j;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\,\bar{\varphi}_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}),$$

где $\bar{\varphi}_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ система нормальная, которой фундаментальныя точки суть $(\alpha_i, \beta_i)_1^p$. Для $k = 1$ будетъ:

$$(12)\quad E_\xi(x, y; \alpha_i, \beta_i)_1^p = E_\xi(x, y; a_i, b_i)_1^p - \sum_{j=1}^{j=p} E_\xi(\alpha_j, \beta_j; a_i, b_i)_1^p \bar{\varphi}_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}).$$

60. Въ случаѣ, когда точка (ξ, y_ξ) совпадаетъ съ одною изъ фундаментальныхъ точекъ, напр. (a_k, b_k), то формулы предыдущихъ §§ теряютъ смыслъ. Дѣйствительно, изъ (8) § 58 видно, что тогда будетъ $P_{a_k\eta}(x, y; a_i, b_i)_1^p = \infty$ при всякомъ x, такъ какъ:

$$(1)\quad P_{a_k\eta}(a_k, b_k; a_1, b_1, \ldots a_{k-1}, b_{k-1}, x, y, a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots a_p, b_p) = \infty,$$

ибо значенія перемѣнной и параметра равны, иначе говоря, точки, представляющія аргументъ и параметръ функціи третьяго рода, совпадаютъ. Въ такомъ случаѣ Нётеръ беретъ присоединенную функцію третьяго рода:

$$(2)\quad P_{a_k\eta}(x, y; a_1, b_1, \ldots a_{k-1}, b_{k-1}, a'_k, b'_k, a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots a_p, b_p),$$

гдѣ точка (a'_k, b'_k) произвольная, нележащая съ прочими на одной кривой $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$, и при помощи операціи $D^l_{a_k}$ получаетъ присоединенныя функціи второго рода съ параметромъ a_k, которыя такъ обозначаетъ:

$$(3)\quad E_k(x,y) = D_{a_k} P_{a_k\eta}(x,y; a_1, b_1 \ldots a_{k-1}, b_{k-1}; a'_k, b'_k; a_{k+1}, b_{k+1} \ldots a_p, b_p);$$

$$(4)\quad E_k^{(l-1)}(x,y) = D^l_{a_k} P_{a_k\eta}(x,y; a_1, b_1 \ldots a_{k-1}, b_{k-1}; a'_k, b'_k; a_{k+1}, b_{k+1} \ldots a_p, b_p).$$

Формулы (5) и (9) пред. § примѣнимы къ этимъ функціямъ, т. е. вблизи точки (a_k, b_k) онѣ будутъ разлагаться въ ряды, получающіеся соотвѣтственно изъ названныхъ чрезъ замѣну ξ чрезъ a_k.—Рядъ точекъ

$$(5)\quad (a'_1, b'_1)\quad (a'_2, b'_2)\quad \ldots\quad (a'_p, b'_p)$$

можно назвать фундаментальными точками второго разряда.

61. Если имѣемъ функцію

$$(1)\quad \frac{f(x, y)}{\varphi(x)},$$

(гдѣ $f(x, y)$ присоединенная функція къ основному уравненію), которая въ точкѣ (ξ, y_ξ) обращается въ ∞^ν, то всегда можно найти такія постоянныя $A_1, A_2, \ldots A_{\nu-1}$ и B, что функція:

$$\frac{f(x, y)}{\varphi(x)} - \sum_{k=1}^{k=\nu-1} A_{\nu-k} E_\xi^{(k-1)}(x, y; a_i, b_i)_1^p - BP_{\xi\eta}(x, y; a_i, b_i)_1^p = \frac{f_1(x, y)}{\varphi_1(x)} \quad (2)$$

уже не будетъ обращаться въ безконечность въ этой точкѣ, и тогда будемъ имѣть:

$$\frac{f(x, y)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1}^{k=\nu-1} A_{\nu-k} E_\xi^{(k-1)}(x, y; a_i, b_i)_1^p + BP_{\xi\eta}(x, y; a_i, b_i)_1^p + \frac{f_1(x, y)}{\varphi_1(x)}. \quad (3)$$

Для доказательства, раздѣливъ это на $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$, дадимъ всѣ значенія: $y_1, y_2, \ldots y_n$, отвѣчающія какому либо x, и сложимъ; получимъ симметрическую функцію этихъ значеній:

$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{f(x, y_j)}{\varphi(x)} \frac{1}{\frac{\partial F(x, y_j)}{\partial y_j}} = \sum_{k=1}^{k=\nu-1} A_{\nu-k} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{E_\xi^{(k-1)}(x, y_j; a_i, b_i)_1^p}{\frac{\partial F(x, y_j)}{\partial y_j}} +$$
$$+ B \sum_{j=1}^{j=n} \frac{P_{\xi\eta}(x, y_j; a_i, b_i)_1^p}{\frac{\partial F(x, y_j)}{\partial y_j}} + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{f_1(x, y_j)}{\varphi_1(x)} \frac{1}{\frac{\partial F(x, y_j)}{\partial y_j}}, \quad (4)$$

которая, какъ таковая, выразится раціонально чрезъ x. Помножимъ это равенство, гдѣ все функція одного x, и притомъ раціональная, на $(x-\xi)^\nu$ и продифференцируемъ $\nu - k - 1$ разъ, послѣ чего положимъ $x = \xi$. Такъ какъ по (9) § 59 имѣемъ вблизи $x = \xi$, $y = y_\xi$:

$$(x-\xi)^\nu E_\xi^{(l-1)}(x, y; a_i, b)_1^p = -l! \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi} \cdot \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} (x-\xi)^{\nu-l-1} +$$
$$+ \mathfrak{P}_l(x-\xi)(x-\xi)^\nu, \quad (5)$$

то мы видимъ, что, послѣ $\nu - k - 1$-кратнаго дифференцированія (4) и положенія $x = \xi$, только отъ члена, въ которомъ $l = k$, получится результатъ отличный отъ нуля, именно:

$$\frac{d^{\nu-k-1}}{dx^{\nu-k-1}} \left((x-\xi)^\nu \frac{E^{(k-1)}(x, y; a_i, b_i)_1^p}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}} \right)_{x=\xi,\, y=y_\xi} = -k!\,(\nu - k - 1)!\, \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}; \quad (6)$$

легко видѣть, что и послѣдніе два члена въ (4) послѣ указанныхъ операцій обратятся въ нуль, и мы будемъ имѣть такое равенство:

$$\frac{d^{\nu-k-1}}{dx^{\nu-k-1}}\left((x-\xi)^{\nu}\sum_{j=1}^{j=n}\frac{f(x,y_j)}{\varphi(x)}\cdot\frac{1}{\frac{\partial F(x,y_j)}{\partial y_j}}\right)_{x=\xi}=-k!\,(\nu-k-1)!\,\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}\cdot A_{\nu-k}, \tag{7}$$

откуда получимъ:

$$A_{\nu-k}=-\frac{1}{k!\,(\nu-k-1)!}\cdot\frac{1}{\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}}\cdot\frac{d^{\nu-k-1}}{dx^{\nu-k-1}}\left((x-\xi)^{\nu}\sum_{j=1}^{j=n}\frac{f(x,y_j)}{\varphi(x)}\cdot\frac{1}{\frac{\partial F(x,y_j)}{\partial y_j}}\right)_{x=\xi} \tag{8}$$

Коэффиціентъ B на основаніи (27) § 55 найдется послѣ $\nu-1$ кратнаго дифференцированія и будетъ:

$$B=-\frac{1}{(\nu-1)!}\cdot\frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}}\left((x-\xi)^{\nu}\sum_{j=1}^{j=n}\frac{f(x,y_j)}{\varphi(x)}\cdot\frac{1}{\frac{\partial F(x,y_j)}{\partial y_j}}\right)_{x=\xi}. \tag{9}$$

Въ случаѣ, когда ξ совпадаетъ съ которой нибудь изъ точекъ развѣтвленія, надобно разность $x-\xi$ положить $=t^{p}$, и, взявъ отсюда x, ввести его въ (4), по умноженіи его на $\frac{dx}{dt}=pt^{p-1}$, затѣмъ помножить на $t^{\nu-p+1}$ и поступать далѣе такимъ же образомъ. Если $\xi=\infty$, и эта точка винтовая порядка p', то нужно положить $x=t^{-p'}$, помножить (4) на $\frac{dx}{dt}=-p't^{-p'-1}$ и на $t^{\nu'+p'+1}$, а затѣмъ поступать такимъ же образомъ. Такимъ образомъ будемъ имѣть въ этомъ послѣднемъ случаѣ, означая все къ нему относящееся также, но со значкомъ ('):

$$A'_{\nu'-k'}=+\frac{p'}{k'!\,(\nu'-k'-1)!}\cdot\frac{1}{\frac{\partial F(0^{-p'},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}\cdot\frac{d^{\nu'-k'-1}}{dt^{\nu'-k'-1}}\left(t^{\nu'}\sum_{j=1}^{j=n}\frac{f(t^{-p'},y_j)}{\varphi(t^{-p'})}\cdot\frac{1}{\frac{\partial F(t^{-p'},y_j)}{\partial y_j}}\right)_{t=0}, \tag{10}$$

гдѣ $\bar{y}$ значеніе y_ξ при $t=0$, слѣд., $\xi=\infty$; и точно также

$$B=\frac{p'}{(\nu'-1)!}\cdot\frac{d^{\nu'-1}}{dt^{\nu'-1}}\left(t^{\nu'}\sum_{j=1}^{j=n}\frac{f(t^{-p'},y_j)}{\varphi(t^{-p'})}\cdot\frac{1}{\frac{\partial F(t^{-p'},y_j)}{\partial y_j}}\right)_{t=0}. \tag{11}$$

62. Группу опредѣленныхъ нами членовъ разложенія (3) пред. § можно, слѣдуя Абелю, представить однимъ членомъ. Достаточно это разсмотрѣть для перваго изъ разсмотрѣнныхъ въ пред. § случаевъ, когда (ξ,y_ξ) обыкновенная точка. Перемѣнивъ въ формулахъ (8) и (9) пред. § x на z, внесемъ найденныя выраженія коэффиціентовъ въ (3) пред. §, а также вмѣсто функціи $E_\xi^{(k-1)}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)$ ихъ выраженія изъ (7) и (8) § 59, будемъ имѣть:

$$\sum_{k=1}^{k=\nu-1}A_{\nu-1}E_\xi^{(k-1)}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)+BP_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)=$$

$$=-\sum_{k=0}^{k=\nu-1}\frac{1}{k!\,(\nu-k-1)!}\,\frac{d^{\nu-k-1}}{dz^{\nu-k-1}}\left((z-\xi)^{\nu}\sum_{j=1}^{j=n}\frac{f(z,y_j)}{\varphi(z)}\,\frac{1}{\frac{\partial F(z,y_j)}{\partial y_j}}\right)_{z=\xi}\frac{d^kP_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)}{d\xi^k}= \tag{1}$$

$$=-\frac{1}{(\nu-1)!}\,\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}\left((z-\xi)^{\nu}\sum_{j=1}^{j=n}\frac{f(z,y_j)}{\varphi(z)}\,\frac{P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)}{\frac{\partial F(z,y_j)}{\partial y_j}}\right)_{z=\xi}$$

на основаніи формулы Лейбница.

Точно также въ случаѣ, если ξ упадетъ въ безконечно удаленную винтовую точку, группа соотвѣтственныхъ членовъ представится такъ:

$$\frac{p'}{(\nu-1)!}\,\frac{d^{\nu'-1}}{d\tau^{\nu'-1}}\left(\tau^{\nu'}\sum_{j=1}^{j=n}\frac{f(\tau^{-p'},y_\xi)}{\varphi(\tau^{-p'})}\cdot\frac{P_{\tau,\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)}{\frac{\partial F(\tau^{-p'},y_j)}{\partial y_j}}\right)_{\tau=0}. \tag{2}$$

63. Пусть теперь

$$\xi_1,y_{\xi_1};\quad \xi_2,y_{\xi_2};\quad \ldots\quad \xi_\nu,y_{\xi_\nu}; \tag{1}$$

будутъ безконечности функціи $\frac{f(x,y)}{\varphi(x)}$, лежащія въ конечномъ (т. е., гдѣ ξ конечно), порядковъ $\nu_1,\nu_2\ldots\nu_\nu$, а

$$\xi'_1,y_{\xi'_1};\quad \xi'_2,y_{\xi'_2};\quad \ldots\quad \xi'_\nu,y_{\xi'_{\nu'}}, \tag{2}$$

тѣ, для которыхъ ξ безконечно, порядковъ $\nu'_1,\nu'_2,\ldots\nu'_{\nu'}$. Составивъ функцію $P_{\xi_1,\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)$, мы можемъ по § 61 отдѣлить отъ данной функціи такую часть, что оставшаяся функція $\frac{f_1(x,y)}{\varphi_1(x)}$ уже не будетъ безконечна въ точкѣ (ξ_1,y_ξ); составивъ функцію $P_{\xi_2,\eta}(x,y;a_i,{}^{p}_{1}b_i)$, можно также отдѣлить такую часть отъ $\frac{f_1(x,y)}{\varphi(x)}$, что оставшаяся функція $\frac{f_2(x,y)}{\varphi_2(x)}$ не будетъ обращаться въ безконечность въ точкѣ (ξ_2, y_{ξ_2}); и т. д.; наконецъ придемъ къ функціи $\frac{f_{\nu-1}(x,y)}{\varphi_{\nu-1}(x)}$, которая ни въ одной изъ точекъ ряда (1) не будетъ обращаться въ ∞. Точно также поступая съ этой, можно построить функцію $P_{\xi'_1, y_{\xi'_1}}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$, съ помощью которой по § 61 можно отдѣлить отъ $\frac{f_{\nu-1}(x,y)}{\varphi_{\nu-1}(x)}$ такую часть, что оставшаяся функція $\frac{f_\nu(x,y)}{\varphi_\nu(x)}$ не будетъ обращаться въ ∞ въ точкѣ $(\xi'_1, y_{\xi'_1})$; продолжая это, придемъ къ функціи $\frac{f_{\nu+\nu'-1}(x,y)}{\varphi_{\nu+\nu'-1}(x)}$, которая ни въ одной изъ точекъ (1) и (2) не будетъ обращаться въ ∞, а только развѣ въ точкѣ η; но такой функціи нѣтъ, ибо такая функція и всякое другое значеніе принимала бы въ одной точкѣ Римановой поверхности; слѣд., уравненіе между этой функціей $\theta = \frac{f_{\nu+\nu'-1}(x,y)}{\varphi_{\nu+\nu'-1}(x)}$ и x было бы первой степени относительно x, слѣд., x выражался бы раціонально чрезъ нее, а точно также и y, (§ 40); слѣд., x и y выражались бы раціонально чрезъ одинъ параметръ θ; это же составляетъ свойство одного очень частнаго алгебраическаго образа, (Weierstrass; Кэли называетъ уникурсальною кривую, представляемую такимъ уравненіемъ $F(x,y)=0$, что x и y выражаются раціонально чрезъ одинъ параметръ); вообще же этого не будетъ. Отсюда слѣдуетъ, что функція эта $\frac{f_{\nu+\nu'-1}(x,y)}{\varphi_{\nu+\nu'-1}(x)}$ будетъ не что иное, какъ присоединенная функція перваго рода $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$. Коэффиціенты ея легко опредѣляются, ибо стоитъ только положить $x=a_k$, $y=b_k$, послѣ того какъ написано будетъ все разложеніе: тогда направо останется только C_k, и мы будемъ имѣть:

$$C_k = \frac{f(a_k, b_k)}{\varphi(a_k)}. \tag{3}$$

Такимъ образомъ окончательно будемъ имѣть такое разложеніе нашей функціи:

$$\begin{aligned} \frac{f(x,y)}{\varphi(x)} = &\sum_{h'=1}^{h'=\nu'} \left\{ \sum_{k'=1}^{k'=\nu'_{h'}-1} A'_{\nu'_{h'}-k'} E_{\xi'_{h'}}^{(k'-1)}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + B'_{h'} P_{\xi'_{h'}, \eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \right\} + \\ + &\sum_{h=1}^{h=\nu} \left\{ \sum_{k=1}^{k=\nu_h-1} A_{\nu_h-k} E_{\xi_h}^{(k-1)}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + B_h P_{\xi_h, \eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \right\} + \\ &+ \sum_{i=1}^{i=p} \frac{f(a_i, b_i)}{\varphi(a_i)} \varphi_i(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}). \end{aligned} \tag{4}$$

Вблизи точки η всѣ функціи P обращаются въ безконечность ∞^1, какъ $\frac{\partial F(\eta, y_\eta)}{\partial y_\eta} \frac{1}{x-\eta}$ при $x=\eta$; но какъ по доказанному выше функція должна оставаться конечною въ этой точкѣ, (ибо (η, y_η) обыкновенное мѣсто), то отсюда слѣдуетъ, что будетъ

$$\sum_{h'=1}^{h'=\nu'} B'_{h'} + \sum_{h=1}^{h=\nu} B_h = 0, \tag{5}$$

или, внося вмѣсто $B'_{h'}$ и B_h ихъ значенія изъ (9) и (11) § 61:

$$\begin{aligned} &\sum_{h'=1}^{h'=\nu'} \frac{p_h}{(\nu'_h-1)!} \frac{d^{\nu'_{h'}-1}}{d\tau_{h'}^{\nu'_{h'}-1}} \left(\tau_{h'}^{\nu'} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{f(\tau_{h'}^{-p_{h'}}, y_{\tau_{h'}}^{(j)})}{\varphi(\tau_{h'}^{-p_{h'}})} \cdot \frac{1}{\frac{\partial F(\tau_{h'}^{-p_{h'}}, y_{\tau_{h'}}^{(j)})}{\partial y_{\tau_{h'}}}} \right)_{\tau_{h'}=0} + \\ &+ \sum_{h=1}^{h=\nu} \frac{1}{(\nu_h-1)!} \frac{d^{\nu_h-1}}{d\xi_h^{\nu_h-1}} \left((z-\xi_h)^{\nu_h} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{f(z, y_z^{(j)})}{\varphi(z)} \cdot \frac{1}{\frac{\partial F(z, y_z^{(j)})}{\partial y_z}} \right)_{z=\xi_h} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Внося въ (4) вмѣсто коэффиціентовъ A и B ихъ значенія по формуламъ (8)—(11) § 61, на основаніи формулъ (1) и (2) § 62, мы дадимъ такой видъ разложенію данной функціи на простые элементы (éléments simples по выраженію Hermite'а):

$$\begin{aligned} \frac{f(x,y)}{\varphi(x)} = &\sum_{h'=1}^{h'=\nu'} \frac{p'_{h'}}{(\nu'_{h'}-1)!} \cdot \frac{d^{\nu'_{h'}-1}}{d\tau_{h'}^{\nu'_{h'}-1}} \left(\tau_{h'}^{\nu'_{h'}} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{f(\tau_{h'}^{-p_{h'}}, y_{\tau_{h'}}^{(j)})}{\varphi(\tau_{h'}^{-p_{h'}})} \cdot \frac{P_{\tau_{h'}, \eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{\frac{\partial F(\tau_{h'}^{-p_{h'}}, y_{\tau_{h'}}^{(j)})}{\partial y_{\tau_{h'}}^{(j)}}} \right)_{\tau'_{h'}=0} - \\ - &\sum_{h=1}^{h=\nu} \frac{1}{(\nu_h-1)!} \cdot \frac{d^{\nu_h-1}}{dz_h^{\nu_h-1}} \left((z_h-\xi_h)^{\nu_h} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{f(z_h, y_{z_h}^{(j)})}{\varphi(z_h)} \cdot \frac{P_{z_h, \eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{\frac{\partial F(z_h, y_{z_h}^{(j)})}{\partial y_{z_h}^{(j)}}} \right)_{z_h=\xi_h} + \\ &+ \sum_{i=1}^{i=p} \frac{f(a_i, b_i)}{\varphi(a_i)} \varphi_i(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}). \end{aligned} \tag{7}$$

Первая сумма представляетъ сумму вычетовъ (résidu) функціи:

$$\frac{f(x,y)}{\varphi(x)}\cdot\frac{P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}} \tag{8}$$

относительно всѣхъ ея безконечностей, лежащихъ въ точкахъ O' Римановой сферы, тогда какъ каждый членъ второй суммы вычетъ относительно безконечности, лежащей въ точкѣ (ξ_k, y_{ξ_k}) Римановой сферы.

Первую сумму Абель обозначаетъ знакомъ Π, поставленнымъ предъ выраженіемъ (8), ибо это по другому опредѣленію вычета (résidu) есть ни что иное, какъ коэффиціентъ при t^{-1} въ разложеніи этой функціи по степенямъ этой перемѣнной.

64. Въ § 50 мы видѣли, что всегда можно построить такую функцію x, однозначную на Римановой поверхности для $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$, которая въ m' точкахъ ея будетъ $=\infty^1$, если только $m'>p$. Положимъ, что $m'=\nu-1+p$, гдѣ $\nu>1$; тогда условіе $m'>p$ выполнено. Предположимъ, что $\nu-1$ точекъ, гдѣ искомая функція обращается въ ∞^1, совпадаютъ съ точкою (ξ, y_ξ), а остальныя совпадаютъ съ $(\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})$. Пусть эта функція будетъ $f(x,y)$; дифференцируя ее, будемъ имѣть функцію $\dfrac{df(x,y)}{dx}$, которая въ тѣхъ же точкахъ будетъ обращаться въ ∞^ν, соотвѣтственно ∞^2; а потому, примѣняя къ ней доказанное въ пред. §, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}\frac{df(x,y)}{dx}&=\sum_{k=1}^{k=\nu-1}A_{\nu-k}E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})+\\ &+\sum_{k=1}^{k=p}B_kE_k(x,y;a_1,b_1\ldots a_{k-1},b_{k-1};a'_k,b'_k;a_{k+1},b_{k+1}\ldots a_p,b_p)+\\ &+\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}).\end{aligned} \tag{1}$$

Съ помощію этой формулы можно выразить $E_\xi^{(\nu-2)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})$ чрезъ $E_\xi^{(k)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})$, гдѣ $k<\nu-2$ и $E_k(x,y;\ldots a'_k,b'_k\ldots)$, гдѣ $k=1,2,\ldots p$. Подобнымъ образомъ можно и $E_\xi^{(\nu-3)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})$ выразить чрезъ такія же низшаго порядка въ точкѣ (ξ, y_ξ), и т. д. Такимъ образомъ, подставляя каждое такое выраженіе въ предшествующія, мы придемъ къ такому результату:

$$E_\xi^{\nu-2}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})=\frac{d\Phi(x,y)}{dx}+\sum_{k=1}^{k=p}B_kE_k(x,y;\ldots a'_k,b'_k\ldots)+\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}). \tag{2}$$

Внося это въ (4) пред. §, получимъ формулу для приведенія $\dfrac{f(x,y)}{\varphi(x)}$ къ суммѣ членовъ, изъ которыхъ одинъ будетъ представлять производную раціональной алгебраической функціи (x,y), другіе члены будутъ функціи E_k и $P_{\xi_k,\eta}$, умноженныя на постоянныя, наконецъ послѣдній $\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$.—Это приведеніе можно выполнить и сразу. Въ самомъ дѣлѣ, по § 50 всегда можно построить такую функцію $\Phi(x,y)$, которая въ точкахъ:

$$(\xi_1, y_{\xi_1}),\quad (\xi_2, y_{\xi_2})\ldots(\xi_\nu, y_{\xi_\nu}) \tag{3}$$

обращалась бы въ ∞ порядковъ соотвѣтственно:

$$\nu_1-1,\quad \nu_2-1,\ldots \nu_\nu-1, \tag{4}$$

и въ точкахъ $(\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})$ въ ∞^1; производная этой функціи по x будетъ обращаться въ тѣхъ же точкахъ въ ∞ порядковъ $\nu_1, \nu_2\ldots\nu_\nu$ и 2. Эта функція, а слѣдовательно, и ея производная будетъ содержать по (9) § 50 линейнымъ образомъ

$$\sum_{j=1}^{j=\nu}(\nu_j-1)+p-p+1=\sum_{j=1}^{j=\nu}(\nu_j-1)+1 \tag{5}$$

неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, которые и можно будетъ опредѣлить такъ, чтобы функція

$$\frac{f(x,y)}{\varphi(x)}-\frac{d\Phi(x,y)}{dx} \tag{6}$$

обращалась бы въ точкахъ (3) лишь въ ∞^1; тогда она можетъ разлагаться лишь на функціи $E_k(x,y;\ldots a'_k,b'_k\ldots)$, $P_{\xi_k,\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})$ и $\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$. Опредѣливъ коэффиціенты при нихъ, какъ то было показано въ § 61, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}\frac{f(x,y)}{\varphi(x)}&=\frac{d\Phi(x,y)}{dx}+\sum_{k=1}^{k=p}\mathfrak{A}_kE_k(x,y;\ldots a'_k,b'_k\ldots)+\\ &+\sum_{k=1}^{k=\nu}\mathfrak{B}_kP_{\xi_k,\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})+\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}).\end{aligned} \tag{7}$$

65. Обратимся теперь опять къ функціи:

$$P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}), \tag{1}$$

въ которой станемъ разсматривать (ξ, y_ξ) какъ перемѣнныя, связанныя основнымъ уравненіемъ, а (η, y_η) и (x, y) какъ постоянныя. Это будетъ алгебраическая функція отъ ξ, такъ какъ $P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ была получена при помощи раціональныхъ алгебраическихъ дѣйствій надъ входящими въ нее величинами, однозначная на Римановой поверхности для $F(\overset{m}{\xi}, \overset{n}{y_\xi})=0$. Она обращается въ ∞^1 въ точкахъ (x, y) и $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ этой поверхности: относительно первой это слѣдуетъ изъ того, что при $x=\xi$, $y=y_\xi$ она обращается въ ∞^1, какъ то слѣдуетъ изъ ея опредѣленія въ § 55; относительно послѣднихъ это слѣдуетъ послѣ сейчасъ упомянутаго изъ (8) § 58, гдѣ первый множитель второй части будетъ $=\infty^1$ для $\xi=a_1$, $y_\xi=b_1$, второй же будетъ конеченъ и отличенъ вообще отъ нуля, ибо отъ ξ не зависитъ. При $\xi=\eta$ эта функція будетъ равна нулю, по (8) § 57. — Функція

$$CP_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})+C' \tag{2}$$

представитъ самую общую алгебраическую функцію, однозначную на Римановой поверхности для $F(\overset{m}{\xi}, \overset{n}{y_\xi})=0$, которая обращается въ ∞^1 въ $p+1$ точкахъ этой поверхности, именно въ точкахъ:

$$(x, y), \quad (\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}). \tag{3}$$

66. Производная по ξ отъ этой функціи, умноженная на $\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}$, будетъ, по (3) и (5) § 59, въ точкѣ $x=\xi$, $y=y_\xi$ обращаться въ ∞^2, какъ

$$-\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}{(x-\xi)^2} \tag{1}$$

при $x=\xi$, $y=y_\xi$; въ точкахъ $(\overset{p}{\underset{1}{a_k, b_k}})$ по той же формулѣ въ примѣ-

неніи къ функціи $E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots)$ [(3) § 60] на основаніи (8) § 58 будетъ обращаться въ ∞^2, какъ

$$\frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}\cdot\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}{(\xi-a_k)^2}\,\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}). \tag{2}$$

Изъ симметріи (1) относительно (x, y) и (ξ, y_ξ) заключаемъ, что функція

$$D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \tag{3'}$$

въ точкѣ $x=\xi$, $y=y_\xi$ будетъ оставаться конечною, и только въ точкахъ $x=a_i$, $y=b_i$ будетъ обращаться въ ∞^2, какъ первый членъ, ибо второй будетъ обращаться въ этихъ точкахъ въ нуль. Что же касается до точки (η, y_η), то отъ нея оба члена зависятъ лишь формально, а не на самомъ дѣлѣ, какъ то мы видѣли въ § 59 [(2)]. — Поэтому, разсматривая въ (3) x за независимое перемѣнное, эту функцію можно разложить на $E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots)$, (гдѣ $k=1, 2, 3 \ldots p$), и $\varphi(x, y)$ линейнымъ образомъ, причемъ коэффиціенты будутъ зависѣть отъ (ξ, y_ξ). Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} &D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = \\ &= \sum_{k=1}^{k=p} \chi_k(\xi, y_\xi) E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots) + \sum_{k=1}^{k=p} \psi_k(\xi, y_\xi)\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}). \end{aligned} \tag{3}$$

Но какъ перестановка (x, y) съ (ξ, y_ξ) въ лѣвой части этого равенства измѣняетъ только знакъ, такъ что и по отношенію (ξ, y_ξ), если ξ считать за независимую перемѣнную, лѣвая часть будетъ обладать такими же свойствами, то мы отсюда заключаемъ, что функціи $\chi_k(\xi, y_\xi)$ и $\psi_k(\xi_1, y_\xi)$ должны разлагаться такимъ же образомъ, такъ что будетъ:

$$\chi_k(\xi, y_\xi) = \sum_{j=1}^{j=p}\Big(\lambda_{kj} E_j(\xi, y_\xi; \ldots a'_j, b'_j \ldots) + \lambda'_{kj}\varphi_j(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\Big); \tag{4}$$

$$\psi_k(\xi, y_\xi) = \sum_{j=1}^{j=p}\Big(\mu_{kj} E_j(\xi, y_\xi; \ldots a'_j, b'_j \ldots) + \mu'_{kj}\varphi_j(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\Big). \tag{5}$$

Внося это въ (3), будемъ имѣть:

$$D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; a_i, {}_1^p b_i) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; a_i, {}_1^p b_i) =$$

$$(6)\quad = \sum_{k=1}^{k=p}\sum_{j=1}^{j=p}\Big\{\Big(\lambda_{kj}E_j(\xi, y_\xi; \ldots a'_j, b'_j \ldots) + \lambda'_{kj}\varphi_j(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\Big)E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots) +$$
$$+\Big(\mu_{kj}E_j(\xi, y_\xi; \ldots a'_j, b'_j \ldots) + \mu'_{kj}\varphi_j(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\Big)\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})\Big\}.$$

Это выраженіе отъ перестановки (x, y) съ (ξ, y_ξ) должно только мѣнять знакъ; а потому должно быть:

$$(7)\qquad \lambda_{kj} = -\lambda_{jk}; \quad \mu'_{kj} = -\mu'_{jk},$$

и

$$(8)\qquad \lambda'_{kj} = -\mu_{jk},$$

для всѣхъ k и j отъ 1 до p. Если теперь мы умножимъ (3) на $x - a^k$ и положимъ затѣмъ $x = a_k$, $y = b_k$, то по (2) лѣвая часть обратится въ такое

$$(9)\qquad \frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}\cdot\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}}{(x - a_k)^2}\,\varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}),$$

а правая по (5) § 59 [для $\xi = a_k$] въ такую:

$$(10)\qquad -\frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}\cdot\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}}{(x - a_k)^2}\,\chi_k(\xi, y_\xi);$$

чрезъ сравненіе ихъ, находимъ:

$$(11)\qquad \chi_k(\xi, y_\xi) = -\varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}),$$

слѣд.,

$$(12)\qquad \lambda_{kj} = 0; \quad \lambda'_{kj} = 0\ (k \neq j); \quad \lambda'_{kk} = -1,$$

по (7), и далѣе по (8):

$$(13)\qquad (\mu_{jk} = -\lambda'_{kj} = 0; \quad \mu_{kk} = -\lambda'_{kk} = +1.$$

Внося это въ (6), будемъ имѣть:

$$D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; a_i, {}_1^p b_i) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; a_i, {}_1^p b_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=p}\Big\{-\varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots) + \qquad (14)$$
$$+\Big(E_k(\xi, y_\xi; \ldots a'_k, b'_k \ldots) + \sum_{j=1}^{j=p}\mu'_{kj}\varphi_j(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\Big)\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})\Big\},$$

или

$$D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; a_i, {}_1^p b_i) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; a_i, {}_1^p b_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=p}\Big\{\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})E_k(\xi, y_\xi; \ldots a'_k, b'_k \ldots) - \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots)\Big\} + \qquad (15)$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=p}\sum_{j=1}^{j=p}\mu'_{kj}\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})\varphi_j(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}).$$

Но какъ $\mu'_{kj} = -\mu'_{jk}$, и слѣд., $\mu'_{kk} = -\mu'_{kk} = 0$, то двойную сумму можно такъ представить:

$$\sum_{k=1}^{k=p}\sum_{j=1}^{j=p}\frac{1}{2}\mu'_{kj}\Big(\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})\varphi_j(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) - \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})\Big); \qquad (16)$$

внося это въ (15) и полагая

$$\frac{1}{2}\mu'_{kj} = -\frac{1}{2}\mu'_{jk} = c_{kj}, \qquad (17)$$

(такъ что, слѣд.:

$$c_{kj} = c_{jk})\ ^{1)}, \qquad (18)$$

мы будемъ имѣть:

$$D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; a_i, {}_1^p b_i) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; a_i, {}_1^p b_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=p}\Big\{\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})\Big(E_k(\xi, y_\xi; \ldots a'_k, b'_k \ldots) + \sum_{j=1}^{j=p}c_{kj}\varphi_j(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\Big) - \qquad (19)$$
$$- \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y})\Big(E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots) + \sum_{j=1}^{j=p}c_{kj}\varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})\Big)\Big\}.$$

---

[1]) Причемъ c_{kk} можетъ и не быть $= 0$.

Полагая для краткости:

$$\overline{E}_k(x, y) = E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots) + \sum_{j=1}^{j=p} c_{kj} \varphi_j(\overset{m-2\,n-2}{x\;,\;y}), \tag{20}$$

мы можемъ это равенство (19) такъ написать:

$$\begin{gathered} D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = \\ = \sum_{k=1}^{k=p} \left\{ \varphi_k(\overset{m-2\,n-2}{x\;,\;y}) \overline{E}_k(\xi, y_\xi) - \varphi_k(\overset{m-2\,n-2}{\xi\;,\;y_\xi}) \overline{E}_k(x, y) \right\}. \end{gathered} \tag{21}$$

Это и есть то замѣчательное тождество, изъ котораго у Вейерштрасса выводится вся теорія Абелевыхъ интеграловъ. У самого Абеля такое тождество встрѣчается въ мемуарѣ: „Petite contribution à la théorie de quelques fonctions transcendantes, § 2, (V mémoire новаго изданія Oeuvres d'Abel), въ примѣненіи, однако, къ другимъ трансцендентнымъ. Для Абелевыхъ интеграловъ оно было впервые выведено Вейерштрассомъ и сообщено имъ на лекціяхъ по теоріи Абелевыхъ интеграловъ; затѣмъ независимо отъ него получено Нётеромъ. Мы придерживались Нётера въ изложеніи этой статьи.

67. Функція $\overline{E}_k(x, y)$, опредѣляемая равенствомъ (20) пред. §, есть присоединенная функція второго рода, обращающаяся въ ∞^2 въ точкѣ (a_k, b_k), но имѣющая произвольное значеніе въ прочихъ фундаментальныхъ точкахъ, благодаря произвольнымъ постояннымъ c_{kj}, входящимъ во вторую часть; такъ что на дѣлѣ она отъ этихъ точекъ не зависитъ, почему онѣ и опущены въ ея обозначеніи. — Если въ (21) перенести члены со знакомъ (—) въ другую часть, то оно приметъ такой видъ:

$$\begin{gathered} D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + \sum_{k=1}^{k=p} \varphi_k(\overset{m-2\,n-2}{\xi\;,\;y_\xi}) \overline{E}_k(x, y) = \\ = D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + \sum_{k=1}^{k=p} \varphi_k(\overset{m-2\,n-2}{x\;,\;y}) \overline{E}_k(\xi, y_\xi). \end{gathered} \tag{1}$$

Если положить:

$$H(x, y \mid \xi, y_\xi) = D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + \sum_{k=1}^{k=p} \varphi_k(\overset{m-2\,n-2}{x\;,\;y}) \overline{E}_k(\xi, y_\xi), \tag{2}$$

то равенство (1) короче такъ перепишется:

$$H(\xi, y_\xi \mid x, y) = H(x, y \mid \xi, y_\xi). \tag{3}$$

Функція, опредѣляемая равенствомъ (2), есть присоединенная функція второго рода, обращающаяся въ ∞^2 въ точкѣ (ξ, y_ξ), и принимающая значеніе $\overline{E}_k(\xi, y_\xi)$ въ точкѣ (a_k, b_k) совершенно произвольное, какъ то слѣдуетъ изъ опредѣляющаго эту функцію $\overline{E}_k(x, y)$ равенства (20) пред. §; отсюда слѣдуетъ, что эта функція $H(x, y \mid \xi, y_\xi)$ отъ постоянныхъ $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ зависитъ *лишь формально*, но не на самомъ дѣлѣ; точка (ξ, y_ξ) опредѣляетъ *параметръ* этой функціи. Равенство (3) выражаетъ характеристичное свойство этой функціи не измѣняться отъ перестановки параметра (ξ, y_ξ) съ аргументомъ (x, y). Эта функція называется *нормальною* присоединенною функціей второго рода. Сказанными свойствами онѣ вполнѣ опредѣляются. Въ самомъ дѣлѣ, пусть другая функція $H'(x, y \mid \xi, y_\xi)$ обладаетъ тѣми же свойствами, какъ и $H(x, y \mid \xi, y_\xi)$; тогда будемъ имѣть:

$$H'(x, y \mid \xi, y_\xi) - H(x, y \mid \xi, y_\xi) = \sum_{k=1}^{k=p} \varphi_k(\overset{m-2\,n-2}{x\;,\;y}) \left(\overline{E}'_k(\xi, y_\xi) - \overline{E}_k(\xi, y_\xi) \right); \tag{4}$$

для $x = a_g$, $y = b_g$ получимъ отсюда:

$$H' - H = \overline{E}'_g(\xi, y_\xi) - \overline{E}_g(\xi, y_\xi), \tag{5}$$

или по (20) § 66:

$$H' - H = \sum_{j=1}^{j=p} (c'_{gj} - c_{gj}) \varphi_j(\overset{m-2\,n-2}{\xi\;,\;y_\xi}); \tag{6}$$

если теперь въ точкахъ $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ должно быть $H' = H$, то лѣвая часть (6) будетъ $= 0$; но какъ между нормальными функціями перваго рода нѣтъ линейной зависимости, то отсюда слѣдуетъ, что

$$c'_{gj} = c_{gj}, \tag{7}$$

а тогда обѣ функціи тождественны.

Когда точка (ξ, y_ξ) (параметръ) приходитъ въ фундаментальную точку (a_g, b_g), тогда правая часть (1) обращается въ неопредѣленность, но лѣвая переходитъ въ $\overline{E}_g(x, y)$; отсюда заключаемъ, что

$$H(x, y; \xi, y_\xi)_{\xi = a_g,\, y_\xi = b_g} = \overline{E}_g(x, y). \tag{8}$$

ГЛАВА III.

Приведеніе Абелевыхъ интеграловъ къ интеграламъ трехъ родовъ; характеристическія свойства интеграловъ каждаго рода.

---

68. Формула (4) § 63 даетъ разложеніе функціи $\frac{f(x,y)}{\varphi(x)}$, однозначной на Римановой поверхности для $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$, на простые элементы (éléments simples по Hermite); помножая обѣ части этого равенства на $\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$ и интегрируя отъ x_0 до x, гдѣ (x_0, y_0) обыкновенное мѣсто алгебраическаго образа $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$, мы получимъ:

$$
\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x}\frac{f(x,y)}{\varphi(x)}\cdot\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=\\
&=\sum_{h'=1}^{h'=\nu'}\left\{\sum_{k'=1}^{k=\nu'_{h'}-1}A'_{\nu'_{h'}-k'}\int_{x_0}^{x}E^{(k'-1)}_{\xi'_{k'}}(x,y;\,\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}+\right.\\
&\qquad\left.+B'_{h'}\int_{x_0}^{x}P_{\xi'_{h'}\eta}(x,y;\,\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}\right\}+\\
&+\sum_{h=1}^{h=\nu}\left\{\sum_{k=1}^{k=\nu_h-1}A_{\nu_h-k}\int_{x_0}^{x}E^{(k-1)}_{\xi_k}(x,y;\,\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}+\right.\\
&\qquad\left.+B_h\int_{x_0}^{x}P_{\xi_h\eta}(x,y;\,\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}\right\}+\\
&+\sum_{i=1}^{i=p}\frac{f(a_i,b_i)}{\varphi(a_i)}\int_{x_0}^{x}\varphi_i(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Точно также, помножая на $\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$ равенство (7) § 64 и интегрируя отъ x_0 до x, получимъ:

$$
\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x}\frac{f(x,y)}{\varphi(x)}\cdot\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=\Phi(x,y)-\Phi(x_0,y_0)+\\
&+\sum_{k=1}^{k=p}\mathfrak{A}_k\int_{x_0}^{x}E_k(x,y;\,\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}+\sum_{h=1}^{h=\nu}\mathfrak{B}_h\int_{x_0}^{x}P_{\xi'_h\eta}(x,y;\,\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}+\\
&\qquad+\int_{x_0}^{x}\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}};
\end{aligned}
\tag{2}
$$

гдѣ

$$
\int_{x_0}^{x}\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=\sum_{i=1}^{i=p}C_i\int_{x_0}^{x}\varphi_i(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}.
\tag{3}
$$

69. Эти формулы сводятъ общій Абелевъ интегралъ къ интеграламъ трехъ родовъ:

перваго рода:
$$\int_{x_0}^{x}\varphi_k(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}};$$

ихъ всего числомъ p; далѣе

втораго рода:
$$\int_{x_0}^{x}E^{(k-1)}_{\xi}(x,y;\,\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$$

и

$$\int_{x_0}^{x}E_k(x,y;\ldots a'_k,b'_k\ldots)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}};$$

послѣднихъ тоже числомъ p; наконецъ

третьяго рода:
$$\int_{x_0}^{x}P_{\xi\eta}(x,y;\,\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}.$$

70. Интегралы перваго рода остаются конечными на всей Римановой поверхности, какъ то слѣдуетъ изъ сказаннаго въ § 44 про $\dfrac{\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})\frac{dx}{dt}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$, именно что это выраженіе вездѣ конечно, гдѣ бы точка (x,y) ни лежала на Римановой поверхности. Это ихъ характеристическое свойство. Интегралы второго рода обращаются въ безконечность въ одной точкѣ, лежащей въ конечномъ или безконечномъ удаленіи отъ $x=0$; именно интегралъ

$$(1)\qquad \int_{x_0}^{x} E_{\xi}^{(k-1)}(x, y; a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}$$

въ точкѣ (ξ, y_ξ) въ ∞^k, и интегралъ

$$(2)\qquad \int_{x_0}^{x} E_k(x, y; \dots a_k', b_k' \dots)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$$

въ точкѣ (a_k, b_k) въ ∞^1. Дѣйствительно, если (x_1, y_1) обозначаетъ точку, лежащую въ окрестности точки (ξ, y_ξ) и въ области сходимости ряда $\mathfrak{P}_k(x-\xi)$ въ (9) § 59, то будетъ по этой формулѣ (9) § 59:

$$(3)\qquad \begin{aligned}\int_{x_0}^{x} E_{\xi}^{(k-1)}(x, y; a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} &= \int_{x_0}^{x_1} E_{\xi}^{(k-1)}(x, y; a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} + \\ &+ (k-1)!\,\frac{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}{(x-\xi)^k} - (k-1)!\,\frac{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}{(x_1-\xi)^k} + \int_{x_1}^{x} \mathfrak{P}_k(x-\xi)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}};\end{aligned}$$

здѣсь послѣдній интегралъ будетъ конеченъ при $x=\xi$, ибо такова подъинтегральная функція; также конечны независящіе отъ x первый и третій члены второй части, тогда какъ второй обращается въ ∞^k, откуда и слѣдуетъ сказанное. Въ частности, для $k=1$ будетъ интегралъ:

$$(4)\qquad \int_{x_0}^{x} E_{\xi}(x, y; a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$$

обращаться въ ∞^1, какъ

$$\frac{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}{x-\xi}. \qquad (5)$$

По замѣчанію конца § 60 эти выводы прямо примѣняются и къ интеграламъ (2), которые обращаются въ ∞^1 въ точкѣ (a_k, b_k), и именно какъ:

$$\frac{\frac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x-a_k}. \qquad (6)$$

Эти послѣдніе интегралы второго рода, обращающіеся въ ∞^1 каждый въ одной изъ фундаментальныхъ точекъ, можно назвать *фундаментальными* или *основными интегралами второго рода*, тогда какъ интегралъ (4) *общимъ интеграломъ второго рода* съ параметромъ (ξ, y_ξ). Интегралъ (1) можно назвать *общимъ интеграломъ второго рода порядка* k, ибо въ точкѣ (ξ, y_ξ) онъ обращается въ ∞^k.

Интегралъ третьяго рода обращается логариѳмически въ безконечность, именно въ точкѣ (ξ, y_ξ) какъ $-\log(x-\xi)$, въ точкѣ (η, y_η) какъ $\log(x-\eta)$. Дѣйствительно, по (27) и (28) § 55 и (5) § 56 имѣемъ:

$$P_{\xi\eta}(x, y; a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)\frac{1}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = -\frac{1}{x-\xi} + \mathfrak{P}(x-\xi), \qquad (7)$$

$$P_{\xi\eta}(x, y; a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)\frac{1}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = \frac{1}{x-\eta} + \mathfrak{P}_1(x-\eta); \qquad (8)$$

если (x_1, y_1) обозначаетъ точку вблизи точки (ξ, y_ξ) въ области сходимости ряда $\mathfrak{P}(x-\xi)$, а (x_2, y_2) вблизи точки (η, y_η) въ области сходимости ряда $\mathfrak{P}_1(x-\eta)$, то, помножая эти равенства на dx и интегрируя отъ x_0, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x, y; a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} &= \int_{x_0}^{x_1} P_{\xi\eta}(x, y; a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} - \\ &- \log(x-\xi) + \log(x_1-\xi) + \int_{x_1}^{x} \mathfrak{P}(x-\xi)dx;\end{aligned} \qquad (9)$$

$$\int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}_1^p b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=\int_{x_0}^{x_2} P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}_1^p b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}+ \tag{10}$$
$$+\log(x-\eta)-\log(x_2-\eta)+\int_{x_2}^{x}\mathfrak{P}_1(x-\xi)dx;$$

въ обѣихъ формулахъ послѣдніе члены вторыхъ частей представляютъ величины конечныя при $x=\xi$, соотвѣтственно $x=\eta$, ибо таковы функціи, стоящія въ нихъ подъ знакомъ интеграла; остальные же члены, кромѣ вторыхъ, суть независящія отъ x, конечныя величины; а отсюда и слѣдуетъ сказанное выше. Это характерное свойство интеграловъ третьяго рода.

71. Помножая (7) и (8) § 59 на $\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$ и интегрируя отъ x_0, мы будемъ имѣть слѣдующія соотношенія между интегралами второго рода разныхъ порядковъ и интегралами третьяго рода:

$$\int_{x_0}^{x} E_\xi(x,y;a_i,{}_1^p b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=D_\xi\int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}_1^p b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}; \tag{1}$$

$$\int_{x_0}^{x} E_\xi^{(k-1)}(x,y;a_i,{}_1^p b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=D_\xi^k\int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}_1^p b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}, \tag{2}$$

ибо порядокъ дифференцированія и интегрированія здѣсь можно мѣнять.— Точно также изъ (3) и (4) § 60 будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{x} E_k(x,y;\ldots a'_k,b'_k\ldots)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=D_{a_k}\int_{x_0}^{x} P_{a_k\eta}(x,y;\ldots a'_k,b'_k\ldots)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}, \tag{3}$$

$$\int_{x_0}^{x} E_k^{(l-1)}(x,y;\ldots a'_k,b'_k\ldots)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=D_{a_k}^l\int_{x_0}^{x} P_{a_k\eta}(x,y;\ldots a'_k,b'_k\ldots)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}. \tag{4}$$

72. Интегралъ третьяго рода, который мы разсматривали, имѣетъ производную, которая обращается въ нуль въ фундаментальныхъ точкахъ $(a_i,{}_1^p b_i)$; другой, производная котораго обращается въ нуль въ другихъ точкахъ $(\alpha_i,{}_1^p\beta_i)$, будетъ разниться отъ него на линейную функцію интеграловъ перваго рода. Дѣйствительно, помножая равенство (3) § 58 на $\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$ и интегрируя отъ x_0, будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x,y;\alpha_j,{}_1^p\beta_j)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=\int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x,y;a_i,{}_1^p b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}+ \tag{1}$$
$$+\sum_{j=1}^{j=p} P_{\xi\eta}(a_j,b_j;\alpha_i,{}_1^p\beta_i)\int_{x_0}^{x}\varphi_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}.$$

Совершая надъ обѣими частями этого равенства операцію D_ξ, въ виду (1) пред. § и (7) § 59 мы получимъ:

$$\int_{x_0}^{x} E_\xi(x,y;\alpha_i,{}_1^p\beta_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=\int_{x_0}^{x} E_\xi(x,y;a_i,{}_1^p b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}+ \tag{2}$$
$$+\sum_{j=1}^{j=p} E_\xi(a_j,b_j;\alpha_i,{}_1^p\beta_i)\int_{x_0}^{x}\varphi_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}};$$

совершая же операцію D_ξ^k надъ (1), въ виду (2) пред. § и (8) § 59, такое:

$$\int_{x_0}^{x} E_\xi^{(k-1)}(x,y;\alpha_i,{}_1^p\beta_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}=\int_{x_0}^{x} E_\xi^{(k-1)}(x,y;a_i,{}_1^p b_i)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}+ \tag{3}$$
$$+\sum_{j=1}^{j=p} E_\xi^{(k-1)}(a_j,b_j;\alpha_i,{}_1^p\beta_i)\int_{x_0}^{x}\varphi_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}.$$

Эти формулы (2) и (3) выражаютъ аналогичное предложеніе относительно интеграловъ второго рода съ параметромъ въ точкѣ (ξ,y_ξ).

73. Помножая равенство (20) § 66 на $\dfrac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$ и интегрируя отъ x_0, будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{x}\overline{E}_k(x,y)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = \int_{x_0}^{x} E_k(x,y;\ldots a'_k, b'_k\ldots)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} + \tag{1}$$

$$+\sum_{j=1}^{j=p} c_{kj}\int_{x_0}^{x}\varphi_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}};$$

слѣд., и этотъ новый интегралъ второго рода разнится отъ соотвѣтствующаго основного на линейную функцію интеграловъ перваго рода, коэффиціенты которыхъ c_{kj} удовлетворяютъ, напомнимъ, равенству (18) § 66. Эти интегралы мы будемъ называть тоже основными, но болѣе общими.— Такъ какъ отсюда имѣемъ:

$$D_x\int_{x_0}^{x}\overline{E}_k(x,y)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = \overline{E}_k(x,y), \tag{2}$$

то равенство (2) § 67 можно такъ написать:

$$H(x,y\,|\,\xi,y_\xi) = \tag{3}$$

$$= D_\xi\left(P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}}) + \sum_{k=1}^{k=p}\varphi_k(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\int_{\xi_0}^{\xi}\overline{E}_k(\xi,y_\xi)\frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}}\right);$$

помножая это равенство на $\dfrac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$ и интегрируя отъ x_0, будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{x}H(x,y\,|\,\xi,y_\xi)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = \tag{4}$$

$$=D_\xi\left\{\int_{x_0}^{x}P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} + \sum_{k=1}^{k=p}\int_{\xi_0}^{\xi}\overline{E}_k(\xi,y_\xi)\frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}}\cdot\int_{x_0}^{x}\varphi_k(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_\xi}}\right\};$$

первый членъ второй части этой формулы есть интегралъ второго рода (1) § 71; слѣд., интегралъ лѣвой части, отличающійся отъ него на линейную функцію интеграловъ перваго рода, тоже будетъ второго рода. Этотъ интегралъ второго рода называется *нормальнымъ интеграломъ второго рода;* точка (ξ, y_ξ) представляетъ его параметръ. Равенство (4) говоритъ, что онъ получается при помощи операціи D_ξ изъ интеграла:

$$\int_{x_0}^{x}P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} + \tag{5}$$

$$+\sum_{k=1}^{k=p}\int_{\xi_0}^{\xi}\overline{E}_k(\xi,y_\xi)\frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}}\cdot\int_{x_0}^{x}\varphi_k(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}},$$

который, отличаясь на линейную функцію интеграловъ перваго рода отъ интеграла третьяго рода (первый членъ), есть интегралъ *третьяго рода.* Нормальный интегралъ второго рода при посредствѣ алгебраическихъ функцій сводится къ основнымъ интеграламъ второго рода. Помножая равенство (1) § 67 на $\dfrac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$ и интегрируя отъ x_0, мы будемъ имѣть, помня (6) § 58:

$$P_{x,x_0}(\xi,y_\xi;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}}) + \sum_{k=1}^{k=p}\varphi_k(\overset{m-2}{\xi},\overset{n-2}{y_\xi})\int_{x_0}^{x}\overline{E}_k(x,y)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = \tag{6}$$

$$= D_\xi\int_{x_0}^{x}P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} + \sum_{k=1}^{k=p}\overline{E}_k(\xi,y_\xi)\int_{x_0}^{x}\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}};$$

вторая часть этого равенства не отличается по существу отъ второй части (4), ибо если раскрыть въ (4) большія скобки, то и получимъ правую часть (6), слѣд., будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{x}H(x,y\,|\,\xi,y_\xi)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = \tag{7}$$

$$= P_{x,x_0}(\xi,y_\xi;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}}) + \sum_{k=1}^{k=p}\varphi_k(\overset{m-2}{\xi},\overset{n-2}{y_\xi})\int_{x_0}^{x}\overline{E}_k(x,y)\frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}};$$

что и доказываетъ вышесказанное, ибо первый членъ второй части есть алгебраическая функція x, однозначная на Римановой поверхности для $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$. Помножая равенство (4) на $\dfrac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}$ и интегрируя отъ ξ_0, имѣя въ виду, что по (6) § 57

$$(8) \qquad P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) - P_{\xi_0\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = P_{\xi, \xi_0}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}),$$

мы будемъ имѣть:

$$(9) \qquad \int_{\xi_0}^{\xi}\int_{x_0}^{x} H(x, y \,|\, \xi, y_\xi) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} \cdot \frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}} = \int_{x_0}^{x} P_{\xi, \xi_0}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} + \sum_{k=1}^{k=p} \int_{\xi_0}^{\xi} \overline{E}_k(\xi, y_\xi) \frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}} \cdot \int_{x_0}^{x} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}.$$

Этотъ интегралъ только названіемъ второго параметра отличается отъ интеграла третьяго рода (5), слѣд., тоже третьяго рода, и изъ него получится чрезъ операцію D_ξ нормальный интегралъ второго рода, тогда какъ мы его получили изъ нормальнаго интеграла второго рода чрезъ интегрированіе: вотъ какова связь между этими интегралами. Интегралъ (9) называется *нормальнымъ интеграломъ третьяго рода;* точки (ξ, y_ξ) и (ξ_0, y_{ξ_0}) представляютъ его параметры. Понятно, что пути интегрированія по x и ξ въ лѣвой части (7) не должны пересѣкаться, иначе интегралъ терялъ бы смыслъ. Помножая (3) § 67 на $\dfrac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} \cdot \dfrac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}$ и интегрируя по x отъ x_0, по ξ отъ ξ_0, по путямъ не пересѣкающимся, мы будемъ имѣть:

$$(10) \qquad \int_{x_0}^{x}\int_{\xi_0}^{\xi} H(\xi, y_\xi \,|\, x, y) \frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}} \cdot \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = \int_{\xi_0}^{\xi}\int_{x_0}^{x} H(x, y \,|\, \xi, y_\xi) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} \cdot \frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}.$$

Это равенство выражаетъ характерное свойство нормальнаго интеграла третьяго рода не измѣнять своей величины отъ перестановки предѣловъ интеграла съ параметрами. — Это предложеніе для другой формы нормальнаго интеграла третьяго рода получается легко такимъ же способомъ изъ (1) § 67: послѣ умноженія на то же самое количество и интегрированія между тѣми же предѣлами, мы получимъ:

$$(11) \qquad \int_{\xi_0}^{\xi} P_{x, x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}} + \sum_{k=1}^{k=p} \int_{x_0}^{x} \overline{E}_k(x, y) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} \cdot \int_{\xi_0}^{\xi} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}} =$$
$$= \int_{x_0}^{x} P_{\xi, \xi_0}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} + \sum_{k=1}^{k=p} \int_{\xi_0}^{\xi} \overline{E}_k(\xi, y_\xi) \frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}} \cdot \int_{x_0}^{x} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}.$$

(При помощи формулы (1) § 66, показывающей способъ обращенія въ ∞ функціи $H(x, y_\xi \,|\, \xi, y_\xi)$ въ силу (2) § 67, легко увидѣть изъ (10), что нормальный интегралъ третьяго рода обращается логариѳмически въ ∞, когда аргументъ сравняется съ параметромъ, ибо

$$\int^{\xi}\int^{x} -\frac{dx\, d\xi}{(x-\xi)^2} = \int^{\xi} \frac{d\xi}{x-\xi} = -\log(x-\xi); \qquad (12)$$

для другого параметра будемъ имѣть $+\log(x-\eta)$. То же на основаніи пред. видно и изъ (11)).

74. Если провести линію отъ точки (η, y_η) до точки (ξ, y_ξ), гдѣ интегралъ третьяго рода обращается въ безконечность, такъ чтобы она не пересѣкала ни себя, ни линій A_h и B_h (глава I § 16) $(h = 1, 2 \ldots p)$, то эта линія будетъ *купюрой*, или *линіей разрыва* каждаго изъ интеграловъ третьяго рода съ параметрами въ этихъ точкахъ: по обѣ стороны этой линіи значенія разсматриваемаго интеграла будутъ разниться на $2\pi i$, причемъ при переходѣ справа налѣво интегралъ будетъ получать приращеніе $-2\pi i$. Дѣйствительно: при обходѣ въ положительномъ направленіи вокругъ точки (ξ, y_ξ) интегралъ третьяго рода благодаря члену $-\log(x-\xi)$ его разложенія получаетъ приращеніе $-2\pi i$; точно также при обходѣ въ отрицательномъ направленіи вокругъ точки (η, y_ξ) интегралъ получаетъ тоже приращеніе благодаря члену $+\log(x-\eta)$ его разложенія вблизи этой точки; а ту или другую точку въ указанныхъ направленіяхъ должно обойти, чтобы попасть съ правой стороны линіи на лѣвую, если запрещенъ переходъ черезъ самую линію.

75. Для упрощенія формулъ введемъ сокращенныя обозначенія Абелевыхъ интеграловъ трехъ родовъ при помощи большихъ римскихъ цыфръ I, II, III, причемъ легко писать предѣлы интеграла, и значкомъ, приписаннымъ внизу, указывать индивидуальныя отличія каждаго вида изъ интеграловъ того же рода, такимъ образомъ:

a) интегралъ перваго рода изъ основныхъ:

(1) $$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k = \int_{x_0}^{x} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}; \quad (k = 1, 2 \ldots p)$$

b) общій:

(2) $$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}} = \int_{x_0}^{x} \varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}};$$

въ силу (8) § 56 имѣемъ:

(3) $$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}} = \sum_{k=1}^{k=p} C_k \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k;$$

c) основной интегралъ второго рода:

(4) $$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}^0_k = \int_{x_0}^{x} E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}; \quad (k = 1, 2 \ldots p)$$

d) болѣе общій основной интегралъ второго рода:

(5) $$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k = \int_{x_0}^{x} \bar{E}_k(x, y) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}; \quad (k = 1, 2 \ldots p)$$

въ силу (4) будемъ имѣть:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k = \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}^0_k + \sum_{j=1}^{j=p} c_{kj} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_j, \quad (k = 1, 2 \ldots p) \tag{6}$$

гдѣ $c_{kj} = c_{jk}$, а затѣмъ произвольны;

e) интегралъ второго рода съ параметромъ въ точкѣ (ξ, y_ξ) и съ производною, обращающеюся въ нуль въ фундаментальныхъ точкахъ:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}^0_\xi = \int_{x_0}^{x} E_\xi(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}, \tag{7}$$

f) такой же высшихъ порядковъ:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}^{(l-1)}_\xi = \int_{x_0}^{x} E^{(l-1)}_\xi(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}; \tag{8}$$

g) нормальный интегралъ второго рода съ параметромъ въ точкѣ (ξ, y_ξ):

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_\xi = \int_{x_0}^{x} H(x, y \mid \xi, y_\xi) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}; \tag{9}$$

h) первый интегралъ третьяго рода:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^0_{\xi\eta} = \int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}; \tag{10}$$

i) нормальный интегралъ третьяго рода съ параметрами въ точкахъ (ξ, y_ξ) и (ξ_0, y_{ξ_0}):

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}_{\xi, \xi_0} = \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{III}}}_{x, x_0} = \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{x_0}^{x} H(x, y \mid \xi, y_\xi) \frac{dx}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} \cdot \frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}; \tag{11}$$

чрезъ предыдущій онъ такъ выразится:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}_{\xi, \xi_0} = \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^0_{\xi, \xi_0} + \sum_{k=1}^{k=p} \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k \cdot \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k; \tag{12}$$

равенство (9) пред. §, выражающее предложеніе о перемѣнѣ параметровъ съ предѣлами, приметъ такой видъ:

$$\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{x,\,x_0} + \sum_{k=1}^{k=p} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_k \, \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}{}_k = \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi,\,\xi_0} + \sum_{k=1}^{k=p} \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}{}_k \cdot \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_k . \tag{13}$$

Формулы, показывающія способъ полученія нормальныхъ интеграловъ второго и третьяго рода одного изъ другого, примутъ теперь такой видъ:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_{\xi} = D_{\xi} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}_{\xi,\,\xi_0} ; \tag{14}$$

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}_{\xi,\,\xi_0} = \int_{\xi_0}^{\xi} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_{\xi} \cdot \frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi,\, y_{\xi})}{\partial y_{\xi}}} \tag{15}$$

Совершая надъ нормальнымъ интеграломъ операцію D^k_{ξ}, состоящую въ дифференцированіи его k разъ по параметру и умноженіи затѣмъ на $\frac{\partial F(\xi,\, y_{\xi})}{\partial y_{\xi}}$, мы по (8) будемъ имѣть:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}^{(k-1)}_{\xi} = D^k_{\xi} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}_{\xi,\,\xi_0} . \tag{16}$$

76. Формулы (1) и (2) § 68 по введеніи въ нихъ этихъ сокращенныхъ обозначеній примутъ слѣдующій болѣе простой видъ:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{f(x,\, y)}{\varphi(x)} \cdot \frac{dx}{\frac{\partial F(x,\, y)}{\partial y}} = \\ = \sum_{h'=1}^{h'=\nu'} \left\{ \sum_{k'=1}^{k=\nu'_h-1} A'_{\nu'_{h'}-k'} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}^{(k'-1)}_{\xi'_{k'}} + B'_{h'} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi'_{h'},\,\eta} \right\} + \\ + \sum_{h=1}^{h=\nu} \left\{ \sum_{k=1}^{k=\nu_h-1} A_{\nu_k-1} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}^{(k-1)}_{\xi_k} + B_h \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi\eta} \right\} + \\ + \sum_{i=1}^{i=p} \frac{f(a_i,\, b_i)}{\varphi(a_i)} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_i ; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{f(x,\, y)}{\varphi(x)} \cdot \frac{dx}{\frac{\partial F(x,\, y)}{\partial y}} = \Phi(x,\, y) - \Phi(x_0,\, y_0) + \\ + \sum_{k=1}^{k=p} \mathfrak{A}_k \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}^{0}_{k} + \sum_{h=1}^{h=\nu} \mathfrak{B}_h \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi_k,\,\eta} + \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}} . \end{aligned} \tag{2}$$

Если равенство (7) § 63 помножить на $\frac{dx}{\frac{\partial F(x,\, y)}{\partial y}}$ и проинтегрировать по x отъ x_0, то получимъ формулу эквивалентную (1), но болѣе сжатую, если въ нее ввести принятыя нами теперь обозначенія, именно:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{f(x,\, y)}{\varphi(x)} \cdot \frac{dx}{\frac{\partial F(x,\, y)}{\partial y}} = \Pi \frac{f(x,\, y)}{\varphi(x) \frac{\partial F(x,\, y)}{\partial y}} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\infty,\,\eta} - \\ - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{(\nu_k - 1)!} \cdot \frac{d^{\nu_k-1}}{dz^{\nu_k-1}} \left((z-\xi_k)^{\nu_k} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(z,\, y_i)}{\varphi(z) \frac{\partial F(z,\, y_i)}{\partial y_i}} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{z\eta} \right)_{z=\xi_k} + \\ + \sum_{j=1}^{j=p} \frac{f(a_j,\, b_j)}{\varphi(a_j)} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_j , \end{aligned} \tag{3}$$

гдѣ $\Pi \frac{f(x,\, y)}{\varphi(x) \frac{\partial F(x,\, y)}{\partial y}} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\infty,\,\eta}$ обозначаетъ по Абелю сумму вычетовъ стоящей подъ знакомъ Π функціи относительно ея безконечностей, лежащихъ въ точкѣ O' Римановой сферы.

ГЛАВА IV.

Соотношенія между періодами интеграловъ; примъ-функціи.

77. Помножимъ обѣ части тождества (21) § 66 на $\dfrac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}$ и проинтегрируемъ по сомкнутой кривой A_h; тогда второй членъ этого тождества, приводясь къ $\dfrac{d}{d\xi}P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})\,d\xi = dP_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ послѣ сказаннаго умноженія, по интегрированіи дастъ нуль, такъ какъ этотъ путь приведетъ $P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ къ тому же самому значенію, будучи сомкнутымъ на Римановой поверхности, на которой эта функція, какъ раціональная функція (ξ, y_ξ) [§ 65], однозначна. Вводя еще такія обозначенія для интеграловъ трехъ родовъ, взятыхъ по сомкнутому пути A_h въ положительномъ направленіи:

(1) $$\int_{(A_h)} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \frac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}} = \underset{(A_h)}{\mathrm{I}_k} = \omega_{kh}.$$

(2) $$\int_{(A_h)} \overline{E}_k(\xi, y_\xi) \frac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}} = \underset{(A_h)}{\mathrm{II}_k} = \eta_{kh}.$$

(3) $$\int_{(A_h)} P_{x,\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}} = \underset{(A_h)}{\mathrm{III}^{0}_{x,\eta}} = \Omega(x, y)_h,$$

— ибо послѣдній будетъ функція точки (x, y), тогда какъ первыя два постоянныя количества, — мы будемъ имѣть:

$$D_x\Omega(x, y)_h = \sum_{k=1}^{k=p}\left\{\eta_{kh}\,\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) - \omega_{kh}\overline{E}_k(x, y)\right\}, \tag{4}$$

и раздѣляя на $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}$:

$$\frac{d}{dx}\Omega(x, y)_h = \sum_{k=1}^{k=p}\left\{\eta_{kh}\frac{\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})}{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}} - \omega_{kh}\frac{\overline{E}_k(x, y)}{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}}\right\}. \tag{5}$$

Это послѣднее равенство говоритъ намъ, что функція $\Omega(x, y)_h$, опредѣляемая равенствомъ (3), имѣетъ алгебраическую производную, однозначную на Римановой поверхности для $F(x, y) = 0$, но съ трансцендентными коэффиціентами ω_{kh} и η_{kh}, опредѣляемыми равенствами (1) и (2). Равенство (5) опредѣляетъ функцію $\Omega(x, y)_h$ до придаточной постоянной; послѣдняя опредѣлится, если это равенство проинтегрируемъ отъ (x_0, y_0); полученную такимъ образомъ функцію $\Omega(x, y)$, исчезающую при $x = x_0$, $y = y_0$, мы означимъ чрезъ $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$; тогда будемъ имѣть:

$$\Omega(x, y; x_0, y_0)_h = \sum_{k=1}^{k=p}\left(\eta_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}} - \omega_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_k}}\right). \tag{6}$$

Съ другой стороны изъ (3), такъ какъ по (6) § 58 будетъ:

$$P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) - P_{x_0\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = P_{x,x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}), \tag{7}$$

получается такое выраженіе для этой функціи:

$$\Omega(x, y; x_0, y_0)_h = \underset{(A_h)}{\mathrm{III}^{0}_{x,x_0}}. \tag{8}$$

Изъ этихъ двухъ выраженій (6) и (8) легко получаются всѣ свойства функціи $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$. Изъ послѣдняго выраженія видно, что эта функція будетъ конечна, пока x не придетъ въ одну изъ фундаментальныхъ точекъ $(\overset{p}{\underset{1}{a_k, b_k}})$, гдѣ она обратится въ ∞^1, какъ то слѣдуетъ изъ (6), именно, по (6) § 70, какъ

$$-\,\omega_{kh}\left.\frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x - a_k}\right|_{x = a_k}. \tag{9}$$

Когда (x, y) приходитъ на линію A_h, то формула (8) теряетъ значеніе, тогда какъ изъ (6) видно, что значеніе этой функціи будетъ конечное; однако, по обѣ стороны линіи A_h оно будетъ различное: эта линія будетъ, слѣд., линіей разрыва (купюрой) этой функціи, при переходѣ чрезъ которую послѣдняя и получаетъ конечное приращеніе. Въ самомъ дѣлѣ, для того, чтобы формула (8) сохранила смыслъ, когда (x, y) приходитъ на путь интегрированія A_h, надобно этотъ путь вблизи этой точки измѣнить немного, заставляя точку (ξ, y_ξ) обойти точку (x, y) по полукругу очень малаго радіуса, справа, или слѣва: но въ такомъ случаѣ результаты получатся неодинаковые: путь, обходящій точку (x, y) справа, можетъ быть превращенъ въ путь, обходящій эту точку слѣва и еще другой по цѣлому кругу въ положительномъ направленіи; такъ что значеніе функціи $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$, когда (x, y) будетъ лежать слѣва отъ пути A_h, будетъ равняться значенію ея, когда (x, y) лежитъ справа, сложенному со значеніемъ нашего интеграла по кругу вокругъ (x, y) въ положительномъ направленіи, а этотъ послѣдній интегралъ, такъ какъ вблизи (x, y) имѣемъ по (4) § 59:

$$(10) \qquad P_{x, x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = -\frac{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}{\xi - x} + \mathfrak{P}_2(\xi - x),$$

будетъ $= -2\pi i$. Итакъ значеніе функціи $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$ слѣва пути A_h, иначе внутри сомкнутой линіи A_h, будетъ менѣе на $2\pi i$ чѣмъ направо отъ пути A_h, иначе — внѣ этой линіи, такъ что при переходѣ чрезъ эту сомкнутую линію извнутри наружу функція $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$ вдругъ получаетъ приращеніе $+2\pi i$, при переходѣ снаружи внутрь: $-2\pi i$; пока же x не переходитъ этой линіи, функція $\Omega(x, y; x_0, y_0)$ остается однозначною. Такъ какъ благодаря многосвязности Римановой поверхности точка (x, y) сколько угодно разъ сряду можетъ переходить линію A_h въ одномъ направленіи, то отсюда слѣдуетъ, что функція $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$ въ каждой точкѣ Римановой поверхности будетъ имѣть безчисленное множество значеній, разнящихся между собою на $2q\pi i$, гдѣ q какое угодно цѣлое число, положительное или отрицательное.

78. Точно также, интегрируя то же тождество (21) § 66, помноживши предварительно на $\dfrac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}$, по пути B_h въ положительномъ направленіи, и полагая:

$$(1) \qquad \int_{(B_h)} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \frac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}} = \underset{(B_h)}{\mathrm{I}_k} = \omega'_{kh},$$

$$\int_{(B_h)} \overline{E}_k(\xi, y_\xi) \frac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}} = \underset{(B_h)}{\mathrm{II}_k} = \eta'_{kh}, \qquad (2)$$

$$\int_{(B_h)} P_{x x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}} = \underset{(B_h)}{\mathrm{III}^\circ_{x x_0}} = \Omega'(x, y)_h, \qquad (3)$$

будемъ имѣть:

$$D_x \Omega'(x, y)_h = \sum_{k=1}^{k=p} \left\{ \eta'_{kh} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) - \omega'_{kh} \overline{E}_k(x, y) \right\}, \qquad (4)$$

и раздѣляя на $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}$:

$$\frac{d}{dx} \Omega'(x, y)_h = \sum_{k=1}^{k=p} \left\{ \eta'_{kh} \frac{\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})}{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}} - \omega'_{kh} \frac{\overline{E}_k(x, y)}{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}} \right\}, \qquad (5)$$

откуда слѣдуетъ, что функція $\Omega'(x, x_0)_h$ имѣетъ алгебраическую производную, однозначную на Римановой поверхности для $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$, съ трансцендентными однако коэффиціентами ω'_{kh} и η'_{kh}. Интегрируя равенство (5) по тому же пути, какъ и въ предыдущемъ § отъ точки (x_0, y_0), мы получимъ,—означая исчезающую при $x = x_0$ и $y = y_0$ функцію $\Omega'(x, y)_h$ чрезъ $\Omega'(x, y; x_0, y_0)_h$, слѣдующее равенство:

$$\Omega'(x, y; x_0, y_0)_h = \sum_{k=1}^{k=p} \left(\eta'_{kh} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}} - \omega'_{kh} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_k}} \right), \qquad (6)$$

и также изъ (3) по (7) пред. § другое:

$$\Omega'(x, y; x_0, y_0)_h = \underset{(B_h)}{\mathrm{III}^\circ_{x, x_0}}. \qquad (7)$$

Изъ этихъ двухъ выраженій, точно также какъ въ пред. §, выведемъ, что функція $\Omega'(x, y; x_0, y_0)_h$ конечна на всей Римановой поверхности кромѣ фундаментальныхъ точекъ, въ которыхъ обращается въ ∞^1, какъ

$$-\omega'_{kh} \left. \frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x - a_k} \right|_{x = a_k}, \qquad (8)$$

однозначна, пока x не переходитъ линіи B_h; при переходѣ же чрезъ эту линію извнутри наружу получаетъ приращеніе $+2\pi i$, при переходѣ же снаружи внутрь приращеніе $-2\pi i$, такъ что въ каждой точкѣ Римановой поверхности имѣетъ безчисленное множество значеній, розняцихся между собою на $2q'\pi i$, гдѣ q' какое угодно цѣлое число, положительное или отрицательное; наконецъ, подобно разсмотрѣнной въ пред. § функціи и функція $\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h$ обращается въ нуль при $x=x_0, y=y_0$.

79. Всякій сомкнутый путь приведетъ къ подобной функціи, которая однако будетъ линейной функціей $2p$ функцій $\Omega(x,y;x_0,y_0)_h$ и $\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h$. Въ самомъ дѣлѣ, всякій сомкнутый путь приведется къ извѣстной послѣдовательности путей A_h и B_h $(h=1,2,3\ldots p)$, пройденныхъ въ томъ или другомъ направленіи, да еще къ обходамъ винтовыхъ точекъ, которыя дадутъ однако интегралы равные нулю, какъ взятыя по безконечно-малому пути отъ функцій, остающихся въ нихъ конечными (какъ присоединенныя); означая теперь чрезъ m_h число, показывающее сколько разъ путь A_h проходился въ положительномъ направленіи чаще, чѣмъ въ отрицательномъ, чрезъ n_h число, показывающее, сколько разъ путь B_h проходился въ положительномъ направленіи чаще, чѣмъ въ отрицательномъ, мы будемъ имѣть, обозначая чрезъ $\bar\Omega(x,y;x_0,y_0)$ функцію, относящуюся къ разсматриваемому сомкнутому пути, такое равенство:

$$(1)\qquad \bar\Omega(x,y;x_0,y_0)=\sum_{h=1}^{h=p}\left\{m_h\Omega(x,y;x_0,y_0)_h+n_h\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h\right\},$$

и точно также:

$$(2)\qquad \bar\Omega(x,y;x_0,y_0)=\sum_{k=1}^{k=p}\left(\bar\eta_k\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k-\bar\omega_k\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k\right),$$

гдѣ $\bar\omega_k$ и $\bar\eta_k$ обозначаютъ значенія интеграловъ перваго и второго рода I_k и II_k, взятые по тому же самому пути, такъ что, слѣд., будетъ:

$$(3)\qquad \bar\omega_k=\sum_{h=1}^{h=p}(m_h\omega_{kh}+n_h\omega'_{kh}),$$

$$(4)\qquad \bar\eta_k=\sum_{h=1}^{h=p}(m_h\eta_{kh}+n_h\eta'_{kh}).$$

80. Величины ω_{kh} и ω'_{kh} $(h=1,2,3\ldots p)$ суть *періоды* интеграла перваго рода $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k$; величины η_{kh} и η'_{kh} $(h=1,2,3\ldots p)$ суть *періоды* интеграла второго рода $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k$. Всякій путь, ведущій изъ (x_0,y_0) въ точку (x,y) можетъ быть чрезъ непрерывное измѣненіе приведенъ къ извѣстной послѣдовательности путей A_h и B_h $(h=1,2\ldots p)$ и еще нѣкоторому

опредѣленному пути изъ (x_0,y_0) въ (x,y); такъ что, означая чрезъ $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k$ и $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k$ значенія этихъ интеграловъ, относящихся къ этому опредѣленному пути, значенія тѣхъ же интеграловъ, относящихся ко всякому другому пути, представятся формулами:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k+\bar\omega_k=\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k+\sum_{h=1}^{h=p}(m_h\omega_{kh}+n_h\omega'_{kh}),\qquad(1)$$

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k+\bar\eta_k=\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k+\sum_{h=1}^{h=p}(m_h\eta_{kh}+n_h\eta'_{kh}),\qquad(2)$$

гдѣ m_h, n_h $(h=1,2,3\ldots p)$ суть какія либо цѣлыя числа, положительныя или отрицательныя. Между періодами интеграловъ перваго и второго рода существуютъ интересныя и важныя для нашей теоріи соотношенія, которыя легко выводятся изъ равенствъ (6) §§ 77 и 78, что мы и покажемъ въ слѣд. §.

81. Заставимъ въ равенствахъ (6) § 77 и § 78 точку (x,y) описать въ положительномъ направленіи какой либо путь A_g, гдѣ предполагаемъ $g\neq h$; тогда этотъ путь не будетъ пересѣкать ни A_h, ни B_h, и потому стоящія налѣво въ этихъ равенствахъ функціи $\Omega(x,y;x_0,y_0)_h$ и $\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h$ вернутся къ прежнимъ своимъ значеніямъ, и приращенія ихъ такимъ образомъ будутъ равны нулю; тогда какъ входящіе въ правыя части этихъ равенствъ интегралы

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k \text{ и } \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k\qquad(1)$$

получатъ соотвѣтственно приращенія:

$$\omega_{kg} \text{ и } \eta_{kg};\qquad(2)$$

въ результатѣ, слѣд., будемъ имѣть, вычитая изъ полученныхъ послѣ обхода (x,y) по пути A_g равенствъ, тѣ же равенства въ первоначальномъ видѣ, слѣдующія соотношенія между періодами интеграловъ перваго и второго рода:

$$\sum_{k=1}^{k=p}(\eta_{kh}\omega_{kg}-\omega_{kh}\eta_{kg})=0;\qquad(3)$$

$$\sum_{k=1}^{k=p}(\eta'_{kh}\omega_{kg}-\omega'_{kh}\eta_{kg})=0;\qquad(4)$$

гдѣ въ послѣднемъ необходимо $h\neq g$; первое же будетъ имѣть мѣсто и при $h=g$, ибо тогда каждый членъ суммы тождественно будетъ равенъ нулю. Точно также, если заставимъ точку (x,y) описать сомкнутый путь B_g, причемъ $h \neq g$, изъ тѣхъ же равенствъ (6) §§ 77 и 78 по той же причинѣ получимъ:

$$\sum_{k=1}^{k=p}(\eta_{kh}\omega'_{kg}-\omega_{kh}\eta'_{kg})=0, \tag{5}$$

которое лишь множителемъ (-1) отличается отъ (4), и

$$\sum_{k=1}^{k=p}(\eta'_{kh}\omega'_{kg}-\omega'_{kh}\eta'_{kg})=0, \tag{6}$$

которое будетъ имѣть мѣсто и при $h=g$, ибо каждый членъ суммы тогда тождественно будетъ равенъ нулю. Если же въ (6) § 77 заставить точку (x, y) описать сомкнутый путь B_h въ положительномъ направленіи, то такъ какъ она вслѣдствіе этого перейдетъ съ лѣвой стороны пути A_h на правую, функція $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$ получитъ приращеніе $2\pi i$, и мы будемъ имѣть такое равенство:

$$\sum_{k=1}^{k=p}(\eta_{kh}\omega'_{kh}-\omega_{kh}\eta'_{kh})=2\pi i. \tag{7}$$

Заставляя точку (x, y) описать тотъ же путь B_h въ положительномъ направленіи въ равенствѣ (6) § 78, мы получимъ тождество (6) для $g=h$: если же въ томъ же равенствѣ (6) § 78 заставимъ точку (x, y) описать въ положительномъ направленіи путь A_h, то такъ какъ она перейдетъ при этомъ съ правой стороны пути B_h на лѣвую, то функція $\Omega'(x, y; x_0, y_0)_h$ получитъ приращеніе $-2\pi i$, и мы будемъ имѣть:

$$\sum_{k=1}^{k=p}(\eta'_{kh}\omega_{kh}-\omega'_{kh}\eta_{kh})=-2\pi i, \tag{8}$$

которое не отличается существенно отъ предыдущаго, ибо получается изъ него чрезъ умноженіе на -1.

Такимъ образомъ мы получили слѣдующія соотношенія между періодами интеграловъ перваго и второго рода (найденныя по тому же способу Вейерштрассомъ и сообщенныя на его лекціяхъ), которыя мы здѣсь еще разъ списываемъ въ виду ихъ важности въ такую таблицу:

$$\sum_{k=1}^{k=p}(\eta_{kh}\omega_{kg}-\omega_{kh}\eta_{kg})=0, \tag{I}$$

$$\sum_{k=1}^{k=p}(\eta_{kh}\omega'_{kg}-\omega_{kh}\eta'_{kg})=0, \qquad (h \neq g) \tag{II}$$

$$\sum_{k=1}^{k=p}(\eta_{kh}\omega'_{kh}-\omega_{kh}\eta'_{kh})=2\pi i, \tag{III}$$

$$\sum_{k=1}^{k=p}(\eta'_{kh}\omega'_{kg}-\omega'_{kh}\eta'_{kg})=0. \tag{IV}$$

82. Съ помощію этихъ соотношеній легко вычислить опредѣлитель порядка $2p$, составленный изъ періодовъ интеграловъ перваго и второго рода, именно:

$$\begin{vmatrix}
\eta_{11} & \omega_{11} & \eta_{21} & \omega_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \eta_{p1} & \omega_{p1} \\
\eta_{12} & \omega_{12} & \eta_{22} & \omega_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \eta_{p2} & \omega_{p2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\eta_{1p} & \omega_{1p} & \eta_{2p} & \omega_{2p} & \cdot & \cdot & \cdot & \eta_{pp} & \omega_{pp} \\
\eta'_{11} & \omega'_{11} & \eta'_{21} & \omega'_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \eta'_{p1} & \omega'_{p1} \\
\eta'_{12} & \omega'_{12} & \eta'_{22} & \omega'_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \eta'_{p2} & \omega'_{p2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\eta'_{1p} & \omega'_{1p} & \eta'_{2p} & \omega'_{2p} & \cdot & \cdot & \cdot & \eta'_{pp} & \omega'_{pp}
\end{vmatrix} = \Delta, \tag{1}$$

который есть опредѣлитель системы $2p$ линейныхъ уравненій (6) § 77 и 78, когда въ нихъ считать за неизвѣстныя интегралы $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k$ и $-\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k (k=1, 2, 3..p)$. Произведемъ въ немъ круговую перестановку строкъ p разъ: это введетъ множитель $(-1)^{(2p-1)p}=(-1)^p$; затѣмъ переставимъ въ каждой парѣ столбцевъ занимающіе четное и нечетное мѣсто одинъ на мѣсто другого: это введетъ опять множитель $(-1)^p$, что по перемноженіи съ прежде введеннымъ дастъ $(-1)^{2p}=+1$; теперь помножимъ стоящіе на четныхъ мѣстахъ на (-1): это введетъ опять множитель $(-1)^p$, такъ что будемъ имѣть:

$$\begin{vmatrix}
\omega'_{11} & -\eta'_{11} & \omega'_{21} & -\eta'_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega'_{p1} & -\eta'_{p1} \\
\omega'_{12} & -\eta'_{12} & \omega'_{22} & -\eta'_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega'_{p2} & -\eta'_{p2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\omega'_{1p} & -\eta'_{1p} & \omega'_{2p} & -\eta'_{2p} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega'_{pp} & -\eta'_{pp} \\
\omega_{11} & -\eta_{11} & \omega_{21} & -\eta_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{p1} & -\eta_{p1} \\
\omega_{12} & -\eta_{12} & \omega_{22} & -\eta_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{p2} & -\eta_{p2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\omega_{1p} & -\eta_{1p} & \omega_{2p} & -\eta_{2p} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{pp} & -\eta_{pp}
\end{vmatrix} = (-1)^p\Delta. \tag{2}$$

Перемножая оба опредѣлителя по правиламъ теоріи опредѣлителей, будемъ имѣть по формуламъ (I)—(IV) пред. §:

$$\begin{vmatrix}
2\pi i & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 2\pi i & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 2\pi i & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -2\pi i & 0 & \cdot & 0 \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -2\pi i & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & -2\pi i
\end{vmatrix} = (-1)^p\Delta^2; \tag{3}$$

или, такъ какъ опредѣлитель налѣво сводится къ діагональному члену:

$$(-1)^p(2\pi i)^{2p} = (-1)^p\Delta^2, \tag{4}$$

откуда находимъ

$$\Delta = \pm(2\pi i)^p. \tag{5}$$

83. Такъ какъ опредѣлитель системы $2p$ уравненій (6) §§ 77 и 78, линейныхъ относительно интеграловъ перваго и второго рода $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k$ и $\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k$, отличенъ отъ нуля, то эта система можетъ быть рѣшена по этимъ интеграламъ. Рѣшимъ эти уравненія относительно этихъ интеграловъ по способу неопредѣленныхъ множителей. Съ этою цѣлью помножимъ уравненія

$$\sum_{k=1}^{k=p}\left\{\eta_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k\right\} = \Omega(x, y; x_0, y_0)_h \tag{1}$$

на λ'_{gh}, а уравненія

$$\sum_{k=1}^{k=p}\left\{\eta'_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega'_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k\right\} = \Omega'(x, y; x_0, y_0)_h \tag{2}$$

на $-\lambda_{gh}$, и, сложивъ эти произведенія, просуммируемъ ихъ по h отъ 1 до p; будемъ имѣть, мѣняя порядокъ суммированія по h и k:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k=p}\left\{\sum_{h=1}^{h=p}(\lambda'_{gh}\eta_{kh} - \lambda_{gh}\eta'_{kh})\,.\,\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k - \sum_{h=1}^{h=p}(\lambda'_{gh}\omega_{kh} - \lambda_{gh}\omega'_{kh})\,.\,\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k\right\} = \\ = \sum_{h=1}^{h=p}\left\{\lambda'_{gh}\Omega(x, y; x_0, y_0)_h - \lambda_{gh}\Omega'(x, y; x_0, y_0)_h\right\}.\end{aligned} \tag{3}$$

Если желаемъ получить отсюда $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_g$, то полагаемъ:

$$\sum_{h=1}^{h=p}(\lambda'_{gh}\eta_{kh} - \lambda_{gh}\eta'_{kh}) = 0, \qquad (k \neq g) \tag{4}$$

$$\sum_{h=1}^{h=p}(\lambda'_{gh}\eta_{gh} - \lambda_{gh}\eta'_{gh}) = 1, \tag{5}$$

$$\sum_{h=1}^{h=p}(\lambda'_{gh}\omega_{kh} - \lambda_{gh}\omega'_{kh}) = 0, \tag{6}$$

откуда и найдемъ значенія λ_{gh} и λ'_{gh}. Это легко сдѣлать на основаніи соотношеній (I)—(IV) § 81. Чтобы найти λ_{gj}, помножимъ (4) на ω_{kj},

(5) на ω_{gj}, (6) на $-\eta_{kj}$ и сложимъ полученныя произведенія для $k = 1, 2, 3 \ldots p$; расположивъ результатъ по λ, будемъ имѣть:

$$\sum_{h=1}^{h=p}\left\{\lambda'_{gh}\sum_{k=1}^{k=p}(\eta_{kh}\omega_{kj} - \omega_{kh}\eta_{kj}) - \lambda_{gh}\sum_{k=1}^{k=p}(\eta'_{kh}\omega_{kj} - \omega'_{kh}\eta_{kj})\right\} = \omega_{gj}; \tag{7}$$

а это на основаніи (I)—(III) § 81 приводится къ такому:

$$-\lambda_{gj}(-2\pi i) = \omega_{gj}, \tag{8}$$

откуда находимъ:

$$\lambda_{gj} = \frac{1}{2\pi i}\,\omega_{gj}. \tag{9}$$

Чтобы найти λ'_{gj}, помножимъ (4) на ω'_{kj}, (5) на ω'_{gj}, (6) на $-\eta'_{kj}$, и сложимъ полученныя произведенія для $k = 1, 2, 3 \ldots p$; по расположеніи результата по λ будемъ имѣть:

$$\sum_{h=1}^{h=p}\left\{\lambda'_{gh}\sum_{k=1}^{k=p}(\eta_{kh}\omega'_{kj} - \omega_{kh}\eta'_{kj}) - \lambda_{gh}\sum_{k=1}^{k=p}(\eta'_{kh}\omega'_{kj} - \omega'_{kh}\eta'_{kj})\right\} = \omega'_{gj}; \tag{10}$$

а это на основаніи (II)—(IV) § 81 приведется къ такому:

$$2\pi i\,.\,\lambda'_{gj} = \omega'_{gj}, \tag{11}$$

откуда найдемъ:

$$\lambda'_{gj} = \frac{1}{2\pi i}\,\omega'_{gj}. \tag{12}$$

Внося изъ (9) и (12) значенія λ_{gj} и λ'_{gj} въ (3), будемъ имѣть выраженіе интеграла перваго рода чрезъ функціи $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$ и $\Omega'(x, y; x_0, y_0)_h$:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_g = \frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{h=p}\left\{\omega'_{gh}\,\Omega(x, y; x_0, y_0)_h - \omega_{gh}\,\Omega'(x, y; x_0, y_0)_h\right\}. \tag{13}$$

Если пожелаемъ получить выраженіе интеграла второго рода $\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_g$ чрезъ тѣ же функціи, то должны найти неопредѣленные множители λ и λ' изъ условій:

$$\sum_{h=1}^{h=p}(\lambda'_{gh}\eta_{kh} - \lambda_{gh}\eta'_{kh}) = 0, \tag{14}$$

$$\sum_{h=1}^{h=p}(\lambda'_{gh}\omega_{kh} - \lambda_{gh}\omega'_{kh}) = 0, \qquad (k \neq g) \tag{15}$$

$$\sum_{h=1}^{h=p}(\lambda'_{gh}\omega_{gh} - \lambda_{gh}\omega'_{gh}) = -1. \tag{16}$$

Для опредѣленія λ_{gj} помножаемъ (14) на ω_{kj}, (15) на $-\eta_{kj}$, (16) на $-\eta_{gj}$ и сложимъ для $k=1,2,3\ldots p$; по расположеніи результата по λ, будемъ имѣть:

$$(17)\qquad \sum_{h=1}^{h=p}\left\{\lambda'_{gh}\sum_{k=1}^{k=p}(\eta_{kh}\omega_{kj}-\omega_{kh}\eta_{kj})-\lambda_{gh}\sum_{k=1}^{k=p}(\eta'_{kh}\omega_{kj}-\omega'_{kh}\eta_{kj})\right\}=\eta_{gj};$$

на основаніи (I)—(III) § 81 оно приведется къ такому:

$$(18)\qquad -\lambda_{gj}(-2\pi i)=\eta_{gj},$$

откуда найдемъ

$$(19)\qquad \lambda_{gj}=\frac{1}{2\pi i}\eta_{gj}.$$

Для опредѣленія λ'_{gj} помножимъ тѣ же уравненія по порядку на ω'_{kj}, $-\eta'_{kj}$, $-\eta'_{gj}$ и сложимъ для $k=1,2,3\ldots p$; по расположенію результата по λ, получимъ:

$$(20)\qquad \sum_{h=1}^{h=p}\left\{\lambda'_{gh}\sum_{k=1}^{k=p}(\eta_{kh}\omega'_{kj}-\omega_{kh}\eta'_{kj})-\lambda_{gh}\sum_{k=1}^{k=p}(\eta'_{kh}\omega'_{kj}-\omega'_{kh}\eta'_{kj})\right\}=\eta'_{gj},$$

что на основаніи (II)—(IV) § 81 приведется къ такому:

$$(21)\qquad \lambda'_{gj}.2\pi i=\eta'_{gj},$$

откуда найдемъ:

$$(22)\qquad \lambda'_{gj}=\frac{1}{2\pi i}\eta'_{gj}.$$

Внося изъ (19) и (22) значенія λ_{gj} и λ'_{fj} въ (3), будемъ имѣть выраженіе интеграла второго рода $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k$ чрезъ функціи $\Omega(x,y;x_0,y_0)_h$ и $\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h$:

$$(23)\qquad \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_g=\frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{h=p}\left\{\eta'_{gh}\,\Omega(x,y;x_0,y_0)_h-\eta_{gh}\,\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h\right\}.$$

Формулы (13) и (23) легко обнаруживаютъ періодичность интеграловъ перваго и второго рода: если (x,y) опишетъ сомкнутую линію A_k въ положительномъ направленіи, то всѣ функціи Ω_h и Ω'_h вернутся къ своимъ значеніямъ, за исключеніемъ функціи $\Omega'(x,y;x_0,y_0)_k$, которая получитъ приращеніе $-2\pi i$, такъ какъ точка (x,y) перейдетъ снаружи

внутрь сомкнутой линіи B_k, вслѣдствіе чего изъ (13) и (23) для интеграловъ $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_g$ и $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_g$ будутъ слѣдовать приращенія ω_{gk} и η_{gk} соотвѣтственно; если же точка (x,y) опишетъ сомкнутую линію B_k, то всѣ функціи Ω_h и Ω'_h вернутся къ своему прежнему значенію за исключеніемъ функціи $\Omega(x,y;x_0,y_0)_k$, которая получитъ приращеніе $+2\pi i$, такъ какъ точка (x,y) перейдетъ извнутри линіи A_k наружу, вслѣдствіе чего интегралы $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_g$ и $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_g$ по формуламъ (13) и (23) получатъ соотвѣтственно приращенія ω'_{gk} и η'_{gk}.

84. Внося значенія λ и λ' изъ (9) и (12) пред. § въ (4) того же §, мы получимъ равенство (II) § 81; подставляя въ (5), получимъ (III) § 81, подставляя въ (6), получимъ слѣдующее новое соотношеніе между періодами интеграловъ лишь перваго рода:

$$\sum_{h=1}^{h=p}(\omega'_{gh}\omega_{kh}-\omega_{gh}\omega'_{kh})=0. \qquad (1)$$

Точно также вставляя значенія λ и λ' изъ (19) и (22) пред. § въ (14) того же §, получимъ слѣдующее новое соотношеніе между періодами интеграловъ лишь второго рода:

$$\sum_{h=1}^{h=p}(\eta'_{gh}\eta_{kh}-\eta_{gh}\eta'_{kh})=0; \qquad (2)$$

подставляя же тѣ же значенія λ и λ' въ (15) и (16) пред. §, получимъ соотвѣтственно равенства (IV) и (III) § 81.

Эти соотношенія, равно какъ и найденныя нами въ § 81 по способу Вейерштрасса соотношенія (I)—(IV), легко могутъ быть также получены по способу Римана на основаніи теоремы Коши, интегрируя для (1) выраженіе:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_g.d\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k, \qquad (3)$$

для (2) выраженіе:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_g.d\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k \qquad (4)$$

по контуру той элементарной поверхности (площади) T', въ которую превращается Риманова поверхность сѣченіями по линіямъ A_h, B_h, C_h $(h=1,2,3\ldots p)$. Первое изъ этихъ выраженій остается всегда конечнымъ внутри этой элементарной площади, и потому по теоремѣ Коши интегралъ, взятый по ея контуру, напр., въ положительномъ направленіи, будетъ равенъ нулю; съ другой стороны, этотъ интегралъ разобьется на части, отвѣчающія линіямъ A_h, B_h, C_h $(h=1, 2, 3\ldots p)$, которыя проходятся разъ въ одномъ направленіи, другой—въ прямопротивоположномъ. Что касается $d\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k$, то онъ на обѣихъ сторонахъ каждой такой линіи, какъ функція однозначная на Римановой поверхности, будетъ имѣть одинаковыя значенія; то же слѣдуетъ сказать и относительно $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_g$ на линіяхъ C_h; вслѣдствіе этого части интеграла по контуру, относящіяся къ линіямъ C_h, дадутъ въ суммѣ нуль; вдоль линіи же A_h значенія интеграла $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_g$ на правой сторонѣ болѣе на ω'_{gh}, чѣмъ на лѣвой (ибо переходъ съ одной стороны на другую совершается по линіи B_h въ положительномъ направленіи); потому сумма частей интеграловъ, относящихся къ этой линіи A_h, будетъ равна

(5) $$\int\limits_{(A_h)} \omega'_{gh}\, d\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_{kh} = \omega'_{gh}\omega_{kh};$$

вдоль же линіи B_h интегралъ $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_g$ имѣетъ на правой сторонѣ значеніе на ω_{gh} бо́льшее, чѣмъ на лѣвой, но въ положительномъ направленіи проходится лѣвая сторона; слѣд., части интеграла, относящіяся къ пути B_h въ положительномъ направленіи, дадутъ въ суммѣ:

(6) $$-\int\limits_{(B_h)} \omega_{gh}\, d\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k = -\omega_{gh}\omega'_{kh}.$$

Складывая (5) и (6) и суммируя по h отъ 1 до p, и получимъ лѣвую часть (1).—Интегрируя по тому же контуру выраженіе (4), на основаніи такихъ же разсужденій получимъ лѣвую часть (2); что же касается правой части, то тамъ получится нуль отъ того, что въ точкѣ (a_k, b_k) второй множитель, т. е. $d\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k$, будетъ обращаться въ ∞, какъ

(7) $$-\left.\frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{(x-a_k)^2}\right|_{x=a_k},$$

а первый остается конечнымъ; слѣд., вычетъ относительно точки (a_k, b_k) будетъ нуль; въ точкѣ же (a_g, b_g), гдѣ первый множитель обращается въ ∞, какъ

(8) $$\left.\frac{\dfrac{\partial F(a_g, b_g)}{\partial b_g}}{x-a_g}\right|_{x=a_g},$$

второй будетъ обращаться въ 0^1, какъ $(x-a_g)$ при $x=a_g$, если ограничиться сперва интегралами $\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^0_g$ и $\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^0_k$, такъ что вторая часть для этихъ интеграловъ будетъ нуль, такъ какъ $\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^0_g\, d\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^0_k$ будетъ и въ этой точкѣ безконечно малая величина; но какъ интегралы $\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_g$ и $\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k$ отличаются соотвѣтственно отъ $\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^0_g$ и $\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^0_k$ на линейную функцію интеграловъ перваго рода, то на основаніи (II) § 81, какъ сейчасъ увидимъ, равенство (2) будетъ имѣть мѣсто и для этихъ интеграловъ второго рода, болѣе общихъ.—Упомянутое равенство можно получить по тому же методу. Интегрируя выраженіе

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_g\, d\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k \qquad (9)$$

по тому же контуру, придемъ точно также къ (II) § 81, когда $k \neq g$, въ противномъ случаѣ придемъ къ (III) того же § 81, такъ какъ тогда $\dfrac{d\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k}{dx}$ не будетъ $=0$ при $x=a_g$, какъ при $k\neq g$, но въ этомъ случаѣ выраженіе (9) будетъ обращаться въ ∞^1, какъ

$$\frac{\dfrac{\partial F(a_g, b_g)}{\partial b_g}}{(x-a_g)} \cdot \frac{1}{\dfrac{\partial F(a_g, b_g)}{\partial b_g}} = \left.\frac{1}{x-a_g}\right|_{x=a_g}, \qquad (10)$$

такъ какъ $\varphi_g(a_g, b_g)=1$, откуда и будетъ слѣдовать сказанное. Точно также интегрируя по контуру T' функцію

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_g\, d\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k, \qquad (11)$$

будемъ имѣть нуль для $k\neq g$, ибо эта функція только въ точкѣ (a_k, b_k) будетъ обращаться въ ∞^2, какъ (7); если же будетъ $g=k$, то она будетъ обращаться въ ∞^1, какъ

$$-\frac{1}{x-a_k}, \qquad (12)$$

ибо будетъ

$$d\Big(\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^0_k\Big) = \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k\, d\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^0_k + \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^0_k\, d\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k, \qquad (13)$$

и эта функція, какъ видно изъ лѣвой части, будетъ обращаться въ ∞^2, какъ (7) въ точкѣ (a_k, b_k): слѣд.,

$$\int\limits_{(T')} d\Big(\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}\,\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi^0_k}}\Big) = 0 = \int\limits_{(T')} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}\, d\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi^0_k}} + \int\limits_{(T')} \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi^0_k}}\, d\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}; \tag{14}$$

отсюда слѣдуетъ, что первый членъ будетъ обращаться въ ∞^1, какъ второй съ противнымъ знакомъ. На основаніи этого и докажется вѣрность (2), если воспользоваться (6) § 75. Равенства (I) и (IV) этимъ способомъ не получатся, но они суть слѣдствія выведенныхъ по этому способу въ настоящемъ §, и потому должны изъ нихъ получиться; мы однако на этомъ не будемъ останавливаться.

85. Функція $\Omega(x, y: x_0, y_0)_h$, опредѣляемая равенствомъ (8) § 77, на Римановой поверхности имѣетъ безчисленное множество значеній, разнящихся одно отъ другого на кратное $2\pi i$, вездѣ на этой поверхности конечна за исключеніемъ точекъ $(a_k, b_k)_1^p$, въ которыхъ она обращается въ ∞^1, какъ (9) того же §. Если эту функцію взять показателемъ степени числа e, то будемъ имѣть новую трансцендентную функцію, которую такъ означимъ:

$$E(x, y; x_0, y_0)_h = e^{\Omega(x, y; x_0, y_0)_h}; \tag{1}$$

она будетъ однозначна, ибо $e^{\pm 2q\pi i} = 1$, на всей Римановой поверхности конечна и отлична отъ нуля, за исключеніемъ точекъ $(a_k, b_k)_1^p$, которыя будутъ для нея *существенно-особенными точками* (wesentlich-singuläre Stellen, Weierstrass), ибо въ нихъ она будетъ принимать всякое значеніе, благодаря множителю

$$e^{-\omega_k \frac{\frac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x - a_k}}, \tag{2}$$

который отдѣляется, если функцію Ω_h разложить въ рядъ по степенямъ $(x - a_k)$, сходящійся въ окрестности этой точки; при $x = x_0, y = y_0$ эта функція обращается въ единицу, ибо показатель $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$ обращается въ нуль:

$$E(x, y; x_0, y_0)_h \Big|_{x=x_0,\, y=y_0} = 1. \tag{3}$$

Точно также, взявъ показателемъ числа e функцію $\Omega'(x, y; x_0, y_0)_h$, опредѣляемую равенствомъ (7) § 78 и обладающую такими же свойствами, какъ $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$, мы будемъ имѣть новую функцію:

$$E'(x, y; x_0, y_0)_h = e^{\Omega'(x, y; x, y)_h}, \tag{4}$$

тоже однозначную на всей Римановой поверхности, конечную и отличную отъ нуля за исключеніемъ точекъ $(a_k, b_k)_1^p$, которыя будутъ для нея существенно-особенныя, такъ какъ благодаря множителю

$$e^{-\omega'_k \frac{\frac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x - a_k}}, \tag{5}$$

отъ нея отдѣляющемуся при помощи разложенія ея въ рядъ, сходящійся вблизи точки (a_k, b_k), она будетъ принимать всякое значеніе; въ точкѣ же (x_0, y_0) она будетъ обращаться въ единицу:

$$E'(x, y; x_0, y_0)_h \Big|_{x=x_0,\, y=y_0} = 1. \tag{6}$$

Тѣхъ и другихъ функцій, (1) и (4), будетъ всего $2p$. Ихъ Вейерштрассъ называетъ *примъ-функціями* перваго рода (прибавимъ). Изъ нихъ составляется и болѣе общая, которую получимъ, взявъ показателемъ числа e функцію $\overline{\Omega}(x, y; x_0, y_0)$, относящуюся къ какому бы то ни было сложному сомкнутому пути, и которую означимъ такъ:

$$\overline{E}(x, y; x_0, y_0) = e^{\overline{\Omega}(x, y; x_0, y_0)}; \tag{7}$$

на основаніи (1) § 79 будемъ имѣть:

$$\overline{E}(x, y; x_0, y_0) = \prod_{h=1}^{h=p} \Big(E(x, y; x_0, y_0)_h\Big)^{m_h} \cdot \Big(E'(x, y; x_0, y_0)_h\Big)^{n_h}. \tag{8}$$

Это равенство показываетъ, что самая общая примъ-функція перваго рода состоитъ изъ произведенія функцій (1) и (4), возвышенныхъ въ цѣлыя положительныя или отрицательныя степени.

86. Изъ (1) и (4) пред. §, логариѳмируя, получаемъ:

$$\Omega(x, y; x_0, y_0)_h = \log E(x, y; x_0, y_0)_h, \tag{1}$$

$$\Omega'(x, y; x_0, y_0)_h = \log E'(x, y; x_0, y_0)_h. \tag{2}$$

Внося вмѣсто лѣвыхъ частей этихъ равенствъ правыя въ равенства (13) и (23) § 83, будемъ имѣть выраженія интеграловъ перваго и второго рода чрезъ примъ-функціи перваго рода:

$$(3)\qquad \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_g = \frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{h=p}\left\{\omega'_{gh}\log E(x,y;x_0,y_0)_h - \omega_{gh}\log E'(x,y;x_0,y_0)_h\right\},$$

$$(4)\qquad \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_g = \frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{h=p}\left\{\eta'_{gh}\log E(x,y;x_0,y_0)_h - \eta_{gh}\log E'(x,y;x_0,y_0)_h\right\}.$$

Чрезъ эти же примъ-функціи перваго рода и еще чрезъ примъ-функціи второго рода выразится и интегралъ третьяго рода, какъ увидимъ въ слѣд. §, а также и алгебраическія функціи однозначныя на Римановой поверхности, какъ увидимъ въ слѣдующей главѣ; а слѣд., и нормальный интегралъ второго рода съ параметромъ (ξ, y_ξ), который при помощи алгебраической функціи, однозначной на Римановой поверхности для $\overset{m\ n}{F}(x,y)=0$, приводится къ основнымъ интеграламъ второго рода по формулѣ (7) § 72.

87. Изъ (13) § 75 получаемъ:

$$(1)\qquad \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi,\xi_0} = \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{x,x_0} + \sum_{k=1}^{k=p}\left(\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k . \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k - \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k . \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k\right);$$

положимъ теперь:

$$(2)\qquad \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{III}}}{}'_{x,x_0} = \int_{\xi_0}^{\xi} P_{x,x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})\frac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}} = \Omega(x,y;x_0,y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}).$$

Это будетъ функція (x,y), однозначная на Римановой поверхности, пока x не переходитъ чрезъ линію интегрированія (ξ_0, ξ); на самой линіи интегрированія x не можетъ лежать, ибо тогда интегралъ теряетъ смыслъ; въ этомъ случаѣ надобно обойти его по полукругу справа или слѣва, и какъ въ § 77 отсюда будетъ слѣдовать, что налѣво отъ линіи интегрированія значеніе функціи будетъ менѣе, чѣмъ направо, на $2\pi i$, такъ что при переходѣ чрезъ линію интегрированія наша функція получаетъ вдругъ приращеніе $+2\pi i$, если переходъ совершается слѣва направо, и $-2\pi i$, если онъ совершается справа налѣво; въ концахъ линіи интегрированія эта функція обращается въ ∞: въ точкѣ (ξ, y_ξ), какъ:

$$(3)\qquad -\log(\xi - x)\Big|_{x=\xi},$$

въ точкѣ (ξ_0, y_{ξ_0}), какъ:

$$+\log(\xi_0 - x)\Big|_{x=\xi_0}; \qquad (4)$$

въ точкѣ $x=x_0$, $y=y_0$ она обращается въ нуль, и въ точкахъ $(\overset{p}{\underset{1}{a_k, b_k}})$ въ безконечность перваго порядка. Дѣйствительно, для (x,y), лежащаго вблизи точки (a_k, b_k), по (8) § 58 и (27) § 55 и (5) § 56 будемъ имѣть:

$$P_{x,x_0}(\xi,y_\xi;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\frac{1}{\dfrac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}} = -P_{x,x_0}(a_k,b_k;a_1,b_1,\ldots\overset{(k)}{\xi,y_\xi},\ldots a_p,b_p)\frac{\overset{m-2\ n-2}{\varphi_k(\xi,\ y_\xi)}}{\dfrac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}} = \qquad (5)$$

$$= +\frac{1}{a_k - x}\frac{\overset{m-2\ n-2}{\varphi_k(\xi,\ y_\xi)}}{\dfrac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}} - \mathfrak{P}(a_k - x)\frac{\overset{m-2\ n-2}{\varphi_k(\xi,\ y_\xi)}}{\dfrac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}};$$

помножая на $d\xi$ и интегрируя отъ ξ_0, будемъ имѣть отсюда:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} P_{x,x_0}(\xi,y_\xi;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\frac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}} = \frac{1}{a_k - x}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k - \int_{\xi_0}^{\xi}\mathfrak{P}(a_k - x)\frac{\overset{m-2\ n-2}{\varphi_k(\xi,\ y_\xi)}d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}}, \qquad (6)$$

откуда и слѣдуетъ, что при $x = a_k$ наша функція будетъ обращаться въ ∞^1, какъ:

$$\frac{1}{a_k - x}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k\Big|_{x=a_k}, \qquad (7)$$

такъ какъ второй членъ этого равенства есть конечный при $x = a_k$.

Такъ какъ точка (x,y) можетъ сколько угодно разъ подъ рядъ, благодаря многосвязности Римановой поверхности, переходить линію интегрированія въ одномъ направленіи, то мы отсюда заключаемъ, что функція $\Omega(x,y;x_0,y_0 \mid \xi, y_\xi, \xi_0, y_{\xi_0})$ въ каждой точкѣ Римановой поверхности будетъ имѣть безчисленное множество значеній, разнящихся между собою на кратное $2\pi i$. Если теперь мы возьмемъ эту функцію показателемъ числа e, то получимъ функцію:

$$E(x,y;x_0,y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}) = e^{\Omega(x,y;x_0,y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0})}, \qquad (8)$$

которая на всей Римановой поверхности будетъ однозначна, конечна и непрерывна, за исключеніемъ точекъ $\overset{p}{\underset{1}{(a_k, b_k)}}$, которыя будутъ для нея существенно-особенными,—ибо чрезъ разложеніе въ рядъ показателя въ (8), сходящійся вблизи (a_k, b_k), выдѣлится изъ функціи по (7) множитель:

$$(9)\qquad e^{\frac{1}{a_k - x}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k},$$

благодаря которому она будетъ принимать всякое значеніе въ этой точкѣ;—и точки (ξ, y_ξ), гдѣ она на основаніи (8) будетъ обращаться въ ∞^1, ибо по (3):

$$(10)\qquad e^{-\log(\xi - x)} = \frac{1}{\xi - x};$$

въ точкѣ (ξ_0, y_{ξ_0}) она будетъ обращаться въ 0^1, ибо по (4):

$$(11)\qquad e^{\log(\xi_0 - x)} = \xi_0 - x;$$

въ точкѣ (x_0, y_0) въ единицу, ибо показатель въ (8) обращается въ нуль въ этой точкѣ:

$$(12)\qquad E(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0})\Big|_{x = x_0,\, y = y_0} = 1.$$

Эта функція называется *примъ-функціей* второго рода: она имѣетъ одинъ нуль и одну безконечность и p существенно-особенныхъ точекъ.

87₁. Изъ (8), логарифмируя, получаемъ:

$$(1)\qquad \Omega(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}) = \log E(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0\, y_{\xi_0});$$

внося это въ (1) предыдущаго §, будемъ имѣть сперва:

$$(2)\qquad \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi, \xi_0} = \Omega(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}) + \sum_{k=1}^{k=p}\left\{\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k \cdot \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k - \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k \cdot \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k\right\},$$

потомъ

$$(3)\qquad \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi, \xi_0} = \log E(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}) + \sum_{k=1}^{k=p}\left\{\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k \cdot \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k - \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k \cdot \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k\right\};$$

первая изъ этихъ формулъ даетъ выраженіе интеграла третьяго рода чрезъ функцію Ω, вторая чрезъ примъ-функцію второго рода, предѣлы интеграла для которой суть безконечность и нуль (верхній и нижній).

Если ввести сюда вмѣсто интеграловъ $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k$ и $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k$ ихъ выраженія чрезъ примъ-функціи перваго рода изъ формулъ (3) и (4) § 86, то будемъ имѣть:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi, \xi_0} &= \log E(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{h=p}\left\{\sum_{k=1}^{k=p}\left(\eta'_{kh}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega'_{kh}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k\right)\log E(x, y; x_0, y_0)_h - \right. \\ &\qquad \left. - \sum_{k=1}^{k=p}\left(\eta_{kh}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega_{kh}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}\right)\log E'(x, y; x_0, y_0)_h\right\}. \end{aligned}$$

Коэффиціенты при $\log E(\ldots)_h$ и $\log E'(\ldots)_h$ могутъ быть тоже выражены чрезъ примъ-функціи перваго рода. Дѣйствительно изъ (1) и (2) § 86 внося въ (6) § 77 и (6) § 78, будемъ имѣть:

$$(5)\qquad \log E(x, y; x_0, y_0)_h = \sum_{k=1}^{k=p}\left(\eta_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k\right),$$

$$(6)\qquad \log E'(x, y; x_0, y_0)_h = \sum_{k=1}^{k=p}\left(\eta'_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega'_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k\right);$$

перемѣняя въ этихъ формулахъ (x, y) на (ξ, y_ξ), потомъ на (ξ_0, y_{ξ_0}), и вычитая послѣдній результатъ изъ перваго, будемъ имѣть:

$$(7)\qquad \sum_{k=1}^{k=p}\left(\eta_{kh}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega_{kh}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k\right) = \log\frac{E(\xi, y_\xi; x_0, y_0)_h}{E(\xi_0, y_{\xi_0}; x_0, y_0)_h};$$

$$(8)\qquad \sum_{k=1}^{k=p}\left(\eta'_{kh}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega'_{kh}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k\right) = \log\frac{E'(\xi, y_\xi; x_0, y_0)_h}{E'(\xi_0, y_{\xi_0}; x_0, y_0)_h}.$$

Внося вмѣсто лѣвыхъ частей правыя въ равенство (4), получимъ выраженіе интеграла третьяго рода чрезъ примъ-функціи обоихъ родовъ:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi, \xi_0} &= \log E(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{h=p}\left\{\log\frac{E'(\xi, y_\xi; x_0, y_0)_h}{E'(\xi_0, y_{\xi_0}; x_0, y_0)_h}\log E(x, y; x_0, y_0)_h - \right. \\ &\qquad \left. - \log\frac{E(\xi, y_\xi; x_0, y_0)_h}{E(\xi_0, y_{\xi_0}; x_0, y_0)_h}\log E'(x, y; x_0, y_0)_h\right\}. \end{aligned}$$

Необходимо замѣтить, что здѣсь подъ log разумѣется то значеніе его, которое обращается въ нуль, когда стоящее подъ этимъ знакомъ количество обратится въ единицу; тогда только это выраженіе становится вполнѣ опредѣленнымъ.

88. Изъ формулъ пред. § легко получить различныя выраженія для періодовъ интеграла третьяго рода. Если заставимъ точку (x, y) описать сомкнутый путь A_g въ положительномъ направленіи въ равенствахъ (2) и (9) пред. §, мы получимъ, вычитая изъ измѣненнаго чрезъ это ихъ вида первоначальный, такія равенства:

$$(1)\qquad \underset{(A_g)}{\mathrm{III}}{}^{0}_{\xi,\xi_0} = +\sum_{k=1}^{k=p}\Big(\eta_{kg}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega_{kg}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k\Big) = +\log\frac{E(\xi, y_\xi, x_0, y_0)_g}{E(\xi_0, y_{\xi_0}; x_0, y_0)_g};$$

заставивъ въ тѣхъ же равенствахъ точку (x, y) описать сомкнутый путь B_g въ положительномъ направленіи, получимъ:

$$(2)\qquad \underset{(B_g)}{\mathrm{III}}{}^{0}_{\xi,\xi_0} = +\sum_{k=1}^{k=p}\Big(\eta'_{kg}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega'_{kg}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k\Big) = +\log\frac{E'(\xi, y_\xi, x_0, y_0)_g}{E'(\xi_0, y_{\xi_0}; x_0, y_0)_g};$$

ибо по пути A_g переходъ совершается съ внѣшней стороны линіи B_g на внутреннюю, и слѣд., приращеніе $\log E'(\ldots)_g$ будетъ $-2\pi i$; по пути B_g переходъ совершается съ внутренней стороны линіи A_g на внѣшнюю, слѣд., приращеніе $\log E(\ldots)_g$ будетъ $+2\pi i$. Кромѣ того переходъ (x, y) чрезъ линію интегрированія даетъ $2p+1$-ой періодъ интеграла третьяго рода, именно:

$$(3)\qquad 2\pi i.$$

Итакъ чрезъ примъ-функціи перваго и второго рода мы выразили, слѣдуя Вейерштрассу, Абелевы интегралы всѣхъ трехъ родовъ; въ слѣдующей главѣ мы покажемъ по Вейерштрассу же, что чрезъ тѣ же примъ-функціи можетъ быть выражена всякая алгебраическая функція, однозначная на той же Римановой поверхности; отсюда сама собою получится теорема Абеля.

Періоды нормальнаго интеграла третьяго рода легко получить изъ предыдущаго. На основаніи (12) § 75 будетъ:

$$(4)\qquad \underset{(A_g)}{\mathrm{III}}_{\xi,\xi_0} = \underset{B_g}{\mathrm{III}}{}^{0}_{\xi} + \sum_{k=1}^{k=p}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k \underset{(A_g)}{\mathrm{I}_k}$$

или по (1) наст. §:

$$(5)\qquad \underset{(A_g)}{\mathrm{III}}_{\xi,\xi_0} = \sum_{k=1}^{k=p}\eta_{kg}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k.$$

Точно также найдемъ по (2) наст. §:

$$\underset{(B_g)}{\mathrm{III}}_{\xi,\xi_0} = \sum_{k=1}^{k=p}\eta'_{kg}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k. \qquad (6)$$

Мы иногда эти періоды будемъ обозначать чрезъ ζ_g и ζ'_g, такъ что будетъ

$$\zeta_g = \underset{(A_g)}{\mathrm{III}}_{\xi,\xi_0}, \qquad (7)$$

$$\zeta'_g = \underset{(B_g)}{\mathrm{III}}_{\xi,\xi_0}. \qquad (8)$$

ГЛАВА V.

Выраженіе раціональной функціи отъ (x, y), однозначной на Римановой поверхности для y, чрезъ примъ-функціи. Теорема Абеля.

---

89. Въ § 50 нами было показано, какимъ образомъ можно опредѣлить функцію, которая обращалась бы въ ∞^1 въ m' данныхъ точкахъ Римановой поверхности, причемъ останется еще $m'-p+1$ произвольныхъ коэффиціентовъ, относительно которыхъ эта функція будетъ линейная, однородная. Изъ нихъ $m'-p$ могутъ быть опредѣлены такъ, чтобы эта функція обращалась бы въ нуль 0^1 въ $m'-p$ произвольно-заданныхъ точкахъ Римановой поверхности; оставшійся затѣмъ неопредѣленный общій множитель всѣхъ членовъ можетъ быть такъ опредѣленъ, что въ произвольно-выбранной точкѣ Римановой поверхности, напр. (x_0, y_0), (отличной отъ особенныхъ и фундаментальныхъ), эта функція получитъ данное значеніе, напр. обратится въ единицу. Пусть такимъ образомъ опредѣленная до постояннаго множителя функція отъ (x, y) будетъ:

$$z = C\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)}; \tag{1}$$

полагая здѣсь $x = x_0$, $y = y_0$, по условію будемъ имѣть:

$$1 = C\frac{\psi(x_0, y_0)}{\chi(x_0, y_0)}; \tag{2}$$

дѣля на это предыдущее, будемъ имѣть:

$$z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} : \frac{\psi(x_0, y_0)}{\chi(x_0, y_0)}. \tag{3}$$

Означимъ m' нулей этой функціи чрезъ:

$$(\alpha_i, y_{\alpha_i}) \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots m') \tag{4}$$

и m' ея безконечностей чрезъ:

$$(x_i, y_i); \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots m') \tag{5}$$

послѣднія всѣ задаются произвольно; изъ первыхъ же только $m'-p$; остальныя p по нимъ опредѣляются вполнѣ (или наоборотъ).

90. По § 87 всегда можно построить такую примъ-функцію

$$E(x, y; x_0, y_0 \mid x_i, y_i; \alpha_i, y_{\alpha_i}), \tag{1}$$

которая только въ точкѣ (α_i, y_{α_i}) будетъ обращаться въ нуль 0^1, и только въ точкѣ (x_i, y_i) въ ∞^1; въ точкѣ (x_0, y_0) въ единицу; она будетъ имѣть, далѣе, p существенно особенныхъ точекъ $\overset{p}{\underset{1}{(a_j, b_j)}}$ (фундаментальныя точки). Составивъ m' такихъ примъ-функцій и взявъ ихъ произведеніе, получимъ функцію

$$\prod_{i=1}^{i=m'} E(x, y; x_0, x_0 \mid x_i, y_i; \alpha_i, y_{\alpha_i}), \tag{2}$$

однозначную, какъ и (1) пред. §, на Римановой поверхности, обращающуюся въ нуль 0^1 въ точкахъ (4) пред. § и въ безконечность ∞^1 въ точкахъ (5) того же §, какъ упомянутая сейчасъ функція z [(1) пред. §]; потому отношеніе:

$$\left(\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} : \frac{\psi(x_0, y_0)}{\chi(x_0, y_0)}\right) : \prod_{i=1}^{i=m'} E(x, y; x_0, y_0 \mid x_i, y_i; \alpha_i, y_{\alpha_i}) \tag{3}$$

будетъ функціей однозначной, конечной и непрерывной на всей Римановой поверхности за исключеніемъ p точекъ $\overset{p}{\underset{1}{(a_j, b_j)}}$, которыя будутъ для нея существенно-особенными точками, и обращаться въ точкѣ (x_0, y_0) въ единицу; слѣд., это будетъ примъ-функція перваго рода: $\overline{E}(x, y; x_0, y_0)$, [(8) § 85]. Отсюда будетъ слѣдовать, что

$$\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} : \frac{\psi(x_0, y_0)}{\chi(x_0, y_0)} = \prod_{i=1}^{i=m'} E(x, y; x_0, y_0 \mid x_i, y_i; \alpha_i, y_{\alpha_i}) \cdot \overline{E}(x, y; x_0, y_0). \tag{4}$$

Здѣсь пути интегрированія въ $m'-1$ интегралахъ, входящихъ по (8) § 87 въ примъ-функціи $E(..|..)$ второго рода, совершенно-произвольны, и только въ послѣдній множитель входящій интегралъ долженъ быть такъ выбранъ, чтобы имѣло мѣсто это равенство; путь, входящій въ самый послѣдній множитель перваго рода, можетъ быть съ нимъ соединенъ въ одинъ, а потому этотъ множитель перваго рода сольется съ послѣднимъ множителемъ произведенія П. Предполагая это уже сдѣланнымъ, мы будемъ имѣть:

$$(5)\qquad \frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} : \frac{\psi(x_0,y_0)}{\chi(x_0,y_0)} = \prod_{i=1}^{i=m'} E(x,y;x_0,y_0 \mid x_i,y_i;\alpha_i,y_{\alpha_i}).$$

Такимъ образомъ, дѣйствительно, всякая однозначная на Римановой поверхности функція можетъ быть разложена на множители, примъ-функціи второго рода, отвѣчающіе каждой парѣ изъ нуля и безконечности этой функціи, однозначной на Римановой поверхности. — Мы предполагали при этомъ лишь только въ обозначеніи всѣ (x_i, y_i) и (α_i, y_i) различными; нѣкоторые изъ первыхъ между собою, равно какъ и нѣкоторые изъ послѣднихъ, могутъ быть между собою равны; въ такомъ случаѣ въ рядахъ (4) пред. §, соотвѣтственно (5), каждый долженъ быть написанъ столько разъ, сколько единицъ въ показателѣ его кратности: въ случаѣ нулей и безконечностей высшаго порядка такое же число множителей направо въ (5) будетъ обращаться въ 0^1, соотвѣтственно ∞^1.

91. Если прологариѳмируемъ (4) пред. §, то, принимая во вниманіе (2) и (8) § 87, будемъ имѣть:

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{i=m'} \int_{\alpha_i}^{x_i} P_{x,x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_j, b_j}}) \frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}} = \log\left\{\frac{\psi(x,y)\cdot\chi(x_0,y_0)}{\chi(x,y)\cdot\psi(x_0,y_0)}\right\}.$$

Эта формула и выражаетъ *теорему Абеля для интеграловъ третьяго рода:* „сумма интеграловъ третьяго рода съ параметрами x и x_0, взятыхъ отъ нулей до безконечностей данной алгебраической функціи, однозначной на Римановой поверхности для $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$, равняется логариѳму частнаго значеній этой функціи въ точкахъ, отвѣчающихъ параметрамъ".

Правая часть этого равенства не зависитъ отъ фундаментальныхъ точекъ (a_j, b_j), а потому точно также будетъ:

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{i=m'} \int_{\alpha_i}^{x_i} P_{x,x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_j', b_j'}}) \frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}} = \log\left\{\frac{\psi(x,y)\cdot\chi(x_0,y_0)}{\chi(x,y)\cdot\psi(x_0,y_0)}\right\};$$

вычитая отсюда предыдущее, по (12) § 56 будемъ имѣть равенство:

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{i=m'} \int_{\alpha_i}^{x_i} \varphi(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}} = 0,$$

выражающее *теорему Абеля для интеграловъ перваго рода:* „сумма интеграловъ перваго рода, взятыхъ отъ нулей до безконечностей алгебраической функціи, однозначной на Римановой поверхности для $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$, равна нулю".

Въ частности будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{i=m'} \int_{\alpha_i}^{x_i} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \frac{d\xi}{\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}} = 0 \qquad (4)$$

или, короче:

$$\sum_{i=1}^{i=m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}} = 0. \qquad (5)$$

Помножая это на $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_k}}$ и, просуммировавши по k отъ 1 до p, придавая къ (2), по (12) § 75, будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{i=m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{III}_{x,x_0}}} = \log\left\{\frac{\psi(x,y)\cdot\chi(x_0,y_0)}{\chi(x,y)\cdot\psi(x_0,y_0)}\right\}; \qquad (6)$$

что выражаетъ *теорему Абеля для нормальнаго интеграла третьяго рода.*

Совершая операцію D_x надъ этимъ равенствомъ, по (14) того же § 75 будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{i=m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{II}_x}} = D_x \log\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}, \qquad (7)$$

или, такъ какъ

$$D_x \log\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} = \frac{D_x\psi(x,y)}{\psi(x,y)} - \frac{D_x\chi(x,y)}{\chi(x,y)} = \frac{\chi(x,y)D_x\psi(x,y)-\psi(x,y)D_x\chi(x,y)}{\psi(x,y)\,\chi(x,y)}, \qquad (8)$$

и

$$\left.\begin{aligned} D_x\psi(x,y) &= \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \\ D_x\chi(x,y) &= \frac{\partial\chi(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial\chi(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

кромѣ того

$$F(x, y) = 0, \tag{10}$$

слѣдующее:

$$\sum_{i=1}^{i=m'} \Pi_{x}^{x_i}{}_{\alpha_i} = \frac{-1}{\psi(x,y)\cdot\chi(x,y)} \begin{matrix} F(x,y) & \psi(x,y) & \chi(x,y) \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial \chi(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial \chi(x,y)}{\partial y} \end{matrix}. \tag{11}$$

Это равенство выражаетъ *теорему Абеля для нормальнаго интеграла втораго рода съ параметромъ* (x, y): „сумма значенiй нормальнаго интеграла второго рода, взятыхъ отъ нулей до безконечности алгебраической функцiи, однозначной на Римановой поверхности для $F(x, y)$, равна алгебраической функцiи отъ параметра, однозначной на той же поверхности". Совершая операцiю D_x^k надъ равенствомъ (6), получимъ, въ виду (16) § 75, *теорему Абеля для интеграловъ втораго рода порядка* k:

$$\sum_{i=1}^{i=m'} \Pi_{x}^{(k-1)\,x_i}{}_{\alpha_i} = D_x^k \log\left(\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}\right). \tag{12}$$

Во всѣхъ этихъ формулахъ пути интегрированiя во всѣхъ интегралахъ, кромѣ одного, совершенно произвольны; въ этомъ же послѣднемъ онъ долженъ быть выбранъ надлежащимъ образомъ, для того, чтобы всѣ эти равенства имѣли мѣсто, какъ то слѣдуетъ изъ сказаннаго въ § 90. Если пожелаемъ оставить и этотъ путь произвольнымъ, то должны ко вторымъ частямъ всѣхъ равенствъ этого § прибавить одинаковую линейную функцiю съ цѣлыми коэффицiентами перiодовъ интеграловъ, входящихъ въ лѣвую часть этого же равенства, ибо интегралы, между предѣлами этого послѣдняго взятые по всѣмъ другимъ путямъ, будутъ отличаться отъ тѣхъ, которые тамъ разумѣются, именно на линейную функцiю съ цѣлыми коэффицiентами перiодовъ этого самаго интеграла.

92. Теперь нетрудно получить и равенство, выражающее теорему Абеля для самаго общаго Абелева интеграла: перемѣнимъ въ формулѣ (3) § 76 x_0 и x соотвѣтственно на α_i и x_i и просуммируемъ по i отъ 1 до m'; при этомъ можно перемѣнить порядокъ дифференцированiя и суммированiя; тогда, на основанiи (6) пред. § (и перемѣняя въ формулѣ (3) § 76 i на j, j на h въ предупрежденiе неясности), мы будемъ имѣть формулу, данную самимъ Абелемъ: въ знаменитомъ мемуарѣ (XII новаго

изданiя его Oeuvres), представленномъ въ 1826 г. Парижской Академiи Наукъ, именно:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=m'} \int_{\alpha_i}^{x_i} \frac{f(x_i, y_i)}{\varphi(x_i)} \cdot \frac{dx_i}{\dfrac{dF(x_i, y_i)}{\partial y_i}} &= \Pi \frac{f(x,y)}{\varphi(x)\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}} \log\left(\frac{\chi(x,y)\cdot\chi(\eta, y_\eta)}{\chi(x,y)\cdot\psi(\eta, y_\eta)}\right) - \\ &- \sum_{k=1}^{k=\nu} \frac{1}{(\nu_k - 1)!} \cdot \frac{d^{\nu_k - 1}}{dz^{\nu_k - 1}} \left((z-\xi_k)^{\nu_k} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{f(z, y_j)}{\varphi(z)\dfrac{\partial F(z,y_j)}{\partial y_j}} \log\left(\frac{\psi(z,y_z)\cdot\chi(\eta,y_\eta)}{\chi(z,y_z)\cdot\psi(\eta,y_\eta)}\right)\right)_{z=\xi_k} + C, \end{aligned} \tag{14}$$

гдѣ пути отъ α_i до x_i произвольны, почему сумма интеграловъ перваго рода привелась къ постоянной C.

93. Въ § 50 и слѣдующихъ было показано, что всегда можно построить функцiю, однозначную на Римановой поверхности для $\overset{m\ n}{F(x,y)} = 0$, которая обращалась бы въ ∞^1 въ m' данныхъ точкахъ, причемъ останется $m' - p + 1$ неопредѣленныхъ коэффицiентовъ, относительно которыхъ эта функцiя будетъ линейная однородная; и что изъ нихъ $m' - p$ отношенiй къ одному могутъ быть опредѣлены такъ, чтобы эта функцiя обращалась въ 0^1 въ произвольно выбранныхъ $m' - p$ точкахъ Римановой поверхности; (постоянный множитель опредѣлится послѣ этого по значенiю функцiи, произвольно заданному въ какой либо обыкновенной точкѣ (x_0, y_0), отличной отъ нулей и безконечностей искомой функцiи); остальные p нулей найдутся по нимъ, рѣшая уравненiе степени p относительно x, которое получается чрезъ исключенiе y изъ основного уравненiя $\overset{m\ n}{F(x,y)} = 0$ и уравненiя, получаемаго отъ приравниванiя нулю искомой функцiи z отъ x, y, и послѣдующее затѣмъ раздѣленiе его на произведенiе линейныхъ множителей, отвѣчающихъ произвольно-выбраннымъ нулямъ функцiи. Въ этомъ предложенiи, очевидно, нули и безконечности могутъ помѣняться мѣстами, (какъ то легко видѣть, ища сперва обратную функцiю искомой, т. е. вмѣсто z, $\frac{1}{z}$); а потому можно всегда построить такую функцiю, которая будетъ обращаться въ 0^1 въ m' произвольно выбранныхъ точкахъ α_i $(i = 1, 2 \ldots m')$, и въ ∞^1 въ $m' - p$ произвольныхъ точкахъ; въ единицу въ (x_0, y_0); такая функцiя будетъ обращаться въ ∞^1 еще въ p точкахъ, которыя вполнѣ опредѣлятся по тѣмъ чрезъ рѣшенiе алгебраическаго уравненiя степени p, которое получится, когда результатъ исключенiя y изъ $\overset{m\ n}{F(x,y)} = 0$ и $\frac{1}{z} = 0$ раздѣлимъ на линейные множители, отвѣчающiе произвольно-выбраннымъ безконечностямъ опредѣляемой функцiи, напр.,

(x_i, y_i) при $i = p+1,\ p+2 \dots m'$. Тогда, перенося въ другую часть сумму интеграловъ, имѣющихъ (x_i, y_i) при $i = 1, 2 \dots p$ верхними предѣлами, получимъ равенства:

(1) $$\sum_{i=p+1}^{i=m'} \mathop{\mathrm{I}_k}\limits_{\alpha_i}^{x_i} = -\sum_{i=1}^{i=p} \mathop{\mathrm{I}_k}\limits_{\alpha_i}^{x_i};$$

(2) $$\sum_{i=p+1}^{i=m'} \mathop{\mathrm{III}_{x,x_0}}\limits_{\alpha_i}^{x_i} = -\sum_{i=1}^{i=p} \mathop{\mathrm{III}_{x,x_0}}\limits_{\alpha_i}^{x_i} + \log\left\{\frac{\psi(x,y)\cdot\chi(x_0,y_0)}{\chi(x,y)\cdot\psi(x_0,y_0)}\right\};$$

(3) $$\sum_{i=p+1}^{i=m'} \mathop{\mathrm{II}_x}\limits_{\alpha_i}^{x_i} = -\sum_{i=1}^{i=p} \mathop{\mathrm{II}_x}\limits_{\alpha_i}^{x_i} - \frac{1}{\psi(x,y)\cdot\chi(x,y)} \begin{vmatrix} F(x,y) & \psi(x,y) & \chi(x,y) \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial\chi(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} & \dfrac{\partial\chi(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix};$$

$$\sum_{i=p+1}^{i=m'} \int_{\alpha_i}^{x_i} \frac{f(x_i,y_i)}{\varphi(x_i)} \cdot \frac{dx_i}{\dfrac{\partial F(x_i,y_i)}{\partial y_i}} = -\sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha_i}^{x_i} \frac{f(x_i,y_i)}{\varphi(x_i)} \cdot \frac{dx_i}{\dfrac{\partial F(x_i,y_i)}{\partial y_i}} -$$

(4) $$-\ \Pi \frac{f(x,y)}{\varphi(x)\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}} \log\left(\frac{\psi(x,y)\cdot\chi(x_0,y_0)}{\chi(x,y)\cdot\psi(x_0,y_0)}\right) -$$

$$-\sum_{k=1}^{k=\nu} \frac{1}{(\nu_k-1)!} \cdot \frac{d^{\nu_k-1}}{dz^{\nu_k-1}} \left((z-\xi_k)^{\nu_k} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{f(z,y_j)}{\varphi(z)\dfrac{\partial F(z,y_j)}{\partial y_j}} \log\left(\frac{\psi(z,y_z)\cdot\chi(\eta,y_\eta)}{\chi(z,y_z)\cdot\psi(\eta,y_\eta)}\right)\right)_{z=\xi_k} + C.$$

Эти равенства показываютъ, что суммы какого угодно числа $m'-p$ интеграловъ сводятся къ суммамъ p интеграловъ того же рода, верхніе предѣлы которыхъ опредѣляются алгебраически по нижнимъ предѣламъ и по верхнимъ лѣвой части, или прямо, какъ для интеграловъ перваго рода, или чрезъ посредство алгебраическихъ и логариѳмическихъ функцій. Тѣ же равенства, если суммы интеграловъ перенести изъ одной части въ другую, покажутъ, какъ суммы p интеграловъ выражаются чрезъ суммы прочихъ, которыхъ и верхніе предѣлы назначаются нами по произволу.

Примѣчаніе. Если въ (1)—(3) желаемъ оставить пути интегрированія произвольными, то должны направо прибавить по постоянной, подобно тому, какъ то сдѣлано въ (4), на основаніи сказаннаго въ концѣ § 91.

94. Въ частномъ случаѣ, если m' имѣетъ минимальное значеніе, т. е. если

$$m' = p + 1, \tag{1}$$

лѣвыя части равенствъ (1)—(4) пред. § приведутся къ одному члену, вторыя же будутъ содержать по p интеграловъ; такимъ образомъ въ этомъ частномъ случаѣ (1), каждый Абелевъ интегралъ можетъ быть замѣненъ суммою подобныхъ интеграловъ въ числѣ p. Это замѣчаніе найдетъ приложеніе въ дальнѣйшемъ. Въ случаѣ (1) наша функція $\dfrac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}$, обращающаяся въ ∞^1 въ точкахъ $\overset{p+1}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ и въ нуль въ точкахъ $\overset{p+1}{\underset{1}{(\alpha_j, y_{\alpha_j})}}$, изъ которыхъ p первыхъ опредѣляются по одной изъ нихъ, напр., послѣдней (x_{p+1}, y_{p+1}), и по $p+1$ нулямъ, будетъ ничто иное, какъ функція мѣста (x, y):

$$P_{x,\alpha_{p+1}}(x_{p+1}, y_{p+1}; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}), \tag{2}$$

опредѣленная въ § 65, въ которой только вмѣсто $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ взяты $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$: она дѣйствительно по § 65 обращается въ нуль 0^1 при $x = \alpha_{p+1}, y = y_{\alpha_{p+1}}$, и въ ∞^1 при $x = x_i,\ y = y_i$ для $i = 1, 2, 3 \dots p;\ p+1$. Перемѣнимъ для удобства α_{p+1} на α', и x_{p+1} на x', y_{p+1} на y'; тогда функція (2) такъ представится:

$$P_{x,\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}), \tag{3}$$

и равенства (5), (7) и (6) § 91 примутъ такой видъ:

$$\mathop{\mathrm{I}_k}\limits_{\alpha'}^{x'} + \sum_{i=1}^{i=p} \mathop{\mathrm{I}_k}\limits_{\alpha}^{x_i} = 0; \tag{4}$$

$$\mathop{\mathrm{II}_x}\limits_{\alpha'}^{x'} + \sum_{i=1}^{i=p} \mathop{\mathrm{II}_x}\limits_{\alpha_i}^{x_i} = D_x \log\left(P_{x,\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})\right); \tag{5}$$

$$\mathop{\mathrm{III}_{x,x_0}}\limits_{\alpha'}^{x'} + \sum_{i=1}^{i=p} \mathop{\mathrm{III}_{x,x_0}}\limits_{\alpha_i}^{x_i} = \log\left(\frac{P_{x,\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}{P_{x_0,\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}\right). \tag{6}$$

Примѣчаніе. Такъ какъ интегралъ, взадъ и впередъ взятый по одной и той же линіи, даетъ всегда нуль, то, прибавляя въ этихъ равенствахъ, а также въ равенствахъ, аналогичныхъ предыдущихъ §§, суммы интеграловъ, какъ

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_j} + \int_{\alpha_j}^{\alpha_i} = 0,$$

мы можемъ установить произвольное соотвѣтствіе между низшими и высшими предѣлами интеграловъ во всѣхъ этихъ формулахъ.

95. Вейерштрассъ былъ первый, который замѣтилъ, что теорема Абеля обратима, т. е., что если имѣетъ мѣсто равенство (5) § 91, т. е.

(1) $$\sum_{i=1}^{i=m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}} = 0, \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots p)$$

то, при $m' > p$, всегда можно построить такую алгебраическую функцію, которая будетъ $=0^1$ при $x=\alpha_i$, $y=y_{\alpha_i}$, и $=\infty^1$ при $x=x_i$ $(i=1,2,3\ldots m')$. Въ самомъ дѣлѣ, изъ (6) § 91 будемъ имѣть тогда:

(2) $$\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} = \frac{\psi(x_0,y_0)}{\chi(x_0,y_0)}\, e^{\sum\limits_{i=1}^{i=m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{III}_{x,x_0}}}};$$

но

(3) $$e^{\sum\limits_{i=1}^{i=m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{III}_{x,x_0}}}} = \prod_{i=1}^{i=m'} E(x,y;x_0,y_0\,|\,x_i,y_i;\alpha_i,y_{\alpha_i});$$

слѣд.

(4) $$\frac{\chi(x,y)}{\psi(x,y)} = \frac{\psi(x_0,y_0)}{\chi(x_0,y_0)} \cdot \prod_{i=1}^{i=m'} E(x,y;x_0,y_0\,|\,x_i,y_i;\alpha_i,y_{\alpha_i});$$

это представляетъ разложеніе алгебраической функціи, о которой идетъ рѣчь, на примъ-функціи, ибо это разложеніе будетъ обладать слѣдующими свойствами: на Римановой поверхности для $\overset{m\ n}{F(x,y)}=0$ она будетъ однозначная, конечная и непрерывная функція (x,y) за исключеніемъ точекъ $(\overset{m'}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, гдѣ оно $=\infty^1$; въ точкахъ $(\overset{m'}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$ оно будетъ $=0^1$; въ точкѣ (x_0,y_0) равна $\dfrac{\psi(x_0,y_0)}{\chi(x_0,y_0)}$, произвольно заданному значенію; въ точкахъ (a_k,b_k) будетъ опредѣленна и конечна, ибо въ точкѣ

(a_k,b_k) отъ каждаго множителя отдѣлится такой

(5) $$e^{\frac{1}{\alpha_k - x}\overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}}}$$

по (6) § 87; слѣд., всего отдѣлится множитель

(5) $$e^{\frac{1}{\alpha_k - x}\sum\limits_{i=1}^{i=m'}\overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}}} = e^0 = 1$$

— по (1) настоящаго — прежде чѣмъ (x,y) упадетъ въ (a_k,b_k). Но такая функція есть раціональная функція мѣста (x,y) на разсматриваемой поверхности, т. е. раціональная функція перемѣнныхъ x и y, связанныхъ уравненіемъ $\overset{m\ n}{F(x,y)}=0$. Если $m'=p$, то тогда, какъ видѣли въ § 53, нельзя всѣ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})$ выбрать произвольно, а лишь $p-1$ изъ нихъ, а остальную точку нужно такъ выбрать, чтобы она вмѣстѣ съ тѣми была бы нулями нѣкоторой функціи $\varphi(\overset{m-2\ n-2}{x,\ y})$ перваго рода; если это выполнить, то тогда опять формула (4) дастъ искомую функцію; при произвольно же выбранныхъ p точкахъ (x_i,y_i) такой функціи нѣтъ, не существуетъ такая. Это замѣчаніе Вейерштрасса найдетъ примѣненіе въ слѣдующей главѣ.

ГЛАВА VI.

Задача Якоби.

96. Въ уравненіи (1) § 93, которое мы теперь такъ перепишемъ:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}} = -\sum_{i=p+1}^{i=m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}}, \quad (k=1,2,3\dots p)$$

всѣ α_i, а также всѣ x_i направо могутъ быть назначены по произволу, и тогда всѣ x_i налѣво, а слѣд., и всѣ соотвѣтственныя y_i, будутъ вполнѣ опредѣлены. Если мы будемъ всѣ x_i направо въ (1) измѣнять такъ, чтобы стоящая во второй части этого равенства сумма сохраняла свое значеніе, которое означимъ чрезъ v_k, такъ что будетъ

$$(2) \qquad -\sum_{i=p+1}^{i=m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}} = v_k, \quad (k=1,2\dots p)$$

гдѣ v_k данныя величины, то величины x_i, входящія въ лѣвую часть равенства (1), вообще не будутъ измѣняться. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи (2) равенство (1) принимаетъ тогда такой видъ:

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}} = v_k; \quad (k=1,2\dots p)$$

пусть также для другой системы значеній x_i, пусть x'_i $(i=1,2\dots p)$, будетъ также:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \overset{x'_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}} = v_k; \quad (k=1,2\dots p)$$

вычитая отсюда предыдущее, будемъ имѣть:

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \overset{x'_i}{\underset{x_i}{\mathrm{I}_k}} = 0; \quad (k=1,2,3\dots p)$$

но въ такомъ случаѣ можно было бы построить такую функцію, однозначную на Римановой поверхности для $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$, которая только въ точкахъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ будетъ обращаться въ ∞^1, какъ то было доказано въ предыдущемъ §; но, какъ тамъ же было сказано, это возможно лишь тогда, когда эти x_i и соотвѣтственныя y_i будутъ таковы, что всѣ точки (x_i, y_i) для $i=1,2,3\dots p$ расположатся на кривой

$$\varphi(\overset{m-2}{x_i},\ \overset{n-2}{y_i}) = 0, \qquad (6)$$

присоединенной перваго рода. За исключеніемъ такой частной системы значеній v_k $(k=1,2,3\dots p)$, которая приводитъ точки $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ въ такое положеніе, что онѣ окажутся лежащими на какой либо присоединенной кривой перваго рода, этого, слѣд., не будетъ, и *для каждой системы значеній v_k, отличной отъ этой, каждое x_i, съ соотвѣтственнымъ y_i будутъ имѣть только одно значеніе.*

Вся совокупность всѣхъ возможныхъ значеній p комплексныхъ величинъ представляетъ разнообразіе (variété, Mannigfaltichkeit) степени $2p$: число всѣхъ этихъ значеній есть ∞^{2p}; число же тѣхъ, которыя приводятъ точки $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ на присоединенную кривую перваго рода, будетъ только ∞^{2p-4}. Въ самомъ дѣлѣ, для того, чтобы p точекъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ лежали на кривой $\varphi(\overset{m-2}{x},\ \overset{n-2}{y})=0$, необходимо, чтобы былъ опредѣлитель

$$\left| \varphi_j(\overset{m-2}{x_i},\ \overset{n-2}{y_i}) \right| = 0, \qquad (7)$$

ибо только тогда по § 52 можно будетъ построить такую кривую $\varphi(\overset{m-2}{x},\ \overset{n-2}{y})=0$, на которой находились бы всѣ эти точки; квадратъ же этого опредѣлителя будетъ симметрическая функція паръ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, и потому можетъ быть[1]) выраженъ чрезъ $\overset{p}{\underset{1}{v_k}}$; отсюда одно соотношеніе между этими величинами; далѣе, такъ какъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ кромѣ того удовлетворяютъ еще основному уравненію

$$F(\overset{m}{x_i}, \overset{n}{y_i}) = 0, \qquad (8)$$

а, слѣд., вся совокупность этихъ точекъ уравненію

$$\prod_{i=1}^{i=p} F(\overset{m}{x_i}, \overset{n}{y_i}) = 0, \qquad (9)$$

[1]) Какъ увидимъ ниже.

первая часть котораго, какъ симметрическая функція паръ $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$, можетъ быть выражена чрезъ величины $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$; то отсюда другое соотношеніе между этими величинами; но какъ для комплексныхъ величинъ эти уравненія распадаются каждое на два, то всего будемъ имѣть 4 условія; каждое же условіе отнимаетъ единицу отъ показателя степени разнообразія; слѣд., эта степень будетъ $2p-4$, что и требовалось доказать.

Итакъ при $\overset{p}{\underset{1}{v_k}}$ постоянныхъ и $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ будутъ постоянны. Если же измѣнимъ безконечно-мало нѣкоторыя изъ величинъ v_k, то необходимо должны измѣниться и лѣвыя части равенствъ (4), слѣд., нѣкоторые изъ интеграловъ лѣвыхъ частей, что возможно опять лишь, когда измѣнятся хотя нѣкоторыя изъ величинъ $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$. Такимъ образомъ эти величины (а слѣд., и имъ отвѣчающія $\overset{p}{\underset{1}{y_i}}$) сохраняютъ свое значеніе, когда $\overset{p}{\underset{1}{v_k}}$ сохраняютъ свое значеніе, и измѣняются съ измѣненіемъ этихъ послѣднихъ величинъ; слѣд., $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$ (а слѣд., и соотвѣтственныя $\overset{p}{\underset{1}{y_i}}$) суть *функціи* отъ $\overset{p}{\underset{1}{v_k}}$, и притомъ *однозначныя*, ибо каждой системѣ значеній величинъ $\overset{p}{\underset{1}{v_k}}$ отвѣчаетъ, какъ сейчасъ видѣли, *одна опредѣленная система* значеній $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$, за исключеніемъ того случая, когда точки $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ данною системою значеній $\overset{p}{\underset{1}{v_k}}$ приводятся на присоединенную кривую (6) перваго рода, когда они остаются неопредѣленными, что составляетъ исключительный случай. Въ разсматриваніи предѣловъ интеграловъ перваго рода, какъ функцій суммъ ихъ значеній, и состоитъ *обращеніе Абелевыхъ интеграловъ;* задача Якоби состоитъ въ отысканіи аналитическихъ выраженій для этихъ предѣловъ интеграловъ чрезъ суммы ихъ значеній, т. е. $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$ чрезъ $\overset{p}{\underset{1}{v_k}}$.

Въ частномъ случаѣ, когда за $\overset{p}{\underset{1}{(\alpha_i, y_{\alpha_i})}}$ принимаются фундаментальныя точки системы, мы эти суммы будемъ обозначать чрезъ u_k, такимъ образомъ:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}} = u_k. \quad (k=1, 2, 3\ldots p) \tag{10}$$

Въ томъ исключительномъ случаѣ, когда система значеній $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$ будетъ такова, что $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ будутъ всѣ удовлетворять уравненію

$$\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0, \tag{11}$$

сумма лѣвой части равенства (10) можетъ быть приведена къ суммѣ такихъ p интеграловъ, въ одномъ изъ которыхъ верхній предѣлъ будетъ равенъ нижнему, такъ что этотъ интегралъ, какъ равный нулю, выпадетъ изъ суммы и $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$ выразятся такимъ образомъ суммою только $p-1$ интеграловъ, и этого можно достичь многими способами. Въ самомъ дѣлѣ, если точки $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ лежатъ на кривой (11), то всегда можно найти другую такую функцію

$$\varphi'_l(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}), \tag{12}$$

которая будетъ обращаться въ нуль въ остальныхъ $p-2$ нуляхъ функціи $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ и еще въ одной изъ фундаментальныхъ точекъ, напр., (a_l, b_l); но тогда функція

$$z = \frac{\varphi'(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})}{\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})} \tag{13}$$

будетъ обращаться въ ∞^1 только въ p точкахъ $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$, а въ нуль 0^1 въ точкѣ (a_l, b_l) и еще въ $p-1$ другихъ точкахъ $\overset{p-1}{\underset{1}{(x'_i, y'_i)}}$; а въ такомъ случаѣ по теоремѣ Абеля будетъ:

$$\sum_{i=1}^{i=l-1} \overset{x_i}{\underset{x'_i}{\mathrm{I}_h}} + \overset{x_l}{\underset{a_l}{\mathrm{I}_h}} + \sum_{i=l+1}^{i=p} \overset{x_i}{\underset{x'_i}{\mathrm{I}_h}} = 0, \tag{14}$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} = \sum_{i=1}^{i=l-1} \overset{x'_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} + \overset{a_l}{\underset{a_l}{\mathrm{I}_h}} + \sum_{i=l+1}^{i=p} \overset{x'_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}}; \tag{15}$$

или, выбрасывая направо интегралъ, котораго оба предѣла равны:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} = \sum_{i=1}^{i=l-1} \overset{x'_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} + \sum_{i=l+1}^{i=1} \overset{x'_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}}, \tag{16}$$

откуда и слѣдуетъ сказанное.

97. Предыдущее опредѣленіе $\overset{p}{\underset{1}{x}}_i$ функціями $\overset{p}{\underset{1}{u}}_k$ посредствомъ уравненій (10) равносильно опредѣленію ихъ системою дифференціальныхъ уравненій, получаемыхъ чрезъ дифференцированіе (10) пред. §, и дополнительными условіями, что при $\overset{p}{\underset{1}{u}}_k=0$ будетъ $x_i=a_i$ $(y_i=b_i)$ $(i=1,2,3\ldots p)$. Дифференцируя это уравненіе, имѣя въ виду (1) § 75, мы будемъ имѣть такую систему дифференціальныхъ уравненій:

(1) $$\sum_{i=1}^{i=p}\varphi_k(\overset{m-2}{x_i},\overset{n-2}{y_i})\frac{dx_i}{\dfrac{\partial F(x_i,y_i)}{\partial y_i}}=du_k,$$

гдѣ y_i значенія y при $x=x_i$. Эта система опредѣляетъ $\overset{p}{\underset{1}{x}}_i$ какъ функціи отъ $\overset{p}{\underset{1}{u}}_k$ при условіи, что при $\overset{p}{\underset{1}{u}}_k=0$ будетъ $x_i=a_i$ $(y_i=b_i)$ $[i=1,2,3\ldots p]$. Рѣшая эти уравненія по $\dfrac{dx}{\dfrac{\partial F(x_i,y_i)}{\partial y_i}}$, найдемъ, что

(2) $$dx_i=(-1)^{i-1}\frac{\partial F(x_i,y_i)}{\partial y_i}\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^{k-1}\frac{D_{ki}}{D}du_k,$$

гдѣ

(3) $$D=\begin{vmatrix}\varphi_1(x_1,y_1) & \varphi_1(x_2,y_2) & \ldots & \varphi_1(x_p,y_p)\\ \varphi_2(x_1,y_1) & \varphi_2(x_2,y_2) & \ldots & \varphi_2(x_p,y_p)\\ \varphi_3(x_1,y_1) & \varphi_3(x_2,y_2) & \ldots & \varphi_3(x_p,y_p)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \varphi_p(x_1,y_1) & \varphi_p(x_2,y_2) & \ldots & \varphi_p(x_p,y_p)\end{vmatrix},$$

а D_{ki} миноръ, получающійся отсюда чрезъ вычеркиваніе k-ой строки и i-го столбца. Изъ этой формулы видно, что $\overset{p}{\underset{1}{x}}_i$ будутъ голоморфными функціями отъ $\overset{p}{\underset{1}{u}}_k$, пока не будетъ $D=0$, что случится, когда нѣкоторыя изъ паръ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})$ сдѣлаются равными, или когда точки $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})$

придутъ на кривую $\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})=0$; въ послѣднемъ случаѣ мы имѣемъ уже разсмотрѣнный случай неопредѣленности [см. § 96]; если же дѣлаются равными нѣкоторыя изъ $\overset{p}{\underset{1}{x}}_i$, и соотвѣтственныя y_i, — ибо $D=0$ и въ этомъ послѣднемъ случаѣ, такъ какъ нѣкоторые изъ столбцевъ дѣлаются между собою равными, — то голоморфность не прекратится все-таки для симметрическихъ функцій паръ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})$, напр.,

$$S(\overset{p}{\underset{1}{x_j,y_j}}). \tag{4}$$

Въ самомъ дѣлѣ, беря отъ этой функціи частную производную по независимой перемѣнной u_k, отъ которой она зависитъ чрезъ посредство $(\overset{p}{\underset{1}{x_j,y_j}})$, и имѣя въ виду, что по (2)

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_k}=(-1)^{i+k-2}\frac{\partial F(x_i,y_i)}{\partial y_i}\cdot\frac{D_{ki}}{D}, \tag{5}$$

а полная производная $S(\overset{p}{\underset{1}{x_j,y_j}})$ по x_i будетъ:

$$\left(\frac{\partial S(\overset{p}{\underset{1}{x_j,x_j}})}{\partial x_j}\right)=\frac{1}{\dfrac{\partial F(x_i,y_i)}{\partial y_i}}\left[\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{\partial S}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right], \tag{6}$$

мы будемъ имѣть:

$$\frac{\partial S(\overset{p}{\underset{1}{x_j,y_j}})}{\partial u_k}=\frac{(-1)^{k-1}}{D}\sum_{i=1}^{i=p}(-1)^{i-1}D_{ki}\left[\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{\partial S}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right]; \tag{7}$$

входящая сюда сумма представляетъ опредѣлитель, получающійся изъ D чрезъ замѣну элементонъ k-ой строки соотвѣтственно чрезъ

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{\partial S}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

для $i=1,2,\ldots p$, а потому она будетъ обращаться въ нуль того же порядка, какъ и D, когда нѣкоторыя изъ паръ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})$ сдѣлаются между собою равными; слѣд., частныя производныя отъ $S(\overset{p}{\underset{1}{x_j,y_j}})$ по u_k останутся конечными и опредѣленными, если только точки $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})$ не придутъ при этомъ на присоединенную кривую перваго рода, когда D будетъ нулемъ высшаго порядка, чѣмъ эта сумма, и, слѣд., эти частныя производныя обратятся въ безконечность: мы будемъ опять тогда имѣть вышеупомянутый случай непредѣленности. Отсюда же будетъ слѣдовать однозначность и непрерывность функціи S отъ $\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_k$. Въ частности и суммы $\sum_{i=1}^{i=p} x_i^{\lambda}$ будутъ однозначными, конечными и непрерывными функціями перемѣнныхъ $\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_k$, какъ симметрическія функціи $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$; отсюда же слѣдуетъ, что $\overset{p}{\underset{1}{x}}{}_i$ будутъ корнями уравненія степени p:

$$(8)\qquad \psi_0(\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_k)x^p+\psi_1(\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_k)x^{p-1}+\cdots+\psi_{p-1}(\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_k)x+\psi_p(\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_k)=0,$$

гдѣ $\psi_0(\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_k),\ldots\psi_p(\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_k)$ однозначныя, конечныя и непрерывныя функціи перемѣнныхъ $\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_k$, обращающіяся всѣ заразъ въ нуль для тѣхъ системъ значеній $\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_k$, которыя приводятъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ на кривую $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})=0$, когда наступаетъ случай неопредѣленности. Эти функціи $\psi_l(\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_k)$ называются *Абелевыми*. Общнѣе, если будетъ

$$(9)\qquad z=\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)},$$

то симметрическія функціи результатовъ вставки паръ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ вмѣсто (x, y), будучи однозначными функціями величинъ $\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_k$ чрезъ посредство этихъ паръ величинъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, будутъ тоже *Абелевыми функціями*. Значенія такой функціи z въ точкахъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ опять будутъ корнями уравненія степени p, коэффиціенты въ которомъ будутъ Абелевы функціи.— Замѣтимъ еще, что на основаніи формулы (16) § 52 равенство (2) настоящаго § можетъ быть такъ представлено:

$$(10)\qquad dx_i=\frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial y_i}\sum_{k=1}^{k=p}\varphi_i(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}})du_k,$$

(принимая во вниманіе перестановку столбцевъ со строками). Если точка (x_i, y_i) приходитъ въ положеніе (a_l, b_l), то (2) обращается въ такое:

$$dx_i=\frac{\partial F(a_l, b_l)}{\partial b_l}\,du_k, \qquad (11)$$

ибо въ этомъ случаѣ D приводится къ $(-1)^{l+i-2}D_{li}$, и потому всѣ прочіе D_{ki} къ нулю. Отсюда по сравненіи съ (10) для этого случая выходитъ, что

$$\varphi_i(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}})=0 \qquad (12)$$

при $x_i=a_l$, $y_i=b_l$, и $k\neq l$, и

$$\varphi_i(a_l, b_l; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}})=1 \qquad (13)$$

при $x_i=a_l$, $y_i=b_l$. Изъ (5) (или же изъ (10)) слѣдуетъ, что

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_k}=\frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial y_i}\varphi_i(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}). \qquad (14)$$

98. Суммы интеграловъ второго и третьяго рода, взятыхъ отъ какой либо обыкновенной точки (x_0, y_0) для точекъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, отвѣчающихъ верхнимъ предѣламъ интеграловъ перваго рода, входящихъ въ равенства (10) § 96, опредѣляющихъ перемѣнныя u_h, т. е. суммы:

$$\sum_{i=1}^{i=p}\overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_k, \quad (k=1, 2, 3\ldots p) \qquad (1)$$

также

$$\sum_{i=1}^{i=p}\overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_{\xi}, \qquad (2)$$

и

$$\sum_{i=1}^{i=p}\overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}_{\xi\eta}, \qquad (3)$$

гдѣ ξ и η означаютъ параметры, какъ симметрическія функціи верхнихъ предѣловъ интеграловъ, будутъ функціями перемѣнныхъ $\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h$ чрезъ посредство величинъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, и притомъ (1) и (2) изъ нихъ однозначныя, т. е. получающія одно только значеніе для данной системы значеній перемѣнныхъ $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, послѣднія же для каждой системы будутъ имѣть безчисленное множество значеній, разнящихся между собою на кратное $2\pi i$. Въ самомъ дѣлѣ, если перемѣнныя $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ вернутся къ своимъ прежнимъ значеніямъ, то и $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ вернутся къ своимъ значеніямъ, или перейдутъ одни въ другія, но такъ, что система ихъ останется та же, измѣниться можетъ только порядокъ, — послѣднее можетъ случиться, когда $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ при своемъ измѣненіи перейдутъ чрезъ такія значенія, для которыхъ нѣкоторые изъ корней уравненія (4) пред. § сдѣлаются между собою равными, — но измѣненіе порядка предѣловъ не можетъ измѣнить такихъ суммъ, какъ (1) и (2), и можетъ измѣнить лишь на

(4) $$2q\pi i,$$

гдѣ q какое либо цѣлое, положительное или отрицательное число, такія суммы, какъ (3), если которые нибудь изъ путей интегрированія переходили при этомъ чрезъ которую нибудь изъ точекъ (ξ, y_ξ) или (η, y_η), отвѣчающихъ параметрамъ, въ которыхъ эти интегралы обращаются логариѳмически въ безконечность. Мы будемъ называть суммы (1) и (2) *Абелевыми трансцендентными второго рода* и обозначать ихъ по Вейерштрассу такимъ образомъ:

(5) $$\sum_{i=1}^{i=p} \prod_{x_0}^{x_i}{}_k = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k, \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots p)$$

(6) $$\sum_{i=1}^{i=p} \prod_{x_0}^{x_i}{}_\xi = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi;$$

а суммы (3) *Абелевыми трансцендентными третьяго рода*, и означать такъ:

(7) $$\sum_{i=1}^{i=p} \mathrm{III}_{x_0}^{x_i}{}_{\xi,\eta} = \Pi_{\xi,\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}).$$

Совершая операцію D_ξ надъ этимъ послѣднимъ равенствомъ, будемъ имѣть въ силу (14) § 75 и (6) настоящаго:

(8) $$D_\xi \Pi_{\xi,\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi.$$

Наоборотъ, въ силу (15) § 75 и (7) настоящаго изъ (6) чрезъ интегрированіе по ξ получимъ:

$$\Pi_{\xi,\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \int_\eta^\xi J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi \frac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}. \tag{9}$$

По (7) § 73 будемъ имѣть также:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi = \sum_{k=1}^{k=p} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k + \sum_{i=1}^{i=p} P_{x_i, x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}). \tag{10}$$

99. Абелева трансцендентная второго рода, опредѣляемая равенствомъ (5) пред. §, а слѣд., и отличающаяся отъ нея на постоянную

$$C_k + J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k \tag{1}$$

обращается въ ∞^1, какъ

$$\left.\frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x - a_k}\right|_{x = a_k} \tag{2}$$

по (6) § 70 всякій разъ, какъ перемѣнныя $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ получаютъ такія значенія, для которыхъ одна изъ точекъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ приходитъ въ совпаденіе съ точкою (a_k, b_k). Это будетъ всегда по § 96, когда система значеній $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ приводитъ точки $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ на присоединенную кривую перваго рода, или что то же, какъ мы тамъ видѣли, когда $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ приводятся къ суммамъ $p-1$ интеграловъ перваго рода. Для всѣхъ другихъ значеній $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ это будетъ функція конечная и непрерывная своихъ аргументовъ, и, какъ видѣли въ пред. §, однозначная.—Абелева трансцендентная второго рода, опредѣляемая равенствомъ (6) пред. §, будетъ таковою для всѣхъ системъ значеній перемѣнныхъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, за исключеніемъ тѣхъ, которыя приводятъ нѣкоторыя точки $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ въ совпаденіе съ точкою ξ, y_ξ, ибо тогда одинъ изъ членовъ суммы въ (6) пред. § будетъ обращаться въ ∞^1, какъ

$$(3)\qquad \left.\frac{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}{x-\xi}\right|_{x=\xi},$$

какъ то слѣдуетъ изъ (5) § 70 и слѣд. §§. Въ этомъ легко убѣдиться и изъ формулы (10) пред. §: въ самомъ дѣлѣ, какъ (3) будетъ при $x_i = \xi$ обращаться одинъ членъ послѣдней суммы по § 65 и (4) § 59 (гдѣ нужно переставить x и ξ) и по тому же § и (8) § 58 въ точкѣ $(\overset{p}{\underset{1}{a_k, b_k}})$, какъ

$$(4)\qquad -\varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\left.\frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x_i - a_k}\right|_{x=a_k},$$

но также точно, только со знакомъ $+$, обращается въ безконечность членъ первой суммы, содержащій $J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k$, тогда какъ другіе остаются конечными; слѣд., въ этихъ точкахъ $(\overset{p}{\underset{1}{a_k; b_k}})$ функція $J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi$ будетъ оставаться конечною.

Что же касается до функціи третьяго рода, то она будетъ вмѣстѣ съ однимъ изъ членовъ суммы въ (7) пред. § обращаться въ безконечность, какъ

$$(5)\qquad -\log(x_i - \xi)_{x_i=\xi}$$

для всякой системы значеній перемѣнныхъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, которая приводитъ (x_i, y_i) въ точку (ξ, y_ξ), и какъ

$$(6)\qquad \log(x_j - \eta)_{x_j=\eta}$$

для всякой системы значеній перемѣнныхъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, приводящей точку (x_j, y_j) въ точку (η, y_η) по § 70.

100. Если въ формулахъ (10) § 96 точки $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ опишутъ какіе либо сомкнутые пути, приводящіеся къ извѣстной послѣдовательности путей A_j и B_j $(j = 1, 2 \ldots p)$, то эти равенства превратятся въ такія:

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{i=p} \int_{a_i}^{x_i} \mathrm{I}_k = u_k + \sum_{j=1}^{j=p}(m_j\omega_{kj} + n_j\omega'_{kj}),$$

гдѣ налѣво $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$ будутъ имѣть тѣ же значенія, какъ и въ (10) § 96, но пути интегрированія будутъ уже другіе, составленные изъ прежнихъ и тѣхъ сомкнутыхъ путей, которые описали точки $(\overset{p}{\underset{1}{x_i; y_i}})$. Симметрическія алгебраическія функціи отъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, какъ, напр.,

$$\sum_{i=1}^{i=p}\frac{\psi(x_i, y_i)}{\chi(x_i, y_i)} = Ab(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}), \qquad (2)$$

какъ мы ихъ теперь означимъ, производя это обозначеніе отъ ихъ названія „Абелевы", отъ этого не измѣнятся, и, слѣд., будемъ имѣть:

$$Ab\Big(u_h + \sum_{j=1}^{j=p}\overset{p}{\underset{1}{(m_j\omega_{hj} + n_j\omega'_{hj})}}\Big) = Ab(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}). \qquad (3)$$

Итакъ Абелевы функціи будутъ обладать періодичностью перваго рода, и именно будутъ $2p$-періодическими функціями своихъ аргументовъ, ибо каждое $\overset{p}{\underset{1}{m_j}}$ и $\overset{p}{\underset{1}{n_j}}$ можетъ быть и нулемъ, и единицей.

Что же касается до Абелевыхъ трансцендентныхъ второго и третьяго рода, то тогда опредѣляющія ихъ по (5) и (7) § 98 суммы обратятся въ такія соотвѣтственно:

$$\sum_{i=1}^{i=p}\int_{x_0}^{x_i}\mathrm{II}_k + \sum_{j=1}^{j=p}(m_j\eta_{kj} + n_j\eta'_{kj}) \qquad (k = 1, 2 \ldots p) \qquad (4)$$

и

$$\sum_{i=1}^{i=p}\int_{x_0}^{x_i}\mathrm{III}_{\xi\eta} + \sum_{j=1}^{j=p}(m_j\zeta_j + n_j\zeta'_j) + 2q\pi i, \qquad (5)$$

гдѣ согласно § 88 положено для краткости:

$$\zeta_j = \int_{(A_j)}\mathrm{III}_{\xi\eta}, \qquad \zeta'_j = \int_{(B_j)}\mathrm{III}_{\xi\eta}, \qquad (6)$$

причемъ первые члены здѣсь тѣ же самые, какъ въ (5) и (7) § 98. Итакъ, когда $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ получаютъ приращенія

$$\tilde{\omega}_h = \sum_{j=1}^{j=p}(m_j\omega_{hj} + n_j\omega'_{hj}), \qquad (7)$$

то Абелевы трансцендентныя второго рода *основныя* (соотвѣтственно основнымъ интеграламъ второго рода) получатъ приращенія:

$$(8) \qquad \tilde{\eta}_{1k} = \sum_{j=1}^{j=p} (m_j \eta_{1kj} + n_j \eta'_{1kj}),$$

а интегралы третьяго рода приращенія:

$$(9) \qquad \tilde{\zeta} = \sum_{j=1}^{j=p} (m_j \zeta_j + n_j \zeta'_j) + 2q\pi i,$$

причемъ m_j, n_j $(j = 1, 2 \ldots p)$ во всѣхъ формулахъ (7), (8) и (9) имѣютъ одинаковое значеніе, такъ что будемъ имѣть:

$$(10) \qquad J(\overset{p}{\underset{1}{u_h + \omega_h}})_k = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k + \tilde{\eta}_{1k};$$

$$(11) \qquad \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h + \omega_h}}) = \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) + \tilde{\zeta}.$$

Эти функціи, слѣд., обладаютъ періодичностью *второго рода* (по терминологіи Эрмита).

Переходя къ общей Абелевой трансцендентной второго рода, съ параметромъ (ξ, y_ξ), для которой имѣетъ мѣсто равенство (10) § 98, замѣтимъ, что, такъ какъ послѣдняя сумма второй части его есть раціональная симметрическая функція величинъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, слѣд., Абелева функція перемѣнныхъ $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, то она вернется къ своему значенію, когда $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ измѣнятся на $\overset{p}{\underset{1}{\omega_h}}$, такъ что все измѣненіе этой трансцендентной отъ измѣненія $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ на $\overset{p}{\underset{1}{\omega_h}}$, которое означимъ чрезъ $\tilde{\eta}_{1\xi}$, такъ что будетъ

$$(12) \qquad \tilde{\eta}_{1\xi} = \sum_{j=1}^{j=p} (m_j \eta_{1\xi j} + n_j \eta'_{1\xi j}),$$

выразится такою формулой:

$$(13) \qquad \tilde{\eta}_{1\xi} = \sum_{k=1}^{k=p} \varphi_k(\xi, y_\xi) \tilde{\eta}_{1k}.$$

Давая здѣсь m_j, n_j значенія 0, 1, будемъ имѣть:

$$(14) \qquad \eta_{1\xi j} = \sum_{k=1}^{k=p} \varphi_k(\xi, y_\xi) \eta_{1kj};$$

$$(15) \qquad \eta'_{1\xi j} = \sum_{k=1}^{k=p} \varphi_k(\xi, y_\xi) \eta'_{1kj}.$$

101. Частныя производныя Абелевыхъ трансцендентныхъ второго и третьяго рода по $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$ такъ найдутся. Дифференцируя (5) § 98 по u_k, имѣя въ виду, что правая часть зависитъ отъ u_k чрезъ посредство $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$, по (5) § 75 мы получимъ:

$$\frac{\partial J(\overset{p}{\underset{1}{u_j}})_h}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{i=p} \overline{E}_h(x_i, y_i) \frac{\dfrac{\partial x_i}{\partial u_k}}{\dfrac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial y_i}}; \qquad (1)$$

но по (14) § 97 имѣемъ:

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_k} = \frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial y_i} \varphi_i(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}); \qquad (2)$$

внося это въ предыдущее, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial J(\overset{p}{\underset{1}{u_j}})_h}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{i=p} \varphi_i(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}) \overline{E}_h(x_i, y_i). \qquad (3)$$

Переходя къ (7) § 98, замѣтимъ, что

$$\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_j}}) = \sum_{i=1}^{i=p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{i=p} \overset{\xi}{\underset{\eta}{\mathrm{III}}}_{x_i, x_0}; \qquad (4)$$

— по характеристическому свойству нормальнаго интеграла третьяго рода не измѣняться отъ перестановки параметровъ съ аргументами; слѣд., дифференцируя по u_k, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_j}})}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial}{\partial x_i} \overset{\xi}{\underset{\eta}{\mathrm{III}}}_{x_i, x_0} \frac{\partial x_i}{\partial u_k}; \qquad (5)$$

а это по (2) настоящаго § и (14) § 75 принимаетъ такой видъ:

$$\frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_j}})}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{i=p} \varphi_i(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) \overset{\xi}{\underset{\eta}{\Pi}}_{x_i}. \qquad (6)$$

Съ помощію теоремы Абеля этому выраженію можно будетъ дать другой видъ, какъ показалъ Нётеръ.

102. Мы видѣли (въ § 65), что всегда можно построить такую функцію, однозначную на Римановой поверхности для $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$, которая будетъ обращаться въ ∞^1 въ $p+1$ произвольно-выбранныхъ точкахъ этой поверхности, пусть:

$$(1) \qquad (x,y), \quad (\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}});$$

изъ нулей ея въ такомъ случаѣ только одинъ можетъ быть заданъ произвольно, и тогда по нему будутъ опредѣлены всѣ остальные. Если этотъ одинъ будетъ (ξ, y_ξ), то остальные означимъ чрезъ $(\overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}})$, такъ что полная система нулей этой функціи представится рядомъ:

$$(2) \qquad (\xi, y_\xi), \quad (\overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}});$$

если этотъ одинъ будетъ (η, y_η), то остальные означимъ въ этомъ случаѣ чрезъ $(\overset{p}{\underset{1}{\eta_i, y_{\eta_i}}})$, такъ что полная система нулей будетъ въ этомъ случаѣ:

$$(3) \qquad (\eta, y_\eta), \quad (\overset{p}{\underset{1}{\eta_i, y_{\eta_i}}}).$$

Системы нулей функціи, (2) и (3), такимъ образомъ опредѣленныхъ по первому изъ нихъ и ея безконечностямъ (1), *Нётеръ* на основаніи геометрическихъ разсматриваній называетъ *корезидуальными* (равно остаточными); *Клейнъ* называетъ ихъ *эквивалентными*, такъ какъ въ нѣкоторыхъ вопросахъ одна система нулей можетъ замѣнить другую. Мы будемъ держаться послѣдняго термина, какъ независящаго отъ геометрическихъ разсматриваній.

Функція, имѣющая систему (1) своими безконечностями, а систему (2) своими нулями, по § 65 будетъ:

$$(4) \qquad P_{z\xi}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}),$$

если z считать за независимую перемѣнную; точно также функція, имѣющая систему (1) своими безконечностями, а систему (3) своими нулями, будетъ:

$$(5) \qquad P_{z\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}).$$

Частное этихъ двухъ функцій:

$$\frac{P_{z\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}{P_{z\xi}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})} \tag{6}$$

будетъ функціей, которая остается конечною въ точкахъ (1), и именно въ точкѣ (x, y) равна единицѣ по (27) § 55 и (5) § 56; въ точкахъ (3) она обращается въ нуль: 0^1, и въ точкахъ (2) въ безконечность ∞^1, точь въ точь, какъ функція

$$P_{z\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}}); \tag{7}$$

слѣд., обѣ функціи (7) и (6) могутъ различаться лишь постояннымъ множителемъ, т. е. будетъ:

$$P_{z\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}}) = c\,\frac{P_{z\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}{P_{z\xi}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}. \tag{8}$$

Постоянную c можно опредѣлить двоякимъ способомъ. Во первыхъ, положимъ $z=x$, $y_z=y$; тогда дробный множитель второй части обратится, какъ сейчасъ было сказано, въ единицу, и мы получимъ:

$$c = P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}}). \tag{9}$$

Съ другой стороны, освободивъ равенство (8) отъ знаменателя, такъ что оно приметъ такой видъ:

$$P_{z\xi}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}).P_{z\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}}) = cP_{z\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}), \tag{10}$$

положимъ

$$z = \xi + \Delta\xi; \tag{11}$$

тогда по (4) § 59 будетъ:

$$\text{пред. } \Delta\xi\, P_{\xi+\Delta\xi,\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}})\Big|_{\Delta\xi=0} = -\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}, \tag{12}$$

(ибо $\xi - \xi - \Delta\xi = -\Delta\xi$), и по (1) того же §:

$$\text{пред. } \frac{P_{\xi+\Delta\xi,\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}{\Delta\xi}\Big|_{\Delta\xi=0} = \frac{dP_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}{d\xi} \tag{13}$$

(ибо $P_{\xi\eta} = -P_{\eta\xi}$); потому, послѣ подстановки изъ (11) въ (10) и перехода къ предѣлу ($\Delta\xi = 0$), изъ (10) мы получимъ такое:

$$\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi} \cdot \frac{dP_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}{d\xi} = cP_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}), \tag{14}$$

откуда найдемъ:

$$c = \frac{D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}{P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})} = D_\xi \log\left(P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})\right), \tag{15}$$

— имѣя въ виду значеніе символа D_ξ.

Сравнивая (9) и (15), получимъ:

$$P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}}) \,.\, P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) = D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}). \tag{16}$$

Лѣвая часть этого равенства есть симметрическая функція системъ (1) и (2): отъ перестановки ихъ между собою она не измѣняется; поэтому должно быть:

$$D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) = D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}}). \tag{17}$$

Это равенство выражаетъ, въ другой только формѣ, предложеніе о перемѣнѣ параметра съ аргументами въ присоединенныхъ функціяхъ второго рода, какъ и равенство (1) § 67. Обѣ части этого послѣдняго равенства лишь формально зависятъ отъ $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$, какъ тамъ было замѣчено; а потому оно не нарушится, если вмѣсто этихъ точекъ возьмемъ для правой части $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, а для лѣвой $(\overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}})$; тогда оно приметъ такой видъ:

$$\begin{aligned} &D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) + \sum_{k=1}^{k=p} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) \overline{E}_{x_k}(\xi, y_\xi) = \\ &= D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}}) + \sum_{k=1}^{k=p} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}}) \overline{E}_{\xi_k}(x, y), \end{aligned} \tag{18}$$

гдѣ мы ввели подъ знакъ функціи $\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ фундаментальныя ихъ точки, такъ какъ онѣ теперь неодинаковыя (и переставили лѣвую часть

съ правой). На основаніи (17) это равенство приводится къ такому:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k=p} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) \overline{E}_{x_k}(\xi, y_\xi) = \\ &= \sum_{k=1}^{k=p} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}}) \overline{E}_{\xi_k}(x, y). \end{aligned} \tag{19}$$

Присоединенныя функціи второго рода, входящія сюда, имѣя параметръ и аргументъ отличными отъ фундаментальныхъ точекъ, суть не что иное, какъ допускающія перемѣну параметра съ аргументомъ функціи этого же рода, какъ это слѣдуетъ изъ (8) § 67 въ примѣненіи къ тому случаю, когда точки $(\overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}})$ берутся за фундаментальныя (для второй части (19) этого §); а потому это равенство (19) можно и такъ представить:

$$\sum_{k=1}^{k=p} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) \overline{E}_{x_k}(\xi, y_\xi) = \sum_{k=1}^{k=p} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}}) \overline{E}_x(\xi_k, y_{\xi_k}). \tag{20}$$

Что касается до входящихъ сюда функцій $\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ и $\varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}})$, то онѣ выразятся чрезъ $\varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ и $\varphi_j(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})$ соотвѣтственно по способу § 52.

103. Если группы (1) и (2) пред. § взять нижними и верхними предѣлами Абелевыхъ интеграловъ перваго рода, то по теоремѣ Абеля будемъ имѣть:

$$\overset{\xi}{\underset{x}{\mathrm{I}_h}} + \sum_{i=1}^{i=p} \overset{\xi_i}{\underset{x_i}{\mathrm{I}_h}} = 0; \qquad (h = 1, 2, 3 \ldots p) \tag{1}$$

дифференцируя, получимъ отсюда:

$$\varphi_h(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \frac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}} + \sum_{i=1}^{i=p} \varphi_h(\overset{m-2}{\xi_i}, \overset{n-2}{y_{\xi_i}}) \frac{d\xi_i}{\dfrac{\partial F(\xi_i, y_{\xi_i})}{\partial y_\xi}} = 0; \tag{2}$$

рѣшая эту систему уравненій по $\dfrac{d\xi_k}{\dfrac{\partial F(\xi_k, y_{\xi_k})}{\partial y_{\xi_k}}}$, мы получимъ:

$$\frac{d\xi_k}{\dfrac{\partial F(\xi_k, y_{\xi_k})}{\partial y_{\xi_k}}} = -\frac{D'_k}{D'} \cdot \frac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}, \tag{3}$$

гдѣ D' есть опредѣлитель, получающійся изъ (3) § 97 чрезъ замѣну $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ чрезъ $(\overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}})$, а D'_k получается изъ D' чрезъ замѣну k-ого столбца столбцемъ изъ $\varphi_h(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})$. Но по (11) и (14) § 52 въ виду (16) его же:

(4) $$\frac{D'_k}{D} = \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}}):$$

вслѣдствіе этого (3) перепишется такъ:

(5) $$\frac{d\xi_k}{\dfrac{\partial F(\xi_k, y_{\xi_k})}{\partial y_{\xi_k}}} = -\varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}})\frac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}.$$

Замѣтивъ это, помножимъ обѣ части (20) пред. § на $\dfrac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}$, и проинтегрируемъ по ξ отъ η до ξ; тогда по (5) будемъ имѣть:

(6) $$\sum_{k=1}^{k=p}\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})\int_{\eta}^{\xi}\bar{E}_{x_k}(\xi, y_\xi)\frac{d\xi}{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}} = -\sum_{k=1}^{k=p}\int_{\eta_k}^{\xi_k}\bar{E}_{x}(\xi_k, y_{\xi_k})\frac{d\xi_k}{\dfrac{\partial F(\xi_k, y_{\xi_k})}{\partial y_{\xi_k}}},$$

или съ помощію сокращеннаго обозначенія интеграловъ второго рода:

(7) $$\sum_{k=1}^{k=p}\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})\overset{\xi}{\underset{\eta}{\Pi}}{}_{x_k} = -\sum_{k=1}^{k=p}\overset{\xi_k}{\underset{\eta_k}{\Pi}}{}_{x}.$$

104. Съ помощію этого равенства и можно дать иной видъ равенству (6) § 101. Вмѣсто (x, y) въ системѣ (1) § 102 возьмемъ (a_k, b_k), оставляя прочія безконечности безъ перемѣны; тогда обѣ эквивалентныя системы (2) и (3) того же § замѣнятся другими, которыя означимъ,

прибавивъ еще значекъ k впереди указателей; такимъ образомъ будемъ имѣть три слѣдующія эквивалентныя группы:

$$(a_k, b_k), \quad (\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}); \qquad (1)$$

$$(\xi, y_\xi), \quad (\overset{p}{\underset{1}{\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}}}}); \qquad (2)$$

$$(\eta, y_\eta), \quad (\overset{p}{\underset{1}{\eta_{ki}, y_{\eta_{ki}}}}); \qquad (3)$$

тогда по (7) пред. § будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{i=p}\varphi_i(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})\overset{\xi}{\underset{\eta}{\Pi}}{}_{x_i} = -\sum_{i=1}^{i=p}\overset{\xi_{ki}}{\underset{\eta_{ki}}{\Pi}}{}_{k}. \qquad (4)$$

На основаніи этого равенство (6) § 101 приметъ такой видъ:

$$\frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_k} = -\sum_{i=1}^{i=p}\overset{\xi_{ki}}{\underset{\eta_{ki}}{\Pi}}{}_{k}, \qquad (5)$$

что можно еще и такъ представить:

$$\frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_k} = C_k + \sum_{i=1}^{i=p}\overset{\eta_{ki}}{\underset{x_0}{\Pi}}{}_{k} - \Big(C_k + \sum_{i=1}^{i=p}\overset{\xi_{ki}}{\underset{x_0}{\Pi}}{}_{k}\Big), \qquad (6)$$

гдѣ C_k произвольная постоянная. По теоремѣ Абеля будемъ имѣть для рядовъ (1) и (2) эквивалентныхъ величинъ:

$$\overset{\xi}{\underset{a_k}{\mathrm{I}}}{}_{h} + \sum_{i=1}^{i=p}\overset{\xi_{ki}}{\underset{x_i}{\mathrm{I}}}{}_{h} = 0, \qquad (7)$$

и для рядовъ (1) и (3) таковыхъ же величинъ:

$$\overset{\eta}{\underset{a_k}{\mathrm{I}}}{}_{h} + \sum_{i=1}^{i=p}\overset{\eta_{ki}}{\underset{x_i}{\mathrm{I}}}{}_{h} = 0, \qquad (8)$$

для $h = 1, 2, 3 \dots p$. Придавая къ этимъ равенствамъ слѣдующее:

$$\sum_{i=1}^{i=p}\overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}{}_{h} = u_h, \qquad (9)$$

мы получимъ такія два:

$$\overset{\xi}{\underset{a_k}{\mathrm{I}}}_h + \sum_{i=1}^{i=p} \overset{\xi_{ki}}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}_h = u_h \tag{10}$$

и

$$\overset{\eta}{\underset{a_k}{\mathrm{I}}}_h + \sum_{i=1}^{i=p} \overset{\eta_{ki}}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}_h = u_h. \tag{11}$$

Если положить:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \overset{\xi_{ki}}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}_h = v_h^{(k)}, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{i=p} \overset{\eta_{ki}}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}_h = w_h^{(k)}, \tag{13}$$

то по (10) и (11) будетъ

$$v_h^{(k)} = u_h - \overset{\xi}{\underset{a_k}{\mathrm{I}}}_h = u_h + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \tag{14}$$

и

$$w_h^{(k)} = u_h - \overset{\eta}{\underset{a_k}{\mathrm{I}}}_h = u_h + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h. \tag{15}$$

Тогда по (5) § 98 будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \overset{\xi_{ki}}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k = J(\overset{p}{\underset{1}{v_h^{(k)}}})_k = J(u_h + \overset{\overset{p}{a_k}}{\underset{\underset{1}{x_0}}{\mathrm{I}}}_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k \tag{16}$$

и

$$\sum_{i=1}^{i=p} \overset{\eta_{ki}}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k = J(\overset{p}{\underset{1}{w_h^{(k)}}})_k = J(u_h + \overset{\overset{p}{a_k}}{\underset{\underset{1}{x_0}}{\mathrm{I}}}_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k. \tag{17}$$

Внося это въ (6), мы дадимъ выраженію частной производной отъ $\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ по u_k такой видъ:

$$\frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_k} = C_k + J(u_h + \overset{\overset{p}{a_k}}{\underset{\underset{1}{x_0}}{\mathrm{I}}}_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k - \left(C_k + J(u_h + \overset{\overset{p}{a_k}}{\underset{\underset{1}{x_0}}{\mathrm{I}}}_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k \right). \tag{18}$$

Это и есть то окончательное выраженіе этой производной, къ которому мы желали привести выраженіе этой частной производной; значеніе его увидимъ ниже. Оно показываетъ, это равенство, что частныя производныя функціи третьяго рода по перемѣннымъ u_k выражаются чрезъ трансцендентныя втораго рода.

105. Совершимъ надъ обѣими частями равенства (5) пред. § операцію D_ξ; тогда будемъ имѣть:

$$D_\xi \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_k} = -\sum_{i=1}^{i=p} \bar{E}_k(\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}}) \frac{D_\xi \xi_{ki}}{\dfrac{\partial F(\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}})}{\partial y_{\xi_{ki}}}}, \tag{1}$$

такъ какъ въ правой части только верхніе предѣлы зависятъ отъ ξ; но по (5) § 103 будетъ:

$$\frac{D_\xi \xi_{ki}}{\dfrac{\partial F(\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}})}{\partial y_{\xi_{ki}}}} = \frac{\dfrac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}{\dfrac{\partial F(\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}})}{\partial y_{\xi_{ki}}}} \cdot \frac{d\xi_{ki}}{d\xi} = -\varphi_i(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_{kj}, y_{\xi_{kj}}}}); \tag{2}$$

и потому (1) приметъ такой видъ:

$$D_\xi \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{i=p} \varphi_i(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_{kj}, y_{\xi_{kj}}}}) \bar{E}_k(\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}}). \tag{3}$$

Въ первой части этого равенства можно перемѣнить порядокъ дифференцированія по независимымъ перемѣннымъ u_k и ξ; тогда будемъ имѣть:

$$D_\xi \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_k} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left(D_\xi \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u}}) \right) = \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_{i=1}^{i=p} D_\xi \overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_{i=1}^{i=p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_\xi; \tag{4}$$

вносся это въ (3), получимъ:

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\sum_{i=1}^{i=p}\overset{x_i}{\underset{x_0}{\Pi}}{}_\xi = \sum_{i=1}^{i=p}\varphi_i(\xi, y_\xi;\, \xi_{kj} \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_{kj}})\overline{E}_k(\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}}). \tag{5}$$

Будемъ подводить здѣсь (ξ, y_ξ) къ (a_l, b_l); тогда система $(\xi_{kj} \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_{kj}})$ будетъ стремиться къ системѣ $(\xi_{lj} \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_{lj}})$, эквивалентной той же системѣ (1):

$$(a_k, b_k), \quad (x_j \overset{p}{\underset{1}{,}} y_j); \tag{6}$$

$$(a_l, b_l), \quad (\xi_{lj} \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_{lj}}), \tag{7}$$

а величины $(\overset{p}{\underset{1}{v_h^{(k)}}})$ къ величинамъ:

$$v_h^{(l)} = u_h - \overset{a_l}{\underset{a_k}{\mathrm{I}}}{}_h, \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots p) \tag{8}$$

какъ то слѣдуетъ изъ (14) пред. §; равенство же (5) настоящаго § обратится въ предѣлѣ въ такое:

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\sum_{i=1}^{i=p}\overset{x_i}{\underset{x_0}{\Pi}}{}_l = \sum_{i=1}^{i=p}\varphi_i(a_l, b_l;\, \xi_{lj} \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_{lj}})\overline{E}_k(\xi_{li}, y_{\xi_{li}}). \tag{9}$$

Но по (5) § 98 имѣемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=p}\overset{x_i}{\underset{x_0}{\Pi}}{}_l = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_l, \tag{10}$$

а по (3) § 101:

$$\sum_{i=1}^{i=p}\varphi_i(a_l, b_l;\, \xi_{lj} \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_{lj}})\overline{E}_k(\xi_{li}, y_{\xi_{li}}) = \frac{\partial J(\overset{p}{\underset{1}{v_h^{(l)}}})_k}{\partial v_l^{(l)}}, \tag{11}$$

гдѣ

$$v_h^{(l)} = \sum_{i=1}^{i=p}\overset{\xi_{li}}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}{}_h = u_h - \overset{a_l}{\underset{a_k}{\mathrm{I}}}{}_h. \tag{12}$$

Вносся изъ (10) и (11) въ (9), получимъ:

$$\frac{\partial J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_l}{\partial u_k} = \frac{\partial J(\overset{p}{\underset{1}{v_h^{(l)}}})_k}{\partial v_l^{(l)}}, \tag{13}$$

или въ виду (12):

$$\frac{\partial J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_l}{\partial u_k} = \frac{\partial J(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{a_l}{\underset{a_k}{\mathrm{I}}}{}_h)_k}{\partial u_l}. \tag{14}$$

Перемѣняя здѣсь u_h на $u_h + \overset{a_l}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}{}_h$, мы будемъ имѣть:

$$\frac{\partial J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_l}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}{}_h)_l}{\partial u_k} = \frac{\partial J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}{}_h)_k}{\partial u_l}. \tag{15}$$

Здѣсь ξ совершенно-произвольная величина. Это равенство говоритъ, что функціи:

$$J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}{}_h)_k \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots p) \tag{16}$$

суть частныя производныя по $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$ нѣкоторой функціи тѣхъ же перемѣнныхъ, а также и отличающіяся отъ нихъ на произвольныя постоянныя функціи

$$C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}{}_h)_k \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots p) \tag{17}$$

тоже будутъ частныя производныя по $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$ нѣкоторой другой функціи тѣхъ же перемѣнныхъ. Означивъ эту функцію, если она обращается въ нуль для $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} u_h^{(0)}$, чрезъ:

$$\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \xi), \tag{18}$$

будемъ имѣть:

$$(19)\qquad C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}{}_h)_k = \frac{\partial\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, \xi)}{\partial u_k}$$

и. слѣд.,

$$(20)\qquad d\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \xi) = \sum_{k=1}^{k=p} \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}{}_h)_k \Big) du_k.$$

Такъ какъ точка (ξ, y_ξ) совершенно произвольная, то вмѣсто нея можно взять точку (x_0, y_0); тогда получится частный видъ этой функціи перемѣнныхъ $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, который будемъ обозначать, опуская ξ, такъ что будетъ:

$$(21)\qquad d\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) = \sum_{k=1}^{k=p} \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k \Big) du_k.$$

Болѣе общая (20) можетъ быть легко сведена на эту частную. Въ самомъ дѣлѣ:

$$(22)\qquad \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}{}_h = \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h;$$

потому (20) приметъ такой видъ:

$$(23)\qquad \begin{aligned} d\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \xi) &= \sum_{k=1}^{k=p} \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k \Big) du_k = \\ &= \sum_{k=1}^{k=p} \Big(C_k + J(v_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k \Big) dv_k = d\Phi(v_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}), \end{aligned}$$

если положить:

$$(24)\qquad v_h = u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h; \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots p)$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$(25)\qquad \Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \xi) = \Phi(v_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) + C;$$

для опредѣленія C полагаемъ $u_h = u_h^{(0)}$; тогда, если

$$v_h^{(0)} = u_h^{(0)} - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h, \qquad (26)$$

будемъ имѣть:

$$0 = \Phi(v_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) + C; \qquad (27)$$

вычитая это изъ (25), получимъ:

$$\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \xi) = \Phi(v_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) - \Phi(v_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}), \qquad (28)$$

или, внося вмѣсто v_h и $v_h^{(0)}$ ихъ выраженія изъ (24) и (26):

$$\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \xi) = \Phi(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) - \Phi(u_h^{(0)} - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}). \qquad (29)$$

Изъ (21) слѣдуетъ:

$$\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) = \int \sum_{k=1}^{k=p} \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k \Big) du_k + C, \qquad (30)$$

гдѣ постоянная должна быть такъ опредѣлена, чтобы при $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} u_h^{(0)}$ и правая часть была бы равна нулю, какъ лѣвая. Изъ этого опредѣленія функціи $\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})$ легко выводятся главныя ея свойства, какъ увидимъ въ слѣдующей главѣ.

106. Помножая равенство (18) § 104 на du_k и суммируя по k отъ 1 до p, по (23) пред. § будемъ имѣть:

$$d\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = d\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \eta) - d\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \xi); \qquad (1)$$

отсюда, интегрируя, получаемъ:

$$\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) - \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}) = \Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \eta) - \Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \xi), \qquad (2)$$

или по (29) пред. §:

$$\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) - \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}) = \Phi(u_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) - \Phi(u_h^{(0)} - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) - \tag{3}$$
$$- \left(\Phi(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) - \Phi(u_h^{(0)} - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})\right).$$

Совершая операцію D_ξ надъ этимъ равенствомъ, будемъ имѣть:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi - J(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})_\xi = \tag{4}$$
$$= \sum_{k=1}^{k=p}\left\{\frac{\partial\Phi(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}{\partial u_k} - \frac{\partial\Phi(u_h^{(0)} - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}{\partial u_k^{(0)}}\right\}\varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}).$$

или, по (21) пред. §:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi - J(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})_\xi = \tag{5}$$
$$= \sum_{k=1}^{k=p}\left\{J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}}}{}_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k - J(u_h^{(0)} + \overset{p}{\underset{1}{\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}}}{}_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\right\}\varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}).$$

Если положить здѣсь $\xi = a_l$, $y_\xi = b_l$, то это равенство обращается въ тождество. Дѣйствительно, во второй части при этомъ предположеніи всѣ члены обратятся въ нуль, благодаря множителю $\varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})$, за исключеніемъ того, въ которомъ будетъ $k = l$, въ которомъ этотъ множитель обратится въ единицу; множитель же въ скобкахъ обратится въ $J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_l - J(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})_l$, какъ и лѣвая часть этого равенства.

107. Вернемся теперь къ формуламъ (4)—(6) § 94. Первое изъ этихъ равенствъ можно такъ представить:

$$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{I}}}{}_k + \sum_{i=1}^{i=p}\overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}{}_h - \sum_{i=1}^{i=p}\overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}{}_h = 0, \tag{1}$$

или, перенося вычитаемое въ другую часть:

$$\sum_{i=1}^{i=p}\overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}{}_k = \sum_{i=1}^{i=p}\overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}{}_k + \overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{I}}}{}_k = u_k + \overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{I}}}{}_k = u_k + v_k, \tag{2}$$

если положить

$$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{I}}}{}_k = v_k. \tag{3}$$

Въ равенствахъ (5) и (6) § 94 перемѣнимъ обозначеніе параметровъ x, x_0 на ξ, η, и затѣмъ разобьемъ каждый интегралъ подъ знакомъ суммы на два; будемъ имѣть:

$$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{II}}}{}_\xi + \sum_{i=1}^{i=p}\overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_\xi - \sum_{i=1}^{i=p}\overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_\xi = D_\xi \log\left(P_{\xi,\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})\right), \tag{4}$$

что по (6) § 98 и (2) настоящаго можно такъ представить:

$$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{II}}}{}_\xi + J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi - J(\overset{p}{\underset{1}{u_h + v_h}})_\xi = D_\xi \log\left(P_{\xi,\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})\right); \tag{5}$$

и точно также:

$$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{III}}}{}_{\xi\eta} + \sum_{i=1}^{i=p}\overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}_{\xi\eta} - \sum_{i=1}^{i=p}\overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}_{\xi\eta} = \log\left(\frac{P_{\xi,\eta'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}{P_{\eta,\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}\right), \tag{6}$$

или по (7) § 98 и (2) настоящаго:

$$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{III}}}{}_{\xi\eta} + \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) - \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h + v_h}}) = \log\left(\frac{P_{\xi,\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}{P_{\eta,\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}\right). \tag{7}$$

Но, полагая на минуту

$$\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}) + \Phi(u_h^{(0)} - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) - \Phi(u_h^{(0)} - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) = C_1, \tag{8}$$

по (3) пред. § будемъ имѣть:

$$\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = C_1 + \Phi\Big(u_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\Big|_1^p u_h^{(0)}\Big) - \Phi\Big(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\Big|_1^p u_h^{(0)}\Big) + 2q_1\pi i, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{\xi\eta}(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} v_h) = C_1 &+ \Phi\Big(u_h + v_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\Big|_1^p u_h^{(0)}\Big) - \\ &- \Phi\Big(u_h + v_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\Big|_1^p u_h^{(0)}\Big) + 2q_2\pi i,\end{aligned} \tag{10}$$

— такъ какъ значенія функцій $\Phi\Big(u_h^{(0)} - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\Big|_1^p u_h^{(0)}\Big)$ и $\Phi\Big(u_h^{(0)} - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\Big|_1^p u_h^{(0)}\Big)$, входящія въ обѣ формулы (9) и (10), могутъ разниться отъ входящихъ въ (8) на кратное $2\pi i$, какъ увидимъ дальше,—то, внося изъ (9) и (10) въ (7), будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{P_{\xi,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{P_{\eta,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}\right) &= 2q\pi i + \overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta} + \\ &+ \Phi\Big(u_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\Big|_1^p u_h^{(0)}\Big) - \Phi\Big(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\Big|_1^p u_h^{(0)}\Big) - \\ &- \Phi\Big(u_h + v_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\Big|_1^p u_h^{(0)}\Big) + \Phi\Big(u_h + v_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}\Big|_1^p u_h^{(0)}\Big).\end{aligned} \tag{11}$$

Переходя отъ логариөма къ числу, и имѣя въ виду, что $e^{2q\pi i} = 1$ при q цѣломъ, мы получимъ:

$$\frac{P_{\xi,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{P_{\eta,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})} = e^{\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta}} \cdot \frac{e^{\Phi\left(u_h + v_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\left|_1^p\right. u_h^{(0)}\right)} \cdot e^{\Phi\left(u_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\left|_1^p\right. u_h^{(0)}\right)}}{e^{\Phi\left(u_h + v_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\left|_1^p\right. u_h^{(0)}\right)} \cdot e^{\Phi\left(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\left|_1^p\right. u_h^{(0)}\right)}}. \tag{12}$$

Можно построить также функцію, которая въ $p+1$ точкахъ, изъ которыхъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ остаются прежнія, и въ точкѣ $(\alpha', y_{\alpha'})$ будетъ $=\infty^1$, и обращаться въ нуль 0^1 въ точкѣ (x',y'); тогда по теоремѣ Абеля будемъ имѣть:

$$\overset{\alpha'}{\underset{x'}{\mathrm{I}}}_k + \sum_{i=1}^{i=p} \overset{x_i}{\underset{\alpha'_i}{\mathrm{I}}}_k = 0, \tag{13}$$

откуда найдемъ, какъ выше:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \overset{\alpha'_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}_k = \sum_{i=1}^{i=n} \overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}_k + \overset{\alpha'}{\underset{x'}{\mathrm{I}}}_k = u_k - v_k + \tilde{\omega}_k, \tag{14}$$

— такъ какъ путь интегрированія можетъ быть другой, — гдѣ

$$\tilde{\omega}_k = \sum_{g=1}^{g=p}(m_g\omega_{kg} + n_g\omega'_{kg}), \tag{15}$$

и чрезъ теорему Абеля для интеграловъ третьяго рода въ этомъ случаѣ:

$$\overset{\alpha'}{\underset{x'}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta} + \sum_{i=1}^{i=p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}} - \sum_{i=1}^{i=p} \overset{\alpha'_i}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta} = \log\left(\frac{P_{\xi,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{P_{\eta,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}\right), \tag{16}$$

придемъ, какъ и выше, къ формулѣ:

$$\frac{P_{\xi,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{P_{\eta,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})} = e^{\overset{\alpha'}{\underset{x'}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta}} \frac{e^{\Phi\left(u_h - \bar{v}_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\left|_1^p\right. u_h^{(0)}\right)} \cdot e^{\Phi\left(u_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\left|_1^p\right. u_h^{(0)}\right)}}{e^{\Phi\left(u_h - \bar{v}_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\left|_1^p\right. u_h^{(0)}\right)} \cdot e^{\Phi\left(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h\left|_1^p\right. u_h^{(0)}\right)}}, \tag{17}$$

гдѣ для краткости положено:

$$\bar{v}_k = v_k \overset{p}{\underset{1}{-}} \tilde{\omega}_h. \tag{18}$$

Если перемножить (12) и (17), и принять во вниманіе, что вообще по (5) и (6) § 88:

$$\overset{x'}{\underset{\alpha}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta} + \overset{\alpha'}{\underset{x'}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta} = 2q'\pi i + \sum_{k=1}^{k=p}\tilde{\eta}_k \overset{\xi}{\underset{\eta}{\mathrm{I}}}_k = 2q'\pi i + \sum_{k=1}^{k=p}\tilde{\eta}_k\Big(\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k\Big), \tag{19}$$

гдѣ

$$\tilde{\eta}_k = \sum_{g=1}^{g=p}(m_g\eta_{kg} + n_g\eta'_{kg}), \tag{20}$$

то получимъ слѣдующую формулу:

$$
(21)\qquad \frac{P_{\xi,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}}) \,.\, P_{\xi,x'}(\alpha',y_{\alpha_i};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{P_{\eta,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}}) \,.\, P_{\eta,x'}(\alpha',y_{\alpha_i};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})} = e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p} \tilde{\eta}_k(\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k)} \times
$$

$$
\times \frac{e^{\Phi(u_h+v_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})} \,.\, e^{\Phi(u_h-v_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})} \,.\, e^{2\Phi(u_h-\overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}}{e^{\Phi(u_h+v_h-\overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})} \,.\, e^{\Phi(u_h-\bar{v}_h-\overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})} \,.\, e^{2\Phi(u_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}}.
$$

Эта формула можетъ быть еще упрощена на основаніи характернаго свойства функціи $\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})$, какъ увидимъ въ слѣд. §.

108. Перемѣняя въ опредѣляющемъ эту функцію дифференціальномъ уравненіи (21) § 105 u_h на $u_h+\tilde{\omega}_h$, гдѣ $\tilde{\omega}_h$ опредѣляется (15) пред. §, мы будемъ имѣть:

$$
(1)\qquad d\Phi(u_h+\tilde{\omega}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) = \sum_{k=1}^{k=p}\Big(C_k + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\tilde{\omega}_h}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k\Big)du_k;
$$

но по (10) § 100

$$
(2)\qquad J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\tilde{\omega}_h}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k = J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k + \tilde{\eta}_k;
$$

потому предыдущее такъ перепишется:

$$
(3)\qquad d\Phi(u_h+\tilde{\omega}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) = \sum_{k=1}^{k=p}\Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k\Big)du_k + \sum_{k=1}^{k=p}\tilde{\eta}_k\, du_k,
$$

и, слѣд., будетъ:

$$
(4)\qquad \Phi(u_h+\tilde{\omega}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) = \Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) + \sum_{k=1}^{k=p}\tilde{\eta}_h\, u_k + \mathfrak{C},
$$

гдѣ $\mathfrak{C}$ постоянная, которая можетъ зависѣть лишь отъ коэффиціентовъ при ω_{hg} и ω'_{hg} въ выраженіи $\tilde{\omega}_h$. На основаніи этого будемъ имѣть:

$$
(5)\qquad \frac{e^{\Phi(u_h-\bar{v}_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}}{e^{\Phi(u_h-\bar{v}_h-\overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}} = \frac{e^{\Phi(u_h-v_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}}{e^{\Phi(u_h-v_h-\overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}}\, e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=p}\tilde{\eta}_k(\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k)},
$$

такъ какъ въ силу (18) пред. § аргументы налѣво превосходятъ на $\tilde{\omega}_h$ аргументы направо. Въ силу (5) равенство (21) пред. § принимаетъ такой видъ:

$$
\frac{P_{\xi,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}}) \,.\, P_{\xi,x'}(\alpha',y'_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{P_{\eta,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}}) \,.\, P_{\eta,x'}(\alpha',y'_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})} =
$$

$$
(6)\qquad = \frac{\dfrac{\Theta(u_h+v_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) \,.\, \Theta(u_h-v_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}{[\Theta(u_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})]^2}}{\dfrac{\Theta(u_h+v_h-\overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) \,.\, \Theta(u_h-v_h-\overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}{[\Theta(u_h-\overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})]^2}},
$$

если положить:

$$
(7)\qquad \Theta(u_h \,|\, u_h^{(0)}) = e^{\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}.
$$

Равенство (6) говоритъ, что отношеніе числителей обѣихъ частей есть величина неизмѣняющаяся отъ перемѣны ξ на η, каковыя величины совершенно независимы; слѣд., оно отъ (ξ, y_ξ) не зависитъ. Обозначая это отношеніе чрезъ V, будемъ, слѣд., имѣть такое равенство:

$$
(8)\qquad P_{\xi,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}}) \,.\, P_{\xi,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}}) = V\,\frac{\Theta(u_h+v_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})\, \Theta(u_h-v_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}{[\Theta(u_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})]^2}.
$$

Эта формула отвѣчаетъ формулѣ, выражающей $\wp(u)-\wp(v)$ (въ теоріи эллиптическихъ функцій) чрезъ $\Theta(u)$, и также формулѣ, дающей выраженіе $\dfrac{\varphi(a)}{P(a)}$ чрезъ Θ-функціи въ теоріи гиперэллиптическихъ интеграловъ (формула (4) на стр. 101 нашего разсужденія подъ заглавіемъ „Обращеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ“, Харьковъ 1885 года).

Разсматривая налѣво ξ какъ перемѣнную независимую, имѣемъ тамъ однозначную на Римановой поверхности для $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$ функцію, обращающуюся въ p точкахъ (x_i, y_i) въ безконечность второго порядка: ∞^2. Въ точкѣ (x',y'), а также въ точкѣ $(\alpha', y_{\alpha'})$ она конечна и отлична отъ нуля, ибо одинъ изъ ея множителей обращается въ ∞^1, другой въ 0^1. Каждый множитель лѣвой части есть симметрическая функція величинъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, какъ то слѣдуетъ изъ сказаннаго въ концѣ § 56, слѣд., и произведеніе обоихъ будетъ симметрическая функція этихъ величинъ и, слѣд., функція перемѣнныхъ $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$. Она обращается въ ∞^2 для такихъ системъ значеній $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, которыя приводятъ одно изъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ въ (ξ, y_ξ); то же имѣетъ мѣсто и относительно второй части (8), гдѣ, какъ увидимъ въ слѣдующей главѣ, знаменатель $[\Theta(u_h - \overset{\xi}{\mathrm{I}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})]^2$ обращается въ 0^2 для тѣхъ же системъ; отсюда слѣдуетъ, что V будетъ по отношенію къ каждой изъ независимыхъ перемѣнныхъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ функціей однозначной (ибо такова Θ, какъ увидимъ ниже), непрерывной и всегда конечной, слѣд., по отношенію къ каждой изъ нихъ постоянной, т. е. величиной, независящей отъ этихъ перемѣнныхъ. А потому можно опредѣлить ее, давая $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ какое либо частное значеніе, напр. полагая $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}=0$; тогда всѣ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ придутъ въ $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ и мы получимъ изъ (8):

$$(9)\quad P_{\xi,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\,P_{\xi,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}}) = V\,\frac{\Theta(v_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})\,\Theta(-v_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})}{[\Theta(-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})]^2};$$

отсюда и найдется V. Его можно исключить изъ (8), дѣля это равенство на (9); тогда будемъ имѣть:

$$(10)\quad \begin{aligned} &\frac{P_{\xi,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{P_{\xi,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})}\cdot\frac{P_{\xi,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{P_{\xi,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})} = \\ &= \frac{[\Theta(-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}} \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})]^2\,\Theta(u_h+v_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})\,\Theta(u_h-v_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})}{\Theta(v_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})\,\Theta(-v_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})\,[\Theta(u_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}} \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})]^2}. \end{aligned}$$

Эта формула вполнѣ аналогична формулѣ (6) стр. 102 нашего выше цитированнаго разсужденія.

109. Изъ (7) пред. § получаемъ:

$$\Phi(u_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}) = \log\Theta(u_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}). \qquad (1)$$

На основаніи этого равенству (3) § 106 можно дать такой видъ:

$$\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) - \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}) = \log\frac{\Theta(u_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}} \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})\,.\,\Theta(u_h^{(0)}-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}} \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})}{\Theta(u_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})\,.\,\Theta(u_h^{(0)}-\overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}} \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})}. \qquad (2)$$

Если положить:

$$\Pi^0_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u}}) = \sum_{i=1}^{i=p}\overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{III}}}{}_{\xi\eta}, \qquad (3)$$

начиная интегрированіе отъ тѣхъ же значеній x_i, какъ то мы дѣлали для интеграловъ перваго рода въ (8) § 96, то очевидно будетъ

$$\Pi^0_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) - \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}), \qquad (4)$$

и потому по (2) будемъ имѣть:

$$\Pi^0_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \log\frac{\Theta(u_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})\,.\,\Theta(-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})}{\Theta(u_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})\,.\,\Theta(-\overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})}. \qquad (5)$$

Совершая операцію D_ξ надъ обѣими частями равенства (2), по (8) § 98 будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi - J(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})_\xi = \sum_{k=1}^{k=p}\Bigg\{ &\frac{1}{\Theta(u_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})}\cdot\frac{\partial\Theta(u_h-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})}{\partial u_k} - \\ &-\frac{1}{\Theta(u_h^{(0)}-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, u_h^{(0)})}\cdot\frac{\partial\Theta(u_h^{(0)}-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \,|\, \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})}{\partial u_k^{(0)}}\Bigg\}\,\varphi_k(\overset{m-2}{\xi},\overset{n-2}{y_\xi}), \end{aligned} \qquad (6)$$

такъ какъ правая часть зависитъ отъ ξ чрезъ посредство величинъ $(u_k \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k)$. Что же касается до выраженій $J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k$ чрезъ Θ-функціи, то, дифференцируя (1) по u_k, на основаніи (19) § 105, получимъ:

$$(7)\qquad C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k = \frac{1}{\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} \mid u_h^{(0)})} \cdot \frac{\partial\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} \mid u_h^{(0)})}{\partial u_k},$$

откуда найдемъ, перемѣняя $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ на $u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h$:

$$(8)\qquad J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k = \frac{1}{\Theta(u_h - \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{\mid}} u_h^{(0)})} \cdot \frac{\partial\Theta(u_h - \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{\mid}} u_h^{(0)})}{\partial u_k} - C_k.$$

Такимъ образомъ Абелевы трансцендентныя второго и третьяго рода сведены къ Θ-функціямъ. Отдѣльный интегралъ второго и третьяго рода тоже легко можетъ быть выраженъ чрезъ Θ-функціи: для этого стоитъ только дать перемѣннымъ $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ такія значенія, которыя $p-1$ изъ точекъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ за исключеніемъ (x_g, y_g) проводятъ въ точку (x_0, y_0); тогда $p-1$ членовъ суммъ, опредѣляющихъ функціи $\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ и $J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi$, приведутся къ нулю и останется одинъ интегралъ третьяго, соотвѣтственно второго рода, взятый отъ (x_0, y_0) до (x_g, y_g), а направо будемъ имѣть въ равенствахъ (2) соотвѣтственно (6) такія же выраженія изъ Θ-функцій съ соотвѣтственными разсматриваемому случаю аргументами $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$.

110. Значенія какой угодно симметрической функціи значеній данной функціи $\dfrac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}$ въ точкахъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ опредѣлятся, когда будутъ извѣстны значенія простѣйшихъ симметрическихъ функцій этихъ значеній, какъ то извѣстно изъ Высшей Алгебры; эти же простѣйшія такъ найдутся. Означимъ чрезъ $(\overset{m'}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$ нули, чрезъ $(\overset{m'}{\underset{1}{\beta_i, y_{\beta_i}}})$ безконечности функціи

$$(1)\qquad \frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} - z,$$

гдѣ z произвольно-заданная величина; послѣднія, т. е. $(\overset{m'}{\underset{1}{\beta_i, y_{\beta_i}}})$, какъ нули функціи $\chi(x,y)$, неизмѣнны; первыя же измѣняются съ измѣненіемъ z. Тогда по теоремѣ Абеля [(4) § 91] будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{i=m'} \overset{\beta_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{III}}}_{x,x_0'} = \log\left\{\frac{\dfrac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} - z}{\dfrac{\psi(x_0',y_0')}{\chi(x_0',y_0')} - z}\right\}, \qquad (2)$$

гдѣ (x,y) и (x_0', y_0') произвольныя неособенныя точки Римановой поверхности для $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$. Здѣсь налѣво можно перемѣнить параметры съ аргументами, такъ что получится такое равенство:

$$\sum_{i=1}^{i=m'} \overset{x}{\underset{x_0'}{\mathrm{III}}}_{\beta_i,\alpha_i} = \log\left\{\frac{\dfrac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} - z}{\dfrac{\psi(x_0',y_0')}{\chi(x_0',y_0')} - z}\right\}. \qquad (3)$$

Полагая здѣсь $x = \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y = \overset{p}{\underset{1}{y_i}}$; $x_0' = \overset{p}{\underset{1}{a_i}}, y_0' = \overset{p}{\underset{1}{b_i}}$, и складывая полученные результаты, по (3) пред. § будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{i=m'} \Pi^0_{\beta_i,\alpha_i}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \log\left\{\frac{\prod_{j=1}^{j=m'}\left(\dfrac{\psi(x_j,y_j)}{\chi(x_j,y_j)} - z\right)}{\prod_{j=1}^{j=m'}\left(\dfrac{\psi(a_j,b_j)}{\chi(a_j,b_j)} - z\right)}\right\}. \qquad (4)$$

Здѣсь лѣвая часть по (5) пред. § можетъ быть такъ представлена:

$$\sum_{i=1}^{i=m'} \Pi^0_{\beta_i,\alpha_i}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \sum_{i=1}^{i=m'} \log \frac{\Theta(u_h - \overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{\mid}} u_h^{(0)})\,\Theta(-\overset{\beta_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{\mid}} u_h^{(0)})}{\Theta(u_h - \overset{\beta_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{\mid}} u_h^{(0)})\,\Theta(-\overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \overset{p}{\underset{1}{\mid}} u_h^{(0)})}; \qquad (5)$$

вноси это въ предыдущее и переходя отъ log къ числу, будемъ имѣть:

$$(6)\qquad \frac{\prod\limits_{j=1}^{j=p}\left(\dfrac{\psi(x_j,y_j)}{\chi(x_j,y_j)}-z\right)}{\prod\limits_{j=1}^{j=p}\left(\dfrac{\psi(a_j,b_j)}{\chi(a_j,b_j)}-z\right)} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{i=m'}\dfrac{\Theta\left(u_h-\overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\,\Big|\,u_h^{(0)}\right)_1^p}{\Theta\left(u_h-\overset{\beta_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\,\Big|\,u_h^{(0)}\right)_1^p}}{\prod\limits_{i=1}^{i=m'}\dfrac{\Theta\left(-\overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\,\Big|\,u_h^{(0)}\right)_1^p}{\Theta\left(-\overset{\beta_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\,\Big|\,u_h^{(0)}\right)_1^p}}.$$

Помножимъ числителя и знаменателя лѣвой части этого равенства на $(-1)^p$, а затѣмъ все на знаменателя лѣвой части и положимъ

$$(7)\qquad \prod_{j=1}^{j=p}\left(z-\frac{\psi(a_j,b_j)}{\chi(a_j,b_j)}\right)\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{i=m'}\dfrac{\Theta\left(u_h-\overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\,\Big|\,u_h^{(0)}\right)_1^p}{\Theta\left(u_h-\overset{\beta_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\,\Big|\,u_h^{(0)}\right)_1^p}}{\prod\limits_{i=1}^{i=m'}\dfrac{\Theta\left(-\overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\,\Big|\,u_h^{(0)}\right)_1^p}{\Theta\left(-\overset{\beta_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\,\Big|\,u_h^{(0)}\right)_1^p}}=N;$$

это будетъ величина, зависящая отъ z, какъ непосредственно, такъ и чрезъ посредство $(\alpha_i, y_{\alpha_i})_1^{m'}$, которыя зависятъ отъ z, какъ выше замѣчено. Раскрывая имѣющее остаться послѣ этого въ лѣвой части равенства (6) произведеніе и располагая его по степенямъ z, будемъ имѣть:

$$(8)\qquad z^p+M_1z^{p-1}+M_2z^{p-2}+\cdots+M_{p-1}z+M_p=N,$$

гдѣ $M_1, M_2 \ldots M_p$ и будутъ искомыя простѣйшія симметрическія функціи значеній функціи $\dfrac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}$ въ точкахъ $(x_i, y_i)_1^p$. Выбравъ p значеній z, — пусть это будутъ

$$(9)\qquad z_1,\ z_2,\ z_3 \ldots z_p,$$

—и опредѣливъ для каждаго z_k соотвѣтственныя системы $\alpha_i^{(k)}$, и затѣмъ по формулѣ (7) значенія N, которыя означимъ соотвѣтственно чрезъ

$$N_1,\ N_2,\ N_3 \ldots N_p, \tag{10}$$

мы будемъ имѣть p линейныхъ относительно искомыхъ величинъ $M_1, M_2, \ldots M_p$ уравненій, именно:

$$z_k^p+M_1z_k^{p-1}+M_2z_k^{p-2}+\cdots+M_{p-1}z_k+M_p=N_k, \tag{11}$$

гдѣ $k=1,2,3\ldots p$; рѣшая ихъ, получимъ величины $\overset{p}{\underset{1}{M_h}}$ линейными функціями величинъ $\overset{p}{\underset{1}{N_k}}$, которыя по формуламъ (7) выражаются чрезъ Θ-функціи, въ которыхъ величины $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ суть данныя. Когда найдемъ величины $M_1, M_2 \ldots M_p$, тогда значенія $\dfrac{\psi(x_i,y_i)}{\chi(x_i,y_i)}$ нашей функціи найдутся, рѣшая уравненіе:

$$z^p+M_1z^{p-1}+M_2z^{p-2}+\cdots+M_{p-1}z+M_p=0. \tag{12}$$

111. Когда будемъ знать значенія функціи

$$z=\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} \tag{1}$$

въ точкахъ $(x_i, y_i)_1^p$, тогда значенія всякой другой функціи, напр.:

$$Z=\frac{\Psi(x,y)}{\mathrm{X}(x,y)}, \tag{2}$$

въ тѣхъ же точкахъ найдутся такимъ образомъ. Составимъ, какъ въ пред. §, уравненія, которымъ удовлетворяли бы значенія въ точкахъ $(x_i, y_i)_1^p$ функцій:

$$Z.z^k=\frac{\Psi(x,y)}{\mathrm{X}(x,y)}\left(\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}\right)^k \tag{3}$$

для $k=0,1,2,3\ldots p-1$. Означимъ чрезъ $M_1^{(k)}$ коэффиціенты при z^{p-1} въ этихъ уравненіяхъ; тогда мы будемъ имѣть систему p линейныхъ уравненій относительно $Z_i = \dfrac{\Psi(x_i, y_i)}{X(x_i, y_i)}$, именно:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} Z_i . z_i^k = -M_1^{(k)},$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots p-1$, откуда и найдемъ ихъ. (См. Briot, Theorie des fonctions Abéliènnes, § 100, p. 161). Если въ частности принять

$$(5) \qquad z = \frac{x}{x - \xi},$$

то получимъ подобнымъ образомъ уравненія для опредѣленія самихъ x_i, такого же вида какъ (12) пред. §: сперва именно мы получимъ уравненіе для z; вводя туда его выраженіе чрезъ x изъ (5), мы его преобразуемъ въ уравненіе для опредѣленія x. Здѣсь ξ произвольная постоянная величина. Послѣ того найдутся y_i, какъ только что было показано для Z_i. Дѣйствительно, принявъ $\Psi(x, y) = y$, $X(x, y) = 1$, будемъ имѣть $Z = y$. (См. тамъ же § 101, стр. 163). Такимъ образомъ y выразится чрезъ x въ формѣ полинома степени $p-1$ относительно x, коэффиціенты котораго будутъ раціональными функціями различныхъ Θ-функцій, равно какъ и коэффиціенты уравненія степени p, опредѣляющаго $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$. Для тѣхъ значеній $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$, для которыхъ всѣ коэффиціенты этого уравненія (по освобожденіи его отъ знаменателей) обращаются въ нуль, значенія $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$ будутъ оставаться неопредѣленными, какъ выше уже было замѣчено.

ГЛАВА VII.

Θ-функціи.

112. Показавъ, какъ при помощи Θ-функцій рѣшается задача Якоби, переходимъ къ обнаруженію свойствъ этихъ функцій, исходя изъ самого опредѣленія этой функціи равенствомъ (7) § 108, гдѣ показатель опредѣляется дифференціальнымъ уравненіемъ (21) § 105 и условіемъ обращаться въ нуль для системы $(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})$ значеній перемѣнныхъ $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, или формулою (30) того же § при томъ же условіи.

Этотъ показатель, функція $\Phi(u_h \mid \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})$, есть непрерывная функція своихъ аргументовъ, пока онѣ не получаютъ такихъ значеній, которыя приводятъ нѣкоторыя изъ точекъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ въ одну изъ фундаментальныхъ, или въ такое положеніе, что чрезъ нихъ можно будетъ провести присоединенную кривую перваго рода $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$, что сводится на то же по § 96; въ этихъ случаяхъ функція $\Phi(u_k \mid \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})$ обращается логариѳмически въ безконечность. Въ самомъ дѣлѣ, если разсматриваемая исключительная система значеній перемѣнныхъ $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ приводитъ точку (x_i, y_i) въ точку (a_k, b_k), то функція

$$C_k + J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k \qquad (1)$$

обращается въ ∞^1, какъ

$$\left. \frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x_i - a_k} \right|_{x_i = a_k}, \qquad (2)$$

какъ то мы видѣли въ § 99; но въ то же время по (11) § 97 будетъ

$$(3) \qquad dx_i = \frac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}\, du_k;$$

а потому, помножая на du_k разложеніе функціи (1) по степенямъ $(x - a_k)$, сходящееся вблизи точки (a_k, b_k), которое будетъ вида:

$$(4) \qquad C_k + J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k = \frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x_i - a_k} + \mathfrak{P}(x_i - a_k),$$

и, интегрируя отъ $u_k^{(0)}$, будемъ имѣть:

$$(5) \qquad \int_{u_k^{(0)}}^{u_k} \Big(C_k + J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k \Big) du_k = \log(x_i - a_k) + \mathfrak{P}_1(x_i - a_k)$$

(гдѣ постоянное скрыто въ степенномъ рядѣ). Отсюда и видно сказанное. Мы предполагали, что только одна изъ точекъ (x_i, y_i) приходитъ для разсматриваемой системы значеній $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ въ точку (a_k, b_k); если ихъ λ, т. е. λ точекъ

$$(6) \qquad (x_{i_1}, y_{i_1}), \quad (x_{i_2}, y_{i_2}), \ldots (x_{i_\lambda}, y_{i_\lambda})$$

приходятъ въ точку a_k, b_k, тогда λ членовъ суммы въ опредѣляющемъ функцію $J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k$ равенствѣ (5) § 98 обратятся въ ∞^1, какъ (2), и потому вмѣсто (5) будемъ имѣть:

$$(7) \qquad \int_{u_k^{(0)}}^{u_k} \Big(C_k + J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k \Big) du_k = \log(x_{i_1} - a_k)(x_{i_2} - a_k)\ldots(x_{i_\lambda} - a_k) + \mathfrak{P}_3(x_i - a_k)$$

для окрестности точки (a_k, b_k); слѣд., выраженіе подъ log будетъ для разсматриваемой исключительной системы значеній перемѣнныхъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ обращаться въ 0^λ. Отсюда видно, что, во 1-хъ, функція $\int_{u_k^{(0)}}^{u_k} \Big(C_k + J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k \Big) du_k$ будетъ обращаться логариѳмически въ ∞ для этихъ исключительныхъ системъ значеній перемѣнныхъ $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$; а во 2-хъ, что всякій разъ, когда

$(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ будутъ измѣняться такъ, что при возвращеніи ихъ къ первоначальнымъ значеніямъ нѣкоторыя изъ точекъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ опишутъ сомкнутыя кривыя вокругъ (a_k, b_k), эта функція получитъ приращеніе $= 2q\pi i$, гдѣ q какое либо цѣлое число, положительное или отрицательное. То же самое будетъ имѣть мѣсто для функціи

$$\int_{u_k^{(0)}}^{u_k} \Big(C_k + J(u_k \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}_h}})_k \Big) du_k \qquad (8)$$

для значеній $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ такихъ, что суммы

$$u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}_h}} = v_h^{(k)} \qquad (9)$$

примутъ одну изъ сейчасъ упомянутыхъ исключительныхъ системъ значеній перемѣнныхъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$. Это очевидно, но здѣсь эти системы значеній $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ распадаются на два класса: однѣ зависятъ отъ (ξ, y_ξ), другія не зависятъ. Послѣднее будетъ имѣть мѣсто, когда системы значеній $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ таковы, что приводятъ точки $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ на присоединенную кривую перваго рода: тогда точки $(\overset{p}{\underset{1}{\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}}}})$, отвѣчающія такимъ значеніямъ x_i (по (7) § 104, такъ какъ (9) настоящаго есть иначе представленное (10) § 104), всегда могутъ быть при помощи теоремы Абеля по (12) § 96 замѣнены другими $(\overset{p}{\underset{1}{\xi'_{ki}, y'_{\xi'_{ki}}}})$ такими, что одна изъ нихъ упадетъ въ a_k, ибо по сейчасъ указанной формулѣ будетъ тогда имѣть мѣсто слѣдующее:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \overset{\xi_{ki}}{\underset{x_i}{\mathrm{I}_h}} = \sum_{i=1}^{i=k-1} \overset{\xi'_{ki}}{\underset{x_i}{\mathrm{I}_h}} + \overset{a_k}{\underset{x_k}{\mathrm{I}_h}} + \sum_{i=k+1}^{i=p} \overset{\xi'_{ki}}{\underset{x_i}{\mathrm{I}_h}}, \qquad (9)$$

и (7) § 104 преобразуется въ такое:

$$\overset{\xi}{\underset{a_k}{\mathrm{I}_h}} + \sum_{i=1}^{i=k-1} \overset{\xi'_{ki}}{\underset{x_i}{\mathrm{I}_h}} + \overset{a_k}{\underset{x_k}{\mathrm{I}_h}} + \sum_{i=k+1}^{i=p} \overset{\xi'_{ki}}{\underset{x_i}{\mathrm{I}_h}} = 0, \qquad (10)$$

откуда, придавая (9) § 104 и перенося членъ съ ξ направо, найдемъ:

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{i=k-1} \overset{\xi'_{ki}}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} + \overset{a_k}{\underset{a_k}{\mathrm{I}_h}} + \sum_{i=k+1}^{i=p} \overset{\xi'_{ki}}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} = u_k + \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}_h}} = v_h^{(k)},$$

т. е. въ этомъ случаѣ $v_h^{(k)}$ приведется къ суммѣ $p-1$ интеграловъ, ибо одна $(\xi'_{ki}, y_{\xi'_{ki}})$ упадетъ въ (a_k, b_k), а тогда функція (8) обращается логариѳмически въ ∞, и это въ данномъ случаѣ какова бы ни была точка (ξ, y_ξ): ибо по ней найдутся ξ_{ki}, а по нимъ ξ'_{ki} всегда найдутся такъ, что одно изъ нихъ будетъ $=a_k$.

Переходя къ функціи

$$(12) \qquad \Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_k}}\, u_h^{(0)}; \xi) = \int \sum_{k=1}^{k=p} \Big(C_k + J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} + \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}_h}}) \Big) du_k + C,$$

изъ предыдущаго заключаемъ, что это будетъ непрерывная функція перемѣнныхъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, пока онѣ не получаютъ такихъ значеній, для которыхъ суммы

$$(13) \qquad \overset{p}{\underset{1}{u_h}} + \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}_h}} = v_h^{(k)}$$

получаютъ такія значенія, которыя приводятъ нѣкоторыя изъ точекъ $(\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}})$ въ одну изъ фундаментальныхъ точекъ, когда эта функція обращается логариѳмически въ безконечность, именно какъ $\lambda \log(x-a_k)$, гдѣ λ цѣлое положительное число, при $x=a_k$. Эти системы значеній распадаются на два класса: для одного значенія $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ зависятъ отъ (ξ, y_ξ); для другого не зависятъ; это послѣднее имѣетъ мѣсто тогда, когда значенія $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ приводятъ точки $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ на кривую $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$. Для каждой системы значеній $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ функціи $\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \xi)$ будетъ имѣть безчисленное множество значеній, разнящихся между собою на кратное $2\pi i$.

Отсюда слѣдуетъ, что функція

$$(14) \qquad \Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \xi) = e^{\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \xi)}$$

будетъ непрерывная функція перемѣнныхъ $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, остающаяся всегда конечною, обращающаяся въ нуль, какъ $(x-a_k)^\lambda$, для тѣхъ системъ значеній перемѣнныхъ $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, которыя приводятъ нѣкоторыя точки $(\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}})$ въ одну изъ фундаментальныхъ. Эти послѣднія значенія распадаются на два класса: для перваго класса $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ зависятъ отъ (ξ, y_ξ); для второго не зависятъ; это именно тѣ значенія перемѣнныхъ $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, которыя приводятъ точки (x_i, y_i) на присоединенную кривую перваго рода: въ нихъ функція $\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \xi)$ обращается тождественно въ нуль, т. е. для всякаго значенія (ξ, y_ξ). Сказанное относится и къ той Θ-функціи, опредѣляемой равенствомъ (7) § 108, которая получается изъ опредѣляемой равенствомъ (14) настоящаго § чрезъ приведеніе точки (ξ, y_ξ) въ точку (x_0, y_0), и чрезъ которую выражается эта болѣе общая очень просто: на основаніи (28) § 105 будемъ имѣть:

$$e^{\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \xi)} = e^{\Phi(v_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})} : e^{\Phi(v_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})} \qquad (15)$$

или, имѣя въ виду (24) и (26) того же §, (7) § 108 и (14) настоящаго:

$$\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; \xi) = \frac{\Theta(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}{\Theta(u_h^{(0)} - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}; \qquad (16)$$

почему въ дальнѣйшемъ мы будемъ ограничиваться разсмотрѣніемъ этой Θ-функціи, которая опредѣляется равенствомъ (7) § 108, т. е.

$$\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) = e^{\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})}. \qquad (17)$$

Отмѣтимъ еще свойство этой послѣдней обращаться въ единицу при $\overset{p}{\underset{1}{u_h = u_h^{(0)}}}$:

$$\Theta(u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) = 1, \qquad (18)$$

которое слѣдуетъ изъ того, что для этой системы значеній перемѣнныхъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ показатель въ (17) обращается въ нуль.

113. Изъ (4) § 108, гдѣ по (15) и (20) § 107:

$$(1)\qquad \bar\omega_h = \sum_{g=1}^{g=p}(m_g\omega_{kg} + n_g\omega'_{kg}),$$

$$(2)\qquad \bar\eta_h = \sum_{g=1}^{g=p}(m_g\eta_{kg} + n_g\eta'_{kg}),$$

получаемъ новое свойство Θ-функціи, выражаемое равенствомъ:

$$(3)\qquad \Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h + \bar\omega_h}} \mid u_h^{(0)}) = e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}\bar\eta_k u_k + \mathfrak{C}}\,\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} \mid u_h^{(0)}),$$

именно, при измѣненіи значеній всѣхъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ на одинаковую линейную функцію періодовъ соотвѣтственныхъ интеграловъ перваго рода, значеніе Θ-функціи измѣняется чрезъ умноженіе на показательный множитель, показатель котораго есть линейная функція перемѣнныхъ, коэффиціенты при которыхъ суть соотвѣтственные періоды основныхъ интеграловъ 2-го рода (періодичность третьяго рода); независящій отъ перемѣнныхъ членъ зависитъ, должно полагать, отъ періодовъ. Чтобы обнаружить эту зависимость, дадимъ въ той же функціи аргументамъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ приращенія

$$(4)\qquad \bar\omega'_h = \sum_{j=1}^{j=p}(m'_j\omega_{hj} + n'_j\omega'_{hj});$$

тогда интегралы второго рода получатъ приращенія

$$(5)\qquad \bar\eta'_h = \sum_{j=1}^{j=p}(m'_j\eta_{hj} + n'_j\eta'_{hj}),$$

и мы будемъ имѣть:

$$(6)\qquad \Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h + \bar\omega'_h}} \mid u_h^{(0)}) = e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}\bar\eta'_k u_k + \mathfrak{C}'}\,\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} \mid u_h^{(0)}).$$

Перемѣняя здѣсь $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ на $\overset{p}{\underset{1}{u_h + \bar\omega_h}}$, и полагая для краткости

$$\overset{p}{\underset{1}{\bar\omega_h + \bar\omega'_h = \bar\omega''_h}}, \tag{7}$$

$$\overset{p}{\underset{1}{\bar\eta_h + \bar\eta'_h = \bar\eta''_h}}, \tag{8}$$

мы будемъ имѣть:

$$\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h + \bar\omega''_h}} \mid u_h^{(0)}) = e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}\bar\eta'_k(u_k + \bar\omega_k) + \mathfrak{C}'}\,\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h + \bar\omega_h}} \mid u_h^{(0)}); \tag{9}$$

помножая это равенство на (3), по сокращеніи получимъ:

$$\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h + \bar\omega''_h}} \mid u_h^{(0)}) = e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}\bar\eta''_k u_k + \sum\limits_{k=1}^{k=p}\bar\eta'_k\bar\omega_k + \mathfrak{C} + \mathfrak{C}'}\,\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} \mid u_h^{(0)}); \tag{10}$$

съ другой стороны, подобно (3) и (6) имѣемъ:

$$\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h + \bar\omega''_h}} \mid u_h^{(0)}) = e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}\bar\eta''_k u_k + \mathfrak{C}''}\,\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} \mid u_h^{(0)}); \tag{11}$$

сравнивая оба послѣднія равенства, находимъ, что должно быть:

$$\mathfrak{C}'' = \mathfrak{C} + \mathfrak{C}' + \sum_{k=1}^{k=p}\bar\eta'_k\bar\omega_k + 2q\pi i, \tag{12}$$

гдѣ q цѣлое число, положительное или отрицательное. Но легко видѣть, что

$$\sum_{k=1}^{k=p}\bar\eta'_k\bar\omega_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=p}(\bar\eta'_k\bar\omega_k + \bar\eta_k\bar\omega'_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=p}(\bar\eta'_k\bar\omega_k - \bar\eta_k\bar\omega'_k); \tag{13}$$

придавая къ этому тождеству слѣдующее:

$$0 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=p}(\bar\eta'_k\bar\omega'_k + \bar\eta_k\bar\omega_k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=p}\bar\eta_k\bar\omega_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=p}\bar\eta'_k\bar\omega'_k, \tag{14}$$

и имѣя въ виду, что на основаніи равенствъ (I)—(IV) § 81 и (1), (2), (4) и (5) настоящаго §

$$\sum_{k=1}^{k=p}(\eta'_k\omega_k - \eta_k\omega'_k) = -2\pi i\sum_{k=1}^{k=p}(m_k n'_k + m'_k n_k), \tag{15}$$

мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k=p}\eta'_k\omega_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=p}(\eta_k+\eta'_k)(\omega_k+\omega'_k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=p}\eta_k\omega_k - \\ -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=p}\eta'_k\omega'_k - \pi i\sum_{k=1}^{k=p}(m_k n'_k + m'_k n_k);\end{aligned} \tag{16}$$

но очевидно

$$\sum_{k=1}^{k=p}(m_k n'_k + m'_k n_k) = \sum_{k=1}^{k=p}(m_k+m'_k)(n_k+n'_k) - \sum_{k=1}^{k=p}m_k n_k - \sum_{k=1}^{k=p}m'_k n'_k, \tag{17}$$

а потому (16) можно дать такой видъ:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k=p}\eta'_k\omega_k = \sum_{k=1}^{k=p}\left(\frac{1}{2}\eta''\omega'' - m''n''\pi i\right) - \sum_{k=1}^{k=p}\left(\frac{1}{2}\eta_k\omega_k - m_k n_k\pi i\right) - \\ -\sum_{k=1}^{k=p}\left(\frac{1}{2}\eta'_k\omega'_k - m'_k n'_k\pi i\right),\end{aligned} \tag{18}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} m'' &= m + m', \\ n'' &= n + n'. \end{aligned} \tag{19}$$

Внося это въ (12) и полагая тамъ

$$q = \nu + \nu' - \nu'', \tag{20}$$

гдѣ ν, ν', ν'' цѣлыя числа, что всегда возможно, будемъ имѣть, перенося члены съ $''$ налѣво:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{C}'' - \sum_{k=1}^{k=p}\left(\frac{1}{2}\eta''_k\omega''_k - m''_k n''_k\pi i\right) + 2\nu''\pi i = \\ &= \mathfrak{C} - \sum_{k=1}^{k=p}\left(\frac{1}{2}\eta_k\omega_k - m_k n_k\pi i\right) + 2\nu\pi i + \\ &+ \mathfrak{C}' - \sum_{k=1}^{k=p}\left(\frac{1}{2}\eta'_k\omega'_k - m'_k n'_k\pi i\right) + 2\nu'\pi i.\end{aligned} \tag{21}$$

Полагая

$$\varphi(m_k, \overset{p}{\underset{1}{n_k}}; \nu) = \mathfrak{C} - \sum_{k=1}^{k=p}\left(\frac{1}{2}\eta_k\omega_k - m_k n_k\pi i\right) + 2\nu\pi i, \tag{22}$$

это равенство (20) можно короче такъ представить:

$$\varphi(m''_k, \overset{p}{\underset{1}{n''_k}}; \nu'') = \varphi(m_k, \overset{p}{\underset{1}{n_k}}; \nu) + \varphi(m'_k, \overset{p}{\underset{1}{n'_k}}; \nu'). \tag{23}$$

Равенство (23), выражая распредѣлительное свойство функціи, опредѣляемой равенствомъ (22), указываетъ на ея линейный характеръ; такъ что, слѣд., можно положить:

$$\varphi(m_k, \overset{p}{\underset{1}{n_k}}; \nu) = \sum_{k=1}^{k=p}(A_k m_k + B_k n_k) + 2\nu\pi i. \tag{24}$$

Здѣсь можно перемѣнить постоянныя A_k и B_k на другія: α_l и β_l съ помощію подстановки:

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \sum_{l=1}^{l=p}(\omega_{lk}\beta_l - \eta_{lk}\alpha_l), \\ B_k &= \sum_{l=1}^{l=p}(\omega'_{lk}\beta_l - \eta'_{lk}\alpha_l), \end{aligned}\right\} (k = 1, 2, \ldots p) \tag{25}$$

ибо опредѣлитель этой подстановки есть Δ [(2) § 82], который не равенъ нулю, какъ тамъ было доказано. Внося это въ первый членъ второй части (24), будемъ имѣть:

$$\sum_{k=1}^{k=p}(A_k m_k + B_k n_k) = \sum_{l=1}^{l=p}(\bar{\omega}_l\beta_l - \bar{\eta}_l\alpha_l), \tag{26}$$

по (1) и (4) этого §. Здѣсь опять можно вмѣсто α_l и β_l ввести новыя постоянныя, положивъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_l &= \sum_{h=1}^{h=p}(\mu_h\omega_{lh} + \nu_h\omega'_{lh}), \\ \beta_l &= \sum_{h=1}^{h=p}(\mu_h\eta_{lh} + \nu_h\eta'_{lh}); \end{aligned}\right\} (l = 1, 2, \ldots p) \tag{27}$$

ибо опредѣлитель этой подстановки будетъ опять тотъ же Δ [(1) § 82], если строки сдѣлать столбцами и наоборотъ; тогда (26) по (I)—(IV) § 81 такъ преобразуется:

$$\sum_{k=1}^{k=p}(A_k m_k + B_k n_k) = 2\pi i\sum_{h=1}^{h=p}(\mu_h n_h - \nu_h m_h). \tag{28}$$

Внося это въ (24), будемъ имѣть:

(29) $$\varphi(\overset{p}{\underset{1}{m_k, n_k}}; \nu) = 2\pi i \left\{ \sum_{h=1}^{h=p} (\mu_h n_h - \nu_h m_h) + \nu \right\}.$$

Внося это въ (22), найдемъ оттуда

(30) $$\mathfrak{C} = 2\pi i \sum_{h=1}^{h=p}(\mu_h n_h - \nu_h m_h) + \sum_{k=1}^{k=p}\left(\frac{1}{2}\bar{\eta}_k \bar{\omega}_k - m_k n_k \pi i\right).$$

Внося это въ (3) настоящаго §, мы дадимъ ему такой видъ

(31) $$\Theta(u_h + \bar{\omega}_h \mid \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}) = e^{2\pi i \sum\limits_{h=1}^{h=p}(\mu_h n_h - \nu_h m_h)} \cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}\bar{\eta}_k(u_k + \frac{1}{2}\bar{\omega}_k) - m_k n_k \pi i)} \Theta(u_h \mid \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}).$$

114. Величины $\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}$, $\overset{p}{\underset{1}{\nu_h}}$, въ числѣ $2p$ входящія въ это равенство, зависятъ отъ параметровъ $\overset{p}{\underset{1}{C_h}}$ и $\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}$, какъ увидимъ ниже; лучше будетъ теперь по примѣру Вейерштрасса ихъ ввести въ обозначеніе Θ-функціи вмѣсто послѣднихъ, такъ что мы положимъ

(1) $$\Theta(u_h \mid \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}) = \Theta(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h);$$

тогда равенство (31) пред. § приметъ окончательно такой видъ:

(2) $$\Theta(u_h + \bar{\omega}_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h) = e^{2\pi i \sum\limits_{h=1}^{h=p}(\mu_h n_h - \nu_h m_h)} \cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}(\bar{\eta}_k(u_k + \frac{1}{2}\bar{\omega}_k) - m_k n_k \pi i)} \Theta(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h).$$

Постоянныя $\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}$ и $\overset{p}{\underset{1}{\nu_h}}$, которыми отличаются одна отъ другой различныя Θ-функціи, опредѣляемыя при помощи однихъ и тѣхъ же интеграловъ втораго рода, вмѣстѣ взятыя, составляютъ *характеристику* этой Θ-функціи; каждое μ_h и ν_h, въ отдѣльности взятое, называется *элементами характеристики*. Очевидно, вещественную часть ихъ можно заключить въ предѣлахъ 0 и 1, ибо измѣненіе элемента на цѣлое число не имѣетъ вліянія на равенство (2). Полагая всѣ m_h и n_h за исклю-

ченіемъ одного равными нулю, а этотъ приравнивая единицѣ, получимъ изъ (2) формулы слѣдующихъ двухъ типовъ:

$$\Theta(u_h + \omega_{hg}; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h) = e^{-2\nu_g \pi i} \cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}\eta_{kg}(u_k + \frac{1}{2}\omega_{kg})} \Theta(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h);$$

(3)

$$\Theta(u_h + \omega'_{kg}; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h) = e^{2\mu_g \pi i} \cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}\eta'_{kg}(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kg})} \Theta(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h).$$

Изъ этихъ формулъ, чрезъ повторное примѣненіе ихъ, можно получить ихъ обнимающую болѣе общую формулу (2) совершенно такъ же, какъ то было нами сдѣлано для гиперэллиптической Θ-функціи въ сочиненіи нашемъ подъ заглавіемъ „Обращеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ“ [Харьковъ. 1885 г. Глава V, § 59, стр. 114], къ которому и отсылаемъ читателя; мы же заимствуемъ оттуда способъ опредѣленія условій, которымъ должны удовлетворять элементы характеристики для того, чтобы Θ-функція была четная или нечетная функція своихъ аргументовъ. Перемѣняя во (2) знаки у m_h и n_h на противные, а также мѣняя знакъ у всѣхъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ на противный, мы будемъ имѣть:

(4) $$\Theta(-u_h - \bar{\omega}_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h) = e^{-2\pi i \sum\limits_{h=1}^{h=p}(\mu_h n_h - \nu_h m_h)} \cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}\left(\bar{\eta}_k(u_k + \frac{1}{2}\bar{\omega}_k) - m_k n_k \pi i\right)} \Theta(-u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h);$$

дѣля (2) на это, получимъ:

(5) $$\frac{\Theta(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{\omega}_h}}; \mu_h, \nu_h)}{\Theta(-u_h - \overset{p}{\underset{1}{\bar{\omega}_h}}; \mu_h, \nu_h)} = e^{2\pi i \cdot 2\sum\limits_{h=1}^{h=p}(\mu_h n_h - \nu_h m_h)} \frac{\Theta(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)}{\Theta(-u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)}.$$

Если теперь наша Θ-функція должна быть четная или нечетная, т. е. если должно быть:

(6) $$\Theta(-u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h) = \pm\Theta(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h),$$

то изъ (5) слѣдуетъ, что въ такомъ случаѣ должно быть:

$$(7)\qquad e^{2\pi i\,.\,2\sum\limits_{h=1}^{h=p}(\mu_h n_h - \nu_h m_h)} = 1,$$

слѣд., должно быть

$$(8)\qquad 2\sum_{h=1}^{h=p}(\mu_h n_h - \nu_h m_h) = \text{цѣлому числу}.$$

Такъ какъ $\overset{p}{\underset{1}{m_h}}$ и $\overset{p}{\underset{1}{n_h}}$ произвольныя цѣлыя числа, то отсюда слѣдуетъ, что $\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}$ и $\overset{p}{\underset{1}{\nu_h}}$ могутъ быть только четнымъ или нечетнымъ числомъ половинъ. Имѣя въ виду сдѣланное нами выше замѣчаніе относительно вещественной части элементовъ характеристики, мы заключаемъ отсюда, что для Θ-функціи четной или нечетной эти элементы могутъ быть равны либо нулю: 0, либо половинѣ: $\frac{1}{2}$. Въ послѣднемъ случаѣ за характеристику принимаютъ числителей этихъ величинъ, которыя будутъ или 0, или 1. Такъ какъ каждое изъ чиселъ μ_h и ν_h можетъ принимать независимо отъ прочихъ оба значенія 0 и $\frac{1}{2}$, то всѣхъ возможныхъ характеристикъ разсматриваемаго нами теперь вида, а слѣд., и число самихъ Θ-функцій четныхъ или нечетныхъ будетъ $2^{2p} = 4^p$. По примѣру Римана многіе обозначаютъ функцію $\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{;}} \mu_h, \nu_h)$ такимъ образомъ:

$$(9)\qquad \Theta\begin{bmatrix}\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_p \\ \nu_1, \nu_2 \ldots \nu_p\end{bmatrix}(u_1, u_2 \ldots u_p),$$

гдѣ въ случаѣ четной или нечетной функціи μ_h и ν_h или 0, или 1.

115. Беря log отъ обѣихъ частей равенства (6) пред. §, а затѣмъ частную производную на u_k, будемъ имѣть:

$$(1)\qquad \frac{\partial \log \Theta(-u_h \overset{p}{\underset{1}{;}} \mu_h, \nu_h)}{\partial u_k} = -\frac{\partial \log \Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{;}} \mu_h, \nu_h)}{\partial u_k},$$

каковое равенство говоритъ, что частныя производныя отъ логариѳма четной или нечетной функціи всегда будутъ нечетныя функціи своихъ

аргументовъ. Это же на основаніи (1) пред. § по (7) § 109 приведется къ такому:

$$C_k + J(-u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k = -\left(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k\right); \qquad (2)$$

откуда находимъ

$$C_k = -\frac{1}{2}\left\{J(-u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k\right\}, \qquad (3)$$

полагая здѣсь

$$-u_h + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h = -c_h, \quad (h = 1, 2, 3 \ldots p) \qquad (4)$$

гдѣ

$$c_h = \sum_{i=1}^{i=p} \overset{x_0}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}_h, \qquad (5)$$

будемъ имѣть:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{-}} c_h)_k = \sum_{i=1}^{i=p} \overset{x_0}{\underset{x_0}{\Pi}}_k = 0, \qquad (6)$$

и, слѣд.,

$$C_k = -\frac{1}{2} J(c_h \overset{p}{\underset{1}{+}} 2\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k, \qquad (7)$$

такъ какъ изъ (4) будемъ имѣть:

$$u_h = c_h + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h. \quad (h = 1, 2, 3 \ldots p) \qquad (8)$$

Итакъ, вотъ каково должно быть значеніе C_k, для того чтобы имѣло мѣсто (2). Что оно дѣйствительно будетъ имѣть мѣсто, это видно будетъ, если изъ (3) внесемъ значеніе C_k въ $C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k$; тогда будемъ имѣть:

$$C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k = \frac{1}{2}\left\{J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k - J(-u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k\right\}; \qquad (9)$$

мѣняя здѣсь $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ на $-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, во второй части члены, которыхъ берется разность, обмѣняются мѣстами, и, слѣд., выраженіе это перемѣнить знакъ, слѣд., будетъ нечетная функція перемѣнныхъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$. Положивъ для краткости

$$(10)\qquad -\frac{1}{2}J(c_h \overset{p}{\underset{1}{+}} 2\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k = J_k,$$

будемъ имѣть, означая чрезъ Θ_0 эту частную Θ-функцію:

$$(11)\qquad d\log\Theta_0(u_h\overset{p}{\underset{1}{;}}\mu_h,\nu_h) = \sum_{k=1}^{k=p}\Big(J_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big)du_k.$$

Для окончательнаго опредѣленія этой функціи примемъ $u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{=}} 0_h$ [1]); тогда, если

$$(12)\qquad \Phi_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \int \sum_{k=1}^{k=p}\Big(J_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big)du_k + C$$

есть интегралъ, исчезающій при $u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{=}} 0_h$, то будетъ

$$(13)\qquad \Theta_0(u_k;\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h) = e^{\Phi_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}$$

искомая функція, четная, обращающаяся въ единицу при $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} 0_h$:

$$(14)\qquad \Theta_0(0_h;\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h) = 1.$$

Можно показать, что для этой четной функціи (13) должно быть:

$$(15)\qquad \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}} = 0,\quad \overset{p}{\underset{1}{\nu_h}} = 0.$$

---

[1]) Эти значенія не приводятъ точки $(x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$ на кривую $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$, ибо $(c_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$ обращаются въ $(a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)$, а опредѣлитель:

$$|\varphi_k(a_i, b_i)| = 1.\quad \binom{k = 1, 2, \ldots p}{i = 1, 2, \ldots p}$$

Положивъ во (2) § 114

$$u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} -\frac{1}{2}\bar\omega_h, \qquad (16)$$

мы будемъ имѣть:

$$\Theta(+\frac{1}{2}\bar\omega_h\overset{p}{\underset{1}{;}}\mu_h,\nu_h) = e^{2\pi i\sum\limits_{h=1}^{h=p}(\mu_h n_h - \nu_h m_h)}\cdot e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=p} m_k n_k \pi i}\,\Theta(-\frac{1}{2}\bar\omega_h\overset{p}{\underset{1}{;}}\mu_h,\nu_h); \qquad (17)$$

такъ какъ мы требуемъ теперь, чтобы было:

$$\Theta(+\frac{1}{2}\bar\omega_h\overset{p}{\underset{1}{;}}\mu_h,\nu_h) = \Theta(-\frac{1}{2}\bar\omega_h\overset{p}{\underset{1}{;}}\mu_h,\nu_h), \qquad (18)$$

причемъ это не $=0$, то изъ (17) слѣдуетъ, что должно быть:

$$e^{2\pi i\sum\limits_{h=1}^{h=p}(\mu_h n_h - \nu_h m_h)}\cdot e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=p} m_k n_k \pi i} = 1. \qquad (19)$$

Но можно выбрать $2p$ такихъ системъ значеній $\overset{p}{\underset{1}{\bar\omega_h}}$, для которыхъ будетъ

$$\sum_{k=1}^{k=p} m_k n_k = 0, \qquad (20)$$

вслѣдствіе чего предыдущее приведется къ такому:

$$\sum_{h=1}^{h=p}(\mu_h n_h - \nu_h m_h) = \text{цѣлому числу}; \qquad (21)$$

таковы именно будутъ двѣ группы:

a) $\bar\omega_h = \omega_{hk}\quad (h = 1, 2, \ldots p)\ (k = 1, 2, \ldots p)$,

(для этихъ $m_k = 1,\ m_g = 0,\ g \gtrless k;\ n_l = 0\ (l = 1, 2, \ldots p)$), и

b) $\bar\omega_h = \sum\limits_{g=k+1}^{g=p}\omega_{hg} - \omega'_{hk}\quad (h = 1, 2, 3, \ldots p)\ (k = 1, 2, \ldots p)$;

(для которыхъ $m_g = 0,\ g \le k;\ m_g = 1, g > k;\ n_k = -1;\ n_g = 0,\ g \gtrless k$).

Нетрудно убѣдиться, что эти значенія ω_h удовлетворяютъ (20), но не будутъ изъ числа тѣхъ, для которыхъ Θ-функція обращается въ нуль; но для этихъ значеній (21) приведется: для группы a) къ такому:

$$\nu_k = \text{цѣлому числу}, \tag{22}$$

а для группы b) къ слѣдующему:

$$\sum_{h=k+1}^{h=p} \nu_h + \mu_k = \text{цѣлому числу}; \tag{23}$$

но какъ $\overset{p}{\underset{1}{\mu_g}}$ и $\overset{p}{\underset{1}{\nu_g}}$ по предыдущему могутъ быть или 0, или $\frac{1}{2}$, то изъ (22) слѣдуетъ:

$$\nu_k = 0, \tag{24}$$

а вслѣдствіе этого изъ (23) и

$$\mu_k = 0, \tag{25}$$

что и требовалось доказать. Въ виду этого вмѣсто принятаго въ (13) обозначенія мы будемъ писать просто $\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, опуская μ_h и ν_h, такъ что, слѣд., будетъ

$$\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = e^{\Phi_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}, \tag{26}$$

и по (14),

$$\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}) = 1. \tag{27}$$

Эту четную Θ-функцію, опредѣляемую равенствомъ (26), гдѣ показатель опредѣляется изъ (12), мы будемъ называть *основною* Θ-функціей, ибо чрезъ нее могутъ быть выражены всѣ прочія, какъ увидимъ въ слѣд. §.

116. Опредѣленіе функціи $\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})$ дифференціальнымъ уравненіемъ (21) § 105 и условіемъ, чтобы она обращалась въ нуль при $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} u_h^{(0)}$, можетъ быть замѣнено опредѣленіемъ ея уравненіемъ

$$d\Phi_1(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) = \sum_{k=1}^{k=p}\Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} u_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big) du_k, \tag{1}$$

гдѣ

$$\Phi_1(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) = \Phi(u_h + u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}), \tag{2}$$

и условіемъ обращаться въ нуль при $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} 0$, которыя получаются изъ названныхъ сейчасъ, чрезъ перемѣну u_k на $u_h + u_h^{(0)}$ для $h = 1, 2, \ldots p$. Но уравненіе (1) можно такъ представить:

$$d\Phi_1(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) = \sum_{k=1}^{k=p}(C_k - J_k)du_k + \sum_{k=1}^{k=p}\Big(J_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} u_h^{(0)} + \overset{u_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big)du_k, \tag{3}$$

или по (12) пред. §:

$$d\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) = \sum_{k=1}^{k=p}(C_k - J_k)du_k + d\Phi_0(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} u_h^{(0)}); \tag{4}$$

интегрируя это и опредѣляя интегралъ такъ, чтобы онъ обращался въ нуль при $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} 0$, мы будемъ имѣть:

$$\Phi_1(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) - \Phi_1(0 \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) = \sum_{k=1}^{k=p}(C_k - J_k)u_k + \Phi_0(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} u_h^{(0)}) - \Phi_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}), \tag{5}$$

гдѣ $\Phi_1(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)})$ какое-либо рѣшеніе уравненія (3); оно на постоянную отличается отъ прежняго; слѣд., будетъ:

$$\Phi_1(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}) = \log \Theta_1(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h) + \log \text{const.}, \tag{6}$$

гдѣ

$$\Theta_1(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h) = \Theta(u_h + u_h^{(0)}; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h), \tag{7}$$

а потому, беря обѣ части равенства (4) показателями степени числа l, мы будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta_1(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)}{\Theta_1(0_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)} = e^{\sum_{k=1}^{k=p}(C_k - J_k)u_k} \, \frac{\Theta_0(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} u_h^{(0)})}{\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})}, \tag{8}$$

— по (26) пред. §. Полагая, что всегда возможно, какъ мы выше видѣли:

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} u_k^{(0)} &= \sum_{h=1}^{h=p}(\mu_h\omega_{kh} + \nu_h\omega'_{kh}),\\ C_k - J_k &= \sum_{h=1}^{h=p}(\mu_h\eta_{kh} + \nu_h\eta'_{kh}),\end{aligned}\right.$$

и рѣшая эти уравненія относительно μ_h и ν_h, мы найдемъ характеристику $(\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)$ нашей Θ-функціи. Внося изъ (9) въ (8), мы получимъ такое выраженіе $\Theta_1(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)$ чрезъ основную:

$$(10)\qquad \frac{\Theta_1(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)}{\Theta_1(0_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)} = e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}\sum\limits_{h=1}^{h=p}(\mu_h\eta_{kh} + \nu_h\eta'_{kh})u_k}\,\frac{\Theta_0\Big(u_k + \sum\limits_{h=1}^{h=p}(\mu_h\overset{p}{\underset{1}{\omega_{kh}}} + \nu_h\omega'_{kh})\Big)}{\Theta_0\Big(\sum\limits_{h=1}^{h=p}(\mu_h\overset{p}{\underset{1}{\omega_{kh}}} + \nu_h\omega'_{kh})\Big)}.$$

Перемѣнивъ въ этомъ равенствѣ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ на $u_h + \sum\limits_{l=1}^{l=p}(\mu'_l\overset{p}{\underset{1}{\omega_{hl}}} + \nu'_l\omega_{hl})$, и результатъ умноживъ въ обѣихъ частяхъ его на

$$(11)\qquad e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}\sum\limits_{h=1}^{h=p}(\mu'_h\eta_{kh} + \nu'_h\eta'_{kh})u_k},$$

мы получимъ равенство, которое послѣ легкихъ преобразованій на основаніи (10) (см. наше выше цитированное сочиненіе, стр. 126—127) приведется къ слѣдующему:

$$(12)\qquad \frac{\Theta_1(u_h; \mu_h + \overset{p}{\underset{1}{\mu'_h}}, \nu_h + \nu'_h)}{\Theta_1(0_h; \mu_h + \overset{p}{\underset{1}{\mu'_h}}, \nu_h + \nu'_h)} =$$

$$= e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p}\sum\limits_{h=1}^{h=p}(\mu'_h\eta_{kh} + \nu'_h\eta'_{kh})u_k}\,\frac{\Theta_1\Big(u_h + \sum\limits_{l=1}^{l=p}(\mu'_h\omega_{hl} \overset{p}{\underset{1}{+}} \nu'_l\omega'_{hl}); \mu_h, \nu_h\Big)}{\Theta_1\Big(\sum\limits_{l=1}^{l=p}(\mu'_l\omega_{hl} + \overset{p}{\underset{1}{\nu'_l}}\omega'_{hl}); \mu_h, \nu_h\Big)}.$$

Это равенство показываетъ, что по тому же закону, по которому изъ $\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, т. е. съ характеристикою $(0_h, \overset{p}{\underset{1}{0_h}})$, мы вывели $\Theta_1(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)$ — съ

характеристикою $(\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)$, по тому же закону выводится изъ послѣдней новая функція: $\Theta_1(u_h; \mu_h + \overset{p}{\underset{1}{\mu'_h}}, \nu_h + \nu'_h)$, которой характеристика получается изъ характеристики первой чрезъ придачу $\overset{p}{\underset{1}{\mu'_h}}, \nu'_h$ къ соотвѣтственнымъ элементамъ ея.

117. Мы видѣли, что въ случаѣ четной или нечетной $\Theta_1(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)$ элементы характеристики μ_h и ν_h будутъ числа вида $\frac{\alpha}{2}$, гдѣ $\alpha = 0$, или $\alpha = 1$. Въ этомъ случаѣ

$$2\sum_{l=1}^{l=p}(\mu_l\omega_{hl} + \nu_l\omega'_{hl}) \qquad (h = 1, 2, 3 \ldots p) \tag{1}$$

будетъ система періодовъ; а потому, примѣняя къ $\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ равенство (2) § 114, а затѣмъ мѣняя $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ на $u_h - \sum\limits_{l=1}^{l=p}(\mu_l\overset{p}{\underset{1}{\omega_{hl}}} + \nu_l\omega'_{hl})$, мы получимъ формулу:

$$\Theta_0\Big(u_h + \sum_{l=1}^{l=p}(\mu_l\overset{p}{\underset{1}{\omega_{hl}}} + \nu_l\omega'_{hl})\Big) =$$

$$= e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=p}\left\{2\sum\limits_{h=1}^{h=p}(\mu_h\eta_{kh} + \nu_h\eta'_{kh})u_k - 2\mu_k.2\nu_k\pi i\right\}}\,\Theta_0\Big(u_h - \sum_{l=1}^{l=p}(\mu_l\overset{p}{\underset{1}{\omega_{hl}}} + \nu_l\omega_{hl})\Big). \tag{2}$$

Перемѣняя $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ на $-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ въ (10) пред. §, получимъ формулу, которая по внесеніи въ нее $\Theta_0\Big(u_h - \sum\limits_{l=1}^{l=p}(\overset{p}{\underset{1}{\mu_l}}\omega_{hl} + \nu_l\omega'_{hl})\Big)$ изъ (2) (въ виду четности основной Θ-функціи) на основаніи того же (10) пред. § обратится въ такую:

$$\frac{\Theta_1(-u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)}{\Theta_1(0_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)} = e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=p}2\mu_k.2\nu_k\pi i}\,\frac{\Theta_1(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)}{\Theta_1(0_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)}. \tag{3}$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\Theta_1(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h)$ будетъ четная или нечетная, смотря по тому, будетъ ли сумма:

$$\sum_{k=1}^{k=p}2\mu_k.2\nu_k \tag{4}$$

четное число, или нечетное. Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ $\mu_k = \frac{\alpha_k}{2}$, $\nu_k = \frac{\beta_k}{2}$; гдѣ α_k и β_k суть или 0 или 1, то (4) короче такъ напишется:

(5) $$\sum_{k=1}^{k=p} \alpha_k \beta_k;$$

слѣд., смотря по тому, будетъ ли эта сумма равна четному числу или нечетному, функція

(6) $$\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_k}}; \frac{\alpha_h}{2}, \frac{\beta_h}{2})$$

будетъ четною, или нечетною.

118. Изъ формулы (6) § 75 вытекаютъ такія соотношенія между модулями періодичности общаго основнаго интеграла второго рода и спеціальнаго: $\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^{\circ}_{k}$:

(1) $$\eta_{kh} = \eta^{(0)}_{kh} + \sum_{l=1}^{l=p} c_{kl}\omega_{lh},$$

(2) $$\eta'_{kh} = \eta'^{(0)}_{kh} + \sum_{l=1}^{l=p} c_{kl}\omega'_{lh},$$

гдѣ $\eta^{(0)}_{kh}$ и $\eta'^{(0)}_{kh}$ модули періодичности этого спеціальнаго основнаго интеграла второго рода. Здѣсь произвольныя постоянныя c_{kl} подчинены только одному условію:

(3) $$c_{kl} = c_{lk}.$$

Ихъ можно такъ опредѣлить, что всѣ η_{kh} $(k, h = 1, 2, 3 \ldots p)$ будутъ $=0$; для этого стоитъ только рѣшить систему уравненій:

(4) $$0 = \eta^{(0)}_{kh} + \sum_{l=1}^{l=p} c_{kl}\omega_{lh}. \quad (h = 1, 2, 3 \ldots p)$$

Означая чрезъ Ω опредѣлитель этой системы уравненій, слѣд., полагая

(5) $$\Omega = \left|\omega_{lh}\right| \quad (l, h = 1, 2, 3 \ldots p)$$

и чрезъ Ω_{lh} его миноръ, отвѣчающій элементу ω_{lh}, раздѣленный на самый опредѣлитель, такъ что будетъ

$$\Omega_{lh} = \frac{1}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial\omega_{lh}}, \tag{6}$$

мы будемъ имѣть изъ (4):

$$c_{kg} = -\sum_{h=1}^{h=p} \Omega_{gh}\eta^{(0)}_{kh}. \tag{7}$$

Нетрудно провѣрить, что опредѣляемыя этою формулою значенія c_{kl} удовлетворяютъ равенству (3); [эту повѣрку читатель найдетъ на страницѣ 135 нашего вышецитированнаго сочиненія: „Обращеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ“]. Внося изъ (7) во (2) этого §, будемъ имѣть:

$$\eta'_{kh} = \eta'^{(0)}_{kh} - \sum_{l=1}^{l=p}\omega'_{lh}\sum_{j=1}^{j=p}\Omega_{kj}\eta^{(0)}_{lj}. \tag{8}$$

Помножая это на $u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}$ и суммируя по k отъ 1 до p, мы получимъ показатель при e во второмъ изъ (3) § 114 въ примѣненіи къ основной Θ-функціи, т. е. для которой $\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}} = 0$, $\overset{p}{\underset{1}{\nu_h}} = 0$, въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{k=p}\eta'_{kh}(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}) = \\ &= \sum_{k=1}^{k=p}\eta'^{(0)}_{kh}(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}) - \sum_{l=1}^{l=p}\omega'_{lh}\sum_{j=1}^{j=p}\eta^{(0)}_{lj}\sum_{k=1}^{k=p}\Omega_{kj}(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}).\end{aligned} \tag{9}$$

Это выраженіе значительно упростится, если положить:

$$\sum_{k=1}^{k=p}\Omega_{kj}u_k = v_j, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{k=p}\Omega_{kj}\omega'_{kh} = \tau_{jh}; \tag{11}$$

при этомъ будетъ, что важно замѣтить:

$$\tau_{jh} = \tau_{hj}. \tag{12}$$

Дѣйствительно, равенство (1) § 84 можно такъ представить:

$$\sum_{l=1}^{l=p}\omega'_{gl}\omega_{kl}=\sum_{l=1}^{l=p}\omega_{gl}\omega'_{kl}; \tag{13}$$

помножимъ это на $\Omega_{gj}\Omega_{kh}$ и просуммируемъ по g и k отъ 1 до p: будемъ имѣть, мѣняя порядокъ суммированія:

$$\sum_{l=1}^{l=p}\sum_{g=1}^{g=p}\Omega_{gj}\omega'_{gl}\cdot\sum_{k=1}^{k=p}\Omega_{kh}\omega_{kl}=\sum_{l=1}^{l=p}\sum_{g=1}^{g=p}\Omega_{gj}\omega_{gl}\sum_{k=1}^{k=p}\Omega_{kh}\omega'_{kl}; \tag{14}$$

это же, въ силу того, что

$$\sum_{k=1}^{k=p}\Omega_{kh}\omega_{kl}=0 \text{ при } h\gtrless l, \text{ и } =1 \text{ при } l=h, \tag{15}$$

приведется къ такому:

$$\sum_{g=1}^{g=p}\Omega_{gj}\omega'_{gh}=\sum_{g=1}^{g=p}\Omega_{kh}\omega'_{kj}; \tag{16}$$

это же по (11) приведется къ слѣдующему:

$$\tau_{jh}=\tau_{hj}, \tag{17}$$

что согласно съ (12). — Рѣшая (10) по u_g и (11) по ω'_{gh}, по (15) мы получимъ:

$$u_g=\sum_{j=1}^{j=p}\omega_{gj}v_j, \tag{18}$$

$$\omega'_{gh}=\sum_{j=1}^{j=p}\omega_{gj}\tau_{jh}. \tag{19}$$

На основаніи (10), (11), (18) и (19) равенство (9) приметъ такой видъ:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{k=p}\eta'_{kh}(u_k+\frac{1}{2}\omega'_{kh})=\\ =\sum_{k=1}^{k=p}\eta'^{(0)}_{kh}\sum_{j=1}^{j=p}\omega_{kj}(v_j+\frac{1}{2}\tau_{jh})-\sum_{l=1}^{l=p}\omega'_{lh}\sum_{j=1}^{j=p}\eta^{(0)}_{lj}(v_j+\frac{1}{2}\tau_{jh}),\end{gathered} \tag{20}$$

или, перемѣняя l на k во второмъ членѣ, что, очевидно, мы въ правѣ сдѣлать:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{k=p}\eta'_{kh}(u_k+\frac{1}{2}\omega'_{kh})=\sum_{k=1}^{k=p}\sum_{j=1}^{j=p}(\eta'^{(0)}_{kh}\omega_{kj}-\omega'_{kh}\eta^{(0)}_{kj})(v_j+\frac{1}{2}\tau_{jh})=\\ =\sum_{j=1}^{j=p}(v_j+\frac{1}{2}\tau_{jh})\sum_{k=1}^{k=p}(\eta'^{(0)}_{kh}\omega_{kj}-\omega'_{kh}\eta^{(0)}_{kj}),\end{gathered} \tag{21}$$

это же на основаніи (II) и (III) § 81 приводится къ такому:

$$\sum_{k=1}^{k=p}\eta'_{kh}(u_k+\frac{1}{2}\omega'_{kh})=-2\pi i\,(v_h+\frac{1}{2}\tau_{hh}), \tag{22}$$

гдѣ по (11)

$$\tau_{hh}=\sum_{k=1}^{k=p}\Omega_{kh}\omega'_{kh}. \tag{23}$$

119. Внося въ (10) пред. § $u_k+\omega_{kh}$ вмѣсто u_k и отличая на минуту новое значеніе v_j приписанною на верху буквою h въ скобкахъ, мы будемъ имѣть по (10) и (15) пред. §:

$$\left.\begin{aligned}v_j^{(h)}&=v_j,\\ v_h^{(h)}&=v_h+1.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Внося въ (10) пред. § $u_k+\omega'_{kh}$ вмѣсто u_k и означая чрезъ $v_j^{(h')}$ новое значеніе v_j, на основаніи (11) и (15) получимъ:

$$v_j^{(h')}=v_j+\tau_{jh}. \tag{2}$$

Вводя теперь перемѣнныя $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$ вмѣсто $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ въ уравненія (3) § 114 въ примѣненіи къ разсматриваемому частному виду функціи $\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, который теперь, разсматривая какъ функцію отъ $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$, мы означимъ чрезъ $\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}})$, такъ что будетъ

$$\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})=\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}), \tag{3}$$

мы будемъ имѣть:

$$(4)\qquad \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_{k-1}, v_k+1, v_{k+1}, \ldots v_p) = \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_k, \ldots v_p);$$

$$(5)\qquad \vartheta(v_1+\tau_{k1}, v_2+\tau_{k2}, \ldots, v_p+\tau_{kp}) = e^{-2\pi i\left(v_k+\frac{1}{2}\tau_{kk}\right)}\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p).$$

Первое изъ нихъ безъ труда обобщается въ такое:

$$(6)\qquad \vartheta(v_1+m_1, v_2+m_2, \ldots v_p+m_p) = \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p);$$

во второмъ мы перемѣнимъ n_k разъ $\overset{p}{\underset{1}{v_i}}$ на $v_i+\tau_{ki}$ и перемножимъ результаты; получимъ:

$$(7)\qquad \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h+n_k\tau_{kh}}}) = e^{-2\pi i\left(n_k v_k+\frac{1}{2}n_k^2\tau_{kk}\right)}\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}).$$

Точно также будемъ имѣть:

$$(8)\qquad \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h+n_l\tau_{lh}}}) = e^{-2\pi i\left(n_l v_l+\frac{1}{2}n_l^2\tau_{ll}\right)}\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}});$$

перемѣняя здѣсь v_h на $v_h+n_k\tau_{hk}$ и перемножая съ предыдущимъ, по сокращеніи получимъ:

$$(9)\qquad \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h+n_k\tau_{hk}+n_l\tau_{hl}}}) = e^{-2\pi i\left(n_k v_k+n_l v_l+\frac{1}{2}(\tau_{kk}n_k^2+2\tau_{kl}n_k n_l+\tau_{ll}n_l^2)\right)}\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}).$$

Чрезъ повтореніе этого пріема p разъ, получимъ формулу:

$$(10)\qquad \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h+\sum_{j=1}^{j=p}n_j\tau_{hj}}}) = e^{-2\pi i\left(\sum_{j=1}^{j=p}n_j v_j+\frac{1}{2}\varphi(\overset{p}{\underset{1}{n_h}})\right)}\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}),$$

гдѣ для краткости положено

$$(11)\qquad \varphi(\overset{p}{\underset{1}{n_h}}) = \sum_{k=1}^{k=p}\sum_{l=1}^{l=p}\tau_{kl}n_k n_l.$$

Перемѣняя здѣсь $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$ на $\overset{p}{\underset{1}{v_h+m_h}}$, гдѣ $\overset{p}{\underset{1}{m_h}}$ цѣлыя числа, по (6), и имѣя въ виду, что $\sum_{j=1}^{j=p}n_j m_j =$ цѣлому числу, мы получимъ самую общую формулу:

$$\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h+m_h+\sum_{j=1}^{j=p}n_j\tau_{hj}}}) = e^{-\pi i\sum_{k=1}^{k=p}n_k\left(2v_k+\sum_{l=1}^{l=p}\tau_{kl}n_l\right)}\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}),\qquad (12)$$

(гдѣ вмѣсто $\varphi(\overset{p}{\underset{1}{n_h}})$ подставлено его выраженіе изъ (11)).

120. Изъ (4) пред. § видно, что $\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}})$ есть періодическая функція отъ $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$, и такъ какъ она всегда конечная, то по теоремѣ *Фурье* разлагается въ рядъ такого вида:

$$\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2}\cdots\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_p}A_{m_1 m_2\ldots m_p}e^{2\pi i\sum_{k=1}^{k=p}m_k v_k}.\qquad (1)$$

Внося въ (12) пред. § вмѣсто $\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}})$ въ обѣ части ея разложеніе, отсюда взятое (принимая въ (12) $\overset{p}{\underset{1}{m_h}}=0$), и употребляя сокращенное обозначеніе суммъ и коэффиціентовъ, будемъ имѣть:

$$\Big(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_i}\Big)_1^p A_{\overset{p}{\underset{1}{m_h}}}e^{\pi i\sum_{k=1}^{k=p}2m_k v_k} = \Big(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_i}\Big)_1^p A_{\overset{p}{\underset{1}{m_h}}}e^{\pi i\sum_{k=1}^{k=p}\left((m_k+n_k)2v_k+(2m_k+n_k)\sum_{l=1}^{l=p}\tau_{kl}n_l\right)}.\qquad (2)$$

Сравнивая въ обѣихъ частяхъ коэффиціенты при $e^{\pi i\sum_{k=1}^{k=p}(m_k+n_k)2v_k}$, получимъ:

$$A_{\overset{p}{\underset{1}{m_h+n_h}}} = A_{\overset{p}{\underset{1}{m_h}}}e^{\pi i\sum_{k=1}^{k=p}(2m_k+n_k)\sum_{l=1}^{l=p}\tau_{kl}n_l},\qquad (3)$$

для всякаго значенія $\overset{p}{\underset{1}{m_h}}$. Полагая $\overset{p}{\underset{1}{m_h}}=0$, получимъ отсюда:

$$A_{\overset{p}{\underset{1}{n_h}}} = A_{\overset{p}{\underset{1}{0_h}}}e^{\pi i\sum_{k=1}^{k=p}\sum_{l=1}^{l=p}\tau_{kl}n_k n_l}.\qquad (4)$$

Опредѣленные по этой формулѣ коэффиціенты будутъ удовлетворять уравненію (3), ибо, подставляя изъ (4) (послѣ перемѣны n_h на m_h) и имѣя въ виду, что

$$\sum_{k=1}^{k=p}\sum_{l=1}^{l=p}(m_k m_l + 2m_k n_l + n_k n_l) = \sum_{k=1}^{k=p}\sum_{l=1}^{l=p}(m_k + n_k)(m_l + n_l), \tag{5}$$

мы получимъ для $A_{m_h \overset{p}{\underset{1}{+}} n_h}$ выраженіе, которое получится изъ (4) чрезъ перемѣну $\overset{p}{\underset{1}{n_h}}$ на $m_h \overset{p}{\underset{1}{+}} n_h$. — Внося изъ (4) выраженіе коэффиціентовъ въ (1), получимъ:

$$\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}) = \Big(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_i}\Big)_1^p e^{\pi i \sum\limits_{k=1}^{k=p} m_k (2v_k + \sum\limits_{l=1}^{l=p}\tau_{kl} m_l)}, \tag{6}$$

если примемъ еще $A^p_{\underset{1}{0_h}} = 1$ для окончательнаго опредѣленія функціи.

121. Такимъ образомъ мы получили аналитическое выраженіе Якобіевой Θ-функціи, а чрезъ нее выразятся легко и всѣ другія, и прежде всѣхъ основная для какихъ угодно c_{kg}. Для этого стоитъ только c_{kl} разбить на два слагаемыхъ, изъ которыхъ одно будетъ то частное его значеніе, опредѣляемою формулою (7) § 118, которое оно получаетъ для Якобіевой ϑ-функціи, т. е. положить:

$$c_{kg} = -\sum_{h=1}^{h=p}\Omega_{gh}\eta^{(0)}_{kh} + b_{kg}; \tag{1}$$

въ силу же (6) § 75, имѣя въ виду (5) § 115, будемъ имѣть:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})^0_k + \sum_{j=1}^{j=p} c_{kj}(u_j - c_j); \tag{2}$$

внося вмѣсто c_{kj} его значеніе изъ предыдущаго, получимъ:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})^0_k - \sum_{j=1}^{j=p}\sum_{h=1}^{h=p}\Omega_{jh}\eta^{(0)}_{kh}(u_j - c_j) + \sum_{j=1}^{j=p} b_{kj}(u_j - c_j), \tag{3}$$

или, полагая

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})^{(1)}_k = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})^0_k - \sum_{j=1}^{j=p}\sum_{h=1}^{h=p}\Omega_{jh}\eta^{(0)}_{kh}(u_j - c_j), \tag{4}$$

короче:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})^{(1)}_k + \sum_{j=1}^{j=p} b_{kj}(u_j - c_j). \tag{5}$$

Полагая здѣсь $u_h = \overset{p}{\underset{1}{c_h}} + 2\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h$, будемъ имѣть:

$$J_k = -\frac{1}{2}J(c_h \overset{p}{\underset{1}{+}} 2\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k = J^{(1)}_k - \sum_{j=1}^{j=p} b_{kj}\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_j, \tag{6}$$

гдѣ по (4) будетъ:

$$J^{(1)}_k = -\frac{1}{2}J(c_h \overset{p}{\underset{1}{+}} 2\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)^{(1)}_k = -\frac{1}{2}J(c_h \overset{p}{\underset{1}{+}} 2\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)^0_k + \sum_{j=1}^{j=p}\sum_{h=1}^{h=p}\Omega_{jh}\eta^{(0)}_{kh}\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_j; \tag{7}$$

Перемѣняя въ (5) $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ на $u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h$ и складывая съ (6), получимъ:

$$J_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)_k = J^{(1)}_k + J(u_k \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)^{(1)}_k + \sum_{j=1}^{j=p} b_{kj}(u_j - c_j). \tag{8}$$

Дифференцируя это по u_l, въ виду того, что

$$\frac{\partial\Big(J_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)\Big)_k}{\partial u_l} = \frac{\partial^2\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_l\,\partial u_k}, \tag{9}$$

и, какъ то слѣдуетъ изъ §§ 116 и 118:

$$\frac{\partial\Big(J^{(1)}_k + J(u_k \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h)\Big)_k}{\partial u_l} = \frac{\partial^2\overline{\Theta}_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_l\,\partial u_k}, \tag{10}$$

гдѣ

$$\overline{\Theta}_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}), \tag{11}$$

мы получимъ:

$$\frac{\partial^2\log\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_l\,\partial u_k} = \frac{\partial^2\log\overline{\Theta}_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_l\,\partial u_k} + b_{kl}, \tag{12}$$

откуда слѣдуетъ въ виду (27) § 115:

$$\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \frac{\overline{\Theta}_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\overline{\Theta}_0(\overset{p}{\underset{1}{0_h}})} e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=p}\sum\limits_{l=1}^{l=p} b_{kl}u_k u_l}. \tag{13}$$

Вводя сюда перемѣнныя $\overset{p}{\underset{1}{v}}_h$ при помощи (18) § 118, и полагая

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=p}\sum_{l=1}^{l=p} b_{kl}\omega_{kj}\omega_{lh} = \pi i.\beta_{jh}, \tag{14}$$

мы получимъ окончательно:

$$\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u}}_h) = \frac{\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v}}_h)}{\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{0}}_h)} e^{\pi i \sum\limits_{j=1}^{j=p}\sum\limits_{h=1}^{h=p}\beta_{hj}v_j v_h} \tag{15}$$

Эта формула сводитъ нашу основную Θ-функцію на Якобіевскую $\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v}}_h)$, чрезъ основную же можетъ быть по формулѣ (10) § 116 выражена всякая другая Θ-функція съ какими угодно элементами характеристики $(\mu_h, \overset{p}{\underset{1}{}} \nu_h)$.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ.

Стр.	*Строка*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
3	въ лѣвой	части равенствъ (10), (11), (12) и (13) вмѣсто f должно быть f	
4	6	dx	$d\omega_x$
„	17	рода	рода,
13	9	$y_0^{(0)}$	$y_i^{(0)}$
28	2 снизу	уравненій	уравненія
30	20	$\frac{\beta-\beta}{\alpha_i-\alpha}$	$\frac{\beta-\beta_i}{\alpha_i-\alpha}$
36	8	такихъ	такія
40	27	$\beta'=0$, до	$\beta'=0$ и идущую до
42	19	(8)	(7)
45	9	$f'(x,y,v,\lambda)=0$	$f'(x,y,v,\lambda')=0$
46	5	уравненій и	уравненій (1) и
56	12	$\eta'=v_1'+\eta''$	$v'=v_1'+\eta''$
72	17	x'	x
75	1	$F_1(x,y)$	$F_1(x,\bar{y})$
„	6	$f_3(\bar{x},\bar{y})$	$f_3(\overset{\mu}{\bar{x}},\overset{\nu}{\bar{y}})$
76	2	$\frac{\partial F_1(\xi,v)}{\partial v}$	$\frac{\partial F_1(\xi'^p,v)}{\partial v}$
80	19	$(\delta_i-1)p$	$(\delta_i'-1)p$
100	3 снизу	$\lvert\varphi_j(a_i,b_i)\rvert$	$\lvert\varphi_j(\overset{m-2}{a_i},\overset{n-2}{b_i})\rvert$
103	3 „	$P_{\xi\eta}$	$P_{\xi\zeta}$
105	1 „	$+$	$-$
110	5	$P_{\xi_1',y_{\xi_1'}}(x,y;a_i,\overset{p}{\underset{1}{}}b_i)$	$P_{\xi_1',\eta}(x,y;a_i,\overset{p}{\underset{1}{}}b_i)$
„	9	η;	(η, y_η) въ ∞^1;
„	10	функція и	функція по раздѣленіи на $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ и

Стр.	Строка	Напечатано:	Должно быть:
110	12	$\frac{f_{\nu+\nu'-1}(x,y)}{\varphi_{\nu+\nu'-1}(x)}$ и	$\frac{f_{\nu+\nu'-1}(x,y)}{\varphi_{\nu+\nu'-1}(x)} : \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ и
113	между строками 3 и 4 снизу вставить:	и остальную постоянную изъ условія, чтобы функція не обращалась въ ∞ въ точкѣ $(\eta; y_\eta)$.	
115	11	(3)	(3')
116	10	$x - a^k$	$(x - a_k)^2$
»	въ формулахъ (9) и (10) зачеркнуть черту и знаменателя.		
»	1 снизу	$(\mu_{jk} =$	$\mu_{jk} =$
132	2 »	$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi\eta}$	$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi_k\eta}$
133	2 »	Π	Π
138	7 »	$\omega_k =$	$\bar{\omega}_k =$
154	3 »	$\underset{B_g}{\mathrm{III}}{}^{0}_{\xi}$	$\underset{(A_g)}{\mathrm{III}}{}^{0}_{\xi,\xi_0}$
158	15	(4)	(5)
160	1 снизу	Абелемъ:	Абелемъ
162	7	$\frac{dx_i}{\frac{\partial F(x_i,y_i)}{\partial y_i}} -$	$\frac{dx_i}{\frac{\partial F(x_i,y_i)}{\partial y_i}} +$
»	8	$-\Pi$	$+\Pi$
»	»	$\frac{\chi(x_0,y_0)}{\psi(x_0,y_0)}$	$\frac{\chi(\eta,y_\eta)}{\psi(\eta,y_\eta)}$
»	13	по верхнимъ	по нижнимъ и верхнимъ
163	5 снизу	$\sum_{i=1}^{i=p} \overset{x_i}{\underset{\alpha}{\mathrm{I}_k}}$	$\sum_{i=1}^{i=p} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}}$
164	8 »	$\frac{\chi(x,y)}{\psi(x,y)}$	$\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}$
168	1 »	$\overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}}$	$\overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_k}}$
173	13	для точекъ	до точекъ
180	17	(равно	(равно-
181	1 снизу	пред. $\frac{P_{\xi+\Delta\xi,\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{\Delta\xi}$	пред. $\frac{P_{\xi+\Delta\xi,\xi}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{\Delta\xi}$

Стр.	Строка	Напечатано:	Должно быть:
191	1 снизу	$\Phi(u_h \overset{p}{\mid} u_h^{(0)}; \xi)$,	$\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{\mid}} u_h^{(0)}; \xi)$,
192	1 »	$\overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}}$	$\overset{x_0}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_k}}$
193	2 »	Но,	Но какъ,
195	6 »	$\bar{\omega}_h$.	$\bar{\omega}_k$.
		$\Phi(u_h - v_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \overset{p}{\underset{1}{\mid}} u_h^{(0)})$	$\Phi(u_h - \bar{v}_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \overset{p}{\underset{1}{\mid}} u_h^{(0)})$
196	3	e	e
200	2	$(u_k \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})$.	$(u_k \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}})$ и $(u_k^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}})$.
»	11	проводятъ	приводятъ
212	10	$m''n''$	$m''_k n''_k$
»	13	$m'' = m + m'$	$m''_k = m_k + m'_k$
»	14	$n'' = n + n'$	$n''_k = n_k + n'_k$
214	3 снизу	*элементами*	*элементомъ*
221	3 »	l	e
223	13	$\nu_l \omega_{hl}$	$\nu_l \omega'_{hl}$
224	13	$\eta_{kh} = \eta^{(0)}_{kh} + \sum_{l=1}^{l=p} c_{kl}\omega_{lh}$	$\eta'_{kh} = \eta'^{(0)}_{kh} + \sum_{l=1}^{l=p} c_{kl}\omega'_{lh}$

ВНОВЬ ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ.

Стр.	*Строка*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
7	8	$\overset{m}{f_0}(x_0)y^n$	$\overset{m}{f_0}(x)y^n$
8	28	нѣхъ	ныхъ
12	6	(4)	(2)
27	2 сн.	$\varphi_{i,j}(x)$	$\varphi_{i,j}(x, y)$
35	2 сн.	$\varphi_h^{(i,j)}(x, y)$	$\Phi_h^{(i,j)}(x, y)$
36	9	$\varphi_h^{(i,j)}(x, y)$	$\Phi_h^{(i,j)}(x, y)$
39	4 сн.	$\mu = \frac{p}{q}$	$\mu = \frac{q}{p}$
44	17	$f_2(x, y, v)$	$f_3(x, y, v)$
45	21	$\Theta'(x) : \overline{\Theta}'(x)$	$\Theta(x) : \overline{\Theta}'(x)$
51	24	отъ слова „остановимся“	зачеркнуть всё до конца §.
53	9 сн.	$\alpha' \qquad \alpha^{(g-1)}$	$\alpha_0' \qquad \alpha_0^{(g-1)}$
„	8 сн.	k_2	k''
„	7 сн.	отъ словъ „Оно равняется“	зачеркнуть всё до конца §.
57	3 сн.	$\sum'_{g-1}$	$\sum_{g-1}$
68	4	стр. 103,	стр. 203,
69	16	слѣд.,	и
70	18	$\Psi(x)$	$\Psi(x')$
74	4	поверхности.	поверхности по отношенію къ линіи α_k.
„	5 сн.	§ 24	§ 34
75	2	$y = 0;$	$y = \infty;$
93	7	$\left\| \varphi_i(\alpha_j, \beta_j) \right\|$	$\left\| \varphi_i(\overset{m-2}{\alpha_j}, \overset{n-2}{\beta_j}) \right\|$
96	5	$\psi(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})$	$\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$
101	1	[(19)]	[(9)]
119	11	онѣ вполнѣ опредѣляются.	она вполнѣ опредѣляется.
121	4	$P_{\xi'_h \eta}$	$P_{\xi_h \eta}$
126	1 сн.	$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y_\xi}$	$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$
127	14	§ 58:	§ 57:

Стр.	*Строка*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
130	21	(8)	(13)
131	1	(4)	(4) изъ (1) § 73
132	1	(9) пред. §,	(11) § 73,
„	3	$\sum_{k=1}^{k=p} \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k \cdot \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k.$	$\sum_{k=1}^{k=p} \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k \cdot \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k.$
133	6 и 9	$\Pi \frac{f(x,y)}{\varphi(x)\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^0_{\infty,\eta}$	$\Pi \frac{f(z,y_z)}{\varphi(z)\frac{\partial F(z,y_z)}{\partial y_z}} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^0_{z,\eta}$
164	10	$x = x_i (i = 1,$	$x = x_i,\ y = y_i\ (i = 1,$
174	10	(4)	(8)
175	4	§ 73 будемъ	§ 73 и (9) § 75 будемъ
179	3 сн.	$\varphi_i(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$	$\varphi_i(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}})$
192	1 сн.	I_h	I_k
193	12	$P_{\xi,\eta'}($	$P_{\xi,\alpha'}($
213	3	(20)	(21)
214	7	$\sum_{k=1}^{k=p}\bar{\eta}_k(u_k+\frac{1}{2}\bar{\omega}_k) - m_k n_k \pi i)$	$\sum_{k=1}^{k=p}(\bar{\eta}_k(u_k+\frac{1}{2}\bar{\omega}_k) - m_k n_k \pi i)$
221	8	$d\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{\vert}} u_h^{(0)})$	$d\Phi_1(u_h \overset{p}{\underset{1}{\vert}} u_h^{(0)})$
„	3 сн.	(4)	(5)
222	3	$C_k - J_k =$	$J_k - C_k =$
„		въ формулахъ (10), (11) и (12) поставить знакъ — предъ двойной суммой въ показателѣ степени числа *e*.	
223	13	$e^{-\sum_{k=1}^{k=p}}$	$e^{\sum_{k=1}^{k=p}}$
227	7	(11)	(10)
234	10	$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^0_{\xi k \eta}$	$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^0_{\xi h \eta}$
235	7	$(u_k \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h).$	$(u_k \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k).$

СООБЩЕНІЯ
Харьковскаго Математическаго Общества

издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на четвертый томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 нумеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые три тома 2-й серіи (18 выпусковъ), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Изданіе Харьковскаго Математическаго Общества:

Общая задача объ устойчивости движенія. Разсужденіе *А. Ляпунова.* 4°. Харьковъ, 1892 г. **Ц. 3** р.