

# СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ И СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

---

Д. Р. ТИЛЛИ

ДЖ. ТИЛЛИ

**D. R. TILLEY, J. TILLEY**

Department of Physics  
University of Essex

**SUPERFLUIDITY  
AND SUPERCONDUCTIVITY**

---

**VAN NOSTRAND REINHOLD COMPANY**  
New York—Cincinnati—Toronto—London—Melbourne  
1974

**Д. Р. ТИЛЛИ, ДЖ. ТИЛЛИ**

---

# **СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ И СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ**

Перевод с английского  
**Н. И. ГИНЗБУРГ**

Под редакцией  
акад. **В. Л. ГИНЗБУРГА**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
МОСКВА 1977**

Явления сверхпроводимости и сверхтекучести, имеющие между собой много общего, привлекают внимание все более широкого круга специалистов — как теоретиков, так и практиков. В предлагаемой книге эти явления рассматриваются параллельно. Не прибегая к сложным математическим расчетам, авторы дают свежее и яркое описание свойств сверхпроводников и сверхтекучего гелия.

Книга рассчитана на студентов-старшекурсников и аспирантов, изучающих физику низких температур; вместе с тем она представляет интерес для специалистов в этой области, а также для читателей-неспециалистов, желающих познакомиться с одним из наиболее важных направлений современной физики.

*Редакция литературы по физике*

© David R. Tilley and John Tilley 1974

© Перевод на русский язык, «Мир», 1977

И 20403-067  
Т 041(01)-77 67-77

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Среди многочисленных интересных и важных эффектов и объектов, открытых в физике нашего века, сверхпроводимость и сверхтекучесть занимают видное, можно даже сказать, выдающееся место. На это имеется много причин. Одной из них можно считать неожиданность и необычность с точки зрения классических представлений обнаружения состояний, в которых электрический ток течет в металле без сопротивления (сверхпроводимость) или жидкость (конкретно гелий II) протекает через трубки или отверстия без трения (сверхтекучесть). Вторая причина — тот факт, что сверхпроводимость оставалась загадочным, совершенно непонятым явлением в течение нескольких десятилетий. Действительно, сверхпроводимость была открыта в 1911 г., а подлинное и достаточно полное понимание природы этого явления на микроскопическом уровне было достигнуто лишь в 1957 г. (правда, макроскопическая теория сверхпроводимости была в значительной мере развита ранее, но это обстоятельство скорее лишь подчеркивает всю нетривиальность микротeorии сверхпроводимости). После того как покров тайны со сверхпроводимости был снят, можно было ожидать, что, как в ряде других подобных случаев, изучение сверхпроводимости перейдет в категорию «тыловых» физических направлений. Но этого отнюдь не произошло — такова третья причина, привлекающая к сверхпроводимости самое пристальное внимание и до сих пор. Рамки предисловия не дают возможности подробнее останавливаться на тех факторах, которые привели к такой «живучести» проблемы сверхпроводимости, а также сверхтекучести. Ограничимся тем, что упомянем о многогранности соответствующих задач, об их физической глубине, о появлении многочисленных практических применений сверхпроводимости и, наконец, о возникновении проблемы высокотемпературной сверхпроводимости и переходе к изучению сверхтекучести и сверхпроводимости в нейтронных звездах и сверхтекучести в жидком  $He^3$ .

В подобной ситуации вполне естественно, что число публикаций и, в частности, монографий и обзоров, посвященных сверхпроводимости и сверхтекучести, не только не уменьшается, но возрастает. Если ограничиться сейчас упоминанием лишь последних изданных у нас переводных книг, предназначенных для достаточно широкого круга физиков и инженеров, то нужно указать на следующие: Э. Линтон, «Сверхпроводимость» («Мир», 1971), А. Роуз-Инс и Е. Родерик, «Введение в физику сверхпроводимости» («Мир», 1972) и В. Буккель, «Сверхпроводимость» («Мир», 1975). Книга Д. Р. Тилли и Дж. Тилли в общем как раз такого же типа. Ее наиболее характерное и важное отличие состоит в параллельном освещении сверхпроводимости и сверхтекучести. Поскольку оба эти явления родственны и, например,  $\downarrow$  сверхпроводимость

можно с полным основанием называть сверхтекучестью электронов (или электронной жидкости) в металлах, совместное изложение вопросов, касающихся сверхтекучести и сверхпроводимости, представляется вполне оправданным и полезным, особенно для учебника, учебного пособия или вообще книги, предназначенной для первоначального ознакомления с предметом (позволю себе заметить, что уже очень давно придерживаюсь такой точки зрения, нашедшей известное отражение в моей книге «Сверхпроводимость», изд-во АН СССР, 1946).

Книга Д. Р. Тилли и Дж. Тилли имеет и другие особенности. Здесь и наличие ряда задач (к сожалению, без решений, которые были бы полезны в ряде случаев), и воспроизведение графиков из многих цитируемых работ и т. д. В общем если эту книгу нельзя назвать оригинальной в смысле наличия принципиально нового, неизвестного из литературы материала (чего, конечно, и нельзя требовать или даже ожидать от книг подобного типа), то ее можно охарактеризовать как свежую, отнюдь не дублирующую уже известные монографии и учебники. К тому же нужно отметить, что книги, посвященной общезначимому и достаточно современному освещению проблемы сверхтекучести, на русском языке вообще нет.

Не будем здесь сколько-нибудь подробно останавливаться на содержании книги, поскольку уже оглавление дает об этом достаточное представление. В целом книга посвящена изложению основных экспериментальных данных о сверхпроводимости и о сверхтекучести гелия II, которое сопровождается довольно подробным освещением макроскопической теории. Последняя развивается в основном в упрощенной форме, но указываются также результаты более строгих расчетов. К сожалению, микротехники сверхпроводимости уделено мало места (она излагается в основном в приложении, и к тому же на уровне первоначальной теории, развитой еще в 1957 г.). На сверхтекучести в нейтронных звездах и в  $\text{He}^3$  авторы также останавливаются лишь очень кратко; последнее относится и к такому важному вопросу, как флуктуационные эффекты в сверхпроводниках (§ 6.10). В какой-то мере это связано с тем, что книга была закончена в 1973 г. Правда, для русского ее издания авторы прислали несколько примечаний, не говоря об исправлении опечаток и дополнительных ссылок на литературу. Перевод выполнен по возможности точно, а примечания редактора сравнительно немногочисленны и сделаны лишь тогда, когда это казалось необходимым (добавленные редактором ссылки отмечены двумя звездочками).

Выше были отмечены не только сильные, но и слабые стороны книги. Однако во избежание недоразумений лишней раз подчеркну, что считаю книгу Д. Р. Тилли и Дж. Тилли в целом очень полезной и хорошей. Ее появление на русском языке представляется полностью оправданным.

*В. Л. Гинзбург*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Довольно давно установлено существование явно выраженного сходства между сверхтекучим гелием и сверхпроводниками. Главная характерная общая их черта — способность сохранять в течение долгого времени постоянную скорость потоков частиц в отсутствие каких-либо движущих сил. Такие потоки, в которых участвует большое число частиц, являются единственным известным примером макроскопического движения в системе, не сопровождающегося быстрым разрушением в результате процессов диссипации. В своей известной книге Лондон впервые подчеркнул, что сверхпроводящие токи нужно рассматривать как квантовые токи; в настоящее время такая точка зрения подтверждена экспериментами по квантованию циркуляции и магнитного потока.

Для описания сконденсированных частиц в любой системе мы пользуемся макроскопической волновой функцией. Волновая функция является комплексной величиной: квадрат ее амплитуды пропорционален плотности сверхтекучей жидкости или концентрации сверхпроводящих электронов; градиент ее фазы пропорционален скорости сверхтекучей жидкости или сверхпроводящему току. В настоящей книге сделана попытка показать, как можно параллельно с общей точки зрения развить макроскопические теории жидкого гелия и сверхпроводимости.

Книга рассчитана главным образом на студентов и аспирантов, начинающих теоретические или экспериментальные исследования в области физики низких температур. Мы полагаем, что для каждого, кто занимается либо сверхпроводимостью, либо жидким гелием, полезно знать связь между ними. Известен целый ряд примеров, когда открытия в одной области стимулировали работу в другой. Мы надеемся, кроме того, что отдельные части книги окажутся полезными студентам, слушающим курсы по физике низких температур.

Чтобы книга была понятна возможно более широкому кругу читателей, мы избегали сложных математических вычислений. Мы не пытались излагать микроскопическую теорию сверхтекучести или сверхпроводимости, но краткое изложение теории БКШ можно найти в приложении; соответствующей же микроскопической теории жидкого гелия пока еще нет. Вместе с тем мы довольно полно излагаем основы теории Гинзбурга — Ландау и надеемся, что это окажется полезным.

В конце многих глав имеются задачи, выбранные главным образом так, чтобы они дополняли текст. Выражения даются в системе СИ, но, приводя экспериментальные результаты, мы не были столь педантичны и не всегда переходили к этой системе. В частности, магнитное поле указывается в теслах или в гауссах, а не в А/м.

При создании книги один из авторов, Дэвид Тилли, все время помнил, сколь многим он обязан друзьям и сотрудникам, проработавшим с ним много лет, и особенно Джону Болдуину и Терри Кларку, вместе с которыми он узнал большую часть того, что ему известно об обсуждаемых проблемах.

Аналогично Джон Тилли обязан своему давнишнему другу и коллеге Кристофору Матисону. Он хочет также выразить благодарность за гостеприимство профессору Бобу Динглу и Школе натурфилософии университета Сент-Эндрю, где была начата работа над книгой.

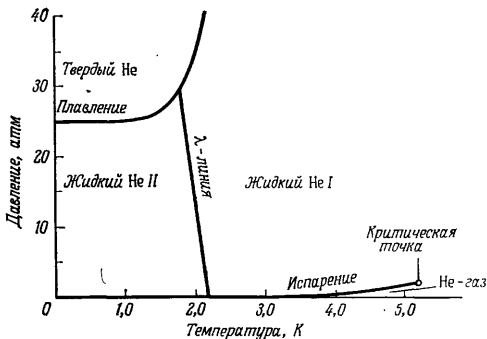
Мы хотим также поблагодарить Бриана Саундерса, который прочел большую часть первых набросков книги и сделал ряд замечаний, позволивших улучшить текст. Мы благодарны машинисткам Цинтии Уильямс, напечатавшей первый вариант книги, и особенно Мегги Коффи, быстро и аккуратно напечатавшей окончательный вариант. Наконец, мы благодарим наших жен, которые поддерживали и вдохновляли нас в процессе работы.



## СВЕРХТЕКУЧИЕ ЖИДКОСТИ И МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ

### § 1.1. Основные свойства жидкого $\text{He}^4$

Из всех известных веществ два изотопа гелия имеют самые низкие точки кипения, равные (при атмосферном давлении) 4,21 К для  $\text{He}^4$  и 3,19 К для  $\text{He}^3$ . При дальнейшем понижении температуры и  $\text{He}^3$ , и  $\text{He}^4$  остаются в жидком состоянии (под давлением



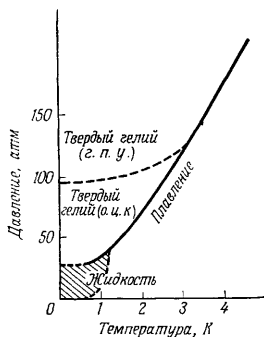
Фиг. 1. Фазовая диаграмма  $\text{He}^4$  [31].

насыщенных паров) вплоть до абсолютного нуля. Для получения твердых фаз необходимо приложить довольно высокое давление, равное 25 атм или выше (фиг. 1 и 2).

Гелий с трудом конденсируется по двум причинам — из-за малой массы атомов и из-за чрезвычайно слабых межатомных сил. Слабость межчастичных сил объясняется в данном случае простотой и симметричностью атома гелия с его замкнутой оболочкой, содержащей два электрона, а также отсутствием дипольных моментов (за исключением маленького магнитного момента у ядер  $\text{He}^3$ ). Малая масса атомов обеспечивает большую нулевую энергию. Это можно пояснить следующим образом.

В данный момент времени каждый атом в жидком  $\text{He}^4$  занимает определенный объем, ограниченный находящимися вблизи атома-

ми. Благодаря движению атомов этот объем изменяется, но в среднем можно считать, что атом располагается внутри сферы с объемом, равным атомному объему  $V_a$ , и радиусом  $R \sim V_a^{1/3}$ . Из квантовомеханического соотношения неопределенности следует, что импульс частицы, находящейся внутри такой сферы, имеет неопределенность  $\Delta p \sim h/R$  и, следовательно, частица обладает кинетической энергией локализации, или нулевой энергией,  $E_0 \sim (\Delta p)^2/2m_4 \sim h^2/2m_4R^2$ , где  $m_4$  — масса атома  $\text{He}^4$ . Переходя к атомному объему, имеем  $E_0 \sim h^2/2m_4V_a^{2/3}$ ; зависимость  $E_0$  от  $V_a$  изображена схематически на фиг. 3. Вычисление потенциальной энергии жидкости представляет собой нелегкую задачу и зависит от выбора модели для взаимодействия между двумя атомами. Обычно потенциальная энергия имеет вид, характеризуемый нижней кривой на фиг. 3. В силу малости  $m_4$ , нулевая энергия сравнима по величине с минимальным значением потенциальной энергии. В результате минимум полной энергии жидкости достигается при значительно боль-



Фиг. 2. Фазовая диаграмма  $\text{He}^3$  [24].

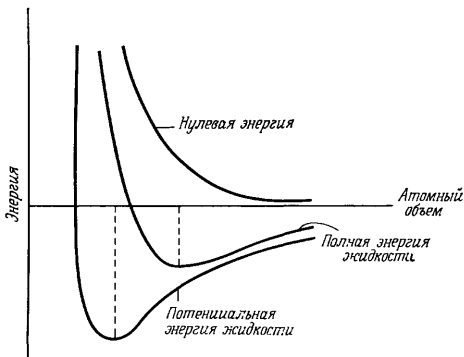
Заштрихована область с отрицательным коэффициентом расширения.

шм атомном объеме, чем минимум потенциальной энергии. Таким образом, межатомные силы достаточно сильны, чтобы обеспечить появление жидкой фазы при достаточно низкой температуре, но высокая нулевая энергия приводит к тому, что плотность жидкости довольно низка.

Подобные качественные рассуждения можно распространить и на образование твердого гелия. Потенциальный минимум для решетки соответствует меньшему атомному объему, чем у жидкости (см. фиг. 3), но здесь нулевая энергия столь велика, что решетка неустойчива до тех пор, пока извне не приложено достаточно большое давление. Те же соображения можно перенести и на жидкий  $\text{He}^3$ , у которого масса атомов меньше и, следовательно, эффекты нулевой энергии даже больше. О водороде этого сказать нельзя, поскольку молекула  $\text{H}_2$  значительно легче поляризуется, чем одиночный атом  $\text{He}$ , в результате чего вандерваальсовы силы между двумя молекулами  $\text{H}_2$  в 12 раз больше, чем между двумя атомами  $\text{He}$ . Поэтому в водороде энергия взаимодействия значительно превосходит нулевую энергию и при абсолютном нуле твердая фаза устойчива. Все остальные вещества тяжелее водорода,

и в них вандерваальсовы взаимодействия сильнее. Следовательно, гелий — единственное вещество, остающееся жидким при сколь угодно низких температурах.

Непосредственно ниже точек кипения жидкие  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$  ведут себя как обыкновенные жидкости с малой вязкостью. Однако при 2,17 К жидкий  $\text{He}^4$  претерпевает переход, отсутствующий в  $\text{He}^3$ .

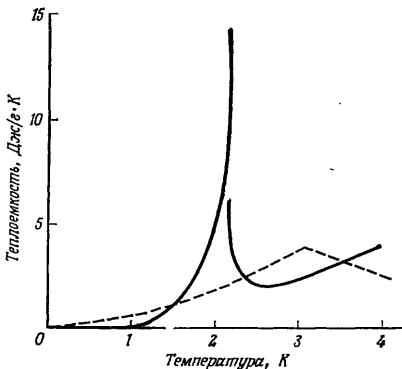


Фиг. 3. Энергия жидкого гелия.

Полная энергия равна сумме потенциальной и нулевой энергий.

Этот переход заметен по аномалии теплоемкости. Температуру  $T_\lambda$ , при которой возникает аномалия, благодаря характерной форме последней (фиг. 4) называют  $\lambda$ -точкой. Кроме того, наблюдая жидкость в тот момент, когда ее температура становится ниже  $T_\lambda$ , можно увидеть удивительное изменение. Чтобы поддерживать температуру жидкого гелия ниже 4,2 К, уменьшают давление пара над гелиевой ванной, так что кипение происходит при пониженном давлении. Выше  $T_\lambda$  внутри гелия, как и в обычной жидкости, образуются пузырьки пара и весь он кипит: пузырьки поднимаются на поверхность и испаряются. Но, как только температура достигает точки  $\lambda$ -перехода, гелий становится абсолютно неподвижным, а пузырьки исчезают. Таким образом,  $T_\lambda$  представляет собой температуру перехода между двумя различными формами жидкого  $\text{He}^4$ , называемыми гелием I выше  $\lambda$ -точки и гелием II ниже ее. На фазовой диаграмме (см. фиг. 1) области устойчивости этих двух форм гелия разделены линией, наклон которой указывает на то, что с повышением давления температура перехода понижается. Тот факт, что  $\text{He}^4$  II сильно отличается от  $\text{He}^4$  I, от жидкого  $\text{He}^3$  и от всех других жидкостей, станет очевидным, как только мы

опишем его тепловые свойства и характер течения. В § 1.3 мы вернемся к  $\lambda$ -переходу, который занимает особое место в макроскопической теории жидкого  $\text{He}^4$ .

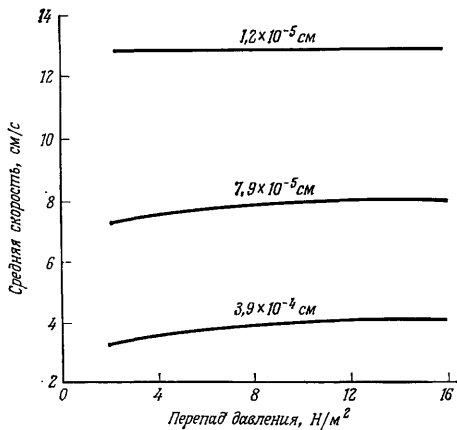


Фиг. 4. Теплоемкость жидкого  $\text{He}^4$  [5].

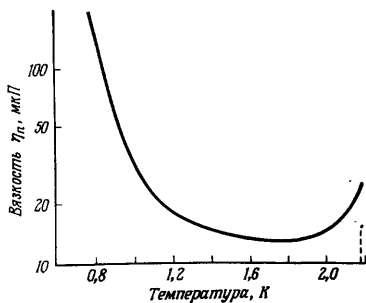
Штриховая линия — теплоемкости идеального газа Бове — Эйнштейна с плотностью, равной плотности  $\text{He}^4$ .

Эксперименты по определению *вязкости*  $\text{He} \text{ II}$  можно разделить на две группы: к первой относятся измерения вязкого сопротивления потоку, а ко второй — определение вязких сил, действующих на тело, движущееся в жидкости. На фиг. 5 приведены типичные результаты экспериментов первой группы; скорость потока в узких каналах шириной от 0,1 до 4 мкм почти не зависит от градиента давления вдоль канала. Это позволяет предположить, что вязкость  $\text{He} \text{ II}$ , по всей вероятности, равна нулю. Такой вывод был подтвержден экспериментами с незатухающим потоком жидкости (Решпи и Дешати [35]). В этих экспериментах сосуд, имеющий форму тора, заполняли пористым материалом с очень тонкими каналами, пропускающими жидкость. Тор вращали вокруг его оси симметрии, а затем останавливали, после чего течение  $\text{He} \text{ II}$  продолжалось без снижения угловой скорости в течение 12 часов опыта, что указывает на способность  $\text{He} \text{ II}$  течь без диссипации.

С другой стороны, эксперименты с осциллирующими дисками (см., например, Кеезом и Мак-Вуд [24]), вибрирующими проволоками (Таф, Мак Кормик и Даш [41]) и вращающимися вискозиметрами (фиг. 6) (см., например, Вудс и Холлис Халлетт [44]) продемонстрировали существование сил вязкости, причем коэффициент вязкости был немногим меньше, чем в случае газообразного  $\text{He}^4$ .



Фиг. 5. Скорость течения He II через узкие каналы различной ширины при 1,2 К [2, 4].



Фиг. 6. Вязкость He II, измеренная с помощью вращающегося вискозиметра [44].

Таким образом, создается впечатление, что He II способен быть одновременно вязким и не вязким. Это кажущееся противоречие — сущность *двухжидкостной модели*, впервые предложенной Тиссой [40] и позволяющей объяснить многие свойства He II. Согласно этой модели, He II ведет себя, как «смесь» двух жидкостей: одна из них — нормальная жидкость с обычной вязкостью, а другая — сверхтекучая, способная течь без трения мимо препятствий и через узкие каналы. Во избежание недоразумений с самого начала отметим, что эти две жидкости физически разделить нельзя; недопустимо также считать, что некоторые атомы принадлежат к нормальной жидкости, а другие — к сверхтекучей, поскольку все атомы He II одинаковы. Поэтому сформулируем двухжидкостную модель следующим образом.

Ниже  $T_\lambda$  жидкий He II способен одновременно совершать два различных движения. Каждое движение имеет свою собственную локальную скорость,  $v_n$  для нормальной и  $v_s$  для сверхтекучей частей жидкости; аналогичным образом у каждой жидкости имеется своя эффективная плотность массы  $\rho_n$  и  $\rho_s$ . Полная плотность  $\rho$  для He II определяется поэтому как

$$\rho = \rho_n + \rho_s, \quad (1.1)$$

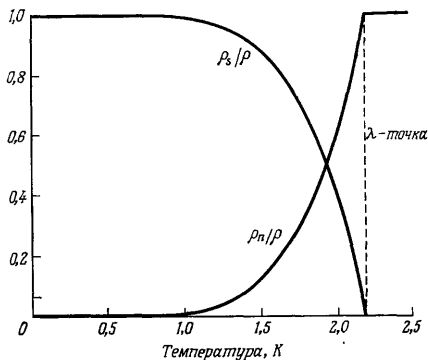
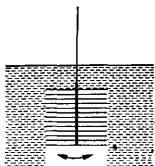
а полная плотность потока равна

$$j = \rho_n v_n + \rho_s v_s. \quad (1.2)$$

Такой подход, когда обе части жидкости рассматриваются независимо, особенно удобен при малых скоростях. При более высоких скоростях сверхтекучий поток становится диссипативным, в нормальной части жидкости возникает турбулентность и возможно взаимодействие между этими компонентами. В подобных условиях уравнения для двухжидкостной модели становятся весьма сложными.

Справедливость двухжидкостной модели наиболее ярко продемонстрировал Андроникашвили [3]. В его экспериментах стопка расположенных на равных расстояниях друг от друга металлических дисков (фиг. 7) подвешивалась на крутильной нити таким образом, чтобы они могли осциллировать в жидком гелии. Расстояние между дисками было достаточно малым для того, чтобы выше  $T_\lambda$  вся жидкость между дисками увлекалась вместе с ними. Однако ниже  $T_\lambda$  период осцилляций резко падал. Это указывало на то, что не вся жидкость в промежутках между дисками увлекается ими. Такой результат подтвердил предположение, что сверхтекучая часть жидкости не должна оказывать влияния на крутильный маятник. Эксперимент Андроникашвили дает возможность непосредственно измерять изменение  $\rho_n/\rho$  с температурой (см. фиг. 7), а следовательно, определять  $\rho_s/\rho$ . Мы видим, что ниже 1 К в He II доминирует сверхтекучая компонента.

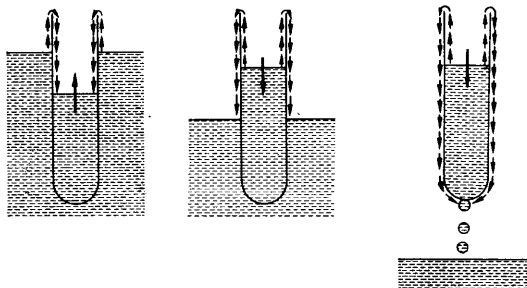
Другой пример своеобразного течения жидкого  $\text{He}^4$  ниже  $\lambda$ -точки — образование пленки, покрывающей выступающие части тела, частично погруженного в  $\text{He}^4$ . Адсорбция на поверхности, соприкасающейся с любой жидкостью или с ее насыщенными парами, —



Фиг. 7. Эксперимент Андроникашвили [5].

явление обычное, но пленки  $\text{He}^4$  необычно толсты. Оптические измерения (Джексон и Граймс [23]) показали, что типичная толщина пленки при давлении насыщенных паров составляет 30 нм, или 100 атомных слоев; этого достаточно для обеспечения течения жидкости вдоль пленки. Благодаря наличию пленки на стенках пустая пробирка, опущенная в ванну с  $\text{He}^4$ , начинает наполняться жидкостью, даже если ее верхний край расположен высоко над поверхностью  $\text{He}^4$  (фиг. 8). Наполнение сосуда продолжается до тех пор, пока внутренний уровень не достигнет уровня ванны. Если затем пробирку поднять, она опустошается, а если ее приподнять над уровнем гелиевой ванны, то видны капли, падающие со дна пробирки. Мы приходим к выводу, что сверхтекучая часть гелия течет вдоль пленки всегда, когда существует разность уров-

ней между двумя объемами жидкости. Другими словами, пленка работает как сифон, причем движущую силу для сверхтекучей части жидкости создает разность гравитационного потенциала между концами пленки. Наблюдая за скоростью изменения уровня жидкости в пробирке, можно определить скорость сверхтекучей компоненты; типичное ее значение составляет 20 см/с. С другой



Фиг. 8. Течение пленки He II по стенкам пробирки.

стороны, нормальная часть жидкости, в силу своей вязкости, остается в пленке почти неподвижной. Более подробно течение пленки мы обсудим в гл. 2.

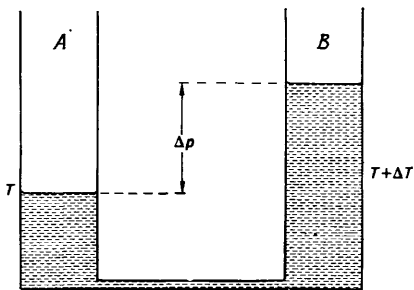
В ранних экспериментах по измерению *теплопроводности* He II было показано, что она очень велика и в случае малых тепловых потоков стремится к бесконечности. Фактически создать температурный градиент в толще He II невозможно — результат, объясняющий внезапное прекращение кипения при охлаждении жидкости ниже  $T_\lambda$ . В обыкновенных жидкостях пузырьки образуются, когда локальная температура существенно выше температуры свободной поверхности. Если бы в He II возникли достаточно большие температурные флуктуации, они исчезали бы столь быстро, что пузырьки не могли бы возникнуть. Таким образом, испарение He II происходит только со свободной поверхности.

Температурный градиент между двумя объемами He II может существовать, если эти объемы соединены «сверхщелью», т. е. каналом, через который может течь сверхтекучая жидкость, но не проходит нормальная. Простейшая сверхщель представляет собой трубку, плотно забитую мелким порошком; при этом между частичками образуются извилистые каналы различной ширины (обычно порядка 100 нм), которые пропускают сверхтекучую жидкость и задерживают течение нормальной. Если нагревать одну сторону сверхщели, возникает избыточное давление и разность температур



(фиг. 9). Это происходит в результате перетекания сверхтекучей части гелия с холодной стороны сверхщели в подогретую. Поскольку с понижением температуры отношение  $\rho_s/\rho$  растет, мы можем заключить, что сверхтекучая часть He II перемещается в область с более высокой температурой, чтобы снизить температурный градиент.

Яркой демонстрацией этого эффекта может служить так называемое *фонтанирование гелия*, впервые наблюдавшееся Алленом



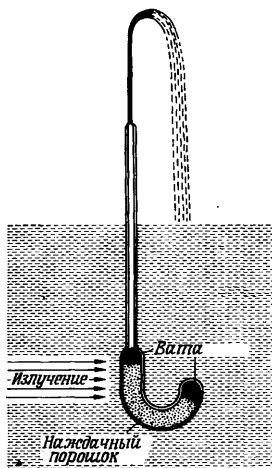
Фиг. 9. Два сосуда, соединенные сверхщелью.

Появление разности температур сопровождается перепадом давления.

и Джонсом [1] (фиг. 10). В их экспериментах сверхщель представляла собой широкую трубку, заполненную наждачным порошком. Один конец трубки соединялся с гелиевой ванной, а к другому был присоединен вертикальный капилляр. Когда наждачный порошок нагревали, сверхтекучая жидкость втекала в сверхщель с такой скоростью, что из капилляра била струя He II. Для образования фонтана, поднимающегося на высоту 30 или 40 см, достаточно было тепла, создаваемого карманным фонарем.

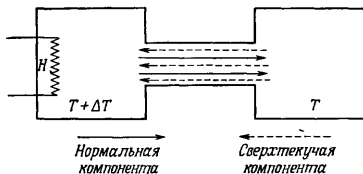
Эти проявления *термомеханического эффекта* четко показывают, что перенос тепла и перенос массы в He II неразделимы. Стационарный нагрев жидкости, создаваемый, например, пропусканием постоянного тока через сопротивление при отводе тепла в резервуар, температура которого постоянна, вызывает внутреннюю конвекцию (фиг. 11). Нормальная жидкость потечет от источника тепла, а сверхтекучая — в обратном направлении, причем полная плотность гелия повсюду остается постоянной. Таким образом, в He II тепло переносится не с помощью обычных процессов теплопроводности и конвекции. Тепло переносится лишь нормальной частью жидкости; сверхтекучий же поток сам по себе тепла перенести не может.

Если подогрев  $\text{He II}$  периодически менять, пропуская через сопровитвление переменный ток, обе части жидкости начинают осциллировать с противоположными фазами. И опять это не оказывает никакого влияния на полную плотность  $\rho$ , которая остается повсюду одинаковой. Однако локальное значение отношения  $\rho_s/\rho$ , а следовательно, и локальная температура начинают осциллировать. Таким образом, в  $\text{He II}$  могут распространяться температурные волны, которые называют *вторым звуком*, чтобы отличить их от *первого звука* — обыкновенных продольных волн сжатия, связанных с флуктуациями полной плотности при постоянной температуре. Если скорость поступления тепла не слишком велика и частота тока не очень высока, волны второго звука распространяются фактически без затухания. Мы обсудим вопрос о втором звуке более подробно после того, как ознакомимся в гл. 2 с уравнениями двухжидкостной гидродинамики.



Фиг. 10. Фонтанирование гелия [42, 1].

Свойства вращающегося  $\text{He II}$  тоже можно описать в терминах двухжидкостной модели, но здесь ситуация значительно сложнее,



Фиг. 11. Внутренняя конвекция в  $\text{He II}$ .

Подвод тепла осуществляется нагревателем  $H$ ; поддерживается постоянная температура.

чем для свойств, которые мы обсуждали до сих пор. Например, при вращении  $\text{He II}$  уже нельзя игнорировать взаимодействие между сверхтекучей и нормальной компонентами. Во вращающемся

сосуде нормальная часть жидкости ведет себя обычным образом — *вращается как твердое тело*. Кажется, что сверхтекучая компонента вращается таким же образом. Фактически же это не так: жидкость пронизана целым рядом вихревых нитей. Сверхтекучая часть жидкости вращается вокруг каждой нити, причем момент количества движения, связанный с каждым вихрем, квантуется. Возникновение вихрей в сверхтекучей жидкости не ограничивается случаем вращающегося сосуда; вихри образуются с необычайной легкостью во многих ситуациях, когда имеется сверхтекучий поток. Мы подробно обсудим вихревые движения в жидком гелии в гл. 4.

Заканчивая эту вводную часть, остановимся на энтропии He II. Обратившись вновь к фазовой диаграмме He<sup>4</sup> (см. фиг. 1), видим, что кривая плавления при  $T > T_\lambda$  идет круто, но ниже  $T_\lambda$  ее наклон быстро меняется и она становится горизонтальной при  $T \rightarrow 0$ . Наклон кривой плавления определяется уравнением Клапейрона — Клаузиуса

$$\frac{dp_m}{dT} = \frac{\Sigma_{liq} - \Sigma_{sol}}{V_{liq} - V_{sol}} = \frac{\Delta\Sigma_m}{\Delta V_m}, \quad (1.3)$$

где  $\Sigma$  — энтропия и  $V$  — объем, а смысл индексов очевиден. Выше  $\lambda$ -точки разность  $\Delta\Sigma_m$  велика, но сразу ниже  $T_\lambda$  она быстро падает, почти достигая нуля для всех температур ниже 1 К. Следовательно, в этой области температур энтропия не может уменьшиться в результате затвердевания жидкости, и жидкая фаза остается устойчивой и при очень близких к нулю температурах. В согласии с третьим законом термодинамики мы заключаем, что  $\Sigma_{liq} \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow 0$ . Из экспериментов следует также, что  $\rho_s/\rho \rightarrow 1$  при  $T \rightarrow 0$ . Поэтому можно считать, что при абсолютном нуле He II состоит только из сверхтекучей компоненты и обладает нулевой энтропией. Логично предположить, что и при отличных от нуля температурах сверхтекучая компонента не несет энтропии. Действительно, это тождественно утверждению, что сверхтекучая часть жидкости течет без диссипации, поскольку любые процессы диссипации неизбежно связаны с ростом энтропии. Таким образом, энтропия He II заключена в нормальной компоненте, как этого и можно было ожидать после обсуждения характера внутренней конвекции, при которой за перенос тепла ответственна только нормальная часть жидкости.

Отсюда следует, что основное состояние He II — это полностью сверхтекучая жидкость. Результирующий спин атома He<sup>4</sup> равен нулю, так что этот атом является бозоном; ансамбль атомов He<sup>4</sup> подчиняется статистике Бозе — Эйнштейна. Как известно, идеальный газ бозонов, в котором частицы имеют отличную от нуля массу покоя, обладает свойством, носящим название *конденсации Бозе — Эйнштейна*. При низких температурах частицы стремятся собраться

я в одном и том же квантовом состоянии — на наимизшем одночастичном энергетическом уровне системы, образуя *конденсат*. Конденсация начинается при определенной критической температуре и заканчивается при абсолютном нуле. Есть все основания полагать, что жидкий  $\text{He}^4$  обладает аналогичными свойствами. Образование конденсата начинается в  $\lambda$ -точке, и сам он связан со сверхтекучей компонентой  $\text{He II}$ . Мы обсудим вопрос о конденсации Бозе — Эйнштейна в § 1.3, но предварительно в § 1.2 опишем основные свойства сверхпроводников, а затем объясним, таким образом представление о конденсате можно использовать для описания свойств сверхтекучего гелия и сверхпроводников.

## § 1.2. Основные свойства сверхпроводников

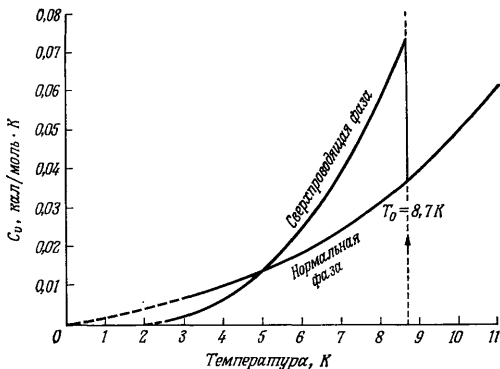
Явление сверхпроводимости во многом похоже на сверхтекучесть  $\text{He II}$ . Очевидная разница состоит в том, что сверхпроводящими становятся многие металлы при достаточно низких температурах, в то время как сверхтекучесть в жидкости — свойство одного лишь  $\text{He II}$ <sup>1)</sup>. Простейшее свойство сверхпроводящего состояния — способность проводить ток без возникновения напряжения (если ток достаточно мал); это свойство аналогично сверхтекучему течению  $\text{He II}$  через тонкие каналы или в пленке. Сверхпроводимость характеризуется критической температурой  $T_c$ . При этой температуре сопротивление сверхпроводящей проволоки более или менее резко падает до нуля. Считают, что сверхпроводящее состояние фактически представляет собой состояние с нулевым сопротивлением, а не просто состояние с очень низким сопротивлением. Изящный способ демонстрации существования таких текущих без сопротивления токов состоит в том, что магнитный тержень помещают над вогнутой сверхпроводящей чашей. Наведенный сверхпроводящий ток выталкивает магнит, который остается в подвешенном состоянии сколь угодно долго. В книге Пенберга [39] приведена фотография этого эксперимента, безусловно, напоминающего возникновение незатухающего сверхтекучего потока  $\text{He II}$  в торе.

Переход в сверхпроводящее состояние является почти идеальным фазовым переходом второго рода, т. е. переходом без скрытой теплоты и с четко выраженным конечным скачком теплоемкости. На фиг. 12 в качестве типичного примера приведена кривая зависимости теплоемкости ниобия от температуры. Такое почти идеальное поведение теплоемкости у сверхпроводников отличается от аномалии в гелии (см. фиг. 4). В гл. 4 мы увидим, что оба состоя-

<sup>1)</sup> Это утверждение неточно, поскольку уже обнаружена сверхтекучесть жидкого  $\text{He}^3$  (см. гл. 7). Имеются также основания полагать, что сверхтекучей является нейтронная жидкость (см. § 7.4). — *Прим. ред.*

ния — и сверхтекучее, и сверхпроводящее — характеризуются длиной когерентности  $\xi$ , которая, однако, у He II значительно меньше, чем у сверхпроводников. Поведение теплоемкости определяется длиной когерентности (см. § 6.9).

В сверхпроводящем состоянии переходят многие металлы, поэтому обсуждение сверхпроводимости неизбежно усложняется в силу



Фиг. 12. Теплоемкость ниобия [8].

Значения для нормального металла измерялись в магнитном поле выше  $H_{cb}$ .

необходимости дифференцировать свойства сверхпроводников различных типов. Наиболее полная таблица свойств сверхпроводящих материалов составлена Робертсом [36]. В табл. 1, взятой из этого источника, приведены элементы, переходящие в сверхпроводящее состояние при температурах выше  $0,8$  К<sup>1</sup>). Мы видим, что не существует простого правила, которое позволяло бы определить, какой из элементов может стать сверхпроводником. Однако отметим некоторые особенности. Во-первых, сверхпроводниками становятся только металлы. Во-вторых, все критические температуры лежат ниже  $10$  К; правда, в табл. 1 не включены материалы с более высокими критическими температурами, которые для ряда металлических соединений достигают  $23$  К. В-третьих, некоторые металлы, являющиеся хорошими проводниками при комнатных температурах, особенно благородные металлы, вообще не переходят

<sup>1</sup>) Ряд элементов, не указанных в табл. 1, оказываются сверхпроводящими при высоком давлении или в виде соответствующим образом приготовленных тонких пленок.— *Прим. ред.*

Таблица 1

Элементы, переходящие в сверхпроводящее состояние  
при температуре выше 0,8 К [36]

Приведены критические температуры и известные критические поля при нулевой температуре. Данные различных авторов не всегда согласуются; в этом случае дано среднее значение

Элемент	T, К	$H_0$ , э	Элемент	T, К	$H_0$ , э
Al	1,19	100	Re	1,7	193
Ga *)	1,09	59	Sb	2,6	
Hg *) ( $\alpha$ )	4,16	395	Sn	3,72	304
In	3,4	288	Ta	4,4	800
La *) ( $\beta$ )	6,0	1600	Tc	8	
Mo	0,92	96	Th	1,4	145
Nb	9,2	1950 **)	Tl	2,38	174
Pa	1,4		V	5,3	1100
Pb	7,2	800	Zn	0,86	52

\*) Кроме указанной, существует и другая сверхпроводящая фаза.

\*\*\*) Nb является сверхпроводником II рода. Приведено поле  $H_{c2}$ .

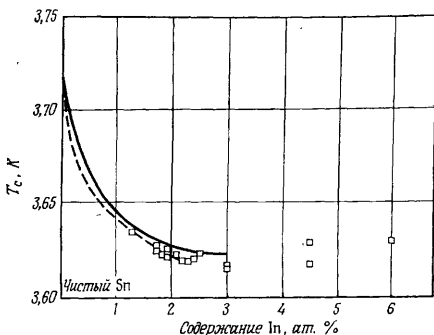
в сверхпроводящее состояние. В-четвертых, сверхпроводниками не становятся магнитные металлы.

Многие металлические соединения являются сверхпроводниками. В частности, кубическая структура  $\beta$ -W (A15) особенно, по-видимому, благоприятна для появления сверхпроводимости, и наиболее высокие критические температуры обнаружены среди соединений именно с такой структурой.

Важно иметь четкое представление о влиянии примесей, добавляемых к сверхпроводящим элементам. Хотя примеси увеличивают сопротивление металла, находящегося в нормальном состоянии, они не мешают ему быть сверхпроводником, и очень часто добавка примеси мало меняет критическую температуру сплава. В качестве примера на фиг. 13 приведена зависимость  $T_c$  от содержания In в Sn. После резкого первоначального падения  $T_c$  добавление In в количестве больше 1% мало меняет  $T_c$ . Эти свойства, особенно начальный спад  $T_c$ , весьма типичны; важным исключением являются разрушающие сверхпроводимость магнитные примеси, когда  $T_c$  падает до нуля обычно при концентрациях примесей порядка нескольких процентов. Для многих целей содержание примеси в сплаве можно характеризовать одним параметром — средней длиной свободного пробега  $l$ , от которой зависит сопротивление нормальных металлов при низких температурах. Позже мы увидим, что, хотя добавка примесей слабо влияет на критическую

температуру сплава, она может существенным образом изменить свойства сверхпроводников в отношении протекания в них тока.

Подобно сверткечному течению в He II, сверхпроводящий ток представляет собой поток без диссипации. Разница же между этими случаями очевидна — в сверхпроводнике течет электрический



Фиг. 13. Изменение критической температуры для сплавов Sn — In с увеличением концентрации In [11].

ток, генерирующий магнитное поле (вспомним эксперимент с подвешенным магнитом), и, наоборот, приложенное магнитное поле создает сверхпроводящие токи. Поэтому наиболее удобный способ изучения сверхпроводников состоит в исследовании их поведения в магнитном поле. Остановимся теперь на основных магнитных свойствах сверхпроводников.

Начнем с того, что в сверхпроводнике нужно четко различать магнитные векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$ . При рассмотрении обыкновенных магнитных веществ различают внешние токи (например, токи в соленоиде, внутри которого расположен образец), генерирующие поле  $\mathbf{H}$ , и токи намагничивания, влияющие на  $\mathbf{B}$ , но не на  $\mathbf{H}$ . Примером последних служат токи, возникающие при орбитальном движении электронов, и «токи», связанные со спинами электронов. При рассмотрении сверхпроводников можно встать на разные позиции (см. книгу Роуз-Инса и Родерика [38]). Мы всегда будем считать, что сверхпроводящие токи представляют собой токи намагничивания и что присутствие сверхпроводника не оказывает влияния на  $\mathbf{H}$ , в то время как  $\mathbf{B}$  изменяется в согласии с уравнением

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{J}_e$  — плотность сверхпроводящего тока.

Как известно из электромагнитной теории, уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$  позволяет ввести векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , причем

$$\mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.5)$$

Векторный потенциал важен при рассмотрении сверхпроводников; мы увидим в последующих главах, что в некотором смысле сверхпроводящие токи непосредственно связаны с  $\mathbf{A}$ .

Для измерения магнитных свойств сверхпроводников применялись различные экспериментальные методы. Можно измерять полное напряжение, возникающее во вторичной катушке после полного удаления образца из области с приложенным полем; результаты Ливингстона [29], приведенные на фиг. 19, получены таким способом. Усовершенствование этой методики привело к созданию магнетометра с вибрирующим образцом (применявшегося, например, Френчем и Лоуэллом [16]), где образец заставляют осциллировать в приложенном поле. В крутильном магнетометре (см., например, Робинсон [37]) измеряется крутящий момент, возникающий при наложении слабого поля, перпендикулярного основному полю. Общая черта всех методик заключается в том, что в них измеряется полный магнитный поток через образец или, эквивалентно, усредненный по пространству вектор  $\mathbf{V}$ , который мы обозначим через  $\langle \mathbf{V} \rangle$ . Экспериментальные результаты часто выражают через среднюю намагниченность  $M$ , а не через  $\langle \mathbf{V} \rangle$ ; эти величины связаны соотношением

$$\langle \mathbf{V} \rangle = \mu_0 \mathbf{H} + M. \quad (1.6)$$

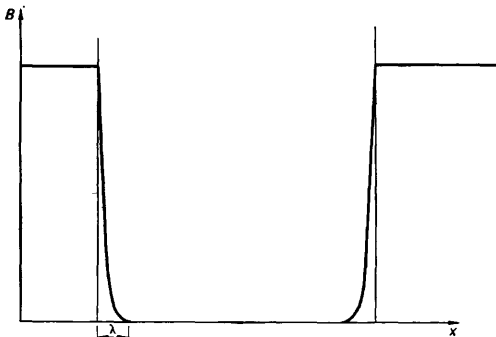
Фактически результаты обычно представляют в виде кривых зависимости  $-M$  от  $\mu_0 H$ , поскольку, как правило, сигнал является диамагнитным.

Простейшими магнитными свойствами обладают чистые металлы (за исключением V и Nb), в которых магнитный поток  $V$  полностью вытесняется из образца для полей  $H$ , меньших критического значения  $H_{cb}$ . Выше  $H_{cb}$  наблюдается полное проникновение потока и восстановление нормального состояния. Точнее говоря,  $V$  падает до нуля на расстоянии  $\lambda$ , называемом глубиной проникновения (фиг. 14) от поверхности образца; величина  $\lambda$  равна обычно  $10^{-7}$  м. Поэтому для массивных образцов, размеры которых много больше  $\lambda$ , измеренное значение  $\langle \mathbf{V} \rangle$  при  $H < H_{cb}$  оказывается равным нулю. На фиг. 15 приведен ход зависимости  $\langle \mathbf{V} \rangle$  от  $H$  и соответствующая зависимость  $-M$  от  $\mu_0 H$  для сверхпроводников такого типа. На фиг. 19 изображена кривая намагничивания чистого Pb (кривая I).

Форма образца существенно влияет на его магнитные свойства. На фиг. 16, а показаны линии индукции  $\mathbf{V}$  вблизи сферы, находящейся в однородном внешнем поле. Эти линии вытеснены из сферы. Ясно, что магнитная индукция  $\mathbf{V}$  у экватора сферы больше,

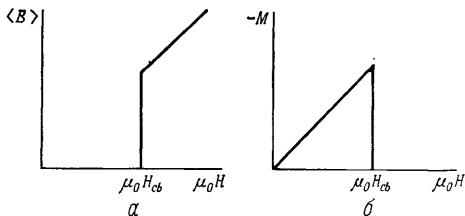


чем в удаленных от сферы участках поля; точнее говоря, она больше в  $3/2$  раза. Если же в магнитное поле помещен длинный эллипсоид (фиг. 16, б), то поле вблизи образца практически имеет



Фиг. 14. Изменение магнитной индукции  $B$  внутри образца.

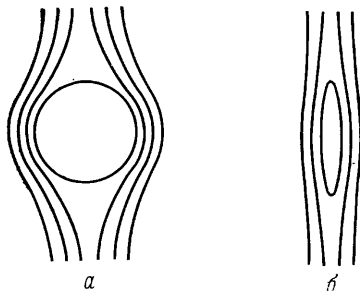
такую же величину, как и на большом расстоянии от него. Теперь посмотрим, что произойдет, если сверхпроводящую сферу поместить в возрастающее магнитное поле. Пока приложенное поле



Фиг. 15. а — зависимость  $\langle B \rangle$  от  $\mu_0 H$ ; б — соответствующая кривая намагничивания (зависимость  $-M$  от  $\mu_0 H$ ) для сверхпроводника I рода.

меньше  $2H_{сб}/3$ , поле меньше  $H_{сб}$  во всех точках сферы и, следовательно, поток вытесняется из нее, как на фиг. 16, а. Если приложенное поле больше  $2H_{сб}/3$ , магнитный поток должен частично проникать в сферу. Фактически же сфера разбивается на перемежающиеся сверхпроводящие и нормальные области, причем магнитное поле проходит через нормальные области. Такую структуру

называют промежуточным состоянием Мы подчеркиваем, что его возникновение определяется геометрией образца. Хотя изучение промежуточного состояния весьма интересно, оно остается в стороне от основного направления наших рассуждений, поэтому упоминать о промежуточном состоянии мы больше не будем. Магнитные измерения проводятся обычно на образцах, представляющих собой тонкие длинные цилиндры, расположенные параллельно



Фиг. 16. Линии магнитной индукции для диамагнитной сферы (а) и диамагнитного эллипсоида (б).

приложенному полю. Цилиндр является приближением к длинному эллипсоиду, изображенному на фиг. 16, б, так что промежуточное состояние в этом случае не возникает.

Вернемся теперь к магнитным свойствам чистого сверхпроводника в отсутствие геометрических эффектов. В частности, обсудим температурную зависимость критического поля  $H_{cb}$ . Вытеснение потока из толщи сверхпроводника называют эффектом Мейсснера по имени одного из обнаруживших его физиков. Мейсснер и Оксенфельд показали, что поток вытесняется всякий раз независимо от того, находился ли уже образец во внешнем поле, когда температура понижалась ниже  $T_c$ , или поле прикладывалось после сверхпроводящего перехода. Таким образом, состояние с вытесненным потоком представляет собой истинное равновесное термодинамическое состояние. Это означает, что к сверхпроводникам можно применять равновесную термодинамику. Приложенное поле  $H$  является «интенсивной» переменной, поэтому производная полной энергии  $U$  равна

$$dU = T d\Sigma + H \cdot dM. \quad (1.7)$$

Чтобы найти термодинамическое критическое поле, приравняем друг другу свободные энергии Гиббса  $G_n$  и  $G_s$  обеих фаз. Свободная

энергия Гиббса определяется выражением

$$G = U - T\Sigma - \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}, \quad (1.8)$$

а ее дифференциал имеет вид

$$dG = -\Sigma dT - \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}. \quad (1.9)$$

Для изотермических процессов ( $T$  постоянна) имеем

$$G(\mathbf{H}) = G(0) - \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}. \quad (1.10)$$

В предположении, что намагниченность нормальной фазы равна нулю, получаем

$$G_n(\mathbf{H}) = G_n(0). \quad (1.11)$$

Для сверхпроводящей фазы  $\mathbf{M} = -\mu_0 \mathbf{H}$ , так что

$$G_s(\mathbf{H}) = G_s(0) + \frac{1}{2} \mu_0 H^2. \quad (1.12)$$

При фазовом переходе  $G_s(H_{cb}) = G_n(H_{cb})$ , т. е.  $H_{cb}$  определяется уравнением

$$\frac{1}{2} \mu_0 H_{cb}^2 = G_n(0) - G_s(0). \quad (1.13)$$

Поскольку свободные энергии при  $T_c$  равны, из уравнения (1.13) следует, что при  $T = T_c$  поле  $H_{cb}$  стремится к нулю, как и можно было ожидать. Зависимость  $H_{cb}$  от температуры для всех материалов описывается с точностью до нескольких процентов формулой

$$H_{cb} = H_0 (1 - t^2), \quad (1.14)$$

где

$$t = T/T_c. \quad (1.15)$$

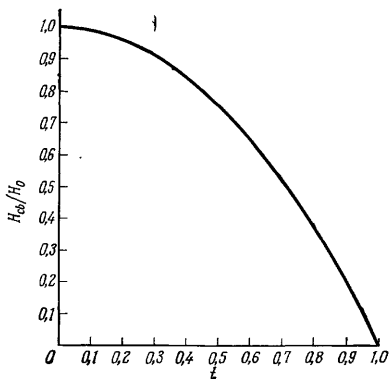
Такая форма температурной зависимости была получена в ранней феноменологической теории сверхпроводимости — в двухжидкостной модели Гортера и Казимира; она изображена на фиг. 17. Типичное значение критического поля  $H_0$  при равной нулю температуре составляет сотни эрстед. В табл. 1 приведены значения  $H_0$  для некоторых сверхпроводящих элементов.

Как уже упоминалось, магнитная индукция на поверхности сверхпроводника не падает до нуля скачкообразно, что отвечало бы наличию на поверхности тока бесконечной плотности. Вблизи плоской поверхности индукция затухает по экспоненте:

$$B(x) = B(0) \exp(-x/\lambda), \quad (1.16)$$

где  $x$  — расстояние от поверхности в глубь сверхпроводника, а  $\lambda$  — глубина проникновения. В простейшем методе измерения глубины проникновения, предложенном Казимиром [9], образец служит

сердечником трансформатора. Взаимная индукция первичной и вторичной катушек определяется проникновением потока в щель между катушками и образцом и в сам образец. Другой способ определения  $\lambda$ , основанный на измерении микроволнового поверхностного



Фиг. 17. Зависимость поля  $H_{cb}$  от температуры согласно Горттеру — Казимиру.

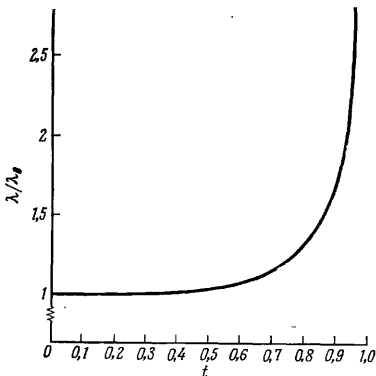
импеданса, мы рассмотрим в § 3.3. Было найдено, что  $\lambda$  зависит от температуры и при  $T = T_c$  стремится к бесконечности. Простая формула Горттера — Казимира

$$\lambda = \lambda_0 / (1 - t^4)^{1/2} \quad (1.17)$$

согласуется с экспериментальными результатами с точностью до нескольких процентов (см. фиг. 53). Кривая, описываемая формулой (1.17), изображена на фиг. 18. В отличие от  $T_c$  глубина проникновения  $\lambda$  существенно зависит от содержания примесей, возрастая с их увеличением (см. фиг. 54).

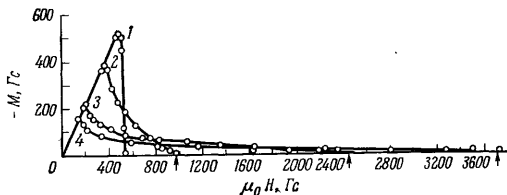
Перейдем теперь к магнитным свойствам сверхпроводящих сплавов. Их поведение сильно зависит от металлургической обработки образца. Основные черты кривой намагничивания хорошо отожженных сплавов можно видеть на фиг. 19, где изображены кривые для сплавов Pb — In. На фиг. 20 показаны области, которые обычно рассматриваются при обсуждении кривых намагничивания. Область слабых полей, в которой поток вытесняется, будем называть областью Мейсснера. При нижнем критическом поле  $H_{c1}$  поток проникает в сверхпроводник, но нормальное состояние в его толще полностью не восстанавливается до тех пор, пока

не достигнуто верхнее критическое поле  $H_{c2}$ . Кроме того, из измерений сопротивления, а также из теории следует, что на поверхности образца, параллельной приложенному полю, сверхпроводя-



Фиг. 18. Температурная зависимость глубины проникновения  $\lambda$  по Гортеру—Казмиру.

щее состояние сохраняется в тонком (порядка  $10^{-7}$  м) поверхностном слое вплоть до критического поля  $H_{c3} = 1,69H_{c2}$ . Область



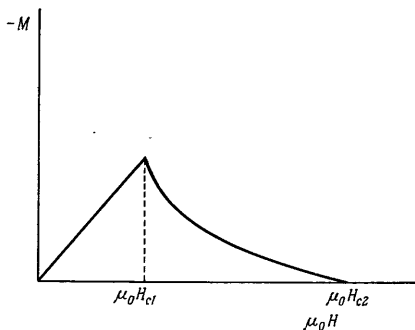
Фиг. 19. Кривые намагничивания отожженных поликристаллов Pb и сплавов Pb — In, снятые в возрастающем поле при 4,2 К [29].

1 — чистый Pb; 2 — сплав Pb — 2,08 вес % In; 3 — сплав Pb — 8,23 вес. % In; 4 — сплав Pb — 20, 4 вес. % In.

между  $H_{c1}$  и  $H_{c2}$  называют смешанным состоянием. Сверхпроводники, на кривых намагничивания которых имеется область смешанного состояния (см. фиг. 20), называются сверхпроводниками II рода. Как мы видели, чистые металлы (за исключением V и Nb) переходят сразу из состояния Мейсснера в нормальное состояние.

Такие сверхпроводники называются сверхпроводниками I рода. Чистые V и Nb являются, однако, сверхпроводниками II рода.

Кривая намагничивания хорошо отожженных образцов сверхпроводников II рода почти полностью обратима. Это означает, что кривая проходит через состояния равновесия. Поэтому мы



Фиг. 20. Кривая намагничивания сверхпроводника II рода.

можем применить к кривой намагничивания термодинамические соотношения (1.10) и (1.11). Поскольку при  $H_{c2}$  свободные энергии Гиббса обеих фаз равны, находим

$$-\int_0^{H_{c2}} M \cdot dH = G_n(0) - G_s(0), \quad (1.18)$$

т. е. площадь под кривой намагничивания равна  $G_n(0) - G_s(0)$ . Из фиг. 19 видно, что увеличение содержания примесей снижает  $H_{c1}$  и повышает  $H_{c2}$ , площадь же под кривой остается более или менее постоянной. Исходя из данных, приведенных на фиг. 19, можно подумать, что с увеличением содержания примесей значение  $H_{c2}$  растет неограниченно. Однако, как это было впервые показано Клогстоном [10], рост  $H_{c2}$  обычно ограничен спиновым парамагнетизмом (парамагнетизмом Паули) электронов в нормальном состоянии. Соотношения (1.11) и (1.18) были выведены в предположении, что нормальное состояние немагнитно. Фактически же в нормальном состоянии большинство металлов обладает небольшим парамагнетизмом, поскольку во внешнем магнитном поле энергетически более выгодно, чтобы плотность электронов со спином вдоль поля была несколько больше плотности электронов с противоположно направленным спином. Если это учесть, то равенство (1.11) при-

нимает вид

$$G_n(H) = G_n(0) - \frac{1}{2} \chi H^2, \quad (1.19)$$

где  $\chi$  — парамагнитная восприимчивость.

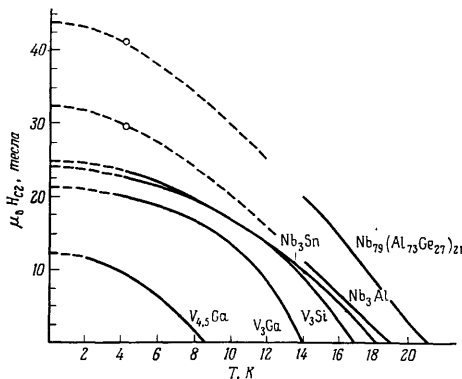
Свободные энергии равны для поля  $H_{p1}$ , определяемого из соотношения

$$G_n(0) - G_s(0) = \frac{1}{2} \chi H_{p1}^2 - \int_0^{H_{p1}} M \cdot dH, \quad (1.20)$$

где последний член — площадь под кривой намагничивания для сверхпроводящего состояния. Эта площадь всегда положительна, поскольку намагничённость  $M$  отрицательна; поэтому предельное критическое поле подчиняется неравенству

$$\frac{1}{2} \chi H_{p1}^2 < G_n(0) - G_s(0). \quad (1.21)$$

Клогстон [10] показал, что для простых материалов численное значение предельного поля равно  $\mu_0 H_{p1} = 1,84 T_c$  тесла. Суще-  
существо-

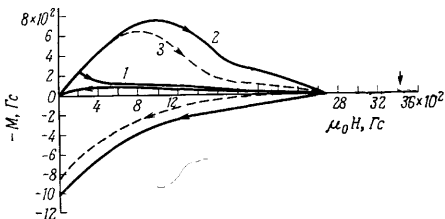


Фиг. 21. Зависимость поля  $H_{c2}$  от температуры для различных сверхпроводящих соединений с высокой критической температурой и с большими критическими полями [15].

Сейчас известны соединения, для которых критическое поле превосходит 70 тесла (см. [48\*\*]). — Ред.

вание парамагнитного предела обнаруживается на большинстве кривых зависимости  $H_{c2}$  от  $T$ , изображенных на фиг. 21. Двумя исключениями являются вещества с очень низкой парамагнитной восприимчивостью.

У сверхпроводников II рода, которые неоднородны хотя бы потому, что они содержат включения другой фазы или множество дислокаций, кривые намагничивания необратимы (фиг. 22). Кривые в возрастающем поле существенно отличаются от кривых в убывающем поле; поле  $H_{c1}$  четко определить уже нельзя, но поле  $H_{c2}$  остается вполне определенным. Поскольку кривая намагничивания обнаруживает гистерезис, она не проходит через равновесные состояния и площадь под кривой может быть какой угодно.



Фиг. 22. Кривые намагничивания тройного сплава, содержащего 78,4 вес. % Pb, 10,0 вес. % In и 11,6 вес. % Sn [30].

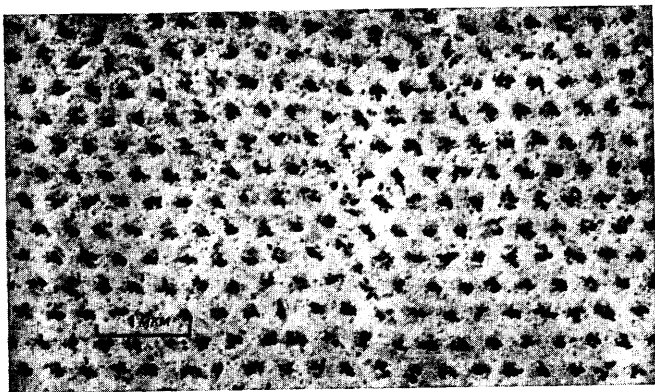
1 — после закалки от 260 °С; 2 — после одного дня при комнатной температуре; 3 — после девяти дней при комнатной температуре.

В настоящее время установлено, что как в случае обратимых, так и в случае необратимых сверхпроводников II рода магнитный поток проникает в находящийся в смешанном состоянии сверхпроводник, образуя решетку из квантованных линий потока. Каждая такая линия несет поток  $h/2e = 2,07 \cdot 10^{-15}$  вебер ( $= 2,07 \cdot 10^{-7}$  Гс  $\cdot$  см<sup>2</sup>). Наиболее непосредственное доказательство существования такой решетки получено в работе Эссмана и Тройбле [14], которые напыляли маленькие частички кобальта на поверхность находящегося в смешанном состоянии сверхпроводника и получили электронную микрофотографию распределения частиц. На фиг. 23 хорошо видна решетка, образованная линиями потока. В гл. 4 мы несколько подробнее остановимся на свойствах линий квантованного потока как в сверхпроводниках, так и в He II. Мы увидим, что можно связать магнитные свойства сверхпроводника в смешанном состоянии со свойствами линий потока; например, необратимость кривых намагничивания, которую мы видим на фиг. 22, связана с пиннингом — удержанием линий потока структурными дефектами образца.

В заключение настоящего параграфа мы качественно рассмотрим микроскопическую теорию сверхпроводимости. Теория прочно покоится на основах, заложенных в фундаментальной статье Бардина, Купера и Шриффера [6], и ее часто называют теорией БКШ. Однако для He II до сих пор полной теории еще нет. В настоящей



книге мы намереваемся параллельно рассматривать He II и сверхпроводники, прибегая к макроскопическим или феноменологическим уравнениям, использование которых оправдано прежде всего тем, что они хорошо согласуются с экспериментальными данными. Тем не менее знакомство с микроскопической теорией укрепляет доверие к феноменологической теории сверхпроводников. Полное изложение теории БКШ не входит в нашу задачу, ибо требует проведения весьма сложных математических вычислений. Мы



Фиг. 23. Электронная микрофотография распределения маленьких частичек кобальта на поверхности сверхпроводника II рода ( $\text{Pb}_{98}\text{In}_2$ ), находящегося в смешанном состоянии при 1,1 К [14].

ограничимся здесь обзором основных результатов, а более полное изложение теории БКШ дадим в приложении. Хорошее введение в полную теорию можно найти в книге Купера [26] и Грассье [47\*].

Исходное положение теории заключается в том, что сверхпроводимость есть результат притяжения между электронами, обусловленного обменом фононами (колебаниями решетки). В связи с ролью фононного механизма становится понятным существование *изотопического эффекта* для критической температуры. Именно, было обнаружено, что в ряде металлов, скажем в Hg, с разным изотопическим составом, характеризуемым средним массовым числом  $M$ , справедливо соотношение  $T_c \sim M^{-a}$ . Для простых случаев  $a = 1/2$ . Взаимодействие двух изолированных электронов приводит к образованию куперовской пары, в которой суммарный импульс (импульс центра масс) равен нулю, а спины электронов

направлены противоположно друг другу. При равной нулю температуре поведение всех электронов в металле описывается основным состоянием теории БКШ, а не заполненной сферой Ферми, как в нормальном металле. Состояние БКШ строится из куперовских пар в том смысле, что если одно электронное состояние в паре заполнено, то второе также должно быть заполненным. Это состояние отличается от нормального, поскольку некоторые электронные состояния вблизи нормальной ферми-поверхности заполнены, а некоторые, находящиеся внутри этой поверхности, — не заполнены (см. фиг. 183). В такой конфигурации кинетическая энергия, конечно, выше, чем в нормальном состоянии, но полная энергия состояния БКШ ниже полной энергии нормального состояния, поскольку энергия связи куперовских пар перевешивает увеличение кинетической энергии.

Один из наиболее важных результатов теории БКШ связан с природой возбужденных состояний сверхпроводника. Простое возбужденное состояние нормального металла состоит из дырки с импульсом  $k_1$  и электрона с импульсом  $k_2$ . Мы можем назвать дырку и электрон *элементарными возбуждениями* системы. Энергия, требуемая для образования пары электрон — дырка, равна  $|\epsilon_{k_1}| + |\epsilon_{k_2}|$ , где  $\epsilon_k$  — энергия рассматриваемого электронного состояния, измеряемая от поверхности Ферми. В сверхпроводнике природа элементарных возбуждений сложнее. Возбуждение с импульсом  $k$  подобно частице в нормальном металле, если  $|k| \gg k_F$ , и подобно нормальной дырке, если  $|k| \ll k_F$ , где  $k_F$  — импульс на поверхности Ферми. Для промежуточных значений  $k$  возбуждение является частично электронным, а частично дырочным. Далее, энергия возбуждения с импульсом  $k$  равна

$$E_k = (\epsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2}, \quad (1.22)$$

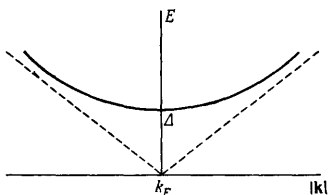
где, как и прежде,  $\epsilon_k$  — энергия нормального состояния, измеряемая от поверхности Ферми.

Спектр возбуждений схематически изображен на фиг. 24; можно видеть, в частности, что минимальная энергия  $E_{k_F} = \Delta$ , так что  $\Delta$  есть величина щели в спектре возбуждений. В литературе возникла некоторая путаница в обозначениях, поскольку в ряде экспериментов, например в экспериментах с поглощением света, мы имеем дело с образованием двух квазичастиц. В экспериментах такого рода пороговая энергия равна  $2\Delta$  (см. фиг. 57). Поэтому *энергетической щелью* иногда называют величину  $2\Delta$ . В микротеории энергетическая щель при нулевой температуре  $\Delta(0)$  связана с критической температурой  $T_c$  следующим образом:

$$\Delta(0) = 1,76k_B T_c. \quad (1.23)$$

При рассмотрении спектра возбуждений сверхпроводника важную роль играет использование плотности состояний квазичастиц

$N(E)$ , определяемой, как обычно, так, что  $N(E) dE$  есть число состояний между  $E$  и  $E + dE$ . В силу наличия щели  $\Delta$ , плотность  $N$  равна нулю при  $E_F - \Delta < E < E_F + \Delta$ . Вытесненные состояния должны куда-то переместиться, и они скапливаются около



Фиг. 24. Схематическое изображение спектра возбуждений согласно теории БКШ (сплошная линия) и спектра возбуждений в нормальном состоянии  $|\epsilon_k|$  (пунктир).

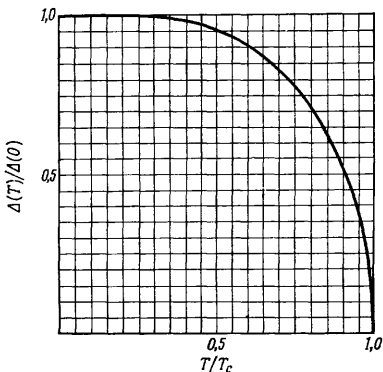
Нормальный спектр  $\epsilon_k = k^2/2m - k_F^2/2m$  аппроксимирован выражением  $\epsilon_k = v_F (|k| - k_F)$  с  $v_F = \hbar k_F/m$ , поскольку  $\Delta \ll \epsilon_F$ .

щели; таким образом,  $N(E)$  имеет большую величину при значениях энергии  $E$ , близких к  $E_F + \Delta$  и  $E_F - \Delta$ . Соответствующая форма плотности состояний  $N(E)$  изображена на фиг. 60.

До сих пор мы обсуждали состояние БКШ при  $T = 0$ . Перейдем теперь к отличным от нуля температурам. Во-первых, энергетическая щель зависит от температуры и стремится к нулю при  $T = T_c$ . Точная форма зависимости  $\Delta(T)$  изображена на фиг. 25. Физическая природа этой зависимости состоит в том, что энергетическая щель возникает в результате коллективного по своему происхождению размазывания поверхности Ферми, которое создает возможность притяжения электронов через взаимодействие с фононами. Однако этому коллективному взаимодействию препятствует тепловое «сглаживание» поверхности Ферми, усиливающееся с температурой, так что постепенно щель закрывается и обращается в нуль при  $k_B T_c \sim \Delta(0)$ . Во-вторых, при  $T > 0$  имеется некоторое количество возбужденных квазичастиц (см. фиг. 63). Таким образом, при отличных от нуля температурах мы должны учитывать как частицы в основном состоянии, так и газ квазичастиц. Поэтому мы будем иногда пользоваться терминологией двухжидкостной модели и говорить о сверхтекучей и нормальной жидкостях соответственно. Важно, однако, понимать, что двухжидкостная модель для сверхпроводников пригодна в значительно меньшей степени, чем для He II. Яркие выраженные двухжидкостные эффекты в He II, такие, например, как второй звук и фонтанирование, связаны в основном с течением обеих компонент — сверхтекучей и нормаль-

ной. В сверхпроводнике, однако, нормальная жидкость (жидкость из квазичастиц) не может свободно двигаться относительно металлической решетки, рассеиваясь на ее примесях и дефектах. Это означает, что второй звук и фонтанирование в сверхпроводниках невозможны.

Если известен спектр возбуждений, можно вычислить электронную часть теплоемкости. Энергетический спектр сверхпроводника [уравнение (1.22)] зависит от температуры, поскольку  $\Delta$



Фиг. 25. Зависимость энергетической щели от температуры [33].

меняется с температурой. Поэтому нужно вычислить свободную энергию и определить теплоемкость путем двукратного ее дифференцирования по температуре. При низких температурах  $T < 0,5T_c$  щель  $\Delta$  по существу от температуры не зависит и значительно превышает  $k_B T$ . Тогда вероятность нахождения возбуждения с энергией  $E_k$  пропорциональна множителю Больцмана  $\exp(-E_k/k_B T)$ , максимальное значение которого равно  $\exp(-\Delta/k_B T)$ . Используя этот множитель, получаем

$$C_{es} \sim \exp(-\alpha \Delta/k_B T), \quad (1.24)$$

где  $\alpha$  — численный множитель порядка единицы. Как видно из фиг. 12, экспериментальные данные удовлетворительно согласуются с этим выражением. Необходимо отметить, что для получения электронной части теплоемкости необходимо произвести вычитание решеточной теплоемкости, что далеко не просто. Более полные данные о теплоемкости см. в книге Линтона [32].

## § 1.3. Конденсация Бозе — Эйнштейна

В настоящем параграфе мы обсудим свойства модельной системы — идеального бозе-газа и сравним их со свойствами жидкого  $\text{He}^4$ . Ниже определенной критической температуры  $T_B$  наименьший энергетический уровень идеального газа заполнен большим количеством частиц. В конце § 1.1 мы уже отмечали, что аналогичный эффект имеет место в жидком  $\text{He}^4$ , в котором ниже  $\lambda$ -точки значительная часть жидкости становится сверхтекучей. Чтобы произвести количественное сравнение, найдем выражение для  $T_B$  и вычислим относительное количество частиц, находящихся в основном состоянии при температурах ниже  $T_B$ .

Однако, прежде чем приступить к вычислениям, мы кратко перечислим те причины, в силу которых нам приходится использовать два различных типа квантовой статистики. Все известные к настоящему времени фундаментальные частицы делятся на два класса, определяемые собственным моментом количества движения, или спином, частицы. Спин квантуется, и его всегда можно представить в форме  $s\hbar$ , где  $s$  — спиновое квантовое число. Частицы, для которых  $s$  — нечетное полуцелое число, описываются антисимметричными полными волновыми функциями, а частицы с целым или равным нулю спиновым числом  $s$  описываются симметричными полными волновыми функциями. Симметрия, о которой здесь идет речь, касается обмена двух частиц в системе, состоящей из совокупности одинаковых частиц. В силу идентичности частиц, обмен пары частиц не меняет наблюдаемых физических параметров системы. Однако тип симметрии волновых функций определяет фундаментальную характеристику системы, а именно число частиц, которые могут заполнить одно и то же квантовое состояние.

В качестве примера рассмотрим систему, состоящую лишь из двух одинаковых частиц. Предположим, что частица 1 занимает состояние, описываемое нормированной волновой функцией  $\psi_a$ , а волновая функция для частицы 2 есть  $\psi_b$ . Индексы  $a$  и  $b$  отвечают полному набору квантовых чисел, необходимых для описания одночастичного квантового состояния. При отсутствии взаимодействия между частицами систему можно описать с помощью произведения  $\psi_a(1)\psi_b(2)$ . С другой стороны, поскольку перестановка частиц не изменяет свойств системы, для ее описания можно использовать также произведение  $\psi_a(2)\psi_b(1)$ . Поэтому полная волновая функция является линейной комбинацией этих двух произведений. Таким образом, мы имеем

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_a(2)\psi_b(1) \} \quad (\text{симметричная функция}),$$

или

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_a(1) \psi_b(2) - \psi_a(2) \psi_b(1) \} \text{ (антисимметричная функция).} \quad (1.26)$$

Предположим теперь, что обе частицы занимают одно и то же состояние, т. е.  $a = b$ . Симметричная полная волновая функция равна тогда  $\sqrt{2} \psi_a(1) \psi_a(2)$ , а антисимметричная функция обращается в нуль. Таким образом, частица с нечетным полуцелым спином не может занять состояние, заполненное другой такой же частицей. Это обстоятельство — сущность принципа Паули, которому подчиняются электроны, протоны, нейтроны и другие частицы. Хотя мы рассмотрели систему, состоящую всего из двух частиц, соображения, касающиеся обменной симметрии, можно обобщить и на системы, состоящие из любого числа частиц. В качестве конкретного примера упомянем электроны проводимости в нормальном металле: они распределяются по имеющимся квантовым состояниям таким образом, что в каждый момент времени состояние или заполнено одной частицей, или свободно. Системы с таким распределением подчиняются статистике Ферми — Дирака, а входящие в них частицы называются фермионами.

Наоборот, симметричная волновая функция не обращается в нуль при заполнении обеими частицами одного и того же состояния. Это означает, что частицы с целым и равным нулю спиновым числом не подчиняются принципу Паули. Тогда в одном и том же состоянии может находиться любое число частиц. Системы такого типа подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, а входящие в них частицы называются бозонами. Атом  $\text{He}^4$  состоит из шести фермионов, но они связаны таким образом, что результирующий спин равен нулю; следовательно, атом  $\text{He}^4$  является бозоном. С другой стороны, атом  $\text{He}^3$  содержит пять фермионов, при любой комбинации которых полный спин будет полуцелым, поэтому атом  $\text{He}^3$  представляет собой фермион. У этих двух типов атомов  $\text{He}$  ядра отличаются лишь на один нейтрон, но этого достаточно, чтобы они подчинялись различным статистикам, что в свою очередь обуславливает различие их свойств в жидкой фазе.

Вернемся теперь к модельной системе — идеальному бозе-газу, состоящему из макроскопического числа  $N$  атомов  $\text{He}^4$ , содержащихся в ящике объемом  $V$ . При тепловом равновесии при абсолютной температуре  $T$  среднее число атомов с энергией  $\epsilon_i$  определяется функцией распределения Бозе — Эйнштейна

$$\langle n(\epsilon_i, T) \rangle = \frac{1}{\exp \{ (\epsilon_i - \mu) / k_B T \} - 1}, \quad (1.27)$$

где  $\mu$  — химический потенциал газа. Химический потенциал представляет собой термодинамический параметр, играющий роль,

аналогичную температуре. В то время как разность температур обуславливает возникновение потока энергии, разность химических потенциалов обуславливает возникновение потока частиц. Будем считать, что уровню с наименьшей энергией газа соответствует энергия, равная нулю. Тогда, как видно из уравнения (1.27),  $\mu$  не может быть положительным, ибо в противном случае некоторые из чисел заполнения  $n$  окажутся отрицательными. Кроме того, число частиц в системе сохраняется и их распределение при всех температурах подчиняется правилу сумм:

$$\sum_i \langle n(\varepsilon_i, T) \rangle = N. \quad (1.28)$$

Отметим, что число частиц на наименьшем энергетическом уровне  $\langle n(0, T) \rangle$  может иметь такой же порядок, как и  $N$ , если только отношение  $(-\mu/k_B T)$  достаточно мало.

Для простоты положим, что газ заключен в объеме, имеющем форму куба. При периодических граничных условиях энергетические уровни, которые могут быть заполнены отдельными атомами, описываются выражением

$$\varepsilon_{klm} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 V^{2/3}} (k^2 + l^2 + m^2), \quad (1.29)$$

где  $k$ ,  $l$  и  $m$  — положительные целые числа. Наименьший энергетический уровень есть  $\varepsilon_{111}$  — величина положительная. Поскольку энергию наименьшего уровня мы положили равной нулю, энергия уровней запишется в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_{klm} - \varepsilon_{111}. \quad (1.30)$$

Далее, в макроскопической системе объем  $V$  так велик, что энергетические уровни располагаются очень близко друг к другу и е можно рассматривать как непрерывную переменную.

Теперь необходимо ввести *плотность состояний*  $\mathcal{D}(\varepsilon)$ , которая представляет собой число энергетических уровней на единичный интервал энергии. С помощью простых вычислений с использованием выражений (1.29) и (1.30) получаем (см. задачу 1.3)

$$\mathcal{D}(\varepsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m_0}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2}. \quad (1.31)$$

Суммирование выражений (1.27) по дискретным энергетическим уровням заменяем интегрированием по всем значениям  $\varepsilon$ , так что

$$\sum_i \langle n(\varepsilon_i, T) \rangle \rightarrow \int_0^{\infty} \mathcal{D}(\varepsilon) \langle n(\varepsilon, T) \rangle d\varepsilon. \quad (1.32)$$

Однако такая замена приводит к трудностям. Сумма распространяется на частицы, находящиеся на наименьшем энергетическом уровне, а интеграл — нет, поскольку  $\mathcal{D}(0) = 0$ .

Таким образом, в интеграле учтены лишь частицы, находящиеся в возбужденных состояниях. Пренебрежение частицами с  $\varepsilon = 0$  существенно, поскольку, как мы уже отмечали, величина  $\langle n(0, T) \rangle$  может быть порядка  $N$ . Таким образом, к интегралу следует добавить  $\langle n(0, T) \rangle$ ; тогда вместо соотношения (1.28) имеем

$$N = \langle n(0, T) \rangle + \int_0^{\infty} \mathcal{D}(\varepsilon) \langle n(\varepsilon, T) \rangle d\varepsilon = N_0(T) + N'(T). \quad (1.33)$$

Используя выражения (1.27) и (1.31), находим

$$N'(T) = \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m_4}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{\exp\{(\varepsilon - \mu)/k_B T\} - 1}. \quad (1.34)$$

При данной температуре это выражение достигает максимума при  $\mu = 0$ ; поэтому, полагая  $\mu = 0$ , определяем верхнюю границу для  $N'(T)$ . Вводя величину  $u = \varepsilon/k_B T$ , получаем

$$N'(T) < N'_m(T) = \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m_4 k_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{u^{1/2} du}{e^u - 1}. \quad (1.35)$$

Входящий сюда интеграл хорошо известен:

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{1/2} du}{e^u - 1} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \quad (1.36)$$

где

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-t} \quad (1.37)$$

и

$$\zeta(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}. \quad (1.38)$$

Гамма-функция  $\Gamma(3/2)$  равна  $\sqrt{\pi}/2$ , а дзета-функция Римана  $\zeta(3/2) = 2,612$  (см. Лондон [31], том II, приложение). Максимальное число частиц в возбужденном состоянии равно поэтому

$$N'_m(T) = 2,612 V \left( \frac{m_4 k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}. \quad (1.39)$$

Для системы с заданными  $N$  и  $V$  при достаточно высоких температурах значение  $N'_m(T)$  достаточно велико для того, чтобы все частицы оказались на возбужденных уровнях. Однако при понижении температуры может быть достигнута критическая точка  $T_B$ , ниже которой число  $N'_m(T)$  становится меньше  $N$ . Другими



словами, ниже температуры  $T_B$  частицы начинают заполнять наинизший энергетический уровень; этот процесс усиливается при дальнейшем понижении температуры. Критическая температура  $T_B$  определяется из равенства  $N'_m(T_B) = N$ , что дает

$$T_B = \frac{2\pi\hbar^2}{m_0 k_B} \left( \frac{N}{2,612 V} \right)^{2/3}. \quad (1.40)$$

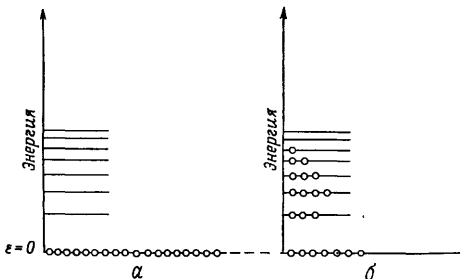
Комбинируя два последних выражения, видим, что число частиц, находящихся в возбужденном состоянии, равно

$$\frac{N'(T)}{N} = \left( \frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (T \leq T_B). \quad (1.41)$$

Остальные частицы находятся на уровне с наинизшей энергией, причем из (1.33) имеем

$$\frac{N_0(T)}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (T \leq T_B). \quad (1.42)$$

Из (1.42) следует, что  $N_0(T_B) = 0$ , но это не совсем точно в силу приближенной природы вычислений, с помощью которых получено



Фиг. 26. Заполнение энергетических уровней в идеальном газе Бозе — Эйнштейна (схематически).

а — температура  $T = 0$ , все частицы находятся на наинизшем энергетическом уровне; б — температура лежит в интервале  $0 < T < T_B$ , некоторые возбужденные состояния заполнены, но значительная часть частиц остается на наинизшем уровне (в конденсате).

выражение (1.40). Фактически при  $T > T_B$  небольшая часть частиц остается на наинизшем уровне, но их количество пренебрежимо мало.

На фиг. 26 представлены результаты, найденные выше для идеального газа. При абсолютном нуле все частицы занимают наинизший энергетический уровень; при температурах выше  $T_B$  почти все частицы находятся в возбужденном состоянии. Между абсолютным нулем и  $T_B$  частицы разделяются на две группы —

одни остаются на наинизшем уровне, а другие переходят в возбужденное состояние. В системе макроскопического размера наинизший уровень остается заполненным макроскопически большим числом частиц вплоть до некоторой отличной от нуля температуры. Это явление известно под названием конденсации Бозе — Эйнштейна, причем частицы, находящиеся на наинизшем уровне, образуют так называемый *конденсат*. Однако эта конденсация существенно отличается от явления, происходящего, например, при ожижении газа. В последнем случае частицы образуют две фазы, разделенные четкой границей в пространстве координат, т. е. в «обычном» пространстве. В противоположность этому конденсацию Бозе — Эйнштейна можно рассматривать как разделение в пространстве импульсов, т. е. физической границы между конденсатом и возбужденными частицами не существует <sup>1)</sup>. Тем не менее частицы «упорядочены» по импульсам. С этой точки зрения конденсация Бозе — Эйнштейна представляет собой пример перехода типа порядок — беспорядок.

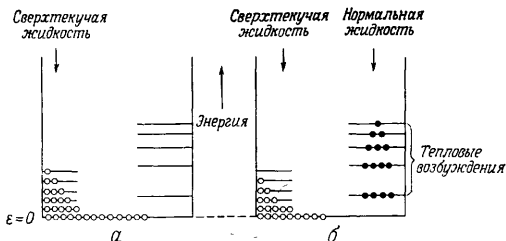
Чтобы сравнить нашу идеальную систему с гелием, оценим температуру конденсации для газообразного  $\text{He}^4$ . Если в выражении (1.40) использовать плотность частиц  $N/V$ , соответствующую насыщенным парам при нормальной точке кипения, получим  $T_B = 0,5 \text{ К}$ . Поскольку точка кипения равна  $4,2 \text{ К}$ , конденсации Бозе — Эйнштейна в газе не наблюдается. Однако если воспользоваться плотностью жидкого  $\text{He}^4$ , то получим  $T_B = 3,1 \text{ К}$ . Это достаточно близко к температуре  $\lambda$ -перехода ( $2,17 \text{ К}$ ) и позволяет предположить, что  $T_\lambda$  есть температура, при которой начинается конденсация Бозе — Эйнштейна в жидком  $\text{He}^4$ . С другой стороны, аномалии удельной теплоемкости в этих двух случаях совершенно различны (см. фиг. 4). В идеальном газе на кривой зависимости  $C_V$  от  $T$  имеется излом, а в жидком  $\text{He}^4$  — разрыв типа  $\lambda$ -точкп.

Тот факт, что модель идеального газа не дает точного описания  $\lambda$ -перехода, не может вызвать удивления, поскольку жидкий гелий представляет собой систему, в которой существенную роль играют силы притяжения между атомами. Поскольку удовлетворительная микроскопическая теория отсутствует, мы сделаем некоторые общие утверждения о взаимодействующей бозе-системе, основываясь главным образом на том, что такой подход позволяет построить приемлемую картину поведения  $\text{He II}$ .

По сравнению с идеальным газом взаимодействие проявляется двояким образом: во-первых, уменьшается число частиц, конденсирующихся на наинизшем энергетическом уровне, во-вторых, меняется природа возбужденных состояний системы. Так, при

<sup>1)</sup> Сказанное справедливо лишь в случае однородной системы. При наличии же внешнего поля (например, поля тяжести) граница между конденсатом и возбужденными частицами возникла бы и в «обычном» пространстве (подробнее см. [49\*\*]). — *Прим. ред.*

абсолютном нуле не все частицы оказываются на наимизшем энергетическом уровне — некоторые попадают на уровни с несколько большей энергией (фиг. 27, а). Мы говорим, что конденсат «истощается» в результате взаимодействия. Решающим является, однако, то обстоятельство, что конечное число частиц по-прежнему заполняет наимизший уровень, и такое положение сохраняется вплоть до некоторой отличной от нуля температуры конденсации.



Фиг. 27. Заполнение энергетических уровней во взаимодействующем бозе-газе и в He II (схематически).

а — температура  $T = 0$ , в результате взаимодействия некоторые частицы оказываются в виртуальных состояниях  $\epsilon > 0$ , такую ситуацию называют «истощением» конденсата; б — температура лежит в интервале  $0 < T < T_B$  (или  $T_\lambda$ ), некоторые возбужденные состояния заполнены, причем в силу наличия взаимодействий эти состояния не являются одночастичными. Значительная часть частиц остается на наимизшем энергетическом уровне, который истощен в связи с наличием взаимодействия.

Конечно, при всех температурах выше абсолютного нуля термически возбужденные уровни системы в той или иной степени заполнены (фиг. 27, б). Они уже соответствуют не одночастичным состояниям, а элементарным возбуждениям всей системы, которые для начала рассматриваются как невзаимодействующие квазичастицы.

Мы можем связать это описание взаимодействующей бозе-системы с двухжидкостной моделью. Согласно экспериментальным данным, He II при абсолютном нуле полностью сверхтекуч. Следовательно, сверхтекучая компонента содержит и конденсат, и частицы, заполняющие уровни, соответствующие истощению конденсата при  $T = 0$ . В то же время нормальную компоненту жидкости мы связываем с тепловыми возбуждениями (см. фиг. 27). Вопрос о конденсате будет рассмотрен в следующем параграфе, а природа возбуждений в He II — в § 1.5.

Мы уже упоминали о сходстве сверхтекучести и сверхпроводимости, особенно в том отношении, что в обоих случаях имеет место течение частиц без диссипации энергии. На первый взгляд может показаться, что сверхпроводящий переход не связан с конденсацией Бозе — Эйнштейна, поскольку участвующие в сверхпрово-

димости частицы — электроны — являются фермионами. Однако при выборе квантовой статистики, описывающей данную систему, нужно учитывать не только внутреннюю природу частиц, но и их взаимодействие. Простые соображения, приведенные в начале параграфа, строго справедливы в отсутствие взаимодействия. В случае  $\text{He}^4$  имеет место сильное взаимодействие, которое связывает отдельные составные части атома, создавая бозон; в то же время остаточное взаимодействие между атомами сравнительно слабо, что и дает возможность применять статистику Бозе. Аналогично, как мы уже видели в § 1.2, в сверхпроводнике взаимодействие приводит к образованию куперовских пар электронов; эти пары ведут себя практически, как бозоны, и претерпевают конденсацию. Температура сверхпроводящего перехода  $T_c$  соответствует температуре конденсации  $T_B$ , хотя характер аномалии теплоемкости при  $T_c$  (см. фиг. 12) отличается от аномалии как в жидком гелии, так и в идеальном бозе-газе (см. фиг. 4). Таким образом, мы можем считать, что ниже  $T_c$  куперовские пары сконденсированы, образуя основное состояние, тогда как остальные электроны находятся на термически возбужденных уровнях системы.

## § 1.4. Волновая функция конденсата

Мы предположили, что жидкий гелий ниже  $\lambda$ -точки и сверхпроводник ниже температуры перехода содержат конденсат, т. е. макроскопически большое число частиц, заполняющих одно квантовое состояние. Мы также отметили, что конденсат определяет основные свойства сверхтекучей компоненты  $\text{He II}$  и сверхпроводящих электронов в сверхпроводнике. В настоящем параграфе мы уточним связь между конденсатом и «сверхпотоком» — сверхтекучим течением или сверхпроводящим током, введя для описания конденсата волновую функцию и выразив скорость сверхпотока через фазу волновой функции.

Кроме сверхпотоков единственными потоками, которые могут течь без диссипации, являются орбитальные токи электронов в атомных и молекулярных системах. Каждый электрон в устойчивом атоме занимает стационарное квантовое состояние, описываемое собственной функцией соответствующего гамильтониана. В своей классической работе Лондон [31], рассуждая по аналогии, заключил, что сверхпотоки также являются квантовыми токами и, более того, что волновая функция некоторого типа простирается на весь сверхтекучий или сверхпроводящий образец. Постулировать макроскопическую волновую функцию — шаг весьма смелый. Атомные и молекулярные волновые функции ограничены областями с типичными размерами порядка нанометра, в то время как если взять в качестве примера предельный случай — проволоку в сверхпроводящем соленоиде, то ее длина может достигать многих

метров. Однако предположение Лондона теперь подкрепляется большим количеством экспериментальных данных. Поэтому мы принимаем за основу предположение, что «сверхжидкости» (сверхтекучие и сверхпроводящие системы) характеризуются макроскопическим квантованием. Большая часть книги посвящена выяснению следствий, вытекающих из этого постулата. Одна из наших главных целей — продемонстрировать свойства, общие для He II и сверхпроводников. По указанной причине мы и применяем термины «сверхжидкость» и «сверхпоток», имея в виду и He II, и сверхпроводники.

До сих пор мы рассматривали квантовое состояние, заполненное частицами конденсата, как состояние с равной нулю энергией. Однако ясно, что при наличии сверхпотока квантовое состояние — это состояние с отличной от нуля энергией, равной кинетической энергии потока. В любом случае — движется сверхтекучая компонента или нет — существенно то, что для описания конденсата нужна лишь простая волновая функция. Мы постулируем, что в стационарных условиях эту волновую функцию можно записать в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 \exp\{iS(\mathbf{r})\}, \quad (1.43)$$

где фаза  $S(\mathbf{r})$  — вещественная функция радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . В определенных ситуациях амплитуда  $\psi_0$  также меняется с  $\mathbf{r}$ , но мы с такими случаями не будем иметь дела, пока не коснемся в гл. 2 и 3 интерпретации функции  $\psi_0$ .

Применяя к  $\psi(\mathbf{r})$  обычный оператор импульса, получаем выражение для импульса конденсата  $\mathbf{p}$

$$\hat{\mathbf{p}}\psi = -i\hbar\nabla\psi = \mathbf{p}\psi, \quad (1.44)$$

откуда следует, что

$$\mathbf{p} = \hbar\nabla S. \quad (1.45)$$

Величина  $\mathbf{p}$ , определяемая согласно (1.45), представляет собой канонический импульс, т. е. импульс, сопряженный координатам  $\mathbf{r}$  в смысле гамильтоновой механики.

Применим (1.45) прежде всего к He II. В этом случае канонический импульс удобнее интерпретировать как импульс одной частицы сверхтекучей жидкости. Тогда, если сверхтекучая скорость есть  $\mathbf{v}_s$ , мы можем записать

$$\mathbf{p} = m_4\mathbf{v}_s. \quad (1.46)$$

Подставляя это уравнение в (1.45), получаем

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m_4} \nabla S. \quad (1.47)$$

Однако (1.47) еще не дает однозначного определения  $\mathbf{v}_s$ , поскольку совершенно не ясно, почему в выражения (1.46) и (1.47) должна входить именно масса атома  $m_4$ . Мы обсудим это обстоятельство в § 2.3. Тем не менее соотношение (1.47) важно, поскольку устанавливает

ливают пропорциональность сверхтекучей скорости градиенту фазы волновой функции конденсата. Таким образом, когда сверхтекучая жидкость находится в состоянии покоя, фаза повсюду одинакова; когда же сверхтекучая скорость отлична от нуля и постоянна, фаза равномерно меняется в направлении  $v_s$ . Мы приходим к выводу, что фаза волновой функции (1.43) когерентна для всей сверхтекучей жидкости. Другими словами,  $S(\mathbf{r})$  — плавно меняющаяся функция  $\mathbf{r}$ , не претерпевающая резких изменений на расстояниях порядка атомных, если не считать области вблизи сердцевин вихревой нити. Фактически  $S(\mathbf{r})$  медленно меняется даже в макроскопическом масштабе. В результате когерентности фазы частицы конденсата удерживаются в состоянии однородного движения. Это может привести на мысль о жесткой структуре, движущейся как целое, но необходимо помнить, что «жесткость» имеет место в пространстве импульсов, а не в обычном пространстве. Хотя мы перейдем к обсуждению временной зависимости волновой функции и  $v_s$  лишь в гл. 2, отметим уже здесь, что когерентность фазы уже сама по себе позволяет качественно объяснить, каким образом постоянство сверхтекучей скорости сохраняется в течение длительного времени. Резкое изменение  $v_s$  обязательно должно было бы вызывать такое же изменение скорости макроскопического числа частиц, а это столь маловероятно, что подобную возможность можно не учитывать.

Обсудим теперь волновую функцию конденсата в случае сверхпроводника. В § 1.2 мы видели, что переход в сверхпроводящее состояние характеризуется возникновением в спектре возбуждений энергетической щели  $2\Delta$ . Ситуация весьма упрощается в связи с тем, что  $\Delta$  по существу идентична функции  $\psi(\mathbf{r})$  [см. выражение (1.43)]. В первоначальной формулировке микроскопической теории, которая приводится в приложении и на которой мы коротко останавливались в § 1.2, было введено то ограничение, что щель  $\Delta$  постоянна в пространстве. Однако Горьков [18, 19] смог в ряде важных статей сформулировать микротерию и для случаев, аналогичных смешанному состоянию сверхпроводников II рода, когда  $\Delta$  меняется в пространстве. Он показал, что получающаяся величина  $\Delta(\mathbf{r})$  является комплексной функцией и ее можно рассматривать как макроскопическую волновую функцию.

В сверхпроводнике «частицами» конденсата являются куперовские пары с массой  $2m$  и зарядом  $2e$ . Во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}$ , где  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , канонический импульс куперовской пары равен

$$\mathbf{p} = 2m\mathbf{v}_s + 2e\mathbf{A}, \quad (1.48)$$

где  $v_s$  — скорость сверхпроводящего тока (см., например, Гольдштейн [17]). Исключая  $\mathbf{p}$  из уравнений (1.45) и (1.48), получаем

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{2m} \nabla S - \frac{e\mathbf{A}}{m} \quad (1.49)$$

Это выражение соответствует выражению (1.46) для He II; сделанное выше замечание о когерентности фазы и ее связи с  $v_s$  полностью справедливо и для сверхпроводников.

Применяя операцию  $\text{rot}$  к выражениям (1.47) и (1.49), можно получить еще два важных уравнения

$$\text{rot } v_s = 0 \quad (\text{He II}), \quad (1.50)$$

$$\text{rot } v_s + eV/m = 0 \quad (\text{сверхпроводник}). \quad (1.51)$$

Уравнение (1.50) представляет собой условие отсутствия вихрей, которому удовлетворяет сверхтекучая часть He II в случае потенциального течения. Мы прибегнем к уравнению (1.50) в следующей главе при выводе уравнения движения сверхтекучей жидкости из постулата о существовании макроскопической волновой функции. Уравнение (1.51) — одна из форм уравнения Лондонов, описывающего вытеснение магнитного потока из сверхпроводника; применения этого уравнения будут обсуждаться в гл. 3.

Наконец, отметим еще одно вытекающее из (1.43) обстоятельство. Ясно, что функция  $\psi(\mathbf{r})$  должна всегда быть однозначной. Это возможно в том случае, если фаза  $S$  является однозначной или периодической функцией. Последняя возможность реализуется при сверхтекучем течении вокруг отверстия. Сверхтекучее течение по замкнутому контуру, окружающему отверстию, связано с изменением фазы, кратным целому числу  $2\pi$  (или нулю). Отличное от нуля изменение фазы соответствует ситуации, когда имеется циркуляция сверхтекучей жидкости (с постоянной угловой скоростью) вокруг отверстия. Это означает, что возможна конденсация в состоянии с квантованным моментом количества движения, а не только конденсация в состоянии с однородным импульсом, с которыми мы уже знакомы. Описанное движение и представляет собой вихревое движение в сверхтекучей жидкости. В сверхпроводнике эквивалентные соображения приводят к квантованию магнитного потока. Оба вопроса будут рассмотрены в гл. 4.

## § 1.5. Элементарные возбуждения и сверхтекучесть

В двух предыдущих параграфах мы сосредоточили внимание на частицах сверхтекучей системы, находящихся в основном состоянии, т. е. конденсате. Поскольку и He II, и сверхпроводники содержат конденсат и эти две системы — единственные из известных систем, в которых возможен «сверхпоток», логично предположить, что наличие конденсата — необходимое условие для возникнове-

ния сверхтекучести и сверхпроводимости <sup>1)</sup>. Однако это условие не является достаточным; возможность возникновения сверхтекучести в системе, содержащей конденсат, связана также с природой термически возбужденных состояний. В настоящем параграфе мы остановимся на тепловых возбуждениях в He II; возбуждения в сверхпроводниках мы рассмотрели уже в § 1.2 и кратко коснемся их ниже.

Когда мы обсуждали двухжидкостную модель (см. § 1.1), то видели, что всю энтропию He II несет нормальная компонента. Позже, в § 1.3, мы связали нормальную жидкость с тепловыми возбуждениями He II. Ясно поэтому, что термодинамические параметры определяются тем, как заполнены возбужденные состояния. Энергетические уровни идеального газа He<sup>4</sup> определяются известным выражением для свободных частиц

$$\varepsilon = p^2/2m_4, \quad (1.52)$$

где  $\varepsilon$  — энергия и  $p$  — импульс отдельного атома. Конечно, это соотношение неприменимо к жидкости, в которой в результате взаимодействия возникает коллективное движение атомов. Поэтому мы должны рассмотреть нормальные моды движения всей жидкости.

Принятая для He II процедура аналогична методам, используемым для описания низкотемпературных свойств твердого кристалла. Нормальные моды кристалла представляют собой стоячие звуковые волны, и их можно описывать как совокупность квантовых осцилляторов. Энергия осциллятора с угловой частотой  $\omega$  равна

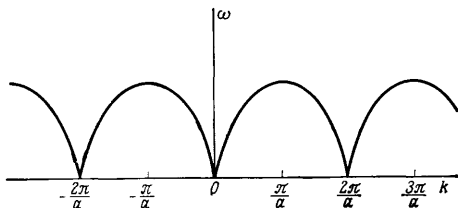
$$\varepsilon = n\hbar\omega, \quad (1.53)$$

где  $n$  — целое число, и мы пренебрегаем нулевой энергией. Альтернативно можно вместо осциллятора в его  $n$ -м возбужденном состоянии рассматривать  $n$  фононов с энергией  $\hbar\omega$ . Таким образом, кванты звука — фононы являются элементарными тепловыми возбуждениями кристалла. Для каждого типа фононов существует связь между энергией и импульсом, которую называют дисперсионным соотношением, если она выражена алгебраически, или энергетическим спектром, если она изображена графически. В качестве простого примера на фиг. 28 приведен спектр для мод колебаний «одномерного кристалла». В реальном кристалле энергетический спектр зависит от направления распространения фонона, а также

<sup>1)</sup> Необходимость существования конденсата для возможности появления «сверхпотока» не доказана даже для трехмерных систем. Более того, в ограниченных (квазиодномерных и квазидвумерных) системах, таких, как пленки He II или сверхпроводящие проволочки, конденсат, строго говоря, отсутствует, а сверхтекучесть или сверхпроводимость сохраняется (подробнее см., например, [50\*]). — *Прим. ред.*

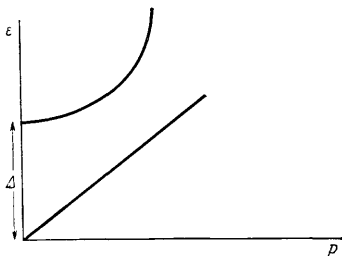


от того, с какими колебаниями связаны фононы — с поперечными или продольными, что может сильно усложнить картину. В принципе, зная энергетический спектр, можно вычислить тепловые характеристики кристалла.



Фиг. 28. Спектр возбуждений одноатомной линейной цепочки с постоянной решетки  $a$ .

Фононная модель кристалла представляет собой пример модели, применяемой для описания взаимодействующей системы. Истинные частицы и их взаимодействие заменены системой невзаимодействующих или по крайней мере слабо взаимодействующих *квазичастиц*. При достаточно низких температурах плотность квазичастиц достаточно мала, чтобы их взаимодействия можно было пренебречь. При более высоких температурах взаимодействия уже нужно учитывать. Например, ангармоничность кристаллической решетки можно описать в терминах фонон-фононного взаимодействия.



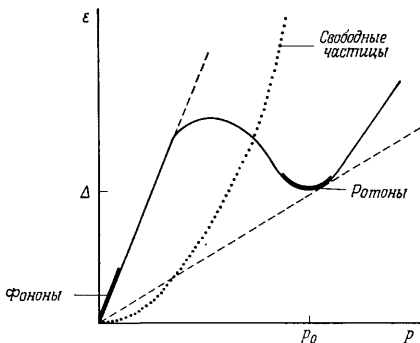
Фиг. 29. Форма спектра возбуждений в He II, принятая Ландау в 1941 г. [27].

Что же касается жидкостей, то в них могут распространяться только продольные, но не поперечные звуковые волны; поэтому можно ожидать, что в числе тепловых возбуждений в He II должны оказаться фононы. Важные черты спектра возбуждений He II впервые выяснил Ландау [27, 28]. Сначала он предположил, что спектр должен состоять из двух ветвей (фиг. 29) — фононной и другой, отделенной от первой энергетической щелью. Но, когда Ландау обнаружил, что такой спектр не согласуется с термодинамическими свойствами He II, он заменил его непрерывным спектром,

изображенным на фиг. 30. При низких энергиях кривая представляет собой прямую линию, соответствующую дисперсионному соотношению для фононов

$$\varepsilon = u_1 p, \quad (1.54)$$

где  $u_1$  — скорость звука. При более высоких энергиях спектр отклоняется от прямой линии, проходя сначала через максимум,



Фиг. 30. Фононно-ротонный спектр, предположенный Ландау в 1947 г. [28]. Штриховая линия служит для определения сверхтекучей критической скорости [выражение (1.62)]. Для сравнения приведена изображенная пунктиром парабола, отвечающая свободным частицам [выражение (1.52)].

а затем через минимум. Кроме фононов, существенный вклад в термодинамические параметры вносят лишь возбуждения с энергиями вблизи минимума, и для них связь энергии с импульсом можно записать в виде

$$\varepsilon = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu_r}, \quad (1.55)$$

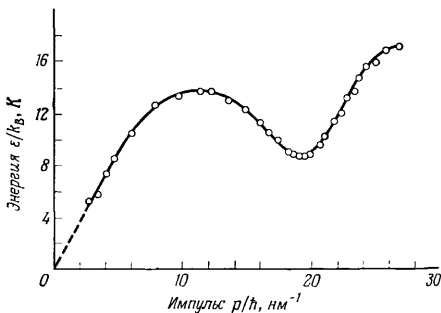
где  $\mu_r$  — эффективная масса. Мы скоро увидим, что наличие энергетической щели  $\Delta$  для этих возбуждений, называемых *ротонами*, играет решающую роль для существования сверхтекучести в He II. Сходство кривых на фиг. 28 и 30 дает возможность предположить, что в некотором смысле He II можно рассматривать как твердое тело, «потерявшее» часть своей жесткости.

Форма спектра, предположенная Ландау, была подтверждена экспериментами по рассеянию нейтронов, в особенности экспериментами Ярнелла и др. [45] и Хеншоу и Вудса [22]. Медленные нейтроны рождают и поглощают элементарные возбуждения в He II. Измеряя энергию и отклонение рассеянных нейтронов, можно

непосредственно получить кривую  $\epsilon - p$ . На фиг. 31 приведены результаты Хеншоу и Вудса, из которых были получены следующие параметры в выражениях (1.54) и (1.55):

$$u_1 = 239 \text{ м/с}, \quad p_0/\hbar = 19,2 \text{ нм}^{-1}, \\ \Delta/k_B = 8,65 \text{ К}, \quad \mu_r = 0,16 m_4.$$

Согласно установившейся традиции, мы выражаем энергию в температурных единицах, а импульс — так же, как волновое число. Значение  $u_1$  согласуется с найденным непосредственно путем изменения распространения первого звука.



Фиг. 31. Спектр возбуждений в He II, полученный в экспериментах по рассеянию нейтронов [22].

Следовательно, в случае He II идеальный газ возбуждений состоит из смеси фононов и ротонов. Их относительные вклады в теплоемкость можно вычислить отдельно и затем сложить. Для ионного газа пригодна функция распределения Бозе — Эйнштейна, но в функцию распределения ротонов входит множитель  $\exp(\Delta/k_B T)$ , который в той области температур, где существует He II, весьма велик, что позволяет применять для ротонов статистику Максвелла — Больцмана. Для концентрации фононов и ротонов были получены следующие выражения:

$$N_{ph} = 9,60\pi \left( \frac{k_B T}{\hbar u_1} \right)^3, \\ N_r = \frac{2p_0^2 (\mu_r k_B T)^{1/2} \exp(-\Delta/k_B T)}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3}. \quad (1.56)$$

При температуре 0,6 К число возбужденных ротонов пренебрежимо мало и единственными существенными возбуждениями

являются фононы; но выше 1 К доминирующая роль с термодинамической точки зрения принадлежит ротонам. С помощью функций распределения и дисперсионных соотношений (1.54) и (1.55) можно также вычислить вклады, вносимые фононами и ротонами в свободную энергию и теплоемкость. Для теплоемкости газов фононов и ротон при постоянном объеме имеем соответственно

$$C_{ph} = 0,111\pi^4 k_B N_{ph} / \rho, \quad (1.57)$$

$$C_r = \frac{k_B N_r}{\rho} \left( \frac{\Delta^2}{k_B^2 T^2} + \frac{\Delta}{k_B T} + \frac{3}{4} \right),$$

где  $\rho$  — полная плотность жидкости. Подробности этих вычислений можно найти в книгах Халатникова [25] и Доннелли [13]. Последняя содержит также несколько полезных таблиц термодинамических параметров.

Вплоть до температуры 1,2 К вычисленная полная теплоемкость находится в хорошем согласии с экспериментом. Выше этой температуры необходимо учитывать два дополнительных фактора — растущие вклады возбуждений вне ротонной и фононной областей спектра, а также небольшое изменение формы энергетического спектра. Здесь уже требуются численные расчеты (см. Бендт и др. [7]).

При приближении к  $\lambda$ -точке модель газа возбуждений оказывается уже совсем непригодной. Выше 1,9 К, например, время между соударениями ротон столь мало, что ширина энергетического спектра уже сравнима с энергией ротон (Хеншоу и Вудс [22]). Тем не менее Ландау, Халатников и их сотрудники получили большое количество результатов, применяя кинетическую теорию к возбуждениям при температурах значительно ниже  $T_\lambda$ . Анализ различных процессов соударений, происходящих в смеси ротон и фононов, позволил им вычислить коэффициент вязкости нормальной жидкости. Полученные значения находятся в прекрасном согласии с измерениями, например, Вудса и Холлиса Халлетта [44] (см. фиг. 6). Кроме того, Ландау и Халатников вычислили коэффициент теплопроводности и коэффициенты второй вязкости и таким образом смогли достаточно точно теоретически объяснить поглощение как первого, так и второго звука в He II. Теоретические результаты собраны в книгах Халатникова [25] и Уилкса [42]; в последней проводится сопоставление теории с различными экспериментальными результатами (см. также [46]).

Эксперименты по рассеянию нейтронов были продолжены с целью определения формы кривой  $\epsilon(p)$  при более высоких импульсах, чем на фиг. 31. Кроме того, для описания рассеяния с большой передачей энергии было использовано представление о процессе, при котором происходит рождение более одного возбуждения (Коуди и Вудс [12]). Далее, в результате экспериментов по комбинационному (рамановскому) рассеянию света от лазера в He II

(Грейтек' и др. [20]) было установлено существование играющих важную роль связанных двухротовных состояний. Подробное обсуждение вопроса о возбуждениях в жидком гелии можно найти в обзоре Вудса и Коули [46\*].

Существенно, что при температурах значительно ниже  $\lambda$ -точки предложенная Ландау кривая  $\epsilon(p)$  для спектра возбуждений вполне пригодна для описания тепловых свойств He II. В частности, это означает, что в He II нет других возбуждений со спектром, лежащим ниже кривой Ландау. Это исключает и спектр, соответствующий движению свободных частиц. Получим теперь критерий Ландау для сверхтекучести и применим его к спектру возбуждений He II.

Рассмотрим прежде всего He II, движущийся при 0 К' через тонкую трубку. Пока скорость сверхтекучего потока низка, он может существовать сколь угодно долго. Однако выше определенной критической скорости  $v_{sc}$  атомы движутся столь быстро, что при столкновении с неровностями стенки трубки атомы переходят из основного состояния в возбужденное. В терминах модели квазичастиц это означает, что в жидкости возникают тепловые возбуждения; процесс сопровождается эквивалентной потерей кинетической энергии сверхтекучей компоненты. Когда скорость потока достигает величины  $v_{sc}$ , в He II возникает трение.

Для оценки значения  $v_{sc}$  вообразим тело с большой массой  $M$ , движущееся с постоянной скоростью  $V$  в сверхтекучей жидкости, находящейся в покое относительно лабораторной системы координат. Критическая скорость  $v_{sc}$  равна минимальному значению  $V$ , при котором может возникнуть возбуждение. Предположим, что появление возбуждения с энергией  $\epsilon(p)$  и импульсом  $p$  вызывает изменение скорости от  $V$  к  $V_1$ . При этом процессе должна сохраняться энергия

$$\frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} MV_1^2 + \epsilon(p) \quad (1.58)$$

и импульс

$$MV = MV_1 + p. \quad (1.59)$$

Исключив из уравнений (1.58) и (1.59)  $V_1$ , получим

$$\epsilon(p) - p \cdot V + p^2/2M = 0. \quad (1.60)$$

Мы считаем массу  $M$  столь большой, что последним членом в (1.60) можно пренебречь. Если  $\theta$  — угол между  $p$  и  $V$ , то

$$pV \cos \theta = \epsilon(p). \quad (1.61)$$

Поскольку  $\cos \theta \leq 1$ , для возникающих возбуждений должно выполняться условие

$$V \geq \epsilon(p)/p.$$

Таким образом, для критической скорости имеем

$$v_{sc} = \left[ \frac{\varepsilon(p)}{p} \right]_{\min}. \quad (1.62)$$

Итак, сверхтекучесть имеет место, если

$$v_{sc} > 0.$$

Это условие называют критерием сверхтекучести Ландау [27]. Минимальные значения  $\varepsilon(p)/p$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{d\varepsilon(p)}{dp} = \frac{\varepsilon(p)}{p}. \quad (1.63)$$

Для кривой возбуждений в He II уравнение (1.63) имеет два решения. Одно соответствует началу кривой и фактически всей линейной части спектра. В этой области

$$v_{sc} = \frac{\varepsilon(p)}{p} = u_1 \text{ (фононы)}. \quad (1.64)$$

Это означает, что критическая скорость рождения фононов совпадает со скоростью первого звука, равной 239 м/с.

Чтобы найти второе решение уравнения (1.63), проведем через начало координат прямую, касательную к ротонному минимуму (см. фиг. 30). При этом получаем

$$v_{sc} \approx \frac{\Delta}{p_0} = 58 \text{ м/с (ротонны)}. \quad (1.65)$$

На фиг. 30 построена такая парабола для свободных частиц, соответствующая дисперсионному соотношению (1.52). Сразу видно, что условие (1.63) может выполняться на этой кривой только в ее начале, т. е. в этом случае

$$v_{sc} = 0 \text{ (свободные частицы)}. \quad (1.66)$$

Такая равная нулю критическая скорость означает, что сверхтекучесть невозможна в любой системе, в которой может иметь место движение свободных частиц. Таким образом, именно наличие энергетической щели  $\Delta$  и отсутствие каких-либо других тепловых возбуждений под кривой Ландау обеспечивают отличие от нуля критической сверхтекучей скорости в He II.

Наблюдаемые предельные скорости сверхтекучего потока фактически значительно меньше значений, предсказываемых на основании кривой возбуждений, причем иногда даже на два порядка величины. Это объясняется тем, что кроме возможности порождения индивидуальных возбуждений существуют другие механизмы диссипации, в частности при движении вихрей (см. гл. 4).

Спектр возбуждений сверхпроводников содержит энергетическую щель  $\Delta$  (см. § 1.2 и фиг. 24); энергия возбуждений достигает минимума при импульсе Ферми  $\hbar k_F$ . Согласно критерию Ландау,

критическая скорость тогда равна

$$v_{sc} = \Delta(T) / \hbar k_F. \quad (1.67)$$

(Применение обозначения  $\Delta$  для энергетической щели в сверхпроводниках и для минимума ротонного спектра столь часто встречается в литературе, что мы тоже прибегаем к этому двойному его использованию.)

На примере Sn мы можем составить грубое представление о том, как уравнение (1.67) соотносится с экспериментальными данными. Мы рассматриваем Sn как одновалентный металл со свободными электронами (в книге Вильсона [43], стр. 249, приведено значение, равное 1,1 свободных электронов на атом), причем  $k_F = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$  (стандартный металл Пиппарда [34]). При равной нулю температуре из (1.67) получаем  $v_{sc} = 68 \text{ м/с}$ . Оценим экспериментальное значение  $v_{sc}$ , предположив, что критический ток  $J_{sc}$  во внешнем поле  $H_{cb}$  течет в поверхностном слое, толщина которого равна глубине проникновения:

$$J_{sc} = H_{cb} / \lambda. \quad (1.68)$$

Записывая  $J_{sc} = nev_{sc}$  и полагая плотность свободных электронов  $n = 6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$  (см. [34]), находим для  $T = 0$  экспериментальное значение  $v_{sc} = 52 \text{ м/с}$ . Учитывая грубость такой оценки, согласие между приведенными значениями следует считать вполне удовлетворительным. Конечно, как и в He II, в сверхпроводниках могут существовать и другие механизмы диссипации, кроме разрушения куперовских пар; в частности, в смешанном состоянии сверхтекучую скорость обычно ограничивает движение квантованных линий магнитного потока.

### ЗАДАЧИ

- 1.1. Решите уравнение Шредингера для свободной частицы в сферической «яме», определив собственные функции и соответствующие собственные значения. Оцените нулевую энергию атома He<sup>4</sup> внутри полости с объемом, равным атомному объему жидкого He<sup>4</sup> (плотность 145 кг/м<sup>3</sup>), и сравните с минимальным значением потенциальной энергии, равным  $-4 \cdot 10^{-22}$  Дж/атом (см. фиг. 3).
- 1.2. На фиг. 20 и 22 изображены кривые намагничивания, т. е. зависимость  $-M$  от  $\mu_0 H$  для обратимых и необратимых (II рода) сверхпроводников. Постройте с помощью этих кривых зависимость  $\langle B \rangle$  от  $\mu_0 H$ .
- 1.3. Получите функцию плотности состояний (1.31).
- 1.4. Оцените значение химического потенциала 1 мг He<sup>4</sup>, рассматривая его как идеальный газ, при 0,1 К. Сравните полученное значение с разностью между наименьшим и первым возбужденным уровнями, когда газ содержится в макроскопическом объеме.
- 1.5. Покажите, что «двумерный» идеальный бозе-газ не претерпевает конденсации Бозе — Эйнштейна. (Указание. Найдите плотность состояний для случая двумерной площади.)

- 1.6. Выведите выражение (1.56) для концентраций ротонов и фононов исходя из дисперсионных соотношений (1.54) и (1.55) и соответствующих каждому случаю функций распределения.

ЛИТЕРАТУРА <sup>1)</sup>

1. Allen J. F., Jones H., Nature, 141, 243 (1938).
2. Allen J. F., Misener A. D., Proc. Roy. Soc., A172, 467 (1939).
3. Андроникашвили Э. Л., ЖЭТФ, 16, 780 (1946).
4. Atkins K. R., Adv., Phys., 1, 169 (1952).
5. Atkins K. R., Liquid Helium, Cambr. Univ. Press, London, 1959.
6. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R., Phys. Rev., 108, 1175 (1957).
7. Bendt P. J., Cowan R. D., Yarnell J. L., Phys. Rev., 113, 1386 (1959).
8. Brown A., Zemansky M. W., Boorse H. A., Phys. Rev., 92, 52 (1953).
9. Casimir H. B. G., Physica, 7, 887 (1940).
10. Clogston A. M., Phys. Rev. Lett., 9, 266 (1962).
11. Coles B. R., IBM Journ. Res. Dev., 6, 68 (1962).
12. Cowley R. A., Woods A. D., Can. Journ. Phys., 49, 177 (1971).
13. Donnelly R. J., Experimental Superfluidity, Univ. of Chicago Press, Chicago and London, 1967.
14. Essmann U., Träuble H., Phys. Lett., 24A, 526 (1967).
15. Foner S., McNiff E. J., Jr., Matthias B. T., Geballe T. H., Willens R. H., Coenzwit E., Phys. Lett., 31A, 349 (1970).
16. French R. A., Lowell J., Phys. Rev., 173, 504 (1968).
17. Goldstein H., Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950.
18. Горьков Л. П., ЖЭТФ, 36, 1918 (1959).
19. Горьков Л. П., ЖЭТФ, 37, 1407 (1959).
20. Greytak T. J., Woerner R., Yan J., Benjamin R., Phys. Rev. Lett., 25, 1547 (1970).
21. Grilly E. R., Mills R. L., Ann. Phys. (N.Y.), 8, 1 (1959).
22. Henshaw D. G., Woods A. D. B., Phys. Rev., 121, 1266 (1961).
23. Jackson L. C., Grimes L. G., Adv. Phys., 7, 435 (1958).
24. Keesom W. H., MacWood G. E., Physica, 5, 737 (1938).
25. Халатников И. М., Теория сверхтекучести, Физматгиз, М., 1971.
26. Купер С. Г., Theory of Superconductivity, Clarendon Press, Oxford, 1968.
27. Ландау Л. Д., Journ. Phys. (USSR), 5, 71 (1941).
28. Ландау Л. Д., Journ. Phys. (USSR), 11, 91 (1947).
29. Livingston J. D., Phys. Rev., 129, 1943 (1963).
30. Livingston J. D., Rev. Mod. Phys., 36, 54 (1964).
31. London F., Superfluids, vol. 1 and 2, New York, 1954; repr. Dover, 1964.
32. Lynton E. A., Superconductivity, 3rd ed., Methuen, London, 1969. (См. перевод: Е. А. Лыттон, Сверхпроводимость, изд-во «Мир», М., 1971.)
33. Mühlischlegel B., Zs. Phys., 155, 313 (1959).
34. Pippard A. B., Repts. Progr. Phys., 23, 176 (1960).
35. Reppy J. D., Depatie D., Phys. Rev. Lett., 12, 187 (1964).
36. Roberts B. W., Handbook of Chemical Physics, 52nd ed., ed. R. C. Weast, Chemical Rubber Co., Cleveland, Ohio, 1971, p. E73.
37. Robinson G., Proc. Phys. Soc., 89, 633 (1966).
38. Rose-Innes A. C., Rhoderick E. H., Introduction to Superconductivity, Pergamon Press, Oxford, 1969. (См. перевод: А. Роуз-Иннс, Е. Родерик, Введение в физику сверхпроводимости, изд-во «Мир», М., 1972.)
39. Shoenberg D., Superconductivity, 2nd ed., Cambr. Univ. Press, London, 1952. (См. перевод: Д. Шенберг, Сверхпроводимость, ИЛ. М., 1955.)

<sup>1)</sup> Литература, отмеченная одной звездочкой, добавлена авторами книги к ее русскому изданию. Литература, отмеченная двумя звездочками, добавлена редактором перевода.— *Прим. ред.*



40. *Tisza L.*, *Nature*, **141**, 913 (1938).
41. *Tough J. T.*, *McCormick W. D.*, *Dash J. G.*, *Phys. Rev.*, **132**, 2373 (1963).
42. *Wilks J.*, *The Properties of Liquid and Solid Helium*, Clarendon Press, Oxford, 1967.
43. *Wilson A.*, *Theory of Metals*, 2nd ed., Cambr. Univ. Press, London, 1953.
44. *Woods A. D. B.*, *Hollis Hallett A. C.*, *Can. Journ. Phys.*, **41**, 596 (1963).
45. *Yarnell J. L.*, *Arnold G. P.*, *Bendt P. J.*, *Kerr E. C.*, *Phys. Rev.*, **113**, 1379 (1959).
- 46\* . *Woods A. D. B.*, *Cowley R. A.*, *Repts. Progr. Phys.*, **36**, 1135 (1973).
- 47\* . *Graissie A. D. C.*, *The Superconducting State*, Sussex Univ. Press, 1975.
- 48\*\* . *Fisher O.*, *Deeroux M.*, *Roth S.*, *Chevel R.*, *Sergeant M.*, *Journ. Phys. Sol. St. Phys.*, **8**, L474 (1975).
- 49\*\* . *Хуанг К.*, *Статистическая механика*, изд-во «Мир», М., 1966.
- 50\*\* . *Eddington M. A.*, *Legget A. J.*, *Collective Phenomena*, **2**, 81 (1975).

## ГЕЛИЙ II. ДВУХЖИДКОСТНАЯ МОДЕЛЬ

## § 2.1. Введение

Мы уже отмечали в § 1.1, что многие свойства He II можно понять в терминах двухжидкостной модели. Ландау [27] первый получил основные уравнения двухжидкостной модели. Рассматривая сверхтекучий поток, он выразил макроскопические термодинамические переменные через квантовомеханические операторы, а затем показал, что уравнения движения для этих операторов эквивалентны уравнению непрерывности и уравнению Эйлера. Вывод уравнений двухжидкостной гидродинамики для He II из микротeorии пока еще осуществить не удалось. Однако свойства модели — системы слабо взаимодействующих бозонов вблизи абсолютного нуля — рассматривались очень подробно. Для такой системы оказалось возможным определить *волновую функцию конденсата* и показать, что уравнение движения для нее также приводит к уравнению Эйлера. В § 2.2 и 2.3 будем исходить из предположения, что мы можем определить аналогичную волновую функцию для сверхтекучей части He II и получить отсюда соответствующие следствия.

Для теоретического рассмотрения слабо взаимодействующего бозе-газа используются методы вторичного квантования, что выходит за рамки настоящей книги. Читатель, интересующийся этим вопросом, может обратиться к книге Пайнса [36], к обзору Мартина [34], а также к цитированным там работам.

В § 2.4 мы рассмотрим нормальную компоненту He II предложенным Ландау способом, а в § 2.5 кратко остановимся на свойствах двухжидкостной модели при больших скоростях потока. Остальные параграфы посвящены экспериментальным работам, подтверждающим справедливость двухжидкостной модели.

Статья Ландау [27] замечательна благодаря тому огромному вкладу, который она внесла в наше понимание He II. Однако интересно отметить, что в начале статьи Ландау недвусмысленно отверг идею о том, что свойства идеального бозе-газа ниже температуры его конденсации могут иметь что-либо общее со свойствами He II.

## § 2.2. Основы теории сверхтекучести

Начнем с рассмотрения конденсата. Как и в § 1.4, мы постулируем, что его поведение определяется одной волновой функцией с когерентной фазой. Мы уже пользовались такой не зависящей

от времени волновой функцией с постоянной амплитудой. Теперь рассмотрим общий случай, когда и амплитуда, и фаза могут меняться в пространстве и во времени:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}, t) \exp[iS(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.1)$$

Предположим, что  $\psi(\mathbf{r}, t)$  есть решение уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi + \bar{V}(\mathbf{r}) \psi; \quad (2.2)$$

(здесь  $M$  — масса, которую еще нужно определить, а  $\bar{V}(\mathbf{r})$  — средняя потенциальная энергия. При дальнейшем обсуждении выяснится целесообразность использования такого «сглаженного» потенциала. В элементарных задачах квантовой механики, связанных с рассмотрением лишь одной частицы (примерами могут служить гармонический осциллятор и атом водорода), величину  $\psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t)$  интерпретируют как относительную вероятность обнаружения частицы в точке  $(\mathbf{r}, t)$ . Однако, когда  $\psi$  является макроскопической волновой функцией, произведение  $\psi^* \psi$  имеет, как мы увидим ниже, уже другой смысл.

Из § 1.3 мы знаем, что все частицы невзаимодействующего бозегаза при абсолютном нуле должны конденсироваться на наименьшем энергетическом уровне, но при наличии взаимодействия конденсат должен «истощаться». Согласно различным теоретическим оценкам, в конденсате при самых низких температурах содержится около 10% атомов He II (Вудс и Коули [43\*]). Хоенберг и Платцман [44\*] предложили для детектирования сконденсированных атомов использовать рассеяние нейтронов. Применившие этот метод экспериментаторы при интерпретации своих результатов получили для количества сконденсированных атомов значения от 2 до 20% (Коули и Вудс [12], Мук и др. [45\*]). Однако Джексон [46\*], подробно рассмотрев методы интерпретации результатов, пришел к выводу, что данные экспериментов можно понять, даже если количество атомов конденсата пренебрежимо мало. Таким образом, эксперименты с рассеянием нейтронов пока не дали убедительных данных о количестве атомов в конденсате.

С другой стороны, из экспериментов Андроникашвили (см. фиг. 7) следует, что при всех температурах ниже 1 К относительная величина плотности сверхтекучей компоненты  $\rho_s/\rho$  очень близка к единице. Как уже упоминалось выше (см. фиг. 27), мы предполагаем, что сверхтекучая часть связана не только с конденсатом, но и с частицами, импульс которых отличен от нуля при  $T = 0$ . Другими словами, частицы, покинувшие конденсат в результате взаимодействия (эффект истощения), все же следуют за движением конденсата. Вследствие этого, нормируя  $\psi(\mathbf{r}, t)$  таким образом, чтобы произведение  $\psi^* \psi$  было равно средней concentra-

ции сверхтекучих атомов, получаем

$$\psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0^2(\mathbf{r}, t) = \rho_s / m_4. \quad (2.3)$$

При стремящейся к нулю температуре  $\rho_s \rightarrow \rho$ , т. е. величина  $\rho_s$  становится равной полной плотности жидкости; при конечных (точнее, отличных от нуля) температурах ниже  $T_\lambda$  отношение  $\rho_s/\rho < 1$ , а при  $T_\lambda$  и выше  $\rho_s/\rho = 0$ .

Отметим, что использование выражений (2.1) и (2.3) основано на предположении, что можно определить одновременно и плотность  $\rho_s$ , и фазу  $S$ . Это обстоятельство очень важно и нетривиально. Обычно в квантовомеханической системе невозможно одновременно определить плотность и фазу. Например, в простом гармоническом осцилляторе состояние с  $N$  квантами может иметь любую фазу  $S$ , но если мы точно фиксируем  $N$ , то уже не можем указать  $S$ . Наоборот, если мы выбираем  $S$ , то не можем однозначно определить  $N$ . Тщательное исследование (см., например, Трупп [39]) показывает, что при больших  $N$  мы можем фиксировать и  $N$ , и  $S$ , если только неопределенность каждой из этих величин удовлетворяет соотношению

$$\delta N \delta S \sim 1. \quad (2.4)$$

Таким образом,  $S$  может иметь неопределенность  $\delta S \sim N^{-1/2}$ , а  $N$  — относительную неопределенность  $\delta N/N \sim N^{-1/2}$ . По аналогии заключаем, что при использовании выражений (2.1) и (2.3) полное число частиц, участвующих в сверхтекучести, должно быть велико, как это и имеет место в действительности.

Если исключить из рассмотрения области вблизи твердой стенки или сердцевин вихря, плотность  $\rho_s$  сверхтекучей части жидкости является медленно меняющейся функцией координат. Следовательно, объем, в котором плотность  $\rho_s$  однородна, имеет макроскопические размеры. Это позволяет описать сверхтекучее движение в «термодинамических» терминах и, например, использовать в (2.2) медленно меняющийся потенциал  $\bar{V}(\mathbf{r})$ . Величина  $\bar{V}(\mathbf{r})$  — потенциальная энергия каждой из макроскопически большого числа частиц, содержащихся в элементе объема в точке  $\mathbf{r}$ , поэтому  $\bar{V}(\mathbf{r})$  представляет собой термодинамический параметр. Теперь покажем, что его можно отождествить с химическим потенциалом. Обратимое изменение полной энергии  $U_0$  покоящейся жидкости подчиняется тождеству

$$dU_0 = T d\Sigma + \mu dN - p dV, \quad (2.5)$$

где состояние системы определяется независимыми переменными — энтропией  $\Sigma$ , числом частиц  $N$  и объемом  $V$ . Другие величины в этом уравнении (представляющем собой первый закон термодинамики) — это абсолютная температура  $T$ , химический потенциал  $\mu$  и давление  $p$ . Химический потенциал, как ясно из (2.5), можно

записать в виде

$$\mu = \left( \frac{\partial U_0}{\partial N} \right)_{\Sigma, V} \quad (2.6)$$

Таким образом, химический потенциал равен приращению энергии системы при добавлении к ней одной частицы при постоянных объеме и энтропии. Чтобы найти полную энергию, нужно к энергии всей покоящейся жидкости  $U_0$  прибавить кинетическую энергию сверхтекучей компоненты  $U_{s, k}$ :

$$U = U_{s, k} + U_0 \quad (2.7)$$

Предположим, что элемент объема, содержащий  $\Delta N$  сверхтекучих атомов, движется в жидкости от точки  $A$  к точке  $B$ . Сверхтекучий поток не связан с диссипацией, поэтому полная энергия не меняется, не меняется также и энтропия. Элемент объема можно рассматривать как подсистему, находящуюся в термодинамическом равновесии с остальной жидкостью, и применить к нему уравнения (2.5) и (2.7). Это дает

$$\Delta U = 0 = \Delta U_{s, k} + \left[ \left( \frac{\partial U_0}{\partial N} \right)_{\Sigma, V}^B - \left( \frac{\partial U_0}{\partial N} \right)_{\Sigma, V}^A \right] \Delta N, \quad (2.8)$$

что при учете выражения (2.6) можно записать в виде

$$\frac{\Delta U_{s, k}}{\Delta N} = -(\mu_B - \mu_A). \quad (2.9)$$

Следовательно, химический потенциал всей покоящейся жидкости ведет себя как отнесенная к одной частице потенциальная энергия сверхтекучей компоненты. Двигаясь из области с высоким значением  $\mu$  в область с низким  $\mu$ , сверхтекучая жидкость ускоряется. Мы можем теперь в уравнении (2.2) заменить  $\bar{V}(\mathbf{r})$  на  $\mu$ , а массу  $M$  на массу одной частицы  $m_4$ . Таким образом, получаем

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_4} \nabla^2 \psi + \mu \psi. \quad (2.10)$$

Подстановка волновой функции (2.1) в уравнение (2.10) приводит в уравнению с вещественной и мнимой частями. Мнимая часть дает уравнение непрерывности (см. § 2.3 и задачу 2.1), а вещественная часть имеет вид

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m_4} \frac{\nabla^2 \psi_0}{\psi_0} - \frac{\hbar^2}{2m_4} (\nabla S)^2 - \mu. \quad (2.11)$$

Используя для  $\nabla S$  выражение (1.47), а для  $\psi_0$  выражение (2.3), находим скорость изменения фазы

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} = -\left( \mu + \frac{1}{2} m_4 v_s^2 \right) + \frac{\hbar^2}{2m_4} \frac{\nabla^2 (\sqrt{\rho_s})}{\sqrt{\rho_s}}. \quad (2.12)$$

Последний член существен только при быстром изменении плотности сверхтекучей части в зависимости от координат, что имеет место, например, вблизи стенки или внутри вихря. При рассмотрении основной массы жидкости последним членом можно пренебречь.

Уравнение (2.12) — основное уравнение теории сверхтекучести<sup>1)</sup>. Мы получили его не совсем строгим образом, но приведенный здесь ход рассуждений обладает некоторым преимуществом. А именно: он иллюстрирует, что, хотя сверхтекучесть — явление квантовое, его тем не менее фактически можно описать с помощью термодинамических параметров.

Андерсон [3] показал, что уравнение (2.12) можно вывести другим способом. Из соотношения (2.4) следует, что  $N$  и  $\hbar S$  можно рассматривать как сопряженные переменные, аналогичные координатам и импульсу частицы. В пределе больших  $N$  уравнения движения для  $\hbar S$  и  $N$  принимают классический вид:

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N} \quad (2.13)$$

и

$$\hbar \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S}, \quad (2.14)$$

где  $\mathcal{H}$  — гамильтониан. В случае гелия в качестве  $\mathcal{H}$  можно использовать полную энергию  $U$ , которая содержит кинетическую энергию сверхтекучей части жидкости [см. (2.7)]. Тогда для средних значений уравнение (2.13) принимает вид

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{\partial U}{\partial N} = - \left( \mu + \frac{1}{2} m_4 v_s^2 \right). \quad (2.15)$$

Мы снова получили уравнение (2.12), но без последнего члена.

Важность уравнения (2.15) станет ясной в процессе дальнейшего изложения. В § 2.3 мы покажем, что градиент этого уравнения представляет собой замаскированное уравнение Эйлера, т. е. уравнение гидродинамики идеальной жидкости. Если  $v_s = 0$ , то уравнение (2.15) принимает вид

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} = - \mu. \quad (2.16)$$

В гл. 4 мы воспользуемся этим соотношением при описании фазовых соотношений, а в гл. 5 — при обсуждении эффектов Джозефсона. Хотя мы получили уравнения (2.13), (2.14) и (2.16) при рассмотрении гелия, они справедливы, конечно, и для сверхпроводников. Уравнение (2.14) особенно полезно для описания эффектов Джозефсона в сверхпроводниках.

<sup>1)</sup> Изложенный вывод уравнений теории сверхтекучести весьма близок к приведенному в § 6.8 и указанной там литературе. — *Прим. ред.*

### § 2.3. Уравнение для скорости сверхтекучей части жидкости

Прежде всего покажем, как уравнение непрерывности для сверхтекучей части жидкости можно получить из уравнения (2.10) и комплексно сопряженного ему уравнения. Скорость изменения  $\psi^*\psi$  равна

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^*\psi) = -\frac{i\hbar}{2m_4} (\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*). \quad (2.17)$$

Если ввести величину

$$\mathbf{J}_p = -\frac{i\hbar}{2m_4} (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*), \quad (2.18)$$

уравнение (2.17) принимает вид

$$\frac{\partial (\psi^*\psi)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_p. \quad (2.19)$$

Согласно современной квантовомеханической интерпретации, уравнение (2.19) означает сохранение вероятности, а  $\mathbf{J}_p$  — плотность потока вероятности. Однако если  $\psi$  — волновая функция сверхтекучей жидкости, то  $\psi^*\psi$  представляет собой концентрацию частиц; тогда  $\mathbf{J}_p$  есть плотность потока частиц. Таким образом, уравнение непрерывности (2.19) обеспечивает сохранение числа частиц.

Мы уже связали волновую функцию сверхтекучей жидкости с плотностью сверхтекучей компоненты [формула (2.3)]:

$$\psi^*\psi = \psi_0^2 = \rho_s/m_4.$$

Таким же образом плотность сверхтекучего потока  $\mathbf{j}_s$  можно связать с  $\mathbf{J}_p$ . Если, кроме того, в уравнение (2.18) подставить в явном виде функцию  $\psi$ , определяемую выражением (2.1), то получим

$$\mathbf{j}_s = m_4\mathbf{J}_p = \hbar\psi_0^2\nabla S. \quad (2.20)$$

В § 1.4 мы видели, что сверхтекучая скорость  $\mathbf{v}_s$  пропорциональна градиенту фазы

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m_4} \nabla S. \quad (2.21)$$

Теперь из (2.3), (2.20) и (2.21) находим

$$\mathbf{j}_s = \rho_s\mathbf{v}_s, \quad (2.22)$$

как и следовало ожидать. И наконец, уравнение (2.19) можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_s. \quad (2.23)$$

Это уравнение и представляет собой уравнение непрерывности для сверхтекучей части жидкости; иначе говоря, оно справедливо для всех жидкостей в отсутствие источников и стоков.

Необходимо отметить, что использование в (2.3), (2.10) и (2.21) величины  $m_4$  — массы отдельного атома гелия — условно. Можно заменить массу  $m_4$  на любую произвольную массу, поскольку в фазу  $S$  может быть включен любой масштабный множитель. Единственное требование заключается в том, что во все три уравнения должна входить одна и та же масса, поскольку в этом случае уравнение (2.22) для  $\mathbf{j}_s$  и уравнение непрерывности (2.23) не меняются<sup>1)</sup>. Таким образом, мы должны рассматривать соотношение (2.21) просто как рабочее определение сверхтекучей скорости  $v_s$ . Когда речь идет об экспериментальных измерениях, то наблюдаемой величиной является поток  $\mathbf{j}_s$ . Если одновременно измеряется  $\rho_s$ , то с помощью (2.22) можно получить значения  $v_s$ , которые непосредственно измерить нельзя.

Несмотря на эти ограничения, представление о скорости сверхтекучего течения полезно. Теперь, исходя из основного уравнения (2.15), найдем уравнение для  $v_s$ . Взяв градиент от (2.15), с помощью соотношения (2.21) для  $\nabla S$  находим

$$m_4 \frac{\partial v_s}{\partial t} = -\nabla \left( \mu + \frac{1}{2} m_4 v_s^2 \right). \quad (2.24)$$

Это уравнение движения для сверхтекучей жидкости. Теперь нужно показать, что уравнение (2.24) описывает потенциальный поток без диссипации.

Для этой цели введем оператор  $D/Dt$ , который называется субстанциональной или полной производной. Предположим, что жидкость движется со скоростью  $\mathbf{v}$  и что мы рассматриваем элемент с постоянным объемом, движущийся вместе с жидкостью. Полная скорость изменения какого-либо характеризующего жидкость вектора, скажем  $\mathbf{a}$ , внутри этого движущегося элемента объема определяется выражением

$$\frac{D\mathbf{a}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a}, \quad (2.25)$$

где записанная в полном виде, например,  $x$ -компонента от  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a}$  имеет вид

$$[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a}]_x = v_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial a_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial a_x}{\partial z}. \quad (2.26)$$

Таким образом, полная производная  $D\mathbf{a}/Dt$  состоит из двух частей — из скорости  $\partial \mathbf{a}/\partial t$  изменения  $\mathbf{a}$  в данной точке пространства

<sup>1)</sup> Это утверждение неточно, поскольку циркуляция сверхтекучей скорости (см. § 4.1) зависит именно от массы атома гелия  $m_4$  или кратной ей величины, а не от произвольной массы. — *Прим. ред.*



и из скорости  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$  а изменения  $\mathbf{a}$ , обусловленной движением элемента жидкости.

Рассмотрим теперь следующее уравнение для сверхтекучей скорости:

$$\frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s = -\frac{1}{m_4} \nabla \mu. \quad (2.27)$$

Это — уравнение Эйлера для идеальной жидкости, т. е. жидкости без вязкости. Поскольку  $\mu$  — потенциальная энергия сверхтекучей части жидкости, величина  $\nabla \mu / m_4$  представляет собой силу на единицу массы, а  $D\mathbf{v}_s / Dt$  — ускорение сверхтекучей части жидкости. Другими словами, уравнение (2.27) есть одна из форм второго закона Ньютона. Свойства оператора  $\nabla$  позволяют записать уравнение (2.27) в альтернативной форме

$$\frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} v_s^2 \right) - \mathbf{v}_s \times \text{rot } \mathbf{v}_s = -\frac{1}{m_4} \nabla \mu. \quad (2.28)$$

Теперь рассмотрим два различных случая.

1) При

$$\text{rot } \mathbf{v}_s = 0 \quad (2.29)$$

уравнение (2.28) совпадает с (2.24), т. е. с уравнением движения сверхтекучей части жидкости, полученным из постулированной макроскопической волновой функции. Кроме того, напомним, что условие (2.29) непосредственно следует из определения (2.21), согласно которому скорость  $\mathbf{v}_s$  пропорциональна градиенту фазы  $S$  волновой функции (см. § 1.4). Обычно сверхтекучую компоненту можно считать несжимаемой. Поэтому, полагая  $\rho_s = \text{const}$ , находим из уравнения непрерывности (2.23)

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_s = 0. \quad (2.30)$$

Если теперь подставить сюда для  $\mathbf{v}_s$  выражение (2.21), то получим уравнение Лапласа

$$\nabla^2 S = 0. \quad (2.31)$$

Мы видим, что фаза  $S$  ведет себя как потенциал скорости сверхтекучего течения. Уравнение (2.24) описывает, следовательно, безвихревой потенциальный поток сверхтекучей части жидкости.

2) При  $\text{rot } \mathbf{v}_s \neq 0$  имеет место вихревое движение, и необходимо уже использовать уравнение Эйлера в его полной форме. Мы рассмотрим вращающийся He II в гл. 4, где обсудим незатухающий циркулирующий поток и движение вихрей, используя снова макроскопическую волновую функцию (2.1).

Запишем теперь уравнение Эйлера для сверхтекучей части жидкости в наиболее удобной форме. Для этого найдем выражение для малого обратимого изменения химического потенциала. Энергия

Гиббса для покоящейся жидкости равна

$$G = U_0 - T\Sigma + pV. \quad (2.32)$$

Дифференцируя это уравнение и подставляя  $dU_0$  из уравнения (2.5), получаем

$$dG = \mu dN - \Sigma dT + V dp, \quad (2.33)$$

откуда после интегрирования следует

$$N\mu(p, T) = G(N, p, T). \quad (2.34)$$

Итак, мы пришли к альтернативному определению химического потенциала: при данных значениях давления и температуры он равен энергии Гиббса на одну частицу. В системе с фиксированным  $N$  изменение  $\mu$  можно поэтому представить в виде

$$N d\mu = \left( \frac{\partial G}{\partial p} \right)_{N, T} dp + \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_{N, p} dT. \quad (2.35)$$

Согласно уравнению (2.33), коэффициенты перед  $dp$  и  $dT$  равны соответственно  $V$  и  $-\Sigma$  и уравнение (2.35) принимает вид

$$N d\mu = V dp - \Sigma dT. \quad (2.36)$$

Это означает, что изменение  $\mu$  обусловлено изменениями давления и температуры. Разделив уравнение (2.36), скажем, на  $dx$ , получим связь между градиентами в направлении  $x$ . Эквивалентные уравнения можно получить для направлений  $y$  и  $z$ . Все три уравнения можно объединить в одно:

$$\nabla\mu = \frac{V}{N} \nabla p - \frac{\Sigma}{N} \nabla T. \quad (2.37)$$

Наконец, подставив  $\nabla\mu$  в уравнение (2.27), находим

$$\frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \sigma \nabla T, \quad (2.38)$$

где  $\rho = Nm_4/V$  — полная плотность жидкости, а  $\sigma = \Sigma/Nm_4$  — полная энтропия на единицу массы. Мы видим, что уравнение Эйлера связывает скорость сверхтекучей компоненты и с градиентом давления, и с градиентом температуры.

Из уравнения (2.38) непосредственно следует важный результат. Именно, для стационарного сверхтекучего безвихревого потока получаем

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = 0 = \nabla \left( \frac{1}{2} v_s^2 + \frac{p}{\rho} - \sigma T \right), \quad (2.39)$$

где, поместив  $1/\rho$  под знак градиента, мы использовали предположение о несжимаемости всей жидкости. Интегрирование

уравнения (2.39) дает

$$\frac{1}{2} v_s^2 + \frac{p}{\rho} - \sigma T = \text{const.} \quad (2.40)$$

Мы получили уравнение Бернулли для потенциального сверхтекучего потока. Значение постоянной одинаково для всей жидкости, участвующей в потенциальном течении. В некоторых случаях уравнению Бернулли можно придать более общую форму путем добавления некоторых членов. Например, при применении к текущей гелиевой пленке его следует дополнить гравитационной потенциальной энергией и потенциалом сил Ван-дер-Ваальса (см. § 2.7).

## § 2.4. Движение нормальной жидкости

В двух последних параграфах мы игнорировали нормальную компоненту жидкости в He II. Начав с гипотезы, что для описания сверхтекучей жидкости можно использовать макроскопическую волновую функцию, мы получили уравнение Эйлера (2.38). Само по себе это уравнение описывает движение He II только в пределе  $\rho_n \rightarrow 0$ . Рассмотрим теперь общий случай, когда присутствуют обе компоненты, каждая из которых обладает своей скоростью.

Во избежание ненужных усложнений рассмотрим случай малых скоростей. Это значит, что сверхтекучая скорость  $v_s$  много меньше значения, при котором возникает диссипация, а нормальная скорость  $v_n$  много меньше значения, при котором появляется турбулентность. Кроме того, обе жидкости не взаимодействуют. Таким образом, мы, как и прежде, используем представление о потенциальном течении сверхтекучей компоненты и независимом вязком течении нормальной компоненты (см. § 1.1).

Теперь можно написать основные уравнения двухжидкостной модели. Полная плотность He II равна сумме плотностей нормальной и сверхтекучей компонент

$$\rho = \rho_s + \rho_n. \quad (2.41)$$

Полная плотность потока массы равна

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n. \quad (2.42)$$

Поскольку полная масса гелия остается неизменной,  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  должны удовлетворять уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (2.43)$$

Сверхтекучий поток не сопровождается диссипацией, следовательно, он термодинамически обратим. Нормальная жидкость обладает вязкостью, что приводит к диссипации, пропорциональной  $\nabla v_n^2$  (Ландау и Лифшиц [28]). Пока скорость  $v_n$  мала, диссипацией

можно пренебречь и считать поток нормальной жидкости также обратимым. При этих условиях энтропия сохраняется, и можно написать уравнение непрерывности для плотности энтропии  $\rho\sigma$ . В § 1.1 мы видели, что энтропию He II несет нормальный поток. Следовательно, плотность потока энтропии равна  $\rho\sigma\mathbf{v}_n$ , так что мы имеем

$$\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho\sigma\mathbf{v}_n). \quad (2.44)$$

Теперь найдем уравнения движения для несжимаемого течения, в котором величины  $\rho$ ,  $\rho_s$ ,  $\rho_n$  и  $\sigma$  постоянны. Из уравнения (2.44) следует, что  $\nabla \cdot \mathbf{v}_n = 0$ , и поэтому из уравнений (2.42) и (2.43) вытекает, что  $\nabla \cdot \mathbf{v}_s = 0$ . Для описания движения всей жидкости воспользуемся уравнением Навье — Стокса

$$\rho_s \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s \right\} + \rho_n \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_n \right\} = -\nabla p + \eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n, \quad (2.45)$$

которое отражает тот факт, что градиент внешнего давления может вызвать движение как одной, так и обеих компонент, но что сопротивление потоку обуславливается лишь вязкостью нормальной части жидкости ( $\eta_n$  — коэффициент вязкости). Уравнение (2.45) выводится из условия сохранения импульса всей жидкости. Однако мы не будем приводить здесь довольно длинных вычислений; они четко изложены вместе с другими аспектами двухжидкостной гидродинамики в книге Ландау и Лифшица [28], гл. 16.

Умножая уравнение Эйлера для сверхтекучей части жидкости (2.38) на  $\rho_s$ , можно привести его к виду

$$\rho_s \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s \right\} = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla p + \rho_s \sigma \nabla T. \quad (2.46)$$

Вычитая (2.46) из уравнения (2.45), получаем для скорости нормальной компоненты жидкости следующее уравнение:

$$\rho_n \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_n \right\} = -\frac{\rho_n}{\rho} \nabla p - \rho_s \sigma \nabla T + \eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n. \quad (2.47)$$

Это уравнение типа Навье — Стокса, к которому добавлен член с тепловым градиентом. Как мы уже отметили, уравнения применимы в области малых скоростей, когда течение обеих компонент является несжимаемым. Чтобы воспользоваться этими уравнениями для описания экспериментальных данных, нужно знать граничные условия, которым удовлетворяют  $\mathbf{v}_s$  и  $\mathbf{v}_n$ .

Во-первых, рассмотрим, что происходит у твердой стенки, соприкасающейся с He II. Поскольку нормальная компонента жидкости обладает вязкостью, как нормальная, так и тангенциальная составляющие скорости  $\mathbf{v}_n$  равны нулю. Нормальная составляющая  $\mathbf{v}_s$  также равна нулю, но, в силу отсутствия вязкости,

сверхтекучая часть жидкости может скользить вдоль стенки, поэтому параллельная ей составляющая  $v_s$  может принимать любое значение. Граничные условия изменяются в частном случае, когда между жидкостью и стенкой происходит передача тепла; ясно, что при этом нормальная составляющая  $v_n$  будет отлична от нуля, а для сохранения постоянства полной плотности возникает компенсирующий противопоток сверхтекучей части жидкости. Помимо этого, нужно учитывать также поведение  $\rho_s$  вблизи стенки. У твердой стенки сверхтекучая волновая функция (т. е. волновая функция сверхтекучей компоненты) должна обращаться в нуль, поэтому  $\rho_s$  плавно стремится к нулю при приближении к стенке. Резкий скачок  $\rho_s$  у стенки запрещен, поскольку при этом нарушилось бы требование повсеместной однозначности  $\psi$ . Однако типичное расстояние, на котором  $\rho_s$  падает до нуля, оказывается очень малым, порядка межатомного расстояния (см. § 6.8); следовательно, с точки зрения макроскопической термодинамики будем пока считать, что «у стенки» скорость  $v_s$  отлична от нуля, несмотря на то, что плотность сверхтекучей части там равна нулю.

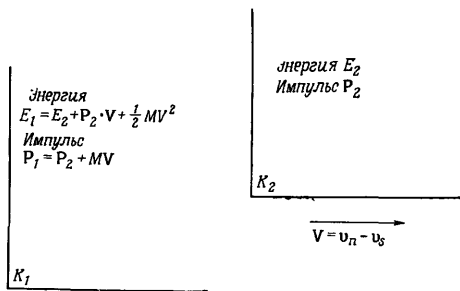
Во-вторых, рассмотрим свободную поверхность Не II. Очевидно, что и в этом случае нормальные составляющие обеих скоростей равны нулю. Но, с другой стороны, значения тангенциальных составляющих остаются произвольными. Вопрос о граничных условиях, которым  $\psi$  и  $\rho_s$  удовлетворяют на свободной поверхности, все еще остается предметом обсуждения. Разумно было бы предположить, что и на свободной поверхности  $\rho_s \rightarrow 0$  в силу того, что в парах  $\psi = 0$ , но, с другой стороны, на свободной поверхности жидкости не происходит четкого разделения фаз и поэтому ее влияние на сверхтекучую часть жидкости пока остается невыясненным <sup>1)</sup>.

## § 2.5. Обобщенная двухжидкостная модель

Уравнения движения в своей основной форме (2.46) и (2.47) справедливы, пока малы скорости жидкости. С увеличением скоростей  $v_s$  и  $v_n$  начинает играть роль множество других факторов, осо-

<sup>1)</sup> Вдали от  $\lambda$ -точки макроскопическая плотность  $\rho_s$  (и связанная с ней макроскопическая волновая функция) могут считаться постоянными у стенки и на свободной поверхности (в рамках макроскопического подхода изменение плотности  $\rho_s$  на расстояниях атомного масштаба рассматриваться не может). Вблизи  $\lambda$ -точки область у стенки, в которой  $\rho_s$  применяется и стремится на стенке к нулю, уже становится макроскопически большой. По-видимому, на свободной поверхности вблизи  $\lambda$ -точки также  $\rho_s = 0$ , причем изменение  $\rho_s$  вблизи поверхности происходит на достаточно большом расстоянии. По последней причине вблизи  $\lambda$ -точки макроскопический подход применим. Именно это и учитывается в теории сверхтекучести вблизи  $\lambda$ -точки, обсуждаемой в § 6.8 и указанной там литературе. Нуждаются в уточнении и утверждениях авторов, касающихся граничных условий на стенке при наличии потока тепла (см. работу [51\*\*] к гл. 6).— *Прим. ред.*

бенно тех, которые связаны с диссипацией. Для их учета к уравнениям добавляют различные нелинейные члены, что делает их весьма громоздкими. Рассмотрим один из дополнительных членов, возникающий вследствие зависимости термодинамических параметров  $\text{He II}$  от относительной скорости ( $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ ) двух жидкостей.



Фиг. 32. Преобразование Галилея.

Система координат  $K_1$  движется вместе со сверхтекучей частью жидкости, а система координат  $K_2$  — с нормальной ее частью. Преобразование выполнено для тела с массой  $M$ , энергией  $E_2$  и импульсом  $P_2$  (в системе  $K_2$ ).

Анализ поведения двух жидкостей с различными скоростями упрощается при использовании трех систем координат — лабораторной системы (обозначим ее через  $K$ ), системы  $K_1$ , движущейся вместе со сверхтекучей компонентой, и системы  $K_2$ , движущейся с нормальной компонентой. Скорости  $v_s$  и  $v_n$  мы будем измерять в системе  $K$ . Тогда система  $K_1$  движется по отношению к  $K$  со скоростью  $v_s$ , а  $K_2$  движется относительно  $K_1$  со скоростью  $V = v_n - v_s$ . Рассмотрим случай, когда  $v_s$  и  $v_n$  постоянны в пространстве и во времени, и установим правила преобразования энергии и импульса при переходе из системы  $K_2$  в систему  $K_1$  (фиг. 32). Рассмотрим свободную частицу с массой  $M$ , обладающую импульсом  $P_2$  и энергией  $E_2$  в системе координат  $K_2$ . Импульс частицы в системе  $K_1$  равен

$$P_1 = P_2 + MV, \quad (2.48)$$

а энергия

$$E_1 = \frac{P_1^2}{2M} = \frac{P_2^2}{2M} + P_2 \cdot V + \frac{1}{2} MV^2 \quad (2.49)$$

или

$$E_1 = E_2 + P_2 \cdot V + \frac{1}{2} MV^2. \quad (2.50)$$

Выражения (2.48) и (2.50) представляют собой преобразования Галилея. Они справедливы не только для свободных частиц и могут применяться к любой системе с массой  $M$ , обладающей четко определенными энергией и импульсом.

Применим теперь эти преобразования к нормальной жидкости. Как и в § 1.5, будем рассматривать нормальную жидкость как газ тепловых возбуждений с энергией  $\epsilon$  и импульсом  $p$ , энергетический спектр которых  $\epsilon(p)$  описывается кривой Ландау (см. фиг. 30). Существенно то обстоятельство, что  $\epsilon$  и  $p$  нужно измерять относительно покоящейся сверхтекучей компоненты, т. е. так же, как и при рассмотрении, приводящем к критерию Ландау (см. § 1.5). Другими словами,  $\epsilon(p)$  представляет собой энергетический спектр в координатной системе  $K_1$ . Для вычисления термодинамических параметров нужна соответствующая функция распределения возбуждений. Полное число возбуждений не сохраняется, поэтому мы воспользуемся функцией Планка

$$n(\epsilon_2) = \{\exp(\epsilon_2/k_B T) - 1\}^{-1}, \quad (2.51)$$

где энергии возбуждений  $\epsilon_2$  измеряются в системе  $K_2$ , покоящейся относительно нормальной компоненты. Далее, при вычислениях с использованием функции (2.51) необходимо провести интегрирование по импульсам, для чего нужно знать связь между  $\epsilon_2$  и импульсом возбуждения. Для ее нахождения рассмотрим движение нормальной жидкости относительно  $K_1$  и  $K_2$ . Предположим, что полная масса нормальной части жидкости есть  $M_n$ ; в системе  $K_2$  ее импульс равен нулю, а энергию мы обозначим через  $E_2$ . В системе  $K_1$  из (2.48) и (2.50) получаем

$$P_1 = M_n V, \quad E_1 = E_2 + \frac{1}{2} M_n V^2. \quad (2.52)$$

Теперь предположим, что в системе  $K_2$  появилось еще одно возбуждение с энергией  $\epsilon_2$  и импульсом  $P_2$ . Полные импульс и энергия в системе  $K_2$  теперь составляют

$$P'_2 = P_2, \quad E'_2 = E_2 + \epsilon_2. \quad (2.53)$$

В системе  $K_1$  находим

$$P'_1 = M_n V + P_2, \quad E'_1 = E_2 + \frac{1}{2} M_n V^2 + \epsilon_2 + P_2 \cdot V. \quad (2.54)$$

Сравнивая выражение (2.54) с (2.52), мы видим, что появление возбуждения ( $\epsilon_2, P_2$ ) в системе  $K_2$  отвечает появлению в системе  $K_1$ , связанной с покоящейся сверхтекучей жидкостью, дополнительных импульса  $P_2$  и энергии  $\epsilon_2 + P_2 \cdot V$ . Следовательно, мы можем положить  $p = P_2$  и

$$\epsilon_2 = \epsilon(p) - p \cdot V. \quad (2.55)$$

Теперь можно представить функцию распределения (2.51) в виде

$$n(\varepsilon) = \left[ \exp \left\{ \frac{\varepsilon(p) - p \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)}{k_B T} \right\} - 1 \right]^{-1}. \quad (2.56)$$

Отсюда ясно, что относительная скорость  $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$  представляет собой дополнительный термодинамический параметр для He II.

В терминах модели Ландау  $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$  есть скорость дрейфа газа возбуждений относительно сверхтекучей компоненты. Следовательно, плотность дрейфового импульса возбуждений в системе  $K_1$  равна

$$\mathbf{j}_1 = \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s). \quad (2.57)$$

Для полной плотности энергии  $u_1$ , измеренной в системе  $K_1$ , справедливо тождество

$$du_1 = T d(\rho\sigma) + (\mu/m_4) d\rho + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{j}_1, \quad (2.58)$$

где первые два члена, как и в (2.5), связаны с покоящейся жидкостью, а последний член обусловлен относительным движением двух жидкостей.

Из уравнения (2.58) можно получить все необходимые термодинамические параметры, но вычисления при этом довольно громоздки. В качестве примера такой расчет предлагается в задаче 2.3. Приведем здесь результат для химического потенциала (см. Ландау и Лифшиц [28], гл. 16):

$$\frac{1}{m_4} \mu(p, T, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) = \frac{1}{m_4} \mu(p, T, 0) - \frac{\rho_n}{2\rho} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2, \quad (2.59)$$

где  $\mu(p, T, 0)$  — химический потенциал в отсутствие относительного движения двух жидкостей. Ранее мы нашли выражение для  $\nabla \mu(p, T, 0)$  [см. (2.37)], которым воспользовались для вывода уравнения движения сверхтекучей жидкости (2.46). Теперь, воспользовавшись уравнением (2.59), подставим  $\mu$  в уравнение (2.28). Это дает

$$\rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} = - \frac{\rho_s}{\rho} \nabla p + \rho_s \sigma \nabla T + \frac{\rho_s \rho_n}{2\rho} \nabla (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2. \quad (2.60)$$

Вычитая уравнение (2.60) из уравнения (2.45), находим

$$\rho_n \frac{D\mathbf{v}_n}{Dt} = - \frac{\rho_n}{\rho} \nabla p - \rho_s \sigma \nabla T - \frac{\rho_s \rho_n}{2\rho} \nabla (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 + \eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n. \quad (2.61)$$

В том случае, когда поток He II имеет высокую скорость, мы сталкиваемся со сложной экспериментальной ситуацией, в которой трудно разделить механизмы, приводящие к диссипации. Однако обобщение двухжидкостной модели позволяет составить некоторое представление о возможных здесь физических процессах. Например, можно определить критическое значение  $v_n$ , выше которого возникает турбулентность в нормальной жидкости, и критическое



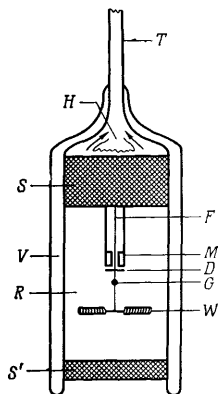
значении ( $v_n - v_s$ ), отвечающее появлению силы взаимодействия между двумя жидкостями, известной как взаимное трение. Наиболее интересно, однако, рассмотрение срыва сверхтекучести и приводящих к этому причин. Пока еще нет вполне удовлетворительного объяснения причин срыва сверхтекучести, т. е. существования ограничений на  $v_s$ , но ниже мы обсудим наиболее многообещающие предположения. Обзор экспериментальных работ, посвященных течению He II с высокими скоростями, можно найти в книге Келлера [22], гл. 8.

Заметим, что несколько раз предпринимались попытки обобщить уравнения (2.60) и (2.61); наиболее успешная из них предпринята Бекаревичем и Халатниковым [6], которые в своем рассмотрении учли движение вихревых нитей. Превосходное обсуждение этой работы см. в книге Доннелли [16], гл. 4.

## § 2.6. Течение гелия II в каналах

В гл. 1 были описаны некоторые основные эксперименты, подтверждающие справедливость двухжидкостной модели. Среди них выделяются эффект фонтанирования и опыт Андроникашвили, в котором непосредственно измерялась зависимость отношения  $\rho_n/\rho$  от температуры. В остающейся части настоящей главы мы обсудим еще несколько экспериментов и посмотрим, в какой связи находятся их результаты с приведенными выше уравнениями двухжидкостной модели, а также отметим ограничения, существующие в отношении применения этой модели.

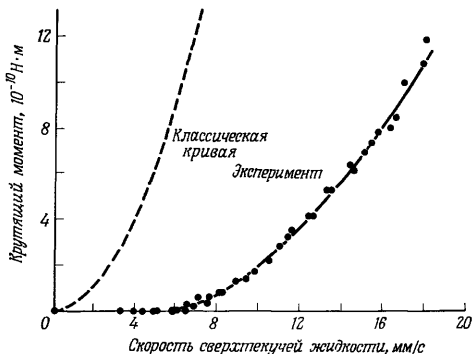
Потенциальный характер течения сверхтекучей жидкости [уравнение (2.24)] был ярко продемонстрирован в опыте Крега и Пеллама [13] со «сверхжидкостной аэродинамической трубой». Прибор представляет собой цилиндрический сосуд, погруженный в ванну He II (фиг. 33). Концы цилиндра — «сверхщели» — пропускают сверхтекучую жидкость, но непроницаемы для нормальной компоненты. Таким образом, при включении нагревателя через «аэродинамическую трубу»  $R$  течет только сверхтекучая компонента; нормальная компонента также содержится в объеме  $R$ , но она



Фиг. 33. Сверхжидкостная аэродинамическая труба [13].

$V$  — откачанное пространство;  $S$ ,  $S'$  — сверхщели;  $R$  — полость, заполненная сверхтекучей жидкостью;  $W$  — пропеллер;  $F$  — кварцевая нить;  $G$  — зеркала;  $M$  — магнит;  $D$  — медвый диск для демпфирования;  $H$  — нагреватель;  $T$  — вход в трубку, Вентури.

неподвижна. После выхода из верхней сверхщели поток сверхтекучей жидкости течет по трубке  $T$ , где смешивается с нормальной жидкостью. Скорость жидкости в  $T$  измеряется трубкой Вентури, что дает возможность определить скорость сверхтекучего течения в  $R$ . Характер потока внутри аэродинамической трубы можно определить, наблюдая поведение пропеллера, который состоит из



Фиг. 34. Зависимость крутящего момента, действующего на пропеллер в сверхтекучей аэродинамической трубе, от скорости сверхтекучей части жидкости [13].

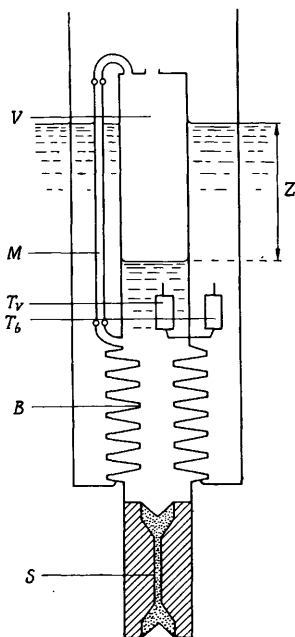
Для сравнения изображен крутящий момент (пунктир), ожидаемый для вязкой жидкости такой же плотности.

двух тонких слюдяных лопастей, подвешенных на тонкой кварцевой нити. Поток вязкой жидкости, протекающий мимо лопастей, становится турбулентным и вызывает их поворот; такой же эффект возникает при обтекании крыла самолета. Крутящий момент и поворот лопастей возникают даже при ничтожно малой вязкости. На фиг. 34 приведены полученные для He II результаты вместе с кривой для вязкой жидкости такой же плотности. Сверхтекучее течение приводит к появлению крутящего момента вплоть до определенной «критической скорости», ниже которой никакого отклонения пропеллера не происходит. Таким образом, в этом эксперименте наблюдаются два режима сверхтекучего течения: при очень низких скоростях поток сверхтекучей жидкости является потенциальным (безвихревым) и поэтому не создает крутящего момента, действующего на пропеллер; выше определенной «критической скорости», равной в данном случае примерно 6 мм/с, поток ведет себя подобно классической жидкости. Мы предполагаем

ем, что при таких более высоких скоростях сверхтекучее течение турбулизируется.

Заслуживают внимания два обстоятельства. Нормальная компонента «зажата» и двигаться в аэродинамической трубе не может, что дает возможность изучать сверхтекучий поток в чистом виде. Это особенно существенно при раздельном изучении свойств нормальной и сверхтекучей компонент He II и при выяснении факторов, приводящих к разрушению сверхтекучести. В ряде других экспериментов, которые мы опишем в этой главе, нормальная часть жидкости тем или иным путем также удерживается в неподвижном состоянии. Второе обстоятельство заключается в существовании «критической скорости», выше которой невозможен сверхтекучий поток без диссипации энергии. В гл. 1 мы ввели критерий сверхтекучести Ландау, который определяет критическую скорость для образования отдельных возбуждений; для ротоннов эта критическая скорость равна 58 м/с [см. (1.65)]. Это значение на четыре порядка величины больше «критической скорости», наблюдаемой в аэродинамической трубе; ясно, что для объяснения такого низкого ее значения нужен другой механизм.

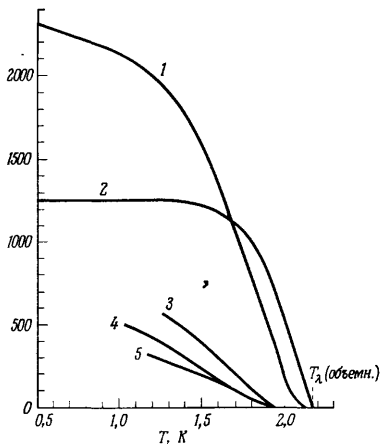
В § 1.1 мы упоминали эксперименты по измерению вязкости нормальной жидкости [см. уравнение (2.61)]. Они связаны с наблюдением силы вязкого сопротивления, действующего на движущееся в жидкости твердое тело. Методы, связанные с использованием течения Пуазейля через широкие каналы, здесь неприменимы, поскольку движение сверхтекучей жидкости происходит очень легко и не зависит от разности давлений, что маскирует движение нормальной жидкости.



Фиг. 35. Прибор для измерения гравитационного потока через сверхщель [15].

S — сверхщель; B — сифон; M — наружная трубка для определения уровня в V; V — резервуар с гелием; Z — перепад давления;  $T_v$ ,  $T_b$  — термометры.

В целом ряде экспериментов исследовалось прохождение сверхтекучего потока по достаточно тонким каналам, не пропускающим вязкую нормальную компоненту. В качестве примера рассмотрим эксперимент де Брюна Оуботера и др. [15], в котором наблюдалось течение через сверхщель под влиянием силы тяжести. Один из использованных приборов изображен на фиг. 35. Сверхщель представляла собой просверленное в бронзовом цилиндре отверстие,



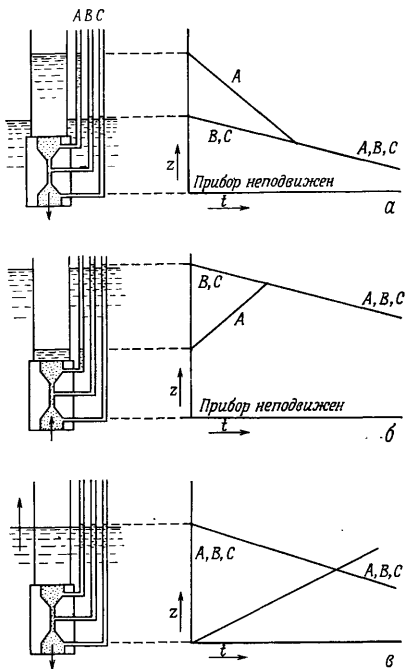
Фиг. 36. Зависимость критической величины потока ( $\text{см}^3/\text{см}^2 \cdot \text{мин}$ ) от температуры [15].

1 — 3 — сверхщели, заполненные ювелирным крокусом;  
4, 5 — сверхщели из стекла викор.

плотно забитое ювелирным крокусом — мелким порошком с размером частичек, не превышающим примерно 0,5 мкм. В результате образуется большое количество извилистых узких каналов различного размера и неправильной формы. Чтобы создать поток через такую сверхщель, поднимают или опускают внутренний резервуар, что приводит к появлению разности давлений между ним и гелиевой ванной. Скорость потока измеряется по скорости изменения уровня гелия в резервуаре. В этих экспериментах использовались также другие сверхщели, сделанные из стекла викор — пористого стекла с губкообразной структурой. Здесь каналы, по которым течет сверхтекучая жидкость, имели еще меньшую ширину — средний их диаметр составлял только 6 нм.

Как оказалось, даже очень малого перепада давлений достаточно для достижения «критической скорости» потока. Критическая

скорость практически уже не зависела от давления, но была функцией температуры. На фиг. 36 изображена зависимость критической скорости потока от температуры для сверхщелей из двух различных образцов стекла викор и трех различных сверхщелей,



Фиг. 37. Прибор для измерения изменения давления вдоль сверхщели ( $A, B, C$  — манометры) [15].

$a$  — поток вытекает из резервуара с критической скоростью, уровни  $B, C$  и уровень гелиевой ванны одинаковы;  $b$  — поток заполняет резервуар с критической скоростью, уровни  $B, C$  и уровень гелиевой ванны по-прежнему одинаковы;  $v$  — прибор поднимают с постоянной скоростью для того, чтобы поток через сверхщель был меньше критического, уровни  $A, B$  и  $C$  одинаковы.

заполненных ювелирным крокусом. Во всех случаях, за исключением пор большого размера, температура возникновения сверхтекучего течения всегда была ниже значения  $T_\lambda$  для жидкости в больших объемах.

Под «критической скоростью» течения мы подразумеваем ту величину сверхтекучего потока, при которой начинается диссипация. В этих же экспериментах было найдено, что диссипация возникает в локализованной области. Это удалось установить, измеряя давление с помощью трех трубок, присоединенных к трем различным точкам «сверхщели» (фиг. 37). Поскольку жидкость в этих трубках практически неподвижна, ее уровень характеризует давление в месте присоединения данной трубки. Когда резервуар наполнялся или опустошался с критической скоростью, все падение давления происходило между точками *A* и *B*, т. е. там, где движение сверхтекучего потока было наиболее ограничено. С другой стороны, когда путем перемещения резервуара поддерживается сверхтекучее течение с докритической скоростью, перепада давления на сверхщели не возникает. Все это означает, что диссипация происходит в области с отличным от нуля градиентом давления.

Из уравнения сверхтекучести (2.60) следует, что в области, для которой  $\nabla p \neq 0$ , сверхтекучая жидкость движется с ускорением, зависящим от  $\nabla p$ . Ясно, однако, что не это происходит в сверхщели, где скорость потока достигает своего критического значения, не зависящего от разности давлений. Чтобы учесть последнее обстоятельство, к уравнению (2.60) нужно добавить член, описывающий возникающую диссипацию энергий.

## § 2.7. Пленки жидкого гелия

На поверхности твердого тела, соприкасающегося с насыщенными парами He, образуется пленка жидкого гелия с типичной толщиной порядка 100 атомных размеров, или 30 нм. Существование такой пленки само по себе не представляет ничего удивительного. Поскольку, однако, пленка много толще пор в стекле викор (см. § 2.6), она способна «переносить» сверхтекучий поток. С другой стороны, толщина пленки достаточно мала, чтобы течение по ней нормальной компоненты почти полностью отсутствовало. Поэтому такая пленка представляет собой один из видов «сверхщели». Действительно, наличие гелиевой пленки на стенке сосуда может привести к значительным потерям гелия — обстоятельство, которое обязательно нужно учитывать при создании соответствующих приборов.

Свойства гелиевых пленок удобно обсуждать, пользуясь понятием химического потенциала. Когда жидкость в пленке покоится, химический потенциал на единицу массы можно представить в виде

$$\frac{1}{m_4} \mu = \frac{p}{\rho} - \sigma T + gz - \frac{\alpha}{y^3}; \quad (2.62)$$

здесь, как и в (2.37), присутствуют члены, связанные с давлением и температурой,  $gz$  — гравитационная потенциальная энергия на единицу массы на высоте  $z$ , а  $-\alpha/y^3$  — потенциальная энергия на расстоянии  $y$  от стенки, связанная с вандерваальсовыми силами. (Значение постоянной  $\alpha$  определяется материалом стенки.) В изотермических и изобарических условиях из (2.62) следует, что профиль статической гелиевой пленки описывается выражением

$$d = (\alpha/gH)^{1/3}. \quad (2.63)$$

Здесь  $d$  — толщина пленки на высоте  $H$  над уровнем жидкого гелия, и мы воспользовались тем фактом, что во всех точках свободной поверхности химический потенциал имеет одно и то же значение. Непосредственные измерения толщины пленки, проводившиеся различными методами, особенно с помощью поляризованного света (Джексон и Граймс [19]), до некоторой степени подтвердили справедливость выражения (2.63). Возможно, однако, что в (2.62) нужно ввести дополнительные члены; кроме того, значение  $\alpha$  известно с не очень большой точностью.

Когда пленка находится в движении, нужно воспользоваться выражением (2.59). Тогда градиент химического потенциала равен

$$\frac{1}{m_4} \nabla \mu = \frac{1}{\rho} \nabla p - \sigma \nabla T - \frac{\rho_n}{2\rho} \nabla (v_n - v_s)^2 + \nabla \left( gz - \frac{\alpha}{y^3} \right). \quad (2.64)$$

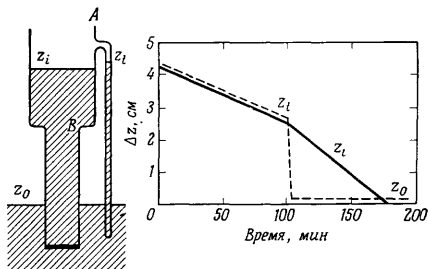
Подставляя (2.64) в уравнение движения сверхтекучей жидкости (2.24) для стационарных условий ( $\partial v_s / \partial t = 0$ ) и при постоянных давлении и температуре, получаем

$$\nabla \left( \frac{1}{2} \frac{\rho_s}{\rho} v_s^2 + gz - \frac{\alpha}{y^3} \right) = 0. \quad (2.65)$$

Интегрирование этого уравнения дает модифицированное уравнение Бернулли [ср. (2.39) и (2.40)]. Далее, интегрируя уравнение (2.65) вдоль поверхности пленки, получаем новое уравнение для профиля пленки. Из этого уравнения следует, что пленка, по которой движется сверхтекучий гелий, должна быть тоньше покоящейся пленки (Конторович [26], Тилли [38]). С другой стороны, в экспериментах по определению толщины пленки с помощью измерения емкости предсказываемого изменения толщины обнаружено не было (Келлер [24]).

В § 2.3 мы видели, что градиент химического потенциала  $\nabla \mu$  действует на сверхтекучую жидкость как эффективная сила. Поэтому из (2.64) следует, что движение сверхтекучей жидкости в пленке может быть обусловлено несколькими факторами. Проще всего исследовать движение, обусловленное разностью гравитационного потенциала между концами пленки. Это можно сделать, наблюдая наполнение и опустошение пробирки (см. § 1.1). Целый ряд плодотворных экспериментов такого типа был выполнен Хем-

мелом и Келлером с сотрудниками. Схема их приборов [23] изображена на фиг. 38. Стеклообразный сосуд, состоящий из двух частей с различным поперечным сечением, был снабжен отводной трубкой, присоединенной к верхней части сосуда. Когда внутренний уровень жидкости (высота  $z_1$ ) был выше наружного (высота  $z_0$ ), сосуд



Фиг. 38. Прибор для определения изменения химического потенциала вдоль стенки пробирки, которая наполняется и опустошается в результате течения гелиевой пленки (слева), и типичное поведение уровней в процессе опустошения пробирки (справа) [23].

опустошался в результате течения пленки. При постоянных давлении и температуре разность химических потенциалов между двумя концами пленки равна разности значений потенциальной энергии на атом:

$$\Delta\mu = m_4 g (z_1 - z_0); \quad (2.66)$$

в этом случае течение сверхтекучей компоненты по пленке подобно течению обычной жидкости в используемой как сифон перевернутой U-образной трубке. Отводная трубка предназначена для измерения  $\mu$  вдоль пленки. В силу малости диаметра отводной трубки, составляющего 1/10 диаметра наиболее узкой части сосуда, уровень жидкости в ней ( $z_1$ ) быстро устанавливается при изменении потока.

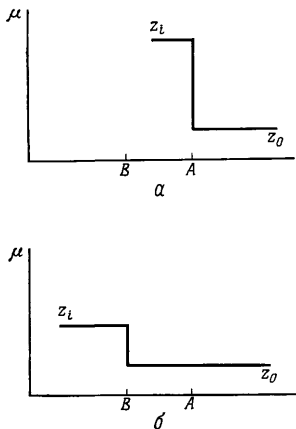
Изменение уровней гелия в этом эксперименте также изображено на фиг. 38. Пока внутренний уровень расположен между входом отводной трубки и сужением сосуда, высота  $z_1$  остается равной  $z_0$ , если не считать небольшого различия, связанного с капиллярным эффектом. Как только уровень  $z_1$  опускается ниже сужения  $B$ , уровень в отводной трубке быстро падает и становится равным  $z_0$ . Уровень во второй отводной трубке, присоединенной к наружной стенке сосуда (она на фиг. 38 не изображена), остается неизменным и равным  $z_0$ . На фиг. 39 изображено изменение химического потенциала вдоль пленки, установленное с помощью этих



наблюдений. Когда уровень  $z_1$  находится выше  $B$ , химические потенциалы в сосуде и в отводной трубке одинаковы; если же  $z_1$  опускается ниже  $B$ , химический потенциал имеет постоянную величину от  $z = z_0$  до высоты, на которой находится отверстие отводной трубки. Отсюда следует, что в обоих случаях все изменение  $\Delta\mu$  концентрируется в очень малой области, т. е. химический потенциал пленки является по существу ступенчатой функцией со скачком в точке  $A$ , когда уровень  $z_1$  расположен выше  $B$ , и в точке  $B$ , когда уровень  $z_1$  находится ниже сужения сосуда.

Пока уровень  $z_1$  находится между  $A$  и  $B$ , он опускается с постоянной скоростью, что свидетельствует о постоянстве сверхтекучего течения в пленке. Это подтверждает установленный уже во многих экспериментах (например, Даунт и Мендельсон [14]) факт, что скорость течения в основном не зависит от перепада давления. Когда уровень опускается ниже сужения сосуда, скорость его падения увеличивается, но в силу геометрии сосуда это по существу означает уменьшение объемной скорости течения, т. е. уменьшение объема жидкости, протекающей в единицу времени. Следовательно, скорость течения определяется наименьшим периметром сосуда

над внутренним уровнем гелия — еще один результат, полученный Даунтом и Мендельсоном [14]. Эксперименты Келлера и Хеммела показали, что градиент  $\nabla\mu$  отличен от нуля в той части пленки, которая определяет скорость течения, т. е. в той ее части, где сверхтекучая скорость достигает своего критического значения и возникает диссипация. При опустошении сосуда диссипация, по-видимому, возникает в небольшом участке пленки; однако исследование процесса наполнения сосуда ( $z_0 > z_1$ ) показывает, что уровень в отводной трубке все время остается между уровнями жидкости в больших объемах ( $z_0 > z_t > z_1$ ). Это согласуется с предположением, в соответствии с которым изменение  $\mu$  происходит в пределах значительной длины пленки

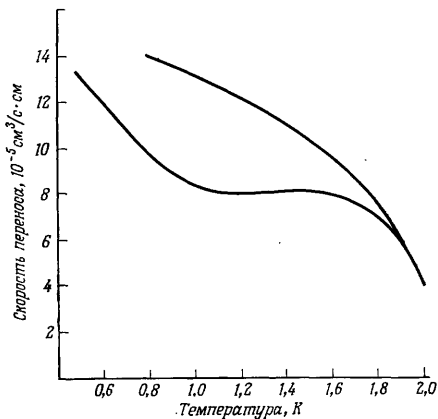


Фиг. 39. Изменение  $\mu$  вдоль пленки в процессе опустошения пробирки (в предельных условиях) [23].

$a$  — внутренний уровень расположен между  $A$  и  $B$ ;  $b$  — внутренний уровень расположен ниже  $B$ .

и область диссипации «расплывается» по внутренней стенке сосуда.

Неоднократно изучалось течение пленки под влиянием нагрева, когда доминирующий вклад в  $\nabla\mu$  вносит температурный градиент [см. выражение (2.64)]. Результаты (см., например, Боуерс и др. [7], Либенберг [30]) очень похожи на полученные при исследовании течения пленки под влиянием силы тяжести. В последнее время много работ по сверхтекучему течению по пленкам и по каналам было направлено на выяснение механизмов, ответственных

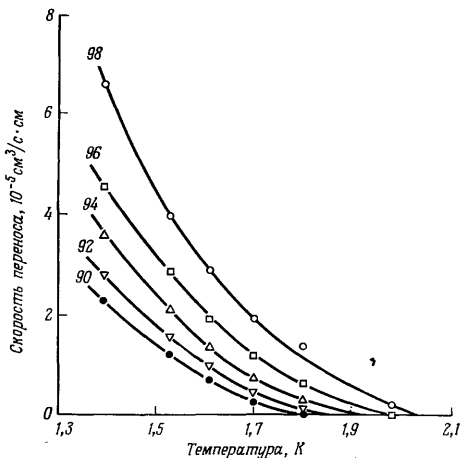


Фиг. 40. Зависимость скорости течения от температуры при опустошении и наполнении пробирки в результате течения гелиевой пленки под действием силы тяжести [2].

Нижняя кривая — измеренные в пробирке скорости течения при уровне жидкости в большом объеме, находящемся по крайней мере на 5 мм ниже верха пробирки. Верхняя кривая — скорости течения, измеренные при опустошении пробирки после того, как она была полностью погружена в жидкость.

за диссипацию и ограничение сверхтекучей скорости. В течение долгого времени полагали, что критическая скорость для возникновения диссипации определяется в первую очередь геометрией канала, по которому течет гелий. Теперь, однако, появились существенные экспериментальные результаты, подтверждающие теорию, которая связывает появление критической скорости с тепловыми флуктуациями (Лангер и Фишер [29]). Обсуждение этой теории и ее связи с экспериментами целесообразнее провести после рассмотрения вихрей в гл. 4. Пока же перечислим целый ряд других свойств пленок, показывающих, насколько сложно это явление.

а) Скорость течения по пленке сильно зависит от температуры (см., например, фиг. 40, взятую из работы Аллена и др. [2]). Нижняя кривая была получена при измерениях потока, вытекающего и вытекающего из сосудов, которые не были наполнены доверху. Уменьшение скорости по мере приближения к  $T_\lambda$  можно объяснить изменением отношения  $\rho_s/\rho$ , но увеличение скорости течения ниже 1 К загадочно.



Фиг. 41. Зависимости скорости течения, возникшего под действием силы тяжести, от температуры для ненасыщенных пленок различной толщины на стеклянной подложке [10].

Толщина пленки уменьшается справа налево. Цифры на кривых указывают равновесное давление в процентах от давления насыщенных паров.

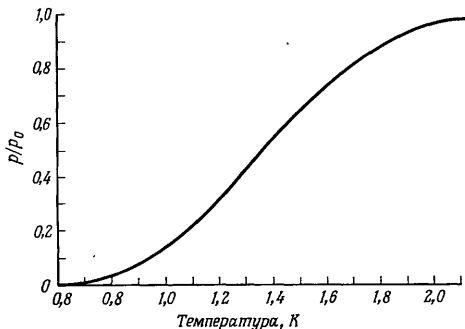
б) Верхняя кривая на фиг. 40 соответствует потоку, вытекающему из сосуда, который до измерений был полностью погружен в гелий; различие между кривыми означает, что может оказаться существенной история возникновения пленки.

в) Было обнаружено, что скорости течения в пленке иногда изменяются резким скачком (почти всегда к более низкому значению) при течении при постоянной температуре (Гаррис-Лоуз и др. [18], Аллен и Эрмтейдж [1]).

г) Было высказано предположение, что скорость течения в пленке принимает при данной температуре «квантованные» значения (Гаррис-Лоуз и др. [18], Туркингтон и Эдвардс [40]).

д) Ниже 1 К скорость течения начинает существенным образом зависеть от разности уровней (Мартин и Мендельсон [33]).

До сих пор мы рассматривали гелиевые пленки при давлении насыщенных гелиевых паров. Понижая давление паров ниже отвечающего насыщению, можно уменьшать толщину пленки. Эти так называемые ненасыщенные пленки используются при изучении сверхтекучести в каналах с ограниченной шириной. Изменение скорости течения с температурой в ненасыщенных пленках (фиг. 41) отличается от этой же зависимости в насыщенных пленках (см. фиг. 40).

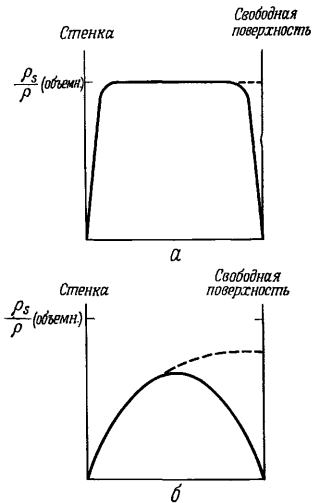


Фиг. 42. Возникновение сверхтекучего течения в ненасыщенных пленках [17].  $p$  — равновесное давление,  $p_0$  — давление насыщения. Сглаженная кривая построена на основе многих экспериментальных данных.

Более того, температура возникновения сверхтекучего потока падает ниже  $T_\lambda$  и продолжает понижаться с уменьшением толщины пленки (фиг. 42). Важно выяснить, что приводит к задержке появления сверхтекучести при нагреве — стремление к нулю сверхтекучей плотности  $\rho_s$  или обращение в нуль критической скорости для возникновения диссипации. Эксперименты с *третьим звуком* в ненасыщенных пленках исключили первую альтернативу (Кадживада и др. [21]). Третий звук — это поверхностное волновое движение пленки, которое мы опишем подробнее в § 2.9. Скорость третьего звука, пропорциональная  $(\rho_s/\rho)^{1/2}$ , не обнаруживает никаких признаков понижения, когда в результате нагрева температура превышает температуру исчезновения сверхтекучести. Отсюда следует, что плотность  $\rho_s$  остается отличной от нуля при обсуждаемом переходе, при котором исчезает сверхтекучесть.

Поэтому представляется вероятным, что и выше температуры такого перехода существует сверхтекучая часть жидкости, но она не может течь.

С теоретической точки зрения можно понять, по крайней мере качественно, почему плотность  $\rho_s$  должна снижаться в очень тонкой пленке. В § 2.4 мы обсуждали граничные условия, которым должна удовлетворять сверхтекучая волновая функция. Ее амплитуда  $(\rho_s/\rho)^{1/2}$  равна нулю у твердой стенки и возрастает до значения, существующего в объеме жидкости, на расстоянии, называемом *длиной когерентности* или *корреляционной длиной*, а также *длиной восстановления* или «залечивания» (healing length). На свободной поверхности амплитуда или, альтернативно, градиент волновой функции равны нулю. В соответствии с таким граничным условием на значительной части толщины пленки амплитуда волновой функции должна быть меньше амплитуды в объеме жидкости (фиг. 43). Когда толщина пленки становится сравнимой с корреляционной длиной, то  $|\psi|$  и  $\rho_s$  вообще не достигают тех значений, которые они имеют в большом объеме жидкости. При измерениях на ненасыщенных пленках (Кадживада и др. [21]) было получено грубое согласие с теоретическими оценками корреляционной длины (Джозефсон [20]). К сожалению, измерения были недостаточно чувствительны, чтобы на их основании можно было решить вопрос о граничных условиях для свободной поверхности. Оказалось, что корреляционная длина равна радиусу сердцевин вихря (см. гл. 4 и § 6.8).

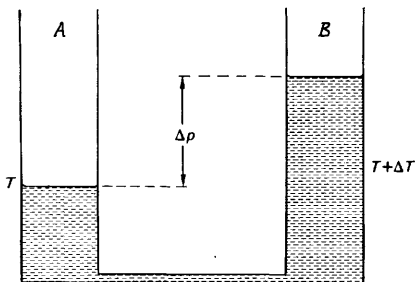


Фиг. 43. Изменение амплитуды волновой функции и отношения  $\rho_s/\rho$  в гелиевой пленке в случае, когда толщина пленки много больше корреляционной длины (а) и когда толщина пленки имеет порядок корреляционной длины (б).

Сплошная линия:  $\psi = 0$  на свободной поверхности гелия II; пунктирная линия:  $\nabla\psi = 0$  на свободной поверхности.

## § 2.8. Эффект фонтанирования и перенос тепла в гелии II

В гл. 1 мы описали эффект фонтанирования (или термомеханический эффект) и отметили, что в He II перенос массы и тепла связаны между собой. Сейчас мы кратко остановимся на том, каким образом эксперименты, в которых имеется градиент температуры, позволяют получить дополнительное подтверждение справедливости уравнений двухжидкостной модели.



Фиг. 44. Термомеханический эффект в He II.  
Два резервуара соединены коротким каналом.

Рассмотрим схему, изображенную на фиг. 44; здесь два резервуара с He II соединены каналом длиной  $\Delta x$ . Прежде всего предположим, что канал достаточно узок и не пропускает нормальной компоненты, т. е. действует как сверхщель. Если при одинаковых начальных уровнях в обоих резервуарах создать небольшую разность температур, чтобы в резервуаре B температура была на  $\Delta T$  выше, чем в резервуаре A, сверхтекучая компонента начинает течь из A в B, пока концентрации двух жидкостей по обе стороны сверхщели не уравниваются. Течение продолжается до тех пор, пока в B не возникнет избыточное давление  $\Delta p$ , достаточное для того, чтобы прекратить дальнейшее движение сверхтекучей компоненты. В этом равновесном состоянии сверхтекучая жидкость в канале не испытывает ускорения, и из уравнения (2.60) имеем

$$\frac{Dv_s}{Dt} = -\frac{1}{m_4} \frac{\Delta\mu}{\Delta x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x} + \sigma \frac{\Delta T}{\Delta x} = 0, \quad (2.67)$$

что приводит к полученному еще Г. Лондоном [32] уравнению для эффекта фонтанирования

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \rho\sigma. \quad (2.68)$$

Из теплоемкости He II можно вычислить энтропию; таблицу значений теплоемкости и энтропии можно найти в приложении к книге Уилкса [42]. Используя значение энтропии при 1,3 К, мы видим, что эффект фонтанирования уже значителен, поскольку при этой температуре разность температур всего в один милликельвин создает между двумя резервуарами перепад давления, отвечающий разности уровней He II, равной примерно 1 см. Уравнение (2.68) для эффекта фонтанирования было подтверждено целым рядом экспериментов, которые представляют более или менее изопренные варианты основной схемы, изображенной на фиг. 44.

Обратный процесс, известный как механокалорический эффект, можно также объяснить с помощью схемы, представленной на фиг. 44. Предположим, что в обоих резервуарах, температура  $T$  которых теперь одинакова, уровни жидкостей совпадают. Если приложить теперь к  $A$  избыточное давление, сверхтекучая компонента потечет через сверхщель в  $B$ , не перенося при этом никакой энтропии. Однако жидкость в  $B$  уже обладает энтропией  $\rho\sigma$  на единицу объема, и для поддержания равновесия к единице объема жидкости в резервуаре  $B$  нужно добавить количество тепла, равное

$$\dot{Q} = \rho\sigma T. \quad (2.69)$$

Наоборот, чтобы температура жидкости в  $A$  осталась неизменной, от нее нужно отнять то же количество тепла  $Q$ . Таким образом, при покоящейся нормальной компоненте перенос сверхтекучей жидкости при постоянной температуре сопровождается потоком тепла. Существование этого эффекта было подтверждено Брюером и Эдвардом [8].

Наконец, рассмотрим случай, когда через соединяющий канал может течь как сверхтекучая, так и нормальная компонента. Как и прежде, при разности температур  $\Delta T$  между резервуарами возникает перепад давления  $\Delta p = \rho\sigma \Delta T$ . Этот перепад давления заставляет нормальную компоненту течь в согласии с законом Пуазейля, причем скорость изменения объема равна

$$\dot{V}_n = \frac{\beta}{\eta_n} \frac{\Delta p}{\Delta x}, \quad (2.70)$$

где  $\beta$  — геометрический множитель. Нормальная компонента течет из более нагретого резервуара ( $B$ ) в холодный ( $A$ ), перенося энтропию со скоростью  $\dot{V}_n \rho\sigma$ , а сверхтекучая компонента, которая не переносит энтропию, течет в противоположном направлении, чтобы сохранить общую плотность постоянной. В результате возникает мощный тепловой поток, причем скорость переноса тепла пропорциональна градиенту температуры:

$$\dot{Q} = \frac{\beta T (\rho\sigma)^2}{\eta_n} \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (2.71)$$

Это уравнение впервые вывели Ф. Лондон и Зилсель [31]. Его подтвердили Брюер и Эдвардс [9], которые использовали свои данные о тепловых потоках для вычисления коэффициента вязкости в нормальной части жидкости. Их результаты хорошо согласуются с полученными более прямыми методами (вращающийся вискозиметр, см. § 1.1).

## § 2.9. Распространение звука в гелии II

В заключение рассмотрим теперь различные типы звуковых волн, которые могут распространяться в He II. Прежде всего выведем уравнение для первого и второго звуков из уравнений двухжидкостной модели, следуя Аткинсу [4].

Из уравнения непрерывности (2.43) в сочетании с (2.42) имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} = -\nabla \cdot (\rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n). \quad (2.72)$$

Воспользуемся также уравнением сохранения энтропии (2.44)

$$\frac{\partial (\rho \sigma)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \sigma \mathbf{v}_n) = 0. \quad (2.73)$$

Опустив в уравнениях движения (2.60) и (2.61) члены, квадратичные по скорости, получаем

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla p + \rho_s \sigma \nabla T, \quad (2.74)$$

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} = -\frac{\rho_n}{\rho} \nabla p - \rho_s \sigma \nabla T. \quad (2.75)$$

Итак, мы рассматриваем случай малых скоростей и пренебрегаем необратимыми процессами. Сложение уравнений (2.74) и (2.75) дает

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -\nabla p; \quad (2.76)$$

здесь мы пренебрегли членами второго порядка, такими, как  $\mathbf{v}_s (\partial \rho_s / \partial t)$ . Комбинируя уравнения (2.72) и (2.76), найдем первое из нужных нам уравнений

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \nabla^2 p. \quad (2.77)$$

Для получения второго уравнения исключим  $\nabla p$  из уравнений (2.74) и (2.76):

$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) = -\rho \sigma \nabla T. \quad (2.78)$$

Найденный результат подтверждает, что температурный градиент вызывает относительное движение двух жидкостей (см. конец



§ 2.8). Далее, из уравнений (2.72) и (2.73) имеем

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) = -\frac{\rho}{\rho_s \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (2.79)$$

что вместе с уравнением (2.78) дает

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \nabla^2 T. \quad (2.80)$$

Теперь давление и температуру удобно выразить через энтропию и плотность. Для этого переищем уравнения (2.77) и (2.80) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\sigma \nabla^2 \rho + \left( \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right)_\rho \nabla^2 \sigma \quad (2.81)$$

и

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_\sigma \nabla^2 \rho + \left( \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_\rho \nabla^2 \sigma \right]. \quad (2.82)$$

Найдем решения этих двух уравнений, имеющие вид плоских волн, т. е. для изменений плотности и энтропии вида

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho' \exp[i\omega(t - z/u)], \\ \sigma &= \sigma_0 + \sigma' \exp[i\omega(t - z/u)], \end{aligned} \quad (2.83)$$

где  $u$  — скорость распространения в направлении  $z$ , а  $\omega$  — угловая частота. Подставляя (2.83) в уравнения (2.81) и (2.82), находим

$$\begin{aligned} \left\{ \left( \frac{u}{u_1} \right)^2 - 1 \right\} \rho' - \left( \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right)_\rho \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_\sigma \sigma' &= 0, \\ \left( \frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_\sigma \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_\rho \rho' - \left\{ \left( \frac{u}{u_2} \right)^2 - 1 \right\} \sigma' &= 0, \end{aligned} \quad (2.84)$$

где

$$u_1^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\sigma \quad (2.85)$$

и

$$u_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \left( \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_\rho. \quad (2.86)$$

Система уравнений (2.84) имеет нетривиальное решение, если

$$\begin{aligned} &\left\{ \left( \frac{u}{u_1} \right)^2 - 1 \right\} \left\{ \left( \frac{u}{u_2} \right)^2 - 1 \right\} = \\ &= \left( \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right)_\rho \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_\sigma \left( \frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_\sigma \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_\rho = \frac{C_p - C_v}{C_p} \approx 0. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Теплоемкости  $C_p$  и  $C_v$  введены в последнее уравнение с помощью известных термодинамических соотношений. Фактически для He II теплоемкости  $C_p$  и  $C_v$  почти равны друг другу, и правую часть

уравнения (2.87) можно приближенно положить равной нулю. Два (приближенных) решения уравнения (2.87) соответствуют двум различным видам волнового движения.

а) *Первый звук*

$$\begin{aligned} u \approx u_1, \quad \sigma' = 0, \quad \rho' \neq 0 & \quad \text{из уравнения (2.84),} \\ \nabla T = 0 & \quad \text{из уравнения (2.80),} \\ v_n = v_s & \quad \text{из уравнений (2.74) и (2.75).} \end{aligned}$$

Эти условия соответствуют распространению волн плотности в жидкости с почти постоянной энтропией при совместном движении обеих жидкостей. Действительно, выражение (2.85) является обычным для скорости звука (*первый звук*).

б) *Второй звук*

$$\begin{aligned} u \approx u_2, \quad \rho' = 0, \quad \sigma' \neq 0 & \quad \text{из уравнения (2.84),} \\ \nabla p = 0 & \quad \text{из уравнения (2.80),} \\ \rho_s v_s + \rho_n v_n = 0 & \quad \text{из уравнения (2.76).} \end{aligned}$$

Эти условия описывают распространение энтропии (или *температурной волны*) при почти постоянной полной плотности  $\rho = \rho_s + \rho_n$ . Из последнего уравнения следует, что обе жидкости движутся в антифазе, чтобы сохранить равенство нулю суммарного потока массы.

Снова подчеркнем, что решения были получены из приближительных уравнений, в которых были опущены нелинейные члены и не учтены необратимые эффекты. Практически почти всегда возникают звуковые волны обоих типов, так как они связаны друг с другом.

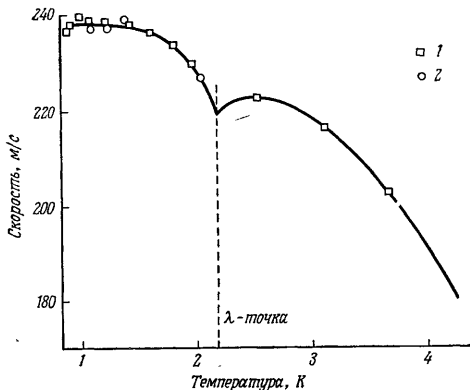
Скорость первого звука измерялась путем определения длины волны (ван Иттербек и др. [41]) и импульсными методами, в которых резонаторы из кристаллов кварца использовались в качестве передатчика и в качестве приемника (Чейз [11]). На фиг. 45 приведены типичные результаты, полученные для скорости при насыщенном давлении пара.

Второй звук изучался путем генерации стоячих волн в резонаторной трубке. Передатчиком служил электронагреватель, питаемый переменным током, а приемником — термометр сопротивления (Пешков [35]). Частота второго звука вдвое больше частоты переменного тока. Зависимость скорости второго звука от температуры изображена на фиг. 46. Если записать выражение (2.86) в форме

$$u_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{T\sigma^2}{C_p},$$

то мы видим, что измерение скорости второго звука дает еще одну возможность измерения параметров  $\rho_s$  и  $\rho_n$ .

Затухание первого звука в He II обусловлено обычными классическими эффектами вязкости и теплопроводности, которые приводят к диссипации энергии волны. Кроме того, в затухание вносят свой вклад некоторые эффекты релаксации тепловых возбуждений. Речь идет о том, что в условиях, когда заключенная в определенном объеме жидкость претерпевает сжатие или разрежение,

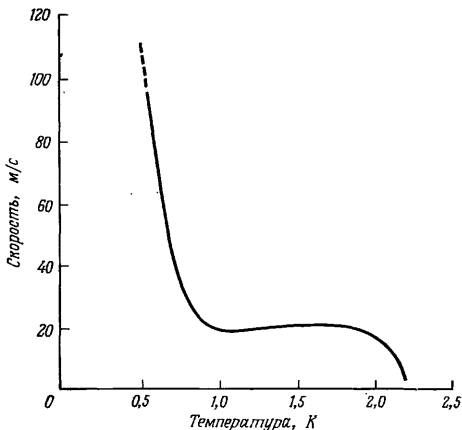


Фиг. 45. Скорость звука в жидком He<sup>4</sup> при давлении насыщенных паров [14].  
1 — частота 2,0 МГц; 2 — частота 12,1 МГц.

для установления соответствующей концентрации фононов и ротоннов требуется конечное время. Все факторы, приводящие к затуханию первого звука, вносят также вклад и в затухание второго звука; к ним добавляется теплопроводность, связанная с дрейфом возбуждений. Для учета всех этих многочисленных эффектов в уравнения двухжидкостной модели нужно ввести дополнительные члены. Рассмотрение соответствующих уравнений становится сложным; их вывод и решение читатель может найти в книге Халатникова [25] (см. также [47\*\*]) и в книге Уилкса [42], который приводит также экспериментальные данные, позволяющие проверить теоретические предсказания.

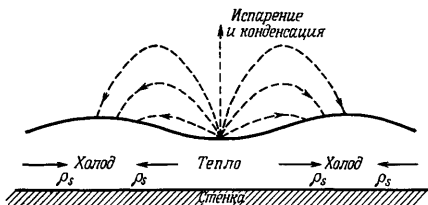
Кратко опишем в заключение еще два волновых движения в He II, связанных со вторым звуком. Об одном из них, третьем звуке, мы уже упоминали при обсуждении поведения ненасыщенных пленок (см. § 2.7). Третий звук — это поверхностная волна на пленке He II (фиг. 47), в которой сверхтекучая компонента осциллирует параллельно подложке, а нормальная «зажата» в свя-

зи с наличием вязкости. Таким образом, на гребне волны оказывается больше сверхтекучей компоненты, чем в равновесном состоянии, а во впадине — меньше, в результате чего температура во



Фиг. 46. Зависимость скорости второго звука в He II от температуры [42, 35].

впадине повышается, а на гребне понижается. Поэтому волна третьего звука сопровождается колебаниями температуры, хотя локальные градиенты температуры заметно снижаются в результате



Фиг. 47. Волна третьего звука в пленке He II.

испарения гелия с гребней и его конденсации во впадинах. Чтобы получить приближенное выражение для фазовой скорости третьего звука, нужно использовать уравнение для скорости поверхностной

волны на поверхности неглубокого слоя классической жидкости толщиной  $d$ :

$$u_p^2 = \left( \frac{f\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma_t}{\rho\lambda} \right) \text{th} \frac{2\pi d}{\lambda}. \quad (2.88)$$

Здесь  $f$  — сила на единицу массы гелия, обусловленная вандерваальсовым притяжением со стороны подложки; эта сила является главной «восстанавливающей» силой, а  $\sigma_t$  — поверхностное натяжение. Для очень длинных волн в (2.88) доминирует первый член. Учитывая, что движется лишь сверхтекучая компонента, можно записать скорость третьего звука в виде

$$u_3 = (\rho_s f d / \rho)^{1/2}. \quad (2.89)$$

По порядку величины  $u_3$  совпадает с наблюдаемыми скоростями потока в насыщенных пленках (от 10 до 100 см/с). Третий звук можно возбудить, освещая пленку пучком инфракрасного излучения, который прерывается с желаемой частотой. Возникшие осцилляции толщины пленки можно наблюдать по поляризации света. В полной теории третьего звука используются уравнения двухжидкостной модели с соответствующими граничными условиями. Обзор экспериментальных и теоретических работ по третьему звуку можно найти в статье Аткинса и Рудника [5].

Четвертый звук представляет собой осцилляции сверхтекучей жидкости в узких каналах при неподвижной нормальной компоненте. В этом случае возникают осцилляции температуры, а в силу отсутствия свободной поверхности, осциллирует и полная плотность гелия (Шапиро и Рудник [37], см. также [25]).

## ЗАДАЧИ

- 2.1. Убедитесь, что при подстановке волновой функции (2.1) в уравнение Шредингера (2.10) получается уравнение (2.12) и уравнение непрерывности (2.23).
- 2.2. Покажите, что уравнения (2.27) и (2.28) являются эквивалентными формами уравнения Эйлера для сверхтекучей жидкости.
- 2.3. Покажите с помощью термодинамики, что в двухжидкостной модели из (2.58) вытекает следующее выражение для давления:

$$p = -u_1 + T\rho\sigma + \mu\rho/m_4 + \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2.$$

Затем найдите выражение для свободной энергии Гиббса при наличии относительного движения и выведите уравнение (2.59). [Указание. Используйте равенство (2.34).]

- 2.4. С помощью уравнения, описывающего эффект фонтанирования, вычислите перепад давления в сантиметрах He II, эквивалентный разности температур  $10^{-3}$  К при 1,3 К. (При 1,3 К удельная энтропия He II и плотность He II равны соответственно 0,085 Дж/К·г и 0,145 г/см<sup>3</sup>.)

- 2.5. Используйте определение  $C_p$  и  $C_v$ , чтобы показать, что правую часть уравнения (2.87) можно записать в виде  $(C_p - C_v)/C_p$ .
- 2.6. Покажите, что затухание волны первого звука в  $He_2^{II}$ , связанное с вязкостью нормальной компоненты  $\eta_n$  (коэффициент вязкости) можно описать с помощью коэффициента затухания  $\alpha \sim \eta_n \omega^2 / \rho v_n^3$ . [Добавьте к уравнению (2.75) член  $\eta_n \nabla^2 v_n$  так же, как это было сделано в уравнении (2.61), и впишите решение, соответствующее плоской волне первого звука с частотой  $\omega$ . Покажите, что это приводит к комплексному выражению для скорости, и вычислите из него  $\alpha$ , пренебрегая дисперсией.]

## ЛИТЕРАТУРА

1. Allen J. F., Armitage J. G. M., Proc. 10th Int. Conf. on Low Temp. Phys., vol. 1, Moscow, VINITI, Moscow, 1966, p. 439. (См. перевод: Труды 10-й Межд. Конф. по физике низких температур, ВИНТИ, М., 1966.)
2. Allen J. F., Matheson C. C., Walker C. M., Phys. Lett., 19, 199 (1965).
3. Anderson P. W., Quantum Fluids, ed. D. F. Brewer, North-Holland, Amsterdam, 1966, p. 146.
4. Atkins K. R., Liquid Helium, Cambr. Univ. Press, London, 1959.
5. Atkins K. R., Rudnick I., Progr. Low. Temp. Phys., ed. C. J. Gorter, vol. VI, North-Holland, Amsterdam, 1970, ch. 2.
6. Бекаревич И. Л., Халатников И. М., ЖЭТФ, 40, 920 (1961).
7. Bowers R., Brewer D. F., Mendelssohn K., Phil. Mag., 42, 1445 (1951).
8. Brewer D. F., Edwards D. O., Proc. Phys. Soc., 71, 117 (1958).
9. Brewer D. F., Edwards D. O., Proc. Roy. Soc., A251, 247 (1959).
10. Brewer D. F., Mendelssohn K., Proc. Roy. Soc., A260, 1 (1961).
11. Chase C. E., Proc. Roy. Soc., A220, 116 (1953).
12. Cowley R. A., Woods A. D. B., Can. Journ. Phys., 49, 177 (1971).
13. Craig P. P., Pellam J. R., Phys. Rev., 108, 1109 (1957).
14. Daunt J. G., Mendelssohn K., Proc. Roy. Soc., A170, 423, 439 (1939).
15. de Bruyn Ouboter R., Taconis K. W., van Alphen W. M., Progr. Low Temp. Phys., ed. C. J. Gorter, vol. V, North-Holland, Amsterdam, 1967, ch. 2.
16. Donnelly R. J., Experimental Superfluidity, Univ. of Chicago Press, Chicago and London, 1967.
17. Goodstein D. L., Elgin R. L., Phys. Rev. Lett., 22, 383 (1969).
18. Harris-Lowe R. F., Mate C. F., McCloud K. L., Daunt J. C., Phys. Lett., 20, 126 (1966).
19. Jackson L. C., Grimes L. G., Adv. Phys., 7, 435 (1958).
20. Josephson B. D., Phys. Lett., 21, 608 (1966).
21. Kagiwada R. S., Fraser J. C., Rudnick I., Bergman D., Phys. Rev. Lett., 22, 338 (1969).
22. Keller W. E., Helium-3 and Helium-4, Plenum Press, New York, 1969.
23. Keller W. E., Hammel E. F., Phys. Rev. Lett., 17, 998 (1966).
24. Keller W. E., Proc. 12th Int. Conf. on Low Temp. Phys., Kyoto, 1970, Academic Press of Japan, Tokyo, 1971, p. 125.
25. Халатников И. М., Теория сверхтекучести, Физматгиз, М., 1971.
26. Контарович В. М., ЖЭТФ, 30, 805 (1956).
27. Ландау Л. Д., Journ. Phys. (USSR), 5, 71 (1941).
28. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1953.
29. Langer J. S., Fisher M. E., Phys. Rev. Lett., 19, 560 (1967).
30. Liebenberg D. H., Journ. Low Temp. Phys., 5, 267 (1971).
31. London F., Zilsel P. R., Phys. Rev., 74, 1148 (1948).
32. London H., Proc. Roy. Soc., A171, 484 (1939).
33. Martin D. J., Mendelssohn K., Journ. Low Temp. Phys., 5, 211 (1971).

34. *Martin P. C.*, *Quantum Fluids*, ed. D. F. Brewer, North-Holland, Amsterdam, 1966, p. 230.
35. *Пешков В. П.*, *ЖЭТФ*, 38, 799 (1960).
36. *Pines D.*, *The Many Body Problem*, Benjamin, New York, 1961. (См. перевод: *Д. Пайне*, Проблема многих тел, ИЛ, М., 1963.)
37. *Shapiro R. S.*, *Rudnick I.*, *Phys. Rev.*, 137, A1383 (1965).
38. *Tilley J.*, *Proc. Phys. Soc.*, 84, 77 (1964).
39. *Troup G. J.*, *Optical Coherence Theory—Recent Developments*, Methuen, London, 1967.
40. *Turkington R. R.*, *Edwards M. H.*, *Phys. Rev.*, 168, 160 (1968).
41. *van Itterbeek A.*, *Forrez G.*, *Teirlinck M.*, *Physica*, 23, 63, 905 (1957).
42. *Wilks J.*, *The Properties of Liquid and Solid Helium*, Oxford Univ. Press, London, 1967.
- 43\*. *Woods A. D. B.*, *Cowley R. A.*, *Repts. Progr. Phys.*, 36, 1153 (1973).
- 44\*. *Hohenberg P. C.*, *Platzman P. M.*, *Phys. Rev.*, 152, 198 (1966).
- 45\*. *Mook H. A.*, *Scherm R.*, *Wilkinson M. K.*, *Phys. Rev.*, A6, 2268 (1972).
- 46\*. *Jackson H. W.*, *Phys. Rev.*, A10, 278 (1974).
- 47\*\*. *Экштейн С.*, *Экштейн И.*, *Кеттерсон Дж.*, *Визнос Дж.*, Распространение звука в жидком и твердом гелии, в книге: *Физическая акустика*, т. VI, изд-во «Мир», М., 1973, с. 288.

## СВЕРХПРОВОДНИКИ. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ТУННЕЛИРОВАНИЕ

### § 3.1. Введение

В настоящей главе мы остановимся на двух различных, но в то же время связанных между собой проблемах. Сначала подробнее, чем раньше (см. § 1.2), обсудим некоторые особенности поведения сверхпроводников в электромагнитных полях. Самая простая реакция (отклик) сверхпроводника на приложенное магнитное постоянное во времени поле состоит в вытеснении этого поля из образца в результате появления экранирующих токов, текущих вблизи поверхности в слое толщиной порядка глубины проникновения  $\lambda$ . Характер уравнений, описывающих такое экранирование, зависит, кроме всего прочего, от того, какова глубина  $\lambda$  — больше она или меньше средней длины свободного пробега  $l$  в нормальном состоянии. Такое поведение сверхпроводника в постоянном магнитном поле аналогично экранированию микроволнового излучения в случае нормального металла. Известно, что излучение проникает только на глубину скин-слоя  $\delta$  и взаимосвязь между плотностью тока  $J$  и микроволновым полем  $E$  зависит от значения  $\delta$  — больше оно или меньше  $l$ . В силу важности этой аналогии, мы посвятим § 3.2 микроволновому скин-эффекту в нормальном металле.

От поведения сверхпроводников в постоянном поле перейдем к главному эффекту в переменном поле, а именно к инфракрасному поглощению, которое определяется энергетической щелью  $2\Delta$ . Это предоставит нам возможность перейти ко второй главной теме настоящей главы — к туннелированию квазичастиц через изолирующий барьер между сверхпроводниками. Мы увидим, что туннелирование является весьма чувствительным способом изучения энергетической щели и других свойств, влияющих на плотность состояний квазичастиц.

### § 3.2. Микроволновой скин-эффект в нормальном металле

Предположим, что на поверхность металла падает микроволновое излучение (фиг. 48). Для определенности будем рассматривать случай, когда поверхность совпадает с плоскостью  $xu$ , а излучение падает перпендикулярно, т. е. волны распростра-



няются в направлении оси  $z$ . Наконец, ограничим наше рассмотрение случаем плоскополяризованного излучения и совместим ось  $x$  с вектором  $\mathbf{E}$ , т. е. положим  $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ . Распространение излучения в металле описывается уравнениями Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (3.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t. \quad (3.2)$$

Чтобы найти уравнение распространения для  $\mathbf{E}$ , нужно знать связь между  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{E}$ . Предположим пока, что эта связь выражается законом Ома

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (3.3)$$

Позже мы увидим, что закон Ома, справедливый для низких частот, не всегда выполняется для высоких частот. Если из этих трех уравнений исключить  $\mathbf{J}$  и магнитные векторы, то получим следующее уравнение для  $\mathbf{E}$ :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \sigma \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (3.4)$$

Здесь первый член в правой части связан с током проводимости  $\mathbf{J}$ , а второй — с током смещения  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ . Мы предположили, что  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  и  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , т. е. металл немагнитен — его проницаемость, как и в вакууме, равна  $\mu_0$ . Для волны с циклической частотой  $\omega$  два члена в правой части уравнения (3.4) относятся друг к другу как  $\sigma / \omega \epsilon$ , и для любого нормального металла в области микроволновых частот ( $\omega \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$ ) соблюдается условие  $\sigma \gg \omega \epsilon$ . Это означает, что можно пренебречь током смещения и использовать упрощенное уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \sigma \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (3.5)$$

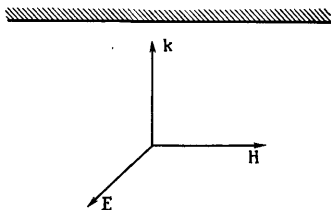
Чтобы найти решение уравнения (3.5), заметим, что при проникновении в металл излучение должно затухать, поскольку омический ток «забирает» энергию волны. Рассмотрим теперь волну с одной частотой  $\omega$  и будем искать решение в виде

$$E = E_0 \exp(ikz - i\omega t) \exp(-z/\delta), \quad (3.6)$$

т. е. в виде затухающей плоской волны. Подставляя (3.6) в (3.5), получаем

$$(ik - 1/\delta)^2 = -i\omega \sigma \mu_0. \quad (3.7)$$

Поскольку правая часть этого уравнения чисто мнимая, вещественная часть левого выражения должна быть равна нулю, так



Фиг. 48. Ориентация векторов при вычислении поверхностного импеданса.

что  $k = 1/\delta$ . Приравнивая мнимые части, находим

$$\delta = (2/\sigma\mu_0\omega)^{1/2}. \quad (3.8)$$

Измеряют обычно поверхностный импеданс  $Z_s$ , который равен отношению электрического поля на поверхности к текущему по поверхности полному току, отнесенному к единице длины, т. е.

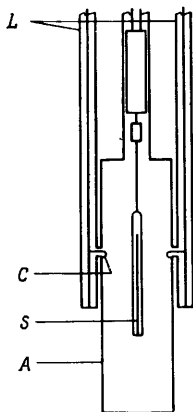
$$Z_s = \frac{E_0}{\int_0^\infty J dz}. \quad (3.9)$$

Поскольку  $J = \sigma E$ , а  $E$  определяется уравнением (3.6), получаем

$$Z_s = \frac{(1/\delta) - ik}{\sigma}. \quad (3.10)$$

Как известно,  $k = 1/\delta$ , так что реактивная и активная (омическая) части импеданса  $Z_s$  равны между собой.

На фиг. 49 изображена схема типичной экспериментальной установки для измерений поверхностного импеданса. Образец



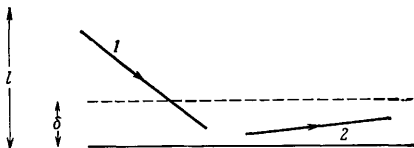
Фиг. 49. Резонатор для измерений поверхностного импеданса [3].

Образец  $S$  является внутренним проводником коаксиального резонатора ( $A$  — его внешние стенки). Микроволны поступают в резонатор и выходят из него с помощью линий передачи  $L$  и витков связи  $C$ .

помещается в полость микроволнового резонатора; реактивная часть импеданса образца смещает частоту, на которой возникает резонанс, а активная часть, которая вносит дополнительную диссипацию, упирает кривую резонансного поглощения в полости.

Выражение (3.8) для глубины скин-слоя  $\delta$  было получено в предположении, что при распространении волны в металле

сохраняется справедливость закона Ома. Заметим, однако, что  $\delta$  падает с уменьшением частоты  $\omega$ . Грубая численная оценка обычно указывает на то, что для чистого металла, находящегося при температурах жидкого гелия, глубина  $\delta$  на микроволновых частотах уже меньше средней длины свободного пробега электронов  $l$ .



Фиг. 50. Траектории электронов между соударениями при аномальном скин-эффекте.

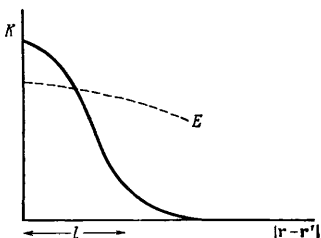
1 — типичная траектория; 2 — «эффективная» траектория.

Мы увидим, что если  $\delta$  меньше  $l$ , то  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{E}$  фактически уже не связаны законом Ома. Область частот, для которых  $\delta > l$ , называют областью *нормального скин-эффекта*, а область, где  $\delta < l$ , — областью *аномального скин-эффекта*. Обратимся теперь к последней области и посмотрим, каким образом нужно для этого случая модифицировать описанную выше теорию.

Если записать закон Ома в виде  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$ , то мы видим, что значение  $\mathbf{J}$  в точке  $\mathbf{r}$  определяется просто значением  $\mathbf{E}$  в той же точке. Однако в случае аномального скин-эффекта, когда  $\delta < l$ ,

происходит значительное изменение электрического поля вдоль пути электрона между его последовательными соударениями. На фиг. 50 изображена типичная траектория 1 между соударениями; вдоль этой траектории значение  $E$  изменяется от нуля в глубине металла до величины, приближающейся в пределах скин-слоя к значению  $E$  на поверхности. В этом случае  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  уже не определяется полем  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , а зависит от величины  $E$  в объеме с радиусом порядка  $l$  вокруг точки  $\mathbf{r}$ . Мы должны поэтому заметить закон Ома *нелокальным соотношением* типа

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \int K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (3.11)$$



Фиг. 51. Ядро  $K(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  с радиусом действия  $l$ .

Пунктирная линия характеризует изменение  $E$  при нормальном скин-эффекте в предельном случае  $\delta \gg l$ .

Здесь ядро  $K(\mathbf{r}' - \mathbf{r}')$  должно характеризоваться радиусом действия порядка  $l$ ; иначе говоря, значение  $K$  должно падать до нуля на расстояниях  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > l$  (фиг. 51).

Следует отметить, что соотношение (3.11) принимает локальную форму, когда радиус действия ядра  $K$  много меньше расстояния, на котором меняется поле  $E$ , т. е. в случае нормального скин-эффекта при  $l \ll \delta$ . В этом случае эффективное значение  $E$  одинаково во всех точках в пределах радиуса действия ядра  $K$  (см. фиг. 51). Можно поэтому, не внося существенной ошибки, заменить в интеграле  $E(\mathbf{r}')$  на  $E(\mathbf{r})$ . Вынося  $E$  за знак интеграла, находим

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma E(\mathbf{r}), \quad (3.12)$$

где

$$\sigma = \int K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (3.13)$$

Таким образом, мы получили локальное соотношение. Адекватный теоретический анализ аномального скин-эффекта впервые провели Рейтер и Зондхеймер [16]. Выведенное ими нелокальное соотношение между  $\mathbf{J}$  и  $E$  имеет вид

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{3\sigma}{4\pi l} \int \frac{\mathbf{R} \cdot E(\mathbf{r}')}{R^4} \exp(-R/l) d^3\mathbf{r}', \quad (3.14)$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и  $R = |\mathbf{R}|$ . Соотношение (3.14) имеет общую форму (3.11) и, как мы и предвидели, ядро действительно характеризуется радиусом действия  $l$ .

Как уже отмечалось, эксперименты по аномальному скин-эффекту проводятся при температурах жидкого гелия, поскольку в этом случае средняя длина свободного пробега ограничена рассеянием на примесях, в то время как при комнатной температуре эта длина, определяемая рассеянием на фононах, значительно меньше. Для хорошо очищенного образца средняя длина свободного пробега при низких температурах может быть на три или четыре порядка величины больше, чем при комнатной температуре. Более подробное обсуждение аномального скин-эффекта можно найти, в частности, у Киттеля [10] и Пиппарда [15]. Мы же ограничимся замечанием, что электроны, проходящие путь типа 1 (см. фиг. 50), поглощают значительно меньше энергии микроволнового поля, чем электроны, движущиеся вдоль пути 2, более или менее параллельного поверхности. Пиппард назвал первую траекторию *неэффективной*, а вторую — *эффективной*. Следовательно, поверхностный импеданс зависит от характера движения электрона в определенном направлении, так что в монокристалле аномальный скин-эффект является средством изучения свойств ферми-поверхности. Более подробные данные приведены в работе Пиппарда [15].

### § 3.3. Уравнения Лондонов для сверхпроводимости

Перейдем теперь к формулировке теоретической схемы, в рамках которой можно описать эффект Мейсснера. Нужны две руководящие идеи. Прежде всего используем фундаментальное свойство сверхпроводимости, общее со сверхтекучестью в He II и заключающееся в том, что сверхпроводник можно описывать с помощью макроскопической волновой функции  $\psi$ . Это привело нас в гл. 2 к следующему выражению для плотности потока частиц в He II:

$$\mathbf{J}_p = -\frac{i\hbar}{2m_4} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = \frac{\hbar}{m_4} |\psi|^2 \nabla S, \quad (3.15)$$

где  $S$  — фаза волновой функции  $\psi$ . В сверхпроводнике «сверхток» — это электрический ток, нераздельно связанный, как мы видели, с магнитным полем. Нужно поэтому модифицировать выражение (3.15) с тем, чтобы учесть это обстоятельство. В результате получается соотношение между током  $\mathbf{J}$  и магнитным векторным потенциалом  $\mathbf{A}$ , известное как уравнение Лондонов. Отметим, однако, что связь (3.15) является локальным соотношением в том смысле, что ток  $\mathbf{J}_p$  в точке  $\mathbf{r}$  определяется значением  $\nabla S$  в той же точке  $\mathbf{r}$ . Поэтому и уравнение Лондонов также является локальным соотношением.

Вторая необходимая нам идея была выдвинута Пиппардом; она заключается в том, что локальная связь не адекватна действительности при описании чистого сверхпроводника. Подобно тому как закон Ома в случае аномального скин-эффекта нужно заменить нелокальным соотношением, так и уравнение Лондонов необходимо в случае чистого сверхпроводника заменить более общей нелокальной связью между током  $\mathbf{J}$  и потенциалом  $\mathbf{A}$ . Эта связь известна как уравнение Пиппарда. Как можно ожидать, в случае достаточно грязных сплавов радиус действия ядра в уравнении Пиппарда равен средней длине свободного пробега  $l$ . Это означает, что для сплавов уравнение Пиппарда иногда может быть упрощено — оно переходит в локальное уравнение Лондонов. В целом можно утверждать, что уравнение Лондонов справедливо для сплавов, а уравнение Пиппарда — для чистых сверхпроводников. Более точное определение соответствующих областей применимости обоих уравнений мы сможем дать в конце § 3.4.

Настоящий параграф посвящен уравнению Лондонов; при этом предполагается, что речь идет о сплавах. Более общее уравнение Пиппарда обсуждается в § 3.4.

Для учета того факта, что в сверхпроводнике течет ток заряженных частиц, выражение (3.15) можно изменить с помощью

обычной квантовомеханической подстановки

$$\nabla \rightarrow \nabla \pm \frac{2ie}{\hbar} \mathbf{A}. \quad (3.16)$$

Здесь знак «+» соответствует случаю, когда оператор  $\nabla$  действует на  $\psi^*$ , а знак «-» означает, что оператор  $\nabla$  действует на  $\psi$ . Далее,  $\mathbf{A}$  есть векторный потенциал любого магнитного поля  $\mathbf{B}$ , присутствующего, например, в поверхностном слое либо в смешанном состоянии. Магнитное поле  $\mathbf{B}$  определяется так, что

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (3.17)$$

В (3.16) входит заряд  $2e$ , поскольку носителями заряда являются пары электронов; использование в качестве заряда величины  $2e$  хорошо согласуется с данными экспериментов по квантованию магнитного потока (см. гл. 4). С помощью (3.16) получаем вместо (3.15) следующее выражение для тока:

$$\mathbf{J}_e = \frac{e\hbar}{m} |\psi|^2 \nabla S - \frac{2e^2}{m} |\psi|^2 \mathbf{A}. \quad (3.18)$$

Здесь мы перешли к плотности электрического тока  $\mathbf{J}_e = 2e\mathbf{J}_p$  и заменили  $m_4$  на массу куперовской пары  $2m$ .

Выражение (3.18) — наиболее общая форма уравнения Лондонов. Способ его использования зависит от того, с каким образцом мы имеем дело — с односвязным или многосвязным (т. е. имеющим отверстия). Дело в том, что в многосвязном

Фиг. 52. Сверхпроводящий образец с отверстием; контур  $C$  окружает отверстие.

образце фаза  $S$  не обязательно должна быть однозначной, в односвязном же образце без отверстий фаза  $S$  должна быть однозначной. Чтобы понять это, рассмотрим контур  $C$  вокруг отверстия в многосвязном образце (фиг. 52). Поскольку  $S$  представляет собой фазу функции  $\psi$ , мы можем, не изменяя  $\psi$ , увеличивать  $S$  в  $2\pi n$  раз, где  $n$  — целое число. Следовательно, при обходе один раз по контуру  $C$  фаза  $S$  не должна возвращаться к своему первоначальному значению; справедливо лишь следующее соотношение:

$$\oint_C \nabla S \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n. \quad (3.19)$$

Легко видеть (см. задачу 3.4), что при одном обходе отверстия значение  $n$  будет одним и тем же независимо от формы контура  $C$ , поэтому значение  $n$  характеризует отверстие. В § 4.1 мы увидим, что  $n$  есть число квантов  $\hbar/2e$  магнитного потока, захваченного

отверстием. С другой стороны, для односвязного образца (см. задачу 3.4)

$$\oint_C \nabla S \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.20)$$

и фаза  $S$  однозначна. Ситуации с многосвязной геометрией весьма важны при изучении сверхтекучести и сверхпроводимости, и мы много раз встретимся с ними в гл. 4 и 5, а пока ограничимся рассмотрением односвязного образца, для которого фаза  $S$  однозначна. В этом случае, как мы сейчас увидим, можно исключить из уравнения (3.18) член с  $\nabla S$ .

Исключение члена с  $\nabla S$  связано с калибровочным преобразованием. Если положить

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \nabla\chi, \quad (3.21)$$

$$S = S_1 + 2e\chi/\hbar, \quad (3.22)$$

где  $\chi$  — скалярная функция, то значения  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{J}$  не меняются. Поскольку измеряемыми величинами являются  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{J}$ , представляется допустимым, используя указанное преобразование, перейти от данных  $\mathbf{A}$  и  $S$  к таким  $\mathbf{A}_1$  и  $S_1$ , которые могут оказаться более удобными. В частности, для односвязного сверхпроводника можно выбрать такую калибровочную функцию  $\chi$ , чтобы фаза  $S_1$  обратиться в нуль. Для этого нужно положить  $\chi = \hbar S/2e$ , где  $S$  — исходная фаза функции  $\psi$ . При таком выборе уравнение (3.18) принимает вид

$$\mathbf{J}_e = -\frac{2e^2}{m} \|\psi\|^2 \mathbf{A}_1, \quad (3.23)$$

т. е. становится обычным уравнением Лондонов. С другой стороны, в случае многосвязного образца использование калибровочной функции  $\chi = \hbar S/2e$  привело бы к неоднозначному векторному потенциалу  $\mathbf{A}_1$ , так что здесь удобнее оставить фазу  $S$  в явной форме.

Теперь мы должны убедиться в том, что уравнение (3.23) действительно описывает вытеснение потока из односвязного сверхпроводника. Взяв ротор от этого уравнения, находим

$$\mathbf{B} + \frac{m}{2e^2 n_C} \text{rot } \mathbf{J}_e = 0, \quad (3.24)$$

где  $n_C = |\psi|^2$  — плотность куперовских пар. Чтобы убедиться в том, что уравнение (3.24) описывает вытеснение магнитного потока, исключим из этого уравнения  $\text{rot } \mathbf{J}$  с помощью уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e. \quad (3.25)$$

При этом получаем

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{B}/\lambda_L^2, \quad (3.26)$$

где

$$\lambda_L^2 = m/2e^2\mu_0 n_s. \quad (3.27)$$

Для плоской поверхности в параллельном ей поле решение имеет вид

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp(-x/\lambda_L), \quad (3.28)$$

где  $\mathbf{B}_0$  — значение  $\mathbf{B}$  на поверхности, а  $x$  — расстояние от поверхности в глубину образца. Таким образом, мы получаем закон проникновения, сформулированный в § 1.2: индукция  $\mathbf{B}$  внутри сверхпроводника равна нулю и затухает от ее значения на поверхности на длине, равной  $\lambda_L$ , играющей здесь роль глубины проникновения.

Решающее предположение, которое мы сделали при выводе уравнения Лондонов, а следовательно, и при объяснении эффекта Мейсснера, заключалось в том, что сверхпроводник характеризуется макроскопической волновой функцией. Именно такая цепь рассуждений привела Лондонов к постулированному ими уравнению.

Уравнение (3.23) описывает макроскопический квантово-механический ток, а эффект Мейсснера как раз и состоит в вытеснении магнитного потока квантовым током.

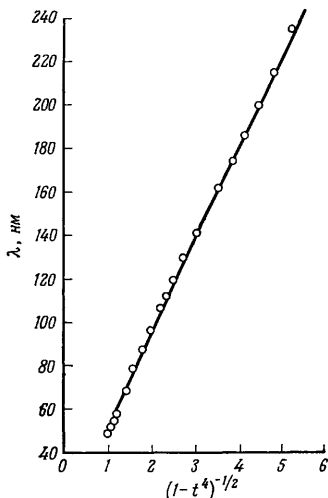
Выражение (3.27) для глубины проникновения можно записать в ином виде, используя плотность сверхпроводящих электронов  $n_s = 2n_c$ ; тогда получим следующее выражение:

$$\lambda_L^2 = m/e^2\mu_0 n_s, \quad (3.29)$$

которое связывает температурную зависимость  $\lambda_L$  с температурной зависимостью  $n_s$ . Согласно теории Гортера — Казимира,  $n_s \sim 1 - t^4$ , что приводит к зависимости вида

$\lambda \sim (1 - t^4)^{-1/2}$  (см. § 1.2). Эта зависимость прекрасно описывает в первом приближении экспериментальные результаты (фиг. 53).

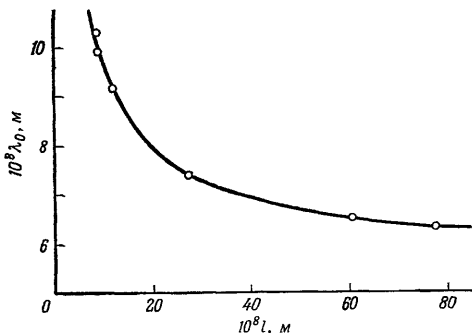
Для измерения глубины проникновения используются в основном две экспериментальные методики. Во-первых, существует индукционный метод, о котором мы упоминали в § 1.2. Во-вто-



Фиг. 53. Глубина проникновения в Pb [4].



рых, глубину проникновения можно получить из измерений микроволнового поверхностного импеданса. Самое простое представление о микроволновом импедансе сверхпроводника можно составить, считая, что в течение цикла переменного поля магнитный поток то входит в область, ограниченную глубиной проникновения, то выходит из нее, вследствие чего импеданс является чисто индуктивным с реактивной глубиной скин-слоя, равной глубине



Фиг. 54. Зависимость глубины проникновения  $\lambda_0$  (при  $T = 0$ ) от средней длины свободного пробега для Sn с примесью In [14].

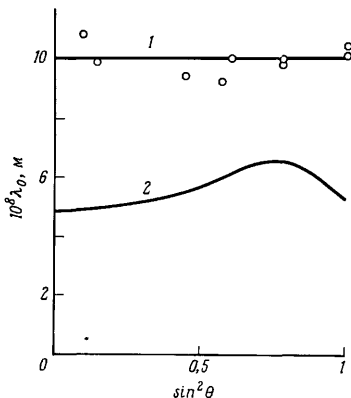
проникновения  $\lambda$ . Такое представление в основном правильно, но необходимо внести две небольшие поправки: на микроволновых частотах квазичастицы, или нормальная компонента жидкости, могут ускоряться, так что возникает некоторое сопротивление; кроме того, реактивная глубина скин-слоя  $\delta_1$  может примерно на 10% отличаться от значения  $\lambda$  при нулевой частоте. Метод поверхностного импеданса очень подробно обсуждался Вальдрамом [18]; в частности, для получения  $\lambda$  из  $\delta_1$ , а также значений поверхностного сопротивления по целой области частот, Вальдрам воспользовался соотношением Крамерса — Кронига.

В § 1.2 мы упоминали также, что в сплавах  $\lambda$  увеличивается с ростом примесей. Пример такой зависимости приведен на фиг. 54. Такое увеличение  $\lambda$  с уменьшением средней длины свободного пробега  $l$  означает, что с уменьшением  $l$  должно уменьшаться и значение плотности  $n_s$ , входящей в (3.29). С точки зрения микроскопической теории это можно понять следующим образом. Чтобы воспрепятствовать проникновению магнитного потока в глубь образца, должен возникать экранирующий ток сверхпроводящих электронов, которые все должны обладать одним и тем же импульсом  $p$ . Это не приводит ни к каким последствиям в случае чистых

материалов, где электроны конденсируются в состояние с определенным импульсом. В сплаве, однако, происходит конденсация в состояния  $\phi_n$ , не отвечающие определенному значению импульса (см. приложение). Поэтому доля конденсата, вносящего вклад в экранирующий ток, падает с уменьшением  $l$ . Такая ситуация несколько напоминает ситуацию в гелии II, где межчастичные взаимодействия приводят к «истощению» конденсата, хотя в сверхпроводнике конденсат не «истощается», а становится менее эффективным.

### § 3.4. Уравнение Пипшарда

Уравнение Лондонов, которое мы обсудили в предыдущем параграфе, применялось для описания электродинамики сверхпроводников вплоть до 1950 г. В это время Пипшард начал серию экспериментов по измерению микроволнового поверхностного импеданса сверхпроводников. Как мы уже упоминали, самый важный



Фиг. 55. Анизотропия глубины проникновения при  $T = 0$  [14].

1 — «грязный» образец Sn + 3% In; 2 — чистое олово;  $\theta$  — угол между осью  $c$  кристалла и сверхпроводящим током, протекающим в области проникновения.

его результат состоял в том, что для чистых сверхпроводников уравнение Лондонов нужно заменить нелокальным уравнением.

Вероятно, самое простое доказательство неадекватности уравнения Лондонов было получено Пипшардом при измерении анизотропии глубины проникновения в чистом олове. Сверхпроводящее олово обладает тетрагональной структурой, т. е. его элементарная

ячейка имеет форму параллелепипеда, две оси которого ( $a$ -оси) равны между собой, а одна ( $c$ -ось) имеет другую длину. На фиг. 55 изображена глубина проникновения как функция угла для чистого и грязного образцов. Существенно, что в случае чистого образца  $\lambda$  зависит от угла, причем эта зависимость несимметрична относительно оси  $c$ . Для грязного образца угловой зависимости  $\lambda$  не наблюдается. В рамках локальной теории некоторую анизотропию можно учесть, заменяя  $\lambda L^2$  на тензор второго ранга; тогда уравнение (3.25) принимает вид

$$\nabla^2 B_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} B_j. \quad (3.30)$$

Однако тензор  $T_{ij}$  должен быть симметричен относительно оси  $c$  (см., например, книгу Ная [12]) и вычисленная с помощью уравнения (3.30) глубина проникновения также симметрична относительно оси  $c$ . Ясно поэтому, что анизотропию  $\lambda$ , которая обнаруживается у чистого образца на фиг. 55, таким образом объяснить нельзя.

Анизотропия  $\lambda$  сама по себе достаточно серьезная причина для пересмотра локального уравнения типа уравнения Лондонов. В своих рассуждениях Пиппард пошел дальше и предположил, что для получения отвечающей действительности поверхностной энергии в сверхпроводнике должна существовать длина когерентности  $\xi$  (корреляционная длина). В гл. 4 мы рассмотрим поверхностную энергию на границе между нормальной и сверхпроводящей фазами. Будет показано, что при резком исчезновении сверхпроводящей фазы энергия на поверхности раздела фаз отрицательна и имеет величину порядка  $\mu_0 H_{cb}^2 \lambda / 2$ . Фактически же в чистом сверхпроводнике поверхностная энергия положительна, а это возможно только в том случае, если граница сверхпроводящей фазы «размазана» на длине  $\xi$ . Тогда поверхностная энергия равна  $\mu_0 H_{cb}^2 (\xi - \lambda) / 2$  и положительна при  $\xi > \lambda$ .

Пиппард предположил, что с этой же длиной должны быть связаны и электродинамические свойства, т. е. плотность тока  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  должна определяться значениями  $\mathbf{A}$  в области радиусом  $\xi$  вокруг точки  $\mathbf{r}$ . Ниже мы покажем, что, вообще говоря, длину когерентности при электромагнитном отклике следует отличать от длины когерентности для поверхностной энергии, поскольку они не всегда одинаковы. Пока же нам просто важно усвоить, что отклик  $\mathbf{J}$  на  $\mathbf{A}$  должен быть нелокальным и соответствующее ядро должно иметь некоторый радиус действия  $\xi$ .

Вместо уравнения Лондонов Пиппард предложил следующее соотношение:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\frac{3ne^2}{4\pi\xi_0 m} \int \frac{\mathbf{R} \{ \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}') \}}{R^4} \exp(-R/\xi_p) d^3\mathbf{r}'. \quad (3.31)$$

Здесь  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и  $R = |\mathbf{R}|$ , а длина когерентности  $\xi_R$  определяется выражением

$$\frac{1}{\xi_R} = \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{l}, \quad (3.32)$$

где  $\xi_0$  — константа для чистого материала; в частности, для чистого материала  $\xi_R = \xi_0$ , если же  $l \gg \xi_0$ , то  $\xi_R = l$ . Форма соотношения (3.31) основана, конечно, на аналогии с соотношением (3.14) Рейтера — Зондхеймера для аномального скин-эффекта; однако позже в микроскопической теории было получено соотношение, по существу идентичное уравнению Пиппарда. Имеется, однако, одна существенная разница между уравнением Пиппарда и уравнением Рейтера — Зондхеймера. В обоих случаях для сплавов ядро уравнения имеет радиус действия, равный  $l$ , но в уравнении Пиппарда эта длина в случае чистых сверхпроводников конечна и равна  $\xi_0$ . Согласно микроскопической теории:

$$\xi_0 = 0,18 \hbar v_F / k_B T_c, \quad (3.33)$$

где  $v_F$  — скорость электронов на поверхности Ферми. Такой вид выражения для  $\xi_0$  не может вызвать удивления. Действительно,  $k_B T_c$  есть фундаментальная энергия, характеризующая сверхпроводящее состояние, и, следовательно, вполне естественно появление интервала времени, равного  $\hbar / k_B T_c$ .

Теперь мы можем установить, в каких случаях справедливо уравнение Лондонов, а в каких нужно прибегнуть к уравнению Пиппарда. Как видно из фиг. 51, уравнение (3.31) переходит в локальное соотношение между  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{A}$ , когда длина  $\xi_R$  мала по сравнению с расстоянием, на котором меняется  $\mathbf{A}$ , т. е. с расстоянием  $\lambda$ . Таким образом, уравнение Лондонов справедливо, когда

$$\lambda(T) \gg \xi_R; \quad (3.34)$$

здесь мы ввели аргумент  $T$ , чтобы подчеркнуть, что  $\lambda$  в отличие от  $\xi_R$  зависит от температуры. Поскольку  $\lambda \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow T_c$ , даже в случае чистых сверхпроводников вблизи  $T_c$  существует лондоновский температурный интервал. Однако более важный результат заключается в том, что при уменьшении  $l$  уменьшается и  $\xi_R$ , а  $\lambda(T)$  увеличивается, так что в случае достаточно грязного сплава уравнение (3.34) справедливо для всех температур. В пределе  $l \ll \xi_0$  получаем  $\xi_R = l$ ; вынося  $\mathbf{A}$  за знак интеграла, имеем

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}) = -\frac{ne^2}{m} \frac{l}{\xi_0} \mathbf{A}(\mathbf{r}); \quad (3.35)$$

это соотношение правильно описывает увеличение  $\lambda$  с уменьшением  $l$ .

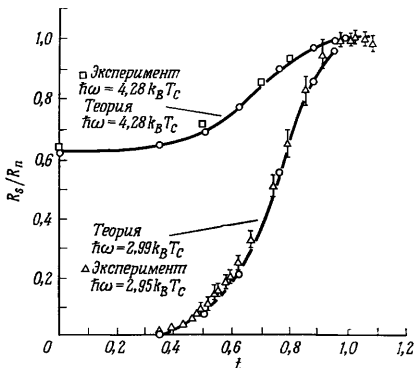
### § 3.5. Сверхпроводники в микроволновом и инфракрасном полях

В двух предыдущих параграфах мы рассматривали свойства сверхпроводника в постоянном магнитном поле и, в частности, вытеснение магнитного потока незатухающим квантовым током. Теперь перейдем к поведению сверхпроводников в переменных полях, т. е. к их отклику на микроволновое и инфракрасное излучение. В противоположность постоянному магнитному полю переменное поле вызывает диссипативные процессы. Эксперименты, которые мы обсудим, заключаются в измерениях поглощения как функции частоты и температуры.

Механизм поглощения излучения с частотой  $\omega$  при температуре  $T$  зависит от отношения  $\hbar\omega/2\Delta(T)$ . При  $\hbar\omega < 2\Delta(T)$  энергия может поглощаться в результате ускорения возбужденных тепловым образом квазичастиц, т. е. нормальной компонентой жидкости. Этот механизм мы обсуждали в конце § 3.3 и установили, что он вносит небольшую активную составляющую в поверхностный импеданс. При  $\hbar\omega > 2\Delta(T)$  нормальная компонента также поглощает энергию. Кроме того, фотон с энергией, большей  $2\Delta(T)$ , может разрушить куперовскую пару с образованием двух квазичастиц. Этот дополнительный механизм приводит к сильному увеличению поглощения при  $\omega > 2\Delta(T)/\hbar$ .

Пороговое значение частоты  $\omega_g = 2\Delta(T)/\hbar$ , при которой начинается образование квазичастиц, зависит, конечно, от температуры. При абсолютном нуле  $\omega_g = 3,5 k_B T_c/\hbar$ , так что для критической температуры в несколько кельвин порог лежит в далекой инфракрасной области. При увеличении  $T$  щель  $\Delta$  уменьшается, приближаясь к нулю при  $T \rightarrow T_c$  (см. фиг. 25). Таким образом, с увеличением  $T$  частота  $\omega_g$  уменьшается, переходя в конце концов в микроволновую область. Такое поведение иллюстрируется фиг. 56, на которой изображена зависимость микроволнового поверхностного сопротивления цинка от температуры для двух различных частот. На более высокой частоте  $\hbar\omega > 2\Delta(T=0)$ , следовательно, поглощение имеет место даже при  $T=0$ . На более низкой частоте  $\hbar\omega < 2\Delta(T=0)$  и при  $T=0$  поглощения нет. С ростом  $T$  растет и поглощение на более низкой частоте, сначала медленно, когда оно обусловлено лишь возбужденными квазичастицами, затем, после перехода порога  $\hbar\omega = 2\Delta(T)$ , рост становится более быстрым. На обеих частотах поверхностное сопротивление при  $T = T_c$  достигает, конечно, своего значения для нормального состояния. Отметим в заключение, что последние наиболее общие, основанные на микротехории расчеты, выполненные недавно Вонгом [49], очень хорошо согласуются с экспериментальными результатами (см. фиг. 56).

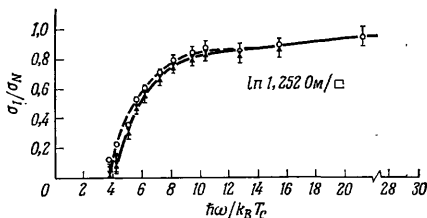
Типичная кривая инфракрасного поглощения, изображенная на фиг. 57, обнаруживает ожидаемое резкое увеличение поглощения при  $\omega_g = 2\Delta/\hbar$ . Соответствующие эксперименты весьма слож-



Фиг. 56. Микроволновое поверхностное сопротивление  $R_s$  для Zn на двух частотах ( $R_n$  — значение для нормального состояния) [20].

Теоретические кривые построены на основе микроскопической теории по данным работы [11].

ны, поскольку пороговая частота расположена обычно в далекой инфракрасной области. Однако с исторической точки зрения изме-



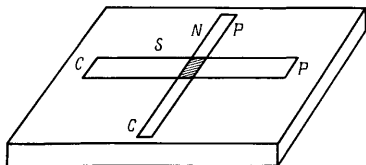
Фиг. 57. Зависимость инфракрасного поглощения In от частоты [8].

По оси ординат отложена вещественная (связанная с поглощением) часть проводимости, деленная на значение проводимости в нормальном состоянии.

рения инфракрасного поглощения играли важную роль, поскольку они дали первое непосредственное доказательство существования энергетической щели.

### § 3.6. Туннелирование электронов

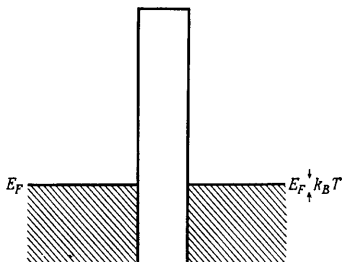
Мы видели, что как инфракрасное поглощение, так и до некоторой степени микроволновое поглощение определяются энергетической щелью. Гевер [5, 6] первым показал, что туннелирование



Фиг. 58. Типичный  $NS$ -контакт, напыленный на стеклянную подложку. Площадь контакта заштрихована.  $N$  — нормальный металл,  $S$  — сверхпроводящий металл,  $CC$  — токовые контакты,  $PP$  — потенциальные контакты.

через изоляционный слой от одного сверхпроводника в другой или в нормальный металл предоставляет возможность непосредственного измерения ширины энергетической щели.

На фиг. 58 изображена схема обычного эксперимента по изучению туннельного перехода нормальный металл — сверхпроводник ( $NS$ ). Сначала на подложку напыляется полоска нормального металла (обычно  $Al$  или  $Mg$ ), затем поверхность окисляется на воздухе или в кислороде для образования изоляционного слоя, после чего наносится сверхпроводящая пленка. Расположение токовых и потенциальных контактов изображено на схеме.



Фиг. 59. Диаграмма потенциальной энергии для  $NN$ -туннелирования.

Типичная высота барьера при температуре жидкого гелия равна примерно  $10^4 k_B T$ .

Рассмотрим сначала туннелирование между двумя нормальными металлами. На диаграмме потенциальной энергии (фиг. 59) видно, что изолятор создает барьер с высотой порядка  $10$  эВ, препятствующий прохождению электронов. Поскольку электроны удерживаются в области порядка  $k_B T$  от поверхности Ферми, они не могут преодолеть барьер. Однако, если между металлами создать разность потенциалов, через барьер в результате кванто-

во механического туннелирования потечет некоторый ток. Этот ток пропорционален напряжению (для не слишком больших напряжений). Туннелирование зависит от перекрытия в области барьера волновых функций электронов, находящихся по обе стороны барьера. Поскольку волновые функции в барьере затухают экспоненциально, туннельное сопротивление экспоненциально растет с толщиной барьера.

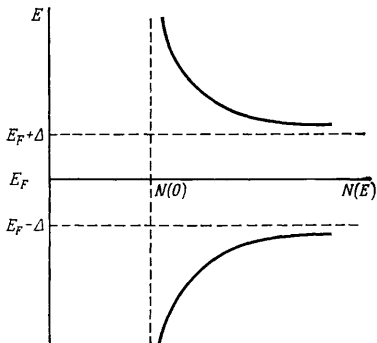
Туннелирование между нормальными металлами не дает существенной информации о электронных состояниях на поверхности Ферми. Вероятность туннелирования  $W$  пропорциональна плотности состояний на поверхности Ферми  $N(0)$  и средней скорости  $\bar{v}$ , направленной в сторону барьера. Эта скорость пропорциональна  $v_F$  — скорости на поверхности Ферми, так что туннельный ток пропорционален  $N(0)v_F$ . Однако, как известно из теории поверхностей Ферми (см. [15]), произведение  $N(0)v_F$  просто пропорционально полной площади поверхности Ферми. Поскольку ток, как и сопротивление барьера, также экспоненциально зависит от неизвестной (и практически не поддающейся измерению) толщины барьера, из туннельного сопротивления нельзя получить никаких сведений о поверхности Ферми.

В случае сверхпроводников ситуация кардинально меняется; фактически туннелирование — одна из наиболее успешных методик изучения сверхпроводимости. Прежде всего нужно различать два основных вида туннелирования. Первый тип туннелирования мы имеем, когда толщина изоляционного слоя между сверхпроводниками очень мала. Тогда волновые функции конденсата по обе стороны барьера будут перекрываться и через барьер может течь слабый сверхпроводящий ток. Этот эффект известен как туннелирование Джозефсона, который его открыл. Мы не будем сейчас останавливаться на этом эффекте подробнее, поскольку ему посвящена вся гл. 5, заметим лишь, что обычно при изучении туннелирования Джозефсона используют очень тонкий слой окиси, образующейся на поверхности олова. На подложку напыляется пленка олова, затем ее поверхность подвергается окислению, после чего наносится пленка второго сверхпроводника (см. фиг. 58). В результате образуется туннельный контакт, который может пропускать слабый сверхпроводящий ток. Толщину окисной пленки часто считают равной 1 нм.

Второй тип туннелирования, к которому мы теперь обратимся, это туннелирование квазичастиц через барьер. Напомним, что квазичастицы образуются при разрушении куперовских пар; выше мы рассматривали квазичастицы, возбужденные тепловым образом, как нормальную компоненту жидкости. Для изучения туннелирования квазичастиц нужны более толстые слои окиси, чем при исследовании туннелирования Джозефсона; обычно используется пленка окиси, образующаяся на поверхности свеж и пы-



ленного Al или Mg. Туннелирование квазичастиц можно изучать или между двумя сверхпроводниками ( $SS$ -контакт), или между сверхпроводником и нормальным металлом ( $SN$ -контакт), в то время как туннелирование Джозефсона возможно, конечно, только между двумя сверхпроводниками.



Фиг. 60. Плотность состояний  $N(E)$  согласно теории БКШ.

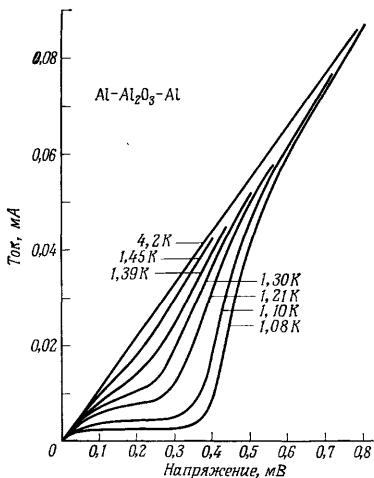
Вообще говоря, туннелирование квазичастиц определяется плотностью состояний в участвующих в этом процессе сверхпроводнике или сверхпроводниках. Поскольку для образования двух квазичастиц из куперовской пары нужна энергия, равная  $2\Delta$ , плотность квазичастичных состояний в сверхпроводнике равна нулю на расстояниях  $\Delta$  по обе стороны от поверхности Ферми. Согласно простейшей форме теории БКШ, плотность состояний  $N(E)$  равна

$$N(E) = 0 \quad \text{при } |E| < \Delta, \\ N(E) = \frac{N(0)}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} \quad \text{при } |E| > \Delta, \quad (3.36)$$

где энергия  $E$  измеряется от поверхности Ферми, а  $N(0)$  — плотность состояний на поверхности Ферми в нормальном металле. Плотность состояний  $N(E)$  изображена на фиг. 60; состояния, которые для нормального металла располагались на расстоянии  $\Delta$  от поверхности Ферми, здесь оказываются за пределами энергетической щели.

При такой радикальной модификации плотности состояний туннельные характеристики, естественно, сильно отличаются от туннельных характеристик в нормальном состоянии. На фиг. 61 изоб-

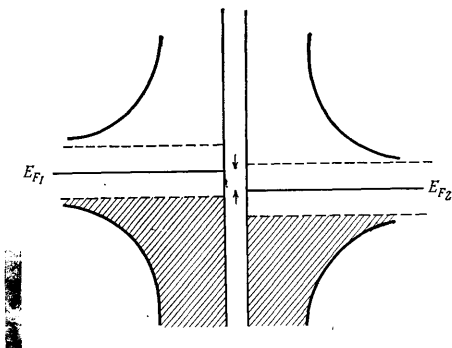
ражены такие характеристики при различных температурах для симметричного туннельного  $SS$ -контакта. При  $T = 0$  ток равен нулю (в идеальном случае) вплоть до напряжения  $V_0$ , определяемого формулой  $eV_0 = 2\Delta$ . Обычно  $V_0$  имеет значение порядка



Фиг. 61. Вольтамперные характеристики Al — Al-контакта при различных температурах [7].

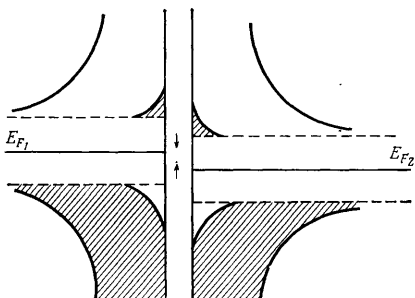
милливольт. Затем ток быстро растет, приближаясь в конце концов к омическому значению, соответствующему нормальному состоянию. При  $T > 0$  некоторый ток возникает даже при  $V < V_0$ , а при  $V = V_0$  наблюдается быстрое возрастание тока. Эти характеристики можно понять, рассматривая разность уровней по обе стороны барьера (фиг. 62). Напряжение  $V$ , приложенное к туннельному контакту, приводит к тому, что фермиевские уровни по обе стороны барьера смещаются относительно друг друга на  $eV$ . При  $T = 0$  все состояния ниже  $E_F$  (на фиг. 62 они заштрихованы) заполнены, а все состояния выше  $E_F$  свободны. Поэтому никакого тока нет до тех пор, пока  $V_0$  не станет равным  $2\Delta/e$ . После этого ток быстро растет, поскольку высокая плотность заполненных состояний располагается теперь против высокой плотности свободных состояний. При  $T > 0$  из-за теплового движения заполнен ряд уровней выше  $E_F + \Delta$ , а некоторые уровни

ниже  $E_F - \Delta$  опустошены (фиг. 63). Следовательно, какой-то ток течет даже при напряжении  $V < 2\Delta/e$ .



Фиг. 62. Диаграмма энергетических уровней для  $SS$ -туннелирования при  $T = 0$ .

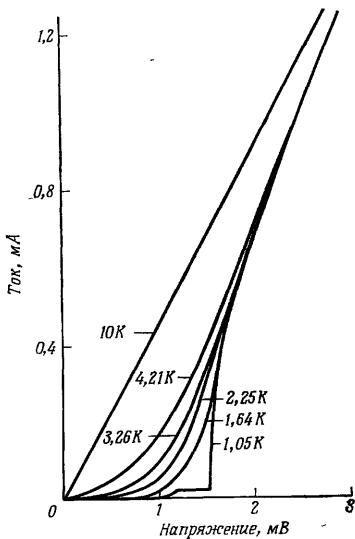
Аналогичным образом можно объяснить характеристики туннельного контакта  $Al - Pb$ , изображенные на фиг. 64. При высо-



Фиг. 63. Диаграмма энергетических уровней для  $SS$ -туннелирования при  $T > 0$ .

ких температурах (выше 1,2 К)  $Al$  находится в нормальном состоянии и имеет место  $SN$ -туннелирование; при более низкой температуре (1,05 К)  $Al$  становится сверхпроводником и возникает туннельная характеристика  $SS'$ -типа (два разных сверхпровод-

ника). Для туннельного  $SN$ -контакта при  $eV = \Delta$  ток резко возрастает, поскольку именно при этом условии заполненные состояния в сверхпроводнике располагаются против свободных состояний нормального металла. В туннельном  $SS'$ -контакте в принципе ток должен иметь максимум при  $eV = \Delta_1 - \Delta_2$  и минимум при



Фиг. 64. Вольтамперные характеристики контакта  $Al - Pb$  при различных температурах [7].

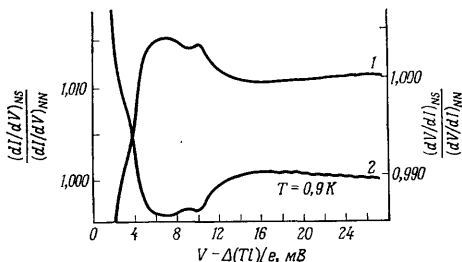
$eV = \Delta_1 + \Delta_2$ ; область между ними содержит часть с отрицательным дифференциальным сопротивлением, которое не фиксируется электрической схемой, использованной для получения результатов, изображенных на фиг. 64. Отметим, что фиг. 61 и 64 взяты из первых систематических исследований сверхпроводящего туннелирования (Гевер и Мегерле [7]).

Выражение для туннельного тока, охватывающее все рассмотренные выше случаи, имеет вид

$$I(V) = I_0 \int N_1(E + eV) N_2(E) \{f(E) - f(E + eV)\} dE \quad (3.37)$$

(см. Коен и др. [2]). Здесь  $N_1$  и  $N_2$  — плотности состояний по обе стороны барьера, а  $f$  — функция Ферми. Кривые на фиг. 62 и 63 можно рассматривать как иллюстрацию к уравнению (3.37).

Туннелирование широко использовалось (особенно Роуэллом и его коллегами) для изучения отклонений от простого выражения (3.36) для плотности состояний. Это выражение было получено



Фиг. 65. Зависимость относительного сопротивления  $dV/dI$  (кривая 1) и относительной проводимости  $dI/dV$  (кривая 2) для Mg — Tl-контакта от приложенного напряжения  $V$  [4].

из теории БКШ в ее простейшем варианте, в котором весьма сложное взаимодействие, обусловленное фононами, заменялось постоянной величиной. Если измерить зависимости не  $I$  от  $V$ , а  $dI/dV$  или  $dV/dI$  от  $V$ , то туннелирование становится очень чувствительным методом для изучения деталей формы реального фононного взаимодействия. Чтобы найти производную  $dV/dI$ , можно, например, наложить на постоянный ток  $I$  небольшой переменный ток, и с помощью фазочувствительной методики определять возникающее переменное напряжение. Вторая производная  $d^2V/dI^2$  измеряется по величине сигнала, возникающего на удвоенной частоте используемого переменного тока. Некоторое представление о кривых, получающихся при таких измерениях, можно составить из фиг. 65 и 66 (взятых из работы Кларка [1]); здесь изображены кривые для первой и второй производных в случае туннельных Mg — Tl-контактов. Все особенности кривых при таких измерениях можно интерпретировать на основе фононных характеристик соответствующих металлов.

В случае NS-контакта, в частности, при  $T \ll T_c$  выражение (3.37) приводит к простому результату для  $dI/dV$ . Возникающая производная  $f'(E + eV)$  имеет острый пик при  $E + eV = E_F$ . Поскольку плотность  $N_1(E)$  для нормального металла постоянна, получаем

$$dI/dV \sim N_2(E_F - eV). \quad (3.38)$$

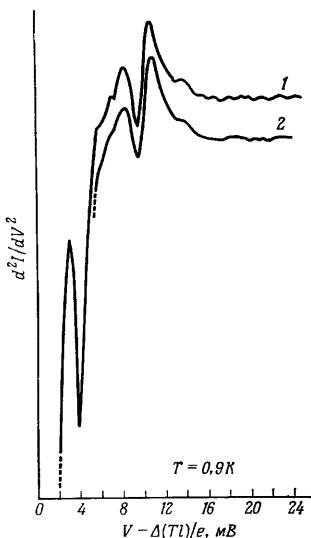
Таким образом, производная оказывается непосредственной мерой плотности состояний.

Скалапино и Мак-Миллан, используя теорию сверхпроводимости в формулировке Элиашберга, выяснили влияние на  $N(E)$

реального, а не упрощенного фононного взаимодействия. Наибольшие отклонения от теории БКШ наблюдаются у сверхпроводников с *сильной связью* (таких, как Pb, Tl и Hg), у которых отношение  $k_B T_c / \hbar \omega_D$  сравнительно велико. Форма  $N(E)$  определяется фононной плотностью состояний  $n_p(E)$ , причем форма  $n_p(E)$ , полученная при изучении туннелирования сверхпроводников, хорошо согласуется с результатами экспериментов по неупругому рассеянию нейтронов.

Исследования сверхпроводников с сильной связью с помощью туннелирования явились наиболее полной и подробной проверкой микро-теории. Все подробности как в отношении теории, так и в отношении эксперимента можно найти в статьях Скалапино, Роуэлла и Мак-Миллана в книге Паркса [13]. В книге Солимара [17] по-

дробно обсуждается и туннелирование квазичастиц, и туннелирование Джозефсона.



Фиг. 66. Зависимость  $d^2I/dV^2$  от  $V$  для Mg — Tl-контакта при удвоенной амплитуде переменного сигнала, равной 0,9 мВ (кривая 1) и 1,5 мВ (кривая 2) [1].

### ЗАДАЧИ

1. Выведите уравнение (3.4) из трех предыдущих.
2. Убедитесь, что неравенство  $\sigma \gg \omega \epsilon$  правильно по размерности, и, используя опубликованные значения, покажите, что это неравенство справедливо для Cu и Al при комнатной температуре (в обоих случаях положите  $\epsilon = \epsilon_0$ ).
3. Оцените нормальную глубину скин-слоя  $\delta$  для частоты  $\omega = 2\pi \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  (3-сантиметровое излучение) для образца Cu при гелиевой температуре

с отношением сопротивлений  $R_{300\text{ K}}/R_{4,2\text{ K}} = 10^4$ . Найдите также среднюю длину свободного пробега  $l$  при низких температурах и убедитесь, что  $\delta \ll l$ . (Удельное сопротивление меди при комнатной температуре равно  $1,72 \cdot 10^{-8}$  Ом·м; для перехода от удельного сопротивления к средней длине свободного пробега для Cu воспользуйтесь выражением  $\rho l = 1,36 \cdot 10^{-15}$  Ом·м<sup>2</sup>.)

3.4. Покажите, что соотношение

$$\oint_C \nabla S \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n$$

справедливо при одном и том же целом  $n$  для *любого* контура  $C$ , окружающего отверстие на фиг. 52. (Заметим, что два любых из этих контуров  $C_1$  и  $C_2$  можно непрерывно деформировать друг в друга.) Покажите таким же образом, что интеграл

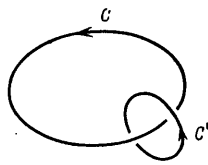
$$\oint_C \nabla S \cdot d\mathbf{l}$$

должен быть равен нулю для любого не окружающего отверстие контура  $C$  (непрерывно сжимайте контур до нуля).

3.5. Убедитесь, что при калибровочном преобразовании (3.21) и (3.22)  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{J}$  не меняются.

3.6. Выведите уравнение (3.26) и покажите, что выражение (3.28) является решением этого уравнения для плоской поверхности.

3.7. Рассмотрите проволочную петлю, несущую сверхпроводящий ток. Запишите уравнение Лондонов в интегральной форме

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = -\lambda_L^2 \oint_C \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1)$$


где контуром  $C$  является проволока, и напишите соответствующее уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C'} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2)$$

где  $C'$  — любой контур вокруг проволоки. Покажите, что в соответствии с этими уравнениями поле  $\mathbf{H}$  «генерирует» ток  $\mathbf{J}$  таким же образом, как  $\mathbf{J}$  всегда генерирует  $\mathbf{H}$ . Это показывает, что следствием уравнения Лондонов является существование незатухающего сверхпроводящего тока

3.8. Покажите, что соотношение (3.35) следует из уравнения (3.31) в локальном пределе  $[\lambda(T) \gg \xi_P]$ , когда  $\xi_P = l$ . Считайте, что оба вектора  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{A}$  направлены по оси  $z$ .

3.9. Отметьте на фиг. 56 температуру, при которой  $2\Delta(T) = 3,0 k_B T_c$

(используйте также фиг. 22), и покажите, что она совпадает с температурой, при которой начинается рост поглощения для  $\hbar\omega = 2,95 k_B T_c$ .

- 3.10. Постройте для туннельного  $SN$ -контакта диаграммы плотности состояний, аналогичные фиг. 62 и 63, и покажите, что при  $eV = \Delta$  ток резко возрастает.
- 3.11. Постройте диаграммы состояния для  $SS'$ -туннелирования. Покажите, в частности, что на кривой тока существует максимум при  $eV = \Delta_1 - \Delta_2$  и минимум при  $eV = \Delta_1 + \Delta_2$ .
- 3.12. Покажите, что при  $SS$ -туннелировании выражение (3.37) правильно отражает ситуацию, изображенную на фиг. 62 и 63.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Clark T. D., Journ. Phys., C 1, 732 (1968).
2. Cohen M. H., Falicov L. M., Phillips J. C., Phys. Rev. Lett., 8, 316 (1962).
3. Dheer P. N., Proc. Roy. Soc., A260, 333 (1961).
4. Gasparovic R. F., McLean W. L., Phys. Rev., B2, 2519 (1970).
5. Giaever I., Phys. Rev. Lett., 5, 147 (1960).
6. Giaever I., Phys. Rev. Lett., 5, 464 (1960).
7. Giaever I., Megerle K., Phys. Rev. 122, 1101 (1961).
8. Ginsberg D. M., Tinkham M., Phys. Rev., 118, 990 (1960).
9. Guyon E., Adv. Phys., 15, 417 (1966).
10. Kittel C., Introduction to Solid State Physics, Wiley, New York, 1968. (См. перевод: Ч. Куттель, Введение в физику твердого тела, Физматгиз, М., 1963.)
11. Miller P. B., Phys. Rev., 118, 928 (1960).
12. Nye J. F., Physical Properties of Crystals, Oxford Univ. Press, London, 1957. (См. перевод: Дж. Най, Физические свойства кристаллов, ИЛ. М., 1960.)
13. Parks R. D., Superconductivity, vol. 1 and 2, Dekker, New York, 1969.
14. Pippard A. B., Proc. Roy. Soc., A216, 547 (1953).
15. Pippard A. B., Repts. Progr. Phys. 23, 176 (1960).
16. Reuter G. E. H., Sondheimer E. H., Proc. Roy. Soc., A195, 336 (1948).
17. Solymar L., Superconductive Tunnelling and Applications, Chapman and Hall, London, 1972. (См. перевод: Л. Солимар, Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение, изд-во «Мир», М., 1974.)
18. Waldram J. R., Adv. Phys., 13, 1 (1964).
19. Wong M. K. F., Journ. Math. Phys., 8, 1443 (1967).
20. Zemon S. A., Boorse H. A., Phys. Rev., 146, 309 (1966).



## ВИХРЕВЫЕ СОСТОЯНИЯ

## § 4.1. Квантование циркуляции

В гл. 2 и 3 мы уже видели, что описание сверхтекучей жидкости с помощью одной волновой функции  $|\psi| \exp(iS)$  непосредственно приводит к следующим выражениям для сверхтоков:

$$\mathbf{j}_s = \hbar |\psi|^2 \nabla S \quad (\text{He II}), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{J}_e = \frac{e\hbar}{m} |\psi|^2 \nabla S - \frac{2e^2}{m} |\psi|^2 \mathbf{A} \quad (\text{сверхпроводник}). \quad (4.2)$$

Здесь для He II мы пользуемся плотностью потока массы  $\mathbf{j}_s$ , а для сверхпроводника — плотностью электрического тока  $\mathbf{J}_e$ . Выражение (4.2) подразумевает нормировку  $|\psi|^2 = n_s/2$ , где  $n_s/2$  — плотность куперовских пар. Выражения (4.1) и (4.2) справедливы при условии, что скорость потока достаточно мала, чтобы сверхплотность, т. е. плотность сверхтекучей или сверхпроводящей компоненты жидкости можно было считать неизменной. Кроме того, выражение (4.2) справедливо только для сверхпроводников лондоновского типа, но не для сверхпроводников пипардовского типа.

В гл. 3 мы ограничились рассмотрением односвязных сверхпроводников и показали, что в (4.2) с помощью калибровочного преобразования можно исключить член, содержащий  $\nabla S$ . В то же время мы отметили, что в случае многосвязного образца, т. е. образца с отверстиями, таким преобразованием пользоваться нельзя. Теперь рассмотрим многосвязные области как для He II, так и для сверхпроводников.

Пусть He II заполняет кольцевую область, например пространство между двумя концентрическими цилиндрами (фиг. 67). Предположим, что температура равна абсолютному нулю, так что He II состоит только из сверхтекучей компоненты. Для нахождения картины течения рассмотрим величину, известную как циркуляция:

$$\kappa = \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.3)$$

где интеграл берется по любому контуру, полностью находящемуся в жидкости. В гл. 2 уже отмечалось, что с помощью (4.1) сверхтекучая скорость может быть записана в виде

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m_4} \nabla S. \quad (4.4)$$

Следовательно, циркуляцию можно выразить через фазу волновой функции  $S$ :

$$\kappa = \frac{\hbar}{m_4} \oint \nabla S \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.5)$$

Для окружности  $L_1$  (см. фиг. 67) циркуляция равна

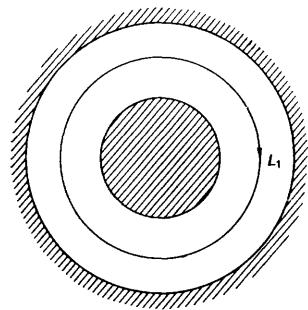
$$\kappa = \frac{\hbar}{m_4} (\Delta S)_{L_1}. \quad (4.6)$$

Поскольку волновая функция сверхтекучей жидкости однозначна, обход по замкнутому контуру ее не изменит; следовательно, значение фазы может быть только

кратным  $2\pi$  или равным нулю. Таким образом, из уравнения (4.6) мы видим, что циркуляция квантуется, принимая значения

$$\kappa = n \frac{\hbar}{m_4}, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

По понятной причине  $\hbar/m_4$  называют квантом циркуляции; он равен  $9,98 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с. Отметим, что выражение (4.7) справедливо для любого контура, который можно непрерывно деформировать в  $L_1$ , не выходя за границы жидкости, т. е. для любого контура, отвечающего одному обходу внутреннего цилиндра.



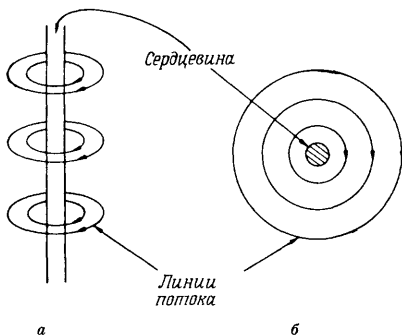
Фиг. 67. Сверхтекучая жидкость в кольцевой (многосвянной области); контур  $L_1$  полностью находится в сверхтекучей жидкости.

Кольцевая область на фиг. 67 представляет собой пример многосвянной области, поскольку в этом случае можно считать, что в сверхтекучей жидкости имеется «отверстие». Наличие таких отверстий, т. е. полностью окруженных сверхтекучей жидкостью областей, куда не может проникать жидкость, обеспечивает наличие контуров типа  $L_1$  на фиг. 67. Как мы уже видели, это является достаточным условием для квантования циркуляции. Теперь остановимся на двух различных ситуациях, когда возникает такое квантование.

Во-первых, отверстия в гелии могут создаваться твердыми поверхностями; чаще всего сверхтекучую жидкость помещают в кольцеобразную область (см., например, фиг. 105). Устройство такого типа наиболее удобно для изучения незатухающих потоков в He II.

Во-вторых, при вращении He II в сверхтекучей жидкости могут спонтанно возникнуть цилиндрические отверстия; тогда вокруг

этих цилиндров возникают устойчивые потоки. В этом случае мы фактически наблюдаем возникновение вихревых линий (фиг. 68). Вихри возникают и в обыкновенных жидкостях, поэтому не удивительно, что они могут появляться и в сверхтекучей жидкости.



Фиг. 68. *a* — вихревая нить в He II; *b* — поперечное сечение вихревой нити.

Более того, как мы покажем, вихри в He II образуются очень легко, и они очень важны для понимания многих свойств He II.

Теперь перейдем к свойствам многосвязных сверхпроводников в постоянном магнитном поле. Как и в случае He II, здесь удобно определить *сверхтекучую скорость*  $v_s$  следующим образом:

$$\mathbf{J}_e = 2e |\psi|^2 \mathbf{v}_s. \quad (4.8)$$

Теперь перепишем выражение (4.2) в виде

$$\hbar \nabla S = 2m \mathbf{v}_s + 2e \mathbf{A} \quad (4.9)$$

и проинтегрируем его по контуру  $L_1$ , окружающему отверстию в сверхпроводнике (см. фиг. 67). В левой части уравнения получаем

$$\oint_{L_1} \hbar \nabla S \cdot d\mathbf{l} \quad \text{или} \quad \hbar (\Delta S)_{L_1},$$

где  $(\Delta S)_{L_1}$  — изменение фазы за один оборот по пути  $L_1$ . Воспользуемся опять требованием об однозначности волновой функции, в силу чего изменение фазы должно быть равно  $2\pi n$ , где  $n$  — целое число, причем  $n$  принимает одно и то же значение и для  $L_1$ , и для любого другого контура, окружающего отверстие. В результате

получаем основное условие квантования

$$\oint_{L_1} 2m\mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} + \oint_{L_1} 2e\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = n\hbar, \quad (4.10)$$

где  $n$  характеризует отверстие, расположенное внутри контура  $L_1$ .

Обычно соотношение (4.10) можно упростить. Если образец представляет собой массивный сверхпроводник I рода, контур  $L_1$  можно провести на расстоянии от отверстия, превышающем величину  $\lambda$ . Тогда в любой точке контура  $L_1$  магнитное поле отсутствует и экранирующий ток  $\mathbf{J}_s$  равен нулю. Это означает, что скорость  $\mathbf{v}_s$  на контуре  $L_1$  равна нулю, и мы получаем

$$\oint_{L_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = n \frac{\hbar}{2e}. \quad (4.11)$$

Преобразуем этот линейный интеграл с помощью теоремы Стокса в поверхностный интеграл

$$\oint_{L_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Sigma}, \quad (4.12)$$

где поверхность  $\Sigma$  опирается на контур  $L_1$ . Последний интеграл в (4.12) равен полному магнитному потоку  $\Phi$  через отверстие и окружающую его область сверхпроводника, куда проникает поле. Окончательно получаем

$$\Phi = n\phi_0, \quad (4.13)$$

где

$$\phi_0 = \hbar/2e. \quad (4.14)$$

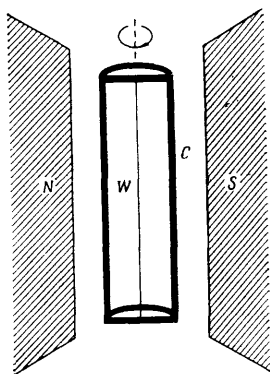
Значение кванта потока  $\phi_0$  составляет  $2,07 \cdot 10^{-15} \cdot \text{В} \cdot \text{с} = 2,07 \times 10^{-5} \text{ Вб} = 2,07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$ .

В сверхпроводниках, так же как в He II, отверстия (вокруг которых возникает квантование) представляют собой либо физические границы, либо сердцевинки квантованных вихревых линий. Вихревые линии наблюдались не во всех сверхпроводниках; как мы уже отмечали в § 1.2, смешанное состояние сверхпроводников II рода является вихревым состоянием, в то время как в сверхпроводниках I рода вихри никогда не возникают. Между вихрями в He II и в сверхпроводниках много общего, что станет ясным в процессе дальнейшего изложения. В обоих случаях вихри образованы потоками частиц, циркулирующих вокруг цилиндрической сердцевинки. С другой стороны, имеются существенные различия, наиболее очевидное из которых заключается в том, что вихри в сверхпроводниках связаны с приложенным магнитным полем, в то время как на вихри в He II магнитное поле не оказывает никакого влияния.

Вайнен [63] первый экспериментально продемонстрировал квантование циркуляции в He II. В его эксперименте вдоль оси цилиндрического сосуда натягивалась тонкая проволока (фиг. 69). Таким образом, заполняющий сосуд He II занимал многосвязную область. В методе Вайнена было использовано то обстоятельство, что твердый цилиндр, вокруг которого циркулирует жидкость, при его движении в жидкости подвергается воздействию сил. Чтобы просто объяснить, как возникает эта сила, воспользуемся системой отсчета, относительно которой цилиндр покоится, а идеальная жидкость обтекает цилиндр, причем имеется циркуляция (фиг. 70). В точке *A* циркуляция «противится» потоку, а в точке *B* оба потока усиливают друг друга. Применяя теорему Бернулли, видим, что давление жидкости в точке *B* меньше, чем в точке *A*. Учитывая другие вовлеченные в циркуляцию точки, получаем, что на цилиндр в направлении *AB* действует суммарная сила, известная как сила Магнуса. Если рассматривать сверхтекучую жидкость, то действующая на проволоку сила Магнуса в эксперименте Вайнена равна

$$f_M = \rho_s \kappa \times V, \quad (4.15)$$

где *V* — скорость проволоки относительно сверхтекучей жидкости за пределами области, в которой существует циркуляция, а  $\kappa$  — вектор, характеризующий величину циркуляции. Таким образом, сила  $f_M$  перпендикулярна проволоке и направлению ее движения. Более подробное рассмотрение силы Магнуса можно найти в учебниках гидродинамики (см., например, Резерфорд [52]). Прибор помещали в магнитное поле (см. фиг. 69) таким образом, чтобы при прохождении переменного электрического тока по проволоке в ней могли возникать поперечные колебания. Пока окружающая проволоку жидкость остается неподвижной, нормальными «модами» колебаний проволоки будут две волны с одинаковой частотой, плоско поляризованные перпендикулярно друг другу. Когда же вокруг проволоки возникает устойчивая циркуляция сверхтекучей жидкости, на проволоку действует сила Магнуса, приводящая к прецессии плоскостей обоих колебаний. В резуль-

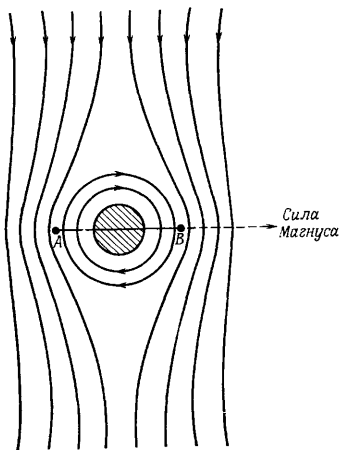


Фиг. 69. Прибор Вайнена для измерения циркуляции в He II [63]. *C* — цилиндрический сосуд, *W* — вибрирующая проволока, *N*, *S* — полюса магнита.

тате можно считать, что нормальные моды проволоки обладают круговой поляризацией с вращением в противоположных направлениях и с частотами, отличающимися на  $\Delta\nu = \rho_s \kappa / 2\pi W$ , где  $W$  — сумма массы, приходящейся на единицу длины проволоки, и половины массы жидкости, вытесненной на этой же длине.

Разность  $\Delta\nu$  проявляется как частота биений напряжения, индуцированного в проволоке, что дает нам непосредственный метод измерения циркуляции  $\kappa$ .

Циркуляция сверхтекучей жидкости создавалась следующим образом. Сосуд с He I вращался с постоянной угловой скоростью. Затем гелий медленно охлаждался ниже  $\lambda$ -точки примерно до 1,3 К. Сначала при наблюдениях не было замечено никаких признаков квантованной циркуляции, хотя значения были рассеяны вокруг  $h/m_4$ . Вайнен объяснял это тем, что в подавляющем большинстве случаев сверхтекучая циркуляция возникает лишь вокруг части проволоки. Это допустимо при условии, что вихревая линия в некоторой точке отходит от проволоки (фиг. 71). Величина силы Магнуса в такой точке меняется скачком, в результате чего измеряемая циркуляция представляет собой «среднее значение» для всей проволоки. Точка отхода вихревой линии от проволоки должна быть весьма подвижной. Это дает основание предполагать, что состояния с неквантуемыми значениями циркуляции неустойчивы. Наоборот, состояния, для которых вся вихревая линия совпадает с проволокой, должны быть сравнительно устойчивыми. Для проверки этой гипотезы проволоку заставляли колебаться с большой амплитудой до измерений циркуляции. Полученные результаты изображены на гистограмме (фиг. 72), из которой четко видно, что данные имеют тенденцию накапливаться вокруг значения, равного  $h/m_4$ . Можно было также полностью оторвать вихревую нить от проволоки (значения при  $\kappa = 0$ ); в нескольких



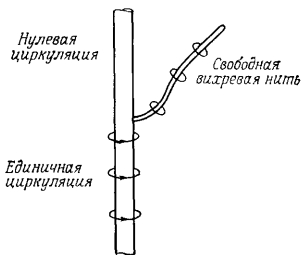
Фиг. 70. Возникновение силы Магнуса в идеальной жидкости.

Вокруг твердого цилиндра имеется локальная циркуляция жидкости; кроме того, жидкость обтекает цилиндр, как указано стрелками. Сила Магнуса действует на цилиндр в направлении, указанном стрелкой.

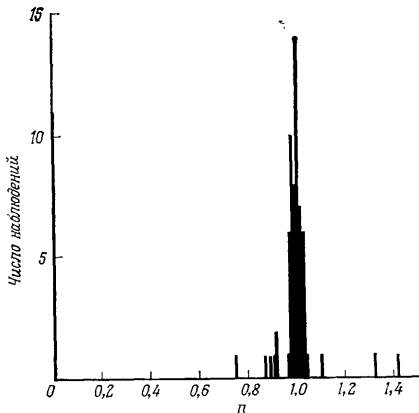
есть скачком, в результате чего измеряемая циркуляция представляет собой «среднее значение» для всей проволоки. Точка отхода вихревой линии от проволоки должна быть весьма подвижной. Это дает основание предполагать, что состояния с неквантуемыми значениями циркуляции неустойчивы. Наоборот, состояния, для которых вся вихревая линия совпадает с проволокой, должны быть сравнительно устойчивыми. Для проверки этой гипотезы проволоку заставляли колебаться с большой амплитудой до измерений циркуляции. Полученные результаты изображены на гистограмме (фиг. 72), из которой четко видно, что данные имеют тенденцию накапливаться вокруг значения, равного  $h/m_4$ . Можно было также полностью оторвать вихревую нить от проволоки (значения при  $\kappa = 0$ ); в нескольких

случаях наблюдался и частичный отрыв вихревой нити. Уайтмор и Циммерманн [66] повторили эксперимент Вайнена, используя более толстые проволоки, и обнаружили циркуляций, соответствующие 1, 2 и 3 квантам. Более того, их результаты свидетельствуют о явной устойчивости квантованной циркуляции и неустойчивости неквантованных состояний (фиг. 73).

Для экспериментов, демонстрирующих квантование циркуляции или квантование потока в сверхпроводниках, используются образцы в форме полых цилиндров. Их изготавливают гальваническим методом или путем напыления в вакууме сверхпроводящего металла на очень тонкую нить. Цилиндр охлаждают ниже его критической температуры в слабом однородном магнитном поле  $H$



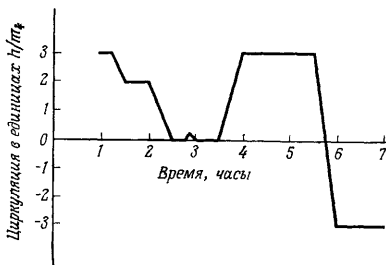
Фиг. 71. Вихрь, связанный с проволокой в эксперименте Вайнена.



Фиг. 72. Гистограмма, характеризующая частоту наблюдения циркуляции  $nh/m_4$  в зависимости от  $n$  [63].

направленном вдоль оси цилиндра. Затем поле выключают и измеряют захваченный цилиндром поток  $\Phi$ . В первых экспериментах

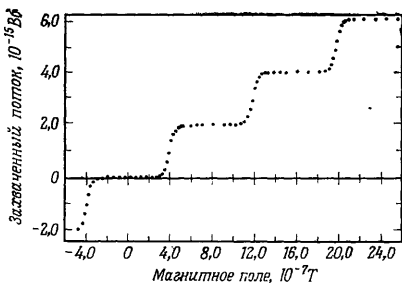
(Дивер и Фейрбенк [11], Долл и Небауэр [13]) поток  $\Phi$  измерялся баллистическим методом, в более поздних экспериментах Гудмен и др. [22] пользовались сквид-магнетометром, который мы опишем



Фиг. 73. Схематическое изображение интервалов времени, в течение которых циркуляция имеет определенное значение [49, 66].

Некоторое время состояние системы не квантовано, но лишь квантованные состояния устойчивы.

в §5.3. Результаты, полученные Гудменом и др., изображены на фиг. 74. Можно видеть, что для большинства значений  $H$  поток  $\Phi$  равен одному из значений  $n\phi_0$ . Имеется, однако, суще-



Фиг. 74. Зависимость захваченного потока от магнитного поля, в котором цилиндр охлаждался ниже его критической температуры [22].

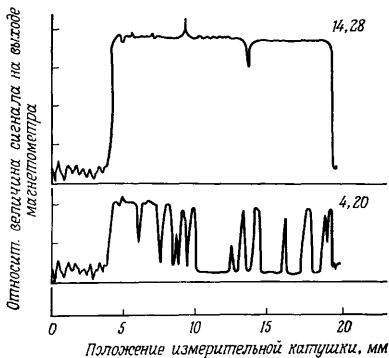
Данные получены для оловянного цилиндра с внутренним диаметром 56 мкм, длиной 24 мм и толщиной стенок около 500 нм.

ственная область полей  $H$ , для которой поток  $\Phi$  принимает промежуточные значения. Разумно предположить, что эти промежуточные значения возникают по той же причине, как и в экспери-



ментах Вайнена, т. е. в какой-то точке цилиндра линия потока (силовая линия) отходит в сторону. Гудмен и др. смогли подтвердить это предположение, измеряя с помощью маленькой измерительной катушки величину захваченного потока как функцию положения вдоль цилиндра. Как можно видеть на фиг. 75, в любой точке цилиндра поток действительно кратен целому числу квантов.

Соотношение (4.10) и упрощенная его форма (4.13) имеют фундаментальное значение. Квант потока обратно пропорционален



Фиг. 75. Выходной сигнал магнетометра как функция положения измерительной катушки вдоль цилиндра [22].

Цифры на кривых дают значения (в единицах  $10^{-7}$  T) приложенного поля, в котором цилиндр охлаждался ниже его критической температуры.

заряду куперовской пары  $2e$ , и результаты типа изображенных на фиг. 74 являются экспериментальным подтверждением того, что сверхпроводящее электронное состояние строится из куперовских пар. Ниже в настоящей главе мы увидим, что квантование потока очень важно при рассмотрении смешанного состояния, которое состоит из квантованных вихревых линий; в дальнейшем мы убедимся также, что квантование существенно для понимания эффекта Джозефсона.

## § 4.2. Квантованные вихри в гелии II

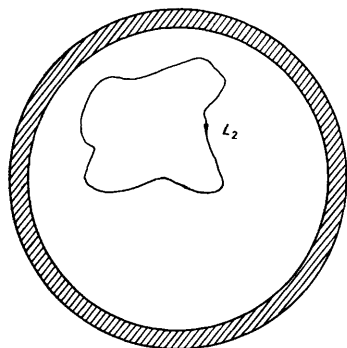
Остановимся теперь на вихрях в He II, а затем в § 4.3 обсудим квантованные вихри в сверхпроводниках.

### 4.2.1. Вращение сверхтекучей жидкости

Когда для He II была впервые предложена двухжидкостная модель, существовало мнение, что сверхтекучую компоненту очень трудно привести во вращение, поскольку сверхтекучий поток характеризуется условием отсутствия вихрей

$$\text{rot } \mathbf{v}_s = 0. \quad (4.16)$$

Чтобы выяснить следствия из уравнения (4.16), рассмотрим заключенный в цилиндрический сосуд He II (фиг. 76) и найдем циркуляцию [см. (4.3)] по контуру типа  $L_2$ . В соответствии с теоремой Стокса циркуляцию можно записать как интеграл по поверхности  $A$ , опирающейся на контур:



Фиг. 76. Сверхтекучая жидкость в цилиндрическом сосуде.

Контур  $L_2$  в односвязной области можно свести в точку.

$$\kappa = \oint_{L_2} \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = \int_A (\text{rot } \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{A}. \quad (4.17)$$

Комбинируя уравнения (4.16) и (4.17), получаем

$$\kappa = \oint_{L_2} \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (4.18)$$

Это значит, что циркуляция по любому контуру в сплошной жидкости равна нулю. Кроме того, все контуры можно стянуть в одну точку, поскольку жидкость заполняет односвязную область. Следовательно, уравнение (4.18) справедливо для всей сверхтекучей жидкости, только если в каждой точке  $\mathbf{v}_s = 0$ . Таким образом, если уравнение (4.16) выполняется по всей сверхтекучей жидкости, вращение невозможно.

В пользу этой точки зрения говорили и результаты экспериментов Андроникашвили (см. фиг. 7), в которых осциллирующая стопка дисков захватывала нормальную компоненту жидкости, заставляя ее вращаться, а сверхтекучая компонента оставалась в состоянии покоя. Однако Осборн [46], вращая цилиндрический сосуд с He II (см. фиг. 76), обнаружил, что мениск имеет такую же форму, как у обыкновенной жидкости, вращающейся как целое. Это означало, что сверхтекучая и нормальная компоненты движутся с одной и той же угловой скоростью. Можно было бы объяснить эксперимент Осборна просто тем, что при вращении

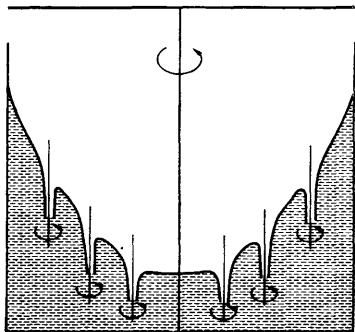
сверхтекучесть разрушается. Однако Андроникашвили и Каверкин [4] показали, что во вращающемся He II сохраняется эффект фонтанирования, продемонстрировав этим наличие обеих компонент и при вращении.

Вращение сверхтекучей компоненты можно успешно объяснить, предположив, что она пронизана рядом вихревых нитей (фиг. 77). В § 4.1 мы описали, как происходит циркуляция вокруг области, из которой вытеснена сверхтекучая жидкость. Для контуров, окружающих твердое препятствие или сердцевину вихря (подобно контуру  $L_1$  на фиг. 67), циркуляция квантуется:

$$\begin{aligned} \kappa &= \oint_{L_1} \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = \\ &= \int_A (\text{rot } \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{A} = nh/m_4. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Из уравнения (4.19) следует, что в некоторых точках площади  $A$ , ограниченной контуром,  $\text{rot } \mathbf{v}_s$  отличен от нуля. Это обстоятельство не имеет значения для твердого препятствия, но в случае вихря его можно использовать для определения того, что мы понимаем под сердцевиной вихря — это та область, в которой  $\text{rot } \mathbf{v}_s \neq 0$ .

Таким образом, хотя на первый взгляд в эксперименте Осборна сверхтекучая жидкость заполняет односвязную область, где во всех точках  $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$ , на самом деле эта область является многосвязной из-за наличия вихревых нитей, в сердцевинах которых  $\text{rot } \mathbf{v}_s \neq 0$ . Почему же все-таки жидкость вращается подобно твердому телу, мы объясним после более детального рассмотрения характеристик вихревых нитей.



Фиг. 77. Расположение вихревых нитей во вращающемся He II.

#### 4.2.2. Одиночная вихревая нить

Рассмотрим отдельную прямую вихревую нить в сверхтекучей жидкости (см. фиг. 68). При этом вплоть до п. 4.2.4 мы будем пренебрегать наличием нормальной компоненты, т. е. фактически будем рассматривать He II при абсолютном нуле. Картина потока вокруг вихревой нити представляет собой ряд концентрических

окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси вихря и окружающих центральную цилиндрическую сердцевину. Чтобы найти, как линейная скорость меняется с расстоянием от оси, вычислим циркуляцию для контура, представляющего собой виток с радиусом  $r$ . Из (4.3) и (4.7) получаем

$$\kappa = \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r v_s(r) = n \frac{\hbar}{m_4}, \quad (4.20)$$

откуда для скорости имеем

$$v_s(r) = \kappa / 2\pi r. \quad (4.21)$$

Таким образом, скорость зависит от  $1/r$ , т. е. так же, как и в случае вихря в классической жидкости; единственное различие между Не II и классической жидкостью заключается в наличии квантования. Из соотношения (4.20) видно, что величина циркуляции не зависит от выбранного контура, поэтому мы имеем право говорить о вихре, обладающем квантованной циркуляцией. Кроме того, записав соотношение (4.20) в виде

$$m_4 r v_s(r) = n \hbar, \quad (4.22)$$

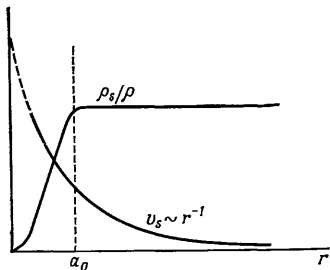
мы видим, что момент количества движения на частицу квантуется в единицах  $\hbar$ .

При больших значениях  $r$  характер связанного с вихрем потока определяется уже границами жидкости или

Фиг. 78. Зависимость  $v_s$  и  $\rho_s/\rho$  от расстояния  $r$  вихревой нити от оси (схематически);  $a_0$  — радиус сердцевины.

присутствием других вихрей. Выражение (4.21) указывает на наличие расходимости при  $r \rightarrow 0$  — это является еще одним доказательством того факта, что свойства сердцевины вихря отличаются от свойств окружающей жидкости. Отложим обсуждение структуры сердцевины вихря до п. 4.2.5. Пока же избежим расходимости, предположив, что  $\rho_s \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  и что  $\rho_s$  падает от своего значения в объеме жидкости до нуля на типичном расстоянии  $a_0$ , которое мы определим как радиус сердцевины (фиг. 78).

Отметим, что, вводя концепцию квантованных вихрей, мы не придерживались первоначального подхода Фейнмана [17]. Фактически самое первое предположение о том, что система вихрей должна играть важную роль в гидродинамике сверхтекучести, принадлежит Онсагеру, хотя он, вероятно, имел в виду вихре-



вые слои, а не вихревые линии (см. Лондон [42]). Для сравнения заметим, что Фейнман рассматривал волновую функцию для кольца атомов в сверхтекучей жидкости и интересовался эффектом перемещения каждого атома в кольце на место, которое занимал соседний атом. Возникающее при таком перемещении конечное квантовое состояние ничем не отличается от начального состояния, поскольку атомы гелия являются бозе-частицами. Следовательно, волновая функция не меняется, а ее фаза может изменяться только на величину, равную целому числу, умноженному на  $2\pi$ . Отсюда опять непосредственно следует связь изменений фазы с циркуляцией и с квантованием циркуляции.

Энергия одиночной вихревой нити определяется в основном кинетической энергией циркулирующей жидкости. Эта энергия на единицу длины нити равна

$$\varepsilon_v = \int_{a_0}^b \pi \rho_s v_s^2 r \, dr. \quad (4.23)$$

С помощью выражений (4.22) и (4.23) находим энергию на единицу длины вихревой нити с циркуляцией  $\kappa$ :

$$\varepsilon_v = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a_0}. \quad (4.24)$$

Верхний предел интегрирования  $b$  здесь имеет величину порядка среднего расстояния между вихрями, а нижний предел равен радиусу сердцевин  $a_0$  (см. задачу 4.1). В выражении для энергии может появиться дополнительный член, связанный с искажением сверхтекучей волновой функции вблизи сердцевин вихря, но величина этого члена мала (задача 4.2), и для простоты им можно пренебречь<sup>1)</sup>.

### 4.2.3. Вихревые нити во вращающемся He II

Вернемся к эксперименту Осборна с вращающимся сосудом и выясним, каким образом наличие однородно распределенных вихревых нитей может привести к вращению сверхтекучей жидкости как целого. Предположим, что на единицу площади сосуда приходится  $n_v$  вихревых нитей, причем их сердцевинны параллельны оси вращения (см. фиг. 77), и что каждая из них отвечает циркуляции  $\kappa$ . Система вихрей характеризуется величиной  $\bar{\omega}$ , которая по определению равна полной циркуляции на единицу

<sup>1)</sup> Количественная теория, позволяющая рассчитать энергию сердцевин вихревой нити, существует лишь для области вблизи  $\lambda$ -точки (см. § 6.8 и указанную там литературу).— *Прим. ред.*

площади, т. е.

$$\bar{\omega} = n_v \kappa. \quad (4.25)$$

Из соотношения (4.17) мы видим, что  $\bar{\omega}$  можно идентифицировать со средним значением  $\text{rot } \mathbf{v}_s$ . Когда  $\text{rot } \mathbf{v}_s$  отличен от нуля, это свидетельствует, как мы уже отмечали, о наличии вихрей. Тогда гидродинамические свойства жидкости как целого описываются уравнением Эйлера в его полной форме (см. § 2.3). В сосуде полная циркуляция по контуру радиусом  $R$  с центром на оси сосуда равна  $2\pi R^2 \kappa$ . Чтобы сверхтекучая компонента жидкости казалась вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , полная циркуляция должна быть также равна  $2\pi R^2 (R\Omega)$ . Таким образом, для имитации твердотельного вращения необходимо, чтобы плотность вихревых нитей была равна

$$n_v = 2\Omega/\kappa. \quad (4.26)$$

Это условие можно записать в альтернативном виде:

$$\bar{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}_s = 2\Omega. \quad (4.27)$$

Ясно, что для данной угловой скорости число вихрей и расстояние между ними зависят от отвечающей этим вихрям циркуляции. Используя несколько упрощенный вариант соображений, принадлежащих Холлу [24], докажем теперь, что система вихревых нитей с малой циркуляцией энергетически более выгодна, чем, скажем, одиночная нить с большой циркуляцией  $\kappa$ . Рассмотрим He II, вращающийся со скоростью сосуда  $\Omega$ . Условие равновесия заключается в том, чтобы была минимальной величина

$$F' = F - L \cdot \Omega. \quad (4.28)$$

Здесь  $F$  — свободная энергия вращающейся жидкости, а  $L$  — ее полный момент количества движения (см., например, Ландау и Лифшиц [36]). Предположим, далее, что температура жидкости достаточно низка и поэтому можно пренебречь разницей между  $\rho_s$  и  $\rho$ , т. е. по существу будем рассматривать основное состояние вращающегося He II. Если радиус сосуда равен  $R_0$ , то, согласно (4.25), полное число вихревых нитей с циркуляцией  $\kappa$  равно

$$N = 2\pi R_0^2 \Omega / \kappa. \quad (4.29)$$

Чтобы найти минимум свободной энергии  $F'$ , нужно рассматривать только вклады, зависящие от  $N$  и  $\kappa$ . Поскольку циркуляция всех вихрей одинакова, каждый из них обладает энергией  $\epsilon_v$ , определяемой выражением (4.24), и моментом количества движения  $l_v$ , параллельным  $\Omega$ . Таким образом, мы должны найти минимум величины

$$F'' = N (\epsilon_v - l_v \Omega). \quad (4.30)$$

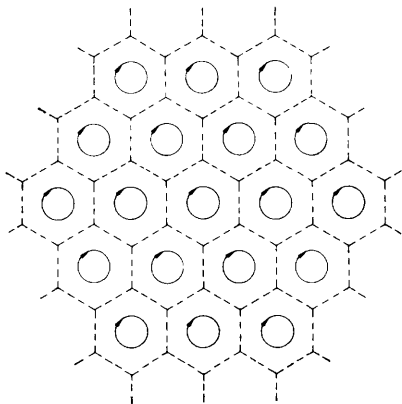
Непосредственное вычисление (задача 4.3) показывает, что момент количества движения каждого вихря равен

$$l_v = \frac{\rho_s \kappa}{8\pi\Omega} \kappa. \quad (4.31)$$

Этот момент количества движения добавляется к моменту количества движения жидкости, соответствующему ее твердотельному вращению. Используя выражения (4.24), (4.29) и (4.31), получаем

$$F'' = \frac{1}{2} \rho_s R_0^2 \Omega \kappa \left\{ \ln \left( \frac{b}{a_0} \right) - \frac{1}{2} \right\}. \quad (4.32)$$

При фиксированной угловой скорости  $\Omega$  циркуляция  $\kappa$  должна, как видно из (4.32), принимать свое минимальное значение. Следовательно, основное состояние вращающегося He II представляет



Фиг. 79. Картина потока, состоящего из плотноупакованных вихревых нитей [24].

Такая картина наблюдается в системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega = n_v \kappa / 2$ , где  $n_v$  — число нитей на единицу площади. Сплошными линиями обозначено направление течения потока, штриховыми — линии, отвечающие нулевой скорости во вращающейся системе координат.

собой правильную конфигурацию вихревых нитей, каждая из которых имеет наименьшую из возможных циркуляцию  $h/m_4$ ; отсюда следует, что число вихревых нитей максимально. Равновесная ситуация иллюстрируется фиг. 79, на которой изображена конфигурация вихрей в системе координат, вращающейся с той же скоростью, что и сосуд.

С помощью простого обобщения приведенных выше соображений оценим теперь критическое значение угловой скорости  $\Omega_{c1}$ , необходимой для того, чтобы мог образоваться хотя бы один вихрь. Равновесие опять определяется минимальным значением свободной энергии  $F'$ . Во вращающейся жидкости может образоваться вихревая нить, если ее возникновение приводит к уменьшению свободной энергии  $F'$  ниже того значения, которое соответствует полному отсутствию вихревых нитей. Это произойдет, когда величина  $\varepsilon_v(R_0) - l_v(R_0) \cdot \Omega$  станет отрицательной [здесь  $\varepsilon_v(R_0)$  — энергия, а  $l_v(R_0)$  — момент количества движения вихря, «заполняющего» сосуд]. Согласно (4.24), энергия вихря равна

$$\varepsilon_v(R_0) = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} \ln \frac{R_0}{a_0}, \quad (4.33)$$

а момент количества движения определяется следующим образом:

$$l_v(R_0) = \int_{a_0}^{R_0} \rho_s r v_s (2\pi r) dr. \quad (4.34)$$

С помощью (4.24) и неравенства  $R_0 \gg a_0$  находим

$$l_v(R_0) = \frac{1}{2} \rho_s \kappa R_0^2. \quad (4.35)$$

Тогда критическая скорость, необходимая для образования одного вихря с минимальной циркуляцией, равна

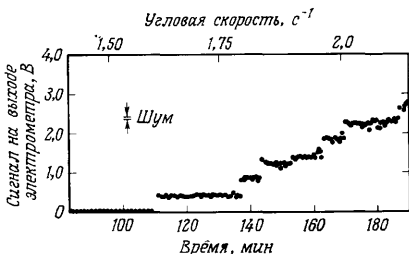
$$\Omega_{c1} = \frac{h}{2\pi m_4 R_0^2} \ln \frac{R_0}{a_0}. \quad (4.36)$$

Если для  $R_0$  взять типичное значение, равное 1 см, то  $\Omega_{c1} = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ . Это показывает, как легко возникают вихревые нити и, наоборот, как трудно изготовить «образец» He II, в котором вихри отсутствуют.

Однако при очень низких угловых скоростях  $\Omega < \Omega_{c1}$  устойчиво состояние сверхтекучей жидкости, в котором повсюду  $v_s = 0$ . Такое состояние наблюдали Гесс и Фейрбенк [28] при измерении момента количества движения цилиндрического сосуда с жидким гелием, который охлаждался ниже  $\lambda$ -точки. Момент количества движения, приобретаемый сверхтекучей жидкостью при ее образовании, определялся по изменению момента количества движения при подогревании жидкости выше  $\lambda$ -точки, когда в He I возникало твердотельное вращение. Было обнаружено, что при достаточно низких значениях угловой скорости сверхтекучая жидкость возникает с нулевым моментом количества движения относительно лабораторной системы координат. Пороговое значение угловой скорости, выше которой возникает вращение сверхтекучей жидкости, хорошо согласуется с значением (4.36).



Путем обобщения вычислений, приводящих к выражению (4.36), Гесс [27] определил угловые скорости, необходимые для образования 2, 3, 4 и т. д. одноквантованных вихрей. Таким образом, зависимость числа вихрей от угловой скорости имеет ступенчатую форму, которую и наблюдали Пакард и Сандерс [47], применившие для определения числа вихревых нитей методику, основанную на наблюдении захвата электронов сердцевинами вихрей (фиг. 80).



Фиг. 80. Ступенчатая структура, связанная с образованием одиночных квантованных вихрей во вращающемся с небольшим ускорением He II [47].

Количество вихрей определяется по числу захваченных сердцевинами вихрей электронов пропускаемых через жидкость. Захваченные электроны извлекаются затем из вихрей электрическим полем, приложенным вдоль сердцевины. Заряд, накапливающийся за данное время на выходе, пропорционален количеству вихрей (в предположении, что вихри захватывают электроны с постоянной скоростью).

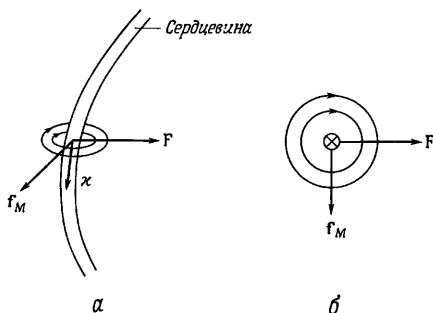
При дальнейшем увеличении угловой скорости сосуда плотность нитей растет [см. выражение (4.26)], но этот процесс бесконечно продолжаться не может. Предел определяется из условия начала перекрытия сердцевин вихревых нитей. Обращаясь снова к выражению (4.26), мы видим, что перекрытие сердцевин могло бы произойти, если бы угловая скорость достигла верхнего критического значения

$$\Omega_{c2} = \hbar/m_4 a_0^2, \quad (4.37)$$

имеющего порядок  $10^{12} \text{ с}^{-1}$ . Во всех практических случаях угловые скорости удовлетворяют условию  $\Omega \ll \Omega_{c2}$ .

В заключение остановимся на упругих свойствах вихревых нитей. Поскольку при приближении к сердцевине вихря сверхтекучая скорость возрастает, из уравнения Бернулли следует, что должно возникать соответствующее падение давления. Это приводит к натяжению вихревой нити; если нить изгибается, то должна возникнуть сила, стремящаяся ее выпрямить; эта сила равна энергии нити на единицу длины. Процесс выпрямления приводит к движению вихревой нити в сверхтекучей жидкости, поэтому

нить, согласно уравнению (4.15), подвергается также действию силы Магнуса (фиг. 81). Обе силы приводят к тому, что вдоль вихревой нити распространяются поперечные волны с круговой поляризацией. Холл [23] исследовал эти волны, усложнив эксперимент Андроникашвили. В эксперименте Холла стопка дисков осциллировала во вращающемся He II. Вследствие снижения давления Бернулли у сердцевин вихревых нитей они прилипали к дискам. Движение дисков возбуждало крутильные колебания



Фиг. 81. *a* — силы, действующие на изогнутую вихревую нить; *б* — сечение вихревой нити.

Сила Магнуса направлена перпендикулярно силе  $F$ , в результате чего вдоль вихревой нити распространяются волны.

нитей. Между двумя колебаниями наблюдались резонансы, частоты которых хорошо согласуются с предсказанными теорией значениями. Эти результаты послужили дальнейшим доказательством правильности приведенных выражений для энергии и циркуляции вихревых нитей в He II.

Более детальное описание колебаний вихрей и других свойств вращающегося He II можно найти в статье Андроникашвили и Мамаладзе [5].

#### 4.2.4. Взаимодействие между вихревыми нитями и нормальной жидкостью

До сих пор обсуждение вихрей в сверхтекучем гелии проводилось, строго говоря, только для абсолютного нуля, и мы полностью пренебрегали наличием нормальной компоненты. Однако наличие вихревых нитей в сверхтекучей жидкости приводит к взаимодействию между двумя жидкостями, известному как взаимное трение, о котором мы упоминали в § 2.5. Благодаря существова-

нию такого трения нормальная компонента во вращающемся сосуде «сообщает» сверхтекучей компоненте о необходимости принять участие в твердотельном вращении (см. п. 4.2.3). Кроме того, взаимное трение важно как фактор, ограничивающий сверхтекучую скорость. Но эта проблема весьма сложна, и мы осветим ее лишь в общих чертах.

В основном взаимодействие, по-видимому, обуславливается столкновениями ротоннов (см. § 1.5) с вихревыми нитями, и большая часть экспериментов проводилась в области температур, где число ротоннов велико, т. е. выше 1 К. Ясно, что поперечное сечение для соударения сильно зависит от направления дрейфовой скорости ротоннов относительно вихревых нитей. Если предположить, что нити распределены однородно, то можно ожидать, что ротонны, движущиеся параллельно нитям, не будут обмениваться с ними импульсом. Это было подтверждено экспериментами Цакадзе [59], в которых нормальная жидкость колебалась параллельно вихревым нитям. При этом не было замечено никакого изменения вязкого затухания колебаний по сравнению с такими же измерениями, проводившимися в невращающейся жидкости. В то же время эксперименты Холла и Вайнена [26], в которых ротонны двигались перпендикулярно вихревым нитям, продемонстрировали наличие взаимного трения.

Холл и Вайнен вычислили силу взаимного трения  $F_{ns}$  на единицу объема нормальной жидкости, возникающую в результате взаимодействия между совокупностью прямых вихревых нитей, характеризуемых величиной  $\bar{\omega}$ , и нормальной жидкостью, движущейся со средней дрейфовой скоростью  $v_n$ . Они нашли, что

$$F_{ns} = B \frac{\rho_s \rho_n}{2\rho} \frac{\bar{\omega} \times \{\bar{\omega} \times (v_n - v_s)\}}{\bar{\omega}} + B' \frac{\rho_s \rho_n}{2\rho} \bar{\omega} \times (v_n - v_s), \quad (4.38)$$

где  $v_s$  — средняя сверхтекучая скорость в области, содержащей много вихревых нитей, а  $B$  и  $B'$  — постоянные. Если ввести силу  $F_{ns}$  в уравнения двухжидкостной модели (2.60) и (2.61), то изменятся уравнения, определяющие распространение второго звука (см. § 2.9). Качественно это должно приводить к затуханию второго звука, поскольку при наличии взаимного движения между двумя компонентами жидкости возникает взаимное трение, которое противодействует движению. Холл и Вайнен использовали в своих экспериментах по второму звуку резонатор, в котором жидкость могла вращаться. Когда направление распространения было перпендикулярно вихревым нитям, наблюдалось дополнительное поглощение, величина которого была пропорциональна угловой скорости жидкости. Вместе с тем при распространении второго звука параллельно вихревым нитям не было обнаружено никаких признаков дополнительного затухания.

Хотя эти результаты подтверждают предположение о том, что взаимное трение определяется в основном соударением ротоннов с вихрями, истинная природа сил, действующих между двумя жидкостями, еще не установлена. Неясно, например, вызывают ли соударения с ротонами движение вихрей в соответствии с эффектом Магнуса. Кроме того, Иорданский [29] предсказал, что должна существовать сила типа

$$\mathbf{f}_1 = \rho_n \mathbf{v}_n \times \boldsymbol{\kappa}, \quad (4.39)$$

возникающая в результате изменения потока нормальной жидкости при обтекании сердцевин вихря. Сила Иорданского по форме очень похожа на силу Магнуса [выражение (4.15)], но, согласно предположению, первая из них может действовать только на нормальную жидкость. Дальнейшее обсуждение этой проблемы читатель может найти в статьях Вайнена [64] и Холла [25].

Уравнения двухжидкостной гидродинамики Ландау, модифицированные путем добавления силы взаимного трения, все равно справедливы только для достаточно низких скоростей жидкостей. Когда же скорости велики, как это имеет, например, место при наличии мощных потоков тепла, режим течения становится турбулентным. Тогда вихревые нити расположены уже нерегулярным образом, что приводит к сильному увеличению взаимодействия между нормальной и сверхтекучей жидкостями.

#### 4.2.5. Ионы и вихревые кольца

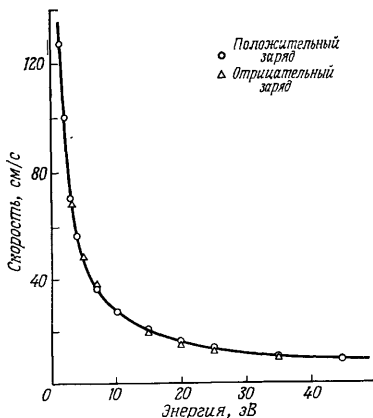
Ионы часто используются в качестве удобных зондов при изучении свойств He II. Благодаря наличию у ионов заряда их движение через жидкость легко контролировать и изучать. Обычно ионы вводятся с помощью источника  $\alpha$ -частиц, которые ионизируют жидкость на своем пути. Положительный ион является, вероятно, конгломератом нейтральных атомов и одной  $\alpha$ -частицы, общий диаметр которого лежит между 5 и 10 Å. В противоположность этому как теория, так и эксперимент приводят к модели отрицательного иона, представляющего собой электрон, samozaxваченный в полости диаметром между 12 и 20 Å (Доннелли [14]).

Много информации было получено из измерений подвижности ионов

$$\mu_1 = \langle v_D \rangle / E, \quad (4.40)$$

где  $\langle v_D \rangle$  — средняя дрейфовая скорость и  $E$  — приложенное электрическое поле. Дрейфовую скорость определяют, наблюдая время пролета иона между двумя помещенными в жидкость электродами. Было обнаружено, что в области  $0,7 \text{ K} < T < 1,8 \text{ K}$  подвижность и положительных, и отрицательных ионов изменяется пропорционально  $\exp(\Delta/k_B T)$ , где  $\Delta$  почти точно совпадает

с энергией ротонного минимума. Вспомним теперь, что концентрация ротонов  $N_r$  приблизительно пропорциональна  $\exp(-\Delta/k_B T)$  (см. § 1.5). Поэтому ясно, что средняя длина свободного пробега иона, пропорциональная  $\langle v_D \rangle$ , изменяется обратно пропорционально  $N_r$ . Отсюда следует, что движение ионов в указанной температурной области определяется в основном соударениями с ротонами (обзор соответствующих работ см. у Карери и др. [9]).



Фиг. 82. Зависимость скорости ионов в He II от их энергии [50].

Кривая вычислена согласно (4.41) и (4.42) в предположении, что ион связан с одиночным квантованным вихревым кольцом, радиус сердцевинки которого  $a_0 = 1,3 \text{ \AA}$ .

С другой стороны, эксперименты, проведенные Рейфилдом и Райфом [50] вблизи 0,3 К, показали, что средняя длина свободного пробега как положительных, так и отрицательных ионов значительно больше, чем при более высоких температурах. Ионы, у которых  $\langle v_D \rangle$  по порядку величины совпадает с тепловой скоростью, не теряют энергии при ускорении полем на расстояниях в несколько сантиметров. Этот результат объясняется тем, что при таких низких температурах концентрация  $N_r$  пренебрежимо мала. Однако энергия иона, как оказалось, падает с увеличением его скорости (фиг. 82). Такое поведение характерно для вихревого кольца, у которого заполненная жидкостью сердцевина вращается как твердое тело, известны из классической гидродинамики (Ламб [35]). Применяя эти выражения к сверхтекучему вихре-

вому кольцу, получаем выражения для энергии

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2} \rho_s \kappa^2 r \left\{ \ln(8r/a_0) - \frac{7}{4} \right\} \quad (4.41)$$

и для скорости

$$v_r = (\kappa/4\pi r) \left\{ \ln(8r/a_0) - \frac{1}{4} \right\}, \quad (4.42)$$

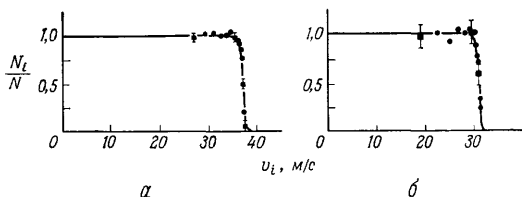
где  $r$  — радиус кольца,  $\kappa$  — его циркуляция,  $a_0$  — радиус сердцевин и  $r \gg a_0$ . Если скомбинировать эти два выражения, пренебрегая малыми логарифмическими членами, то можно видеть, что скорость кольца приблизительно обратно пропорциональна энергии (см. задачу 4.4). Действительно, Рейфилд и Райф получили превосходное согласие экспериментальных данных с кривой, вычисленной на основании упомянутых выражений для вихревого кольца, приняв значение циркуляции равным  $h/m_4$  и предположив, что  $a_0 = 1,3 \text{ \AA}$  (см. фиг. 82). Это согласие — наиболее убедительная демонстрация того, что движение ионов в He II может создавать вихревые кольца, которые оказываются связанными с ионами. Кроме того, это еще одно доказательство квантования циркуляции. В упомянутых экспериментах радиус кольца менялся от  $5 \cdot 10^{-6}$  до  $10^{-4}$  см; это означает, что связанная с кольцами конфигурация потока весьма велика по сравнению с размером ионов.

Выяснение механизма образования вихревых колец в He II — проблема весьма интересная. Согласно Иорданскому [30], маленькие кольца образуются в результате тепловых флуктуаций и затем вырастают до макроскопических размеров благодаря соударениям с элементарными возбуждениями. Процесс аналогичен образованию зародыша жидкой капли при конденсации пара. Такая идея была развита Доннелли и Робертсом [15], которые теоретически рассмотрели движение ионов в He II. При увеличении скорости иона растет тенденция к локализации возбуждений вблизи ионов. Это дает возможность предполагать, что возбуждения могут образовать маленькое вихревое кольцо. Рассматривая такие кольца как частицы, совершающие броуновское движение, и применяя обычную теорию стохастических процессов, авторы вычислили вероятность  $P$  того, что вихревое кольцо дорастет до своего критического размера, когда его скорость равна скорости иона. После этого кольцо продолжает расти до тех пор, пока сила торможения, действующая на комплекс ион — кольцо со стороны окружающей жидкости, не уравнивает действие электрического поля на ион. Согласно теории, если  $N$  ионов, движущихся со скоростью  $v_1$ , входит в область с постоянным электрическим полем, то их часть, проходящая длину  $L$  без образования вихревого кольца, определяется выражением

$$N_1/N = \exp(-PN_r L/v_1), \quad (4.43)$$

где  $N_r$  — концентрация ротонів. Стрейер и Доннелли [55] измеряли отношение  $N_r/N$  как функцию скорости; их результаты великоленно согласуются с результатом (4.43) (фиг. 83).

Исследовался также перенос ионов через вращающийся с постоянной скоростью He II; в этом случае наблюдалось четко выраженное различие поведения положительных и отрицательных ионов. Положительные ионы ведут себя так же, как ротонны, рассеиваясь, по-видимому, на сердцевинах вихрей. Отрицательные же



Фиг. 83. Относительное число ионов  $N_i/N$ , сохраняющихся на фиксированной длине в He II в постоянном электрическом поле, как функция скорости ионов [55].

а — положительные ионы при 0,7 К и при давлении насыщенных паров; б — отрицательные ионы при 0,7 К и давлении насыщенных паров. Кривые вычислены по (4.43).

ионы захватываются сердцевинами вихрей и остаются там в течение некоторого характерного времени, довольно свободно двигаясь при этом вдоль сердцевины вихревой нити. Дуглас [16] продемонстрировал этот эффект, пропуская в течение определенного времени поперечный ток отрицательных ионов через вращающийся He II. После выключения тока по истечении некоторого времени, необходимого для того, чтобы захваченные ионы вышли из жидкости, к ней прикладывалось поле, параллельное предполагаемому направлению вихревых нитей. Заряд, накопленный при этом в верхней части конфигурации вихрей, указывал на то, что отрицательные ионы могут захватываться сердцевинами вихрей, причем концентрация ионов может достигать столь высокого значения как  $10^7$  ионов/см<sup>3</sup>.

Даже из проведенного нами краткого обсуждения ясно, что пропускание ионов через He II — прекрасная методика, особенно для изучения вихрей. В частности, можно надеяться, что она позволит определить структуру сердцевины вихря. Предложенная Глаберсоном [18] модель, согласно которой концентрация ротоннов должна расти вблизи центра вихря, дает разумное качественное описание движения отрицательных ионов вдоль сердцевины вихря. Кроме того, из измерений скоростей вихревых колец следует, что ниже 0,6 К радиус сердцевины является медленно растущей функцией температуры (Глаберсон и Стейнгарт [20]). Вопрос о том,

является ли сердцевина вихря полый или она заполнена сверхтекучей жидкостью, участвующей в твердотельном вращении, остается пока открытым.

## § 4.3. Квантованные вихри в сверхпроводниках

### 4.3.1. Одиночная вихревая нить

Вихревые нити, обнаруженные в сверхпроводниках II рода, описываются уравнением (4.2) и уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e. \quad (4.44)$$

Напомним при этом (см. § 1.2), что мы считаем  $\mathbf{J}_e$  током намагничивания, изменяющим локальное значение  $\mathbf{B}$ .

Предположим, как и в случае He II, что мы имеем дело с аксиальной конфигурацией потока и расположенной в центре сердцевинной. Тогда из уравнения (4.44) следует, что магнитное поле  $\mathbf{B}$  направлено параллельно вихревой линии и под прямым углом к скорости потока (фиг. 84). Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  перпендикулярен  $\mathbf{B}$ ; мы можем принять, что он совпадает по направлению с сверхтекучим течением. Введем, как и прежде, сверхтекучую скорость с помощью выражения

$$\mathbf{J}_e = 2e |\psi|^2 \mathbf{v}_s. \quad (4.45)$$

Мы можем определить конфигурацию потока точно таким же способом, как и для He II. Условием квантования становится теперь квантование магнитного потока [см. уравнение (4.10)].

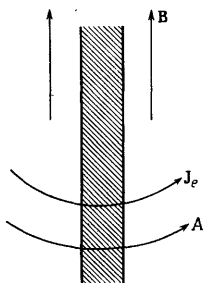
Для отыскания конфигурации потока исключим  $\mathbf{v}_s$  из уравнений (4.44), (4.45) и (4.10). В результате получаем для  $B$  уравнение

$$\lambda^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dB}{dr} \right) - B = 0, \quad (4.46)$$

где  $\lambda$  — лондоновская глубина проникновения, определяемая выражением (3.29). Решение уравнения (4.46) дает

$$B = \frac{n\phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(r/\lambda), \quad (4.47)$$

где  $K_0$  — бесселева функция нулевого порядка с мнимым аргументом, а  $\phi_0 = h/2e$  — квант потока. Соответствующая конфигура-



Фиг. 84. Магнитное поле  $\mathbf{B}$ , сверхпроводящий ток  $\mathbf{J}_e$  и векторный потенциал  $\mathbf{A}$  в вихревой нити в сверхпроводнике.



ция потока описывается выражением

$$J_e = -\frac{n\phi_0}{2\pi\lambda^2\mu_0} K_1(r/\lambda). \quad (4.48)$$

Для больших расстояний  $r \gg \lambda$  выражение (4.48) принимает вид

$$v_s \sim \exp(-r/\lambda). \quad (4.49)$$

Скорость потока, а вместе с ней и  $B$  на больших расстояниях экспоненциально затухают. Такое резкое затухание является результатом связи тока с магнитным полем; ситуация в этом случае отлична от имеющей место для вихрей в He II, где скорость падает как  $1/r$  [см. (4.21)].

В силу экспоненциального затухания  $v_s$ , мы можем для случая больших радиусов упростить условие квантования (4.10). Интеграл, содержащий  $v_s$ , пренебрежимо мал, а интеграл с  $A$  переходит в поверхностный интеграл

$$\int \mathbf{B} \cdot d\Sigma = n \frac{h}{2e}. \quad (4.50)$$

Таким образом, магнитный поток через вихревую нить, или, лучше сказать, связанный с вихревой нитью, квантуется.

Определим теперь энергию одиночной линии потока, как мы это делали для He II. Не проводя вычислений в явном виде, сразу можно установить, что энергия двух отдельных одиночных квантовых нитей [ $n = 1$  в (4.47) и (4.48)] ниже, чем энергия «двойной» квантовой нити ( $n = 2$ ). Действительно, в свободную энергию Гельмгольца входит зависящий от магнитного поля член, пропорциональный  $B^2$ , и зависящий от кинетической энергии член, пропорциональный  $J_e^2$  (см. задачу 4.8). Оба эти члена пропорциональны  $n^2$ , и поэтому, как и в случае He II, энергия имеет минимальное значение (при данном  $H$ ) для совокупности одиночных квантовых нитей. Далее ограничимся рассмотрением одиночной квантовой вихревой нити.

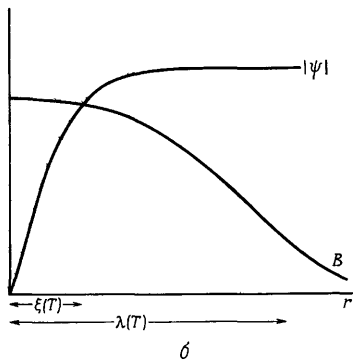
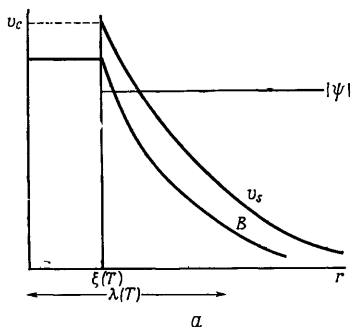
Как и в He II, ток (4.48) при малых  $r$  стремится к бесконечности, и нужно ввести радиус сердцевинки, который мы обозначим через  $\xi(T)$ . Скорость потока на радиусе сердцевинки  $\xi(T)$  положим равной критическому значению  $v_c$ . С помощью выражений (4.45) и (4.48) и выражения для  $\lambda$  через  $|\psi|^2$  [см. (3.27)] получаем

$$\frac{v_c}{|\psi|} = \frac{e^2\phi_0\mu_0^{1/2}}{2^{1/2}\pi m^{3/2}} K_1(\xi/\lambda). \quad (4.51)$$

Очевидно, отношение  $\lambda/\xi$  представляет собой фундаментальный параметр сверхпроводника, для которого введем обозначение

$$\kappa = \lambda/\xi. \quad (4.52)$$

Полученная нами конфигурация вихревой нити в сверхпроводнике иллюстрируется фиг. 85, а. Сверхтекучая скорость  $v_s$  растет с уменьшением  $r$ , пока не достигнет критического значения  $v_c$  на радиусе сердцевин  $r = \xi(T)$ . Мы предполагаем, что сердцевина вихря находится в нормальном состоянии, так что  $v_s = 0$  при  $r < \xi(T)$ . Так же, как и  $v_s$ , магнитная индукция  $B$  растет с уменьшением  $r$ , а внутри сердцевин имеет постоянное значение. Как  $B$ , так и  $v_s$  за пределами сердцевин экспоненциально падают на характерной длине  $\lambda$ . Отметим, что, согласно выражению (4.47) для  $B$  за пределами сердцевин, полный поток  $B$  в сверхпроводящей области равен  $\phi_0$ . Это выражение не учитывает поток внутри сердцевин, поэтому множитель при  $K_0$  имеет смысл только при  $\lambda(T) \gg \xi(T)$ . Наконец, мы считали модуль волновой функции  $|\psi|$  постоянным вне сердцевин, а из утверждения о нормальной сердцевине следует, что внутри нее  $\psi = 0$ . Предположение, что при  $r > \xi(T)$  модуль волновой функции постоянен, упрощает ситуацию, но его правомочность — вопрос открытый. Пространственное изменение  $\psi$  можно найти с помощью теории Гинзбурга — Ландау (ГЛ), краткому изложению которой мы посвятим гл. 6. Вычисления согласно теории ГЛ (Абрикосов [1]) показывают, что  $|\psi|$  изменяется непрерывно от нуля при  $r = 0$  до постоянного значения при  $r > \xi(T)$  (фиг. 85, б). Тогда с этой более общей



Фиг. 85. а — зависимость волновой функции  $\psi$ , сверхтекучей скорости  $v_s$  и магнитного поля  $B$  от радиуса  $r$  в лондонском вихре; б — зависимость  $\psi$  и  $B$  от  $r$  в вихре ГЛ.

нормальное изменение  $\psi$  можно найти с помощью теории Гинзбурга — Ландау (ГЛ), краткому изложению которой мы посвятим гл. 6. Вычисления согласно теории ГЛ (Абрикосов [1]) показывают, что  $|\psi|$  изменяется непрерывно от нуля при  $r = 0$  до постоянного значения при  $r > \xi(T)$  (фиг. 85, б). Тогда с этой более общей

точки зрения мы видим, что  $\xi(T)$  есть характерное расстояние для изменений  $|\psi|$ ; всякий раз, когда модуль  $|\psi|$  изменяется в пространстве, его значение существенно меняется на расстояниях порядка  $\xi(T)$ . В гл. 6 мы неоднократно встретимся с такими примерами. Расстояние  $\xi(T)$  называют обычно длиной когерентности, что приводит к некоторой путанице. Важно отличать  $\xi(T)$  от пиншардовской длины когерентности  $\xi_0$ ; последнюю мы ввели в § 3.4 как расстояние  $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ , до которого изменения векторного потенциала  $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$  влияют на сверхпроводящий ток  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ . Существенная разница между этими двумя величинами заключается в первую очередь в том, что  $\xi_0$  не зависит от температуры, тогда как температурная зависимость  $\xi(T)$ , как мы увидим, аналогична зависимости  $\lambda(T)$ ; в частности,  $\xi(T)$  стремится к бесконечности при  $T = T_c$ .

Теперь мы можем выяснить, при каких условиях в сверхпроводнике могут существовать квантованные вихри. Исходя из предположения, что вихрь действительно существует, мы уже выяснили, какова конфигурация потока. В частности, поток имеет наружный радиус  $\lambda(T)$  и внутренний радиус  $\xi(T)$ ; ясно, что для существования вихря должно выполняться условие типа  $\lambda(T) > \xi(T)$ .

Как мы увидим в гл. 6, точное условие, записанное через параметр  $\kappa$ , имеет вид

$$\kappa > 1/\sqrt{2}. \quad (4.53)$$

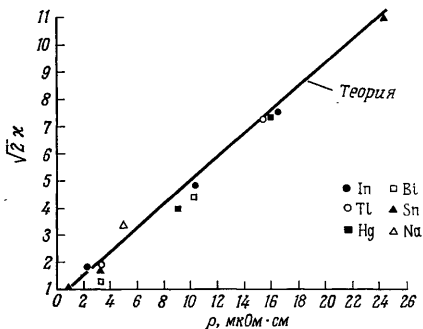
По этому признаку отличают сверхпроводники I рода, в которых вихри не были обнаружены, от удовлетворяющих условию (4.53) сверхпроводников II рода, в которых вихри были обнаружены.

Зависимость  $\xi(T)$  или  $\kappa$  от температуры в целом согласуется с (4.51). Согласно критерию Ландау,  $v_c = \Delta/p$ , где  $p$  — импульс возбуждения. Поскольку  $\Delta$  и  $|\psi|$  одинаково зависят от температуры (см. § 1.4), из выражения (4.51) следует, что отношение  $\lambda/\xi$ , а также и  $\kappa$  не зависят от температуры. Точные вычисления на основе микроскопической теории дают слабую зависимость — небольшое повышение  $\kappa$  с понижением температуры. В пределе «грязного» сверхпроводника  $\kappa$  возрастает в интервале от  $T_c$  до нуля примерно на 15% (Маки [43], де Жен [12]). По мере удаления от этого предела, т. е. для более чистых сверхпроводников, температурная зависимость  $\kappa$  становится сильнее. Особенно интересна форма  $\xi(T)$  вблизи  $T_c$  в пределе грязного сверхпроводника:

$$\xi(T) = 0,85 (\xi_0 l)^{1/2} \left( \frac{T_c}{T_c - T} \right)^{1/2}. \quad (4.54)$$

Из микроскопической теории можно получить зависимость определенных нами параметров от количества примесей. Для чистого металла при нулевой температуре величина  $\xi(T)$  равна

электромагнитной (пишпардовской) длине когерентности  $\xi_0$  (см. § 3.4). Это не случайно: ведь  $\xi_0$  представляет собой «радиус куперовской пары», и поэтому не удивительно, что он оказывается характерным расстоянием для изменений  $\psi$ . С ростом содержания примесей  $\kappa(T)$  уменьшается; в пределе грязного сверхпроводника  $l \ll \xi_0$ , и при нулевой температуре  $\kappa(T=0) = (\xi_0 l)^{1/2}$ . Можно



Фиг. 86. Зависимость величины  $\kappa$  от остаточного удельного сопротивления  $\rho$  для ряда образцов Рв, содержащих различные примеси [40].

«Теоретическая» кривая построена согласно (4.55), т. е. без подгоночного параметра.

сказать, что с добавкой примесей функция  $\psi$  становится более «податливой». В пределе грязного сверхпроводника, согласно Гудмену [21], можно воспользоваться удобной аппроксимацией

$$\kappa = \kappa_0 + 2,4 \cdot 10^6 \rho \gamma^{1/2}, \quad (4.55)$$

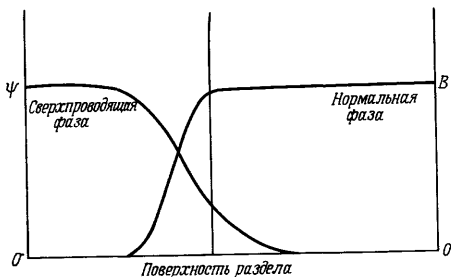
где  $\kappa_0$  — значение  $\kappa$  для чистого сверхпроводника,  $\rho$  — остаточное удельное сопротивление в Ом·м и  $\gamma$  — коэффициент в выражении для электронной части теплоемкости в Дж/м<sup>3</sup>·К<sup>2</sup>. Выражение (4.55) хорошо согласуется с экспериментальными данными (фиг. 86).

Значение параметров  $\kappa$  и  $\xi(T)$  становится яснее, если рассмотреть поверхностную энергию на границе, разделяющей нормальную и сверхпроводящую фазы. Пусть образец находится во внешнем поле  $H_{cb}$ . Свободная энергия Гиббса сверхпроводящей фазы с полностью вытесненным потоком описывается выражением

$$G_s(H_{cb}) = G_s(0) + \frac{1}{2} \mu_0 H_{cb}^2; \quad (4.56)$$

она, конечно, равна энергии нормальной фазы. Это означает, как мы знаем, что для данного поля образец имеет одну и ту же энергию как в нормальной, так и в сверхпроводящей фазе с полностью

вытесненным потоком. Теперь предположим, что мы ввели плоскую поверхность раздела (фиг. 87) площадью  $A$ , слева от которой образец является сверхпроводящим, а справа — нормальным. Как схематически изображено на фиг. 87, переход между фазами не резкий:  $\psi$  падает до нуля на расстоянии  $\xi(T)$ . Следовательно,



Фиг. 87. Поверхность раздела между сверхпроводящей и нормальной фазами в приложенном поле  $H_{cb}$ .

объем сверхпроводящей фазы уменьшается на величину порядка  $A\xi(T)$ , что приводит к положительному вкладу порядка  $(G_n - G_s) A\xi(T)$  в энергию на границе. С другой стороны, магнитное поле проникает в сверхпроводящую фазу на расстояние  $\lambda(T)$ , и это дает отрицательную поверхностную энергию порядка  $(\mu_0 H_{cb}^2 / 2) A\lambda(T) = (G_n - G_s) A\lambda(T)$ . В целом поверхностная энергия на единицу площади равна

$$\sigma = \frac{1}{2} \mu_0 H_{cb}^2 \{\xi(T) - \lambda(T)\}, \quad (4.57)$$

где  $\lambda$ , и  $\xi$  могут умножаться на числовой множитель порядка единицы.

Из выражения (4.57) следует, что при малых  $\kappa = \lambda/\xi$  поверхностная энергия  $\sigma$  положительна, а при больших  $\kappa$  отрицательна. Таким образом, у сверхпроводников I рода поверхностная энергия положительна, а у сверхпроводников II рода она отрицательна. Более точные вычисления с помощью теории ГЛ (см. работу де Жена [12], стр. 207) показывают, что поверхностная энергия меняет знак при  $\kappa = 1/\sqrt{2}$ . Таким образом, при  $\kappa < 1/\sqrt{2}$  поверхностная энергия положительна, и мы имеем дело со сверхпроводником I рода; если же  $\kappa > 1/\sqrt{2}$ , то поверхностная энергия отрицательна, и образец относится к сверхпроводникам II рода.

Связь между отрицательной поверхностной энергией и сверхпроводимостью II рода легко понять, если снова рассмотреть обра-

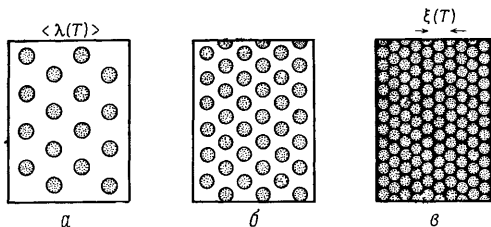
зец во внешнем поле  $H_{cb}$ . Если образец находится в состоянии Мейсснера, т. е. поле из него вытеснено, то плотность свободной энергии Гиббса равна  $G_s + \frac{1}{2}\mu_0 H_{cb}^2$ ; в нормальном состоянии плотность свободной энергии Гиббса также равна  $G_n = G_s + \frac{1}{2}\mu_0 H_{cb}^2$ . Если, однако, ввести разделяющую границу, то из-за возникновения отрицательной поверхностной энергии для рассматриваемого сверхпроводника II рода энергия  $G_n$  понижается. Таким образом, полная энергия минимизируется при введении как можно большего числа границ, разделяющих сверхпроводящие и нормальные области, а именно это и происходит при возникновении вихревой структуры в смешанном состоянии. Из этих соображений опять следует, что для сверхпроводников I рода поверхностная энергия должна быть положительной. Как мы упоминали в § 3.4, это обстоятельство явилось одной из причин, из-за которых Пиппард ввел предположение о существовании в сверхпроводниках длины когерентности.

Теперь мы в состоянии понять кривые намагничивания сверхпроводников II рода, которые были описаны в § 1.2. Вспомним, что намагничивание может быть как обратимым, так и необратимым. В первом случае при увеличении магнитного поля от нуля поток полностью вытесняется, пока значение поля не достигнет вполне определенной величины  $H_{c1}$ ; выше  $H_{c1}$  поток проникает в образец и переход в нормальное состояние происходит при верхнем критическом поле  $H_{c2}$ . Необратимые кривые начинаются с вытеснения потока, не имеют четко определенного нижнего критического поля и переходят в кривую намагничивания для нормального состояния при поле  $H_{c2}$ . При понижении поля от значения  $H_{c2}$  необратимые кривые не совпадают с первоначальными кривыми, полученными при возрастающем поле.

#### 4.3.2. Обратимые сверхпроводники II рода

Поведение обратимых сверхпроводников II рода в возрастающем внешнем поле очень похоже на поведение He II, вращающегося в сосуде со все возрастающей скоростью. При достаточно малом внешнем поле свободная энергия Гиббса  $G_s$  ниже, чем в случае частичного проникновения потока в смешанном состоянии, в силу чего образец остается в состоянии Мейсснера. При поле  $H_{c1}$ , которое аналогично угловой скорости  $\Omega_{c1}$ , поток в форме вихревых нитей проникает в образец. Как мы уже знаем, линии (нити) имеют наружный радиус порядка  $\lambda(T)$ ; следовательно, количество нитей в полях, немного больших  $H_{c1}$ , соответствует расстоянию между нитями порядка  $\lambda(T)$  (фиг. 88, а), причем намагниченность сильно падает по сравнению с ее значением в состоянии Мейсснера. При дальнейшем повышении поля  $H$  количество линий потока возрастает, расстояние между ними уменьшается и стано-

вится существенным взаимодействие между линиями. В результате этого взаимодействия линии потока образуют правильную решетку. Наконец, когда поле достигает значения  $H_{c2}$ , расстояние между линиями становится порядка  $\xi(T)$  и происходит перекры-



Фиг. 88. Схематическое изображение распределения линий потока в обратимом сверхпроводнике II рода для трех различных значений приложенного поля:  $H = H_{c1}$  (а);  $H_{c1} < H < H_{c2}$  (б) и  $H = H_{c2}$  (в).

тие находящихся в нормальном состоянии сердцевин вихревых нитей. Как мы увидим в гл. 6, точное соотношение между  $H_{c2}$  и  $\xi(T)$  имеет вид

$$\mu_0 H_{c2} = \phi_0 / 2\pi \xi^2(T). \quad (4.58)$$

Отметим, что в каждой точке обратной кривой намагничивания вихревые нити движутся таким образом, чтобы сохранялось равновесие во внешнем поле, т. е. конфигурация с однородной концентрацией нитей. Это означает, что кривая намагничивания будет обратной только в том случае, когда вихревые нити могут свободно перемещаться в образце. Если же движение нитей затруднено, они не могут прийти в равновесие, концентрация нитей становится неоднородной и кривая намагничивания будет необратимой.

В случае He II, как мы видели, сердцевин вихрей очень малы, сравнимы с межатомными расстояниями, а поток вокруг оси вихря может достигать стенок сосуда. Вследствие этого угловая скорость  $\Omega_{c2}$  очень велика, а скорость  $\Omega_{c1}$  очень мала. В сверхпроводниках же II рода отношение  $H_{c2}/H_{c1}$  может иметь любую величину больше единицы; это отношение зависит от параметра  $\kappa$ , значение которого определяется удельным сопротивлением в нормальном состоянии [см. (4.55)].

Как мы уже видели в § 1.2, в случае обратной кривой намагничивания можно применять термодинамику и определять термодинамическое критическое поле  $H_{cb}$  по площади под кривой намагничивания, равной  $\mu_0 H_{cb}^2 / 2$ . Соотношение между  $H_{c2}$  и  $H_{cb}$ , кото-

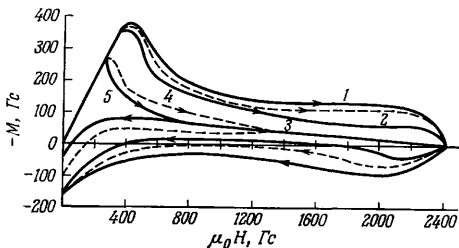
рое мы получим в гл. 6, имеет вид

$$H_{c2} = \kappa \sqrt{2} H_{cb}; \quad (4.59)$$

отсюда, конечно, следует, что  $H_{c2} = H_{cb}$  при  $\kappa = 1/\sqrt{2}$ .

### 4.3.3. Необратимые сверхпроводники II рода, модель Бина и „крип“ потока

Мы уже отмечали, что для обратимости кривой намагничивания линии потока (вихревые нити) должны иметь возможность свободно передвигаться внутри образца, чтобы в любой точке



Фиг. 89. Кривые намагничивания для сплава Pb — 8,23 вес. % In при различной продолжительности предварительного отжига при комнатной температуре [40].

1 — после холодной обработки; 2 — отжиг 30 мин; 3 — отжиг 1 день; 4 — отжиг 18 дней; 5 — отжиг 46 дней.

кривой намагничивания они могли прийти в равновесие. И наоборот, если по какой-либо причине передвижение линий потока в образце затруднено, то кривая намагничивания становится в той или иной степени необратимой. Общие свойства необратимых материалов рассмотрены в статье Ливингстона [40]. На фиг. 89 изображены кривые намагничивания образца из сплава свинец — индий, подвергавшегося отжигу различной длительности. Как можно видеть, степень необратимости уменьшается с увеличением времени отжига. Отметим также, что поле  $H_{c2}$ , при котором восстанавливается нормальное состояние, не зависит от степени необратимости. Увеличение необратимости можно объяснить пиннингом линий потока на металлургических дефектах. Так, магнитный поток не может скачком войти в образец при поле, равном  $H_{c1}$ , поскольку он закреплен вблизи поверхности, и кривая намагничивания лишь постепенно отклоняется от начальной диамагнитной кривой. Равным образом, когда поле снижается от значения, большего  $H_{c2}$ , поток остается захваченным в образце.



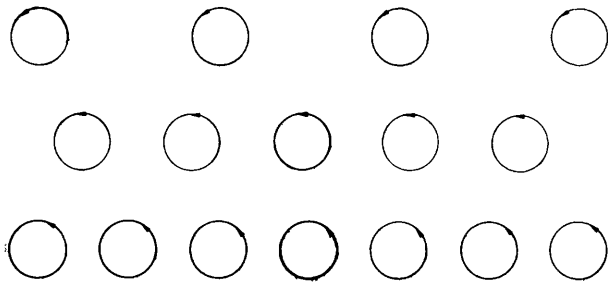
При этом образец может быть парамагнитным ( $\langle B \rangle > \mu_0 H$ ), а не диамагнитным, о чем свидетельствуют некоторые кривые на фиг. 89.

Механизм пиннинга пока еще не вполне понят, хотя в общих чертах ясно, что пиннинг наиболее эффективен в отношении отдельной вихревой линии. Приближение к обратимости с увеличением отжига доказывает, что пиннинг зависит от металлургических дефектов. Характер пиннинга может изменяться при холодной обработке образца (см. фиг. 89), при выпадении второй фазы (см., например, Ливингстон [40]) или под действием облучения (Каллен и Новак [10]). Пиннинг потока всегда усиливается с ростом неоднородности образца. Общий обзор вопроса см. в работах Ливингстона и Шадлера [41], а также Кемпбелла и Иветтса [8].

Возвращение намагниченности к нулю при  $H = H_{c2}$  не зависит от степени необратимости; отсюда следует, что с приближением к  $H_{c2}$  «сила» пиннинга потока стремится к нулю. Это легко понять. При  $H = H_{c2}$  нормальные сердцевинки вихревых нитей перекрываются [см. выражение (4.58)]. Вместе с тем взаимодействие между центрами пиннинга и решеткой вихревых линий зависит от различий между нормальными сердцевинами и сверхтекучей областью вне сердцевинки. С приближением  $H$  к  $H_{c2}$  площадь сверхтекучей компоненты в сечении, перпендикулярном полю, приближается к нулю, соответственно стремится к нулю и эффективность пиннинга. Таким образом, дефекты изменяют  $H_{c2}$  только в том случае, если они изменяют среднюю длину свободного пробега  $l$ , а следовательно, и  $\kappa$ .

Для объяснения необратимых кривых намагничивания оказалась очень удачной модель, предложенная Бином [6]. Рассмотрим, например, начальный участок кривой. Если бы кривая была обратимой, поток вошел бы скачком при поле  $H_{c1}$  в образец, а в поле, немного превышающем  $H_{c1}$ , магнитный поток в образце был бы в среднем однороден, как изображено на фиг. 88, а. При наличии же пиннинга линии потока удерживаются вблизи поверхности; возникнет градиент магнитной индукции, которая изменяется от значения на поверхности до нулевого значения где-то внутри образца (фиг. 90). Согласно уравнению Максвелла  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ ; наличие такого градиента поля означает, что ток течет перпендикулярно полю. Как можно видеть из фиг. 90, ток возникает в силу того, что при изменении индукции  $\mathbf{B}$  токи, связанные с соседними рядами вихревых линий, не компенсируют друг друга. Модель Бина в ее простейшей форме предполагает, что эффект пиннинга определяет максимальный градиент индукции или, эквивалентно, максимальный ток  $J_c$ . В качестве примера рассмотрим кривую намагничивания, начинающуюся с нулевого внешнего поля и нулевой намагниченности. При увеличении поля начинается его проникновение, и градиент поля всегда определяется током  $J_c$ . После-

довательные состояния образца изображены на фиг. 91, а. Можно видеть, что намагниченность образца при данном внешнем поле зависит прежде всего от размера и формы образца и, кроме того, от магнитной «истории», т. е. от характера намагничивания в прошлом. Например, на фиг. 91, б изображена индукция после повышения внешнего поля и последующего его понижения. Нахождение средней индукции  $\langle B \rangle$  и намагниченности по графикам типа



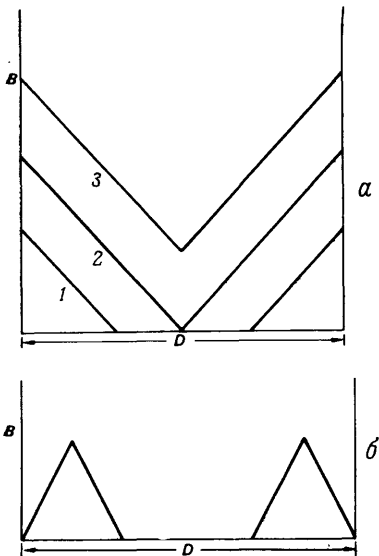
Фиг. 90. Схема распределения линий потока вблизи поверхности, когда пиннинг препятствует свободному движению линий потока в глубь образца.

фиг. 91 весьма несложно (см. задачу 4.10). Намагниченность зависит от некоторого подгоночного параметра, который для случая пластины в параллельном поле равен  $B^* = \frac{1}{2}\mu_0 J_c D$ . Согласие с экспериментом очень хорошее; примеры приведены на фиг. 92 и 93. Стоит отметить, что модель Бина была использована также для интерпретации экспериментов по определению потерь в сверхпроводниках II рода в переменных полях низкой частоты. За один цикл кривая намагничивания образует гистерезисную петлю (фиг. 93). Площадь петли, зависящая от максимального значения приложенного поля, дает потери за цикл. Обзор свойств сверхпроводников II рода в переменных внешних полях см. в статье Мелвилла [44].

Нет никаких оснований полагать, что ток  $J_c$  не должен зависеть от значения  $B$ . Действительно, как мы видели, сила пиннинга потока, а вместе с ней и  $J_c$  стремятся к нулю при  $H = H_{c2}$ , так что с увеличением  $B$  ток  $J_c$  должен понижаться. Часто используют формулу  $J_c = \alpha / (B + B_0)$ , где  $\alpha$  и  $B_0$  — подгоночные параметры (Ким и др. [33]).

Наконец, нужно остановиться на последствиях того факта, что распределение потока в данной точке необратимой кривой намагничивания является метастабильным. Установлению равновесного

распределения потока, соответствующего этой же точке на обратной кривой, мешает наличие центров пиннинга. Однако решетка, образованная линиями потока, обладает некоторой тепловой

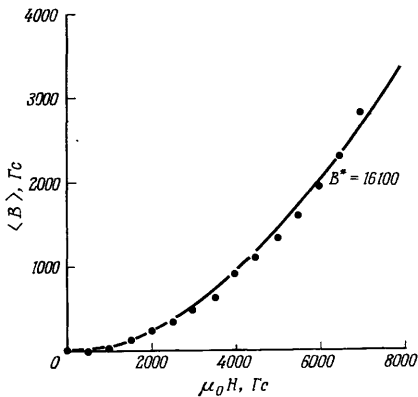


Фиг. 91. *a* — профили магнитной индукции  $B$  в необратимых сверхпроводниках II рода.

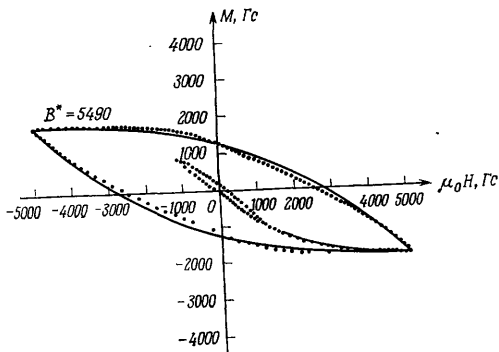
Образец — пластина толщиной  $D$  — находится во внешнем магнитном поле, повышающемся от нулевого значения. Кривые 1—3 — профили индукции  $B$  в образце для последовательно растущих значений внешнего поля, начиная с нуля.

*b* — профиль индукции  $B$  после повышения поля с последующим понижением его до нуля.

энергией. Это означает, что она колеблется и может иногда «освободиться» от одной, обусловленной пиннингом конфигурации с переходом к другой конфигурации, несколько более близкой к равновесной. Первое экспериментальное доказательство того, что распределение потока действительно медленно изменяется со временем, было получено Кимом и др. [32]; они показали, в частности, что поток, захваченный полым цилиндром, изготовленным из необратимого сверхпроводника II рода, затухает и что захваченный поток является линейной функцией  $\ln t$ . Пример



Фиг. 92. Начальное проникновение потока в цилиндр из спеченного  $V_3Ga$  [6]. Теоретическая кривая построена с использованием оптимального значения параметра  $B^*$ .

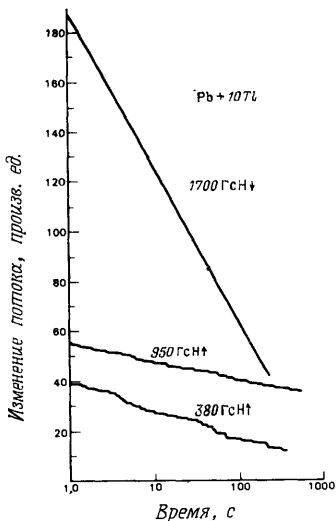


Фиг. 93. Полная кривая намагничивания и петля гистерезиса образца из свинца в пористом стекле викор [6].

Как и на фиг. 92, кривые рассчитаны теоретически.

такого логарифмического затухания потока со временем изображен на фиг. 94. Это явление называют «крипом» потока.

Процессы тепловой активации, аналогичные описанному выше, обычно также приводят к логарифмической временной зависимости; например, в некоторых магнитных материалах намагничен-



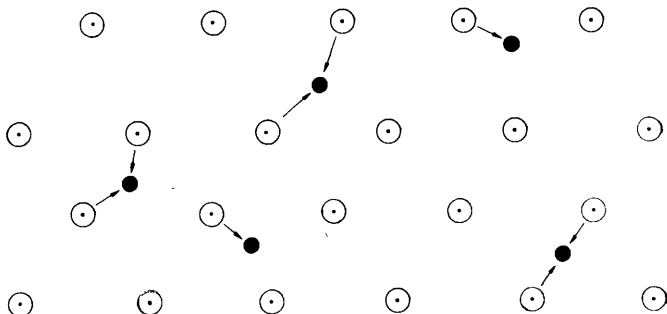
Фиг. 94. Изменение потока со временем для сплошного цилиндра из Рb + 10% Тl (шкала логарифмическая) [7].

Для каждого случая приведено значение приложенного поля, а стрелки указывают, повышалось или понижалось поле  $H$ . Измерения проводились с помощью преобразователя потока и сквида (см. § 5.3).

ность растет именно таким образом после резкого изменения внешнего поля (Стрит и Вулли [56]); как мы увидим в § 4.5, то же самое происходит в случае некоторых сверхтекучих течений в He II.

Теорию крипа потока в необратимых сверхпроводниках II рода впервые развил Андерсон [2], и мы будем исходить из высказанных им идей. Начнем с немного более детального рассмотрения механизма пиннинга потока в сверхпроводниках и, в частности, покажем, что упругость решетки, образуемой линиями потока, играет решающую роль в механизме пиннинга (Лабуш [34]). Предположим для простоты, что пиннинг обусловлен хаотическим распределением точечных центров, подобным изображенному на

фиг. 95. Можно видеть, что суммарная сила, действующая на жесткую решетку, равна нулю, поскольку направление силы, действующей на отдельную линию решетки, может быть любым. Однако если решетка обладает некоторой упругостью, то могут возникать «сгустки» линий потока, которые будут скапливаться за барьерами, обуславливающими пиннинг, и постепенно, в силу тепловой



Фиг. 95. Взаимодействие жесткой решетки линий потока (белые кружки) с распределением точечных центров (черные кружки).

Изображены центры, притягивающие линии; стрелками обозначены направления сил действующих на отдельную линию потока.

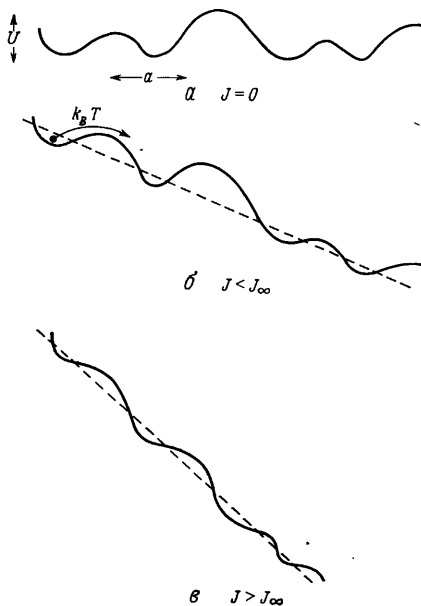
активации, проходить через эти барьеры. Это, нужно признаться, несколько туманное представление о «сгустке» линий как о движущемся образовании было введено Андерсоном [2].

Теперь рассмотрим потенциальную энергию  $V(x)$  такого сгустка как функцию положения. Пусть потенциал в отсутствие градиента магнитной индукции представляет собой случайный ряд потенциальных ям со средней глубиной  $U$  и со средней шириной  $a$ , как изображено на фиг. 96, а. При наличии градиента индукции, как на фиг. 91, потенциал характеризуется добавочным постоянным наклоном в некотором направлении (фиг. 96, б); наклон возникает за счет давления неоднородно распределенного потока (см. фиг. 90). Можно также сказать, что он является мерой действующей на линии потока силы Лоренца, обусловленной циркулирующим током  $\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{B}/\mu_0$ . Средний наклон равен

$$(dV/dx)_{av} = BJlS. \quad (4.60)$$

Здесь  $S$  — площадь сгустка, так что  $BS$  представляет собой полный поток в сгустке. Таким образом, можно считать, что кривые на фиг. 96 представляют потенциальную энергию сгустка, взаимо-

действующего с центром пиннинга и имеющего среднюю длину  $l$ . Процесс крипа потока состоит в перепрыгивании густка из одной ямы в следующую (фиг. 96, б). Поскольку средняя ширина ямы



Фиг. 96. Потенциальная энергия густка линий потока в отсутствие (а) и в присутствии (б, в) градиента потока.

равна  $a$ , средняя высота энергетического барьера, преодолеваемого густком, равна  $U - BJlSa$ . Скорость крипа потока определяется обычной при тепловой активации формулой

$$R = \Omega \exp \left\{ - (U - BJlSa) / k_B T \right\}, \quad (4.61)$$

где  $\Omega$  — частота ударов о потенциальный барьер, которую можно принять за частоту колебаний густка.

Отметим прежде всего, что, если мы признаем возможность крипа потока, понятие о критическом токе  $J_c$  теряет свою остроту: согласно формуле (4.61), при любом значении  $J$  всегда имеет место некоторое движение потока. Однако для модели Бина мож-

но определить критический ток  $J_c$  как такой ток, при котором за время наблюдений не обнаруживается никакого движения потока. При этом, поскольку  $R$  экспоненциально зависит от  $J$ , величина  $J_c$  по существу нечувствительна к выбору времени наблюдения. Важным параметром является значение тока  $J_{c0}$ , при котором средняя высота барьера равна нулю:

$$J_{c0} = U/BlSa. \quad (4.62)$$

Как можно видеть из фиг. 96, *в*, при  $J > J_{c0}$  барьер, препятствующий потоку, фактически отсутствует; в этой области наблюдается не крип потока, а течение. Мы можем определить для данного эксперимента критический ток  $J_c$  как ток, при котором скорость крипа имеет критическое значение  $R_c$ , так что меньшие скорости крипа в этом эксперименте не наблюдаются. Ясно, что

$$J_c = J_{c0} \left( 1 - \frac{k_B T}{U} \ln \frac{\Omega}{R_c} \right). \quad (4.63)$$

Экспериментальные данные о крипе потока показывают, что  $U \gg \gg k_B T$  (см., например, Вебб [65] или Кемпбелл и Иветтс [8]); следовательно, измеряемое значение  $J_c$  равно  $J_{c0}$ . Поэтому в частном случае линий потока в сверхпроводнике неопределенность значения  $J_c$  существует только лишь в принципе, практически же  $J_c$  — вполне определенная величина.

Теперь выведем логарифмическую временную зависимость потока в случае его крипа. Детали вычислений зависят от выбранной геометрии. Для удобства рассмотрим затухание захваченного потока в полном цилиндре с внутренним радиусом  $r$  и толщиной стенок  $w \ll r$ . Геометрия и профиль поля изображены на фиг. 97. При скорости крипа  $R$  скорость изменения потока  $\Phi$ , захваченного внутри цилиндра, равна

$$d\Phi/dt = -2\pi r B_{in} b R, \quad (4.64)$$

где  $b$  — среднее расстояние, проходимое при одном скачке потока; потоком в стенке цилиндра мы пренебрегаем. Поток равен  $\Phi = \pi r^2 B_{in}$ , и при однородном токе, как на фиг. 97, имеем  $\mu_0 J = (B_{in} - B_{out})/w$ . Подставляя это выражение в уравнение (4.64), получаем следующее уравнение для  $J$ :

$$\frac{1}{2} \mu_0 r w \frac{dJ}{dt} = -\Omega B_{in} b \exp \left\{ -(U - B_{in} J l S a) / k_B T \right\}. \quad (4.65)$$

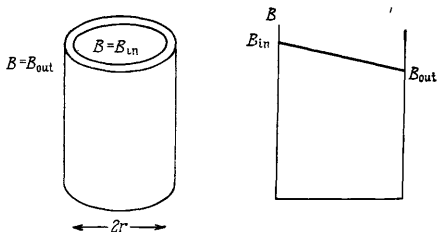
Через достаточно большой промежуток времени, т. е. когда  $J(t) \ll \ll J(0)$ , это уравнение имеет решение

$$J(t) = J(0) - \frac{k_B T}{B_{in} l S a} \ln t; \quad (4.66)$$

таким образом, мы получили логарифмическую временную зависимость типа изображенной на фиг. 94.



Теория крипа, которую мы кратко изложили, содержит ряд неизвестных параметров, таких, как высота барьера  $U$  и объем сгустка  $lS$ . Измерения критического тока и скорости крипа [выражения (4.62) и (4.66)] дали некоторую информацию об этих параметрах. С другой стороны, поскольку параметров несколько, все



Фиг. 97. Полый цилиндр с захваченным потоком и профиль поля в стенке цилиндра.

Поле внутри обозначено через  $B_{in}$ , а снаружи — через  $B_{out}$ , причем мы предполагаем, что  $B_{in} - B_{out} \ll B_{in}$ .

еще имеются неясности даже в фундаментальном вопросе: возникает ли крип в результате тепловой активации или вызывается какой-либо другой причиной? Полное обсуждение этой проблемы и других, связанных с крипом потока, можно найти в обзоре Вебба [65] и в книге Кемпбелла и Иветса [8].

#### § 4.4. Сравнение вихрей в сверхпроводниках и в гелии II

Для удобства перечислим сходные и различные черты вихревых нитей и вихревых состояний в HeII и в сверхпроводниках.

Отдельная нить подчиняется условию квантования. В HeII квантуется циркуляция вихря, а в сверхпроводнике квантуется магнитный поток, или флюксонид.

Вихревая нить состоит из центральной сердцевинки, окруженной циркулирующими токами частиц. В сверхпроводнике радиус сердцевинки зависит от средней длины свободного пробега  $l$ , и его типичный размер составляет сотни ангстрем; этот размер (радиус) можно отождествить с зависящей от температуры длиной когерентности  $\xi(T)$ , представляющей собой расстояние, на котором сверхпроводящая волновая функция падает до нуля. При приближении  $T$  к  $T_c$  длина когерентности  $\xi(T)$  стремится к бесконечности. Аналогичным образом в HeII радиус сердцевинки вихря

можно отождествить с корреляционной длиной. Из экспериментов с вихревыми кольцами следует, что радиус сердцевин примерно равен межатомному расстоянию. По аналогии со сверхпроводниками для HeII можно определить зависящую от температуры длину когерентности (см. § 6.8). Согласно оценке, эта длина также порядка нескольких ангстрем, за исключением области вблизи  $T_\lambda$ .

Сердцевина сверхпроводящего вихря состоит из нормального металла. В сердцевине вихря в HeII сверхтекучая компонента может либо отсутствовать, либо присутствовать, но в последнем случае она вращается как целое; имеются некоторые экспериментальные и теоретические доказательства того, что возбуждения, существующие в нормальной жидкости, стремятся скапливаться вблизи сердцевин вихря.

Картина потока вне сердцевин в HeII изменяется с расстоянием  $r$  как  $1/r$ , в то время как в сверхпроводнике при больших  $r$  поток затухает по закону  $\exp(-r/\lambda)$  из-за связи с магнитным полем. Малый радиус сердцевин и протяженная картина потока в вихревой нити в HeII означает, что эти нити более всего напоминают вихревые линии в «предельных» сверхпроводниках II рода, когда параметр  $\kappa$  очень велик.

Вихревые нити возникают в HeII при охлаждении жидкости в сосуде, вращающемся с угловой скоростью  $\Omega$ , а в сверхпроводнике они возникают в результате наложения магнитного поля  $H$ . Минимальное поле  $H_{c1}$  образования вихревых нитей соответствует такому значению  $H$ , выше которого проникновение потока приводит к снижению свободной энергии. Точно таким же образом можно определить минимальную угловую скорость  $\Omega_{c1}$ , при которой происходит образование вихревых нитей в HeII. Аналогично можно определить верхнее критическое поле  $H_{c2}$  и верхнюю критическую угловую скорость  $\Omega_{c2}$ . При достижении каждого из этих значений начинается перекрытие сердцевин вихрей, т. е. исчезновение сверхтекучести или сверхпроводимости в объеме жидкости.

До тех пор пока поле  $H_{c2}$  не станет больше  $H_{c1}$ , смешанное состояние в данном сверхпроводнике возникнуть не может. Поскольку угловая скорость  $\Omega_{c1}$  очень мала, а скорость  $\Omega_{c2}$  очень велика, HeII в большинстве случаев ведет себя как предельный сверхпроводник II рода.

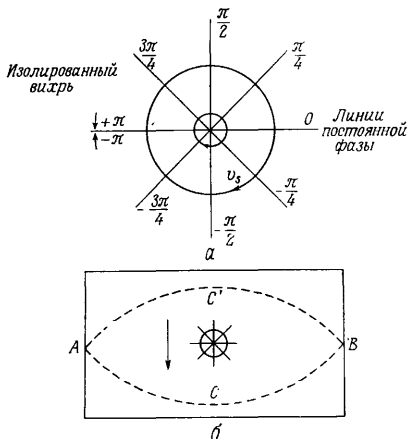
Форма кривой намагничивания сверхпроводника II рода зависит главным образом от эффективности пиннинга потока. Гелий II во вращающемся сосуде аналогичен сверхпроводнику, находящемуся в обратимом смешанном состоянии. Ниже мы увидим, что при наличии сверхщели свойства HeII имеют некоторую аналогию со свойствами необратимого сверхпроводника II рода.

## § 4.5. Динамика вихревых состояний

Перейдем теперь к более общему рассмотрению вихревого движения и влияния, которое оно оказывает на течение сверхтоков. Основная идея заключается в том, что движение вихревой нити всегда связано с потерей энергии; диссипация энергии обычно проявляется в HeII как падение давления или температуры, а в сверхпроводнике II рода — как возникновение напряжения.

### 4.5.1. Сдвиг и „сбой“ фазы

Выражение для падения давления или для напряжения можно получить, введя понятие о «сбое» фазы (Андерсон [3])<sup>1</sup>. На фиг.



Фиг. 98. *а* — линии постоянной фазы вокруг изолированной вихревой линии. *б* — вихревая линия, пересекающая канал со сверхтекучей жидкостью.

Разность фаз между точками *A* и *B* до прохождения вихря через канал (контур *ACB*) отличается на  $2\pi$  от разности фаз после прохождения вихря через канал (контур *AC'B*).

98, *а* изображены линии постоянной фазы в сверхтекучей жидкости в случае изолированного вихря с  $n = 1$ . Предположим, что вихрь движется как раз поперек отверстия канала с HeII или поперек сверхпроводящей пластины, как изображено на фиг. 98, *б*.

<sup>1</sup>) Термином «сбой» фазы мы иногда переводим английский термин phase slip. Однако в ряде случаев по смыслу правильнее говорить не о сбое, а о сдвиге фазы. Поэтому чаще употребляется последний термин. — Прим. ред.

Прежде чем вихрь начал двигаться, можно измерить разность фаз сверхтекучей волновой функции между концами отверстия по пути типа  $ACB$ . После того как вихрь переместился и «прошел» отверстие, измерим разность фаз на пути типа  $AC'B$ . Однако разность фаз вдоль этих двух путей неодинакова; она отличается на величину, равную изменению фазы при одном обороте вокруг вихревой нити, а именно на  $2\pi$ . Таким образом, если в секунду проходит  $n$  вихрей, то разность фаз между  $A$  и  $B$  меняется со скоростью

$$\frac{d}{dt}(S_A - S_B) = 2n\pi. \quad (4.67)$$

Волновую функцию для HeII можно записать следующим образом (см. гл. 2):

$$\psi = (\rho_s/m_4)^{1/2} \exp(-i\mu t/\hbar), \quad (4.68)$$

где  $\mu$  — химический потенциал (2.16). Если  $\mu$  медленно меняется в пространстве, фазу вблизи  $A$  можно записать в виде

$$S_A = -\mu_A t/\hbar. \quad (4.69)$$

Комбинируя это выражение с уравнением (4.67), получаем

$$\frac{d}{dt}(S_A - S_B) = -(\mu_A - \mu_B)/\hbar = 2n\pi. \quad (4.70)$$

Уравнение (4.70) имеет фундаментальное значение. В HeII в зависимости от экспериментальных условий разность химических потенциалов проявляется как изменение либо температуры, либо давления или как изменение обеих величин [см. (2.37)]. В любом случае разность названных величин возникает в направлении, составляющем прямой угол с движением вихревой нити. В сверхпроводнике, согласно микротемории в форме Горькова, в равновесии волновая функция конденсата зависит от времени как  $\exp(-2i\mu t/\hbar)$ . Здесь  $\mu$  — электрохимический потенциал, так что  $2\mu$  — энергия электронной пары в конденсате. Разность значений электрохимического потенциала проявляется как разность потенциалов:

$$2eV_{AB}/\hbar = 2n\pi. \quad (4.71)$$

И в этом случае разность потенциалов образуется в направлении, перпендикулярном движению вихря.

С помощью зависящей от времени части фазы мы можем непосредственно связать движение вихря с потерей энергии в сверхтекучем потоке. Для случая, когда  $\mu$  меняется в пространстве медленно и не зависит от времени, можно взять градиент от уравнения (4.70); в результате находим

$$\frac{d}{dt}(\hbar \nabla S) = -\nabla \mu. \quad (4.72)$$

Произведя обычное отождествление

$$\hbar \nabla S = \mathbf{p}_s, \quad (4.73)$$

где  $\mathbf{p}_s$  — сверхтекучий импульс, из уравнения (4.72) получаем второй закон Ньютона для сверхпроводящих (сверхтекучих) частиц

$$\frac{d\mathbf{p}_s}{dt} = -\nabla\mu = \mathbf{F}. \quad (4.74)$$

Уравнения (4.74) и (4.72) можно интерпретировать двояким образом. Во-первых, сверхтекучая жидкость может ускоряться под действием приложенного извне градиента химического потенциала; относительные фазы в разных точках жидкости будут при ускорении изменяться. Во-вторых, пересечение вихрем линии, соединяющей две точки в сверхтекучей жидкости, также приводит, согласно уравнению (4.70), к возникновению разности химических потенциалов, что обуславливает диссипацию энергии сверхтекучего потока между этими двумя точками. Конечно, обе эти стороны поведения сверхтекучего потока тесно связаны друг с другом и обычно проявляются вместе.

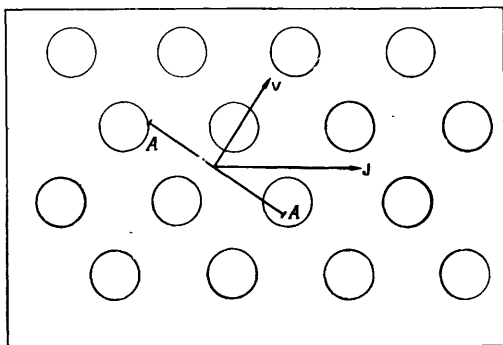
На практике движение вихрей вызывают, пропуская некоторый поток перпендикулярно вихрям. В HeII движущей силой является сила Магнуса (см. § 4.1). В сверхпроводниках ситуация более сложная. В случае HeII при выводе выражения для силы Магнуса мы основывались на переходе к системе отсчета, в которой нормальная жидкость покоилась. В сверхпроводнике такое преобразование, вообще говоря, не имеет смысла, поскольку металлическая решетка фиксирует систему отсчета. Поэтому решить вопрос о наличии в сверхпроводнике сил Магнуса очень трудно. Более того, поскольку для сверхпроводника поток представляет собой электрический ток, на него в магнитном поле действует сила Лоренца. Эта сила заставляет двигаться линии потока. Сила на одну линию (нить) потока определяется обычным выражением

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \Phi_0, \quad (4.75)$$

где  $\mathbf{J}$  — протекающий ток и  $\Phi_0$  — вектор с величиной  $h/2e$ , направленный вдоль линии потока.

Под воздействием одной лишь силы Магнуса вихри в конце концов движутся вместе с протекающим током, поскольку в этом случае суммарной силы нет. Мы можем назвать такое движение эффектом Магнуса. Тогда сдвиг фазы перпендикулярен току, и в сверхпроводнике должно возникнуть большое поперечное (холловское) напряжение. С другой стороны, под влиянием силы Лоренца вихри движутся перпендикулярно току, и возникает продольное напряжение. Общая ситуация изображена на фиг. 99. Эксперимент же показывает, как мы скоро убедимся, что в сверх-

проводнике превалирует продольное напряжение, следовательно, в смешанном состоянии сверхпроводников сила Магнуса, по-видимому, существенной роли не играет. Возможно, однако, что



Фиг. 99. Движение вихрей в сверхпроводнике.

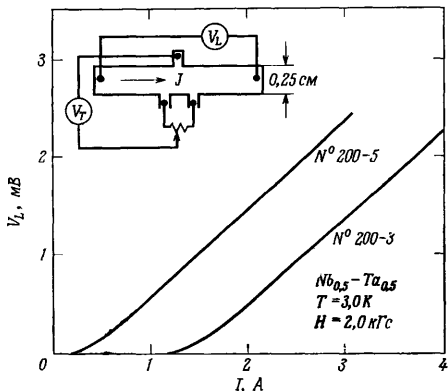
Ток течет в направлении  $J$ , а линия потока движется вдоль  $v$ . Разность химических потенциалов (напряжение в сверхпроводнике) изменяется вдоль  $AA$  под прямым углом к  $v$ . Если скорость  $v$  направлена вдоль  $J$  (эффект Магнуса), возникает поперечное напряжение. Если скорость  $v$  перпендикулярна  $J$ , напряжение является продольным.

эффект Магнуса, приводящий к большому холловскому напряжению, может проявиться в предельно чистом сверхпроводнике, когда время релаксации решетки очень велико.

#### 4.5.2. Состояние эксперимента в случае сверхпроводников

Поскольку диссипация зависит от движения вихрей, протекание тока в сверхпроводнике, находящемся в смешанном состоянии, зависит от степени имеющего место пиннинга. На фиг. 100 изображены типичные результаты измерений продольного напряжения  $V_L$ , возникающего в сверхпроводящей пластинке. Схематически изображена также геометрия эксперимента. Вплоть до определенного тока  $I_c$  никакого измеримого напряжения не возникает. С точки зрения представлений о крипе потока (см. § 4.3) мы знаем, что в принципе, как бы ни был мал ток, всегда должно существовать некоторое активированное движение линий (нитей) потока, сопровождаемое появлением напряжения. Однако чувствительность приборов для измерения напряжения в экспериментах, подобных описанным выше (см. фиг. 100), обычно порядка

$10^{-5}$  В/м, в то время как чувствительность магнетометра, служащего для наблюдения крипа потока (см. фиг. 94), эквивалентна напряжению порядка  $10^{-14}$  В/м. Таким образом, связанное с крипом напряжение не может обнаруживаться на кривых, изображенных на фиг. 100, и мы можем считать, что критический ток  $I_c$  соответствует определяемой выражением (4.62) плотности тока  $J_{c0}$ , при которой средняя высота барьера равна нулю.



Фиг. 100. Вольтамперные характеристики [57].

В левом верхнем углу изображена геометрия эксперимента для плоского образца. Напряжение измерялось в двух направлениях, параллельно ( $V_L$ ) и перпендикулярно ( $V_T$ ) току; магнитное поле перпендикулярно пластине. Линии представляют собой вольтамперные характеристики  $V(I)$  двух образцов Nb — Ta, содержащих различное количество дефектов.

Если не считать начального изгиба на вольтамперной характеристике, происхождение которого непонятно, продольное напряжение описывается выражением

$$V = R_F (I - I_c). \quad (4.76)$$

Соответствующую область характеристики часто называют областью смешанного состояния с сопротивлением. Как уже отмечалось выше, напряжение измеряется в направлении, перпендикулярном направлению движения линий потока, так что продольное напряжение (4.76) соответствует поперечному движению линий потока. И наоборот, измерения поперечной компоненты напряжений дают сведения о движении линий потока в направлении пропускаемого тока. Результаты таких измерений (см. обзор Кима и Стефена в книге Паркса [48]) зависят от материала образца, но

всегда свидетельствуют о малости поперечного (холловского) напряжения — оно имеет такую же величину, как для нормального состояния. Поэтому мы приходим к выводу, что в экспериментах, аналогичных изображенному на фиг. 100, линии потока движутся в образце преимущественно перпендикулярно току.

Характеристики течения потока на фиг. 100 и в формуле (4.76) зависят от двух параметров: от критического тока  $I_c$  и от сопротивления течению потока  $R_F$ . Как мы уже выяснили при обсуждении вопроса о крипе потока, ток  $I_c$  определяется эффективностью имеющихся центров пиннинга; это иллюстрируется фиг. 100, на которой приведены данные для двух образцов с сильно отличающимися значениями  $I_c$ . С другой стороны, при течении линий потока их установившаяся скорость определяется равновесием между силой Лоренца и силой вязкого трения, действующей на линию потока. Эта конечная установившаяся скорость влияет на значение  $R_F$ . Поскольку у обоих образцов на фиг. 100 значение  $R_F$  одинаково, можно полагать, что величина  $R_F$  относительно нечувствительна к природе и эффективности центров пиннинга и определяется общими свойствами всего образца. Действительно, низкотемпературное удельное сопротивление течению потока  $\rho_F$  удовлетворяет простому эмпирическому соотношению

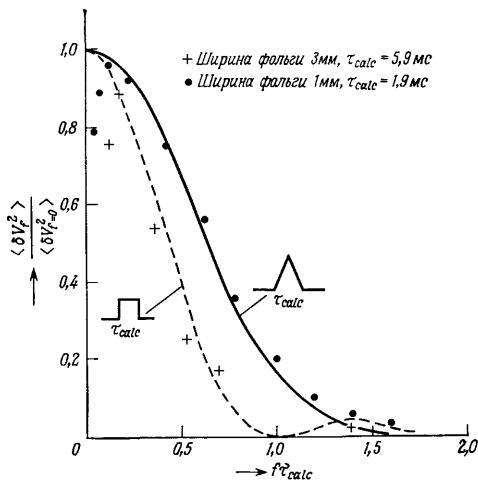
$$\rho_F/\rho_n = \langle B \rangle / \mu_0 H_{c2}, \quad (4.77)$$

где  $\rho_n$  — удельное сопротивление в нормальном состоянии (Стрнад и др. [57]). Интерпретация этого соотношения проста. Когда линии потока закреплены и неподвижны, ток через образец, естественно, представляет собой сверхпроводящий ток, обтекающий нормальные сердцевинки линий потока, и никакого напряжения не наблюдается. Когда, однако, линии потока движутся (см., например, фиг. 99), ток уже не может все время обтекать сердцевинки, часть его должна проходить через них. Если справедливо соотношение (4.77), то ток просто проходит через сердцевинки, поскольку  $\langle B \rangle / \mu_0 H_{c2}$  есть мера части образца, заполненной нормальными сердцевинками.

Результаты, подобные приведенным на фиг. 100, сами по себе еще не свидетельствуют о том, что напряжение в смешанном состоянии фактически связано с движением линий потока. Мы можем привести еще два более непосредственных доказательства того, что линии потока действительно движутся. Во-первых, проводились измерения шумового напряжения во время течения потока (ван Ооейен и ван Гурп [62], ван Гурп [61]). Согласно нашей точке зрения, напряжение возникает в результате движения линий потока от одной стороны образца к другой (см. фиг. 99). В соответствии с представлением о пиннинге потока можно думать, что обычно структурной единицей движения является сгусток линий, а не отдельная линия. В силу дискретности сгустков, можно ожи-



дать, что напряжение вдоль образца должно флуктуировать во времени. Проще всего предположить, что напряжение состоит из налагающихся прямоугольных импульсов, каждый из которых соответствует прохождению через образец одного сгустка. Здесь мы имеем полную аналогию с электронной трубкой, где перенос тока осуществляется электронами, а напряжение представляет



Фиг. 101. Нормированный частотный спектр шума в слабом поле, измеренный для двух образцов ванадиевой фольги толщиной 30 мкм [62].

Кривые получены путем расчета для прямоугольных (штриховая линия) и треугольных (сплошная линия) импульсов. В каждом случае вычисленное время прохождения  $\tau_{calc}$  берется из измерений при постоянном напряжении; подгоночным параметром является размер  $\phi$  сгустка.

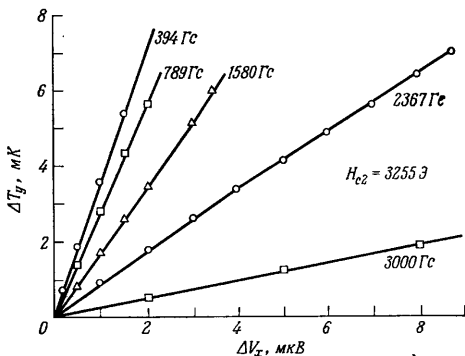
собой ряд последовательных импульсов, генерируемых отдельными электронами. Поскольку напряжение флуктурует во времени, оно содержит компоненты с отличными от нуля частотами, а также компоненту, отвечающую постоянному току, т.е. нулевой частоте. В электронной трубке эти флуктуации напряжения представляют собой дробовой шум, а частотный спектр (среднеквадратичное напряжение  $\langle \delta V_f^2 \rangle$  на единичную ширину полосы) имеет такую же форму, как при дифракции Фраунгофера от одной щели.

При измерениях шума на образце, находящемся в смешанном состоянии с сопротивлением, получают результат, аналогичный

наблюдаемому для дробового шума (фиг. 101). Если предположить, что прохождение одного сгустка генерирует один прямоугольный импульс напряжения продолжительностью  $\tau$  ( $\tau$  — время прохождения сгустка через образец), то спектр дробового шума образца в смешанном состоянии должен иметь вид

$$\langle \delta V_f^2 \rangle = 2\phi V_{d.c.} \left( \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \right)^2 \delta f; \quad (4.78)$$

здесь  $\phi$  — размер сгустка. Время прохождения  $\tau$  можно вычислить по постоянному напряжению, так что единственным свободным параметром спектра шума является размер сгустка. Как можно видеть на фиг. 101, экспериментальные точки хорошо согласуются с теоретическими кривыми; размер сгустка  $\phi$  часто лежит в

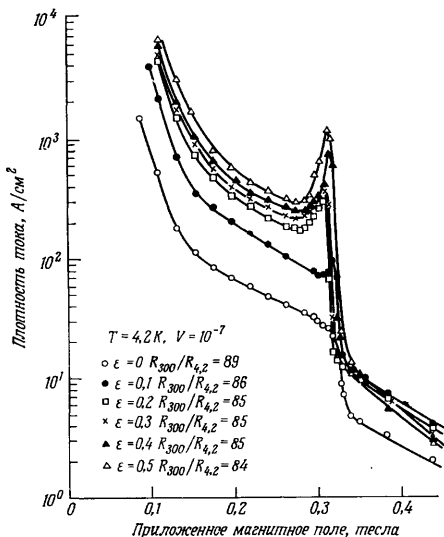


Фиг. 102. Зависимость поперечной разности температур от продольной разности потенциалов для сверхпроводников II рода (сплавов In — Pb) при различных значениях магнитного поля [53].

области между  $10^3 \phi_0$  и  $10^5 \phi_0$ . Нужно иметь в виду, однако, что полученные позднее экспериментальные результаты и их интерпретация несколько более сложны, чем в случае, представленном на фиг. 101.

Второе доказательство движения линий потока через образец, находящийся в смешанном состоянии с сопротивлением, дают измерения термомагнитных эффектов. Сердцевина линии магнитного потока состоит из нормального материала и обладает некоторой энтропией. Поэтому при движении через образец линия потока переносит энтропию; сторона образца, которую покидают линии потока, охлаждается (снижение энтропии), а противоположная сторона нагревается. В стационарных условиях возни-

кает температурный градиент, перпендикулярный направлению протекающего тока. Поперечный градиент температуры  $\Delta T_y$  много больше (примерно в  $10^3$  раз), чем в нормальном состоянии, и в соответствии с описанным выше механизмом он пропорционален градиенту продольного напряжения  $\Delta V_x$ . Некоторые экспериментальные результаты изображены на фиг. 102.



Фиг. 103. Влияние пластической деформации (изгиба) на кривую зависимости  $J_c$  от  $H$  для кристалла Nb в поперечном внешнем поле [58]

Параметр  $\varepsilon$  — мера величины деформации. Измерения проводились на обезгаженном напряженном образце (без промежуточного отжига); ось кристалла параллельна направлению [110].

Большое число экспериментов было проведено для определения влияния структурных дефектов на плотность критического тока  $J_c$ . Как мы и предполагали,  $J_c$  растет с увеличением степени пиннинга потока. На фиг. 103 изображены типичные экспериментальные результаты. С увеличением деформаций в образце растет и  $J_c$ . Заметим, что поле  $H_{c2}$  почти не меняется, поскольку деформации не оказывают заметного влияния на остаточное удельное сопротивление  $\rho$ , а с ним и на  $\kappa$ . Фиг. 103 нужно сравнить с фиг. 89, из

которой видно, что степень необратимости кривых намагничивания возрастает с увеличением пиннинга потока, опять же при неизменном значении  $H_{c2}$ . Мы уже упоминали о различных методах, позволяющих увеличивать пиннинг потока; более подробные сведения о влиянии пиннинга на критические токи см. в работе Ливингстона и Шадлера [41].

Благодаря высокому критическому полю и сильному критическому току сверхпроводники в смешанном состоянии используются в сверхпроводящих соленоидах для создания сильных магнитных полей без диссипации. Перечислим свойства, которыми должен обладать материал, служащий для изготовления соленоидов.

1) Высокая критическая температура  $T_c$ . Это обеспечивает большое значение как термодинамического критического поля  $H_{cb}$ , так и поля  $H_{c2} = \kappa\sqrt{2}H_{cb}$ . Кроме того, существует надежда найти материалы с достаточно высокой критической температурой  $T_c$ , что даст возможность использовать в качестве охлаждающей среды вместо жидкого гелия жидкий водород. Известные критические температуры пока слишком низки<sup>1)</sup>.

2) Большое остаточное удельное сопротивление в нормальном состоянии  $\rho$ . Это увеличивает значение  $\kappa$ , а значит, и  $H_{c2}$ . Напомним, что возможный предел  $H_{c2}$  определяется парамагнетизмом Паули в нормальном состоянии (см. § 1.2).

3) Высокая степень неупорядоченности для обеспечения сильного пиннинга потока, следовательно, и высокой плотности критического тока  $J_c$ . Ясно, что неупорядоченность и высокое сопротивление  $\rho$  меняются в какой-то степени параллельно друг другу.

Положение в целом несколько парадоксально, поскольку хороший материал для соленоида — плохой проводник в нормальном состоянии. Следовательно, если в соленоиде возникнет локальная нормальная область, то здесь будет выделяться значительное количество джоулева тепла, что может привести к росту этой области. Для борьбы с такими тепловыми неустойчивостями проволока соленоида обычно защищена медным покрытием, которое обеспечивает шунтирование — параллельный путь с низким сопротивлением, что позволяет отвести ток от образовавшегося нормального участка.

Обзор обширной литературы по сверхпроводящим соленоидам и их применениям см. в работе Вильямса [67].

<sup>1)</sup> Это не вполне точно, поскольку максимальное известное значение  $T_c = 23$  К (для  $Nb_3Ge$ ), а температура кипения и плавления  $H_2$  равны соответственно 20,3 и 14 К. — *Прим. ред.*

## 4.5.3. Вихри и критические скорости в HeII

Большое количество экспериментов было поставлено с целью выяснения факторов, ограничивающих скорость сверхтекучего течения. До сих пор нет полного понимания протекающих процессов, но, согласно общепринятому мнению, существенную роль играет образование и движение вихрей в сверхтекучей компоненте. Чтобы объяснить такую точку зрения, воспользуемся здесь результатами лишь нескольких экспериментов, в каждом из которых нормальная компонента оставалась неподвижной. Эксперименты, в которых вместе со сверхтекучей жидкостью движется и нормальная, естественно, труднее интерпретировать, поскольку эффекты турбулентности в нормальной жидкости легко могут замаскировать процессы, присущие сверхтекучей части жидкости.

В гл. 2 были описаны измерения гравитационного течения через сверхщель, изготовленную из ювелирного крокуса или стекла викор, а также по насыщенным и ненасыщенным пленкам. В этих экспериментах определялось изменение критического потока  $\sigma_{sc}$  с температурой, причем  $\sigma_{sc}$  записывается в виде

$$\sigma_{sc} = \beta (\rho_s/\rho) v_{sc} d; \quad (4.79)$$

здесь  $d$  — наименьший размер канала,  $\beta$  — множитель, отвечающий данной геометрии, и  $v_{sc}$  — средняя критическая скорость. К сожалению, формулу (4.79) непосредственно использовать для определения  $v_{sc}$  нелегко, поскольку в большинстве случаев размер  $d$  не известен с достаточной точностью. Используя, однако, в ряде случаев усредненную или как-то оцененную толщину каналов, ван Альфен и др. [60] нашли, что определяемая по формуле (4.79) скорость  $v_{sc}$  изменяется приблизительно как  $d^{-1/4}$ . Данные были получены из измерений, выполненных с каналами, толщина которых менялась от  $10^{-7}$  до  $10^{-1}$  см. Можно поэтому предположить, что скорость  $v_{sc}$  лишь слабо зависит от размера канала.

Фейнман [17] первым попытался объяснить наличие критической скорости с помощью рассмотрения вихрей. Он вычислил минимальную скорость, необходимую для возникновения одного вихревого кольца, рассматриваемого как элементарное возбуждение. Согласно критерию Ландау, эта скорость равна

$$v_{sc} = (\epsilon_r/p_r)_{\min}, \quad (4.80)$$

где  $\epsilon_r$  и  $p_r$  — соответственно энергия и импульс кольца. Воспользуемся для энергии выражением (4.41), а для импульса выражением (см. задачу 4.5)

$$p_r \approx \pi r^2 \rho_s \kappa. \quad (4.81)$$

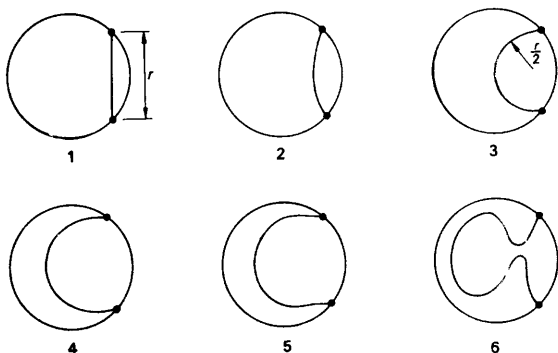
В результате получаем

$$\frac{\epsilon_r}{p_r} \approx \frac{\kappa}{2\pi r} \ln \frac{8r}{a_0}. \quad (4.82)$$

В канале диаметром  $d$  наибольшее возможное кольцо имеет радиус порядка  $d/2$ , так что критическая скорость составляет

$$v_{sc} \approx \frac{h}{\pi m_4 d} \ln \frac{4d}{a_0}. \quad (4.83)$$

Согласно (4.83), критическая скорость слабо зависит от размера канала, а величина  $v_{sc}d$  должна медленно расти с увеличением  $d$ . Хотя такое поведение не согласуется в точности с обнаруженным экспериментально, оно значительно лучше отвечает действительности, чем использование ротонной критической скорости, которая, конечно, от  $d$  не зависит. Более того, определенное по (4.83)



Фиг. 104. Схема образования вихревого кольца в результате деформации и расширения вихревой нити [19].

значение  $v_{sc}$ , равное, например, 200 см/с для канала  $d \sim 10^{-5}$  см, только на один порядок величины больше измеряемого. Еще полностью не выяснено, каким образом в сверхтекучем потоке образуется вихревое кольцо. Однако Глаберсон и Доннелли [19] показали, что прямая вихревая линия, оба конца которой закреплены на стенках, может деформироваться и расширяться под влиянием силы Магнуса, образуя в конце концов кольцо с диаметром, равным диаметру канала (фиг. 104).

Используя потенциметрическую методику, Келлер и Хеммел [31] показали, что образование вихрей представляет собой основной фактор, ограничивающий сверхтекучее течение в пленках (см. § 2.7). Напомним, что они измеряли профиль химического потенциала в пленке и нашли, что при вытекании значение потенциала резко меняется на периметре, ограничивающем поток, тогда как при втекании потенциал меняется менее резко на значительной

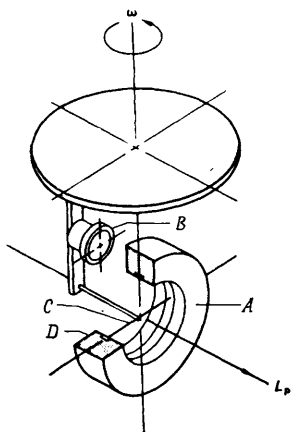
длине пленки. В свете обсуждения, проведенного в п. 4. 5. 1, эти результаты можно использовать для демонстрации того, что при вытекании сдвиг фазы происходит только у ограничивающего периметра. Другими словами, сверхтекучая волновая функция когерентна по всей толще жидкости и в пленке, образующейся с каждой стороны стенки (см. фиг. 39), но претерпевает разрыв на верху стенки. Представляется также вероятным, что течение достигает критической скорости только у ограничивающего периметра и что течение в других местах пленки происходит с субкритическими скоростями. Можно поэтому прийти к заключению, что в областях, где скорость достигает критического значения или превышает его, происходит сдвиг фазы и именно эти области являются местом образования вихрей. Иное поведение химического потенциала в экспериментах с втекающим гелием означает, что в этом случае область образования вихрей распространяется на значительную часть наружной пленки. Мы видим, таким образом, что потенциометрические эксперименты [31] уже позволили установить области образования вихрей внутри пленки, но детальная модель механизма образования вихрей в пленках пока не разработана.

На основе теории, предложенной Лангером и Фишером [37], были достигнуты некоторые успехи в более общем понимании процессов, в результате которых скорость сверхтекучего течения достигает критической величины. Одна из обнадеживающих черт теории состоит в том, что она объединяет несколько факторов, таких, как сдвиг фазы и образование вихрей, т. е. факторов, которые, как мы уже видели, весьма вероятно связаны с появлением критической скорости. Эта теория, однако, расходится с прежними взглядами на проблему сверхтекучей устойчивости, ибо базируется на гипотезе, что стационарный сверхтекучий ток представляет собой не равновесное явление. Следствия этой теории и обсуждение экспериментов по незатухающим потокам можно найти в обзоре Лангера и Ренпи [38]; ниже мы будем придерживаться их точки зрения.

В результате квантования циркуляции в кольцеобразной области в HeII могут возникнуть устойчивые потоки (см. § 4.1). Ренпи и его сотрудники изучали такие потоки с помощью сверхтекучего гироскопа (фиг. 105).

Кольцеобразный контейнер погружен в находящуюся под откачкой ванну с HeII. Через маленькое отверстие сверхтекучая жидкость может поступать в контейнер, плотно заполненный пористым материалом, который пропускает только сверхтекучую компоненту, но удерживает нормальную компоненту. Сверхтекучий поток возникает при вращении кольца в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью при одновременном охлаждении жидкости ниже  $\lambda$ -точки. При низкой температуре контей-

нер останавливают и затем поворачивают на  $90^\circ$ . Вектор момента количества движения  $L_p$  сверхтекучего тока теперь расположен в горизонтальной плоскости, и его можно заставить прецессировать вокруг вертикальной оси, приложив небольшой вращающий



Фиг. 105. Схема сверхтекучего гироскопа [38].

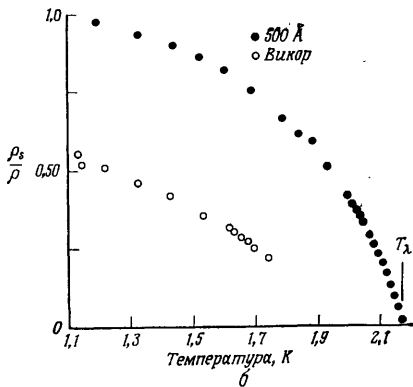
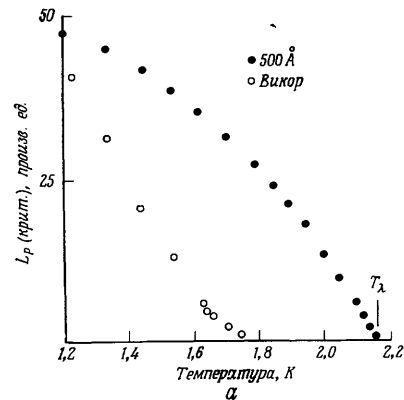
В кольцеобразном сосуде А возникает незагасающий поток с моментом количества движения  $L_p$ . Сосуд заполнен пористым материалом D. При вращении с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси сосуд А поворачивается на вольфрамовой нити С; поворот сосуда фиксируется детектором В.

ры; это может быть связано с понижением отношения  $\rho_s/\rho$ , или с падением критической сверхтекучей скорости, или с обоими названными явлениями вместе. Важная особенность гироскопического метода состоит в том, что он дает возможность измерять зависимость  $\rho_s/\rho$  от  $T$  для различных размеров пор. Эти измерения проводятся сразу после измерений  $L_p$  (крит.), которые прекращаются при температуре лишь немного ниже критической. Небольшого понижения температуры вполне достаточно, чтобы скорость сверхтекучего течения стала меньше ее критического значения. При дальнейшем понижении температуры скорость  $v_s$  не меняется, а  $L_p$  снова увеличивается в силу возрастания отношения  $\rho_s/\rho$  (фиг. 106, б). Возможность увеличить момент количества дви-

жения с помощью горизонтальной крутильной нити, на которой смонтирован кольцеобразный контейнер (см. фиг. 105). Отклонение контейнера измеряют электронным способом, определяя таким образом момент  $L_p$ .

Для данного размера пор и для каждой температуры существует критическое значение  $L_p$ , которое нельзя превысить, какой бы ни была начальная угловая скорость контейнера. Температурная зависимость  $L_p$  (крит.) определялась следующим образом. Охлаждая контейнер до самых низких из достижимых температур (около 1 К), создавали в нем наибольший возможный критический поток; затем температуру повышали и измеряли  $L_p$ . На фиг. 106, а изображены результаты, полученные для пор размером  $500 \text{ \AA}$  и для стекла вилок со средним размером пор  $40 \text{ \AA}$ . Было обнаружено понижение момента количества движения с ростом температу-





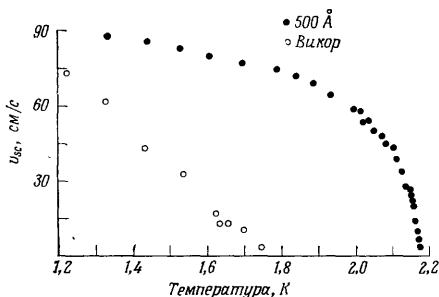
Фиг. 106. а — температурная зависимость критического момента количества движения незатухающего потока, возникающего в стекле викор и в фильтре с размером пор, равным 500 Å.

б — температурная зависимость относительной плотности сверхтекучей части жидкости, измеренной в стекле викор и фильтре с размерами пор 500 Å [38].

Обе кривые нормированы с использованием значения отношения  $\rho_s/\rho$  при 1,1 К для данной геометрии.

жения незатухающего потока просто путем понижения температуры — еще одна демонстрация устойчивости макроскопического квантового состояния.

Исключая температурную зависимость  $\rho_s/\rho$  из температурной зависимости  $L_p$  (крит.), можно определить поведение усредненной



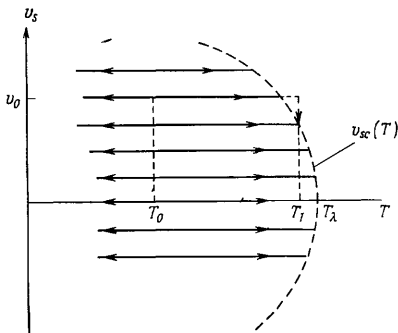
Фиг. 107. Температурная зависимость критической скорости сверхтекучего потока через стекло викор и фильтр с размером пор, равным 500 Å [38]. Получено из данных, приведенных на фиг. 106, а и б.

сверхтекучей критической скорости (фиг. 107). Отметим, что поведение отношения  $\rho_s/\rho$  и критической скорости весьма сходны с теми, которые наблюдаются в экспериментах с потоком через сверхщель, соединяющую два резервуара (см. фиг. 36). В частности, температура возникновения сверхтекучего течения через очень узкие каналы значительно ниже критической температуры  $T_\lambda$  для гелия в больших объемах. Вместе с тем даже в каналах шириной 500 Å плотность сверхтекучей компоненты  $\rho_s$  такая же, как в объеме жидкости.

Пунктирная кривая на фиг. 108 представляет собой типичную зависимость критической скорости от температуры. Мы уже отмечали выше, что если сверхтекучий поток сначала течет с критической скоростью, то при снижении температуры сверхтекучая скорость не меняется, но в рассматриваемом случае течение происходит уже с субкритическими скоростями. Это изменение ситуации отражено на фиг. 108, где точка, изображающая состояние системы, движется вдоль одной из горизонтальных линий. Каждая линия соответствует постоянному значению  $v_s$  и поэтому характеризует устойчивое состояние сверхтекучего потока. В случае кольцеобразного контейнера сверхтекучая волновая функция удовлетворяет периодическим граничным условиям, в результате чего скорость  $v_s$  может принимать лишь дискретные значения

$nh/m_4L$ , где  $n$  — целое число, а  $L$  — средняя длина пути по кольцу. Следовательно, расстояние между горизонтальными линиями на фиг. 108 равно  $\Delta v_s = h/m_4L$ .

Движение точки, изображающей систему, вдоль одной из горизонтальных линий, указывает на обратимые изменения температуры, во время которых сверхтекучая жидкость остается в одном и том же метастабильном состоянии. Однако, в силу метастабильности этих состояний существует отличная от нуля вероятность



Фиг. 108. Температурная зависимость скорости течения (возможные метастабильные состояния) в случае невзвухающего потока (см. текст) [38].

вертикальных переходов. Лангер и Фишер предположили, что такие переходы могут возникать при тепловых флуктуациях, энергия активации  $E_a(v_s, T)$  которых достаточно велика. Поэтому при низкой температуре  $T$  и малой скорости  $v_s$  появление этих флуктуаций маловероятно. В противном случае было бы вообще неразумно обсуждать проблему, пользуясь представлением о метастабильных состояниях, поскольку время их жизни стало бы чрезвычайно коротким. Сделаем еще два предположения, а именно, что вероятность возникновения флуктуаций зависит только от  $E_a$  и что каждая флуктуация приводит к снижению сверхтекучей скорости на одну ступеньку  $\Delta v_s$ , легко найти уравнение, описывающее уменьшение сверхтекучей скорости со временем:

$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{hAv_0}{m_4} \exp\{-E_a(v_s, T)/k_B T\}. \quad (4.84)$$

Здесь  $A$  — площадь поперечного сечения канала, в котором течет поток, а  $v_0$  — отнесенная к единице объема частота «столкновений» с барьером, обусловленных флуктуациями; ее считают приб-

лизительно равной частоте атомных столкновений, умноженной на плотность.

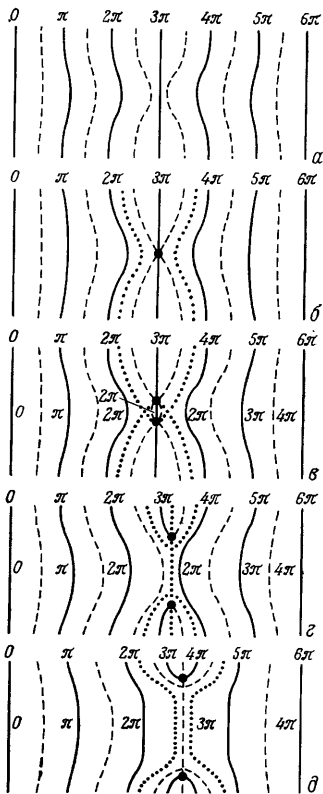
В соответствии с описанной выше моделью, производная  $dv_s/dt$  должна быть чрезвычайно малой в области метастабильных состояний (при малых  $T$  и  $v_s$ ), но чрезвычайно большой при достаточно больших  $T$  и  $v_s$ . Переход от одного режима к другому должен совершаться очень резко непосредственно вблизи кривой критической скорости. Именно это обстоятельство позволяет дать удобное определение  $v_{sc}$  как такой сверхтекучей скорости, ниже которой скорость затухания  $dv_s/dt$  в данных экспериментальных условиях настолько мала, что не поддается измерению.

В экспериментах с незатухающим потоком было подтверждено одно общее предсказание теории тепловых флуктуаций. Сначала создавался поток, текущий с подкритической скоростью; предположим, что это состояние системы соответствует точке  $(v_0, T_0)$  на фиг. 108. Затем сверхтекучую жидкость нагревали до тех пор, пока система не достигала точки  $(v_0, T_1)$ , расположенной сразу же за кривой критической скорости. Если теперь поддерживать постоянную температуру, то, согласно теории, должно наблюдаться логарифмическое затухание сверхтекучей скорости со временем. Такое затухание и наблюдалось для целого ряда различных каналов, что убедительным образом подтверждает идею о метастабильном состоянии со сверхтекучим потоком.

Пока что аргументация рассматриваемой теории носит весьма общий характер. Она, конечно, эквивалентна теории крипа потока в сверхпроводниках, которую мы обсуждали в п. 4. 3. 3. Отметим сходство между уравнениями (4.84) и (4.61), а также то обстоятельство, что для случая сверхпроводников мы явным образом вывели логарифмическую временную зависимость (см. также задачи 4.11 и 4.12).

При более конкретном применении теории к HeII Лангер и Фишер [37], следуя Иорданскому [30] (см. п. 4. 2. 5), предположили, что требуемой тепловой флуктуацией может служить образование маленького вихревого кольца. На фиг. 109 показано, как образование и последующее расширение вихревого кольца приводит к равному  $2\pi$  сдвигу фазы между концами канала. Это должно соответствовать понижению сверхтекучей скорости на  $\Delta v_s$  (см. фиг. 108). С помощью обычных выражений для энергии и скорости кольца (см. п. 4. 2. 5) можно оценить необходимую энергию активации  $E_a$  и соответствующую зависящую от температуры критическую скорость.

Эксперименты показали, что качественные черты модели подтверждаются для незатухающих токов, для сверхтекучих потоков, вызываемых давлением (Нотарис [45]) и нагреванием (Либенберг [39]), однако количественное согласие является плохим. В частности, оцененная энергия активации значительно ниже экспери-



Фиг. 109. Поперечное сечение поверхностей постоянной фазы  $S$ , схематически иллюстрирующее последовательные стадии образования зародыша вихревого кольца и его последующего расширения [37].

Сплошные линии — поверхности  $S = n\pi$ , штриховые — поверхности  $S = (n + 1/2)\pi$ . Пунктиром изображены некоторые дополнительные детали. Кругами обозначены точки первого исчезновения  $|\psi|$  с образованием центров сердцевин вихрей. Предполагается наличие цилиндрической симметрии относительно центральной оси. Цифры указывают изменение фазы вдоль путей, проходящих и не проходящих через кольцо.

ментального значения. Соответственно измеренные критические скорости почти на порядок величины меньше вычисленных. Возможная причина этого расхождения заключается в геометрической неоднородности используемых конфигураций, что может приводить к аномально высоким локальным значениям  $v_c$ . Кроме того, вполне вероятно, что на энергию активации вихревых колец оказывает влияние близость стенок канала. Оба эти фактора крайне трудно учесть, и их почти наверняка нельзя включить ни в какую общую теорию.

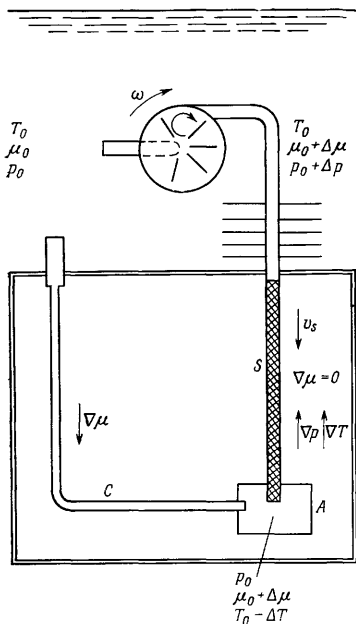
Одну из трудностей теории можно проиллюстрировать, обратившись к протеканию сверхтекучего потока через извилистые каналы, имеющиеся, например, в сверхщели, изготовленной из ювелирного крокуса. В этом случае трудно представить себе, как локальная флуктуация может вызвать однородное снижение сверхтекучей скорости, которое, по-видимому, наблюдается, если не считать, что фактически измеряется средний эффект, обусловленный рядом независимых флуктуаций. Однако если отвлечься от этих трудностей, то теория флуктуаций дает обнадеживающий подход к проблеме устойчивости сверхтекучего течения даже при учете того, что она делает понятие о критической скорости менее определенным по сравнению с тем, как его интерпретировали раньше.

#### 4.5.4. Вихревой охладитель

Вихревое движение в He II было использовано Стаасом и Северейнсом [54] для создания остроумного охлаждающего устройства. В основе работы охладителя лежит принцип, уже знакомый нам из вышеприведенных рассуждений. Именно, здесь используется то обстоятельство, что наличие градиента химического потенциала в He II приводит к образованию и движению вихревых нитей. Устройство схематически изображено на фиг. 110. Здесь последовательно соединены сверхщель  $S$ , охлаждаемая камера  $A$  и капилляр  $C$ . Насос, откачивающий жидкость, создает в этой конструкции градиент давления при постоянной температуре. Около сверхщели образуется более высокое давление, чем около капилляра. Насос гонит сверхтекучую жидкость через сверхщель с субкритической скоростью; при проходе через капилляр скорость жидкости становится выше критической и образуются вихри.

Можно считать, что насос создает в системе  $S-A-C$  разность значений химического потенциала  $\Delta\mu$ . Сначала температура повсюду одинакова и на сверхщели перепада давления нет. В результате разность  $\Delta\mu$  возникает только в капилляре в связи с образованием и движением вихрей и проявляется как разность давлений  $\Delta p$ . Этот перепад давления гонит также и нормальную компоненту вдоль капилляра из камеры  $A$ , которая в результате

охлаждается. С помощью уравнений, описывающих течение, можно показать, что сверхтекучая и нормальная жидкости движутся вдоль  $C$  с одной и той же средней скоростью и что вихри перемещаются вместе с обеими жидкостями. Следовательно, градиент



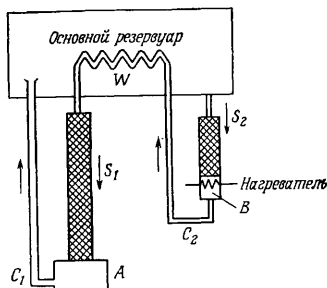
Фиг. 110. Вихревой охладитель с центробежным насосом.

$S$  — сверхщель;  $A$  — охлаждаемая камера;  $C$  — капилляр.

$\Delta\mu$  в капилляре остается постоянным, и при возникновении в  $C$  градиента температуры разность давлений  $\Delta p$  понижается. В итоге возникает стационарное состояние с небольшим перепадом давления  $\Delta p$  и температурной разностью  $\Delta T$ , значение которой зависит от скорости откачки. С помощью центробежного насоса  $A$  охлаждали до 0,6 К.

В видоизмененном варианте охладителя используется насос, основанный на эффекте фонтанирования (фиг. 111) и содержащий вторую сверхщель  $S_2$  и камеру  $B$ , в которой можно осуществлять

электрический подогрев жидкости. Пройдя через  $S_2$ , сверхтекучая жидкость попадает в камеру  $B$ , где при включении нагревателя превращается в нормальную. Нормальная жидкость проходит затем по капилляру  $C_2$  в теплообменник  $W$ , который погружен в резервуар с He II. В  $W$  нормальная жидкость вновь превращается в сверхтекучую, после чего поступает в  $S_1$ . Таким образом, вдоль пути  $S_1-A-C_1$  создается градиент химического потенциала и объем  $A$  охлаждается, как и в предыдущем устройстве. При начальной температуре в резервуаре 1,5 К можно снизить температуру в  $A$  до 0,7 К, т. е. значительно ниже, чем путем откачки паров гелия. Однако



Фиг. 111. Вихревой охладитель без движущихся деталей [54].

$S_1$  и  $S_2$  — сверхтечи,  $A$  и  $B$  — сосуды с жидкостью;  $C_1$  и  $C_2$  — капилляры.

самое большое преимущество вихревого охладителя в его втором варианте — отсутствие движущихся частей.

### ЗАДАЧИ

- 4.1. Проверьте правильность вывода выражения (4.24) для энергии вихревой линии.
- 4.2. Приблизительно оцените с помощью члена  $v^2 (\sqrt{\rho_s})$  в уравнении (2.12) вклад, вносимый в энергию вихря искажением волновой функции вблизи сердцевины вихря. Сравните этот вклад с энергией одиночного вихря [выражение (4.24)]. Вычислите среднее расстояние между вихрями  $b$  с помощью (4.26), где  $\Omega = 1 \text{ с}^{-1}$ , предполагая, что температура достаточно низка, т. е.  $\rho_s = \rho$ .
- 4.3. Покажите, что момент количества движения вихревой линии с циркуляцией  $\kappa$  в He II, вращающемся как твердое тело с угловой скоростью  $\Omega$ , определяется выражением (4.31).
- 4.4. Покажите с помощью выражений (4.41) и (4.42), что энергия вихревого кольца приблизительно обратно пропорциональна его скорости.]
- 4.5. Выражение (4.41) дает энергию вихревого кольца в покоящейся жидкости. Если же сверхтекучая жидкость движется со скоростью  $v_s$ , а вихревое кольцо движется со скоростью  $v_r$  [см. (4.42)] навстречу потоку, то энергия кольца в лабораторной системе координат становится равной  $\epsilon' = \epsilon_r - p_r v_s$ , где  $p_r$  — импульс кольца (мы прибегли к преобразованию Галилея).



а) Покажите, что

$$p_r \approx \rho \kappa r^2,$$

используя предположение, что  $p_r$  определяется выражением  $v_r = \partial \epsilon_r / \partial p_r$  и что при равном нулю радиусе кольца  $p_r = 0$ .

б) Покажите, что существует критический радиус  $r_c$ , при котором энергия  $\epsilon'(r)$  максимальна, и получите выражение

$$\epsilon'(r_c) \approx \frac{\rho_s \kappa^3}{16\pi v_s} \left( \ln \frac{8r_c}{a_0} - \frac{1}{4} \right) \left( \ln^2 \frac{8r_c}{a_0} - \frac{11}{4} \right).$$

Как только радиус кольца достигает критического значения  $r_c$ , становится энергетически выгодным дальнейший рост кольца, пока оно не аннигилирует на стенках сосуда (обсуждение см. в п. 4.2.5 и 4.5.3).

4.6. Как отметили Робертс и Доннелли [51], если для вихревого кольца в He II воспользоваться выражениями (4.41) и (4.42), пригодными для заполненной жидкостью сердцевин, то соотношение  $\partial \epsilon_r / \partial p_r = v_r$  ( $p_r$  определено в задаче 4.5) справедливо только при условии постоянства объема сердцевин. Покажите, что это так. Из этого результата должно было бы следовать, что радиус сердцевин является, например, функцией импульса кольца. Чтобы избежать этого, Робертс и Доннелли рассматривали кольцо с полый сердцевиной и нашли, что полная энергия  $E$  состоит из двух частей: из классического выражения для кинетической энергии

$$\frac{1}{2} \rho \kappa^2 r \left( \ln \frac{8r}{a_0} - 2 \right)$$

и из потенциальной энергии  $1/2 \rho \kappa^2 r$ , возникающей в связи с тем, что вихрь при расширении должен совершать работу для преодоления внешнего давления. Покажите теперь, что скорость определяется выражением

$$v_r = \left( \frac{\partial E}{\partial p_r} \right)_{a_0} = \frac{\kappa}{4\pi r} \left( \ln \frac{8r}{a_0} - \frac{1}{2} \right),$$

которое является классическим выражением для скорости вихревого кольца с полый сердцевиной.

4.7. Выведите уравнение (4.46) с помощью уравнения (4.44) и дифференциальной формы уравнения (4.10), т. е. уравнения

$$\left( \frac{m}{e|\psi|^2} \right) \text{rot } \mathbf{J}_e + 2e\mathbf{B} = 0.$$

[Для  $\mathbf{J}_e$  и  $\mathbf{B}$ , направленных, как показано на фиг. 84, компоненты ротора равны

$$\text{rot } \mathbf{B} = -\partial B / \partial r \text{ (азимутальная компонента),}$$

$$\text{rot } \mathbf{J}_e = r^{-1} \partial (r \mathbf{J}_e) / \partial r \text{ (z-компонента).}]$$

Уравнение, определяющее функции Бесселя с мнимым аргументом  $K_n(x)$ , имеет вид

$$x^2 \frac{d^2 K_n}{dx^2} + x \frac{dK_n}{dx} - (x^2 + n^2) K_n = 0.$$

Производные удовлетворяют выражениям

$$dK_0(x)/dx = -K_1(x),$$

$$d\{xK_1(x)\}/dx = -xK_0(x).$$

Асимптотическое поведение  $K_1$  при  $x \rightarrow 0$  определяется выражением

$$xK_1(x) \rightarrow 1.$$

Используйте эти свойства для вывода выражений (4.47) и (4.48) и покажите, что выражение (4.47) содержит условие квантования

$$\int_0^{\infty} 2\pi r B(r) dr = n\phi_0.$$

Именно так определяется амплитуда  $B$  в (4.47).

4.8. Свободная энергия Гельмгольца в сверхпроводнике равна

$$F = E_{\text{kin}} + E_{\text{mag}},$$

где  $E_{\text{kin}}$  — кинетическая энергия сверхпроводящих токов, а  $E_{\text{mag}}$  — обычная энергия магнитного поля. Кинетическая энергия равна

$$E_{\text{kin}} = \int \frac{1}{2} m n_s v_s^2 d^3r.$$

Покажите, что  $F$  можно записать в виде

$$F = (1/2\mu_0) \int \{B^2 + \lambda^2 (\text{rot } B)^2\} d^3r.$$

4.9. Проверьте правильность вывода формулы (4.51).

4.10. *Модель Бина.* Рассмотрите начальную кривую намагничивания пластины толщиной  $D$  в параллельно приложенном поле (фиг. 91). Покажите, что индукция  $B$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \pm \mu_0 J_c,$$

где ось  $x$  перпендикулярна пластине, а выбор знака зависит от направления экранирующего тока. Теперь покажите, что в некоторой области в середине образца  $B = 0$  до тех пор, пока  $B_0 < B^*$ , где  $B_0$  — значение индукции на поверхности, а

$$B^* = \mu_0 J_c D/2.$$

Выведите следующие выражения для средней по образцу индукции  $\langle B \rangle$  и намагниченности  $M = \langle B \rangle - B_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \langle B \rangle &= B_0^2/2B^* \\ -M &= B_0 - B_0^2/2B^* \end{aligned} \right\} B_0 < B^*,$$

$$\left. \begin{aligned} \langle B \rangle &= B_0 - \frac{1}{2} B^* \\ -M &= \frac{1}{2} B^* \end{aligned} \right\} B_0 > B^*.$$

Постройте кривую зависимости  $\langle B \rangle$  и  $M$  от  $B_0$ .

4.11. Напишите полное решение уравнения (4.65) для тока  $J(t)$  в эксперименте, в котором наблюдается крип потока, и покажите, что выражение (4.66) является искомым решением для достаточно большого времени

4.12. Покажите, что для достаточно большого времени затухание сверхтекучей жидкости, определяемое уравнением (4.84), характеризуется логарифмической временной зависимостью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абрикосов А. А., ЖЭТФ, 32, 1442 (1957).
2. Anderson P. W., Phys. Rev. Lett., 9, 309 (1962).
3. Anderson P. W., Quantum Fluids, ed. D. F. Brewer, North-Holland, Amsterdam, 1966, p. 146.
4. Андроникашвили Э. Л., Касеркин И. П., ЖЭТФ, 28, 126 (1955).
5. Андроникашвили Э. Л., Мамаладзе Ю. Г., Rev. Mod. Phys., 38, 567 (1966).
6. Bean C. P., Rev. Mod. Phys., 36, 31 (1964).
7. Beasley M. R., Labusch R., Webb W. W., Phys. Rev., 181, 682 (1969).
8. Campbell A. M., Evetts J. E., Critical Currents in Superconductors, Taylor and Francis, London, 1972.
9. Careri G., Dupre F., Mazzoldi P., Quantum Fluids, ed. D. F. Brewer, North-Holland, Amsterdam, 1966, p. 305.
10. Cullen G. W., Novak R. L., Appl. Phys. Lett., 4, 147 (1964).
11. Deaver B. S., Fairbank W. M., Phys. Rev. Lett., 7, 43 (1961).
12. de Gennes P. G., Phys. Kond. Materie, 3, 79 (1964).
13. Doll R., Näbauer M., Phys. Rev. Lett., 7, 51 (1961).
14. Donnelly R. J., Experimental Superfluidity, Univ. of Chicago Press, Chicago and London, 1967, ch. 6.
15. Donnelly R. J., Roberts P. H., Phil. Trans. Roy. Soc., A271, 41 (1971).
16. Douglass R. L., Phys. Rev. Lett., 13, 791 (1964).
17. Feynman R. P., Progr. Low Temp. Phys., ed. C. J. Gorter, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1955, ch. 2.
18. Glaberson W. I., Journ. Low Temp. Phys., 1, 289 (1969).
19. Glaberson W. I., Donnelly R. J., Phys. Rev., 141, 208 (1966).
20. Glaberson W. I., Steingart M., Phys. Rev. Lett., 26, 1423 (1971).
21. Goodman B. B., IBM Journ. Res. Dev., 6, 63 (1962).
22. Goodman W. L., Willis W. D., Vincent D. A., Deaver B. S., Phys. Rev., B4, 1530 (1971).
23. Hall H. E., Proc. Roy. Soc., A245, 546 (1958).
24. Hall H. E., Adv. Phys., 9, 89 (1960).
25. Hall H. E., Journ. Phys. C, 3, 1166 (1970).
26. Hall H. E., Vinen W. F., Proc. Roy. Soc., A238, 204 (1956).
27. Hess G. B., Phys. Rev., 161, 189 (1967).
28. Hess G. B., Fairbank W. M., Phys. Rev. Lett., 19, 216 (1967).
29. Иорданский С. В., Ann. Phys. (N. Y.), 29, 335 (1964).
30. Иорданский С. В. ЖЭТФ, 48, 708 (1965).
31. Keller W. E., Hammel E. F., Phys. Rev. Lett., 19, 998 (1966).
32. Kim Y. B., Hempstead C. F., Strnad A. R., Phys. Rev. Lett., 9, 306 (1962).
33. Kim Y. B., Hempstead C. F., Strnad A. R., Phys. Rev., 129, 528 (1963).
34. Labusch R., Phys. Stat. Sol., 32, 439 (1969).
35. Lamb H., Hydrodynamics, 1932, 6th ed., Dover reprint, New York, 1965, p. 241. (См. перевод: Г. Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, М.—Л., 1947).
36. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, изд-во «Наука», М., 1964.
37. Langer J. S., Fisher M. E., Phys. Rev. Lett., 19, 560 (1967).
38. Langer J. S., Reppy J. D., Progr. Low Temp. Phys., ed. C. J. Gorter, vol. VI, North-Holland, Amsterdam, 1970.
39. Liebenberg D. H., Phys. Rev. Lett., 26, 744 (1971).
40. Livingston J. D., Phys. Rev., 129, 1943 (1963).
41. Livingston J. D., Schadler H. W., Progr. Mater. Sci., 12, 183 (1964).
42. London F., Superfluids, vol. II, New York, 1954: Dover reprint, New York, 1964, p. 151.
43. Maki K., Physics, 1, 21 (1964).
44. Melville P. H., Adv. Phys., 21, 647 (1972).
45. Notaryus H. 4., Phys. Rev. Lett., 22, 1240 (1969).

46. *Osborne D. V.*, Proc. Phys. Soc., **A63**, 909 (1950).
47. *Packard R. E., Sanders T. M., Jr.*, Phys. Rev. Lett., **22**, 823 (1969).
48. *Parks R. D.*, Superconductivity, vols. 1 and 2, Dekker, New York, 1969.
49. *Putterman S. J.*, Phys. Rep., **4**, 67 (1972).
50. *Rayfield G. W., Reif F.*, Phys. Rev., **136**, 1194 (1964).
51. *Roberts P. H., Donnelly R. J.*, Phys. Lett., **31A** 137 (1970).
52. *Rutherford D. E.*, Fluid Dynamics, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1959, § 24.
53. *Solomon P. R., Otter F. A., Jr.*, Phys. Rev., **164**, 608 (1967).
54. *Staas F. A., Severijns A. P.*, Cryogenics, **9**, 422 (1969).
55. *Strayer D. M., Donnelly R. J.*, Phys. Rev. Lett., **26**, 1420 (1971).
56. *Street R., Woolley J. C.*, Proc. Phys. Soc., **A62**, 562 (1949).
57. *Strnad A. R., Hempstead C. F., Kim Y. B.*, Phys. Rev. Lett., **13**, 794 (1964).
58. *Tedmon C. S., Jr., Rose R. M., Wulff J.*, Journ. Appl. Phys., **36**, 829 (1965).
59. *Цакадзе Д. С.*, ЖЭТФ, **42**, 985 (1962).
60. *van Alphen W. M., van Haasteren G. J., de Bruyn Ouboter R., Taconis K. W.*, Phys. Lett., **20**, 474 (1966).
61. *van Gorp G. J.*, Phys. Rev., **166**, 436 (1968).
62. *van Ooijen D. J., van Gorp G. J.*, Phys. Lett., **17**, 230 (1965).
63. *Vinen W. F.*, Proc. Roy. Soc., **A260**, 218 (1961).
64. *Vinen W. F.*, Quantum Fluids, ed. D. F. Brewer, North-Holland, Amsterdam, 1966, p. 74.
65. *Webb W. W.*, Journ. Appl. Phys., **42**, 107 (1971).
66. *Whitmore S. C., Zimmermann W.*, Phys. Rev. Lett., **15**, 391 (1965).
67. *Williams J. E. C.*, Superconductivity and its Applications, Pion, London, 1970.

## ЭФФЕКТЫ ДЖОЗЕФСОНА

## § 5.1. Введение

В гл. 3 мы уже обсуждали туннелирование одиночной частицы между сверхпроводниками, разделенными барьером из пленки окиси. Изоляционные барьеры, используемые в экспериментах такого типа, достаточно толсты для того, чтобы волновые функции сверхпроводящих электронов по обе стороны от барьера не перекрывались внутри него. Однако при очень тонких окисных барьерах происходит значительное перекрытие волновых функций и возникает целый ряд новых эффектов, суммарно называемых эффектами Джозефсона. Простейшее следствие подобного перекрытия состоит в возможности возникновения небольшого постоянного тока: барьер в этом случае ведет себя как «слабый» сверхпроводник. Кроме того, если к туннельному контакту приложить разность потенциалов, то сдвиг фаз волновой функции между двумя сторонами меняется с соответствующей скоростью, причем этот сдвиг фазы может оказаться синхронизованным, например, с приложенным переменным электрическим полем. Таким образом, можно наблюдать ряд интересных эффектов как на постоянном, так и на переменном токе.

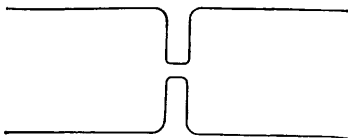
Окисные пленки не являются единственным типом «слабого звена» между сверхпроводниками. Критерии для возникновения эффектов Джозефсона таковы: во-первых, взаимодействие между сверхпроводниками должно быть достаточно сильным, чтобы обеспечивать связь фаз волновых функций с каждой стороны барьера; во-вторых, это взаимодействие должно быть достаточно слабым, чтобы приложенные поля излучения вызвали возмущение системы. Перечислим обычные типы систем со слабыми звеньями.

1) Окисный барьер между напыленными тонкими пленками. Слой  $Al_2O_3$ , часто используемый для туннелирования одиночных частиц, трудно сделать достаточно тонким, и самыми распространенными барьерами являются окиси на поверхности пленок Sn или Pb.

2) Точечный контакт между двумя массивными сверхпроводниками. Например, ниобиевую проволоку заостряют, подвергают окислению ее поверхность, а затем острие проволоки прижимают к куску ниобия. Точечные контакты часто осуществляют таким

образом, чтобы давление острия можно было регулировать снаружи криостата.

3) *Микромостик* из тонкой пленки, образующейся при травлении сверхпроводящей пленки (фиг. 112).



Фиг. 112. Микромостик из тонкой пленки (размер конструкции меньше 1 мкм).

Поведение всех этих систем различно в деталях, но все они обнаруживают эффекты Джозефсона. Различие в поведении частично коррелирует с силой связи, которая растет в следующем порядке: окись — точечный контакт — микромостик. Кроме того, существенную роль играют параметры электрического контура, частью которого является слабое звено.

В принципе эффекты Джозефсона должны наблюдаться также при наличии слабой связи между двумя сосудами с He II. Практически в этом случае используют лишь один тип слабой связи — маленькое отверстие между сосудами. Несколько экспериментаторов с помощью такого устройства получили результаты, которые, как полагали авторы, представляли собой проявление эффекта Джозефсона для переменного потока, но более поздние работы вызвали сомнение в такой интерпретации.

Мы рассматривали сверхпроводники и He II главным образом на базе представлений о «квантовой жидкости», подчеркивая важность макроскопической волновой функции. При таком подходе представляется совершенно очевидным тот факт, что две волновые функции могут перекрываться в области барьера и что при этом может течь слабый сверхпроводящий ток. Однако исторически предсказание эффекта Джозефсона [19] и последующее обсуждение вопроса (Джозефсон [20], Андерсон [2—4]) сыграли существенную роль в формировании нашего современного понимания сверхтекучих систем. Например, понятие о *сдвиге фазы*, на котором мы построили обсуждение диссипации, связанной с движением вихрей (см. гл. 4), впервые было введено Андерсоном в связи с эффектом Джозефсона на переменном токе. Кроме того, обсуждение эффекта Джозефсона позволило более четко понять, каким образом переход в сверхпроводящее или сверхтекучее состояние связан с упорядочением, аналогичным, скажем, параллельному упорядочению спинов в ферромагнетике в точке Кюри (см. § 6.9).

В § 5:2 мы выведем основные уравнения, описывающие эффект Джозефсона, а затем рассмотрим этот эффект на постоянном и переменном токе в сверхпроводниках, а также соответствующие аналоги для случая He II. Более подробное обсуждение эффекта Джозефсона см. в книге Солимара [36].

## § 5.2. Основные уравнения

Кратко изложим очень прозрачный вывод, принадлежащий Фейнману [10]. Пусть  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — волновые функции по обе стороны барьера. Запишем уравнения движения в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \mu_1 \psi_1 + K \psi_2, \quad (5.1)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \mu_2 \psi_2 + K \psi_1. \quad (5.2)$$

Здесь  $K$  отражает связь через барьер. В отсутствие связи волновая функция, как мы знаем, зависит от времени по закону  $\exp(-i\mu t/\hbar)$ , поэтому мы записали диагональные члены как  $\mu_1 \psi_1$  и  $\mu_2 \psi_2$  соответственно. Решим уравнения, представив по аналогии с (2.1) функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  в виде

$$\psi_1 = n_1^{1/2} \exp(iS_1), \quad (5.3)$$

$$\psi_2 = n_2^{1/2} \exp(iS_2), \quad (5.4)$$

где  $n_1, n_2$  — концентрации сверхтекучих (сверхпроводящих) частиц, а  $S_1$  и  $S_2$  — фазы. Как мы уже установили при обсуждении выражений (2.1) и (2.3), для задания  $n$  и  $S$  требуется, чтобы число частиц  $N$  в каждой сверхтекучей жидкости было велико, поскольку  $N$  и  $S$  должны удовлетворять «соотношению неопределенности»

$$\delta N \delta S \sim 1; \quad (5.5)$$

таким образом,  $S$  может иметь неопределенность  $\delta S \sim N^{-1/2}$ , а  $N$  — соответственно неопределенность  $\delta N/N \sim N^{-1/2}$ . По аналогии мы видим, что выражения (5.3) и (5.4) записаны в предположении, что полное число частиц сверхтекучей фазы с каждой стороны барьера велико.

Подставляя (5.3) и (5.4) в уравнения (5.1) и (5.2), получаем

$$\hbar \frac{\partial n_1}{\partial t} = 2K n_1^{1/2} n_2^{1/2} \sin(S_2 - S_1), \quad (5.6)$$

$$\hbar \frac{\partial n_2}{\partial t} = -2K n_1^{1/2} n_2^{1/2} \sin(S_2 - S_1), \quad (5.7)$$

$$-\hbar \frac{\partial}{\partial t} (S_2 - S_1) = \mu_2 - \mu_1. \quad (5.8)$$

Это основные уравнения, описывающие эффект Джозефсона. Уравнения (5.6) и (5.7) определяют прохождение тока через барьер, а уравнение (5.8) представляет собой знакомое нам уравнение для сдвига фазы. Для сверхпроводника  $\mu_2 - \mu_1 = 2eV$ , так что  $V$  — разность потенциалов между двумя сторонами барьера. Запишем ток в виде

$$I = I_0 \sin S, \quad (5.9)$$

где  $S = S_1 - S_2$  — изменение фазы при переходе через барьер, а максимальный сверхпроводящий ток  $I_0$  пропорционален коэффициенту связи  $K$ . Уравнения (5.8) и (5.9) описывают все эффекты Джозефсона. Отметим, что выражение (5.9) выведено в предположении о слабой связи между сверхпроводниками: в уравнениях (5.1) и (5.2) связь учтена лишь с помощью членов, линейных относительно волновых функций. Такой подход допустим для туннельного контакта с окисным барьером, но в принципе не пригоден при более сильной связи. Для более общего случая можно записать  $I = I_0 f(S)$ , где  $f$  — периодическая функция с периодом  $2\pi$ . Однако выражение (5.9), вообще говоря, достаточно для качественного понимания систем со слабым звеном, а часто позволяет получить и количественное согласие. Поэтому мы ограничимся исследованием выражения (5.9).

### § 5.3. Эффекты на постоянном токе

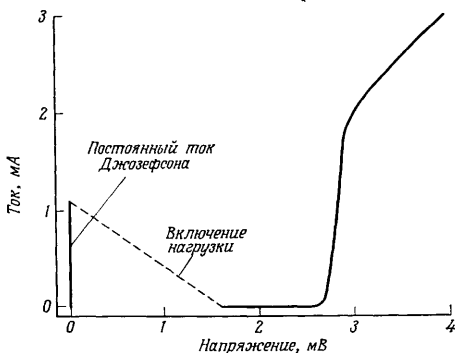
Когда на туннельном контакте нет разности потенциалов, выражение (5.9) описывает ток, который определяется фазой. На практике данный ток  $I$  пропускают через контакт; при  $I < I_0$  фаза оказывается такой, что при прохождении тока не возникает разности потенциалов. При  $I > I_0$  появляется разность потенциалов  $V$ , форма вольтамперной характеристики зависит от свойств слабого звена и всей цепи. Такая характеристика для напыленного контакта изображена на фиг. 113. При увеличении тока  $I$  нет никакой разности потенциалов, пока ток  $I$  не достигнет величины  $I_0$ ; типичное значение  $I_0$  составляет примерно 1 мА (см. фиг. 113). В конце концов характеристика переходит в типичную кривую туннелирования квазичастиц через контакт  $SS$ -типа (см. фиг. 61); промежуточный участок характеристики зависит от параметров внешнего контура.

Амбегаокар и Баратов [1] с помощью микротeorии вычислили температурную зависимость  $I_0$  для частного случая окисного туннельного контакта. Основные свойства можно выяснить из уравнений (5.6) и (5.7), согласно которым  $I_0 \sim \sqrt{n_1 n_2}$ .

Поэтому для  $SS$ -контакта (одинаковые сверхпроводники) вблизи  $T_c$ , используя температурную зависимость Гортера — Казимира, получаем  $I_0 \sim n_1 \sim T_c - T$ . С другой стороны, для



$SS'$ -контакта (разные сверхпроводники) поведение вблизи нижней из двух критических температур  $T_c$  определяется выражением



Фиг. 113. Вольтамперная характеристика напыленного Pb — Pb-контакта при 1,2 К [24].

$I_0 \sim (T_c - T)^{1/2}$ . Для  $SS$ -контакта теоретические результаты можно представить в явном виде:

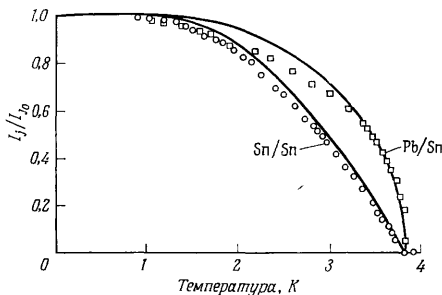
$$I_0 = (\pi/2eR_n) \Delta(T) \operatorname{th} \{ \Delta(T)/2k_B T \}, \quad (5.10)$$

где  $\Delta(T)$  — энергетическая щель, а  $R_n$  — сопротивление туннельного контакта в нормальном состоянии. В частности, при  $T = 0$  получаем

$$I_0(T = 0) = \pi \Delta(0)/2eR_n, \quad (5.11)$$

где  $\Delta(0)$  — энергетическая щель при нулевой температуре. Для типичного окисного контакта площадью  $1 \text{ мм}^2$   $R_n$  имеет порядок  $1 \text{ Ом}$ , так что ток  $I_0$  равен примерно  $1 \text{ мА}$  (поскольку  $\Delta$  порядка  $1 \text{ мВ}$ ). Критический ток для плохого туннельного контакта ниже критического тока, определяемого согласно (5.11), но у хорошо изготовленных окисных контактов (см., например, Шроен [32], Гамильтон и Шапиро [16]) значения  $I_0$  достаточно хорошо согласуются с формулой (5.11). Заметим, что типичная плотность тока, проходящего через окисный туннельный контакт, составляет только  $10^3 \text{ А/м}^2$ . Это значение интересно сравнить с величиной, равной, скажем,  $10^9 \text{ А/м}^2$  для необратимого сверхпроводника II рода, и со значением  $10^{11} \text{ А/м}^2$  для массивного сверхпроводника I рода. Температурная зависимость тока  $I_0$ , определяемая формулой (5.10), и соответствующая температурная зависимость для

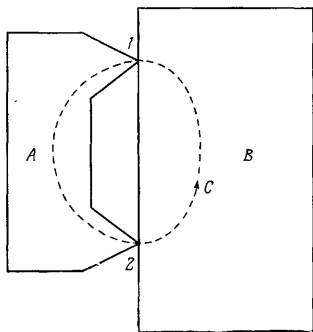
$SS'$ -контакта хорошо согласуются с экспериментальными результатами (фиг. 114).



Фиг. 114. Температурная зависимость тока через контакты Sn/Sn и Pb/Sn при нулевом напряжении [12].

Сплошные кривые — вычисления Амбегаокара и Баратова [1].

Постоянный ток через контакт чрезвычайно чувствителен к приложенному магнитному полю. Рассмотрим, например, два одинаковых точечных контакта, «включенных» параллельно между двумя массивными сверхпроводниками  $A$  и  $B$ , как схематически изображено на фиг. 115.



Фиг. 115. Квантовый интерферометр. Цифрами 1 и 2 обозначены точечные контакты;  $C$  — контур, по которому берется интеграл в выражении (5.12).

Такую систему называют квантовым интерферометром. Предположим, что площадь между двумя туннельными контактами пронизывается некоторым магнитным потоком  $\Phi$ ; это означает, что векторный потенциал  $A$  не может повсюду обращаться в нуль и, в частности,

$$\oint_C A \cdot dl = \Phi, \quad (5.12)$$

где интеграл берется по любому контуру  $C$ , проходящему через оба контакта (см. фиг. 115). Сверхпроводящий ток в лондоновской области (см. § 3.3) определяется выражением

$$\mathbf{J}_e = \frac{e\hbar}{m} |\psi|^2 \nabla S - \frac{2e^2}{m} |\psi|^2 A. \quad (5.13)$$

Плотность тока в толще сверхпроводников  $A$  и  $B$  много меньше, чем на контактах. Мы только что видели также, что плотность критического сверхпроводящего тока для контактов много меньше, чем для массивного сверхпроводника. Следовательно, в толще металлов  $A$  и  $B$  ток  $J_c$  [см. (5.13)] пренебрежимо мал и в этих областях

$$\hbar \nabla S = 2eA. \quad (5.14)$$

Ток через оба контакта равен

$$I = I_0 \{ \sin(S_{1A} - S_{1B}) + \sin(S_{2A} - S_{2B}) \}, \quad (5.15)$$

где смысл обозначений очевиден. Теперь из уравнения (5.14) получаем

$$S_{1A} - S_{2A} = \frac{2e}{\hbar} \int_1^2 A \cdot dl; \quad (5.16)$$

интеграл берется в металле  $A$  вдоль любого пути, связывающего точку 1 с точкой 2. Аналогичным образом

$$S_{2B} - S_{1B} = \frac{2e}{\hbar} \int_2^1 A \cdot dl. \quad (5.17)$$

Теперь с помощью выражения (5.12) для потока  $\Phi$  между контактами получаем

$$(S_{1A} - S_{2A}) + (S_{2B} - S_{1B}) = \frac{2e}{\hbar} \oint A \cdot dl = 2\pi\Phi/\phi_0. \quad (5.18)$$

Предположим для простоты, что  $\Phi$  как раз поток, создаваемый внешним приложенным магнитным полем. В общем же случае  $\Phi$  содержит часть  $LI_s$ , создаваемую током  $I_s$ , циркулирующим по замкнутому контуру ( $L$  — самоиндукция контура), но эта часть потока пренебрежимо мала, если  $LI_0 \ll \phi_0$ , где  $I_0$  — критический ток для каждого из двух рассматриваемых туннельных контактов.

Значение соотношения (5.18) можно вывить, если преобразовать выражение (5.15) следующим образом:

$$I = I_{\text{макс}} \sin S, \quad (5.19)$$

где

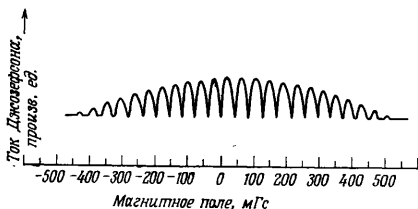
$$I_{\text{макс}} = 2I_0 \cos(\pi\Phi/\phi_0) \quad (5.20)$$

и

$$S = \frac{1}{21} (S_{1A} + S_{2A} - S_{1B} - S_{2B}). \quad (5.21)$$

Мы воспользовались формулой (5.18), чтобы выразить аргумент косинуса через магнитный поток  $\Phi$ , а не через сумму фаз, входящую в левую часть этого выражения. Формулу (5.19) нужно понимать так же, как (5.9). Если приложенный ток  $I < I_{\text{макс}}$ , фаза  $S$  при-

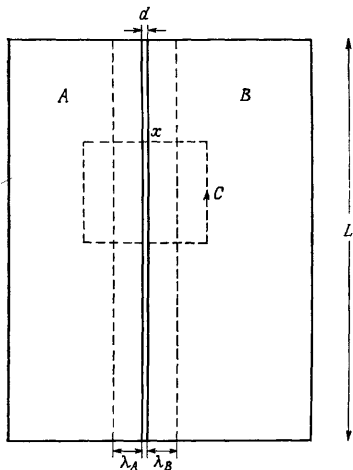
нимает такое значение, чтобы проходящий ток не создавал разности потенциалов. Однако в данном случае максимальный ток



Фиг. 116. Экспериментальная зависимость  $I_{\max}$  от магнитного поля для двухконтактного интерферометра [18].

Огибающая возникает в силу конечного размера отдельных контактов.

$I_{\max}$  модулируется магнитным потоком, захваченным между туннельными контактами. Период модуляции равен  $\phi_0 = 2 \cdot 10^{-15} \text{ Вб} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Тс} \cdot \text{см}^2$ .



Фиг. 117. Разрез пленочного контакта между A и B.

Из формулы (5.15) ясно, почему описываемое нами устройство называют интерферометром: полный ток является когерентной суммой отдельных токов через каждый туннельный контакт. Типичное поведение текущего через интерферометр тока изображено на фиг. 116.

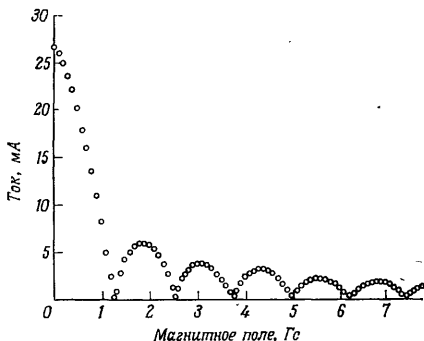
Туннельный контакт из тонкой пленки похож на только что описанный интерферометр в том отношении, что максимальный сверхпроводящий ток через контакт зависит от магнитного поля в плоскости окисной пленки. Как показано на фиг. 117, поле пронизывает полную площадь  $(\lambda_A + \lambda_B + d)L$ , где  $\lambda_A$ ,  $\lambda_B$  — глубины проникновения,  $d$  — толщина

окисной пленки и  $L$  — длина контакта (пленки). Вычисления, аналогичные проведенным выше (сумма по двум контактам заме-

няется интегралом вдоль окисной пленки), дают

$$I_{\text{макс}} = I_0 \frac{\sin(\pi\Phi/\phi_0)}{\pi\Phi/\phi_0}, \quad (5.22)$$

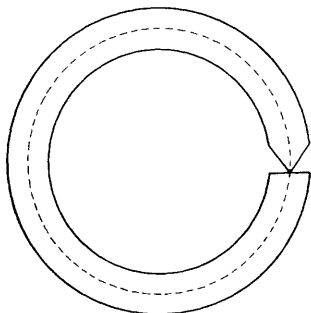
где  $\Phi = BL(\lambda_A + \lambda_B + d)$  — поток, захваченный туннельным контактом. Выражение (5.22) по форме совпадает, конечно, с получаемым в оптике выражением для амплитуды при дифракции Фраунгофера на одной щели. Можно получить хорошее согласие формулы (5.22) с экспериментом (фиг. 118).



Фиг. 118. Зависимость максимального постоянного тока Джозефсона от магнитного поля для Sn — Sn-контакта при 1,2 К [24].

Мы видим, что и в двухконтактном интерферометре, и в случае туннельного контакта из напыленной пленки критический ток в приложенном магнитном потоке осциллирует с периодом  $\phi_0$ . В частности, критический ток в интерферометре осциллирует в приложенном поле очень быстро, если площадь между контактами достаточно велика. Поэтому интерферометры, как и можно было ожидать, нашли применение в качестве исключительно чувствительных магнетометров. Фактически магнетометры чаще делают из сверхпроводящей петли (витка) с одним слабым звеном (фиг. 119). Как мы увидим, ток через слабое звено является осциллирующей функцией приложенного к витку потока, так что виток с одним слабым звеном сохраняет такую же чувствительность к магнитному полю, как и интерферометр. Витки с одним и двумя туннельными контактами называют сквидом [SQID (superconductive quantum interference detectors) — сверхпроводящие квантовые интерферометрические детекторы]. В связи с возрастающей важностью их применений в различных приборах, не говоря уже об

интересе, который они представляют сами по себе, обсудим общие свойства витка с одним слабым звеном в приложенном поле. Первая работа, посвященная виткам такого типа, была выполнена Силвером, Циммерманом и их сотрудниками, которые усовершенствовали также конструкцию магнетометров. В нашем изложении будем следовать части основной статьи Силвера и Циммермана [35].



Фиг. 119. Сверхпроводящая петля с одним слабым звеном. Используемый при интегрировании контур  $C$  обозначен пунктиром.

Начнем, естественно, с выражения Лондонов (3.18) для тока, которое мы проинтегрируем по контуру  $C$ , показанному пунктиром на фиг. 119. Интеграл от  $A$  равен, как обычно, магнитному потоку через кольцо:

$$\oint A \cdot dl = \Phi. \quad (5.23)$$

Важно теперь учесть магнитное поле, генерируемое циркулирующим в кольце током  $I$ ; соответствующий поток равен  $LI$ , где  $L$  — самоиндукция кольца. Следовательно,

$$\Phi = \Phi_x + LI, \quad (5.24)$$

где  $\Phi_x$  — поток приложенного поля, создаваемого, например, расположенной внутри кольца катушкой. Именно поток  $\Phi_x$  измеряется магнетометром. Интеграл от  $\nabla S$  по контуру  $C$  равен, как обычно,  $2\pi\lambda$ . Интеграл от  $J_e$  распадается на две части. В толще сверхпроводника  $J_e = 0$  и интеграл равен нулю. На туннельном контакте фаза  $S$  меняется быстро, так что получаем

$$\int J_e \cdot dl = \frac{e\hbar}{m} |\psi|^2 \int \nabla S \cdot dl = \frac{e\hbar}{m} |\psi|^2 S. \quad (5.25)$$

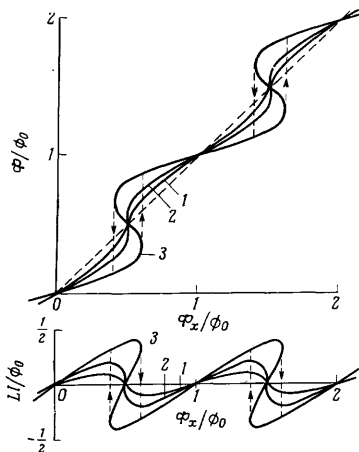
Здесь интегралы берутся по туннельному контакту и  $S$  представляет собой полную разность фаз на контакте. В (5.25) мы пренебрегаем интегралом от  $A$ , поскольку он пропорционален толщине туннельного контакта в направлении текущего тока и поэтому очень мал. Из (5.23) и (5.25) находим

$$S + 2\pi\Phi/\phi_0 = 2\pi\lambda. \quad (5.26)$$

Наконец, текущий по кольцу сверхпроводящий ток  $I$  определяется обычным соотношением Джозефсона

$$I = I_0 \sin S. \quad (5.27)$$

Выражения (5.24), (5.26) и (5.27) представляют собой систему уравнений с тремя неизвестными  $\Phi$ ,  $S$  и  $I$ , зависящими от приложенного потока  $\Phi_x$ . Нас особенно интересует поведение  $\Phi$  и  $I$  как функций  $\Phi_x$ . Форма этой зависимости определяется величиной



Фиг. 120. Зависимость магнитного потока  $\Phi$  и циркулирующего тока  $I$  от внешнего потока  $\Phi_x$  для сверхпроводящего кольца с одним туннельным джозефсоновским контактом [35].

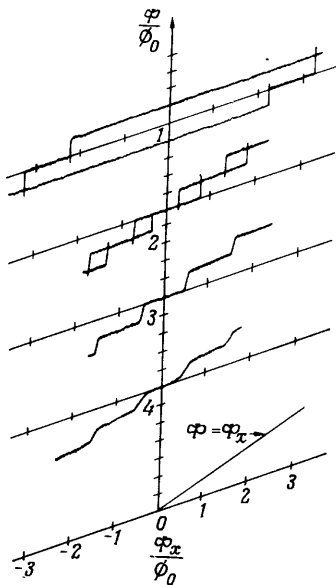
Три кривые соответствуют трем разным значениям  $LI_0/\phi_0$ , равным  $1/4\pi$  (кривая 1),  $1/2\pi$  (кривая 2) и  $1/\pi$  (кривая 3).

безразмерного параметра  $LI_0/\phi_0$ ; детали вычислений оставлены для задачи, а результаты для трех значений  $LI_0/\phi_0$  изображены на фиг. 120. При  $LI_0/\phi_0 < 1/2\pi$  поток  $\Phi$  является однозначной функцией  $\Phi_x$ , в то время как при  $LI_0/\phi_0 > 1/2\pi$  поток  $\Phi$  для некоторых интервалов значений  $\Phi_x$  является трехзначной функцией. В последнем случае может возникнуть гистерезис, когда переходы в растущем и падающем полях происходят при разных значениях  $\Phi_x$  (см. пунктирные линии на фиг. 120). Предельные соотношения имеют следующий вид:  $\Phi = \Phi_x$  для  $LI_0 = 0$ , что соответствует открытому кольцу, и  $\Phi = n\phi_0$  (полное квантование потока) при  $LI_0 \gg \phi_0$ , что соответствует замкнутому кольцу без слабых звеньев. Кривые типа изображенных на фиг. 120 представляют собой промежуточные формы поведения между этими двумя предельными случаями. На фиг. 121 приведены экспериментальные ре-

зультаты для статической намагниченности кольца со слабым звеном.

Для применения кольца со слабым звеном в качестве магнетометра необходимо каким-то способом отыскать положение кольца

на одной из кривых, изображенных на фиг. 120. Это часто делают по высокочастотному сигналу в  $LC$ -контуре, индуктивно связанном с кольцом. Кроме того, установка должна быть достаточно жесткой; желательна, в частности, постоянная настройка инструмента. Соответствующее устройство, впервые описанное Циммерманом и др. [45], изображено на фиг. 122. Для удобства при использовании установки измеряемый поток обычно «вводят» в содержащее слабое звено кольцо (полость 2) с помощью преобразователя потока  $C_1C_2$ . Последний состоит из полностью сверхпроводящей проволоки, причем измеряемый поток окружен петлей  $C_2$ . Поскольку полный поток в области, окруженной сверхпроводящей проволокой, постоянен, поток через  $C_1$  уменьшается при увеличении потока через  $C_2$ , и наоборот. Точечный контакт устанавливается так, чтобы получить критический ток  $I_0$ , при котором значение  $LI_0/\phi_0$



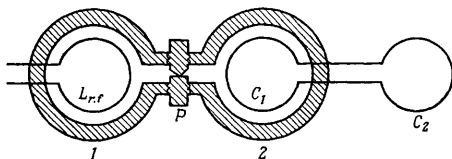
Фиг. 121. Магнитные свойства кольца со слабым звеном [35].

Значение  $LI/\phi_0$  равно соответственно  $3^{1/4}$  (кривая 1),  $3/4$  (кривая 2),  $1/2$  (кривая 3) и  $2/5$  (кривая 4).

несколько превышает  $1/2\lambda$ . Поэтому, когда поток  $\Phi_x$  в полости 2 меняется, описывая одну или более гистерезисных петель (см. фиг. 120), возникают некоторые потери. Когда высокочастотный ток  $I_{г.г}$  имеет такую величину, что в некоторой точке высокочастотного цикла в точечном контакте он превышает критическое значение, поток в течение цикла перемещается туда и обратно между полостями 1 и 2. Возникающая при этом диссипация создает разность потенциалов  $V_{г.г}$ , значение которой зависит от величины потока  $\Phi$  в полости 2. На фиг. 123 а изображена



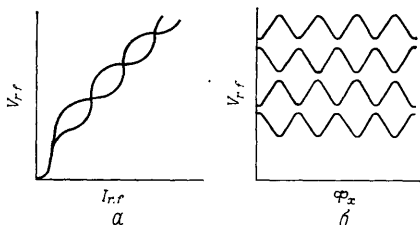
зависимость  $V_{r,f}$  от  $I_{r,f}$  для двух различных значений  $\Phi_x$ , а на фиг. 123, б приведена зависимость  $V_{r,f}$  от  $\Phi_x$  для четырех различных фиксированных значений  $I_{r,f}$ . В обоих случаях, конечно, отклик периодически зависит от  $\Phi_x$  с периодом, равным  $\phi_0$ .



Фиг. 122. Симметричный сквид [45].

Два тороидальных вивта, образующие точечный контакт Р, расположены симметрично относительно двух тороидальных полостей 1 и 2 (заштрихованы). В полости 1 расположена катушка радиочастотного контура. Полость 2 (кольцо со слабой связью) связана с измерительным потоком при помощи преобразователя потока  $C_1$ ,  $C_2$ , сделанного из сверхпроводящей проволоки.

Существуют различные способы измерения потока  $\Phi_x$  с помощью характеристик, изображенных на фиг. 123. Для сравнительно грубых измерений можно подсчитывать, сколько раз напряжение  $V_{r,f}$  принимает нулевое значение при увеличении  $\Phi_x$ , что



Фиг. 123. а — зависимость  $V_{r,f}$  от  $I_{r,f}$  при  $\Phi_x = n\phi_0$  и  $\Phi_x = (n + 1/2)\phi_0$ ; б — зависимость  $V_{r,f}$  от  $\Phi_x$  при четырех различных значениях  $I_{r,f}$  [45].

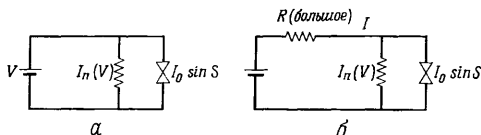
дает количество квантов потока в  $\Phi_x$  (Фаргакс и Варник [13]). Для измерения отклонения  $\Phi_x$  от ближайшего целого числа квантов  $n\phi_0$  поток  $\Phi_x$  можно модулировать с амплитудой  $\phi_0$  на некоторой звуковой частоте. Тогда величина детектируемого на звуковой частоте сигнала  $V_{r,f}$  зависит от разности  $\Phi_x - n\phi_0$ . Дальнейшие подробности относительно использования сквидов в качестве магнетометров и вольтметров и шумовых ограничений их чувствительности приводятся в различных статьях и обзорах (Циммерман и др. [45], Циммерман [43, 44], Вебб [40]).

Полученные нами до сих пор результаты относятся в основном к сверхпроводящему току при строго равном нулю напряжении. Заканчивая раздел, обсудим влияние параметров контура на вольтамперные характеристики на постоянном токе для одиночного туннельного контакта вблизи точки  $V = 0$ . Вообще говоря, в этом случае существенны два фактора: характер внешнего контура, связанного с туннельным контактом, и форма *фонового тока*, который протекал бы через туннельный контакт в отсутствие сверхпроводящего тока. Фоновый ток в случае окисного туннельного контакта определяется характеристикой туннелирования квазичастиц (см. фиг. 113). Для точечного контакта фоновый ток обычно считают омическим; в общем же случае мы записываем фоновый ток в виде  $I_n(V)$ . Предположим также, что этот ток течет параллельно току Джозефсона, в силу чего основные уравнения имеют вид

$$I = I_0 \sin S + I_n(V), \quad (5.28)$$

$$\hbar \frac{dS}{dt} = 2eV. \quad (5.29)$$

Рассмотрим в явном виде лишь два предельных случая, когда внешний контур задает напряжение или ток. При заданном напряжении  $V$  (фиг. 124, а) определяется ток  $I$ , а при заданном токе  $I$



Фиг. 124. Контур при заданном напряжении (а) и при заданном токе (б).

(фиг. 124, б) определяется напряжение  $V$ . Если не приняты специальные меры, в экспериментах обычно задают ток, поскольку импеданс туннельного контакта на постоянном токе мал. Мы упростим также задачу, считая, что фоновый ток подчиняется закону Ома

$$I_n(V) = G_n(V). \quad (5.30)$$

При фиксированном напряжении из уравнения (5.29) следует, что

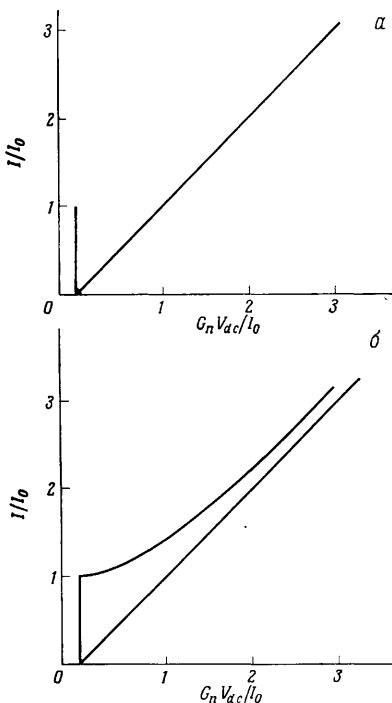
$$S = S_0 + 2eVt/\hbar, \quad (5.31)$$

и усреднение по времени выражения (5.28) для постоянного тока дает

$$I_{d.c} = I_0 \sin S \quad \text{при } V = 0, \quad (5.32)$$

$$I_{d.c} = I_n(V) \quad \text{при } V \neq 0. \quad (5.33)$$

Ток Джозефсона при нулевом напряжении имеет «выброс» на характеристике (фиг. 125, а). С другой стороны, при фиксирован-



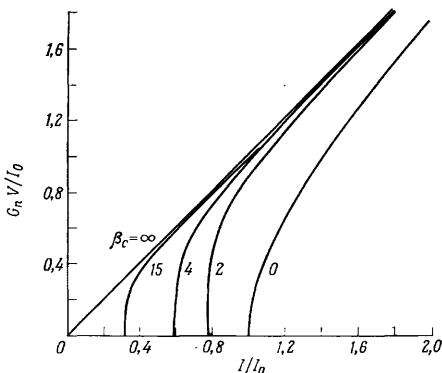
Фиг. 125. Вольтамперные характеристики.

а — при заданном напряжении [см. фиг. 124, а и выражения (5.32) и (5.33)]; б — при заданном токе [см. фиг. 124, б и выражение (5.35)].

ном токе фаза  $S$  уже не зависит линейно от времени, и, следовательно, среднее значение величины  $I_0 \sin S$  не равно нулю. Поскольку теперь фиксирован ток  $I$ , а не напряжение  $V$ , мы с помощью (5.29) заменяем  $V$  в уравнении (5.28) и получаем

$$\frac{\hbar}{2e} G_n \frac{dS}{dt} + I_0 \sin S = I; \quad (5.34)$$

при этом зависимость  $I_n(V)$  считаем соответствующей закону Ома. Уравнение (5.34) для  $S(t)$  можно решить, используя табличные интегралы. Если мы знаем  $S(t)$ , то постоянное напряжение



Фиг. 126. Вольтамперные характеристики при заданном токе для контакта с параллельной емкостью [27].

Обратите внимание, что по оси абсцисс отложен ток;  $\beta_c$  — емкость в приведенных единицах, равная  $2eI_0 C / \hbar G^2$ .

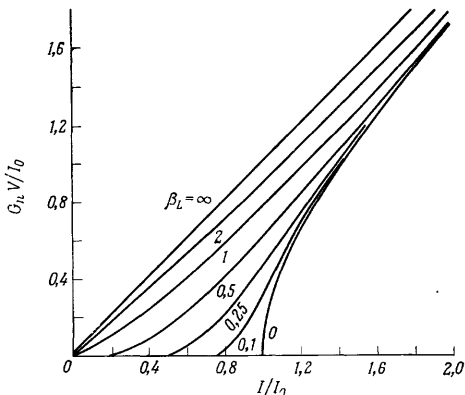
на контакте  $V_{d.c}$  можно определить из уравнения (5.29) по среднему значению производной  $dS/dt$ . В результате получаем (Мак-Камбер [27], Стюарт [37])

$$(G_n V_{d.c})^2 + I_0^2 = I^2. \quad (5.35)$$

Это решение изображено на фиг. 125, б; с ростом тока  $I$  напряжение  $V_{d.c}$  постепенно приближается к фоновому значению. Можно сказать, что при  $I > I_0$  фаза  $S$  прецессирует таким образом, что большее время она имеет те значения, при которых сверхпроводящий ток положителен.

Влияние данного контура можно всегда в принципе учесть с помощью описанной выше методики. Совершенно очевидно, что возможны разные варианты поведения. В частности, можно понять различие между характеристиками на постоянном токе окисного и точечного контактов. Окисный контакт имеет параллельно включенную большую емкость, а у точечного контакта последовательно включена большая индуктивность. Мак-Камбер [27] нашел характеристики на постоянном токе для двух таких эквивалентных контуров (при заданном значении тока или напряжения соответственно). На фиг. 126 и 127 приведены его результаты,

качественно согласующиеся с экспериментальными данными. Кроме того, емкостная нагрузка приводит к появлению на характеристиках гистерезиса (Стюарт [37]); экспериментальные данные



Фиг. 127. Вольтамперные характеристики при заданном напряжении для контакта с последовательно включенной индуктивностью [27].

$\beta_L$  — индуктивность в приведенных единицах, равная  $\hbar/2eI_0L$ .

(Скотт [33]) хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями. Подробный обзор вычислений для эквивалентных контуров содержится в работе [7].

## § 5.4. Эффекты на переменном токе

При наличии на слабом звене разности потенциалов разность фаз между обеими сторонами звена (контакта) прецессирует со скоростью, определяемой обычным соотношением для сдвига фазы [см. (5.8)]. Простейший случай мы имеем, когда к контакту приложена постоянная разность потенциалов  $V$ . Тогда разность энергий куперовских пар по обе стороны от контакта становится равной  $\mu_1 - \mu_2 = 2eV$ , и куперовские пары могут непрерывно туннелировать с испусканием фотона с частотой  $\omega_0 = 2eV/\hbar$ . Это соответствует частоте 484 МГц на 1 мкВ, так что типичные смещающие напряжения порядка нескольких милливольт соответствуют микроволновым фотонам. Аналогичным образом, если смещающее напряжение на туннельном контакте равно  $V$  и к контакту приложено микроволновое поле с частотой  $2eV/\hbar$ , куперовские

пары могут испытывать туннелирование с поглощением фотонов. Для описания этих двух процессов можно воспользоваться основными уравнениями (5.8) и (5.9).

Предположим, что на находящемся в микроволновом поле слабом звене имеется постоянная разность потенциалов  $V$ . Тогда уравнение для сдвига фазы (5.8) принимает вид

$$\hbar \frac{dS}{dt} = 2eV + 2ev \cos(\omega t + \theta). \quad (5.36)$$

Здесь для простоты мы предположили, что на слабом звене задано напряжение. Получим теперь в явном виде фазу  $\theta$  микроволнового поля. Для «сверхтекучей фазы» уравнение (5.36) дает

$$S = \frac{2eV}{\hbar} t + \frac{2ev}{\hbar\omega} \sin(\omega t + \theta) + S_0; \quad (5.37)$$

именно это выражение нужно подставить в токовый член  $I_0 \sin S$ . Полученное в результате соотношение можно проанализировать с помощью тождества

$$\exp(iC \sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(C) \exp(inx). \quad (5.38)$$

Здесь  $J_n(C)$  — функция Бесселя порядка  $n$ . Для тока на слабом звене находим

$$I = I_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n\left(\frac{2ev}{\hbar\omega}\right) \sin\left\{\left(\frac{2eV}{\hbar} - n\omega\right)t - n\theta + S_0\right\}. \quad (5.39)$$

Наиболее важная черта этого выражения — наличие постоянного сверхпроводящего тока при

$$2eV = n\hbar\omega. \quad (5.40)$$

Величина этого тока равна

$$I_n = (-1)^n I_0 J_n\left(\frac{2ev}{\hbar\omega}\right) \sin(S_0 - n\theta). \quad (5.41)$$

Этот ток аналогичен сверхпроводящему току при нулевом напряжении в том отношении, что для определенной области фаза  $S_0$  может соответствовать приложенному постоянному току  $I_n$ . Получаем *постоянные скачки напряжения*, причем

$$I_n^{(\text{step})} = 2I_0 J_n\left(\frac{2ev}{\hbar\omega}\right). \quad (5.42)$$

Кроме того, сверхпроводящий ток при нулевом напряжении снижается и становится равным

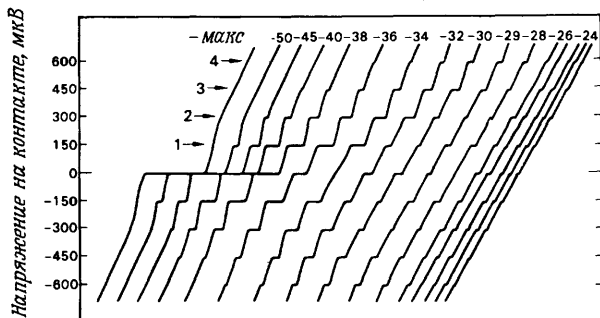
$$I_0^{(\text{step})} = 2I_0 J_0\left(\frac{2ev}{\hbar\omega}\right). \quad (5.43)$$

При  $2e\nu/\hbar\omega \ll 1$  функцию Бесселя можно разложить в ряд; тогда получаем

$$I_0^{(\text{step})} = 2I_0(1 - 2e^2\nu^2/\hbar^2\omega^2). \quad (5.44)$$

Соотношение (5.40) при  $n = 1$  является точным условием туннелирования с поглощением одного фотона, которое мы описывали

Относительная мощность, дБ



Ток через контакт, произв. ед.

Фиг. 128. Вольтамперные характеристики точечного контакта Nb — Nb при 4,2 К, облучаемого микроволнами с частотой 72 ГГц различной мощности [15].

1 — 4 — скачки.

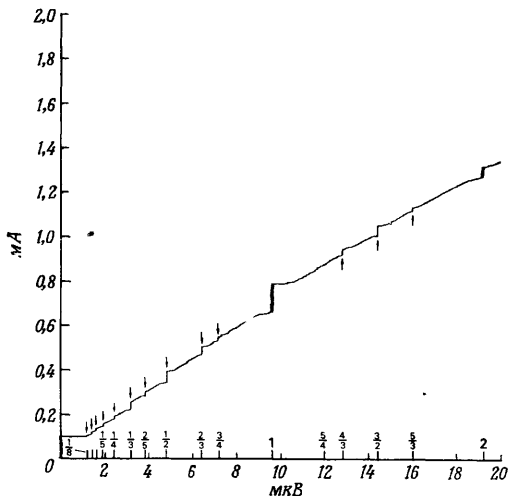
выше; выражение (5.42) дает соответствующий скачок сверхпроводящего тока. Для произвольного  $n$  соотношение (5.40) является условием туннелирования с поглощением  $n$  фотонов одновременно; в этом случае снова получаем скачок сверхпроводящего тока.

Постоянные скачки напряжения во внешнем микроволновом поле впервые наблюдал Шапиро [34]; типичные результаты, полученные недавно, изображены на фиг. 128. Как можно видеть, амплитуда скачка осциллирует при изменении интенсивности микроволнового поля, что качественно согласуется с зависимостью (5.42). Например, с увеличением мощности величина скачка, соответствующего  $n = 2$ , возрастает от нуля до максимума, затем понижается и т. д. Для туннельных точечных контактов обычно получают вполне хорошее количественное согласие с уравнением (5.42), если не считать слишком большого скачка для нулевого напряжения при низких мощностях. Причина такого расхождения не вполне ясна; объяснения, предложенные Граймсом и Шапиро [15], подверглись критике Циммермана [42].

В конце § 5.2 мы отметили, что для микропостика (см. фиг. 112), например, ток нужно считать просто периодической функцией фазы  $I_0 f(S)$ . Хотя различие между  $f(S)$  и простой синусоидальной зависимостью часто несущественно, оно вносит заметные изменения в обсуждаемый нами эффект на переменном токе. Функцию  $f(S)$  можно разложить в ряд Фурье по синусоидальным волнам:

$$f(S) = \sum_{n'} A_{n'} \sin n'S. \quad (5.45)$$

С помощью этого выражения для тока мы можем обобщить анализ, приведший к условию синхронизации (5.40) (см. задачу 5.7).



Фиг. 129. Вольт-амперная характеристика микропостика из тонкой пленки в микроволновом поле с частотой 4,26 ГГц [6].

Выражение (5.39) заменяется при этом другим, содержащим дополнительную сумму по  $n'$ , а условие синхронизации принимает вид

$$2eV = n\hbar\omega/n'. \quad (5.46)$$

На фиг. 129 изображены экспериментальные результаты для эффекта Джозефсона на переменном токе в случае микропостика. Ряд субгармоник с  $n = 1$  четко виден вплоть до  $n' = 6$ ; кроме



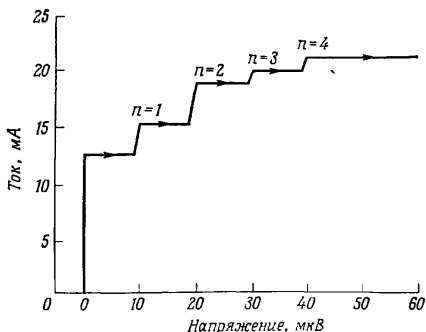
того, имеются дополнительные скачки в тех точках, где  $n$  и  $n'$  — относительно простые целые числа, отличные от единицы.

Стоит отметить следующее. В силу того, что мы задавали напряжение, т.е. считали большим импеданс образца как на постоянном токе, так и на микроволнах, из выражения (5.42) следует, строго говоря, наличие всплеска тока точно при напряжении синхронизации  $n\hbar\omega/2e$ . Экспериментальные результаты, однако, показывают, что после скачка ток постепенно уменьшается до фонового значения  $n_0$ ; по аналогии с током при нулевом напряжении можно видеть, что именно этого и нужно ожидать в том случае, когда задается ток. Как и для тока при нулевом напряжении (если предположить, что задается ток), для скачков, индуцированных микроволновым полем, мы должны получить другие, более сложные уравнения. Соответствующие уравнения были составлены Вальдрамом и др. [39], но аналитически их решить, по-видимому, невозможно.

На первый взгляд кажется, что переменный эффект Джозефсона может быть использован для создания эффективного микроволнового источника. Однако низкий импеданс всех слабых звеньев, порядка 1 Ом или меньше, означает, что всегда будет существовать большое рассогласование импедансов между слабым звеном и любым внешним контуром. Следовательно, уровень мощности во внешнем контуре всегда будет очень низким; излучение удалось детектировать, но его мощность обычно имела порядок лишь  $10^{-11}$  Вт (Янсон и др. [41], Лангенберг и др. [24]). Фактически, в силу несогласованности импедансов, на резонансных частотах в окисном контакте, который можно рассматривать как короткий участок линии передачи, возникает картина стоячей волны с высокой добротностью. Если в плоскости туннельного контакта приложить магнитное поле, ток Джозефсона можно модулировать в пространстве согласованно со стоячей волной. В результате, если это достигнуто, на контакте генерируется мощное микроволновое поле при постоянном смещающем напряжении  $V_c = n\hbar\omega_c/2e$ , где  $\omega_c$  — резонансная частота. Благодаря существованию обратной связи с микроволновым полем возникает скачок тока на постоянном напряжении (Фиске [12], Кун и Фиске [5]). На фиг. 130 изображена вольтамперная характеристика со скачками Фиске.

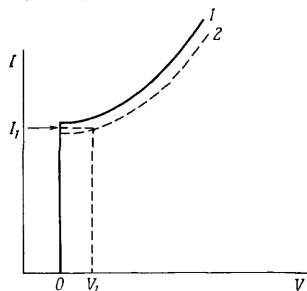
Эффект Джозефсона на переменном токе с приложением внешнего микроволнового поля к слабому звену нашел практические применения. Наиболее важное из них — точное измерение фундаментальной постоянной  $h/e$ . Как мы уже видели, микроволновое поле с частотой  $\omega$  приводит при  $n = 1$  к скачку напряжения  $V$ , причем  $V/\omega = \hbar/2e$ . Следовательно, эффект Джозефсона позволяет измерить  $h/e$  или, что эквивалентно, позволяет выразить стандартное напряжение через стандартную частоту. Измерения

$h/e$  (Паркер и др. [29]) привели к существенному пересмотру принятого значения и устранили кажущееся расхождение между



Фиг. 130. Вольтамперная характеристика пленочного контакта Sn — Sn при  $T = 1,2$  К в магнитном поле 1,9 Гс, приложенном в плоскости пленки [24].

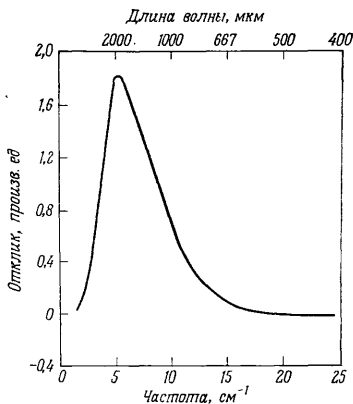
вычислениями, основанными на квантовой электродинамике и на структуре энергетических уровней водорода. Более поздние измерения привели к пересмотру значений всех фундаментальных постоянных; полные данные по этому вопросу приводятся в работе Тейлора и др. [38]. Правда, точность определения  $h/e$  ограничивается тем, что напряжение на контакте имеет порядок милливольт, а стандартные источники напряжения дают около 1 В. Нужно поэтому использовать тщательно изготовленные делители напряжения, которые и являются основным источником ошибки.



Фиг. 131. Иллюстрация метода широкополосного детектирования [14]. Кривая 1 — характеристика в отсутствие облучения; кривая 2 — характеристика при наличии облучения. Под влиянием облучения возникает смещение тока  $I_1$  и напряжения  $V_1$ .

Слабые звенья можно использовать в качестве детекторов микроволнового излучения и излучения в далекой инфракрасной области. Мы видели [см. выражения (5.43) и (5.44)], что ска-

чок при нулевом напряжении подавляется падающим излучением любой частоты. Граймс и др. [14] использовали этот эффект для создания широкополосного детектора. Через слабое звено (Граймс и др. работали с различными точечными контактами)



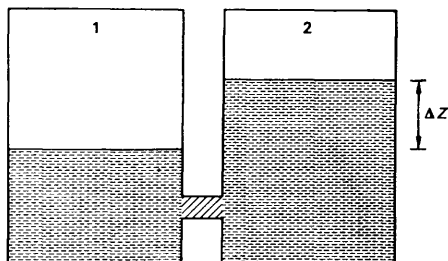
Фиг. 132. Спектральная характеристика типичного точечного контакта In — In при 2,2 К [14].

пропускался такой ток, который при нулевом напряжении соответствовал верхней части скачка. При наличии излучения скачок уменьшался и на контакте возникала разность потенциалов (фиг. 131). На практике падающее излучение обрезается на некоторой частоте и регистрируется разность потенциалов на этой частоте. Как можно видеть из фиг. 132, спектральная чувствительность контакта In — In при 2,2 К имеет пик в субмиллиметровой области частот; фактически для этой области такой детектор лучше какого-либо другого.

## § 5.5. Поиски эффектов Джозефсона в жидком гелии

Как мы видели, описание сверхпроводника с помощью волновой функции позволяет предсказать различные эффекты Джозефсона, которые наблюдаются при наличии слабой связи между двумя массивными сверхпроводниками. Естественно предположить, что при описании в тех же терминах сверхтекучего гелия будут обнаружены аналогичные эффекты в том случае, когда два

больших объема гелия соединены с помощью слабого звена, т. е. такой области, в которой могут перекрываться волновые функции, соответствующие каждому сосуду. Рассмотрим ситуацию (фиг. 133), когда между двумя резервуарами существует разность



Фиг. 133. Два сосуда с жидким гелием, соединенные слабым звеном. При одинаковой температуре сосудов разности уровней  $\Delta Z$  соответствует разность химических потенциалов  $m_4 g \Delta Z$ .

уровней  $\Delta Z$ ; пока предположим, что температура жидкости в обоих резервуарах одинакова. Тогда разность химических потенциалов равна

$$\Delta\mu = \mu_2 - \mu_1 = m_4 g \Delta Z. \quad (5.47)$$

В § 4.5 мы ввели понятие о сдвиге фазы, используя основное уравнение, с которым впервые столкнулись в гл. 2 [уравнение (2.16)]. Это уравнение пригодно для описания эффектов Джозефсона (см. § 5.2), и теперь мы воспользуемся им еще раз:

$$\frac{d}{dt}(S_2 - S_1) = -\frac{1}{\hbar}(\mu_2 - \mu_1). \quad (5.48)$$

Здесь  $S_1$  и  $S_2$  — фазы волновой функции соответственно в резервуарах 1 и 2. Записав уравнение в виде

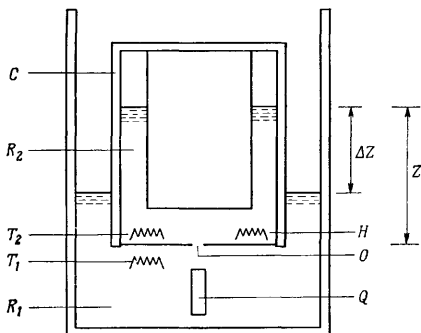
$$\frac{d}{dt}(S_2 - S_1) = -2\pi\nu, \quad (5.49)$$

мы можем определить характерную частоту при сдвиге фазы на слабом звене

$$\nu = m_4 g \Delta Z / \hbar. \quad (5.50)$$

При выводе (5.50) мы использовали уравнения (5.47) — (5.49). Характерная частота  $\nu$  соответствует джозефсоновской частоте  $2eV/\hbar$  на переменном токе при туннелировании куперовских пар (см. § 5.4).

Основная трудность при постановке эксперимента для обнаружения эффектов Джозефсона в He II — создание соответствующего слабого звена между резервуарами. Было высказано предположение, что квантовомеханическое туннелирование атомов гелия может возникнуть через барьер, пронизанный отверстиями атомных размеров (Мамаладзе и Чешвили [26]), но такой контакт



Фиг. 134. Схема прибора, применявшегося Ричардсом и Андерсоном [31] для поисков эффекта Джозефсона для переменного потока в He II.

$R_1$ ,  $R_2$  — сосуды;  $O$  — отверстие;  $Q$  — излучатель;  $C$  — кольцеобразный конденсатор для определения уровня в сосуде  $R_2$  (конденсатор для  $R_1$  на схеме не указан);  $H$  — нагреватель;  $T_1$ ,  $T_2$  — термометры сопротивления (нагреватель и термометры сопротивления введены Музинским и Дугласом [28]).

создать было бы нелегко. Высказывалось также предположение, что слабым звеном может служить пленка гелия (Доннелли [8]), но никаких эффектов течения пленки, которые можно было бы связать с квантовой интерференцией, пока обнаружить не удалось. Фактически во всех известных экспериментах слабым звеном служило сделанное в тонкой металлической фольге отверстие диаметром 10—20 мкм (фиг. 134).

Доказательством наличия эффекта Джозефсона в He II в течение долгого времени считались эксперименты Ричардса и Андерсона [31]. Целью экспериментов было определение характеристической частоты (5.50). Для этого создавались колебания разности химических потенциалов с другой фиксированной частотой  $\nu_0$  и определялась синхронизация обеих частот согласно соотношению

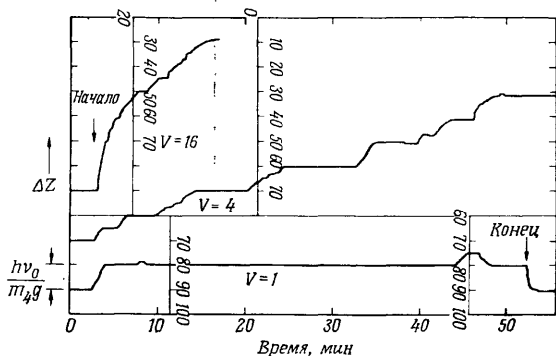
$$n_1 \nu_0 = n_2 \nu, \quad (5.51)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — небольшие целые числа. Соотношения (5.50) и (5.51) вместе дают

$$(\Delta Z)_J = \frac{n_1}{n_2} \frac{h\nu_0}{m_4 g}, \quad (5.52)$$

откуда видно, что в системе должны обнаруживаться аномалии сверхтекучего течения через отверстие при разностях уровней жидкости, определяемых выражением (5.52).

Схема экспериментальной установки изображена на фиг. 134. Наружный сосуд соединен с внутренним цилиндрическим сосудом



Фиг. 135. Зависимость измеренных значений  $\Delta Z$  от времени при различной величине управляющего переменного напряжения  $V$  на излучателе [30].

Диаметр отверстия 12 мкм; частота 104,8 кГц, напряжение выражено в произвольных единицах. Наличие горизонтальных областей указывает на динамическую устойчивость не при отличной от нуля разности  $\Delta Z$ .

отверстием, расположенным в его основании. Уровни жидкости контролировались с помощью измерений емкости. Кристалл кварца, расположенный под отверстием, использовался в качестве источника для облучения слабого звена звуковым полем с частотой  $\nu_0$ . Наблюдалось уменьшение разности уровней, возникающее в результате гравитационного течения через отверстие. Когда кварцевый излучатель (преобразователь) выключен, наблюдается гладкая кривая зависимости  $\Delta Z$  от времени. При включении излучателя на кривой возникают скачки, указывающие на то, что система «предпочитает» на некоторое время оставаться при определенной разности уровней; в этот период течение через отверстие прекращается.

Ступенчатая структура видна особенно четко, когда наблюдения начинаются от значения  $\Delta Z = 0$ . В этом случае преобразователь работает как насос, увеличивающий разность уровней со временем. На фиг. 135 изображены результаты последовательно повторявшихся измерений (Ричардс [30]). Нижняя кривая была интерпретирована как доказательство устойчивости разности уровней, равной  $h\nu_0/m_4g$ . При работе излучателя на большей мощности (средняя кривая) возникали скачки, когда разность уровней составляла  $(n_1/n_2) h\nu_0/m_4g$ , причем множитель  $n_1/n_2$  изменялся от 2 до 6. Кроме того, видны некоторые скачки при  $n_1/n_2$ , равном  $1/2$ ,  $1/3$  и  $1/4$ . На кривой, полученной при максимальной мощности излучателя, также видны скачки, но значительно менее устойчивые, как и следовало ожидать. Эксперимент был повторен Хораном [22] и Хулином и др. [17], которые получили по существу аналогичные результаты. Высказывалось мнение, что наблюдаемые в этих экспериментах устойчивые картины аналогичны скачкам тока, возникающим, например, в экспериментах со сверхпроводящим микромостиком (Дайем и Виганд [6], см. фиг. 129). Поэтому скачки Ричардса — Андерсона интерпретировались как доказательство существования в He II эффекта Джозефсона на переменном токе.

Однако справедливость такой интерпретации была подвергнута сомнению после того, как Музинский и Дуглас [28] и Лейдерер и Побелл [25] повторили эксперименты Ричардса и Андерсона. В этих экспериментах имелась возможность дополнительно изменять некоторые параметры. Музинский и Дуглас поместили в один из сосудов нагреватель и измеряли разность температур на отверстиях (см. фиг. 134); они использовали также излучатель с меняющейся частотой. В предыдущих экспериментах были приняты меры для поддержания одинаковой температуры в обоих сосудах. Когда же возникает разность температур  $\Delta T = T_2 - T_1$ , разность химических потенциалов становится равной

$$\Delta\mu = \mu_2 - \mu_1 = m_4g\Delta Z - m_4\sigma\Delta T, \quad (5.53)$$

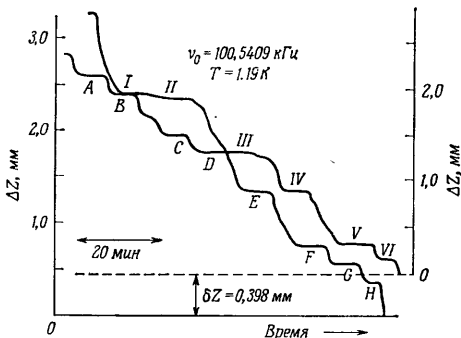
где  $\sigma$  — энтропия на единицу массы. Если вместо (5.47) использовать выражение (5.53), то с помощью тех же соображений, которые привели нас к выражению (5.52), можно показать, что скачки Джозефсона на кривой зависимости  $\Delta Z$  от времени должны наблюдаться при следующей разности уровней:

$$(\Delta Z)_J = \frac{n_1}{n_2} \frac{h\nu_0}{m_4g} + \frac{\sigma}{g} \Delta T. \quad (5.54)$$

Для проверки правильности этих соображений Музинский и Дуглас предложили три критерия, которые должны выполняться для всех наблюдаемых скачков.

а) Скачок, возникший в отсутствие разности температур, должен реагировать на появление  $\Delta T$  таким образом, чтобы разность  $(\Delta Z)_J$  оставалась пропорциональной  $\Delta T$  в согласии с (5.54).

б) Устойчивые состояния системы должны возникать при определенных значениях разности уровней  $\Delta Z$  и не должны зависеть от высоты уровня  $Z$  во внутреннем сосуде (см. фиг. 134).



Фиг. 136. Зависимость  $\Delta Z$  от времени для течения под действием силы тяжести через «слабое звено» при включенном излучателе [28].

Обе кривые получены в одинаковых условиях, за исключением того, что вторая кривая соответствует более высокому уровню жидкости в  $R_1$ . Если учесть это различие, то видно четкое соответствие скачков B и I, D и III, E и IV, F и V и G и VI.

в) При изменении частоты  $\nu_0$  звукового поля значение  $(\Delta Z)_J$  должно меняться согласно уравнению

$$\frac{d(\Delta Z)_J}{d\nu_0} = \frac{n_1}{n_2} \frac{h}{m_4 g}, \quad (5.55)$$

которое следует из (5.54).

Измеряя изменение разности уровней во времени при работе излучателя на заданной частоте, Музинский и Дуглас обнаружили много скачков типа скачков Ричардса — Андерсона (см., например, фиг. 136). Они, однако, установили, что значения  $\Delta Z$ , соответствующие этим скачкам, очень мало менялись при появлении сдвига температур  $\Delta T$ , что не согласуется с критерием «а».

Кривые на фиг. 136 получены в результате двух серий измерений, проведенных в идентичных условиях, за исключением того, что положение уровня, соответствующее значению  $\Delta Z = 0$ , было изменено путем повышения уровня жидкости в наружном резервуаре. Музинский и Дуглас получили две совершенно различные кривые для зависимости  $\Delta Z$  от времени. С другой стороны,

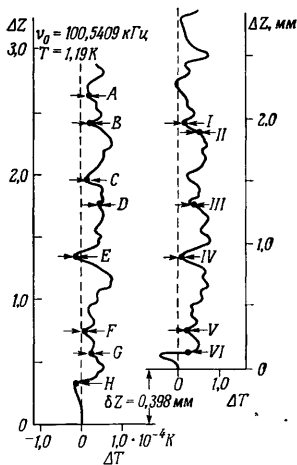


если учесть изменение высоты  $Z$  и заново построить кривые, то они оказываются весьма похожими (см. фиг. 136). На основании этих результатов можно предположить, что скачки происходят при определенных значениях  $Z$ , а не  $\Delta Z$ . Такой вывод подтверждается результатами, получаемыми при изменении  $\Delta T$  при одновременном изменении значения  $\Delta Z$ . В этом случае нагреватель выключается и изменения  $\Delta T$  на отверстии происходят в результате действия излучателя. Кривые, соответствующие двум сериям измерений, приведенным на фиг. 136, представлены на фиг. 137 в виде зависимости  $\Delta Z$  от  $\Delta T$ ; снова получились весьма похожие кривые. Таким образом, скачки не удовлетворяют и критерию «б».

Наконец, если изменять приложенную частоту  $\nu_0$  при неизменном значении всех остальных параметров, кривые, характеризующие поток для одной и той же области гелия, указывают на уменьшение высоты скачка с частотой, в то время как уравнение (5.55) предсказывает ее увеличение. Следовательно, критерий «в»

также не выполняется. В результате Музинский и Дуглас пришли к неизбежному выводу, что скачки Ричардса—Андерсона могут не быть скачками Джозефсона.

Работа Лейдерера и Побелла [25] также подтверждает этот вывод и, кроме того, дает возможность предполагать, что скачки Ричардса—Андерсона имеют другое происхождение. Используя все тот же метод с излучателем, работающим на частоте 102 кГц, Лейдерер и Побелла обнаружил устойчивые состояния при определенных значениях уровня жидкости  $Z$  (см. фиг. 134), очень похожие на состояния, изображенные на фиг. 136. Эксперимент был повторен с совершенно другой частотой, равной 168 кГц. Снова была получена ступенчатая кривая зависимости  $Z$  от времени. Согласно (5.55), высота ступеньки при эффекте Джозефсона должна расти линейно с частотой излучателя  $\nu_0$ . Фактически



Фиг. 137. Кривые зависимости  $\Delta Z$  от  $\Delta T$ , соответствующие двум циклам измерений на фиг. 136 [28].

Если учесть различное положение уровня  $\Delta Z = 0$ , кривые обнаруживают явное сходство. Буквы и цифры соответствуют ступенькам на фиг. 136.

же было обнаружено, что высота ступенек уменьшается пропорционально  $v_0^{-1}$ . Более того, на обеих частотах высота ступеньки близка к половине длины волны ультразвука в He II. Лейдерер и Побелл предположили поэтому, что устойчивость уровня жидкости при определенных значениях  $Z$  связана не с эффектом Джозефсона, а со стоячими звуковыми волнами, образующимися в сосуде над отверстием. Это предположение поддержал Рудник [46\*], который, исходя из выражения Бернулли (2.40) и (2.12), показал, что акустический резонанс в вертикальном столбе жидкости ( $R_2$  на фиг. 134) может создавать скачки величиной  $\Delta Z$  с интервалами, равными половине длины ультразвуковой волны.

Неправильная интерпретация экспериментов Ричардса — Андерсона, возможно, была связана с неудачным совпадением. В первоначальном эксперименте и в подтверждающих его повторных измерениях использовались излучатели, работающие на частоте, очень близкой к 100 кГц. Оказалось, что при  $v_0 = 100$  кГц высота основного скачка (ступеньки) Джозефсона  $h v_0 / m_1 g$  равна 1,02 мм, в то время как половина длины волны ультразвука  $u_1 / 2 v_0$  при температуре 1,2 К становится равной 1,19 мм.

Можно лишь с огорчением констатировать, что до сих пор не удалось провести не вызывающих сомнений наблюдений эффектов Джозефсона в He II. Результаты дальнейших попыток в этом направлении будут весьма интересны.

### ЗАДАЧИ

- 5.1. Покажите, что уравнения (5.6)—(5.9) действительно следуют из предыдущих уравнений.
- 5.2. Выведите формулу (5.22) для зависимости максимального значения сверхпроводящего тока, текущего через туннельный контакт из тонкой пленки, от величины поля. *Указание.* Пусть  $S(x)$  — разность фаз между  $A$  и  $B$  в точке  $x$  на контакте, см. фиг. 117. За начало координат для отсчета  $x$  возьмите середину контакта, так чтобы контакт занимал длину от  $-L/2$  до  $L/2$ . Покажите с помощью соответствующего интегрирования по контуру  $C$ , что

$$S(x) - S(0) = \frac{2e}{\hbar} B (\lambda_A + \lambda_B + d) x.$$

Полный сверхпроводящий ток через контакт равен

$$I = \frac{I_0}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \sin S(x) dx,$$

где мы записываем постоянный множитель в виде  $I_0/L$ , так что  $I_0$  — максимальный сверхпроводящий ток в отсутствие магнитного поля. После некоторых манипуляций этот интеграл приведет к (5.22).

- 5.3. Комбинируя (5.24), (5.26) и (5.27), получите для потока  $\Phi$  и циркулирующего тока  $I$  в одном из контактов скивда следующие неявные урав-

нения

$$I = I_0 \sin(2\pi l - 2\pi\Phi_x/\phi_0 - 2\pi LI/\phi_0),$$

$$\Phi - \Phi_x = LI_0 \sin(2\pi l - 2\pi\Phi/\phi_0).$$

Покажите качественно, что уравнение для  $\Phi$  приводит к зависимости типа изображенной на фиг. 120. (Легче рассматривать  $\Phi_x$  как функцию  $\Phi$ , а не наоборот.)

- 5.4. В таблице интегралов (см., например, Двайт [9]) находим, что при  $a^2 > b^2$

$$\int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{2}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \arctg \left\{ \frac{a \operatorname{tg}(x/2) + b}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \right\}.$$

Используя эту формулу для интегрирования уравнения (5.34) получаем

$$I \operatorname{tg}(S/2) = I_0 + (I^2 - I_0^2)^{1/2} \operatorname{tg} \{ e (I^2 - I_0^2)^{1/2} t / \hbar G_n \}.$$

Постройте график зависимости  $S$  от  $t$  и покажите, в частности, что  $S = \pi l$  при  $e\sqrt{(I^2 - I_0^2)t/\hbar G_n} = \pi l/2$ . Покажите, что среднее по времени значение  $dS/dt$  равно

$$\left\langle \frac{dS}{dt} \right\rangle = 2e (I^2 - I_0^2)^{1/2} / \hbar G_n.$$

Теперь выведите соотношение (5.35) для постоянного напряжения в случае задания тока.

- 5.5. Используя тождество (5.38), которое иногда рассматривают как определение функций Бесселя  $J_n(C)$ , покажите, что сверхпроводящий ток действительно описывается выражением (5.39).

- 5.6. Убедитесь, что разность напряжений, отвечающая скачкам тока на фиг. 128, равна  $\hbar\omega/2e$ , как это и следует из (5.40). Как сравнить изменения амплитуды различных скачков с зависимостью (5.42)? [Можно произвести калибровку интенсивности микроволнового излучения, совместив первый нуль ступеньки с  $n = 0$  с первым нулем функции  $J_0(2eV/\hbar\omega)$ . Заметим, что интенсивность указывается в децибелах по мощности, т. е. задаются относительные значения  $v^2$ .]

- 5.7. Предположим, что сверхпроводящий ток через микромостик равен  $I_0 f(S)$ , где  $f(S)$  — ряд Фурье (5.45). Покажите, что выражение (5.39) заменяется следующим:

$$I = I_0 \sum_{n, n'} (-1)^n A_n J_n \left( \frac{2evn'}{\hbar\omega} \right) \sin \left\{ \left( n' \frac{2eV}{\hbar} - n\omega \right) t - n\theta + n'S_0 \right\},$$

а затем получите условие синхронизации микромостика (5.46).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ambegaokar V., Baratoff A., Phys. Rev. Lett., 10, 468; 11, 104 (1963).
2. Anderson P. W., Lectures on the Many Body Problem, Ravello Spring School 1963, vol. 2, ed. E. R. Caianiello, Academic Press, New York, 1964.
3. Anderson P. W., Quantum Fluids, ed. D. F. Brewer, North-Holland, Amsterdam, 1966, p. 146.
4. Anderson P. W., Progr. Low Temp. Phys., 5, 1 (1967).
5. Coon D. D., Fiske M. D., Phys. Rev., 138, A744 (1965).
6. Dayem A. H., Wiegand J. J., Phys. Rev., 155, 419 (1967).

7. *de Bruyn Ouboter R., de Waele A. Th. A. M.*, Progr. Low Temp. Phys., **6**, 243 (1971).
8. *Donnelly R. J.*, Phys. Rev. Lett., **14**, 939 (1965).
9. *Dwight H. B.*, Tables of Integrals and Other Mathematical Data, 4th ed., Macmillan, Toronto, 1961 (См. перевод 1-го изд.: *Г. Двайт*, Таблицы интегралов и другие математические формулы, ИИЛ, М., 1948.)
10. *Feynman R. P.*, Lectures on Physics, vol. 3; Addison-Wisley, New York, 1965, ch. 21. (См. перевод: *Р. Фейнман и др.*, Фейнмановские лекции по физике, вып. 8, изд-во «Мир», М., 1966.)
11. *Finnegan T. F., Denenstien A., Langenberg D. N.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 738 (1970).
12. *Fiske M. D.*, Rev. Mod. Phys., **36**, 221 (1964).
13. *Forgacs R. L., Warnick A.*, Rev. Sci. Instr., **38**, 214 (1967).
14. *Grimes C. C., Richards P. L., Shapiro S.*, Phys. Rev. Lett., **17**, 431 (1966).
15. *Grimes C. C., Shapiro S.*, Phys. Rev., **169**, 397 (1968).
16. *Hamilton C. A., Shapiro S.*, Phys. Rev., **B2**, 4494 (1970).
17. *Hulin J. P., Laroche C., Libchaber A., Perrin B.*, Phys. Rev., **A5**, 1830 (1972).
18. *Jaklevic R. C., Lambe J., Mercereau J. E., Silver A. H.*, Phys. Rev., **140**, A1628 (1965).
19. *Josephson B. D.*, Phys. Lett., **1**, 251 (1962).
20. *Josephson B. D.*, Adv. Phys., **14**, 419 (1965).
21. *Khorana B. M.*, Phys. Rev., **185**, 299 (1969).
22. *Khorana B. M., Douglass D. H., Jr.*, Proc. 22 th Int. Conf. on Low Temp. Phys., St. Andrews 1968, vol. 1, University of St. Andrews, Scotland, 1968, p. 169.
23. *Langenberg D. N., Scalapino D. J., Taylor B. N., Eck R. E.*, Phys. Rev. Lett., **15**, 294 (1965).
24. *Langenberg D.N., Scalapino D.J., Taylor B.N.*, Proc. IEEE, **54**, 560 (1966).
25. *Leiderer P., Pobell F.*, Phys. Rev., **A7**, 1130 (1973).
26. *Мамаладзе Ю. Г., Чешвили О. Д.*, ЖЭТФ, **50**, 169 (1966).
27. *McCumber D. E.*, Journ. Appl. Phys., **39**, 3113 (1968).
28. *Musinski D. L., Douglass D. H.*, Phys. Rev. Lett., **29**, 1541 (1972).
29. *Parker W. H., Taylor B. N., Langenberg D. N.*, Phys. Rev. Lett., **18**, 287 (1967).
30. *Richards P. L.*, Phys. Rev., **A2**, 1532 (1970).
31. *Richards P. L., Anderson P. W.*, Phys. Rev. Lett., **14**, 540 (1965).
32. *Schroen W.*, Journ. Appl. Phys., **39**, 2674 (1968).
33. *Scott W. C.*, Appl. Phys. Lett., **17**, 166 (1970).
34. *Shapiro S.*, Phys. Rev., Lett., **11**, 80 (1963).
35. *Silver A. H., Zimmerman J. E.*, Phys. Rev., **157**, 317 (1967).
36. *Solyman L.*, Superconductive Tunnelling and Applications, Chapman and Hall, London, 1972. (См. перевод: *Л. Солиман*, Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применения, изд-во «Мир», М., 1974.)
37. *Stewart W. C.*, Appl. Phys. Lett., **12**, 277 (1968).
38. *Taylor B. N., Parker W. H., Langenberg D. N.*, The Fundamental Constants and Quantum Electrodynamics, Acad. Press, New York, 1969.
39. *Waldram J. R., Pippard A. B., Clarke J.*, Phil. Trans. Roy. Soc., **A268**, 265 (1970).
40. *Webb W. W.*, IEEE Trans. Magn., **8**, 51 (1972).
41. *Янсон И. К., Свистунов В. М., Джитриенко И. М.*, ЖЭТФ, **48**, 976 (1965).
42. *Zimmerman J. E.*, Journ. Appl. Phys., **41**, 1589 (1970).
43. *Zimmerman J. E.*, Journ. Appl. Phys., **42**, 30 (1971).
44. *Limmerman J. E.*, Journ. Appl. Phys., **42**, 4483 (1971).
45. *Zimmerman J. E., Thiene P., Harding J. T.*, Journ. Appl. Phys., **41**, 1572 (1970.)
- 46\*. *Rudnick I.*, Phys. Rev., **A8**, 1969 (1973).

## ТЕОРИЯ ГИНЗБУРГА—ЛАНДАУ

## § 6.1. Введение

Статья Гинзбурга и Ландау [23], цитируемая ниже как ГЛ, положила начало одному из наиболее плодотворных подходов к сверхпроводимости. До этого Ландау развил общую теорию фазовых переходов второго рода, основанную на идее, что фазовый переход может характеризоваться некоторым параметром порядка, а также на использовании простой формы зависимости свободной энергии от параметра порядка. Фактически постулированная форма зависимости применима не для всех случаев, но для сверхпроводников она справедлива. Решающим фактором в статье ГЛ явилось понимание того, что параметр порядка для сверхпроводника можно идентифицировать с макроскопической волновой функцией  $\psi$ ; это означает, во-первых, что параметр порядка — комплексная величина и, во-вторых, что он, вообще говоря, изменяется в пространстве. Если свободную энергию выразить как функцию  $\psi$  и векторного потенциала  $A$ , то «уравнение движения» для  $\psi$  и уравнение для сверхпроводящего тока в терминах  $A$  получается как условие минимума свободной энергии. Уравнение для сверхпроводящего тока по форме совпадает с уравнением Лондонов. Таким образом, теория ГЛ представляет собой обобщение теории Лондонов для случаев, когда функция  $\psi$  меняется в пространстве.

Теория ГЛ была развита до создания микроскопической теории. Однако позже было показано, причем впервые Горьковым [29], что для определенных областей температуры и магнитного поля уравнения ГЛ строго следуют из микроскопической теории; область применимости уравнений ГЛ теперь очень хорошо известна. Поскольку уравнения ГЛ много проще уравнений микро-теории, ими обычно и пользуются, если известно, что они в данном случае справедливы. Кроме того, уравнения ГЛ предоставили существенную возможность выяснить общее качественное поведение сверхпроводников, так что этими уравнениями, конечно, пользуются иногда и вне области их строгой справедливости. Теория может быть особенно полезна для получения четкого представления о связи между различными характерными расстояниями (глубиной проникновения, длиной когерентности), фигурирующими в теории сверхпроводимости.

Естественно, теория ГЛ применялась также к сверхтекучести в He II; соответствующие уравнения известны как уравнения Гинзбурга — Питаевского [24] (уравнения ГП). Между He II и сверхпроводниками имеется, однако, весьма существенное различие, из-за которого теория для He II значительно менее полезна. Наличие в случае жидкого гелия аномалии в  $\lambda$ -точке означает, что переход в сверхтекучее состояние ни в коем случае не является идеальным фазовым переходом второго рода, вследствие чего теория ГП, строго говоря, неприменима. Поэтому из теории можно получить ценные сведения о сверхтекучести в He II, но ни при какой температуре теория не может считаться строго справедливой<sup>1)</sup>.

## § 6.2. Теория фазовых переходов второго рода Ландау

Основная идея теории Ландау заключается в том, что фазовый переход можно рассматривать как переход из упорядоченной в неупорядоченную фазу. Рассмотрим для простоты модель трехмерной магнитной системы, состоящей из совокупности диполей. Если взаимодействие между диполями отвечает ферромагнетизму, т. е. стремится установить диполи параллельно друг другу, то в основном состоянии при  $T = 0$  все диполи параллельны. С повышением температуры некоторые диполи в результате теплового возбуждения отклоняются от общего направления. Точнее, при отличной от нуля температуре  $T$  система находится в состоянии, обеспечивающем минимальность свободной энергии Гельмгольца  $F = U - T\Sigma$ , где  $U$  — внутренняя энергия системы. В основном состоянии энергия  $U$  минимальна, а  $\Sigma = 0$ . При  $T > 0$  некоторые спины отклоняются таким образом, что  $U$  и  $\Sigma$  увеличиваются, но свободная энергия  $F$  имеет минимальное значение. Мы можем определить параметр порядка  $\phi$  следующим образом:

$$\phi = \frac{n_+ - n_-}{n_+ + n_-}; \quad (6.1)$$

здесь  $n_+$  — число спинов, направленных вверх, а  $n_-$  — число спинов, направленных вниз. При  $T = 0$  число  $n_-$  равно нулю и  $\phi = 1$ . С увеличением  $T$  параметр порядка  $\phi$  уменьшается и обращается в нуль при критической температуре  $T_c$ . Выше  $T_c$

<sup>1)</sup> Это утверждение относится лишь к первоначальному варианту теории ГП. Однако, как было показано в 1967 г. Мамаладзе, а затем и другими авторами (последнее и весьма подробное изложение этого вопроса см. в статье [51\*\*]), изменение температурной зависимости коэффициентов в разложении типа (6.2) делает теорию количественно справедливой или по крайней мере непротиворечивой в некоторой области температур вблизи  $\lambda$ -точки. — *Прим. ред.*

в парамагнитной фазе  $n_+ = n_-$  и  $\phi = 0$ . Зависимость  $\phi$  от  $T$  схематически изображена на фиг. 138. Это достаточно общий тип зависимости для систем, претерпевающих фазовый переход. Например, роль параметра порядка играют энергетическая щель  $\Delta$  в сверхпроводнике и плотность сверхтекучей части  $\rho_s$  в He II. Напомним, что  $\Delta$  и  $\rho_s$  характеризуются температурной зависимостью такого же вида, как на фиг. 138.

Теория Ландау относится к интервалу температур вблизи  $T_c$ , где параметр порядка  $\phi$  мал. Устойчивой является та фаза, для которой свободная энергия  $F$  минимальна. Первое основное предположение теории состоит в том, что для области малых  $\phi$  свободную энергию  $F$  можно представить в виде ряда по степеням  $\phi$ , а именно

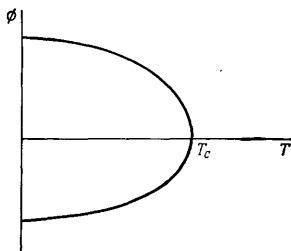
$$F = F_n + \lambda\phi + \alpha\phi^2 + \gamma\phi^3 + \frac{1}{2}\beta\phi^4. \quad (6.2)$$

Существуют системы, для которых такое простое разложение в ряд недопустимо, но оно пригодно в случае сверхпроводимости. В разложении (6.2) все коэффициенты  $\lambda$ ,  $\alpha$  и т. д. являются функциями  $T$ , поскольку равновесные значения  $F$  и  $\phi$  зависят от  $T$ . Второе основное предположение теории заключается в том, что коэффициенты в (6.2) можно разложить в ряд по степеням  $(T - T_c)$ . Это предположение также справедливо не для всех систем, но оно, как и первое предположение, выполняется для сверхпроводников. Мы воспользуемся этим предположением для существенного упрощения выражения (6.2). Прежде всего заметим, что равновесной фазе соответствует минимальная свободная энергия  $F$ , т. е.

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = 0. \quad (6.3)$$

Для нормальной фазы минимум должен соответствовать значению  $\phi = 0$ , откуда следует, что  $\lambda = 0$  при  $T > T_c$ . Поскольку, согласно предположению,  $\lambda$  можно разложить в ряд по степеням  $(T - T_c)$ , отсюда вытекает, что  $\lambda = 0$  и для всех  $T$ . Кроме того, для большинства систем, включая сверхпроводники и He II, член с  $\phi^3$  вообще не возникает. Таким образом, имеем

$$F = F_n + \alpha(T)\phi^2 + \frac{1}{2}\beta(T)\phi^4, \quad (6.4)$$



Фиг. 138. Типичная зависимость параметра порядка от температуры.

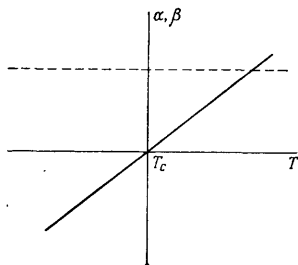
где температурная зависимость коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  подчеркнута, но еще не раскрыта.

Найдем теперь температурную зависимость  $\alpha$  и  $\beta$ .

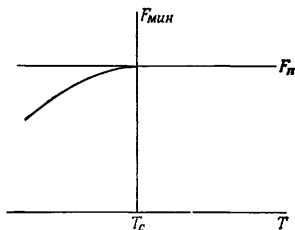
Уравнение (6.3) для значения  $\phi = \phi_0$ , отвечающего минимуму, таково:

$$\alpha\phi_0 + \beta\phi_0^3 = 0; \quad (6.5)$$

решения этого уравнения суть  $\phi_0 = 0$  и  $\phi_0^2 = -\alpha/\beta$ . Теперь мы хотим, чтобы при  $T > T_c$  единственным решением было  $\phi_0 = 0$ , а при  $T < T_c$  существовало бы решение с  $\phi_0 \neq 0$ . Этого можно достичь, если принять такую температурную зависимость, чтобы отношение  $-\alpha/\beta$  было отрицательно при  $T > T_c$  и положительно



Фиг. 139. Коэффициенты  $\alpha$  (сплошная линия) и  $\beta$  (пунктир) в теории Ландау.



Фиг. 140. Зависимость  $F_{\min}$  от  $T$ .

при  $T < T_c$ . Кроме того, нужно, чтобы коэффициент  $\beta$  был положителен при всех температурах, поскольку при отрицательном  $\beta$  свободная энергия  $F$  для больших значений  $\phi$  неограниченно уменьшалась бы. Поэтому мы хотим, чтобы коэффициент  $\alpha$  был положителен при  $T > T_c$  и отрицателен при  $T < T_c$ . Наипростейшие температурные зависимости, обеспечивающие выполнение таких требований, имеют вид

$$\alpha(T) = A(T - T_c), \quad (6.6)$$

$$\beta(T) = \beta(T_c) = \beta, \quad (6.7)$$

где  $A$  и  $\beta$  — положительные постоянные. Эти зависимости изображены на фиг. 139.

Подставляя в (6.5)  $\alpha$  и  $\beta$  из (6.6) и (6.7), получаем решение для  $\phi_0$ :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0, & T &> T_c, \\ \phi_0 &= A^{1/2}(T_c - T)^{1/2}/\beta^{1/2}, & T &< T_c. \end{aligned} \quad (6.8)$$



Кроме того,  $\phi_0 = 0$  остается решением и ниже  $T_c$ , но, как мы скоро увидим, оно соответствует в этом случае не минимуму, а максимуму свободной энергии. Выражение (6.8) описывает быстрое параболическое возрастание  $\phi_0$  с уменьшением  $T$  ниже  $T_c$  (см. фиг. 138). Полезно рассмотреть не только  $\phi$ , но и свободную энергию  $F$ . Прежде всего, подставив  $\phi_0$  в (6.4), получим минимальное значение свободной энергии:

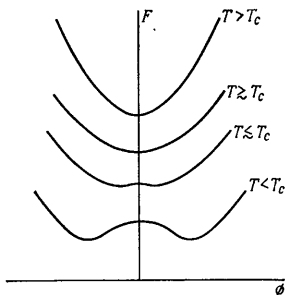
$$F_{\min} = F_n, \quad T > T_c,$$

$$F_{\min} = F_n - \frac{1}{2} \alpha^2 / \beta = F_n - \frac{1}{2} A^2 (T_c - T)^2 / \beta, \quad T < T_c. \quad (6.9)$$

На фиг. 140 построена зависимость  $F_{\min}$  от  $T$ . Заметим, в частности, что  $F_{\min}$  довольно медленно понижается (от значения  $F_n$ ) с уменьшением  $T$  ниже  $T_c$ . Решение  $\phi_0 = 0$  ниже  $T_c$  дает  $F = F_n$ ; как мы уже упоминали, это отвечает не минимуму, а максимуму. Тот факт, что  $F_{\min}$  понижается с  $T$  медленно, а  $\phi_0$  быстро, означает, что тепловые флуктуации, которые приводят к сильным изменениям  $\phi_0$ , вызывают лишь небольшое изменение свободной энергии. Это и является причиной чувствительности фазовых переходов второго рода к флуктуационным эффектам.

Полезно рассмотреть не только зависимость  $F_{\min}$  от  $T$ , но и зависимость  $F$  от  $\phi$ , описываемую выражением (6.4). Эта зависимость построена на фиг. 141 для различных температур. При  $T$  существенно выше  $T_c$  зависимость носит простой параболический характер с четко выраженным минимумом. Когда  $T$  приближается к  $T_c$  и  $\alpha(T)$  уменьшается, минимум становится более пологим. Когда же  $T$  проходит через  $T_c$  и  $\alpha(T)$  становится отрицательным, минимум при  $\phi = 0$  переходит в локальный максимум, а в точках  $\phi = \pm \phi_0$  возникают минимумы. При дальнейшем понижении  $T$  минимумы сдвигаются к большим по абсолютной величине значениям  $\phi$  и постепенно становятся глубже. При достаточно больших  $\phi$  свободная энергия  $F$  всегда увеличивается, что было обеспечено выбором положительного значения для  $\beta$ .

Сказанного достаточно для понимания общих черт теории Ландау. Главное — это зависимость  $F$  от  $\phi$  [см. выражение (6.4) и фиг. 141] и температурная зависимость  $\phi_0$  и  $F_{\min}$  (см. фиг. 138 и 140).



Фиг. 141. Зависимость  $F$  от  $\phi$  при различных температурах. Кривые сдвинуты одна от другой по вертикали.

### § 6.3. Уравнения Гинзбурга—Ландау

Как мы уже упоминали в § 6.1, при применении теории Ландау к сверхпроводникам роль параметра порядка играет волновая функция  $\psi$ . Это вносит две трудности: во-первых, параметр порядка, вообще говоря, становится теперь функцией координат; во-вторых, мы должны в явном виде включить связь сверхпроводящего тока с магнитным полем, а также учесть магнитную энергию. Обе эти трудности нужно принимать во внимание, например, при рассмотрении вихревой решетки в смешанном состоянии.

Положим сначала, что  $\psi$  — функция координат. В соответствии с этим будем считать, что выражение (6.4) есть плотность свободной энергии в точке  $\mathbf{r}$ ; для получения полной свободной энергии выражение (6.4) нужно проинтегрировать по объему образца. Далее, если  $\psi$  — функция координат, то можно ожидать появления в выражении для энергии члена «кинетической энергии», пропорционального  $|\nabla\psi|^2$ . Тогда плотность свободной энергии имеет вид

$$f(\mathbf{r}) = f_n + \alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (6.10)$$

Мы используем знак модуля, поскольку  $\psi$  — комплексная величина. Следуя обычным правилам теории ГЛ, запишем коэффициент у градиентного члена как  $\hbar^2/2m$ , где  $m$  — масса электрона. Как подчеркнул де Жен [10], в таком выборе нет физического содержания; в конце он просто определяет нормировку функции  $\psi$ . Фактически в гл. 3 [см. (3.18)] мы сделали иной выбор, когда при записи уравнения Лондонов использовали величину  $2m$  — массу куперовской пары. Мы смогли это сделать, нормировав  $\psi$  таким образом, чтобы величина  $|\psi|^2$  была равна плотности куперовских пар  $n_s/2$ . Поэтому здесь мы будем полагать, что  $|\psi|^2$  есть электронная плотность  $n_s$ , хотя по существу и не будем этим пользоваться в явном виде. Мы можем считать, что коэффициент у члена  $|\nabla\psi|^2$ , так же как и  $\beta$ , не зависит от  $T$ , поскольку рассматриваем небольшую температурную область вблизи  $T_c$ , где член  $|\nabla\psi|^2$  должен быть всегда положительным.

Уже на этой стадии можно видеть принципиальное физическое следствие добавления градиентного члена: он препятствует слишком быстрому изменению  $\psi$ , поскольку большое значение градиента внесло бы значительный вклад в свободную энергию. Из размерных соображений можно, рассматривая соответствующие отношения коэффициентов, получить для фундаментальной длины выражение  $\xi(T) = (\hbar^2/2m|\alpha|)^{1/2}$ , что является важным звеном теории ГЛ. Ясно, что быстрых изменений  $\psi$  на расстоянии  $\xi(T)$  происходить не будет. Мы найдем, что величина  $\xi(T)$  есть длина когерентности для изменений параметра порядка в том смысле,

который мы обсуждали в гл. 4; например,  $\xi(T)$  представляет собой радиус сердцевины вихревой нити.

При включении в выражение для свободной энергии членов, содержащих магнитное поле, нужно проявлять осторожность. Полная индукция  $\mathbf{B}$  в сверхпроводнике равна сумме индукции, создаваемой приложенным магнитным полем  $\mathbf{H}_0$ , и индукции, связанной с сверхпроводящим током  $\mathbf{J}_e$ , т. е.

$$\text{rot}(\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}_0) = \mu_0 \mathbf{J}_e. \quad (6.11)$$

Введем в выражение для свободной энергии (6.10) члены, учитывающие эффекты магнитного поля, с помощью обычной замены:

$$\nabla \rightarrow \nabla \pm \frac{2ie}{\hbar} \mathbf{A},$$

где нужно брать знак «+», если оператор  $\nabla$  действует на  $\psi^*$ , и знак «-», если  $\nabla$  действует на  $\psi$ . Добавив также энергию магнитного поля, получаем

$$f(\mathbf{r}) = f_n + \alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{1}{2m} |(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi|^2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0 - \mu_0 \mathbf{H}_0^2/2. \quad (6.12)$$

Интеграл от  $f(\mathbf{r})$  по всему объему образца дает свободную энергию Гельмгольца  $F = U - T\Sigma$ . Чтобы достигнуть соответствия с термодинамическими уравнениями § 1.2, мы вычли член  $1/2\mu_0 H_0^2$ , т. е. магнитную энергию катушки, генерирующей внешнее поле  $\mathbf{H}_0$ . Внутренняя энергия  $U$  — это энергия сверхпроводника в присутствии магнитного поля, так что

$$dU = Td\Sigma + \mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{M}. \quad (6.13)$$

Чтобы найти устойчивое состояние при температуре  $T$  и поле  $\mathbf{H}_0$ , нужно минимизировать свободную энергию Гиббса:

$$G(T, \mathbf{H}_0) = U - T\Sigma - \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{M}. \quad (6.14)$$

Таким образом, в конце концов нужно минимизировать величину

$$G = \int g(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (6.15)$$

где

$$g(\mathbf{r}) = f_n + \alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{1}{2m} |(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi|^2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0 - \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H}_0^2. \quad (6.16)$$

При изложении теории ГЛ иногда утверждают, что нужно минимизировать свободную энергию  $f = \int f(\mathbf{r}) d^3r$ . Плотность энергии Гельмгольца  $f(\mathbf{r})$  отличается от плотности энергии Гиббса  $g(\mathbf{r})$

на  $H_0 \cdot M$ . Мы увидим, что для  $\psi(\mathbf{r})$  и для сверхпроводящего тока получаются одни и те же выражения независимо от того, какая величина минимизируется,  $F$  или  $G$ . Однако, например, при вычислении критических полей для тонких пленок в параллельном магнитном поле (см. § 6.6) важно пользоваться правильной функцией, а именно функцией  $G$ .

Энергия  $G$  представляет собой интеграл, в который входят две функции:  $\psi(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  (напомним, что  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ ). Это отличается от обычной теории Ландау, где  $G$  — функция только переменной  $\phi$ . В последнем случае условие минимума просто имеет вид  $\partial G / \partial \phi = 0$ . В нашем же случае, поскольку  $G$  зависит от функций  $\psi$  и  $\mathbf{A}$ , нужно в согласии с требованиями вариационного исчисления воспользоваться уравнениями Эйлера — Лагранжа. Поскольку  $\psi$  — величина комплексная, мы можем искать минимум либо относительно  $\psi$ , либо относительно  $\psi^*$ ; в последнем случае получаем

$$\frac{\partial g}{\partial \psi^*} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial (\nabla_j \psi^*)} = 0, \quad (6.17)$$

где  $\nabla_j \psi^*$  — компонента градиента в направлении  $j$ . Это уравнение иногда записывают формально в виде  $\delta G / \delta \psi^* = 0$ , где  $\delta G / \delta \psi^*$  представляет собой левую часть уравнения (6.17). После некоторых манипуляций при использовании калибровки  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  уравнение (6.17) принимает вид

$$\frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - 2e\mathbf{A})^2 \psi + \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi = 0. \quad (6.18)$$

Это первое уравнение теории ГЛ. Если бы мы минимизировали  $G$  относительно  $\psi$ , а не  $\psi^*$ , то получили бы комплексно сопряженное уравнение.

Теперь мы уже имеем дифференциальное уравнение, которое описывает изменение  $\psi$  внутри любого образца, если мы знаем векторный потенциал  $\mathbf{A}$ . Как всегда, нужно дополнить дифференциальное уравнение соответствующими граничными условиями для  $\psi$  на поверхности образца. Гинзбург и Ландау рассуждали следующим образом. Полное выражение для вариации  $\delta G$  функции  $G$ , когда вариация  $\psi^*$  равна  $\delta \psi^*$ , содержит, во-первых, объемный интеграл от левой части уравнения (6.17), умноженный на  $\delta \psi^*$ , и, во-вторых, поверхностный интеграл

$$I_s = \int \delta \psi^* \frac{\partial g}{\partial (\nabla \psi^*)} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (6.19)$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности. В вариационном исчислении этим членом обычно пренебрегают, поскольку вариация производится с дополнительным условием, согласно которому на поверхности  $\psi^* = 0$ , а поэтому и  $\delta \psi^* = 0$ . Однако для сверхпроводников мы не можем просто принять, что на поверхности  $\psi^* = 0$ . Это

условие было бы ошибочным: оно означало бы, например, что критическая температура тонкой пленки должна была бы осциллировать как функция ее толщины, поскольку в пленке образовалась бы стоячая волна. Фактически же критическая температура не осциллирует и, вообще говоря, не зависит от толщины пленки. Поэтому Гинзбург и Ландау приняли следующее граничное условие:

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial g}{\partial (\nabla \psi^*)} = 0, \quad (6.20)$$

которое, конечно, также обращает  $I_s$  в нуль. Записанное в явном виде, это граничное условие имеет вид

$$\mathbf{n} \cdot (-i\hbar \nabla - 2e\mathbf{A}) \psi = 0. \quad (6.21)$$

Из микротeorии следует, что это условие справедливо для границы между сверхпроводником и изолятором. Если же к сверхпроводнику примыкает нормальный металл, волновая функция проникает на некоторое расстояние внутрь нормального металла; в силу этого эффекта граничное условие на границе между сверхпроводящим и нормальным металлом отличается от (6.21). Наконец, отметим, что, согласно (6.21), критическая температура тонкой пленки не зависит от ее толщины. В отсутствие магнитного поля условие (6.21) означает просто, что производная  $\psi$  на поверхности равна нулю; тогда внутри всей пленки функция  $\psi$  постоянна и критическая температура не зависит от толщины пленки.

Теперь нужно минимизировать свободную энергию  $G$  относительно вариаций векторного потенциала  $\mathbf{A}$ . Соответствующее уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial g}{\partial A_i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial (\partial A_i / \partial x_j)} = 0, \quad (6.22)$$

где  $A_i$  — компонента  $\mathbf{A}$  в направлении  $i$ . Второй член этого уравнения равен  $(1/\mu_0) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$  или  $(1/\mu_0) \operatorname{rot} \mathbf{B}$ , а, согласно уравнению Максвелла,  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e$ . С учетом этого обстоятельства из (6.22) имеем

$$\mathbf{J}_e = -\frac{ie\hbar}{m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{4e^2}{m} \psi^* \psi \mathbf{A}, \quad (6.23)$$

т. е. получаем обычное выражение для квантовомеханического тока. Такой результат не удивителен: выражение для свободной энергии зависит от  $\mathbf{A}$  только через градиентный член и член, отвечающий энергии поля  $B^2/2\mu_0$ ; то же самое имеет место и в случае квантовомеханического гамильтониана. Различие, связанное с использованием вместо  $2m$  массы  $m$ , означает лишь изменение нормировки для  $\psi$ . Таким образом, уравнение (6.23) идентично уравнению (3.18), которое мы записали, исходя из произвольного предположения, что сверхпроводник характеризуется макроско-

пической волновой функцией. Так же, как и (3.18), уравнение (6.23) является локальным выражением лондоновского типа;  $\mathbf{J}_e(\mathbf{r})$  определяется значениями  $\nabla\psi$  и  $\mathbf{A}$  в точке  $\mathbf{r}$ . Локальный характер теории ограничивает температурную область ее применимости, если мы имеем дело с чистым сверхпроводником. Наоборот, для сплавов локальный характер теории не налагает ограничений на температурный интервал.

Как мы уже отметили, можно получить то же самое выражение для тока, если вместо плотности свободной энергии Гиббса (6.16) использовать плотность свободной энергии Гельмгольца (6.12). Плотности этих двух термодинамических потенциалов отличаются членом  $\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{V} = \mathbf{H}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{A}$ . Если подставить его во второй член уравнения (6.22), получим член  $\text{rot } \mathbf{H}_0$ , который внутри сверхпроводника равен нулю.

Теперь мы имеем все основные выражения теории ГЛ: свободную энергию Гиббса [выражения (6.15) и (6.16)], уравнение (6.18) для  $\psi$  с граничным условием (6.21) и, наконец, уравнение (6.23) для тока. Температурная зависимость параметров  $\alpha$  и  $\beta$  остается такой же, как в теории Ландау, а именно

$$\alpha = -A(T_c - T), \quad (6.24)$$

$$\beta = \text{const.} \quad (6.25)$$

Наша первая задача — вывести выражения для глубины проникновения и для критического поля  $H_{cB}$  для массивного сверхпроводника первого рода. Если размеры образца много больше  $\lambda$ , то внутри образца  $\mathbf{V} = 0$ . Тогда  $\psi = \text{const}$ , так как, в силу наличия градиентного члена, изменение  $\psi$  привело бы к увеличению свободной энергии. Значение  $\psi$  определяется из уравнения (6.18)

$$|\psi|^2 = -\alpha/\beta = |\alpha|/\beta \quad (6.26)$$

(напомним, что коэффициент  $\alpha$  отрицателен), что совпадает, конечно, с выражением (6.8) обычной теории Ландау. Поскольку  $\nabla\psi = 0$ , ток (6.23) определяется просто уравнением Лондонов

$$\mathbf{J}_e = -\frac{4e^2}{m} \frac{|\alpha|}{\beta} \mathbf{A}. \quad (6.27)$$

Как мы видели в § 3.3, это приводит к глубине проникновения

$$\lambda = \left( \frac{m\beta}{4e^2\mu_0|\alpha|} \right)^{1/2}. \quad (6.28)$$

Из выражений (6.24) и (6.25) получаем явную температурную зависимость  $\lambda$ :

$$\lambda \sim (1 - t)^{1/2}. \quad (6.29)$$

Мы уже знаем (см. фиг. 53), что температурная зависимость Гор-

тера — Казимира  $\lambda \sim (1 - t^4)^{-1/2}$  согласуется с экспериментальными данными для всех температур. Вблизи  $T_c$ , где справедлива теория Ландау, обе формы температурной зависимости согласуются между собой. Действительно,

$$(1 - t^4)^{-1/2} = (1 + t^2)^{-1/2} (1 + t)^{-1/2} (1 - t)^{-1/2}$$

и, когда  $t \approx 1$ , первые два члена изменяются медленно, так что зависимость от  $t$  определяется последним членом  $(1 - t)^{-1/2}$ .

Поле  $H_{cb}$  — это поле, при котором свободные энергии Гиббса  $G_s$  и  $G_n$  для сверхпроводящей и нормальной фаз равны между собой. В сверхпроводящей фазе  $\mathbf{B} = 0$ , а в нормальной фазе  $\psi = 0$ . Поэтому при  $|\psi|^2 = |\alpha|^2/\beta$  из (6.15) получаем для свободной энергии Гиббса при приложенном поле  $H_0$

$$G_s = V (f_n - |\alpha|^2/2\beta + \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2), \quad (6.30)$$

$$G_n = V f_n, \quad (6.31)$$

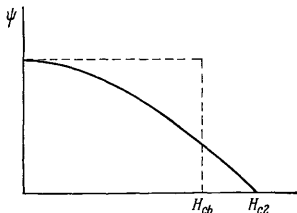
где  $V$  — объем образца. Критическое поле определяется равенством  $G_s = G_n$ , откуда

$$H_{cb}^2 = |\alpha|^2/\mu_0\beta. \quad (6.32)$$

Это, конечно, обычный результат, согласно которому при критическом поле энергия вытесненного поля равна энергии конденсации. Выражение (6.32) дает температурную зависимость  $H_{cb} \sim 1 - t$ , которая при  $t \approx 1$  снова совпадает с зависимостью Гортера — Казимира  $1 - t^2$ , а поэтому согласуется и с экспериментальными данными. Как отметили Гинзбург и Ландау, это обстоятельство является убедительным подтверждением постулированной ими температурной зависимости  $\alpha$  и  $\beta$  [выражения (6.24) и (6.25)].

Переход при  $H_{cb}$  представляет собой фазовый переход первого рода, т. е. с этим переходом связана скрытая теплота.

В рамках теории Ландау природа данного фазового перехода связана с поведением параметра порядка  $\psi$  на границе фаз. В нашем случае  $\psi$  сохраняет постоянное значение  $(|\alpha|^2/\beta)^{1/2}$  вплоть до поля  $H_{cb}$ , а затем скачкообразно обращается в нуль (фиг. 142). Скачкообразное изменение  $\psi$  указывает на существование отличной от нуля разности степени упорядочения в двух фазах. Следовательно, существует разность энтропий  $\Delta\Sigma$  и связанная с ней скрытая



Фиг 142. Зависимость  $\psi$  от  $H$  для массивного сверхпроводника I рода (пунктир) и ожидаемая зависимость  $\psi(H)$  для сверхпроводника II рода (сплошная линия).

теплота  $T\Delta S$ . Поскольку сверхпроводящая фаза более упорядочена, ее энтропия меньше, поэтому при проведении эксперимента в изотермических условиях при переходе из сверхпроводящей в нормальную фазу должно происходить поглощение тепла из окружающего «резервуара». Выражение для скрытой теплоты можно, конечно, получить из (6.30); вывод этого выражения предлагается в качестве задачи 6.4.

## § 6.4. Критические поля в случае переходов второго рода

Как мы уже видели в § 1.2 и гл. 4, сверхпроводник I рода претерпевает фазовый переход первого рода в нормальную фазу при критическом поле  $H_{cb}$ , в то время как массивный сверхпроводник II рода испытывает фазовый переход второго рода при критическом поле  $H_{c2}$ . При  $H = H_{cb}$  намагниченность скачкообразно падает до нуля, а при  $H = H_{c2}$  она приближается к нулю постепенно. Это означает, что при  $H = H_{c2}$  плотность сверхпроводящего тока  $J_e$  непрерывно приближается к нулю, а следовательно,  $\psi$  также приближается к нулю непрерывно [см. (6.23)]. Мы видели, с другой стороны, что для сверхпроводников I рода функция  $\psi$  сохраняет постоянное значение вплоть до поля  $H_{cb}$ , а затем резко падает до нуля. На фиг. 142 изображено изменение  $\psi$  при изменении магнитного поля для двух обсуждаемых случаев. Кривую для смешанного состояния можно понять следующим образом: для смешанного состояния, когда в сверхпроводнике имеются циркулирующие сверхпроводящие токи,  $\psi$  является функцией координат; на фиг. 142 изображена зависимость от поля некоторого среднего значения  $\psi$ . Любое среднее значение  $\psi$  стремится к нулю при  $H_{c2}$ .

При вычислении критического поля типа  $H_{c2}$  при фазовом переходе второго рода можно существенно упростить уравнение ГЛ (6.18) для  $\psi$ . В поле непосредственно ниже  $H_{c2}$  параметр  $\psi$  повсюду мал и, следовательно, нелинейный член  $\beta |\psi|^2 \psi$  мал по сравнению с другими членами. Далее, циркулирующие сверхпроводящие токи, пропорциональные  $|\psi|^2$ , малы, и поэтому магнитное поле  $H$ , входящее в (6.18), близко к однородному внешнему магнитному полю  $H_0$ . В поле, точно равном  $H_{c2}$ , мы можем вообще не рассматривать член  $\beta |\psi|^2 \psi$  и разность  $H - H_0$ . Таким образом, для вычисления критического поля при фазовом переходе второго рода нужно проделать следующие операции: линеаризировать уравнение для  $\psi$ , опустив член  $\beta |\psi|^2 \psi$ , и воспользоваться векторным потенциалом  $A$ , соответствующим однородному внешнему полю  $H_0$ . Вообще говоря, нужно также использовать граничное условие (6.21) для каждой имеющейся свободной поверхности.



Посмотрим, как с помощью этой процедуры можно вычислить критическое поле  $H_{c2}$  для массивного сверхпроводника. Это — наипростейший случай, поскольку нет свободных поверхностей. Пусть однородное внешнее поле направлено вдоль оси  $z$ :

$$\mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0). \quad (6.33)$$

Мы имеем достаточно большую свободу при выборе выражения для  $\mathbf{A}$ . Положим

$$\mathbf{A} = (0, \mu_0 H_0 x, 0). \quad (6.34)$$

Альтернативой могла бы быть калибровка  $(-\mu_0 H_0 y, 0, 0)$ ; любая ее линейная комбинация с (6.34) была бы также пригодна. Все эти комбинации удовлетворяют условию  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  и дают  $\mu_0 \mathbf{H}_0 = = \text{rot } \mathbf{A}$ ; вычисленное значение  $H_{c2}$ , естественно, не зависит от выбора калибровки.

С помощью (6.34) получаем следующую линеаризованную форму уравнения (6.18):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - 2e\mu_0 H_0 x \right)^2 \psi - \frac{\hbar^2 \partial^2 \psi}{2m \partial z^2} = |\alpha| \psi. \quad (6.35)$$

Как можно видеть, мы получили уравнение Шредингера для частицы с массой  $m$  и зарядом  $2e$ , движущейся в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси  $z$ . Величина  $|\alpha|$  играет роль собственного значения. Мы можем описать возможные траектории классически как спирали, по которым частица движется вдоль магнитного поля, имея постоянный импульс  $\hbar k_z$  и вращаясь при этом вокруг направления поля с постоянной угловой скоростью. Квантовомеханические собственные значения энергии равны

$$|\alpha| = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \hbar^2 k_z^2 / 2m, \quad (6.36)$$

где  $\omega_c$  — циклотронная резонансная частота:

$$\omega_c = 2e\mu_0 H_0 / m. \quad (6.37)$$

Вывод этих результатов осуществляется путем сведения (6.35) к уравнению квантовомеханического гармонического осциллятора. Прежде всего мы видим, что координаты  $y$  и  $z$  входят только через производные  $\partial/\partial y$ ,  $\partial/\partial z$ ; это означает, что соответствующие части собственной функции являются плоскими волнами:

$$\psi(\mathbf{r}) = f(x) \exp(ik_y y) \exp(ik_z z), \quad (6.38)$$

где функцию  $f(x)$  нужно еще определить. Подставляя (6.38) в (6.35), получаем

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{2m} (\hbar k_y - 2e\mu_0 H_0 x)^2 f = \left( |\alpha| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right) f. \quad (6.39)$$

Сразу же видно, что собственное значение не зависит от  $k_y$ , поэтому любое данное собственное значение в высокой степени вырождено, поскольку соответствующая собственная функция может содержать любое  $k_y$ . Разным значениям  $k_y$  отвечают различные положения  $x_0$  — центров собственной функции  $f(x)$ . Полагая

$$\hbar k_y = 2e\mu_0 H_0 x_0, \quad (6.40)$$

можно записать уравнение (6.39) в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2e^2 \mu_0^2 H_0^2}{m} (x - x_0)^2 f = (|\alpha| - \hbar^2 k_z^2 / 2m) f. \quad (6.41)$$

Такая асимметрия между  $x$  и  $y$  является просто следствием нашего исходного выбора асимметричной калибровки (6.34). Если бы мы выбрали симметричную калибровку  $(-1/2\mu_0 H_0 y, 1/2\mu_0 H_0 x, 0)$ , то результат был бы симметричным.

Уравнение (6.41) представляет собой уравнение Шредингера для частицы, движущейся в гармонической потенциальной яме с центром при  $x = x_0$ ; собственные значения этого уравнения определяются выражениями (6.36) и (6.37). Мы должны, однако, интерпретировать эти выражения несколько непривычным образом. Обычно известно магнитное поле  $H_0$  и нужно найти собственное значение  $|\alpha|$ ; мы же, наоборот, знаем  $|\alpha|$  и хотим найти  $H_0$ . Поэтому обратим уравнение

$$H_0 = \frac{m}{(2n+1)e\hbar\mu_0} \left( |\alpha| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right). \quad (6.42)$$

Это уравнение имеет слишком общий вид, поскольку нас интересует лишь наибольшее значение  $H_0$ ; при любом более низком поле появятся нелинейные члены и нарушится справедливость нашего исходного предположения о возможности ими пренебречь. Наибольшее значение  $H_0$  есть  $H_{c2}$ , и очевидно, что оно задается условиями  $n = 0$  и  $k_z = 0$ , т. е.

$$H_{c2} = m |\alpha| / e\hbar\mu_0. \quad (6.43)$$

Соответствующая собственная функция представляет собой волновую функцию основного состояния гармонического осциллятора

$$f(x) = \exp\{- (x - x_0)^2 / 2\xi^2(T)\}, \quad (6.44)$$

где

$$\xi^2(T) = \hbar^2 / 2m |\alpha|. \quad (6.45)$$

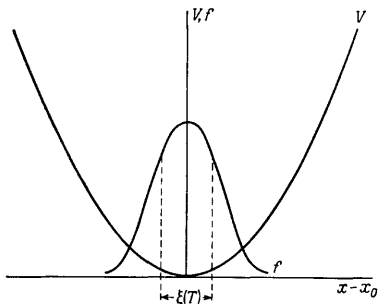
Потенциальная яма, отвечающая потенциалу для гармонического осциллятора в (6.41), и волновая функция (6.44) изображены на фиг. 143. Как мы уже говорили при введении в свободную энергию градиентного члена,  $\xi(T)$  представляет собой характерное расстояние для изменений параметра порядка. Мы можем

переписать выражение (6.43) следующим образом:

$$H_{c2} = \phi_0 / 2\lambda\mu_0\xi^2(T). \quad (6.46)$$

Этот результат уже упоминался в § 4.3.

Как мы видели в § 4.3, в соотношения, связывающие  $\xi(T)$  с  $\lambda(T)$  и  $H_{c2}$  с  $H_{cb}$ , входит параметр  $\kappa$ . Величины  $\lambda$ ,  $\xi$ ,  $H_{cb}$  и  $H_{c2}$



Фиг. 143. Потенциал  $V(x - x_0)$  для гармонического осциллятора и наименьшая собственная функция  $f(x - x_0)$ .

определяются соответственно выражениями (6.28), (6.44), (6.32) и (6.43). Сравнивая их, находим

$$H_{c2} = \kappa \sqrt{2} H_{cb}, \quad (6.47)$$

$$\lambda(T) = \kappa \xi(T), \quad (6.48)$$

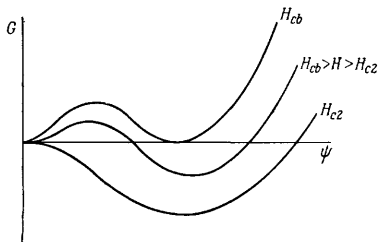
где

$$\kappa^2 = m^2\beta/2\mu_0e^2\hbar^2. \quad (6.49)$$

В рамках теории ГЛ параметр  $\psi$  не зависит от температуры; это означает, что оба поля  $H_{c2}$  и  $H_{cb}$ , а также обе длины  $\xi(T)$  и  $\lambda(T)$  имеют аналогичную температурную зависимость.

Интерпретация поля  $H_{c2}$  для сверхпроводников II рода с  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  вполне очевидна: оно является границей смешанного состояния. Для сверхпроводников I рода с  $\kappa < 1/\sqrt{2}$  и  $H_{c2} < H_{cb}$  поле  $H_{c2}$ , как мы сейчас убедимся, представляет собой критическое поле для переохлаждения. Переход при поле  $H_{cb}$  представляет собой фазовый переход первого рода; при  $H = H_{cb}$  свободные энергии Гиббса обеих фаз равны между собой, а разность параметров порядка  $\psi$  отлична от нуля. Как схематически изображено на фиг. 144, обоим фазам отвечают локальные минимумы  $G$ . При уменьшении поля ниже  $H_{cb}$  величина  $G_s$  падает, тогда

как величина  $G_n$  остается неизменной [выражения (6.30) и (6.31)]. В некотором интервале полей нормальная фаза все еще отвечает локальному минимуму, т. е. является метастабильной фазой. Поэтому нормальная фаза может сохраняться до полей, меньших  $H_{cb}$ . Это явление называют переохлаждением в связи с очевидной аналогией с системой жидкость — пар. Наши вычисления



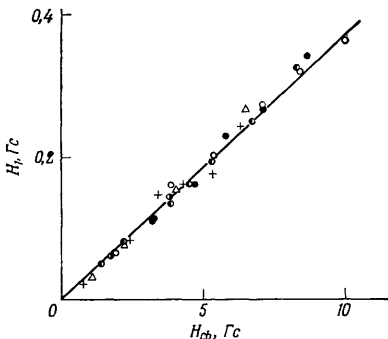
Фиг. 144. Схематическая зависимость  $G$  от  $\psi$  в различных полях для сверхпроводника I рода.

Нормальная фаза соответствует минимуму  $G$  при  $\psi = 0$ , а сверхпроводящая фаза — минимуму  $G$  при  $\psi \neq 0$ . В поле  $H_{cb}$  значения  $G$  для двух минимумов равны,  $G_n = G_s$ . В полях ниже  $H_{cb}$  имеем  $G_n > G_s$ , но нормальная фаза все еще соответствует локальному минимуму свободной энергии  $G$ .

поля  $H_{c2}$  на основе линеаризованного уравнения для  $\psi$  показывают, что  $H_{c2}$  есть наименьшее поле, при котором уравнение  $\delta G/\delta \psi = 0$  имеет решение для малого, но отличного от нуля значения  $\psi$ . Поэтому на фиг. 144 полю  $H_{c2}$  соответствует плоский участок зависимости  $G$  от  $\psi$  вблизи  $\psi = 0$ . Это значит, что  $H_{c2}$  есть поле, при котором локальный минимум при  $\psi = 0$  превращается в локальный максимум. Следовательно, поле  $H_{c2}$  представляет собой границу устойчивости нормальной фазы, т. е. то поле, которое мы называем критическим полем переохлаждения.

Фабер [15 — 17] первый провел серию экспериментов на переохлажденных массивных сверхпроводниках I рода. Он обнаружил, что значительно ниже  $T_c$  степень возможного переохлаждения меняется от образца к образцу, а в данном образце — от места к месту. Фабер связал это обстоятельство с тем, что сверхпроводящая фаза возникает в отдельных местах, благоприятных для образования зародышей, а затем, разрастаясь, заполняет весь образец. Однако вблизи  $T_c$  переохлаждение перестает зависеть от особенностей образца. Как отметил Фабер, последнее связано с тем, что вблизи  $T_c$  длина когерентности очень велика, поэтому объем, переходящий в сверхпроводящее состояние и равный по порядку величины  $\xi^3(T)$ , значительно превышает какие-либо дефекты образца. Следовательно, дефекты не имеют значения

и образование зародышей становится свойством всего образца в целом. На фиг. 145 приведен пример идеального переохлаждения вблизи  $T_c$ . Позже мы увидим, что поле переохлаждения  $H_1$  в работах Фабера фактически является, вероятно, поверхностным полем  $H_{c3}$ , а не полем  $H_{c2}$ . Из-за трудностей, связанных с определением места образования зародышей, переохлаждение массивных образцов в области температур, далеких от  $T_c$ , не было изучено. Более поздние эксперименты Федерера и Мак-Лаклана [18] проводились на маленьких образцах, в частности на сферах.



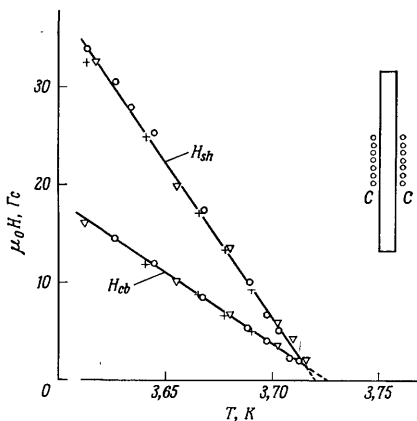
Фиг. 145. Идеальное переохлаждение в Al [17].

Результаты представлены в форме зависимости поля переохлаждения  $H_1$  от  $H_{cб}$  при разных температурах. Экспериментальные точки сняты с трехразличных участков для каждого из двух образцов.

Можно также определить поле перегрева как предел существования метастабильной сверхпроводящей фазы. Однако эксперименты по перегреву трудны, поскольку поток вытесняется из сверхпроводящей фазы, так что поле в некоторых частях образца становится выше приложенного поля (см. фиг. 16). Долл и Граф [11] преодолели эту трудность, прилагая поле только к средней части цилиндрического образца. Они готовили свои образцы весьма тщательно; на фиг. 146 приведены некоторые результаты для поля перегрева  $H_{sh}$  и для поля  $H_{cб}$ .

Обсудив вопрос о критическом поле  $H_{c2}$  для массивных сверхпроводников, перейдем к вычислению критических полей при наличии поверхностей. Простейший случай — когда поле приложено параллельно поверхности массивного образца; следующим по степени сложности является случай тонкой пленки в параллельном внешнем поле.

Рассмотрим сначала образец с одной плоской поверхностью в параллельном ей поле. Пусть поле направлено вдоль оси  $z$ , а ось  $x$  перпендикулярна поверхности (фиг. 147). Выберем согласно (6.34) потенциал  $A = (0, \mu_0 H_0 x, 0)$ ; таким образом,



Фиг. 146. Поле перегрева  $H_{sh}$  для трех разных образцов Sn [11].

Поле, создаваемое катушкой  $C$ , прилагалось лишь к центральной части образца. Такая методика обеспечивает отсутствие переохлаждения. Критические поля определялись по кривым намагничивания, снятым в возрастающем и убывающем полях.

нам нужно решить уравнение (6.35). Теперь, однако, необходимо учесть граничное условие (6.21), которое для данного случая принимает вид

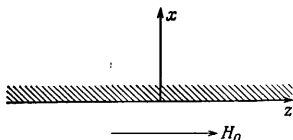
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (6.50)$$

Мы поступаем с уравнением (6.35) так же, как и в случае массивного образца. Беря  $\psi$  в виде (6.38), получаем

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2e^2 \mu_0^2 H_0^2}{m} (x - x_0)^2 f = |\alpha| f. \quad (6.51)$$

Это уравнение отличается от уравнения (6.41) только тем, что мы опустили член с  $k_z^2$ , поскольку он понижает  $H_0$  при данном  $|\alpha|$ . Мы опять имеем уравнение Шредингера для частицы в гармонической потенциальной яме с центром в  $x_0$ , однако теперь граничное условие (6.50) означает, что собственное значение существенно образом зависит от величины  $x_0$ . Как отметили Сан-Жам и де Жен [43], первыми сформулировавшие и решившие эту зада-

чу, граничное условие можно учесть, используя метод изображений. Рассмотрим частицу, движущуюся в потенциальной яме  $V(x)$  (фиг. 148), которая представляет собой нашу исходную гармоническую потенциальную яму вместе с ее отражением на поверхности. Волновая функция основного состояния  $\psi_0(x)$  в поле



Фиг. 147. Система координат, используемая при вычислении поверхностного критического поля.

с потенциалом  $V(x)$  должна быть симметричной относительно  $x = 0$ ; это означает, что при  $x = 0$  ее производная равна нулю

в согласии с условием

(6.50), а при  $x > 0$  она

удовлетворяет уравнению

(6.51). Таким образом,

функция  $\psi_0(x)$  при  $x > 0$

является решением нашей

задачи, а соответствующее

собственное значение  $E_0$

дает критическое поле. Мы

можем сравнить  $E_0$  для

различных  $x_0$  с собствен-

ным значением  $E$  для

одиночной гармонической

потенциальной ямы. При

$x_0 \rightarrow \infty$  собственное зна-

чение  $E_0$  стремится к  $E$ ,

а при  $x_0 = 0$  оно снова

равно  $E$ . Для промежуточных значений  $x_0$  величина  $E_0$  меньше  $E$ ,

поскольку  $V(x)$  в некоторых областях меньше гармонического

потенциала. Строгое решение можно выразить через функции

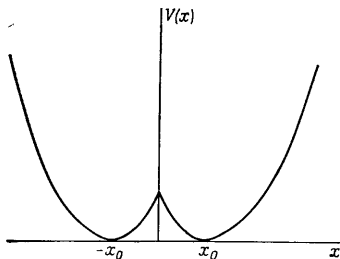
Вебера, которые удовлетворяют уравнению (6.51). Было найдено,

что самое низшее собственное значение определяется выражениями

$$x_0 = 0,59 \xi(T), \quad (6.52)$$

$$|\alpha| = 0,59 (1/2 \hbar \omega_c), \quad (6.53)$$

где  $\omega_c$  — циклотронная резонансная частота, а  $1/2 \hbar \omega_c$  — собственное значение в гармонической потенциальной яме. Для определения критического поля напишем уравнение (6.53) в обращен-



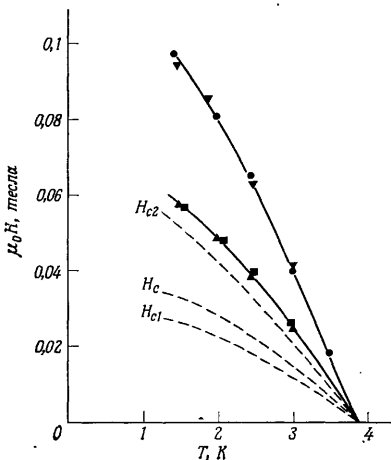
Фиг. 148. Потенциальная яма, используемая в решении задачи при наличии поверхности с помощью метода изображений.

ном виде, а именно

$$H_{c3} = 1,69\mu \sqrt{2} H_{c2} = 1,69 H_{c2}. \quad (6.54)$$

Таким образом, при поле  $H_{c3}$  на поверхностях, параллельных приложенному полю, возникает сверхпроводящий слой толщиной порядка  $\xi(T)$ .

Существование такого сверхпроводящего слоя, которое было предсказано теорией, впоследствии неоднократно подтверждалось большим количеством различных экспериментов. Наиболее



Фиг. 149. Критические поля для сплава In — 6% РЬ [32].

Поля  $H_{c1}$ ,  $H_c$  и  $H_{c2}$  получены из измерений намагниченности; поле  $H_{c3}$  получено для отожженных образцов с медным покрытием: ● — до нанесения медного покрытия; ▼ — после удаления медного покрытия; ▲ — с медным покрытием (толщиной  $5 \cdot 10^{-5}$  м); ■ — с медным покрытием (толщиной  $2 \cdot 10^{-5}$  м).

непосредственный способ заключается в определении сверхпроводящего перехода массивного образца как магнитным методом, так и по сопротивлению. В полях между  $H_{c2}$  и  $H_{c3}$  сверхпроводящий ток может течь в поверхностном слое, так что сверхпроводящий переход по сопротивлению при малых измерительных токах происходит при  $H_{c3}$ . С другой стороны, намагниченность определяется свойствами всей толщи образца, поэтому магнитный сверхпроводящий переход происходит при поле  $H_{c2}$ . Измеренная таким способом температурная зависимость критических полей изображена на фиг. 149. Альтернативный метод заключа-



ются в измерении критических полей  $H_{c\perp}$  и  $H_{c\parallel}$  в перпендикулярном и параллельном полях для толстых пленок из сплава (сверхпроводника II рода). Если толщина пленки  $d$  много больше  $2\xi(T)$ , то поверхности пленок независимы и поле  $H_{c\parallel}$  равно просто  $H_{c3}$ , а перпендикулярное критическое поле равно  $H_{c2}$ . Следовательно, имеем

$$H_{c\parallel} = 1,69H_{c\perp} \quad \text{при} \quad d \gg 2\xi(T). \quad (6.55)$$

На фиг. 151 изображены критические поля для различных пленок из сплава In, полученные из экспериментов по туннелированию. Можно видеть, что для толстых пленок соотношение (6.55) справедливо.

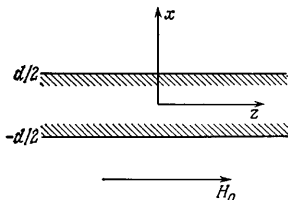
Для сверхпроводников I рода, у которых  $H_{c3} < H_{cb}$ , можно ожидать, что поле  $H_{c3}$  должно играть роль критического поля переохлаждения; тогда в экспериментах Фабера, например, полем переохлаждения является поле  $H_{c3}$ , а не поле  $H_{c2}$ . Возможно, конечно, и существование сверхпроводников промежуточного типа, для которых  $H_{c2} < H_{cb} < H_{c3}$  и поверхностный сверхпроводящий слой возникает в некотором интервале полей, превышающих  $H_{cb}$ .

Эффекты, связанные с наличием поверхностного слоя, подавляются, если нанести на поверхность сверхпроводника слой нормального металла. В качестве примера можно привести фиг. 149, где критическое поле (измеряемое по сопротивлению) образца, покрытого слоем меди, очень близко к  $H_{c2}$ . Мы уже отмечали, что граничное условие с равным нулю градиентом [см. (6.50)] неприменимо для случая границы раздела между сверхпроводящим и нормальным металлами; при использовании правильного граничного условия получается критическое поле, меньшее  $H_{c3}$ . Фактически строгие вычисления Хуралта [33] показали, что критическое поле точно равно  $H_{c2}$ , если проводимость нормального металла больше проводимости сверхпроводника в нормальном состоянии. Избавление от нежелательных эффектов, обусловленных поверхностным слоем, с помощью нанесения слоя нормального металла стало в настоящее время стандартным практическим приемом.

Перейдем теперь ко второй задаче, связанной с учетом границ, а именно к критическому полю пленки в параллельном ей поле. Выберем координатную систему, изображенную на фиг. 150. Пусть поверхности пленки совпадают с плоскостями  $x = \pm \frac{1}{2}d$ . Мы должны теперь решить уравнение (6.51) с граничными условиями

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm \frac{1}{2}d. \quad (6.56)$$

Ясно, что характер решения зависит от отношения  $d/\xi(T)$ . Как мы уже отмечали, при  $d \gg \xi(T)$  обе поверхности по существу независимы и образование зародышей сверхпроводящей фазы у обеих поверхностей начинается в поле  $H_{c2}$ . При  $d \sim \xi(T)$  ситуация усложняется, и задачу нужно решать с помощью функций



Фиг. 150. Система координат, используемая при рассмотрении пленки толщиной  $d$ , находящейся в параллельном поле.

Вебера. Однако при  $d \ll \xi(T)$  задача упрощается. В этом пределе тонких пленок функция  $f$  практически не изменяется на толщине пленки, и мы можем проинтегрировать уравнение (6.51) по толщине пленки. Первый член дает

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left( \frac{df}{dx} \right)_{d/2} - \left( \frac{df}{dx} \right)_{-d/2} \right\};$$

эта величина равна нулю в силу граничных условий. При интегрировании двух других членов мы можем считать функцию  $f$  постоянной и равной  $f_0$ . В результате получаем

$$\frac{2e^2 \mu_0^2 H_0^2}{m} \left( \frac{d^3}{12} + x_0^2 d \right) f_0 = |\alpha| f_0 d. \quad (6.57)$$

Нас интересует наименьшее собственное значение  $|\alpha|$  или, что эквивалентно, наибольшее критическое поле  $H_0$ . Ясно, что для этого нужно в (6.57) положить  $x_0 = 0$ ; последнее означает, как и следовало ожидать, что потенциальная яма в нашем случае симметрична. При таком выборе из (6.57) получаем для критического поля

$$H_{c\parallel}^2 = \frac{6m|\alpha|}{\mu_0^2 e^2 d^2} \quad \text{при } d \ll \xi(T). \quad (6.58)$$

Удобно выразить параллельное критическое поле через перпендикулярное поле, т. е. через поле  $H_{c2}$ , определяемое выражением (6.43). Введем приведенные переменные

$$\varepsilon = \mu_0 H_{c\perp} d^2 \pi / 2 \phi_0 = d^2 / 4 \xi^2(T), \quad (6.59)$$

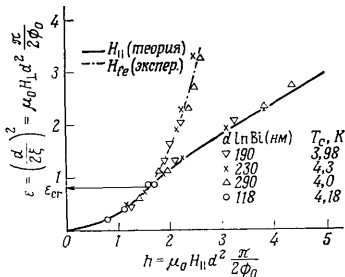
$$h = \mu_0 H_{c\parallel} d^2 \pi / 2 \phi_0. \quad (6.60)$$

В двух найденных выше предельных случаях

$$h = 1,69\varepsilon \quad \varepsilon \gg 1, \quad (6.51)$$

$$h^2 = 3\varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (6.62)$$

Преимущество такого выбора переменных состоит в том, что экспериментальные точки ложатся на одну универсальную кривую зависимости  $h$  от  $\varepsilon$  для всех температур и всех толщин пленок.



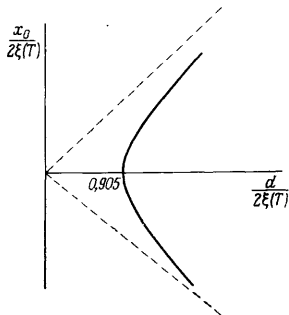
Фиг. 151. Параллельные и перпендикулярные критические поля для пленок из сплава In при разных температурах [31].

Кривые построены в приведенных переменных (6.59) и (6.60). Теоретическая кривая (сплошная линия) получена Сан-Жамом и де Женом [43], причем асимптотические выражения имеют вид  $h^2 = 3\varepsilon$  для малых  $\varepsilon$  и  $h = 1,69\varepsilon$  для больших  $\varepsilon$ . Приведена также кривая для поля, отвечающего началу проникновения потока  $H_{c0}$ , которая отклоняется от кривой критических полей при  $\varepsilon_{cr} = 0,82$ .

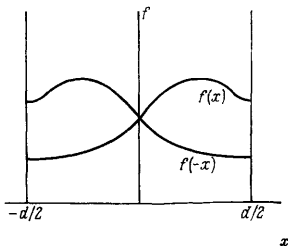
Если для данной пленки повышается температура  $T$ , то одновременно в связи с увеличением  $\xi(T)$  параметр  $\varepsilon$  уменьшается. На фиг. 151 приведены некоторые экспериментальные результаты для критических полей пленок из сплава индия. Теоретическая кривая зависимости  $h$  от  $\varepsilon$  построена на основе подробных вычислений Сан-Жама и де Жена [43], причем предельные случаи описываются выражениями (6.61) и (6.62).

Имеется существенное качественное различие между характером решений в пределе тонких и пределе толстых пленок; это различие связано с поведением точки  $x_0$  — центра гармонической потенциальной ямы в нашем уравнении Шредингера. Согласно (6.58), в пределе тонких пленок  $d \ll 2\xi(T)$  получаем  $x_0 = 0$ . С другой стороны, в пределе толстых пленок центр потенциальной ямы расположен на расстоянии  $0,59\xi(T)$  от каждой границы, так что  $x_0 = \pm [d/2 - 0,59\xi(T)]$ . Зависимость  $x_0$  от толщины изображена на фиг. 152. Критической точке, в которой  $x_0$  отклоняется от нуля, отвечают значения приведенных переменных  $\varepsilon_{cr} = 0,816$ ,  $h_{cr} = 1,63$ , найденные с помощью точ-

ных вычислений. В этой точке кривая критического поля меняет кривизну (см. фиг. 151). Когда значение  $x_0$  отлично от нуля, имеются две волновые функции (одна для  $+x_0$ , а другая для  $-x_0$ ), соответствующие наименьшему собственному значению. Эти волновые функции, которые, конечно, асимметричны относительно  $x = 0$ , изображены на фиг. 153. При  $d \gg 2\xi(T)$  обе волновые функции являются просто функциями, отвечающими поверхностному слою на одной из поверхностей.



Фиг. 152. Перемещение центра потенциальной ямы  $x_0$  с изменением толщины пленки.

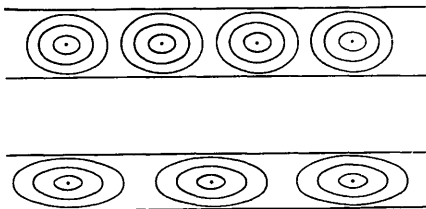


Фиг. 153. Две вырожденные волновые функции  $f(x)$  и  $f(-x)$  при  $x_0 \neq 0$ .

Интересен результат, связанный с характером волновой функции в поле, намного меньшем критического. Важно выразить в явном виде зависимость от координаты  $y$ , направленной перпендикулярно полю в плоскости пленки. Вспомним о существовании фазового множителя, равного  $\exp(iky)$ . Любая линейная комбинация двух вырожденных волновых функций с центрами в  $+x_0$  и  $-x_0$  являются решением линеаризованного уравнения ГЛ. Однако значение свободной энергии, включающей нелинейные члены, зависит от относительного вклада двух вырожденных волновых функций, и правильной линейной комбинацией является комбинация, которой отвечает минимальная свободная энергия. Мы не будем заниматься подробными вычислениями свободной энергии, которые аналогичны приведенным в § 6.5 вычислениям для решетки Абрикосова. В результате вычислений выясняется, что вклады обеих функций с центрами в  $+x_0$  и  $-x_0$  одинаковы и волновую функцию можно записать в виде

$$\psi(x, y) = A \{ \exp(iky) f(x) + \exp(-iky) f(-x) \}, \quad (6.63)$$

где  $k$  и  $x_0$  связаны соотношением (6.40). Амплитуда  $A$  должна быть выбрана таким образом, чтобы свободная энергия, включающая нелинейные члены, была минимальной, но мы этого касаться не станем. Относительная фаза двух членов в (6.63) зависит от начала отсчета координаты  $y$ , но как мы уже предположили, начало координат выбрано так, что относительная фаза равна нулю. Легко видеть, что  $\psi(x, y)$  описывает вихревое состояние



Фиг. 154. Поверхности уровня для  $|\psi|^2$  при двух различных значениях  $d/\xi(T)$ , а следовательно, и различных  $\lambda_y$ .

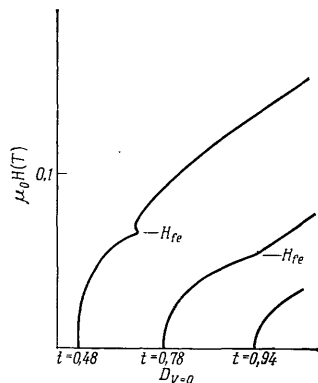
в пленке. Фактически  $|\psi|^2$  имеет нули на линии  $x = 0$  в точках, находящихся на расстоянии  $\lambda_y = \pi/k$  по оси  $y$ . В терминах  $x_0$  это значит, что

$$\lambda_y = \phi_0 / \mu_0 H_0 x_0. \quad (6.64)$$

На фиг. 154 схематически изображены поверхности уровней  $|\psi|^2$ ; мы получили, как можно видеть, вихревые состояния. С уменьшением приведенной толщины  $d/2\xi(T)$  уменьшается и  $x_0$ . Это означает, что  $\lambda_y$  увеличивается, поэтому, чем тоньше пленка, тем труднее «набить» ее вихрями, которые становятся все более вытянутыми. Наконец, когда  $d/\xi(T)$  становится меньше критического значения,  $x_0 = 0$  и уже нет ни вырождения, ни вихревого состояния. Пленка просто становится слишком тонкой для образования вихрей.

Возникновение вихревого состояния в пленках с  $\epsilon > \epsilon_{cr}$  весьма четко проявляется в эксперименте, что впервые продемонстрировал Саттон [46]. На фиг. 155 приведены результаты измерений туннелирования для контакта  $N - S$ , в котором сверхпроводящая  $S$ -пленка была сделана из сплава  $In - Bi$ . Измерялась проводимость пленки  $D_{V=0}$  при нулевой разности потенциалов в параллельном магнитном поле при разных температурах. При самой низкой температуре, для которой  $\epsilon > \epsilon_{cr}$ , на кривой появляется четко выраженный излом в поле  $H_{lc}$ , когда вихревая решетка впервые возникает в пленке. При более высоких приведенных температурах, когда  $\epsilon < \epsilon_{cr}$ , такой аномалии

не наблюдается. Поле  $H_{fe}$  вместе с критическими полями изображено на фиг. 151. Как и следовало ожидать, поле  $H_{fe}$  совпадает с  $H_{c||}$  при  $\epsilon = \epsilon_{cr}$ .



Фиг. 155. Кривые туннельной электропроводности для пленки из сплава In — Bi толщиной 190 нм [31].

На кривых виден эффект проникновения поля.

Мы достаточно полно обсудили вопрос о критических полях для тонких пленок в параллельном поле при фазовых переходах второго рода. Следует отметить, что в пленках возможны также переходы первого рода. Например, в очень толстой пленке с малым значением  $\kappa$  фазовый переход первого рода должен иметь место при критическом поле, более или менее близком к  $H_{cb}$ . Наше рассмотрение, следовательно, ограничено случаем пленок с достаточно высоким значением  $\kappa$ , типичным для пленок из сплавов. У пленок с низким значением  $\kappa$  длина когерентности  $\xi(T)$  велика; это означает, что часто справедливо приближение  $\psi = \text{const}$ . В § 6.6 мы рассмотрим в этом приближении критические поля для пленок с низким значением  $\kappa$  как в случае переходов первого рода, как и в случае переходов второго рода.

мы рассмотрим в этом приближении критические поля для пленок с низким значением  $\kappa$  как в случае переходов первого рода, как и в случае переходов второго рода.

## § 6.5. Вихревая решетка Абрикосова

В § 6.4 мы остановились на вычислениях критических полей при фазовых переходах второго рода с помощью линеаризованных уравнений ГЛ. В полях  $H_{c2}$  и  $H_{c3}$  функция  $\psi$  изменяется в пространстве на характерной длине  $\xi(T)$ , и при вычислении критического поля пленки толщиной  $d < \xi(T)$  мы можем считать, что  $\psi = \text{const}$ . Теперь перейдем к рассмотрению некоторых особенностей, связанных с учетом нелинейного члена  $\beta |\psi|^2 \psi$  в уравнении ГЛ. Самым простым случаем является, естественно, тонкая пленка, для которой функцию  $\psi$  можно считать постоянной; как мы увидим в § 6.6, в этом случае можно найти выражения для  $\psi$  и для свободной энергии при всех значениях внешнего поля  $H_0$ . В настоящем параграфе сначала мы обсудим структуру смешанного состояния при значениях  $H_0$ , немного меньших  $H_{c2}$ . В смешанном состоянии функция  $\psi$  изменяется в пространстве

и поэтому аналитическое рассмотрение нелинейных членов для всех значений  $H_0$  не представляется возможным. Однако мы имеем дело с фазовым переходом второго рода, и в полях, немного меньших  $H_{c2}$ , функция  $\psi$  мала (см. фиг. 142), поэтому нелинейные члены можно учесть методом возмущений. Решение этой задачи принадлежит Абрикосову [1]; ниже мы в значительной мере будем следовать его работе. В силу важности этой задачи, был предложен целый ряд эквивалентных формулировок ее решения, например де Женом [10] и Феттером и Хоэнбергом (см. [41]).

Нужно решить два уравнения ГЛ: уравнение (6.18) для  $\psi$  и (6.23) для тока  $\mathbf{J}$ . Пусть внешнее поле  $H_0$  немного меньше  $H_{c2}$ , так что векторный потенциал  $\mathbf{A}$  удовлетворяет уравнению

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}_0 + \mathbf{B}_{\text{loc}}, \quad (6.65)$$

где  $\mathbf{B}_{\text{loc}}$  — поле, генерируемое сверхпроводящими токами:

$$\text{rot } \mathbf{B}_{\text{loc}} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (6.66)$$

Удобно записать

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{c2} + \mathbf{A}_1, \quad (6.67)$$

где  $\mathbf{A}_{c2}$  — векторный потенциал поля  $H_{c2}$ , в явном виде равный

$$\mathbf{A}_{c2} = (0, \mu_0 H_{c2} x, 0). \quad (6.68)$$

Все магнитные поля считаем направленными вдоль оси  $z$ .

В поле, немного меньшем  $H_{c2}$ , можно ожидать, что функция  $\psi$  будет близка к решению линейного уравнения (6.35), в котором поле  $H_0$  заменено на  $H_{c2}$ . Положим поэтому

$$\psi = \psi_L + \psi_1, \quad (6.69)$$

где  $\psi_L$  — решение линейного уравнения. Однако представление (6.69) оставляет два невыясненных вопроса относительно  $\psi_L$ . Прежде всего в связи с нелинейностью системы важно, как нормирована функция  $\psi_L$ ; нормировка в конечном счете определяет силу сверхпроводящего тока  $\mathbf{J}$ , а следовательно, и индукцию  $\mathbf{B}$ . Для обеспечения правильной нормировки потребуем, чтобы  $\psi_L$  и  $\psi_1$  были ортогональны, т. е.

$$\int \psi_L^* \psi_1 d^3 \mathbf{r} = 0. \quad (6.70)$$

Мы можем разложить  $\psi_1$  в ряд по собственным функциям осцилляторного гамильтониана (6.35), причем (6.70) представляет собой условие, в силу которого собственная функция с наименьшим собственным значением  $\psi_L$  не появляется в выражении для  $\psi_1$ . Второй вопрос относительно функции  $\psi_L$  связан с сильным вырождением наинизшего собственного состояния уравнения (6.35); решение может содержать любые значения  $k_y$  и  $x_0$ , связан-

ных соотношением (6.40). Нелинейность системы снова приводит к снятию вырождения, т. е. отбору одного частного решения. Сначала мы, однако, просто выберем общую линейную комбинацию решений с различными значениями  $x_0$ :

$$\psi_L(x, y) = \sum_n C_n \exp(inky) \exp[-(x - x_n)^2/2\xi^2(T)], \quad (6.71)$$

где

$$x_n = n\hbar k/2e\mu_0 H c_2 = nk\xi^2(T). \quad (6.72)$$

Мы видим,<sup>1</sup> что выражение (6.71) периодически по  $y$  с длиной волны  $2\pi/k$ . Следуя вычислениям Абрикосова, рассмотрим только такие комбинации, при которых величина  $|\psi_L|^2$  периодична и по  $x$ , и по  $y$ . Мы обеспечим это, используя условие периодичности

$$C_{n+N} = C_n. \quad (6.73)$$

Фактически из всех значений  $N$  рассматривались только значения  $N = 1$  (Абрикосов [1]) и  $N = 2$  (Клейнер и др. [37]); в последнем случае получается треугольная решетка, наблюдаемая на опыте. Выбор периодического решения типа (6.71) теперь достаточно очевиден, поскольку мы знаем из § 4.3, что смешанное состояние представляет собой периодическую конфигурацию вихрей.

Анализ решения почти совершенно не зависит от детальной структуры функции  $\psi_L$ , т. е. от конкретного выбора  $C_n$  и  $k$  в (6.71). Первый важный результат относится к току  $\mathbf{J}_L$ , связанному с  $\psi_L$ . Если (6.71) подставить<sup>1</sup> в выражение (6.23) для тока, то можно получить

$$J_{Lx} = -\frac{e\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial y} |\psi_L|^2, \quad (6.74)$$

$$J_{Ly} = \frac{e\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} |\psi_L|^2. \quad (6.75)$$

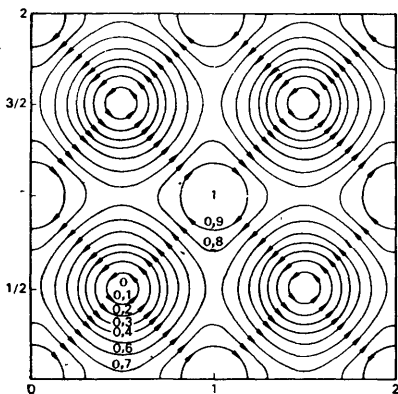
При учете уравнения (6.66) это означает, что поле, порожденное током  $\mathbf{J}_L$  и направленное, конечно, по  $z$ , равно

$$B_{\text{loc}} = -\mu_0 e\hbar |\psi_L|^2/m. \quad (6.76)$$

Таким образом, находим важный результат: линии постоянной индукции  $\mathbf{B}$  совпадают с линиями постоянного значения  $|\psi_L|^2$ , причем эти линии являются также линиями тока  $\mathbf{J}_L$ . Следовательно, контуры на диаграммах типа изображенных на фиг. 156 и 157 представляют собой одновременно поверхности уровней  $|\psi_L|^2$  и  $\mathbf{B}$ , а также линии тока  $\mathbf{J}_L$ .

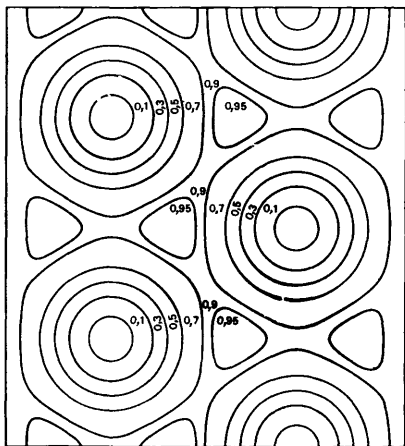
Перейдем теперь к нормировке функции  $\psi_L$ . Воспользуемся выражениями (6.67) и (6.69) для  $A$  и  $\psi$  и запишем уравнение ГЛ





Фиг. 156. Поверхности уровня для  $|\psi_L|^2$  в случае квадратной решетки Абрикосова [1].

Значения, отложенные по осям, выражены в единицах  $(2\pi)^{1/2}\xi(T)$ .



Фиг. 157. Поверхности уровня для  $|\psi_L|^2$  в случае треугольной вихревой решетки [37].

Расстояние по вертикали между сердцевинами вихрей равно  $2\pi^{1/2}\xi(T)/3^{1/4}$ , а расстояние по горизонтали между рядами вихрей равно  $3^{1/4}\pi^{1/2}\xi(T)$ .

для  $\psi$  как уравнение для малой поправки  $\psi_1$ :

$$\frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - 2eA_{c2})^2 \psi_1 + \alpha\psi_1 + \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - 2eA_{c2} - 2eA_1)^2 \psi_L + \alpha\psi_L + \beta |\psi_L|^2 \psi_L = 0. \quad (6.77)$$

Величины  $A_1$ ,  $\psi_1$  и  $\beta |\psi_L|^2 \psi_L$  считаются малыми, в силу чего сохраняем лишь члены первого порядка. Для удобства мы сохранили член нулевого порядка  $\mathcal{H}_0 \psi_L$ , где

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - 2eA_{c2})^2 + \alpha. \quad (6.78)$$

По определению уравнение для  $\psi_L$  имеет вид

$$\mathcal{H}_0 \psi_L = 0. \quad (6.79)$$

Член, содержащий  $\psi_1$ , в уравнении (6.77) есть  $\mathcal{H}_0 \psi_1$ . Если снова записать  $\psi_1$  как сумму собственных функций оператора  $\mathcal{H}_0$ , не включающих  $\psi_L$ , то  $\mathcal{H}_0 \psi_1$  также есть сумма таких собственных функций, не содержащая  $\psi_L$ . Следовательно, наше условие нормировки (6.70) эквивалентно условию

$$\int \psi_L^* \mathcal{H}_0 \psi_1 d^3r = 0. \quad (6.80)$$

Подставляя сюда  $\mathcal{H}_0 \psi_1$  из (6.77), получаем условие (6.80) в явном виде:

$$\int \left\{ \frac{1}{2m} \psi_L^* (-i\hbar\nabla - 2eA_{c2} - 2eA_1)^2 \psi_L + \alpha |\psi_L|^2 + \beta |\psi_L|^4 \right\} d^3r = 0. \quad (6.81)$$

Выражения (6.76) и (6.81) решают в принципе нашу задачу, поскольку (6.76) дает  $\mathbf{B}$  в терминах  $|\psi_L|^2$ , а (6.81) определяет  $|\psi_L|^2$ . Чтобы получить решение в явном виде, преобразуем выражение (6.81). Прежде всего проинтегрируем первый член по частям, чтобы ввести  $\nabla \psi_L^*$ . Часть первого члена, имеющая нулевой порядок величины, сокращается с интегралом от  $\alpha |\psi_L|^2$ ; пренебрегая членом с  $A_1^2$ , получаем

$$\int (-\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{J}_L + \beta |\psi|^4) d^3r = 0, \quad (6.82)$$

где  $\mathbf{J}_L$ , как и прежде, есть ток, связанный с  $\psi_L$ . С помощью (6.66) находим

$$\begin{aligned} -\int \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{J}_L d^3r &= -\frac{1}{\mu_0} \int \mathbf{A}_1 \cdot \text{rot } \mathbf{B}_{\text{loc}} d^3r = \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \int \mathbf{B}_{\text{loc}} \cdot \text{rot } \mathbf{A}_1 d^3r, \end{aligned} \quad (6.83)$$

где снова мы проинтегрировали по частям, воспользовавшись векторным тождеством  $\text{div} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$ . Из (6.65)

и (6.67) имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}_1 = \mu_0 (\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_{c2}) + \mathbf{V}_{10c}. \quad (6.84)$$

Подставим (6.84) и (6.83) в уравнение (6.82) и воспользуемся выражением (6.76) для  $\mathbf{V}_{10c}$ . Это дает

$$(2\kappa^2 - 1) \frac{e\hbar}{m} \langle |\psi_L|^4 \rangle = (H_{c2} - H_0) \langle |\psi_L|^2 \rangle, \quad (6.85)$$

где мы ввели обозначение

$$\int |\psi_L|^2 d^3r = \langle |\psi_L|^2 \rangle \text{ и т. д.} \quad (6.86)$$

и заменили  $\beta$  на  $\kappa^2$  с помощью (6.49).

Если не входить в дальнейшие подробности относительно формы решетки из линий потока, выражение (6.85) по существу представляет собой окончательный результат. Следуя Абрикосову, удобно характеризовать свойства решетки с помощью параметра  $\beta_A$ :

$$\beta_A = \langle |\psi_L|^4 \rangle / (\langle |\psi_L|^2 \rangle)^2. \quad (6.87)$$

Очевидно, что  $\beta_A \geq 1$  для любой формы функции  $\psi_L$ . Из (6.85) получаем

$$\langle |\psi|^2 \rangle = \frac{m}{e\hbar} \frac{H_{c2} - H_0}{(2\kappa^2 - 1) \beta_A}. \quad (6.88)$$

Средняя индукция, согласно (6.65) и (6.76), равна

$$\langle B \rangle = \mu_0 H_0 - \frac{\mu_0 (H_{c2} - H_0)}{(2\kappa^2 - 1) \beta_A}, \quad (6.89)$$

и, следовательно, для намагниченности имеем

$$M = - \frac{\mu_0 (H_{c2} - H_0)}{(2\kappa^2 - 1) \beta_A}. \quad (6.90)$$

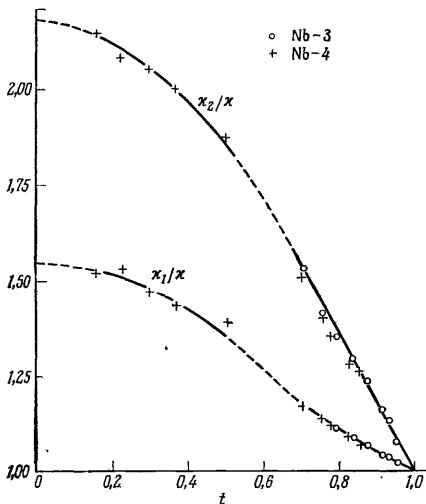
Из (6.90) легко видеть, что свободная энергия Гиббса  $G$  уменьшается с уменьшением  $\beta_A$  (подробные вычисления оставлены для задачи 6.14). Поэтому параметры  $C_n$  и  $k$  в (6.71) нужно выбирать таким образом, чтобы параметр  $\beta_A$  был минимален. Абрикосов предположил, что все  $C_n$  равны, а  $k = (2\pi)^{1/2} / \xi(t)$ ; это дает квадратную решетку, изображенную на фиг. 156, где  $\beta_A = 1,18$ . Как показали впоследствии Клейнер и др. [37], если выбрать  $N = 2$  в условии периодичности (6.73), а также принять

$$C_1 = \pm i C_0, \quad (6.91)$$

что соответствует треугольной решетке, то получим значение  $\beta_A = 1,16$ . Более того, квадратную решетку можно непрерывным образом деформировать, превратив ее в треугольную, причем  $\beta_A$  при такой деформации всегда уменьшается, так что вопрос о мета-

стабильности квадратной решетки не возникает. Треугольная решетка изображена на фиг. 157; видно, что она аналогична решетке, сфотографированной Эссманом и Тройбле [14] (см. фиг. 23).

Возможно, наиболее важная черта полученных результатов состоит в том, что намагниченность (6.90) зависит от того же параметра  $\kappa$ , как и поле  $H_{c2}$ . Очевидно, что уравнения ГЛ в той форме,



Фиг. 158. Зависимость  $\kappa_1/\kappa$  и  $\kappa_2/\kappa$  от приведенной температуры для двух образцов Nb [38].

Для обоих образцов  $\kappa$  есть предельное значение при  $T \rightarrow T_c$  согласно теории ГЛ, равное 0,84.

которую мы здесь привели, справедливы только в некоторой температурной области вблизи  $T_c$ , поскольку мы исходили из предположения Ландау о возможности разлагать свободную энергию в степенной ряд по параметру порядка<sup>1)</sup>. В действительности, как мы увидим в § 6.7, в случае сплавов, для которых электродинамика локальна, микроскопическая теория при  $H \sim H_{c2}$  дает решения для всех температур с помощью метода, основанного на вы-

<sup>1)</sup> Фактически ограничение в еще большей степени связано с предположением о возможности разлагать коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  в (6.4) в ряд по  $T - T_c$ , как это сделано в (6.6) и (6.7). Подробнее см. [51\*]. — Прим. ред.

числениях Абрикосова. Результат состоит в том, что уравнения для  $H_{c2}$  и для намагниченности  $M$  остаются справедливыми, но входящие в них параметры  $\kappa$  по-разному зависят от температуры:

$$H_{c2} = \kappa_1(T) \sqrt{2} H_{cb}, \quad (6.92)$$

$$M = - \frac{\mu_0 (H_{c2} - H_0)}{\{2\kappa_2^2(T) - 1\} \beta_A}. \quad (6.93)$$

С этой более современной точки зрения можно считать, что результаты вычислений на основе теории ГЛ свидетельствуют о совпадении параметров  $\kappa$  при  $T = T_c$ . На фиг. 158 изображены температурные зависимости параметров  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  для чистого Nb; можно видеть, что предельное значение обоих параметров при температуре  $T_c$  одинаково. То же самое можно видеть на фиг. 172 и 173, где приведены параметры  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  для целого ряда сплавов Nb.

## § 6.6. Фазовые переходы в параллельном поле для пленок с малым значением $\kappa$

В качестве последнего применения теории ГЛ обсудим, следуя Гинзбургу [21], поведение свободной энергии Гиббса и природу фазового перехода в параллельном поле для пленки из материала с низким  $\kappa$ , т.е. из материала, для которого  $\xi(T) \gg \lambda(T)$ . Как мы уже отмечали, в этом случае ситуация весьма проста: при  $d < \xi(T)$  (теперь это отвечает значительной области толщин) функция  $\psi$  не может изменяться на толщине пленки. Поскольку  $\lambda(T)$  меньше, чем  $\xi(T)$ , имеется область толщин (и температур), в которой удовлетворяется неравенство  $\lambda(T) < d < \xi(T)$ , и в этой области В и А могут изменяться на толщине пленки. Однако, в силу постоянства функции  $\psi$ , равной, скажем,  $\psi_0$ , мы можем найти в явном виде выражение для изменения В внутри пленки, а это позволяет выразить свободную энергию  $G$  как функцию  $\psi_0$  и приложенного поля  $H_0$ . Зная  $G$ , мы, конечно, можем выяснить характер фазового перехода. Фактически мы уже знаем предельные свойства для малых и больших  $d$ . При  $d < \lambda(T)$ , а также при  $d < \xi(T)$  как В, так и  $\psi$  имеют в пленке постоянное значение. Поэтому применимы вычисления, приведенные в § 6.4, и мы имеем фазовый переход второго рода с критическим полем (6.58) или, что эквивалентно, (6.62). С другой стороны, для больших  $d$  мы имеем по существу массивный сверхпроводник I рода и фазовый переход первого рода в поле  $H_{cb}$ .

Воспользуемся снова координатной системой, изображенной на фиг. 150, с осью  $z$ , направленной вдоль приложенного поля, и с осью  $x$ , перпендикулярной пленке. Выберем калибровку

$$A = \{0, A(x), 0\}. \quad (6.94)$$

Поле  $\mathbf{B}$  внутри пленки равно

$$\mathbf{B} = (0, 0, dA/dx). \quad (6.95)$$

Удобно выразить постоянное значение функции  $\psi$  через ее равновесное значение для массивного образца, а именно

$$\psi^2 = f^2 |\alpha|/\beta. \quad (6.96)$$

Уравнение Лондонов вместо (6.27) имеет тогда вид

$$\mu_0 \mathbf{J}_e = -f^2 \mathbf{A}/\lambda^2, \quad (6.97)$$

где  $\lambda$  — глубина проникновения для массивного образца. Комбинируя (6.97) с уравнением Максвелла  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e$ , получаем

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{f^2 A}{\lambda^2}. \quad (6.98)$$

Граничное условие заключается в том, что на границах пленки  $B = \mu_0 H$ , так что соответствующее решение уравнения (6.98) имеет вид

$$A = \frac{\mu_0 H_0 \lambda}{f} \frac{\text{sh}(fx/\lambda)}{\text{ch}(fd/2\lambda)}, \quad (6.99)$$

$$B = \mu_0 H_0 \frac{\text{ch}(fx/\lambda)}{\text{ch}(fd/2\lambda)}. \quad (6.100)$$

Из этих выражений для поля следует, что, если  $\psi^2$  уменьшается в  $f$  раз,  $\lambda$  увеличивается в  $1/f$  раз. Таково очевидное следствие уменьшения величины экранирующих токов.

Теперь мы должны просто вычислить свободную энергию Гиббса, определяемую выражениями (6.15) и (6.16). При  $\psi = \text{const}$  свободная энергия Гиббса равна

$$G_s - G_n = S \int \left\{ |\alpha| |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{2e^2}{m} A^2 |\psi|^2 + \frac{1}{2\mu_0} (B - \mu_0 H_0)^2 \right\} dx, \quad (6.101)$$

где  $S$  — площадь поверхности пленки. Подставляя сюда  $\psi$  из (6.96) и поля из (6.99) и (6.100), находим

$$G = \frac{G_s - G_n}{V} |\alpha|^2 / 2\beta = f^4 - 2f^2 + \left( \frac{H_0}{H_{cb}} \right)^2 \left( 1 - \frac{2\lambda}{fd} \text{th} \frac{fd}{2\lambda} \right), \quad (6.102)$$

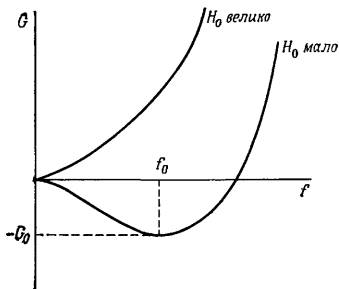
где  $V = Sd$  — объем пленки, а для введения критического поля массивного сверхпроводника  $H_{cb}$  мы воспользовались выражением (6.32).

Для отыскания свободной энергии Гиббса, являющейся функцией  $T$  и  $H_0$ , мы должны минимизировать выражение (6.102) относительно  $f$ . Полезно начать с рассмотрения  $G$  как функции  $f$  для различных фиксированных значений  $H_0/H_{cb}$ . Вообще говоря, про-

изводная  $dG/df$  равна нулю при  $f = 0$ , поскольку в  $G$  входят лишь члены с четными степенями  $f$ . Следовательно, значение  $f = 0$  (нормальное состояние) всегда соответствует локальному минимуму или локальному максимуму  $G$ . При больших  $f$  энергия  $G$  увеличивается, поскольку в этом случае доминирующим является член с  $f^4$ . Для достаточно малых полей  $H_0/H_{cB}$  можно ожидать стабильности сверхпроводящей фазы, так что значение  $f = 0$  отвечает максимуму, а минимум имеет место при некотором отличном от нуля значении  $f$ . При достаточно больших  $H_0/H_{cB}$ , наоборот, должна быть стабильной нормальная фаза, поэтому точка  $f = 0$  соответствует единственному минимуму. Такая зависимость  $G(f)$  изображена на фиг. 159.

Мы уже видели, что в достаточно тонких пленках можно ожидать фазового перехода второго рода, а фазовый переход первого рода должен наблюдаться в достаточно толстых пленках. Фактически толщина пленки  $d$  входит в выражение для  $G$  лишь в виде отношения  $d/\lambda$ .

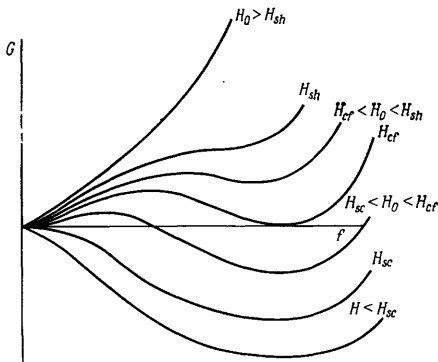
Поэтому можно полагать, что существует критическое значение  $d_{cr}/\lambda$ , ниже которого сверхпроводящий переход является фазовым переходом второго рода, а выше — фазовым переходом первого рода. Несколько внимательнее рассмотрев зависимость  $G$  от  $f$ , можно понять, как найти  $d_{cr}/\lambda$ . В случае перехода первого рода зависимость  $G(f)$  несколько напоминает зависимости для массивного сверхпроводника, изображенные на фиг. 144. С ростом  $H_0$  от нулевой величины значение  $G$  в минимуме, отвечающем сверхпроводящей фазе, увеличивается и равновесное значение  $f_0$  уменьшается (фиг. 160). При термодинамическом критическом поле  $H_{ct}$  как нормальная ( $f = 0$ ), так и сверхпроводящая фаза ( $f = f_0 \neq 0$ ) стабильны — им отвечают локальные минимумы: энергии обеих фаз при этом, конечно, равны. Здесь, как и всегда при фазовых переходах первого рода, существует возможность *переохлаждения* нормальной фазы и *перегрева* сверхпроводящей фазы. Иными словами, нормальная фаза метастабильна в области полей  $H_{sc} < H < H_{ct}$ , а сверхпроводящая фаза метастабильна в области  $H_{ct} < H < H_{sh}$ . При максимальном поле переохлаждения  $H_{sc}$  локальный минимум в точке  $f = 0$  превра-



Фиг. 159. Ожидаемое поведение  $G$  при большом и малом полях  $H_0$ .

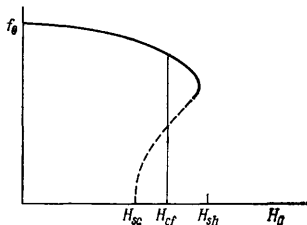
Сверхпроводящая фаза устойчива в точке  $f = f_0$ , соответствующей минимуму  $G$ ; значение  $G$  в минимуме равно энергии конденсации  $G_0$ .

щается в локальный максимум; аналогичным свойством характеризуется и максимальное поле перегрева  $H_{sh}$ . На фиг. 160 изображены соответствующие кривые зависимости  $G$  от  $f$ . Представляет



Фиг. 160. Зависимость  $G$  от  $f$  в различных полях при фазовом переходе первого рода.

также интерес зависимость  $f_0$  от  $H_0$  ( $f_0$  — значение  $f$ , соответствующее сверхпроводящей фазе). Эта зависимость изображена на фиг. 161.



Фиг. 161. Зависимость  $f_0$  от  $H_0$  при фазовом переходе первого рода.

Сплошная линия — положение локального минимума, соответствующего сверхпроводящей фазе, пунтир — положение максимума, разделяющего две возможные фазы в полях между  $H_{sc}$  и  $H_{sh}$ . В отсутствие переохлаждения или перегрева фазовый переход происходит с разрывом значения  $f$  при поле, равном  $H_{cf}$ .

Нетрудно вывести уравнения для различных критических полей. Для данного  $H_0$  значение  $f_0$ , соответствующее сверхпроводящей фазе, определяется условием

$$\partial G / \partial f = 0, \quad (6.103)$$



которое можно записать в виде

$$\left(\frac{H_0}{H_{cb}}\right)^2 = \frac{4f_0^2(f_0^2 - 1) \operatorname{ch}^2(f_0 d / 2\lambda)}{1 - (\lambda / f_0 d) \operatorname{sh}(f_0 d / \lambda)}. \quad (6.104)$$

При  $H_{cf}$  уравнение (6.103) определяет  $f_0$ ; тогда  $H_{cf}$  задается дополнительным условием

$$G = 0. \quad (6.105)$$

Поле перегрева представляет собой такое поле, при котором экстремум, задаваемый условием (6.104), превращается из минимума в максимум, поэтому дополнительное условие для определения  $H_{sh}$  имеет вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial f^2} = 0 \quad \text{при} \quad f = f_0. \quad (6.106)$$

Наконец, поле переохлаждения  $H_{sc}$  определяется условием

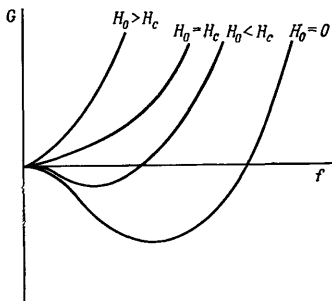
$$\frac{\partial^2 G}{\partial f^2} = 0 \quad \text{при} \quad f = 0. \quad (6.107)$$

Последнее условие легко записать в явном виде, поскольку оно соответствует обращению в нуль коэффициента при  $f^2$  в разложении  $G$  в степенной ряд. В результате получаем

$$H_{sc}/H_{cb} = 2\sqrt{6} \lambda / d. \quad (6.108)$$

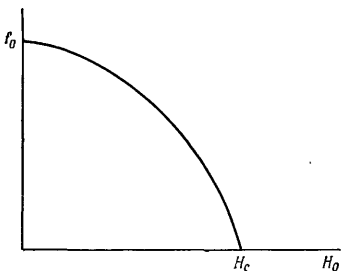
Если мы выразим  $H_{cb}$  и  $\lambda$  через параметры ГЛ  $|\alpha|$  и  $\beta$ , то получим критическое поле  $H_c$  для фазового перехода второго рода [см. (6.58)], которое совпадает с параболической частью кривой критических полей, изображенной на фиг. 151. Этого и нужно было ожидать, поскольку в обоих случаях критическое поле выводилось в предположении, что функция  $\psi$  однородна на толщине пленки и что мы имеем дело с переходом, при котором  $\psi \rightarrow 0$ .

При фазовом переходе второго рода ситуация, естественно, более проста. Зависимость  $G$  от  $f$  для различных полей в этом случае изображена на фиг. 162: с повышением  $H_0$  минимум, соответствующий сверхпроводящей фазе, передвигается к меньшим значениям  $f$  и при критическом поле  $H_c$  достигает точки  $f_0 = 0$ . Зависимость  $f_0$  от поля изображена на фиг. 163. Перегрев или переохлаждение теперь уже, конечно, невозможны. При крити-



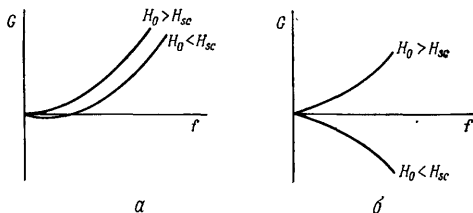
Фиг. 162. Зависимость  $G$  от  $f$  в различных полях при фазовом переходе второго рода.

ческом поле  $H_c$  максимум  $G$  при  $f = 0$  как раз совпадает с минимумом при  $f_0$ , когда  $f_0 \rightarrow 0$ , так что поле  $H_c$  по-прежнему определяется уравнением (6.107) и в явном виде — формулой (6.108).



Фиг. 163. Зависимость  $f_0$  от  $H_0$  при фазовом переходе второго рода.

Вьясним теперь, как найти критическое значение  $d_{cr}/\lambda$ , при котором меняется характер фазового перехода. Пусть внешнее поле  $H_0$  немного меньше значения  $H_{sc}$ , определяемого формулой (6.108). Если происходит фазовый переход второго рода и  $H_{sc}$  является критическим полем, то на кривой  $G(f)$  при малом значении  $f$  имеется минимум, соответствующий сверхпроводящей фазе. В случае же фазового перехода первого рода, когда  $H_{sc}$  — критическое поле переохлаждения, на кривой  $G(f)$  при малом  $f$  минимума нет. Эти две возможности изображены на фиг. 164.



Фиг. 164. Зависимость  $G(f)$  при малых значениях  $f$  в полях, чуть больших и чуть меньших  $H_{sc}$ .

а — фазовый переход второго рода; б — фазовый переход первого рода.

Разложим в ряд условие минимума (6.104) до члена второго порядка по  $f_0$ :

$$\left(\frac{H_0}{H_{cb}}\right)^2 - \frac{24\lambda^2}{d^2} = f_0^2 \frac{24\lambda^2}{d^2} \left(\frac{d^2}{5\lambda^2} - 1\right). \quad (6.109)$$

При равенстве нулю левой части уравнения получаем поле  $H_{sc}$ . Когда  $H_0$  немного меньше  $H_{sc}$ , левая часть уравнения (6.109) мала и отрицательна. Тогда уравнение (6.109) будет иметь решение для

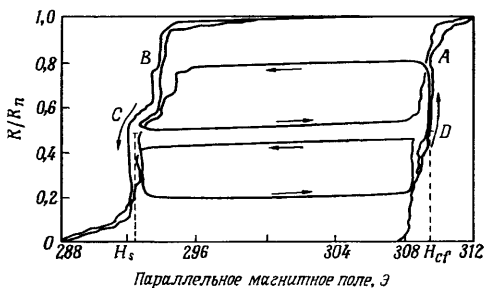
$f_0$ , если коэффициент при  $f_0^2$  отрицателен. Как мы уже видели, это и есть условие фазового перехода второго рода, поэтому

$$d_{cr} = \sqrt{5} \lambda. \quad (6.110)$$

Полезно также записать соответствующее значение критического поля, используя (6.108), а именно

$$H_{cr} = 2\sqrt{6} H_{cb} / \sqrt{5} = 2,19 H_{cb}. \quad (6.111)$$

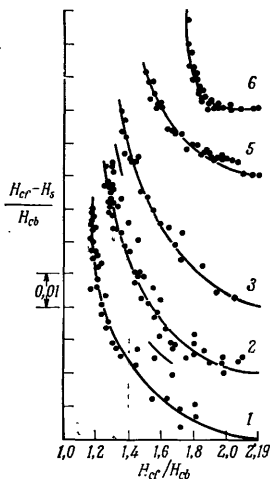
Фазовый переход первого рода имеет место, когда  $d > d_{cr}$  и  $H_{ct} < < H_{cr}$ , а для фазового перехода второго рода  $d < d_{cr}$  и  $H_{ct} > H_{cr}$ .



Фиг. 165. Определяемый по сопротивлению сверхпроводящий переход в параллельном поле в оловянной пленке толщиной 465 нм при 1,65 К [5]. Малые гистерезисные петли возникают в результате обращения поля в промежуточных точках типа C или D.

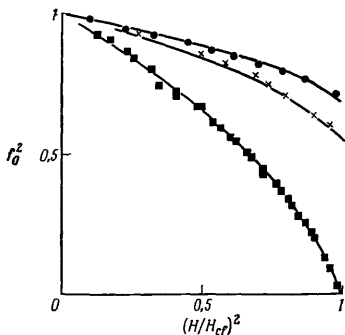
Выше мы перечислили основные предсказания, сделанные Гинзбургом [21] для пленок. Кроме того, Гинзбург получил соответствующие результаты для сферы и для цилиндра в параллельном внешнем поле. Экспериментально фазовый переход первого рода можно отличить по наличию гистерезиса. На фиг. 165 изображены кривые сверхпроводящих переходов в плоской пленке, измеряемые по сопротивлению в возрастающем и убывающем параллельном полях. Наличие или отсутствие гистерезиса находится в хорошем согласии с (6.111). Это видно из фиг. 166, где для ряда образцов построены кривые зависимости величины гистерезиса от отношения  $H_{ct}/H_{cb}$ , т.е. от температуры. С другой стороны, величина гистерезиса  $H_{ct} - H_s$  обычно меньше (иногда даже на порядок величины) теоретического максимального значения  $H_{sh} - H_{sc}$ . Причиной этого, несомненно, является наличие в пленке дефектов, служащих центрами образования зародышей нормальной фазы.

Зависимость  $f_0$  от  $H_0$  (см. фиг. 161 и 163) исследовалась с помощью туннельных экспериментов (Дуглас [12], Колье и Кемпер [8]). Исходные данные представляли собой зависимость проводимости туннельного контакта  $dI/dV$ , скажем, от поля  $H_0$ . Эти данные обрабатывались с помощью выражения БКШ для  $dI/dV$ , где энергетическая щель  $\Delta(T)$  заменялась на  $\Delta(H_0, T) = f_0 \Delta(T)$ . Таким образом определялась зависимость  $f_0$  от  $H_0$ . Такая обработка результатов может вызвать некоторые возражения с точки зрения микротеории, но вносимые ошибки, вероятно, не велики. Пример приведен на фиг. 167, где экспериментальные данные сравниваются с теоретической кривой, построенной по формуле (6.104). Здесь ясно видно различие между фазовыми переходами первого и второго рода; видно также, что экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими кривыми. На фиг. 168 отражены результаты аналогичного анализа экспериментальных данных по затуханию ультразвука.



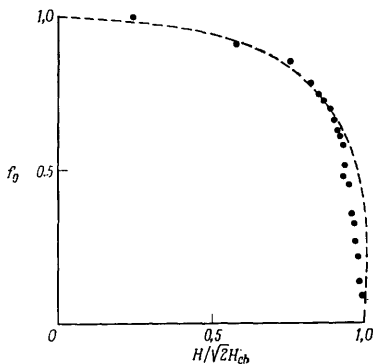
Фиг. 166. Величина гистерезиса при измерениях сверхпроводящего перехода по сопротивлению [6].

Чтобы получить полное представление о возможных фазовых переходах в пленках в параллельном поле, мы должны объединить результаты настоящего параграфа, которые применимы к пленкам с малыми значениями  $\kappa$ , с вычислениями критических полей для фазовых переходов второго рода при произвольном  $\kappa$  (см. § 6.4). Удобно изобразить возможные фазовые переходы в виде фазовой диаграммы, где по осям отложены величины  $\kappa$  и  $d/\lambda(T)$  (фиг. 169). Арп и др. [3] первые предложили воспользоваться такой диаграммой, которую позже несколько уточнили Гюйо и др. [31]. Сформулируем результаты настоящего параграфа. При малых  $\kappa$  фазовый переход первого рода имеет место, когда  $d/\lambda > \sqrt{5}$ . В пределе массивного образца, когда отношение  $d/\lambda$  велико, фазовый переход первого рода имеет место при  $\kappa < 0,42 = \sqrt{2/4,69}$ . При  $0,42 < \kappa < 0,71$  в пределе массивного образца имеем  $H_{c2} < H_{cb} < H_{c3}$ ; это означает, что с понижением поля сначала происходит фазовый переход второго рода в поверхност-



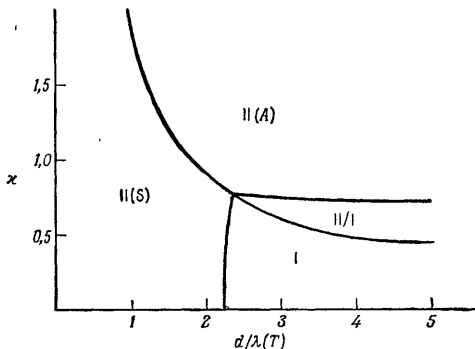
Фиг. 167. Сравнение результатов туннельных измерений (см. [8])  $f_0$  с теорией для трех различных образцов [48].

Теоретические кривые построены по формуле (6.104) с параметром  $d/\lambda_{\parallel}$  определенным по значению критического поля.



Фиг. 168. Зависимость  $f_0$  от  $H_0$ , полученная из данных по затуханию ультразвуковой поверхностной волны в пленке толщиной 125 нм при  $T = 5$  К [34].

тном слое, затем переход первого рода в поле  $H_{сб}$ . На диаграмме эта область обозначена II/I. При  $\kappa > 0,71$  в пределе массивного образца имеем  $H_{сб} < H_{с2} < H_{с3}$ , соответственно при  $H_{с3}$  происходит фазовый переход второго рода в поверхностном слое, а затем фазовый переход второго рода всего образца в поле  $H_{с2}$ . Эта область обозначена на диаграмме как область II(A). Наконец,



Фиг. 169. Фазовая диаграмма критических полей тонкой пленки в параллельном поле, построенная на основе диаграммы из работы [31].

как мы видели в § 6.4, характер волновой функции в полях, лежащих ниже значения, соответствующего переходу второго рода, зависит от параметра  $\epsilon = d^2/4\xi^2(T)$ . При  $\epsilon < \epsilon_{сг} = 0,82$  волновая функция симметрична, а при  $\epsilon > \epsilon_{сг}$  она асимметрична, и фактически возникает состояние со «сдавленными» вихрями (см. фиг. 154). Кривая  $\epsilon = \epsilon_{сг}$  на фазовой диаграмме соответствует кривой  $d/\lambda(T) = 1,8/\kappa$ ; мы обозначаем симметричную и асимметричную области соответственно как II(S) и II(A).

## § 6.7. Связь теории ГЛ с микроскопической теорией

Выше мы решали с помощью теории ГЛ ряд проблем. При этом вычисления основывались целиком и полностью на форме свободной энергии, постулированной Гинзбургом и Ландау в 1950 г. [23], задолго до того, как была развита микротеория. Фактически все выведенные нами результаты были уже известны до появления статьи БКШ (существенным исключением является

лишь предсказание образования зародышей сверхпроводящей фазы в поверхностном слое при поле  $H_{c3}$ . Когда была сформулирована микроскопическая теория, естественно, возник вопрос о справедливости теории ГЛ (см., например, примечание в конце статьи Гинзбурга [21]). Теорию БКШ в ее первоначальной форме нелегко было обобщить на случай, когда внешнее магнитное поле вызывает пространственное изменение параметра порядка. Однако Горьков [28] перевел теорию БКШ на язык функций Грина и показал, что такой путь позволяет достаточно легко рассматривать задачи, в которых упорядочение неоднородно в пространстве, т. е. зависит от координат. Массивный сверхпроводник, как мы знаем, характеризуется энергетической щелью  $\Delta$ . Первый результат Горькова заключается в том, что, вообще говоря,  $\Delta$  нужно рассматривать как функцию координат  $\Delta = \Delta(\mathbf{r})$ . Энергетическая щель, измеренная, например, по инфракрасному поглощению, характеризует образец в целом, поэтому называть  $\Delta(\mathbf{r})$  меняющейся в пространстве энергетической щелью неточно и фактически ошибочно. Ее обычно называют парным потенциалом, по аналогии с функцией потенциальной энергии для элементарных возбуждений. Этот вопрос подробно рассмотрел де Жен [10].

В следующей статье Горьков [29] показал, что вблизи критической температуры можно разложить уравнения для функций Грина в ряд по степеням  $\Delta(\mathbf{r})$ . В результате он получил для  $\Delta(\mathbf{r})$  уравнение, по существу совпадающее с уравнением ГЛ для  $\psi(\mathbf{r})$ , причем для перехода к привычной нормировке функции  $\psi$  нужно было лишь умножить  $\Delta(\mathbf{r})$  на постоянный множитель (напомним, что обычная нормировка определяется выбором коэффициента  $1/2m$  у градиентного члена). Аналогично уравнение для сверхпроводящего тока также совпадает с обычным уравнением ГЛ. Таким образом, Горьков смог показать, что теория ГЛ справедлива для некоторой температурной области. Последующие работы были посвящены более детальному исследованию области применимости теории ГЛ главным образом на основе формализма Горькова; мы резюмируем основные полученные результаты. Несомненно, благодаря тому, что результаты ГЛ непосредственно могут быть получены из микротемпературной теории ГЛ по-прежнему играет важную роль. Формализм Горькова эффективен и изящен, но требует знания теории многих тел. Хорошим введением в этот формализм может служить статья Абрикосова и др. [2], а также глава Амбегаокара в книге [41].

Область применимости теории ГЛ в основном ясна из самой структуры соответствующих уравнений. Для применения этих уравнений должны быть выполнены два условия:

А) Энергетическая щель  $\Delta(\mathbf{r})$  мала.

Б) Электродинамика локальна.

В свете обсуждения, проведенного в § 3.4 и приведшего к (3.34),

мы можем записать условие «Б» в виде

$$\xi_0 \ll \lambda(T) \quad \text{чистый металл,} \quad (6.112)$$

$$l \ll \lambda(T) \quad \text{сплав с } l \ll \xi_0. \quad (6.113)$$

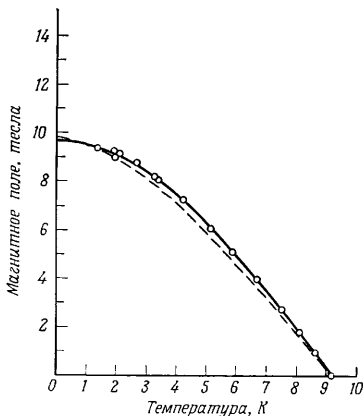
В первой статье Горькова [29], посвященной чистым сверхпроводникам, для обеспечения выполнения условий «А» и «Б» было введено требование  $T_c - T \ll T_c$ . Фактически в случае чистого металла условие «Б» является весьма жестким; соответствующий температурный интервал, например, для Sn составляет всего около 0,1 К (Гинзбург [21]). В случае сплавов ситуация значительно более благоприятна; как мы видели ранее, лондоновское условие (6.113) для сплавов может выполняться при всех температурах. В статье Горькова [30], посвященной сплавам, условие  $T_c - T \ll T_c$  было использовано лишь для выполнения условия «А».

Позже де Жен [9] и Маки [39] установили, что в случае сплавов условие «А» удовлетворяется при фазовом переходе второго рода в окрестности критического поля типа  $H_{c2}$ . Поскольку для сплавов условие «Б» не является ограничивающим, можно получить одну из форм теории ГЛ для области вблизи  $H_{c2}$ ; единственная разница заключается в том, что температурная зависимость параметров  $|\alpha|$  и  $\beta$  уже не так проста, как в теории Ландау [выражения (6.6) и (6.7)]. Самый простой случай имеет место, когда  $l \ll \xi_0$  (предел грязного сверхпроводника). Критическое поле  $H_{c2}$  определяется только параметром  $|\alpha|$  согласно (6.43). Теоретическая форма температурной зависимости  $H_{c2}$  в пределе грязного сверхпроводника вместе с некоторыми экспериментальными данными изображена на фиг. 170. Обобщение линейной теории ГЛ на все температуры означает, что все результаты линейной теории, полученные в § 6.4, остаются справедливыми в случае сплавов при всех температурах. В частности,  $H_{c3} = 1,69 H_{c2}$  и «универсальная кривая» критических полей для пленок из сплавов (см. фиг. 151) справедлива для всех температур. Экспериментальные результаты, нанесенные на эту кривую, фактически и были получены в широком температурном интервале. В обобщенной линейной теории обычно используется параметр  $\kappa_1(T)$ , входящий, например, в (6.92). При этом принимается, что  $H_{c2}$  характеризуется температурной зависимостью Гортнера — Казимира  $H_{c2} \sim 1 - t^2$ . Температурная зависимость  $H_{c2}$ , изображенная на фиг. 170, соответствует изменению отношения  $\kappa_1(T)/\kappa$  от 1 при  $T_c$  до 1,20 при  $T = 0$ .

Кроме линейного члена Маки [39] нашел в пределе грязного сверхпроводника также коэффициент при члене  $|\Delta(r)|^2 \Delta(r)$ , т. е. параметр  $\beta$  для всех температур; позже Кароли и др. [7] уточнили его результаты. Вычисления Абрикосова изменений при этом не претерпевают, так что полученные в § 6.5 выводы в пределе грязного сверхпроводника справедливы для всех температур. Един-



ственное изменение, о котором мы уже упоминали, заключается в том, что температурная зависимость параметра  $\kappa_2$  [определяющего наклон кривой намагничивания (6.93)] несколько отличается от соответствующей зависимости параметра  $\kappa_1(T) = H_{c2}/\sqrt{2}H_{cB}$ . Это связано с тем, что параметр  $\kappa_2$  просто пропорционален  $\beta^{1/2}$ . Предсказываемая теорией форма зависимости изображена на фиг. 171.

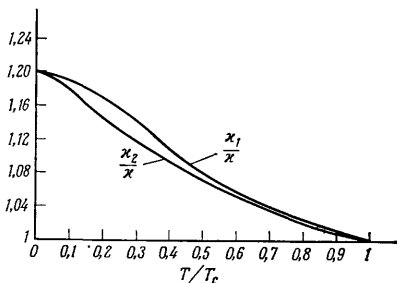


Фиг. 170. Сравнение верхнего критического поля сплава Nb — 37 ат.% Ti с теоретической кривой (пунктир) в пределе грязного сверхпроводника [44].

Выше мы привели главные результаты для предельного случая грязного сверхпроводника, с которым часто встречаемся при проведении экспериментов со сплавами. Мы можем резюмировать ситуацию в отношении применимости теории следующим образом. В окрестности  $T_c$  первоначальная теория ГЛ справедлива для всех полей; теперь эту теорию часто называют теорией ГЛАГ в связи с существенным вкладом, внесенным в нее Абрикосовым и Горьковым. Проведенное Маки и де Женом обобщение теории ГЛ справедливо при всех температурах для полей  $H$ , близких к  $H_{c2}$  ( $H_{c2} - H \ll H_{c2}$ ); температурная зависимость параметров  $\kappa$  соответствует фиг. 171.

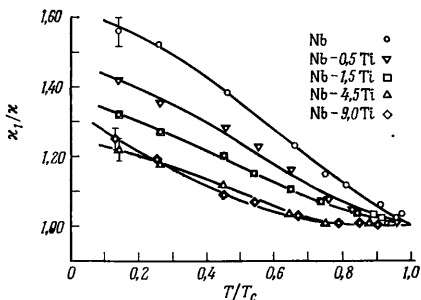
Вдали от предельного случая грязного сверхпроводника, для которого  $l \ll \xi_0$ , ситуация сильно усложняется. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, пока электродинамика остается локальной, уравнения ГЛ справедливы для малой щели  $\Delta(r)$ , но коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  изменяются, поскольку некоторые

упрощения, сделанные для предельного случая грязного сверхпроводника, здесь уже невозможны. Во-вторых, для чистых сверхпроводников II рода (Nb или V) в большей части температурной



Фиг. 171. Предсказываемые кривые температурной зависимости параметров  $\kappa_1$  (связанного с полем  $H_{c2}$ ) и  $\kappa_2$  (связанного с намагниченностью) в пределе  $l \ll \xi_0$  (грязный сверхпроводник) [7].

области электродинамика уже не локальна, поэтому теорию ГЛ нельзя применять ни в какой форме. Однако с помощью вычис-

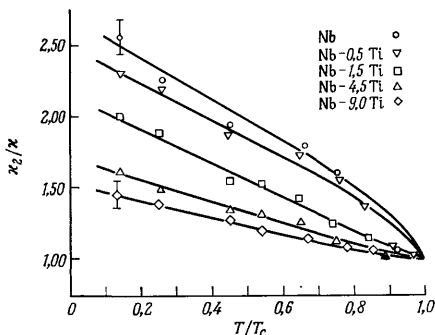


Фиг. 172. Нормированная функция  $\kappa_1(t)/\kappa$  для ряда отожженных образцов из сплава Nb—Ti [20].

Значение нормировочного параметра  $\kappa$  равно предельному значению  $\kappa_1$  при  $t \rightarrow 1$ . Экспериментальные данные (так же, как и на фиг. 173) получены из измерений намагниченности.

лений на базе микротемории можно получить значения  $H_{c2}$  и намагниченности вблизи  $H_{c2}$ ; их принято выражать через параметры  $\kappa_1(T)$  и  $\kappa_2(T)$ , используя выражения (6.92) и (6.93). Наиболее

подробные вычисления температурной зависимости параметров  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  произвел Эйленбергер [13]. Его основной результат состоит в том, что оба параметра,  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , увеличиваются с температурой быстрее, чем в пределе грязного сверхпроводника, и что



Фиг. 173. Нормированная функция  $\kappa_2(t)/\kappa$  для таких же образцов, что и на фиг. 172 [20].

Предельное значение  $\kappa_2$  при  $t \rightarrow 1$  совпадает с предельным значением  $\kappa_1$ .

для всех температур  $\kappa_2(T) \geq \kappa_1(T)$ . Однако точная форма зависимости определяется отношением  $l/\xi_0$ , а также степенью анизотропии при рассеянии электронов на отдельных примесных центрах. На фиг. 172 и 173 приведены некоторые результаты измерений для ряда ниобиевых сплавов. Экспериментальные данные качественно согласуются с теорией, хотя обычно оба  $\kappa$ -параметра растут быстрее, чем предсказывает теория. Подробнее этот вопрос обсуждается в главе, написанной Серином, в книге [41].

## § 6.8. Уравнения Гинзбурга—Питаевского для гелия II

Гинзбург и Питаевский (ГП) с помощью теории фазовых переходов второго рода Ландау рассмотрели жидкий гелий вблизи  $\lambda$ -точки. Как и в случае сверхпроводников, в качестве параметра порядка, изменяющегося при переходе, была использована макроскопическая волновая функция  $\psi$ . Нормировка  $\psi$  была выбрана таким образом, чтобы сверхтекучую плотность можно было представить в виде

$$\rho_s = m_k |\psi(\mathbf{r})|^2, \quad (6.114)$$

что, конечно, совпадает с выбором, который мы сделали в гл. 1

и 2. Вывод уравнения ГП для  $\psi$  аналогичен выводу уравнения ГЛ (6.18) (см. § 6.3), но свободен от усложнений, связанных с магнитными свойствами сверхпроводников.

ГП рассмотрели ситуацию для покоящейся нормальной жидкости и предположили, что плотность свободной энергии можно разложить в ряд по степеням  $|\psi|^2$  и  $|\nabla\psi|^2$ , а именно

$$f(\mathbf{r}) = f_1 + \alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{\hbar^2}{2m_4} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2, \quad (6.115)$$

где  $f_1$  — плотность свободной энергии в He I. Заметим, что нет существенной разницы, является ли  $f(\mathbf{r})$  плотностью свободной энергии Гельмгольца или энергии Гиббса. Чтобы найти для данных температуры и давления устойчивое состояние, нужно минимизировать относительно волновой функции полную свободную энергию

$$F = \int f(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (6.116)$$

При минимизации относительно  $\psi^*$  соответствующее уравнение Эйлера — Лагранжа имеет форму (6.17)

$$\frac{\partial f}{\partial \psi^*} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial (\nabla_j \psi^*)} = 0. \quad (6.117)$$

Подставив сюда (6.115), ГП получили следующее уравнение:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_4} \nabla^2 \psi + \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi = 0, \quad (6.118)$$

которое совпадает с уравнением ГЛ (6.18), если приравнять нулю векторный потенциал  $\mathbf{A}$ .

Следуя теории Ландау, ГП предположили, что коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  в разложении для свободной энергии можно также разложить в ряд по степеням  $(T - T_\lambda)$ ; в частности, они положили

$$\alpha = A (T - T_\lambda), \quad (6.119)$$

где  $A > 0$ . Таким образом,  $\alpha < 0$  при  $T < T_\lambda$ . Как и в случае сверхпроводника, в уравнение (6.118) можно ввести длину когерентности (корреляционную длину) для He II:

$$\xi(T) = \hbar^2 / 2m_4 |\alpha|. \quad (6.120)$$

ГП оценили значение постоянной  $A$  в (6.119), используя данные о теплоемкости по обе стороны от  $T_\lambda$ , а также наклон кривой  $\rho_s(T)$  в точке  $T = T_\lambda$ . Тогда, комбинируя (6.119) и (6.120), получаем

$$\xi(T) \approx 4 \cdot 10^{-10} (T_\lambda - T)^{-1/2} \text{ м}. \quad (6.121)$$

Длина когерентности в He II определяет минимальные размеры области, в которой происходят заметные изменения  $|\psi|$  (или  $\rho_s$ ).

Другими словами,  $\xi$  должна совпадать с длиной восстановления (healing length) или радиусом  $a_0$  сердцевин вихря, который мы ввели в гл. 4. Мы видим, что по порядку величины  $\xi(0)$  совпадает со значением, полученным для  $a_0$  из экспериментов с вихревыми кольцами (см. п. 4.2.5). Таким образом, за исключением области непосредственно вблизи  $\lambda$ -точки, длина  $\xi(T)$  сравнима по величине с межатомным расстоянием, т. е. имеет место ситуация, когда теория Ландау неприменима, ибо в этом случае нельзя разлагать свободную энергию в степенной ряд, сохраняя лишь малое количество членов ряда. Длина когерентности превышает межатомное расстояние на порядок величины или больше, когда  $(T_\lambda - T) < < 10^{-2}K$ , но в этой температурной области доминируют флуктуации (см. § 6.10) и теория Ландау снова нарушается. По-видимому, уравнение ГП (6.118) в He II непригодно ни при какой температуре<sup>1)</sup>.

Несмотря на это обстоятельство, применение теории ГП в определенных случаях дает результаты, которые подтверждаются, по крайней мере качественно, экспериментами при температурах существенно ниже  $T_\lambda$ . Например, ГП использовали уравнение (6.118) в задаче о пленке He II, приняв граничное условие, согласно которому у твердой стенки и на свободной поверхности  $\psi = 0$  (ср. фиг. 43). При фиксированной температуре существует минимальная толщина пленки  $d_m = \pi\xi(T)$ , ниже которой нет решения с  $|\psi| \neq 0$ , т. е.  $\rho_s = 0$  при толщине, меньшей  $d_m$ . Одновременно этот результат свидетельствует о том, что в тонких пленках или узких каналах [см. задачу (6.19)] температура появления сверхтекучего течения понижается ниже  $T_\lambda$  в согласии с фактами, хорошо известными из экспериментов (см. фиг. 36, 41, 42). ГП использовали также уравнение (6.118) для отыскания изменения  $|\psi|$  вблизи оси вихря.

Мамаладзе и Чешвили [40] рассмотрели случай сверхтекучего течения через канал, модифицировав уравнение (6.118). Они добавили член, зависящий от  $(\nabla S)^2$  (где  $S$  — фаза параметра порядка) и, следовательно, от  $v_s^2$ . Согласно полученному ими результату, существует возможность наблюдения в He II эффекта Джозефсона на постоянном токе (см. § 5.5).

<sup>1)</sup> Как мы уже отмечали в примечании на стр. 222, сделанное в тексте утверждение относится лишь к первоначальному варианту теории ГП, в котором использовалось также разложение (6.119). Обобщенная же теория ГП (см. [51\*\*] и указанную там литературу) пригодна, по крайней мере в принципе, практически во всей области температур, отстоящих от  $\lambda$ -точки не более чем примерно на 0,1 K. При этом нужно отметить, что результаты первоначальной теории ГП, не содержащие в явном виде температурной зависимости, остаются, вообще говоря, справедливыми и в обобщенной теории [это относится, например, к приводимому ниже в тексте соотношению  $d_m = \pi\xi(T)$ ]. — Прим. ред.

Питаевский [42] обобщил исходную теорию ГП на нестационарный случай и учел возможность течения нормальной части жидкости, добавив к полной энергии кинетическую энергию нормальной компоненты жидкости. При этом получается следующее выражение для плотности свободной энергии:

$$f'(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m_4 \left| \left( -\frac{i\hbar}{m_4} \nabla - \mathbf{v}_n \right) \psi \right|^2 + f_0(|\psi|^2), \quad (6.122)$$

где  $f_0$  — плотность свободной энергии стационарной жидкости в равновесном состоянии. Халатников [36] обсудил вопрос о минимизации  $f'(\mathbf{r})$ ; при этом он получил модифицированные уравнения двухжидкостной модели, которые должны быть справедливы вблизи  $\lambda$ -точки. С помощью этих уравнений он вывел формулу, описывающую дисперсию первого звука и затухание второго звука вблизи  $T_\lambda$ , причем констатировал хорошее согласие с экспериментальными данными<sup>1)</sup>.

## § 6.9. Нарушенная симметрия

Два последних параграфа главы мы посвятим обсуждению некоторых общих свойств, характерных для фазовых переходов в сверхпроводящее и сверхтекучее состояния, а также для других фазовых переходов. Сейчас сосредоточим внимание на фазе  $S$  сверхтекучей волновой функции  $\psi$ . Строго говоря, этот параграф не имеет отношения к главе, посвященной теории ГЛ, поскольку мы будем пользоваться общими формулировками, не ограничивая себя температурной областью, в которой справедлива теория ГЛ. Однако для конкретности обсуждения удобно в качестве примера использовать именно теорию ГЛ.

Начнем с того, что у изолированного «образца» (He-II или сверхпроводника) значение фазы  $S$  одинаково по всему образцу (объему), но свободная энергия от величины  $S$  не зависит. Это в явном виде отражено в теории ГЛ, где выражение для свободной энергии (6.10) не зависит от  $S$ . Таким образом, имеется не одно состояние равновесия, а целая их совокупность со всеми возможными значениями  $S$ . Состояния, для которых фаза  $S$  изменяется в пространстве, например смешанное состояние, не являются исключением, поскольку замена  $S(\mathbf{r}) \rightarrow S(\mathbf{r}) + S_0$  (где  $S_0$  — постоянная) не изменяет свободную энергию. В этом случае ансамбль воз-

<sup>1)</sup> Уравнение (6.118), если считать в нем функцию  $\psi$  комплексной, как это и имеет место в общем случае (в частности, при наличии скорости  $v_s = \hbar/m_4 \nabla S$ ), не нуждается в добавлении каких-то членов, пропорциональных  $(\nabla S)^2$ . Авторы книги, по-видимому, имели в виду необходимость добавлять такой член, если необоснованно считать в (6.118) функцию  $\psi$  вещественной. Что касается статьи [36], то, по нашему мнению (см. [51\*\*]), содержащаяся в ней критика работы [42] несправедлива и правильна именно система уравнений, полученная Питаевским [42]. — *Прим. ред.*

возможных состояний отвечает всем значениям  $S_0$ . Аналогичная ситуация имеет место и в обычной теории Ландау: из фиг. 141 можно видеть, что  $+\phi$  и  $-\phi$  дают одну и ту же свободную энергию. Теперь мы убедимся, что такая ситуация является общей для всех переходов в упорядоченную фазу.

Рассмотрим, как мы это уже делали в § 6.2, модельную ферромагнитную систему. Возьмем решетку с закрепленными в ее узлах электронными спинами, каждый из которых связан с соседним спином силами взаимодействия. В реальной магнитной системе силы обменного взаимодействия являются более или менее сложной функцией расстояния между спинами и их относительной ориентации. Упростим ситуацию, учитывая только взаимодействие между ближайшими соседями в узлах решетки и считая взаимодействие столь анизотропным, что оно связывает только  $z$ -компоненты спинов. Таким образом, мы приходим к так называемой модели Изинга, для которой гамильтониан в явном виде можно записать так:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{(i,j)} \sigma_z^i \sigma_z^j, \quad (6.123)$$

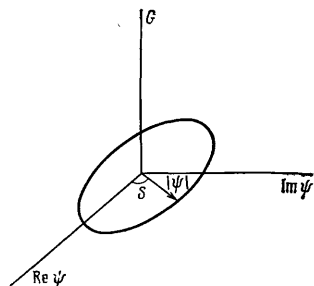
где суммирование производится только по ближайшим соседям. При взаимодействии (6.123) соседним спинам энергетически выгодно ориентироваться параллельно, поэтому в основном состоянии при  $T = 0$  направление всех спинов одинаково<sup>1</sup>). Однако, так же как и в теории Ландау, существует не одно основное состояние, а два: спин может быть направлен либо вверх, либо вниз. Каждое индивидуальное основное состояние, скажем состояние с направленными вверх спинами, описывается как состояние с *нарушенной симметрией*, поскольку такое основное состояние не обладает симметрией, свойственной гамильтониану  $\mathcal{H}$ . Конкретно при обращении направления оси  $z$  гамильтониан  $\mathcal{H}$  не изменяется, в то время как основное состояние с направленными вверх спинами перейдет в состояние со спинами, направленными вниз. Таким образом, ансамбль (спины вверх и спины вниз) сохраняет полную симметрию гамильтониана.

При повышении температуры некоторые спины меняют направление на обратное и средний спин  $\langle \sigma_z \rangle$  уменьшается. Среднее значение  $\langle \sigma_z \rangle$ , пропорциональное спонтанной намагниченности, в конце концов при температуре Кюри  $T_c$  обращается в нуль (см. фиг. 138). Выше  $T_c$  магнит находится в парамагнитной фазе, спонтанная намагниченность которой равна нулю. Парамагнитная фаза не обладает нарушенной симметрией: она не изменяется при перемене направления оси  $z$ , поэтому ее симметрия соответствует

<sup>1</sup>) Речь идет о ферромагнитном взаимодействии, для которого в (6.123) параметр  $J > 0$ . — *Прим. ред.*

полной симметрии гамильтониана. Мы можем тогда рассматривать фазовый переход при понижении температуры ниже  $T_c$  как переход из неупорядоченной фазы в упорядоченную фазу с характеризующей ее нарушенной симметрией.

Вернемся теперь к фазовому переходу в сверхтекучее состояние. Мы уже отмечали, что свободная энергия сверхтекучей фазы



Фиг. 174. Свободная энергия одинакова для всех значений фазы  $S$ .

также называть калибровочным преобразованием. Очевидно, что гамильтониан при калибровочном преобразовании остается неизменным, а состояние с фиксированной фазой  $S$  меняется. Таким образом, нарушенная симметрия тесно связана с калибровочной симметрией. Заметим, наконец, что ансамбль состояний со всеми возможными значениями  $S$  при калибровочном преобразовании не меняется, т. е. он так же, как и гамильтониан, симметричен относительно калибровки.

## § 6.10. Флуктуационные эффекты

При обсуждении фиг. 140 мы уже кратко отметили, что фазовый переход типа Ландау очень чувствителен к флуктуациям. Теперь обсудим это подробнее. Равновесное значение  $\phi_0$  параметра порядка  $\phi$  было определено как значение, при котором свободная энергия  $F$  минимальна. Из элементарной статистической механики известно, что вероятность нахождения системы с данным значением  $\phi$  пропорциональна  $\exp\{-F(\phi)/k_B T\}$ . Таким образом,  $\phi_0$  не единственное возможное значение  $\phi$ , а просто наиболее вероятное значение. В результате тепловых флуктуаций  $\phi$  меняется вблизи значения  $\phi_0$ . В теории Ландау для упрощения задачи эти изменения не учитываются. Вблизи  $T_c$  большое изменение  $\phi$  соответствует малому изменению  $F$  (см. фиг. 138 и 140), поэтому

не зависит от фазы  $S$  и что существует ансамбль различных состояний, соответствующих разным значениям  $S$  (фиг. 174). Можно ожидать, что состояние с одним определенным значением  $S$  есть состояние с нарушенной симметрией. Поэтому рассмотрим, какова симметрия, которой обладает гамильтониан, но которая отсутствует в состоянии с фиксированной фазой  $S$ . Согласно (3.22), изменение  $S$  в сверхпроводнике соответствует калибровочному преобразованию. Аналогично мы можем изменение  $S$  в He II



можно ожидать, что достаточно близко к  $T_c$  флуктуации  $\phi$  оказываются существенными и теория Ландау становится непригодной. Для оценки протяженности температурной области вблизи  $T_c$ , в которой доминируют флуктуационные эффекты, мы можем воспользоваться соображением, впервые выдвинутым Гинзбургом [22]. При флуктуационном переходе в сверхтекучее состояние требуется, чтобы параметр порядка  $\psi$  отклонился от нулевого значения, которое он имеет в нормальном состоянии. Характерная длина для изменений  $\psi$  равна  $\xi(T)$ ; поэтому флуктуация, т. е. область с  $\psi \neq 0$ , занимает минимальный объем (в массивном образце) порядка  $\xi^3(T)$ . Энергия, необходимая для возникновения флуктуации, имеет порядок  $k_B T$ , следовательно, флуктуационные эффекты доминируют в температурной области, для которой

$$k_B T > (F_n - F_s) \xi^3. \quad (6.124)$$

Поскольку разность  $F_n - F_s$  пропорциональна  $(T - T_c)^2$ , а величина  $\xi^3$  пропорциональна  $(T - T_c)^{-3/2}$ , правая часть этого неравенства пропорциональна  $(T - T_c)^{1/2}$ .

Из (6.124) можно видеть, что флуктуационные эффекты более существенны для материалов с малой длиной когерентности  $\xi$ . Полагают, что качественное различие между фазовыми переходами в He II и в сверхпроводящее состояние является следствием того, что длина когерентности в He II лишь порядка 1 нм, тогда как в сверхпроводнике она значительно больше. Численная оценка температурного интервала  $\Delta T$ , в котором существуют флуктуации, дает для He II (см. задачу 6.20) величину  $\Delta T \sim 0,5$  К, что находится в хорошем согласии с шириной  $\lambda$ -аномалии (см. фиг. 4). Наоборот, в случае чистого сверхпроводника значение  $\Delta T$  очень мало, что согласуется с «идеальным» разрывом теплоемкости при переходе в сверхпроводящее состояние (см. фиг. 12). Отметим также следующее обстоятельство. Несмотря на то, что для сверхпроводников можно ожидать лишь малых флуктуационных эффектов, согласно неравенству (6.124), эти эффекты могут играть более заметную роль в случае сплавов, поскольку  $\xi$  уменьшается с уменьшением средней длины свободного пробега  $l$ .

Аналогия с магнитной системой (см. § 6.9) приводит к интересному заключению, касающемуся фазового перехода в сверхпроводящее состояние. Магнитная восприимчивость  $\chi$  магнитного материала при температуре значительно выше температуры Кюри  $T_c$ , согласно закону Кюри — Вейсса, равна

$$\chi = \chi_0 T_c / (T - T_c), \quad (6.125)$$

где  $\chi_0$  — постоянная. С приближением  $T$  к  $T_c$  восприимчивость становится очень большой. Это происходит в силу того, что при приближении  $T$  к  $T_c$  система спинов постепенно переходит в состояние со спонтанной ориентацией и спины все «охотнее» поворачи-

чиваются вдоль приложенного поля. Расходимость, т. е. неограниченное возрастание величины  $\chi$ , указывает на возникновение фазового перехода.

То же самое происходит и со сверхпроводником; здесь выше  $T_c$  имеет место расходимость проводимости на постоянном токе. Вычислить этот эффект можно лишь на базе микротeorии, причем пока еще не совсем ясно, как нужно проводить вычисления. Форма расходимости зависит от размерности системы, причем

$$\sigma - \sigma_N = A \left( \frac{T_c}{T - T_c} \right)^n. \quad (6.126)$$

Здесь показатель степени  $n$  равен  $1/2$  для массивного образца,  $1$  для пленки и  $3/2$  для проволоки, а  $\sigma_N$  — электропроводность в нормальном состоянии. В данном случае термин «пленка» означает следующее. Понятие о длине когерентности  $\xi(T)$  можно распространять на область температур выше  $T_c$ , причем функция  $\xi(T)$  симметрична относительно  $T_c$ , т. е.

$$\xi(T) \sim |T - T_c|^{-1/2} \quad (6.127)$$

При этом под «пленкой» подразумевается образец, один из размеров которого мал по сравнению с  $\xi(T)$ .

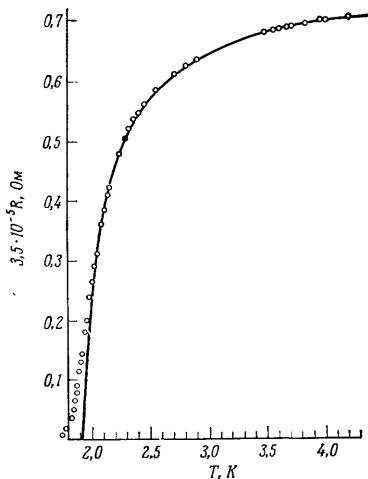
Большинство экспериментов было посвящено изучению пленок. В оригинальной теории Асламазова и Ларкина [4] для константы  $A$  в (6.126) было получено выражение

$$A = e^2/16\hbar d, \quad (6.128)$$

где  $d$  — толщина пленки. Чтобы наблюдать «парапроводимость», описываемую формулой (6.126), необходимо работать с очень грязными пленками. Правда,  $A$ , согласно (6.128), не зависит от средней длины свободного пробега  $l$ , но возможность наблюдения эффекта определяется отношением  $(\sigma - \sigma_N)/\sigma_N$ , которое растет с уменьшением  $l$  (Гловер [25]). На фиг. 175 изображен измеренный по сопротивлению сверхпроводящий переход гранулированной пленки Al. Пленка напылялась в атмосфере кислорода, чтобы обеспечить образование между гранулами слоя окиси. Экспериментальные результаты такого типа обычно согласуются с температурной зависимостью вида (6.126) и иногда по величине находятся в соответствии с (6.128). Однако эти результаты могут быть подвергнуты критике (Тестарди [47]) на том основании, что в такой пленке критическая температура  $T_c$  изменяется от гранул к грануле.

Электропроводность не единственное свойство, обнаруживающее сингулярность при приближении  $T$  к  $T_c$ . В силу идеального диамагнетизма сверхпроводников I рода, имеется также сингулярность в намагниченности. Эффект очень слаб, но его

измеряли Голлуб и др. [26, 27, 50\*] с помощью сквида в массивных образцах чистого индия. На фиг. 176 приведен пример изменения намагниченности выше  $T_c$ <sup>1)</sup>.

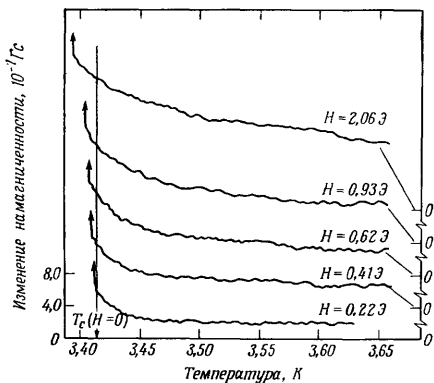


Фиг. 175. Измеренный по сопротивлению сверхпроводящий переход в гранулированной пленке Al с «длиной свободного пробега»  $l_{\text{eff}} = 0,2 \text{ \AA}$  (такому значению соответствует сопротивление в нормальном состоянии) [45].

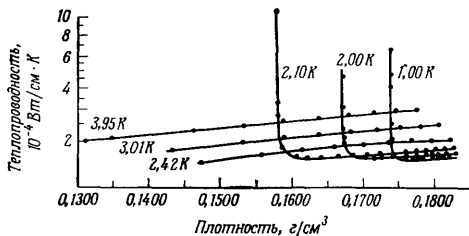
Теоретическая кривая построена по формуле (6.126) при  $n = 1$  и температуре  $T_c$ , рассматриваемой как свободный параметр. Значение  $A = 0,77 A_{\text{th}}$ , где  $A_{\text{th}}$  определяется по формуле (6.128).

Можно ожидать, что в жидком гелии вблизи  $T_\lambda$  флуктуации приведут к расходимости различных коэффициентов переноса. Феррелл и др. [19] рассмотрели этот вопрос феноменологически с точки зрения законов подобия (скейлинга), которые основаны на значительном сходстве различных фазовых переходов второго рода, например в ферромагнетиках, сверхпроводниках и жидком гелии. В частности, названные авторы нашли, что теплопроводность He I расходится как  $(T - T_\lambda)^{-1/2}$ . Это предсказание

<sup>1)</sup> За последние годы флуктуационные эффекты в сверхпроводниках являлись объектом многочисленных исследований, составить представление о которых помогут труды конференций LT13 и LT14 (см. библиографию).—  
Прим. ред.



Фиг. 176. Изменение намагниченности монокристалла индия (диаметр 4,4 мм) вблизи критической температуры в различных магнитных полях [26]. Каждая кривая оканчивается слева при зависящей от поля термодинамической критической температуре, при которой происходит резкий фазовый переход первого рода в сверхпроводящее состояние. Обратите внимание, что кривые смещены по вертикали.



Фиг. 177. Зависимость теплопроводности He I от плотности для нескольких температур [35]. Три изотермы для температур ниже 2,17 К быстро растут с приближением к линии  $\lambda$ -переходов.

было подтверждено измерениями теплопроводности, выполненными Керриском и Келлером [35]; на фиг. 177 изображена зависимость теплопроводности от плотности жидкости для различных изотерм. Те изотермы, которые пересекают линию  $\lambda$ -переходов на фазовой  $p - T$ -диаграмме, резко растут в точке перехода (при уменьшении плотности), а изотермы, не пересекающиеся с линией  $\lambda$ -переходов, отвечают лишь медленному изменению теплопроводности.

Другие свойства, такие, как затухание второго звука (Тизон [49]), также обнаруживают расходимость при  $T_\lambda$ . Ясно, что, несмотря на некоторый прогресс в понимании  $\lambda$ -перехода, необходимо располагать более полной информацией, как теоретической, так и экспериментальной.

### ЗАДАЧИ

6.1. Покажите, что уравнение (6.18) действительно следует из (6.17). Вычисления можно провести следующим образом.

а) Раскройте в  $g(\mathbf{r})$  член

$$\frac{1}{2m} |(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi|^2$$

и покажите, что

$$\frac{\partial g}{\partial (\nabla_j \psi^*)} = \frac{i\hbar}{2m} (-i\hbar\nabla_j - 2eA_j)\psi$$

и

$$\frac{\partial g}{\partial \psi^*} = \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi - \frac{e}{m} \sum_j (-i\hbar\nabla_j - 2eA_j)\psi A_j.$$

б) Условие  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  означает, что

$$\sum_j \nabla_j \psi A_j = \sum_j A_j \nabla_j \psi,$$

так что  $A_j$  можно поставить перед последним членом в выражении для  $\partial g / \partial \psi^*$ . Подставляя полученные явные выражения для  $\partial g / \partial (\nabla_j \psi^*)$  и  $\partial g / \partial \psi^*$  в уравнения Эйлера — Лагранжа, непосредственно получаем (6.18).

6.2. Покажите, что граничное условие (6.21) следует из (6.20).

6.3. Убедитесь, что (6.23) следует из (6.22). Вычисления можно проводить следующим образом.

а) Раскройте градиентный член и покажите, что

$$\frac{\partial g}{\partial A_i} = -\frac{ie\hbar}{m} (\psi \nabla_i \psi^* - \psi^* \nabla_i \psi) - \frac{4e^2}{m} \psi^* \psi A_i.$$

б)  $x$ -компонента второго члена равна

$$T_x = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial (\partial A_x / \partial y)} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial (\partial A_x / \partial z)}.$$

Член  $\partial A_x / \partial x$  отсутствует, поскольку он не входит в  $\text{rot A}$ . Запишите в явном виде  $(\text{rot A})^2$ , покажите, что

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial (\partial A_x / \partial y)} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} \right),$$

и найдите аналогичные выражения для других членов. Таким путем покажите, что

$$T_x = \frac{1}{\mu_0} \left( \nabla^2 A_x - \frac{\partial}{\partial x} \text{div A} \right)$$

[нужно прибавить и вычесть член  $(1/\mu_0)(\partial^2 A_x / \partial x^2)$ ]. Таким образом,

$$T = \frac{1}{\mu_0} (\nabla^2 A - \text{grad div A}) = -\frac{1}{\mu_0} \text{rot rot A}.$$

Отсюда следует (6.23). Обратите внимание, что доказательство справедливо при любой калибровке потенциала.

- 6.4. С помощью (6.30), (6.31) и выражения, определяющего энтропию  $\Sigma = -(\partial G / \partial T)_H$ , покажите, что энтропии нормальной и сверхпроводящей фаз равны соответственно

$$\Sigma_n = -V \frac{\partial f_n}{\partial T},$$

$$\Sigma_s = \Sigma_n + V \frac{|\alpha|}{\beta} \frac{\partial |\alpha|}{\partial T}.$$

Убедитесь, что  $\Sigma_s$  меньше  $\Sigma_n$ . Покажите, что  $\Sigma_s$  можно также записать в виде

$$\Sigma_s = \Sigma_n + V \mu_0 H_{cb} \frac{\partial H_{cb}}{\partial T}.$$

Используя температурную зависимость Гортера — Казимира  $H_{cb} = H_0 (1 - t^2)$ , постройте кривую зависимости  $\Delta \Sigma = \Sigma_n - \Sigma_s$  от температуры. Обратите внимание, что  $\Delta \Sigma \rightarrow 0$  при  $T = 0$  в согласии с третьим законом термодинамики.

Образец олова в адиабатических условиях претерпевает фазовый переход при  $H_{cb}$  и при приведенной температуре  $t = 0,9$ . Каково падение температуры? Для Sn используйте следующие данные:  $T_c = 3,7$  К,  $\mu_0 H_0 = 3 \cdot 10^{-2}$  Т, теплоемкость равна  $364$  Дж/м<sup>3</sup> К (при  $t = 0,9$ ).

- 6.5. Киттель (см. де Жен [10]) отметил, что с помощью вариационного метода можно получить хорошее приближение для поверхностного критического поля  $H_{cs}$ . Используемая функция  $\psi(x) = \exp(-rx^2)$  удовлетворяет граничному условию (6.50) и ограничена при  $x \rightarrow \infty$ . Покажите, что вариационный интеграл

$$E = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{2e^2 \mu_0^2 H_0^2}{m} (x - x_0)^2 \psi^2 \right\} dx / \int_0^{\infty} \psi^2 dx$$

имеет следующее значение:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} r + \frac{2e^2 \mu_0^2 H_0^2}{m} \left\{ \frac{1}{4r} - x_0 \left( \frac{2}{\pi r} \right)^{1/2} + x_0^2 \right\}.$$

Минимизируя это выражение относительно  $r$  и  $x_0$ , получите следующие выражения:

$$r = \frac{\mu_0 e \hbar H_0}{\hbar} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^{1/2},$$

$$x_0 = \left(\frac{1}{2\pi r}\right)^{1/2},$$

$$E = \frac{\mu_0 e \hbar H_0}{m} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^{1/2}.$$

Выражения для  $x_0$  и  $E$  можно сравнить с точными выражениями (6.52) и (6.53).

- 6.6. Покажите, что выражения (6.54) и (6.58) для  $H_{c||}$  в пределе толстых и тонких пленок сводятся соответственно к (6.61) и (6.62).
- 6.7. Докажите сделанное в тексте утверждение, что  $|\psi|^2$  для функции  $\psi$ , определенной согласно (6.63), обращается в нуль на линии  $x = 0$ , причем в направлении  $y$  расстояние между нулями равно  $\lambda_y$ . Покажите также, что  $|\psi|^2$  не обращается в нуль при  $x \neq 0$ .
- 6.8. Постройте линию  $\varepsilon = \hbar$ , соответствующую критическому полю  $H_{c2}$  на фиг. 151. Как отметили Гийон и др. [31], на экспериментальной кривой для  $H_{Tc}$  нет никаких аномалий в точке пересечения ее с линией  $\varepsilon = \hbar$ . Почему можно ожидать появления аномалии в этой области?
- 6.9. Покажите, что при сделанном Абрикосовым выборе (все  $C_n$  равны) функция  $\psi_L$ , определяемая выражением (6.71), удовлетворяет условию периодичности по  $x$ :

$$\psi_L(x + k\xi^2(T), y) = \exp(iky) \psi_L(x, y)$$

и что поэтому величина  $|\psi_L|^2$  периодична по  $x$  с периодом  $k\xi^2(T)$ , помимо того, что она периодична по  $y$  с периодом  $2\pi/k$ . Квадратная решетка Абрикосова соответствует, очевидно, равенству этих обоих периодов, так что

$$k = (2\pi)^{1/2}/\xi(T).$$

Покажите, что при таком выборе  $k$  в центре ячейки  $|\psi_L|^{-2} = 0$  и

$$x = y = 1/2 (2\pi)^{1/2} \xi(T).$$

Отсюда следует, что  $|\psi_L|^2 = 0$  во всех точках соответствующей квадратной решетки. Ряд поверхностей уровня для такой частной формы  $|\psi_L|^2$  изображен на фиг. 156.

- 6.10. Убедитесь с помощью подстановки, что выражения (6.23), а также (6.74) и (6.75) для тока  $\mathbf{J}_L$  эквивалентны для волновой функции  $\psi_L$  с любыми значениями  $C_n$  и  $k$ . (Альтернативное доказательство дано, например, де Женом [10].)
- 6.11. Уравнение (6.81) представляет собой условие нормировки  $\psi_L$ . Покажите, что его можно также получить следующим образом (де Жен [10]). В выражении для свободной энергии через  $\psi_L$  [см. (6.15) и (6.16)] положите  $\psi = (1 + \varepsilon)\psi_L$ . Покажите, что уравнение (6.81) есть условие равенства нулю коэффициента при  $\varepsilon$  в выражении для свободной энергии
- 6.12. Покажите, что первый член в (6.81) можно записать в виде

$$\int \frac{1}{2m} (i\hbar \nabla - 2eA_{c2} - 2eA_1) \psi_L^* (-i\hbar \nabla - 2eA_{c2} - 2eA_1) \psi_L d^3r,$$

и затем выведите (6.82).

6.13. Покажите, что (6.85) следует из уравнения (6.82).

6.14. С помощью тождества

$$\left( \frac{\partial G}{\partial H} \right)_T = -M$$

и выражения (6.90) для  $M$  покажите, что

$$G(H_0) = G(H_{c2}) - \frac{\mu_0 (H_{c2} - H_0)^2}{2\beta_A (2\kappa^2 - 1)}.$$

6.15. Покажите, что (6.102) следует из (6.101). Убедитесь, что  $G_s = G_n$  при  $f = 1$  и  $H_0 = H_{cb}$  в пределе большой толщины  $d$ , т. е. что предел для массивного образца правилен.

6.16. Покажите, что основной член в выражении (6.102) для  $G$  равен

$$G = f^2 \left\{ \frac{1}{3} \left( \frac{d}{2\lambda} \right)^2 \left( \frac{H_0}{H_{cb}} \right)^2 - 2 \right\},$$

и затем выведите формулы (6.107), (6.108) для критического поля переохлаждения. Убедитесь с помощью соответствующей замены, что (6.107) совпадает с (6.58).

6.17. Проверьте правильность выражения (6.108).

6.18. Покажите, что (6.118) следует из (6.117).

6.19. Найдите с помощью теории ГП выражение для понижения температуры  $\lambda$ -точки в тонкой пленке He II с данной толщиной.

6.20. С помощью условия (6.124) оцените ширину  $\Delta T$  области, где велики флуктуации для а) He II и б) для чистого Sn.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрикосов А. А., ЖЭТФ, 32, 1442 (1957).
2. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, М., 1962.
3. Arp V. D., Collier R. S., Kamper R. A., Meissner H., Phys. Rev., 145, 231 (1966).
4. Асламазов Л. Г., Ларкин А. И., ФТТ, 10, 1104 (1968).
5. Baldwin J. P., Phys. Lett., 3, 223 (1963).
6. Baldwin J. P., Rev. Mod. Phys., 36, 317 (1964).
7. Caroli C., Cyrot M., de Gennes P. G., Solid State Comm., 4, 17 (1966).
8. Collier R. S., Kamper R. A., Phys. Rev., 143, 323 (1966).
9. de Gennes P. G., Phys. Kond. Materie, 3, 79 (1964).
10. de Gennes P. G., Superconductivity of Metals and Alloys, Benjamin, New York, 1966. (См. перевод: П. Де Жен, Сверхпроводимость металлов и сплавов, изд-во «Мир», М., 1968.)
11. Doll R., Graf P., Phys. Rev. Lett., 19, 897 (1967).
12. Douglass D. H., Jr., Phys. Rev. Lett., 7, 14 (1961).
13. Eilenberger U., Phys. Rev., 153, 584 (1967).
14. Essmann U., Trauble H., Phys. Lett., 24A, 526 (1967).
15. Faber T. E., Proc. Roy. Soc. A214, 392 (1952).
16. Faber T. E., Proc. Roy. Soc., A231, 353 (1955).
17. Faber T. E., Proc. Roy. Soc., A241, 531 (1957).
18. Feder J., McLachlan D. S., Phys. Rev., 177, 763 (1969).



19. Ferrell R. A., Menyhard N., Schmidt H., Schwabl F., Szépfalusy P., Ann. Phys. (N. Y.), 47, 565 (1968).
20. Fietz W. A., Webb W. W., Phys. Rev., 161, 423 (1967).
21. Гинзбург В. Л., ЖЭТФ, 34, 113 (1958).
22. Гинзбург В. Л., ФТТ, 2, 2031 (1960).
23. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д., ЖЭТФ, 20, 1064 (1950).
24. Гинзбург В. Л., Путаевский Л. П., ЖЭТФ, 34, 1240 (1958).
25. Glover R. E., Superconductivity, ed. F. S. Chilton, North-Holland, Amsterdam, 1971, p. 3.
26. Gollub J. P., Beasley M. R., Newbower R. S., Tinkham M., Phys. Rev. Lett., 22, 1288 (1969).
27. Gollub J. P., Beasley M. R., Tinkham M., Phys. Rev. Lett., 25, 1646 (1970).
28. Горьков Л. П., ЖЭТФ, 34, 735 (1958).
29. Горьков Л. П., ЖЭТФ, 36, 1918 (1959).
30. Горьков Л. П., ЖЭТФ, 37, 1407 (1959).
31. Guyon E., Meunier F., Thompson R. S., Phys. Rev., 156, 452 (1967).
32. Gygax S., Kropschot R. H., Phys. Lett., 9, 91 (1964).
33. Hurault J. P., Phys. Lett., 20, 587 (1966).
34. Jain M. C., Mackinnon L., Phys. Lett., 32A, 275 (1970).
35. Kerrisk J. F., Keller W. E., Phys. Rev., 177, 341 (1969).
36. Халатников И. М., ЖЭТФ, 57, 489 (1969).
37. Kletner W. H., Roth L. M., Autler S. H., Phys. Rev., 133A, 1226 (1964).
38. McConville T., Serin B., Phys. Rev., 140A, 1169 (1965).
39. Maki K., Physics, 1, 21 (1964).
40. Мамладзе Ю. Г., Чешвили О. Д., ЖЭТФ, 50, 169 (1966).
41. Parks R. D., Superconductivity, vols. 1 and 2, Dekker, New York, 1969.
42. Путаевский Л. П., ЖЭТФ, 35, 408 (1958).
43. Saint-James D., de Gennes P. G., Phys. Lett., 7, 306 (1963).
44. Shapira Y., Neuringer L. J., Phys. Rev., 140, A1638 (1965).
45. Strongin M., Kammerer O. F., Crow J., Thompson R. S., Fine H. L., Phys. Rev. Lett., 20, 922 (1968).
46. Sutton J., Proc. Phys. Soc., 87, 791 (1966).
47. Testardi L. R., Phys. Lett., 35A, 33 (1971).
- 48. Tilley D. R., Baldwin J. P., Robinson G., Proc. Phys. Soc., 89, 645 (1966).
49. Tyson J. A., Phys. Rev. Lett., 21, 1235 (1968).
- 50\*. Gollub J. P., Beasley M. R., Collarotti R., Tinkham M., Phys. Rev., B7, 3039 (1973).
- 51\*\*. Гинзбург В. Л., Собянин А. А., УФН, 120, 153, 733 (1976).

## ЭФФЕКТЫ ОБРАЗОВАНИЯ ПАР В ДРУГИХ СИСТЕМАХ

### § 7.1. Введение

Мы закончили обсуждение He II и сверхпроводников. В этой последней главе мы рассмотрим три совершенно отличные от предыдущих системы, в которых могут возникать состояния типа БКШ.

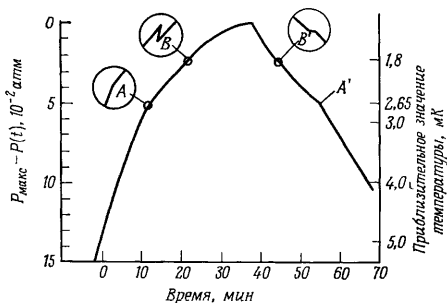
В § 1.1 мы отмечали, что He<sup>4</sup> — единственная бозонная жидкость, которая не затвердевает с понижением температуры при атмосферном давлении. В связи с этим конденсация бозонов в He<sup>4</sup> имеет уникальный характер. С другой стороны, существуют системы взаимодействующих фермионов, в которых возможна конденсация типа БКШ; напомним (см. § 1.2), что для вырождения системы необходимо выполнение двух критериев: наличие поверхности Ферми и существование притяжения между частицами на поверхности Ферми. Таким критериям удовлетворяют атомные ядра, некоторые области нейтронных звезд и жидкий He<sup>3</sup>.

### § 7.2. Жидкий He<sup>3</sup>

Как мы подчеркивали в гл. 1, жидкий He<sup>3</sup> является системой фермионов и не претерпевает  $\lambda$ -перехода, присущего He<sup>4</sup>. Однако уже ряд лет обсуждается возможность того, что в жидком He<sup>3</sup> происходит конденсация типа БКШ и делаются попытки (см., например, Эмери и Сесслер [7]) предсказать температуру перехода.

Состояние БКШ, описанное в приложении, состоит из куперовских пар, электроны в которых обладают противоположно направленными спинами. Полная волновая функция системы при обмене всех координат (включая спиновые) двух электронов должна менять знак. Значит, соответствующая пространственная часть волновой функции электронной пары должна быть симметрична. Простейшая возможность — изотропная пространственная волновая функция, т. е.  $S$ -волна (состояние). Полагают, что сверхпроводимость металлов всегда связана именно со спариванием в  $S$ -состоянии. Однако в He<sup>3</sup> сила, действующая между частицами, анизотропна; кроме того, для достаточно малых расстояний она является силой отталкивания. Поэтому предполагается, что если в жидком He<sup>3</sup> может возникнуть состояние БКШ, то оно должно быть связано со спариванием не в  $S$ -состоянии, а, например, в  $P$ -состоянии, когда спины параллельны.

Результаты, полученные Оперовым и др. [14, 15] при исследовании  $\text{He}^3$  вблизи кривой плавления, интерпретировались как указание на то, что в  $\text{He}^3$  действительно имеет место образование состояния БКШ. С помощью аппаратуры, в которой адиабатическое охлаждение производится под давлением, эти авторы обнаружили две аномалии на зависимости давления плавления от времени (фиг. 178) при изменении объема с постоянной скоростью.



Фиг. 178. Изменение во времени давления плавления  $\text{He}^3$  при сжатии и при снятии давления [15].

Точки A, A' — аномалии, соответствующие разрыву производной; B — аномалия с гистерезисом, B' — аномалия без гистерезиса, возникающая при давлении, немного меньшем, чем в точке B. Соответствующие температуры указаны на правой шкале.

При 2,7 мК наклон кривой претерпевает разрыв (точка A), а примерно при 1,8 мК наблюдается сингулярность, сопровождаемая гистерезисом (точка B). Сначала предполагалось, что эти особенности связаны с фазовыми переходами в твердом  $\text{He}^3$ . Было, однако, обнаружено, что сигналы ядерного магнитного резонанса от жидкой фазы и от твердой фазы выше точки A одинаковы, но ниже A сигнал от жидкой фазы становится больше сигнала от твердой фазы; наконец, в точке B он скачком возвращается к своему первоначальному значению. Леже [12] предположил, что в точке A в жидкости происходит фазовый переход второго рода в состояние БКШ, в котором спины  $\text{He}^3$  спариваются с образованием триплетного состояния, причем орбитальный момент относительного движения в паре является нечетным. Используя правило сумм, Леже получил качественное согласие с термодинамикой и с данными по сдвигу частоты. Измерения теплоемкости, выполненные Веббом и др. [17], дополнительно подтвердили предположение о наличии в жидком  $\text{He}^3$  перехода второго рода. В температурной области 2—3 мК при давлении от 16 атм до точки плавления (34 атм) теплоемкость жидкого  $\text{He}^3$  претерпевает раз-

рыв, но не расходится. Вероятно, этот разрыв связан с аномалией  $A$  (см. фиг. 178).

Амбегаокар и Мермин [1] применили иной теоретический подход к проблеме; начав с использования выражения типа Гинзбурга — Ландау для функционала свободной энергии при спаривании атомов  $\text{He}^3$  в состоянии с нечетным орбитальным моментом, они сделали несколько предсказаний, касающихся фазовой диаграммы  $H - T$ . В частности, они высказали предположение, что аномалия в точке  $A$  должна претерпевать в магнитном поле линейное расщепление.

Андерсон и Варма [3] попытались дать микроскопическую картину жидкой фазы между точками  $A$  и  $B$ . Они получили выражение для сдвига частоты ядерного магнитного резонанса, обладающее правильной температурной зависимостью. В следующей статье Андерсон [2] подчеркнул сложную природу предполагаемого анизотропного сверхтекучего состояния. Он отметил, что для пары атомов  $\text{He}^3$  нужно рассматривать три вектора: ядерный магнитный момент, полный спин и относительный момент количества движения. Природа жидких фаз должна определяться взаимосвязью этих трех векторов. В частности, Андерсон предположил, что между точками  $A$  и  $B$  спин пары может принимать только два значения, хотя она и находится в триплетном состоянии; в точке же  $B$  происходит фазовый переход первого рода в состояние, в котором разрешены все три спиновые конфигурации<sup>1)</sup>.

### § 7.3. Атомные ядра

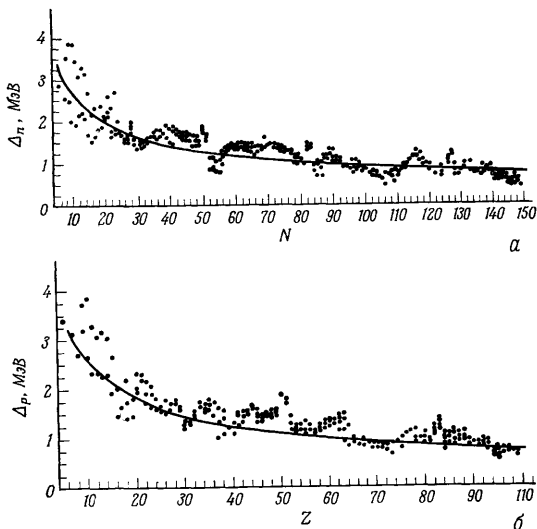
Входящие в атомные ядра протоны и нейтроны (совместно называемые нуклонами), как можно полагать, заполняют ряд оболочек, подобно электронам в атоме. (Обсуждение оболочечной модели ядра см. в книге Элтона [6].) Описание с помощью оболочек не вполне точно; между нуклонами существуют остаточные взаимодействия, которые наряду с другими следствиями приводят к образованию куперовских пар нуклонов. При этом нуклоны в паре имеют противоположные моменты количества движения, так что момент количества движения играет такую же роль, как импульс в чистом сверхпроводнике. Поскольку ядро содержит лишь малое и фиксированное число частиц, образование пар приводит к систематическому увеличению  $\delta B$  энергии связи  $B$  ядер с четным количеством  $N$  нейтронов или с четным количеством

<sup>1)</sup> С тех пор как в начале 1973 г. была подготовлена рукопись книги, появилось большое число работ, посвященных экспериментальному и теоретическому изучению новых фаз в жидком  $\text{He}^3$ . В настоящее время природа и свойства жидкости вблизи и ниже точек  $A$  и  $B$  поняты весьма детально. Отсылаем читателей к превосходным обзорам Леже [18\*] и Уитли [19\*], а также к трудам [LT14] (см. библиографию). — *Прим. авторов к русскому изданию.* (См. также [20\*\*]. — *Прим. ред.*)

$Z$  протонов. Было найдено, что

$$\delta B = \begin{cases} \Delta & N \text{ четное и } Z \text{ четное,} \\ 0 & N + Z \text{ нечетное,} \\ -\Delta & N \text{ нечетное, } Z \text{ нечетное,} \end{cases} \quad (7.1)$$

где  $\delta B$  — отклонение от средней энергии связи  $B(N, Z)$  ядер с значениями  $N$  и  $Z$ , близкими к их значениям для данного ядра.



Фиг. 179.  $a$  — нейтронная щель  $\Delta_n$ ;  $b$  — протонная щель  $\Delta_p$  [5].

Для обоих случаев построена эмпирическая кривая  $\Delta = 12A^{-1/2}$ , где  $A = N + Z$  есть полное число нуклонов.

Точнее говоря, для оценки величины нейтронной щели  $\Delta_n$  при четном  $N$  используется следующее выражение:

$$\Delta_n = \frac{1}{4} \{ B(N-2, Z) - 3B(N-1, Z) + 3B(N, Z) - B(N+1, Z) \}. \quad (7.2)$$

Протонная щель  $\Delta_p$  оценивается аналогичным образом. На фиг. 179 четко проявляется эффект образования пар. Значения  $\Delta_n$  и  $\Delta_p$  можно сравнить с полной энергией связи на нуклон, которая имеет порядок 8 МэВ.

Другое следствие образования пар — равенство нулю момента количества движения в основном состоянии четно-четных ядер (четные  $N$  и четные  $Z$ ) в силу спаренности всех нуклонов. Наконец, для образования возбуждения в четно-четном ядре нужно разорвать пару, в силу чего наименее возбужденные состояния четно-четных ядер систематически лежат выше, чем в других ядрах.

## § 7.4. Нейтронные звезды

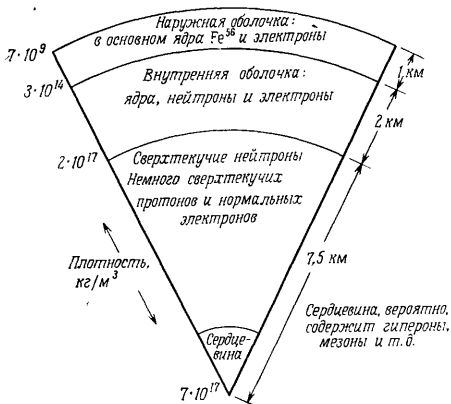
Еще в 1936 г. Гамов [8] высказал предположение, что нейтронная звезда может быть конечным продуктом умирающей звезды, масса которой близка к массе Солнца<sup>1</sup>). Когда в звезде выгорает все термоядерное топливо, начинается гравитационный коллапс, который при определенных условиях продолжается до тех пор, пока не установится равновесие между гравитационными силами и внутренним давлением «нейтронной жидкости», образующейся внутри звезды.

На фиг. 180 изображена вероятная структура нейтронной звезды. Толща звезды состоит из нейтронов, концентрация которых крайне велика и достигает  $\sim 10^{17}$  кг/м<sup>3</sup>; полагают, что масса такой звезды сравнима с массой Солнца ( $\sim 10^{30}$  кг), поэтому ее радиус, равный 10 км, очень мал по сравнению с размерами исходной звезды.

Возможность существования нейтронных звезд не привлекала большого интереса до тех пор, пока Голд [10] не выдвинул предположения о том, что недавно открытые (1968 г.) пульсары могут быть вращающимися нейтронными звездами. Главная особенность пульсара состоит в том, что он испускает короткие импульсы излучения, повторяющиеся через регулярные интервалы времени; периоды известных к настоящему времени пульсаров лежат в области от 33 мс до нескольких секунд. Период пульсара отождествляют с периодом вращения нейтронной звезды, но механизм, ответственный за излучение, до сих пор неясен. Почти наверняка этот механизм связан с движением заряженных частиц в интенсивном магнитном поле ( $\sim 10^8$  Т), окружающем звезду, но эта проблема сложна [22\*\*] и не имеет отношения к нашей теме.

На нейтронные звезды недавно обратили внимание и физики, работающие в области низких температур, поскольку весьма вероятно, что нейтроны (и протоны) образуют какую-то форму сверхтекучей фазы. Нейтроны с плотностью  $\sim 10^{17}$  кг/м<sup>3</sup> представляют собой систему фермионов с температурой вырождения  $\sim 10^{11}$  К. С другой стороны, температура звезды равна, вероятно,  $\sim 10^8$  К, так что степень вырождения нейтронов велика. Мигдал [13] первым высказал предположение, что нейтроны вблизи

<sup>1</sup>) Точнее и подробнее см. [21\*\*]. — Прим. ред.



Фиг. 180. Сечение нейтронной звезды [16].

поверхности Ферми могут соединяться в пары таким образом, чтобы возникла конденсация типа БКШ. Согласно Хофбергу и др. [11], существует критическая плотность нейтронов ( $1,45 \cdot 10^{17}$  кг/м<sup>3</sup>), ниже которой доминирует спаривание в *S*-состоянии (как в обычных сверхпроводниках), тогда как при более высокой плотности пары образуются в *P*-состоянии, как и в случае  $\text{He}^3$ . С помощью обычных соотношений теории БКШ эти авторы оценили критическую температуру для нейтронной сверхтекучей жидкости; она оказалась равной  $\sim 10^{10}$  К, что значительно превышает истинную температуру звезды. Поскольку масса звезды в основном сосредоточена в нейтронах, большая часть энергии вращения заключена в сверхтекучей жидкости. Гинзбург и Киржниц [9] по аналогии с вращающимся  $\text{He}^4$  пришли к выводу, что нейтронная сверхтекучая жидкость должна содержать некоторую конфигурацию вихревых нитей. Так же, как и в случае  $\text{He}^4$ , можно определить критические значения угловой скорости  $\Omega_{c1}$ , при превышении которой образуется отдельный вихрь, и угловую скорость  $\Omega_{c2}$ , при которой происходит перекрытие сердцевин соседних вихрей. Бейм др. [4] получили значения  $\Omega_{c1} \sim 10^{-14}$  с<sup>-1</sup> и  $\Omega_{c2} \sim 10^{20}$  с<sup>-1</sup>; периоды всех известных пульсаров соответствуют скоростям вращения ( $\Omega$ ), заключенным в пределах примерно от 1 до  $191$  с<sup>-1</sup>. Мы заключаем, таким образом, что свойства нейтронной сверхтекучей жидкости аналогичны

свойствам He II, претерпевающего твердотельное вращение при температуре порядка 1 мК.

Было обнаружено, что периоды пульсаров медленно растут, причем скорость роста постоянна. Это дает основания полагать, что вращение нейтронных звезд замедляется, а если это так, то нейтронная сверхтекучая жидкость медленно теряет энергию вращения. Поэтому возникает вопрос, каким образом вращение сверхтекучей жидкости связано с процессами в окружающем звезду магнитном поле, обуславливающими излучение пульсара. Бейм и др. [4] предположили, что этот процесс должен быть связан с рассеянием протонов и нейтронов на сердцевинах вихрей. Последние заполняют относительный объем, равный примерно  $\Omega/\Omega_{c_2} \sim 10^{-18}$  (при самом быстром вращении). Поэтому характерное время, определяющее передачу изменений скорости вращения от сверхтекучей жидкости к коре звезды, является, как оказывается, величиной порядка нескольких лет; именно величина такого порядка нужна для объяснения результатов наблюдений.

Подробный обзор свойств нейтронных звезд содержится в статьях Пайнса [16] и Бейма и Печика [21\*\*].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ambegaokar V., Mermin N. D., Phys. Rev., Lett., **30**, 81 (1973).
2. Anderson P. W., Phys. Rev. Lett., **30**, 368 (1973).
3. Anderson P. W., Varma C. M., Nature, **241**, 187 (1973).
4. Baym G., Pethick C. J., Pines D., Nature, **224**, 673 (1969).
5. Bohr A., Mottelson B. R., Nuclear Structure, W. A. Benjamin, New York, 1969.
6. Elton L. R. B., Introductory Nuclear Theory, 2nd ed., Pitman, London, 1965.
7. Emery V. J., Sessler A. M., Phys. Rev., **119**, 43 (1960).
8. Gamow G., Atomic Nuclei and Nuclear Transformations, 2nd ed., Oxford Univ. Press, London, 1936, p. 234.
9. Гунзбург В. Л., Куржниц Д. А., ЖЭТФ, **47**, 2006 (1964).
10. Gold T., Nature, **218**, 731 (1968).
11. Hoffberg M., Glassgold A. E., Richardson R. W., Ruderman M., Phys. Rev. Lett., **24**, 775 (1970).
12. Leggett A. J., Phys. Rev. Lett., **29**, 1227 (1972).
13. Migdal A. B., Nucl. Phys., **13**, 655 (1959).
14. Osheroff D. D., Gully W. J., Richardson R. C., Lee D. M., Phys. Rev. Lett., **29**, 920 (1972).
15. Osheroff D. D., Richardson R. C., Lee D. M., Phys. Rev. Lett. **28**, 885 (1972).
16. Pines D., Proc. 12th Int. Conf. on Low Temp. Phys., Kyoto 1970, Academic Press of Japan, Tokyo, 1971, p. 7.
17. Webb R. A., Greytak T., Johnson R. T., Wheatley J. C., Phys. Rev., Lett., **30**, 210 (1973).
- 18\*. Leggett A. J., Rev. Mod. Phys., **47**, 331 (1975).
- 19\*. Wheatley J. C., Rev. Mod. Phys., **47**, 415 (1975).
- 20\*\*. Wheatley J. C., Phys. to-day, **29**, No. 2, 32 (1976).
- 21\*\*. Baym G., Pethick C. J., Ann. Rev. Nucl. Sci., **25**, 27 (1975).
- 22\*\*. Гунзбург В. Л., Железняков В. В., Ann. Rev. Astron. Astrophys., **13**, 511 (1975).



## Приложение

### СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ. ЭЛЕМЕНТЫ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Как мы уже отмечали в § 1.2, основы микроскопической теории заложены в статье Бардина и др. [2]. В настоящем приложении мы обсудим в основном результаты этой статьи<sup>1)</sup>.

Первая большая трудность на пути развития теории была связана с выяснением природы взаимодействия, ответственного за переход в сверхпроводящее состояние. Теперь полагают, что ответственный за сверхпроводимость механизм представляет собой образование электронных пар, осуществляемое через посредство положительных ионов кристаллической решетки металла. Этот механизм, впервые предложенный Фрелихом [4], вскоре получил экспериментальное подтверждение в результате открытия *изотопического эффекта*. В первых экспериментах было обнаружено, что критическая температура образца ртути зависит от среднего массового числа  $M$  ионов металла; в силу наличия нескольких стабильных изотопов ртути, можно было приготовить ряд образцов с различными значениями  $M$ . Изотопический эффект, обнаруженный для большинства сверхпроводников, подчиняется эмпирическому закону

$$T_c \sim M^{-a}. \quad (\text{П.1})$$

Для большинства непереходных металлов  $a = 0,5$  или немного меньше, но в случае переходных металлов значение  $a$  может быть малым. Таблица значений  $a$  приведена в книге Линтона [5].

Изотопический эффект указывает на то, что для явления сверхпроводимости ионы в металле играют существенную роль. Фрелих предположил, что взаимодействие между электронами и колебаниями решетки (фононами) может приводить к эффективному взаимодействию между самими электронами. Электроны связаны с колебаниями решетки, поскольку ионы положительно заряжены. Наличие связи с решеткой означает, что электрон может испустить фонон, т. е. вызвать колебание ионов, а также может поглотить фонон. Предположим, что мы хотим с помощью квантовомеханической теории вычислить энергию пары электронов, движущихся через решетку. Возможное промежу-

<sup>1)</sup> Современное состояние микротехники сверхпроводимости освещено в книгах, указанных в разделе III библиографии.— *Прим. ред.*

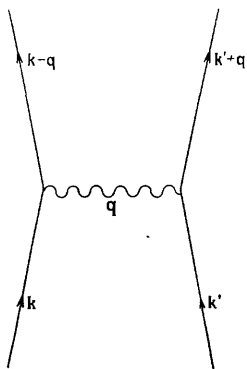
точное состояние, когда фотон, испущенный одним из электронов, поглощается другим электроном, изображено на фиг. 181. Наличие такого промежуточного состояния означает, что энергия двух электронов меняется; следовательно, обмен фононом дает такой же эффект, как непосредственное взаимодействие между электронами. Эквивалентное взаимодействие, соответствующее обмену одним фононом, описывается выражением

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = \frac{g^2 \hbar \omega_{\mathbf{q}}}{(\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}})^2 - (\hbar \omega_{\mathbf{q}})^2}, \quad (\text{П.2})$$

где, как и на фиг. 181,  $\hbar \mathbf{k}$  и  $\hbar \mathbf{k}'$  — первоначальные импульсы электронов, а  $\hbar \mathbf{q}$  — импульс передаваемого фотона. В выражении (П.2)  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  — энергия электронного состояния с волновым числом  $\mathbf{k}$ ,  $\hbar \omega_{\mathbf{q}}$  — энергия фотона, а  $g$  — постоянная связи для взаимодействия между электронами и фотонами.

Из (П.2) следует важное обстоятельство: при  $|\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}| < \hbar \omega_{\mathbf{q}}$  взаимодействие отрицательно, т. е. отвечает притяжению. Нужно также учитывать действующую между электронами кулоновскую (электростатическую) силу отталкивания. В зависимости от соотношения между двумя этими взаимодействиями суммарная сила может отвечать либо притяжению, либо отталкиванию. Мы увидим, что сверхпроводимость возникает, если суммарная сила является силой притяжения. Действительно, энергия сверхпроводящего состояния меньше энергии нормального состояния, что может

быть связано только с силой притяжения. Поскольку знак взаимодействия зависит от весьма чувствительного баланса между притяжением, обусловленным фотонами, и кулоновским отталкиванием, не существует простого правила, которое позволяло бы определить, является ли данный металл сверхпроводником. Отметим, однако, что энергия притяжения (П.2) зависит от  $g^2$  ( $g$  — постоянная электрон-фотонной связи), поэтому появлению сверхпроводимости благоприятствует сильная связь между электронами и фотонами. Простейшее следствие сильной электрон-фотонной связи — большое сопротивление при комнатной температуре, поскольку оно определяется электрон-фотонным рассеянием. Именно по этой причине благородные ме-



Фиг. 181. Обмен фононом между электронами.

таллы не переходят в сверхпроводящее состояние: при комнатной температуре они являются хорошими проводниками, так что постоянная  $g$  мала и кулоновское отталкивание превышает притяжение, обусловленное обменом фононами.

Несмотря на то, что выражение (П.2) выведено лишь для случая обмена одним фононом, оно достаточно сложно, а учет кулоновского взаимодействия усложняет его еще больше. Переход в сверхпроводящее состояние обусловлен частью взаимодействия, отвечающей притяжению, поэтому основные черты теории можно выяснить, обращаясь к использованному Бардином и др. упрощенному взаимодействию:

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V, & \text{если } |\varepsilon_{\mathbf{k}}| < \hbar\omega_D \text{ и } |\varepsilon_{\mathbf{k}'}| < \hbar\omega_D, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (\text{П.3})$$

Здесь  $\hbar\omega_D$  — дебаевская энергия фононов решетки,  $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  — взаимодействие между электронами, которые до рассеяния обладали импульсами  $\hbar\mathbf{k}$  и  $\hbar\mathbf{k}'$ , а после рассеяния имеют импульсы, равные  $\hbar\mathbf{k}_1$  и  $\hbar\mathbf{k}'_1$  (см. фиг. 184). Согласно закону сохранения импульса,

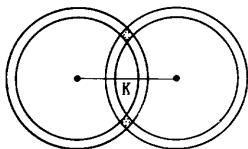
$$\hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}'_1 = \hbar\mathbf{k} + \hbar\mathbf{k}' = \hbar\mathbf{K}, \quad (\text{П.4})$$

где  $\hbar\mathbf{K}$  — импульс центра масс электронов. Энергии  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  и  $\varepsilon_{\mathbf{k}'}$  измеряются от поверхности Ферми, так что энергия  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  отрицательна, если  $\mathbf{k}$  лежит внутри сферы Ферми, и положительна, если  $\mathbf{k}$  лежит за пределами этой сферы. При записи выражения (П.3) принято во внимание, что во взаимодействии могут участвовать только электроны, расположенные вблизи поверхности Ферми, поскольку, в силу принципа Паули, электроны, лежащие внутри сферы Ферми, не могут рассеиваться ни в какие другие состояния. Выражение (П.2) отвечает притяжению, если  $|\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}| < \hbar\omega_D$ , поэтому упрощенное взаимодействие (П.3) считается притяжением, если  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  и  $\varepsilon_{\mathbf{k}'}$  меньше средней фононной энергии, в качестве которой выбирается энергия Дебая. Сравнение с (П.2) показывает, что по порядку величины константа взаимодействия  $V$  в (П.3) примерно равна  $g^2/\hbar\omega_D$ . С увеличением среднего массового числа  $M$  ионы становятся менее подвижными, в силу чего  $g$  и  $\hbar\omega_D$  уменьшаются. Фактически комбинация  $g^2/\hbar\omega_D$  не зависит от  $M$ , поэтому при объяснении изотопического эффекта можно считать, что  $V$  не зависит от  $M$ .

Взаимодействие (П.3) и предположение о сферичности поверхности Ферми лежат в основе теории БКШ в ее простейшей форме.

Выражение (П.3) описывает взаимодействие между электронами в энергетическом слое толщиной  $\hbar\omega_D$  около поверхности Ферми. Дебаевская энергия  $\hbar\omega_D$  всегда много меньше энергии Ферми  $\varepsilon_F$ ; обычно отношение  $\hbar\omega_D/\varepsilon_F$  имеет порядок  $10^{-3}$ . Следовательно, упомянутый энергетический слой очень тонок. Взаимодействие не оказывает влияния на импульс центра масс  $\hbar\mathbf{K}$  двух

взаимодействующих электронов, и, как можно видеть, оно наиболее эффективно при  $\hbar K = 0$ . Предположим, что нас интересует взаимодействие в случае пары, имеющей некоторый отличный от нуля импульс центра масс  $\hbar K$ ; для участия во взаимодействии данная пара должна находиться внутри энергетического слоя толщиной  $\hbar\omega_D$ . Чтобы найти в пространстве импульсов пары точек,



Фиг. 182. Построение, позволяющее найти состояния, лежащие внутри энергетического слоя и имеющие импульс центра масс  $\hbar K$ .

лежащих в этом слое и имеющих импульс центра масс  $\hbar K$ , можно воспользоваться схемой, изображенной на фиг. 182. Нарисуем сферу Ферми с радиусом, скажем,  $k_F$  и слой толщиной  $\hbar\omega_D$ , а вторую такую же сферу сместим на расстояние  $K$ . Искомые точки лежат в области пересечения двух слоев.

Из схемы на фиг. 182 видно, что число участвующих во взаимодействии электронных уровней растет с уменьшением  $K$  и имеет острый максимум при  $K = 0$ , когда взаимодействие распространяется на весь слой. Следовательно, наиболее сильны эффекты взаимодействия между электронами с противоположными импульсами  $\mathbf{k}$  и  $-\mathbf{k}$ .

Для выявления следствий существования взаимодействия БКШ необходимо учитывать принцип Паули. Купер [3] решил уравнение Шредингера для пары электронов с противоположными импульсами  $\mathbf{k}$  и  $-\mathbf{k}$ , находящимися в потенциальной яме (П.3). Он приближенно учел принцип Паули, положив, что  $|\mathbf{k}| > k_F$ , т. е. предположив, что взаимодействующие электроны не могут быть расположены внутри сферы Ферми. В результате оказывается, что, как бы ни было слабо взаимодействие  $V$ , пара электронов всегда находится в связанном состоянии с энергией связи

$$E_b = 2\hbar\omega_D \exp \{-2/N(0)V\}. \quad (\text{П.5})$$

Здесь  $N(0)$  — плотность энергетических состояний на поверхности Ферми. Это значит, что  $N(0)\delta E$  есть число электронных уровней (без учета спина) с энергией между  $E_F$  и  $E_F + \delta E$ . Купер нашел радиус связанного состояния

$$R \sim \hbar^2 k_F / m E_b. \quad (\text{П.6})$$

Численно  $R$  имеет порядок  $10^{-6}$  м, т. е. в атомном масштабе размер пары  $R$  огромен.

Выражение (П.5) дает для энергии связи куперовской пары величину как раз такого порядка, какой нужен в теории сверхпроводимости. Куперовская пара должна быть устойчивым образованием до тех пор, пока тепловая энергия электрона достаточно мала, т. е. при  $k_B T < E_b$ . Значит, если сверхпроводящее состояние каким-то образом строится из куперовских пар, можно ожидать, что  $k_B T_c \sim E_b$ . Отношение  $k_B T_c / \hbar \omega_D$  для всех материалов значительно меньше единицы; теперь это легко понять, поскольку экспонента в (П.5) может быть весьма мала.

Весьма важен и другой результат Купера: в связанном состоянии волновая функция пары  $\psi(\mathbf{k})$  зависит только от  $|\mathbf{k}|$ , т. е. от величины  $\mathbf{k}$ . Это означает, что волновая функция симметрична относительно изменений положения электронов; тогда она автоматически является антисимметричной относительно перестановки электронных спинов. Значит, спины в паре направлены противоположно друг другу.

Вычисления Купера обладают тем принципиальным дефектом, что в них выделяют два определенных электрона, которые рассматриваются в отрыве от других электронов. Этот дефект был исправлен в теории БКШ, где все электроны рассматриваются на равных основаниях. В гамильтониане в теории БКШ учитывается кинетическая энергия всех электронов вместе с взаимодействием (П.3). Энергия основного состояния вычисляется вариационным методом: варьируемая волновая функция строится таким образом, чтобы при наличии одного «участника» ( $\mathbf{k}, \uparrow$ ) куперовской пары присутствовал бы и второй ее участник ( $-\mathbf{k}, \downarrow$ ). (Стрелками обозначены спиновые волновые функции.) Построенное таким образом состояние отличается от нормального состояния. Пусть  $h_{\mathbf{k}}$  — вероятность того, что пара ( $\mathbf{k}, \uparrow$ ) и ( $-\mathbf{k}, \downarrow$ ) заполнена. В нормальном состоянии  $h_{\mathbf{k}} = 1$ , когда  $|\mathbf{k}|$  находится внутри сферы Ферми, и  $h_{\mathbf{k}} = 0$ , когда  $|\mathbf{k}|$  лежит за ее пределами. В сверхпроводящем состоянии  $h_{\mathbf{k}}$  плавно меняется в области взаимодействия (в слое, указанном на фиг. 183). Поскольку взаимодействие носит характер притяжения, возможно повышение кинетической энергии по сравнению с ее значением в нормальном состоянии. Было найдено, что энергия состояния, определяемого вариационным методом, ниже энергии нормального состояния: отсчитываемая от энергии нормального состояния при 0 К энергия сверхпроводящего состояния равна

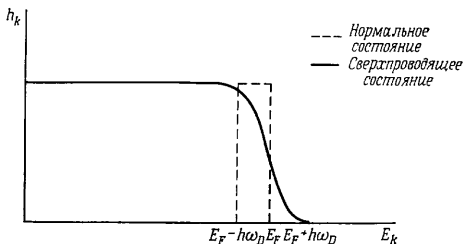
$$W(0) = - \frac{2N(0)(\hbar\omega_D)^2}{\exp\{2N(0)V\} - 1}. \quad (\text{П.7})$$

Для малых значений  $N(0)V$  в знаменателе остается только экспонента и энергию  $W(0)$  можно выразить через энергию связи  $E_b$

куперовской пары (П.5) следующим образом:

$$W(0) \sim -N(0)\hbar\omega_D E_D. \quad (\text{П.8})$$

Это означает, что  $W(0)$  есть просто число куперовских пар  $N(0)\hbar\omega_D$  в области взаимодействия (в слое толщиной  $\hbar\omega_D$ ), умноженное на энергию связи каждой пары  $E_D$ .



Фиг. 183. Вероятность заполнения для куперовских пар в основном состоянии БКШ.

Теперь можно видеть, как некоторые другие свойства состояния БКШ коррелируют со свойствами сверхпроводников. Прежде всего очевидно, что в обоих состояниях (в куперовской паре и в основном состоянии БКШ) предполагается существование поверхности Ферми: формально в (П.5) и (П.7) плотность состояний  $N(0)$  должна быть отличной от нуля. Это значит, что вычисления применимы только к металлам, и, как мы уже видели, сверхпроводящими свойствами обладают только металлы. Существует, правда, класс материалов, известных как сверхпроводящие полупроводники (например,  $\text{SrTiO}_3$ ), но в эти полупроводники введено так много примесей, что энергия Ферми расположена в зоне проводимости и плотность  $N(0)$  отлична от нуля.

Мы уже отмечали, что критическая температура определяется выражением  $k_B T_c \sim E_D$ . Минимизируя соответствующую свободную энергию (а не внутреннюю энергию), можно обобщить вычисления БКШ на область отличных от нуля температур. Критическая температура — это та температура, при которой свободная энергия БКШ становится равной свободной энергии нормального состояния. Было найдено, что

$$k_B T_c = 1,14\hbar\omega_D \exp \{-1/N(0)V\}. \quad (\text{П.9})$$

Выражение (П.9) описывает также изотопический эффект. Из соображений размерности следует, что  $\omega_D \sim (K/M)^{1/2}$ , где  $K$  — силовая постоянная решетки. Как мы уже отмечали, объем  $V$  не должен зависеть от  $M$ , поэтому из (П.9) следует, что  $T_c \sim M^{-1/2}$ .

Теперь нетрудно понять, каким образом в реальных металлах могут возникнуть отклонения от закона  $M^{-1/2}$ : выражение (П.2) написано в предположении, что взаимодействие обусловлено обменом одним фононом, выражение (П.3) существенно упрощает взаимодействие и, наконец, все вычисления выполнены для сферической поверхности Ферми. Ни одно из этих упрощений не должно обязательно выполняться для реального металла.

В § 1.2 мы отмечали, что добавка магнитных примесей быстро разрушает сверхпроводимость. Это связано с тем, что взаимодействие со спином примеси, возникающее в ее окрестности, приводит к появлению разности энергий между двумя электронами в куперовской паре, поскольку их спины направлены противоположно друг другу. Когда эта разность энергий или, вернее, соответствующее ее среднее значение превысит энергию связи пары, сверхпроводимость разрушается. Магнитные металлы не становятся сверхпроводящими именно в силу того, что два электрона, которые могли бы составить пару, имели бы существенно различные энергии. Наконец, можно видеть, как при очень высоких критических полях возникает *парамагнитный предел* для критического поля. Парамагнетизм Паули можно описать в терминах расщепления сферы Ферми для электронов со спинами, направленными параллельно и антипараллельно полю: в силу взаимодействия с внешним магнитным полем, они имеют разную энергию. И опять сверхпроводимость исчезает, когда разность энергии между состоянием со спином  $\uparrow$  и состоянием со спином  $\downarrow$  на поверхности Ферми превысит энергию связи куперовской пары.

Как мы видели, обычные примеси в отличие от магнитных мало изменяют критическую температуру. Причину этого первым объяснил Андерсон [1]. В нормальном состоянии электрон можно описать волновыми функциями  $\phi_{n\uparrow}(\mathbf{r})$ ,  $\phi_{n\downarrow}(\mathbf{r})$ , где предполагается, что функции  $\phi_n$  учитывают эффекты рассеяния на примесях. Таким образом, волновое число  $\mathbf{k}$ , отвечающее случаю чистого металла, заменяется квантовым числом  $n$ . Куперовская пара в чистом металле состоит из состояний  $(\mathbf{k}\uparrow)$  и  $(-\mathbf{k}\downarrow)$ ; Андерсон отметил, что второе из этих состояний переходит в первое при изменении импульса и тока с изменением знака времени. Он рассуждал далее следующим образом. В грязном металле пара также должна образовываться из состояний, переходящих друг в друга при обращении знака времени. Обозначим эти состояния как  $\phi_{n\uparrow}(\mathbf{r})$  и  $\phi_n^*(\mathbf{r})$ , причем комплексно сопряженная функция  $\phi_n^*$  является обращенной во времени по отношению к функции  $\phi_n$ , так же как функция  $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  является обращенной по времени по отношению к функции  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ . При наличии немагнитных примесей функции  $\phi_n^*$  и  $\phi_n$  отвечают одной и той же энергии, и вычисления БКШ не меняются. Фактически рассеяние на примесях смазывает эффекты анизотропии поверхности Ферми, поэтому результаты БКШ

более пригодны для сплавов, чем для чистых металлов. Как мы видели (см. фиг. 13), при введении примесей в чистый сверхпроводник критическая температура  $T_c$  сначала резко падает, а затем медленно изменяется с ростом количества примесей. Резкое падение  $T_c$  связано с разрушением эффектов анизотропии, а следующее за ним медленное изменение обусловлено изменением  $N(0)$ , вызванным добавлением примесей.

В заключение остановимся на одном из наиболее важных результатов теории БКШ — на существовании энергетической щели в спектре возбуждений в сверхпроводнике. Основное состояние нормального металла при 0К представляет собой просто состояние, в котором все электронные уровни внутри сферы Ферми заполнены, а все уровни вне этой сферы свободны. Простое возбужденное состояние — это состояние, в котором электрон перемещен из заполненного уровня  $k_1$  на незаполненный уровень  $k_2$ ; требуемая для этого энергия равна

$$E(k_1, k_2) = |\varepsilon_{k_1}| + |\varepsilon_{k_2}|, \quad (\text{П.10})$$

где, как и прежде,  $\varepsilon_k$  — энергия, измеряемая от поверхности Ферми. Выбирая  $k_1$  и  $k_2$  так, чтобы они были достаточно близки к поверхности Ферми, можно сделать энергию  $E(k_1, k_2)$  сколь угодно малой, так что энергетическая щель в спектре возбуждений отсутствует. В случае сверхпроводников, согласно теории БКШ, энергия  $|\varepsilon_k|$  должна быть заменена на  $E_k$ , причем

$$E_k = (\varepsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2}. \quad (\text{П.11})$$

Самая низкая энергия возбуждения равна теперь  $2\Delta$ : в спектре возбуждений имеется щель. Для создания возбуждения необходимо разрушить куперовскую пару, поэтому энергетическая щель должна быть примерно равна энергии связи пары, т. е.  $\Delta \sim E_p$ . Для равной нулю температуры точный результат таков:

$$2\Delta(0) = 4\hbar\omega_D \exp\{-1/N(0)V\} = 3,52k_B T_c, \quad (\text{П.12})$$

где второе из этих выражений следует из (П.9).

Разность свободных энергий сверхпроводящего и нормально-го состояний при  $T_c$  обращается в нуль; следовательно, и  $E_p$ , и  $\Delta$  стремятся к нулю при  $T_c$  и  $\Delta$  зависит от температуры:  $\Delta = \Delta(T)$ . Зависимость  $\Delta$  от  $T$  изображена на фиг. 25.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson P. W., Journ. Phys. Chem. Solids, 11, 26 (1959).
2. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R., Phys. Rev., 108, 1175 (1957).
3. Cooper L. N., Phys. Rev., 104, 1189 (1956).
4. Fröhlich H., Phys. Rev., 79, 845 (1950).
5. Lynton E. A., Superconductivity, 3rd ed., Methuen, London, 1969. (См. перевод: Э. Литтон, Сверхпроводимость, изд-во «Мир», М., 1971.)



# БИБЛИОГРАФИЯ

## I. Жидкий гелий и сверхпроводимость

1. *London F.*, Superfluids, vol. I (Superconductivity), vol. II (Superfluid Helium), Wiley, New York, 1954, repr. Dover, New York, 1964. Классическая работа, в которой впервые было подчеркнуто сходство между сверхпроводимостью и сверхтекучестью.
2. *Progress in Low Temperature Physics*, ed. C. J. Gorter, North-Holland, Amsterdam, vol. I, 1955; vol. II, 1957; vol. III, 1961; vol. IV, 1964; vol. V, 1967; vol. VI, 1970.  
В каждый том входит ряд обзоров по различным вопросам физики низких температур.
3. *Proceedings of the International Conferences on Low Temperature Physics (LT)*:  
LT 7 Toronto 1960, ed. G. M. Graham and A. C. Hollis Hallett, Univ. of Toronto Press, 1961.  
LT 8 London 1962, ed. R. O. Davies, Butterworth, London, 1963.  
LT 9 Columbus 1964, ed. J. G. Daunt, D. O. Edwards, F. J. Milford and M. Yaqub, Plenum Press, New York, 1965.  
LT10 Moscow 1960, ed. M. P. Malkov, Viniti, Moscow, 1967. Москва 1960, ред. М. П. Малков (ВИНИТИ, Москва, 1961).  
LT11 St. Andrews 1968, ed. J. F. Allen, D. M. Finlayson and D. M. McCall, Univ. of St. Andrews, 1968.  
LT12 Kyoto 1970, ed. E. Kanda, Academic Press of Japan, Tokyo, 1971.  
LT13 Boulder 1972, ed. W. O'Sullivan, K. D. Timmerhaus, E. F. Hammel, Plenum Press, New York, 1973.  
LT14 Otaniemi 1975, North-Holland, American Elsevier Publishing Company, 1975.
4. Brewer D. F. (ed.), *Quantum Fluids (Proceeding of the Sussex University Symposium 1965)*, North-Holland, Amsterdam, 1966.  
Содержит ряд ценных статей.
- 5\*\*. *Физика низких температур*, ИЛ, М., 1959. Сборник переводов статей по физике низких температур из двух томов *Handbuch der Physik*, Springer, Berlin, 1956.

## II. Жидкий гелий

1. *Atkins K. R.*, *Liquid Helium*, Cambr. Univ. Press, London, 1959.  
Четкое введение в предмет; особое внимание уделено двухжидкостной модели.
2. *Careri G.* (ed.), *Liquid Helium. Proceedings of the Enrico Fermi International School of Physics (course XXI)*, Varenna, Academic Press, London, 1963.  
Сборник обзорных статей.
3. *Халатников И. М.*, *Теория сверхтекучести*, Физматгиз, М., 1971.  
Освещен вклад советских физиков в теорию жидкого гелия.
4. *Wilks J.*, *The Properties of Liquid and Solid Helium*, Clarendon Press, Oxford, 1967.  
Обширный обзор, особенно в области эксперимента.

5. *Donnelly R. J.*, Experimental Superfluidity, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1967.  
Несмотря на заглавие, в книге наряду с важными экспериментальными результатами обсуждаются различные аспекты теории.
6. *Keller W. E.*, Helium-three and Helium-four, Plenum Press, New York, 1969.  
Содержит обширную библиографию.
7. *Allen J. F.* (ed.), Superfluid Helium (Proceedings of the St. Andrews University Symposium 1965), Acad. Press, London, 1965.  
Статьи, посвященные некоторым вопросам сверхтекучести.
- 8\*\* *Кеезом В.*, Гелий, ИЛ, М., 1949.

### III. Сверхпроводимость

#### А. Основные проблемы

1. *Shoenberg D.*, Superconductivity, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London, 1952. (См. перевод: *Д. Шенберг*, Сверхпроводимость, ИЛ, М., 1955.)  
Изложение состояния проблемы до появления теории БКШ с детальным рассмотрением термодинамики и промежуточного состояния.
2. *Lynnton E. A.*, Superconductivity, 3rd ed., Methuen, London, 1969.  
(См. перевод: *Е. А. Линтон*, Сверхпроводимость, изд-во «Мир», М., 1971.)  
Краткий и четкий вводный обзор.
3. *Schrieffer J. R.*, Theory of Superconductivity, Benjamin, New York, 1964. (См. перевод: *Дж. Шриффер*, Теория сверхпроводимости, изд-во «Наука», М., 1970.)
- \* 4. *Rickayzen G.*, Theory of Superconductivity, Wiley, New York, 1965.  
В книгах Шриффера и Рикайзена подробно рассмотрена микротерия.
5. *de Gennes P. G.*, Superconductivity of Metals and Alloys, Benjamin, New York, 1966. (См. перевод: *П. Де Жен*, Сверхпроводимость металлов и сплавов, изд-во «Мир», М., 1968.) Оригинальная книга, в основном посвященная теории; особенно полезны разделы о сверхпроводниках II рода и о теории Гинзбурга—Ландау.
6. *Rose-Innes A. C.*, *Rhoderick E. H.*, Introduction to Superconductivity, Pergamon, Oxford, 1969. (См. перевод: *А. Роуз-Иннс*, *Е. Родерик*, Введение в физику сверхпроводимости, изд-во «Мир», М., 1972.)  
Ясное введение в физику сверхпроводимости.
7. *Kuper C. G.*, Theory of Superconductivity, Clarendon, Oxford, 1969.  
Полезное введение в теорию сверхпроводимости.
8. *Parks R. D.*, Superconductivity, vols. 1 and 2, Dekker, New York, 1969.  
Подробная обзорная работа.
9. *Williams J. E. C.*, Superconductivity and its Applications, Pion, London, 1970.  
Книга содержит подробное обсуждение свойств необратимых сверхпроводников II рода.
- 10\*. *Grassie A. D. C.*, The Superconducting State, Sussex Univ. Press, 1975.
- 11\*\*. Сверхпроводимость. Библиографический указатель 1911—1970 гг. изд-во «Наука», М., 1975.
- 12\*\*. *Гинзбург В. Л.*, Сверхпроводимость, изд-во АН СССР, М., 1946.
- 13\*\*. *Боголюбов Н. Н.*, *Толмачев В. В.*, *Ширков Д. В.*, Новый метод в теории сверхпроводимости, изд-во АН СССР, М., 1958.
- 14\*\*. Теория сверхпроводимости, ИЛ, М., 1960.  
Сборник переводов ряда статей по микротерии сверхпроводимости (в числе этих статей находится и основная работа БКШ).
- 15\*\*. *Бардин Дж.*, *Шриффер Дж.*, Новое в изучении сверхпроводимости Физматгиз, М., 1962.
- 16\*\*. *Буккель В.*, Сверхпроводимость, изд-во «Мир», М., 1975.

- 17\*\*. Булаевский Л. Н., Гинзбург В. Л., Жарков Г. Ф., Киржниц Д. А., Копеев Ю. В., Максимов Е. Л., Хомский-Д. И., Проблема высокотемпературной сверхпроводимости, изд-во «Наука», М., 1977.

### Б. Специализированные книги

1. *Saint-James D., Sarma G., Thomas F. J.*, Type II. Superconductivity, Pergamon, Oxford, 1969. (См. перевод: Д. Сан-Жам, Г. Сарма, Е. Томас, Сверхпроводимость второго рода, изд-во «Мир», М., 1970.)
  2. *Campbell A., Evetts J. E.*, Critical Currents in Superconductors, Taylor and Francis, London, 1972. (См. перевод: А. Кемпбелл, Дж. Иветтс, Критические токи в сверхпроводниках, изд-во «Мир», М., 1975.)
  3. *Solymar L.*, Superconductive Tunnelling and Applications, Chapman and Hall, London, 1972. (См. перевод: Л. Солимар, Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применения, изд-во «Мир», М., 1974.)
- 4\*\*. Кулик И. О., Янсон И. К., Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах, изд-во «Наука», М., 1970.
- 5\*\*. Гейликман Б. Т., Кресин В. З., Кинетические и нестационарные явления в сверхпроводниках, изд-во «Наука», М., 1972.
- 6\*\*. Коэн М., Глэдстоун Г., Иенсен М., Шриффер Дж., Сверхпроводимость полупроводников и переходных металлов, изд-во «Мир», М., 1974.

### В. Труды конференций

Кроме конференций по физике низких температур можно упомянуть следующие:

1. International Conference on the Science of Superconductivity, Colgate, 1963. Опубликовано: *Rev. Mod. Phys.*, 36, 1—334 (1964).
2. International Conference on the Science of Superconductivity, Stanford, 1969. Опубликовано: «Superconductivity», ed. F. Chilton, North-Holland, Amsterdam, 1971.
3. Symposium on Applied Superconductivity, 1970. Опубликовано: *Journ. Appl. Phys.*, 42, 1—189 (1970).
4. Applied Superconductivity Conference, Annapolis, Maryland, 1972, IEEE Publication No. 72CH0682-5-TABSC.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Андроникашвили эксперимент 14
- Безвихревой поток 65, 74, 130
- Бернулли уравнение 67, 79
- Вина модель 153, 186
- БКШ взаимодействие 291
- БКШ конденсация 293
- в атомных ядрах 284
- в  $He^+$  282
- в нейтронных звездах 286
- в сверхпроводниках 43
- БКШ теория 33, 289
- Бозе — Эйнштейна конденсация 19
- в жидком гелии 42
- в сверхпроводниках 43
- в слабо взаимодействующем газе 58
- критическая температура 37, 41
- Бозе — Эйнштейна статистика 19, 38
- Взаимное трение 73, 138
- Взаимодействие, обусловленное фононами 33, 289
- и сопротивление при комнатной температуре 290
- связь с туннелированием квазичастиц 113
- Векторный потенциал 24
- и линия магнитного потока 144
- Вихревые кольца в  $HeII$  140, 173, 180, 184
- Вихревые нити
- в  $HeII$  19, 123, 131, 161, 163
- в нейтронных звездах 287
- в сверхпроводниках см. Решетка линий потока
- радиус сердцевин 132, 269
- структура сердцевин 144, 162, 184
- упругость 137
- Вихревой охладитель 182
- Возбуждений спектр
- для  $HeII$  49, 71
- для сверхпроводников 34, 296
- Вращение  $HeII$  18, 130
- Второй звук 18, 90
- во вращающемся  $HeII$  139
- Вязкость  $HeII$  12, 68
- Гелий I 11
- теплопроводность 276
- Гелий II 11
- Гельмгольца энергия
- в теории ГЛ 227
- в теории Ландау 222
- зависимость от параметра порядка 223
- температурная зависимость 224, 225
- Геометрия образца и промежуточное состояние 26
- Гиббса энергия
- в  $HeII$  66, 93
- в теории ГЛ 227
- вблизи поля  $H_{c2}$  251, 280
- для сверхпроводящей пленки 254
- Гинзбурга — Ландау параметры и значение  $\kappa$  235
- температурная зависимость 224
- Гинзбурга — Ландау теория 221
- область применимости 263
- Гинзбурга — Питаевского уравнения 267
- Гортера — Казимира теория
- температурная зависимость глубины проникновения 29, 104
- температурная зависимость поля  $H_{cb}$  28
- Гравитационное течение  $HeII$  76, 79, 83, 173, 212
- Граничные условия
- в  $HeII$  70, 86, 269
- в теории ГЛ 229
- периодические 65
- Двухжидкостная модель
- вблизи  $T_\lambda$  270
- $HeII$  14, 58
- сверхпроводников 27, 35
- Дефекты структуры
- влияние на критический ток в смешанном состоянии 171
- и необратимые кривые намагничивания 152
- Джозефсона эффекты 189
- измерение  $h/e$  209
- предсказание для  $HeII$  211
- эффекты на переменном токе 205, 206
- Диссипация энергии 70
- и вязкость 67
- и сверхтекучая критическая скорость 74, 76, 81
- и сдвиг фазы 163
- Жидкий  $He^+$  282
- теплоемкость 283
- «Залечивания» длина см. Когерентности
- длина, Вихревая нить, Радиус сердцевин
- Изинга модель 271
- Изотопический эффект 33, 289, 294
- Импеданс поверхностный
- метод измерения 98
- определение 98
- сверхпроводников 105, 109
- Инфракрасное поглощение в сверхпроводниках 110
- Ионы в  $HeII$  140
- Иорданского сила 140
- Квазичастицы 49
- Квант потока 124
- и линия потока 144, 161
- экспериментальные доказательства 127
- Квантование макроскопическое 44
- и квантование циркуляции 121
- и уравнение Лондонов 103
- Квантовый интерферометр 194
- Кипение жидкого  $He^+$  11, 16
- Когерентности длина
- в пределе грязного сверхпроводника 147
- в теории ГЛ 226
- в теории ГП 269
- и поверхностная энергия 149
- и поле  $H_{c2}$  151, 234
- и теплоемкость 21, 234
- и флуктуационные эффекты 273
- как радиус сердцевин вихревой нити 145, 161
- температурная зависимость 146
- электромагнитная 107
- Когерентность фазы 46
- Конденсат
- в  $HeII$  19, 42, 59
- в идеальном бозонном газе 19, 42
- в сверхпроводниках 43
- и сверхтекучесть 47
- «источение» 43, 59
- Конденсата волновая функция 44, 59, 164, 267
- амплитуда 45, 59, 85
- фаза 45, 59, 85
- Крип потока 157
- Критическая сверхтекучая скорость
- во вращающемся  $He II$
- — — для образования вихревых нитей 136, 162
- — — перекрытия сердцевин вихрей 137, 162
- в  $HeII$
- — — для линий магнитного потока 145

- Критическая сверхтекучая скорость в He II  
 — — диссипация 75, 76, 81  
 — — и вихри 173  
 — — измерение 74, 75, 82, 174  
 — — критерий Ландау 54, 173  
 — — теория Лангера — Фишера 175  
 в сверхпроводниках 54
- Критическая температура сверхпроводников 20, 22, 294
- Критические поля  
 перегрева 237, 257  
 переохлаждения 236, 257  
 пленок при переходах второго рода 241  
 пленок с низким  $\kappa$  256  
 сверхпроводящих элементов 22
- Нсб**  
 — в теории ГЛ 231  
 — определение 24  
 — температурная зависимость 27, 28
- Нс1**  
 — определение 30
- Нс2**  
 — вычисления ГЛ 232  
 — и длина когерентности 151, 235  
 — — значение  $\kappa$  152, 235  
 — определение 30  
 — парамагнитный предел 30, 31  
 — температурная зависимость 265
- Нс3**  
 — вариационный метод 278  
 — в теории ГЛ 238  
 — определение 30
- Критический ток  
 влияние дефектов структуры 171  
 в модели Бина 153  
 и крип потока 160  
 при эффекте Джозефсона см. Сверхпроводящие слабые звенья
- Критического состояния модель см. Бина модель
- Купера пара 33  
 в атомных ядрах 284  
 в He\* 282  
 в нейтронных звездах 287  
 и квантование потока 129  
 и конденсация БКШ 44, 294  
 канонический импульс 46  
 энергия связи 292
- Кюри — Вейсса закон 273
- Лангера — Фишера теория 175  
 Ландау критерий сверхтекучести 54, 173  
 Лондонов уравнение 101, 119  
 и волновая функция конденсата 47  
 условие справедливости 108
- Лямбда-точка  
 и аномалия теплоемкости 12  
 и конденсация Бозе — Эйнштейна 20, 37  
 и теория ГП 268  
 коэффициенты переноса вблизи  $T_\lambda$  275
- Магнетометр см. Сквид
- Магнитного потока линии  
 картина поля и тока см. также Решетка линий потока 144  
 квантование 47  
 радиус сердцевин 145
- Магнитные примеси в сверхпроводниках 22, 295
- Магнитные свойства сверхпроводников  
 обзор 23  
 экспериментальные методы 24
- Магнуса сила 125, 138, 165, 174  
 Мейснера эффект 26, 29  
 и уравнение Лондонов 103  
 Метастабильные состояния 154, 175, 179  
 Механокалорический эффект 87  
 Миогосвяные области 102, 121
- Навье — Стокса уравнение 68  
 Намагничивание сверхпроводников 24  
 выше  $T_c$  273  
 результаты ГЛ вблизи  $H_c$  251, 280
- Намагничивание кривые  
 сверхпроводников I рода 25  
 сверхпроводников II рода  
 — — необратимые 29, 150  
 — — обратимые 32, 152
- Нарушенная симметрия 270
- Незатухающий ток, эксперименты  
 в HeII 12, 176  
 в сверхпроводниках 20
- Нейтронные звезды 286  
 Нейтронов рассеяние в HeII 51, 52  
 Непрерывности уравнение 64  
 Нормальная компонента, скорость 14, 67, 139, 270
- Нулевая энергия 9
- Параметр  $\kappa$   
 в пределе грязного сверхпроводника 148  
 как отношение критических полей 152, 235  
 определение 145  
 связь с параметрами ГЛ 235  
 температурная зависимость 147, 252, 266
- Парапроводимость 274  
 Парный потенциал 263
- Паули парамагнетизм  
 предельное критическое поле 30, 295  
 Паули принцип 38, 291
- Первый звук в HeII 18, 50, 54, 90  
 затухание 91, 94  
 и эффект Джозефсона 215
- Перенос тепла в HeII 87
- Пиннинг потока  
 и необратимые кривые намагничивания 153  
 и упругость линий 158
- Пипларда уравнение 106
- Пленки жидкого гелия  
 в теории ГП 269  
 и эффект Джозефсона 213  
 насыщенные 15, 78, 174  
 ненасыщенные 84, 174
- Пленки сверхпроводящие  
 вихревое состояние 245  
 гистерезис в параллельном поле 259  
 критическая толщина 258  
 критические поля при низких  $\kappa$  253  
 критическое поле при фазовом переходе второго рода 241  
 парапроводимость 274  
 фазовая диаграмма 262  
 энергия Гиббса 254
- Плотность  
 нормальной жидкости 14  
 — — температурная зависимость 15  
 сверхтекучей жидкости 14, 60  
 — — температурная зависимость 13, 17, 176
- Плотность состояний  
 квазичастичных в сверхпроводнике 35, 113  
 — — и туннелирование квазичастиц 113  
 частиц в заданном объеме 40
- Поверхностная энергия на границе 148  
 Поверхностный слой 240
- Порядка параметр  
 в теории Ландау 222  
 и нарушенная симметрия 271  
 температурная зависимость 223
- Поток см. Квант потока, Крип потока, Пиннинг потока, Сгустки потока

- Потока преобразователь 200  
 Потока течение 160, 168  
 Промежуточное состояние 26  
 Проникновения глубина  
   анизотропия в чистом Sn 106  
   в теории ГЛ 230  
   зависимость от примесей 105, 108  
   Лондона 104  
   определение 24  
   температурная зависимость 29, 104
- Решетка линий потока 151  
   в пленке 151  
   вычисления ГЛ 246, 278  
 Рейтера — Зондхеймера уравнение 100  
 Ричарда — Андерсона скачки 215  
 Ротоны 50  
   взаимодействие с вихревыми нитями 139  
   теплоемкость 52  
   энергетическая щель 50, 54
- Сверхпроводимость I рода  
   и поверхностная энергия 149  
   кривая намагничивания 25  
   термодинамика 26  
 Сверхпроводимость II рода  
   и поверхностная энергия 149  
   необратимая 32, 152  
   обратимая 30, 150  
   термодинамика 30
- Сверхпроводники  
   влияние примесей на критическую температуру 22, 299  
   — — — кривые намагничивания 29, 32  
   поглощение излучения 109  
   потери на переменном токе 154  
   с сильной связью 118
- Сверхпроводящие слабые звенья  
   виды звеньев 189  
   вольтамперные характеристики (зависимость от параметров контура) 199  
   как детекторы излучения 211  
   критический ток, зависимость от магнитного поля 194  
   — — — температура 193  
   отклик на микроволновое излучение 207
- Сверхпроводящие соленоиды 172  
 Сверхтекучая жидкость, уравнение движения 62  
 Сверхтекучая скорость 14, 45, 63  
   вихревой нити в HeII 132  
   в сверхпроводниках 123  
   линии магнитного потока 144
- Сверхщель 16, 73, 173, 182  
 Свободная энергия см. также Гельмгольца энергия, Гиббса энергия  
   вращающегося HeII 134  
   HeII 268  
   жидкого He<sup>3</sup> 283
- Сгустки потока  
   и измерения шума 168  
   объем 161  
   определение 158
- Сквид 194  
   использование в экспериментах 128, 275  
   как магнетометр 200
- Скин-эффект  
   аномальный 99  
   нормальный 96
- Смешанное состояние  
   вычисления ГЛ 246  
   определение 29  
   протекание тока 166  
   с сопротивлением 167  
   термоманнитные эффекты 170  
   шум 170
- Соотношение неопределенности 60, 191  
 Спин 37  
 Сплавы сверхпроводящие, магнитные свойства 28  
 Субстациональная производная 64
- Температура возникновения сверхтекучего потока 84  
 Тепловые возбуждения в HeII 43, 48  
 Тепловые флуктуации  
   выше критической температуры 272, 275  
   Лангера — Фишера теория  
   ниже критической температуры см. Крип потока
- Теплоемкость  
   идеального газа Бозе — Эйнштейна 12  
   и энергетическая щель 36  
   сверхпроводников, температурная зависимость 21, 44  
 Теплопроводность 16  
 Термодинамика  
   сверхпроводников I рода 26  
   сверхпроводников II рода 30
- Термомеханический эффект 17  
 Течение HeII без диссипации 12, 18, 72  
 Третий звук 84, 92  
 Туннелирование, зависимость от толщины барьера 112  
 Туннелирование квазицестц 111  
   выражение для тока 116  
   и плотность фононных состояний 117  
   через SS'-контакт 113  
   через SS'-контакт 115  
   через SN-контакт 115  
   схема эксперимента 111
- Турбулентность  
   нормальной жидкости 14, 72, 140  
   сверхпроводящей жидкости 74, 140
- Фазовая диаграмма  
   He<sup>3</sup> 10  
   He<sup>4</sup> 9  
   сверхпроводящих пленок в параллельном поле 262
- Ферми — Дирака статистика 38  
 Фиске скачки 209  
 Флуктуации см. Тепловые флуктуации  
 Флюксонид  
   вывод 124  
   и линия потока 145, 161
- Фононы  
   в HeII 50  
   в одноатомной решетке 49  
   теплоемкость 52
- Фонтанирование 17, 87  
   во вращающемся HeII 131
- Химический потенциал 60, 164, 182, 212  
   для идеального газа бозонов 38  
   для пленки гелия 78, 174
- Циркуляция квант 122, 125, 161
- Четвертый звук 93
- Эйлера уравнение 65  
 Элементы сверхпроводящие, критическая температура и критические поля 222  
 Энергетическая щель для сверхпроводников  
   в теории БКШ 296  
   и волновая функция конденсата 46  
   и критическая скорость 54  
   и критическая температура 34  
   и теплоемкость 36  
   температурная зависимость 35, 36
- Энтропия  
   HeII 19, 87  
   сверхпроводящей фазы 278  
   сохранение 68
- Ядерной оболочки модель 284

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие авторов . . . . .	7
<b>Глава 1. Сверхтекучие жидкости и макроскопическое квантование</b> . . . . .	<b>9</b>
§ 1.1. Основные свойства жидкого $He^4$ . . . . .	9
§ 1.2. Основные свойства сверхпроводников . . . . .	20
§ 1.3. Конденсация Бозе — Эйнштейна . . . . .	37
§ 1.4. Волновая функция конденсата . . . . .	44
§ 1.5. Элементарные возбуждения и сверхтекучесть . . . . .	47
Задачи . . . . .	55
Литература . . . . .	56
<b>Глава 2. Гелий II. Двухжидкостная модель</b> . . . . .	<b>58</b>
§ 2.1. Введение . . . . .	58
§ 2.2. Основы теории сверхтекучести . . . . .	58
§ 2.3. Уравнение для скорости сверхтекучей части жидкости . . . . .	63
§ 2.4. Движение нормальной жидкости . . . . .	67
§ 2.5. Обобщенная двухжидкостная модель . . . . .	69
§ 2.6. Течение гелия II в каналах . . . . .	73
§ 2.7. Пленки жидкого гелия . . . . .	78
§ 2.8. Эффект фонтанирования и перенос тепла в гелии II . . . . .	86
§ 2.9. Распространение звука в гелии II . . . . .	88
Задачи . . . . .	93
Литература . . . . .	94
<b>Глава 3. Сверхпроводники. Электродинамика и туннелирование</b> . . . . .	<b>96</b>
§ 3.1. Введение . . . . .	96
§ 3.2. Микроволновой скин-эффект в нормальном металле . . . . .	96
§ 3.3. Уравнения Лондонов для сверхпроводимости . . . . .	101
§ 3.4. Уравнение Пипарда . . . . .	106
§ 3.5. Сверхпроводники в микроволновом и инфракрасном полях . . . . .	109
§ 3.6. Туннелирование электронов . . . . .	111
Задачи . . . . .	118
Литература . . . . .	120
<b>Глава 4. Вихревые состояния</b> . . . . .	<b>121</b>
§ 4.1. Квантование циркуляции . . . . .	121
§ 4.2. Квантованные вихри в гелии II . . . . .	129
§ 4.3. Квантованные вихри в сверхпроводниках . . . . .	144
§ 4.4. Сравнение вихрей в сверхпроводниках и в гелии II . . . . .	161
§ 4.5. Динамика вихревых состояний . . . . .	163
Задачи . . . . .	184
Литература . . . . .	187
<b>Глава 5. Эффекты Джозефсона</b> . . . . .	<b>189</b>
§ 5.1. Введение . . . . .	189
§ 5.2. Основные уравнения . . . . .	191
§ 5.3. Эффекты на постоянном токе . . . . .	192
§ 5.4. Эффекты на переменном токе . . . . .	205

§ 5.5. Поиски эффектов Джозефсона в жидком гелии . . . . .	211
Задачи . . . . .	218
Литература . . . . .	219
<b>Глава 6. Теория Гинзбурга — Ландау . . . . .</b>	<b>221</b>
§ 6.1. Введение . . . . .	221
§ 6.2. Теория фазовых переходов второго рода Ландау . . . . .	222
§ 6.3. Уравнения Гинзбурга — Ландау . . . . .	226
§ 6.4. Критические поля в случае переходов второго рода . . . . .	232
§ 6.5. Вихревая решетка Абрикосова . . . . .	246
§ 6.6. Фазовые переходы в параллельном поле для пленок с малым значением $\kappa$ . . . . .	253
§ 6.7. Связь теории ГЛ с микроскопической теорией . . . . .	262
§ 6.8. Уравнения Гинзбурга — Питаевского для гелия II . . . . .	267
§ 6.9. Нарушенная симметрия . . . . .	270
§ 6.10. Флуктуационные эффекты . . . . .	272
Задачи . . . . .	277
Литература . . . . .	280
<b>Глава 7. Эффекты образования пар в других системах . . . . .</b>	<b>282</b>
§ 7.1. Введение . . . . .	282
§ 7.2. Жидкий $He^3$ . . . . .	282
§ 7.3. Атомные ядра . . . . .	284
§ 7.4. Нейтронные звезды . . . . .	286
<b>Приложение. Сверхпроводимость. Элементы микроскопической теории . . . . .</b>	<b>289</b>
Литература . . . . .	296
<b>Библиография . . . . .</b>	<b>297</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>300</b>

ИБ № 400

ДР. ТИЛЛИ, ДЖ. ТИЛЛИ

Сверхтекучесть и сверхпроводимость

Редактор И. Г. Нахимсон Художник В. Е. Карпов Художественный редактор В. Сафаров  
Технический редактор З. И. Резник Корректор И. И. Алексеева

Сдано в набор 26/X 1976 г. Подписано к печати 24/II 1977 г. Бум. кн. журн. 60×901/16—  
—9,5 бум. л., 19 печ. л. Уч.-изд. л. 18,40. Изд. № 2/8756 Цена 1 р. 96 к. Зав. № 01584

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции»  
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам  
издательства, полиграфии и книжной торговли. Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9