А. Ф. ТИМОФЕЕВ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

11-5-5

Редактор *В. А. Калакуцкий*. Техн. редакторы: *Н. Я. Мурашова* и *Р. А. Негримовская*.

Подписано к печати 16/IV 1948 г. Печ. л. 27. Уч.-издат. л. 29,67. Тип. знак. в печ. л. 43 950. Тираж 10 000. А-01784. Цена книги 10 р. 50 к. Переплёт 2 р.
Заказ № 1031.

16-я типография треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР.
Москва, Трёхпрудный, 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава VII. Интегрирование выражений, содержащих вместе тригонометрические и алгебраические функции

Глава VIII. Интегрирование дифференциальных выражений, содержащих показательные и логарифмические функции, отдельно и вместе с другого рода функциями, алгебраическими и тригонометрическими

Глава IX. **Интегрирование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции отдельно и вместе с другого рода функциями**

ПРЕДИСЛОВИЕ

В большей части руководств по высшей математике вопрос об интегрировании функций одного независимого переменного не имеет достаточно полного освещения, вследствие чего очень часто учащиеся не получают ясного представления о том, какие функции интегрируются в конечном виде, для каких это интегрирование невозможно и какие приёмы целесообразно применять в том или ином случае для различных видов функций. Имея это в виду, автор в настоящей книге стремился изложить вопрос с возможной полнотой, обратив особое внимание на практику интегрирования, введя при этом большое количество примеров. Таким образом, книга эта может служить, во-первых, справочником для лиц, желающих получить скорый ответ относительно той или иной квадратуры, а во-вторых, пособием для учащихся, желающих пополнить и углубить свои знания в этом вопросе.

Считаю долгом выразить свою благодарность члену-корреспонденту Академии наук СССР, профессору В. В. Голубеву за данные им ценные указания.

Автор

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

§ 1. Задача интегрирования. Символы

Задача интегрирования обратна задаче дифференцирования. В дифференциальном исчислении на основании данных соотношений между переменными мы определяем соотношения между переменными и их дифференциалами. В интегральном исчислении, наоборот, на основании данных соотношений между переменными и дифференциалами мы определяем соотношения, связывающие переменные.

В основе дифференциального исчисления находится задача нахождения производной или дифференциала функции. Обратная задача, нахождение функции по её дифференциалу, составляет основную задачу интегрального исчисления. Самый процесс нахождения этой функции называется интегрированием, и функция, определяемая таким образом, — первообразной функцией или интегралом по отношению к своему дифференциалу.

Для обозначения интеграла употребляется символ $\int$, представляющий старинную деформированную букву S, начальную букву слова «summa». В теории определённых интегралов интегрирование рассматривается как процесс суммирования. Исторически к понятию об интеграле подошли именно с этой стороны, чем и объясняется введение символа, вошедшего потом в общее употребление. Некоторые авторы, однако, желая подчеркнуть обратность интегрирования по отношению к дифференцированию, пользуются термином «антидифференциал» и обозначают интеграл символом D^{-1}.

§ 2. Неопределённый интеграл

Обозначая производную функции $F(x)$ через $f(x)$, имеем:

$$1)\quad dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

и на основании предыдущего задачу интегрирования можем определить как нахождение такой функции $F(x)$, дифференциал которой равен данному дифференциальному выражению $f(x)\,dx$; эту функцию мы и называем интегралом. Пользуясь принятым в интегральном исчислении символом, равенство 1) можем представить в виде

$$2)\quad F(x)=\int F'(x)\,dx=\int f(x)\,dx,$$

и определить $F(x)$ как такую функцию, дифференциал которой равен данному, находящемуся под знаком интеграла, дифференциальному выражению.

Дифференцируя равенство 2), имеем $dF(x)=d\int f(x)\,dx$, в то же время по равенству 1) $dF(x)=f(x)$ и таким образом $d\int f(x)\,dx=f(x)$, так что символы d и $\int$ в том порядке, как они написаны, взаимно погашаются.

Из дифференциального исчисления мы знаем, что если $dF(x)=f(x)\,dx$, то и дифференциал всякой функции вида $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная (постоянная в том смысле, что не зависит от x), также равен $f(x)\,dx$;

$$3)\quad d[F(x)+C]=F'(x)\,dx=f(x)\,dx.$$

Для интеграла, следовательно, имеем более общее выражение

$$4)\quad \int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

и, таким образом, если интеграл какой-либо функции $f(x)$ равен $F(x)$, то он равен также и всякой другой функции вида $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная. Для интеграла, следовательно, имеем бесчисленное множество выражений, которые, однако, могут отличаться друг от друга лишь произвольным слагаемым, не зависящим от переменной интегрирования x. В силу этой неопределённости интеграл $\int f(x)\,dx$ называется неопределённым, или иногда, общим интегралом.

Легко можем убедиться, что неопределённость интеграла исчерпывается произвольностью входящей в его выражение постоянной C. Допустим, что для интеграла $\int f(x)\,dx$ имеем два различных выражения $F_1(x)$ и $F_2(x)$, так что

$$\int f(x)\,dx=F_1(x)\quad \text{и}\quad \int f(x)\,dx=F_2(x)..$$

Дифференцируя эти равенства и вычитая из одного другое, получаем:

$$dF_1(x)-dF_2(x)=0,\quad d[F_1(x)-F_2(x)]=0\quad \text{и}\quad F_1(x)-F_2(x)=C.$$

Таким образом, функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ разнятся только на постоянную, и, очевидно, равенство 4) даёт общее выражение неопределённого интеграла.

Интегрируя равенство 1), имеем $\int dF(x) = \int f(x)\,dx$, с другой стороны, по равенству 4) $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и, следовательно,

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Таким образом, символы $\int$ и d, если d следует за $\int$, также взаимно погашаются, но только с прибавлением произвольной постоянной C.

§ 3. Особенности интегрирования как действия обратного

Так как, операции интегрирования и дифференцирования взаимно обратны, то всякая формула дифференцирования должна дать путём обращения соответствующую формулу интегрирования.

Так, имея формулы a) $d\sin x = \cos x\,dx$, b) $de^x = e^x dx$, c) $d\ln x = \frac{dx}{x}$, d) $d\operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}$, e) $d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и т. д., легко можем написать формулы интегрирования:

$$\text{a)} \int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad \text{b)} \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\text{c)} \int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \quad \text{d)} \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\text{e)} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \text{ и т. д.}$$

Для интегралов основных элементарных функций находим выражения именно этим путём. Но для всей совокупности сложных и разнообразных функций, с которыми оперирует математика, вопрос интегрирования, конечно, не может быть разрешён таким порядком.

Задача дифференцирования решается весьма просто. Зная производные простейших функций и основные правила дифференцирования, мы легко находим дифференциал всякого выражения. Теорию и практику интегрирования также можно построить на основании нескольких элементарных формул, но вопрос интегрирования гораздо сложнее.

Многие функции вообще, как часто выражаются, не интегрируются, что надлежит понимать в том смысле, что интегралы их нельзя выразить какой-либо конечной комбинацией элементарных функций. К числу их относятся уже такие простые функции, как $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $x \operatorname{tg} x$, $\frac{x}{\cos x}$, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{x}{\ln \sin x}$, $\sqrt{\sin x}$, $\sqrt{\cos x}$ и т. д. Наряду с этим интегрирование выполняется для гораздо более сложных выражений.

Самый процесс интегрирования, несмотря на то, что он требует применения лишь нескольких основных формул, значительно сложнее, но вся сложность, как видно будет далее, относится по существу не к интегрированию, но к приведению интегрируемого выражения к такому виду, который дал бы возможность выразить интеграл по основным формулам. Усвоение приёмов, которые даёт в этих целях интегральное исчисление, достаточное знакомство со свойствами различных функций и с характером их преобразований дают возможность найти в каждом конкретном случае целесообразный путь для приведения интегрируемого выражения к нужному виду. Объяснение сложности, с которой мы встречаемся в вопросе интегрирования, находится в том, что интегрирование—действие обратное. Все обратные действия более сложны по сравнению с соответствующими им прямыми. Деление сложнее, чем умножение, извлечение корня или логарифмирование сложнее возвышения в степень. Любое выражение мы легко возводим в степень с целым показателем; в то же время для извлечения корня мы не имеем общего правила и извлечь корень можем лишь в самых простейших случаях.

Далее, всякое обратное действие приводит к новым понятиям в математике. Вычитание привело к отрицательным величинам, деление — к дробным, извлечение корня—к мнимым и несоизмеримым. При прямом действии — сложении — с отрицательными числами не встречаемся, при возвышении в степень не встречаемся с мнимыми или несоизмеримыми.

К аналогичному положению приходим и при интегрировании как действии, обратном дифференцированию. Дифференцирование всякой из элементарных функций, если под последними будем понимать все алгебраические функции, показательные, логарифмические, тригонометрические и круговые, или какое бы то ни было соединение их, приводит также к элементарным функциям. При интегрировании же приходим к тому положению, что для многих интегралов нет соответствующих выражений в области элементарных функций в форме какой-либо конечной комбинации их; такие интегралы, как говорят, не вычисляются в конечном виде через элементарные функции и сами по себе представляют другие функции, выходящие из круга элементарных.

§ 4. Основная теорема интегрального исчисления

Употребляемое ниже выражение «интегрируемая функция» следует понимать только в изложенном смысле, т. е. так, что интеграл функции может быть выражен какой-либо конечной комбинацией элементарных функций.

Вообще же всякая непрерывная функция теоретически является интегрируемой, хотя интеграл её может быть выражен в конечном виде лишь для сравнительно ограниченного круга функций.

В основании такого заключения находится следующая основная теорема интегрального исчисления.

Теорема. *Всякая непрерывная функция имеет первообразную, т. е. является производной некоторой другой функции.*

Для доказательства этой теоремы (метод Лебега) докажем предварительно следующую лемму Лебега*).

Лемма. *Правильно сходящийся ряд производных даёт в сумме также производную.*

Правильно сходящимся рядом называется такой бесконечный, составленный из каких-либо функций, ряд, все члены которого по абсолютной величине соответственно менее членов другого знакоположительного сходящегося числового ряда.

Для доказательства леммы рассмотрим два бесконечных ряда:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots \tag{a}$$

и

$$F(x)=F_1(x)+F_2(x)+\ldots+F_n(x)+\ldots \tag{b}$$

При этом ряд (b) составлен из непрерывных для некоторого отрезка ($a\leqslant x\leqslant b$) функций, а все члены ряда (a) соответственно являются производными членов ряда (b), так что

$$F_1'(x)=f_1(x),\quad F_2'(x)=f_2(x),\quad \ldots,\quad F_n'(x)=f_n(x),\ \ldots$$

В то же время ряд (a) — правильно сходящийся, и все члены его соответственно менее членов какого-либо знакоположительного сходящегося ряда $A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots$

Требуется доказать, что сумма $f(x)$ ряда (a) есть также производная суммы $F(x)$ ряда (b).

Возьмём на отрезке (a, b) какое-нибудь число c и рассмотрим ряд

$$F(x)=$$
$$=[F_1(x)-F_1(c)]+[F_2(x)-F_2(c)]+\ldots+[F_n(x)-F_n(c)]+\ldots \tag{c}$$

Легко видеть, что этот ряд есть ряд правильно сходящийся. В самом деле, на основании теоремы Лагранжа о конечном приращении имеем равенство

$$F_n(x)-F_n(c)=(x-c)\,F_n'(\xi)=(x-c)\,f_n(\xi),$$

*) В курсе Поссе и Привалова «Интегральное исчисление», гл. III дано другое доказательство теоремы.

где ξ—число, лежащее на отрезке (c, x), т. е. и на основном отрезке (a, b). Поэтому $|f_n(\xi)| < A_n$; в то же время

$$|x-c| < |b-a|.$$

Следовательно,

$$|F_n(x) - F_n(c)| < (b-a) A_n,$$

и ряд (с), имея абсолютные величины своих членов соответственно меньшими $|b-a|A_1$, $|b-a|A_2, \ldots, |b-a|A_n, \ldots$, есть ряд, правильно сходящийся.

Для того чтобы доказать, что сумма $F(x)$ ряда (с) есть первообразная для суммы $f(x)$ ряда (а), достаточно доказать, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x),$$

т. е. что

$$\left| \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x) \right| < \varepsilon,$$

при достаточно малом Δx и ε, меньшем всякого сколь угодно малого положительного числа.

Так как ряд $A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ принят нами сходящимся, то его можно остановить на таком члене A_m, чтобы остающаяся часть ряда была бы меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, т. е. чтобы

$$A_{m+1} + A_{m+2} + \ldots < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Соответственным образом расчленим и оба ряда (а) и (b) каждый на две части, так что

$$f(x) = [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)] + [f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \ldots] = \\ = \sigma(x) + \rho(x)$$

и

$$F(x) = \\ = [F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_m(x)] + [F_{m+1}(x) + F_{m+2}(x) + \ldots] = \\ = S(x) + R(x).$$

Тогда имеем:

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x) = \\ = \left[\frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} - \sigma(x) \right] + \left[\frac{R(x+\Delta x) - R(x)}{\Delta x} \right] + [-\rho(x)].$$

Рассмотрим три слагаемых правой части равенства отдельно.

Так как для всякого n имеем $F'_n(x) = f_n(x)$ и m — число постоянное, выбранное для принятого сколь угодно малого ε, то $S'(x) = \sigma(x)$, и потому для достаточно малого Δx имеем

$$\left| \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} - \sigma(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Рассматривая второе слагаемое правой части, можем написать

$$\frac{R(x+\Delta x) - R(x)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{F_{m+1}(x+\Delta x) - F_{m+1}(x)}{\Delta x} + \frac{F_{m+2}(x+\Delta x) - F_{m+2}(x)}{\Delta x} + \ldots,$$

или, на основании теоремы Лагранжа,

$$\frac{R(x+\Delta x) - R(x)}{\Delta x} = f_{m+1}(x + \theta_{m+1}\Delta x) + f_{m+2}(x + \theta_{m+2}\Delta x) + \ldots,$$

где θ_{m+1}, и θ_{m+2}, ... представляют числа в границах между 0 и 1.

Но так как

$$f_{m+1}(x) < A_{m+1}, \quad f_{m+2}(x) < A_{m+2}, \ldots$$

и

$$A_{m+1} + A_{m+2} + \ldots < \frac{\varepsilon}{3},$$

то

$$\frac{R(x+\Delta x) - R(x)}{\Delta x} < A_{m+1} + A_{m+2} + \ldots < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Наконец, для третьего слагаемого $[-\rho(x)]$ имеем

$$|\rho(x)| = |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \ldots| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, все три слагаемых правой части равенства, каждое в отдельности, меньше выбранного сколь угодно малого числа $\frac{\varepsilon}{3}$, так что

$$\left[\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x) \right] < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}, \text{ т. е. } < \varepsilon,$$

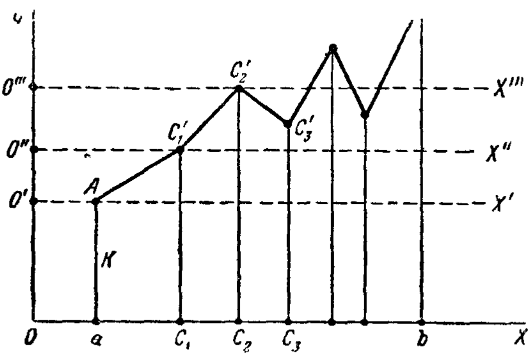
и, следовательно, функция $f(x)$ является производной функции $F(x)$.

Далее, для доказательства основной теоремы рассмотрим некоторые свойства полигональной функции.

Полигональная функция и её свойства. Функция $P(x)$, непрерывная на отрезке (a, b), называется полигональной, если можно точками $c_1, c_2, \ldots, c_m$ разделить её на такие части (ac_1), $(c_1 c_2), \ldots, (c_m b)$, чтобы в каждой из них функция $P(x)$

являлась линейной. Геометрически такая функция представляется ломаной линией. Точки $a, c_1, c_2, \ldots, c_m, b$, в которых соединяются две соседние прямые, называются вершинами полигональной линии.

Вполне понятно, что разность двух полигональных функций $P_1(x) - P_2(x)$ представляет также полигональную функцию. Отрезок (a, b) мы всегда можем разделить на такие части, чтобы в каждой из них функция $P_1(x)$ была бы линейной, а затем каждую из этих частей разделить на части, в каждой из которых функция $P_2(x)$ была бы линейной. Таким образом, отрезок (a, b) разделится на части, в каждой из которых и та и другая функции являются линейными, разность же двух линейных функций представляет также линейную функцию.



Черт. 1.

Полигональная линия называется элементарной, если она состоит только из двух прямых, из которых одна лежит на оси абсцисс. Соответствующая этой линии функция $p(x)$ называется элементарной полигональной функцией.

С в о й с т в о I. *Всякая полигональная функция может быть разложена на сумму постоянного числа k и ограниченного числа m элементарных полигональных функций:*

$$P(x) = k + p_1(x) + p_2(x) + \ldots + p_m(x).$$

Пусть полигональная линия $Y = P(x)$ представлена на чертеже ломаной линией AB с начальной ординатой точки A, равной k. Если начальную ординату $aA = k$ вычтем из $P(x)$, то разность $[P(x) - k]$ представится геометрически полигональной линией $Y = P(x) - k$ с начальной ординатой, равной нулю. Пусть элементарной полигональной линии $O'AC_1'$ соответствует элементарная полигональная функция $p_1(x)$. Вычтя эту функцию из $[P(x) - k]$, получим разность $[P(x) - k - p_1(x)]$, которая изобразится полигональной линией $O''C_1'B$, начальная ордината которой равна нулю уже до точки C_1'. Допустим далее, что элементарной полигональной линии $O''C_1'C_2'$ соответствует элементарная полигональная функция $p_2(x)$, и вычтем эту функцию из функции $[P(x) - k - p_1(x)]$; полученная разность $[P(x) - k - p_1(x) - p_2(x)]$ изобразится тогда полигональной линией $O'''C_2'B$

с начальной ординатой, равной нулю уже вплоть до точки C_2'. Продолжая этот процесс последовательного вычитания элементарных полигональных функций, приходим, наконец, к полигональной линии

$$Y = P(x) - k - p_1(x) - p_2(x) - \ldots - p_m(x),$$

у которой ордината равна нулю во всём отрезке (a, b), и таким образом получаем тождество

$$P(x) = k + p_1(x) + p_2(x) + \ldots + p_m(x),$$

выявляющее указанное свойство полигональной функции.

Свойство II. *Всякая полигональная функция $P(x)$ является производной какой-либо функции $F(x)$,* т. е. $P(x) = F'(x)$.

На основании предыдущего свойства имеем $P(x) = k + \sum_{i=1}^{i=m} p_i(x)$. Первое слагаемое, постоянное k, является производной линейной функции kx: $k = (kx)'$. Для остальных членов суммы рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\alpha_i}{2} x^2$. Геометрически её можно представить как отрезок прямой, лежащей на оси абсцисс влево от начала координат, и части параболы, касающейся оси абсцисс вначале. Для отрицательного x и x, равного нулю, эта функция равна нулю, для x положительного она равна $\frac{\alpha_i}{2} x^2$. Производная функции для x отрицательного и равного нулю также равна нулю, а для x положительного равна $\alpha_i x$. Таким образом, если рассматривать функцию $f_i(x)$ как первообразную, то её производной является элементарная полигональная функция $p_i(x)$, геометрически выражаемая двумя прямыми: одной, лежащей на оси абсцисс, и другой, определяемой уравнением $Y = \alpha_i x$. Следовательно,

$$p_i(x) = f_i'(x) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{i=m} p\,(x) = \sum_{i=1}^{i=m} f_i'(x).$$

Для функции $P(x)$ мы имели $P(x) = k + \sum_{i=1}^{i=m} p_i(x)$; но так как каждое слагаемое правой части имеет первообразную, то имеется и функция $F(x) = kx + \sum_{i=1}^{i=m} f_i(x)$, которая является первообразной для всей суммы, и, следовательно, функция $P(x)$ есть производная.

После этого переходим к доказательству основной теоремы.

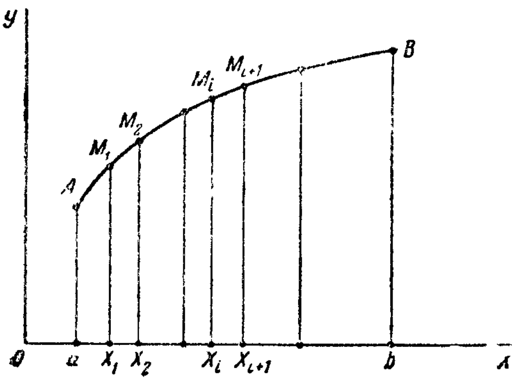
Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке (a, b). В силу непрерывности для всякого, сколь угодно малого, числа ε будет иметь место неравенство

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

если значения x' и x'' аргумента настолько близки друг к другу, что абсолютная величина разности между ними меньше некоторого числа η, зависящего от ε, т. е. при

$$|x'-x''|<\eta.$$

Разделим отрезок (a, b), лежащий на оси абсцисс, точками $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots$ на части, меньшие η, и восставим в этих точках и в точках a и b перпендикуляры до пересечения с кривой $y=f(x)$ в точках $A, M_1, M_2, \ldots, M_i, M_{i+1}, \ldots, B$. Соединив прямолинейными хордами каждые две соседние из этих точек, получим полигональную линию $Y=P(x)$, вписанную в дугу AB кривой.



Черт. 2.

Возьмём на отрезке (a, b) какую-нибудь точку x и допустим, что она находится на отрезке (x_i, x_{i+1}), так что $x_i<x<x_{i+1}$. В силу того, что $|x_i-x_{i+1}|<\eta$, мы имеем также $|x-x_i|<\eta$ и в силу непрерывности функции

$$|f(x)-f(x_i)|<\varepsilon. \tag{*}$$

Так как вершины M_i и M_{i+1} полигональной линии лежат на кривой $f(x)$, то $P(x_i)=f(x_i)$ и $P(x_{i+1})=f(x_{i+1})$, а так как $|f(x_{i+1})-f(x_i)|<\varepsilon$, то

$$|P(x_{i+1})-f(x_i)|<\varepsilon.$$

Отсюда видно, что функция $P(x)-f(x_i)$, равная нулю на одном конце отрезка (x_i, x_{i+1}), на другом конце меньше по абсолютной величине числа ε, т. е. на всём протяжении отрезка (x_i, x_{i+1}) она меньше ε, что можно выразить неравенством

$$|P(x)-f(x_i)|<\varepsilon.$$

В силу этого неравенства и неравенства (*) имеем:

$$|f(x)-P(x)|<2\varepsilon.$$

Полученный результат выражает следующее положение: *для всякой непрерывной функции $f(x)$ всегда имеется такая полиго-*

нальная функция $P(x)$, что разность между ними по абсолютной величине меньше числа 2ε, как бы мало ни было положительное число ε.

Примем $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, и пусть полигональная функция $\tilde{P}_n(x)$ удовлетворяет этому положению, так что

$$|f(x) - \tilde{P}_n(x)| < \frac{2}{2^n}.$$

При безграничном увеличении n имеем $f(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{P}_n(x)$. Представим функцию $\tilde{P}_n(x)$ в виде ряда

$$\tilde{P}_n(x) = \tilde{P}_1(x) + [\tilde{P}_2(x) - \tilde{P}_1(x)] + \ldots + [\tilde{P}_n(x) - \tilde{P}_{n-1}(x)].$$

Каждый член этого ряда является полигональной функцией, так как представляет разность полигональных функций. При $n \to \infty$ ряд этот сходящийся, и сумма его равна $f(x)$. Обозначив общий член ряда $[\tilde{P}_n(x) - \tilde{P}_{n-1}(x)]$ через $P_n(x)$, имеем:

$$P_n(x) = [\tilde{P}_n(x) - \tilde{P}_{n-1}(x)] = [f(x) - \tilde{P}_{n-1}(x)] - [f(x) - \tilde{P}_n(x)] \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - \tilde{P}_{n-1}(x)| + |f(x) - \tilde{P}_n(x)| < \frac{2}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^n},$$

т. е.

$$P_n(x) < \frac{3}{2^{n-1}}.$$

В результате функция $f(x)$ представляется в виде ряда, составленного из полигональных функций

$$f(x) = P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_n(x) + \ldots,$$

в котором каждый член $P_n(x)$ менее $\frac{3}{2^{n-1}}$. Ряд же

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{3}{2^{n-1}} + \ldots$$

представляет бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с суммой, равной 6.

Таким образом, ряд, выражающий функцию $f(x)$, представляет правильно сходящийся ряд полигональных функций, а так как в силу свойства II полигональной функции всякая полигональная функция $P_n(x)$ является производной какой-либо функции $F_n(x)$, сумма же правильно сходящегося ряда производных согласно лемме Лебега является также производной, то функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$.

Таким образом, основная теорема интегрального исчисления доказана, и, следовательно, теоретически может быть выражен, в конечном ли виде или в виде бесконечного ряда, интеграл всякой непрерывной функции.

§ 5. Основные формулы

I) Постоянный множитель может быть вынесен за знак интеграла:

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx. \tag{1}$$

Дифференцируя обе стороны написанного равенства, приходим к тождеству, чем и убеждаемся в правильности высказанного положения и выражающей его формулы.

II) Интеграл всякой алгебраической суммы дифференциальных выражений равен алгебраической сумме интегралов этих выражений:

$$\int [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\pm\ldots]\,dx = \\ = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx \pm \ldots \tag{2}$$

Дифференцируя это равенство, приходим к тождеству

$$[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\pm\ldots]\,dx = f_1(x)\,dx + f_2(x)\,dx - f_3(x)\,dx \pm \ldots,$$

и этим убеждаемся в его правильности.

Из полученной формулы следует, что если интегрируемую функцию $f(x)$ можем представить в виде алгебраической суммы функций $f_1, f_2, f_3, \ldots$, то вопрос интегрирования функции $f(x)$ сводится к вычислению интегралов каждой из функций $f_1, f_2, f_3, \ldots$ в отдельности, и если эти интегралы можем вычислить, то этим и решается вопрос интегрирования функции $f(x)$.

III) Равенство 3) § 2, $d[F(x)+C] = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$, из которого исходим в определении понятия о неопределённом интеграле, сохраняет свой вид и значение также и в том случае, если переменная x, в свою очередь, представляет функцию какой-либо другой переменной и $F(x)$ является, таким образом, функцией от функции. То же самое, очевидно, можем высказать и по отношению к равенству 4) § 3, $\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x)+C$, которое выражает то же соотношение между функциями $F(x)$ и $f(x)$, что и равенство 3), и только лишь написано в обратном порядке. Таким образом, равенство $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, для которого $F'(x)=f(x)$, остаётся справедливым, если x является функцией какой-либо другой переменной z, $x=\varphi(z)$, и, следовательно, можем написать равенства

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,d\varphi(z) = F[\varphi(z)]+C = F(x)+C. \tag{3}$$

Отсюда следует, что, подставляя $x=\varphi(z)$, мы можем перейти для интегрируемого дифференциального выражения к новому переменному z. Если при этом равенство $x=\varphi(z)$ выбрано так, что подстановка приводит к такому выражению, приёмы интегрирования которого уже известны, то, выполнив интегрирование и возвратившись для результата к прежней переменной, получаем выражение для вычисляемого интеграла.

IV) В дифференциальном исчислении имеем формулу

$$d(uv)=u\,dv+v\,du,$$

выражающую правило дифференцирования произведения. Из неё находим $u\,dv=d(uv)-v\,du$ и, интегрируя, получаем:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{4}$$

Для интеграла $\int d(uv)$, в силу § 2, получаем $uv+C$, но постоянную опускаем, соединяя её с той постоянной, которую должен дать второй интеграл правой части.

Формула (4) называется формулой интегрирования по частям. На основании этой формулы, представив интегрируемое дифференциальное выражение $f(x)\,dx$ в виде произведения $u\,dv$, можем свести вычисление интеграла $\int f(x)\,dx$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, и если таким путём приходим к интегралу, выражение которого известно, или приходим к интегралу более простого выражения, то в первом случае формула даёт возможность найти сразу выражение вычисляемого интеграла, во втором же—упростить задачу интегрирования.

V) Обращая формулу дифференцирования $dx^n=nx^{n-1}\,dx$, получаем $\int nx^{n-1}\,dx=x^n+C$, откуда, заменяя n на $n+1$,

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C. \tag{5}$$

Полученная формула даёт выражение интеграла при всяком рациональном значении n и только при $n=-1$, т. е. для интеграла $\int \frac{dx}{x}$, теряет значение.

VI) a) На основании формулы $d\ln|x|=\frac{dx}{x}$ находим:

$$\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C. \tag{6}$$

b) Пользуемся последней формулой для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{x\pm a}$; для этого представляем его в виде $\int \frac{d(x\pm a)}{x\pm a}$ и после этого находим:

$$\int \frac{dx}{x\pm a}=\ln|x\pm a|+C. \tag{7}$$

Отрицательные величины не имеют вещественных логарифмов, и в соответствии с этим выражение под знаком логарифма взято по абсолютной величине.

Это замечание относится ко всем логарифмическим функциям, которые получаются при интегрировании, и в дальнейшем, если в выражении интеграла будем иметь логарифм, выражение под знаком логарифма будем принимать взятым по абсолютной величине. Для интеграла $\int \frac{dx}{x-a}$, представляя его в виде $\int \frac{d(x-a)}{x-a}$ или в виде $\int \frac{-dx}{a-x} = \int \frac{d(a-x)}{a-x}$, можем притти как к выражению $\ln(x-a)$, так и к выражению $\ln(a-x)$. Переменная x может изменяться в различных промежутках, поэтому и получаются различные выражения для интеграла, для $x > a$ — первое и для $x < a$ — второе.

c) Представив далее интеграл $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ в виде

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}\, dx = \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] dx,$$

на основании формул (2) и (7) получаем:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C. \tag{8}$$

VII) Вычисляя тем же приёмом интеграл $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$, получаем для него мнимое логарифмическое выражение

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{(x-ai)(x+ai)} = \frac{1}{2ai} \ln \frac{x-ai}{x+ai} + C.$$

Взяв же за основание формулу дифференцирования $d \operatorname{arctg} \frac{x}{a} = \frac{a\, dx}{a^2+x^2}$, получаем:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \tag{9}$$

В следующей главе (§ 5) на основании известной формулы Эйлера будет выявлена связь между логарифмическими и круговыми функциями, и мы увидим, что оба выражения, полученных для интеграла, эквивалентны.

Взяв за основание формулу $d \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} = -\frac{a\, dx}{x^2+a^2}$, для того же интеграла получаем:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C_1.$$

Так как $\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}=\frac{\pi}{2}$, то каждое из полученных выражений легко приводится к виду другого. Так,

$$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C=\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\right)+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C_1.$$

Часто различные пути интегрирования дают для одного и того же интеграла внешне не сходные между собой выражения. Объяснение заключается в том, что выражение, получаемое для интеграла, может включать некоторое постоянное слагаемое, выделенное из произвольной постоянной.

Так, замечая, что $\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}1$, выражение для того же интеграла $\int\frac{dx}{x^2+a^2}$ можем представить в виде

$$\frac{1}{a}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{\pi}{4}\right)+C_2=\frac{1}{a}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\operatorname{arctg}1\right)+C_2,$$

и по соответствующей формуле для сложения круговых функций получаем:

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{a+x}{a-x}+C_2.$$

Точно так же

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\operatorname{arctg}1\right)+C_3=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x-a}{x+a}+C_3.$$

Однако каждый раз, получая для интеграла не сходные по внешности выражения, можем убедиться, принимая во внимание произвольность постоянной, что эти выражения эквивалентны.

VIII) Обращая формулы дифференцирования

$$d\sin x=\cos x\,dx \quad \text{и} \quad d\cos x=-\sin x\,dx,$$

получаем:

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C \tag{10}$$

и

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C. \tag{11}$$

На основании равенств раздела III можно ввести новую переменную под знаком интеграла. Полагая для полученных формул $x=\frac{\pi}{2}-y$, так что $dx=-dy$, видим, что эти формулы взаимно следуют друг из друга.

IX) Представив интегралы $\int \operatorname{tg} x\,dx$ и $\int \operatorname{ctg} x\,dx$ в виде

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} \quad \text{и} \quad \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \frac{d\sin x}{\sin x},$$

на основании формулы (6) получаем:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\cos x + C = \ln\sec x + C \tag{12}$$

и

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\sin x + C = -\ln\operatorname{cosec} x + C. \tag{13}$$

Заменяя в этих формулах x на $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, также легко получаем каждую из них из другой.

X) *Интеграл* $\int \sec x\,dx$ можем представить в виде:

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d\sin x}{1-\sin^2 x},$$

и на основании формулы (8) находим для него

$$\int \sec x\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C = \ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C = \\ = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

Таким образом, получаем формулу

$$\int \sec x\,dx = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C. \tag{14}$$

Интеграл $\int \operatorname{cosec} x\,dx$ представляем в виде

$$\int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} d\frac{x}{2} = \int \operatorname{tg}\frac{x}{2} d\frac{x}{2} + \int \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx,$$

и на основании формул (12) и (13) получаем:

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C. \tag{15}$$

Полученные формулы также следуют одна из другой при замене x на $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

XI) Обращая формулы дифференцирования

$$d\operatorname{tg} x = \sec^2 x\,dx \quad \text{и} \quad d\operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec}^2 x\,dx,$$

получаем:

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \tag{16}$$

и

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C. \tag{17}$$

Эти формулы также следуют одна из другой.

XII) На основании формулы $da^x = a^x \ln a\,dx$ получаем:

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \tag{18}$$

и как частный случай её, при $a = e$,

$$\int e^x\,dx = e^x + C. \tag{19}$$

Выведенные формулы будем считать основными для интегрирования. Некоторые из формул, как мы видели, являются следствием других, и число их можно было бы сократить.

Формулы (2), (3) и (4) лежат в основании трёх приёмов интегрирования:

1) разложения интеграла на сумму более простых интегралов,

2) введения нового переменного или подстановки и

3) интегрирования по частям.

Примеры

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{2ab} \ln \frac{a+bx}{a-bx} + C,$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}x\right) + C.$

или

$\displaystyle = \frac{1}{2ab} \ln \frac{bx+a}{bx-a} + C,$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{4 \sin \frac{x}{3}} = \frac{3}{4} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{6} + C.$

вообще

$\displaystyle = \frac{1}{2ab} \ln \left|\frac{a+bx}{a-bx}\right| + C.$ 6) $\displaystyle\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C.$

3) $\displaystyle\int \sec^2 2ax\,dx = \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) + C.$

5) $$\int \frac{dx}{\cos\left(\frac{3}{4}\pi - 2x\right)} = -\frac{1}{2} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{5}{8}\pi - x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg}\left(\frac{5}{8}\pi - x\right) + C.$$

Представив интеграл в виде $\int -\frac{d\cos x}{\cos^2 x}$, находим для него выражение по формуле (5). К тому же результату приходим, обращая формулу дифференцирования $d\sec x = \sec x \operatorname{tg} x\, dx$.

7) $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C$. 8) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C$.

9) $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$. 10) $\int \frac{dx}{1-\cos x} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C$;

Указание. $1+\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$.

11) $\int \frac{\sin x}{a - b\cos x}\, dx = \frac{1}{b} \ln (a - b\cos x) + C$.

12) $\int \frac{\cos x\, dx}{a^2 + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \sin x\right) + C$.

13) $\int \frac{\cos x\, dx}{a^2 - b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{2ab} \ln \frac{a + b\sin x}{a - b\sin x} + C$.

14) $\int \frac{\sin 2x\, dx}{b^2 \sin^2 x \pm a^2} = \frac{1}{b^2} \ln (b^2 \sin^2 x \pm a^2) + C$.

15) $\int \frac{\sin 2x\, dx}{b^2 \cos^2 x \pm a^2} = -\frac{1}{b^2} \ln (b^2 \cos^2 x \pm a^2) + C$.

Указание. $\sin 2x\, dx = 2\sin x \cos x\, dx = d\sin^2 x = -d\cos^2 x$.

16) $\int \frac{dx}{4 - \cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C$.

Умножая числитель и знаменатель на $\sec^2 x$, приводим интеграл к виду $\int \frac{d\operatorname{tg} x}{4\operatorname{tg}^2 x + 3}$.

17) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + C$. 18) $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln (C \ln x)$.

19) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \operatorname{arctg} (\ln x) + C$. 20) $\int \frac{dx}{x(1 - \ln x)} = \ln \frac{C}{1 - \ln x}$.

21) $\int \frac{dx}{x\left(1 + \ln \frac{x}{a}\right)} = \ln \left[C\left(1 + \ln \frac{x}{a}\right)\right]$.

§ 6. Метод разложения

Этот метод, как было уже указано, основывается на формуле (2). Наиболее просто его применение, когда интегрируемое выражение само по себе уже представляет алгебраическую сумму отдельных функций, интегралы которых известны. Такое выражение представляет, например, полином различных степеней переменного. На основании формул (1) и (2) интеграл его равен сумме интегралов вида $A \int x^n\, dx$, где A — положительный или отрицательный коэффициент; каждый из этих интегралов выражается по формуле (5) для $n \neq -1$ и по формуле (6), если $n = -1$.

В общем же случае интегрируемую функцию следует ещё привести соответствующими преобразованиями к сумме отдельных слагаемых. Эта задача, если и может представлять затруднения, то во всяком случае не со стороны интегрирования. В следующей главе мы увидим, что вся теория интегрирования рациональных алгебраических функций строится на том свойстве их, что теоретически они всегда могут быть разложены на сумму элементарных, целых или дробных функций, интегралы которых выражаются по основным элементарным формулам.

Интеграл всякой рациональной алгебраической дроби, знаменателем которой является двучлен вида $ax \pm b$ или $a^2 \pm b^2x^2$, выделением целой части дроби разлагается на сумму интегралов вида

$$A\int x^n\,dx,\quad A\int\frac{dx}{ax\pm b},\quad A\int\frac{dx}{a^2\pm b^2x^2},$$

или

$$A\int\frac{x\,dx}{a^2\pm b^2x^2},$$

где A — положительная или отрицательная постоянная. Все интегралы вычисляются по основным формулам.

Примеры

22) $$\int\left(\frac{1-\sqrt{x}+x}{x}\right)^2 dx = x-\frac{1}{x}-4\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}+3\ln x+C.$$

23) $$\int\frac{(2-\sqrt[3]{x^2})(x+\sqrt{x})}{\sqrt{x^3}}\,dx = 4\sqrt{x}-\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\ln x+C.$$

24) $$\int\frac{2x-1}{2x+3}\,dx = x-2\ln(2x+3)+C.$$

25) $$\int\frac{2x-5}{3x^2-2}\,dx = \frac{1}{3}\ln(3x^2-2)-\frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}+C.$$

(формулы (2), (1), (6) и (8)).

26) $$\int\frac{2x-5}{3x^2+2}\,dx = \frac{1}{3}\ln(3x^2-2)+\frac{5}{\sqrt{6}}\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)+C.$$

27) $$\int\sin x\sin\frac{1}{4}x\,dx = \frac{2}{3}\sin\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}\sin\frac{5}{4}x+C.$$

Для разложения интеграла пользуемся формулой тригонометрии $\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$.

28) $\int \cos 3x \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{14}\sin 7x + C.$

29) $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x-a)\,dx = \frac{1}{\operatorname{tg} a}\ln(1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} x) - x + C.$

Интегрируемое выражение преобразуем следующим образом:

$$\frac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a)}{1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} x}\,dx = \frac{\sec^2 x - (1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} x)}{1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} x}\,dx = \frac{1}{\operatorname{tg} a}\,\frac{d(1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} x)}{1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} x} - dx.$$

30) a) $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$

b) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

31) $\int \sin x \cos^3 x\,dx = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$

или

$$= \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{4}\sin^4 x + C_1.$$

32) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$

33) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$

Умножая числитель на $(\sin^2 x + \cos^2 x)$, приходим к сумме двух интегралов: $\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Или, иначе, замечая, что $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x$, представляем интеграл в виде $2\int \frac{d\,2x}{\sin^2 2x}$ и получаем для него выражение $-2\operatorname{ctg} 2x + C$.

34) $\int \operatorname{ctg}^2 \frac{3}{4}x\,dx = -\frac{4}{3}\operatorname{ctg}\frac{3}{4}x - x + C.$

35) $\int (1+\operatorname{tg} 2x)^2\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x + \ln\sec 2x + C.$

36) $\int (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2\,dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 4x + C.$

37) $\int (\operatorname{tg} x - \sec x)^2\,dx = 2(\operatorname{tg} x - \sec x) - x + C.$

38) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x} = \sec x - \operatorname{tg} x + x + C.$

Указание. Умножить числитель и знаменатель на $(1-\sin x)$.

39) $\int \frac{\cos x\,dx}{1-\cos x} = -\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x - x + C.$

40) $\int (e^{\frac{x}{2}} - 1)^3 e^{-\frac{x}{2}}\,dx = e^x - \frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + 3x + C.$

§ 7. Метод подстановки или введения нового переменного

Основанием метода являются равенства (3). Вместо переменной интегрирования x, полагая x равным какой-либо функции другого переменного, $x=\varphi(z)$, вводим переменную z, с тем расчётом, чтобы притти под знаком интеграла к более простому выражению, приёмы интегрирования которого уже известны. По вычислении интеграла на основании того же равенства $x=\varphi(z)$ возвращаемся для результата к прежней переменной.

Вообще заметим, что если нам известно выражение какого-либо интеграла, $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то на основании равенства (3) можем получить выражения бесчисленного множества интегралов, внешне совершенно отличных от первого; вместо x надо лишь подставлять какие-либо функции другого переменного.

Так, подставляя в равенство $\int \frac{dx}{x}=\ln x+C$

$$\text{a) } x=\cos\varphi,\quad \text{b) } x=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},\quad \text{c) } x=e^{z}-e^{-z},$$

$$\text{d) } x=\sqrt{y+a}-\sqrt{y-a},\quad \text{e) } x=y+\sqrt{y^2\pm a^2},\quad \text{f) } x=\arccos\frac{z-1}{z}$$

и т. д., соответственно получаем:

$$\text{a) } \int \operatorname{tg}\varphi\,d\varphi=-\ln\cos\varphi+C,$$

$$\text{b) } \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}=\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+C,$$

$$\text{c) } \int \frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}\,dz=\ln(e^z-e^{-z})+C,$$

$$\text{d) } \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}}=-2\ln(\sqrt{y+a}-\sqrt{y-a})+C,$$

$$\text{e) } \int \frac{dy}{\sqrt{y^2\pm a^2}}=\ln(y+\sqrt{y^2\pm a^2})+C,$$

$$\text{f) } \int \frac{dz}{z\sqrt{2z-1}\arccos\frac{z-1}{z}}=-\ln\arccos\frac{z-1}{z}+C$$

и т. д.

От интеграла элементарной, алгебраической, рациональной функции приходим, таким образом, к интегралам тригонометрических, показательных, иррациональных алгебраических и круговых функций и находим выражения этих интегралов, зная выражение первого. Наоборот, те же подстановки для последних интегралов приводят к начальному интегралу $\int \frac{dx}{x}$, и после этого, очевидно, легко можно было бы найти их выражения, так как выражение интеграла $\int \frac{dx}{x}$ уже известно.

На практике метод подстановки большей частью применяется в последнем виде. Вместо того, чтобы вводить новую переменную, полагая прежнюю равной какой-либо функции новой, мы, наоборот, некоторую функцию прежней переменной x принимаем за новую переменную z и исходим при подстановке из равенства $\varphi(x)=z$. Это равенство, конечно, определяет и x, как функцию от z. В простейших случаях вся задача интегрирования сильно облегчается, если интегрируемую функцию $f(x)$ можем представить в виде $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$; полагая тогда $\varphi(x)=z$, получаем:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx=\int f[\varphi(x)\,d\varphi(x)]=\int f(z)\,dz,$$

и приходим, таким образом, к интегралу более простого выражения.

Подстановками в таком виде, по существу, мы уже пользовались для многих из предшествующих интегралов. Так, при выводе формулы (7) для интеграла $\int\frac{dx}{x\pm a}$ мы предварительно представили его в виде $\int\frac{d(x\pm a)}{x\pm a}$, и выражение для него нашли, принимая за переменную функцию $(x\pm a)$, т. е. представляя интеграл как бы в виде $\int\frac{dz}{z}$, где $z=x\pm a$. То же самое можно сказать относительно вычисления интегралов $\int\operatorname{tg}x\,dx$ или $\int\frac{x\,dx}{(a^2-b^2x^2)^n}$.

Подстановками $\cos x=z$ для первого и $a^2-b^2x^2=z$ для второго эти интегралы как бы приводились к интегралам $-\int\frac{dz}{z}$ и $-\frac{1}{2b^2}\int z^{-n}\,dz$, которые выражаются по формулам (6) и (5).

В сложных случаях целесообразность той или иной подстановки не так очевидна. Достаточный навык, знакомство с применением метода по отношению к основным интегралам дают возможность найти в соответствующих случаях нужную форму подстановки. При этом надо иметь в виду конечную цель подстановки, — она должна привести к более простому в отношении интегрирования выражению, и, если можно, то сразу к выражению, приём интегрирования которого уже известен.

В следующей главе мы рассмотрим интегрирование рациональных алгебраических выражений и увидим, что интегралы их теоретически всегда вычисляются в конечном виде. Поэтому интегралы других функций часто приводятся к рациональным алгебраическим формам. Этим путём упрощается задача интегрирования, и самая возможность перехода для интегрируемой функции к рациональной алгебраической форме решает вопрос и её интегрируемости.

I) Интеграл $\int F\{x, (ax+b)^{p/q}(ax+b)^{r/s}, \ldots, \}\,dx$, для которого F — знак рациональной алгебраической функции, подстановкой $ax+b=z^n$, где n — наименьшее кратное всех знаменателей $q, s\ldots$, приводится к рациональной алгебраической форме. При этой подстановке имеем:

$$x=\frac{1}{a}(z^n-b), \quad (ax+b)^{p/q}=z^{p\frac{n}{q}},$$

$$(ax+b)^{r/s}=z^{r\frac{n}{s}}, \ \ldots, \quad dx=\frac{n}{a}z^{n-1}\,dz,$$

и, подставляя эти выражения, получаем под знаком интеграла рациональную функцию.

При $b=0$, $a=1$ имеем интеграл $\int F\{x, x^{p/q}, x^{r/s}, \ldots,\}\,dx$, который приводится к интегралу рациональной функции подстановкой $x=z^n$, где n — наименьшее кратное чисел $q, s, \ldots$ Этой подстановкой, очевидно, можно воспользоваться для рационализации и вычисления интегралов в примерах 22 и 23.

II) a) Интеграл $\int F\{x, \sqrt{x^2\pm a^2}\}\,dx$ подстановкой $x+\sqrt{x^2\pm a^2}=z$, на основании которой

$$x=\frac{z^2\mp a^2}{2z}, \quad \sqrt{x^2\pm a^2}=\frac{z^2\pm a^2}{2z} \quad \text{и} \quad dx=\frac{z^2\pm a^2}{2z}\,dz,$$

приводится к интегралу

$$\int F\left\{\frac{z^2\mp a^2}{2z}, \frac{z^2\pm a^2}{2z}\right\}\frac{z^2\pm a^2}{2z^2}\,dz.$$

Если F определяет рациональные отношения между x и $\sqrt{x^2\pm a^2}$, то под знаком последнего интеграла имеем рациональное выражение.

b) Для интеграла $\int F\{x, \sqrt{a^2-x^2}\}\,dx$ предыдущая подстановка не годится, и для этого интеграла пользуемся подстановкой $\sqrt{a^2-x^2}=(a-x)z$. После возведения в квадрат находим:

$$x=a\,\frac{z^2-1}{z^2+1}, \quad \sqrt{a^2-x^2}=\frac{2az}{z^2+1}, \quad dx=\frac{4az\,dz}{(z^2+1)^2},$$

и, подставляя, приводим интеграл к виду

$$\int F\left\{a\,\frac{z^2-1}{z^2+1}, \quad \frac{2az}{z^2+1}\right\}\frac{4az\,dz}{(z^2+1)^2}.$$

Если F — знак рациональной функции, то приходим, следовательно, к интегралу рационального выражения.

Для обратной подстановки имеем $z=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

c) Интегралы $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ — основные элементарные интегралы рассматриваемого вида — указанными подстановками приводятся к интегралам $\int \frac{dz}{z}$ и $\int \frac{2dz}{1+z^2}$, которые выражаются по формулам (6) и (9). Возвращаясь для результата к прежней переменной, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln (x+\sqrt{x^2 \pm a^2}) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

Обращая формулы дифференцирования

$$d \arcsin \frac{x}{a} = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{и} \quad d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

для второго интеграла получаем также

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C' \quad \text{или} \quad = -\arccos \frac{x}{a} + C''.$$

Все три полученных для интеграла выражения, как легко можно убедиться, эквивалентны.

d) Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx \pm cx^2}}$ для верхнего знака может быть представлен в виде $\frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{d(cx+b)}{\sqrt{(cx+b)^2+(ac-b^2)}}$ и для нижнего — в виде $\frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{d(cx-b)}{\sqrt{(ac+b^2)-(cx-b)^2}}$. Подстановками $cx+b=z$ при верхнем знаке и $cx-b=z$ — при нижнем интегралы, следовательно, приводятся к предыдущим, и на основании полученных для них формул находим:

$$\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln (cx+b+\sqrt{c}\,\sqrt{a+2bx+cx^2}) + C$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{cx-b}{\sqrt{ac+b^2}} + C.$$

III) Интегралы $\int F\{x, \sqrt{x^2+a^2}\}\,dx$, $\int F\{x, \sqrt{x^2-a^2}\}dx$ и $\int F\{x, \sqrt{a^2-x^2}\}\,dx$ легко приводятся к рациональным формам также тригонометрическими подстановками. Полагая

$$x = a\,\mathrm{tg}\,\varphi \text{ — для первого интеграла,}$$
$$x = a\sec\varphi \text{ — для второго и}$$
$$x = a\sin\varphi \text{ — для третьего,}$$

получаем:

$$\int F\{x, \sqrt{x^2+a^2}\}\,dx = a\int F\{a\,\mathrm{tg}\,\varphi,\ a\sec\varphi\}\sec^2\varphi\,d\varphi$$
$$\left(\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}\right),$$
$$\int F\{x, \sqrt{x^2-a^2}\}\,dx = a\int F\{a\sec\varphi,\ a\,\mathrm{tg}\,\varphi\}\sec\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi\,d\varphi$$
$$\left(\varphi = \mathrm{arcsec}\,\frac{x}{a}\right),$$
$$\int F\{x, \sqrt{a^2-x^2}\}\,dx = a\int F\{a\sin\varphi,\ a\cos\varphi\}\cos\varphi\,d\varphi$$
$$\left(\varphi = \arcsin\frac{x}{a}\right).$$

Таким образом приходим к интегралам рациональных тригонометрических выражений, если функция F — рациональна относительно своих аргументов.

Конечно, одинаково возможны подстановки:

$$x = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi,\quad x = a\,\mathrm{cosec}\,\varphi \text{ и } x = a\cos\varphi,$$

которые приводят к аналогичным результатам.

IV) Полагая $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = z$, имеем:

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2},\quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},\quad \mathrm{tg}\,x = \frac{2z}{1-z^2},\quad \mathrm{ctg}\,x = \frac{1-z^2}{2z},$$
$$\sec x = \frac{1+z^2}{1-z^2},\quad \mathrm{cosec}\,x = \frac{1+z^2}{2z},\quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Подставляя эти выражения, приводим интеграл

$$\int F\{\sin x, \cos x,\ \mathrm{tg}\,x,\ \mathrm{ctg}\,x,\ \sec x,\ \mathrm{cosec}\,x\}\,dx$$

к интегралу

$$\int F\left\{\frac{2z}{1+z^2},\ \frac{1-z^2}{1+z^2},\ \ldots,\right\}\frac{2dz}{1+z^2}.$$

Таким образом, рассматриваемый интеграл тригонометрической функции подстановкой $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = z$ всегда может быть приведён к алгебраической форме. Если F — рациональная функция, то под знаком интеграла получается рациональное алгебраическое выражение.

Когда интегрируемая функция F содержит только чётные степени функции $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$, то для приведения интеграла к алгебраической форме можно пользоваться подстановкой $\operatorname{tg} x = z$, и тогда имеем:

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+z^2}, \quad \cos^2 x = \frac{z^2}{1+z^2}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{z}, \quad \sec^2 x = \frac{1+z^2}{z^2},$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1+z^2 \quad \text{и} \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}.$$

Таким образом приходим к интегралу

$$\int F\left\{\frac{1}{1+z^2}, \frac{z^2}{1+z^2}, z, \ldots,\right\} \frac{dz}{1+z^2}.$$

Разумеется, одинаково возможны в тех же случаях подстановки $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = z$ и $\operatorname{ctg} x = z$.

V) Интеграл $\int F(a^x)\,dx$ подстановкой $a^x = z$ приводится к интегралу $\frac{1}{\ln a}\int F(z)\frac{dz}{z}$. Если F—алгебраическая функция относительно a^x, то мы приходим к интегралу алгебраического выражения.

При $a = e$ имеем:

$$\int F(e^x)\,dx = \int F(z)\frac{dz}{z} \qquad (e^x = z).$$

VI) Всякий интеграл вида $\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}$ $(c>0)$ легко может быть представлен в виде $\int \frac{d(cx+b)}{(cx+b)^2+(ac-b^2)}$. Полагая $cx+b = z$, приходим к интегралу $\int \frac{dz}{z^2+ac-b^2}$.

Выполнив интегрирование соответственно тому, имеем ли $ac-b^2>0$ или <0 и возвращаясь к прежней переменной, получаем:

$$\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{cx+b}{\sqrt{ac-b^2}}, \quad \text{если} \quad ac-b^2>0,$$

и

$$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \ln \frac{\sqrt{b^2-ac}-b-cx}{\sqrt{b^2-ac}+b+cx}, \text{ если } ac-b^2<0.$$

Допущенное условие $c>0$ не ограничивает общности решения, так как введением под знак интеграла множителя (-1) всегда можем от отрицательного c перейти к положительному.

VII) На основании равенств

$$\text{a) } \ln x = z, \quad \text{b) } \arcsin x = z, \quad \text{c) } x = \operatorname{arctg} z,$$

$$\text{d) } \arccos x = z, \quad \text{e) } a^x = z, \quad \text{f) } x = \sec z \quad \text{и} \quad \text{g) } x = \operatorname{cosec} z$$

предлагается ввести новую переменную для интегралов

$$\text{a) } \int F\{x, \ln x\}\,dx, \quad \text{b) } \int F\{x, \arcsin x\}\,dx, \quad \text{c) } \int F\{x, \operatorname{tg} x\}\,dx,$$

$$\text{d) } \int F\{\sqrt{1-x^2}, \arccos x\}\,dx, \quad \text{e) } \int F\{a^x, x\}\,dx,$$

$$\text{f) } \int F\{x, \sqrt{x^2-1}\}\,dx \quad \text{и} \quad \text{g) } \int F\{\sqrt{x^2-1}, \operatorname{arccosec} x\}\,dx.$$

К интегралам каких функций при этом приходим?

Примеры

41) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+5} = \frac{1}{4}\ln\frac{x-5}{x-1} + C.$

Интеграл представляем в виде $\displaystyle\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2-4}$ (подст. $x-3=z$).

42) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{13-6x^3+x^6} = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3-3}{2} + C$ (подст. $x^3=z$ или $x^3-3=z$).

43) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-4x-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x-1) + \frac{2}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}+2-x}{\sqrt{5}-2+x} + C.$

44) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x+1}^2 - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln(1+\sqrt[3]{x+1}) + C.$

45) $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ax}{b}} + C.$

46) $\displaystyle\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{15}(3x^2-2)\sqrt{(1+x^2)^3} + C.$

47) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2} + C$ (подст. $x^2=z$).

48) a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{2}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + C$ (подст. $\sqrt{x^2-a^2}+x=z$),

или

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + C \quad (\text{подст.} \sqrt{x^2-a^2}=z),$$

или

$$= \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x} + C \quad \left(\text{подст. } x = \frac{1}{z}\right),$$

или

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} + C \quad (\text{подст. } x = a\sec\varphi).$$

b) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} + C \text{ (подст. } \sqrt{a^2-x^2} = z(a-x)),$$

или

$$= \frac{1}{2a}\ln = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}} + C \text{ (подст. } \sqrt{a^2-x^2} = z),$$

или

$$= -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C \left(\text{подст. } x = \frac{1}{z}\right),$$

или

$$= \frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C \text{ (подст. } x = a\sin\varphi).$$

c) Аналогично a) и b) предлагается найти **соответствующими** **подстановками** выражения интеграла $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}$.

49) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} = \arcsin\frac{2x-1}{3} + C$$

50) $$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+5}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln(3x-2+\sqrt{3}\sqrt{3x^2-4x+5}) + C.$$

51) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \arcsin(2x-1) + C.$$

52) $$\int \frac{2x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx = -2\sqrt{2+x-x^2} + 2\arcsin\frac{2x-1}{3} + C.$$

53) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{4+x+2\sqrt{2}\sqrt{2+x-x^2}}{x} + C$$
$$\left(\text{подст } x = \frac{1}{z}\right).$$

54) $$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{2+x-x^2}} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x-2} + C \text{ (подст. } x-2 = z).$$

55) $$\int \frac{2+3\sin x}{\sin x(1-\cos x)}dx = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} - 3\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

56) $$\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\operatorname{tg} x\right) + C.$$

57) $$\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{\sin 2x}dx = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} x - \ln\operatorname{tg} x) + C$$

58) $$\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} + C$$

59) $$\int \sqrt[4]{(a^2-4\cos^2 x)^3}\sin 2x\,dx = \frac{1}{7}\sqrt[4]{(a^2-4\cos^2 x)^7} + C$$
$$\text{(подст } \sqrt[4]{a^2-4\cos^2 x} = z)$$

60) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt[3]{a^2-4\sin^2 x}} = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{(a^2-4\sin^2 x)^2}+C.$

61) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2x}-1}} = \frac{1}{\ln a}\operatorname{arcsec}(a^x)+C$ (подст. $a^x = z$ или $\sqrt{a^{2x}-1}=z$).

62) $\displaystyle\int \frac{e^{x/2}\,dx}{\sqrt{e^x-1}} = 2\ln(e^{x/2}+\sqrt{e^x-1})+C$ (подст. $e^{x/2}=z$).

63) $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^n}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{n+1}(\operatorname{arctg} x)^{n+1}+C$, если $n\neq -1$,

$u=\ln\operatorname{arctg} x$, если $n=-1$.

64) $\displaystyle\int \frac{\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)^{3/2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{2}{5}\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)^{5/2}+C.$

65) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\arccos x)^3\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2(\arccos x)^2}+C.$

§ 8. Метод интегрирования по частям

Основанием метода является формула (4) § 5. Представив интегрируемое дифференциальное выражение $f(x)\,dx$ в виде произведения $u\,dv$, где u и v — функции от x, имеем:

$$\int f(x)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Вычисление интеграла $\int f(x)\,dx$ этой формулой сводится к вычислению другого интеграла $\int v\,du$, и, очевидно, приём целесообразен только в том случае, если приходим к интегралу более простому в смысле интегрирования или, в лучшем случае,—к интегралу, приём вычисления которого уже известен.

I) Рассмотрим интеграл $\int f(x)\,U[\varphi(x)]\,dx$, для которого $f(x)$ и $\varphi(x)$—алгебраические функции, а U — логарифмическая или круговая функция от аргумента $\varphi(x)$.

Дифференциал функции U при этих условиях представляет алгебраическое выражение; если U—логарифмическая функция, то $dU = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx$, если U — какая-либо из круговых функций, то dU — также алгебраическое выражение, если, например, $U=\arcsin[\varphi(x)]$, то $dU = d\arcsin[\varphi(x)] = \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}}$ и т. д.

Допустим, что $\int f(x)\,dx = V(x)+C$, так что $f(x)\,dx = dV(x)$. Интеграл, следовательно, может быть представлен в виде $\int U[\varphi(x)]\,dV(x)$ и интегрированием по частям получаем:

$$\int f(x),\ U[\varphi(x)]\,dx = V(x)\cdot U[\varphi(x)] - \int V(x)\,dU[\varphi(x)].$$

Интеграл рационального алгебраического выражения, как будет показано далее, даёт алгебраические, логарифмические и круговые функции. Если функция $V(x)$, полученная в результате вычисления интеграла $\int f(x)\,dx$, — алгебраическая, то под знаком интеграла $\int V(x)\,dU[\varphi(x)]$ имеем алгебраическое выражение, так как dU, как было уже показано, — также алгебраическое выражение. Таким образом, если для интеграла алгебраического множителя $f(x)$ получаем алгебраическое выражение, то вычисление интеграла, в котором другим сомножителем является логарифмическая функция или какая-либо из круговых, сводится приёмом интегрирования по частям к вычислению интеграла только алгебраической функции, и если эта функция интегрируема, то этим решается вопрос интегрируемости и для рассматриваемого интеграла. В том случае, когда под знаком интеграла $\int V(x)\,dU[\varphi(x)]$ получаем рациональную алгебраическую функцию, теоретически интеграл, как было уже отмечено, всегда вычисляется в конечном виде.

Если функция $V(x)$, получающаяся в результате вычисления интеграла $\int f(x)\,dx$, — не алгебраическая, а содержит какие-либо трансцендентные, логарифмические или круговые функции, то интегрированием по частям приходим к интегралу, под знаком которого находится также смешанное выражение, и приём, очевидно, не вносит упрощения в вычисление интеграла.

Полагая для рассматриваемого интеграла $f(x)=1$, имеем интеграл $\int U[\varphi(x)]\,dx$, где U, как было обусловлено,—знак логарифмической или круговой функции и функция $\varphi(x)$ — алгебраическая. Интегрированием по частям тогда имеем

$$\int U[\varphi(x)]\,dx = x\cdot U[\varphi(x)] - \int x\,dU[\varphi(x)],$$

и, таким образом, вычисление интеграла логарифмической или круговой функции, если аргументом их является алгебраическая функция, всегда можем свести к вычислению интеграла только алгебраического выражения; если последнее интегрируемо, то этим путём находим выражение и для вычисляемого интеграла трансцендентвой функции.

Интеграл алгебраической функции вообще соответственно проще интеграла, под знаком которого имеется отдельно или вместе с алгебраическим множителем трансцендентная, логарифмическая или круговая функция. С этой стороны приём интегрирования по частям упрощает задачу вычисления интеграла и часто даёт этим возможность её решения. За немногими исключениями, когда интегрируемое выражение можно представить в виде $F(U)\,dU$ и воспользоваться подстановкой

$U[\varphi(x)]=z$, этот приём даёт единственный прямой путь вычисления для интеграла, под знаком которого имеется логарифмическая или круговая функция.

II) В рассматриваемом случае приём интегрирования по частям приводит к интегралу функции, совершенно отличной по структуре. От интеграла выражения, содержащего алгебраическую и трансцендентную функции, мы приходим к интегралу только алгебраической функции. В других случаях приём ведёт к более простому интегралу, не изменяя общей структуры интегрируемого выражения.

Рассмотрим интеграл $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, для которого в целях простоты исследования примем «m» и «n» целыми и положительными. Для этого интеграла мы не имеем основной формулы, которая сразу давала бы его выражение. Среди формул дифференцирования вообще нет такой формулы, обращением которой мы могли бы получить формулу для выражения этого интеграла.

Представив интеграл в виде

$$\int \sin^m x \cos^{n-1} x\,d\sin x = \int \cos^{n-1} x\,d\,\frac{\sin^{m+1} x}{m+1},$$

интегрированием по частям получаем:

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx =$$
$$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx - \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

и отсюда

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx.$$

Аналогичным путём получаем также

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx.$$

Таким образом, приёмом интегрирования по частям мы можем понизить на две единицы тот и другой показатель степени тригонометрических функций, находящихся под знаком интеграла, и, очевидно, последовательным повторением приёма придём в конце концов в зависимости от того, чётные или нечётные показатели «m» и «n», к одному из интегралов:

$$\int \sin x\,dx,\quad \int \cos x\,dx,\quad \int \sin x \cos x\,dx,\quad \int \sin^2 x\,dx \quad \text{и} \quad \int \cos^2 x\,dx.$$

Для первых двух из них имеем основные формулы (10) и (11), в третьем интегрируемое выражение представляем в виде

$\sin x\, d\sin x$, а в последних двух $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ заменяем их выражениями $\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ и $\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, после чего все три интеграла вычисляются также по основным формулам (5), (10) и (11).

Вместо того, чтобы для приведения интеграла к нужному виду последовательно повторять приём интегрирования по частям, можно прямо пользоваться с этой целью выведенными формулами. Поэтому эти формулы, как и другие формулы того же назначения, называются формулами приведения, или, по терминологии иностранных авторов, рекуррентными формулами.

В дальнейшем изложении будут выведены такие формулы для различных видов интегралов. В своём месте будут даны формулы и для случая, когда показатели степеней m и n — отрицательные.

Смысл и назначение приёма интегрирования по частям для рассмотренного интеграла — понижение степени интегрируемой функции. Общая структура функции остаётся неизменной, но, понижая каждый раз степени, мы приходим в конце концов к наиболее простым интегралам того же вида, для которых получаем выражение по основным формулам.

III) В качестве следующего примера рассмотрим вычисление интеграла $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Этот интеграл имеет важное значение в теории интегрирования рациональных алгебраических функций, но для него также нельзя получить выражения по какой-либо из основных формул или обращением какой-нибудь из формул дифференцирования.

Представив интеграл в виде

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2}\int x d\,\frac{1}{(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},$$

интегрированием по частям получаем:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

Последовательным применением этой формулы, заменяя ею по существу приём интегрирования по частям, приходим в конечном счёте к интегралу $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$, для которого даёт выражение формула (9).

IV) Метод интегрирования по частям является основным для вычисления всех интегралов выражений, представляющих произведение функций различного рода или, в более общем случае, алгебраическую сумму таких произведений. Так, пользуясь этим приёмом для вычисления интеграла $\int x^m e^{nx}\,dx$ и представив его предварительно в виде $\int x^m d\frac{e^{nx}}{n}$, легко получаем формулу

$$\int x^m e^{nx}\,dx=\frac{1}{n}\,x^m e^{nx}-\frac{m}{n}\int x^{m-1}\,e^{nx}\,dx.$$

При m целом и положительном последовательным применением формулы, снижая каждый раз степень алгебраического множителя, приходим к интегралу $\int e^{nx}\,dx$, для которого даёт выражение формула (19).

Тем же приёмом интегрирования по частям, очевидно, может быть вычислен всякий интеграл вида $\int F(x)\,e^{nx}\,dx$, если $F(x)$ — целая рациональная алгебраическая функция.

V) Предлагается вывести формулы приведения для интегралов

$$\text{a)}\ \int\sqrt{(x^2-a^2)^{2n+1}}\,dx,\quad \text{b)}\ \int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^{2n+1}}},\quad \text{c)}\ \int\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

$$\text{d)}\ \int\frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad \text{и}\quad \text{e)}\ \int\frac{dx}{x^{2n}\sqrt{x^2-a^2}}.$$

К каким интегралам приходим последовательным применением формул?

VI) Предлагается вывести формулы для интегралов

$$\text{a)}\ \int\cos^m x\,dx,\quad \text{b)}\ \int\sin^m x\,dx,\quad \text{c)}\ \int\frac{dx}{\cos^m x},\quad \text{d)}\ \int\frac{dx}{\sin^m x}.$$

К каким интегралам приходим в результате применения формул при чётном и нечётном m?

Примеры

66) $\int(\ln x)^2\,x\,dx=\frac{x^2}{2}\left[(\ln x)^2-\ln x+\frac{1}{2}\right]+C.$

67) $\int\frac{\ln x}{x^5}\,dx=-\frac{\ln x}{4x^4}-\frac{1}{16x^4}+C.$

68) $\int x^2\ln\frac{x-1}{x}\,dx=\frac{1}{3}\,x^3\ln\frac{x-1}{x}-\frac{1}{6}\,x^2-\frac{1}{3}\,x-\frac{1}{3}\ln(x-1)+C.$

69) $\int\cos^5 x\,dx=\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x+\frac{4}{15}\sin x\cos^2 x+\frac{8}{15}\sin x+C.$

70) $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx=$

$$=\frac{1}{6}\sin^3 x\cos^3 x+\frac{1}{8}\sin^3 x\cos x-\frac{1}{16}\sin x\cos x+\frac{1}{16}\,x+C.$$

71) $\int\frac{dx}{\sin^5 x}=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$

72) $\int \frac{\sin x}{e^x}\,dx = -\frac{\sin x + \cos x}{2e^x} + C.$

73) $\int e^{2x} \sin 3x\,dx = \frac{1}{13} e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C.$

74) $\int a^x \cos x\,dx = \frac{a^x}{1+\ln^2 a}(\sin x + \ln a \cos x) + C.$

75) $\int \cos \ln x\,dx = \frac{x}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x) + C.$

76) $\int \sec^2 x \ln \cos x\,dx = \operatorname{tg} x \ln \cos x + \operatorname{tg} x - x + C.$

77) $\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx = x \operatorname{tg} x - \ln \cos x - \frac{1}{2}x^2 + C.$

78) $\int \arcsin x \frac{dx}{x^2} = -\frac{\arcsin x}{x} + \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$

79) $\int (\arcsin x)^2\,dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C.$

80) $\int \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = -\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

81) $\int \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx = x \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \sqrt{x} + C.$

ГЛАВА II

ИНТЕГРИРОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1. Общие замечания

В основу интегрирования алгебраических рациональных функций достаточно принять формулы (1), (2), (5), (6) и (9).

В дальнейшем будет показано, что всякая рациональная алгебраическая функция теоретически всегда может быть разложена на сумму целых или дробных элементарных функций так что интеграл её после этого может быть представлен на основании формулы (2) в виде суммы элементарных интегралов, которые вычисляются затем по остальным четырём формулам.

Постоянная интегрирования для сокращения письма в дальнейшем опускается и, если будет приводиться в результате интегрирования, то только в том случае, когда это имеет особое значение для выражения интеграла.

В общем случае алгебраическую рациональную функцию мы можем представить в виде дроби $\frac{\Phi(x)}{f(x)}$, где $\Phi(x)$ и $f(x)$ — целые рациональные функции. Если степень $\Phi(x)$ выше степени $f(x)$, то функция представляет так называемую неправильную дробь. Делением $\Phi(x)$ на $f(x)$, выполняя его до момента, когда степень остатка $F(x)$ сделается ниже степени $f(x)$, приводим неправильную дробь к сумме целой части, представляющей некоторую целую функцию от x и правильной дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$. Таким образом, в общем случае интеграл функции $\frac{\Phi(x)}{f(x)}$ может быть представлен в силу формулы (2) в виде суммы двух интегралов: интеграла некоторой целой функции и интеграла правильной рациональной алгебраической дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$.

Первый интеграл, интеграл целой функции, легко вычисляется на основании формул (1), (2) и (5). Формула (2) даёт возможность разложить его на сумму интегралов вида $\int Ax^n\,dx$, где A — положительный или отрицательный коэффициент, и затем каждый из этих интегралов вычисляется по формулам (1) и (5). В результате интегрирования, как легко видеть, получается также целая рациональная функция.

Второй интеграл, интеграл $\int \frac{F(x)}{f(x)}dx$, также вычисляется путём разложения на элементарные интегралы, но это разложение значительно сложнее. Основой его являются некоторые положения Высшей Алгебры и их необходимо привести, поскольку на этих положениях строится вся теория интегрирования рациональной алгебраической дроби.

§ 2. Свойства целой рациональной функции, лежащие в основе разложения дробного рационального алгебраического выражения на элементарные дроби

Всякая целая рациональная алгебраическая функция n-й степени

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

имеет n корней. Следовательно, она может быть разложена на n линейных множителей и представлена в виде

$$f(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\ \ldots\ (x-a_n),$$

где a_1, a_2, ..., a_n — корни функции $f(x)$.

Если среди корней $f(x)$ имеется α равных корней a, β — равных корней b и т. д., т. е. a является корнем $f(x)$ кратности α, b — кратности β и т. д., то функцию можно представить в виде

$$f(x) = A_0(x-a)^\alpha(x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda, \tag{20}$$

где α, β, ..., λ — целые положительные числа и сумма их равна n, степени $f(x)$.

Если целая рациональная функция $f(x)$ с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень $g+hi$, то она имеет также корень $g-hi$, сопряжённый с первым, и, следовательно, содержит множителем как $(x-g-hi)$ и $(x-g+hi)$, так и их произведение

$$(x-g)^2+h^2 = x^2-2gx+(g^2+h^2),$$

т. е. квадратный трёхчлен вида x^2+px+q с вещественными коэффициентами $p=-2g$ и $q=g^2+h^2$.

Если функция содержит π равных множителей $(x-g-hi)$, то на основании предыдущего она столько же множителей имеет и равных $(x-g+hi)$, и, следовательно, каждой паре сопряжённых комплексных корней $f(x)$ кратности π в разложении её на множители соответствует множитель вида (x^2+px+q) той же кратности.

Таким образом, в общем случае, когда функция $f(x)$ наряду с вещественными корнями a, b, ..., кратности α, β, ..., имеет и комплексные корни, встречающиеся в качестве сопряжённых всегда попарно, кратности π, ρ, ..., её разложение на множители можем представить в виде

$$f(x)=A_0(x-a)^\alpha(x-b)^\beta \ldots (x^2+px+q)^\pi(x^2+rx+s)^\rho. \quad (21)$$

Формулы (20) и (21), выражающие одну и ту же функцию $f(x)$, дают два внешне различных вида разложения её на множители. Формула (20) представляет разложение функции на линейные множители, независимо от того, вещественные корни имеет функция или комплексные. Если все корни функции — вещественны, то в разложении также имеем вещественные множители, если же среди корней имеются и комплексные, то соответствующие им линейные множители будут содержать мнимые величины.

Формула (21) в отличие от (20) и при наличии комплексных корней даёт разложение на вещественные множители. Вместо каждой пары комплексных линейных множителей формулы (20), соответствующих сопряжённым корням, в формуле (21) имеем вещественный квадратный множитель, входящий с соответствующей кратностью.

§ 3. Разложение рациональной функции на элементарные дроби

1) Элементарной дробью называется дробь вида $\frac{A}{(x-a)^n}$, где A — постоянная, n — целое положительное число и a — вещественная или комплексная величина. Покажем, что всякая рациональная дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ может быть разложена на сумму дробей вида $\frac{A}{(x-a)^n}$. Функции $F(x)$ и $f(x)$ будем считать при этом взаимно простыми, иначе дробь можно было бы сократить, и дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ — правильной, так как всегда можем притти к этому виду путём выделения целой части.

В доказательстве высказанного положения будем исходить из вида (20) разложения $f(x)$ на множители.

Представив по этой формуле $f(x)$ в виде произведения линейных множителей, имеем

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda}=\frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)},$$

где $f_1(x)=(x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda$.

На основании последнего равенства имеем тождество

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{F(x)-A_0f_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)}, \tag{m}$$

которое, очевидно, должно быть справедливо для всякого A_0. Определим A_0 так, чтобы $[F(x)-A_0f_1(x)]$ делилось на $(x-a)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы a было корнем уравнения $F(x)-A_0f_1(x)=0$, т. е. чтобы удовлетворялось равенство $F(a)-A_0f_1(a)=0$; отсюда определяем $A_0=\frac{F(a)}{f_1(a)}$. Функция $F(x)$, как взаимно простая с $f(x)$, множителя $(x-a)$ не имеет, и потому $F(a)$ не равна нулю; $f_1(x)$ также не имеет множителя $(x-a)$, так что и $f_1(a)\neq 0$. Поэтому для A_0 всегда получаем определённое конечное значение, не равное нулю. Определив A_0, можем представить $F(x)-A_0f_1(x)$ в виде $(x-a)F_1(x)$, и тогда равенство m) по сокращении на $(x-a)$ примет вид:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)}.$$

Для последней дроби степень числителя также ниже степени знаменателя, так как эта дробь получена в результате сокращения правильной дроби, и функции $F_1(x)$ и $f_1(x)$ — взаимно простые, потому что $F_1(x)=\frac{F(x)-A_0f_1(x)}{x-a}$ и $F(x)$ — взаимно простая с $f_1(x)$. Поэтому дробь $\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)}$ удовлетворяет всем тем же условиям, какие были поставлены для $\frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)}$, и, поступая с ней точно так же, приходим к равенству

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}f_1(x)}.$$

Продолжая этот процесс разложения, приходим, наконец, к равенству

$$\frac{F_{\alpha-1}(x)}{(x-a)f_1(x)}=\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)},$$

и в результате получаем:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)},$$

где $f_1(x)=(x-b)^\beta(x-c)^\gamma\ldots(x-l)^\lambda$, дробь $\frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}$ — правильная, и функции $F_\alpha(x)$ и $f_1(x)$ — взаимно простые.

Следовательно, функция

$$\frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}=\frac{F_\alpha(x)}{(x-b)^\beta(x-c)^\gamma\ldots(x-l)^\lambda}=\frac{F_\alpha(x)}{(x-b)^\beta f_2(x)},$$

удовлетворяющая тем же условиям, при каких велось разложение $\frac{F(x)}{f(x)}$, допускает такое же разложение, и потому имеем:

$$\frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}=\frac{B_0}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-2}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\frac{F_\beta(x)}{f_2(x)}.$$

На основании тех же рассуждений убеждаемся, что функция $\frac{F_\beta(x)}{f_2(x)}$, а также и следующие $\frac{F_\gamma(x)}{f_3(x)}\ldots$ дают такое же разложение, и приходим, наконец, к последней $\frac{F_k(x)}{(x-l)^\lambda}$, для которой получаем:

$$\frac{F_k(x)}{(x-l)^\lambda}=\frac{L_0}{(x-l)^\lambda}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-2}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l}.$$

В результате для функции $\frac{F(x)}{f(x)}$ получаем следующее разложение:

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)}&=\frac{F(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda}=\\&=\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\\&+\frac{B_0}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\&+\frac{L_0}{(x-l)^\lambda}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l}.\end{aligned}\tag{22}$$

II) Выведенная формула разложения относится ко всякой рациональной дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$ независимо от того, вещественные корни имеет знаменатель $f(x)$ или комплексные. Но в последнем случае, как в процессе разложения, так и при интегрировании, для которого оно выполняется, появляются мнимые выражения, и к вещественному виду, как увидим далее, переходим лишь для результата интегрирования. Для того чтобы и при наличии комплексных корней $f(x)$ можно было всё вычисление интеграла вести в вещественных выражениях, выводим другую формулу, которая даёт разложение функции также на элементарные дроби, но уже двух видов, $\frac{A}{(x-a)^n}$ — для вещественных корней и $\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}$ — для каждой пары комплексных сопряжённых.

На основании формулы (21) дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ можем представить в виде

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+px+q)^{\pi}(x^2+rx+s)^{\rho}\ldots},$$

где каждый квадратный множитель соответствует паре сопряжённых комплексных корней $f(x)$.

Обозначая произведение всех множителей $f(x)$, кроме $(x^2+px+q)^{\pi}$, через $f_1(x)$, так что $f(x)=(x^2+px+q)^{\pi}f_1(x)$, покажем, что, если $\frac{F(x)}{f(x)}$ — правильная несократимая дробь, то

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{P_0x+Q_0}{(x^2+px+q)^{\pi}}+\frac{F_1(x)}{(x^2+px+q)^{\pi-1}f_1(x)},$$

где P_0 и Q_0 — вещественные постоянные и дробь $\frac{F_1(x)}{(x^2+px+q)^{\pi-1}f_1(x)}$ удовлетворяет всем тем же условиям, какие ставятся для $\frac{F(x)}{f(x)}$, т. е. является правильной и несократимой дробью.

Так же, как и при выводе предыдущей формулы, будем исходить из тождества

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F(x)}{(x^2+px+q)^{\pi}f_1(x)}=\frac{P_0x+Q_0}{(x^2+px+q)^{\pi}}+\frac{F(x)-(P_0x+Q_0)f_1(x)}{(x^2+px+q)^{\pi}f_1(x)}.$$

Так как это тождество должно удовлетворяться при всяких P_0 и Q_0, то мы можем определить их так, чтобы числитель последней дроби делился на (x^2+px+q). Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнению $F(x)-(P_0x+Q_0)f_1(x)=0$ удовлетворяли комплексные корни $(g\pm hi)$, если $x^2+px+q=(x-g-hi)(x-g+hi)$, что в силу сопряжённости этих корней равносильно требованию, чтобы удовлетворял один из них. Следовательно, должно быть

$$F(g+hi)-[P_0(g+hi)+Q_0]f_1(g+hi)=0,$$

откуда

$$P_0(g+hi)+Q_0=\frac{F(g+hi)}{f_1(g+hi)}=M+Ni,$$

где M и N — постоянные, получающиеся в результате отделения вещественной части от мнимой в дроби $\frac{F(g+hi)}{f_1(g+hi)}$.

Написав последнее равенство в виде

$$(P_0g+Q_0)+P_0hi=M+Ni,$$

находим из него

$$\left.\begin{aligned} P_0 g + Q_0 &= M \\ P_0 h &= N \end{aligned}\right\} \text{ и } P_0 = \frac{N}{h}, \quad Q_0 = \frac{Mh - Ng}{h}.$$

Замечая, что h не может быть равно нулю, так как корни $(g \pm hi)$ — комплексные, приходим к заключению, что для P_0 и Q_0 всегда имеем определённые значения.

Определив их и сократив дробь $\frac{F(x) - (P_0 x + Q_0) f_1(x)}{(x^2 + px + q)^\pi f_1(x)}$ на $(x^2 + px + q)$, получаем:

$$\frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^\pi f_1(x)} = \frac{P_0 x + Q_0}{(x^2 + px + q)^\pi} + \frac{F_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\pi - 1} f_1(x)},$$

где $F_1(x)$ и $f_1(x)$ — взаимно простые, так как $F(x)$ с $f(x)$, а следовательно, и с $f_1(x)$ общих делителей не имеют и дробь $\frac{F_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\pi - 1} f_1(x)}$, получившаяся в результате сокращения правильной дроби, также правильная.

К этой дроби, следовательно, может быть применён тот же порядок отделения элементарной дроби, как и к предыдущей. Выполнив это и продолжая затем тот же процесс отделения элементарных дробей до исчерпания степени π, получаем для $\frac{F(x)}{f(x)}$ следующий вид разложения:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{P_0 x + Q_0}{(x^2 + px + q)^\pi} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^{\pi - 1}} + \ldots + \frac{P_{\pi-1} x + Q_{\pi-1}}{x^2 + px + q} + \frac{F_\pi(x)}{f_1(x)},$$

где $f_1(x)$ — произведение всех остальных множителей $f(x)$, как вида $(x - a)^\alpha$, так и вида $(x^2 + rx + s)^\rho$.

Пользуясь для последних только что полученным видом разложения и для первых формулой (1), видоизменяем последнюю для случая вещественных и комплексных корней следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x^2 + px + q)^\pi (x^2 + rx + s)^\rho \ldots} = \\
&= \frac{A_0}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \\
&+ \frac{B_0}{(x-b)} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \\
&+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \\
&+ \frac{P_0 x + Q_0}{(x^2 + px + q)^\pi} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^{\pi-1}} + \ldots + \frac{P_{\pi-1} x + Q_{\pi-1}}{x^2 + px + q} + \\
&+ \frac{R_0 x + S_0}{(x^2 + rx + s)^\rho} + \frac{R_1 x + S_1}{(x^2 + rx + s)^{\rho-1}} + \ldots + \frac{R_{\rho-1} x + S_{\rho-1}}{x^2 + rx + s} + \\
&+ \ldots
\end{aligned} \tag{23}$$

§ 4. Определение коэффициентов разложения

Коэффициенты формул (22) и (23) последовательно определялись в процессе разложения по мере выделения элементарных дробей, но такой способ их определения слишком громоздок и практически мало пригоден. Поэтому на формулы будем смотреть лишь как на определяющие общий вид разложения, на коэффициенты же $A, B, \ldots, P, Q \ldots$ — как на неопределённые, и для определения их укажем другие пути. Такой метод, когда в решении какого-либо математического вопроса предварительно определяется лишь общая формула решения, формула с неопределёнными коэффициентами, которые подлежат ещё определению тем или иным путём, называется методом неопределённых коэффициентов.

I) Общий вид определения коэффициентов заключается в следующем. Освобождая равенства (22) или (23) от знаменателей и умножая их с этой целью на $f(x)$, в правой части по раскрытии скобок получаем целую функцию с наивысшей степенью $(n-1)$, если n — степень функции $f(x)$, т. е. полином с n членами. Сравнивая коэффициенты этого полинома при различных степенях x с соответствующими коэффициентами функции $F(x)$, получаем необходимое количество независимых совместных уравнений 1-й степени для определения всех n коэффициентов.

Вообще заметим, что равенства (22) и (23) представляют тождества и, следовательно, удовлетворяются при всяком x. Поэтому, давая x различные значения, также можем получать уравнения для определения коэффициентов.

Однако при достаточно высоком показателе степени функции $f(x)$ составление уравнений и определение коэффициентов из них представляет также громоздкую работу. Поэтому более предпочтительными являются следующие приёмы.

II) Умножая равенство (22) или (23) на $(x-a)^\alpha$ и полагая

$$(x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda = \varphi(x), \qquad \frac{F(x)}{\varphi(x)} = \Phi(x),$$

получаем:

$$\Phi(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots$$
$$\ldots + A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1} + (x-a)^\alpha \Psi(x),$$

где через $\Psi(x)$ обозначена сумма всех остальных членов, соответствующих другим коэффициентам разложения.

Полагая в этом равенстве $x=a$, получаем $A_0 = \Phi(a)$, так как все остальные члены, как содержащие множители $(x-a)$, обращаются при этом в нуль.

Взяв производную от обеих частей равенства в предположении также $x=a$ и замечая при этом, что A_0 — постоянная, все же члены, начиная с 3-го, и после того, как взята производная, будут содержать в какой-либо степени множитель $(x-a)$, находим $A_1=\Phi'(a)$. Точно так же, взяв вторую производную, третью и т. д., получаем $2!\,A_2=\Phi''(a)$, $3!\,A_3=\Phi'''(a)$, вообще $k!\,A_k=\Phi^{(k)}(a)$.

Таким образом, для коэффициентов A получаем:

$$A_0=\Phi(a),\quad A_1=\frac{1}{1!}\Phi'(a),\quad A_2=\frac{1}{2!}\Phi''(a),\ \ldots,\ A_k=\frac{1}{k!}\Phi^{(k)}(a),\ \ldots$$

Точно так же, полагая $\dfrac{F(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda}}=\Phi(x)$ и т. д., можем, очевидно, определить

$$B_0=\Phi(b),\quad B_1=\frac{1}{1!}\Phi'(b),\quad B_2=\frac{1}{2!}\Phi''(b),\ \ldots,\ B_k=\frac{1}{k!}\Phi^{(k)}(b),\ \ldots$$

$$L_0=\Phi(l),\quad L_1=\frac{1}{1!}\Phi'(l),\quad L_2=\frac{1}{2!}\Phi''(l),\ \ldots,\ L_k=\frac{1}{k!}\Phi^{(k)}(l),\ \ldots$$

Таким образом находим значения всех коэффициентов формулы (22) или для элементарных дробей с линейными знаменателями формулы (23).

Заметим, что на практике не следует стеснять себя обязательностью какого-либо одного приёма. Если другой приём в отношении какой-либо группы коэффициентов даёт более простое вычисление, то следует воспользоваться именно этим приёмом. Так, при высокой кратности какого-либо множителя $f(x)$, например $(x-b)$, для определения коэффициентов $B_0, B_1, \ldots$ целесообразен следующий приём.

III) Умножив равенство (22) или (23) на $(x-b)^{\beta}$ и полагая $(x-a)^{\alpha}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda}=\varphi(x)$, имеем:

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)}=$$
$$=B_0+B_1(x-b)+B_2(x-b)^2+\ldots+B_{\beta-1}(x-b)^{\beta-1}+(x-b)^{\beta}\Psi(x),$$

где $\Psi(x)$ — сумма всех остальных членов разложения.

Замечая, что правая часть этого равенства расположена по восходящим степеням $(x-b)$, приводим к такому же виду и левую часть. Выразив $F(x)$ и $\varphi(x)$ по формуле Маклорена

$$f(x)=f(b)+\frac{f'(b)}{1!}(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+\frac{f'''(b)}{3!}(x-b)^3+\ldots$$

и разделив первый результат на второй, получаем и в левой части члены, расположенные по степеням $(x-b)$. Сравнением коэффициентов при одинаковых степенях $(x-b)$ сразу определяем значения всех коэффициентов $B_0, B_1, \ldots, B_{\beta-1}$.

Разложение $F(x)$ и $\varphi(x)$ и затем деление $F(x)$ на $\varphi(x)$, как вполне понятно, достаточно провести до члена, содержащего $(x-b)^{\beta-1}$.

IV) Умножая равенство (22) или (23) на $f(x)$, имеем:

$$F(x)=\varphi(x)[A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\ldots+A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}]+ \\ +(x-a)^{\alpha}\Psi(x),$$

где $\varphi(x)=(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}$ и $\Psi(x)$ — целая функция, получающаяся от умножения на $\varphi(x)$ всех остальных, с коэффициентами $B_1\ldots L$, членов равенств.

Полагая в полученном равенстве $x=a$, имеем:

$$1)\quad F(a)=A_0\varphi(a).$$

Взяв производную от обеих частей равенства и также полагая $x=a$, получаем:

$$2)\quad F'(a)=A_0\varphi'(a)+1!A_1\varphi(a).$$

Дифференцируя затем последовательно обе части равенства 2, 3, ..., $(\alpha-1)$ раз, опуская при этом, как обращающиеся в нуль при $x=a$, все члены, сохраняющие после дифференцирования множитель $(x-a)$ и полагая каждый раз $x=a$, соответственно получаем:

$$3)\quad F''(a)=A_0\varphi''(a)+2\cdot 1!A_1\varphi'(a)+2!A_2\varphi(a),$$

$$4)\quad F'''(a)=A_0\varphi'''(a)+3\cdot 1!A_1\varphi''(a)+3\cdot 2!A_2\varphi'(a)+3!A_3\varphi(a),$$

. . . .

$$k)\quad F^{(k)}(a)=A_0\varphi^{(k)}(a)+\binom{k}{1}1!A_1\varphi^{(k-1)}(a)+ \\ +\binom{k}{2}2!A_2\varphi^{(k-2)}(a)+\ldots+\binom{k}{k}k!A_k\varphi(a).$$

Определив значения $F(x)$, $\varphi(x)$ и их производных до порядка $(\alpha-1)$ включительно при $x=a$, из полученных равенств легко находим значения всех коэффициентов $A_0, \ldots, A_{\alpha-1}$; из первого определяем A_0, из второго затем A_1 и т. д.

V) В некоторых случаях разложение легко выполняется непосредственным преобразованием функции $\frac{F(x)}{f(x)}$, без введения неопределённых коэффициентов. При соответствующем виде функции этот путь даёт наиболее простое её разложение.

VI) Если знаменатель дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$ не имеет кратных корней, так что $f(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-l)$, то разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_0}{x-a}+\frac{B_0}{x-b}+\ldots+\frac{L_0}{x-l}.$$

Для коэффициентов тогда легко находим

$$A_0 = \lim_{x=a} \frac{(x-a)\,F(x)}{f(x)} = \frac{F(a)}{f'(a)}, \quad B_0 = \frac{F(b)}{f'(b)}, \ldots, L_0 = \frac{F(l)}{f'(l)},$$

и после этого

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(a)}{f'(a)}\frac{1}{x-a} + \frac{F(b)}{f'(b)}\frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{F(l)}{f'(l)}\frac{1}{x-l}.$$

VII) На практике при определении коэффициентов приходится пользоваться различными приёмами в зависимости от структуры интегрируемой функции. Общий приём, заключающий в себе составление необходимого числа уравнений и определение из них коэффициентов, слишком громоздок и во всех случаях при разложении, как по формуле (22), так и по формуле (23), более предпочтительными являются другие приёмы.

При высокой кратности какого-либо множителя функции $f(x)$, как уже отмечено, целесообразен третий приём. Если $\Phi(x)$, определённая при обосновании второго приёма, не очень сложна, то этот приём даёт наиболее простое вычисление соответствующих коэффициентов. В тех случаях, когда структура функции допускает непосредственное её разложение, этот путь легче всего приводит к цели.

При разложении по формуле (23) в определении коэффициентов P, Q, R, S, ... приходится пользоваться общим приёмом, но пользоваться им следует только в отношении этих коэффициентов. При этом вовсе нет нужды в составлении всех уравнений по числу коэффициентов, входящих в разложение. Определив коэффициенты $A, B, \ldots$ дробей с линейными знаменателями, для определения остальных $P, Q, R, S, \ldots$ нуждаемся уже в меньшем числе уравнений. Их легко получаем сравнением коэффициентов лишь при некоторых степенях x по собственному выбору, по большей части даже не раскрывая скобок правой части, или давая x различные, возможно более простые, значения.

Вообще, при разложении следует иметь в виду конечную цель, исходить из того, что вся задача заключается в разложении функции на элементарные дроби известных видов, и что совершенно безразлично, какими путями это достигается; в целях же простоты, экономии времени и труда надо выбирать наиболее простые пути, целесообразно комбинируя, в случае надобности, различные приёмы.

§ 5. Интегрирование рациональной алгебраической функции по разложении её на элементарные дроби

I) Разложение функции $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ по формуле (1) приводит интеграл $\displaystyle\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx$ к сумме интегралов вида $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n}$, где A

и a — постоянные и n — целое положительное число. Независимо от того, действительные только корни имеет $f(x)$ или также и комплексные, интегрирование можем выполнить по основным формулам, приведённым в начале главы. При $n>1$ по формулам (1) и (5) и при $n=1$ по формулам (1) и (6) получаем:

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \quad \text{и} \quad \int \frac{A\,dx}{x-a} = A \ln (x-a).$$

Таким образом для интеграла $\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx$ получаем алгебраические и логарифмические функции. Если $f(x)$ не имеет кратных корней, то в разложении имеются только дроби вида $\frac{A}{x-a}$ и для интеграла получаем только логарифмические функции.

Положение несколько осложняется, когда среди корней $f(x)$ имеются и комплексные. В выражении, которое дают для интеграла формулы (5) и (6), имеются тогда и мнимые величины как в логарифмических функциях, так и в алгебраической части интеграла. Но мнимость, как сейчас же увидим, легко устраняется, и в результате приходим для интеграла к вещественному выражению. Если $a=g+hi$ и $b=g-hi$ — сопряжённые комплексные корни $f(x)$, то коэффициенты разложения A_k и B_k по закону своего образования представляют также сопряжённые комплексные величины. Обозначая их через $m \pm ni$, при $k>1$ имеем:

$$\int \frac{m+ni}{(x-g-hi)^k}\,dx = -\frac{1}{k-1}\,\frac{m+ni}{(x-g-hi)^{k-1}}$$

и

$$\int \frac{m-ni}{(x-g+hi)^k}\,dx = -\frac{1}{k-1}\,\frac{m-ni}{(x-g+hi)^{k-1}}.$$

Складывая эти выражения двух интегралов, получаем *)

---

*) Символом $\sum\limits_{p=m}^{p=n}$, или просто $\sum\limits_{m}^{n}$, обозначается сумма всех элементов, к которым отнесён этот символ, если находящейся под знаком $\sum$ величине p даются все значения от m до n.

Символом $\binom{n}{p}$ обозначается биномиальный коэффициент разложения n-й степени; при этом $\binom{n}{0}$ принимается равным единице.

$$-\frac{1}{k-1}\frac{(m+ni)(x-g+hi)^{k-1}+(m-ni)(x-g-hi)^{k-1}}{[(x-g)^2+h^2]^{k-1}}=$$

$$=-\frac{1}{(k-1)[(x-g)^2+h^2]^{k-1}}\left\{(m+ni)\sum_{p=0}^{p=k-1}\binom{k-1}{p}(x-g)^{k-1-p}(hi)^p+\right.$$

$$\left.+(m-ni)\sum_{p=0}^{p=k-1}(-1)^p\binom{k-1}{p}(x-g)^{k-1-p}(hi)^p\right\}=$$

$$=\frac{1}{(k-1)[(x-g)^2+h^2]^{k-1}}\left\{-m\sum_{0}^{k-1}\binom{k-1}{p}(x-g)^{k-1-p}h^pi^p[(-1)^p+1]+\right.$$

$$\left.+n\sum_{0}^{k-1}\binom{k-1}{p}(x-g)^{k-1-p}h^pi^{p+1}[(-1)^p-1]\right\}.$$

Легко видеть, что в этом выражении, как при чётном p, так и при нечётном, мнимые величины исчезают. Следовательно, складывая мнимые алгебраические выражения, полученные для интегралов, соответствующих каждой паре сопряжённых комплексных корней, приходим в результате к вещественному алгебраическому выражению и, таким образом, всю алгебраическую часть приводим к вещественному виду. При $k=1$ имеем интегралы:

$$\int\frac{m+ni}{x-g-hi}\,dx=(m+ni)\ln(x-g-hi)$$

и

$$\int\frac{m-ni}{x-g+hi}\,dx=(m-ni)\ln(x-g+hi);$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$\int\frac{m+ni}{x-g-hi}\,dx+\int\frac{m-ni}{x-g+hi}\,dx=m\ln[(x-g)^2+h^2]-ni\ln\frac{x-g+hi}{x-g-hi},$$

и, таким образом, приходим к вещественной логарифмической функции и мнимой.

Однако мнимого выражения легко можно избежать, соединяя дроби для интегрирования вместе. Получая таким путём интеграл $\int\frac{2m(x-g)-2nh}{(x-g)^2+h^2}\,dx$, представляем его на основании формул (2) и (1) в виде разности двух интегралов

$$m\int\frac{d[(x-g)^2+h^2]}{(x-g)^2+h^2}-2nh\int\frac{dx}{(x-g)^2+h^2}.$$

Выражая первый из них по формуле (6) и второй по формуле (9), получаем:

$$\int\frac{m+ni}{x-g-hi}\,dx+\int\frac{m-ni}{x-g+hi}\,dx=m\ln[(x-g)^2+h^2]-2n\operatorname{arctg}\frac{x-g}{h},$$

и, таким образом, приходим к выражению, в котором вместо мнимой логарифмической функции имеем вещественную круговую.

На основании известной формулы Эйлера

$$e^{yi}=\cos y+i\sin y,$$

устанавливающей связь между показательными и тригонометрическими функциями, легко приходим к связи между логарифмическими и круговыми и, на основании последней, можем установить, что получающиеся в результате интегрирования, в первом случае мнимая логарифмическая функция и во втором — круговая вещественного вида, эквивалентны. Заменяя в формуле Эйлера y на $-y$, получаем $e^{-yi}=\cos y-i\sin y$, и затем находим

$$\sin y=\frac{e^{yi}-e^{-yi}}{2i}, \quad \cos y=\frac{e^{yi}+e^{-yi}}{2},$$

$$\operatorname{tg} y=\frac{1}{i}\,\frac{e^{yi}-e^{-yi}}{e^{yi}+e^{-yi}}=\frac{1}{i}\,\frac{e^{2yi}-1}{e^{2yi}+1}.$$

Полагая $\operatorname{tg} y=x$, из равенства $x=\frac{1}{i}\frac{e^{2yi}-1}{e^{2yi}+1}$ находим $e^{2yi}=\frac{1+xi}{1-xi}$ и, логарифмируя, $y=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+xi}{1-xi}$. Отсюда получаем формулу

$$\operatorname{arctg} x=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+xi}{1-xi}. \tag{24}$$

Обращая эту формулу, полагая с этой целью $\frac{1+xi}{1-xi}=z$, откуда $x=i\frac{1-z}{1+z}$, и возвращаясь для результата снова к обозначению переменной через x, получаем:

$$\ln x=2i\operatorname{arctg} i\,\frac{1-x}{1+x}. \tag{25}$$

Полученные формулы, выражая связь между логарифмическими и круговыми функциями, дают возможность от мнимых логарифмических функций перейти к круговым и, обратно, от мнимых круговых — к вещественным логарифмическим.

В данном случае полученную в результате интегрирования логарифмическую функцию $ni\ln\frac{x-g+hi}{x-g-hi}$ легко приводим к круговой $2n\operatorname{arctg}\frac{x-g}{h}$ вещественного вида.

На основании выведенных формул (24) и (25), для рассматриваемого вопроса интегрирования рациональной алгебраической дроби, приходим к заключению, что круговые функции, получающиеся в результате интегрирования, заступают место мнимых логарифмических. Вообще для интеграла $\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx$ получаем алгебраические и логарифмические функции; в случае комплексных корней $f(x)$ последние получаются в мнимой форме и для того, чтобы результат был выражен в вещественном виде, они заменяются эквивалентными им круговыми.

II) Разложением по формуле (23) приводим интеграл $\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx$ к сумме интегралов вида $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n}$ и $\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}\,dx$, где A, P, Q, a, p, q — вещественные постоянные и n — целое положительное число. Первый интеграл, как мы видели уже, вычисляется на основании формул (5) и (6), которые дают для него алгебраическую функцию при $n>1$ и логарифмическую при $n=1$.

Второй интеграл можем представить в виде

$$\frac{P}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^n} - \frac{Pp-2Q}{2}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$$
$$= \frac{P}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} - (Pp-2Q)\,2^{2n-2}\int \frac{d(2x+p)}{[(2x+p)^2-(4q-p^2)]^n}.$$

Так как трёхчлен (x^2+px+q) введён в разложение для комплексных корней $f(x)$, то замечаем, что для последнего интеграла $4q-p^2>0$.

При $n=1$ оба интеграла, к которым мы пришли, сразу выражаются по основным формулам: первый по формуле (6) и второй по формуле (9). Таким образом для рассматриваемого интеграла при $n=1$ получаем:

$$\int \frac{(Px+Q)\,dx}{x^2+px+q} = \frac{P}{2}\ln(x^2+px+q) - \frac{Pp-2Q}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}.$$

При $n>1$, выражая первый интеграл по формуле (5), имеем:

$$\int \frac{(Px+Q)\,dx}{(x^2+px+q)^n} = -\frac{P}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} - \frac{Pp-2Q}{2}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

Последний интеграл уже не может быть вычислен по какой-либо из приведённых вначале основных формул. Подстановкой $2x+p=z$ и полагая $4q-p^2=k^2$, приводим его к интегралу $2^{2n-1}\int \frac{dz}{(z^2+k^2)^n}$, который был рассмотрен в разделе III § 8 гл. I. Этот интеграл был вычислен там методом интегрирования по частям, и для него была получена формула приведения:

$$\int \frac{dz}{(z^2+k^2)^n} = \frac{z}{2(n-1)k^2(z^2+k^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\,\frac{1}{k^2}\int \frac{dz}{(z^2+k^2)^{n-1}}, \quad (26)$$

которая приводит в конечном счёте к интегралу $\int \frac{dz}{z^2+k^2}$, вычисляемому по формуле (9).

Последовательно применяя эту формулу, получаем для интеграла следующее выражение:

$$\int \frac{dz}{(z^2+k^2)^n} = \frac{z}{(2n-2)\,k^2\,(z^2+k^2)^{n-1}} \left\{ 1 + \frac{2n-3}{2n-4}\,\frac{z^2+k^2}{k^2} + \right.$$
$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)} \left(\frac{z^2+k^2}{k^2}\right)^2 + \ldots +$$
$$\left. + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4\cdot 2} \left(\frac{z^2+k^2}{k^2}\right)^{n-2} \right\} +$$
$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\,\frac{1}{k^{2n-1}}\,\operatorname{arctg}\frac{z}{k}. \qquad (27)$$

Подставляя в формулы (26) и (27) $z = 2x+p$, $k^2 = 4q - p^2$, легко получаем формулы для рассматриваемого интеграла:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{2x+p}{(n-1)\,(4q-p^2)\,(x^2+px+q)^{n-1}} +$$
$$+ \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{4}{4q-p^2} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{n-1}}, \qquad (28)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$$
$$\frac{2x+p}{(n-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{n-1}} \left\{ 1 + \frac{2n-3}{2n-4}\,\frac{4}{4q-p^2}(x^2+px+q) + \right.$$
$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)} \left(\frac{4}{4q-p^2}\right)(x^2+px+q)^2 + \ldots$$
$$\left. \ldots + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4\cdot 2} \left(\frac{4}{4q-p^2}\right)^{n-2} (x^2+px+q)^{n-2} \right\} +$$
$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4\cdot 2} \left(\frac{4}{4q-p^2}\right)^{n-1} \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\,\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p}} \qquad (29)^{*})$$
$$(4q-p^2>0).$$

В результате для интеграла $\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx$ получаем так же, как и ранее, алгебраические, логарифмические и круговые функции. В отличие от формулы разложения (26), формула (28)

*) Формула (29) остаётся справедливой и для случая вещественных корней трёхчлена (x^2+px+q), но только последний член, содержащий круговую функцию, принимает тогда мнимую форму, так как $4q-p^2<0$. Пользуясь формулой (24), легко приводим его к вещественной логарифмической функции:

$$\frac{(2n-3)(2n-5)\ .\ .\ .\ 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ .\ .\ .\ 4\cdot 2} \left(\frac{4}{4q-p^2}\right)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p^2-4q}} \ln \frac{\sqrt{p^2-4q}-p-2x}{\sqrt{p^2-4q}+p+2x}.$$

даёт возможность провести всё вычисление в вещественном виде, но при наличности кратных комплексных корней $f(x)$ вычисление осложняется тем, что основных формул, приведённых вначале, уже недостаточно, и интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$ при $n>1$ вычисляется приёмом интегрирования по частям. В основании последнего, как мы уже видели, находится также одна из основных формул—формула (4).

Формула (29) прямо даёт выражение интеграла.

В § 3 было отмечено, что всякая целая рациональная алгебраическая функция с вещественными коэффициентами теоретически может быть представлена в виде произведения линейных, вещественных или комплексных множителей, или вещественных множителей вида $(x-a)$ и (x^2+px+q). Всякая рациональная алгебраическая дробь, как было показано в § 4, по разложении на множители того или другого вида её знаменателя, может быть разложена на сумму элементарных дробей. Интегрирование последних не представляет затруднений и выполняется на основании нескольких элементарных формул. Таким образом, *интеграл всякой рациональной алгебраической функции теоретически вычисляется в конечном виде.* В результате интегрирования приходим к некоторой комбинации алгебраических или логарифмических функций, или эквивалентных последним круговых, в случае комплексных корней знаменателя.

§ 6. Интегралы целых рациональных алгебраических функций

Для вычисления интеграла целой рациональной алгебраической функции, общий вид которой

$$F(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n,$$

достаточно применения основных формул (1), (2) и (5).

На основании этих формул получаем:

$$\int F(x)\,dx = A_0\frac{x^{n+1}}{n+1} + A_1\frac{x^n}{n} + A_2\frac{x^{n-1}}{n-1} + \ldots + A_{n-1}\frac{x^2}{2} + A_nx.$$

Когда целая функция даётся для интегрирования в виде, не развёрнутом по степеням x, то вообще надо сначала привести её к этому виду, но в отдельных случаях вычисления несколько упрощаются, если интегрирование выполняется для функции или для некоторой её части непосредственно.

Примеры

1) $$\int (3x^2+2x)^3\,dx = 2x^4 + \frac{36}{5}x^5 + 9x^6 + \frac{27}{7}x^7.$$

2) $$\int (3x^2+2x-1)(x-1)\,dx = \frac{1}{18}(3x^2+2x-1)^3 - \frac{4}{3}\left(\frac{9}{5}x^5 + 3x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x\right).$$

3) $$\int (a+bx^k)^n x^{k-1}\,dx = \frac{1}{k}\sum_0^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p \frac{x^{k(p+1)}}{p+1}$$

или

$$= \frac{(a+bx^k)^{n+1}}{bk(n+1)}.$$

§ 7. Основные элементарные интегралы дробных рациональных алгебраических выражений

Пользуясь основными методами, указанными в гл. I легко находим также следующие формулы:

$$\int \frac{A\,dx}{ax+b} = \frac{A}{a}\ln(ax+b) \qquad (a \text{ и } b > \text{ или } < 0), \quad (30)$$

$$\int \frac{Ax\,dx}{ax+b} = \frac{A}{a}x - \frac{Ab}{a^2}\ln(ax+b) \qquad (a \text{ и } b > \text{ или } < 0), \quad (31)$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{(n-1)a(ax+b)^{n-1}} \qquad (a \text{ и } b > \text{ или } < 0), \quad (32)$$

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\frac{a+bx}{a-bx}, \quad (33)$$

$$\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2} = \frac{1}{2ab}\ln\frac{a-bx}{a+bx} \quad (34)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{2abi}\ln\frac{a+bxi}{a-bxi} = \frac{1}{2abi}\ln\frac{ai-bx}{ai+bx} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}x. \quad (35)$$

Все три выражения для последнего интеграла — эквивалентны. На основании формул § 5, от (33) и 34 легко перейти к (35), и наоборот.

$$\int \frac{Ax\,dx}{a+bx^2} = \frac{A}{2b}\ln(a+bx^2) \qquad (a \text{ и } b > \text{ или } < 0), \quad (36)$$

$$\int \frac{Ax\,dx}{(a+bx^2)^n} = -\frac{A}{2(n-1)b(a+bx^2)^{n-1}} \qquad (a \text{ и } b > \text{ или } < 0), \quad (37)$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}}\ln\frac{\sqrt{b^2-ac}-b-ax}{\sqrt{b^2-ac}+b+ax}, \quad (38)$$

если $ac-b^2>0$ и $= \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{b+ax}{\sqrt{ac-b^2}}$, если $ac-b^2>0$.

Если $ac-b^2=0$, то, подставляя $c=\frac{b^2}{a}$, имеем интеграл

$$\int \frac{a\,dx}{(ax+b)^2}=-\frac{1}{ax+b}.$$

При $c=0$ всегда $ac-b^2<0$. Подставляя $c=0$, получаем:

$$\int \frac{dx}{ax^2+2bx}=\frac{1}{2b}\ln\frac{x}{ax+2b}.$$

К тому же результату легко приходим непосредственно,

$$\int \frac{dx}{ax^2+2bx}=\frac{1}{2b}\int \frac{(ax+2b)-ax}{x(ax+2b)}dx=$$
$$=\frac{1}{2b}\left\{\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dax}{ax+2b}\right\}=\frac{1}{2b}\ln\frac{x}{ax+2b}.$$

Обозначая корни трёхчлена $(ax^2+2bx+c)$ через x_1 и x_2, имеем:

$$\int\frac{dx}{ax^2+2bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\int\frac{(x-x_2)-(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}dx=$$
$$=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\left\{\int\frac{dx}{x-x_1}-\int\frac{dx}{x-x_2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}}\ln\frac{x-x_1}{x-x_2}.$$

Если эти корни — комплексные, $x_1=g+hi$ и $x_2=g-hi$ и, следовательно, $ac-b^2>0$, то для интеграла получается мнимое логарифмическое выражение $\frac{1}{2hi}\ln\frac{x-g-hi}{x-g+hi}$ и вместо него имеем тогда эквивалентный результат, выраженный круговой функцией вещественного аргумента

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\ln(ax^2+2bx+c)-\frac{Ab-Ba}{a}\int\frac{dx}{ax^2+2bx+c}. \quad (39)$$

Если $Ab-Ba=0$, то для интеграла имеем выражение

$$\frac{A}{2a}\ln(ax^2+2bx+c).$$

Полагая $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=2k$, так что $A=2ak$ и $B=2bk$, видим, что числитель интегрируемого дифференциального выражения представляет в этом случае дифференциал знаменателя.

Для интеграла $\int\frac{dx}{(x^2\pm k^2)^n}$, представив его в виде

$$\pm\frac{1}{k^2}\int\frac{dx}{(x^2\pm k^2)^{n-1}}\mp\frac{1}{2k^2}\int x\frac{d(x^2\pm k^2)}{(x^2\pm k^2)^n},$$

интегрированием по частям получаем формулу приведения

$$\int\frac{dx}{(x^2\pm k^2)^n}=\pm\frac{x}{2(n-1)k^2(x^2\pm k^2)^{n-1}}\pm\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{k^2}\int\frac{dx}{(x^2\pm k^2)^{n-1}} \quad (40)$$

$$(n>1).$$

Последовательным применением этой формулы, выделяя каждый раз для результата интегрирования некоторое алгебраическое выражение, приходим в конечном счёте к интегралу $\int \frac{dx}{x^2 \pm k^2}$, который согласно (8) и (9) выражается при верхнем знаке круговой функцией и при нижнем — логарифмической

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2 \pm k^2)^n}\,dx = -\frac{A}{2(n-1)(x^2 \pm k^2)^{n-1}} + B\int \frac{dx}{(x^2 \pm k^2)^n}. \tag{41}$$

Интеграл $\int \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}$ подстановкой $ax+b=z$ и $ac-b^2 = \pm k^2$ приводится к интегралу $a^{n-1}\int \frac{dz}{(z^2 \pm k^2)^n}$, вычисление которого делается по формуле (40).

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(ax^2+2bx+c)^n} = \frac{A}{2a(n-1)(ax^2+2bx+c)^{n-1}} - \frac{Ab-Ba}{a}\int \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}. \tag{42}$$

Примеры

4) $\int \frac{x^3\,dx}{1+2x} = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{16}\ln(1+2x).$

5) $\int \frac{x^6\,dx}{2+3x^2} = \frac{1}{15}x^5 - \frac{2}{27}x^3 + \frac{4}{27}x + \frac{4\sqrt{6}}{81}\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right).$

6) $\int \frac{dx}{3x^2-7x+2} = \frac{1}{5}\ln\frac{x-2}{3x-1}.$

Если коэффициент «b» для интеграла $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ — число нечётное, то в целях приведения функции к нужному виду проще всего умножить числитель и знаменатель на такое наименьшее число $2l$, чтобы $2al$ представляло квадрат какого-либо числа. В данном случае надо умножить на 12, после чего для интеграла получаем:

$$2\int \frac{d(6x-7)}{(6x-7)^2-25} = \frac{1}{5}\ln\frac{6x-12}{6x-2} = \frac{1}{5}\ln\frac{x-2}{3x-1}.$$

Постоянную $\frac{1}{5}\ln 3$ в целях упрощения результата опускаем. Так как $3x^2-7x+2=(3x-1)(x-2)$, то интеграл легко приводится к разности двух интегралов

$$\int \frac{dx}{3x^2-7x+2} = \frac{1}{5}\int \frac{(3x-1)-3(x-2)}{(3x-1)(x-2)}\,dx = \frac{1}{5}\left\{\int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{d(3x-1)}{3x-1}\right\}.$$

7) $\int \frac{(3x-1)\,dx}{x^2-x+1} = \frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

8) $\int \frac{x^2\,dx}{5+2x+x^2} = x - \ln(5+2x+x^2) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$.

9) $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}\,dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \ln\sqrt[4]{2x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}}$.

§ 8. Интегралы дробей, знаменатели которых имеют только простые вещественные корни

В рассматриваемом случае для разложения функции имеем формулу раздела VI § 4

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(a)}{f'(a)}\frac{1}{x-a} + \frac{F(b)}{f'(b)}\frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{F(l)}{f'(l)}\frac{1}{x-l}.$$

Каждый из членов разложения даёт при интегрировании логарифмическую функцию, так что, если вычисляется интеграл правильной дроби, то в результате получаем для него логарифмическое выражение, если же — неправильной, то, очевидно, кроме того, и целую алгебраическую функцию.

Примеры

10) $\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx = \ln\sqrt{x(x+3)^2(x-2)^3}$.

11) $\int \frac{5x^2-7ax+11a^2}{x^3-6ax^2+11a^2x-6a^3}\,dx = \frac{9}{2}\ln(x-a) - 17\ln(x-2a) + \frac{35}{2}\ln(x-3a)$.

12) $\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}\,dx = \ln\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2}}$.

13) $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}+x} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}+x}$.

14) $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \ln\sqrt[6]{\frac{(x-4)(x-2)^3}{(x-1)(x-3)^3}}$;

Разложение легко выполняется также непосредственным преобразованием $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{1}{2}\frac{(x-2)(x-3)-(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \ldots$

§ 9. Интегралы дробей, знаменатели которых имеют только вещественные корни, простые и кратные

В рассматриваемом случае функция раскладывается на элементарные дроби вида $\frac{A}{(x-a)^n}$ с вещественным a и $n \geqslant 1$. Для определения коэффициентов пользуемся различными приёмами, указанными в разделах II, III и IV § 4. При невысокой степени знаменателя достаточно простое определение даёт и общий приём, пользуясь уравнениями, получаемыми сравнением коэффициентов при различных степенях x. В сложных случаях в целях достижения наибольшей простоты вычислений следует комбинировать различные приёмы.

При $n>1$ дробь даёт при интегрировании алгебраические функции, а при $n=1$ — логарифмические. Для интеграла, следовательно, получаем алгебраическое и логарифмическое выражения.

Примеры

15) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln(x-1).$

Разложение имеет вид: $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3} = \dfrac{A_0}{(x-1)^3} + \dfrac{A_1}{(x-1)^2} + \dfrac{A_2}{(x-1)}$, и по освобождении от знаменателей имеем:

$$x^2+1 = A_0 + A_1(x-1) + A_2(x-1)^2 = (A_0 - A_1 + A_2) + (A_1 - 2A_2)\,x + A_2x^2.$$

Сравнением коэффициентов находим $A_2=1$, $A_1=2$ и $A_0=2$.

Вообще же интегралы данного вида, вида $\displaystyle\int \frac{\varphi(x)\,dx}{(ax+b)^n}$, где $\varphi(x)$ — целая рациональная функция, проще вычисляются подстановкой $ax+b=z$, $x=\dfrac{z-b}{a}$, $dx=\dfrac{1}{a}\,dz$. Интеграл этой подстановкой приводится к виду $\dfrac{1}{a}\displaystyle\int \frac{\varphi_1(z)\,dz}{z^n}$, где $\varphi_1(z)$ — также целая рациональная функция. По разделении её на z^n имеем под знаком интеграла сумму одночленов вида $A_kz^{\pm k}$. По выполнении интегрирования возвращаемся для результата к прежней переменной x.

Для данного интеграла имеем: $x-1=z$, $x=z+1$, $dx=dz$;

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx = \int \frac{(z+1)^2+1}{z^3}\,dz = \int\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z^3}\right)dz =$$
$$= -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + \ln z = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln(x-1).$$

16) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(3+x)^2}\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \qquad + \frac{27}{\,}x^2 - 108x + 243\frac{1}{3+x} + 405\ln(3+x).$

17) $\displaystyle\int \frac{(5x^3-2)\,dx}{x^4-8x^3+18x^2-27} = \frac{955-407x}{16(x-3)^2} + \frac{313}{64}\ln(x-3) + \frac{7}{64}\ln(x+1).$

Имеем общий вид разложения

$$\frac{5x^3-2}{x^4-8x^3+18x^2-27} = \frac{5x^3-2}{(x-3)^3(x+1)} = \frac{A_0}{(x-3)^3} + \frac{A_1}{(x-3)^2} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

и по освобождении от знаменателей

$$5x^2-2=A_0(x+1)+A_1(x+1)(x-3)+A_2(x+1)(x-3)^2+B(x-3)^3.$$

1) Полагая $x=-1$, находим $B=\frac{7}{64}$.

2) » $x=3$, » $A_0=\frac{133}{4}$.

3) Взяв первую производную и полагая $x=3$, имеем:

$$[15x^2]_{x=3}=A_0+A_1[x+1]_{x=3}+\ldots,$$

откуда $A_1=\frac{407}{16}$.

4) Таким же путём, взяв вторую производную, находим $A_2=\frac{313}{64}$; для определения этого коэффициента можем также воспользоваться каким-либо уравнением, получив его сравнением коэффициентов при какой-нибудь степени x; так, приравнивая коэффициенты при x^3, имеем $A_2+B=5$, откуда $A_2=\frac{313}{64}$.

18) $\displaystyle\int\frac{x^3-6x^2+3x-9}{(x+3)^2(x+4)^2}\,dx=\frac{280x+939}{(x+3)(x+4)}+264\ln(x+3)-263\ln(x+4).$

19) $\displaystyle\int\frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}\,dx=\frac{x+3}{2(1-x^2)}+2\ln x-\frac{3}{4}\ln(x-1)-\frac{5}{4}\ln(x+1).$

20) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-x^4-x^5-x^6}=$

$$=-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+2\ln x-\frac{1}{4}\ln(x+1)-\frac{7}{4}\ln(x-1).$$

Разложение легко выполняется непосредственно

$$\frac{1}{x^3(x+1)(x-1)^2}=\frac{x^4-(x^4-1)}{x^3(x+1)(x-1)^2}=\frac{x}{(x+1)(x-1)^2}-\frac{x^2+1}{x^3(x-1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x^3(x-1)}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+1)(x-1)}+\frac{(x-1)-x}{x(x-1)}+\frac{(x^3-1)-x^3}{x^3(x-1)}=\ldots$$

§ 10. Интегралы дробей, знаменатели которых наряду с вещественными корнями имеют также и комплексные

В этом случае функция раскладывается или на элементарные дроби вида $\frac{A}{(x-a)^n}$, где A и a могут быть и комплексными числами и $n\geqslant 1$, — разложение (22), или на элементарные дроби вида $\frac{A}{(x-a)^n}$ и $\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}$, где A, P, Q, a, p, q — вещественные числа и $n\geqslant 1$, — разложение (23).

В первом случае вычисление интеграла ведётся в комплексных числах, которые устраняются лишь для результата интегрирования (см. § 5).

Во втором случае вычисление ведётся в вещественных величинах. При наличии кратных комплексных корней вычисление осложняется тем, что основных формул § 7 уже недостаточно и интегралы вида $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$ приходится вычислять последовательным применением приёма интегрирования по частям или по заменяющей его формуле приведения (28). Формула (29) прямо даёт выражение интеграла.

В определении коэффициентов для элементарных дробей вида $\frac{A}{(x-a)^n}$ служат все те же приёмы, которые были указаны в двух предыдущих параграфах; коэффициенты же дробей вида $\frac{Px+Q}{x^2+px+q}$ при известных уже коэффициентах A, B, ... определяются общим приёмом — из уравнений, получаемых на основании тождественности равенства, определяющего общий вид разложения. Непосредственное разложение интегрируемой функции, без введения неопределённых коэффициентов, в тех случаях, когда этот приём можно использовать, даёт наиболее простой путь разложения.

В общем случае для интеграла получаем алгебраические, логарифмические и круговые функции; последние — вместо мнимых логарифмических.

Примеры

21) $$\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \ln\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg} x.$$

Непосредственно $$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{(x^4-1)-(x^2-1)+(x^2+1)}{(x-1)(x^2+1)} = \dots$$

22) $$\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x^2)} = \ln\frac{x}{\sqrt[4]{(1+x)^2(1+x^2)}} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

Разложение легко выполняется непосредственно.

23) $$\int \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2} = \frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{x+1} + \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

24) $$\int \frac{x^3+4x^2+6x}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2}\,dx = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\ln\frac{(x^2+2)^2}{x+1} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

25) $$\int \frac{x\,dx}{(1+x)(1+2x)^2(1+x^2)} = \frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} - \frac{1}{2}\ln(1+x) + \frac{16}{25}\ln(1+2x) - \frac{7}{100}\ln(1+x^2) + \frac{1}{50}\operatorname{arctg} x.$$

Написав общий вид разложения

$$\frac{x}{(1+x)(1+2x)^2(1+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{B_0}{(1+2x)^2}+\frac{B_1}{1+2x}+\frac{Px+Q}{1+x^2},$$

по освобождении от знаменателей имеем равенство

$$x=A(1+2x)^2(1+x^2)+B_0(1+x)(1+x^2)+B_1(1+x)(1+2x)(1+x^2)+$$
$$+(Px+Q)(1+x)(1+2x)^2.$$

1) Полагая $x=-1$, находим $A=-\frac{1}{2}$,

2) » $x=-\frac{1}{2}$, » $B_0=-\frac{4}{5}$,

3) взяв производную, полагая $x=-\frac{1}{2}$, находим $B_1=\frac{32}{25}$,

4) сравнением коэффициентов при x^4 находим $P=-\frac{7}{50}$,

5) полагая $x=0$, находим $Q=\frac{1}{50}$.

Определение коэффициентов можем вести различными путями. Определив весьма простым приемом первые два коэффициента A и B_0, уже значительно упрощаем задачу, так как вместо решения пяти уравнений с пятью неизвестными, которое требуется общим приемом, для определения трех коэффициентов достаточно всего трёх уравнений. При этом, замечая, что равенство, на основании которого определяются коэффициенты, должно удовлетворяться тождественно, т. е. при всяком x, можем выбирать уравнения так, чтобы решение их было возможно проще. Так, полагая $x=0$, при известных уже A и B_0, получаем первое уравнение $B_1+Q=\frac{13}{10}$; сравнивая коэффициенты при x^4, имеем второе $B_1+2Q=1$, и, наконец, полагая $x=1$, получаем третье $2B_1+3P+3Q=\frac{11}{5}$.

26) $$\int\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}dx=\frac{4-5x}{2(x-1)^2}+\frac{3}{4}\ln\frac{x^2+1}{(x-1)^2}-\operatorname{arctg}x.$$

27) $$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}.$$

Общее замечание. Биквадратный трёхчлен ax^4+bx^2+c раскладывается на два квадратных множителя с вещественными коэффициентами.

Не ограничивая в знаках коэффициенты b и c трёхчлена, коэффициент a можем считать положительным, так как умножением на (-1) в случае отрицательного a всегда можем притти к виду с положительным a.

Если для трёхчлена $b^2-4ac>0$, то

$$ax^4+bx^2+c=\frac{1}{4a}\{(2ax^2+b)^2-(b^2-4ac)\}=$$
$$=\frac{1}{4a}(2ax^2+b+\sqrt{b^2-4ac})(2ax^2+b-\sqrt{b^2-4ac}).$$

Заметим, что в случае отрицательного c, так как a принимается положительным, величина b^2-4ac всегда >0.

Если $b^2-4ac<0$, что возможно только в том случае, когда a и c одного знака, т. е. вместе с a положительно и c, то разложение на множители выполняется следующим образом:

$$ax^4+bx^2+c=(\sqrt{a}x^2)^2+2\sqrt{ac}\,x^2+(\sqrt{c})^2-(2\sqrt{ac}-b)\,x^2=$$
$$=(\sqrt{a}x^2+\sqrt{2\sqrt{ac}-b}\cdot x+\sqrt{c})\,(\sqrt{a}x^2-\sqrt{2\sqrt{ac}-b}\cdot x+\sqrt{c}).$$

Под корнем величина $2\sqrt{ac}-b$ положительна, так как рассматривается случай $4ac>b^2$.

28) $$\int\frac{2x^2+3}{x^5-9x}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{12}\ln(x^4-9)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Разложение легко выполняется простым преобразованием

$$\frac{2x^2+3}{x^5-9x}=\frac{(x^3+3x)+(x^3-3x)+3}{x(x^2-3)(x^2+3)}=\frac{1}{x^2-3}+\frac{1}{x^2+3}+$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{(x^2+3)-(x^2-3)}{x(x^2-3)(x^2+3)}=\frac{1}{x^2-3}+\frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x(x^2-3)}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x(x^2+3)}=\ \ldots$$

29) $$\int\frac{5x^3+8x-20}{(x-4)^3(x^2-4x-8)}\,dx=$$
$$=\frac{81-41x}{4(x-4)^2}+\frac{45}{16}\ln\frac{\sqrt{x^2-4x+8}}{x-4}+\frac{3}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}.$$

30) $$\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)}=$$
$$=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}.$$

31) $$\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)}=\ln\sqrt[12]{\frac{(x^2+1)(x^2+3)^3}{(x^2+4)(x^2+2)^3}}.$$

32) $$\int\frac{dx}{a^3+x^3}=\frac{1}{6a^2}\ln\frac{(a+x)^2}{a^2-ax+x^2}+\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}+C=$$
$$=\frac{1}{2a^2}\ln(a+x)-\frac{1}{6a^2}\ln(a^3+x^3)+\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}+C,$$

или

$$=\frac{1}{6a^2}\ln\frac{(a+x)^2}{a^2-ax+x^2}+\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2a-x}+C_1.$$

Легко убедиться, что круговая функция последнего выражения включает в себя часть постоянной, а именно $\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}$;

$$\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}+\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}+\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2a-x}.$$

33) $$\int \frac{x\,dx}{a^3+x^3} = \frac{1}{6a}\ln\frac{a^2-ax+x^2}{(a+x)^2} + \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}} + C =$$
$$= -\frac{1}{2a}\ln(a+x) + \frac{1}{6a}\ln(a^2+x^2) + \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}} + C,$$

или

$$= \frac{1}{6a}\ln\frac{a^2-ax+x^2}{(a+x)^2} + \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2a-x} + C'.$$

34) $$\int \frac{x^2\,dx}{a^3+x^3} = \ln\sqrt[3]{a^3+x^3}.$$

35) $$\int \frac{dx}{x(a^3+x^3)} = \frac{1}{a^3}\ln\frac{x}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}.$$

36) $$\int \frac{dx}{x^2(a^3+x^3)} = -\frac{1}{a^3x} - \frac{1}{6a^4}\ln\frac{a^2-ax+x^2}{(a+x)^2} - \frac{1}{a^4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

(воспользоваться результатом примера 33).

37) $$\int \frac{dx}{x^m(a^3+x^3)} = -\frac{1}{(m-1)a^3x^{m-1}} - \frac{1}{a^3}\int\frac{x^{3-m}\,dx}{a^3+x^3}\quad (m \neq 1).$$

Если $m \leqslant 3$, то приходим к интегралам примера 32 или 33, если же $m > 3$, то, повторяя тот же прием, приходим в конечном счёте или к тем же интегралам или к интегралам примеров 34 и 35.

38) $$\int \frac{dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^3}\left\{\ln\frac{x+a}{x-a} + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right\}.$$

39) $$\int \frac{x\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^2}\ln\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}.$$

40) $$\int \frac{dx}{x(a^4-x^4)} = \frac{1}{a^4}\ln\frac{x}{\sqrt[4]{a^4-x^4}}.$$

41) $$\int \frac{dx}{x^m(a^4-x^4)} = -\frac{1}{(m-1)a^4x^{m-1}} + \frac{1}{a^4}\int\frac{x^{4-m}\,dx}{a^4-x^4}\qquad (m \neq 1).$$

42) $$\int \frac{x\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}.$$

43) $$\int \frac{x^2\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4a\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{a^2-ax\sqrt{2}+x^2}{a^2+ax\sqrt{2}+x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}\right\}.$$

44) Вводя в целях сокращения записи для вычисляемого интеграла $\int \frac{dx}{a^5+x^5}$, а также для примеров 45, 46, 47, следующие обозначения:

$$\ln\left(a^2-2ax\cos\frac{1}{5}\pi+x^2\right) = L_1,\quad \operatorname{arctg}\frac{x-a\cos\frac{1}{5}\pi}{a\sin\frac{1}{5}\pi} = A_1,$$

$$\ln\left(a^2+2ax\cos\frac{2}{5}\pi+x^2\right) = L_2,\quad \operatorname{arctg}\frac{x+a\cos\frac{2}{5}\pi}{a\sin\frac{2}{5}\pi} = A_2,$$

в результате вычисления, получаем:

$$\int \frac{dx}{a^5+x^5} = \frac{1}{5a^4}\left\{\ln(x+a) - \cos\frac{1}{5}\pi \cdot L_1 + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{2}{5}\pi \cdot L_2 + 2\sin\frac{1}{5}\pi \cdot A_1 + 2\sin\frac{2}{5}\pi \cdot A_2\right\}.$$

Определив корни функции a^5+x^5

$$x_1 = -a,$$

$$x_{2,3} = a\left(\cos\frac{1}{5}\pi \pm i\sin\frac{1}{5}\pi\right),$$

$$x_{4,5} = a\left(\cos\frac{3}{5}\pi \pm i\sin\frac{3}{5}\pi\right) = -a\left(\cos\frac{2}{5}\pi \pm i\sin\frac{2}{5}\pi\right),$$

имеем разложение на элементарные дроби следующего вида:

$$\frac{1}{a^5+x^5} = \frac{A_0}{x+a} + \frac{A_1}{x-a\left(\cos\frac{1}{5}\pi + i\sin\frac{1}{5}\pi\right)} + \frac{A_2}{x-a\left(\cos\frac{1}{5}\pi - i\sin\frac{1}{5}\pi\right)} +$$

$$+ \frac{A_3}{x+a\left(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right)} + \frac{A_4}{x+a\left(\cos\frac{2}{5}\pi - i\sin\frac{2}{5}\pi\right)}.$$

Определяя коэффициенты, находим:

$$A_0 = \left[\frac{F(x)}{f'(x)}\right]_{x=-a} = \left(\frac{1}{5x^4}\right)_{x=-a} = \frac{1}{5a^4},$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{5x^4}\right)_{x=a\left(\cos\frac{1}{5}\pi + i\sin\frac{1}{5}\pi\right)} = \frac{1}{5a^4\left(\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi\right)} =$$

$$= \frac{-1}{5a^4\left(\cos\frac{1}{5}\pi - i\sin\frac{1}{5}\pi\right)},$$

$$A_2 = \frac{-1}{5a^4\left(\cos\frac{1}{5}\pi + i\sin\frac{1}{5}\pi\right)},$$

$$A_3 = \frac{1}{5a^4\left(\cos\frac{2}{5}\pi - i\sin\frac{2}{5}\pi\right)},$$

$$A_4 = \frac{1}{5a^4\left(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right)},$$

так что для вычисляемого интеграла имеем:

$$\int \frac{dx}{a^5+x^5} = \frac{1}{5a^4}\left\{ \int \frac{dx}{x+a} - \right.$$

$$-\int\left(\frac{1}{\left(\cos\frac{1}{5}\pi - i\sin\frac{1}{5}\pi\right)\left[x-a\left(\cos\frac{1}{5}\pi+i\sin\frac{1}{5}\pi\right)\right]} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(\cos\frac{1}{5}\pi + i\sin\frac{1}{5}\pi\right)\left[x-a\left(\cos\frac{1}{5}\pi-i\sin\frac{1}{5}\pi\right)\right]}\right)dx +$$

$$+\int\left(\frac{1}{\left(\cos\frac{2}{5}\pi - i\sin\frac{2}{5}\pi\right)\left[x+a\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)\right]} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\left(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right)\left[x+a\left(\cos\frac{2}{5}\pi-i\sin\frac{2}{5}\pi\right)\right]}\right)dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{5a^4}\left\{ \int \frac{dx}{x+a} - \int \frac{2x\cos\frac{1}{5}\pi - 2a}{a^2 - 2ax\cos\frac{1}{5}\pi + x^2}\,dx + \int \frac{2x\cos\frac{2}{5}\pi + 2a}{a^2 + 2ax\cos\frac{2}{5}\pi + x^2}\,dx \right\}.$$

Выполнив интегрирование и введя для результата обусловленные сокращённые обозначения, получаем приведенное выше выражение интеграла.

45) $$\int \frac{x\,dx}{a^5+x^5} = \frac{1}{5a^3}\left\{ -\ln(x+a) - \cos\frac{2}{5}\pi\cdot L_1 + \cos\frac{1}{5}\pi\cdot L_2 + \right.$$

$$\left. + 2\sin\frac{2}{5}\pi\cdot A_1 - 2\sin\frac{1}{5}\pi\cdot A_2 \right\}.$$

Для разложения того же вида, как и в предыдущем случае, находим значения коэффициентов

$$A_0 = -\frac{1}{5a^2}, \quad A_1 = \frac{-1}{5a^3\left(\cos\frac{2}{5}\pi - i\sin\frac{2}{5}\pi\right)},$$

$$A_2 = \frac{-1}{5a^3\left(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right)}, \quad A_3 = \frac{1}{5a^3\left(\cos\frac{1}{5}\pi + i\sin\frac{1}{5}\pi\right)},$$

$$A_4 = \frac{1}{5a^2\left(\cos\frac{1}{5}\pi - i\sin\frac{1}{5}\pi\right)},$$

и затем для вычисляемого интеграла

$$\int \frac{x\,dx}{a^5+x^5} = \frac{1}{5a^2}\left\{ -\int \frac{dx}{x+a} - \right.$$

$$-\int \frac{2x\cos\frac{2}{5}\pi - 2a\cos\frac{1}{5}\pi\cos\frac{2}{5}\pi - 2a\sin\frac{1}{5}\pi\sin\frac{2}{5}\pi}{a^2 - 2ax\cos\frac{1}{5}\pi + x^2}\,dx +$$

$$\left. + \int \frac{2x\cos\frac{1}{5}\pi + 2a\cos\frac{1}{5}\pi\cos\frac{2}{5}\pi - 2a\sin\frac{1}{5}\pi\sin\frac{2}{5}\pi}{a^2 + 2ax\cos\frac{2}{5}\pi + x^2}\,dx \right\} = \ldots$$

46) $$\int \frac{x^2\,dx}{a^5+x^5}=\frac{1}{5a^2}\left\{\ln(x+a)+\cos\frac{2}{5}\pi L_1-\cos\frac{1}{5}\pi\cdot L_2+ +2\sin\frac{2}{5}\pi A_1-2\sin\frac{1}{5}\pi\cdot A_2\right\}.$$

47) $$\int \frac{x^3\,dx}{a^5+x^5}=\frac{1}{5a}\left\{-\ln(x+a)+\cos\frac{1}{5}\pi L_1-\cos\frac{2}{5}\pi L_2+ +2\sin\frac{1}{5}\pi A_1+2\sin\frac{2}{5}\pi\cdot A_2\right\},$$

48) $$\int \frac{x^4\,dx}{a^5+x^5}=\ln\sqrt[5]{a^5+x^5}.$$

49) $$\int \frac{dx}{x(a^5+x^5)}=\frac{1}{a^5}\ln\frac{x}{\sqrt[5]{a^5+x^5}}.$$

50) $$\int \frac{dx}{x^m(a^5+x^5)}=-\frac{1}{(m-1)a^5x^{m-1}}-\frac{1}{a^5}\int\frac{x^{5-m}\,dx}{a^5+x^5}\qquad (m\neq 1).$$

При $m\leqslant 5$ приходим к одному из интегралов 44), ..., 48); если же $m>5$, то последовательным применением приема к тем же интегралам или к интегралу 49).

Интегралы вида $\int \frac{x^{\pm m}}{b\pm ax^n}\,dx$

Для выражений интегралов $\int\frac{dx}{1+x^n}$ и $\int\frac{x^m\,dx}{1+x^n}$ вводим сокращённые обозначения

$$\ln\left(1-2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi+x^2\right)=L_k\quad\text{и}\quad \operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{2k+1}{n}\pi}{\sin\frac{2k+1}{n}\pi}=A_k.$$

Рассматриваем отдельно случаи чётного и нечётного n.

1) При n чётном функция $1+x^n$ имеет корни

$$\cos\frac{2k+1}{n}\pi\pm i\sin\frac{2k+1}{n}\pi,\qquad\text{где}\quad k=0,1,2,\ldots,\frac{n-2}{2},$$

и, следовательно, разложение для функции $\frac{1}{1+x^n}$ имеет вид

$$\frac{1}{1+x^n}=\sum_{k=0}^{k=\frac{n-2}{2}}\left\{\frac{A_{k1}}{x-\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)}+ +\frac{A_{k2}}{x-\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi-i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)}\right\}.$$

Определяя коэффициенты, имеем:

$$A_{k1}=\left(\frac{1}{nx^{n-1}}\right)_{x=\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi}=$$

$$=\frac{1}{n\left[\cos\frac{n-1}{n}(2k+1)\pi+i\sin\frac{n-1}{n}(2k+1)\pi\right]},$$

$$A_{k1}=\frac{-1}{n\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi-i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)},$$

$$A_{k2}=\frac{-1}{n\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{1+x^n}=-\frac{1}{n}\int\sum_{k=0}^{k=\frac{n-2}{2}}\left\{\frac{1}{\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi-i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)}\times\right.$$

$$\times\frac{1}{\left[x-\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)\right]}+$$

$$\left.+\frac{1}{\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)\left[x-\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi-i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)\right]}\right\}dx=$$

$$=-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-2}{2}}\int\frac{2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi-2}{1-2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi+x^2}dx.$$

Выполнив интегрирование, получаем:

$$\int\frac{dx}{1+x^n}=-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-2}{2}}\cos\frac{2k+1}{n}\pi\ln\left(1-2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi+x^2\right)+$$

$$+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-2}{2}}\sin\frac{2k+1}{n}\pi\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{2k+1}{n}\pi}{\sin\frac{2k+1}{n}\pi},$$

или, введя обусловленные обозначения,

$$\int \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-2}{2}} \cos\frac{2k+1}{n}\pi \cdot L_k + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-2}{2}} \sin\frac{2k+1}{n}\pi \cdot A_k \qquad (n\text{ — чётное}). \quad (43)$$

2) Для функции $\frac{x^m}{1+x^n}$ при n чётном имеем тот же общий вид разложения и для коэффициентов A_{k1} и A_{k2} находим:

$$A_{k1} = \frac{-1}{n\left[\cos\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi - i\sin\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi\right]},$$

$$A_{k2} = \frac{-1}{n\left[\cos\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi\right]}.$$

Таким образом,

$$\frac{x^m}{1+x^n} = -\frac{1}{n}\sum_0^{\frac{n-2}{2}} \left\{ \frac{1}{\left[\cos\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi - i\sin\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi\right]} \times \right.$$

$$\times \frac{1}{\left[x - \left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)\right]} +$$

$$+ \frac{1}{\left[\cos\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi\right]} \times$$

$$\left. \times \frac{1}{\left[x - \left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi - i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)\right]} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_0^{\frac{n-2}{2}} \frac{2x\cos\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi - 2\cos\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi\cos\frac{2k+1}{n}\pi}{1 - 2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi + x^2} -$$

$$- \frac{2\sin\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi\sin\frac{2k+1}{n}\pi}{1 - 2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi + x^2}.$$

Умножая на dx, интегрируя и вводя для результата обусловленные обозначения, получаем:

$$\int \frac{x^m\,dx}{1+x^n} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-2}{2}} \cos\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi L_k +$$

$$+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-2}{2}} \sin\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi\cdot A_k \qquad (n \text{ — чётное}). \qquad (44)$$

3) При n нечётном функция $1+x^n$ имеет корни

$$-1 \text{ и } \cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{n}\pi, \quad \text{где} \quad k=0, 1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2};$$

и разложение интегрируемой функции $\frac{1}{1+x^n}$ имеет вид

$$\frac{1}{1+x^n} = \frac{A}{1+x} + \sum_{k=0}^{k=\frac{n-3}{2}} \left\{ \frac{A_{k1}}{x-\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{A_{k2}}{x-\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi - i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)} \right\}.$$

Определяя аналогично предыдущему значения коэффициентов, находим:

$$A = \frac{1}{n},$$

$$A_{k1} = \frac{-1}{n\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi - i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)},$$

$$A_{k2} = \frac{-1}{n\left(\cos\frac{2k+1}{n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)},$$

и после этого для интеграла получаем:

$$\int \frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{n}\ln(1+x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-3}{2}} \cos\frac{2k+1}{n}\pi L_k +$$

$$+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-3}{2}} \sin\frac{2k+1}{n}\pi\cdot A_k \quad (n \text{ — нечётное}). \qquad (45)$$

4) Точно так же для интеграла $\int \frac{x^m\,dx}{1+x^n}$ при n нечётном получаем:

$$\int \frac{x^m\,dx}{1+x^n} = \frac{(-1)^m}{n}\ln(1+x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-3}{2}} \cos\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi L_k +$$

$$+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-3}{2}} \sin\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi A_k \qquad (n\text{ — нечётное}). \qquad (46)$$

5) Замечая, что при n чётном функция $1-x^n$ имеет корни

$$\pm 1 \text{ и } \cos\frac{2k}{n}\pi \pm i\sin\frac{2k}{n}\pi, \text{ где } k=1,\ 2,\ \ldots,\frac{n-2}{2},$$

и определяя аналогично предыдущему коэффициенты разложений для функций $\frac{1}{1-x^n}$ и $\frac{x^m}{1-x^n}$, получаем:

$$\int \frac{dx}{1-x^n} = \frac{1}{n}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=\frac{n-2}{2}} \cos\frac{2k}{n}\pi L_k +$$

$$+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{k=\frac{n-2}{2}} \sin\frac{2k}{n}\pi A \qquad (n\text{ — чётное}). \qquad (47)$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{1-x^n} = \frac{(-1)^m}{n}\ln(1+x) - \frac{1}{n}\ln(1-x) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=\frac{n-2}{2}} \cos\frac{2k}{n}(m+1)\pi L_k +$$

$$+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{k=\frac{n-2}{2}} \sin\frac{2k}{n}(m+1)\pi A_k \qquad (n\text{ — чётное}), \qquad (48)$$

где $L_k = \ln\left(1 - 2x\cos\frac{2k}{n}\pi + x^2\right)$ и $A_k = \operatorname{arctg}\dfrac{x-\cos\frac{2k}{n}\pi}{\sin\frac{2k}{n}\pi}$.

6) Заменяем в (45) и (46) x на $(-x)$, в соответствии с чем меняются и введённые обозначения, так что будем иметь:

$$\ln\left(1 + 2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi + x^2\right) = L_k, \quad \operatorname{arctg}\frac{x+\cos\frac{2k+1}{n}\pi}{\sin\frac{2k+1}{n}\pi} = A_k,$$

и получаем формулы:

$$\int \frac{dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}\ln(1-x) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-3}{2}} \cos\frac{2k+1}{n}\pi \cdot L_k +$$
$$+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-3}{2}} \sin\frac{2k+1}{n}\pi \cdot A_k \quad (n\text{ — нечётное}), \tag{49}$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}\ln(1-x) + \frac{(-1)^m}{n}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-3}{2}} \cos\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi \cdot L_k +$$
$$+\frac{(-1)^m 2}{n}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-3}{2}} \sin\frac{2k+1}{n}(m+1)\pi \cdot A_k \quad (n\text{ — нечётное}), \tag{50}$$

7) $$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{1\pm x^n} = \pm\ln\sqrt[n]{1\pm x^n}, \tag{51}$$

$$\int \frac{dx}{x^m(1\pm x^n)} = -\frac{1}{(m-1)\,x^{m-1}} \mp \int \frac{x^{n-m}}{1\pm x^n} \quad (m\neq 1). \tag{52}$$

При $m \leqslant n$ интеграл приводится к одному из предыдущих интегралов, а при $m > n$ последовательным применением формулы — к одному из тех же интегралов или к интегралу

$$\int \frac{dx}{x(1\pm x^n)} = \ln\frac{x}{\sqrt[n]{1\pm x^n}}. \tag{53}$$

Интеграл $\int \frac{x^{\pm m}\,dx}{b\pm ax^n}$ подстановкой $x = z\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ приводится к интегралу $\sqrt[n]{\frac{b^{\pm m-n+1}}{a^{\pm m+1}}}\int\frac{z^{\pm m}\,dz}{1\pm z^n}$.

Примеры

51) $$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}) +$$
$$+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4}.$$

52) $$\int \frac{dx}{(x^2+3x+5)^3} = \frac{(2x+3)(6x^2+18x+41)}{242(x^2+3x+5)^2} + \frac{12}{121\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{11}}.$$

Представив интеграл в виде $\int\frac{32\,d(2x+3)}{[(2x+3)^2+11]^3} = 32\int\frac{dz}{(z^2+11)^3}$, вычисляем его интегрированием по частям или пользуясь формулой (26) или формулой (27). Формула (29) даёт непосредственно выражение интеграла

53) $$\int \frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^4}\,dx = \frac{x}{6(x^2+1)^3} - \frac{x}{24(x^2+1)^2} + \frac{7x}{16(x^2+1)} + \frac{7}{16}\operatorname{arctg} x.$$

Разложение легко выполняется непосредственно.

54) $$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(ax^2+2bx+c)^2} = -\frac{A}{2a(ax^2+2bx+c)} - \frac{(Ab-Ba)(ax+b)}{2a(ac-b^2)(ax^2+2bx+c)} - \frac{Ab-Ba}{2(ac-b^2)\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}},$$

если $ac-b^2>0$, или

$$= -\frac{A}{2a(ax^2+2bx+c)} + \frac{(Ab-Ba)(ax+b)}{2a(b^2-ac)(ax^2+2bx+c)} + \frac{Ab-Ba}{4(b^2-ac)\sqrt{b^2-ac}}\ln\frac{ax+b-\sqrt{b^2-ac}}{ax+b+\sqrt{b^2-ac}},$$

если $ac-b^2<0$, или

$$= -\frac{A}{2(ax+b)^2} + \frac{Ab-Ba}{3(ax+b)^3},$$

если $ac-b^2=0$ $\left(c=\frac{b^2}{a}\right)$.

55) $$\int \frac{5x^3-27x^2+55x-41}{(x^2-4x+5)^2}\,dx = -\frac{x-1}{x^2-4x+5} + \frac{5}{2}\ln(x^2-4x+5) + 2\operatorname{arctg}(x-2).$$

Замечая, что $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$, подстановкой $x-2=z$ в целях упрощения вычислений приводим интеграл к виду $\int \frac{5z^3+3z^2+7z+1}{(z^2+1)^2}\,dz$. Последний интеграл простым преобразованием числителя легко раскладывается на сумму элементарных интегралов

$$5\int\frac{z\,dz}{z^2+1} + 3\int\frac{dz}{z^2+1} + 2\int\frac{z\,dz}{(z^2+1)^2} - 2\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

56) $$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{x}{3(x^3-1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Разложение интегрируемой функции имеет вид

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{A_0}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Px+Q}{x^2+x+1}.$$

Определение коэффициентов для него представляет довольно сложную и громоздкую работу, и этот интеграл, как и все интегралы вида $\int \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}$, проще вычисляется методом интегрирования по частям, последовательное применение которого приводит в конечном счёте к понижению кратности знаменателя до единицы.

Для вычисляемого интеграла имеем:

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \int \frac{x^3-(x^3-1)}{(x^3-1)^2}\,dx = -\int \frac{dx}{x^3-1} + \frac{1}{3}\int xd\left(-\frac{1}{x^3-1}\right) =$$
$$= -\frac{1}{3}\,\frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3-1}\,;$$

для последнего интеграла пользуемся результатом примера 32.

57) $$\int \frac{(3x^4+4)\,dx}{x^2(x^2+1)^3} = -\frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2} - \frac{57}{8}\operatorname{arctg} x.$$

Разложение интегрируемой функции общим приёмом требует определения восьми коэффициентов, между тем оно легко выполняется простым преобразованием:

$$\frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3} = \frac{4(x^4+2x^2+1)-x^4-8x^2}{x^2(x^2+1)^3} = \frac{4}{x^2(x^2+1)} - \frac{x^2}{(x^2+1)^3} - \frac{8}{(x^2+1)^3} =$$
$$= 4\,\frac{1}{x^2} - 4\,\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} - 7\,\frac{1}{(x^2+1)^3}\,.$$

Общее замечание к §§ 11—14

Всякая рациональная алгебраическая дробь теоретически может быть разложена на сумму элементарных дробей, интегралы которых вычисляются на основании нескольких элементарных формул. Этим приёмом *теоретически можно выразить интеграл всякой рациональной алгебраической функции.* Однако задача вычисления интеграла во многих случаях *может быть значительно облегчена применением других методов,* а именно: введением нового переменного, интегрированием по частям и методом неопределённых коэффициентов.

§ 11. Метод подстановки для интегралов рациональных алгебраических функций

Если имеем интеграл $\int F(x)\,dx$ и можем подстановкой $x=\Psi(z)$, $dx=\Psi'(z)\,dz$ ввести вместо x новую переменную z так, что получающаяся под знаком интеграла функция $F[\Psi(z)]\,\Psi'(z)$ имеет более простой вид и интеграл её или известен или легче раскладывается на элементарные интегралы, то, пользуясь этой подстановкой, можем существенно облегчить задачу вычисления интеграла. На практике введение нового переменного приходится обычно выполнять обратным порядком и подставлять не $x=\Psi(z)$, но, наоборот, некоторую функцию $\varphi(x)$ полагать равной z. Если интеграл $\int F(x)\,dx$ можем представить в виде $\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx$, то, подставляя $\varphi(x)=z$, приводим его к более простому виду, к интегралу $\int f(z)\,dz$ от менее сложной по структуре функции. При этом в несложных случаях, особенно, когда интеграл выражается прямо по какой-либо из элементарных формул, в замене $\varphi(x)$ новой переменной z даже нет нужды, и $\varphi(x)$ мы можем рассматривать как переменную интегрирования.

Рассмотрим интеграл $\int \frac{F(x)\,dx}{x^n-a^n}$, где $F(x)$ — целая рациональная функция. Мы видели, что, начиная уже с $n=5$, вычисление этого интеграла, интеграла простой сравнительно функции, вообще представляет сложную задачу. Между тем, при некоторой структуре числителя $F(x)$ интеграл вычисляется очень легко. Так, если $F(x)$ можно представить в виде $f(x^n)x^{n-1}$, то, подставляя $x^n=z$, приходим к интегралу $\frac{1}{n}\int \frac{f(z)\,dz}{z-a^n}$, под знаком которого имеем простую в отношении интегрирования функцию с линейным знаменателем. Конечно, и в этом случае интеграл мог бы быть вычислен основным приёмом, разложением функции на элементарные дроби, но вычисления, связанные с этим приёмом, были бы гораздо более сложными. На приведённом примере мы видим, что в области интегрирования рациональных алгебраических функций метод подстановки, в отличие от основного метода, имеет ограниченное значение. В то время как последний теоретически даёт возможность вычисления интеграла всякой функции, подстановка возможна и целесообразна лишь при особых исключительных условиях её структуры. Несмотря на это, однако, метод подстановки имеет важное значение. Всякая задача должна быть разрешена наиболее простым путём, и с этой точки зрения использование при соответствующих условиях метода подстановки является необходимым, особенно в тех случаях, когда основной приём ведёт к сложным, лишь с большим трудом преодолимым операциям.

Примеры

58) $$\int \frac{x\,dx}{x^6+1}=\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$$

(подст. $x^2=z$. Воспользоваться результатом примера 32).

59) $$\int \frac{x^{n-1}-1}{x^n-nx}\,dx=\ln\sqrt[n]{x^n-nx}.$$

60) $$\int \frac{x^3dx}{3x^4-2x^2+1}=\frac{1}{12}\ln(3x^4-2x^2+1)+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{3x^2-1}{\sqrt{2}}$$

(подст. $x^2=z$).

61) $$\int \frac{x^5dx}{3x^4+x^2-4}=\frac{1}{6}x^2-\frac{8}{63}\ln(3x^2+4)+\frac{1}{14}\ln(x^2-1).$$

62) $\int \frac{x^2\,dx}{9-10x^3+x^6}=\frac{1}{24}\ln\frac{x^3-9}{x^3-1}$.

63) $\int \frac{x^3-4x^2+1}{(x-2)^4}\,dx=-\frac{6x^2-30x+29}{3(x-2)^3}+\ln(x-2)$ (подст. $x-2=z$).

64) $\int \frac{x^3dx}{(x-1)^{12}}=-\frac{1}{8(x-1)^8}-\frac{1}{3(x-1)^9}-\frac{3}{10(x-1)^{10}}-\frac{1}{11(x-1)^{11}}$.

65) $\int \frac{x^4-3x}{(1+2x)^5}\,dx=\frac{384x^3+432x^2+368x+49}{384(1+2x)^4}+\frac{1}{32}\ln(1+2x)$.

Интегралы вида $\int \frac{F(x)\,dx}{(ax+b)^n}$ и $\int \frac{dx}{(x-a)^k(x-b)^l}$.

I) Интеграл вида $\int \frac{F(x)\,dx}{(ax+b)^n}$, где $F(x)$ — целая рациональная функция, проще всего вычисляется подстановкой $ax+b=z$. В результате подстановки приходим к интегралу, под знаком которого находится полином различных, положительных и отрицательных, целых степеней z.

Интеграл $\int \frac{(a'x+b')^n}{(ax+b)^m}dx$ подстановкой $ax+b=z$ приводится к интегралу

$$\frac{1}{a^{n+1}}\int \frac{[a'z+(ab'-a'b)]^n}{z^m}dz=\frac{1}{a^{n+1}}\int \sum_{p=0}^{p=n}\binom{n}{p}(ab'-a'b)^{n-p}a'^pz^{p-m}dz.$$

Отсюда, выполняя интегрирование и возвращаясь к прежней переменной x, получаем:

$$\int \frac{(a'x+b')^n}{(ax+b)^m}dx=\frac{1}{a^{n+1}}\sum_{p=0}^{p=n}\binom{n}{p}(ab'-a'b)^{n-p}a'^p\frac{(ax+b)^{p-m+1}}{p-m+1}. \quad (54)$$

Формула не даёт выражения для одного из членов суммы при $p=m-1$, и этот член равен

$$\frac{1}{a^{n+1}}\int \binom{n}{m-1}(ab'-a'b)^{n-m+1}a'^{m-1}\frac{dz}{z}=$$
$$=\binom{n}{m-1}\frac{a'^{m-1}}{a^{n+1}}(ab'-a'b)^{n-m+1}\ln(ax+b).$$

II) Вычисляя интеграл $\int \frac{dx}{(x-a)^k(x-b)^l}$ подстановкой

$$z=\frac{x-a}{x-b},\quad x=\frac{a-bz}{1-z},\quad x-b=\frac{a-b}{1-z},\quad x-a=\frac{(a-b)z}{1-z},\quad dx=\frac{(a-b)\,dz}{(1-z)^2},$$

приводим его к интегралу

$$\frac{1}{(a-b)^{k+l-1}} \int \frac{(1-z)^{k+l-2}}{z^k}\,dz =$$

$$= \frac{1}{(a-b)^{k+l-1}} \int \sum_{0}^{k+l-2} (-1)^p \binom{k+l-2}{p} z^{p-k}\,dz.$$

Выполняя интегрирование и возвращаясь к прежней переменной x, получаем:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k (x-b)^l} =$$

$$= \frac{1}{(a-b)^{k+l-1}} \sum_{p=0}^{p=k+l-2} (-1)^p \binom{k+l-2}{p} \frac{1}{p-k+1} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-k+1}. \quad (55)$$

При $p=k-1$ формула теряет значение и соответствующий член суммы равен

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(a-b)^{k+l-1}} \binom{k+l-2}{k-1} \int \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{-1} d\,\frac{x-a}{x-b} =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{(a-b)^{k+l-1}} \binom{k+l-2}{k-1} \ln \frac{x-a}{x-b}.$$

Приняв в полученной формуле $k=l=n$ и написав произведение $(x-a)(x-b)$ в виде x^2+px+q, получаем из неё формулу

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$$

$$= \frac{1}{(a-b)^{2n-1}} \sum_{p=0}^{p=2n-2} (-1)^p \binom{2n-2}{p} \frac{1}{p-n+1} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-n+1}, \quad (56)$$

в которой a и b — корни трёхчлена (x^2+px+q). При $p=n-1$ соответствующий член суммы равен

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(a-b)^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \ln \frac{x-a}{x-b}.$$

Формула действительна как для вещественных, так и для комплексных корней, но в последнем случае приводит к мнимому выражению для интеграла. Однако результат мы можем всегда привести к вещественному виду, если заметим, что корни a и b — сопряжённые и что каждая пара равноотстоящих от начала и конца членов суммы, благодаря свойствам биномиального разложения, даёт при сложении вещественную алгебраическую функцию, средний же логарифмический член на основании (24) может быть выражен вещественной круговой функцией.

Примеры

66) $$\int \frac{dx}{(x+1)^3(x-1)^2} = -\frac{1}{16}\frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{16}\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{32}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - \frac{3}{16}\ln\frac{x-1}{x+1}.$$

Подстановкой $\frac{x-1}{x+1} = z$, $x = \frac{1+z}{1-z}$, $x+1 = \frac{2}{1-z}$, $x-1 = \frac{2z}{1-z}$, $dx = \frac{2dz}{(1-z)^2}$, приходим к легко вычисляемому интегралу

$$\frac{1}{16}\int \frac{(1-z)^3}{3^2}\,dz.$$

Подстановка $\frac{x+1}{x-1} = z$ приводит к столь же простому интегралу.

67) $$\int \frac{dx}{x^2(5-6x)^2} = -\frac{1}{125}\frac{5-6x}{x} + \frac{36}{125}\frac{x}{5-6x} - \frac{12}{125}\ln\frac{5-6x}{x} =$$
$$= \frac{12x-5}{25(5-6x)x} - \frac{12}{125}\ln\frac{5-6x}{x}\ \left(\text{подст.}\ \frac{5-6x}{x} = z\right).$$

68) $$\int \frac{dx}{(x^2-2x-3)^3} = \frac{3x^3-9x^2-11x+17}{128(x^2-2x-3)^2} + \frac{3}{512}\ln\frac{x-3}{x+1}.$$

69) $$\int \frac{dx}{(x^2-4x+13)^3} = \frac{(x-2)(x^2-4x+19)}{216(x^2-4x+13)^2} + \frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}.$$

70) $$\int \frac{dx}{(x+2)^3(x+3)^4} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2 + 5\frac{x+3}{x+2} + 10\ln\frac{x+2}{x+3} -$$
$$-10\frac{x+2}{x+3} + \frac{5}{2}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^3 =$$
$$= -\frac{20x^5+200x^4+710x^3+970x^2+145x-467}{6(x+2)^2(x+3)^2} + 10\ln\frac{x+2}{x+3}.$$

§ 12. Метод интегрирования по частям

В области интегрирования рациональных алгебраических функций смысл и назначение метода — понижение кратности знаменателя интегрируемой функции или какого-либо из его множителей.

Метод интегрирования по частям, как мы видели в § 7, гл. I и в § 5, гл. II, дал возможность вычисления интеграла $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Последовательным снижением кратности знаменателя мы приходим, в конечном счёте, к наиболее простому интегралу данного вида с простым знаменателем и находим выражение этого интеграла по одной из основных формул. Назначение метода и схема пользования им остаются такими же и для интегралов алгебраических функций более сложной структуры.

Рассмотрим интеграл $\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p}$, для которого числа m, n, p будем считать целыми и числа m, a, b больше или меньше нуля. Этот интеграл представляет частный случай интеграла от так называемого биномиального дифференциального выражения, который будет рассмотрен в гл. III.

При $m=n-1$ интеграл вычисляется прямо, и мы имеем: $\int \frac{x^{n-1}\,dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{-1}{n(p-1)b(a+bx^n)^{p-1}}$, если $p \neq 1$, и $= \frac{1}{nb}\ln(a+bx^n)$, если $p=1$.

Если m не $=(n-1)$, то, представив интеграл в виде

$$\frac{1}{nb}\int x^{m-n+1}\,d\left[-\frac{1}{(p-1)(a+bx^n)^{p-1}}\right],$$

интегрированием по частям получаем:

$$\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p} = -\frac{x^{m-n+1}}{n(p-1)b(a+bx^n)^{p-1}} + \frac{m-n+1}{n(p-1)b}\int \frac{x^{m-n}\,dx}{(a+bx^n)^{p-1}}, \quad (57)$$

и, таким образом, приводим его к интегралу того же вида, но с кратностью знаменателя на единицу менее. Повторяя этот приём, приходим к интегралу с кратностью знаменателя, ещё пониженной на единицу и т. д., вообще, последовательно пользуясь $(p-1)$ раз приёмом интегрирования по частям, приходим, в конечном счёте, к интегралу $\int \frac{x^{m-(p-1)n}\,dx}{a+bx^n}$ с однократным знаменателем.

Если $m \geqslant (p-1)n$, этот интеграл имеет вид $\int \frac{x^k\,dx}{a+bx^n}$ $(k>0)$. При $k=0$ и $k<n$ имеем один из простейших интегралов данного вида с простым знаменателем и степенью числителя ниже степени знаменателя. Если же $k \geqslant n$, то, разделив x^k на $(a+bx^n)$ и вычислив интеграл целой части функции, также приходим к простейшему виду интеграла.

Если $m<(p-1)n$, то интеграл имеет вид $\int \frac{dx}{x^k(a+bx^n)}$ $(k>0)$. Для этого интеграла всегда можем найти такое наименьшее число h, чтобы hn было больше или равно k, и чтобы или $a^h-b^hx^{hn}$, если h — число чётное, или $a^h+b^hx^{hn}$, если h — число нечётное, делилось на $(a+bx^n)$.

В первом случае для интеграла имеем

$$\int \frac{dx}{x^k(a+bx^n)} = \frac{1}{a^h}\int \frac{a^h-b^hx^{hn}}{x^k(a+bx^n)}\,dx + \frac{b^h}{a^h}\int \frac{x^{hn-k}\,dx}{a+bx^n}$$

и во втором

$$\int \frac{dx}{x^k(a+bx^n)} = \frac{1}{a^h}\int \frac{a^h+b^hx^{hn}}{x^k(a+bx^n)}\,dx - \frac{b^h}{a^h}\int \frac{x^{hn-k}\,dx}{a+bx^n}.$$

Первые из полученных интегралов легко вычисляются, так как и $(a^h - b^h x^{hn})$ при h чётном и $(a^h + b^h x^{hn})$ при h нечётном делятся на $(a + bx^n)$ и интегрируемые функции, следовательно, представляют полиномы целых, положительных и отрицательных степеней x; вторые же интегралы являются простейшими для данного вида, так как $hn \geqslant k$, число h — наименьшее из удовлетворяющих этому условию, и, следовательно, $hn - k < n$.

Таким образом вычисление интегралов $\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p}$ и $\int \frac{dx}{x^m (a+bx^n)^p}$ последовательным применением приёма интегрирования по частям сводится в конечном счёте к вычислению интеграла $\int \frac{x^k\,dx}{a+bx^n}$, наиболее простого для данного вида, с однократным знаменателем и степенью числителя ниже степени знаменателя. Этот интеграл рассмотрен в § 10 и вычислен для общих его форм при чётном и нечётном h, и для простейших частных видов при $n = 3, 4, 5$.

Мы видели, что вычисление последних интегралов, выполненное основным приёмом, разложением на элементарные дроби, — уже достаточно сложно. Для интегралов с кратными знаменателями сложность возрастает вместе с кратностью. Если в разложение функции $\frac{1}{a^4+x^4}$ входят четыре коэффициента, то для функции $\frac{1}{(a^4+x^4)^2}$ требуется уже определение восьми коэффициентов, для $\frac{1}{(a^4+x^4)^3}$ — двенадцати и т. д. Вообще, вычисление интеграла $\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p}$ основным приёмом, разложение функции на элементарные дроби и вычисление затем интегралов дробей с кратными знаменателями являются весьма сложными. Метод интегрирования по частям даёт возможность избежать этой сложности и сравнительно простым приёмом сводит задачу к вычислению наиболее простого интеграла того же вида.

Метод интегрирования по частям, так же как и рассмотренный перед этим метод подстановки, имеет ограниченное применение в области интегрирования алгебраических функций. Несмотря на это, однако, для тех интегралов, для которых метод применим, он имеет важное значение, так как даёт большое упрощение вычислений.

Полученная выше формула (57) представляет формулу приведения для интегралов вида $\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p}$. Она справедлива для всякого m, в том числе и для $m \leqslant 0$.

Полагая в этой формуле $m=0$, получаем:

$$\int \frac{dx}{(a+bx^n)^p}= \\ =-\frac{1}{n(p-1)bx^{n-1}(a+bx^n)^{p-1}}-\frac{n-1}{n(p-1)b}\int \frac{dx}{x^n(a+bx^n)^{p-1}}. \quad (58)$$

Непосредственно для интеграла $\int \frac{dx}{(a+bx^n)^p}$, представив его в виде

$$\frac{1}{a}\int \frac{(a+bx^n)-bx^n}{(a+bx^n)^p}dx= \\ =\frac{1}{a}\int \frac{dx}{(a+bx^n)^{p-1}}-\frac{1}{an}\int xd\left[\frac{-1}{(p-1)(a+bx^n)^{p-1}}\right], \quad (59)$$

интегрированием по частям получаем также другую формулу

$$\int \frac{dx}{(a+bx^n)^p}=\frac{x}{n(p-1)a(a+bx^n)^{p-1}}+\frac{np-n-1}{n(p-1)a}\int \frac{dx}{(a+bx^n)^{p-1}}. \quad (59)$$

Как частный случай формул (57), (58) и (59), полагая в них $a=\pm k^2$, $b=1$, $n=2$ и заменяя p на n, получаем:

$$\int \frac{x^m\,dx}{(x^2\pm k^2)^n}=-\frac{x^{m-1}}{2(n-1)(x^2\pm k^2)^{n-1}}+\frac{m-1}{2(n-1)}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2\pm k^2)^{n-1}}, \quad (60)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2\pm k^2)^n}=-\frac{1}{2(n-1)x(x^2\pm k^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{x^2(x^2\pm k^2)^{n-1}}, \quad (61)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2\pm k^2)^n}=\pm\frac{x}{2(n-1)k^2(x^2\pm k^2)^{n-1}}\pm\frac{2n-3}{(2n-2)k^2}\int \frac{dx}{(x^2\pm k^2)^{n-1}}. \quad (62)$$

Формула (40), как видим, является частным случаем более общей формулы (59).

Примеры

71) $$\int \frac{x^8\,dx}{(x^2-2)^2}=\frac{x^5+10x^3-30x}{3(x^2-2)}+\frac{5}{\sqrt{2}}\ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$$

интегрированием по частям или прямо по формуле (60)].

72) $$\int \frac{x^6\,dx}{(x^2+4)^4}=-\frac{x^7}{6(x^2+4)^3}-\frac{7x^5}{24(x^2+4)^2}-\frac{35x^3}{48(x^2+4)}+\frac{35x}{6}- \\ -\frac{35}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2};$$

73) $$\int \frac{(7x-4)\,dx}{(3x^2+2x+5)^2}=-\frac{57x^2+136x+39}{28(3x+1)(3x^2+2x+5)}-\frac{19}{28\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{14}}.$$

Представив интеграл в виде $\frac{1}{2}\int \frac{7x-4}{3x+1}\,d\left[\frac{-1}{3x^2+2x+5}\right]$, интегрированием по частям получаем:

$$\int \frac{(7x-4)dx}{(3x^2+2x+5)^2}=-\frac{7x-4}{2(3x+1)(3x^2+2x+5)}+\frac{19}{2}\int \frac{dx}{(3x+1)^2(3x^2+2x+5)}.$$

Для вычисления последнего интеграла пользуемся подстановкой $3x+1=z$.

74) $$\int \frac{(5-4x)\,dx}{(3x^2-4x-2)^2} = -\frac{21x^2-68x+36}{20(3x-2)(3x^2-4x-2)} - \frac{7}{40\sqrt{10}} \ln \frac{3x-2-\sqrt{10}}{3x-2+\sqrt{10}}.$$

75) $$\int \frac{x^5\,dx}{(x^4+1)^2} = \frac{x^2(x^4-1)}{16(x^4+1)^2} + \frac{1}{16} \operatorname{arctg}(x^2).$$

76) $$\int \frac{x(x^2+1)^2\,dx}{(x^4+2x^2+2)^2} = -\frac{1}{4} \frac{(x^2+1)^2}{x^4+2x^2+2} + \frac{1}{4} \ln(x^4+2x^2+2).$$

Подстановкой $x^2=z$ интеграл приводим к виду

$$\frac{1}{2} \int \frac{(z+1)^3\,dz}{(z^2+2z+2)^2} = \frac{1}{4} \int (z+1)^2 \frac{d(z^2+2z+2)}{(z^2+2z+2)^2}$$

и затем интегрируем по частям.

77) $$\int \frac{x^3\,dx}{(a^4+x^4)^3} = -\frac{1}{8(a^4+x^4)^2}.$$

78) $$\int \frac{dx}{x(a^4+x^4)^3} = \frac{3a^4+2x^4}{8a^8(a^4+x^4)^2} + \frac{1}{4a^{12}} \ln \frac{x^4}{a^4+x^4} \quad (\text{подст. } x^4=z).$$

79) $$\int \frac{dx}{x^2(a^4+x^4)^3} = -\frac{32a^8+81a^4x^4+45x^8}{32a^{12}x(a^4+x^4)^2} - \frac{45}{128a^{13}\sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{a^2-ax\sqrt{2}+x^2}{a^2+ax\sqrt{2}+x^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2} \right\}.$$

Пользуясь формулой (57), приходим к интегралу

$$\int \frac{dx}{x^{10}(a^4+x^4)} = \frac{1}{a^{12}} \int \frac{(a^{12}+x^{12})-x^{12}}{x^{10}(a^4+x^4)}\,dx = \ldots$$

80) $$\int \frac{dx}{x^2(a^4+x^4)^3} = -\frac{8a^8+25a^4x^4+15x^8}{16a^{12}x^2(a^4+x^4)^2} - \frac{15}{16a^{14}} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2}.$$

81) $$\int \frac{x^{14}\,dx}{(3+2x^5)^3} = -\frac{3}{20} \frac{x^5(x^5+1)}{(3+2x^5)^2} + \frac{1}{40} \ln(3+2x^5).$$

82) $$\int \frac{x^6\,dx}{(3+2x^5)^2} = \frac{x^2(4x^5-9)}{300(3+2x^5)^2} + \frac{1}{50} \int \frac{x\,dx}{3+2x^5}.$$

Подстановкой $2^{1/5}x=z$ последний интеграл приводим к интегралу $\frac{1}{2^{2/5}} \int \frac{z\,dz}{3+z^5}$, для которого имеем выражение примера 45 при $a^5=3$.

§ 13. Метод отделения и вычисления алгебраической части интеграла рациональной дроби

Самый процесс интегрирования рациональной дроби, как мы видели, не представляет особой трудности. Поскольку функция разложена на элементарные дроби, задачу можно считать уже решённой, так как интегралы элементарных дробей находятся легко на основании нескольких элементарных формул. Все дроби с кратными знаменателями дают при интегрировании алгебраические функции, дроби же с однократными знаменателями — логарифмические и круговые.

При сложной структуре знаменателя интегрируемой функции и при наличии у него кратных корней самую сложную работу и вместе с тем менее всего интересную представляет разложение функции на элементарные дроби и вычисление затем в случае комплексных корней методом приведения или по соответствующим формулам интегралов дробей с кратными знаменателями, т. е., заметим, тех именно интегралов, которые для результата интегрирования дают алгебраические выражения.

Метод неопределённых коэффициентов позволяет сразу найти всю алгебраическую часть интеграла, без выделения соответствующих ей элементарных дробей с кратными знаменателями и без интегрирования в отношении их, так что в результате задача вычисления интеграла сводится только к вычислению и интегрированию тех дробей, которые дают логарифмические и круговые функции, т. е. дробей с однократными лишь знаменателями.

Основывается метод на следующем.

Умножая на dx формулу (22) разложения $\frac{F(x)}{f(x)}$ на элементарные дроби, интегрируя обе части равенства и выполняя интегрирование в отношении дробей с кратными знаменателями, дроби же с однократными знаменателями лишь собирая под знаком интеграла, получаем:

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \left\{\frac{-A_0}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{-A_1}{(\alpha-2)(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{-A_{\alpha-2}}{x-a} + \right.$$

$$+ \frac{-B_0}{(\beta-1)(x-b)^{\beta-1}} + \frac{-B_1}{(\beta-2)(x-b)^{\beta-2}} + \ldots + \frac{-B_{\beta-2}}{x-b} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left. + \frac{-L_0}{(\lambda-1)(x-l)^{\lambda-1}} + \frac{-L_1}{(\lambda-2)(x-l)^{\lambda-2}} + \ldots + \frac{-L_{\lambda-2}}{x-l}\right\} +$$

$$+ \int \left\{\frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}\right\} dx.$$

Соединяя в правой части равенства всю алгебраическую часть и дроби под знаком интеграла, имеем

$$^{*)}\quad \int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \frac{M}{D} + \int \frac{N}{Q}\,dx,$$

где

$$D = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots(x-l)^{\lambda-1},\quad Q = (x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

M — функция степени ниже D и N — ниже Q.

Выражение $\frac{M}{D}$ в полученном равенстве представляет алгебраическую часть интеграла, интеграл же $\int \frac{N}{Q} dx$ в результате интегрирования должен дать логарифмические функции, а в случае мнимых корней $f(x)$ также и круговые функции. Функция D, как известно, представляет общий наибольший делитель функции $f(x)$ и её производной $f'(x)$ и может быть найдена методом последовательного деления; Q равна частному от деления $f(x)$ на D. Для определения остающихся пока неизвестными функций M и N дифференцируем обе части равенства *). Получаем $\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{M'D - MD'}{D^2} + \frac{N}{Q}$ и затем по умножении на $f(x)$

$$F(x) = \frac{M'f(x)}{D} + \frac{MD'f(x)}{D^2} + \frac{Nf(x)}{Q}.$$

Функция $\frac{f(x)}{D}$ здесь равна Q и, следовательно, $\frac{M'f(x)}{D}$ — функция целая; $\frac{f(x)}{Q} = D$, так что $\frac{Nf(x)}{Q}$ — также целая функция; в среднем члене $f(x) = QD$, QD' делится на D, так что и этот член представляет целую функцию. Таким образом, вся правая часть последнего равенства представляет целую функцию. Выразив функции M и N с неопределёнными коэффициентами степенью соответственно ниже D и Q и расположив по выполнении всех нужных операций правую часть равенства по степеням x, путём сравнения коэффициентов правой и левой части получаем необходимое и достаточное число уравнений для определения коэффициентов, входящих в функции M и N.

Определением коэффициентов функции M определяется вместе с тем алгебраическая часть вычисляемого интеграла. Остающийся интеграл $\int \frac{N}{Q} dx$, где N — уже известная функция, а Q равно произведению всех множителей $f(x)$, взятых однократно, линейных для вещественных корней и квадратных для комплексных сопряжённых, вычисляется обычным приёмом, путём разложения функции $\frac{N}{Q}$ на элементарные дроби. Это разложение, поскольку Q содержит уже только однократно входящие множители, весьма просто можем выполнить по формуле, приведённой в § 8.

Общая схема отделения алгебраической части интеграла представляется в следующем виде.

Независимо от того, определены или нет корни $f(x)$, т. е. разложена ли она на множители определённой кратности или представлена в виде многочлена, находим общий наибольший делитель D функции $f(x)$ и её производной. Это, как известно, выполняется приёмом последовательного деления $f(x)$ на $f'(x)$. Определив D, находим $Q=\frac{f(x)}{D}$. Получая D в виде какой-либо определённой функции от x, тем самым устанавливаем наличие кратных корней $f(x)$; если же получаем $D=\text{const.}$, то кратных корней нет, нет, следовательно, и алгебраической части интеграла. Если корни $f(x)$ и кратность их определены, то D равно произведению всех множителей $f(x)$, взятых с кратностью, уменьшённой на единицу, и Q равно произведению всех множителей, взятых однократно.

Определив D и Q, как функции m-ой и n-ой степени, пишем общую формулу отделения алгебраической части интеграла с неопределёнными пока коэффициентами

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx=$$
$$=\frac{M_1x^{m-1}+M_2x^{m-2}+\ldots+M_m}{D}+\int \frac{N_1x^{n-1}+N_2x^{n-2}+\ldots+N_n}{Q}\,dx.$$

Дифференцируя это равенство и умножая на $f(x)$, получаем в правой и левой частях целые функции от x и затем, путём сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x, необходимое количество уравнений для определения коэффициентов M и N.

Подставляя их значения, находим $\frac{M}{D}$ — алгебраическую часть интеграла и затем обычным приёмом разложения на элементарные дроби вычисляем интеграл $\int \frac{N}{Q}\,dx$, дающий логарифмические и круговые функции.

Для алгебраической части интеграла рациональной дроби, как обнаруживает написанная выше формула, всегда получаем рациональное выражение, рациональное не только относительно переменной интегрирования, но и относительно коэффициентов функций $F(x)$ и $f(x)$.

Примеры

83) $$\int \frac{9\,dx}{5x^2(3-2x^2)^3}=\left(-\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{5}\right)\frac{1}{x(3-2x^2)^2}+$$
$$+\frac{1}{8\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{3}+x\sqrt{2}}{\sqrt{3}-x\sqrt{2}}.$$

Имея для вычисляемого интеграла $D=x(3-2x^2)^2$ и $Q=x(3-2x^2)$, пишем равенство с неопределёнными коэффициентами.

$$\int \frac{9dx}{5x^2(3-2x^2)^3}=$$
$$=\frac{M_1x^4+M_2x^3+M_3x^2+M_4x+M_5}{x(3-2x^2)^2}+\int \frac{N_1x^2+N_2x+N_3}{x(3-2x^2)}\,dx.$$

Дифференцируя и умножая на $x^2(3-2x^2)^3$, получаем равенство, из которого путём сравнения коэффициентов, находим:

$$N_1=N_3=M_2=M_4=0,\quad M_1=-\frac{1}{2}\,,\quad M_3=\frac{5}{4}\,,\quad M_5=-\frac{3}{5}\,,\ N_2=\frac{1}{4}\,.$$

84) $$\int\frac{(3x^4+4)\,dx}{x^2(x^2+1)^3}=-\frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}-\frac{57}{8}\operatorname{arctg} x.$$

В примере 57 этот интеграл вычислен общим приёмом.

85) $$\int\frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}\,dx=\frac{3-7x-2x^2}{2(x^3-x^2-x+1)}+\ln\frac{x-1}{(x+1)^2}\,.$$

Имея $f(x)=x^5-x^4-2x^2+2x^2+x-1$, находим $f'(x)=5x^4-4x^3-6x^2+4x+1$, затем, способом последовательного деления $D=x^3-x^2-x+1$, и после этого $Q=\frac{f(x)}{D}=x^2-1$.

Равенство, выражающее отделение алгебраической части интеграла, можем, следовательно, написать в виде:

$$\int\frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}\,dx=\frac{M_1x^2+M_2x+M_3}{x^3-x^2-x+1}+\int\frac{N_1x+N_2}{x^2-1}\,dx$$

Дифференцируя и освобождаясь от знаменателей, получаем равенство, из которого находим:

$$M_1=-1,\quad M_2=-\frac{7}{2}\,,\quad M_3=\frac{3}{2}\,,\quad N_1=-1,\quad N_2=3.$$

86) $$\int\frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2}\,dx=\frac{x^2+1}{3(x^3+1)}+\ln x-\frac{5}{18}\ln(x^3+1)-\\-\frac{1}{6}\ln(x+1)+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\,.$$

87) $$\int\frac{(x^2-3x-2)\,dx}{(x+1)^2\,(x^2+x+1)^2}=-\frac{11x^2+18x+13}{3(x+1)\,(x^2+x+1)}+\\+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}-\frac{25}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\,.$$

§ 14. Другие приёмы и некоторые формулы для простейших интегралов алгебраических рациональных выражений

Общий приём вычисления интеграла рациональной алгебраической дроби путём разложения её на элементарные дроби, как мы видели, часто требует сложных и громоздких вычислений. С этой стороны заслуживают внимания некоторые другие элементарные приёмы, которые дают для отдельных видов интегралов весьма простые вычисления; при этом мы получаем ряд простых формул, дающих общие выражения для интегралов соответствующих видов.

I) Пользуясь формулой бинома Ньютона, имеем:

$$\int x^m (ax+b)^n\,dx = \int x^m \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} x^p\,dx =$$
$$= \int \sum_{0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} x^{p+m}\,dx;$$

отсюда, выполняя интегрирование, получаем формулу

$$\int x^m (ax+b)^n\,dx = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \frac{x^{p+m+1}}{p+m+1}. \tag{63}$$

Интеграл $\int (ax+b)^m (a'x+b')^n\,dx$ подстановкой $ax+b=z$ приводится к интегралу $\frac{1}{a^{n+1}}\int z^m [a'z+(ab'-a'b)]^n\,dz$. Выражая его по предыдущей формуле и возвращаясь к прежней переменной, получаем:

$$\int (ax+b)^m (a'x+b')^n\,dx =$$
$$= \frac{1}{a^{n+1}} \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a'^p (ab'-a'b)^{n-p} \frac{(ax+b)^{p+m+1}}{p+m+1}. \tag{64}$$

Значения показателя m для этих формул ничем не ограничены.

Заменяя в них m на $(-m)$, получаем более наглядные для соответствующих интегралов формулы:

$$\int \frac{(ax+b)^n}{x^m}\,dx = \sum_{0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \frac{x^{p-m+1}}{p-m+1}, \tag{65}$$

$$\int \frac{(a'x+b')^n}{(ax+b)^m}\,dx = \frac{1}{a^{n+1}} \sum_{0}^{n} \binom{n}{p} a'^p (ab'-a'b)^{n-p} \frac{(ax+b)^{p-m+1}}{p-m+1}. \tag{66}$$

Эти формулы при $p=m-1$ теряют значение, и соответствующие члены сумм для них равны: $\binom{n}{m-1} a^{m-1} b^{n-m+1} \ln x$ для первой формулы и $\binom{n}{m-1} \frac{a'^{m-1}}{a^{n+1}} (ab'-a'b)^{n-m+1} \ln (ax+b)$ для второй.

Заметим, что при дробном $m = \pm \frac{r}{s}$ полученные формулы дают выражения для интегралов

$$\int (ax+b)^n \sqrt[s]{x^{\pm r}}\,dx \quad \text{и} \quad \int (a'x+b')^n \sqrt[s]{(ax+b)^{\pm r}}\,dx.$$

II) Последовательным преобразованием для интеграла $\int \frac{dx}{x(ax+b)^n}$ получаем:

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)^n} = \frac{1}{b}\int \frac{-ax+(ax+b)}{x(ax+b)^n}dx =$$
$$= \frac{1}{(n-1)b(ax+b)^{n-1}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{x(ax+b)^{n-1}} =$$
$$= \frac{1}{(n-1)b(ax+b)^{n-1}} + \frac{1}{(n-2)b^2(ax+b)^{n-2}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n-p)b^p(ax+b)^{n-p}} + \ldots + \frac{1}{b^{n-1}(ax+b)} + \frac{1}{b^{n-1}}\int \frac{dx}{x(ax+b)},$$

и отсюда, вставив выражение последнего интеграла, получаем формулу

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)^n} = \sum_{p=1}^{p=n-1} \frac{1}{(n-p)b^p(ax+b)^{n-p}} + \frac{1}{b^n}\ln\frac{x}{ax+b} \qquad (n>1). \quad (67)$$

Приведя интеграл $\int \frac{dx}{(ax+b)(a'x+b')^n}$ подстановкой $ax+b=z$ к виду $a^{n-1}\int \frac{dz}{z[a'z+(ab'-a'b)]^n}$, выражая его по предыдущей формуле, возвращаясь после этого к прежней переменной и опуская для результата постоянную $\frac{a^{n-1}}{(ab'-a'b)}\ln a$, получаем:

$$\int \frac{dx}{(ax+b)(a'x+b')^n} =$$
$$= \sum_{p=1}^{p=n-1} \frac{a^{p-1}}{(n-p)(ab'-a'b)^p(a'x+b')^{n-p}} + \frac{a^{n-1}}{(ab'-a'b)^n}\ln\frac{ax+b}{a'x+b'}. \quad (68)$$

III) Подстановкой $a+bx^2=z$ интеграл $\int (a+bx^2)^m x^{2n+1}dx$ приводится к интегралу $\frac{1}{2b^{n+1}}\int (z-a)^n z^m dz$. Выражая последний по формуле (20), получаем:]

$$\int (a+bx^2)^m x^{2n+1}dx = \frac{1}{2b^{n+1}}\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}a^{n-p}\frac{(a+bx^2)^{p+m+1}}{p+m+1}. \quad (69)$$

Заменяя в ней m на $(-m)$, имеем:

$$\int \frac{x^{2n+1}dx}{(a+bx^2)^m} = \frac{1}{2b^{n+1}}\sum_{0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}a^{n-p}\frac{(a+bx^2)^{p-m+1}}{p-m+1}. \quad (70)$$

Последняя формула теряет значение для $p=m-1$, и соответствующий член суммы равен

$$(-1)^{n-m+1}\frac{1}{2}\binom{n}{m-1}\frac{a^{n-m+1}}{b^{n+1}}\ln(a+bx^2).$$

При дробном $m=\pm\frac{r}{s}$ формула даёт выражение для интегралов

$$\int\sqrt[s]{(a+bx^2)^{\pm r}}\,x^{2n+1}\,dx.$$

IV) Пользуясь для интеграла $\int\frac{dx}{x^{2n+1}(a+bx^2)^m}$ подстановкой

$$x=\sqrt{\frac{a}{b}}\operatorname{tg}\varphi,\quad a+bx^2=a\sec^2\varphi,\quad dx=\sqrt{\frac{a}{b}}\sec^2\varphi\,d\varphi,$$

приводим его к интегралу

$$\frac{b^n}{a^{m+n}}\int\frac{d\varphi}{\operatorname{tg}^{2n+1}\varphi\sec^{2m-2}\varphi}=\frac{b^n}{a^{m+n}}\int\frac{\cos^{2m+2n-1}\varphi}{\sin^{2n+1}\varphi}\,d\varphi=$$
$$=\frac{b^n}{a^{m+n}}\int\frac{(1-\sin^2\varphi)^{m+n-1}}{\sin^{2n+1}\varphi}\,d\sin\varphi=$$
$$=\frac{b^n}{a^{m+n}}\sum_{p=0}^{p=m+n-1}(-1)^p\binom{m+n-1}{p}\int\sin^{2p-2n-1}\varphi\,d\sin\varphi.$$

Выполнив интегрирование и возвращаясь при помощи равенства $\sin^2\varphi=\frac{bx^2}{a+bx^2}$ к прежней переменной x, получаем

$$\int\frac{dx}{x^{2n+1}(x+bx^2)^m}=$$
$$=\frac{1}{2a^{m+n}}\sum_{p=0}^{p=m+n-1}(-1)^p\binom{m+n-1}{p}\frac{b^p}{p-n}\left(\frac{x^2}{a+bx^2}\right)^{p-n}; \tag{71}$$

Полученная формула действительна для всех целых положительных значений m и n; она теряет значение лишь в том случае, когда m и n оба вместе равны нулю и в этом случае имеем интеграл

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x.$$

При $p=n$ формулы не дают выражения для одного из членов суммы, и этот член равен

$$\frac{(-1)^n}{2}\binom{m+n-1}{p}\frac{b^n}{a^{m+n}}\ln\frac{x^2}{a+bx^2}.$$

Подстановкой $x = \sqrt{\frac{a}{b}} \sin\varphi$ интеграл $\int \frac{dx}{x^{2n+1}(a-bx^2)^m}$ приводится к интегралу

$$\frac{b^n}{a^{m+n}} \int \frac{d\varphi}{\sin^{2n+1}\varphi \cos^{2m-1}} =$$

$$= \frac{b^n}{a^{m+n}} \int \frac{\sec^{2(m+n)}\varphi}{\operatorname{tg}^{2n+1}\varphi}\, d\varphi = \frac{b^n}{a^{m+n}} \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^{m+n-1}}{\operatorname{tg}^{2n+1}\varphi}\, d\operatorname{tg}\varphi =$$

$$= \frac{b^n}{a^{m+n}} \sum_{p=0}^{p=m+n-1} \binom{m+n-1}{p} \operatorname{tg}^{2p-2n-1}\varphi\, d\operatorname{tg}\varphi.$$

Выполняя интегрирование и возвращаясь к переменной x, получаем:

$$\int \frac{dx}{x^{2n+1}(a-bx^2)^m} = \frac{1}{2a^{m+n}} \sum_{0}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{p} \frac{b^p}{p-n} \left(\frac{x^2}{a-bx^2}\right)^{p-n}.$$

Формула (71), для которой, так же как и для предшествующих формул, не введено никаких ограничений относительно коэффициентов a и b, при b отрицательном имеет такой же вид.

Точно так же для a отрицательного формула может быть получена непосредственно подстановкой $x = \sqrt{\frac{a}{b}} \sec\varphi$.

V) Простым делением получаем:

$$\frac{x^{2n}}{x^2-a^2} = \sum_{p=0}^{p=n-1} a^{2p} x^{2(n-p-1)} + \frac{a^{2n}}{x^2-a^2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{x^2-a^2} = \sum_{p=0}^{p=n-1} a^{2p} \frac{x^{2n-2p-1}}{2n-2p-1} + a^{2n-1} \ln \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \qquad (n \geqslant 1). \quad (72)$$

Таким же путём получаем ещё

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{x^2+a^2} =$$

$$= \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p a^{2p} \frac{x^{2n-2p-1}}{2n-2p-1} + (-1)^n a^{2n-1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \qquad (n > 1). \quad (73)$$

Подстановкой $x^2 \mp a^2 = z$ получаем формулы:

$$\int \frac{x^{2n+1}\,dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=n} \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{(x^2-a^2)^p}{p} + a^{2n} \ln \sqrt{x^2-a^2} \quad (n \geqslant 1). \quad (74)$$

$$\int \frac{x^{2n+1}\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{(x^2+a^2)^p}{p} + (-1)^n a^{2n} \ln \sqrt{x^2+a^2} \quad (n \geqslant 1). \quad (75)$$

Формула (75) следует из формулы (74) при замене a^2 на $(-a^2)$; точно так же и формула (73) следует из формулы (72); получающаяся при этом мнимая логарифмическая функция легко преобразуется к вещественной круговой по формуле (24).

VI) Непосредственным преобразованием получаем:

$$\frac{1}{x^{2n}(x^2-a^2)} = -\frac{1}{a^{2n}} \frac{(x^{2n}-a^{2n})-x^{2n}}{x^{2n}(x^2-a^2)} = -\frac{1}{a^{2n}} \left\{ \frac{\sum\limits_{0}^{n-1} a^{2p} x^{2(n-p-1)}}{x^{2n}} - \frac{1}{x^2-a^2} \right\} = -\sum_{0}^{n-1} \frac{1}{a^{2(n-p)} x^{2p+2}} + \frac{1}{a^{2n}} \cdot \frac{1}{x^2-a^2}.$$

После этого

$$\int \frac{dx}{x^{2n}(x^2-a^2)} = \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)\, a^{2(n-p)}\, x^{p+1}} + \frac{1}{a^{2n+1}} \ln \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \quad (n \geqslant 1). \quad (76)$$

Заменяя в этой формуле a^2 на $(-a^2)$ и выражая получающуюся мнимую логарифмическую функцию по формуле (24), получаем:

$$\int \frac{dx}{x^{2n}(x^2+a^2)} = \sum_{0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-p}}{(2p+1)\, a^{2(n-p)}\, x^{2p+1}} + \frac{(-1)^n}{a^{2n+1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \quad (n \geqslant 1). \quad (77)$$

Аналогично предыдущим формулам также получаем:

$$\int \frac{dx}{x^{2n+1}(x^2-a^2)} = \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{(2p+2)\, a^{2(n-p)}\, x^{2p+2}} + \frac{1}{a^{2n+2}} \ln \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} \quad (78)$$

$$(n \geqslant 1).$$

и

$$\int \frac{dx}{x^{2n+1}(x^2+a^2)} = \sum_{0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-p}}{(2p+2)\, a^{2(n-p)}\, x^{2p+2}} + \frac{(-1)^{n+1}}{a^{2n+2}} \ln \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} \tag{79}$$

$$(n \geqslant 1).$$

Примеры

88) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-3x)(1-4x)^3} = \frac{24x-1}{50(1-4x)^2} + \frac{9}{125} \ln \frac{2-3x}{1-4x}$ [формула (69)].

89) $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{(2-5x^2)^7} = \frac{15x^2-1}{750(2-5x^2)^6}$ [(формула (70)].

90) $$\int \frac{x^7\, dx}{(2-5x^2)^3} = \frac{1}{1250} \left\{ \frac{4}{(2-5x^2)^2} - \frac{12}{2-5x^2} + (2-5x^2) \right\} + \\ + \frac{3}{625} \ln(2-5x^2) = -\frac{25x^6-20x^4-8x^2+4}{250(2-5x^2)^2} + \frac{3}{625} \ln(2-5x^2)$$ [формула (70)].

ГЛАВА III

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Все формулы настоящей главы имеют своим назначением приведение к наиболее простым формам интегралов вида $\int [\varphi(x)]^m [f(x)]^n \, dx$ или $\int [f(x)]^n \, dx$, где $\varphi(x)$ и $f(x)$ — целые рациональные функции, и показатели m и n — вещественные числа, целые или дробные, положительные или отрицательные. При целых значениях показателей формулы служат для вычисления интегралов рациональных выражений и при дробных — иррациональных, так что формулы являются общими, как для тех, так и для других. Различные комбинации знаков m и n дают следующие виды интегралов:

$$\int [\varphi(x)]^m [f(x)]^n \, dx, \quad \int \frac{[\varphi(x)]^m}{[f(x)]^n} \, dx,$$

$$\int \frac{dx}{[\varphi(x)]^m [f(x)]^n}, \quad \int [f(x)]^n \, dx \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{[f(x)]^n}.$$

По отношению к каждому из этих интегралов, для которых показатели m и n принимаются уже положительными, задача приведения заключается в уменьшении величины этих показателей. В отношении же общих видов, для которых показатели m и n могут быть как положительными, так и отрицательными, задачу приведения можно определить как последовательное приближение показателей к нулю. При отрицательных m и n для общих видов показатели, очевидно, должны увеличиваться, в то время, как для соответствующих каждому случаю частных видов они должны уменьшаться.

§ 1. Интегралы вида $\int (ax+b)^m (a'x+b')^n \, dx$

Взяв за основание производную $\frac{d}{dx}(ax+b)^p (a'x+b')^q$, выполняем по отношению к ней следующие преобразования:

$$\frac{d}{dx}(ax+b)^p (a'x+b')^q =$$

$$= ap(ax+b)^{p-1}(a'x+b')^q + a'q(ax+b)^p(a'x+b')^{q-1} =$$

$$= ap\,(ax+b)^{p-1}(a'x+b')^{q-1}\left[\frac{a'}{a}(ax+b)-\left(\frac{a'b}{a}-b'\right)\right]+$$
$$+a'q\,(ax+b)^p\,(a'x+b')^{q-1}=a'p\,(ax+b)^p\,(a'x+b')^{q-1}+$$
$$+a'q\,(ax+b)^p\,(a'x+b')^{q-1}+(ab'-a'b)\,p\,(ax+b)^{p-1}\,(a'x+b')^{q-1}=$$
$$=a'\,(p+q)\,(ax+b)^p\,(a'x+b')^{q-1}+(ab'-a'b)\,p\,(ax+b)^{p-1}\,(a'x+b')^{q-1}.$$

Умножая исходное выражение и конечный результат преобразования на dx и интегрируя, получаем:

$$(ax+b)^p\,(a'x+b')^q=a'\,(p+q)\int (ax+b)^p\,(a'x+b')^{q-1}\,dx+$$
$$+(ab'-a'b)\,p\int (ax+b)^{p-1}\,(a'x+b')^{q-1}\,dx.$$

Отсюда, полагая 1) $p=m$, $q-1=n$ и затем 2) $p-1=m$, $b-1=n$, получаем формулы приведения

$$\int (ax+b)^m\,(a'x+b')^n\,dx=\frac{(ax+b)^m\,(a'x+b')^{n+1}}{(m+n+1)\,a'}-$$
$$-\frac{m\,(ab'-a'b)}{(m+n+1)\,a'}\int (ax+b)^{m-1}\,(a'x+b')^n\,dx. \quad (80)$$

$$\int (ax+b)^m\,(a'x+b')^n\,dx=\frac{(ax+b)^{m+1}\,(a'x+b')^{n+1}}{(m+1)\,(ab'-a'b)}-$$
$$-\frac{(m+n+2)\,a'}{(m+1)\,(ab'-a'b)}\int (ax+b)^{m+1}\,(a'x+b')^n\,dx. \quad (81)$$

В последней формуле m увеличивается, так что она применяется для интегралов вида

$$\int \frac{(a'x+b')^n}{(ax+b)^m}\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{(ax+b)^m\,(a'x+b')^n}\,.$$

Заменяя в этой формуле m на $(-m)$ и затем m на $(-m)$ и n на $(-n)$, можем получить более наглядные для этих интегралов формулы:

$$\int \frac{(a'x+b')^n}{(ax+b)^m}\,dx=-\frac{(a'x+b')^{n+1}}{(m-1)\,(ab'-a'b)\,(ax+b)^{m-1}}-$$
$$-\frac{(m+n-2)\,a'}{(m-1)\,(ab'-a'b)}\int \frac{(a'x+b')^n}{(ax+b)^{m-1}}\,dx$$
$$(m \text{ и } n>0). \quad (82)$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^m\,(a'x+b')^n}=-\frac{1}{(m-1)\,(ab'-a'b)\,(ax+b)^{m-1}\,(a'x+b')^{n-1}}-$$
$$-\frac{(m+n-2)\,a'}{(m-1)\,(ab'+a'b)}\int \frac{dx}{(ax+b)^{m-1}\,(a'x+b')^n} \quad (83)$$
$$(m \text{ и } n>0).$$

Интегрированием по частям

$$\int \frac{(a'x+b')^n}{(ax+b)^m}\,dx = -\frac{1}{(m-1)\,a}\int (a'x+b')\,d\,\frac{1}{(ax+b)^{m-1}} = \ldots$$

получаем ещё формулу:

$$\int \frac{(a'x+b')^n}{(ax+b)^m}\,dx = -\frac{(a'x+b')}{(m-1)\,a\,(ax+b)^{m-1}} + \frac{na'}{(m-1)\,a}\int \frac{(a'x+b')^{n-1}}{(ax+b)^{m-1}}\,dx. \tag{84}$$

Формула (80) теряет значение при $a'=0$ и при $m=-(n+1)$; в первом случае интеграл легко вычисляется непосредственно, во втором же m и n, очевидно, разных знаков и можно пользоваться формулой (84).

Формула (81) теряет значение при $ab'-a'b=0$ и при $m=1$. В первом случае, полагая $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=k$, видим, что имеем интеграл $k\int (a'x+b')^{m+n}\,dx$, который легко вычисляется непосредственно. Во втором — показатель m достаточно уже мал по величине и повышать или понижать следует показатель n.

Формула (84) теряет значение при $m=1$ и при $a=0$. В первом случае снижать степень m нет нужды и надо снижать показатель n; для этой цели может служить формула

$$\int \frac{(a'x+b')^n}{ax+b}\,dx = \frac{(a'x+b')^n}{na} + \frac{ab'-a'b}{a}\int \frac{(a'x+b')^{n-1}}{ax+b}\,dx,$$

которую легко получаем непосредственно или на основании формулы (80). Во втором случае имеем легко вычисляемый интеграл $\int (a'x+b')^n\,dx$.

Формула (84) особенно интересна в смысле использования, так как изменяет в желательном направлении сразу оба показателя m и n.

Если m и n — целые, то применением выведенных формул приходим в конечном счёте к интегралам:

$$\int (ax+b)(a'x+b')\,dx = \frac{aa'}{3}x^3 + \frac{ab'+a'b}{2}x^2 + bb'x,$$

$$\int \frac{ax'+b'}{ax+b}\,dx = \frac{a'}{a}x + \frac{ab'-a'b}{a^2}\ln(ax+b)$$

и

$$\int \frac{dx}{(ax+b)(a'x+b')} = \frac{1}{ab'-a'b}\ln\frac{ax+b}{a'x+b'}.$$

Примеры

1) $$\int \frac{dx}{(x-2)^3(x+1)^2} = -\frac{1}{6(x-2)^2(x+1)} + \frac{1}{6(x-2)(x+1)} + \frac{1}{9(x+1)} + \frac{1}{27}\ln\frac{x-2}{x+1} = \frac{2x^2-5x-1}{18(x-2)^2(x+1)} + \frac{1}{27}\ln\frac{x-2}{x+1}.$$

2) $$\int \frac{dx}{(x+2)^3(x+3)^4} = -\frac{1}{2(x+2)^2(x+3)^3} + \frac{5}{2(x+2)(x+3)^3} + \frac{10}{3(x+3)^2} + \frac{5}{(x+3)^2} + \frac{10}{x+3} + 10\ln\frac{x+2}{x+3} = \frac{60x^4+630x^3+2450x^2+4175x+2627}{6(x+2)^2(x+3)^3} + 10\ln\frac{x+2}{x+3}.$$

(Сравните выражение для этого же интеграла в примере 70 гл. II.)

3) $$\int \frac{x^5dx}{(3+x)^2} = -\frac{x^5}{3+x} + \frac{5}{4}x^4 - 5x^3 + \frac{45}{2}x^2 - 135x + 405\ln(3+x).$$

§ 2. Интегралы вида $\int (a^2 \pm x^2)^n\,dx$ и $\int (x^2-a^2)^n\,dx$

I) Выполняя по отношению к производной функции $x(a^2 \pm x^2)^p$ следующее преобразование:

$$\frac{d}{dx}[x(a^2 \pm x^2)^p] = (a^2 \pm x^2 \pm 2px^2)(a^2 \pm x^2)^{p-1} = [a^2 \pm x^2 + 2p(a^2 \pm x^2 - a^2)](a^2 \pm x^2)^{p-1} = (2p+1)(a^2 \pm x^2)^p - 2a^2p(a^2 \pm x^2)^{p-1},$$

умножая затем исходное выражение и конечный результат на dx и интегрируя, имеем:

$$x(a^2 \pm x^2)^p = (2p+1)\int (a^2 \pm x^2)^p\,dx - 2a^2p\int (a^2 \pm x^2)^{p-1}\,dx.$$

Полагая в этом равенстве $p=n$ и затем $p-1=n$, получаем формулы приведения:

$$\int (a^2 \pm x^2)^n\,dx = \frac{x(a^2 \pm x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1}\int (a^2 \pm x^2)^{n-1}\,dx \tag{85}$$

и

$$\int (a^2 \pm x^2)^n\,dx = -\frac{x(a^2 \pm x^2)^{n+1}}{2(n+1)a^2} + \frac{2n+3}{2(n+1)a^2}\int (a^2 \pm x^2)^{n+1}\,dx. \tag{86}$$

Совершенно аналогичным путём получаем также

$$\int (x^2-a^2)^n\,dx = \frac{x(x^2-a^2)^n}{2n+1} - \frac{2na^2}{2n+1}\int (x^2-a^2)^{n-1}\,dx \tag{87}$$

и

$$\int (x^2-a^2)^n\,dx=\frac{x\,(x^2-a^2)^{n+1}}{2\,(n+1)\,a^2}-\frac{2n+3}{2\,(n+1)\,a^2}\int (x^2-a^2)^{n+1}\,dx. \qquad (88)$$

Формулы (85) и (87) применяются, когда требуется понижение n, т. е. при положительном n, и формулы (86) и (88) — при отрицательном n, следовательно, для интегралов вида

$$\int \frac{dx}{(a^2\pm x^2)^n} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}\,.$$

Заменяя в формулах (86) и (88) n на $(-n)$, можем представить их в более наглядном и удобном для применения виде

$$\int \frac{dx}{(a^2\pm x^2)^n}=\frac{x}{2\,(n-1)\,a^2\,(a^2\pm x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2\,(n-1)\,a^2}\int \frac{dx}{(a^2\pm x^2)^{n-1}}$$

и

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}=-\frac{x}{2\,(n-1)\,a^2\,(x^2-a^2)^{n-1}}-\frac{2n-3}{2\,(n-1)\,a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}\,.$$

Формулы (85) и (87) теряют значение при $n=-\frac{1}{2}$, и тогда имеем элементарные интегралы (см. раздел II § 7 гл. I)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right) \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}\,.$$

Формулы (86) и (88) теряют значение при $n=-1$ и при $a=0$. В первом случае имеем интегралы

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}\,, \quad \int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}\,,$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a-x}{a+x}\,,$$

и во втором

$$\int \frac{dx}{x^{2n}}=\frac{-1}{(2n-1)\,x^{2n-1}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{(-x^2)^n}=\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\,x^{2n-1}}\,.$$

II) При n целом последовательным применением формул (85) — (88) получаем выражения вычисляемых интегралов в виде общих формул (во всех формулах $n>0$)

$$\int (a^2\pm x^2)^n\,dx=\frac{x}{2n+1}\Big\{(a^2\pm x^2)+\frac{2n}{2n-1}\,a^2\,(a^2\pm x^2)^{n-1}+$$
$$+\frac{2n\,(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}\,a^4\,(a^2\pm x^2)^{n-2}+\ldots+\frac{2n\,(2n-2)\ldots 6\cdot 4}{(2n-1)\,(2n-3)\ldots 5\cdot 3}\,a^{2(n-1)}\times$$
$$\times(a^2\pm x^2)+\frac{2n\,(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n-1)\,(2n-3)\ldots 3\cdot 1}\,a^{2n}\Big\}, \qquad (89)$$

$$\int (x^2-a^2)^n\,dx=\frac{x}{2n+1}\left\{(x^2-a^2)^n-\frac{2n}{2n-1}a^2(x^2-a^2)^{n-1}+\right.$$
$$+\frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}a^4(x^2-a^2)^{n-2}-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2n(2n-2)\ldots 6\cdot 4}{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3}a^{2(n-1)}(x^2-a^2)+$$
$$\left.+(-1)^n\frac{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}a^{2n}\right\}, \tag{90}$$

$$\int\frac{dx}{(a^2\pm x^2)^n}=\frac{x}{(2n-2)\,a^{2(n-1)}(a^2\pm x^2)^{n-1}}\left\{a^{2(n-2)}+\right.$$
$$+\frac{2n-3}{2n-4}a^{2(n-3)}(a^2\pm x^2)+\frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}a^{2(n-4)}(a^2\pm x^2)^2+\cdots$$
$$\left.\ldots+\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4\cdot 2}(a^2\pm x^2)^{n-2}\right\}+$$
$$+\begin{cases}\dfrac{(2n-3)(2x-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\dfrac{1}{a^{2n-1}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} & \text{для верхнего знака,}\\[2ex] \dfrac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\dfrac{1}{2a^{2n-1}}\ln\dfrac{a+x}{a-x} & \text{для нижнего знака.}\end{cases} \tag{91}$$

$$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n}=\frac{-x}{(2n-2)\,a^{2(n-1)}(x^2-a^2)^{n-1}}\left\{a^{2(n-2)}-\frac{2n-3}{2n-4}a^{2(n-3)}\times\right.$$
$$\times(x^2-a^2)+\frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}a^{2(n-4)}(x^2-a^2)^2-\ldots$$
$$\left.\ldots+(-1)^{n-2}\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4\cdot 2}(x^2-a^2)^{n-2}\right\}+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\frac{1}{2a^{2n-1}}\ln\frac{a-x}{a+x}. \tag{92}$$

§ 3. Интегралы вида $\int (a+2bx+cx^2)^n\,dx$

I) Представив интеграл $\int (a+2bx+cx^2)\,dx$ в виде

$$\frac{1}{c^{n+1}}\int[(cx+b)^2+(ac-b^2)]^n\,d(cx+b)$$

и пользуясь формулами приведения (85) и (86), получаем формулы

$$\int (a+2bx+cx^2)^n\,dx=$$
$$=\frac{cx+b}{(2n+1)c}(a+2bx+cx^2)^n+\frac{2n(ac-b^2)}{(2n+1)c}\int(a+2bx+cx^2)^{n-1}dx \tag{93}$$

и

$$\int\frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^n}=\frac{cx+b}{(2n-2)(ac-b^2)(a+2bx+cx^2)^{n-1}}+$$
$$+\frac{(2n-3)c}{(2n-2)(ac-b^2)}\int\frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{n-1}}; \tag{94}$$

Формула (93) теряет значение при $n=-\frac{1}{2}$ и при $c=0$.

В первом случае имеем рассмотренный в разделе II § 7, гл. I интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx\pm cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\ln(cx+b+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2})$ для верхнего знака и $=\frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\frac{cx-b}{\sqrt{ac+b^2}}$ для нижнего знака, и во втором — интеграл

$$\int (a+2bx)^n\,dx=\frac{1}{2(n+1)b}(a+2bx)^{n+1}.$$

Формула (94) теряет значение при $n=-1$ и при $ac-b^2=0$.

В первом случае имеем интеграл (см. в разделе VI § 7, гл. I)

$$\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{cx+b}{\sqrt{ac-b^2}},\ \text{если}\quad ac-b^2>0$$

и

$$=\frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}}\ln\frac{\sqrt{b^2-ac}-b-cx}{\sqrt{b^2-ac}+b+cx},\ \text{если}\ ac-b^2<0.$$

Во втором случае, когда $ac-b^2=0$, выражение $a+2bx+cx^2$ представляет, как известно, полный квадрат, и имеем интеграл

$$c^n\int\frac{dx}{(cx+b)^{2n}}=-\frac{c^{n-1}}{(2n-1)(cx+b)^{2n-1}}.$$

II) При n целом, применяя последовательно формулы (93) и (94), получаем выражения вычисляемых интегралов

$$\int (a+2bx+cx^2)^n\,dx=\frac{cx+b}{(2n+1)c}\Big\{(a+2bx+cx^2)^n+\frac{2n}{2n-1}\,\frac{ac-b^2}{c}(a+2bx+cx^2)^{n-1}+\frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{ac-b^2}{c}\right)^2\times$$
$$\times(a+2bx+cx^2)^{n-2}+\ldots+\frac{2n(2n-2)\ldots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\ldots3\cdot1}\left(\frac{ac-b^2}{c}\right)^n\Big\},\quad(95)$$

$$\int\frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^n}=\frac{cx+b}{(2n-2)(ac-b^2)(a+2bx+cx^2)^{n-1}}\times$$
$$\times\Big\{1+\frac{2n-3}{2n-4}\,\frac{c}{ac-b^2}(a+2bx+cx^2)+$$
$$+\frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}\left(\frac{c}{ac-b^2}\right)^2(a+2bx+cx^2)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4\cdot 2}\left(\frac{c}{ac-b^2}\right)^{n-2}(a+2bx+cx^2)^{n-2}\Biggr\}+$$

$$+\begin{cases}\dfrac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\left(\dfrac{c}{ac-b^2}\right)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{cx+b}{\sqrt{ac-b^2}}, \\ \qquad\qquad \text{если } ac-b^2>0, \\ \dfrac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\left(\dfrac{c}{ac-b^2}\right)^{n-1}\dfrac{1}{2\sqrt{b^2-ac}}\ln\dfrac{\sqrt{b^2-ac}-b-cx}{\sqrt{b^2-ac}+b+cx}, \\ \qquad\qquad \text{если } ac-b^2<0.\end{cases} \qquad (96)$$

Примеры

4) $$\int (b'+c'x)(a+2bx+cx^2)^n\,dx=\frac{c'}{2(n+1)}(a+2bx+cx^2)^{n+1}+$$
$$+\frac{b'c-bc'}{c}\int (a+2bx+cx^2)^n\,dx.$$

5) $$\int\frac{(b'+c'x)\,dx}{(a+2bx+cx^2)^n}=-\frac{c'}{2(n-1)\,c\,(a+2bx+cx^2)^{n-1}}+$$
$$+\frac{b'c-bc'}{c}\int\frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^n}\qquad (n\neq 1).$$

6) $$\int\frac{x\,dx}{3+6x+2x^2}=\frac{1}{4}\ln(3+6x+2x^2)-\frac{\sqrt{3}}{4}\ln\frac{\sqrt{3}-3-2x}{\sqrt{3}+3+2x}.$$

7) $$\int\frac{(2x-3)\,dx}{(3+6x+2x^2)^3}=-\frac{8x^3+36x^2+44x+13}{4(3+6x+2x^2)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}-3-2x}{\sqrt{3}+3+2x}.$$

8) $$\int\frac{(x-1)\,dx}{(x^2+5x+4)}=\frac{7x+13}{9(x^2+5x+4)}+\frac{7}{27}\ln\frac{x+1}{x+4}.$$

9) $$\int\frac{dx}{(x^2+3x+2)^5}=\frac{2x+3}{4(x^2+3x+2)^4}\Bigl\{-1+\frac{14}{3}(x^2+3x+2)-$$
$$-\frac{70}{3}(x^2+3x+2)^2+140(x^2+3x+2)^3\Bigr\}+10\ln\frac{x+1}{x+2}.$$

§ 4. Интегралы вида $\int x^m (a+2bx+cx^2)^n\,dx$

I) Выполняем по отношению к производной функции $x^{m-1}(a+2bx+cx^2)^{n+1}$ следующее преобразование:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{m-1}(a+2bx+cx^2)^{n+1}\right]=(m-1)\,x^{m-2}(a+2bx+cx^2)^{n+1}+$$
$$+(n+1)\,x^{m-1}(2cx+2b)(a+2bx+cx^2)^n=$$
$$=[(m-1)\,x^{m-2}(a+2bx+cx^2)+$$
$$+(n+1)\,x^{m-1}(2cx+2b)](a+2bx+cx^2)^n=(m-1)\,ax^{m-2}\times$$
$$\times(a+2bx+cx^2)^n+2(m+n)\,bx^{m-1}(a+2bx+cx^2)^n+$$
$$+(m+2n+1)\,cx^m(a+2bx+cx^2)^n.$$

Умножая затем исходное выражение и конечный результат на dx и интегрируя, получаем:

$$x^{m-1}(a+2bx+cx^2)^{n+1}=(m-1)\,a\int x^{m-2}(a+2bx+cx^2)^n\,dx+$$
$$+2(m+n)\,b\int x^{m-1}(a+2bx+cx^2)^n\,dx+$$
$$+(m+2n+1)\,c\int x^m(a+2bx+cx^2)^n\,dx.$$

Отсюда получаем формулу

$$\int x^m(a+2bx+cx^2)^n\,dx=\frac{x^{m-1}(a+2bx+cx^2)^{n+1}}{(m+2n+1)\,c}-$$
$$-\frac{2(m+n)\,b}{(m+2n+1)\,c}\int x^{m-1}(a+2bx+cx^2)^n\,dx-$$
$$-\frac{(m-1)\,a}{(m+2n+1)c}\times\int x^{m-2}(a+2bx+cx^2)^n\,dx. \tag{97}$$

Определяя из этой формулы $\int x^{m-2}(a+2bx+cx^2)^n\,dx$ и заменяя $(m-2)$ на m, получаем вторую формулу

$$\int x^m(a+2bx+cx^2)^n\,dx=\frac{x^{m+1}(a+2bx+cx^2)^{n+1}}{(m+1)\,a}-$$
$$-\frac{2(m+n+2)\,b}{(m+1)\,a}\int x^{m+1}(a+2bx+cx^2)^n\,dx-$$
$$-\frac{(m+2n+3)\,c}{(m+1)\,a}\int x^{m+2}(a+2bx+cx^2)^n\,dx. \tag{98}$$

Кроме того, интегрированием по частям

$$\int x^m(a+2bx+cx^2)^n\,dx=\int(a+2bx+cx^2)^n\,d\frac{x^{m+1}}{m+1}=$$
$$=\frac{x^{m+1}(a+2bx+cx^2)^n}{m+1}-\frac{2n}{m+1}\int x^{m+1}(b+cx)(a+2bx+cx^2)^{n-1}\,dx$$

получаем третью формулу

$$\int x^m(a+2bx+cx^2)^n\,dx=\frac{x^{m+1}(a+2bx+cx^2)^n}{(m+1)}-$$
$$-\frac{2nb}{m+1}\int x^{m+1}(a+2bx+cx^2)^{n-1}\,dx-$$
$$-\frac{2nc}{m+1}\int x^{m+2}(a+2bx+cx^2)^{n-1}\,dx. \tag{99}$$

Формула (97) применяется при $m>0$, т. е. для интегралов вида $\int x^m(a+2bx+cx^2)^{\pm n}\,dx$, формула (98) при $m<0$ и, следовательно, для интегралов вида $\int \frac{(a+2bx+cx^2)^{\pm n}}{x^m}\,dx$. В формуле (99) m увеличивается, n уменьшается; она применима для интегралов $\int x^{\pm m}(a+2bx+cx^2)^n\,dx$ и наибольший интерес представляет при отрицательном m.

Последовательным применением формул приходим в конце концов к интегралам вида $\int (a+2bx+cx^2)^{\pm n}\,dx$, которые вычисляются по формулам предыдущего параграфа.

Формула (97) теряет значение при $c=0$ и при $m=-(2n+1)$.

В первом случае интеграл имеет вид $\int x^m (a+2bx)^n\,dx$ и вычисляется по формулам § 1 гл. III.

Во втором, замечая, что m уменьшается и, следовательно, положительное, так что n должно быть отрицательным, для вычисления соответствующего этим условиям интеграла $\int \frac{x^{2n+1}\,dx}{(a+2bx+cx^2)^n}$ находим другую формулу. Представив этот интеграл в виде

$$\frac{1}{2c}\int x^{2n-2}\frac{(2b+2cx)\,dx}{(a+2bc+cx^2)^n}-\frac{b}{c}\int\frac{x^{n-2}\,dx}{(a+2bx+cx^2)^n},$$

интегрированием по частям получаем:

$$\int\frac{x^{2n-1}\,dx}{(a+2bx+cx^2)^n}=-\frac{x^{2n-2}}{2(n-1)c(a+2bx+cx^2)^{n-1}}-\\-\frac{b}{c}\int\frac{x^{2n-2}\,dx}{(a+2bx+cx^2)^n}+\frac{1}{c}\int\frac{x^{2n-3}\,dx}{(a+2bx+cx^2)^{n-1}}, \quad (100)$$

К первому из интегралов этой формулы применяется далее формула (97), ко второму же — снова формула (100). В конце концов при n целом приходим к интегралу

$$\int\frac{x\,dx}{a+2bx+cx^2}=\frac{1}{2c}\ln(a+2bx+cx^2)-\frac{2b}{c}\int\frac{dx}{a+2bx+cx^2}.$$

Этот интеграл имеем и при $n=1$, когда формула (100) теряет значение.

Формула (98) теряет значение при $a=0$ и при $m=-1$, формула (99) — также при $m=1$.

При $a=0$ имеем интеграл $\int x^{m+n}(2b+cx)^n\,dx$, вычисляемый по формулам § 1 гл. III.

При $m=-1$ интеграл имеет вид $\int\frac{(a+2bx+cx^2)^n}{x}\,dx$, и для него получаем другие формулы.

Представив интеграл в виде

$$a\int\frac{(a+2bx+cx^2)^{n-1}}{x}\,dx+b\int(a+2bx+cx^2)^{n-1}\,dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int(a+2bx+cx^2)^{n-1}(2b+2cx)\,dx$$

и выполнив интегрирование для последнего интеграла, получаем формулу

$$\int\frac{(a+2bx+cx^2)^n}{x}\,dx=\frac{(a+2bx+cx^2)^n}{2n}+b\int(a+2bx+cx^2)^{n-1}\,dx+$$
$$+a\int\frac{(a+2bx+cx^2)^{n-1}}{x}\,dx, \qquad (101)$$

при положительном n.

Для случая отрицательного n, т. е. для интеграла

$$\int\frac{dx}{x(a+2bx+cx^2)^n},$$

определив из последней формулы

$$\int\frac{(a+2bx+cx^2)^{n-1}}{x}\,dx$$

и заменив $(n-1)$ на $(-n)$, получаем:

$$\int\frac{dx}{x(a+2bx+cx^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)a(a+2bx+cx^2)^{n-1}}-$$
$$-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^n}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x(a+2bx+cx^2)^{n-1}}. \qquad (102)$$

Аналогичную формулу можем получить и для более общего интеграла $\int\frac{dx}{x^m(a+2bx+cx^2)^n}$. Представив его в виде

$$\frac{1}{a}\int\frac{a+2bx+cx^2-2bx-cx^2}{x^m(a+2bx+cx^2)^n}\,dx,$$

получаем:

$$\int\frac{dx}{x^m(a+2bx+cx^2)^n}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^m(a+2bx+cx^2)^{n-1}}-$$
$$-\frac{2b}{a}\int\frac{dx}{x^{m-1}(a+2bx+cx^2)^n}-\frac{c}{a}\int\frac{dx}{x^{m-2}(a+2bx+cx^2)^n}. \qquad (103)$$

Этой формулой можем пользоваться для постепенного понижения показателей степеней m и n.

II) Интеграл $\int(\alpha+\beta x)^m(a+2bx+cx^2)^n\,dx$ подстановкой $\alpha+\beta x=z$ приводится к интегралу

$$\frac{1}{\beta^{2n+1}}\int z^m(a'+2b'z+cz^2)^n\,dz,$$

где $a'=a\beta^2+2b\alpha\beta+c\alpha^2$ и $b'=b\beta-c\alpha$. Получающийся интеграл вычисляется по предыдущим формулам.

Примеры

10) $$\int\frac{dx}{x^3(7-6x+2x^2)^2}=-\frac{1}{98x^2}-\frac{12}{343x}-\frac{2}{1715}\frac{9x-41}{7-6x+2x^2}+$$
$$+\frac{80}{2401}\ln x-\frac{40}{2401}\ln(7-6x+2x^2)+\frac{234}{12\,005\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{5}}.$$

11) $$\int\frac{x^9dx}{(x^2+3x+2)^5}=-\left\{\frac{x^8}{8(x^2+3x+2)^4}+\frac{x^6}{6(x^2+3x+2)^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^4}{4(x^2+3x+2)^2}+\frac{x^2}{2(x^2+3x+2)}\right\}-\frac{3}{2}\left\{\int\frac{x^8dx}{(x^2+3x+3)^5}+\right.$$
$$\left.+\int\frac{x^6dx}{(x^2+3x+2)^4}+\int\frac{x^4dx}{(x^2+3x+2)^3}+\int\frac{x^2dx}{(x^2+3x+2)^2}\right\}+\ln\frac{(x+2)^2}{x+1}$$

(формула (100); для остающихся интегралов формула (97)).

12) $$\int\frac{(1+2x)^2\,dx}{(3+5x+2x^2)^5}=-\frac{11+10x}{4(3+5x+2x^2)^4}+31(5+4x)\left[\frac{1}{6(3+5x+2x^2)^3}-\right.$$
$$\left.-\frac{5}{3(3+5x+2x^2)^2}+\frac{20}{3+5x+2x^2}\right]+2480\ln\frac{1+x}{3+2x}.$$

§ 5. Интегралы вида $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ (интегралы биномиальных дифференциалов)

I) Выполняем относительно производной функции $x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}$ следующее преобразование:

$$\frac{d}{dx}x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}=(m-n+1)\,x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}-$$
$$-(p+1)\,nbx^m(a+bx^n)^p=(m-n+1)\,ax^{m-n}(a+bx^n)^p+$$
$$+(m-n+1)\,bx^m(a+bx^n)^p+(p+1)\,nbx^m(a+bx^n)^p=$$
$$=(m-n+1)\,ax^{m-n}(a+bx^n)^p+(m+np+1)\,bx^m(a+bx^n)^p.$$

Умножаем затем исходное выражение и конечный результат на dx и интегрируем. Получаем:

$$x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}=(m-n+1)\,a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx+$$
$$+(m+np+1)\,b\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Отсюда, определяя сначала $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ и затем $\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx$, заменяя вместе с тем для последнего интеграла $(m-n)$ на m, получаем формулы приведения

1) $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx =$

$$= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+np+1)b} - \frac{(m-n+1)a}{(m+np+1)b}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx,$$

2) $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx =$

$$= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1)a} - \frac{(m+np+n+1)b}{(m+1)a}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p\,dx.$$

II) Выполнив соответствующее преобразование над производной функции $x^{m+1}(a+bx^n)^p$, приходим к равенству

$$\frac{d}{dx}x^{m+1}(a+bx^n)^p = (m+np+1)\,x^m(a+bx^n)^p - npax^m(a+bx^n)^{p-1}.$$

Умножая его на dx и интегрируя, имеем

$x^{m+1}(a+bx^n)^p =$

$$= (m+np+1)\int x^m(a+bx^n)^p\,dx - npa\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx.$$

Отсюда, определяя $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ и затем $\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx$, заменяя вместе с тем для последнего интеграла $(p-1)$ на p, получаем формулы:

3) $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \dfrac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+np+1} + \dfrac{npa}{m+np+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx,$

4) $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx =$

$$= -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)a} + \frac{m+np+n+1}{n(p+1)a}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}\,dx.$$

III) Интегрированием по частям

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \int (a+bx^n)^p\,d\,\frac{x^{m+1}}{m+1} = \ldots$$

получаем формулу

5) $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \dfrac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \dfrac{npb}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}\,dx,$

и из неё, заменяя $(m+n)$ на m и $(p-1)$ на p,

6) $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx =$

$$= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b} - \frac{m-n+1}{n(p+1)b}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx.$$

IV) Формула 1) понижает степень m, так что она пригодна для случая положительного m, т. е. для интегралов

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p}.$$

Формула 2) — для интегралов $\int \frac{(a+bx^n)^p}{x^m}\,dx$ и $\int \frac{dx}{x^m (a+bx^n)^p}$.

Формула 3) понижает p и применяется для интегралов $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$ и $\int \frac{(a+bx^n)^p}{x^m}\,dx$.

Формула 4) — для интегралов $\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p}$ и $\int \frac{dx}{x^m (a+bx^n)^p}$.

Формула 5) повышает m, понижает p и, таким образом, более быстрым темпом приводит интегралы $\int \frac{(a+bx^n)^p}{x^m}\,dx$.

Формула 6) даёт то же самое для интегралов $\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p}$. Соответственно распоряжаясь в полученных шести формулах знаками m и p для каждого из перечисленных видов в отдельности, получаем более наглядные и удобные в отношении применения формулы:

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \\ = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^p}{(m+np+1)\,b} - \frac{(m-n+1)\,a}{(m+np+1)\,b} \int x^{m-n} (a+bx^n)^p\,dx, \tag{104}$$

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \\ = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+np+1} + \frac{npa}{m+np+1} \int x^m (a+bx^n)^{p-1}\,dx, \tag{105}$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p} = \\ = \frac{x^{m-n+1}}{(m-np+1)\,b\,(a+bx^n)^{p-1}} - \frac{(m-n+1)\,a}{(m-np+1)\,b} \int \frac{x^{m-n}\,dx}{(a+bx^n)^p}, \tag{106}$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p} = \\ = \frac{x^{m+1}}{n(p-1)\,a\,(a+bx^n)^{p-1}} - \frac{m-np+n+1}{n(p-1)\,a} \int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^{p-1}}, \tag{107}$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p} = \\ = -\frac{x^{m-n+1}}{n(p-1)\,b\,(a+bx^n)^{p-1}} + \frac{m-n+1}{n(p-1)\,b} \int \frac{x^{m-n}\,dx}{(a+bx^n)^{p-1}}, \tag{108}$$

$$\int \frac{(a+bx^n)^p}{x^m}\,dx = \\ = -\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(m-1)\,ax^{m-1}} + \frac{(np+n-m+1)\,b}{(m-1)\,a} \int \frac{(a+bx^n)^p}{x^{m-n}}\,dx, \tag{109}$$

$$\int \frac{(a+bx^n)^p}{x^m} dx = \frac{(a+bx^n)^p}{(np-m+1)\,x^{m-1}} + \frac{npa}{np-m+1} \int \frac{(a+bx^n)^{p-1}}{x^m} dx, \qquad (110)$$

$$\int \frac{(a+bx^n)^p}{x^m} dx = \frac{(a+bx^n)^p}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{npb}{m-1} \int \frac{(a+bx^n)^{p-1}}{x^{m-n}} dx, \qquad (111)$$

$$\int \frac{dx}{x^m (a+bx^n)^p} = -\frac{1}{(m-1)\,ax^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}} - \\ -\frac{(m+np-n-1)\,b}{(m-1)\,a} \int \frac{dx}{x^{m-n}(a+bx^n)^p}, \qquad (112)$$

$$\int \frac{dx}{x^m (a+bx^n)^p} = \frac{1}{n(p-1)\,ax^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}} + \\ +\frac{m+np-n-1}{n(p-1)\,a} \int \frac{dx}{x^m (a+bx^n)^{p-1}}. \qquad (113)$$

В этих формулах m и p надо принимать уже положительными; n тоже можно считать положительным, так как $\int x^m (a+bx^{-n})^p\,dx = \int x^{m-np} (b+ax^n)^p\,dx$ и, следовательно, при n отрицательном имеем интеграл какого-либо из тех же четырёх видов.

Каждая из формул теряет значение, когда знаменатель обращается в нуль. Это имеет место для различных формул при $a=0$, $b=0$, $n=0$, $m=1$, $p=1$, при $m=-np-1$ для формул (104) и (105), при $m=np-1$ для формулы (106) и при $m=np+1$ для формулы (110).

В том случае, когда a или b или n равны нулю, имеем элементарные интегралы вида $\int x^{\pm k}\,dx$.

Если $m=1$ (формулы (109), (111) и (112)), или $p=1$ (формулы (107), (108) и (113)), то понижать степень m в первом случае или степень p во втором нет надобности. Если одновременно и $m=1$ и $p=1$ для интеграла (112), то вообще нет места для приведения, и имеем интеграл $\int \frac{dx}{x(a+bx^n)} = \frac{1}{na} \ln \frac{x^n}{a+bx^n}$.

Случай $m=-np-1$ для интеграла (104) невозможен, так как для всех формул m, n, p приняты положительными. При отрицательном m или p мы имели бы явно интегралы других видов. При отрицательном n в рассматриваемом случае было бы $m+np=-1$, и соответствующий интеграл $\int \frac{(b+ax^n)^p}{x} dx$ представлял бы также другой вид.

В случае $m=np-1$ теряет значение формула (106), и для интеграла (106) можно пользоваться другими двумя формулами. Все три формулы теряют значение, когда одновременно имеем и $p=1$. В этом случае имеем интеграл $\int \frac{x^{n-1}\,dx}{a+bx^n} = \frac{1}{nb} \ln(a+bx^n)$.

Точно так же для интеграла (110) в случае $m=np+1$, когда формула (110) теряет значение, можно пользоваться остальными двумя формулами. Если в то же время и $m=1$, то теряют значение все три формулы. В таком случае имеем $np=0$, что возможно, когда n или p равны нулю. И в том и в другом случаях имеем интеграл $\int \frac{dx}{x}=\ln x$.

V) Формулы, как было обусловлено, действительны и для дробных значений показателей m, n, p, следовательно, и для интегралов иррациональных биномиальных выражений.

При p целом интегралы (104) и (109) легко вычисляются элементарным приёмом,—разложением бинома $(a+bx^n)^p$ по степеням x, и применение рекуррентных формул едва ли вносит какое-либо упрощение в процесс вычисления. При пользовании формулами приходим в конечном счёте к интегралу

$$\int x^k\,dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}, \text{ если } k\neq -1,$$

и

$$=\ln x, \quad \text{если } k=-1.$$

Интегралы (106) и (112) при рациональности интегрируемых выражений, т. е. при целых m, n, p, приводятся формулами в конечном счёте к интегралам $\int \frac{x^k\,dx}{a+bx^n}$ и $\int \frac{dx}{x^k(a+bx^n)}$, где $k<n$.

Второй интеграл лёгким преобразованием

$$\int \frac{dx}{x^k(a+bx^n)}=\frac{1}{a}\int \frac{(a+bx^n)-bx^n}{x^k(a+bx^n)}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{(k-1)\,ax^{k-1}}-\frac{b}{a}\int \frac{x^{n-k}\,dx}{a+bx^n}$$

приводится к виду первого, так что как для интеграла (106), так и для интеграла (112), приходим к интегралу вида $\int \frac{x^m\,dx}{a+bx^n}$, рассмотренному в § 10 гл. II.

Примеры

13) $$\int \frac{(a-bx^2)^3}{x^7}\,dx=-\frac{a^3}{6}\cdot\frac{1}{x^6}+\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{1}{x^4}-\frac{3ab^2}{2}\cdot\frac{1}{x^2}-b^3\ln x$$

или

$$=-\frac{1}{6}\,\frac{(a-bx^2)^3}{x^6}+\frac{b}{4}\,\frac{(a-bx^2)^2}{x^4}-\frac{ab^2}{2}\cdot\frac{1}{x^2}-b^3\ln x$$

[(формула (111); формула (110) неприменима].

14) $$\int \frac{x^{13}dx}{(a^4+x^4)^5}=-\frac{x^{10}}{16\,(a^4+x^4)^4}-\frac{5x^6}{96\,(a^4+x^4)^3}-\frac{5x^2}{128\,(a^4+x^4)^2}+$$
$$+\frac{5x^2}{256a^4\,(a^4+x^4)}+\frac{5}{256a^6}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}$$ [формулы (108) и (107) и пример 42 гл. II].

ГЛАВА IV
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Вначале было уже отмечено, что для многих, и притом для некоторых даже простых функций, интегрирование — невыполнимо, что интегралы их не могут быть выражены какой-либо конечной комбинацией элементарных функций. К числу таких интегралов относится *большая часть интегралов иррациональных алгебраических выражений*; из них интегрирование выполняется лишь для некоторых наиболее простых форм, как например, $\int F\{x, \sqrt[n]{a+bx}\}\,dx$, $\int F\{x, \sqrt{a+2bx+cx^2}\}\,dx$. Но если мы имеем интеграл $\int F\{x, \sqrt{P(x)}\}\,dx$, где $P(x)$ — целая алгебраическая функция выше, чем второй степени, или интеграл $\int F\{x, \sqrt[n]{P(x)}\}\,dx$, где $P(x)$ — целая функция выше первой степени и $n > 2$, то для них интегрирование уже невыполнимо, за исключением частных случаев особого строения функции $P(x)$, или всей интегрируемой функции. Так, интеграл $\int F\{x, \sqrt{P(x)}\}\,dx$, где $P(x)$ — функция 3-й или 4-й степени, называемый эллиптическим интегралом, вообще уже не вычисляется в конечном виде, и даже в том исключительном случае, когда вычисляется, называется псевдоэллиптическим.

В настоящей главе мы рассмотрим наиболее важные из тех видов интегралов, для которых интегрирование выполняется, и соответствующие каждому из них приёмы интегрирования. При этом для всей теории и практики достаточно принять в качестве основных формулы (1) — (17).

§ 1. Интегралы вида $\int F\{x, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, (ax+b)^{\frac{r}{s}}, \ldots\}\,dx$

Интегралы этого вида, если F для них — знак рациональной функции, приводятся, как мы видели уже в разделе I, § 6 гл. I, к рациональным формам подстановкой $ax+b=z^n$, где n — наименьшее кратное всех чисел $q, s, \ldots$, и так как интеграл рационального алгебраического выражения теоретически вычисляется в конечном виде, то и *для рассматриваемого интеграла интегрирование можем считать теоретически выполнимым.*

Подстановка очень проста, и имеющаяся во многих случаях сложность вычисления интеграла всецело относится к преобразованию в целях интегрирования получающейся в результате подстановки рациональной алгебраической функции. Общая теория последней основывается на нескольких основных элементарных формулах; те же формулы в соединении с указанной подстановкой лежат, очевидно, и в основании вычисления интегралов рассматриваемого вида. Применение других методов и формул интегрирования в соответствующих случаях упрощает вычисление интеграла.

В некоторых случаях более удобна подстановка $ax+b=\frac{1}{y}$, которая также приводит к интегралу рационального выражения. Формулы приведения § 1 гл. III действительны и для дробных значений показателей m, n, так что этими формулами также можно пользоваться в соответствующих случаях при вычислении интегралов рассматриваемого вида.

В частном случае при $b=0$, $a=1$ имеем интеграл вида $\int F\{x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, \ldots\}\,dx$, который приводится к рациональной форме, очевидно, той же подстановкой $x=z^n$, где n — наименьшее кратное для всех знаменателей q, s, ... Если интегрируемое выражение представляет целую функцию или знаменателем его является одночлен $x^{\frac{t}{u}}$, то интеграл легко вычисляется непосредственно, так как интегрируемое выражение в этом случае представляет полином различных дробных степеней x.

Примеры

1) $$\int \sqrt{x^3}\,(1+x^2)(2\sqrt{x}-x)^2\,dx =$$
$$=\frac{8}{7}x^2\sqrt{x}+\frac{24}{33}x^5\sqrt{x}-x^4-\frac{2}{3}x^6+\frac{2}{9}x^4\sqrt{x}+\frac{2}{13}x^6\sqrt{x}.$$

2) $$\int \left(x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{3}{5}}\right)^2\left(4x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)dx =$$
$$=\frac{8}{11}x^{\frac{11}{2}}-\frac{120}{23}x^{\frac{23}{5}}+\frac{360}{37}x^{\frac{37}{10}}-\frac{1}{14}x^{\frac{14}{3}}+\frac{60}{113}x^{\frac{113}{30}}-\frac{45}{43}x^{\frac{43}{15}}.$$

3) $$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}=2\left[\sqrt{1+x}-\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)\right]$$

(подст. $\sqrt{1+x}=z$,

или лучше $1+\sqrt{1+x}=z$).

4) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}}=\frac{1}{3}(1+x)(2\sqrt{1+x}-3).$

5) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\,dx=(1+x)+4\sqrt{1+x}+4\ln(\sqrt{1+x}-1).$

6) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt{1+x}}=3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}+6\ln(\sqrt[6]{1+x}-1).$

7) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}.$

(подст. $\sqrt[4]{x}=z$ и затем $\sqrt[3]{1+z}=y$, или сразу $\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}=y$).

8) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x)^3}}=\frac{15x^2+5x-2}{4x^2\sqrt{1+x}}+\frac{15}{8}\ln\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}.$

9) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^5\sqrt{(1-x)^7}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{(1-x)^5}}\left\{-\frac{1}{4x^4}-\frac{13}{24x^3}-\frac{143}{96x^2}-\frac{429}{64x}+\frac{23023}{320}-\frac{7007x}{64}+\frac{3003x^2}{64}\right\}+$$
$$+\frac{3003}{128}\ln\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}.$$

Вычисляя интеграл методом приведения, по формуле (83), приходим к интегралу $\displaystyle\int\frac{dx}{x(1-x)^{\frac{7}{2}}}$, который лёгким алгебраическим преобразованием можно представить в виде суммы интегралов

$$\int\frac{dx}{(1-x)^{\frac{7}{2}}}+\int\frac{dx}{(1-x)^{\frac{5}{2}}}+\int\frac{dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}+\int\frac{dx}{x(1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Так как формулу приходится применять четыре раза, то практичнее, положив в ней для данного конкретного случая $a=1$, $b=0$, $a'=1$, $b'=1$, $n=\frac{7}{2}$, привести её предварительно к более простому виду

$$\int\frac{dx}{x^m(1-x)^{\frac{7}{2}}}=-\frac{1}{(m-1)\,x^{m-1}(1-x)^{\frac{5}{2}}}+\frac{2m+3}{2m-2}\int\frac{dx}{x^{m-1}(1-x)^{\frac{7}{2}}}.$$

Совершенно одинаково применима для вычисляемого интеграла и формула (112).

Пользуясь для вычисления интеграла подстановкой $\sqrt{1-x}=z$, приходим к интегралу $\displaystyle\int\frac{-2dz}{z^6(1-z^2)^5}$, который также может быть вычислен по соответствующим формулам приведения.

Для непосредственного, без участия формул, вычисления удобнее подстановка $\sqrt{1-x}=\frac{1}{y}$, которая приводит к интегралу $\int \frac{2y^{14}dy}{(y^2-1)^5}$. Последний вычисляется приёмом интегрирования по частям

$$\int \frac{2y^{14}dy}{(y^2-1)^5}=\int y^{13}d\left[-\frac{1}{4(y^2-1)^4}\right]=$$
$$=-\frac{y^{13}}{4(y^2-1)^4}+\frac{13}{8}\int y^{11}d\left[-\frac{1}{3(y^2-1)^3}\right]=\ldots$$

Для обратной подстановки имеем $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $y^2-1=\frac{x}{1-x}$.

Общее замечание. Интеграл $\int \frac{dx}{x^k\sqrt[n]{(ax+b)^m}}$ подстановкой $\sqrt[n]{ax+b}=z$ приводится к интегралу $na^{k-1}\int \frac{z^{n-m-1}dz}{(z^n-b)^k}$ и подстановкой $\sqrt[n]{ax+b}=\frac{1}{y}$ — к интегралу $na^{k-1}\int \frac{y^{m+nk-n-1}\,dy}{(1-by^n)^k}$. Для вычисления и того и другого интегралов можно воспользоваться формулами приведения § 5 гл. III.

В случае же непосредственного вычисления интеграла, если $n<m+1$, удобнее вторая подстановка, так как в дальнейшем при интегрировании по частям она даёт более простые вычисления.

10) $$\int \frac{dx}{x^5\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\sqrt[3]{x-1}\left\{\frac{1}{4x^4}+\frac{11}{36x^3}+\frac{11}{27x^2}+\frac{55}{81x}\right\}+$$
$$+\frac{55}{81}\ln\frac{\sqrt[3]{x-1}+1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{110\sqrt{3}}{243}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}}.$$

Подстановка $\sqrt[3]{x+1}=z$ приводит к интегралу $\int \frac{3\,dz}{(z^3+1)^5}$, который вычисляется по формуле (107) $(m=0)$.

При подстановке $\sqrt[3]{x-1}=\frac{1}{y}$ приходим к интегралу $\int \frac{-3y^{13}dy}{(y^3+1)^5}$, который вычисляется по формуле (108). Непосредственным интегрированием по частям интеграл вычисляется проще. Первая подстановка приводит в конечном счёте к интегралу примера 32, гл. II, вторая—к интегралу примера 33, гл. II.

При второй подстановке в отношении круговой функции приходим к результату $\frac{110\sqrt{3}}{243}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{x-1}}{2-\sqrt[3]{x-1}}$. Легко убеждаемся, что оба выражения отличаются на постоянную

$$\frac{110\sqrt{3}}{243}\cdot\frac{\pi}{6}.$$

Для вычисления интеграла, не вводя новой переменной, можно воспользоваться также формулой (83).

§ 2. Интегралы вида $\int F\{x, (a_1+b_1x)^{\frac{p}{q}}, (a_2+b_2x)^{\frac{r}{s}}, \ldots\}\,dx$

Вычисление интегралов вида

$$\int F\{x,(a_1+b_1x)^{\frac{p}{q}}, (a_2+b_2x)^{\frac{r}{s}}, \ldots\}dx, \text{ где } F$$

является рациональной функцией от x и отличающихся друг от друга иррациональностей линейных выражений, представляет задачу, уже не допускающую общего решения. *Для этих интегралов интегрирование вообще уже невыполнимо, и из них вычисляются лишь отдельные формы.*

I) Интеграл

$$\int F\left\{x, \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{r}{s}}, \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{t}{u}}, \ldots\right\}dx$$

подстановкой $\frac{a+bx}{a'+b'x}=z^l$, где l — наименьшее кратное всех знаменателей q, s, u, ... приводится к интегралу

$$l\,(a'b-ab')\int F\left\{\frac{a'z^l-a}{b-b'z^l}, z^{p\frac{l}{q}}, z^{r\frac{l}{s}}, z^{t\frac{l}{u}}, \ldots\right\}\frac{z^{l-1}\,dz}{(b-b'z^l)^2},$$

под знаком которого имеется рациональное выражение, и, следовательно, теоретически вычисляется в конечном виде. Практически же вычисление при некоторой сложности функции F и значительном по величине l представляет часто сложный процесс, так как под знаком интеграла после подстановки получается сложная рациональная функция.

В основании интегрирования, очевидно, можем считать те же формулы, что и для рациональных алгебраических выражений.

Примеры

11) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=\sqrt{1-x^2}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $\left(\text{подст. } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=z\right)$.

Интеграл легко вычисляется также подстановкой $x=\cos\varphi$, которая приводит к интегралу $-\int\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\,d\varphi=\int(\cos\varphi-1)\,d\varphi=\sin\varphi-\varphi$, и для вычисляемого интеграла тогда получаем выражения

$$\sqrt{1-x^2}-\arccos x \text{ или } \sqrt{1-x^2}+\arcsin x.$$

12) $\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,x\,dx=$

$$=\frac{1}{4}(a-3b-2x)\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{1}{4}(b-a)(a+3b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}.$$

Подстановкой $\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}=z$ приходим к интегралу

$$2(b-a)\int \frac{z^2(bz^2+a)}{(z^2+1)^3}\,dz,$$

который вычисляется по формулам § 12 гл. II.

К тому же результату для интеграла приходим тригонометрической подстановкой $x=a\cos^2\frac{\varphi}{2}+b\sin^2\frac{\varphi}{2}$. При этой подстановке имеем

$$x-a=(b-a)\sin^2\frac{\varphi}{2},\quad b-x=(b-a)\cos^2\frac{\varphi}{2},\quad \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

$$dx=(b-a)\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

и приходим к интегралу рационального тригонометрического выражения

$$(b-a)\int\left(a\cos^2\frac{\varphi}{2}+b\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=\frac{b-a}{8}\int[a+3b-4b\cos\varphi+(b-a)\cos 2\varphi]\,d\varphi=$$

$$=\frac{b-a}{8}[(a+3b)\varphi-4b\sin\varphi+(b-a)\sin\varphi\cos\varphi].$$

13) $$\int\frac{\sqrt{x-5}\sqrt{x+3}}{(x-1)(x^2-25)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5(x+3)}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{5(x+3)}-\sqrt{x-5}}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}.$$

Представив интеграл в виде $\int\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^{1/2}\frac{dx}{(x-1)(x+5)}$, пользуемся подстановкой $\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^{1/2}=z$.

14) $$\int\frac{x^2\sqrt[4]{1-x^2}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}\,[\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}]}\,dx.$$

Представив интеграл в виде $\int\frac{x^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{3/4}}{1-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}}\,dx$, подстановкой $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/4}=z$ приводим его к интегралу

$$-8\int\frac{(z^4-1)(z^2+1)z^6}{(z^4+1)^4}\,dz=$$

$$=-8\left\{\int\frac{z^{12}\,dz}{(z^4+1)^4}+\int\frac{z^{10}\,dz}{(z^4+1)^4}-\int\frac{z^8\,dz}{(z^4+1)^4}-\int\frac{z^6\,dz}{(z^4+1)^4}\right\}.$$

Последние четыре интеграла вычисляются приемами § 12 гл. II или прямо по выведенным там формулам.

Предлагается довести до конца вычисление этого, а также следующего интеграла.

15) $$\int \frac{x\sqrt[3]{(1+x)^2}\sqrt{1-x}\,dx}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{(1-x)^2}-\sqrt[3]{1+x}\sqrt[6]{(1-x)^5}}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $(1-x)^{7/6}$, приводим интеграл к виду $\int \frac{x\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{2/3}dx}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/3}}$, и затем, подстановкой $\frac{1+x}{1-x}=z^6$, к интегралу

$$12\int \frac{z^{12}+z^{11}+z^{10}+z^9+z^8+z^7}{(z^6+1)^3}\,dz.$$

Последний интеграл вычисляется приемами § 12 гл II или по имеющимся там формулам и на основании раздела IV, § 10 гл. II.

II) Интеграл $\int F\{x, \sqrt[n]{(x-a)^k(x-b)^l}\}\,dx$, где F — рациональная функция своих аргументов, k и l — целые числа, приводится к рациональной форме для $\frac{k+l}{n}$ = целому числу m.

Подставляя

$$\frac{x-a}{x-b}=y,\quad x=\frac{a-by}{1-y},\quad x-b=\frac{a-b}{1-y},\ x-a=\frac{(a-b)\,y}{1-y},\ dx=\frac{(a-b)dy}{(1-y)^2},$$

приводим его к интегралу

$$(a-b)\int F\left\{\frac{a-by}{1-y},\ y^{\frac{k}{n}}\left(\frac{a-b}{1-y}\right)^{\frac{k+l}{n}}\right\}\frac{dy}{(1-y)^2}$$

и затем подстановкой $y^{\frac{1}{n}}=z$ — к интегралу

$$n\,(a-b)\int F\left\{\frac{a-bz^n}{1-z^n},\ z^k\left(\frac{a-b}{1-z^n}\right)^m\right\}\frac{z^{n-1}dz}{(1-z^n)^2},$$

под знаком которого имеем рациональное выражение. Приняв во внимание, что $y=z^n$, можем соединить обе подстановки и пользоваться подстановкой $\frac{x-a}{x-b}=z^n$, которая непосредственно приводит к тому же интегралу.

Рассматриваемый интеграл, при условии $\frac{k+l}{n}=m$ — целому числу, теоретически, следовательно, вычисляется в конечном виде. Практически же и вычисление этого интеграла является сложным, соответственно сложности функции F и величине показателя n.

III) Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^k (x-b)^l}}$ указанной подстановкой при $\frac{k+l}{n} = m$, где m — целое число, приводится к интегралу

$$\frac{n}{(a-b)^{m-1}} \int (1-z^n)^{m-2} z^{n-k-1}\, dz =$$
$$= \frac{n}{(a-b)^{m-1}} \int \sum_{p=0}^{p=m-2} (-1)^p \binom{m-2}{p} z^{np+n-k-1}\, dz.$$

Выполняя интегрирование и возвращаясь для результата к прежней переменной x, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^k (x-b)^l}} =$$
$$= \frac{n}{(a-b)^{m-1}} \sqrt[n]{\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{n-k}} \sum_{0}^{m-2} (-1)^p \binom{m-2}{p} \frac{1}{np+n-k} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^p. \tag{114}$$

Полученная формула действительна для $m = \frac{k+l}{n} \geqslant 2$. При $m=1$ она неприменима. В этом случае интеграл не выражается алгебраическими функциями. Той же подстановкой $\frac{x-a}{x-b} = z^n$ он приводится к интегралу $n \int \frac{z^{n-k-1}\, dz}{1-z^n}$, т. е. к интегралу (48) или (50), который выражается логарифмическими и круговыми функциями.

IV) При $n=1$ число $m=k+l$ всегда целое. В этом случае имеем интеграл рационального выражения

$$\int F\{x, [(x-a)^k (x-b)^l]\}\, dx.$$

Подставляя в формулу (114) $n=1$, получим формулу

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k (x-b)^l} =$$
$$= \frac{1}{(a-b)^{k+l-1}} \sum_{0}^{k+l-2} (-1)^p \binom{k+l-2}{p} \frac{1}{p-k+1} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-k+1}, \tag{115}$$

которую мы имели ранее в § 11 гл. II. Как видим, применявшаяся там подстановка $\frac{x-a}{x-b} = z$ является частным случаем подстановки $\frac{x-a}{x-b} = z^n$, которой пользуемся здесь для интегралов более общего вида.

V) При $n=2$ для того, чтобы $m=\frac{k+l}{2}$ являлось целым числом, показатели k и l должны быть вместе или чётными или нечётными.

В первом случае, заменяя для интеграла (114) k и l на $2k$ и $2l$, имеем интеграл рационального выражения.

Во втором, заменяя k и l на $2k+1$ и $2l+1$, имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^{2k+1}(x-b)^{2k+1}}}=$$

$$=\frac{2}{(a-b)^{k+l}}\sqrt{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^k}\sum_0^{k+l-1}(-1)^p\binom{k+l-1}{p}\frac{1}{2p-2k+1}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p+1}. \tag{116}$$

Формула эта действительна для $k+l \geqslant 1$. При $k+l=0$, что возможно только при $k=l=0$, приведя соответствующий интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ подстановкой $\frac{x-a}{x-b}=z$ к интегралу $\int \frac{2dz}{1-z^2}$, находим для него:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}=\ln\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}}, \tag{117}$$

или

$$=2\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}),$$

или

$$=-2\ln(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}),$$

и, таким образом, имеем для интеграла логарифмическое выражение.

Если при $n=2$ один из показателей k и l — чётный, а другой — нечётный, то m не равно целому числу и формула (114) неприменима, но и в этом случае имеем легко вычисляемый интеграл. Заменяя k на $2k$ и l на $2l+1$, получаем интеграл $\int \frac{dx}{(x-a)^k\sqrt{(x-b)^{2l+1}}}$, который подстановкой $x=b+z^2$ приводится к рациональной форме — к интегралу

$$\int \frac{2dz}{z^{2l}[z^2-(a-b)]^k}.$$

При $k=1$, $l=0$ имеем простейший вид этого интеграла и находим для него

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^2(x-b)}}=\frac{1}{\sqrt{a-b}}\ln\frac{\sqrt{a-b}-\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{x-b}}, \quad \text{если } a>b,$$

и

$$=\frac{2}{\sqrt{b-a}}\operatorname{arctg}\frac{x-b}{\sqrt{b-a}}, \quad \text{если } a<b.$$

Заметим, что под знаком корня в этом интеграле находится функция 3-й степени и интеграл представляет один из видов псевдоэллиптического интеграла.

VI) Принимая в формуле (114) $n=2$ и заменяя: l на $(2n+1)$, k на $(2n+2k+1)$, m на $(2n+k+1)$ и $(x-a)\,(x-b)$ на (x^2+px+q), получаем:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k\sqrt{(x^2+px+q)^{2n+1}}}=$$

$$=\frac{2}{(a-b)^{2n+k}}\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\sum_{p=0}^{p=2n+k-1}(-1)^{p+1}\binom{2n+k-1}{p}\times$$

$$\times\frac{1}{2n+2k-2p-1}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-n-k}, \qquad (118)$$

где a и b — корни трёхчлена (x^2+px+q).

Полученная формула действительна для всех целых и положительных значений n и k и не даёт выражения интеграла лишь в том случае, когда они оба одновременно равны нулю. Для соответствующего интеграла $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$, не выражающегося алгебраическими функциями, имеем уже выражение (117).

Полагая в формуле (114) $k=0$, получаем формулу

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+px+q)^{2n+1}}}=$$

$$=\frac{2}{(a-b)^{2n}}\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\sum_{p=0}^{p=2n-1}(-1)^{p+1}\binom{2n-1}{p}\frac{1}{2n-2p-1}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-n}. \qquad (119)$$

Формула действительна для всех целых положительных значений n; для $n=0$ теряет значение и в этом случае, так же как и в предыдущем, имеем интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

Заменяя в формуле (118) k на $(-k)$ и затем n на $(-n-1)$, получаем формулы:

$$\int\frac{(x-a)^k\,dx}{\sqrt{(x^2+px+q)^{2n+1}}}=$$

$$=\frac{2}{(a-b)^{2n-k}}\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\sum_{p=0}^{p=2n-k-1}(-1)^{p+1}\binom{2n-k-1}{p}\times$$

$$\times\frac{1}{2n-2k-2p-1}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p+n+k} \qquad (k\leqslant 2n-1), \qquad (120)$$

$$\int \frac{\sqrt{(x^2+px+q)^{2n+1}}}{(x-a)^k}\,dx =$$
$$= \frac{2}{(a-b)^{k-2n-2}} \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} \sum_{p=0}^{p=k-2n-3} (-1)^{p+1} \binom{k-2n-3}{p} \times$$
$$\times \frac{1}{2k-2n-2p-3} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p+n-k+1} \qquad (k \geqslant 2n+3). \qquad (121)$$

При комплексных корнях a и b трёхчлена (x^2+px+q) все формулы (118) дают для интегралов мнимые выражения.

При $q=0$ под корнем имеем выражение x^2+px, корни которого вещественны. Заменяя в нём p на $(\pm 2r)$, на основании формулы (119) получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm 2rx)^{2n+1}}} = \frac{1}{2^{2n-1}r^{2n}} \sqrt{\frac{x \pm 2r}{x}} \sum_{p=0}^{p=2n-1} (-1)^{p+1} \binom{2n-1}{p} \times$$
$$\times \frac{1}{2n-2p-1} \left(\frac{x \pm 2r}{x}\right)^{p-n}. \qquad (122)$$

Представив интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(2rx-x^2)^{2n+1}}}$ в виде

$$\frac{1}{i^{2n+1}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2rx)^{2n+1}}},$$

на основании предыдущей формулы, легко получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2rx-x^2)^{2n+1}}} = \frac{1}{2^{2n-1}r^{2n}} \sqrt{\frac{2r-x}{x}} \sum_{p=0}^{p=2n-1} \binom{2n-1}{p} \times$$
$$\times \frac{1}{2n-2p-1} \left(\frac{2r-x}{x}\right)^{p-n}. \qquad (123)$$

Полученные формулы действительны для всякого целого $n>0$. При $n=0$ непосредственно подстановками $\frac{x \pm 2r}{x} = z^2$ и $\frac{2r-x}{x} = z^2$ находим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 2rx}} = \ln \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x \pm 2r}}{\sqrt{x}-\sqrt{x \pm 2r}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2r-x}{x}}.$$

VII) Принимая для интеграла $\int F\{x, \sqrt[n]{(x-a)^k (x-b)^l}\}\,dx$,

$$n=2, \quad k=l=1, \quad (x-a)(x-b)=x^2+px+q,$$

видим, что если F — рациональная функция своих аргументов, то интеграл $\int F\{x, \sqrt{x^2+px+q}\}\,dx$ подстановкой $\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}=z$ приводится к интегралу рационального выражения

$$\frac{2}{a-b}\int F\left\{\frac{a-bz^2}{1-z^2},\ \frac{(a-b)\,z}{1-z^2}\right\}\frac{z\,dz}{(1-z^2)^2},$$

и, следовательно, вычисляется в конечном виде.

В следующем параграфе эта подстановка будет приведена, как одна из подстановок Эйлера для вычисления интеграла в случае вещественных корней трёхчлена (x^2+px+q).

VIII) Принимая в формуле (114) $n=3$ и заменяя сначала k на $6n+2$, l на $3n+1$, m на $3n+1$ и затем k на $6n+4$, l на $3n+2$ и m на $3n+2$, получаем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{[(x-a)^2(x-b)]^{3n+1}}}=$$

$$=\frac{3}{(a-b)^{3n}}\sqrt[3]{\frac{x-a}{x-b}}\sum_{p=0}^{p=3n-1}(-1)^{p+1}\binom{3n-1}{p}\frac{1}{6n-3p-1}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-2n},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{[(x-a)^2(x-b)]^{3n+2}}}=$$

$$=\frac{3}{(a-b)^{3n+1}}\sqrt[3]{\frac{x-b}{x-a}}\sum_{p=0}^{p=3n}(-1)^{p+1}\binom{3n}{p}\frac{1}{6n-3p+1}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-2n}.$$

Последняя формула имеет значение для всякого целого $n\geqslant 0$, первая же не даёт выражения интеграла при $n=0$ и для соответствующего интеграла той же подстановкой $\frac{x-a}{x-b}=z^3$ находим:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)}}=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x-a}-\sqrt[3]{x-b}\right)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{x-b}}.$$

Принимая во второй формуле $n=0$, получаем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{[(x-a)^2(x-b)]^2}}=-\frac{3}{b-a}\sqrt[3]{\frac{x-b}{x-a}}.$$

IX) Для интеграла $\int F\{x, \sqrt[n]{(x-a)^k(x-b)^{ln-k}}\}\,dx$ имеем $\frac{k+(ln-k)}{n}$ равным целому числу, так что этот интеграл подстановкой $\frac{x-a}{x-b}=z^n$ приводится к интегралу рационального алгебраического выражения,

$$n(a-b)\int F\left\{\frac{x-bz^n}{1-z^n},\ z^k,\left(\frac{a-b}{1-z^n}\right)^l\right\}\frac{z^{n-1}}{(1-z^n)^2}\,dz,$$

и, следовательно, теоретически вычисляется в конечном виде.

Заменяя в формуле (114) k на $k(mn+s)$ и l на $(n-k)(mn+s)$, где числа k, m, n, s — целые, так что

$$\frac{k(mn+s)+(n-k)(mn+s)}{n}$$

равно целому числу $(mn+s)$, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{[(x-a)^k (x-b)^{n-k}]^{mn+s}}} =$$

$$= \frac{n}{(a-b)^{mn+s-1}} \sqrt[n]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{ks-n}} \sum_{0}^{mn+s-2} (-1)^{p+1} \binom{mn+s-2}{p} \times$$

$$\times \frac{1}{k(mn+s)-n(p+1)} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-mk}. \quad (124)$$

На основании этой формулы можно было бы получить выражения многих видов интегралов, относящихся к классу псевдоэллиптических, как например,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{[(x-a)^4 (x-b)]^{5m+1}}} =$$

$$= \frac{5}{(a-b)^{5m}} \sqrt[5]{\frac{x-a}{x-b}} \sum_{0}^{5m-1} (-1)^{p+1} \binom{5m-1}{p} \frac{1}{20m-5p-1} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-4m},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{[(x-a)^4 (x-b)]^{5m+2}}} =$$

$$= \frac{5}{(a-b)^{5m+1}} \sqrt[5]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^3} \sum_{0}^{5m} (-1)^{p+1} \binom{5m}{p} \frac{1}{20m-5p+3} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-4m},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{[(x-a)^4 (x-b)]^{5m+3}}} =$$

$$= \frac{5}{(a-b)^{5m+2}} \sqrt[5]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^7} \sum_{0}^{5m=1} (-1)^{p+1} \binom{5m+1}{p} \frac{1}{20m-5p+7} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-4m},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{[(x-a)^4 (x-b)]^{5m+4}}} =$$

$$= \frac{5}{(a-b)^{5m+3}} \sqrt[5]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{11}} \sum_{0}^{5m+2} (-1)^{p+1} \binom{5m+2}{p} \frac{1}{20m-5p+11} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-4m},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{[(x-a)^3 (x-b)^2]^{5m+1}}} =$$

$$= \frac{5}{(a-b)^{5m}} \sqrt[5]{\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2} \sum_{0}^{5m-1} (-1)^{p+1} \binom{5m-1}{p} \frac{1}{15m-5p-2} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-3m},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{[(x-a)^3(x-b)^2]^{5m+2}}} =$$
$$= \frac{5}{(a-b)^{5m+1}} \sqrt[5]{\frac{x-b}{x-a}} \sum_{0}^{5m} (-1)^{p+1} \binom{5m}{p} \frac{1}{15m-5p+1} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-3m},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{[(x-a)^3(x-b)^2]^{5m+3}}} =$$
$$= \frac{5}{(a-b)^{5m+2}} \sqrt[5]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^4} \sum_{0}^{5m+1} (-1)^{p+1} \binom{5m+1}{p} \frac{1}{15m-5p+4} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-3m},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{[(x-a)^3(x-b)^2]^{5m+4}}} =$$
$$= \frac{5m}{(a-b)^{5m+3}} \sqrt[5]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^7} \sum_{0}^{5m+2} (-1)^{p+1} \binom{5m+2}{p} \frac{1}{15m-5p+7} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-3m},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[8]{[(x-a)^5(x-b)^3]^{5m+7}}} =$$
$$= \frac{8}{(a-b)^{8m+6}} \sqrt[8]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{27}} \sum_{0}^{8m+5} (-1)^{p+1} \binom{8m+5}{p} \frac{1}{40m-8p+27} \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{p-5m}.$$

Примеры

16) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \qquad \left(\text{подст. } \frac{x+1}{x-1} = z^3\right).$$

17) $$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}.$$

18) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^7}} = \frac{3}{16}\,\frac{3x-5}{x-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

19) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}} = -\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right) -$$
$$-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x-1}}.$$

20) $$\int \left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3(x-2)}} =$$
$$= -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} + \ln\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}} - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2x+2}{x-2}}.$$

21) $$\int \sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}\,\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)} + \frac{1}{6}\ln x -$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}\right) - \frac{3}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x+1}} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x+1}}.$$

22) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x-3)^5}}=\frac{(x-1)(x^2-2x-5)}{24\sqrt{(x^2-2x-3)^3}}$.

23) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^3-5x^2+3x+9}}=\frac{1}{2}\ln\frac{2-\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}$.

Указание. $x^3-5x^2+3x+9=(x-3)^2(x+1)$.

24) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x^3-5x^2+3x+9)^3}}=\frac{15x^2-70x+43}{256(x-3)^2\sqrt{x+1}}+\frac{15}{1024}\ln\frac{2-\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}$.

25) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-5x^2+3x+9}}=-\frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{x+1})+$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x+1}}.$$

26) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x^3-5x^2+3x+9)^2}}=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-3}}$.

27) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x^3-5x^2+3x+9)^4}}=\frac{3}{320}\,\frac{9x^2-42x+29}{(x-3)\sqrt[3]{x^3-5x^2+3x+9}}$.

§ 3. Подстановки Эйлера для интегралов вида $\int F\{x, \sqrt{a+2bx+cx^2}\}\,dx$

Интеграл вида $\int F\{x, \sqrt{a+2bx+cx^2}\}\,dx$, где F—знак рациональной функции, a, b и c—постоянные, положительные или отрицательные величины, приводится к рациональной форме следующими подстановками Эйлера.

Первая подстановка, если $c>0$. $\sqrt{a+2bx+cx^2}=z\mp x\sqrt{c}$. Определив на основании этой подстановки

$$x=\frac{z^2-a}{2(b\pm z\sqrt{c})},\quad \sqrt{a+2bx+cx^2}=\frac{z^2\sqrt{c}\pm 2bz+a\sqrt{c}}{2(b\pm z\sqrt{c})},$$

$$dx=\frac{z^2\sqrt{c}\pm 2bz+a\sqrt{c}}{2(b\pm z\sqrt{c})^2}\,dz,$$

приходим к интегралу рационального выражения:

$$\frac{1}{2}\int F\left\{\frac{z^2-a}{2(b\pm z\sqrt{c})},\ \frac{z^2\sqrt{c}\pm 2bz+a\sqrt{c}}{2(b\pm z\sqrt{c})}\right\}\frac{z^2\sqrt{c}\pm 2bz+a\sqrt{c}}{(b\pm z\sqrt{c})^2}\,dz.$$

По вычислении этого интеграла возвращаемся для результата к прежнему переменному x на основании равенства

$$z=\sqrt{a+2bx+cx^2}\pm x\sqrt{c}.$$

В равной мере возможна также подстановка

$$\sqrt{a+2bx+cx^2}=x\sqrt{c}-z.$$

Все три варианта подстановки могут дать для интеграла отличающиеся друг от друга выражения, однако, разность каждых двух из них всегда представляет постоянную величину.

Вторая подстановка, если $a>0$. $\sqrt{a+2bx+cx^2}=\sqrt{a}\mp xz$. Определив на основании этого равенства x, $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ и dx, приходим к интегралу рационального выражения

$$\mp 2\int F\left\{\frac{2(b\pm z\sqrt{a})}{z^2-c}, -\frac{c\sqrt{a}\mp 2bz\pm z^2\sqrt{a}}{z^2-c}\right\}\frac{c\sqrt{a}\pm 2bz+z^2\sqrt{a}}{(z^2-c)^2}dz.$$

Для обратной подстановки имеем $z=\pm\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x}$.

Одинаково возможна также подстановка $\sqrt{a+2bx+cx^2}=xz-\sqrt{a}$.

Третья подстановка. $\sqrt{a+2bx+cx^2}=(x-\beta)z$, где β—один из корней трёхчлена $(a+2bx+cx^2)$. Представив $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ в виде $\sqrt{c}\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}$, где α—другой корень, имеем отсюда $c(x-\alpha)=(x-\beta)z^2$ и после этого, выразив x, $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ и dx, приводим рассматриваемый интеграл к интегралу рационального выражения

$$2c(\alpha-\beta)\int F\left\{\frac{\beta z^2-c\alpha}{z^2-c}, \frac{c(\beta-\alpha)z}{z^2-c}\right\}\frac{z\,dz}{(z^2-c)^2}.$$

Для возвращения к прежней переменной имеем равенство $z=\sqrt{\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$. Подстановка применяется при вещественных корнях трёхчлена $(a+2bx+cx^2)$; при мнимых корнях приходим к интегралу мнимого выражения.

Согласно разделу IX, § 2, эта подстановка представляет частный случай подстановки $\frac{x-a}{x-b}=z^n$, применяемый для рационализации интегралов вида § 2.

Первая подстановка при $c>0$ независимо от того, вещественные ли или мнимые корни имеет трёхчлен $a+2bx+cx^2$, даёт для интеграла вещественное выражение; то же самое — вторая подстановка при $a>0$.

Если $a<0$ и $c<0$, то и первая и вторая подстановки приводят к мнимому результату и в этом случае пользуемся третьей подстановкой. При $b^2-ac>0$ корни α и β трёхчлена — вещественные, и для интеграла получаем вещественное выражение. Если же при том же условии $a<0$ и $c<0$ имеем также и $b^2-ac<0$, то трёхчлен имеет мнимые корни, и, следовательно, все три подстановки дают для интеграла мнимые выражения. Нетрудно видеть, что в этом случае имеем

$$\sqrt{-a+2bx-cx^2}=\sqrt{-\frac{1}{c}\left[(ac-b^2)+(cx-b)^2\right]},$$

так что радикал является мнимым для всех значений переменного x.

Интеграл рассматриваемого вида, как видим, приводится какой-либо из подстановок Эйлера к интегралу рационального выражения и, следовательно, *теоретически всегда может быть выражен в конечном виде через алгебраические и логарифмические функции*.

В основание интегрирования, очевидно, достаточно принять те же формулы, что и для рациональных алгебраических выражений.

§ 4. Геометрическая интерпретация подстановок Эйлера. Возможность бесчисленного множества других алгебраических подстановок

Даём геометрическую интерпретацию подстановок Эйлера, которая вместе с тем приводит к некоторому важному выводу.

Для приведения к рациональной форме интеграла

$$\int F\{x, \sqrt{a+bx+cx^2}\}\,dx$$

достаточно выразить рационально переменную x и иррациональность $\sqrt{a+bx+cx^2}$ через какой-либо параметр z.

Имея в виду эту цель, рассмотрим коническое сечение $y=\sqrt{a+bx+cx^2}$, или $y^2=a+bx+cx^2$. Взяв на этом сечении какую-либо произвольную точку M_0 с координатами (x_0, y_0), проведём через эту точку секущую M_0M. Обозначая текущие координаты точки M через (x, y), можем уравнение секущей написать в виде $y-y_0=z(x-x_0)$. Понятно, что переменные координаты x и y этого уравнения выражаются рационально через z.

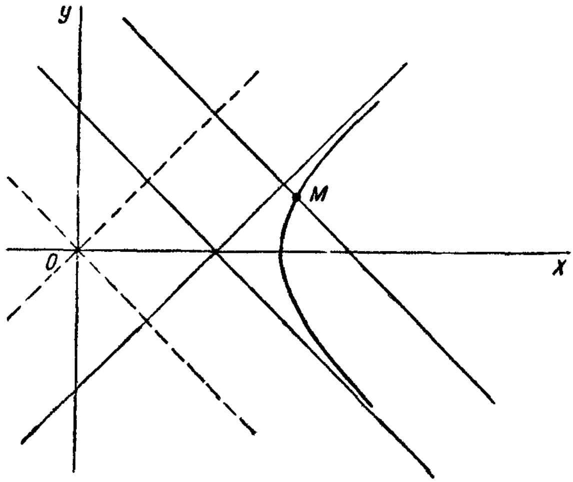
Так как секущая M_0M пересекает коническое сечение только в одной переменной точке M, то координаты x и y этой точки, являясь в то же время переменными линейного уравнения секущей, должны также рационально выражаться через z, и, следовательно, функции x и $y=\sqrt{a+bx+cx^2}$ могут быть рационально выражены через параметр z.

Рассмотрим такое построение для трёх подстановок Эйлера.

1) Первой подстановкой Эйлера пользуемся при $c>0$. Подстановка выражается равенством

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=z\mp x\sqrt{c} \quad \text{или} \quad y=z\mp x\sqrt{c}.$$

При $c>0$ уравнение $y^2=a+bx+cx^2$ представляет гиперболу, асимптоты которой параллельны прямым $y=\pm x\sqrt{c}$. При переменном z уравнение $y=z\mp x\sqrt{c}$ представляет пучок прямых, образуемых перемещением прямой параллельно асимптотам, т. е. прямых, проходящих через бесконечно удалённую точку M_0 гиперболы и параллельных асимптотам. Каждая же из этих прямых пересекает гиперболу только в одной точке M,



Фиг. 3.

координаты которой, очевидно, выражаются рационально через параметр z.

2) В случае $a>0$ интеграл $\int F\{x, \sqrt{a+bx+cx^2}\}\,dx$, приводится к рациональной форме второй подстановкой Эйлера

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{a}\mp xz \quad \text{или} \quad y=\mp xz+\sqrt{a}.$$

При переменном z последнее уравнение представляет пучок прямых, проходящих через точку M_0 с координатами $(0, \sqrt{a})$. Эта точка принадлежит и коническому сечению $y=\sqrt{a+bx+cx^2}$, соответствующая секущая M_0M пересекает коническое сечение только в одной переменной точке M, и её координаты x и y, очевидно, рационально выражаются через параметр z.

3) При третьей подстановке Эйлера, выражающейся равенством

$$y=\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{c}\,\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}=z(x-\beta),$$

уравнение $y=z(x-\beta)$ выражает прямую, проходящую через вершину эллипса $M_0(\beta, 0)$ и пересекающую эллипс в переменной точке M с координатами x и y. Понятно, что эти координаты также выражаются рационально через z.

Во всех случаях при проведении секущей начальная точка M_0 выбиралась произвольно, и только для интерпретации подстановок Эйлера ей давалось определённое положение. Легко видеть, что, принимая для точки M_0 какие-либо другие положения, мы могли бы получить бесчисленное множество секущих, для каждой из которых текущие координаты x и y выражались бы рационально через параметр z. Отсюда следует, что интеграл $\int F\{x, \sqrt{a+bx+cx^2}\}\,dx$ может быть приведён к рациональной форме бесчисленным множеством подстановок, и подстановки Эйлера представляют лишь отдельные, выделяющиеся своей простотой, виды бесчисленного множества возможных подстановок.

Приводим ещё две, практически удобные, алгебраические подстановки.

1) В случае положительного c, полагая

$$\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2} = \sqrt{(ac-b^2)+(cx+b)^2} = (cx+b)+z,$$

находим отсюда

$$cx+b = \frac{ac-b^2-z^2}{2z}, \quad x = \frac{ac-b^2-2bz-z^2}{2cz},$$

$$\sqrt{a+2bx+cx^2} = \frac{ac-b^2+z^2}{2\sqrt{c}\,z}, \quad dx = -\frac{ac-b^2+z^2}{2cz^2}\,dz,$$

и после этого приводим интеграл к виду

$$-\frac{1}{2c}\int F\left\{\frac{ac-b^2-2bz-z^2}{2cz}, \frac{ac-b^2+z^2}{2\sqrt{c}\,z}\right\}\frac{ac-b^2+z^2}{z^2}\,dz.$$

Для обратной подстановки по выполнении интегрирования имеем:

$$z = \sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}-(cx+b).$$

2) В случае отрицательного c пользуемся подстановкой

$$\sqrt{-c}\sqrt{a+2bx+cx^2} = \sqrt{b^2-ac-(cx+b)^2} = \sqrt{b^2-ac}+(cx+b)z.$$

Из этого равенства имеем:

$$cx+b = -\frac{2z\sqrt{b^2-ac}}{1+z^2}, \quad x = -\frac{b+2z\sqrt{b^2-ac}+bz^2}{c(1+z^2)},$$

$$\sqrt{a+2bx+cx^2} = \frac{\sqrt{b^2-ac}\,(1-z^2)}{\sqrt{-c}\,(1+z^2)}, \quad dx = \frac{2\sqrt{b^2-ac}\,(z^2-1)}{c(1+z^2)^2}\,dz,$$

и приводим рассматриваемый интеграл к интегралу рациональной функции

$$2\frac{\sqrt{b^2-ac}}{c}\int F\left\{-\frac{b+2z\sqrt{b^2-ac}+bz^2}{c(1+z^2)}, \frac{\sqrt{b^2-ac}\,(1-z^2)}{\sqrt{-c}\,(1+z^2)}\right\}\frac{z^2-1}{(1+z^2)^2}\,dz.$$

Для обратной подстановки имеем:

$$z=\frac{\sqrt{-c}\sqrt{a+2bx+cx^2}-\sqrt{b^2-ac}}{cx+b}.$$

В случае отрицательного a так же, как в предыдущем параграфе, при $b^2-ac>0$ получаем для интеграла вещественное выражение, если же $b^2-ac<0$, то — мнимое, и в этом случае радикал $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ является мнимым для всякого x.

§ 5. Тригонометрические подстановки

В целях рационализации и вычисления интеграла

$$\int F\{x,\sqrt{a+2bx+cx^2}\}\,dx$$

принимаются также следующие тригонометрические подстановки.

1) В случае положительного c и $ac-b^2>0$ имеем:

$$\sqrt{a+2bx+cx^2}=\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{(ac-b^2)+(cx+b)^2}.$$

Полагая $cx+b=\sqrt{ac-b^2}\operatorname{tg}\varphi$, находим

$$x=\frac{\sqrt{ac-b^2}\operatorname{tg}\varphi-b}{c},\quad \sqrt{a+2bx+cx^2}=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{c}}\sec\varphi,$$

$$dx=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{c}\sec^2\varphi\,d\varphi$$

и приводим вычисляемый интеграл к интегралу рационального тригонометрического выражения

$$\frac{\sqrt{ac-b^2}}{c}\int F\left\{\frac{\sqrt{ac-b^2}\operatorname{tg}\varphi-b}{c},\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{c}}\sec\varphi\right\}\sec^2\varphi\,d\varphi.$$

Найдя выражение этого интеграла, возвращаемся для результата к прежней переменной x на основании равенств

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{cx+b}{\sqrt{ac-b^2}},\quad \sec\varphi=\frac{\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{\sqrt{ac-b^2}},\ \ldots,\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{cx+b}{\sqrt{ac-b^2}}.$$

2) В случае положительного c и $ac-b^2<0$, пользуясь подстановкой $cx+b=\sqrt{b^2-ac}\sec\varphi$, находим:

$$x=\frac{\sqrt{b^2-ac}\sec\varphi-b}{c},\quad \sqrt{a+2bx+cx^2}=\frac{\sqrt{b^2-ac}}{\sqrt{c}}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$dx=\frac{\sqrt{b^2-ac}}{c}\operatorname{tg}\varphi\sec\varphi\,d\varphi$$

и приводим интеграл также к интегралу рационального выражения

$$\frac{\sqrt{b^2-ac}}{c}\int F\left\{\frac{\sqrt{b^2-ac}\sec\varphi-b}{c},\quad \frac{\sqrt{b^2-ac}}{\sqrt{c}}\operatorname{tg}\varphi\right\}\operatorname{tg}\varphi\sec\varphi\,d\varphi.$$

Для обратной подстановки имеем:

$$\sec\varphi=\frac{cx+b}{\sqrt{b^2-ac}},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{\sqrt{b^2-ac}},\ \ldots,$$

$$\varphi=\operatorname{arcsec}\frac{cx+b}{\sqrt{b^2-ac}}.$$

3) В случае отрицательного c имеем

$$\sqrt{a+2bx+cx^2}=\frac{1}{\sqrt{-c}}\sqrt{(b^2-ac)-(cx-b)^2}.$$

Если a тоже отрицательное и $b^2-ac<0$, то $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ для всякого x является мнимым выражением. Если же $b^2-ac>0$, то подстановкой $cx-b=\sqrt{b^2-ac}\sin\varphi$, на основании которой

$$x=\frac{\sqrt{b^2-ac}\sin\varphi+b}{c},\qquad \sqrt{a+2bx+cx^2}=\frac{\sqrt{b^2-ac}}{\sqrt{-c}}\cos\varphi,$$

$$dx=\frac{\sqrt{b^2-ac}}{c}\cos\varphi\,d\varphi,$$

приводим интеграл к рациональной тригонометрической форме

$$\frac{\sqrt{b^2-ac}}{c}\int F\left\{\frac{\sqrt{b^2-ac}\sin\varphi+b}{c},\quad \frac{\sqrt{b^2-ac}}{\sqrt{-c}}\cos\varphi\right\}\cos\varphi\,d\varphi.$$

Для обратной подстановки имеем равенства

$$\sin\varphi=\frac{cx-b}{\sqrt{b^2-ac}},\quad \cos\varphi=\frac{\sqrt{-c}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{\sqrt{b^2-ac}},\ \ldots,$$

$$\varphi=\arcsin\frac{cx-b}{\sqrt{b^2-ac}}.$$

Вполне понятно, что в указанных трёх случаях можно пользоваться также подстановками

1) $cx+b=\sqrt{ac-b^2}\operatorname{ctg}\varphi$,

2) $cx+b=\sqrt{b^2-ac}\operatorname{cosec}\varphi$,

3) $cx-b=\sqrt{b^2-ac}\cos\varphi$.

§ 6. Основные интегралы вида $\int F\{x, \sqrt{a+2bx+cx^2}\}\,dx$

$$\text{I)}\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) \tag{125}$$

или

$$= -\ln(x - \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

или

$$= -\ln(\sqrt{x^2 \pm a^2} - x),$$

или же

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{x - \sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

Полагая $\sqrt{x^2 \pm a^2} = z$, так что $\frac{dx}{z} = \frac{dz}{x}$, имеем:

$$1)\ \frac{dx}{z} = \frac{d(x+z)}{x+z},\quad 2)\ \frac{dx}{z} = -\frac{d(x-z)}{x-z},\quad 3)\ \frac{dx}{z} = -\frac{d(z-x)}{z-x}.$$

Интегрируя, получаем приведённые выше выражения. К тем же результатам приходим, пользуясь первой подстановкой Эйлера

$$1)\ \sqrt{x^2 \pm a^2} = z - x,$$
$$2)\ \sqrt{x^2 \pm a^2} = x - z,$$
$$3)\ \sqrt{x^2 \pm a^2} = z + x,$$

или тригонометрическими подстановками $x = a \operatorname{tg} \varphi$ для верхнего знака и $x = a \sec \varphi$ для нижнего

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} = 2 \operatorname{arctg} \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{126}$$

Первое выражение для интеграла получаем, обращая формулу дифференцирования $d \arcsin \frac{x}{a} = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, или же подстановкой $x = a \sin \varphi$, второе — пользуясь второй подстановкой Эйлера; все три легко получаются одно из другого по формулам для круговых функций.

Представив интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ в виде $\frac{1}{i} \int \frac{dxi}{\sqrt{(xi)^2 + a^2}}$ и выражая его по формуле (6а), приходим к мнимому выражению $\frac{1}{2i} \ln \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + xi}{\sqrt{a^2 - x^2} - xi}$. На основании формулы (24), устанавливающей связь между логарифмическими и круговыми функциями, от полученного мнимого логарифмического результата легко переходим к круговой функции $\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Таким образом, круговые функции и в данном случае заступают место мнимых логарифмических, аналогично тому, как это имелось для интеграла $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ элементарной рациональной дроби.

II) Представив интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx \pm cx^2}}$ в виде

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{d(cx+b)}{\sqrt{(cx+b)^2+(ac-b^2)}}$$

для верхнего знака и в виде

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{d(cx-b)}{\sqrt{(ac+b^2)-(cx-b)^2}}$$

для нижнего, на основании формул (125) и (126) получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left(cx+b+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}\right) \quad (c>0), \tag{127}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{cx-b}{\sqrt{ac+b^2}} \quad (c>0). \tag{128}$$

Выражение, полученное для последнего интеграла, вещественно при $ac+b^2>0$. Если же $ac+b^2<0$, что возможно в случае $a<0$, то результат интегрирования получается в мнимом виде. Нетрудно видеть, что интегрируемое выражение является тогда мнимым для всякого значения переменного x:

$$\int \frac{Cx+B}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \frac{C}{c}\sqrt{a+2bx+cx^2} + \\ + \frac{Bc-Cb}{c\sqrt{c}} \ln\left(cx+b+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}\right) \quad (c>0), \tag{129}$$

$$\int \frac{Cx+B}{\sqrt{a+2bx-cx^2}}\,dx = \\ = -\frac{C}{c}\sqrt{a+2bx-cx^2} + \frac{Bc-Cb}{c\sqrt{c}} \arcsin \frac{cx-b}{\sqrt{ac+b^2}}. \tag{130}$$

III) Интегрированием по частям или тригонометрическими подстановками $x = a \operatorname{tg} \varphi$, $x = a \sec \varphi$ и $x = a \sin \varphi$ получаем:

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right), \tag{131}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, \tag{132}$$

$$\int \sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx = \frac{1}{2c}(cx+b)\sqrt{a+2bx+cx^2} + \\ + \frac{ac-b^2}{2c\sqrt{c}}\ln(cx+b+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}) \qquad (c>0), \qquad (133)$$

$$\int \sqrt{a+2bx-cx^2}\,dx = \frac{1}{2c}(cx-b)\sqrt{a+2bx-cx^2} + \\ + \frac{ac-b^2}{2c\sqrt{c}}\arcsin\frac{cx-b}{\sqrt{ac+b^2}} \qquad (c>0). \qquad (134)$$

IV) Подстановкой $x = \frac{1}{z}$ находим:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2\pm x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2\pm x^2}}{x}, \qquad (135)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}, \qquad (136)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{a+bx+\sqrt{a}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x}\ (a>0), \quad (137)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{-a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{bx-a}{x\sqrt{ac+b^2}}. \qquad (a>0). \qquad (138)$$

При отрицательном c, если $ac+b^2<0$, радикал

$$\sqrt{-a+2bx+cx^2}$$

является мнимым для всякого x и, соответственно этому, для интеграла имеем мнимое выражение.

V) Подстановкой $x \pm p = \frac{1}{z}$ для следующих двух интегралов находим:

$$\int \frac{dx}{(x\pm p)\sqrt{x^2+r^2}} = -\frac{1}{\sqrt{p^2+r^2}}\ln\frac{r^2 \mp px + \sqrt{p^2+r^2}\sqrt{x^2+r^2}}{x\pm p} \qquad (139)$$

или

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2+r^2}}\ln\frac{r^2\mp px - \sqrt{p^2+r^2}\sqrt{x^2+r^2}}{x\pm p};$$

$$\int \frac{dx}{(x\pm p)\sqrt{x^2-r^2}} = \frac{1}{\sqrt{p^2-r^2}}\ln\frac{r^2 \pm px+\sqrt{p^2-r^2}\sqrt{x^2-r^2}}{x\pm p},$$
$$\text{если } p^2 > r^2, \qquad (140)$$

и

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{r^2-p^2}\sqrt{x^2-r^2}}{r^2\pm px}$$

или

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2-p^2}}\arccos\frac{r^2\pm px}{r(x\pm p)}, \text{ если } p^2 < r^2;$$

Подстановкой $p \pm x = \frac{1}{z}$, находим:

$$\int \frac{dx}{(p \pm x)\sqrt{r^2 - x^2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{r^2 - p^2}} \ln \frac{r^2 \pm px + \sqrt{r^2 - p^2}\sqrt{r^2 - x^2}}{p \pm x} \tag{141}$$

если $p^2 < r^2$,

и

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2 - r^2}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{p^2 - r^2}\sqrt{r^2 - x^2}}{px \pm r^2}$$

или

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2 - r^2}} \arcsin \frac{px \pm r^2}{r(p \pm x)},$$

если $p^2 > r^2$.

При $p^2 = r^2$ для двух последних интегралов имеем интегралы

$$\int \frac{dx}{(x \pm r)\sqrt{x^2 - r^2}} = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\frac{x \mp r}{x \pm r}}$$

и

$$\int \frac{dx}{(r \pm x)\sqrt{r^2 - x^2}} = \mp \frac{1}{r} \sqrt{\frac{r \mp x}{r \pm x}}.$$

Тригонометрические подстановки, $x = r \operatorname{tg} \varphi$ для интеграла (139), $x = r \sec \varphi$ для интеграла (140) и $x = r \cos \varphi$ для интеграла (141) приводят, соответственно, к интегралам

$$\int \frac{d\varphi}{r \sin \varphi \pm p \cos \varphi}, \quad \int \frac{d\varphi}{r \pm p \cos \varphi} \quad \text{и} \quad -\int \frac{d\varphi}{p \pm r \cos \varphi},$$

относительно которых см. § 9 гл. V.

VI) Применяя подстановку $x \pm p = \frac{1}{z}$, находим:

$$\int \frac{dx}{(x \pm p)\sqrt{a + 2bx + cx^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a \mp 2bp + cp^2}} \ln \left\{ \frac{\sqrt{a + 2bx + cx^2} + \sqrt{a \mp 2bp + cp^2}}{x \pm p} + \right.$$

$$\left. + \frac{b \mp cp}{\sqrt{a \mp 2bp + cp^2}} \right\}, \tag{142}$$

если $a \mp 2bp + cp^2 > 0$,

$$= \frac{1}{\sqrt{-(a \mp 2bp + cp^2)}} \arcsin \frac{(b \mp cp)(x \pm p) + (a \mp 2bp + cp^2)}{(x \pm p)\sqrt{b^2 - ac}},$$

если $a \mp 2bp + cp^2 < 0$, и

$$= -\frac{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}{(b \mp cp)(x \pm p)}, \quad \text{если} \quad a \mp 2bp + cp^2 = 0.$$

Представляя интеграл $\int \frac{dx}{(x^2-p^2)\sqrt{x^2+r^2}}$ в виде разности двух интегралов $\frac{1}{2p}\left\{\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{x^2+r^2}} - \int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{x^2+r^2}}\right\}$ и пользуясь результатами (139), получаем:

$$\int \frac{dx}{(x^2-p^2)\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{1}{2p\sqrt{p^2+r^2}} \ln \frac{x\sqrt{p^2+r^2}-p\sqrt{x^2+r^2}}{x\sqrt{p^2+r^2}+p\sqrt{x^2+r^2}} \tag{143}$$

или

$$= \frac{1}{p\sqrt{p^2+r^2}} \ln \frac{x\sqrt{p^2+r^2}-p\sqrt{x^2+r^2}}{\sqrt{x^2-p^2}}.$$

Тригонометрической подстановкой $x = r\operatorname{tg}\varphi$ приходим к интегралу $\int \frac{\sec\varphi\, d\varphi}{r^2\operatorname{tg}^2\varphi - p^2} = \int \frac{d\sin\varphi}{(r^2+p^2)\sin^2\varphi - p^2}$ и, вычисляя последний, получаем для интеграла такое же выражение.

Подстановкой $x = r\operatorname{tg}\varphi$ также получаем:

$$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{1}{2p\sqrt{p^2-r^2}} \ln \frac{x\sqrt{p^2-r^2}+p\sqrt{x^2+r^2}}{x\sqrt{p^2-r^2}-p\sqrt{x^2+r^2}} \tag{144}$$

или

$$= \frac{1}{p\sqrt{p^2-r^2}} \ln \frac{x\sqrt{p^2-r^2}+p\sqrt{x^2+r^2}}{\sqrt{x^2+p^2}}, \quad \text{если } p^2 > r^2,$$

и

$$= \frac{1}{p\sqrt{r^2-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{r^2-p^2}}{p\sqrt{x^2+r^2}}, \quad \text{если } p^2 < r^2.$$

При $p^2 = r^2$ имеем интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+r^2)\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{x}{r^2\sqrt{x^2+r^2}}$.

VII) Подстановкой $x = r\sec\varphi$ или для первого интеграла, на основании результатов (140), находим:

$$\int \frac{dx}{(x^2-p^2)\sqrt{x^2-r^2}} = \frac{1}{2p\sqrt{p^2-r^2}} \ln \frac{x\sqrt{p^2-r^2}-p\sqrt{x^2-r^2}}{x\sqrt{p^2-r^2}+p\sqrt{x^2-r^2}} \tag{145}$$

или

$$= \frac{1}{p\sqrt{p^2-r^2}} \ln \frac{x\sqrt{p^2-r^2}-p\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-p^2}}, \quad \text{если } p^2 > r^2,$$

и

$$= \frac{1}{p\sqrt{r^2-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{p\sqrt{x^2-r^2}}{x\sqrt{r^2-p^2}}$$

или

$$= \frac{1}{p\sqrt{r^2-p^2}} \arcsin \frac{p\sqrt{x^2-r^2}}{r\sqrt{x^2-p^2}}, \quad \text{если } p^2 < r^2.$$

В случае $p^2=r^2$ имеем интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2-r^2)\sqrt{x^2-r^2}} = -\frac{x}{r^2\sqrt{x^2-r^2}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{x^2-r^2}} = \frac{1}{2p\sqrt{p^2+r^2}} \ln \frac{x\sqrt{p^2+r^2}+p\sqrt{x^2-r^2}}{x\sqrt{p^2+r^2}-p\sqrt{x^2-r^2}}, \tag{146}$$

или

$$= \frac{1}{p\sqrt{p^2+r^2}} \ln \frac{x\sqrt{p^2+r^2}+p\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2+p^2}}.$$

VIII) Подстановкой $x=r\sin\varphi$ или для первого интеграла, на основании (141), получаем:

$$\int \frac{dx}{(p^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{1}{2p\sqrt{r^2-p^2}} \ln \frac{x\sqrt{r^2-p^2}+p\sqrt{r^2-x^2}}{x\sqrt{r^2-p^2}-p\sqrt{r^2-x^2}} \tag{147}$$

или

$$= \frac{1}{p\sqrt{r^2-p^2}} \ln \frac{x\sqrt{r^2-p^2}+p\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{x^2-p^2}}, \text{если } p^2<r^2,$$

и

$$= \frac{1}{p\sqrt{p^2-r^2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{p^2-r^2}}{p\sqrt{r^2-x^2}}$$

или

$$= \frac{1}{p\sqrt{p^2-r^2}} \arcsin \frac{x\sqrt{p^2-r^2}}{r\sqrt{p^2-x^2}}, \text{ если } p^2>r^2.$$

При $p^2=r^2$ имеем интеграл $\int \frac{dx}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{x}{r^2\sqrt{r^2-x^2}}$,

$$\int \frac{dx}{(p^2+x^2)\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{1}{p\sqrt{p^2+r^2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{p^2+r^2}}{p\sqrt{r^2-x^2}}, \tag{148}$$

IX) $$\int \frac{x\,dx}{(x^2\pm p^2)\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{1}{2\sqrt{r^2\mp p^2}} \ln \frac{\sqrt{x^2+r^2}-\sqrt{r^2\mp p^2}}{\sqrt{x^2+r^2}+\sqrt{r^2\mp p^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2\mp p^2}} \ln \frac{\sqrt{x^2+r^2}-\sqrt{r^2\mp p^2}}{\sqrt{x^2\mp p^2}} \tag{149}$$

для верхнего знака, если $p^2<r^2$, и для нижнего знака, и $= \frac{1}{\sqrt{p^2-r^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+r^2}}{\sqrt{p^2-r^2}}$ для верхнего знака, если $p^2>r^2$.

В случае $p^2=r^2$ при верхнем знаке имеем интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+r^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} \quad (\text{подст. } x=r\operatorname{tg}\varphi \text{ или } x^2+r^2=z^2).$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 \pm p^2)\sqrt{x^2-r^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 \pm p^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{r^2 \pm p^2}}$$

для верхнего знака и для нижнего, если $p^2 < r^2$, и (150)

$$= \frac{1}{2\sqrt{p^2-r^2}} \ln \frac{\sqrt{x^2-r^2}-\sqrt{p^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}+\sqrt{p^2-r^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2-r^2}} \ln \frac{\sqrt{x^2-r^2}-\sqrt{p^2-r^2}}{\sqrt{x^2-p^2}}$$

для нижнего знака, если $p^2 > r^2$.

В случае $p^2 = r^2$ при нижнем знаке имеем интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-r^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-r^2}} \quad (\text{подст. } x = \sec\varphi \text{ или } x^2 - r^2 = z^2).$$

$$\int \frac{x\,dx}{(p^2 \pm x^2)\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{r^2 \pm p^2}} \ln \frac{\sqrt{r^2-x^2} \mp \sqrt{r^2 \pm p^2}}{\sqrt{r^2-x^2} \pm \sqrt{r^2 \pm p^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2 \pm p^2}} \ln \frac{\sqrt{r^2-x^2} \mp \sqrt{r^2 \pm p^2}}{\sqrt{x^2 \pm p^2}} \tag{151}$$

для верхнего знака и для нижнего, если $p^2 < r^2$, и

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2-r^2}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{p^2-x^2}}$$

для нижнего знака, если $p^2 > r^2$.

В случае $p^2 = r^2$ при нижнем знаке имеем интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}} \quad (\text{подст. } x = r\sin\varphi \text{ или } r^2 - x^2 = z^2).$$

X) Интеграл $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(a_1+2b_1x+c_1x^2)\sqrt{a+2bx+cx^2}}$.

Если для рассматриваемого интеграла $a_1c_1 < b_1^2$, то корни α и β трёхчлена $a_1 + 2b_1x + c_1x^2$ вещественны, и интеграл легко приводится к разности двух интегралов:

$$\frac{A\alpha+B}{c_1(\alpha-\beta)} \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}} - \frac{A\beta+B}{c_1(\alpha-\beta)} \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{a+2x+cx^2}},$$

которые так же, как и интеграл (142), вычисляются подстановками $x - \alpha = \frac{1}{z}$ и $x - \beta = \frac{1}{z}$, или же прямо по формуле (142).

Если же $a_1c_1 > b_1^2$, то корни трёхчлена $a_1 + 2b_1x + c_1x^2$ мнимые и этот приём не годится. Какие-либо из приведённых ранее подстановок ведут к очень сложным вычислениям, и вычисление интеграла можно существенно облегчить, приведя интегрируемое выражение предварительно к виду

$$\frac{(A'y+B')\,dy}{(a_1'+c_1'y^2)\sqrt{a'+c'y^2}}.$$

Подстановка общего вида $x=\frac{my+n}{y+1}$, которой с этой целью пользуемся, основывается на следующем.

Трёхчлены $a_1+2b_1x+c_1x^2$ и $a+2bx+cx^2$ этой подстановкой приводятся к виду

$$\frac{a_1(y+1)^2+2b_1(y+1)(my+n)+c_1(my+n)^2}{(y+1)^2}$$

и

$$\frac{a(y+1)^2+2b(y+1)(my+n)+c(my+n)^2}{(y+1)^2}.$$

Выбирая и приравнивая нулю в том и другом выражениях коэффициенты при y, видим, что эти выражения принимают требуемый вид при

$$a_1+b_1(m+n)+c_1mn=0 \quad \text{и} \quad a+b(m+n)+cmn=0.$$

Следовательно, если определить m и n так, чтобы они удовлетворяли последним уравнениям, то подстановкой $x=\frac{my+n}{y+1}$ трёхчлены приводятся к виду

$$\frac{a_1'+c_1'y^2}{(y+1)^2} \quad \text{и} \quad \frac{a'+c'y^2}{(y+1)^2}.$$

Уравнения же эти, за исключением случая, когда $cb_1-bc_1=0$, дают определённые и при $a_1c_1>b_1^2$ (а этот случай именно и рассматривается), независимо от того, имеем ли мы $ac>b^2$ или $ac<b^2$, вещественные значения для m и n.

В случае $c_1b_1-bc_1=0$ имеем $\frac{c}{c_1}=\frac{b}{b_1}=k$ и для трёхчленов $\frac{1}{k}(a_1k+2bx+cx^2)$ и $(a+2bx+cx^2)$ пользуемся подстановкой $cx+b=y$, которая также приводит интегрируемое выражение к требуемому виду.

Возвращаясь к общему случаю $cb_1-bc_1\neq 0$, подстановкой $x=\frac{my+n}{y+1}$ приходим к интегралу

$$(m-n)\int\frac{(Am+B)y+(An+B)}{(a_1'+c_1'y^2)\sqrt{a'+c'y^2}}\,dy,$$

который можем представить в виде суммы двух интегралов

$$\frac{(m-n)(Am+B)}{c_1'}\int\frac{y\,dy}{\left(\frac{a_1'}{c_1'}+y^2\right)\sqrt{a'+c'y^2}}+$$
$$+\frac{(m-n)(An+B)}{c_1'}\int\frac{dy}{\left(\frac{a_1'}{c_1'}+y^2\right)\sqrt{a'+c'y^2}}.$$

Для этих интегралов можем положить $\frac{a_1'}{c_1'}=+p^2$, так как $a_1c_1>b^2$, и потому, как легко видеть, $a_1'c_1'>0$; коэффициенты a' и c' могут быть различных знаков, комбинации которых, если положить $\left|\frac{a_1'}{c_1'}\right|=r^2$, для $\sqrt{a'+c'y^2}$ могут дать $\sqrt{c'}\sqrt{y^2+r^2}$, $\sqrt{c'}\sqrt{y^2-r^2}$, или $\sqrt{c'}\sqrt{r^2-y^2}$.

Таким образом, в соответствии со знаками a' и c', первый интеграл является одним из видов (149)—(151) и второй—одним из видов (144), (146), (148). Для вычисления их пользуемся указанными подстановками или прямо находим их выражения по соответствующим формулам

$$\int\frac{dx}{(x^2-p^2)\sqrt{a+2bx+cx^2}}=$$
$$=\frac{1}{2p}\left\{\int\frac{dx}{(x-p)\sqrt{a+2bx+cx^2}}-\int\frac{dx}{(x+p)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\right\}. \qquad (152)$$

Для последних интегралов имеем выражения (142)

$$\int\frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{a+2bx+cx^2}}=$$
$$=\int\frac{(m-n)(z+1)\,dz}{[(m^2+p^2)z^2+(n^2+p^2)]\sqrt{\varphi(m)z^2+\varphi(n)}}, \qquad (153)$$

где $z=\frac{x-n}{m-x}$, $\varphi(x)=a+2bx+cx^2$, m и n — корни уравнений

$$\left\{\begin{aligned} cmn+b(m+n)+a&=0\\ mn+p^2&=0\end{aligned}\right\}.$$

Примеры

28) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4+3x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{\sqrt{41}}$.

Вторая подстановка Эйлера даёт $\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2-\sqrt{4+3x-2x^2}}{x\sqrt{2}}$, третья — $\sqrt{2}\,\mathrm{arcctg}\sqrt{\frac{3-\sqrt{41}-4x}{4x-3-\sqrt{41}}}$.

29) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}=\arcsin(x-2).$$

Третья подстановка Эйлера даёт $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$.

30) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-2-5x-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(6x+5).$$

31) $$\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{5}}{2\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{подст. } x=\sin\varphi).$$

32) $$\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}=\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\frac{x\sqrt{15}+\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-\sqrt{4x^2+1}}$$
$$\left(\text{подст. } x=\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi\right).$$

33) $$\int \frac{x\,dx}{(3-x^2)\sqrt{5-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{5-x^2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-3}} \quad (\text{подст. } \sqrt{x^2-3}=z).$$

34) $$\int \frac{x\,dx}{(5-x^2)\sqrt{3-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arcctg}\,\frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{2}}.$$

35) $$\int \frac{dx}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{x^2+2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{x^2+2}}-$$
$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Указание. $\dfrac{1}{x^4-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+1}\right)$.

36) $$\int \frac{x}{x^2-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{3}}{x+1}-$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\frac{\sqrt{7}\sqrt{x^2+2x+4}+2x+5}{x-1}.$$

Вычисляя интеграл подстановкой Эйлера, $\sqrt{x^2+2x+4}=z-x$, получаем для него выражение

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+2x+4}+1-\sqrt{3}}{x+\sqrt{x^2+2x+4}+1+\sqrt{3}}+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+2x+4}+1-\sqrt{7}}{x+\sqrt{x^2+2x+4}+1+\sqrt{7}}.$$

37) $$\int \frac{dx}{(x^3-8)\sqrt{x^2+2x+5}}=\frac{1}{12\sqrt{13}}\ln\frac{7+3x-\sqrt{13}\sqrt{x^2+2x+5}}{x-2}-$$
$$-\frac{1}{12}\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

По разложении $\frac{1}{x^3-8}$ на элементарные дроби, представляем вычисляемый интеграл в виде разности двух интегралов:

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+2x+5}}-\int \frac{(x+4)\,dx}{(x^2+2x+4)\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

38) $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+x+4)\sqrt{4x^2+4x+5}}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{165}}\ln\frac{\sqrt{11}\,(2x+1)-\sqrt{15(4x^2+4x+5)}}{\sqrt{11}\,(2x+1)+\sqrt{15(4x^2+4x+5)}}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{\sqrt{11}}\qquad (\text{подст. } 2x+1=2\operatorname{tg}\varphi).$$

39) $$\int \frac{(x+3)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+x+\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1+x-\sqrt{2(x^2+x+1)}}+$$
$$+2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1-x}.$$

Имея в виду подстановку $x=\frac{my+n}{y+1}$, определяем m и n из уравнений $mn+1=0$ и $mn+\frac{1}{2}(m+n)+1=0$. Находим $m=1$, $n=-1$ и, следовательно, $x=\frac{y-1}{y+1}$. Этой подстановкой приводим интеграл к виду $\int \frac{2(2y+1)\,dy}{(y^2+1)(3y^2+1)}$, и затем, пользуясь для вычисления последнего интеграла подстановкой $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\varphi$, приходим к интегралу

$$2\int \frac{(2\operatorname{tg}\varphi+\sqrt{3})\sec\varphi\,d\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi+3}=2\sqrt{3}\int \frac{d\sin\varphi}{3-2\sin^2\varphi}-4\int \frac{d\cos\varphi}{1+2\cos^2\varphi}.$$

Для обратной подстановки имеем:

$$\sin\varphi=\frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{3y^2+1}},\quad \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3y^2+1}},\quad y=\frac{1+x}{1-x},$$
$$\sqrt{3y^2+1}=\frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{1-x}$$

40) $$\int \frac{(2x+1)\,dx}{(3x^2+4x+4)\sqrt{x^2+6x-1}}=\frac{1}{6\sqrt{7}}\ln\frac{(x+1)\sqrt{7}-\sqrt{x^2+6x-1}}{(x+1)\sqrt{7}+\sqrt{x^2+6x-1}}+$$
$$+\frac{5}{6\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8}\sqrt{x^2+6x-1}}{\sqrt{7}(2-x)}\qquad \left(\text{подст. } x=\frac{2y-1}{y+1}\right).$$

41) $$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(5x^2-18x+17)\sqrt{10x^2-22x+13}} =$$
$$= \frac{A+B}{4\sqrt{35}} \ln \frac{(x-1)\sqrt{35}+2\sqrt{10x^2-22x+13}}{(x-1)\sqrt{35}-2\sqrt{10x^2-22x+13}} +$$
$$+ \frac{2A+B}{\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{10x^2-22x+13}}{\sqrt{35}\,(2-x)}$$
$$\left(\text{подст.} \quad x = \frac{2y+1}{y+1} \quad \text{или} \ x = \frac{y+2}{y+1}\right).$$

Для сравнения предлагается вычислить интеграл при помощи какой-нибудь из подстановок Эйлера.

42) $$\int \frac{(x-2)\,dx}{(5x^2-18x+17)\sqrt{10x^2-22x+13}} =$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{35}} \ln \frac{(x-1)\sqrt{35}-2\sqrt{10x^2-22x+13}}{(x-1)\sqrt{35}+2\sqrt{10x^2-22x+13}}.$$

Общее замечание. Указанные в §§ 3, 4 и 5 подстановки теоретически вполне разрешают вопрос интегрирования для интегралов рассматриваемого вида. Поскольку этими подстановками интегрируемое дифференциальное выражение приводится к рациональной алгебраической или тригонометрической форме, постольку *вопрос интегрирования можно считать решённым*.

Однако практически указанные подстановки целесообразны лишь для небольшого круга интегралов и притом наиболее простых форм. Хотя они и приводят к интегралам рациональных выражений, но эти выражения уже при некоторой сложности функции F получаются настолько сложного вида, что вычисление интегралов требует длительных и сложных выкладок. В результате интегрирования, как правило, получаются вместе с тем и сложные выражения.

Применение тригонометрических подстановок сравнительно несколько шире; во многих случаях, особенно, когда под корнем имеется двухчленное выражение вида $a+bx^2$ при различных комбинациях знаков a и b, эти подстановки дают простое вычисление интеграла, и в § 6, как видим, мы часто ими пользовались при вычислении основных элементарных интегралов.

В общем же случае при сложности интегрируемого выражения наиболее простой путь вычисления интеграла даёт непосредственное его преобразование методом неопределённых коэффициентов или, для некоторых видов, методом приведения к основным формам, рассмотренным в § 6. Эти методы рассматриваются в следующих двух параграфах.

§ 7. Формулы приведения

В гл. III был выведен ряд формул приведения для интегралов алгебраических выражений. Как было уже отмечено, эти формулы действительны и для дробных значений входящих в них параметров, так что могут быть использованы и для интегралов иррациональных выражений.

I) Заменяя в формулах (85) — (88) показатель n на $\frac{2n+1}{2}$, получаем:

$$\int \sqrt{(x^2 \pm a^2)^{2n+1}}\, dx = \\ = \frac{x\sqrt{(x^2 \pm a^2)^{2n+1}}}{2n+2} \pm \frac{2n+1}{2n+2} a^2 \int \sqrt{(x^2 \pm a^2)^{2n-1}}\, dx, \tag{154}$$

$$\int \sqrt{(a^2-x^2)^{2n+1}}\, dx = \frac{x\sqrt{(a^2-x^2)^{2n+1}}}{2n+2} + \frac{2n+1}{2n+2} a^2 \int \sqrt{(a^2-x^2)^{2n-1}}\, dx, \tag{155}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^{2n+1}}} = \frac{\pm x}{(2n-1)a^2\sqrt{(x^2 \pm a^2)^{2n-1}}} \pm \frac{2n-2}{2n-1}\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^{2n-1}}}, \tag{156}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^{2n+1}}} = \\ = \frac{x}{(2n-1)a^2\sqrt{(a^2-x^2)^{2n-1}}} + \frac{2n-2}{2n-1}\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^{2n-1}}}. \tag{157}$$

Формулы (154) и (155) теряют значение при $n = -1$, и в этом случае имеем интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \text{ (§ 6 гл. I)}.$$

К этим же интегралам приходим в результате последовательного применения этих формул.

Формулы (156) и (157) при $n = 1$ дают выражения интегралов $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. К этим интегралам, очевидно, приходим в конечном счёте последовательным применением формул.

На основании формул (154) — (157), последовательно применяя их, для соответствующих интегралов получаем:

$$\int \sqrt{(x^2 \pm a^2)^{2n+1}}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2n+2}\left\{(x^2 \pm a^2)^n \pm \frac{2n+1}{2n} a^2 (x^2 \pm a^2)^{n-1} + \right. \\ + \frac{(2n+1)(2n-1)}{2n(2n-2)} a^4 (x^2 \pm a^2)^{n-2} \pm \ldots \\ \left. \ldots \pm (\pm 1)^n \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 5\cdot 3}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2} a^{2n}\right\} + \\ + (\pm 1)^{n+1} \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}{(2n+2)2n\ldots 4\cdot 2} a^{2(n+1)} \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right), \tag{158}$$

$$\int \sqrt{(a^2-x^2)^{2n+1}}\,dx=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2n+2}\left\{(a^2-x^2)^n+\frac{2n+1}{2n}a^2(a^2-x^2)^{n-1}+\right.$$
$$+\frac{(2n+1)(2n-1)}{2n(2n-2)}a^4(a^2-x^2)^{n-2}+\ldots+\left.\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots5\cdot3}{2n(2n-2)\ldots4\cdot2}a^{2n}\right\}+$$
$$+\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots3\cdot1}{(2n+2)2n\ldots4\cdot2}a^{2(n+1)}\arcsin\frac{x}{a};\quad(159)$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2\pm a^2)^{2n+1}}}=$$
$$=\frac{\pm x}{(2n-1)a^{2n}\sqrt{(x^2\pm a^2)^{2n-1}}}\left\{a^{2(n-1)}\pm\frac{2n-2}{2n-3}a^{2(n-2)}(x^2\pm a^2)+\right.$$
$$+\frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}a^{2(n-3)}(x^2\pm a^2)^2\pm\ldots$$
$$\ldots\pm(\pm1)^{n-1}\left.\frac{(2n-2)(2n-4)\ldots4\cdot2}{(2n-3)(2n-5)\ldots3\cdot1}(x^2\pm a^2)^{n-1}\right\}.\quad(160)$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^{2n+1}}}=\frac{x}{(2n-1)a^{2n}\sqrt{(a^2-x^2)^{2n-1}}}\left\{a^{2(n-1)}+\right.$$
$$+\frac{2n-2}{2n-3}a^{2(n-2)}(a^2-x^2)+\frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}a^{2(n-3)}(a^2-x^2)^2+$$
$$+\ldots+\left.\frac{(2n-2)(2n-4)\ldots4\cdot2}{(2n-3)(2n-5)\ldots3\cdot1}(a^2-x^2)^{n-1}\right\}.\quad(161)$$

II) Полагая в формулах (104)—(113) $n=2$, $p=\frac{2n+1}{2}$, получаем формулы приведения:

$$\int x^m\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}\,dx=$$
$$=\frac{x^{m-1}\sqrt{(a+bx^2)^{2n+3}}}{(m+2n+2)b}-\frac{(m-1)a}{(m+2n+2)b}\int x^{m-2}\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}\,dx,\quad(162)$$

или

$$=\frac{x^{m+1}\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}{m+2n+2}+\frac{(2n+1)a}{m+2n+2}\int x^m\sqrt{(a+bx^2)^{2n-1}}\,dx,\quad(163)$$

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}=$$
$$=\frac{x^{m-1}}{(m-2n)b\sqrt{(a+bx^2)^{2n-1}}}-\frac{(m-1)a}{(m-2n)b}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}},\quad(164)$$

или

$$=\frac{x^{m+1}}{(2n-1)a\sqrt{(a+bx^2)^{2n-1}}}-\frac{m-2n+2}{(2n-1)a}\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^{2n-1}}},\quad(165)$$

или

$$=-\frac{x^{m-1}}{(2n-1)b\sqrt{(a+bx^2)^{2n-1}}}-\frac{m-1}{(2n-1)b}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^{2n-1}}},\quad(166)$$

$$\int\frac{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}{x^m}\,dx=$$
$$=-\frac{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}{(m-1)ax^{m-1}}+\frac{(2n-m+4)}{(m-1)a}\int\frac{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}{x^{m-2}}\,dx,\quad(167)$$

или

$$= \frac{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}{(2n-m+2)\,x^{m-1}} + \frac{(2n+1)\,a}{2n-m+2} \int \frac{\sqrt{(a+bx^2)^{2n-1}}}{x^m}\, dx, \qquad (168)$$

или

$$= \frac{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{(2n+1)\,b}{m-1} \int \frac{\sqrt{(a+bx^2)^{2n-1}}}{x^{m-2}}\, dx; \qquad (169)$$

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}} =$$

$$= -\frac{1}{(m-1)\,ax^{m-1}\sqrt{(a+bx^2)^{2n-1}}} - \frac{(m+2n-2)\,b}{(m-1)\,a} \int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}, \qquad (170)$$

или

$$= \frac{1}{(2n-1)\,ax^{m-1}\sqrt{(a+bx^2)^{2n-1}}} + \frac{(m+2n-2)}{(2n-1)\,a} \int \frac{dx}{x^m \sqrt{(a+bx^2)^{2n-1}}}. \qquad (171)$$

Коэффициенты a и b для этих формул могут быть положительными и отрицательными, m и n — целые положительные числа.

Формулы (164) и (168) теряют значение: первая при $m=2n$ и вторая — при $m=2n+2$, и для соответствующих интегралов можно пользоваться формулами (165), (166), (167) и (169). Формулы (167), (169) и (170) теряют значение при $m=1$, но в этом случае понижать степень m нет надобности и следует пользоваться формулами (168) и (171).

Последовательное применение формул (162) — (171), в зависимости от различных комбинаций знаков a и b, чётного или нечётного m, приводит в конечном счёте к интегралам:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx^2 \pm a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln (x\sqrt{b} + \sqrt{bx^2 \pm a}),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x\right),$$

$$\int \sqrt{bx^2 \pm a}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{bx^2 \pm a} + \frac{a}{2\sqrt{b}} \ln (x\sqrt{b} + \sqrt{bx^2 \pm a}),$$

$$\int \sqrt{a-bx^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a-bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x\right),$$

$$\int \sqrt{bx^2 \pm a}\, x\, dx = \frac{1}{3b} \sqrt{(bx^2 \pm a)^3},$$

$$\int \sqrt{a-bx^2}\, x\, dx = -\frac{1}{3b} \sqrt{(a-bx^2)^3},$$

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{bx^2 \pm a}} = \frac{1}{l} \sqrt{bx^2 \pm a},$$

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a-bx^2}} = -\frac{1}{b} \sqrt{a-bx^2},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a\pm bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a\pm bx^2}}{x},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{bx^2-a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arcsec}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right),$$

$$\int \frac{\sqrt{a\pm bx^2}}{x}\,dx=\sqrt{a\pm bx^2}+\sqrt{a}\ln\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a\pm bx^2}}{x},$$

$$\int \frac{\sqrt{bx^2-a}}{x}\,dx=\sqrt{bx^2-a}-\sqrt{a}\operatorname{arcsec}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right).$$

Принимая в формулах (164) и (170) $n=0$, $m=2n$ и $(2n+1)$ и затем в формуле (164) $b=1$, и $=-1$, заменяя вместе с тем a на $\pm a^2$ и на a^2, принимая в формуле (170) $b=\pm 1$ и $=1$ и заменяя a на a^2 и на $-a^2$, получаем формулы:

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{x^{2n-1}\sqrt{x^2\pm a^2}}{2n}\mp\frac{2n-1}{2n}a^2\int\frac{x^{2n-2}\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}},$$

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x^{2n-1}\sqrt{a^2-x^2}}{2n}+\frac{2n-1}{2n}a^2\int\frac{x^{2n-2}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{x^{2n}\sqrt{x^2\pm a^2}}{2n+1}\mp\frac{2n}{2n+1}a^2\int\frac{x^{2n-1}\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}},$$

$$\int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}}{2n+1}+\frac{2n}{2n+1}a^2\int\frac{x^{2n-1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x^{2n}\sqrt{a^2\pm x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2\pm x^2}}{(2n-1)a^2x^{2n-1}}\mp\frac{2n-2}{2n-1}\,\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^{2n-2}\sqrt{a^2\pm x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x^{2n}\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{(2n-1)a^2x^{2n-1}}+\frac{2n-2}{2n-1}\,\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^{2n-2}\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x^{2n+2}\sqrt{a^2\pm x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2\pm x^2}}{2na^2x^{2n}}\mp\frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^{2n-1}\sqrt{a^2\pm x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x^{2n+1}\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2na^2x^{2n}}+\frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^{2n-1}\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Последовательно применяя эти формулы, для соответствующих интегралов получаем:

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{x\sqrt{x^2\pm a^2}}{2n}\left\{x^{2n-2}\mp\frac{2n-1}{2n-2}a^2x^{2n-4}+\right.$$
$$\left.+\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}a^4x^{2n-6}\mp\ldots+(\mp 1)^{n-1}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}a^{2n-2}\right\}+$$
$$+(\mp 1)^n\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}a^{2n}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right), \qquad (172)$$

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2n}\left\{x^{2n-2}+\frac{2n-1}{2n-2}\,a^2x^{2n-4}+\right.$$
$$+\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}a^4x^{2n-6}+\ldots+\left.\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots5\cdot3}{(2n-2)(2n-4)\ldots4\cdot2}\,a^{2n-2}\right\}+$$
$$+\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots3\cdot1}{2n(2n-2)\ldots4\cdot2}\,a^{2n}\arcsin\frac{x}{a}, \qquad (173)$$

$$\int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{2n+1}\left\{x^{2n}\mp\frac{2n}{2n-1}\,a^2x^{2n-2}+\right.$$
$$+\frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}\,a^4x^{2n-4}\mp\ldots+(\mp1)^{n-1}\frac{2n(2n-2)\ldots6\cdot4}{(2n-1)(2n-3)\ldots5\cdot3}\,a^{2n-2}x^2+$$
$$\left.+(\mp1)^n\frac{2n(2n-2)\ldots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\ldots3\cdot1}\,a^{2n}\right\}, \qquad (174)$$

$$\int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2n+1}\left\{x^{2n}+\frac{2n}{2n-1}\,a^2x^{2n-2}+\right.$$
$$+\frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}\,a\,x^{2n-4}+\ldots+\frac{2n(2n-2)\ldots6\cdot4}{(2n-1)(2n-3)\ldots5\cdot3}\,a^{2n-2}x^2+$$
$$\left.+\frac{2n(2n-2)\ldots4\cdot2}{(2n-3)(2n-5)\ldots3\cdot1}\,a^{2n}\right\}, \qquad (175)$$

$$\int \frac{dx}{x^{2n}\sqrt{a^2\pm x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2\pm x^2}}{(2n-1)\,a^2x^{2n-1}}\left\{1\mp\frac{2n-2}{2n-3}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\right.$$
$$+\frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}\left(\frac{x}{a}\right)^4\mp\ldots$$
$$\left.\ldots+(\mp1)^{n-1}\frac{(2n-2)(2n-4)\ldots4\cdot2}{(2n-3)(2n-5)\ldots3\cdot1}\left(\frac{x}{a}\right)^{2n-2}\right\}; \qquad (176)$$

$$\int \frac{dx}{x^{2n}\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{(2n-1)\,a^2x^{2n-1}}\left\{1+\frac{2n-2}{2n-3}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}\left(\frac{x}{a}\right)^4+\ldots+\frac{(2n-2)(2n-4)\ldots4\cdot2}{(2n-3)(2n-5)\ldots3\cdot1}\left(\frac{x}{a}\right)^{2n-2}\right\}, \qquad (177)$$

$$\int \frac{dx}{x^{2n+1}\sqrt{a^2\pm x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2\pm x^2}}{2na^2x^{2n}}\left\{1\mp\frac{2n-1}{2n-2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\right.$$
$$+\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}\left(\frac{x}{a}\right)^4\mp\ldots$$
$$\left.\ldots+(\mp1)^{n-1}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots5\cdot3}{(2n-2)(2n-4)\ldots4\cdot2}\left(\frac{x}{a}\right)^{2n-2}\right\}-$$
$$-(\mp1)^n\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots3\cdot1}{2n(2n-2)\ldots4\cdot2}\,\frac{1}{a^{2n+1}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2\pm x^2}}{x}, \qquad (178)$$

$$\int \frac{dx}{x^{2n+1}\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2na^2x^{2n}}\left\{1+\frac{2n-1}{2n-2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}\left(\frac{x}{a}\right)^4+\ldots+\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots5\cdot3}{(2n-2)(2n-4)\ldots4\cdot2}\left(\frac{x}{a}\right)^{2n-2}\right\}+$$
$$+\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots3\cdot1}{2n(2n-2)\ldots4\cdot2}\,\frac{1}{a^{2n+1}}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}. \qquad (179)$$

На основании формул (163) и (168) имеем:

$$\int x^{2n} \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x^{2n+1}\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2n+2} \pm \frac{a^2}{2n+2}\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \tag{180}$$

$$\int x^{2n} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x^{2n+1}\sqrt{a^2 - x^2}}{2n+2} + \frac{a^2}{2n+2}\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \tag{181}$$

$$\int x^{2n+1} \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x^{2n+2}\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2n+3} \pm \frac{a^2}{2n+3}\int \frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \tag{182}$$

$$\int x^{2n+1} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x^{2n+2}\sqrt{a^2 - x^2}}{2n+3} + \frac{a^2}{2n+3}\int \frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \tag{183}$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x^{2n}}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{(2n-2)\,x^{2n-1}} - \frac{a^2}{2n-2}\int \frac{dx}{x^{2n}\sqrt{a^2 \pm x^2}}, \tag{184}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^{2n}}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{(2n-2)\,x^{2n-1}} + \frac{a^2}{2n-2}\int \frac{dx}{x^{2n}\sqrt{x^2 - a^2}}, \tag{185}$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x^{2n+1}}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{(2n-1)\,x^{2n}} - \frac{a^2}{2n-1}\int \frac{dx}{x^{2n+1}\sqrt{a^2 \pm x^2}}, \tag{186}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^{2n+1}}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{(2n-1)\,x^{2n}} + \frac{a^2}{2n-1}\int \frac{dx}{x^{2n+1}\sqrt{x^2 - a^2}}. \tag{187}$$

Для последних интегралов этих формул имеем полученные перед этим выражения.

III) Заменяя в формулах § 3 гл. III n на $\frac{2n+1}{2}$, получаем формулы:

$$\int \sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}\,dx = \frac{cx+b}{2(n+1)c}\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}} + \\ + \frac{2n+1}{2n+2}\,\frac{ac-b^2}{c}\int \sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n-1}}\,dx, \tag{188}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}} = \frac{cx+b}{(2n-1)(ac-b^2)\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n-1}}} + \\ + \frac{2n-2}{2n-1}\,\frac{c}{ac-b^2}\int \frac{dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n-1}}}. \tag{189}$$

Формула (188) теряет значение при $n=-1$; в этом случае имеем интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(cx+b+\sqrt{c}\,\sqrt{a+2bx+cx^2}\right), \quad \text{если} \quad c>0,$$

и

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\frac{cx-b}{\sqrt{ac+b^2}}, \quad \text{если} \quad c<0;$$

к этому интегралу приходим последовательным применением формулы (188).

Формула (189) при $n=1$ даёт выражение для интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^3}} = \frac{cx+b}{(ac-b^2)\sqrt{a+2bx+cx^2}};$$

к этому интегралу, очевидно, приходим последовательным применением формулы.

Последовательно применяя формулы (188) и (189), для соответствующих интегралов получаем:

$$\int \sqrt{(a+2bx\pm cx^2)^{2n+1}}\,dx = \frac{(cx\pm b)\sqrt{a+2bx\pm cx^2}}{(2n+2)c}\Big\{(a+2bx\pm cx^2)^n + \frac{2n+1}{2n}\,\frac{ac\mp b^2}{c}(a+2bx\pm cx^2)^{n-1} + \frac{(2n+1)(2n-1)}{2n(2n-2)}\left(\frac{ac\mp b^2}{c}\right)^2(a+2bx\pm cx^2)^{n-2}+\ldots \ldots + \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 5\cdot 3}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\left(\frac{ac\mp b^2}{c}\right)^n\Big\} + \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}{(2n+2)\cdot 2n\ldots 4\cdot 2}\left(\dfrac{ac-b^2}{c}\right)^{n+1}\times \\ \times\dfrac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(cx+b+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}\right) \text{ для верхнего знака} \\ \dfrac{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}{(2n+2)2n\ldots 4\cdot 2}\left(\dfrac{ac+b^2}{c}\right)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\dfrac{cx-b}{\sqrt{ac+b^2}} \\ \text{для нижнего знака } (c>0). \end{array}\right. \quad (190)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}} = \frac{cx+b}{(2n-1)(ac-b^2)\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n-1}}}\Big\{1 + \frac{2n-2}{2n-3}\,\frac{c}{ac-b^2}(a+2bx+cx^2) + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}\left(\frac{c}{ac-b^2}\right)^2(a+2bx+cx^2)^2+\ldots \ldots + \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}\left(\frac{c}{ac-b^2}\right)^{n-1}(a+2bx+cx^2)^{n-1}\Big\} \quad (191)$$

$$(n\geqslant 1,\ c > \text{или} < 0).$$

IV) Заменяя в формуле (97) сначала n на $\frac{2n+1}{2}$ и затем n на $\left(-\frac{2n+1}{2}\right)$, получаем:

$$\int x^m \sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}\,dx = \frac{x^{m-1}\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+3}}}{m+2n+2} - \frac{(2m+2n+1)b}{(m+2n+2)c}\int x^{m-1}\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}\,dx - \frac{(m-1)a}{(m+2n+2)c}\int x^{m-2}\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}\,dx, \quad (192)$$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+2}}} =$$
$$= \frac{x^{m-1}}{(m-2n)c\sqrt{(a+2b+cx^2)^{2n-1}}} - \frac{(2m-2n-1)b}{(m-2n)c}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}} -$$
$$-\frac{(m-1)a}{(m-2n)c}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}}. \quad (193)$$

Формула (192) приводит в конечном счёте к интегралу вида

$$\int (B+Cx)\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}\,dx =$$
$$= \frac{C}{(2n+3)c}\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+3}} + \frac{Bc-Cb}{c}\int \sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}\,dx,$$

и последний интеграл затем вычисляется по формулам (188) или (190).

Для рассматриваемого интеграла получаем, таким образом, алгебраическое и логарифмическое выражение, и при $c<0$ — заменяющую последнее круговую функцию.

Формула (193) теряет значение при $m=2n$. Для соответствующего интеграла интегрированием по частям, или заменяя n на $\frac{2n+1}{2}$ в формуле (100), получаем формулу:

$$\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n-1}}} =$$
$$= -\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)c\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n-1}}} - \frac{b}{c}\int \frac{x^{2n-1}dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}} +$$
$$+\frac{1}{c}\int \frac{x^{2n-2}dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}}. \quad (194)$$

Пользуясь формулой (193) или для случая $m=2n$ формулами (193) и (194), приходим в конечном счёте к интегралу вида

$$\int \frac{(B+Cx)\,dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}} =$$
$$= \frac{-C}{(2n-1)c\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n-1}}} + \frac{Bc-Cb}{c}\int \frac{dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}}.$$

Для последнего интеграла имеем выражение (191) и, следовательно, рассматриваемый интеграл (193) выражается так же, как и (189) при $n>0$, алгебраическими функциями.

Заменяя в формуле (98) m на $(-m)$, n на $\frac{2n+1}{2}$ и затем m на $(-m)$ и n на $\left(-\frac{2n+1}{2}\right)$, получаем формулы:

$$\int \frac{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}}{x^m}\,dx =$$
$$= -\frac{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+3}}}{(m-1)\,ax^{m-1}} + \frac{(2n-2m+5)\,b}{(m-1)\,a}\int \frac{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}}{x^{m-1}}\,dx +$$
$$+ \frac{(2n-m+4)\,c}{(m-1)\,a}\int \frac{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}}{x^{m-2}}\,dx, \quad (195)$$

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}} = -\frac{1}{(m-1)\,ax^{m-1}\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n-1}}} -$$
$$-\frac{(2m+2n-3)\,b}{(m-1)\,a}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}} -$$
$$-\frac{(m+2n-2)\,c}{(m-1)\,a}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}}. \quad (196)$$

Из формулы (99), заменяя m на $(-m)$ и n на $\frac{2n+1}{2}$, получаем формулу:

$$\int \frac{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}}{x^m}\,dx =$$
$$= -\frac{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{(2n+1)\,b}{m-1}\int \frac{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n-1}}}{x^{m-1}}\,dx +$$
$$+ \frac{(2n+1)\,c}{m-1}\int \frac{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n-1}}}{x^{m-2}}\,dx, \quad (197)$$

более удобную в том отношении, что она снижает сразу обе степени.

При $m=1$ формулы (195), (196) и (197) теряют значение, и для этого случая из формул (101) и (102) получаем формулы:

$$\int \frac{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}}{2n+1} +$$
$$+ b\int \sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n-1}}\,dx + a\int \frac{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n-1}}}{x}\,dx, \quad (198)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}} = \frac{1}{(2n-1)\,a\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n-1}}} -$$
$$-\frac{b}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n-1}}}. \quad (199)$$

Последовательное применение формул (195) или (197) и формулы (198) приводит в конечном счёте к сумме интегралов вида $\int \sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}\,dx$, для которых имеем выражение (190), и к интегралу

$$\int \frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}^{\,2}}{x}\,dx =$$
$$= \sqrt{a+2bx+cx^2} + b\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}},$$

т. е. к интегралам (127), (128), (137) и (138).

Формулы (196) и (199) точно так же приводят к сумме интегралов вида $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}}$ и к интегралу

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}.$$

Для рассматриваемых интегралов получаем, таким образом, алгебраические и логарифмические функции, и, в соответствующих случаях, вместо последних круговые.

V) Интегралы $\int (\alpha+\beta x)^{\pm m}\left[\sqrt{a+2bx+cx^2}\right]^{\pm(2n+1)} dx$ для всех четырёх комбинаций знаков m и $(2n+1)$ подстановкой $\alpha+\beta x = z$ приводятся к интегралам

$$\frac{1}{\beta^{2n+2}}\int z^m \sqrt{(a'+2b'z+cz^2)^{2n+1}}\,dz, \qquad \beta^{2n}\int \frac{z^m dz}{\sqrt{(a'+2b'z+cz^2)^{2n+1}}},$$
$$\frac{1}{\beta^{2n+2}}\int \frac{\sqrt{(a'+2b'z+cz^2)^{2n+1}}}{z^m}\,dz \quad \text{и} \quad \beta^{2n}\int \frac{dz}{z^m\sqrt{(a'+2b'z+cz^2)^{2n+1}}},$$

где $a' = a\beta^2 - 2b\alpha\beta + c\alpha^2$ и $b' = b\beta - c\alpha$.

Эти интегралы вычисляются по предыдущим формулам.

§ 8. Метод неопределённых коэффициентов

Общий вид интегрируемой функции $F\{x, \sqrt{a+2bx+cx^2}\}$, если обозначить для краткости $a+2bx+cx^2 = X$, можно представить как отношение двух целых функций и $\frac{F_1(x, \sqrt{X})}{F_2(x, \sqrt{X})}$. Собрав в числителе и знаменателе все члены, содержащие $\sqrt{X}$, и взяв $\sqrt{X}$ за скобки, можно привести функцию F к виду $\frac{M+N\sqrt{X}}{P+Q\sqrt{X}}$, где M, N, P и Q — целые рациональные функции от x. Умножив затем числитель и знаменатель на $(P-Q\sqrt{X})$, получаем:

$$F=\frac{(M+N\sqrt{X})\,(P-Q\sqrt{X})}{P^2-Q^2X}=\frac{MP-NQX}{P^2-Q^2X}+\frac{(N-Q)\,X}{(P^2-Q^2X)\sqrt{X}},$$

и, таким образом, интегрируемую функцию F приводим к виду

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}+\frac{\Psi(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}},$$

где $\varphi(x)=MP-(a+2bx+cx^2)\,NQ$, $\Psi(x)=(a+2bx+cx^2)\,(N-Q)$ и $f(x)=P^2-(a+2bx+cx^2)\,Q^2$ — целые рациональные функции от x.

Интеграл $\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx$ вычисляется как интеграл рациональной функции, интеграл же $\int\frac{\Psi(x)}{f(x)}\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$ в общем случае когда степень $\Psi(x)$ выше степени $f(x)$ и $f(x)$ имеет кратные как вещественные, так и комплексные корни, после выделения целой части $\frac{\Psi(x)}{f(x)}$ и разложения на элементарные дроби распадается на интегралы следующего вида:

$$\alpha)\quad \int\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx,$$

$$\beta)\quad \int\frac{b_0x^{m-1}+b_1x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}}{(x-p)^m\,\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx,$$

и

$$\gamma)\quad \int\frac{c_0x^{2m-1}+c_1x^{2m-2}+\ldots+c_{2m-1}}{(a_1+2b_1x+c_1x^2)^m\,\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

Последний интеграл вводится для комплексных корней $f(x)$, которые попарно в качестве сопряжённых соединяются в трёхчлен $(a_1+2b_1x+c_1x^2)$.

Рассматривая первый интеграл как сумму интегралов вида

$$a_k\int\frac{x^k\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\qquad(k=0,\ 1,\ldots,m),$$

на основании формулы (193), в которой полагаем $n=0$, видим, что результатом приведения для каждого из них получается выражение вида

$$(c_0x^{k-1}+c_1x^{k-2}+\ldots+c_{k-1})\sqrt{a+2bx+cx^2}+c_k\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}},$$

и, следовательно, для всего интеграла α) имеем:

$$\int \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \\ = (A_0x^{m-1} + A_1x^{m-2} + \ldots + A_{m-1})\sqrt{a+2bx+cx^2} + \\ + A_m \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}, \quad (200)$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_m$ — постоянные, которые, вообще, можно было бы определить в порядке приведения и суммирования всех выражений, полученных для отдельных интегралов.

Рассматривая же (200) как общий вид выражения для интеграла α) и коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_m$ как неопределённые, легко находим их значения, дифференцируя обе части равенства. По умножении затем на $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ получаем:

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = \\ = [(m-1)A_0x^{m-2} + (m-2)A_1x^{m-3} + \ldots + A_{m-2}](a+2bx+cx^2) + \\ + (A_0x^{m-1} + A_1x^{m-2} + \ldots + A_{m-1})(b+cx) + A_m.$$

Отсюда сравнением коэффициентов при одинаковых степенях x получаем необходимые $(m+1)$ уравнений для определения $(m+1)$ коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_m$.

Для интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$ имеем выражения (127) и (128).

Интеграл β) подстановкой $x - p = \frac{1}{z}$, на основании которой

$$\sqrt{a+2bx+cx^2} = \frac{1}{z}\sqrt{c + 2(b+cp)z + (a+2bp+p^2)z^2} = \\ = \frac{1}{z}\sqrt{a' + 2b'z + c'z^2}, \quad dx = -\frac{dz}{z^2},$$

приводится к интегралу

$$-\int \frac{b_0(pz+1)^{m-1} + b_1z(pz+1)^{m-2} + \ldots + b_{m-1}z^{m-1}}{\sqrt{a'+2b'z+c'z^2}}\,dz = \\ = \int \frac{a_0z^{m-1} + a_1z^{m-2} + \ldots + a_{m-1}}{\sqrt{a'+2b'z+c'z^2}}\,dz,$$

т. е. интегралу α), и общий вид выражения для него с неопределёнными коэффициентами можно представить такой же формулой

$$\int \frac{a_0z^{m-1} + a_1z^{m-2} + \ldots + a_{m-1}}{\sqrt{a'+2b'z+c'z^2}}\,dz = \\ = (A_0'z^{m-2} + A_1'z^{m-3} + \ldots + A_{m-2}')\sqrt{a'+2b'z+c'z^2} + \\ + A_{m-1}' \int \frac{dz}{\sqrt{a'+2b'z+c'}}. \quad (201)$$

Определив коэффициенты $A'_0, A'_1, \ldots, A'_{m-1}$ и выражение интеграла $\int \frac{dz}{\sqrt{a'+2b'z+c'z^2}}$, переходим обратно к прежней переменной x на основании равенств

$$z=\frac{1}{x-p}, \quad \sqrt{a'+2b'z+c'z^2}=\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x-p}.$$

Подставляя эти выражения в (201), получаем формулу, дающую общий вид выражения с неопределёнными коэффициентами непосредственно для интеграла β).

$$\int \frac{b_0x^{m-1}+b_1x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}}{(x-p)^m\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx=$$
$$=\frac{A_0x^{m-2}+A_1x^{m-3}+\ldots+A_{m-2}}{(x-p)^{m-1}}\sqrt{a+2bx+cx^2}+$$
$$+A_{m-1}\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{a+2bx+cx^2}}. \quad (202)$$

Дифференцируя и умножая на $(x-p)^m\sqrt{a+2bx+cx^2}$, получаем равенство, на основании которого сравнением коэффициентов при x определяем значения $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$. Для интеграла $\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{a+2bx+cx^2}}$ имеем выражения (142).

В частном случае, когда p является одним из корней трёхчлена $a+2bx+cx^2$, имеем

$$c'=a+2bp+cp^2=0,$$
$$\sqrt{a+2bx+cx^2}=\frac{1}{z}\sqrt{c+2(b+cp)z}=\frac{1}{z}\sqrt{a'+b'z},$$

и подстановка $x-p=\frac{1}{z}$ приводит к интегралу

$$\int \frac{a_0z^{m-1}+a_1z^{m-2}+\ldots+a_{m-1}}{\sqrt{a'+b'z}}\,dz,$$

который, в свою очередь, подстановкой $a'+b'z=y^2$ легко приводится к интегралу целой рациональной функции.

Представив интеграл в виде $\int \frac{b_0x^{m-1}+b_1x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}}{(x-p)^{\frac{2m+1}{2}}(x-q)^{\frac{1}{2}}}\,dx$, где q — другой корень, можно вычислить его также подстановкой $\frac{x-p}{x-q}=y^2$, как интеграл вида, рассмотренного в разделе II, § 2.

Рассматривая интеграл γ) как сумму двух интегралов

$$\int \frac{b_0x^{m-1}+b_1x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}}{(x-\alpha)^m\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx+\int \frac{b'_0x^{m-1}+b'_1x^{m-2}+\ldots+b'_{m-1}}{(x-\beta)^m\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx,$$

где α и β — корни трёхчлена $a_1+2b_1x+c_1x^2$, безразлично, вещественные или мнимые сопряжённые, на основании формулы (202) имеем для него

$$\int \frac{c_0x^{2m-1}+c_1x^{2m-2}+\ldots+c_{2m-1}}{(a_1+2b_1x+c_1x^2)^m\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx=$$
$$=\frac{c_0x^{m-2}+c_1x^{m-3}+\ldots+c_{m-2}}{(x-\alpha)^{m-1}}\sqrt{a+2bx+cx^2}+$$
$$+C_{m-1}\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}+$$
$$+\frac{c'_0x^{m-2}+c'_1x^{m-3}+\ldots+c'_{m-2}}{(x-\beta)^{m-1}}\sqrt{a+2bx+cx^2}+$$
$$+C'_{m-1}\int\frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{a+2bx+cx^2}}.$$

Отсюда легко определяем общий вид выражения для интеграла γ)

$$\int \frac{c_0x^{2m-1}+c_1x^{2m-2}+\ldots+c_{2m-1}}{(a_1+2b_1x+c_1x^2)^m\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx=$$
$$=\frac{A_0x^{2m-3}+A_1x^{2m-4}+\ldots+A_{2m-3}}{(a_1+2b_1x+c_1x^2)^{m-1}}\sqrt{a+2bx+cx^2}+$$
$$+\int\frac{Ax+B}{a_1+2b_1x+c_1x^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}. \qquad (203)$$

После дифференцирования и умножения на

$$(a_1+2b_1x+c_1x^2)^m\sqrt{a+2bx+cx^2}$$

получаем равенство, на основании которого определяем коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_{2m-3}, A, B$. В силу тождественности равенства коэффициенты правой части, т. е. коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A, B$, должны быть вещественными, поскольку вещественны коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_{2m-1}$.

Формула (203), как вполне понятно, не теряет своего значения и в случае вещественных корней трёхчлена $a_1+2b_1x+c_1x^2$.

Вычисление остающегося интеграла

$$\int\frac{Ax+B}{a_1+2b_1x+c_1x^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$$

рассмотрено в § 6.

Для всего интеграла γ) получаем алгебраические и логарифмические функции, и в соответствующих случаях, вместо последних, круговые.

В частном случае, когда $a_1+2b_1x+c_1x^2$ равно или пропорционально $a+2bx+cx^2$, формула (203) имеет вид

$$\int \frac{c_0x^{2m-1}+c_1x^{2m-2}+\ldots+c_{2m-1}}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2m-1}}}\,dx=$$
$$=\frac{A_0x^{2m-3}+A_1x^{2m-4}+\ldots+A_{2m-3}}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2m-1}}}+\int\frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^3}}.$$

Вычисляя последний интеграл (см. § 7), получаем для него алгебраическое выражение

$$\left(\frac{Bc-Ab}{ac-b^2}\,x+\frac{Bb-Aa}{ac-b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}=\frac{A'x+B'}{\sqrt{a+2bx+cx^2}},$$

и, следовательно, весь интеграл выражается также алгебраическими функциями.

Подставляя выражение интеграла $\int\frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$, видим, что по приведении правой части формулы к общему знаменателю высшая степень знаменателя $2m-1$ и, следовательно, формулу с неопределёнными коэффициентами для интеграла можно представить в виде

$$\int \frac{c_0x^{2m-1}+c_1x^{2m-2}+\ldots+c_{2m-1}}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2m+1}}}\,dx=$$
$$=\frac{A_0x^{2m-1}+A_1x^{2m-2}+\ldots+A_{2m-1}}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2m-1}}}. \qquad (204)$$

Рассмотренный метод неопределённых коэффициентов для интеграла $\int F\{x, \sqrt{a+2bx+cx^2}\}\,dx$, если не пользоваться готовыми формулами, вообще даёт более простое вычисление по сравнению с другими приёмами.

§ 9. Примеры; дополнительные указания

Предлагаемые в этом параграфе интегралы могут быть вычислены различными приёмами, указанными выше, всеми подстановками, приводящими интегрируемые выражения к рациональным формам, или, в более сложных случаях, с применением других приёмов, упрощающих вычисления, интегрированием по частям, по формулам приведения или методом неопределённых коэффициентов.

Подстановки Эйлера по большей части связаны с громоздкими вычислениями и потому более предпочтительными являются другие подстановки и приёмы.

Так, интегралы примеров 43—45 (см. ниже) вида

$$\int x^m \sqrt{(a+bx^2)^n}\, dx$$

при различных комбинациях знаков a и b, m и n вычисляются последовательным интегрированием по частям или прямо по формулам § 7. При небольших m и n они легко вычисляются также соответствующими тригонометрическими подстановками. Интегралы этого вида представляют частный случай так называемых интегралов от биномиальных выражений, которые рассматриваются в следующем параграфе. В качестве последних, подстановками $\sqrt{a+bx^2}=z$, при m нечётном и $\sqrt{a+bx^2}=xz$ при m чётном, они приводятся к рациональным формам, и этими подстановками также можно пользоваться для их вычисления.

Для многих интегралов наиболее удобны в отношении простоты вычислений тригонометрические подстановки.

Воспользуемся этими подстановками в качестве примера для вычисления интегралов $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2rx^2)^{2n+1}}}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{(2rx-x^2)^{2n+1}}}$.

Представив интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2\pm 2rx)^{2n+1}}}$ в виде $\int \frac{dx}{\sqrt{((x\pm r)^2-r^2)^{2n+1}}}$, подстановкой $x\pm r=r\sec\varphi$ приводим его к интегралу

$$\frac{1}{r^{2n}}\int \frac{\sec\varphi}{\operatorname{tg}^{2n}\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{r^{2n}}\int \frac{\cos^{2n-1}\varphi\, d\varphi}{\sin^{2n}\varphi}=\frac{1}{r^{2n}}\int \frac{(1-\sin^2\varphi)^{n-1}}{\sin^{2n}\varphi}\,d\sin\varphi=$$

$$=\frac{1}{r^{2n}}\int \frac{\sum\limits_{0}^{n-1}(-1)^{n-1-p}\binom{n-1}{p}\sin^{2(n-1-p)}\varphi}{\sin^{2n}\varphi}\,d\sin\varphi=$$

$$=\frac{1}{r^{2n}}\int \sum_{0}^{n-1}(-1)^{n-1-p}\binom{n-1}{p}\frac{d\sin\varphi}{\sin^{2p+2}\varphi}.$$

Выполнив интегрирование и возвращаясь на основании равенства $\sin\varphi=\frac{\sqrt{x^2\pm 2rx}}{x\pm r}$ к прежней переменной x, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2\pm 2rx)^{2n+1}}}=$$

$$=\frac{x\pm r}{r^{2n}\sqrt{x^2\pm 2rx}}\sum_{0}^{n-1}(-1)^{n-p}\binom{n-1}{p}\frac{1}{2p+1}\frac{(x\pm r)^{2p}}{(x^2\pm 2rx)^p} \qquad (205)$$

$$(n\geqslant 1).$$

Точно так же, приведя интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(2rx-x^2)^{2n+1}}}$ подстановкой $x-r=r\sin\varphi$ к интегралу
$\frac{1}{r^{2n}}\int \sec^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{r^{2n}}\int (\mathrm{tg}^2\varphi+1)^{n-1}\, d\,\mathrm{tg}\,\varphi$, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2rx-x^2)^{2n+1}}} =$$

$$= \frac{x-r}{r^{2n}\sqrt{2rx-x^2}} \sum_{0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \frac{1}{2p+1} \frac{(x-r)^{2p}}{(2rx-x^2)^p} \quad (n \geqslant 1). \quad (206)$$

При $n=0$ эти формулы не дают выражений для интегралов, и в этом случае имеем интегралы:

$$\text{a)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 2rx}} = \ln(x \pm r + \sqrt{x^2 \pm 2rx}),$$

$$\text{b)} \int \frac{dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = \arcsin\frac{x-r}{r}.$$

Несколько в другом виде получены выражения (122) и (123) для тех же интегралов.

Формулы для них, а также для интегралов $\int \sqrt{(x^2 \pm 2rx)^{2n+1}}\, dx$, и $\int \sqrt{(2rx-x^2)^{2n+1}}\, dx$, можем получить также на основании формул (190) и (191).

Примеры

43) $\displaystyle\int x^4\sqrt{5-x^2}\, dx = \frac{1}{48}(8x^5-10x^3-75x)\sqrt{5-x^2} + \frac{125}{6}\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}.$

44) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2+2}} = -\frac{\sqrt{x^2+2}}{30x^5}(3-2x^2+2x^4).$

45) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(2x^2+3)^7}} = \frac{x(32x^4+120x^2+135)}{405\sqrt{(2x^2+3)^5}}.$

46) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{1+x^2+a\sqrt{1+x^2}} = \ln(a+\sqrt{1+x^2})$ (подст. $\sqrt{1+x^2}=z$).

47) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \ln(x+\sqrt{1+x^2}).$

48) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\, dx = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x+\sqrt{2(1+x^2)}}{\sqrt{x^2+2}}.$

49 $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+x^2)^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x\sqrt{1+x^2}}{4(2+x^2)} + \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x+\sqrt{2(1+x^2)}}{\sqrt{2+x^2}}.$

50) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-6}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}=\ln(x+\sqrt{x^2-2})+\sqrt{\frac{3}{2}}\ln\frac{x-\sqrt{3(x^2-2)}}{\sqrt{x^2-6}}.$

51) $\displaystyle\int \frac{x^2+5}{(1+x^2)^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}+2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}};$

52) $\displaystyle\int \frac{4x-\sqrt{1-x^2}}{5+\sqrt{1-x^2}}dx=-x-4\sqrt{1-x^2}+20\ln(5-\sqrt{1-x^2})+$

$$+5\arcsin x+\frac{25}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{5x^2+24\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{6}\,x(5-\sqrt{1-x^2})}.$$

53) $\displaystyle\int \frac{(2-\sqrt{x^2+1})\,x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}\,(\sqrt{(x^2+1)^3}-x^3+1)}=-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{9}\;x+\frac{2}{9}\sqrt{x^2+1}+$

$$+\frac{5}{24}\ln(3x^2+2x+3)-\frac{7}{9}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\frac{5}{36}\ln\frac{1-x+2\sqrt{x^2+1}}{1-x-2\sqrt{x^2+1}}-$$

$$-\frac{26\sqrt{2}}{27}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{9\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1+x}{\sqrt{2(x^2+1)}}.$$

54) $\displaystyle\int x\sqrt{2rx-x^2}\,dx=\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}rx-\frac{1}{2}r^2\right)\sqrt{2rx-x^2}+\frac{r^3}{2}\arcsin\frac{x-r}{r}.$

55) $\displaystyle\int x^2\sqrt{2rx-x^2}\,dx=-\left(\frac{1}{4}x+\frac{5}{12}r\right)\sqrt{(2rx-x^2)^3}+$

$$+\frac{5r^2}{8}(x-r)\sqrt{2rx-x^2}+\frac{5r^4}{8}\arcsin\frac{x-r}{r}.$$

56) $\displaystyle\int x^3\sqrt{2rx-x^2}\,dx=-\left(\frac{1}{5}x^2+\frac{7}{20}rx+\frac{7}{12}r^2\right)\sqrt{(2rx-x^2)^3}+$

$$+\frac{7r^3}{8}(x-r)\sqrt{2rx-x^2}+\frac{7r^5}{8}\arcsin\frac{x-r}{r}.$$

57) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{2x+x^2}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{1+2x+\sqrt{3}\sqrt{2x+x^2}}{x-1}-$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arcsec}(x+1).$$

58) $\displaystyle\int \frac{(3x-2)\,dx}{(x+1)^3\sqrt{2x-x^2}}=-\frac{4x+9}{6(x+1)^2}\sqrt{2x-x^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arcsin\frac{2x-1}{x+1}.$

59) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\ln(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}).$

60) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{12}x-\frac{1}{24}\right)\sqrt{1+x+x^2}+$

$$+\frac{7}{16}\ln(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}).$$

61) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}}=\frac{2}{3}\,\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}.$

62) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}}=-\frac{2}{3}\,\frac{x+2}{\sqrt{1+x+x^2}}.$

Предлагается для сравнения вычислить интеграл также подстановкой Эйлера. Подстановка $\sqrt{1+x+x^2}=z-x$ дает для интеграла выражение $\dfrac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)\sqrt{1+x+x^2}}$. Оба результата разнятся на const. $=\frac{2}{3}$.

63) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^2}}=\frac{1}{3}\,\frac{3x^2+7x+5}{\sqrt{1+x+x^2}}-\frac{3}{2}\ln\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right).$$

64) $$\int x^2\sqrt{1+x+x^2}\,dx=\frac{1}{4}\left(x-\frac{5}{6}\right)\sqrt{(1+x+x^2)^3}+ \\ +\frac{1}{32}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+x+x^2}+\frac{3}{128}\ln\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right).$$

65) $$\int \sqrt{(1+x+x^2)^3}\,dx=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt{(1+x+x^2)^3}+\frac{9}{32}\sqrt{1+x+x^2}\right)+ \\ +\frac{27}{128}\ln\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right).$$

66) $$\int \sqrt{(1+x+x^2)^5}\,dx=$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\sqrt{(1+x+x^2)^5}+\frac{5}{32}\sqrt{(1+x+x^2)^3}+\frac{45}{256}\sqrt{1+x+x^2}\right)+ \\ +\frac{135}{1024}\ln\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right).$$

67) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}=-\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x+2+2\sqrt{1+x+x^2}}{x}.$$

68) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x+x^2}}=$$
$$=\left(\frac{3}{4x}-\frac{1}{2x^2}\right)\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{8}\ln\frac{x+2+2\sqrt{1+x+x^2}}{x}.$$

69) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x+x^2)^3}}=\frac{1}{3}\,\frac{3+7x+5x^2}{x\sqrt{1+x+x^2}}+\frac{3}{2}\ln\frac{x+2+2\sqrt{1+x+x^2}}{x}.$$

70) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x+x^2)^3}}=$$
$$=\frac{1}{12}\,\frac{37x^3+23x^2+15x-6}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}-\frac{3}{8}\ln\frac{x+2+2\sqrt{1+x+x^2}}{x}.$$

71) $$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x+x^2}}=\ln\frac{x-1+2\sqrt{1+x+x^2}}{x+1}.$$

72) $$\int \frac{dx}{(x^3-x)\sqrt{x^2+2x+4}}=\frac{1}{2}\ln\frac{x+4+2\sqrt{x^2+2x+4}}{x}- \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+\sqrt{x^2+2x+4}}{x+1}-\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\frac{2x+5+\sqrt{7}\sqrt{x^2+2x+4}}{x-1}.$$

73) $$\int \frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{(x-1)^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x-1} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right) - \frac{3}{\sqrt{7}}\ln\frac{2x+5+\sqrt{7}\sqrt{x^2+2x+4}}{x-1}.$$

74) $$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \frac{x-3}{4(x^2+2x+3)}\sqrt{x^2+2x+4} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+2x+4}}{1-\sqrt{x^2+2x+4}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}.$$

75) $$\int \frac{2x^2+3x^2}{2x^2+x-3}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} = \frac{2x-3}{2x-2}\sqrt{x^2+2x-3}.$$

76) $$\int \frac{x^4+1}{x^2+x+1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}} =$$
$$= \frac{1}{4}(2x-7)\sqrt{x^2+x+2} - \frac{1}{8}\ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+2}\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{1-2\sqrt{x^2+x+2}}{1+2\sqrt{x^2+x+2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3(x^2+x+2)}}.$$

77) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+4)^7}} =$$
$$= \frac{1}{27}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}} - \frac{2}{81}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right)^3 + \frac{1}{135}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right).$$

Замечая, что $x^2+2x+4=(x+1)^2+3$, подстановкой $x+1=\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi$ приходим к интегралу

$$\frac{1}{27}\int \cos^5\varphi\,d\varphi = \frac{1}{27}\int (1-2\sin^2\varphi+\sin^4\varphi)\,d\sin\varphi.$$

Выполнив интегрирование, возвращаемся к прежней переменной на основании равенства $\sin\varphi = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

78) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(3x^2+8x+1)^5}} = \frac{(3x+4)(18x^2+48x-7}{507\sqrt{(3x^2+8x+1)^3}}.$$

Аналогично предыдущему, представив интеграл в виде

$$9\sqrt{3}\int \frac{dx}{\left[\sqrt{(3x+4)^2-13}\right]^5}$$

подстановкой $3x+4=\sqrt{13}\sec\varphi$, приходим к интегралу

$$\frac{3\sqrt{3}}{169}\int \frac{\sec\varphi\,d\varphi}{\operatorname{tg}^4\varphi} = \frac{3\sqrt{3}}{169}\int \frac{1-\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi}\,d\sin\varphi.$$

Для обратной подстановки имеем $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{3x^2+8x+1}}{3x+4}$.

79) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(5+4x-3x^2)^5}} = \frac{(3x-2)(49+24x-18x^2)}{1083\sqrt{(5+4x-3x^2)^3}}.$$

Подстановка $3x-2=\sqrt{19}\sin\varphi$, и для обратной подстановки

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{3x-2}{\sqrt{3}\sqrt{5+4x-3x^2}}.$$

80) $$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right).$$

81) $$\frac{dx}{x+\sqrt{1+x+x^2}}=-x+\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{2}\ln\left(2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}\right)-$$
$$-\ln\left(x-1+2\sqrt{1+x+x^2}\right).$$

82) $$\int\frac{x^2\,dx}{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}=-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{9}x^3+$$
$$+\frac{1}{6}\left(x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{24}x-\frac{37}{48}\right)\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{64}\ln\left(2x+1+\sqrt{1+x+x^2}\right).$$

83) $$\int\frac{\sqrt{1+x+x^2}-3x}{\sqrt{1+x+x^2}-1}\,dx=x-3\sqrt{1+x+x^2}+2\ln x-$$
$$-6\ln(1+x)+\frac{5}{2}\ln\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right)+$$
$$+2\ln\left(1-x+2\sqrt{1+x+x^2}\right)-\ln\left(2+x+2\sqrt{1+x+x^2}\right).$$

84) $$\int\frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{2}(x-3)\sqrt{x^2+2x+4}+$$
$$+\frac{1}{4}(2x-7)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{11}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right)+$$
$$+\frac{43}{8}\ln\left(2x+1+\sqrt{x^2+x+1}\right)+2\sqrt{7}\ln\frac{2x-1-\sqrt{7}\sqrt{x^2+2x+4}}{x+3}+$$
$$+2\sqrt{7}\ln\frac{5x+1-2\sqrt{7}\sqrt{x^2+x+1}}{x+3}.$$

§ 10. Интегралы биномиальных дифференциальных выражений

Под биномиальным дифференциалом понимается выражение вида $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, где m, n, p — положительные или отрицательные, целые или дробные, рациональные числа. При иррациональности какого-либо из этих параметров имеем трансцендентный дифференциал, и этот случай здесь не рассматривается.

Заметим прежде всего, что если числа m, n, p — целые, то под знаком интеграла $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ имеем рациональное выражение, и, следовательно, интеграл всегда выражается в конечном виде, через алгебраические и логарифмические (под последними понимаем и круговые) функции. Если числа m и n — дробные, число же p — целое, то, взяв число q так, чтобы числа mq и nq были целыми, подстановкой $x=t^q$ приводим интегрируемое выражение к рациональному виду и, следовательно, интеграл также вычисляется в конечном виде.

Рассматривая интеграл $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$ при p дробном, равном $\frac{r}{s}$, замечаем, что подстановкой

$$a+bx^n=t^s, \quad x=\left(\frac{t^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$dx=\frac{s}{nb^{\frac{1}{n}}}(t^s-a)^{\frac{1}{n}-1}\,t^{s-1}\,dt$$

интеграл приводится к виду $\frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}}\int (t^s-a)^{\frac{m+1}{n}-1}\,t^{s+r-1}\,dt.$

Если $\frac{m+1}{n}$ равно целому числу или нулю, то под знаком интеграла имеем рациональное выражение и, следовательно, в этом случае интеграл также выражается в конечном виде алгебраическими и логарифмическими функциями.

Представив интеграл $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$ в виде

$$\int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx$$

и применяя к нему только что выведенное условие интегрируемости, видим, что интегрирование выполняется и в случае, если $\frac{m+1}{n}+p$ равно целому числу или нулю. Подстановкой $b+ax^{-n}=t^s$ или $a+bx^n=x^nt^s$ интеграл также приводится тогда к рациональной форме.

Русским математиком Чебышевым в его мемуаре 1853 года доказано *), что только в этих двух случаях и в упомянутом ранее случае, когда p — число целое, интеграл от биномиального дифференциала выражается в конечном виде через алгебраические и логарифмические функции. Если же условия интегрируемости не выполняются и для интеграла числа p, $\frac{m+1}{n}$ и $\frac{m+1}{n}+p$ — дробные, то интеграл вообще не может быть выражен какой-либо конечной комбинацией элементарных функций.

Независимо от того, вычисляется ли в конечном виде интеграл или нет, последовательным применением формул приведения (104)—(113) он всегда может быть приведён к наиболее простой форме, с наименьшим m, лежащим в пределах 0 и n, и наименьшим p, лежащим между 0 и 1. При этом легко видеть, что если для вычисляемого интеграла

*) Чебышев, Собрание сочинений, т. I стр. 163.

выполняется какое-либо из условий интегрируемости, то оно выполняется и для интеграла, к которому приходим в результате приведения. Число m при применении формул или остаётся без изменения или уменьшается на число, кратное n, число же p, если изменяется, то на целое число. Так что, если p или $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ равны целому числу, то в результате применения формул приходим к интегралу, для которого также выполняется соответствующее условие. Если же для вычисляемого интеграла ни одно из условий интегрируемости не выполняется, то в результате приведения также приходим к не выражаемому элементарными функциями интегралу. Дальнейшие операции для последнего интеграла уже бесцельны и его приходится рассматривать как новую, отличную от элементарных, трансцендентную функцию.

Замечание I. Интеграл от биномиального дифференциала легко может быть приведён к виду, не содержащему параметров a и b, если не считать постоянного, зависящего от этих параметров, множителя перед знаком интеграла.

Полагая $bx^n=ay$, если a и b одного знака, и $bx^n=-ay$, если a и b разных знаков, после лёгких преобразований получаем:

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx=\frac{a^p}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int y^{\frac{m+1}{n}-1}(1+y)^p\,dy, \text{ если } a \text{ и } b \text{ одного знака,}$$

$$=\frac{a^p}{n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int y^{\frac{m+1}{n}-1}(1-y)^p\,dy, \text{ если } a \text{ и } b \text{ разных знаков и } a>0,$$

и

$$=\frac{(-a)^p}{n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int y^{\frac{m+1}{n}-1}(y-1)^p\,dy, \text{ если } a \text{ и } b \text{ разных знаков и } a<0.$$

Полагая для первого интеграла $y=\operatorname{tg}^2\varphi$, для второго $y=\sin^2\varphi$ и для третьего $y=\sec^2\varphi$, соответственно приходим к интегралам

$$1)\ \frac{2a^p}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int \operatorname{tg}^{2\left(\frac{m+1}{n}-1\right)}\varphi\,\sec^{2p+2}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{2a^p}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int \sin^{2\left(\frac{m+1}{n}-1\right)}\varphi\,\cos^{-2\left(\frac{m+1}{n}+p\right)}\varphi\,d\varphi,$$

$$2)\ \frac{2a^p}{n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int \sin^{2\left(\frac{m+1}{n}-1\right)}\varphi\,\cos^{2p+1}\varphi\,d\varphi,$$

$$3)\ \frac{2(-a)^p}{n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int \sec^{2\frac{m+1}{n}}\varphi\, \mathrm{tg}^{2p+1}\varphi\, d\varphi =$$

$$=\frac{2(-a)^p}{n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int \sin^{2p+1}\varphi \cos^{-2\left(\frac{m+1}{n}+p\right)-1}\varphi\, d\varphi.$$

Таким образом, интеграл от биномиального дифференциала при всяких значениях a и b может быть приведён также к интегралу тригонометрического выражения вида

$$A\int \sin^k\varphi \cos^l\varphi\, d\varphi,$$

где k и l — рациональные числа.

Замечание II. Всякий интеграл вида $\int x^m(ax^k+bx^l)^p\,dx$ легко может быть представлен в виде $\int x^{m+pk}(a+bx^{l-k})^p\,dx$, т. е. в виде интеграла от биномиального дифференциала, и в каждом конкретном случае мы легко можем притти к выводам относительно условий его интегрируемости.

Так, интеграл $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$ (встречающийся в теории движения маятника) подстановкой $x=az^2$ приводится к виду $2a^m\int\frac{z^{2m}\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$. Условия интегрируемости последнего приводят к заключению, что рассматриваемый интеграл вычисляется в конечном виде при следующих условиях: если m — целое число и если $m=\frac{2k+1}{2}$, где k — целое число или нуль.

Подстановками $z=\sin\varphi$ и $z=\cos\varphi$ интеграл можно привести к интегралам $2a^m\int\sin^{2m}\varphi\,d\varphi$ и $-2a^m\int\cos^{2m}\varphi\,d\varphi$, которые, очевидно, вычисляются в конечном виде при тех же условиях, т. е. когда m — целое и $m=\frac{2k+1}{2}$, где k — целое число или нуль. Таким образом, интегралы $\int\sin^n x\,dx$ и $\int\cos^n x\,dx$ вычисляются в конечном виде только в том случае, когда n представляет целое (чётное или нечётное) число.

1) При m целом и $n=\pm 1$ число $\frac{m+1}{n}$ всегда целое или равно нулю. Следовательно, интеграл $\int x^m\sqrt[s]{(a+bx^{\pm1})^r}\,dx$ при всех возможных комбинациях знаков a, b, m и r выражается в конечном виде. Подстановкой $\sqrt[s]{a\pm bx^{\pm1}}=t$ он приводится к рациональной форме.

При m положительном имеем

$$\int x^m \sqrt[s]{(a+bx)^{\pm r}}\,dx = \frac{s}{b^{m+1}} \int (t^s - a)^m t^{s\pm r-1}\,dt =$$

$$= \frac{s}{b^{m+1}} \int \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} (-a)^{m-p}\, t^{sp} t^{s\pm r-1}\,dt =$$

$$= \frac{s}{b^{m+1}} \int \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} (-a)^{m-p}\, t^{sp+s\pm r-1}\,dt.$$

Выполняя интегрирование и возвращаясь к прежней переменной x, получаем:

$$\int x^m \sqrt[s]{(a+bx)^{\pm r}}\,dx =$$

$$= \frac{s\sqrt[s]{(a+bx)^{s\pm r}}}{b^{m+1}} \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} (-a)^{m-p} \frac{(a+bx)^p}{s(p+1)\pm r} \quad (m \geqslant 0). \tag{207}$$

При m отрицательном имеем интеграл

$$\int \sqrt[s]{(a+bx)^{\pm r}}\,\frac{dx}{x^m} = sb^{m-1} \int \frac{t^{s\pm r-1}\,dt}{(t^s-a)^m}.$$

Последний интеграл путём приведения приводится к одному из интегралов (43) — (53).

II) При m целом, положительном или отрицательном, $n=2$ и при $p = \pm\frac{2n+1}{2}$ числа $\frac{m+1}{n}$, если m — нечётное, и $\frac{m+1}{n}+p$, если m — чётное, всегда целые, так что интеграл $\int x^m [\sqrt{a+bx^2}]^{\pm(2n+1)} dx$ подстановками $\sqrt{a+bx^2}=t$, если m — нечётное и $\sqrt{a+bx^2}=xt$, если m — чётное, приводится к рациональной форме.

Рассмотрим этот интеграл в условиях различных комбинаций знаков показателей.

Подстановкой $\sqrt{a+bx^2}=t$, $x^2=\frac{1}{b}=(t^2-a)$, $x\,dx=\frac{1}{b}\,t\,dt$ интеграл $\int x^{2m+1}[\sqrt{a+bx^2}]^{\pm(2n+1)}\,dx$ приводится к интегралу

$$\frac{1}{b^{m+1}} \int (t^2-a)^m\, t^{\pm(2n+1)+1}\,dt = \frac{1}{b^{m+1}} \int \sum_0^m \binom{m}{p} (-a)^{m-p}\, t^{2p\pm(2n+1)+1}\,dt.$$

Выполнив интегрирование и возвращаясь к прежней переменной x, имеем:

$$\int x^{2m+1}[\sqrt{a+bx^2}]^{\pm(2+1)}\,dx=$$

$$=\frac{[\sqrt{a+bx}]^{\pm(2n+1)+2}}{b^{m+1}}\sum_0^m\binom{m}{p}(-a)^{m-p}\frac{(a+bx^2)^p}{2(p+1)\pm(2n+1)}.$$

Отсюда

$$\int x^{2m+1}\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+3}}}{b^{m+1}}\sum_0^m\binom{m}{p}(-a)^{m-p}\frac{(a+bx^2)^p}{2p+2n+3} \tag{208}$$

и

$$\int\frac{x^{2m+1}\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}=$$

$$=\frac{1}{b^{m+1}\sqrt{(a+bx^2)^{2n-1}}}\sum_0^m\binom{m}{p}(-a)^{m-p}\frac{(a+bx^2)^p}{2p-2n+1}. \tag{209}$$

Интегралы $\int\frac{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}{x^{2m+1}}\,dx$ и $\int\frac{dx}{x^{2m+1}\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}$ той же подстановкой приводятся соответственно к интегралам

$$b^m\int\frac{t^{2n+2}\,dt}{(t^2-a)^{m+1}}\quad\text{и}\quad b^m\int\frac{dt}{t^{2n}(t^2-a)^{m+1}},$$

последние же методом приведения приводятся к интегралу $\int\frac{dt}{t^2-a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a}-t}{\sqrt{a}+t}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+bx^2}}{x}$ при положительном a, и $\int\frac{dt}{t^2-a}=\frac{1}{\sqrt{\bar{a}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\bar{a}}}=\frac{1}{\sqrt{\bar{a}}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a+bx^2}}{\sqrt{\bar{a}}}$ при отрицательном a.

Интеграл $\int x^{2m}[\sqrt{a+bx^2}]^{\pm(2n+1)}\,dx$ подстановкой $\sqrt{a+bx^2}=xt$, $x^2=\frac{a}{t^2-b}$, $\sqrt{a+bx^2}=\frac{t\sqrt{a}}{\sqrt{t^2-b}}$, $dx=-\frac{\sqrt{a}t\,dt}{\sqrt{(t^2-b)^3}}$ приводится к интегралу $-a^{m+\frac{\pm(2n+1)+1}{2}}\int\frac{t^{\pm(2n+1)+1}\,dt}{(t^2-b)^{m+\frac{\pm(2n+1)+3}{2}}}$, так что

$$\int x^{2m}\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}\,dx=-a^{m+n+1}\int\frac{t^{2n+2}\,dt}{(t^2-b)^{m+n+2}},$$

$$\int\frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}=-a^{m-n}\int\frac{(t^2-b)^{n-m-1}}{t^{2n}}\,dt.$$

$$\int \frac{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}{x^{2m}}\,dx = -a^{n-m+1}\int (t^2-b)^{m-n-2}\,t^{2n+2}\,dt,$$

$$\int \frac{dx}{x^{2m}\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}} = -\frac{1}{a^{m+n}}\int \frac{(t^2-b)^{m+n-1}}{t^{2n}}\,dt.$$

Первый интеграл вычисляется методом приведения, в результате которого приходим к интегралу

$$\int \frac{dt}{t^2-b} = \frac{1}{2\sqrt{b}}\ln\frac{\sqrt{b}-t}{\sqrt{b}+t} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left(x\sqrt{b}-\sqrt{a+bx^2}\right)$$

при положительном b, и

$$= \frac{1}{\sqrt{-b}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{-b}} = \frac{1}{\sqrt{-b}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a+bx^2}}{x\sqrt{-b}}$$

при отрицательном b. Если для второго интеграла $n \geqslant m+1$, то

$$\int \frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}} = -\frac{1}{a^{n-m}}\int \sum_{0}^{n-m-1}\binom{n-m-1}{p}(-b)^{n-m-1-p}\,t^{2p-2n}\,dt,$$

откуда

$$\int \frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}} =$$

$$= -\frac{x^{2n-1}}{a^{n-m}\sqrt{(a+bx^2)^{2n-1}}}\sum_{0}^{n-m-1}\binom{n-m-1}{p}\frac{(-b)^{n-m-1-p}}{2p-2n+1}\left(\frac{a+bx^2}{x^2}\right)^p \tag{210}$$

$$(n \geqslant m+1).$$

Если же $n < m+1$, то интеграл $\int \frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}$ приводится подстановкой к интегралу $-a^{m-n}\int \frac{dt}{t^{2n}(t^2-b)^{m-n+1}}$, который приводится к интегралу $\int \frac{dx}{t^2-b}$.

Для третьего интеграла, если $n \leqslant m-2$, получаем

$$\int \frac{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}{x^{2m}}\,dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{(a+bx^2)^{2n+3}}}{a^{m-n-1}\,x^{2n+3}}\sum_{0}^{m-n-2}\binom{m-n-2}{p}\frac{(-b)^{m-n-2-p}}{2p+2n+3}\left(\frac{a+bx^2}{x^2}\right)^p \tag{211}$$

$$(n \leqslant m-2).$$

Если же $n > m-2$, то интеграл $-a^{n-m+1}\int \frac{t^{2n+2}\,dt}{(t^2-b)^{n-m+2}}$ вычисляется методом приведения. Для четвёртого интеграла получаем:

$$\int \frac{dx}{x^{2m}\sqrt{(a+bx^2)^{2n+1}}}=$$

$$=-\frac{x^{2n-1}}{a^{m+n}\sqrt{(a+bx^2)^{2n-1}}}\sum_{0}^{m+n-1}\binom{m+n-1}{p}\frac{(-b)^{m+n-1-p}}{2p-2n+1}\left(\frac{a+dx^2}{x^2}\right)^p. \quad (212)$$

Формула справедлива для всяких целых m и n и теряет значение только в случае, когда они оба равны нулю. В этом случае имеем интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}\right) \quad \text{для положительного } b$$

и

$$=\frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right) \text{ для отрицательного } b.$$

На практике, если после подстановки приходится вычислять интеграл методом приведения, часто проще бывает использовать этот метод (формулы (104) — (113)) непосредственно по отношению к вычисляемому интегралу, без введения нового переменного.

III) Заменяя n на $\frac{1}{n}$, видим, что при m целом, безразлично положительном или отрицательном, число $\frac{m+1}{n}$ всегда целое или при $m=-1$ равно нулю. Следовательно, интеграл $\int x^m\left[\sqrt[s]{a+b\sqrt[n]{x}}\right]^{\pm r}dx$ вычисляется в конечном виде и приводится к рациональной форме подстановкой $\sqrt[s]{a+b\sqrt[n]{x}}=t$.

Имея при этой подстановке $x=\left(\frac{t^s-a}{b}\right)^n$,

$$dx=\frac{sn}{b}(t^s-a)^{n-1}t^{s-1}\,dt,$$

приводим рассматриваемый интеграл к виду

$$\frac{sn}{b^{n(m+1)}}\int(t^s-a)^{mn+n-1}\,t^{s\pm r-1}\,dt.$$

Если $m\geqslant 0$, то, развёртывая $(t^s-a)^{mn+n-1}$ по степеням t и суммируя, получаем:

$$\int x^m\left[\sqrt[s]{a+b\sqrt[n]{x}}\right]^{\pm r}dx=$$

$$=\frac{sn}{b^{n(m+1)}}\int\sum_{0}^{mn+n-1}\binom{mn+n-1}{p}(-a)^{mn+n-1-p}\,t^{sp+s\pm r-1}\,dt=$$

$$=\frac{sn}{b^{n(m+1)}}\sum_{0}^{mn+n-1}\binom{mn+n-1}{p}(-a)^{mn+n-1-p}\frac{t^{sp+s\pm r}}{sp+s\pm r},$$

и, возвращаясь к прежней переменной:

$$\int x^m \left[\sqrt[s]{a+b\sqrt[n]{x}}\right]^{\pm r} dx =$$

$$= \frac{sn\left[\sqrt[s]{a+b\sqrt[n]{x}}\right]^{s\pm r}}{b^{n(m+1)}} \sum_{0}^{mn+n-1} \binom{mn+n-1}{p} \frac{(-a)^{mn+n-1-p}}{sp+s\pm r}(a+b\sqrt[n]{x})^p \quad (213)$$

$$(m \geqslant 0).$$

При $m=-1$ имеем интеграл

$$\int \left[\sqrt[s]{a+b\sqrt[n]{x}}\right]^{\pm r} \frac{dx}{x} = sn \int \frac{t^{s\pm r-1}\,dt}{t^s-a} \qquad \left(t=\sqrt[s]{a+b\sqrt[n]{x}}\right),$$

и последний интеграл вычисляем по формулам (43)—(53).

При $m<-1$ имеем:

$$\int \left[\sqrt[s]{a+b\sqrt[n]{x}}\right]^{\pm r} \frac{dx}{x^m} = snb^{n(m+1)} \int \frac{t^{s\pm r-1}\,dt}{(t^s-a)^{mn+n-1}}$$

$$\left(m>1,\ t=\sqrt[s]{a+b\sqrt[n]{x}}\right).$$

По формулам (106)—(108) этот интеграл приводится к предыдущему.

IV) При $m=kn-1$, где k—целое, положительное, отрицательное число или нуль, число $\frac{m+1}{n}$ — всегда целое, так что всякий интеграл вида $\int x^{kn-1}\left[\sqrt[s]{a+bx^n}\right]^{\pm r} dx$ всегда вычисляется в конечном виде и приводится к рациональной форме подстановкой $\sqrt[s]{a+bx^n}=t$.

При этой подстановке приходим к интегралу

$$\frac{s}{nb^k}\int (t^s-a)^{k-1}\,t^{t\pm r-1}\,dt.$$

Для $k \geqslant 1$ получаем формулу

$$\int x^{kn-1}\left[\sqrt[s]{a+bx^n}\right]^{\pm r} dx =$$

$$= \frac{s}{nb^k}\left[\sqrt[s]{a+bx^n}\right]^{s\pm r} \sum_{0}^{k-1} \binom{k-1}{p} \frac{(-a)^{k-1-p}}{(k-p)s\pm r}(a+bx^n)^p. \quad (214)$$

При $k=0$ имеем интеграл

$$\int \left[\sqrt[s]{a+bx^n}\right]^{\pm r} \frac{dx}{x} = \frac{s}{n}\int \frac{t^{s\pm r-1}}{t^s-a}\,dt,$$

и последний интеграл вычисляем по формулам (43)—(53).

При $k<0$, заменяя k на $(-k)$, имеем:

$$\int\left[\sqrt[s]{a+bx^n}\right]^{\pm r}\frac{dx}{x^{kn+1}}=\frac{sb^k}{n}\int\frac{t^{s\pm r-1}\,dt}{(t^s-a)^{k+1}}\qquad (k>0).$$

Последний интеграл приводится к предыдущему.

V) Рассматривая интеграл $\int x^m\sqrt[n]{(a+bx^n)^r}\,dx$ при m, n, r целых, видим, что в случае $\frac{m+r+1}{n}=\pm k$, где k — целое число или нуль, интеграл вычисляется в конечном виде. Подстановкой $\sqrt[n]{a+bx^n}=xt$, при которой $x=\left(\frac{a}{t^n-b}\right)^{\frac{1}{n}}$, $dx=-a^{\frac{1}{n}}\frac{t^{n-1}\,dt}{(t^n-b)^{\frac{n+1}{n}}}$, интеграл приводится к рациональной форме.

Если $m+r+1$ — число отрицательное, то приходим к интегралу $-\frac{1}{a^k}\int(t^n-b)^{k-1}\,t^{n+r-1}\,dt$ и, выполнив интегрирование, по возвращении к прежней переменной получаем:

$$\int x^m\left(\sqrt[n]{a+bx^n}\right)^r dx=$$

$$=-\frac{1}{a^k}\left(\frac{\sqrt[n]{a+bx^n}}{x}\right)^{n+r}\sum_{0}^{k-1}\binom{k-1}{p}\frac{(-b)^{k-1-p}}{n(p+1)+r}\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^p \qquad (215)$$

$$\left(k=\frac{m+r-1}{n},\ m+r+1<0\right).$$

Для интеграла получаем алгебраическое выражение.

Если в то же время $m=0$, то $r=-kn-1$, и формула после небольших преобразований даёт

$$\int\frac{dx}{(a+bx^n)^k\sqrt[n]{a+bx^n}}=$$

$$=\frac{x}{a^k\sqrt[n]{a+bx^n}}\sum_{k=0}^{k-1}\binom{k-1}{p}\frac{1}{1+np}\left(\frac{-bx^n}{a+bx^n}\right)^p. \qquad (216)$$

Если $m+r+1=0$, то, заменяя m на $(-r-1)$, имеем

$$\int\left(\frac{\sqrt[n]{a+bx^n}}{x}\right)^r\frac{dx}{x}=-\int\frac{t^{r+n-1}\,dt}{t^n-b}.$$

Последний интеграл вычисляется по формулам (43) — (53) и для него получаем логарифмическое выражение.

Если в то же время $m=0$, так что $r=-1$, то имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{a+bx^n}} = -\int \frac{t^{n-2}\,dt}{t^n-b}.$$

При $m+r+1>0$ имеем

$$\int x^m \sqrt[n]{(a+bx^n)^r}\,dx = -a^k \int \frac{t^{n+r-1}\,dt}{(t^n-b)^{k+1}} \quad \left(k=\frac{m+r-1}{n}\right)$$

и, по выделении путём приведения алгебраической части, приходим к предыдущему интегралу.

Принимая в то же время $m=0$, так что $r=kn-1$, имеем

$$\int \sqrt[n]{(a+bx^n)^{kn-1}}\,dx = -a^k \int \frac{t^{kn+n-2}\,dt}{(t^n-b)^{k+1}}.$$

Примеры

85) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}} = \frac{(3x+2)\sqrt{x-1}}{4x^2} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$

(подст. $\sqrt{x-1}=t$).

86) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}\right)^4} = -\sqrt[3]{\frac{x}{x-3}}$ (подст. $\sqrt[3]{1-3x^{-1}}=t$).

87) $\displaystyle\int \sqrt[3]{(3x-1)^4}\,\frac{dx}{x^2} = \frac{(9x+1)\sqrt[3]{3x-1}}{x} + 2\ln x - 6\ln\left(\sqrt[3]{3x-1}+1\right) -$

$\displaystyle - 4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{3x-1}-1}{\sqrt{3}}.$

88) $\displaystyle\int \sqrt[3]{(4-3x)^3}\,x^2\,dx = -\frac{\sqrt[3]{(3-4x)^7}}{4095}(315x^2+252x+144).$

89) $\displaystyle\int \sqrt[4]{(1-2\sqrt[3]{x})^3}\,\frac{dx}{x} = 4\sqrt[4]{(1-2\sqrt[3]{x})^3} + 3\ln\frac{1-\sqrt[4]{1-2\sqrt[3]{x}}}{1+\sqrt[4]{1-2\sqrt[3]{x}}} +$

$\displaystyle + 6\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1-2\sqrt[3]{x}}$ (подст. $\sqrt[4]{1-2\sqrt[3]{x}}=t$).

90) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(3-2\sqrt[4]{x})^3}} = -\frac{4}{65}(144+24\sqrt{x}+10x+5x\sqrt{x})\sqrt{3-2\sqrt{x}}.$

91) $\displaystyle\int \sqrt[4]{(2\sqrt{x}-1)^5}\,\frac{dx}{x^2} =$

$\displaystyle = \frac{(2-9\sqrt{x})\sqrt[4]{2\sqrt{x}-1}}{2x} + \frac{5}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}\sqrt[4]{2\sqrt{x}-1}+\sqrt{2\sqrt{x}-1}}{1-\sqrt{2}\sqrt[4]{2\sqrt{x}-1}+\sqrt{2\sqrt{x}-1}} +$

$\displaystyle + \frac{5}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{2\sqrt{x}-1}}{1-\sqrt[4]{2\sqrt{x}-1}}.$

92) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^7+1}\, x^6\, dx = \frac{3}{28}\sqrt[3]{(x^7+1)^4}.$

93) $\displaystyle\int \frac{x^6\, dx}{\sqrt[3]{(x^7+1)^5}} = -\frac{3}{14\sqrt[3]{(x^7+1)^2}}.$

94) $$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(2x^7+27)^2}} = \frac{1}{42}\ln\left(\sqrt[3]{2x^7-27}+3\right) - \frac{1}{18}\ln x + \\ + \frac{1}{21\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{2x^7-27}}{3\sqrt{3}} \qquad (\text{подст. } \sqrt[3]{2x^7-27}=t).$$

95) $$\int \sqrt[3]{(x^7+1)^2}\,\frac{dx}{x^8} = -\frac{\sqrt[3]{(x^7+1)^2}}{7x^7} + \frac{1}{7}\quad\left(\sqrt[3]{x^7+1}-1\right) - \\ - \frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^7+1}+1}{\sqrt{3}}.$$

96) $$\int \sqrt[4]{3+4x^4}\,\frac{dx}{x^2} = -\frac{\sqrt[4]{3+4x^4}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{3+4x^4}}{x\sqrt{2}-\sqrt{3+4x^4}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{3+4x^4}}{x\sqrt{2}}.$$

97) $$\int x^2\sqrt[4]{(3+4x^4)^5}\,dx = \frac{1}{32}x^3(16x^4+27)\sqrt[4]{3+4x^4} + \\ + \frac{45}{256\sqrt{2}}\ln\frac{x\sqrt{2}+\sqrt[4]{3+4x^4}}{x\sqrt{2}-\sqrt[4]{3+4x^4}} + \frac{45}{128\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{3+4x^4}}{x\sqrt{2}}.$$

98) $$\int x^6\sqrt[4]{3+4x^4}\,dx = \frac{1}{128}x^3(16x^4+3)\sqrt[4]{3+4x^4} - \\ - \frac{27}{1024\sqrt{2}}\ln\frac{x\sqrt{2}+\sqrt[4]{3+4x^4}}{x\sqrt{2}-\sqrt[4]{3+4x^4}} - \frac{27}{512\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{3+4x^4}}{x\sqrt{2}}.$$

99) $$\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^4(1-x^2)} + \frac{1}{2}\ln x - \\ - \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{1-x^2}\right) - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x^2}}.$$

(подст. $1-x^2=x^2t^2$).

100) $$\int \sqrt{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx = \left\{\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{3}{40}\sqrt[3]{x^4} - \frac{7}{16}x + \frac{7}{64}\sqrt[3]{x^2} - \right. \\ \left. - \frac{21}{128}\sqrt{x}\right\}\sqrt{\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}} - \frac{21}{256}\ln\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$$

(подст. $1+x^{-\frac{1}{3}}=t$).

§ 11. Абелев интеграл. Эллиптические интегралы

Рассмотрим интеграл более общего алгебраического выражения, $\int R(x, y)\,dx$, где R — знак рациональной функции по отношению к своим аргументам и y является иррациональной функцией от x, определяемой уравнением какой-либо кривой $F(x, y)=0$. Такой интеграл носит название абелева интеграла, связанного с кривой $F(x, y)=0$.

Выражая y, как функцию от x, из уравнения $F(x, y)=0$ имеем $y=\sqrt[n]{P(x)}$, где $P(x)$ представляет целую рациональную функцию от x.

При $n=2$ и степени функции $P(x)$, не выше второй, имеем простейшие интегралы рассматриваемого вида. Эти интегралы, как видно из предыдущего изложения этой главы, приводятся к интегралам рациональных выражений и, следовательно, теоретически всегда вычисляются в конечном виде.

Если же степень функции $P(x)$ выше второй или показатель $n>2$, то соответствующие интегралы *вообще не могут быть выражены какой-либо конечной комбинацией элементарных, алгебраических и логарифмических функций. Если некоторые из этих интегралов вычисляются в конечном виде, то лишь в редких, по существу исключительных случаях.*

Наиболее простыми из абелевых интегралов и вместе с тем наиболее исследованными являются эллиптические интегралы. К исследованию их привела в своё время задача вычисления длины дуги эллипса, и потому за ними сохранилось название эллиптических.

В общем виде эллиптический интеграл можно представить так: $\int F\{x, \sqrt{P(x)}\}\,dx$, где F — знак рациональной функции по отношению к своим аргументам, а $P(x)$ является многочленом 3-й или 4-й степени. Оба последних случая легко приводятся один к другому, так что, если под знаком корня имеется многочлен 3-й степени $P(x)=A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3$, то этот случай мы можем привести к такому, чтобы под корнем был бы уже многочлен 4-й степени. С этой целью пользуемся подстановкой $x=a+\frac{1}{z}$, где a не является корнем многочлена $P(x)$. Многочлен $P(x)$ тогда преобразуется к виду

$$\frac{1}{z^4}\{(A_0a^3+A_1a^2+A_2a+A_3)z^4+(3A_0a^2+2A_1a+A_2)z^3+ \\ +(3A_0a+A_1)z^2+A_0z\},$$

и интеграл $\int F\{x, \sqrt{P(x)}\}\,dx$ приводится к виду $\int F\{z, \sqrt{P_1(z)}\}\,dz$, где $P_1(z)$ является многочленом 4-й степени.

Поэтому вполне достаточно при исследовании эллиптического интеграла ограничиться лишь случаем подкоренного выражения 4-й степени.

Преобразование подкоренного выражения эллиптического интеграла

Многочлен $P(x) = A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4$, как известно из алгебры, всегда может быть представлен в виде произведения $\pm A_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — корни этого многочлена. Корни могут быть все вещественными, или попарно вещественными и комплексными сопряжёнными, или же все попарно комплексными сопряжёнными. В первом случае, распределив корни в порядке величины, можем принять $\alpha > \beta > \gamma > \delta$, во втором случае два корня γ и δ и в третьем все корни $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ можем принять комплексными, попарно сопряжёнными.

В случае равных попарно корней $\beta = \alpha$ и $\delta = \gamma$ интеграл $\int F\{x, \sqrt{P(x)}\}\,dx$ имел бы вид $\int F\{x, \pm(x-\alpha)(x-\gamma)\}\,dx$, т. е. являлся бы интегралом рационального алгебраического выражения. В случае трёх или двух кратных корней, $\gamma = \delta = \beta$ или $\gamma = \delta$, интеграл имел бы вид $\int F\{x, (x-\beta)\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}\}\,dx$ или $\int F\{x, (x-\delta)\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}\}\,dx$, приводящихся согласно § 2 к рациональным формам. Следовательно, во всех трёх случаях интеграл вычислялся бы в конечном виде.

Возвращаясь к общему случаю, покажем, что подкоренное выражение $P(x)$ всегда может быть преобразовано к такому виду, чтобы оно содержало только чётные степени переменного x. Для этого пользуемся подстановкой $x = \frac{ph+qy}{h+y}$ с последующим, удовлетворяющим цели, определением параметров p, q, h.

В результате подстановки имеем

$$P(x) = \pm \frac{A_0}{(h+y)^4}\{h^2(p-\alpha)(p-\beta) - hy[(p-\alpha)(q-\beta) + (q-\alpha)(p-\beta)] + y^2(q-\alpha)(q-\beta)\} \cdot \{h^2(p-\gamma)(p-\delta) - hy[(p-\gamma)(q-\delta) + (q-\gamma)(p-\delta)] + y^2(q-\gamma)(q-\delta)\}.$$

Группируя при выполнении умножения коэффициенты при различных степенях y, замечаем, что коэффициенты при 1-й и 3-й степенях y обращаются в нуль при условии

$$\begin{cases} (p-\alpha)(q-\beta) + (q-\alpha)(p-\beta) = 0, \\ (p-\gamma)(q-\delta) + (q-\gamma)(p-\delta) = 0. \end{cases}$$

Так как каждая пара корней α и β, γ и δ или вещественные или комплексные сопряжённые, то эти уравнения при всех условиях дают вещественные значения для p и q.

При p и q, удовлетворяющих последним равенствам, имеем:

$$P(x)=\pm\frac{A_0}{(h+y)^4}\{h^4(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta)+$$
$$+h^2y^2[(q-\alpha)(q-\beta)(p-\gamma)(p-\delta)+(q-\gamma)(q-\delta)(p-\alpha)(p-\beta)]+$$
$$+y^4(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)(q-\delta)\},$$

или по вынесении за скобки произведения

$$h^4(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta),$$

$$P(x)=\pm\frac{h^4}{(h+y)^4}A_0(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta)\Big\{1+$$
$$+\left[\frac{(q-\alpha)(q-\beta)}{(p-\alpha)(p-\beta)}+\frac{(q-\gamma)(q-\delta)}{(p-\alpha)(p-\delta)}\right]\frac{y^2}{h^2}+\frac{(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)(q-\delta)}{(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta)}\frac{y^4}{h^4}\Big\}.$$

Для $\sqrt{P(x)}$ тогда имеем выражение

$$\sqrt{P(x)}=\frac{h^2}{(h+y)^2}\sqrt{A_0(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta)}\times$$
$$\times\sqrt{\pm\left[1+\frac{(q-\alpha)(q-\beta)}{(p-\alpha)(p-\beta)h^2}y^2\right]\left[1+\frac{(q-\gamma)(q-\delta)}{(p-\gamma)(p-\delta)h^2}y^2\right]},$$

в котором все произведения являются вещественными, поскольку вещественны p и q, корни же $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ или вещественные или попарно сопряжённые.

Допуская, что $\frac{(q-\alpha)(q-\beta)}{(p-\alpha)(p-\beta)}>\frac{(q-\gamma)(q-\delta)}{(p-\gamma)(p-\delta)}$, полагаем $h=\sqrt{\pm\frac{(q-\alpha)(q-\beta)}{(p-\alpha)(p-\beta)}}$, где знак под корнем выбираем таким, чтобы подкоренное выражение было положительным.

Тогда $\sqrt{P(x)}$ преобразуется к виду

$$\sqrt{P(x)}=\frac{(q-\alpha)(q-\beta)}{(h+y)^2}\sqrt{A_0\frac{(p-\gamma)(p-\delta)}{(p-\alpha)(p-\beta)}}\times$$
$$\times\sqrt{\pm[1\pm y^2]\left[1\pm\frac{(q-\gamma)(q-\delta)(p-\alpha)(p-\beta)}{(p-\gamma)(p-\delta)(q-\alpha)(q-\beta)}y^2\right]},$$

или, наконец, при обозначении $\frac{(q-\gamma)(q-\delta)(p-\alpha)(p-\beta)}{(p-\gamma)(p-\delta)(q-\alpha)(q-\beta)}=c^2<1$

$$\sqrt{P(x)}=\frac{(q-\alpha)(q-\beta)}{(h+y)^2}\sqrt{A_0\frac{(p-\gamma)(p-\delta)}{(p-\alpha)(p-\beta)}}\sqrt{\pm(1\pm y^2)(1\pm c^2y^2)}.$$

Подставляя $y^2=\frac{A+Bt^2}{C+Dt^2}$, для каждой из возможных комбинаций знаков под корнем всегда можем определить A, B, C, D, так, чтобы $\sqrt{\pm(1\pm y^2)(1\pm c^2y^2)}$ был приведён к виду $\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$, $k^2<1$.

Выполним это преобразование для наиболее простых из эллиптических интегралов, вида $\int\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$ и вместе с тем, соответственно выбранными для каждой комбинации знаков подстановками приведём их также к нормальной форме, данной Лежандром.

1) Для приведения интеграла $\int\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}=\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}$ нет надобности в специальной подстановке, выражая же интеграл в нормальной форме, имеем

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$(y=\sin\varphi,\ k=c).$$

2) При подстановке $y^2=\frac{A+Bt^2}{C+Dt^2}$ имеем:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+c^2y^2)}}=$$

$$=\frac{(BC-AD)\,t\,dt}{\sqrt{(A+Bt^2)(C+Dt^2)\left[(A+C)+(B+D)t^2\right]\left[(c^2A+C)+(c^2B+D)t^2\right]}}.$$

Для того чтобы третий из множителей, находящихся под корнем, был равен 1, должно быть $A+C=1$ и $B+D=0$. Для того же, чтобы один из двух первых множителей мог быть вынесен из под знака корня, какой-либо из коэффициентов A, B, C, D должен быть равен нулю. Для B и D это невозможно, так как в силу допущенного равенства $B+D=0$ они могут быть равны нулю только оба вместе. Следовательно, остаются лишь две возможности: a) $A=0$, $C=1$, $D=-B$ и b) $A=1$, $C=0$, $D=-B$. Из них первая, если принять вместе с тем $B=1$, приводит интегрируемое выражение к желательной форме.

В результате получаем:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+c^2y^2)}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$(y=\operatorname{tg}\varphi,\ k^2=1-c^2<1).$$

3) Для интеграла $\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+c^2y^2)}}$ определяем

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=1,\quad D=0,\quad \frac{c^2}{1+c^2}=k^2,$$

после чего

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+c^2y^2)}} = -\sqrt{1-k^2}\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} =$$
$$= -\sqrt{1-k^2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \left(y=\cos\varphi,\ k^2=\frac{c^2}{1+c^2}\right).$$

4) $$\int \frac{dy}{\sqrt{-(1-y^2)(1+c^2y^2)}} = k\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} =$$
$$= k\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \left(y=\sec\varphi,\ k^2=\frac{1}{1+c^2}\right).$$

$$A=1,\quad B=0,\ C=1,\quad D=-1,\quad \frac{1}{1+c^2}=k^2.$$

5) $$\int \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2(1-c^2y^2)}} = -k\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} =$$
$$= -k\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \left(y=\frac{1}{c}\cos\varphi,\ k^2=\frac{1}{1+c^2}\right).$$

$$A_1=1,\quad B=-1,\quad C=c^2,\quad D=0,\quad \frac{1}{1+c^2}=k^2.$$

6) $$\int \frac{dy}{\sqrt{-(1+y^2)(1-c^2y^2)}} = \sqrt{1-k^2}\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} =$$
$$= \sqrt{1-k^2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \left(y=\frac{1}{c\cos\varphi},\ k^2=\frac{c^2}{1+c^2}\right)$$

$$A=1,\quad B=0,\quad C=c^2,\quad D=-c^2,\quad \frac{c^2}{1+c^2}=k^2.$$

7) $$\int \frac{dy}{\sqrt{-(1-y^2)(1-c^2y^2)}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} =$$
$$= -\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \left(y^2=\sin^2\varphi+\frac{1}{c^2}\cos^2\varphi,\ k^2=1-c^2\right)$$
$$A=1,\quad B=c^2-1,\quad C=c^2,\quad D=0,\quad 1-c^2=k^2.$$

8) $$\frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(c^2y^2-1)}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = -\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$\left(y=\frac{1}{c\sin\varphi},\ k=c\right).$$

Приведение эллиптического интеграла к основным формам

В результате изложенного преобразования в дальнейшем исследовании эллиптического интеграла $\int F\{t, \sqrt{P(t)}\}\,dt$ можем принять $\sqrt{P(t)}=\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$. В общем виде интегрируемую функцию $F\{t, \sqrt{P(t)}\}$ можно рассматривать, как частное от деления двух функций $f_1(t, \sqrt{P(t)})$ и $f_2(t, \sqrt{P(t)})$, в которых по выполнении всех необходимых операций чётные степени $\sqrt{P(t)}$ представляют целые рациональные функции от t, нечётные же содержат $\sqrt{P(t)}$ лишь в 1-й степени. Таким образом, интегрируемую функцию можно представить в виде дроби $\frac{A+B\sqrt{P(t)}}{C+D\sqrt{P(t)}}$, где A, B, C, D являются целыми рациональными функциями относительно t.

Умножая числитель и знаменатель дроби на $(C-D\sqrt{P(t)})$, имеем

$$\int\frac{(A+B\sqrt{P(t)})(C-D\sqrt{P(t)})}{C^2-D^2P(t)}\,dt=$$

$$=\int\frac{AC-BD\cdot P(t)}{C^2-D^2\cdot P(t)}\,dt+\int\frac{(BC-AD)\sqrt{P(t)}}{C^2-D^2\cdot P(t)}\,dt=$$

$$=\int\frac{AC-BD\cdot P(t)}{C^2-D^2\cdot P(t)}\,dt+\int\frac{(BC-AD)P(t)}{C^2-D^2\cdot P(t)}\cdot\frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$$

или, обозначая

$$AC-BD\cdot P(t)=L,\ (BC-AD)P(t)=M,\ C^2-D^2\cdot P(t)=N,$$

$$\int F\{t, \sqrt{P(t)}\}\,dt=\int\frac{A+B\sqrt{P(t)}}{C+D\sqrt{P(t)}}\,dt=\int\frac{L}{N}\,dt+\int\frac{M}{N}\frac{dt}{\sqrt{P(t)}},$$

где L, M, N — целые рациональные функции относительно t.

Первый интеграл является интегралом рациональной алгебраической функции и вычисляется, как известно, в конечном виде; второй же, в результате группировки отдельно всех членов, содержащих нечётные и чётные степени t, распадается на два интеграла

$$\int\frac{M}{N}\frac{dt}{\sqrt{P(t)}}=\int f_1(t^2)\frac{t\,dt}{\sqrt{P(t^2)}}+\int f_2(t^2)\frac{dt}{\sqrt{P(t)}}.$$

Первый из этих интегралов подстановкой $t^2=z$ приводится к интегралу $\int f_1(z)\frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1-k^2z)}}$, рассмотренному в § 2, и также вычисляется в конечном виде.

Второй же интеграл по выделении целой части дроби $f_2(t^2)$ и разложении остающейся части на элементарные распадается на сумму интегралов вида

$$R_{(\pm\beta)}=\int\frac{t^{\pm 2\beta}\,dt}{\sqrt{P(t)}}\quad\text{и}\quad S_{(\gamma)}=\int\frac{dt}{(1+nt^2)^{\gamma}\sqrt{P(t)}}.$$

Для понижения степеней 2β и γ пользуемся формулами приведения.

Дифференцируя выражение $t^m\sqrt{P(t)}$, имеем

$$\frac{d}{dt}\left[t^m\sqrt{P(t)}\right]=mt^{m-1}\sqrt{P(t)}+\frac{t^m\left[4k^2t^3-2(k^2+1)t\right]}{2\sqrt{P(t)}}=$$
$$=\frac{k^2(m+2)t^{m+3}}{\sqrt{P(t)}}-\frac{(k^2+1)(m+1)t^{m+1}}{\sqrt{P(t)}}+\frac{mt^{m-1}}{\sqrt{P(t)}}.$$

Умножая на dt, интегрируя и полагая для результата $m=2\beta-3$, получаем формулу приведения для интеграла $R_{(\pm\beta)}$:

$$A\ldots\ t^{2\beta-3}\sqrt{P(t)}=$$
$$=(2\beta-3)R^{(\beta-2)}-(2\beta-2)(1+k^2)R_{(\beta-1)}+(2\beta-1)k^2R_{(\beta)}.$$

Соответствующим порядком получаем формулу приведения и для интеграла $S_{(\gamma)}$:

$$B\ldots\ \frac{n^2t\sqrt{P(t)}}{(1+nt^2)^{\gamma-1}}=(2\gamma-2)(n+1)(n+k^2)S_{(\gamma)}-$$
$$-(2\gamma-3)\left[n(n+2)+k^2(2n+3)\right]S_{(\gamma-1)}+$$
$$+(2\gamma-4)\left[n+k^2(n+3)\right]S_{(\gamma-2)}-(2\gamma-5)k^2S_{(\gamma-3)}.$$

Последовательное применение формулы A приводит в конечном счёте к интегралам $R_{(0)}=\int\frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$, $R_{(1)}=\frac{t^2\,dt}{\sqrt{P(t)}}$, и формулы B — к интегралам:

$$S_{(1)}=\int\frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{P(t)}},\quad S_{(0)}=\int\frac{dt}{\sqrt{P(t)}},$$
$$S_{(-1)}=\int\frac{(1+nt^2)\,dt}{\sqrt{P(t)}}=\int\frac{dt}{\sqrt{P(t)}}+n\int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{P(t)}}.$$

Таким образом, в результате применения формул приведения, а вместе с тем и в результате всего выполненного преобразования эллиптического интеграла $\int F\{x,\sqrt{P(x)}\}\,dx$ по выделении в процессе преобразования интегралов, дающих алгебраические и логарифмические функции, приходим к основным трём формам эллиптического интеграла

$$R_{(0)}=\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\quad R_{(0)}-k^2R_{(1)}=\int\frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$
$$S_{(1)}=\int\frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Нормальные формы эллиптического интеграла

Подстановкой $t=\sin\varphi$ последние интегралы приводятся к трём нормальным формам Лежандра *):

$$F_{(\varphi)}=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \varepsilon_{(\varphi)}=\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$\Pi_{(\varphi,n)}=\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Принимая для вычисления длины дуги эллипса за координаты точки эллипса $x=a\cos\varphi$ и $y=b\sin\varphi$, имеем

$$ds^2=dx^2+dy^2=(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)\,d\varphi^2=[a^2-(a^2-b^2)\cos^2\varphi]\,d\varphi^2,$$

откуда, полагая $a^2-b^2=e^2a^2$, находим

$$s=a\int\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Мы видим, что длина дуги эллипса выражается интегралом

$$\int\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}\,d\varphi=R_{(0)}-k^2R_{(1)}=\int\frac{dt}{\sqrt{P(t)}}-k^2\int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{P(t)}};$$

поэтому за интегралами общего вида $\int F\{x,\sqrt{P(x)}\}\,dx$, где $P(x)$ является целым алгебраическим многочленом 3-й или 4-й степени, вследствие того, что с ними впервые встретились при вычислении длины дуги эллипса, сохранилось название эллиптических.

Бесконечные ряды для основных нормальных форм эллиптического интеграла. Общий вывод.

Все три нормальных вида эллиптического интеграла, а они являются в то же время наиболее простыми из эллиптических интегралов, не вычисляются в конечном виде и могут быть выражены лишь бесконечными рядами.

Выражая функцию $\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$ рядом

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}=1+\frac{1}{2}k^2x^2+\frac{1.3}{2.4}k^4x^4+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}k^{2n}x^{2n}+\ldots,$$

---

*) Legendre, «Traité des fonctions elliptiques», т. I, гл. XI.

для эллиптического интеграла первого вида имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2 \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \\ + \frac{1.3}{2.4}k^4 \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} k^{2n} \int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \ldots$$

Выражая $\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ рядом

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \arcsin x - \\ - \sqrt{1-x^2} \left\{ \frac{1}{2n} x^{2n-1} + \frac{2n-1}{2n(2n-2)} x^{2n-3} + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3}{2n(2n-2)\ldots 2} x \right\}$$

и обозначая полином, заключённый в фигурных скобках, через X_n, для эллиптического интеграла первого вида получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \arcsin x \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \right]^2 k^{2n} \right\} - \\ - \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} k^{2n} X_n. \tag{217}$$

Точно так же, выражая функцию $\sqrt{1-k^2x^2}$ рядом

$$\sqrt{1-k^2x^2} = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \frac{k^{2n}x^{2n}}{2n-1},$$

для эллиптического интеграла второго вида имеем

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \cdot \frac{k^{2n}x^{2n}\,dx}{(2n-1)\sqrt{1-x^2}},$$

и по выполнении интегрирования получаем:

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \arcsin x \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\} + \\ + \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \frac{k^{2n}}{2n-1} X_n. \tag{218}$$

Вычисляя эти интегралы в пределах 0 и 1, имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4+\ldots \right.$$
$$\left.\ldots+\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 k^{2n}+\ldots\right\}, \tag{219}$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^4}{3}-\ldots \right.$$
$$\left.\ldots-\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}-\ldots\right\}. \tag{220}$$

Так как при вычислении эллиптического интеграла, рассматриваемого в общем виде, интеграл $\int F\left\{x, \sqrt{P(x)}\right\} dx$ в процессе последовательного отделения интегралов, дающих конечные выражения, приводится в конце концов к основным нормальным видам, уже не вычисляемым в конечном виде, то можно высказать общее положение, что *эллиптические интегралы вообще не выражаются в конечном виде какой-либо комбинацией элементарных функций.*

Те интегралы, которые своей формальной структурой отвечают данному выше определению эллиптического интеграла, но вычисляются в конечном виде, представляют исключения, и за ними установилось название «псевдоэллиптических».

§ 12. Ультраэллиптические интегралы

Если уравнением кривой $F(x, y)=0$, связанной с абелевым интегралом $\int R(x, y)\,dy$, y определяется в виде $\sqrt[n]{P(x)}$ и показатель корня $n>2$ или подкоренное выражение $P(x)$ представляет целый алгебраический многочлен выше 4-й степени, то такие интегралы носят общее название «ультраэллиптических».

Ультраэллиптические интегралы, так же, как и эллиптические, вообще не выражаются какой-либо конечной комбинацией элементарных символов. Преобразованием, аналогичным преобразованию эллиптических интегралов, они могут быть приведены путём выделения в процессе преобразования алгебраической и логарифмической части к нескольким определённого вида интегралам, которые уже не вычисляются в конечном виде*). Эти интегралы являются трансцендентными функциями и могут быть выражены лишь бесконечными рядами.

В отдельных частных, и по существу исключительных, случаях интегралы вычисляются в конечном виде, или приводятся

---

*) О преобразовании ультраэллиптических интегралов см. Гурса, Курс математического анализа, т. I, § 100.

к эллиптическим интегралам. В классическом труде Лежандра «Traité des fonctions elliptiques», том I. (гл. 26, 27, 32 и 33) даются некоторые виды интегралов, приводящихся к эллиптическим.

I) Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{a^6x^6+b^6}}$ подстановкой $\left(\frac{a}{b}x\right)^3+\left(\frac{b}{a}\frac{1}{x}\right)^3=t^{\frac{3}{2}}$ приводится к интегралу $\frac{1}{ab}\int \frac{dt}{\sqrt{t^3-4}}$. Последний интеграл — эллиптический.

II) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{a+2bx+cx^2}}=\frac{3}{2}\int \frac{t\,dt}{\sqrt{b^2-ac+ct^3}}$.

(подст. $a+2bx+cx^2=t^3$.)

III) интеграл $\int \frac{M(x^2)+xN(x^2)}{\sqrt{a+bx^2+cx^4+ex^6}}dx$, где M и N — целые рациональные функции от x^2, подстановкой $x^2=z$ приводятся к сумме двух эллиптических интегралов

$$\frac{1}{2}\int \frac{M(z)\,dz}{\sqrt{az+bz^2+cz^3+ez^4}}+\frac{1}{2}\int \frac{N(z)\,dz}{\sqrt{a+bz+cz^2+ez^3}}.$$

Для интеграла $\int \frac{xN(x^2)\,dx}{\sqrt[4]{a+2bx^2+cx^4}}$, где N — рациональная функция от x^2, пользуемся подстановкой

$$\sqrt[4]{a+2bx^2+cx^4}=z.$$

Находим $cx^2=-b\pm\sqrt{b^2-ac+cz^4}$ и далее $x\,dx=\frac{z^3\,dz}{\sqrt{b^2-ac+cz^4}}$. Функцию $N(x^2)$ можем представить в виде

$$U_1(z^4)+x^2V_1(z^4)=U_1(z^4)+\left(-\frac{b}{c}\pm\frac{\sqrt{b^2-ac+cz^4}}{c}\right)V_1(z^4)=$$
$$=U(z^4)\pm\sqrt{b^2-ac+cz^4}\,V(z^4),$$

где U и V — рациональные функции от z^4. После этого

$$\int \frac{xN(x^2)\,dx}{\sqrt[4]{a+bx^2+cx^4}}=\int \frac{z^2U(z^4)\,dz}{\sqrt{b^2-ac+cz^4}}\pm\int z^2V(z^4)\,dz.$$

Второй интеграл является интегралом рациональной функции и даёт в общем случае алгебраические и логарифмические выражения, первый же интеграл — эллиптический.

IV) Для интеграла $\int \frac{M(x^2)\,dx}{\sqrt[4]{a+2bx^2+cx^4}}$, где M — рациональная функция от x^2, пользуемся подстановкой

$$\sqrt[4]{a+2bx+cx^2}=xz.$$

Находим

$$x^2=\frac{-b+\sqrt{b^2-ac+az^4}}{c-z^4}. \qquad (*)$$

Логарифмируя и дифференцируя, получаем:

$$\frac{dx}{x}=z^3\left\{\frac{a}{\sqrt{b^2-ac+az^4}\,(-b+\sqrt{b^2-ac+az^4})}+\frac{2}{c-z^4}\right\}dz,$$

и затем по умножении числителя и знаменателя первого слагаемого на $\left(-b-\sqrt{b^2-ac+az^4}\right)$,

$$\frac{dx}{x}=z^3\left\{\frac{-a\,(b+\sqrt{b^2-ac+az^4})}{\sqrt{b^2-ac+az^4}\,a\,(c-z^4)}+\frac{2}{c-z^4}\right\}dz=$$

$$=\frac{\sqrt{b^2-ac+az^4}-b}{(c-z^4)\sqrt{b^2-ac+az^4}}\,z^2\,dz,$$

или в силу равенства *)

$$\frac{dx}{x}=\frac{x^2z^3\,dz}{\sqrt{b^2-ac+az^4}} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{xz}=\frac{x^2z^2dz}{\sqrt{b^2-ac+cz^4}}.$$

В результате рассматриваемый интеграл приводится к виду

$$\int\frac{M(x^2)\,x^2z^2\,dz}{\sqrt{b^2-ac+az^4}}=\int\frac{M_1(x^2)\,z^2\,dz}{\sqrt{b^2-ac+az^4}}=$$

$$=\int M_1\left\{\frac{-b}{c-z^4}+\frac{\sqrt{b^2-ac+az^4}}{c-z^4}\right\}\frac{z^2\,dz}{\sqrt{b^2-ac+az^4}}=$$

$$=\int\frac{z^2P(z^4)\,dz}{\sqrt{b^2-ac+az^4}}+\int z^2Q(z^4)\,dz,$$

где P и Q — рациональные функции от z^4.

Таким образом, интеграл так же, как и предыдущий, приводится к сумме двух интегралов, из которых один является интегралом рациональной алгебраической функции и второй — эллиптический.

V) Аналогично двум предыдущим, могут быть преобразованы интегралы вида $\int\left\{M(x^2)+xN(x^2)\right\}\sqrt[4]{a+2bx^2+cx^4}\,dx$, где M и N — рациональные функции, и интегралы более общего вида

$$\int\left\{M(x^2)+xN(x^2)\right\}\sqrt[4]{a+2bx+cx^2}^{\,\pm(2n+1)}\,dx \quad (n \text{ — целое число}).$$

VI) Интеграл $j=\int\dfrac{P(x)\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+ex^3+cx^4+bx^5+ax^6}}$,

где $P(x)$ — рациональная функция, можем представить в виде

$$\int\frac{x^{-\frac{3}{2}}P(x)\,dx}{\sqrt{a(x^3+x^{-3})+b(x^2+x^{-2})+c(x+x^{-1})+e}}.$$

Пользуясь подстановкой $x+x^{-1}=2z$, имеем:

$$x^2+x^{-2}=4z^2-2; \quad x^3+x^{-3}=8z^2-6z; \quad x=z\pm\sqrt{z^2-1};$$

$$x^{-1}=z\mp\sqrt{z^2-1}=\frac{(\sqrt{z^2+1}\mp\sqrt{z-1})^2}{2}; \quad x^{-1/2}=\frac{\sqrt{z+1}\mp\sqrt{z-1}}{\sqrt{2}};$$

$$x^{-\frac{3}{2}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{dz}{\sqrt{z+1}}\pm\frac{dz}{\sqrt{z-1}}\right).$$

Обозначая подкоренное выражение $8az^3+4bz^2+(2c-6a)z+$ $+(e-2b)$ через $R(z)$, имеем:

$$j=\int\frac{P(z\pm\sqrt{z^2-1})}{\sqrt{2}\,R(z)}\left\{\frac{dz}{\sqrt{z+1}}\pm\frac{dz}{\sqrt{z-1}}\right\}=$$

$$=\int\frac{P_1(z)+\sqrt{z-1}\,\sqrt{z+1}\,P_2(z)}{R(z)}\left\{\frac{dz}{\sqrt{z+1}}\pm\frac{dz}{\sqrt{z-1}}\right\}=$$

$$=\int\frac{M(z)\,dz}{\sqrt{(z+1)R(z)}}+\int\frac{N(z)\,dz}{\sqrt{(z-1)R(z)}},$$

где M, N и R — рациональные функции от z.

Приходим к двум эллиптическим интегралам.

VII) Пользуясь для интеграла

$$\int\frac{M(x^2)+xN(x^2)}{\sqrt{a+bx^2+cx^4+bx^6+ax^8}}\,dx,$$

где M и N — рациональные функции от x^2, подстановкой $x^2=z$ приходим к сумме двух интегралов

$$\int\frac{M(z)\,dz}{\sqrt{az+bz^2+cz^3+bz^4+az^5}}+\int\frac{N(z)\,dz}{\sqrt{a+bz+cz^2+bz^3}},$$

из которых первый представляет частный случай предыдущего, второй же — явно эллиптический.

VIII) Интеграл $\int\frac{M(x^2)+xN(x^2)}{\sqrt{a+bx^4+cx^8}}\,dx$, где M и N — рациональные функции, представляет частный случай предыдущего, в чём легко убеждаемся подстановкой $x=z\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{8}}$.

§ 13. Псевдоэллиптические интегралы

В некоторых частных случаях интегралы, формально соответствующие определению эллиптических или ультраэллиптических, выражаются конечной комбинацией элементарных функций. Такие интегралы носят общее название псевдоэллиптических. Обычным приёмом их вычисления служит какая-либо подстановка, приводящая интегрируемое выражение или к рациональной форме, или также к иррациональной, но допускающей интегрирование в конечном виде.

Рассмотрим несколько, сравнительно общих видов псевдоэллиптических интегралов.

I) Интеграл $\int F\left\{x^n, \sqrt{a+2bx^n+cx^{2n}}\right\} x^{n-1}\,dx$ подстановкой $x^n = y$ приводится к виду $\frac{1}{n}\int F\left\{y, \sqrt{a+2by+cy^2}\right\} dy$ и, следовательно, вычисляется в конечном виде.

Понятно, что это относится и к интегралу

$$\int F\left\{x^n, \sqrt{a+2bx^n+cx^{2n}}\right\} \frac{dx}{x}.$$

II) Интегралы $\int F\left\{x^n, \sqrt[q]{a+bx^n}\,\sqrt[s]{a+bx^n}\,\ldots\right\} x^{n-1}\,dx$ или $\int F\left\{x^n, \sqrt[q]{a+bx^n}\,\sqrt[s]{a+bx^n}\,\ldots\right\} \frac{dx}{x}$ той же подстановкой $x^n = y$ приводятся к интегралам вида

$$\frac{1}{n}\int F\left\{y, \sqrt[q]{a+by}, \sqrt[s]{a+by}, \ldots,\right\} dy,$$

рассмотренным в § 1.

III) Интегралы $\int F\left\{x^n, \sqrt[s]{(x^n-a)^k(x^n-b)^l}\right\} x^{n-1}\,dx$ или $\int F\left\{x^n, \sqrt[s]{(x^n-a)(x^n-b)}\right\} \frac{dx}{x}$ той же подстановкой $x^n = y$ приводятся к интегралу вида $\frac{1}{n}\int F\left\{y, \sqrt[s]{(y-a)^k(y-b)^l}\right\} dy$, рассмотренному в § 2, и если $\frac{k+l}{s}$ — целое число, то также вычисляются в конечном виде.

IV) Интеграл $\int (x^n+a)^p \sqrt[n]{x^n+b^q}\,dx$ подстановкой

$$x^n + b = x^n z^n, \quad x = \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{z^n-1}}, \quad dx = \frac{\sqrt[n]{b}z^{n-1}\,dz}{\left(\sqrt[n]{z^n-1}\right)^{n+1}}$$

приводится к интегралу $-\sqrt[n]{b^q+1}\int \frac{(az^n-a+b)^p z^{n+q-1}}{(z^n-1)^{p+1+\frac{q+1}{n}}}\,dz.$

Рассматривая интеграл при n, q и p целых, видим, что он приводится к интегралу рациональной функции во всех случаях, когда $\frac{q+1}{n}$ — целое число или нуль.

При $q = -1$ это условие выполняется для всякого n.

При положительном q, полагая $\frac{q+1}{n}$ = целому числу k, имеем

$$\int (x^n+a)^p \sqrt[n]{(x^n+b)^{kn-1}}\,dx = -b^k \int \frac{(az^n-a+b)^p z^{kn+n-2}}{(z^n-1)^{p+1-k}}\,dz,$$

и получающийся интеграл рационального выражения как при положительном, так и при отрицательном p, простыми преобразованиями и методом приведения приводится к интегралу или к сумме интегралов вида (43) — (53).

При q отрицательном, полагая $\frac{q+1}{n}=-k$, имеем:

$$\int \frac{(x^n+a)^p\,dx}{\sqrt[n]{(x^n+b)^{kn+1}}}=-\frac{1}{b^k}\int \frac{(az^n-a+b)^p\,dz}{z^{kn-n+2}\,(z^n-1)^{p+1-k}}\,.$$

Последний интеграл вычисляется тем же порядком.

Если p положительное и $p\leqslant k-1$, то приходим к интегралу многочлена, членами которого являются положительные или отрицательные целые степени z.

V) Всякий интеграл вида $\int F\left\{f(x), \sqrt[q]{f(x)}, \sqrt[s]{f(x)}, \ldots,\right\} f'(x)\,dx$ подстановкой $\sqrt[n]{f(x)}=y$, где n — наименьшее кратное всех чисел $q, s, \ldots$, приводится к интегралу $n\int F\left\{y^n, y^{\frac{n}{q}}, y^{\frac{n}{s}}, \ldots,\right\} dy$, т. е. к интегралу рационального выражения.

VI) В курсе «Математического анализа» Э. Гурса, т. I указан некоторый общий случай псевдоэллиптических интегралов и даны признаки, по которым можно установить принадлежность данного интеграла к классу псевдоэллиптических.

В частности, если для интеграла $\int \frac{f(x)}{\sqrt{P(x)}}\,dx$ уравнение $P(x)=0$ — возвратное, и если рациональная функция $f(x)$ такова, что удовлетворяет условию $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$, то интеграл — псевдоэллиптический и для вычисления его служит подстановка $\frac{x-1}{x+1}=\sqrt{z}$.

Примеры

101) $$\int \frac{x^2dx}{(x^4-1)\sqrt{2x^8+1}}=$$
$$=\frac{1}{8\sqrt{3}}\left\{\ln\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2x^8+1}}{\sqrt{3}+\sqrt{2x^8+1}}+\ln\frac{x^4\sqrt{3}-\sqrt{2x^8+1}}{x^4\sqrt{3}+\sqrt{2x^8+1}}\right\}$$
(подст. $x^4=y$, или $x^4-1=\frac{1}{z}$, или $x^4\sqrt{2}=\operatorname{tg}\varphi$).

102) $$\int x^9\sqrt{1+x^5+x^{10}}\,dx=$$
$$=\frac{1}{15}\sqrt{1+x^5+x^{10}}-\frac{1}{40}(2x^5+1)\sqrt{1+x^5+x^{10}}-$$
$$-\frac{3}{80}\ln\left(1+2x^5+2\sqrt{1+x^5+x^{10}}\right)$$ (подст. $x^5=z$).

103) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{4+2x^2+x^4}}=$

$$=\frac{3x^2-4}{64x^4}\sqrt{4+2x^2+x^4}+\frac{1}{128}\ln\frac{4+x^2+2\sqrt{4+2x^2+x^4}}{x^2}.$$

104) $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}=\ln\frac{1+x^2+\sqrt{1+3x^2+x^4}}{x}.$

105) $\int \sqrt{(x^4-3x^2)^3}\,(2x^3-3x)\,dx=\frac{5}{16}\sqrt{(x^4-3x^2)^2}.$

106) $\int \frac{3x^8-2x^5-x^2\sqrt[3]{(3x^3-1)^2}}{\sqrt{(3x^3-1)^3}}\,dx=$

$$=\frac{4}{243}\sqrt[4]{3x^3-1^3}-\frac{4}{33}\sqrt[12]{(3x^3-1)^{11}}-\frac{4}{27}\sqrt[4]{3x^2-1}.$$

107) $\int \frac{dx}{(x^3-1)\sqrt[2]{x^3+2}}=$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt[3]{x^3-1}}+\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^3+2}+x\sqrt[3]{3}}{x\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}$$

(подст. $x^3+2=x^3z^3$).

108) $\int \frac{dx}{(x^4+1)\sqrt[4]{x^4+2}}=$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}\sqrt[4]{x^4+2}+\sqrt{x^4+2}}{x^2-x\sqrt{2}\sqrt{x^4+2}+\sqrt{x^4+2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,x\sqrt[4]{x^4+2}}{x^2-\sqrt{x^4+2}}.$$

109) $\int \frac{x^3-1}{\sqrt[3]{x^3+2}}\,dx=$

$$=\frac{1}{3}\,x\sqrt[3]{x^3+2^2}+\frac{5}{6}\ln\left(\sqrt{x^3+2}-x\right)+\frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^3+2}+x}{x\sqrt{3}}.$$

110) $\int \frac{\sqrt{(x^4+1)^3}}{(x^4+2)^2}\,dx=$

$$=\frac{x\sqrt[4]{(x^4+1)^3}}{8(x^4+2)}-\frac{3}{32\sqrt{8}}\ln\frac{x-\sqrt{2(x^4+1)}}{x+\sqrt[4]{2(x^4+1)}}-\frac{3}{16\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{2(x^4+1)}}{x}.$$

111) $\int \frac{(x^5-2)^2}{(x^5+3)^3}\,\frac{dx}{\sqrt[5]{x^5+3}}=\frac{x(9x^{10}+462x^5+1188)}{891\sqrt{x^5+3^{11}}}.$

112) $\int \frac{dx}{(x^3+3x^2+3x)\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+3}}=$

$$=\frac{1}{2\sqrt[3]{3}}\ln\frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+3}-(x+1)\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+3}+(x+1)\sqrt[3]{3}}{(x+1)\sqrt{3}\sqrt{3}}.$$

113) $$\int \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsec} \frac{1+x\sqrt{2}}{x\sqrt{2}},$$

или

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}.$$

Подстановка $x+\frac{1}{x}=z$ приводит к интегралу $\int \frac{-dz}{z\sqrt{z^2-2}}$.

114) $$\int \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^4}}{x^2-1} \cdot \left(\text{подст.} \quad x-\frac{1}{x}=z\right).$$

115) $$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^4}}\, dx =$$

$$= \ln \frac{x^2-1+\sqrt{1+x^4}}{x} \quad \left(\text{подст.} \quad x-\frac{1}{x}=z \quad \text{или} \quad x^2=y\right).$$

116) $$\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{1+x^4}}\, dx = \ln \frac{1+x^2+\sqrt{1+x^4}}{x} \quad \left(\text{подст.} \quad x+\frac{1}{x}=z\right).$$

117) $$\int \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{1+x^2+x^4}+x\sqrt{2}}{x^2-1}.$$

При подстановке $x-\frac{1}{x}=z$ имеем $(1+x^2)\,dx = x^2dz$, $1-x^2=-xz$, $\sqrt{1+x^2+x^4}=x\sqrt{z^2+3}$, и интеграл приводится к виду $\int \frac{-dz}{z\sqrt{z^2+3}}$.

118) $$\int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2+x^4}} = -\operatorname{arcsec} \frac{1+x^2}{x} \quad \left(\text{подст.} \quad x+\frac{1}{x}=z\right).$$

119) $$\int \frac{(x^4-1)\,dx}{x^2\sqrt{x^4+x^2+1}} = \frac{1}{x}\sqrt{x^4+x^2+1}.$$

При подстановке $x^2+\frac{1}{x^2}=z$ имеем $x^4+x^2+1=x^2(z+1)$, $(x^4-1)\,dx = \frac{1}{2}x^3dz$, и интеграл приводится к виду $\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z+1}}$.

120) $$\int \frac{1-x^2}{1+2ax+x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+2ax+2bx^2+2ax^3+x^4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1-b)}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{2(1-b)}\sqrt{1+2ax+2bx^2+2ax^3+x^4}}{a+2(1-b)x+ax^2}.$$

Так как $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x^2}{1+2ax+x^2} + \frac{x^2-1}{1+2ax+x^2} = 0$, то интеграл — псевдоэллиптический.

Для вычисления пользуемся подстановкой $x+\frac{1}{x}=z$, которая приводит интеграл к виду $\int \frac{-dz}{(z+2a)\sqrt{z^2+2az+2(b-1)}}$.

121) $$\int \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2}}=$$

$$=\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1+x^4}-x^2}{x^2} \quad \left(\text{подст.}\quad 1+\frac{1}{x^4}=z^2\right).$$

122) $$\int \frac{dx}{(1+x^{2n})\left[(1+x^{2n})^{\frac{1}{n}}-x^2\right]^{\frac{1}{2}}}=\operatorname{arcctg}\left[\frac{(1+x^{2n})^{\frac{1}{n}}}{x^2}-1\right].$$

При подстановке $1+\frac{1}{x^{2n}}=z^n$ имеем $dx=-\frac{1}{2}x^{2n+1}z^{n-1}dz$, и интеграл приводится к виду $\frac{1}{2}\int \frac{-dz}{z\sqrt{z-1}}$.

§ 14. Уникурсальные кривые

Плоская алгебраическая кривая, заданная уравнением $F(x;y)=0$, называется уникурсальной, если текущие координаты её x и y могут быть выражены как рациональные функции некоторого переменного параметра t. Это свойство уникурсальной кривой имеет важное значение для теории интегрирования иррациональных алгебраических функций, так как абелев интеграл $\int R(x, y)\,dx$, связанный с уникурсальной кривой $F(x, y)=0$ подстановками $x=f_1(t)$ и $y=f_2(t)$, в силу этого свойства приводится к рациональной форме

$$\int R\{f_1(t),\ f_2(t)\}\,f_1'(t)\,dt,$$

т. е. вычисляется в конечном виде.

Основную теорему об уникурсальных кривых можно формулировать так: «*если плоская алгебраическая кривая имеет максимальное число двойных точек, допускаемое её порядком, то она уникурсальная*».

Справедлива и обратная теорема: «*если кривая — уникурсальная, то она имеет максимальное число двойных точек, допускаемое её порядком*».

При этом в число двойных точек включаются все особые точки, изолированные, точки высшей кратности, пересчитанные на двойные, и точки, недоступные обозрению по внешнему виду кривой, мнимые и двойные точки в бесконечно удалённых круговых точках.

Если кривая имеет r двойных точек, а максимальное число двойных точек, допускаемое её порядком, равно δ; то разность

$(\delta - r)$, т. е. недостающее до максимума число её двойных точек, называется дефектом кривой. Уникурсальная кривая тогда может быть определена как кривая, дефект которой равен нулю.

Рассмотрим кривую n-го порядка, $F(x, y)=0$. В геометрии доказывается, что кривая n-го порядка не может иметь более $\delta=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойных точек *). Возьмём на кривой ещё какие-либо $(n-3)$ произвольные точки и через эти точки и δ двойных точек, т. е. через $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n-3=\frac{(n-2)(n+1)}{2}-1$ точек, проведём пучок кривых $(n-2)$-го порядка. Для определения кривой $(n-2)$-го порядка надо иметь $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ точек, так что взятые $\frac{(n-2)(n+1)}{2}-1$ точек определяют пучок кривых $(n-2)$-го порядка.

Допустим, что уравнение пучка имеет вид $M(x, y)+$ $+tN(x, y)=0$, где t — переменный параметр. Каждая кривая пучка пересекает кривую n-го порядка в $n(n-2)$ точках, но она проходит через δ двойных точек или, считая каждую двойную точку за две, через 2δ точек и через $(n-3)$ точки произвольно взятые, т. е. через $(n-1)(n-2)+n-3=$ $=n(n-2)-1$ точек. Таким образом, остаётся лишь одна точка, изменяющаяся вместе с параметром t. Координаты этой точки определяются из уравнений первой степени, и потому выражаются рационально через параметр t. В результате приходим к выводу, что если кривая $F(x, y)=0$ n-го порядка имеет максимальное число δ двойных точек, то она — уникурсальная, так как её координаты x и y могут быть рационально выражены через параметр t. *Следовательно, связанный с этой кривой абелев интеграл* $\int R(x, y)\,dy$ *вычисляется в конечном виде.*

Кривая n-го порядка, имеющая точку $(n-1)$-й кратности, — уникурсальна, так как прямая, проходящая через эту кратную точку, пересекает кривую только в одной точке.

Для уникурсальности кривой 2-го порядка не требуется кратных точек.

Кривая 3-го порядка — уникурсальна, если имеет одну двойную точку. Кривая 4-го порядка — если имеет одну тройную точку, но так как для этой кривой $\delta=\frac{(n-1)(n-2)}{2}=3$, то одна тройная точка эквивалентна трём двойным.

*) С. С. Бюшгенс, Дифференциальная геометрия, стр. 50 (1940 г.).

Для уникурсальности кривой 5-го порядка достаточно одной 4-кратной точки, так что одна 4-кратная точка эквивалентна 6 двойным, так как $\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 6$.

Таким же путём можем определить, что 5-кратная точка эквивалентна 10 двойным и т. д.

Если порядок кривой $n=2$, то $\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 0$, дефект кривой равен 0, так что всякая кривая 2-го порядка — уникурсальная, и интеграл $\int R(x, y)\,dx$, связанный с кривой 2-го порядка, как мы видели в §§ 3—10, вычисляется в конечном виде. В § 4 при геометрической интерпретации подстановок Эйлера мы исходили из того, что пересекали кривую пучком прямых с переменным параметром t, чем и достигали целей рационализации интегрируемого выражения, т. е. тем же по существу методом, каким определяем при соответствующих условиях и уникурсальность кривых n-го порядка.

Примеры

123) Циссоида Диоклеса $x(x^2+y^2)=2ry^2$ имеет двойную точку в начале координат и, как кривая 3-го порядка, — уникурсальна. И действительно, связанный с ней абелев интеграл $\int R\left\{x, x\sqrt{\frac{x}{2r-x}}\right\}dx$ легко приводится к рациональной форме и вычисляется в конечном виде.

124) Связанные с уникурсальными кривыми 3-го порядка: a) кубической гиперболой $x^2y=a^3$, b) кубической параболой $y=ax^3$ и c) полукубической параболой $y^2=ax^3$, интегралы имеют вид

$$\int R\left\{x, \frac{a^3}{x^2}\right\}dx, \quad \int R\left\{x, ax^3\right\}dx \quad \text{и} \quad \int R\left\{x, x\sqrt{ax}\right\}dx.$$

Первые два представляют интегралы рациональных выражений, последний же легко приводится к рациональной форме.

125) Трисектриса Маклорена $x^2(x-3a)+y^2(x+a)=0$ имеет двойную точку в начале координат, и, следовательно, уникурсальна. Интеграл, связанный с ней, имеет вид $\int R\left\{x, x\sqrt{\frac{3a-x}{a+x}}\right\}dx$ и легко приводится к рациональной форме.

126) Трисектриса де Лонгшампа $x(3y^2-x^2)+a(x^2+y^2)=0$ также уникурсальна, и связанный с этой кривой интеграл $\int R\left\{x, \sqrt{\frac{x-a}{3x+a}}\right\}dx$ также легко приводится к рациональной форме.

127) Кривая $x^2(x-6)=9(y^2-x)$ имеет двойную точку (3, 0) и, как кривая 3-го порядка, уникурсальна. Полагая $x=t^2$, имеем и для вто-

рой переменной рациональное выражение, $y=t-\frac{1}{3}t^3$. Определив из уравнения кривой $y=\frac{1}{3}\sqrt{x^3-6x^2+x}$, приводим связанный с кривой интеграл $\int R\left\{x, \frac{1}{3}\sqrt{x^3-6x^2+x}\right\}dx$ к рациональной форме $\int R\left\{t^2, t-\frac{1}{3}t^3\right\}2t\,dt$.

128) Декартов лист $x^3+y^3-axy=0$ имеет двойную точку в начале координат и, следовательно, является уникурсальной кривой. Подстановкой $y=tx$ получаем для переменных x и y выражения рациональные относительно переменного параметра t, $x=\frac{at}{1+t^3}$, $y=\frac{at^2}{1+t^3}$. Таким образом, связанный с кривой абелев интеграл $\int R(x, y)\,dx$, где y, как функция от x, определяется уравнением кривой, приводится к рациональной форме.

129) Лемниската $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ имеет двойную точку в начале координат и две двойные точки в бесконечно удалённых круговых точках; следовательно, эта кривая — уникурсальная.

Для того чтобы найти рациональные выражения переменных x и y через переменный параметр t, проведём через двойную точку в начале координат секущую $y=lx$; она пересечёт лемнискату в двух точках с координатами $x=\frac{\pm a}{1+l^2}\sqrt{1-l^2}$, $y=lx$. Для того чтобы освободиться от иррациональности $\sqrt{1-l^2}$, положим $\frac{1-l}{1+l}=\left(\frac{a}{t}\right)^2$. Найдя отсюда $l=\frac{t^2-a^2}{t^2+a^2}$, получаем для x и y рациональные выражения

$$x=\frac{\pm a^2t(t^2+a^2)}{t^4+a^4} \quad \text{и} \quad y=\frac{\pm a^2t(t^2-a^2)}{t^4+a^4}.$$

Определив из уравнения лемнискаты $y=\sqrt{\frac{a}{2}\left(\sqrt{a^2+8x^2}-a\right)-x^2}$ и найдя $dx=\frac{a^2(a^2-t^2)(a^4+4a^2t^2+t^4)}{(t^4+a^4)^2}dt$, приводим связанный с кривой интеграл

$$\int R\left\{x, \sqrt{\frac{a}{2}(\sqrt{a^2+8x^2}-a)-x^2}\right\}dx \text{ к рациональной форме}$$

$$\int R\left\{\frac{a^2t(t^2+a^2)}{t^4+a^4}, \frac{a^2t(t^2-a^2)}{t^4+a^4}\right\}\frac{a^2(a^2-t^2)(a^4+4a^2t^2+t^4)}{(t^4+a^4)^2}dt.$$

130) Использованный для предыдущей кривой прием применим для всякой уникурсальной кривой 4-го порядка, если определена одна из ее двойных точек.

Воспользуемся этим для уникурсальной кривой $y^2x=x^4+y^4$. Подставляя в уравнение кривой $y=tx$, имеем $t^2x^3=(1+t^4)x^4$, откуда $x=\frac{t^2}{1+t^4}$, после чего $y=\frac{t^3}{1+t^4}$. Таким образом, подстановка непосредственно даёт рациональные выражения для x и y.

Определив из уравнения кривой $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x(1-\sqrt{1-4x^2})}$ и выразив $dx=\frac{2t(1-t^4)}{(1+t^4)^2}dx$, приводим интеграл

$$\int R\left\{x, \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x(1-\sqrt{1-4x^2})}\right\}dx$$

к рациональной форме $\int R\left\{\frac{t^2}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right\}\frac{2t(1-t^4)}{(1+t^4)^2}dt$.

131) Кривая 4-го порядка $y^4-2ax^3+3a^2x^2-2a^2y^2+a^4=0$ — уникурсальна, так как имеет три двойные точки $(-a, 0)$; $(0, a)$ и $(0, -a)$. Выражая из уравнения кривой y, как функцию от x, имеем $y=\pm\sqrt{a^2\pm x\sqrt{2ax+3a^2}}$ и, следовательно, интеграл $\int R\left\{x, \sqrt{a^2\pm x\sqrt{2ax+3a^2}}\right\}dx$ вычисляется в конечном виде.

132) Кривая $x^4+y^4-2ax^3+2bxy^2=0$ имеет в начале координат тройную точку и, следовательно, является уникурсальной кривой. Выражая из уравнения кривой

$$y=\sqrt{x(\sqrt{b^2+2ax-x^2}-b)},$$

видим, что интеграл $\int R\left\{x, \sqrt{x(\sqrt{b^2+2ax-x^2}-b)}\right\}dx$ вычисляется в конечном виде.

Литература

Гарди, Интегрирование функций, ОНТИ, 1935 (стр. 58 и далее).
Немыцкий и др., Курс математического анализа, т. I, гл. XVII, 1940.
Поссе и Привалов, Курс интегрального исчисления, 1939.
Гурса, Курс математического анализа, т. I, 1936.
Legendre, Traité des fonctions elliptiques.

ГЛАВА V

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Всякий интеграл вида

$$\int F\{\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \sec x,\ \operatorname{cosec} x\}\,dx$$

подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$, как показано в разделе IV, § 7 гл. I, приводится к алгебраической форме. Если F — рациональная функция, то приходим к интегралу рационального алгебраического выражения, и так как последний теоретически вычисляется в конечном виде, то *теоретически интегрирование выполнимо и для рассматриваемого интеграла тригонометрической функции*. При этом в качестве основных формул можем, очевидно, принять формулы (1) — (9).

Если под знаком интеграла имеем только чётные степени функций $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$, то к той же цели ведёт более простая подстановка $\operatorname{tg} x=z$.

При иррациональности функции F приходим к интегралу иррационального алгебраического выражения, и если для последнего интегрирование выполнимо, то, вычисляя интеграл приёмами предыдущей главы, получаем конечное выражение и для вычисляемого интеграла иррациональной тригонометрической функции.

Несмотря, однако, на общую применимость указанных подстановок, на теоретическую общность, которую они вносят в вопрос интегрирования, на практике подстановки целесообразны лишь в редких случаях. Как правило, даже для простых тригонометрических функций они приводят к интегралам сложных алгебраических выражений и к соответственно сложным по большей части результатам интегрирования. Поэтому теория и практика интегрирования тригонометрических выражений основывается на непосредственном их интегрировании по приведении интегралов к некоторым основным элементарным формам. Благодаря связи между тригонометрическими функциями, стройности и простоте тригонометрических формул, тригонометрические выражения более эластичны в смысле преобразований, и потому процесс непосредственного их преобразования проще, чем при переходе от тригонометрических к алгебраическим функциям.

При этом в качестве основных, в дополнение к формулам (1) — (9), следует ещё принять формулы (10) — (19).

§ 1. Интегралы основных тригонометрических функций

Пользуясь формулами тригонометрии, легко получаем следующие интегралы:

$$\int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right),$$

$$\int \sec(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax+b}{2}\right),$$

$$\int \sin(ax+b)\cdot\sin(a'x+b')\,dx = \\ = \frac{\sin[(a-a')x+(b-b')]}{2(a-a')} - \frac{\sin[(a+a')x+(b+b')]}{2(a+a')}; \quad (221)$$

$$\int \cos(ax+b)\cos(a'x+b')\,dx = \\ = \frac{\sin[(a-a')x+(b-b')]}{2(a-a')} + \frac{\sin[(a+a')x+(b+b')]}{2(a+a')}; \quad (222)$$

$$\int \sin(ax+b)\cos(a'x+b')\,dx = \\ = -\frac{\cos[(a-a')x+(b-b')]}{2(a-a')} - \frac{\cos[(a+a')x+(b+b')]}{2(a+a')}. \quad (223)$$

§ 2. Интегралы вида $\int \sin^m x\,dx$ и $\int \cos^m x\,dx$

Примеры

1) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x,$

или

$$= \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x.$$

Первый результат получаем путём перехода для интегрируемой функции к кратному углу, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$, а второй интегрированием по частям,

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x\,d\sin x = \ldots$$

2) $$\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x,$$

или

$$=\frac{1}{3}\sin x\cos^2 x+\frac{2}{3}\sin x,$$

или

$$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x.$$

Первый результат получаем, переходя для интегрируемого выражения к кратному углу, или же к показательным функциям, пользуясь формулой Эйлера, $\cos x=\frac{1}{2}(e^{xi}+e^{-xi})$. В последнем случае имеем

$$\int \cos^3 x\,dx=\frac{1}{8}\int (e^{xi}+e^{-xi})^3\,dx=\frac{1}{8}\int (e^{3xi}+e^{-3xi}+3e^{xi}+3e^{-xi})\,dx=$$
$$=\frac{1}{8}\int (2\cos 3x+6\cos x)\,dx=\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x.$$

Ко второму результату приходим интегрированием по частям, и к третьему—представив интегрируемое выражение в виде

$$(1-\sin^2 x)\,d\sin x.$$

3) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx=\frac{1}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x,$

или

$$=-\frac{\cos x}{4}\left(\sin^3 x+\frac{3}{2}\sin x\right)+\frac{3}{8}x.$$

I) На основании четырёх формул высшей алгебры:

1) $$\cos^{2n} x=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{p=0}^{p=n-1}\binom{2n}{p}\cos(2n-2p)\,x.$$

2) $$\cos^{2n+1} x=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{p=0}^{p=n}\binom{2n+1}{p}\cos(2n+1-2p)\,x,$$

3) $$\sin^{2n} x=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}+\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\sum_{p=0}^{p=n-1}(-1)^p\binom{2n}{p}\cos(2n-2p)\,x,$$

4) $$\sin^{2n+1} x=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\binom{2n+1}{p}\sin(2n+1-2p)\,x,$$

имеем:

$$\int \cos^{2n} x\,dx=\int\left\{\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{0}^{n-1}\binom{2n}{p}\cos(2n-2p)\,x\right\}dx,$$

$$\int \cos^{2n+1} x\,dx = \int \frac{1}{2^{2n}} \sum_{0}^{n} \binom{2n+1}{p} \cos(2n+1-2p)\,x\,dx,$$

$$\int \sin^{2n} x\,dx = \int \left\{ \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{0}^{n-1} (-1)^p \binom{2n}{p} \cos(2n-2p)\,x \right\} dx,$$

$$\int \sin^{2n+1} x\,dx = \int \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{p} \sin(2n+1-2p)\,x\,dx.$$

Выполняя интегрирование, получаем:

$$\int \cos^{2n} x\,dx = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,x + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{2n}{p} \frac{\sin(2n-2p)\,x}{2n-2p}, \tag{224}$$

$$\int \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{p=0}^{p=n} \binom{2n+1}{p} \frac{\sin(2n+1-2p)\,x}{2n+1-2p}, \tag{225}$$

$$\int \sin^{2n} x\,dx = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,x + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \binom{2n}{p} \frac{\sin(2n-2p)\,x}{2n-2p}, \tag{226}$$

$$\int \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{2n+1}{p} \frac{\cos(2n+1-2p)\,x}{2n+1-2p}. \tag{227}$$

Вывод исходных формул даётся в полных курсах высшей алгебры. Эти формулы, а также и прямо формулы для рассматриваемых интегралов легко получаем на основании формул Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

Так, для интеграла (225) имеем:

$$\int \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{1}{2^{2n+1}} \int (e^{xi} + e^{-xi})^{2n+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2^{2n+1}} \int \Big\{ e^{xi(2n+1)} + (2n+1)\,e^{xi(2n-1)} + \frac{(2n+1)\,2n}{1\cdot 2}\,e^{xi(2n-3)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(2n+1)\,2n\ldots(2n-p+2)}{1\cdot 2\ldots p}\,e^{xi(2n-2p+1)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(2n+1)\,2n\ldots(2n-p+2)}{1\cdot 2\ldots p}\,e^{-xi(2n-2p+1)} + \ldots$$

$$\ldots + (2n+1)\,e^{-xi(2n-1)} + e^{-xi(2n+1)} \Big\}\,dx =$$

$$=\frac{1}{2^{2n+1}}\int\sum_{p=0}^{p=n}\left\{\binom{2n+1}{p}\left[e^{xi(2n+1-2p)}+e^{-xi(2n+1-2p)}\right]\right\}dx=$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\int\sum_{0}^{n}\binom{2n+1}{p}\cos(2n+1-2p)\,x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{0}^{n}\binom{2n+1}{p}\frac{\sin(2n+1-2p)\,x}{2n+1-2p},$$

и для интеграла (226)

$$\int\sin^{2n}x\,dx=\frac{1}{(2i)^{2n}}\int(e^{xi}-e^{-xi})^{2n}\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\int\left\{e^{xi2n}-2ne^{xi(2n-2)}+\frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}e^{xi(2n-4)}-\ldots\right.$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}e^{xi}+(-1)^n\binom{2n}{n}+(-1)^{n+1}\binom{2n}{n+1}e^{-xi}+\ldots$$

$$\left.\ldots-2ne^{-xi(2n-2)}+e^{-xi2n}\right\}dx=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\int\left\{(-1)^n\binom{2n}{n}+\right.$$

$$\left.+\sum_{0}^{n-1}(-1)^p\binom{2n}{p}\left[e^{xi(2n-p)}+e^{-xi(2n-p)}\right]\right\}dx=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\int dx+$$

$$+\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\int\sum_{0}^{n-1}(-1)^p\binom{2n}{p}\cos(2n-2p)\,x\,dx=$$

$$=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}x+\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\sum_{0}^{n-1}(-1)^p\binom{2n}{p}\frac{\sin(2n-2p)\,x}{2n-2p}.$$

II) Интегрированием по частям получаем:

$$\int\cos^m x\,dx=\int\cos^{m-1}x\,d\sin x=\cos^{m-1}x\sin x+$$

$$+(m-1)\int\cos^{m-2}x\sin^2 x\,dx=\cos^{m-1}x\sin x+$$

$$+(m-1)\int\cos^{m-2}x\,dx-(m-1)\int\cos^m x\,dx,$$

и отсюда формулу приведения

$$\int\cos^m x\,dx=\frac{1}{m}\cos^{m-1}x\sin x+\frac{m-1}{m}\int\cos^{m-2}x\,dx. \tag{228}$$

Непосредственно таким же путём, или заменяя в предыдущей формуле x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, получаем:

$$\int \sin^m x\,dx = -\frac{1}{m}\sin^{m-1}x\cos x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}x\,dx. \tag{229}$$

Последовательным применением этих формул приходим каждый раз к интегралам того же вида, но со степенью интегрируемой функции, пониженной на 2 единицы, и в конечном счёте при m чётном к интегралу $\int dx = x$ и при m нечётном к интегралам

$$\int \cos x\,dx = \sin x \quad \text{и} \quad \int \sin x\,dx = -\cos x.$$

Последовательно применяя формулу (228), для интеграла $\int \cos^{2n} x\,dx$ получаем:

$$\int \cos^{2n} x\,dx = \frac{1}{2n}\sin x\cos^{2n-1}x + \frac{2n-1}{2n}\int \cos^{2n-2}x\,dx = \ldots =$$

$$= \frac{\sin x}{2n}\cos^{2n-1}x + \frac{\sin x}{2n}\,\frac{2n-1}{2n-2}\cos^{2n-3}x +$$

$$+\frac{\sin x}{2n}\,\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}\cos^{2n-5}x + \ldots +$$

$$+\frac{\sin x}{2n}\,\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+3)}{(2n-2)(2n-4)\ldots(2n-2p+2)}\cdot\cos^{2n-2p+1}x +$$

$$+\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)}{2n(2n-2)\ldots(2n-2p+2)}\int \cos^{2n-2p}x\,dx =$$

$$= \frac{\sin x}{2n}\left\{\cos^{2n-1}x + \frac{2n-1}{2n-2}\cos^{2n-3}x + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}\cos^{2n-5}x + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\cos x\right\} + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\int dx,$$

и отсюда формулу

$$\int \cos^{2n} x\,dx = \frac{\sin x}{2n}\left\{\cos^{2n-1}x + \frac{2n-1}{2n-2}\cos^{2n-3}x + \right.$$

$$\left. + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}\cos^{2n-5}x + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\cos x\right\} +$$

$$+\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\,x. \tag{230}$$

Точно так же получаем:

$$\int \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{\sin x}{2n+1}\left\{\cos^{2n} x + \frac{2n}{2n-1}\cos^{2n-2} x + \right.$$
$$+ \frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}\cos^{2n-4} x + \ldots + \frac{2n(2n-2)\ldots 6\cdot 4}{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3}\cos^2 x +$$
$$\left. + \frac{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}\right\}. \qquad (231)$$

Аналогичным путём на основании формулы (229), или заменяя в последних двух формулах x на $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и отбрасывая для первой формулы постоянную $\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$, получаем:

$$\int \sin^{2n} x\,dx = -\frac{\cos x}{2n}\left\{\sin^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n-2}\sin^{2n-3} x + \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}\sin^{2n-5} x + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\sin x\right\} +$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\,x; \qquad (232)$$

$$\int \sin^{2n+1} x\,dx = -\frac{\cos x}{2n+1}\left\{\sin^{2n} x + \frac{2n}{2n-1}\sin^{2n-2} x + \right.$$
$$+ \frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}\sin^{2n-4} x + \ldots + \frac{2n(2n-2)\ldots 6\cdot 4}{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3}\sin^2 x +$$
$$\left. + \frac{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}\right\}. \qquad (233)$$

Представив интеграл $\int \cos^{2n+1} x\,dx$ в виде

$$\int (1-\sin^2 x)^n\,d\sin x = \int\left\{1 - n\sin^2 x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin^4 x + \right.$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^6 x + \ldots + (-1)^p\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p}\sin^{2p} x +$$
$$\left. + \ldots + (-1)^n \sin^{2n} x\right\} d\sin x = \int \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{n}{p} \sin^{2p} x\,d\sin x,$$

получаем формулу

$$\int \cos^{2n+1} x\,dx = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{n}{p} \frac{\sin^{2p+1} x}{2p+1}, \qquad (234)$$

и таким же путём, или заменяя в последней формуле x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, получаем:

$$\int \sin^{2n+1} x\,dx = -\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\binom{n}{p}\frac{\cos^{2p+1} x}{2p+1}. \tag{235}$$

Примеры

4) $\int \cos^6 x\,dx = \frac{1}{192}\sin 6x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{15}{64}\sin 2x+\frac{5}{16}x,$

или

$$=\sin x\left\{\frac{1}{6}\cos^5 x+\frac{5}{24}\cos^3 x+\frac{5}{16}\cos x\right\}+\frac{5}{16}x.$$

5) $\int \sin^8 x\,dx = \frac{1}{128}\left\{\frac{1}{8}\sin 8x-\frac{4}{3}\sin 6x+7\sin 4x-28\sin 2x\right\}+\frac{35}{128}x,$

или

$$=-\frac{\cos x}{8}\left\{\sin^7 x+\frac{7}{6}\sin^5 x+\frac{35}{24}\sin^3 x+\frac{35}{16}\sin x\right\}+\frac{35}{128}x.$$

6) $\int \cos^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\right)dx = -\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{3}{8}x.$

7) $\int \sin^3\left(3x-\frac{\pi}{12}\right)dx = \frac{1}{36}\cos\left(9x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\cos\left(3x-\frac{\pi}{12}\right).$

§ 3. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\cos^m x} = \int \sec^m x\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sin^m x} = \int \operatorname{cosec}^m x\,dx$$

I) Рассмотрим сначала простейшие интегралы.

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

Результат этот получаем интегрированием по частям:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{1}{\cos x}\,d\operatorname{tg} x = \ldots$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\,\frac{\sin x}{\cos^3 x}+\frac{2}{3}\,\frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{или} \quad = \operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x.$$

Второй результат получаем преобразованием интегрируемого выражения к виду $(\operatorname{tg}^2 x+1)\,d\operatorname{tg} x$.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2}\,\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3}\,\frac{\cos x}{\sin^3 x}-\frac{2}{3}\,\frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{или} \quad = -\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x.$$

Далее находим формулы приведения.

II) Непосредственным интегрированием по частям, или обращая формулы (228) и (229) с заменой в них $(m-2)$ на m, получаем:

$$\int \frac{dx}{\cos^m x} = \frac{1}{m-1} \frac{\sin x}{\cos^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\cos^{m-2} x}, \tag{236}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}, \tag{237}$$

или в другом виде

$$\int \sec^m x\, dx = \frac{1}{m-1} \sec^{m-2} x \operatorname{tg} x + \frac{m-2}{m-1} \int \sec^{m-2} x\, dx, \tag{238}$$

$$\int \operatorname{cosec}^m x\, dx = -\frac{1}{m-1} \operatorname{cosec}^{m-2} x \operatorname{ctg} x + \frac{m-2}{m-1} \int \operatorname{cosec}^{m-2} x\, dx. \tag{239}$$

Последовательным применением этих формул приходим при m чётном к интегралам

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x = -\frac{\cos x}{\sin x},$$

и при m нечётном к интегралам

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

III) Аналогично (225) на основании формул (236) и (237), последовательным применением их, получаем формулы:

$$\int \frac{dx}{\cos^{2n} x} = \frac{\sin x}{2n-1} \left\{ \frac{1}{\cos^{2n-1} x} + \frac{2n-2}{2n-3} \frac{1}{\cos^{2n-3} x} + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)} \frac{1}{\cos^{2n-5} x} + \ldots + \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1} \frac{1}{\cos x} \right\}. \tag{240}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} = \frac{\sin x}{2n} \left\{ \frac{1}{\cos^{2n} x} + \frac{2n-1}{2n-2} \frac{1}{\cos^{2n-2} x} + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)} \frac{1}{\cos^{2n-4} x} + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2} \frac{1}{\cos^2 x} \right\} + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right), \tag{241}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n} x} = -\frac{\cos x}{2n-1} \left\{ \frac{1}{\sin^{2n-1} x} + \frac{2n-2}{2n-3} \frac{1}{\sin^{2n-3} x} + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)} \frac{1}{\sin^{2n-5} x} + \ldots + \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1} \frac{1}{\sin x} \right\}, \tag{242}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x} = -\frac{\cos x}{2n} \left\{ \frac{1}{\sin^{2n} x} + \frac{2n-1}{2n-2} \frac{1}{\sin^{2n-2} x} + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)} \frac{1}{\sin^{2n-4} x} + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2} \frac{1}{\sin^2 x} \right\} + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \tag{243}$$

или в другом виде:

$$\int \sec^{2n} x\,dx = \frac{\operatorname{tg} x}{2n-1}\left\{\sec^{2n-2} x + \frac{2n-2}{2n-3}\sec^{2n-4} x + \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}\sec^{2n-6} x + \ldots + \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}\right\}, \quad (244)$$

$$\int \sec^{2n+1} x\,dx = \frac{\operatorname{tg} x}{2n}\left\{\sec^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n-2}\sec^{2n-3} x + \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}\sec^{2n-5} x + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\sec x\right\} +$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right), \quad (245)$$

$$\int \operatorname{cosec}^{2n} x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg} x}{2n-1}\left\{\operatorname{cosec}^{2n-2} x + \frac{2n-2}{2n-3}\operatorname{cosec}^{2n-4} x + \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}\operatorname{cosec}^{2n-6} x + \ldots + \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}\right\}, \quad (246)$$

$$\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg} x}{2n}\left\{\operatorname{cosec}^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n-2}\operatorname{cosec}^{2n-3} x + \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}\operatorname{cosec}^{2n-5} x + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\operatorname{cosec} x\right\} -$$
$$- \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\ln \operatorname{ctg}\frac{x}{2}. \quad (247)$$

Формулы (240) и (241), с одной стороны, и (242) и (243) — с другой, взаимно следуют друг из друга при замене x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Представив интеграл $\int \frac{dx}{\cos^{2n} x}$ в виде

$$\int (1+\operatorname{tg}^2 x)^{n-1}\,d\operatorname{tg} x = \int \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n-1}{p} \operatorname{tg}^{2p} x\,d\operatorname{tg} x$$

и выполнив интегрирование, получаем:

$$\int \frac{dx}{\cos^{2n} x} = \int \sec^{2n} x\,dx = \sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{n-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p+1} x}{2p+1}, \quad (248)$$

и затем точно так же, или заменяя в последней формуле x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, будем иметь

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n} x} = \int \operatorname{cosec}^{2n} x\,dx = -\sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{n-1}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2p+1} x}{2p+1}. \quad (249)$$

Примеры

8) $$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\frac{\cos x}{5}\left\{\frac{1}{\sin^5 x}+\frac{4}{3}\,\frac{1}{\sin^3 x}+\frac{8}{3}\,\frac{1}{\sin x}\right\} \text{ [формула (242)]},$$

или

$$= -\left\{\operatorname{ctg} x+\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x\right\} \text{ [формула (249)]}.$$

9) $$\int \operatorname{cosec}^7 x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg} x}{6}\left\{\operatorname{cosec}^5 x+\frac{5}{4}\operatorname{cosec}^3 x+\frac{15}{8}\operatorname{cosec} x\right\}-\frac{5}{16}\ln\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

10) $$\int \frac{dx}{\cos^{12} x} = \frac{\sin x}{11}\left\{\frac{1}{\cos^{11} x}+\frac{10}{9}\,\frac{1}{\cos^9 x}+\frac{10\cdot 8}{9\cdot 7}\,\frac{1}{\cos^7 x}+\frac{10\cdot 8\cdot 6}{9\cdot 7\cdot 5}\,\frac{1}{\cos^5 x}+\frac{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}\,\frac{1}{\cos^3 x}+\frac{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}\,\frac{1}{\cos x}\right\}$$

[формула (240)]

или

$$= \frac{1}{11}\operatorname{tg}^{11} x+\frac{5}{9}\operatorname{tg}^9 x+\frac{10}{7}\operatorname{tg}^7 x+2\operatorname{tg}^5 x+\frac{5}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x$$

[формула (249)]

11) $$\int \frac{dx}{\cos^3\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)} = \frac{1}{6}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)}+\frac{1}{6}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{3}{2}x\right).$$

§ 4. Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$ и $\int \operatorname{ctg}^m x\,dx$

Представив интеграл

$$\int \operatorname{tg}^m x\,dx \text{ в виде } \int \operatorname{tg}^{m-2} x\,d\operatorname{tg} x-\int \operatorname{tg}^{m-2} x\,dx,$$

получаем формулу приведения

$$\int \operatorname{tg}^m x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{m-1}-\int \operatorname{tg}^{m-2} x\,dx, \tag{250}$$

и точно так же, или заменой x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, формулу

$$\int \operatorname{ctg}^m x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{m-1} x}{m-1}-\int \operatorname{ctg}^{m-2} x\,dx. \tag{250'}$$

Последовательным применением первой из этих формул получаем:

$$\int \operatorname{tg}^{2n} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{2n-1} x}{2n-1} - \frac{\operatorname{tg}^{2n-3} x}{2n-3} + \frac{\operatorname{tg}^{2n-5} x}{2n-5} - \ldots + \frac{(-1)^p \operatorname{tg}^{2n-1-2p} x}{2n-1-2p} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} \operatorname{tg} x + (-1)^n \int dx;$$

$$\int \operatorname{tg}^{2n} x\,dx = \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \frac{\operatorname{tg}^{2n-1-2p} x}{2n-1-2p} + (-1)^n x; \tag{251}$$

$$\int \operatorname{tg}^{2n+1} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{2n} x}{2n} - \frac{\operatorname{tg}^{2n-2} x}{2n-2} + \frac{\operatorname{tg}^{2n-4} x}{2n-4} - \ldots + (-1)^p \frac{\operatorname{tg}^{2n-2p} x}{2n-2p} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + (-1)^n \int \operatorname{tg} x\,dx,$$

$$\int \operatorname{tg}^{2n+1} x\,dx = \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \frac{\operatorname{tg}^{2n-2p} x}{2n-2p} + (-1)^n \ln \sec x. \tag{252}$$

Точно так же, последовательным применением формулы (250′) или заменой в формулах (251) и (252) x на $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, получаем:

$$\int \operatorname{ctg}^{2n} x\,dx = -\sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \frac{\operatorname{ctg}^{2n-1-2p} x}{2n-1-2p} + (-1)^n x, \tag{253}$$

$$\int \operatorname{ctg}^{2n+1} x\,dx = -\sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \frac{\operatorname{ctg}^{2n-2p} x}{2n-2p} - (-1)^n \ln \operatorname{cosec} x. \tag{254}$$

К полученным выражениям для интегралов можем притти также следующим простым путём.

Представив интеграл $\int \operatorname{tg}^{2n} x\,dx$ в виде $\int \frac{\operatorname{tg}^{2n} x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}\, d\operatorname{tg} x$ и замечая, что

$$\frac{\operatorname{tg}^{2n} x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \operatorname{tg}^{2n-2} x - \operatorname{tg}^{2n-4} x + \operatorname{tg}^{2n-6} x - \ldots + (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^n}{\operatorname{tg}^2 x + 1} =$$
$$= \sum_{p=0}^{n=1} (-1)^p \operatorname{tg}^{2n-2-2p} x + \frac{(-1)^n}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$$

и

$$\int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x,$$

по выполнении интегрирования получаем формулу (251).

Точно так же, разделив $\operatorname{tg}^{2n+1} x$ на $(\operatorname{tg}^2 x+1)$ и замечая, что $\int \frac{\operatorname{tg} x\, d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x+1}=\frac{1}{2}\ln(\operatorname{tg}^2 x+1)=\ln\sec x$, получаем формулу (252). Аналогичным путём получаются и остальные две формулы.

Представив интеграл $\int \operatorname{tg}^{2n+1} x\, dx$ в виде

$$\int(\sec^2 x-1)^n \operatorname{tg} x\, dx=\int\sum_0^n(-1)^p\binom{n}{p}\sec^{2n-2p} x \operatorname{tg} x\, dx=$$

$$=\int\sum_0^n(-1)^p\binom{n}{p}\sec^{2n-2p-1} x\, d\sec x=$$

$$=\int\sum_0^{n-1}(-1)^p\binom{n}{p}\sec^{2n-2p-1} x d\sec x+(-1)^n\int\frac{d\sec x}{\sec x}.$$

и выполнив интегрирование, получаем формулу

$$\int \operatorname{tg}^{2n+1} x\, dx=\sum_0^{n-1}(-1)^p\binom{n}{p}\frac{\sec^{2n-2p} x}{2n-2p}+(-1)^n\ln\sec x. \qquad (255)$$

Затем точно так же или заменой x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ получаем:

$$\int \operatorname{ctg}^{2n+1} x\, dx=-\sum_0^{n-1}(-1)^p\binom{n}{p}\frac{\operatorname{cosec}^{2n-2p} x}{2n-2p}-(-1)^n\ln\operatorname{cosec} x. \quad (256)$$

Примеры

12) $\int \operatorname{tg}^6 x\, dx=\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x-x.$

13) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^5 x}=-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln\operatorname{cosec} x.$

14) $\int \operatorname{ctg}^4\left(\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}\pi\right)dx=-\operatorname{ctg}^3\left(\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}\pi\right)+$
$+3\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{1}{3}x.$

§ 5. Интегралы вида $\int \sin^m x\cos^n x\, dx$ (m и $n>0$ или <0)

Для приведения интегрируемого выражения $\sin^m x\cos^n x$ к кратным углам, пользуемся формулами Эйлера или формулами алгебры, приведёнными в § 2.

Выражая по этим формулам $\sin^m x$ и $\cos^n x$ и перемножая одно выражение на другое, для каждого из получающихся произведений вида $\sin ax \cos bx$ или $\cos ax \cos bx$ пользуемся формулами

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$$

и

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$

и в результате приходим к сумме первых степеней $\sin$ — a и $\cos$ — a аргументов различной кратности.

I) Интегрированием по частям получаем формулы приведения: (см. раздел II, § 8, гл. I)

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx, \tag{257}$$

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx. \tag{258}$$

Обращая эти формулы и заменяя в первой из них $(n-2)$ на $(-n)$ и во второй $(m-2)$ на $(-m)$, получаем ещё две формулы:

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}\,dx = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{m-1}\int \frac{\sin^m x}{\cos^{n-2} x}\,dx, \tag{259}$$

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n x}{\sin^{m-2} x}\,dx. \tag{260}$$

Полученные четыре формулы дают возможность вычисления всякого интеграла вида $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ при целых m и n для всякой возможной комбинации их знаков.

Формулы (257) и (259) снижают каждый раз на две единицы степень $\cos$ — a, причём m не ограничено в знаке и может быть как положительным, так и отрицательным. Точно так же формулы (258) и (260) снижают степень $\sin$ — a как при положительном, так и при отрицательном n.

При положительных m и n соответственным последовательным применением формул (257) и (258) приходим в конечном счёте к одному из следующих интегралов:

$$\int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x,$$

или

$$= -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x,$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x$$

или

$$= \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x,$$

$$\int \sin x\cos x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x,$$

или

$$= \frac{1}{2}\sin^2 x,$$

или

$$= -\frac{1}{2}\cos^2 x;$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x, \quad \int \cos x\,dx = \sin x.$$

В том случае, когда m или n или оба вместе — отрицательны, т. е. для интегралов $\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx$, $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx$ и $\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}$, соответственным применением формул приходим к какому-либо из интегралов:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right),$$

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \ln \operatorname{tg} x, \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln \sin x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x = -\frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\sin x},$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln\cos x, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{\cos x}.$$

И в том и в другом случае, следовательно, получаем для рассматриваемого интеграла конечное выражение.

Таким образом всякий интеграл, под знаком которого находятся в числителе и знаменателе произведения каких-либо основных тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ с различными целыми степенями, всегда вычисляется в конечном виде, так как интегрируемое выражение может быть представлено в виде суммы произведений $\sin^{\pm m} x\cos^{\pm n} x$, при какой-либо комбинации знаков показателей.

Заметим, что формулы (228), (229), (236) и (237) являются следствием более общих формул (257) — (260).

II) Представив интегралы $\int \sin^m x \cos^{2n+1} x\,dx$ и $\int \cos^m x \sin^{2n+1} x\,dx$ в виде

$$\int \sin^m x\,(1-\sin^2 x)^n\,d\sin x = \int \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{n}{p} \sin^{2p+m} x\,d\sin x$$

и

$$-\int \cos^m x\,(1-\cos^2 x)^n\,d\cos x =$$

$$= -\int \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{n}{p} \cos^{2p+m} x\,d\cos x,$$

получаем формулы

$$\int \sin^m x \cos^{2n+1} x\,dx = \sum_0^n (-1)^p \binom{n}{p} \frac{\sin^{2p+m+1} x}{2p+m+1}, \tag{261}$$

$$\int \cos^m x \sin^{2n+1} x\,dx = -\sum_0^n (-1)^p \binom{n}{p} \frac{\cos^{2p+m+1} x}{2p+m+1}. \tag{262}$$

Обе формулы взаимно следуют друг из друга при замене x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. При $m=0$ из них следуют формулы (234) и (235).

Показатель m для полученных формул не ограничен в своих значениях и может быть всяким, положительным и отрицательным, целым и дробным числом.

Заменяя m на $(-m)$, можем представить формулы в более наглядном для соответствующего случая виде

$$\int \frac{\cos^{2n+1} x}{\sin^m x}\,dx = \sum_0^n (-1)^p \binom{n}{p} \frac{\sin^{2p-m+1} x}{2p-m+1}, \tag{263}$$

$$\int \frac{\sin^{2n+1} x}{\cos^m x}\,dx = -\sum_0^n (-1)^p \binom{n}{p} \frac{\cos^{2p-m+1} x}{2p-m+1}. \tag{264}$$

При $p=\frac{m-1}{2}$ эти формулы теряют значение для одного из членов суммы и этот член тогда равен для первой формулы

$$\int (-1)^p \binom{n}{p} \sin^{2p-m} x\,d\sin x = \int (-1)^{\frac{m-1}{2}} \binom{n}{\frac{m-1}{2}} \frac{d\sin x}{\sin x} =$$

$$= (-1)^{\frac{m-1}{2}} \binom{n}{\frac{m-1}{2}} \ln \sin x,$$

и для второй $(-1)^{\frac{m+1}{2}} \binom{n}{\frac{m-1}{2}} \ln \cos x$.

При m дробном формулы дают выражения для интегралов

$$\int \left(\sqrt[s]{\sin x}\right)^{\pm r} \cos^{2n+1} x\,dx \quad \text{и} \quad \int \left(\sqrt[s]{\cos x}\right)^{\pm r} \sin^{2n+1} x\,dx.$$

III) Представив интегралы $\int \frac{\sin^m x}{\cos^{m+2n} x}\,dx$ и $\int \frac{\cos^m x}{\sin^{m+2n} x}\,dx$ в виде

$$\int \operatorname{tg}^m x \sec^{2n} x\,dx = \int \operatorname{tg}^m x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)^{n-1}\,d\operatorname{tg} x =$$

$$= \int \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{p} \operatorname{tg}^{2p+m} x\,d\operatorname{tg} x$$

и

$$\int \operatorname{ctg}^m x \operatorname{cosec}^{2n} x\,dx = -\int \operatorname{ctg}^m x\,(1+\operatorname{ctg}^2 x)^{n-1}\,d\operatorname{ctg} x =$$

$$= -\int \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{p} \operatorname{ctg}^{2p+m} x\,d\operatorname{ctg} x,$$

получаем формулы

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^{m+2n} x}\,dx = \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p+m+1} x}{2p+m+1} \qquad (n \geqslant 1) \qquad (265)$$

и

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^{m+2n} x}\,dx = -\sum_0^{n-1} \binom{n-1}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2p+m+1} x}{2p+m+1}. \qquad (266)$$

Показатель m для этих формул не ограничен в своих значениях, так что m может быть и отрицательным и дробным числом.

При $m=0$ (249) из полученных формул следуют формулы (248) и (249).

При замене x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ формулы (265) и (266) следуют друг из друга.

IV) Представив интеграл $\int \frac{dx}{\sin^{2m} x \cos^{2n} x}$ в виде

$$\int \operatorname{cosec}^{2m} x \sec^{2n} x\,dx = \int (1+\operatorname{ctg}^2 x)^m (1+\operatorname{tg}^2 x)^{n-1}\,d\operatorname{tg} x =$$

$$= \int \sum_{p=0}^{p=m+n-1} \binom{m+n-1}{p} \operatorname{tg}^{2p-2m} x\,d\operatorname{tg} x$$

и затем в виде

$$\int \operatorname{cosec}^{2m} x \sec^{2n} x\, dx = -\int \sum_{p=0}^{p=m+n-1} \binom{m+n-1}{p} \operatorname{ctg}^{2p-2n} x\, d \operatorname{ctg} x,$$

получаем формулы

$$\int \frac{dx}{\sin^{2m} x \cos^{2n} x} = \sum_{p=0}^{p=m+n-1} \binom{m+n-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p-2m+1} x}{2p-2m+1}$$

или

$$= -\sum_{p=0}^{p=m+n-1} \binom{m+n-1}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2p-2n+1} x}{2p-2n+1}. \qquad (267)$$

При $m=0$ и затем $n=0$ эти формулы дают

$$\int \frac{dx}{\cos^{2n} x} = \sum_{0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p+1} x}{2p+1}$$

или

$$= -\sum_{0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2p-2n+1} x}{2p-2n+1},$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2m} x} = \sum_{0}^{m-1} \binom{m-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p-2m+1} x}{2p-2m+1},$$

или

$$= -\sum_{0}^{m-1} \binom{m-1}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2p+1} x}{2p+1}.$$

V) Представив интеграл $\int \frac{dx}{\sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x}$ в виде

$$\int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{2m+1}{2}} (1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{2n-1}{2}}}{\operatorname{tg}^{2m+1} x}\, d \operatorname{tg} x = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^{m+n}}{\operatorname{tg}^{2m+1} x}\, d \operatorname{tg} x =$$

$$= \int \sum_{p=0}^{p=m+n} \binom{m+n}{p} \operatorname{tg}^{2p-2m-1} x\, d \operatorname{tg} x,$$

и затем в виде

$$-\int \frac{(1+\operatorname{ctg}^2 x)^{\frac{2m-1}{2}}(1+\operatorname{ctg}^2 x)^{\frac{2n+1}{2}}}{\operatorname{ctg}^{2n+1} x}\,d\operatorname{ctg} x =$$

$$= -\int \sum_{p=0}^{p=m+n} \binom{m+n}{p} \operatorname{ctg}^{2p-2n-1} x\,d\operatorname{ctg} x,$$

получаем формулы

$$\int \frac{dx}{\sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x} = \sum_{p=0}^{p=m+n} \binom{m+n}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p-2m} x}{2p-2m},$$

или

$$= -\sum_{p=0}^{p=m+n} \binom{m+n}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2p-2n} x}{2p-2n}. \qquad (268)$$

При $p=m$ первая формула и при $p=n$ — вторая не дают выражения для одного из членов суммы, и этот член равен

$$\binom{m+n}{n} \ln \operatorname{tg} x \quad \text{или} \quad -\binom{m+n}{n} \ln \operatorname{ctg} x.$$

Формулы действительны для всякого $(m+n) \geqslant 0$. Заменяя в них m на $-(m+1)$ и затем n на $-(n+1)$, можем получить ещё формулы

$$\int \frac{\sin^{2m+1} x}{\cos^{2n+1} x}\,dx = \sum_{0}^{n-m-1} \binom{n-m-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p+2m+2} x}{2p+2m+2} =$$

$$= -\sum_{0}^{n-m-1} \binom{n-m-1}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2p-2n} x}{2p-2n} \qquad (m \leqslant n-1),$$

$$\int \frac{\cos^{2n+1} x}{\sin^{2m+1} x}\,dx = \sum_{0}^{m-n-1} \binom{m-n-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p-2m} x}{2p-2m} =$$

$$= -\sum_{0}^{m-n-1} \binom{m-n-1}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2p+2n+2} x}{2p+2n+2} \qquad (n \leqslant m-1).$$

Примеры

15) $\int \sin^4 x \cos^6 x\,dx = \sin x \left\{ -\frac{1}{10} \sin^2 x \cos^7 x - \right.$

$$\left. - \frac{3}{10\cdot 8} \cos^7 x + \frac{3}{10\cdot 8\cdot 6} \cos^5 x + \frac{3\cdot 5}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4} \cos^3 x + \frac{3\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} \cos x \right\} +$$

$$+ \frac{3.5.3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} x = \sin x \left\{ -\frac{1}{10} \sin^2 x \cos^7 x + \frac{3}{80} \cos^7 x + \frac{1}{160} \cos^5 x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{128} \cos^3 x + \frac{3}{256} \cos x \right\} + \frac{3}{256} x \quad \text{[формулы (258) и (228)]},$$

или

$$=\cos x\left\{\frac{1}{10}\sin^5 x\cos^4 x+\frac{5}{10.8}\sin^5 x\cos^2 x+\frac{5.3}{10.8.6}\sin^5 x-\right.$$
$$\left.-\frac{5.3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}\sin^3 x-\frac{5.3.3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 2\cdot 4}\sin x\right\}+\frac{5.3.3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}x=$$
$$=\cos x\left\{\frac{1}{10}\sin^5 x\cos^4 x+\frac{1}{16}\sin^5 x\cos^2 x+\frac{1}{32}\sin^5 x-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{128}\sin^3 x-\frac{3}{256}\sin x\right\}+\frac{3}{256}x \quad \text{[формулы (257) и (229)]},$$

или

$$=\frac{1}{320}\sin^5 2x+\frac{1}{2048}\sin 8x-\frac{1}{256}\sin 4x+\frac{3}{256}x.$$

Последнее выражение получаем, представив интеграл в виде

$$\frac{1}{32}\int\sin^4 2x(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{32}\int\sin^4 2x\,dx+\frac{1}{32}\int\sin^4 2x\cos 2x\,dx.$$

Этот приём, если не пользоваться готовыми формулами, даёт наиболее простое вычисление интеграла $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$, если числа m и n — чётные.

16) $\int\sin^7 x\cos^6 x\,dx=$

$$=-\frac{1}{7}\cos^7 x+\frac{1}{3}\cos^9 x-\frac{3}{11}\cos^{11} x+\frac{1}{13}\cos^{13} x \quad \text{[формула (262)]}.$$

17) $$\int\frac{\sin^{11} x}{\cos x}dx=\frac{5}{2}\cos^2 x-\frac{5}{2}\cos^4 x+\frac{5}{3}\cos^6 x-$$
$$-\frac{5}{8}\cos^8 x+\frac{1}{10}\cos^{10} x-\ln\cos x.$$

18) $$\int\frac{dx}{\sin^6 x\cos^6 x}=-\frac{1}{32}\left\{\operatorname{ctg} 2x+\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 2x+\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 2x\right\} \text{ [формула (249)]},$$

или

$$=10(\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x)+\frac{5}{3}(\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{ctg}^3 x)+\frac{1}{5}(\operatorname{tg}^5 x-\operatorname{ctg}^5 x) \quad \text{[формула (267)]}.$$

19) $$\int\sin^{2m} x\cos^{2m} x\,dx=\frac{\binom{2m}{m}}{2^{4m}}x+\frac{(-1)^m}{2^{4m}}\sum_0^{m-1}(-1)^p\binom{2m}{p}\frac{\sin(4m-4p)x}{2m-2p}$$
[формула (226)].

20) $$\int\frac{dx}{\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)}=$$
$$=-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)+\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2x\right).$$

§ 6. Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x\,dx$ и $\int \operatorname{ctg}^m x \operatorname{cosec}^n x\,dx$

I) Написав соответствующим образом формулы (265) и (266), имеем:

$$\int \operatorname{tg}^m x \sec^{2n} x\,dx = \sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{n-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p+m+1} x}{2p+m+1}, \tag{265}$$

$$\int \operatorname{ctg}^m x \operatorname{cosec}^{2n} x\,dx = -\sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{n-1}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2p+m+1} x}{2p+m+1} \quad (n \geqslant 1). \tag{266}$$

Значения m для этих формул ничем не ограничены. Меняя m на $(-m)$, получаем:

$$\int \operatorname{ctg}^m x \sec^{2n} x\,dx = \sum_{0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p-m+1} x}{2p-m+1}, \tag{269}$$

$$\int \operatorname{tg}^m x \operatorname{cosec}^{2n} x\,dx = -\sum_{0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2p-m+1} x}{2p-m+1} \quad (n \geqslant 1). \tag{270}$$

Последние две формулы не дают выражения для одного из членов сумм при $p = \frac{m-1}{2}$ и этот член как для первой, так и для второй формулы равен

$$\binom{n-1}{\frac{m-1}{2}} \ln \operatorname{tg} x \quad \text{или} \quad -\binom{n-1}{\frac{m-1}{2}} \ln \operatorname{ctg} x.$$

Заметим, что так как формулы справедливы и для дробных значений m, то они дают также выражения для интегралов

$$\int \sqrt[s]{\operatorname{tg}^r x} \cdot \sec^{2n} x\,dx, \qquad \int \sqrt[s]{\operatorname{ctg}^r x} \operatorname{cosec}^{2n} x\,dx,$$

$$\int \sqrt[s]{\operatorname{ctg}^r x} \cdot \sec^{2n} x\,dx \quad \text{и} \quad \int \sqrt[s]{\operatorname{tg}^r x} \cdot \operatorname{cosec}^{2n} x\,dx.$$

II) Представив интеграл $\int \operatorname{tg}^{2m+1} x \sec^n x\,dx$ в виде

$$\int \operatorname{tg}^{2m} x \sec^{n-1} x\,d\sec x = \int (\sec^2 x - 1)^m \sec^{n-1} x\,d\sec x =$$

$$= \int \sum_{0}^{m} (-1)^{m+p} \binom{m}{p} \sec^{2p+n-1} x\,d\sec x,$$

получаем формулу

$$\int \operatorname{tg}^{2m+1} x \sec^n x\,dx = \sum_0^m (-1)^{m+p} \binom{m}{p} \frac{\sec^{2p+n} x}{2p+n} \tag{271}$$

и точно так же, или заменой x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$,

$$\int \operatorname{ctg}^{2m+1} x \operatorname{cosec}^n x\,dx = -\sum_0^m (-1)^{m+p} \binom{m}{p} \frac{\operatorname{cosec}^{2p+n} x}{2p+n}. \tag{272}$$

Заменяя в этих формулах n на $(-n)$, имеем:

$$\int \operatorname{tg}^{2m+1} x \cos^n x\,dx = \sum_0^m (-1)^{m+p} \binom{m}{p} \frac{\sec^{2p-n} x}{2p-n}, \tag{273}$$

$$\int \operatorname{ctg}^{2m+1} x \sin^n x\,dx = -\sum_0^m (-1)^{m+p} \binom{m}{p} \frac{\operatorname{cosec}^{2p-n} x}{2p-n}. \tag{274}$$

В случае $p=\frac{n}{2}$ последние две формулы не дают значения для одного из членов сумм, и тогда для интеграла (273) этот член равен $(-1)^{m+p}\binom{m}{p}\ln\sec x$ и для интеграла (274) $(-1)^{m+p}\binom{m}{p}\ln\sin x$.

Принимая n дробным, имеем выражения для интегралов

$$\int \sqrt[s]{\sec^r x}\operatorname{tg}^{2m+1} x\,dx, \quad \int \sqrt[s]{\operatorname{cosec}^r x}\operatorname{ctg}^{2m+1} x\,dx,$$

$$\int \sqrt[s]{\cos^r x}\operatorname{tg}^{2m+1} x\,dx \quad \text{и} \quad \int \sqrt[s]{\sin^r x}\operatorname{ctg}^{2m+1} x\,dx.$$

III) Представив интеграл $\int \operatorname{tg}^{2m} x \sec^{2n+1} x\,dx$ в виде

$$\int (\sec^2 x - 1)^m \sec^{2n+1} x\,dx = \int \sum_0^m (-1)^{m+p} \binom{m}{p} \sec^{2p+2n+1} x\,dx,$$

получаем формулу

$$\int \operatorname{tg}^{2m} x \sec^{2n+1} x\,dx = \sum_0^m (-1)^{m+p} \binom{m}{p} \int \sec^{2p+2n+1} x\,dx \tag{275}$$

и затем таким же путём

$$\int \operatorname{ctg}^{3m} x \operatorname{cosec}^{2n+1} x\,dx = \sum_0^m (-1)^{m+p} \binom{m}{p} \int \operatorname{cosec}^{2p+2n+1} x\,dx. \tag{276}$$

Заменяя в этих формулах n на $(-n)$, имеем:

$$\int \operatorname{tg}^{2m} x \cos^{2n+1} x\,dx = \sum_0^m (-1)^{m+p} \binom{m}{p} \int \cos^{2n+1-2p} x\,dx, \quad (277)$$

$$\int \operatorname{ctg}^{2m} x \sin^{2n+1} x\,dx = \sum_0^m (-1)^{m+p} \binom{m}{p} \int \sin^{2n+1-2p} x\,dx. \quad (278)$$

Для интегралов, к которым приводят полученные четыре формулы, имеем выражения (225), (231), (234), (227), (233), (235), (241) и (243).

Примеры

21) $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x.$

22) $\int \operatorname{ctg}^3 x \operatorname{cosec} x\,dx = -\frac{1}{3}\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x.$

23) $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x\,dx = \frac{1}{3}\sec^3 x.$

24) $\int \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{cosec}^3 x\,dx = -\operatorname{ctg} x\left(\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^3 x - \frac{1}{8}\operatorname{cosec} x\right) + \frac{1}{8}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

25) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}\,dx = -\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^6 x - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x$ [формула (266)].

26) $\int \operatorname{tg}^5 x \sqrt{\sec^3 x}\,dx =$

$$= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{7}\sec^2 x - \frac{1}{11}\sec^4 x\right)\sqrt{\sec^3 x} \quad \text{[формула (271)]}.$$

27) $\int \sqrt{\operatorname{tg}^2 x}\sec^4 x\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x} + \frac{2}{9}\sqrt{\operatorname{tg}^9 x}$ [формула (265)].

28) $\int \operatorname{ctg}^4 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x\left(\frac{1}{6}\operatorname{cosec}^5 x - \frac{7}{24}\operatorname{cosec}^3 x + \frac{1}{16}\operatorname{cosec} x\right) -$

$$-\frac{1}{16}\ln \operatorname{ctg}\frac{x}{2} \quad \text{[формулы (247) и (276)]}.$$

29) $\int \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\sec^3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)dx =$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\sec^3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4}\sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{4}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{x}{4}\right) \quad \text{[формула (275)]}.$$

§ 7. Формулы приведения для интегралов более сложных, целых рациональных тригонометрических выражений

Основываясь на предыдущем, приходим к выводу, что изложенными выше приёмами, или пользуясь прямо выведенными формулами, можем вычислить всякий интеграл

$$\int F(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sec x, \operatorname{cosec} x)\, dx,$$

если F — целая рациональная функция своих аргументов. Представив интеграл в виде суммы интегралов вида $\int \sin^{\pm m} x \cos^{\pm n} x\, dx$, находим выражения для каждого из этих интегралов отдельно.

В сложных случаях, независимо от этого общего приёма, вычисление интеграла может быть существенно облегчено применением соответствующих формул приведения.

В этих целях выведем несколько таких формул.

I) Выполняя по отношению к интегралу

$$\int (a+b\cos x)^n (\alpha+\beta\cos x)\, dx$$

следующее преобразование:

$$\begin{aligned}
&\int (a+b\cos x)^n (\alpha+\beta\cos x)\, dx = \\
&\qquad = \alpha\int (a+b\cos x)^n\, dx + \beta\int (a+b\cos x)^n\, d\sin x = \\
&\qquad = \alpha\int (a+b\cos x)^n\, dx + \beta(a+b\cos x)^n \sin x + \\
&\qquad\qquad + b\beta n\int (a+b\cos x)^{n-1}\sin^2 x\, dx = \\
&\qquad = \beta(a+b\cos x)^n\sin x + \alpha\int (a+b\cos x)^n\, dx + \\
&\qquad\qquad + b\beta n\int (a+b\cos x)^{n-1}\, dx - \\
&\qquad\qquad - n\int (a+b\cos x)^{n-1}\, b\cos x\beta\cos x\, dx = \\
&\qquad = \beta(a+b\cos x)^n\sin x + \alpha\int (a+b\cos x)^n\, dx + \\
&\qquad\qquad + b\beta n\int (a+b\cos x)^{n-1}\, dx - \\
&\qquad\qquad - n\int (a+b\cos x)^{n-1}\left[(a+b\cos x)(\alpha+\beta\cos x) - \right. \\
&\qquad\qquad \left. - (a\alpha - b\alpha\cos x - a\beta\cos x)\right] dx =
\end{aligned}$$

$$=\beta (a+b\cos x)^n \sin x+\int (a+b\cos x)^{n-1}(a\alpha+b\alpha\cos x)dx+$$
$$+\int (a+b\cos x)^{n-1} nb\beta\, dx+$$
$$+\int (a+b\cos x)^{n-1}(na\alpha+nb\alpha\cos x+na\beta\cos x)\,dx-$$
$$-n\int (a+b\cos x)^n(\alpha+\beta\cos x)\,dx,$$

получаем формулу приведения

$$\int (a+b\cos x)^n(\alpha+\beta\cos x)\,dx=\frac{\beta}{n+1}(a+b\cos x)^n\sin x+$$
$$+\int (a+b\cos x)^{n-1}(\alpha_1+\beta_1\cos x)\,dx, \quad (279)$$

где $\alpha_1=a\alpha+\frac{n}{n+1}b\beta$ и $\beta_1=b\alpha+\frac{n}{n+1}a\beta$.

Последовательным применением этой формулы приходим к интегралу $\int (\alpha_n+\beta_n\cos x)\,dx=\alpha_n x+\beta_n\sin x$.

Полагая в формуле (279) $\alpha=0$, $\beta=1$, получаем:

$$\int (a+b\cos x)^n\cos x\,dx=\frac{1}{n+1}(a+b\cos x)^n\sin x+$$
$$+\frac{n}{n+1}\int (a+b\cos x)^{n-1}(b+a\cos x)\,dx. \quad (280)$$

Непосредственно имеем:

$$\int (a+b\cos x)^n\sin x\,dx=-\frac{1}{b(n+1)}(a+b\cos x)^{n+1}. \quad (281)$$

Представив далее интеграл $\int (a+b\cos x)^n\,dx$ в виде $\int (a+b\cos x)^{n-1}(a+b\cos x)\,dx$ и пользуясь формулой (279), получаем:

$$\int (a+b\cos x)^n\,dx=$$
$$=\frac{b}{n}(a+b\cos x)^{n-1}\sin x+\int (a+b\cos x)^{n-2}(\alpha+\beta\cos x)\,dx, \quad (282)$$

где $\alpha=a^2+\frac{n-1}{n}b^2$ и $\beta=\frac{2n-1}{n}ab$.

Дальнейшее вычисление интеграла ведётся уже по формуле (279).

Заменяя в полученных четырёх формулах x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, получаем:

$$\int (a+b\sin x)^n (\alpha+\beta\sin x)\,dx = -\frac{\beta}{n-1}(a+b\sin x)^n\cos x + \\ + \int (a+b\sin x)^{n-1}(\alpha_1+\beta_1\sin x)\,dx, \quad (283)$$

где $\alpha_1 = a\alpha + \frac{n}{n+1}b\beta$ и $\beta_1 = b\alpha + \frac{n}{n+1}a\beta$;

$$\int (a+b\sin x)^n \sin x\,dx = -\frac{1}{n+1}(a+b\sin x)^n\cos x + \\ + \frac{n}{n+1}\int (a+b\sin x)^{n-1}(b+a\sin x)\,dx, \quad (284)$$

$$\int (a+b\sin x)^n\cos x\,dx = \frac{1}{b(n+1)}(a+b\sin x)^{n+1}, \quad (285)$$

$$\int (a+b\sin x)^n\,dx = -\frac{b}{n}(a+b\sin x)^{n-1}\cos x + \\ + \int (a+b\sin x)^{n-2}(\alpha+\beta\sin x)\,dx, \quad (286)$$

где $\alpha = a^2 + \frac{n-1}{n}b^2$ и $\beta = \frac{2n-1}{n}ab$.

Последовательным применением формулы (283) приходим к интегралу $\int (\alpha_n + \beta_n\sin x)\,dx = a_n x - b_n\cos x$.

Для интеграла $\int (a+b\cos x)^n(\alpha+\beta\sin x)\,dx$ имеем

$$\int (a+b\cos x)^n(\alpha+\beta\sin x)\,dx = \\ = \frac{\beta}{b(n+1)}(a+b\cos x)^{n+1} + \alpha\int (a+b\cos x)^n\,dx,$$

и дальнейшее вычисление ведём по формулам (279) и (282).

Точно так же интеграл $\int (a+b\sin x)^n(\alpha+\beta\cos x)\,dx$ вычисляется по формулам (285), (286) и (283).

II) Представив интеграл $\int (a+b\operatorname{tg} x)^n(\alpha+\beta\operatorname{tg} x)\,dx$ в виде

$$\int (a+b\operatorname{tg} x)^{n-1}[a\alpha + (a\beta+b\alpha)\operatorname{tg} x + b\beta\operatorname{tg}^2 x]\,dx = \\ = \int (a+b\operatorname{tg} x)^{n-1}[(a\alpha-b\beta)+(a\beta+b\alpha)\operatorname{tg} x]\,dx + \\ + \beta\int (a+b\operatorname{tg} x)^{n-1}b\sec^2 x\,dx,$$

получаем формулу

$$\int (a+b\operatorname{tg} x)^n (\alpha+\beta\operatorname{tg} x)\,dx = \\ =\frac{\beta}{n}(a+b\operatorname{tg} x)^n+\int (a+b\operatorname{tg} x)^{n-1}(\alpha_1+\beta_1\operatorname{tg} x)\,dx, \quad (287)$$

где $\alpha_1=a\alpha-b\beta$ и $\beta_1=a\beta+b\alpha$.

Затем таким же путём или заменой x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ получаем:

$$\int (a+b\operatorname{ctg} x)^n (\alpha+\beta\operatorname{ctg} x)\,dx = \\ =-\frac{\beta}{n}(a+b\operatorname{ctg} x)^n+\int (a+b\operatorname{ctg} x)^{n-1}(\alpha_1+\beta_1\operatorname{ctg} x)\,dx, \quad (288)$$

с теми же значениями для α и β.

Последовательное применение формул (287) и (288) приводит в конечном счёте к интегралам

$$\int (\alpha_n+\beta_n\operatorname{tg} x)\,dx=\alpha_n x-\beta_n\ln\cos x,$$

$$\int (\alpha_n+\beta_n\operatorname{ctg} x)\,dx=\alpha_n x+\beta_n\ln\sin x.$$

Полагая в формулах (287) и (288) $\alpha=0$, $\beta=1$, и затем выражая по этим формулам так же, как и в предыдущем случае, интегралы $\int (a+b\operatorname{tg} x)^n\,dx$ и $\int (a+b\operatorname{ctg} x)^n\,dx$, получаем ещё формулы

$$\int (a+b\operatorname{tg} x)^n \operatorname{tg} x\,dx = \\ =\frac{1}{n}(a+b\operatorname{tg} x)^n-\int (a+b\operatorname{tg} x)^{n-1}(b-a\operatorname{tg} x)\,dx, \quad (289)$$

$$\int (a+b\operatorname{ctg} x)^n \operatorname{ctg} x\,dx = \\ =-\frac{1}{n}(a+b\operatorname{ctg} x)^n-\int (a+b\operatorname{ctg} x)^{n-1}(b-a\operatorname{ctg} x)\,dx, \quad (290)$$

$$\int (a+b\operatorname{tg} x)^n\,dx = \\ =\frac{b}{n-1}(a+b\operatorname{tg} x)^{n-1}+\int (a+b\operatorname{tg} x)^{n-2}(\alpha+\beta\operatorname{tg} x)\,dx, \quad (291)$$

$$\int (a+b\operatorname{ctg} x)^n\,dx = \\ =-\frac{b}{n-1}(a+b\operatorname{ctg} x)^{n-1}+\int (a+b\operatorname{ctg} x)^{n-2}(\alpha+\beta\operatorname{ctg} x)\,dx, \quad (292)$$

где $\alpha=a^2-b^2$ и $\beta=2ab$.

Примеры

30) $$\int (a\sec^2 x - \sin 2x)(\operatorname{ctg}^3 x + 1)\, dx = -\frac{a^2}{2}\operatorname{ctg}^2 x + 4a \operatorname{ctg} x -$$
$$- 4\sin^2 x + \sin^4 x + a^2 \operatorname{tg} x + \frac{a^2}{3}\operatorname{tg}^3 x - \frac{1}{8}\sin^4 x +$$
$$+ a^2 \ln \operatorname{tg} x + 4 \ln \sin x + 4a \ln \cos x - \left(4a + \frac{1}{2}\right) x.$$

31) $$\int \left(1 - \frac{1}{2}\sin x\right)^4 (4 - 3\cos x)\, dx = \frac{3}{80}(2 - \sin x)^5 +$$
$$+ \frac{1}{16}(2 - \sin x)^3 \cos x + \frac{7}{24}(2 - \sin x)^2 \cos x +$$
$$+ \frac{113}{96}(2 - \sin x)\cos x + \frac{255}{48}\cos x + \frac{681}{96} x.$$

32) $$\int (3 - 2\operatorname{ctg} x)^3 \left(\frac{1}{2} - 3\operatorname{ctg} x\right) dx =$$
$$= (3 - 2\operatorname{ctg} x)^3 + 5(3 - 2\operatorname{ctg} x)^2 + 21(3 - 2\operatorname{ctg} x) - \frac{285}{2} x + 4 \ln \sin x.$$

§ 8. Интегралы вида $\int \cos nx \cos^{\pm m} x\, dx$, $\int \sin nx \cos^{\pm m} x\, dx$, $\int \cos nx \sin^{\pm m} x\, dx$, $\int \sin nx \cdot \sin^{\pm m} x\, dx$

I) При n нечётном

$$\cos nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \left\{ \cos x - \frac{n^2 - 1^2}{3!}\cos^3 x + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\cos^5 x - \ldots + \right.$$
$$\left. + (-1)^k \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(2k-1)^2]}{(2k+1)!}\cos^{2k+1} x + \ldots \right\} =$$
$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \left\{ \cos x + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} (-1)^k \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(2k-1)^2]}{(2k+1)!}\cos^{2k+1} x \right\}.$$

На основании этого равенства

$$\int \cos nx \cos^{\pm m} x\, dx = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \left\{ \int \cos^{\pm m+1} x\, dx + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} (-1)^k \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(2k-1)^2]}{(2k+1)!} \int \cos^{2k \pm m+1} x\, dx \right\} \quad (293)$$

(n — нечётное).

Интегралы правой части формулы вычисляются приёмами §§ 2 и 3 или же прямо по выведенным там формулам. Например, для $n=5$ формула даёт

$$\int \cos 5x \cos^{\pm m} x\, dx =$$
$$= 5\left\{\int \cos^{\pm m+1} x\, dx - 4\int \cos^{3\pm m} x\, dx + \frac{16}{5}\int \cos^{5\pm m} x\, dx\right\}.$$

Примеры

33) $\displaystyle\int \frac{\cos 5x}{\cos^5 x}\, dx = \frac{5\sin x\,(1-10\cos^2 x)}{3\cos^3 x} + 16x.$

34) $\displaystyle\int \frac{\cos 4x}{\cos x}\, dx = -\frac{8}{3}\sin^3 x + \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$

II) При n чётном

$$\cos nx = (-1)^{\frac{n}{2}}\left\{1 - \frac{n^2}{2!}\cos^2 x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\cos^4 x - \ldots +\right.$$
$$\left. + (-1)^k \frac{n^2(n^2-2^2)\ldots[n^2-(2k-2)^2]}{(2k)!}\cos^{2k} x + \ldots\right\} =$$
$$= (-1)^{\frac{n}{2}}\left\{1 + \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{2}} (-1)^k \frac{n^2(n^2-2^2)\ldots[n^2-(2k-2)^2]}{(2k)!}\cos^{2k} x\right\}$$

На основании этого равенства получаем:

$$\int \cos nx \cos^{\pm m} x\, dx = (-1)^{\frac{n}{2}}\left\{\cos^{\pm m} x\, dx +\right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{2}} (-1)^k \frac{n^2(n^2-2^2)\ldots[n^2-(2k-2)^2]}{(2k)!}\int \cos^{2k\pm m} x\, dx\right\} \quad (294)$$

(n — чётное).

Для $n=4$ эти формулы, например дают

$$\int \cos 4x \cos^{\pm m} x\, dx =$$
$$= \int \cos^{\pm m} x\, dx - 8\int \cos^{2\pm m} x\, dx + 8\int \cos^{4\pm m} x\, dx.$$

Примеры

35) $\displaystyle\int \cos 4x \cos x\, dx = \sin x - \frac{8}{3}\sin^3 x + \frac{8}{5}\sin^5 x.$

36) $\displaystyle\int \frac{\cos 4x}{\cos^5 x}\, dx = \frac{\sin x\,(2-29\cos^2 x)}{8\cos^4 x} + \frac{35}{8}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$

III) При n нечётном

$$\sin nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin x \times$$
$$\times \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} (-1)^k \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots[n^2-(2k-1)^2]}{(2k)!} \cos^{2k} x \right\},$$

и на основании этого равенства

$$\int \sin nx \cos^m x\, dx = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \left\{ \frac{\cos^{m+1} x}{m+1} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} (-1)^k \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots[n^2-(2k-1)^2]}{(2k)!\,(2k+m+1)} \cos^{2k+m+1} x \right\}, \quad (295)$$

$$\int \frac{\sin nx}{\cos^m x} dx = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \left\{ -\frac{1}{(m-1)\cos^{m-1} x} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} (-1)^k \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots[n^2-(2k-1)^2]}{(2k)!\,(2k-m+1)} \cos^{2k-m+1} x \right\} \quad (296)$$

(n — нечётное).

Последняя формула частично теряет значение в случаях: 1) при $m=1$ и 2) при $k=\frac{m-1}{2}$. Соответствующие члены тогда равны

$$1) \quad (-1)^{\frac{n+1}{2}} \int \frac{d\cos x}{\cos x} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \ln \cos x$$

и

$$2) \quad (-1)^{\frac{n+1}{2}} \int (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots[n^2-(m-2)^2]}{(m-1)!} \frac{d\cos x}{\cos x} =$$
$$= (-1)^{\frac{m+n}{2}} \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots[n^2-(m-2)^2]}{(m-1)!} \ln \cos x.$$

При $n=5$, имеем:

$$\int \sin 5x \cos^m x\, dx = -\frac{\cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{12\cos^{3+m} x}{3+m} - \frac{16\cos^{5+m} x}{5+m},$$
$$\int \frac{\sin 5x}{\cos^m x} dx = \frac{1}{(m-1)\cos^{m-1} x} + \frac{12\cos^{3-m} x}{3-m} - \frac{16\cos^{5-m} x}{5-m}.$$

IV) При n чётном

$$\sin nx = (-1)^{\frac{n}{2}} n \sin x \left\{ -\cos x + \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{2}-1} (-1)^{k-1} \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\dots[n^2-(2k)^2]}{(2k+1)!} \cos^{2k+1} x \right\},$$

и следовательно,

$$\int \sin nx \cos^m x\,dx = (-1)^{\frac{n}{2}} n \left\{ \frac{\cos^{m+2} x}{m+2} + \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{2}-1} (-1)^k \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\dots[n^2-(2k)^2]}{(2k+1)!\,(2k+m+2)} \cos^{2k+m+2} x \right\}, \quad (297)$$

$$\int \frac{\sin nx}{\cos^m x}\,dx = (-1)^{\frac{n}{2}} n \left\{ -\frac{1}{(m-2)\cos^{m-2} x} + \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{2}-1} (-1)^k \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\dots[n^2-(2k)^2]}{(2k+1)!\,(2k-m+2)} \cos^{2k-m+2} x \right\} \quad (298)$$

(n — чётное).

Вторая формула теряет значение для соответствующих членов в случаях: 1) при $m=2$ и 2) при $k=\frac{m-2}{2}$. Эти члены тогда равны

$$1) \quad (-1)^{\frac{n}{2}} n \ln \cos x$$

и

$$2) \quad (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} n \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\dots[n^2-(m-2)^2]}{(m-1)!} \ln \cos x.$$

V) Заменяя x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ в формулах (293) — (298), в соответствии с чем $\cos x$ заменяется на $\sin x$,

$\cos nx$ заменяется на $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin nx$ при n нечётном,

» » $(-1)^{\frac{n}{2}} \cos nx$ » n чётном,

$\sin nx$ » » $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos nx$ » n нечётном,

» » $(-1)^{\frac{n-2}{2}} \sin nx$ » n чётном, получаем формулы:

$$\int \sin nx \sin^{\pm m} x\,dx = n\left\{\int \sin^{\pm m+1} x\,dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} (-1)^k \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(2x-1)^2]}{(2k+1)!} \int \sin^{2k\pm m+1} x\,dx\right\} \quad (299)$$

$(n$ — нечётное),

$$\int \cos nx \sin^{\pm m} x\,dx = \int \sin^{\pm m} x\,dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{2}} (-1)^k \frac{n^2(n^2-2^2)\ldots[n^2-(2k-2)^2]}{(2k)!} \int \sin^{2k\pm m} x\,dx\Big\} \quad (300)$$

$(n$ — чётное),

$$\int \cos nx \sin^m x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} (-1)^k \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(2k-1)^2]}{(2k)!\,(2k+m+1)} \sin^{2k+m+1} x, \quad (301)$$

$$\int \frac{\cos nx}{\sin^m x}\,dx = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1} x} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} (-1)^k \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(2k-1)^2]}{(2k)!\,(2k-m+1)} \sin^{2k-m+1} x, \quad (302)$$

$(n$ — нечётное);

$$\int \sin nx \sin^m x\,dx = n\left\{\frac{\sin^{m+2} x}{m+2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{2}-1} (-1)^k \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots[n^2-(2k)^2]}{(2k+1)!\,(2k+m+2)} \sin^{2k+m+2} x,\right\}, \quad (303)$$

$$\int \frac{\sin nx}{\sin^m x}\,dx = n\left\{-\frac{1}{(m-2)\sin^{m-2} x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{2}-1} (-1)^k \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots[n^2-(2k)^2]}{(2k+1)!\,(2k-m+2)} \sin^{2k-m+2} x\right\} \quad (304)$$

$(n$ — чётное).

Интегралы правой части формул (299) и (300) вычисляются по формулам §§ 2 и 3.

Формулы (302) и (304) теряют значение, первая при $m=1$ и при $k=\frac{m-1}{1}$, и вторая при $m=2$ и при $k=\frac{m-2}{2}$. Соответствующие члены тогда равны

$$\ln\sin x \quad \text{и} \quad (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(m-2)^2]}{(m-1)!}\ln\sin x$$

для формулы (302)

и

$$n\ln\sin x \quad \text{и} \quad (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots[n^2-(m-2)^2]}{(m-1)!}\ln\sin x$$

для формулы (304).

Примеры

37) $$\int \cos 4x \cos^6 x\,dx = \frac{1}{128}\sin 8x + \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{3}{32}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{16}x \text{ (формула (2) § 2)},$$

или

$$= \sin x\left(\cos^7 x - \frac{1}{6}\cos^5 x + \frac{1}{24}\cos^3 x + \frac{1}{16}\cos x\right) + \frac{1}{16}x \quad \text{[формула (2a) § 2]}.$$

38) $$\int \frac{\cos 5x}{\sin^5 x}\,dx = -\frac{1}{4\sin^4 x} + \frac{6}{\sin^2 x} + 16\ln\sin x.$$

39) $$\int \frac{\sin 4x}{\sin^4 x}\,dx = -\frac{2}{\sin^2 x} - 8\ln\sin x.$$

§ 9. Основные интегралы дробных тригонометрических выражений

Общее замечание

Всякий интеграл тригонометрического выражения, если под знаком интеграла все тригонометрические функции одного и того же аргумента, подстановками $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$ и в соответствующих случаях $\operatorname{tg} x = z$ приводится к алгебраической форме. При рациональности интегрируемого тригонометрического выражения приходим к интегралу также рационального алгебраического выражения. Вследствие этого, можно высказать положение, что *теоретически интегрирование выполнимо для всякой рациональной как целой, так и дробной тригонометрической функции*.

Но, так как преобразования тригонометрических выражений, благодаря эластичности тригонометрических формул, вообще проще, подстановки же ведут к более сложным вычислениям, то и для интегралов дробных тригонометрических выражений более целесообразен путь непосредственного вычисления, без перехода к алгебраическим формам. Интегрируемое выражение преобразуется к более простым тригонометрическим же формам, интегралы которых находятся непосредственно.

При сложности знаменателя интегрируемого тригонометрического выражения такое преобразование аналогично разложению рациональной алгебраической дроби, — вычисляемый интеграл разбивается на сумму основных элементарных интегралов дробных тригонометрических выражений.

Переходим к основным интегралам.

$$\text{I)}\ \int \frac{dx}{a \pm b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\pm b + a\cos x + \sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a \pm b\cos x},$$

если $a < b$, и

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a \mp b}{a \pm b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{a\cos x \pm b} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arccos \frac{a\cos x \pm b}{a \pm b\cos x}, \text{ если } a > b \ (a \text{ и } b > 0). \qquad (305)$$

Подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ приводим интеграл к виду

$$\int \frac{2dz}{a(1+z^2) \pm b(1-z^2)}.$$

Если $a < b$, то для интеграла $\int \frac{2dz}{(\pm b + a) - (\pm b - a)z^2}$ находим

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{\pm b + a} + \sqrt{\pm b - a}\, z}{\sqrt{\pm b + a} - \sqrt{\pm b - a}\, z} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{(\pm b + a) + (\pm b - a) z^2 + 2\sqrt{b^2-a^2}\, z}{(\pm b + a) - (\pm b - a) z^2}$$

и, подставляя $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, получаем после необходимых упрощений приведённое выше выражение.

Если $a > b$, то имеем

$$2\int \frac{dz}{(a \pm b) + (a \mp b) z^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a \mp b}{a \pm b}}\, z =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a \mp b}{a \pm b}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

Последнее выражение, пользуясь формулами для круговых функций, можем представить в виде двух других, приведённых выше, выражений.

При $a=b$, полагая для простоты $a=b=1$, имеем интеграл $\int \frac{dx}{1 \pm \cos x}$, для которого при верхнем знаке получаем $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и при нижнем $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Соединяя оба результата вместе, имеем

$$\int \frac{dx}{1 \pm \cos x} = \pm \frac{1 \mp \cos x}{\sin x}.$$

Полагая $a=b\cos\alpha$, если $a<b$, и $b=a\cos\beta$, если $a>b$, и представив затем для первого случая интеграл в виде

$$\frac{1}{b}\int \frac{dx}{\cos\alpha \pm \cos x} = \frac{1}{b}\int \frac{\cos\alpha \mp \cos x}{\cos^2\alpha - \cos^2 x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{b}\left\{\int \frac{d\cos\alpha\operatorname{tg} x}{\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2 x - \sin^2\alpha} \mp \int \frac{d\sin x}{\sin^2 x - \sin^2\alpha}\right\},$$

и для второго в виде

$$\frac{1}{a}\int \frac{dx}{1 \pm \cos\beta\cos x} = \frac{1}{a}\int \frac{1 \mp \cos\beta\cos x}{1-\cos^2\beta\cos^2 x} =$$
$$= \frac{1}{a}\left\{\int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + \sin^2\beta} \mp \int \frac{d\cos\beta\sin x}{\sin^2\beta + \cos^2\beta\sin^2 x}\right\},$$

непосредственно или на основании формулы (305) находим:

$$\int \frac{dx}{a \pm b\cos x} = \frac{1}{\sin\alpha}\ln\frac{\cos(\alpha - x) \pm 1}{\cos\alpha \pm \cos x},$$

где $\alpha = \arccos\frac{a}{b}$, если $a<b$, и

$$= \frac{2}{a\sin\beta}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1 \mp \cos\beta}{1 \pm \cos\beta}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{a\sin\beta}\operatorname{arctg}\frac{\sin\beta\sin x}{\cos x \pm \cos\beta} =$$
$$= \frac{1}{a\sin\beta}\arccos\frac{\cos x \pm \cos\beta}{1 \pm \cos\beta\cos x}, \tag{306}$$

где $\beta = \arccos\frac{b}{a}$, если $a>b$.

Отдельно для верхнего и нижнего знаков выражения интеграла можем представить ещё в виде

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{b\sin\alpha}\ln\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + x)}$$

и

$$\int \frac{dx}{a - b\cos x} = \frac{1}{b \sin \alpha} \ln \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - x)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + x)},$$

если $a < b$ $\quad \left(\alpha = \arccos \frac{a}{b}\right)$;

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{a \sin \beta} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

и

$$\int \frac{dx}{a - b\cos x} = \frac{2}{a \sin \beta} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right); \tag{307}$$

если $a > b$ $\quad \left(\beta = \arccos \frac{b}{a}\right)$.

Непосредственно аналогично предыдущему, или заменяя в предыдущих формулах x на $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, α на $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ и β на $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, получаем:

$$\int \frac{dx}{a \pm b \sin x} = -\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{\pm b + a \sin x + \sqrt{b^2 - a^2}\cos x}{a \pm b \sin x}, \text{ если } a < b,$$

и

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arcctg}\left(\sqrt{\frac{a \mp b}{a \pm b}} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\cos x}{a \sin x \pm b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{a \sin x \pm b}{a \pm b \sin x}, \tag{308}$$

если $a > b$ $\quad$ (a и $b > 0$).

$$\int \frac{dx}{a \pm b \sin x} = -\frac{1}{b \cos \alpha} \ln \frac{\cos(\alpha - x) \pm 1}{\sin \alpha \pm \sin x},$$

где $\alpha = \arcsin \frac{a}{b}$, если $a < b$, и

$$= \frac{2}{a \cos \beta} \operatorname{arcctg}\left(\sqrt{\frac{1 \mp \sin \beta}{1 \pm \sin \beta}} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{a \cos \beta} \operatorname{arcctg} \frac{\cos \beta \cos x}{\sin x \pm \sin \beta} = \frac{1}{a \cos \beta} \arcsin \frac{\sin x \pm \sin \beta}{1 \pm \sin \beta \sin x}, \tag{309}$$

где $\beta = \arcsin \frac{b}{a}$, если $a > b$;

$$\int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{1}{b \cos \alpha} \ln \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + x)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - x)}$$

и

$$\int \frac{dx}{a-b\sin x}=\frac{1}{b\cos\alpha}\ln\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+x)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)},$$

если $a<b$ $\quad \left(\alpha=\arcsin\frac{b}{a},\ a \text{ и } b>0\right)$;

$$\int \frac{dx}{a+b\sin x}=\frac{2}{a\cos\beta}\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]$$

и

$$\int \frac{dx}{a-b\sin x}=\frac{2}{a\cos\beta}\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right], \tag{310}$$

если $a>b$ $\quad \left(\beta=\arcsin\frac{b}{a},\ a \text{ и } b>0\right)$.

При $a=b$, полагая $a=b=1$; имеем интеграл

$$\int \frac{d}{1\pm\sin x}=\mp\frac{1\mp\sin x}{\cos x},$$

II) $$\int \frac{dx}{a+b\operatorname{tg}x}=\frac{1}{a^2+b^2}\{ax+b\ln(a\cos x+b\sin x)\}. \tag{311}$$

Подстановкой $\operatorname{tg}x=z$ интеграл этот приводится к виду

$$\int \frac{dz}{(a+bz)(1+z^2)}=\frac{1}{a^2+b^2}\left\{\int\frac{a\,dz}{1+z^2}-\frac{bz\,dz}{1+z^2}+\int\frac{b^2\,dz}{a+bz}\right\}=$$
$$=\frac{1}{a^2+b^2}\left\{a\operatorname{arctg}z+b\ln\frac{a+bz}{\sqrt{1+z^2}}\right\}.$$

$$\int \frac{dx}{a+b\operatorname{ctg}x}=\frac{1}{a^2+b^2}\{ax-b\ln(a\sin x+b\cos x)\}. \tag{312}$$

Этот интеграл находится подстановкой $\operatorname{ctg}x=z$ или заменой в предыдущей формуле x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

$$\int \frac{dx}{a\sec x\pm b}=\int\frac{\cos x\,dx}{a\pm b\cos x}=\pm\frac{x}{b}\mp\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a\pm b\cos x}, \tag{313}$$

$$\int \frac{dx}{a\operatorname{cosec}x\pm b}=\int\frac{\sin x\,dx}{a\pm b\sin x}=\pm\frac{x}{b}\mp\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a\pm b\sin x}, \tag{314}$$

III) $$\int \frac{dx}{a\sin x\pm b\cos x}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\left\{\ln\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}\cos x}{a+\sqrt{a^2+b^2}\cos x}\mp\ln\frac{b-\sqrt{a^2+b^2}\sin x}{b+\sqrt{a^2+b^2}\sin x}\right. . \tag{315}$$

Для вычисления этого интеграла представляем его в виде

$$\int \frac{(a \sin x \mp b \cos x)\,dx}{a^2 \sin^2 x - b^2 \cos^2 x} = \int \frac{ad \cos x}{(a^2+b^2)\cos^2 x - a^2} \mp \int \frac{bd \sin x}{(a^2+b^2)\sin^2 x - b^2}.$$

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{tg} x \pm b \operatorname{ctg} x} = \int \frac{\sin x \cos x\,dx}{a \sin^2 x \pm b \cos^2 x} = \frac{1}{2(a \mp b)} \ln (a \sin^2 x \pm b \cos^2 x). \tag{316}$$

$$\int \frac{dx}{a \sec x \pm b \operatorname{cosec} x} = \int \frac{\sin x \cos x\,dx}{a \sin x \pm b \cos x} = \frac{1}{a^2+b^2}(a \sin x \mp b \cos x) +$$
$$+ \frac{ab}{2\sqrt{(a^2+b^2)^3}} \left\{ \ln \frac{b - \sqrt{a^2+b^2} \sin x}{b + \sqrt{a^2+b^2} \sin x} \mp \ln \frac{a - \sqrt{a^2+b^2} \cos x}{a + \sqrt{a^2+b^2} \cos x} \right\}. \tag{317}$$

Для вычисления этого интеграла приводим подинтегральную функцию к виду:

$$\frac{(a \sin x \mp b \cos x) \sin x \cos x\,dx}{a^2 \sin^2 x - b^2 \cos^2 x} = \frac{a \sin^2 x\, d \sin x}{(a^2+b^2) \sin^2 x - b^2} \mp \frac{b \cos^2 x\, d \cos x}{(a^2+b^2)\cos^2 x - a^2}.$$

IV) $$\int \frac{dx}{a \operatorname{tg} x + b \sin x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x\,(a + b \cos x)} =$$
$$= \frac{a}{a^2-b^2} \ln \frac{\sin x}{a + b \cos x} - \frac{b}{a^2-b^2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \tag{318}$$

При этом, для вычисления интеграла выполняем следующее преобразование:

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{tg} x + b \sin x} = \frac{1}{b} \int \frac{(a + b \cos x) - a}{\sin x\,(a + b \cos x)}\,dx =$$
$$= \frac{1}{b} \int \frac{dx}{\sin x} - \frac{a}{b(a^2-b^2)} \int \frac{(a^2 - b^2 \cos^2 x) - b^2 \sin^2 x}{\sin x\,(a + b \cos x)}\,dx =$$
$$= -\frac{b}{a^2-b^2} \int \frac{dx}{\sin x} + \frac{a}{a^2-b^2} \left\{ \int \operatorname{ctg} x\,dx - \int \frac{d(a + b \cos x)}{a + b \cos x} \right\}.$$

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{ctg} x + b \cos x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\,(a + b \sin x)} =$$
$$= \frac{a}{b^2-a^2} \ln \frac{\cos x}{a + b \sin x} - \frac{b}{b^2-a^2} \ln \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right). \tag{319}$$

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \operatorname{ctg} x} = \int \frac{\sin x\,dx}{a \sin^2 x + b \cos x} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4a^2+b^2}} \ln \frac{\sqrt{4a^2+b^2} + b - 2a \cos x}{\sqrt{4a^2+b^2} - b + 2a \cos x}, \tag{320}$$

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \operatorname{tg} x} = \int \frac{\cos x\,dx}{a \cos^2 x + b \sin x} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4a^2+b^2}} \ln \frac{\sqrt{4a^2+b^2} - b + 2a \sin x}{\sqrt{4a^2+b^2} + b - 2a \sin x}. \tag{321}$$

Для вычисления интеграла формулы (320) представляем его в виде

$$\int \frac{d\cos x}{a\cos^2 x - b\cos x - a} = 2\int \frac{d\,(2a\cos x - b)}{(2a\cos x - b)^2 - (4a^2 + b^2)}.$$

Аналогично, или заменой x на $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, находим выражение для интеграла формулы (321).

$$\int \frac{dx}{a\sin x \pm b\operatorname{cosec} x} = \int \frac{\sin x\,dx}{a\sin^2 x \pm b} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{a \pm b}} \ln \frac{\sqrt{a \pm b} - \sqrt{a}\cos x}{\sqrt{a \pm b} + \sqrt{a}\cos x}$$

для верхнего знака и для нижнего, если $a > b$,

$$\text{и} = \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{b-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a}\cos x}{\sqrt{b-a}} \text{ для нижнего знака, если } a < b. \qquad (322)$$

В случае $a = b$ для нижнего знака, полагая $a = b = 1$, имеем

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x - 1} = -\sec x.$$

$$\int \frac{dx}{a\cos x \pm b\sec x} = \int \frac{\cos x\,dx}{a\cos^2 x \pm b} = \frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{a \pm b}} \ln \frac{\sqrt{a \pm b} + \sqrt{a}\sin x}{\sqrt{a \pm b} - \sqrt{a}\sin x}$$

для верхнего знака и для нижнего, если $a > b$, и

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{b-a}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{a}\sin x}{\sqrt{b-a}} \qquad (323)$$

для нижнего знака, если $a < b$.

При $a = b$ для нижнего знака, полагая $a = b = 1$, имеем

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x - 1} = \operatorname{cosec} x.$$

$$\int \frac{dx}{a\sec x \pm b\sin x} = \int \frac{\cos x\,dx}{a \pm b\sin x\cos x} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2b}\sqrt{b^2 - 4a^2}} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}}} \ln \frac{\sqrt{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}} + \sqrt{2b}\sin x}{\sqrt{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}} - \sqrt{2b}\sin x} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{b + \sqrt{b^2 - 4a^2}}} \ln \frac{\sqrt{b + \sqrt{b^2 - 4a^2}} + \sqrt{2b}\sin x}{\sqrt{b + \sqrt{b^2 - 4a^2}} - \sqrt{2b}\sin x} \right] \pm$$

$$\pm \left[\sqrt{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}} \ln \frac{\sqrt{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}} + \sqrt{2b}\cos x}{\sqrt{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}} - \sqrt{2b}\cos x} - \right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{b + \sqrt{b^2 - 4a^2}} \ln \frac{\sqrt{b + \sqrt{b^2 - 4a^2}} + \sqrt{2b}\cos x}{\sqrt{b + \sqrt{b^2 - 4a^2}} - \sqrt{2b}\cos x} \right] \right\}, \text{ если } 2a < b,$$

и

$$= \frac{1}{4\sqrt{b(2a+b)}}\left\{\ln\frac{b\sin^2 x+\sqrt{b(2a+b)}\sin x+a}{b\sin^2 x-\sqrt{b(2a+b)}\sin x+a}\mp\right.$$
$$\left.\mp\ln\frac{b\cos^2 x+\sqrt{b(2a+b)}\cos x+a}{b\cos^2 x-\sqrt{b(2a+b)}\cos x+a}\right\}+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{b(2a-b)}}\left\{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b(2a-b)}\sin x}{a-b\sin^2 x}\pm\right.$$
$$\left.\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b(2a-b)}\cos x}{a-b\cos^2 x}\right\},\ \text{если } 2a>b. \qquad (324)$$

Приведя вычисляемый интеграл к виду

$$\int\frac{2\cos x\,dx}{2a\pm b\sin 2x}=\int\frac{2(2a\mp b\sin 2x)\cos x\,dx}{4a^2-b^2+b^2\cos^2 2x}=$$
$$=\int\frac{4a\,d\sin x}{b^2(1-2\sin^2 x)^2+4a^2-b^2}\pm\int\frac{4b\cos^2 x\,d\cos x}{b^2(2\cos^2 x-1)^2+4a^2-b^2},$$

подстановкой $\sin x=z$ для первого интеграла и $\cos x=z$ для второго сводим вопрос интегрирования к вычислению двух интегралов

$$\int\frac{4a\,dz}{b^2(1-2z^2)^2+4a^2-b^2}\quad\text{и}\quad\int\frac{4bz^2\,dz}{b^2(1-2z^2)^2+4a^2-b^2}.$$

Если $2a<b$, то для первого интеграла имеем:

$$\int\frac{4a\,dz}{b^2(1-2z^2)^2-(b^2-4a^2)}=\int\frac{4a\,dz}{(b-\sqrt{b^2-4a^2}-2bz^2)(b+\sqrt{b^2-4a^2}-2bz^2)}=$$
$$=\frac{2a}{\sqrt{b^2-4a^2}}\left\{\int\frac{dz}{b-\sqrt{b^2-4a^2}-2bz^2}-\int\frac{dz}{b+\sqrt{b^2-4a^2}-2bz^2}\right\}$$

и для второго

$$\frac{b+\sqrt{b^2-4a^2}}{\sqrt{b^2-4a^2}}\int\frac{dz}{2bz^2-b-\sqrt{b^2-4a^2}}-\frac{b-\sqrt{b^2-4a^2}}{\sqrt{b^2-4a^2}}\int\frac{dz}{2bz^2-b+\sqrt{b^2-4a^2}}.$$

Если $2a>b$, то для первого интеграла получаем:

$$\int\frac{a\,dz}{b^2z^4-b^2z^2+a^2}=\int\frac{a\,dz}{(bz^2+a)^2-b(2a+b)z^2}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{b(2a+b)}}\left\{\int\frac{bz+\sqrt{b(2a+b)}}{bz^2+\sqrt{b(2a+b)}\,z+a}\,dz-\right.$$
$$\left.-\int\frac{bz-\sqrt{b(2a+b)}}{bz^2-\sqrt{b(2a+b)}\,z+a}\,dz\right\}$$

и для второго

$$\frac{b}{2\sqrt{b(2a+b)}}\left\{\int\frac{dz}{bz^2-\sqrt{b(2a+b)}\,z+a}-\int\frac{dz}{bz^2+\sqrt{b(2a+b)}\,z+a}\right\}.$$

Перейдя по вычислении этих интегралов к прежней переменной x, получаем приведённые выше выражения рассматриваемого интеграла.

В случае $2a=b$, полагая в целях упрощения $a=1$, имеем интеграл

$$\int \frac{dx}{\sec x \pm 2\sin x} = \int \frac{\cos x\,dx}{1 \pm \sin 2x} = \int \frac{\cos x\,dx}{(\cos x \pm \sin x)^2} =$$
$$= -\frac{1}{2(\sin x \pm \cos x)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{1+\sqrt{2}\sin x}{1-\sqrt{2}\sin x} \mp \ln\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right\}.$$

$$\int \frac{dx}{a\,\mathrm{cosec}\,x \pm b\cos x} = \int \frac{\sin x\,dx}{a \pm b\sin x\cos x} =$$
$$= \frac{a}{\sqrt{2b}\sqrt{b^2-4a^2}}\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{b-\sqrt{b^2-4a^2}}}\ln\frac{\sqrt{b-\sqrt{b^2-4a^2}}-\sqrt{2b}\cos x}{\sqrt{b-\sqrt{b^2-4a^2}}+\sqrt{2b}\cos x} -\right.\right.$$
$$\left. -\frac{1}{\sqrt{b+\sqrt{b^2-4a^2}}}\ln\frac{\sqrt{b+\sqrt{b^2-4a^2}}-\sqrt{2b}\cos x}{\sqrt{b+\sqrt{b^2-4a^2}}+\sqrt{2b}\cos x}\right] \pm$$
$$\pm\left[\sqrt{b-\sqrt{b^2-4a^2}}\ln\frac{\sqrt{b-\sqrt{b^2-4a^2}}-\sqrt{2b}\sin x}{\sqrt{b-\sqrt{b^2-4a^2}}+\sqrt{2b}\sin x} -\right.$$
$$\left.\left. -\sqrt{b+\sqrt{b^2-4a^2}}\ln\frac{\sqrt{b+\sqrt{b^2-4a^2}}-\sqrt{2b}\sin x}{\sqrt{b+\sqrt{b^2-4a^2}}+\sqrt{2b}\sin x}\right]\right\}, \text{ если } 2a<b,$$

и

$$= \frac{1}{4\sqrt{b(2a+b)}}\left\{\ln\frac{b\cos^2 x-\sqrt{b(2a+b)}\cos x+a}{b\cos^2 x+\sqrt{b(2a+b)}\cos x+a} \mp\right.$$
$$\left. \pm \ln\frac{b\sin^2 x-\sqrt{b(2a+b)}\sin x+a}{b\sin^2 x+\sqrt{b(2a+b)}\sin x+a}\right\} +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{b(2a-b)}}\left\{\mathrm{arcctg}\,\frac{\sqrt{b(2a-b)}\cos x}{a-b\cos^2 x} \pm\right.$$
$$\left. \pm\,\mathrm{arcctg}\,\frac{\sqrt{b(2a-b)}\sin x}{a-b\sin^2 x}\right\}, \text{ если } 2a>b. \qquad (325)$$

В случае $a=2b$, полагая $a=1$, имеем интеграл

$$\int \frac{dx}{\mathrm{cosec}\,x \pm 2\cos x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1 \pm \sin 2x} = \int \frac{\sin x\,dx}{(\cos x \pm \sin x)^2} =$$
$$= \frac{1}{2(\cos x \pm \sin x)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1+\sqrt{2}\cos x} \mp \ln\frac{1-\sqrt{2}\sin x}{1+\sqrt{2}\sin x}\right\},$$

$$\int \frac{dx}{a\sec x + b\,\mathrm{tg}\,x} = \int \frac{\cos x\,dx}{a+b\sin x} = \frac{1}{b}\ln(a+b\sin x), \qquad (326)$$

$$\int \frac{dx}{a\,\mathrm{cosec}\,x + b\,\mathrm{ctg}\,x} = \int \frac{\sin x\,dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\ln(a+b\cos x), \qquad (327)$$

$$\int \frac{dx}{a\operatorname{tg} x + b\operatorname{cosec} x} = \int \frac{\sin x\cos x\,dx}{a\sin^2 x + b\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln(a\sin^2 x + b\cos x) + \frac{b}{2a\sqrt{4a^2+b^2}}\ln\frac{\sqrt{4a^2+b^2}+b-2a\cos x}{\sqrt{4a^2+b^2}-b+2a\cos x}; \quad (328)$$

$$\int \frac{dx}{a\operatorname{ctg} x + b\sec x} = \int \frac{\sin x\cos x\,dx}{a\cos^2 x + b\sin x} = -\frac{1}{2a}\ln(a\cos^2 x + b\sin x) +$$

$$+ \frac{b}{2a\sqrt{4a^2+b^2}}\ln\frac{\sqrt{4a^2+b^2}-b+2a\sin x}{\sqrt{4a^2+b^2}+b-2a\sin x}, \quad (329)$$

V) $$\int \frac{dx}{a^2 \pm b^2\cos^2 x} = \frac{1}{a\sqrt{a^2 \pm b^2}}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg} x}{\sqrt{a^2 \pm b^2}}$$

для верхнего знака и для нижнего, если $a^2 > b^2$, и

$$= \frac{1}{2a\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b^2-a^2}-a\operatorname{tg} x}{\sqrt{b^2-a^2}+a\operatorname{tg} x} \quad (330)$$

для нижнего, если $a^2 < b^2$.

Для вычисления интеграла представляем интегрируемое выражение в виде

$$\frac{d\operatorname{tg} x}{a^2\operatorname{tg}^2 x + a^2 \pm b^2}.$$

В случае $a^2 = b^2$ для нижнего знака, полагая $a^2 = b^2 = 1$, имеем интеграл $\int \frac{dx}{1-\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x$. Полагая $a = b\cos\alpha$, если $a < b$, а затем $b = a\cos\beta$, если $a > b$, имеем:

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2\cos^2 x} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{\cos^2\alpha - \cos^2 x} = \frac{1}{b^2}\int \frac{d\operatorname{tg} x}{\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2 x - \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2b^2\sin\alpha\cos\alpha}\ln\frac{\sin\alpha\cos x - \sin x\cos\alpha}{\sin\alpha\cos x + \sin x\cos\alpha} = \frac{1}{2ab\sin a}\ln\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin(\alpha + x)},$$

если $a < b$, и

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1 - \cos^2\beta\cos^2 x} = \frac{1}{a^2}\int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + \sin^2\beta} = \frac{1}{a^2\sin\beta}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sin\beta},$$

если $a > b$, так, что

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2\cos^2 x} = \frac{1}{2ab\sin\alpha}\ln\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin(\alpha + x)}, \text{ если } a < b\left(\alpha = \arccos\frac{a}{b}\right),$$

и

$$= \frac{1}{a^2\sin\beta}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sin\beta}, \text{ если } a > b\left(\beta = \arccos\frac{b}{a}\right). \quad (331)$$

Точно таким же путём, или заменяя в полученных формулах x, α, β соответственно на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$, получаем:

$$\int \frac{dx}{a^2 \pm b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{a\sqrt{a^2 \pm b^2}} \operatorname{arcctg} \frac{a \operatorname{ctg} x}{\sqrt{a^2 \pm b^2}}$$

для верхнего знака и для нижнего, если $a^2 > b^2$, и

$$= \frac{1}{2a\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{b^2-a^2}+a \operatorname{ctg} x}{\sqrt{b^2-a^2}-a \operatorname{ctg} x} \tag{332}$$

для нижнего, если $a^2 < b^2$.

При $a^2 = b^2 = 1$ для нижнего знака имеем

$$\int \frac{dx}{1-\sin^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2 \sin^2 \beta} = \frac{1}{2ab\cos\alpha} \ln \frac{\sin(\alpha+x)}{\sin(\alpha-x)}, \text{ если } a < b \left(\alpha = \arcsin \frac{a}{b}\right),$$

и

$$= \frac{1}{a^2\cos\beta} \operatorname{arcctg} \frac{\operatorname{ctg} x}{\cos\beta}, \text{ если } a > b \left(\beta = \arcsin \frac{b}{a}\right); \tag{333}$$

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x \pm b^2\cos^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right) = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{a\sin x}{b\cos x}$$

для верхнего знака и

$$= \frac{1}{2ab} \ln \frac{a \operatorname{tg} x - b}{a \operatorname{tg} x + b} = \frac{1}{2ab} \ln \frac{a\sin x - b\cos x}{a\sin x + b\cos x} \tag{334}$$

для нижнего.

$$\int \frac{dx}{a^2 \pm b^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{x}{a^2-b^2} - \frac{b}{a(a^2-b^2)} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right)$$

для верхнего знака и

$$= \frac{x}{a^2+b^2} + \frac{b}{2a(a^2+b^2)} \ln \frac{a+b\operatorname{tg} x}{a-b\operatorname{tg} x} \tag{335}$$

для нижнего.

$$\int \frac{dx}{a^2 \pm b^2 \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{x}{a^2-b^2} + \frac{b}{a(a^2-b^2)} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{ctg} x\right)$$

для верхнего знака

и

$$= \frac{x}{a^2+b^2} + \frac{b}{2a(a^2+b^2)} \ln \frac{a-b\operatorname{ctg} x}{a+b\operatorname{ctg} x} \tag{336}$$

для нижнего.

$$\int \frac{dx}{a^2 \operatorname{tg}^2 x \pm b^2 \operatorname{ctg}^2 x} = -\frac{x}{a^2+b^2} + \frac{1}{4(a^2+b^2)\sqrt{2ab}} \times$$
$$\times \left\{ (a-b) \ln \frac{b - \sqrt{2ab} \operatorname{tg} x + a \operatorname{tg}^2 x}{b + \sqrt{2ab} \operatorname{tg} x + a \operatorname{tg}^2 x} + 2(a+b) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2ab} \operatorname{tg} x}{b - a \operatorname{tg}^2 x} \right\}$$

для верхнего знака и

$$= -\frac{x}{a^2-b^2} + \frac{1}{4(a^2-b^2)\sqrt{ab}} \left\{ (a-b) \ln \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a} \operatorname{tg} x}{\sqrt{b} + \sqrt{a} \operatorname{tg} x} + \right.$$
$$\left. + 2(a+b) \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} x \right) \right\} \quad (337)$$

для нижнего знака.

Подстановкой $\operatorname{tg} x = z$ интеграл приводится к виду

$$\int \frac{z^2\, dz}{(z^2+1)(a^2 z^4 \pm b^2)} = -\frac{1}{a^2 \pm b^2} \int \frac{dz}{z^2+1} + \frac{1}{a^2 \pm b^2} \int \frac{a^2 z^2 \pm b^2}{a^2 z^4 \pm b^2}\, dz.$$

Для вычисления последнего интеграла при верхнем знаке пользуемся результатами гл. II.

$$\int \frac{dx}{a^2 \pm b^2 \sec^2 x} = \frac{x}{a^2} - \frac{b}{a^2 \sqrt{b^2 \pm a^2}} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg} x}{\sqrt{b^2 \pm a^2}}$$

для верхнего знака и для нижнего, если $a^2 < b^2$, и

$$= \frac{x}{a^2} + \frac{b}{2a^2 \sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + b \operatorname{tg} x}{\sqrt{a^2 - b^2} - b \operatorname{tg} x} \quad (338)$$

для нижнего знака, если $a^2 > b^2$.

Если $a = b$ при нижнем знаке, то, полагая $a = b = 1$, имеем

$$\int \frac{dx}{1 - \sec^2 x} = x + \operatorname{ctg} x.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 \pm b^2 \operatorname{cosec}^2 x} = \frac{x}{a^2} + \frac{b}{a^2 \sqrt{b^4 \pm a^2}} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{ctg} x}{\sqrt{b^2 \pm a^2}}$$

для верхнего знака и для нижнего, если $a^2 < b^2$, и

$$= \frac{x}{a^2} + \frac{b}{a^2 \sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - b \operatorname{ctg} x}{\sqrt{a^2 - b^2} + b \operatorname{ctg} x} \quad (339)$$

для нижнего знака, если $a^2 > b^2$.

При $a = b = 1$ для нижнего знака имеем:

$$\int \frac{dx}{1 - \operatorname{cosec}^2 x} = x - \operatorname{tg} x.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 \sec^2 x \pm b^2 \operatorname{cosec}^2 x} = \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x\, dx}{a^2 \sin^2 x \pm b^2 \cos^2 x} =$$
$$= \frac{\sin x \cos x}{2(a^2 - b^2)} + \frac{a^2 + b^2}{2(a^2 - b^2)^2}\, x + \frac{ab}{(a^2 - b^2)^2} \operatorname{arctg} \frac{a \sin x}{b \cos x}$$

для верхнего знака, и

$$= \frac{\sin x \cos x}{2(a^2+b^2)} + \frac{a^2-b^2}{2(a^2+b^2)^2} x + \frac{ab}{2(a^2+b^2)^2} \ln \frac{a \sin x - b \cos x}{a \sin x + b \cos x} \tag{340}$$

для нижнего знака.

§ 10. Интегралы дробных рациональных тригонометрических выражений

1) $$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{a + b \cos x} dx = \frac{\beta}{b} x + \frac{\alpha b - a\beta}{b} \int \frac{dx}{a + b \cos x}, \tag{341}$$

$$\int \frac{\alpha + \beta \sin x}{a + b \sin x} dx = \frac{\beta}{b} x + \frac{\alpha b - a\beta}{b} \int \frac{dx}{a + b \sin x}, \tag{342}$$

$$\int \frac{\alpha + \beta \sin x}{a + b \cos x} dx = -\frac{\beta}{b} \ln(a + b \cos x) + \alpha \int \frac{dx}{a + b \cos x}, \tag{343}$$

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{a + b \sin x} dx = \frac{\beta}{b} \ln(a + b \sin x) + \alpha \int \frac{dx}{a + b \sin x}, \tag{344}$$

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{\sin x (a + b \cos x)} dx = \frac{1}{a^2 - b^2} \Big\{ (a\alpha - b\beta) \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \\ + (\alpha b - a\beta) \ln \frac{a + b \cos x}{\sin x} \Big\} \tag{345}$$

или

$$= \frac{\alpha b - a\beta}{a^2 - b^2} \ln(a + b \cos x) - \frac{\alpha - \beta}{a - b} \ln \cos \frac{x}{2} + \frac{\alpha + \beta}{a + b} \ln \sin \frac{x}{2}.$$

Первый результат получаем непосредственным преобразованием интегрируемого выражения

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{\sin x (a + b \cos x)} dx = \frac{\beta}{b} \int \frac{dx}{\sin x} + \frac{\alpha b - a\beta}{b} \int \frac{dx}{\sin x (a + b \cos x)} = \\ = \frac{\beta}{b} \int \frac{dx}{\sin x} + \frac{\alpha b - a\beta}{b(a^2 - b^2)} \int \frac{(a^2 - b^2 \cos^2 x) - b^2 \sin^2 x}{\sin x (a + b \cos x)} dx = \ldots,$$

второй — представив интеграл в виде

$$\int \frac{(\alpha + \beta \cos x)\, d \cos x}{(a + b \cos x)(\cos^2 x - 1)}$$

и подстановкой $\cos x = z$.

$$\int \frac{\alpha + \beta \sin x}{\cos x (a + b \sin x)} dx =$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} \Big\{ (a\alpha - b\beta) \ln \operatorname{tg} \Big(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \Big) - (\alpha b - a\beta) \ln \frac{a + b \sin x}{\cos x} \Big\} \tag{346}$$

или

$$= \frac{a\beta - \alpha b}{a^2 - b^2} \ln (a + b \sin x) + \frac{\alpha - \beta}{a - b} \ln \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \\ - \frac{\alpha + \beta}{a + b} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{\cos x\,(a + b \cos x)}\,dx = \frac{\alpha}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + \frac{a\beta - \alpha b}{a} \int \frac{dx}{a + b \cos x}, \tag{347}$$

$$\int \frac{\alpha + \beta \sin x}{\sin x\,(a + b \sin x)}\,dx = \frac{\alpha}{a} \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{a\beta - \alpha b}{a} \int \frac{dx}{a + b \sin x}, \tag{348}$$

$$\int \frac{\alpha + \beta \sin x}{\sin x\,(a + b \cos x)}\,dx = \\ = \frac{\alpha}{a^2 - b^2} \left\{ a \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + b \ln \frac{a + b \cos x}{\sin x} \right\} + \beta \int \frac{dx}{a + b \cos x}, \tag{349}$$

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{\cos x\,(a + b \sin x)}\,dx = \\ = \frac{\alpha}{a^2 - b^2} \left\{ a \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - b \ln \frac{a + b \sin x}{\cos x} \right\} + \beta \int \frac{dx}{a + b \sin x}, \tag{350}$$

$$\int \frac{\alpha + \beta \sin x}{\cos x\,(a + b \cos x)}\,dx = \\ = \frac{\alpha}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + \frac{\beta}{a} \ln \frac{a + b \cos x}{\cos x} - \frac{\alpha\beta}{a} \int \frac{dx}{a + b \cos x}, \tag{351}$$

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{\sin x\,(a + b \sin x)}\,dx = \\ = \frac{\alpha}{a} \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{\beta}{a} \ln \frac{a + b \sin x}{\sin x} - \frac{\alpha b}{a} \int \frac{dx}{a + b \sin x}. \tag{352}$$

II) Обращая формулу (279), выразив предварительно с этой целью α и β через α_1 и β_1, так что

$$\alpha = \frac{a\alpha_1 - b\beta_1}{a^2 - b^2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{n+1}{n}\,\frac{a\beta_1 - b\alpha_1}{a^2 - b^2},$$

получаем:

$$\int (a + b \cos x)^{n-1} (\alpha_1 + \beta_1 \cos x)\,dx = -\frac{a\beta_1 - b\alpha_1}{n(a^2 - b^2)} (a + b \cos x)^n \sin x + \\ + \int (a + b \cos x)^n \frac{n(a\alpha_1 - b\beta_1) + (n+1)(a\beta_1 - b\alpha_1)\cos x}{n(a^2 - b^2)}\,dx.$$

Отсюда, заменяя $(n-1)$ на $(-n)$, α_1 и β_1 на α и β, получаем формулу приведения

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{(a + b \cos x)^n}\,dx = \frac{a\beta - b\alpha}{(n-1)(a^2 - b^2)} \cdot \frac{\sin x}{(a + b \cos x)^{n-1}} + \\ + \int \frac{\alpha_1 + \beta_1 \cos x}{(a + b \cos x)^{n-1}}\,dx, \tag{353}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{a\alpha - b\beta}{a^2 - b^2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{n-2}{n-1}\,\frac{a\beta - b\alpha}{a^2 - b^2}.$$

Последовательно снижая по этой формуле степень знаменателя, приходим в конечном счёте к интегралу

$$\int \frac{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}\cos x}{a + b\cos x}\,dx,$$

т. е. к интегралу (341).

Полагая в формуле (353) $\alpha = 1$, $\beta = 0$, получаем:

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} = -\frac{b}{(n-1)(a^2 - b^2)} \cdot \frac{\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)} \int \frac{(n-1)\,a - (n-2)\,b\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}}\,dx, \quad (354)$$

и дальнейшее вычисление интеграла ведём по формуле (353).

Легко находим

$$\int \frac{\alpha + \beta\sin x}{(a + b\cos x)^n}\,dx = \frac{\beta}{(n-1)\,b\,(a + b\cos x)^{n-1}} + \alpha \int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n}. \quad (355)$$

Формула (353) теряет значение при $n = 1$ и при $b = \pm a$. В первом случае имеем простейшую форму рассматриваемого интеграла и в применении формулы нет нужды, во втором, принимая в целях простоты $a = 1$, имеем интеграл вида

$$\int \frac{\alpha + \beta\cos x}{(1 \pm \cos x)^n}\,dx.$$

Подставляя для его вычисления

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1, \quad 1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2},$$

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}, \quad 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2},$$

получаем:

$$\int \frac{\alpha + \beta\cos x}{(1 + \cos x)^n}\,dx = \int \frac{\alpha + \beta\left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right)}{\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)^n}\,dx =$$

$$= \frac{\beta}{2^{n-2}} \int \frac{d\,\frac{x}{2}}{\cos^{2n-2}\frac{x}{2}} + \frac{\alpha - \beta}{2^{n-1}} \int \frac{d\,\frac{x}{2}}{\cos^{2n}\frac{x}{2}},$$

$$\int \frac{\alpha+\beta\cos x}{(1-\cos x)^n}\,dx=\int \frac{\alpha+\beta\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^n}\,dx=$$

$$=-\frac{\beta}{2^{n-2}}\int \frac{d\,\frac{x}{2}}{\sin^{2n-2}\frac{x}{2}}+\frac{\alpha+\beta}{2^{n-1}}\int \frac{d\,\frac{x}{2}}{\sin^{2n}\frac{x}{2}},$$

и отсюда, выражая последние интегралы по формулам (349) и (353), получаем:

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{\alpha+\beta\cos x}{(1+\cos x)^n}\,dx &= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{2\beta\sum_{p=0}^{p=n-2}\binom{n-2}{p}\frac{\operatorname{tg}^{2p+1}\frac{x}{2}}{2p+1}+\right.\\
&\qquad\left.+(\alpha-\beta)\sum_{p=0}^{p=n-1}\binom{n-1}{p}\frac{\operatorname{tg}^{2p+1}\frac{x}{2}}{2p+1}\right\},\\
\int \frac{\alpha+\beta\cos x}{(1-\cos x)^n}\,dx &= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{2\beta\sum_{p=0}^{p=n-2}\binom{n-2}{p}\frac{\operatorname{ctg}^{2p+1}\frac{x}{2}}{2p+1}-\right.\\
&\qquad\left.-(\alpha+\beta)\sum_{p=0}^{p=n-1}\binom{n-1}{p}\frac{\operatorname{ctg}^{2p+1}\frac{x}{2}}{2p+1}\right\}.
\end{aligned}\right\}\tag{356}$$

Эти формулы теряют значение для $n<2$, т. е. при $n=1$. В этом случае имеем интегралы

$$\int \frac{\alpha+\beta\cos x}{1+\cos x}\,dx=\beta x+(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

и

$$\int \frac{\alpha+\beta\cos x}{1-\cos x}\,dx=-\beta x-(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

Несколько в другом виде

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{\alpha+\beta\cos x}{(1+\cos x)^n}\,dx &= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{(\alpha+\beta)\sum_{p=0}^{p=n-2}\binom{n-2}{p}\frac{\operatorname{tg}^{2p+1}\frac{x}{2}}{2p+1}+\right.\\
&\qquad\left.+(\alpha-\beta)\sum_{p=0}^{p=n-2}\binom{n-2}{p}\frac{\operatorname{tg}^{2p+3}\frac{x}{2}}{2p+3}\right\};\\
\int \frac{\alpha+\beta\cos x}{(1-\cos x)^n}\,dx &= -\frac{1}{2^{n-1}}\left\{(\alpha-\beta)\sum_{p=0}^{p=n-2}\binom{n-2}{p}\frac{\operatorname{ctg}^{2p+1}\frac{x}{2}}{2p+1}+\right.\\
&\qquad\left.+(\alpha+\beta)\sum_{p=0}^{p=n-2}\binom{n-2}{p}\frac{\operatorname{ctg}^{2p+3}\frac{x}{2}}{2p+3}\right\},
\end{aligned}\right\}\tag{357}$$

имеем формулы для тех же интегралов, приведя их подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$ к алгебраической форме.

Точно таким же путём, или заменяя в предыдущих формулах x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, получаем:

$$\int \frac{\alpha+\beta\sin x}{(a+b\sin x)^n}\,dx = -\frac{a\beta-b\alpha}{(n-1)(a^2-b^2)}\,\frac{\cos x}{(a+b\sin x)^{n-1}} + \int \frac{\alpha_1+\beta_1\sin x}{(a+b\sin x)^{n-1}}\,dx, \tag{358}$$

где

$$\alpha_1=\frac{a\alpha-b\beta}{a^2-b^2}$$

и

$$\beta_1=\frac{n-2}{n-1}\,\frac{a\beta-b\alpha}{a^2-b^2},$$

$$\int \frac{dx}{(a+b\sin x)^n}=\frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}\,\frac{\cos x}{(a+b\sin x)^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)}\int \frac{(n-1)a-(n-2)b\sin x}{(a+b\sin x)^{n-1}}\,dx, \tag{359}$$

$$\int \frac{\alpha+\beta\cos x}{(a+b\sin x)^n}\,dx=-\frac{\beta}{(n-1)b(a+b\sin x)^{n-1}}+\alpha\int\frac{dx}{(a+b\sin x)^n}, \tag{360}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{\alpha+\beta\sin x}{(1+\sin x)^n}\,dx &= -\frac{1}{2^{n-1}}\left\{2\beta\sum_{p=0}^{p=n-2}\binom{n-2}{p}\frac{\operatorname{tg}^{2p+1}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2p+1}+\right.\\
&\qquad\left.+(\alpha-\beta)\sum_{p=0}^{p=n-1}\binom{n-1}{p}\frac{\operatorname{tg}^{2p+1}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2p+1}\right\},\\
\int \frac{\alpha+\beta\sin x}{(1-\sin x)^n}\,dx &= -\frac{1}{2^{n-1}}\left\{2\beta\sum_{p=0}^{p=n-2}\binom{n-2}{p}\frac{\operatorname{tg}^{2p+1}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2p+1}-\right.\\
&\qquad\left.-(\alpha-\beta)\sum_{p=0}^{p=n-1}\binom{n-1}{p}\frac{\operatorname{tg}^{2p+1}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{2p+1}\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{361}$$

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{\alpha+\beta\sin x}{(1+\sin x)^n}\,dx = -\frac{1}{2^{n-1}}\Bigg\{(\alpha+\beta)\sum_{p=0}^{p=n-2}\binom{n-2}{p}\frac{\operatorname{tg}^{2p+1}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2p+1}+\\ +(\alpha-\beta)\sum_{p=0}^{p=n-2}\binom{n-2}{p}\frac{\operatorname{tg}^{2p+3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2p+3}\Bigg\}, \quad (362)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{\alpha+\beta\sin x}{(1-\sin x)^n}\,dx = \frac{1}{2^{n-1}}\Bigg\{(\alpha-\beta)\sum_{p=0}^{p=n-2}\binom{n-2}{p}\frac{\operatorname{tg}^{2p+1}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{2p+1}+\\ +(\alpha+\beta)\sum_{p=0}^{p=n-2}\binom{n-2}{p}\frac{\operatorname{tg}^{2p+3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{2p+3}\Bigg\}, \quad (362)\end{aligned}\right\}$$

$$\int \frac{\alpha+\beta\sin x}{1+\sin x}\,dx = \beta x + (\alpha-\beta)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

$$\int \frac{\alpha+\beta\sin x}{1-\sin x}\,dx = -\beta x + (\alpha+\beta)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

III) Интеграл $\int \frac{\alpha+\beta\cos x+\gamma\cos^2 x+\delta\cos^3 x+\ldots+\mu\cos^m x}{(a+b\cos x)^n}\,dx$, если $m<n$, вычисляется путём разложения на интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^k}.$$

Подставив в интегрируемое выражение $\cos x=\frac{z}{b}$, имеем

$$\frac{\alpha+\beta\frac{z}{b}+\gamma\frac{z^2}{b^2}+\delta\frac{z^3}{b^3}+\ldots+\mu\frac{z^m}{b^m}}{(a+z)^n}=\frac{f(z)}{(a+z)^n},$$

где z — целая рациональная функция от z степени $m<n$. Раскладывая дробь $\frac{f(z)}{(a+z)^n}$ обычным порядком на элементарные дроби, находим числители этих дробей $f(-a)$, $f'(-a)$, $\frac{1}{1\cdot 2}f''(-a)$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(-a), \ldots$, и после этого рассматриваемый интеграл можем представить как сумму интегралов

$$\int \frac{\alpha+\beta\cos x+\gamma\cos^2 x+\ldots}{(a+b\cos x)^n}\,dx = f(-a)\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}+$$
$$+f'(-a)\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{f''(-a)}{1\cdot 2}\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}+\ldots$$

Каждый из этих интегралов вычисляется по формулам (353) и следующим.

В случае $m \geqslant n$, выделив целую часть, приходим к интегралу со степенью числителя $m' < n$.

Представив для интеграла

$$\int \frac{\alpha + \beta \sin x + \gamma \sin^2 x + \delta \sin^3 x + \varepsilon \sin^4 x + \dots}{(a + b \cos x)^n} dx$$

числитель в виде

$$[\alpha + \gamma (1 - \cos^2 x) + \varepsilon (1 - \cos^2 x)^2 + \dots] + \\ + [\beta + \delta (1 - \cos^2 x) + \dots] \sin x,$$

приходим к сумме двух интегралов

$$\int \frac{A' + B' \cos^2 x + C' \cos^4 x + \dots}{(a + b \cos x)^n} dx + \\ + \int \frac{A'' + B'' \cos^2 x + C'' \cos^4 x + \dots}{(a + b \cos x)^n} \sin x \, dx.$$

Первый из них вычисляется приёмом, указанным для предыдущего интеграла, второй же после подстановки $\cos x = z$ вычисляется, как интеграл алгебраической рациональной функции.

Интегралы

$$\int \frac{\alpha + \beta \sin x + \gamma \sin^2 x + \dots}{(a + b \sin x)^n} dx$$

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x + \gamma \cos^2 x + \dots}{(a + b \sin x)^n} dx$$

вычисляются аналогичным путём.

Вообще всякий интеграл вида

$$\int \frac{F(\sin x, \cos x)}{(a + b \cos x)^n} dx \quad \text{и} \quad \int \frac{F(\sin x, \cos x)}{(a + b \sin x)^n} dx,$$

если F — целая рациональная функция своих аргументов, простым преобразованием числителя приводится к сумме какихлибо из рассмотренных интегралов, и, следовательно, может быть вычислен теми же приёмами.

IV) Обращая аналогично формулу (287), получаем:

$$\int \frac{\alpha + \beta \operatorname{tg} x}{(a + b \operatorname{tg} x)^n} dx = \frac{a\beta - b\alpha}{(n-1)(a^2 + b^2)(a + b \operatorname{tg} x)^{n-1}} + \int \frac{\alpha_1 + \beta_1 \operatorname{tg} x}{(a + b \operatorname{tg} x)^{n-1}} dx, \quad (363)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{a\alpha - b\beta}{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad \beta_1 = \frac{a\beta - b\alpha}{a^2 + b^2}.$$

Полагая в этой формуле $\alpha=1$, $\beta=0$, получаем:

$$\int \frac{dx}{(a+b\operatorname{tg} x)^n} = \\ = \frac{-b}{(n-1)(a^2+b^2)(a+b\operatorname{tg} x)^{n-1}} + \frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{a-b\operatorname{tg} x}{(a+b\operatorname{tg} x)^{n-1}}\,dx. \quad (364)$$

Заменяя в формулах (363) и (364) x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, получаем:

$$\int \frac{\alpha+\beta\operatorname{ctg} x}{(a+b\operatorname{ctg} x)^n}\,dx = \\ = -\frac{a\beta-b\alpha}{(n-1)(a^2+b^2)(a+b\operatorname{ctg} x)^{n-1}} + \int \frac{\alpha_1+\beta_1\operatorname{ctg} x}{(a+b\operatorname{ctg} x)^{n-1}}\,dx \quad (365)$$

с теми же значениями для α_1, β_1, и

$$\int \frac{dx}{(a+b\operatorname{ctg} x)^n} = \\ = \frac{b}{(n-1)(a^2+b^2)(a+b\operatorname{ctg} x)^{n-1}} + \frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{a-b\operatorname{ctg} x}{(a+b\operatorname{ctg} x)^{n-1}}\,dx, \quad (366)$$

$$\int \frac{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}{a\cos^2 x \pm b\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\alpha+\beta\operatorname{tg}^2 x}{a\pm b\operatorname{tg}^2 x}\,dx = \\ = \frac{\alpha-\beta}{a-b}\,x + \frac{a\beta-b\alpha}{(a-b)\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\operatorname{tg} x\right) \quad (367)$$

для верхнего знака и

$$= \frac{\alpha-\beta}{a+b}\,x + \frac{a\beta-b\alpha}{2(a+b)\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\operatorname{tg} x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\operatorname{tg} x}$$

для нижнего.

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x} = \\ = \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b^2+c^2}+a\cos z+\sqrt{b^2+c^2-a^2}\sin z}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos z}, \quad (368)$$

если $a^2<b^2+c^2$, и

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-\sqrt{b^2+c^2}}{a\quad\sqrt{b^2+c^2}}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}z\right),$$

если $a^2>b^2+c^2$, и

$$= \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{1}{2}z, \quad \text{если} \quad a^2=b^2+c^2 \qquad \left(z=x-\operatorname{arctg}\frac{c}{b}\right).$$

Приведённые выражения интеграла получаем, полагая $b=\rho\cos\varphi$, $c=\rho\sin\varphi$, так что

$$\rho=\sqrt{b^2+c^2},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{c}{b},$$

$$a+b\cos x+c\sin x=a+\sqrt{b^2+c^2}\cos\left(x-\operatorname{arctg}\frac{c}{b}\right),$$

и пользуясь затем формулой (305).

Подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$ для рассматриваемого интеграла даёт

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b^2+c^2-a^2}-c-(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}+c+(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}},\quad \text{если } a^2<b^2+c^2,$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}},\ \text{если } a^2>b^2+c^2,\ \text{и}$$

$$=-\frac{2}{(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c},\ \text{если } a^2=b^2+c^2.$$

Представив интеграл $\int\frac{dx}{a+b\cos^2x+c\sin^2x}$ в виде $\int\frac{d\operatorname{tg}x}{(a+c)\operatorname{tg}^2x+(a+b)}$, получаем:

$$\int\frac{dx}{a+b\cos^2x+c\sin^2x}=\frac{\pm1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a+c}{a+b}}\operatorname{tg}x\right),\tag{369}$$

если $a+b$ и $a+c$ одновременно >0 или <0,

$$=\frac{1}{2\sqrt{-(a+b)(a+c)}}\ln\frac{\sqrt{-(a+b)}-\sqrt{a+c}\operatorname{tg}x}{\sqrt{-(a+b)}+\sqrt{a+c}\operatorname{tg}x},$$

если $a+b<0$ и $a+c>0$

и

$$=\frac{1}{2\sqrt{-(a+b)(a+c)}}\ln\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{-(a+c)}\operatorname{tg}x}{\sqrt{a+b}-\sqrt{-(a+c)}\operatorname{tg}x},$$

если $a+b>0$ и $a+c<0$.

$$\int\frac{dx}{a\sin^2x+2b\sin x\cos x+c\cos^2x}=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{b+a\operatorname{tg}x}{\sqrt{ac-b^2}},\tag{370}$$

если $ac-b^2>0$, и

$$=\frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}}\ln\frac{\sqrt{b^2-ac}+b+a\operatorname{tg}x}{\sqrt{b^2-ac}-b-a\operatorname{tg}x},\quad \text{если}\quad ac-b^2<0.$$

Если $ac-b^2=0$, то, подставляя $c=\frac{b^2}{a}$, имеем интеграл

$$\int\frac{a\,dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}=-\frac{1}{b+a\operatorname{tg}x}.$$

$$\int \frac{dx}{a+b\operatorname{tg}x+c\operatorname{ctg}x}=$$

$$=\frac{1}{a^2+(b-c)^2}\left\{ax+\frac{b-c}{2}\ln\left[\sin 2x\,(a+b\operatorname{tg}x+c\operatorname{ctg}x)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{a(b+c)}{\sqrt{4bc-a^2}}\operatorname{arcctg}\frac{a+2b\operatorname{tg}x}{\sqrt{4bc-a^2}}\right\},\ \text{если}\ a^2<4bc,\quad (371)$$

$$=\frac{1}{a^2+(b-c)^2}\left\{ax+\frac{b-c}{2}\ln\left[\sin 2x\,(a+b\operatorname{tg}x+c\operatorname{ctg}x)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{a(b+c)}{2\sqrt{a^2-4bc}}\ln\frac{\sqrt{a^2-4bc}+a+2b\operatorname{tg}x}{\sqrt{a^2-4bc}-a-2b\operatorname{tg}x}\right\},\quad \text{если}\ a^2>4bc,\ \text{и}$$

$$=\frac{1}{a^2+(b-c)^2}\left\{ax+\frac{b-c}{2}\ln\left[\sin 2x\,(a+b\operatorname{tg}x+c\operatorname{ctg}x)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{a(b+c)}{a+2b\operatorname{tg}x}\right\},\quad \text{если}\ a^2=4bc\quad (\text{подст. } \operatorname{tg}x=z).$$

Примеры

40) $$\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x\,(2+\sin 2x)}=\frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}$$
(подст. $\operatorname{tg}x=z$).

41) $$\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x\cos 3x}=\ln\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2x}}\quad(\text{подст. }\operatorname{tg}x=z).$$

42) $$\int\frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4x+\sin^4x}=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2x).$$

43) $$\int\frac{dx}{4+\sqrt{3}\cos x+\sin x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

или

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{(4-\sqrt{3})\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{3}}.$$

44) $$\int\frac{dx}{3+4\cos x+4\sin x}=\frac{1}{\sqrt{23}}\ln\frac{4\sqrt{2}+3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{23}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{3+4\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

или

$$=\frac{1}{\sqrt{23}}\ln\frac{\sqrt{23}-4+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{23}+4-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

45) $$\int\frac{dx}{4-3\cos^2x+5\sin^2x}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}x).$$

46) $$\int\frac{dx}{4+\operatorname{tg}x+4\operatorname{ctg}x}=\frac{4}{25}x-\frac{3}{25}\ln(\operatorname{tg}x+2)+\frac{3}{25}\ln\sec x+\frac{2}{5(\operatorname{tg}x+2)}.$$

47) $$\int\frac{dx}{(\sin x+2\sec x)^2}=\frac{\cos 2x-15}{15(4+\sin 2x)}+\frac{4}{15\sqrt{15}}\arcsin\frac{4\sin 2x+1}{4+\sin 2x}.$$

48) $$\int \frac{dx}{(\cos x + 2\sec x)^2} = \frac{\sin 2x}{6(5+\cos 2x)} + \frac{1}{12\sqrt{6}} \arccos \frac{5\cos 2x + 1}{5+\cos 2x}.$$

49) $$\int \frac{5-\operatorname{tg} x - 6\operatorname{tg}^2 x}{(1+3\operatorname{tg} x)^3}\,dx = -\frac{7}{10(1+3\operatorname{tg} x)^2} - \frac{29}{50(1+3\operatorname{tg} x)} - \frac{201}{750}x - \frac{28}{125}\ln(\cos x + 3\sin x).$$

§ 11. Интегралы вида

$$\int \frac{\cos^m x}{\cos nx}\,dx, \quad \int \frac{\sin^m x}{\cos nx}\,dx, \quad \int \frac{\cos^m x}{\sin nx}\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{\sin^m x}{\sin nx}\,dx.$$

1) $$\int \frac{\cos^m x}{\cos nx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{h=n-1} (-1)^h \left(\cos\frac{2h+1}{2n}\pi\right)^m \ln \frac{\sin\left[\frac{2h+1}{4n}\pi + \frac{1}{2}x\right]}{\sin\left[\frac{2h+1}{4n}\pi - \frac{1}{2}x\right]}. \quad (372)$$

$$(m < n).$$

Знаменатель $\cos nx$ является целой рациональной функцией от $\cos x$ и обращается в нуль при $x = \frac{2h+1}{2n}\pi$, где $h = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Обозначая $\cos x = z$ и $\cos nx = f(z)$, видим, что интегрируемое выражение $\frac{z^m}{f(z)}$ раскладывается на элементарные дроби вида

$$\frac{A_h}{z - \cos\frac{2h+1}{2n}\pi} = \frac{A_h}{\cos x - \cos\frac{2h+1}{2n}\pi}.$$

При этом $A_h = \left[\frac{z^m}{f'(z)}\right] z = \cos\frac{2h+1}{2n}\pi$.

Так как $f'(z) = \frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dz} = \frac{n\sin nx}{\sin x}$, то

$$A_h = \left[\frac{\left(\cos\frac{2h+1}{2n}\pi\right)^m \sin x}{n\sin nx}\right]_{x=\frac{2h-1}{2n}\pi} = \frac{\left(\cos\frac{2h+1}{2n}\pi\right)^m \sin\frac{2h+1}{2n}\pi}{n\sin\frac{2h+1}{2}\pi} =$$

$$= \frac{(-1)^h}{n}\left(\cos\frac{2h+1}{2n}\pi\right)^m \sin\frac{2h+1}{2n}\pi,$$

и следовательно,

$$\int \frac{\cos^m x}{\cos nx}\,dx = \int \sum_{h=0}^{h=n-1} \frac{(-1)^h}{n} \frac{\left(\cos\frac{2h+1}{2n}\pi\right)^m \sin\frac{2h+1}{2n}\pi}{\cos x - \cos\frac{2h+1}{2n}\pi}\,dx =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{h=n-1}{}' (-1)^h \left(\cos\frac{2h+1}{2n}\pi\right)^m \sin\frac{2h+1}{2n}\pi \int \frac{dx}{\cos x - \cos\frac{2h+1}{2n}\pi}.$$

Последний интеграл выражаем по формуле (307).

$$\text{II)}\ \int \frac{\cos^{2m} x}{\sin 2nx}\,dx = \frac{1}{2n}\left\{\ln\sin x + \right.$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{h=n-1} (-1)^h \cos^{2m}\frac{h\pi}{2n} \ln\left(\sin^2 x - \sin^2\frac{h\pi}{2n}\right)\right\} \quad (m \leqslant n). \qquad (373)$$

Представив вычисляемый интеграл в виде $\int \frac{\cos^{2m-1} x}{\sin 2nx}\,d\sin x$ и полагая $\sin x = z$, $\sin 2nx = f(z)$, раскладываем так же, как и для предыдущего интеграла, функцию $\frac{\cos^{2m-1} x}{\sin 2nx}$ на элементарные дроби. Знаменатель $\sin 2nx$ обращается в нуль при

$$x = 0, \quad x = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad x = \pm\frac{h\pi}{2n}, \text{ где } n = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Следовательно, функция раскладывается на дроби

$$\frac{A_0}{\sin x}, \quad \frac{A_n}{\sin x - \sin\frac{\pi}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{A_{\pm h}}{\sin x \pm \sin\frac{h\pi}{2n}}.$$

Имея $f'(z) = \frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dz} = \frac{2n\cos 2nx}{\cos x}$, находим

$$A_{\pm h} = \left[\frac{\cos^{2m-1} x}{f'(z)}\right]_{z=\sin\left(\pm\frac{h\pi}{2n}\right)} = \left[\frac{\cos^{2m} x}{2n\cos 2nx}\right]_{x=\pm\frac{h\pi}{2n}} = \frac{(-1)^h}{2n}\cos^{2m}\frac{h\pi}{2n},$$

$$A_0 = \left[\frac{\cos^{2m} x}{2n\cos 2nx}\right]_{x=0} = \frac{1}{2n} \quad \text{и} \quad A_n = \left[\frac{\cos^{2m} x}{2n\cos 2nx}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$$

и, таким образом,

$$\int \frac{\cos^{2m} x}{\sin 2nx}\,dx = \frac{1}{2n}\int\left\{\frac{1}{\sin x} + \sum_{h=1}^{h=n-1} (-1)^h \frac{\cos^{2m}\frac{h\pi}{2n}}{\sin x \pm \sin\frac{h\pi}{2n}}\right\} d\sin x =$$

$$= \frac{1}{2n}\left\{\ln\sin x + \sum_{h=1}^{h=n-1} (-1)^h \cos^{2m}\frac{h\pi}{2n} \ln\left(\sin^2 x - \sin^2\frac{h\pi}{2n}\right)\right\}.$$

III) $$\int \frac{\cos^{2m+1} x}{\sin 2nx}\,dx = \frac{1}{2n}\left\{\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{h=1}^{h=n-1} (-1)^h \cos^{2m+1}\frac{h\pi}{2n} \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{h\pi}{4n}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{h\pi}{4n}\right)\right]\right\}. \quad (374)$$

Раскладывая так же, как и для предыдущего интеграла, функцию $\frac{\cos^{2m+1} x}{\sin 2nx}$ на элементарные дроби, имеем:

$$A_{\pm h} = \frac{(-1)^h}{2n}\cos^{2m+2}\frac{h\pi}{2n}, \quad A_0 = \frac{1}{2n}, \quad A_n = 0,$$

и после этого для интеграла получаем:

$$\int \frac{\cos^{2m+1} x}{\sin 2nx}\,dx = \frac{1}{2n}\int\left\{\frac{1}{\sin x} + \sum_{h=1}^{h=n-1}\frac{(-1)^h \cos^{2m+2}\frac{h\pi}{2n}}{\sin x \pm \sin\frac{h\pi}{2n}}\right\}dx.$$

Для последнего интеграла пользуемся результатами (310).

IV) $$\int \frac{\cos^{2m} x}{\sin(2n+1)x}\,dx = \frac{1}{2n+1}\left\{\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h \cos^{2m}\frac{h\pi}{2n+1} \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{h\pi}{4n+2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{h\pi}{4n+2}\right)\right]\right\}$$
$$(m \leqslant n). \quad (375)$$

Полагая $\sin x = z$, $\sin(2n+1)x = f(z)$ и замечая, что знаменатель $\sin(2n+1)x$ обращается в нуль при $x=0$ и $x = \pm\frac{h\pi}{2n+1}$, где $h = 1, 2, \ldots, n$, раскладываем интегрируемую функцию на элементарные дроби

$$\frac{A_0}{\sin x} \quad \text{и} \quad \frac{A_{\pm h}}{\sin x \mp \sin\frac{h\pi}{2n+1}}.$$

Для коэффициентов разложения находим

$$A_0 = \frac{1}{2n+1} \quad \text{и} \quad A_{\pm h} = \frac{(-1)^h}{2n+1}\cos^{2m+1}\frac{h\pi}{2n+1},$$

и после этого интеграл представляем в виде

$$\int \frac{\cos^{2m} x}{\sin(2n+1)x}\,dx = \frac{1}{2n+1}\int\left\{\frac{1}{\sin x} + \sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^h\cos^{2m+1}\frac{h\pi}{2n+1}}{\sin x \pm \sin\frac{h\pi}{2n+1}}\right\}dx.$$

Последний интеграл также выражаем по формуле (310).

V) Представив интеграл

$$\int \frac{\cos^{2m+1} x}{\sin(2n+1)x}\, dx$$

в виде $\int \frac{\cos^{2m} x}{\sin(2n+1)x}\, d\sin x$ и разложив так же, как и в предыдущем случае, функцию $\frac{\cos^{2m} x}{\sin(2n+1)x}$ на элементарные дроби, получаем:

$$\int \frac{\cos^{2m+1} x}{\sin(2n+1)x}\, dx = \frac{1}{2n+1} \int \left\{ \frac{1}{\sin x} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{(-1)^h \cos^{2m+1} \frac{h\pi}{2n+1}}{\sin x \pm \sin \frac{h\pi}{2n+1}} \right\} d\sin x,$$

и затем, выполнив интегрирование, будем иметь

$$\int \frac{\cos^{2m+1} x}{\sin(2n+1)x}\, dx = \frac{1}{2n+1} \left\{ \ln \sin x + \right.$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h \cos^{2m+1} \frac{h\pi}{2n+1} \ln\left(\sin^2 x - \sin^2 \frac{h\pi}{2n+1}\right) \right\} \quad (m \leqslant n). \quad (376)$$

VI) Заменяя в формуле (372) x на $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, n сначала на $2n$ и затем на $(2n+1)$, так что

$$\cos^m x, \quad \cos nx, \quad \sin\left[\frac{2h+1}{4n}\pi + \frac{1}{2}x\right], \ \sin\left[\frac{2h+1}{4n}\pi - \frac{1}{2}x\right]$$

соответственно заменяется в первом случае на

$$\sin^m x, \ \cos 2n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = (-1)^n \cos 2nx,$$

$$\sin\left[\frac{2h+2n+1}{8n}\pi - \frac{1}{2}x\right], \quad \sin\left[\frac{2h-2n+1}{8n} + \frac{1}{2}x\right]$$

и во втором на

$$\sin^m x, \quad (-1)^n \sin(2n+1)x, \ \sin\left[\frac{h+n+1}{2(2n+1)}\pi - \frac{1}{2}x\right],$$

$$\sin\left[\frac{h-n}{2(2n+1)}\pi + \frac{1}{2}x\right],$$

получаем формулы:

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos 2nx}\, dx = \frac{1}{2n} \sum_{h=0}^{h=2n-1} (-1)^{n+h} \left(\cos \frac{2h+1}{4n}\pi\right)^m \times$$

$$\times \ln \frac{\sin\left[\frac{2h-2n+1}{8n}\pi + \frac{1}{2}x\right]}{\sin\left[\frac{2h+2n+1}{8n}\pi - \frac{1}{2}x\right]} \quad (m < 2n), \quad (377)$$

$$\int \frac{\sin^m x}{\sin (2n+1)x}\,dx = \frac{1}{2n+1} \sum_{h=0}^{h=2n} (-1)^{n+h} \left(\cos \frac{2h+1}{2(2n+1)}\pi\right)^m \times$$
$$\times \ln \frac{\sin\left[\frac{h-n}{2(2n+1)}\pi + \frac{1}{2}x\right]}{\sin\left[\frac{h+n+1}{2(2n+1)}\pi - \frac{1}{2}x\right]} \quad (m \leqslant 2n). \quad (378)$$

VII) Заменяя x на $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и $\sin 2nx$ на $(-1)^{n+1}\sin 2nx$ в формуле (373), получаем:

$$\int \frac{\sin^{2m} x}{\sin 2nx}\,dx = \frac{(-1)^n}{2n} \Big\{\ln \cos x +$$
$$+ \sum_{h=1}^{h=n-1} (-1)^h \cos^{2m}\frac{h\pi}{2n} \ln\left(\cos^2 x - \sin^2\frac{h\pi}{2n}\right)\Big\} \quad (m \leqslant n). \quad (379)$$

Заменяя точно так же в формуле (374) x на $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, так что вместо $\sin 2nx$, $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{h\pi}{4n}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{h\pi}{4n}\right)$, соответственно имеем

$$(-1)^{n+1}\sin 2nx, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{n+h}{4n}\pi - \frac{x}{2}\right) \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{n-h}{4n}\pi - \frac{x}{2}\right),$$

получаем:

$$\int \frac{\sin^{2m+1} x}{\sin 2nx}\,ds = \frac{(-1)^n}{2n} \Big\{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) +$$
$$+ \sum_{h=n}^{h=n-1} (-1)^h \cos^{2m+1}\frac{h\pi}{2n} \times$$
$$\times \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{n+h}{4n}\pi - \frac{1}{2}x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{n-h}{4n}\pi - \frac{1}{2}x\right)\right]\Big\} \quad (m < n). \quad (380)$$

Наконец, из формул (375) и (376) той же заменой x на $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ получаем:

$$\int \frac{\sin^{2m} x}{\cos (2n+1)x}\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \Big\{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) +$$
$$+ \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h \cos^{2m}\frac{h\pi}{2n+1} \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{2n+1+2h}{4(2n+1)}\pi - \frac{1}{2}x\right) \times\right.$$
$$\left.\times \operatorname{tg}\left(\frac{2n+1-2h}{4(2n+1)}\pi - \frac{1}{2}x\right)\right]\Big\} \quad (m \leqslant n). \quad (381)$$

$$\int \frac{\sin^{2m+1} x}{\cos (2n+1)x}\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \Big\{\ln \cos x +$$
$$+ \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h \cos^{2m+1} x \frac{h\pi}{2n+1} \ln\left(\cos^2 x - \sin^2\frac{h\pi}{2n+1}\right)\Big\} \quad (m \leqslant n). \quad (382)$$

Примеры

50) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\cos 3x}\,dx = \frac{1}{4}\ln\frac{1+2\sin x}{1-2\sin x}$.

51) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos 2x}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}$.

52) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos 2x}\,dx = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\ln\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

53) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos 3x}\,dx = \frac{1}{3}\left\{\ln\cos x - \frac{1}{8}\ln(4\cos^2 x - 3)\right\} = \frac{1}{24}\ln\frac{\cos^9 x}{\cos 3x}$.

54) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin 3x}\,dx = \frac{1}{3}\left\{\ln\sin x - \frac{1}{2}\ln(4\sin^2 x - 3)\right\} = \frac{1}{6}\ln\frac{\sin^2 x}{\sin 3x}$.

55) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin 4x}\,dx = \frac{1}{4}\left\{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}\sin x}{1-\sqrt{2}\sin x}\right\}$.

56) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sin 4x}\,dx = \frac{1}{4}\left\{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}\sin x}{1-\sqrt{2}\sin x}\right\}$.

§ 12. Простейшие интегралы тригонометрических выражений, содержащих иррациональности основных тригонометрических функций

Общее замечание

Подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ всякий интеграл тригонометрического выражения приводится к алгебраической форме. Если под знаком интеграла имеем иррациональное тригонометрическое выражение, то при переходе к алгебраической форме соответственно получаем также иррациональное тригонометрическое выражение, и если для последнего интегрирование выполняется, то интеграл данного тригонометрического выражения также вычисляется в конечном виде.

Однако так же, как и для рациональных тригонометрических выражений, эта подстановка целесообразна лишь в редких случаях, так как вообще она ведёт к интегралам слишком сложных выражений. Если тригонометрическая иррациональная функция интегрируема, то другими подстановками, приводящими интеграл к алгебраической форме, рациональной или иррациональной, или соответствующими тригонометрическими подстановками, сохраняющими для интеграла тригонометрическую форму, но в то же время рационализирующими интегрируемую функцию, задача интегрирования разрешается проще.

На основании связи между интегралами тригонометрических и алгебраических выражений можно уже заранее притти к заключению, что *круг интегрируемости иррациональных тригонометрических выражений весьма ограничен.* И действительно, интегралы многих самых простых иррациональных тригонометрических выражений уже не могут быть выражены в конечном виде, какой-либо конечной комбинацией тригонометрических, алгебраических и логарифмических функций. Наряду с этим, однако, имеются некоторые виды интегралов, иногда от весьма сложных выражений, которые вычисляются в конечном виде. В дальнейшем изложении рассмотрим эти виды и отметим те из основных тригонометрических иррациональных функций, для которых интегрирование невыполнимо.

Из формул (261) — (272), получаются также следующие формулы:

$$\int [\sqrt[s]{\sin nx}]^{\pm r} \cos nx\, dx = \frac{s}{n(s \pm r)} [\sqrt[s]{\sin nx}]^{s \pm r}, \tag{383}$$

$$\int [\sqrt[s]{\cos nx}]^{\pm r} \sin nx\, dx = -\frac{s}{n(s \pm r)} [\sqrt[s]{\cos nx}]^{s \pm r}, \tag{384}$$

$$\int [\sqrt[s]{\operatorname{tg} nx}]^{\pm r} \sec^2 nx\, dx = \frac{s}{n(s \pm r)} [\sqrt[s]{\operatorname{tg} nx}]^{s \pm r}, \tag{385}$$

$$\int [\sqrt[s]{\operatorname{ctg} nx}]^{\pm r} \operatorname{cosec}^2 nx\, dx = -\frac{s}{n(s \pm r)} [\sqrt[s]{\operatorname{ctg} nx}]^{s \pm r}, \tag{386}$$

$$\int [\sqrt[s]{\sec nx}]^{\pm r} \operatorname{tg} nx\, dx = \mp \frac{s}{nr} [\sqrt[s]{\sec nx}]^{\pm r}, \tag{387}$$

$$\int [\sqrt[s]{\operatorname{cosec} nx}]^{\pm r} \operatorname{ctg} nx\, dx = \mp \frac{s}{nr} [\sqrt[s]{\operatorname{cosec} nx}]^{\pm r}, \tag{388}$$

$$\int [\sqrt[s]{\sin x}]^{\pm r} \cos^{2n+1} x\, dx = s \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{n}{p} \frac{[\sqrt[s]{\sin x}]^{2ps+s\pm r}}{2ps+s\pm r}, \tag{389}$$

$$\int [\sqrt[s]{\cos x}]^{\pm r} \sin^{2n+1} x\, dx = -s \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{n}{p} \frac{[\sqrt[s]{\cos x}]^{2ps+s\pm r}}{2ps+s\pm r}, \tag{390}$$

$$\int [\sqrt[s]{\operatorname{tg} x}]^{\pm r} \sec^{2n} x\, dx = s \sum_{0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \frac{[\sqrt[s]{\operatorname{tg} x}]^{2ps+s\pm r}}{2ps+s\pm r}, \tag{391}$$

$$\int [\sqrt[s]{\operatorname{ctg} x}]^{\pm r} \operatorname{cosec}^{2n} x\, dx = -s \sum_{0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \frac{[\sqrt[s]{\operatorname{ctg} x}]^{2ps+s\pm r}}{2ps+s\pm r}, \tag{392}$$

$$\int [\sqrt[s]{\sec x}]^{\pm r} \operatorname{tg}^{2n+1} x\, dx = s \sum_{0}^{n} (-1)^{n+p} \binom{n}{p} \frac{[\sqrt[s]{\sec x}]^{2ps\pm r}}{2ps\pm r}, \tag{393}$$

$$\int [\sqrt[s]{\operatorname{cosec} x}]^{\pm r} \operatorname{ctg}^{2n+1} x\, dx = -\sum_{0}^{n} (-1)^{n+p} \binom{n}{p} \frac{[\sqrt[s]{\operatorname{cosec} x}]^{2ps\pm r}}{2ps\pm r} \tag{394}$$

§ 13. Интегралы тригонометрических выражений, содержащих иррациональности вида $\sqrt[s]{(a+b\sin x)^{\pm r}}$ и $\sqrt[s]{(a+b\cos x)^{\pm r}}$

I) Интегралы вида $\int[\sqrt[s]{\sin nx}]^{\pm r}\,dx$ и $\int[\sqrt[s]{\cos nx}]^{\pm r}\,dx$ подстановками $\sin nx=z$ для первого и $\cos nx=z$ для второго приводятся к интегралам $\pm\frac{1}{n}\int z^{\pm\frac{r}{s}}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dz$.

Рассматривая эти интегралы как интегралы от биномиальных дифференциалов, для которых $m=\pm r$, $n=2$ и $p=-\frac{1}{2}$, замечаем, что интегрирование выполнимо для них в том случае, если

$$\frac{m+1}{n}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\frac{r}{s} \quad \text{или} \quad \frac{m+1}{n}+p=\pm\frac{1}{2}\frac{r}{s}$$

равны нулю или целому числу. Эти условия выполняются, когда $\left.\frac{r}{s}\right|=2k+1$ или $=2k$, где $k=0,1,2,\ldots$ Следовательно интегрирование выполнимо лишь в том случае, когда r равно нулю или является числом, кратным s, т. е. в том случае, когда по существу под знаком интеграла нет иррациональности. В противном случае интеграл не может быть выражен какой-либо конечной комбинацией элементарных функций, и все попытки в этом направлении даже для наиболее простых интегралов этого вида, как например, $\int\sqrt{\sin x}\,dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$, $\int\sqrt{\sin 2x}\,dx$ и т. д., должны быть безрезультатными.

II) Интегралы $\int[\sqrt[s]{a+b\sin nx}]^{\pm r}\,dx$ и $\int[\sqrt[s]{a+b\cos nx}]^{\pm r}\,dx$ подстановками для первого

$$a+b\sin nx=z^s, \quad x=\frac{1}{n}\arcsin\frac{z^s-a}{b},$$

$$dx=+\frac{s}{n}\frac{z^{s-1}\,dz}{\sqrt{b^2-a^2+2az^s-z^{2s}}}$$

и для второго $a+b\cos nx=z^s$, $x=\frac{1}{n}\arccos\frac{z^s-a}{b}$,

$$dx=-\frac{s}{n}\frac{z^{s-1}\,dz}{\sqrt{b^2-a^2+2az^s-z^{2s}}}$$

приводятся к интегралам $\pm\frac{s}{n}\int\frac{z^{s\pm r-1}\,dz}{\sqrt{b^2-a^2+2az^s-z^{2s}}}$, вообще не вычисляющимся в конечном виде.

Однако в частном случае при $b=\pm a$ последние интегралы имеют вид $\pm\frac{s}{n}\int\frac{z^{\frac{s}{2}\pm r-1}\,dz}{\sqrt{2a-z^s}}$ и, следовательно, представляют интегралы от биномиальных дифференциалов, для которых при некоторых соотношениях между r и s допустимо выполнение интегрирования.

Полагая в целях простоты $b=\pm a=\pm 1$, исследуем условия интегрируемости интегралов

$$\int[\sqrt[s]{1\pm\sin nx}]^{\pm r}\,dx \quad\text{и}\quad \int[\sqrt[s]{1\pm\cos nx}]^{\pm r}\,dx,$$

приводящихся теми же подстановками

$$1\pm\sin nx=z^s \quad\text{и}\quad 1\pm\cos nx=z^s$$

соответственно к интегралам

$$\pm\frac{s}{n}\int\frac{z^{\frac{s}{2}\pm r-1}\,dz}{\sqrt{2-z^s}} \quad\text{и}\quad \mp\frac{s}{n}\int\frac{z^{\frac{s}{2}\pm r-1}\,dz}{\sqrt{2-z^s}}.$$

Эти интегралы вычисляются в конечном виде, если

$$\frac{m+1}{n}=\frac{s\pm 2r}{2s} \quad\text{и}\quad \frac{m+1}{n}+p=\frac{s\pm r}{s}$$

представляют целые числа или нуль. Второе условие выполняется, когда r является числом, кратным s, т. е. предусматриваем тот случай, когда под знаком интеграла имеется рациональное выражение; первое же условие выполняется при $r=(2k+1)\frac{s}{2}$, т. е. для интегралов

$$\int[\sqrt{1\pm\sin nx}]^{\pm(2k+1)}\,dx \quad\text{и}\quad \int[\sqrt{1\pm\cos nx}]^{\pm(2k+1)}\,dx.$$

Эти интегралы действительно вычисляются и легко приводятся к рациональным формам, так как

$$1+\sin nx=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{n}{2}x\right), \quad 1-\sin nx=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{n}{2}x\right),$$

$$1+\cos nx=2\cos^2\frac{n}{2}x, \qquad 1-\cos nx=2\sin^2\frac{n}{2}x.$$

Подставляя эти выражения, приходим к интегралам

$$\int\cos^{\pm(2k+1)}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{n}{2}x\right)dx, \quad \int\sin^{\pm(2k+1)}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{n}{2}x\right)dx,$$

$$\int\cos^{\pm(2k+1)}\frac{n}{2}x\,dx, \qquad \int\sin^{\pm(2k+1)}\frac{n}{2}x\,dx,$$

с общим для всех постоянным множителем $\sqrt{2}^{\,\pm(2k+1)}$.

Приёмы вычисления последних интегралов рассмотрены выше, см. формулы (234), (231), (233), (235), (241) и (243).

При вычислении рассматриваемых интегралов с помощью введённых вначале подстановок, для данного случая

$$1 \pm \sin nx = z^2 \quad \text{и} \quad 1 \pm \cos nx = z^2,$$

имеем

$$\int [\sqrt{1 \pm \sin nx}\,]^{\pm(2k+1)}\,dx = \pm \frac{2}{n} \int \frac{z^{\pm(2k+1)}\,dz}{\sqrt{2-z^2}}$$

и

$$\int [\sqrt{1 \pm \cos nx}\,]^{\pm(2k+1)}\,dx = \mp \frac{2}{n} \int \frac{z^{\pm(2k+1)}\,dz}{\sqrt{2-z^2}}\,.$$

Интеграл $\int \frac{z^{\pm(2k+1)}\,dz}{\sqrt{2-z^2}}$ легко приводится к рациональной форме подстановкой $2-z^2=y^2$; при верхнем знаке приходим этим путём к интегралу $-\int (2-y^2)^k\,dy$ и при нижнем — к интегралу

$$-\int \frac{dy}{(2-y^2)^{k-1}}\,.$$

Для первого из этих интегралов получаем:

$$-\int (2-y^2)^k\,dy = -\int \sum_0^k (-1)^p \binom{k}{p} 2^{k-p} y^{2p}\,dy =$$
$$= -\sum_0^k (-1)^p \binom{k}{p} 2^{k-p} \frac{y^{2p+1}}{2p+1}\,,$$

и, следовательно,

$$\int [\sqrt{1 \pm \sin nx}\,]^{2k+1}\,dx =$$
$$= \mp \frac{1}{n} \sqrt{1 \mp \sin nx} \sum_{p=0}^{p=k} (-1)^p \binom{k}{p} 2^{k+1-p} \frac{(1 \mp \sin nx)^p}{2p+1}\,,$$

$$\int [\sqrt{1 \pm \cos nx}\,]^{2k+1}\,dx =$$
$$= \pm \frac{1}{n} \sqrt{1 \mp \cos nx} \sum_{p=0}^{p=k} (-1)^p \binom{k}{p} 2^{k+1-p} \frac{(1 \mp \cos nx)^p}{2p+1}\,.$$

Пользуясь для второго интеграла формулой (86), получаем:

$$\int \frac{dx}{[\sqrt{1\pm\sin nx}\,]^{2k+1}} = \frac{\mp\cos nx}{n\cdot k2^k\sqrt{1\pm\sin nx}^{\,2k+1}}\left\{2^{k-1}+\right.$$
$$+\frac{2k-1}{2k-2}2^{k-2}(1\pm\sin nx)+\frac{(2k-1)\,(2k-3)}{(2k-2)\,(2k-4)}2^{k-3}(1\pm\sin nx)^2+$$
$$\left.+\ldots+\frac{(2k-1)\,(2k-3)\ldots 5\cdot 3}{(2k-2)\,(2k-4)\ldots 4\cdot 2}(1\pm\sin nx)^{k-1}\right\}\mp$$
$$\mp\frac{(2k-1)\,(2k-3)\ldots 3\cdot 1}{2k\,(2k-2)\ldots 4\cdot 2}\,\frac{1}{n2^k\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1\mp\sin nx}}{\sqrt{2}-\sqrt{1\mp\sin nx}}\quad(k\geqslant 1);$$

$$\int \frac{dx}{[\sqrt{1\pm\cos nx}\,]^{2k+1}} = \frac{\pm\sin nx}{nk2^k[\sqrt{1+\cos nx}\,]^{2k+1}}\left\{2^{k-1}+\right.$$
$$+\frac{2k-1}{2k-2}2^{k-2}(1\pm\cos nx)+\frac{(2k-1)\,(2k-3)}{(2k-2)\,(2k-4)}2^{k-3}(1\pm\cos nx)^2+$$
$$\left.+\ldots+\frac{(2k-1)\,(2k-3)\ldots 5\cdot 3}{(2k-2)\,(2k-4)\ldots 4\cdot 2}(1\pm\cos nx)^{k-1}\right\}\pm$$
$$\pm\frac{(2k-1)\,(2k-3)\ldots 3\cdot 1}{2k\,(2k-2)\ldots 4\cdot 2}\,\frac{1}{n2^k\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1\mp\cos nx}}{\sqrt{2}-\sqrt{1\mp\cos nx}}\quad(k\geqslant 1).$$

III) Непосредственно получаем:

$$\int[\sqrt[s]{a+b\sin x}\,]^{\pm r}\cos x\,dx = \frac{s}{(s\pm r)\,b}[\sqrt[s]{a+b\sin x}\,]^{s\pm r},$$
$$\int[\sqrt[s]{a+b\cos x}\,]^{\pm r}\sin x\,dx = -\frac{s}{(s\pm r)\,b}[\sqrt[s]{a+b\cos x}\,]^{s\pm r}.$$

IV) Интегралы

$$\int F\left\{\sin x, \cos^2 x, \sqrt[q]{(a+b\sin x)^p}, \sqrt[s]{[a+b\sin x]^r}, \ldots,\right\}\cos x\,dx$$

и

$$\int F\left\{\cos x, \sin^2 x, \sqrt[q]{(a+b\cos x)^p}, \sqrt[s]{(a+b\cos x)^r}, \ldots,\right\}\sin x\,dx$$

подстановками $a+b\sin x=z^l$ и $a+b\cos x=z^l$, где l — наименьшее кратное всех показателей $p, s, \ldots$, приводятся к интегралам

$$\pm\int F\left\{\frac{z^l-a}{b}, \frac{b^2-(z^l-a)^2}{b^2}, z^{p\frac{l}{q}}, z^{r\frac{l}{s}}, \ldots,\right\}\frac{l}{b}z^{l-1}\,dz.$$

Если F — знак рациональной функции, то имеем интегралы рациональных алгебраических выражений и, следовательно, в этом случае рассматриваемые интегралы вычисляются в конечном виде.

Примеры

57) $$\int\sqrt{1\pm\sin 2x}\,dx=\mp\sqrt{1\mp\sin 2x}$$

или

$$=\mp\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\mp x\right).$$

58) $$\int\frac{dx}{\sqrt{1\pm\cos 2x}}=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1\mp\cos 2x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1\mp\cos 2x}}$$

или $$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln g\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$ для верхнего знака,

или $$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$ для нижнего знака.

59) $$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-\cos 3x)^3}}=-\frac{\sin 3x}{6\sqrt{(1-\cos 3x)^3}}-\frac{1}{12\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos 3x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos 3x}}$$

или

$$=-\frac{1}{6\sqrt{2}}\cdot\frac{\cos\frac{3}{2}x}{\sin^3\frac{3}{2}x}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\operatorname{tg}\frac{3}{4}x.$$

60) $$\int\sqrt{\left(1-\sin\frac{2}{3}x\right)^5}dx=\frac{1}{5}\left(43-14\sin\frac{2}{3}x+3\sin^2\frac{2}{3}x\right)\sqrt{1+\sin\frac{2}{3}x}\cdot$$

или

$$=12\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)-8\sqrt{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)+$$
$$+\frac{12\sqrt{2}}{5}\cos^5\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right).$$

61) $$\int\frac{2\sqrt[4]{1+2\sin x}-\cos^2 x}{\sqrt{(1+2\sin x)^3}}\cos x\,dx=\frac{(1-\sin x)^2}{3\sqrt{1+2\sin x}}-\frac{4}{\sqrt[4]{1+2\sin x}}.$$

§ 14. Интегралы тригонометрических выражений, содержащих иррациональности вида $\sqrt[s]{(a+b\operatorname{tg}nx)^{\pm r}}$ и $\sqrt[s]{(a+b\operatorname{ctg}nx)^{\pm r}}$

I) Интегралы $\int[\sqrt[s]{\operatorname{tg}nx}]^{\pm r}dx$ и $\int[\sqrt[s]{\operatorname{ctg}nx}]^{\pm r}dx$ подстановками для первого $\sqrt[s]{\operatorname{tg}nx}=z$, $x=\frac{1}{n}\operatorname{arctg}z^s$, $dx=\frac{s}{n}\frac{z^{s-1}dz}{1+z^{2s}}$, и для второго

$$\sqrt[s]{\operatorname{ctg}nx}=z,\quad x=\frac{1}{n}\operatorname{arcctg}z^s,\quad dx=-\frac{s}{n}\frac{z^{s-1}dz}{1+z^{2s}}$$

приводятся к интегралам $\pm\frac{s}{n}\int\frac{z^{s\pm r-1}\,dz}{1+z^{2s}}$ от рациональных дифференциалов и теоретически, следовательно, всегда могут быть выражены в конечном виде через элементарные функции.

II) Интегралы $\int\left[\sqrt[s]{a+b\operatorname{tg} nx}\right]^{\pm r}dx$ и $\int\left[\sqrt[s]{a+b\operatorname{ctg} nx}\right]^{\pm r}dx$ подстановками $\sqrt[s]{a+b\operatorname{tg} nx}=z$ и $\sqrt[s]{a+b\operatorname{ctg} nx}=z$ также приводятся к рациональным формам

$$\pm\frac{bs}{n}\int\frac{z^{s\pm r-1}\,dz}{a^2+b^2-2az^s+z^{2s}}$$

и, следовательно, вычисляются в конечном виде.

III) Интегралы более общего вида

$$\int F\left\{\sin^2 x, \cos^2 x, \sec^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x,\right.$$
$$\left.\sqrt[q]{(a+b\operatorname{tg} x)^p},\ \sqrt[s]{(a+b\operatorname{tg} x)^r}, \ldots,\right\}dx$$

и

$$\int F\left\{\sin^2 x, \cos^2 x, \sec^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x,\right.$$
$$\left.\sqrt[q]{(a+b\operatorname{ctg} x)^p},\ \sqrt[s]{(a+b\operatorname{ctg} x)^r}, \ldots,\right\}dx,$$

для которых F — знак рациональной функции, подстановками $a+b\operatorname{tg} x=z^l$ и $a+b\operatorname{ctg} x=z^l$, где l — наименьшее кратное всех показателей $q, s, \ldots,$ приводятся к интегралам рациональных алгебраических выражений.

При этих подстановках имеем, для первого интеграла

$$\sin^2 x=\frac{(z^l-a)^2}{(z^l-a)^2+b^2},\quad \cos^2 x=\frac{b^2}{(z^l-a)^2+b^2},\quad \ldots,\quad \operatorname{tg} x=\frac{z^l-a}{b},\ \ldots,$$
$$\sqrt[q]{(a+b\operatorname{tg} x)^p}=z^{p\frac{l}{q}},\quad \ldots,\quad dx=\frac{blz^{l-1}\,dz}{(z^l-a)^2+b^2}$$

и для второго

$$\sin^2 x=\frac{b^2}{(z^l-a)^2+b^2},\quad \cos^2 x=\frac{(z^l-a)^2}{(z^l-a)^2+b^2},\ \ldots,\ dx=-\frac{blz^{l-1}\,dz}{(z^l-a)^2+b^2};$$

таким образом, интегрируемые выражения приводятся к рациональным алгебраическим формам и, следовательно, для интегралов получаем конечные выражения.

Вообще, интегралы этого вида, соответственно величине показателя l и сложности функции F, приводятся к интегралам сложных алгебраических выражений, но поскольку эти выражения являются рациональными, интегралы всё-таки теоретически могут быть выражены в конечном виде через тригонометрические, алгебраические и логарифмические функции.

Примеры

62) $$\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\ln(\sin x + \cos x - \sqrt{\sin 2x}) + \arcsin(\sin x - \cos x)\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\ln\sqrt{\frac{1-\sqrt{2\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x}{1+\sqrt{2\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x}} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x}\right\} \quad (\text{подст. } \sqrt{\operatorname{tg} x} = z).$$

63) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 5x}} = \frac{3}{20}\ln(\sqrt[3]{\cos^2 5x} + \sqrt[3]{\sin^2 5x}) +$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{10}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 5x} - 1}{\sqrt{3}} \quad (\text{подст. } \sqrt[3]{\operatorname{tg} 5x} = z).$$

64) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(4+3\operatorname{tg} 2x)^3}} = -\frac{3}{25\sqrt{4+3\operatorname{tg} 2x}} +$$
$$+ \frac{1}{250\sqrt{2}}\left\{13\ln\sqrt{\frac{3+\operatorname{tg} 2x+\sqrt{2(4+3\operatorname{tg} 2x)}}{3+\operatorname{tg} 2x-\sqrt{2(4+3\operatorname{tg} 2x)}}} + 9\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2(4+3\operatorname{tg} 2x)}}{1-3\operatorname{tg} 2x}\right\}.$$

65) $$\int \frac{3\operatorname{tg} x - \sqrt{4-3\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x\sqrt{(4-3\operatorname{tg} x)^3}}\, dx = \frac{2}{3}\left\{\frac{8-3\operatorname{tg} x}{\sqrt{4-3\operatorname{tg} x}} + \ln\sqrt{4-3\operatorname{tg} x}\right\}.$$

66) $$\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{(\sqrt{\operatorname{tg} x}-1)^2} = \frac{1}{1-\sqrt{\operatorname{tg} x}} + \ln(1-\sqrt{\operatorname{tg} x}) -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x}) - \frac{1}{2}\ln\sec x + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\sec x -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x} - \frac{1}{2}x.$$

§ 15. Интегралы тригонометрических выражений, содержащих иррациональность вида $\sqrt{\sin 2x}$

1) Так как

$$\sqrt{(\sin 2x)^{2n+1}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^{n+1}\sqrt{\operatorname{tg} x},$$
$$\frac{\sin x}{\sqrt{(\sin 2x)^{2n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}\right)^{n}\sqrt{\operatorname{tg} x},$$
$$\sqrt{(\sin 2x)^{2n+1}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^{n+1}\sqrt{\operatorname{ctg} x},$$
$$\frac{\cos x}{\sqrt{(\sin 2x)^{2n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}\right)^{n}\sqrt{\operatorname{ctg} x},$$

то интегралы

$$\int F\{\sin^2 x, \cos^2 x, \sec^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \sqrt{\operatorname{tg} x}, \sqrt{\operatorname{ctg} x}\} \times$$
$$\times [\sqrt{\sin 2x}]^{\pm(2n+1)}\sin^{\pm(2m+1)} x\, dx$$

и

$$\int F\left\{\sin^2 x, \cos^2 x, \sec^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \sqrt{\operatorname{tg} x}, \sqrt{\operatorname{ctg} x}\right\} \times \\ \times [\sqrt{\sin 2x}]^{\pm(2n+1)} \cos^{\pm(2m+1)} x\, dx,$$

если F — рациональная функция, подстановкой $\operatorname{tg} x = z^2$ или $\operatorname{ctg} x = z^2$ приводятся к интегралам алгебраических рациональных выражений и, следовательно, вычисляются в конечном виде.

II) Интегралы

$$\int [\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1} \sin^{2m+1} x\, dx \quad \text{и} \quad \int [\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1} \cos^{2m+1} x\, dx,$$

подстановкой $\sqrt{\operatorname{tg} x} = z$ для первого и $\sqrt{\operatorname{ctg} x} = z$ для второго, приводятся к интегралам

$$\pm 2^{n+1} \sqrt{2} \int \frac{z^{2(2m+n+2)}}{(1+z^4)^{m+n+2}} dz.$$

Подстановки, $\sqrt{\operatorname{ctg} x} = z$ для первого и $\sqrt{\operatorname{tg} x} = z$ для второго, приводят к интегралам того же вида

$$\mp 2^{n+1} \sqrt{2} \int \frac{z^{2(n+1)}}{(1+z^4)^{m+n+2}} dz.$$

Аналогично вычисляем также следующие интегралы:

$$\int \frac{[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}}{\sin^{2m+1} x} dx = 2^{n+1} \sqrt{2} \int z^{2(n-2m)} (1+z^4)^{m-n-1} dz \left(z = \sqrt{\operatorname{tg} x}\right),$$

$$\int \frac{[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}}{\cos^{2m+1} x} dx = \\ = -2^{n+1} \sqrt{2} \int z^{2(n-2m)} (1+z^4)^{m-n-1} dz \left(z = \sqrt{\operatorname{ctg} x}\right).$$

При $m \geqslant n+1$, выполняя интегрирование, имеем:

$$\int \frac{[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}}{\sin^{2m+1} x} dx = \\ = 2^{n+1} \sqrt{2 \operatorname{tg} x} \sum_{p=0}^{p=m-n-1} \binom{m-n-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{n-2m+2p} x}{2n-4m+1+4p}, \tag{395}$$

$$\int \frac{[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}}{\cos^{2m+1} x} dx = \\ = -2^{n+1} \sqrt{2 \operatorname{ctg} x} \sum_{p=0}^{p=m-n-1} \binom{m-n-1}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{n-2m+2p} x}{2n-4m+1+4p}. \tag{396}$$

При $m < n+1$ интегралы вычисляются по формулам § 10 гл. II.

III) $\displaystyle\int \frac{\sin^{2m+1} x}{[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}} dx = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{2}} \int z^{2(2m-n+1)}(1+z^4)^{n-m-1} dz \left(z = \sqrt{\operatorname{tg} x}\right),$

$$\int \frac{\cos^{2m+1} x}{[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}} dx =$$
$$= -\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{2}} \int z^{2(2m-n+1)}(1+z^4)^{n-m-1} dz \left(z = \sqrt{\operatorname{ctg} x}\right).$$

При $n \geqslant m+1$

$$\int \frac{\sin^{2m+1} x}{[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}} dx = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{2^{n-1}\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p=n-m-1} \binom{n-m-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2m-n+2p} x}{4m-2n+3+4p}, \quad (397)$$

$$\int \frac{\cos^{2m+1} x}{[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}} dx =$$
$$= -\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^3 x}}{2^{n-1}\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p=n-m-1} \binom{n-m-1}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2m-n+2p} x}{4m-2n+3+4p}, \quad (398)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2m+1} x [\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}} =$$
$$= -\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{2^{n-1}\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p=m+n} \binom{m+n}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2m+n-2p} x}{4m+2n+1-4p}, \quad (399)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2m+1} x [\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}} =$$
$$= \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{2^{n-1}\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p=m+n} \binom{m+n}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2m+n-2p} x}{4m+2n+1-4p}. \quad (400)$$

$$\int [\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1} \cos^{2m} x \sin x \, dx =$$
$$= 2^{n+1}\sqrt{2} \int \frac{z^{2(n+2)}}{(1+z^4)^{m+n+2}} dz \quad \left(z = \sqrt{\operatorname{tg} x}\right),$$

$$\int \sqrt{\sin 2x} \sin^{2m} x \cos x \, dx =$$
$$= -2^{n+1}\sqrt{2} \int \frac{z^{2(n+2)}}{(1+z^4)^{m+n+2}} dz \quad \left(z = \sqrt{\operatorname{ctg} x}\right).$$

$$\int \frac{\cos^{2m} x \sin x}{[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}} dx = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{2}} \int \frac{(1+z^4)^{n-m-1}}{z^{2(n-1)}} dz \quad \left(z = \sqrt{\operatorname{tg} x}\right),$$

$$\int \frac{\sin^{2m} x \cos x}{[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}} dx = -\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{2}} \int \frac{(1+z^4)^{n-m-1}}{z^{2(n-1)}} dz \quad \left(z = \sqrt{\operatorname{ctg} x}\right).$$

При $n \geqslant m+1$

$$\int \frac{\cos^{2m} x \sin x}{[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}}\,dx = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{2^{n-1}\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p=n-m-1} \binom{n-m-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p-n} x}{4p+3-2n}, \tag{401}$$

$$\int \frac{\sin^{2m} x \cos x}{[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}}\,dx = -\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^3 x}}{2^{n-1}\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p=n-m-1} \binom{n-m-1}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2p-n} x}{4p+3-2n}, \tag{402}$$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^{2m} x\,[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{2^{n-1}\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p=m+n-1} \binom{m+n-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p-n} x}{4p+3-2n}, \tag{403}$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^{2m} x\,[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}} = -\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x}}{2^{n-1}\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p=m+n-1} \binom{m+n-1}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2p-n} x}{4p+3-2n}. \tag{404}$$

Формулы теряют значение, когда m и n одновременно равны нулю, и в этом случае имеем интегралы примера 67.

$$\int \frac{\operatorname{tg}^{\pm k} x\,dx}{\sin^{2m+1} x\,[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}} = -\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{2^{n-1}\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p=m+n} \binom{m+n}{p} \frac{\operatorname{ctg}^{2m+n\mp k-2p} x}{4m+2n\mp 2k+1-4p}, \tag{405}$$

$$\int \frac{\operatorname{tg}^{\pm k} x\,dx}{\cos^{2m+1} x\,[\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{2^{n-1}\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p=m+n} \binom{m+n}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p\pm k-n} x}{4p\pm 2k-2n+1}. \tag{406}$$

IV) Интегралы

$$\int [\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1} \sin^{2m} x\,dx \quad \text{и} \quad \int [\sqrt{\sin 2x}]^{2n+1} \cos^{2m} x\,dx$$

той же подстановкой $\operatorname{tg} x = z$ приводятся к интегралам от биномиальных дифференциалов

$$\sqrt{2}^{\,2n+3} \int \frac{z^{4m+2n+2}\,dz}{(1+z^4)^{\frac{2m+2n+3}{2}}} \quad \text{и} \quad \sqrt{2}^{\,2n+2} \int \frac{z^{2n+2}\,dz}{(1+z^4)^{\frac{2m+2n+3}{2}}}.$$

Определяя условия интегрируемости для этих интегралов, видим, что для того, чтобы интегрирование могло быть выполнено, какие-либо из чисел

$$\frac{2m+2n+3}{2}, \quad \frac{4m+2n+3}{4} \quad \text{и} \quad -\frac{2n+3}{4}$$

для первого интеграла и

$$\frac{2m+2n+3}{2}, \quad \frac{2m+3}{4} \quad \text{и} \quad -\frac{4m+2n+3}{4}$$

для второго, должны быть целыми или равняться нулю. Это же явно невозможно для написанных дробей, поскольку числители их при всяких, как положительных, так и отрицательных, целых значениях m и n представляют нечётные, а знаменатели — чётные числа.

Таким образом, рассматриваемые интегралы для всяких целых m и n и для всякой комбинации знаков показателей $(2n+1)$ и $2m$ не вычисляются в конечном виде.

Примеры

67) a) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\,\{\ln(\sin x+\cos x-\sqrt{\sin 2x})+\arcsin(\sin x-\cos x)\},$$

b) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\,\{\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x})+\arcsin(\sin x-\cos x)\}.$$

68) $\int \sqrt{\sin 2x}\,\sin x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x\sqrt{\sin 2x}+$

$$+\frac{1}{4}\{\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x})+\arcsin(\sin x-\cos x)\}.$$

69) $\int (\cos x-\sin x)\sqrt{\sin 2x}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\{(\sin x+\cos x)\sqrt{\sin 2x}+\ln(\sin x+\cos x-\sqrt{\sin 2x})\}.$$

70) $\int \frac{\sin^7 x}{\sqrt{\sin^7 2x}}\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\operatorname{tg}^2 x-1\right)\sqrt{2\operatorname{tg} x}+$

$$+\frac{1}{16}\{\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x})+\arcsin(\sin x-\cos x)\}.$$

71) $\int \frac{\cos^7 x}{\sqrt{\sin^7 2x}}\,dx = \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^2 x\right)\sqrt{2\operatorname{ctg} x}+$

$$+\frac{1}{16}\{\ln(\sin x+\cos x-\sqrt{\sin 2x})+\arcsin(\sin x-\cos x)\}.$$

72) $\int \frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x}\,dx = -\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}.$

73) $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}} = \frac{\sqrt{2}}{5}(\operatorname{tg}^2 x+5)\sqrt{\operatorname{tg} x}.$

74) $$\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{\sin^3 2x}}=\frac{3-\operatorname{ctg}^2 x}{3\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ctg} x}}.$$

75) $$\int\frac{(\cos 2x-3\operatorname{tg} x)\cos^2 x}{(\sin^2 x-\sin 2x)\sqrt{\sin^5 2x}}\,dx=$$
$$=\frac{12-50\operatorname{tg} x-135\operatorname{tg}^2 x}{240\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}}+\frac{33}{64}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sqrt{2}-\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$$

§ 16. Интегралы тригонометрических выражений, содержащих иррациональность вида $\sqrt[s]{(\sin^m x\cos^n x)^{\pm r}}$ $(m \gtrless 0,\ n \gtrless 0)$

I) Представив интегралы

$$\int\left[\sqrt[s]{\sin^m x\cos^n x}\right]^{\pm r}dx \quad \text{и} \quad \int\sqrt[s]{\left(\frac{\sin^m x}{\cos^n x}\right)^{\pm r}}\,dx$$

в виде

$$\int\left[\sqrt[s]{\operatorname{tg}^m x\cos^{m+n} x}\right]^{\pm r}dx \quad \text{и} \quad \int\left[\sqrt[s]{\operatorname{tg}^m x\cos^{m-n} x}\right]^{\pm r}dx,$$

подстановкой

$$\operatorname{tg} x=z^s,\quad \cos x=(1+z^{2s})^{-\frac{1}{2}},\quad dx=\frac{sz^{s-1}\,dz}{1+z^{2s}}$$

приводим их к интегралам

$$\int\left[\sqrt[s]{\sin^m x\cos^n x}\right]^{\pm r}dx=s\int(1+z^{2s})^{\mp\frac{(m+n)r}{2s}-1}z^{s\pm rm-1}\,dz,$$
$$\int\sqrt[s]{\left(\frac{\sin^m x}{\cos^n x}\right)^{\pm r}}\,dx=s\int(1+z^{2s})^{\mp\frac{(m-n)r}{2s}-1}z^{s\pm rm-1}\,dz.$$

Рассматривая эти интегралы как интегралы от биномиальных дифференциалов, видим, что интегрирование для них выполняется в следующих случаях:

1) когда $\frac{s\pm rm}{2s}$ или $\frac{s\pm rn}{2s}$ являются целыми числами или равны нулю,

2) когда $\mp\frac{(m+n)r}{2s}$ для первого интеграла и $\mp\frac{(m-n)r}{2s}$ для второго представляют целые числа или нуль.

Первые два условия выполняются при $rm=\pm(2k+1)s$ и при $rn=\mp(2k+1)s$, где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, и в этих случаях имеем интегралы

$$\int\left[\sqrt[s]{\cos x}\right]^{\pm nr}\sin^{2k+1} x\,dx \quad \text{и} \quad \int\left[\sqrt[s]{\sin x}\right]^{\pm mr}\cos^{2k+1} x\,dx,$$

для которых выражения получены выше.

Последние условия выполняются при $m+n=2ks$ для первого интеграла и при $m-n=2ks$ для второго.

Таким образом, оставляя в стороне случай, когда рассматриваемые интегралы имеют более простой вид интегралов § 12, приходим к выводу, что интегрирование выполняется для них в тех случаях, когда $m+n$ для первого интеграла и $m-n$ для второго являются числами кратными $2s$.

Подстановка $\operatorname{tg} x = z^s$ приводит тогда и тот и другой интеграл к рациональной форме

$$s\int (1+z^{2s})^{\mp kr-1} z^{s\pm rm-1}\,dz,$$

где для первого интеграла $k=\frac{m+n}{2s}$ и для второго $k=\frac{m-n}{2s}$.

Так как рассматриваемые интегралы можно представить также в виде

$$\int \left[\sqrt[s]{\sin^{m+n} x \operatorname{ctg}^n x}\right]^{\pm r} dx \quad \text{и} \quad \int \left[\sqrt[s]{\sin^{n-m} x \operatorname{ctg}^n x}\right]^{\mp r} dx,$$

то при тех же условиях $m+n=2ks$ для первого интеграла и $m-n=2ks$ для второго, в равной мере допустима и подстановка $\operatorname{ctg} x = z^s$, которая приводит к интегралам рациональных алгебраических выражений того же вида.

$$\text{II)}\ \int \left[\sqrt[s]{\sin^m x \cos^n x}\right]^r dx = s\int \frac{z^{s+rm-1}\,dz}{(1+z^{2s})^{kr+1}} \quad (z=\sqrt[s]{\operatorname{tg} x})$$

$$\left(k=\frac{m+n}{2s} \text{ — целое число}\right).$$

Последний интеграл вычисляется приёмами § 12 гл. II.

$$\int \frac{dx}{\left[\sqrt[s]{\sin^m x \cos^n x}\right]^r} = s\left(\sqrt[s]{\operatorname{tg} x}\right)^{s-rm} \sum_{p=0}^{p=kr-1} \binom{kr-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p} x}{2ps+s-rm}$$

$$\left(k=\frac{m+n}{2s} \text{ — целое число}\right)$$

$$\int \sqrt[s]{\left(\frac{\sin^m x}{\cos^n x}\right)^r} dx = s\int \frac{z^{s+rm-1}\,dz}{(1+z^{2s})^{kr+1}} \quad (z=\sqrt[s]{\operatorname{tg} x}),$$

$$\left(k=\frac{m-n}{2s} \text{ — целое число или нуль}\right).$$

Если $m \geqslant n$, то последний интеграл вычисляется так же, как в предыдущем случае.

Если же $m<n$, то

$$\int \sqrt[s]{\left(\frac{\sin^m x}{\cos^n x}\right)^r} dx = s\left(\sqrt[s]{\operatorname{tg} x}\right)^{s+rm} \sum_{p=0}^{p=kr-1} \binom{kr-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p} x}{2ps+s+rm}$$

$$\left(k=\frac{n-m}{2s}\right),$$

$$\int \sqrt[s]{\left(\frac{\cos^n x}{\sin^m x}\right)^r} dx = s \int \frac{z^{s-rm-1}\, dz}{(1+z^{2s})^{kr+1}} \quad (z = \sqrt[s]{\operatorname{tg} x})$$

$$\left(k = \frac{n-m}{2s} - \text{целое число или нуль}\right).$$

Если $m > n$, то

$$\int \sqrt[s]{\left(\frac{\cos^n x}{\sin^m x}\right)^r} dx = s\,(\sqrt[s]{\operatorname{tg} x})^{s-rm} \sum_{p=0}^{p=kr-1} \binom{kr-1}{p} \frac{\operatorname{tg}^{2p} x}{2ps+s-rm}$$

$$\left(k = \frac{m-n}{2s}\right).$$

III) При $s=2$ рассматриваемые интегралы можно представить в следующем виде:

$$\int \left[\sqrt{\sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x}\,\right]^{\pm 1} dx \quad \text{и} \quad \int \sqrt{\left(\frac{\sin^{2m+1} x}{\cos^{2n+1} x}\right)^{\pm 1}}\, dx.$$

На основании предыдущего эти интегралы вычисляются в конечном виде, если для первого $m+n=2k-1$ и для второго $m-n=2k$.

Отсюда, конкретизируя условия интегрируемости по отношению к этим наиболее простым формам, приходим к следующему.

Интеграл $\int \left[\sqrt{\sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x}\,\right]^{\pm 1} dx$ выражается в конечном виде через элементарные функции и приводится подстановкой $\sqrt{\operatorname{tg} x} = z$ к рациональной алгебраической форме в том случае, если одно из чисел m и n является чётным, а другое нечётным.

Интеграл $\int \sqrt{\left(\frac{\sin^{2m+1} x}{\cos^{2n+1} x}\right)^{\pm 1}}\, dx$ — в том случае, если оба числа m и n являются одновременно или чётными или нечётными.

IV) Исходя из того, что квадрат всякой основной тригонометрической функции рационально выражается через $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, можем обобщить вопрос и распространить найденные условия интегрируемости на более общие виды интегралов.

Если F — знак рациональной функции, то всякий интеграл вида

$$\int F\Big\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \sec^2 x,\ \operatorname{cosec}^2 x,\ \sqrt[s]{\operatorname{tg} x},\ \sqrt[q]{\operatorname{tg} x}, \ldots,$$
$$\sqrt[s]{\operatorname{ctg} x},\ \sqrt[q]{\operatorname{ctg} x}, \ldots,\ \sqrt[s]{\sin^m x \cos^n x},\ \sqrt[q]{\sin^g x \cos^h x}, \ldots,$$
$$\sqrt[s]{\frac{\sin^m x}{\cos^n x}},\ \sqrt[q]{\frac{\sin^g x}{\cos^h x}}, \ldots,\Big\} dx$$

если только все показатели $m, n, g, h, \ldots$, удовлетворяют условиям

$$m+n = 2k_1 s, \quad g+h = 2k_2 q, \ldots,$$

для радикалов

$$\sqrt[s]{\sin^m x \cos^n x}, \quad \sqrt[q]{\sin^g x \cos^h x}, \ \ldots,$$

и

$$m-n=2l_1 s, \quad g-h=2l_2 q, \ \ldots,$$

для радикалов $\sqrt[s]{\dfrac{\sin^m x}{\cos^n x}}, \quad \sqrt[q]{\dfrac{\sin^g x}{\cos^h x}}, \ \ldots,$ где $k_1, \ k_2, \ \ldots$ $\ldots, l_1, \ l_2, \ \ldots$ — целые числа, выражается в конечном виде через элементарные функции. Подстановками $\operatorname{tg} x = z^t$ или $\operatorname{ctg} x = z^t$, где t — наименьшее кратное всех показателей $s, q, \ldots,$ интеграл приводится к рациональной алгебраической форме.

Примеры

76) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^5 x}}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}.$

77) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\sin^5 x}{\cos x}}\, dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} +$

$$+\frac{3}{4\sqrt{2}}\{\ln(\sin x + \cos x - \sqrt{\sin 2x}) + \arcsin(\sin x - \cos x)\}.$$

78) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{\cos^{14} x}}\, dx = \frac{3}{55}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x}\,(5\operatorname{tg}^2 x + 14).$

79) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^{13} x \cos^{11} x}} = \frac{4}{63}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^9 x}\,(9\operatorname{tg}^4 x - 126\operatorname{tg}^2 x - 7).$

80) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x - \sqrt{\sin 2x}}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}\, dx = -2\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{2}\ln\frac{1-\sin x}{\cos x} +$

$$+\sqrt{2}\{\ln(\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}) + \arcsin(\sin x - \cos x)\}.$$

81) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\sin^3 x \cos x} - 2\sin 2x}{\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\sin x \cos^5 x}}\, dx = 8\sqrt{\operatorname{ctg} x} + \ln\sin x +$

$$+2\sqrt{2}\{\ln(\sin x + \cos x - \sqrt{\sin 2x}) + \arcsin(\sin x - \cos x)\}.$$

82) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\dfrac{\sin x}{\cos^7 x}} - 3\operatorname{tg} x}{[\sqrt[3]{\sin x \cos^5 x}]^2}\, dx = \frac{3}{28}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}\,(2\operatorname{tg}^4 x + 7\operatorname{tg}^2 x + 14) -$

$$-\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x.$$

§ 17. Интегралы тригонометрических выражений, содержащих иррациональность вида $\sqrt{a^2\cos^2 x \pm b^2 \sin^2 x}$

I) Интегралы

α′) $\displaystyle\int F\left\{\sin x,\ \operatorname{cosec} x,\ \cos^2 x,\ \sec^2 x,\ \operatorname{tg}^2 x,\ \operatorname{ctg}^2 x,\right.$

$$\left.\sqrt{a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}\right\}\cos x\, dx$$

и

$$\beta') \quad \int F\left\{\cos x,\ \sec x,\ \sin^2 x,\ \operatorname{cosec}^2 x,\ \operatorname{tg}^2 x,\ \operatorname{ctg}^2 x,\right.$$
$$\left.\sqrt{a^2\cos^2 x \pm b^2 \sin^2 x}\right\}\sin x\,dx,$$

для которых F — знак рациональной функции, подстановками $\sin x = z$ для первого и $\cos x = z$ для второго приводятся к интегралам

$$\int F\left\{z,\ \frac{1}{z},\ 1-z^2,\ \frac{1}{1-z^2},\ \frac{z^2}{1-z^2},\ \frac{1-z^2}{z^2},\ \sqrt{a^2 \pm (b^2 \mp a^2)z^2}\right\}dz$$

и

$$-\int F\left\{z,\ \frac{1}{z},\ 1-z^2,\ \frac{1}{1-z^2},\ \frac{1-z^2}{z^2},\ \frac{z^2}{1-z^2},\ \sqrt{(a^2 \mp b^2)z^2 \pm b^2}\right\}dz,$$

и, следовательно, вообще выражаются в конечном виде элементарными функциями.

Это положение справедливо и в том случае, когда под корнем вместо a^2 имеется $(-a^2)$, т. е. для интегралов тех же видов α' и β', но содержащих радикал

$$\sqrt{-a^2\cos^2 x \pm b^2 \sin^8 x}.$$

При отрицательном знаке у коэффициентов a^2 и b^2 в случае $a^2 < b^2$ для первого интеграла и $a^2 > b^2$ для второго, имеем под знаком первого интеграла

$$\sqrt{-a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x} = \sqrt{(b^2-a^2)\cos^2 x - b^2} =$$
$$= \sqrt{-a^2-(b^2-a^2)\sin^2 x}$$

и второго

$$\sqrt{-a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x} = \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x - a^2} =$$
$$= \sqrt{-b^2-(a^2-b^2)\cos^2 x}.$$

При подстановках $\sin x = z$ и $\cos x = z$ радикалы принимают мнимую форму, но это обстоятельство не препятствует интегрированию. Представив радикалы в виде

$$i\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\sin^2 x} \quad \text{и} \quad i\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\cos^2 x},$$

и перейдя теми же подстановками к алгебраическим формам, для интегралов алгебраических выражений получаем результаты в мнимой форме, возвратившись же затем к прежней переменной x и к тригонометрическим функциям, снова приходим к прежним иррациональностям:

$$\sqrt{-a^2-(b^2-a^2)\sin^2 x} = \sqrt{-a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}$$

и

$$\sqrt{-b^2-(a^2-b^2)\cos^2 x}=\sqrt{-a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x}.$$

Интегралы, для которых под знаком F имеются радикалы

$$\sqrt{a^2\pm b^2\sin^2 x},\quad \sqrt{-a^2\pm b^2\sin^2 x},\quad \sqrt{a^2\pm b^2\cos^2 x}$$

или $\sqrt{-a^2\pm b^2\cos^2 x}$, представляют, очевидно, те же виды α') и β'), и приводятся к алгебраическим рациональным формам теми же подстановками.

Те же интегралы α') и β') приводятся к рациональным формам соответственно выбранными тригонометрическими подстановками, и этот приём большей частью даёт более простое вычисление интеграла, так как для вычисления требуется лишь одна подстановка и тригонометрические выражения вообще эластичнее в смысле преобразований.

Для интеграла α') при положительном знаке у a^2 имеем

$$\sqrt{a^2\cos^2 x^2\pm b^2\sin^2 x}=\sqrt{a^2-(a^2\mp b^2)\sin^2 x}.$$

Для нижнего знака и для верхнего, если $a^2>b^2$, пользуемся подстановкой $\sin x=\frac{a}{\sqrt{a^2\mp b^2}}\sin\varphi$ и для тригонометрических функций, находящихся под знаком интеграла, тогда имеем

$$\sin x=\frac{a\sin\varphi}{\sqrt{a^2\mp b^2}},\quad \operatorname{cosec} x=\frac{\sqrt{a^2\mp b^2}}{a\sin\varphi},\quad \cos^2 x=\frac{a^2\cos^2\varphi\mp b^2}{a^2\mp b^2},$$

$$\sec^2 x=\frac{a^2\mp b^2}{a^2\cos^2\varphi\mp b^2},\quad \operatorname{tg}^2 x=\frac{a^2\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi\mp b^2},\quad \operatorname{ctg}^2 x=\frac{a^2\cos^2\varphi\mp b^2}{a^2\sin^2\varphi},$$

$$\sqrt{a^2\cos^2 x\pm b^2\sin^2 x}=a\cos\varphi,\quad \cos x\,dx=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{a^2\mp b^2}}\,d\varphi.$$

Подставляя эти выражения, приходим к интегралу рационального тригонометрического выражения и по выполнении интегрирования возвращаемся для результата к прежней переменной x на основании равенств

$$\varphi=\arcsin\frac{\sqrt{a^2\mp b^2}}{a}\sin x,\quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{a^2\mp b^2}}{a}\sin x,$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{a}\sqrt{a^2\cos^2 x\pm b^2\sin^2 x},\ \ldots$$

Если при верхнем знаке имеем $a^2<b^2$, то новую переменную вводим при посредстве равенства $\sin x=\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{tg}\varphi$ и для

подстановки имеем

$$\sin x = \frac{a \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{b^2-a^2}}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a^2\operatorname{tg}\varphi}, \qquad \cos^2 x = \frac{b^2-a^2\sec^2\varphi}{b^2-a^2},$$

$$\sec^2 x = \frac{b^2-a^2}{b^2-a^2\sec^2\varphi}, \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{a^2\operatorname{tg}^2\varphi}{b^2-a^2\sec^2\varphi}, \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{b^2-a^2\sec^2\varphi}{a^2\operatorname{tg}^2\varphi},$$

$$\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = a\sec\varphi, \qquad \cos x\,dx = \frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\sec^2\varphi\,d\varphi.$$

Для возвращения затем к прежней переменной x имеем равенства

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\sin x\right), \quad \sin\varphi = \frac{1}{a}\sin x\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}, \ \ldots$$

При отрицательном знаке у a^2 для интеграла α') имеем

$$\sqrt{-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x} = \sqrt{-a^2 + (a^2 \pm b^2)\sin^2 x}.$$

Для верхнего знака и для нижнего в том случае, когда $a^2 > b^2$, пользуемся в целях рационализации подстановкой

$$\sin x = \frac{a\sec\varphi}{\sqrt{a^2\pm b^2}}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{\sqrt{a^2\pm b^2}}{a\sec\varphi}, \quad \cos^2 x = \frac{\pm b^2 - a^2\operatorname{tg}^2\varphi}{a^2\pm b^2},$$

$$\sec^2 x = \frac{a^2\pm b^2}{\pm b^2 - a^2\operatorname{tg}^2\varphi}, \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{a^2\sec^2\varphi}{\pm b^2 - a^2\operatorname{tg}^2\varphi},$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{\pm b^2 - a^2\operatorname{tg}^2\varphi}{a^2\sec^2\varphi},$$

$$\sqrt{-a^2 \pm b^2\sin^2 x} = a\operatorname{tg}\varphi, \quad \cos x\,dx = \frac{a}{\sqrt{a^2\pm b^2}}\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi,$$

и к прежней переменной по выполнении интегрирования возвращаемся при посредстве равенств

$$\varphi = \operatorname{arcsec}\left(\frac{\sqrt{a^2\pm b^2}}{a}\sin x\right), \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}}{\sqrt{a^2\pm b^2}\sin x},$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2\pm b^2}\sin x}, \ \ldots$$

Если для нижнего знака имеем $a^2 < b^2$, то

$$\sqrt{-a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x} = \sqrt{(b^2-a^2)\cos^2 x - b^2} =$$
$$= \sqrt{-a^2 - (b^2-a^2)\sin^2 x} = i\sqrt{a^2 + (b^2-a^2)\sin^2 x},$$

и в целях рационализации пользуемся подстановкой

$$\sin x = \frac{a \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{b^2-a^2}}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a \operatorname{tg} \varphi}, \qquad \cos^2 x = \frac{b^2 - a^2 \sec^2 \varphi}{b^2-a^2},$$

$$\sec^2 x = \frac{b^2-a^2}{b^2-a^2 \sec^2 \varphi}, \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{b^2-a^2 \sec^2 \varphi}, \qquad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{b^2-a^2 \sec^2 \varphi}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

$$\sqrt{-a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x} = a i \sec \varphi, \qquad \cos x\, dx = \frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}} \sec^2 \varphi\, d\varphi.$$

Для возвращения к прежней переменной, имеем равенства

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a} \sin x\right), \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{b^2-a^2} \sin x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}, \ \ldots$$

Мнимый множитель перед корнем, введённый в процесс интегрирования, в окончательном результате при переходе к прежней переменной x устраняется. Для тригонометрических выражений, получающихся в результате интегрирования, он входит под знак корня и вместо $\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ приходим обратно к $\sqrt{-a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x} = \sqrt{(b^2-a^2) \cos^2 x - b^2}$, от логарифмических же мнимых функций переходим к действительным круговым, пользуясь формулами (24) и (25).

В интеграле β') имеем иррациональности вида

$$\sqrt{a^2 \cos^2 x \pm b^2 \sin^2 x} = \sqrt{(a^2 \mp b^2) \cos^2 x \pm b^2}$$

и

$$\sqrt{-a^2 \cos^2 x \pm b^2 \sin^2 x} = \sqrt{(-a^2 \mp b^2) \cos^2 x \pm b^2}.$$

В первом случае, т. е. при положительном знаке у a^2, пользуемся подстановками

$$\cos x = \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{tg} \varphi \text{ при верхнем знаке, если } a^2 > b^2,$$

$$\cos x = \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}} \sin \varphi \text{ при верхнем знаке, если } a^2 < b^2,$$

$$\cos x = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sec \varphi \text{ при нижнем знаке;}$$

во втором случае при отрицательном знаке у a^2,

$$\cos x = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \varphi \text{ при верхнем знаке,}$$

$$\cos x = \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}} \sec \varphi \text{ при нижнем знаке, если } a^2 < b^2,$$

$$\cos x = \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{tg} \varphi \text{ при нижнем знаке, если } a^2 > b^2.$$

В последнем случае вводится в процесс интегрирования мнимая единица, которая так же, как и в аналогичном случае для интеграла α'), в окончательном результате устраняется.

Аналогичными подстановками, очевидно, приводятся к рациональной тригонометрической форме интегралы тех же видов α') и β'), содержащие радикалы:

$$\sqrt{a^2 \pm b^2\sin^2 x},\quad \sqrt{-a^2 \pm b^2\sin^2 x},$$
$$\sqrt{a^2 \pm b^2\cos^2 x}\quad \text{или}\quad \sqrt{-a^2 \pm b^2\cos^2 x}.$$

II) Пользуясь соответствующими тригонометрическими подстановками и затем формулами § 2 и § 3, или же подстановкой $\sin x = z$ и затем формулами (154) и (155), получаем:

$$\int \sqrt{(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{2n+1}}\cos x\,dx = \frac{\sin x\sqrt{a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}}{2(n+1)}\times$$
$$\times\left\{(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^n + \frac{2n+1}{2n}a^2(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{n-1} + \right.$$
$$+\frac{(2n+1)(2n-1)}{2n(2n-2)}a^4(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{n-2} + \ldots$$
$$\left.\ldots + \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 5\cdot 3}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\cdot a^{2n}\right\} + A, \qquad (407)$$

где

$$A = \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}{(2n+2)2n\ldots 4\cdot 2}\frac{a^{2(n+1)}}{\sqrt{a^2 \mp b^2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2\mp b^2}}{a}\sin x\right)$$

для верхнего знака, если $a^2 > b^2$, и для нижнего знака; а для верхнего знака, если $a^2 < b^2$,

$$A = \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}{(2n+2)2n\ldots 4\cdot 2}\frac{a^{2(n+1)}}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left(\sqrt{b^2-a^2}\sin x + \right.$$
$$\left. + \sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\right).$$

Точно так же можем получить выражение и для интеграла

$$\int \sqrt{(-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{2n+1}}\cos x\,dx.$$

При отрицательном знаке перед a^2 и b^2, если $a^2 < b^2$, представив радикал в виде $i^{2n+1}\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ и пользуясь предыдущим результатом и формулой (24) для логарифмической функции, получаем:

$$\int \sqrt{(-a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x)^{2n+1}}\cos x\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^n \sin x\sqrt{-a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}}{2(n+1)}\Big\{(a^2\cos^2 x + b\sin^2 x)^n +$$

$$+\frac{2n+1}{2n}a^2(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^{n-1} +$$

$$+\frac{(2n+1)(2n-1)}{2n(2n-2)}a^4(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 5\cdot 3}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}a^{2n}\Big\} +$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}{(2n+2)2n\ldots 4\cdot 2}\frac{a^{2(n+1)}}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{\sqrt{-a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}}, \tag{408}$$

$$\int \sqrt{(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{2n+1}}\sin x\,dx =$$

$$= -\frac{\cos x\sqrt{a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}}{2(n+1)}\Big\{(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^n \pm$$

$$\pm\frac{2n+1}{2n}b^2(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{n-1} +$$

$$+\frac{(2n+1)(2n-1)}{2n(2n-2)}b^4(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{n-2} \pm \ldots$$

$$\ldots + (\pm 1)^n\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 5\cdot 3}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}b^{2n}\Big\} + A, \tag{409}$$

где

$$A = (\pm 1)^{n+1}\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}{(2n+2)2n\ldots 4\cdot 2}\frac{b^{2(n+1)}}{\sqrt{a^2\mp b^2}}\ln\left(\sqrt{a^2\mp b^2}\cos x - \right.$$

$$\left. - \sqrt{a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}\right)$$

для верхнего знака, если $a^2 > b^2$, и для нижнего знака, и

$$A = (\pm 1)^{n+1}\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}{(2n+2)2n\ldots 4\cdot 2}\frac{b^{2(n+1)}}{\sqrt{b^2-a^2}}\arccos\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\cos x\right)$$

для верхнего знака, если $a^2 < b^2$.

Аналогичные выражения получаются также для интеграла

$$\int \sqrt{(-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{2n+1}}\sin x\,dx.$$

При отрицательном знаке перед a^2 и b^2, если $a^2 > b^2$, получаем так же, как и в предыдущем случае,

$$\int \sqrt{(-a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x)^{2n+1}}\sin x\,dx =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{\cos x\sqrt{-a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}}{2(n+1)}\Big\{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^n +$$

$$+\frac{2n+1}{2n}b^2(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^{n-1} +$$

$$+\frac{(2n+1)(2n-1)}{2n(2n-2)}b^4(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 5\cdot 3}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}b^{2n}\Big\} +$$

$$+ (-1)^n\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}{(2n+2)\,2n\ldots 4\cdot 2}\times$$

$$\times\frac{b^{2(n+1)}}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}\cos x}{\sqrt{-a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}}, \quad (410)$$

III) $$\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{2n+1}}} =$$

$$= \frac{\sin x}{(2n-1)\,a^{2n}\sqrt{(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{2n-1}}}\Big\{a^{2(n-1)} +$$

$$+\frac{2n-2}{2n-3}a^{2(n-2)}(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x) +$$

$$+\frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}a^{2(n-3)}(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{n-1}\Big\} \quad (n \geqslant 1), \quad (411)$$

$$\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{(-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin x)^{2n+1}}} =$$

$$= \frac{-\sin x}{(2n-1)a^{2n}\sqrt{(-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{2n-1}}}\Big\{a^{2(n-1)} +$$

$$+\frac{2n-2}{2n-3}a^{2(n-2)}(-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x) +$$

$$+\frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}a^{2(n-3)}(-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^2 + \cdots$$

$$\ldots + \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}(-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{n-1}\Big\} \quad (412)$$

$$(n \geqslant 1)$$

[формула (156)].

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{2n+1}}} = \frac{\mp\cos x}{(2n-1)\,b^{2n}\sqrt{(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{2n-1}}}\Big\{ b^{2(n-1)} \pm$$

$$\pm \frac{2n-2}{2n-3}\, b^{2(n-2)} (a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x) +$$

$$+ \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}\, b^{2(n-3)} (a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^2 \pm \cdots$$

$$\ldots \pm (\pm 1)^{n-1} \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1} (a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{n-1}\Big\} \quad (413)$$

$$(n \geqslant 1),$$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{(-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{2n+1}}} =$$

$$= \frac{\mp\cos x}{(2n-1)\,b^{2n}\sqrt{-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}}\Big\{ b^{2(n-1)} \pm$$

$$\pm \frac{2n-2}{2n-3}\, b^{2(n-2)} (-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x) +$$

$$+ \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}\, b^{2(n-3)} (-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1} (-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{n-1}\Big\} \quad (414)$$

$$(n \geqslant 1).$$

Формулы (411) — (414) теряют значение при $n=0$. В этом случае имеем

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \mp b^2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a}\sin x\right)$$

для верхнего знака, если $a^2 > b^2$, и для нижнего знака, и

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left(\sqrt{b^2-a^2}\sin x + \sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\right)$$

для верхнего знака, если $a^2 < b^2$,

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm b^2}} \ln\left(\sqrt{a^2 \pm b^2}\sin x + \sqrt{-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}\right)$$

для верхнего знака, и для нижнего, если $a^2 > b^2$, и

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{\sqrt{c-a^2\,\mathrm{os}^2 x - b^2\sin^2 x}}$$

для нижнего знака, если $a^2 < b^2$,

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 \mp b^2}} \ln\left(\sqrt{a^2 \mp b^2}\cos x - \sqrt{a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}\right)$$

для верхнего знака, если $a^2 > b^2$, и для нижнего знака, и

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arccos\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\cos x\right)$$

для верхнего знака, если $a^2 < b^2$,

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{-a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \arccos\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\cos x\right)$$

для верхнего знака,

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left(\sqrt{b^2-a^2}\cos x - \sqrt{-a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}\right)$$

для нижнего знака, если $a^2 < b^2$, и

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{a^2-b^2}\cos x}{\sqrt{-a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}}$$

для нижнего знака, если $a^2 > b^2$.

IV) Представив интеграл $\int \left[\sqrt{a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}\right]^{\pm(2n+1)} dx$ в виде

$$(\sqrt{2})^{\pm(2n+1)} \int \left[\sqrt{(a^2 \pm b^2) + (a^2 \mp b^2)\cos 2x}\right]^{\pm(2n+1)} dx,$$

на основании § 13 приходим к заключению, что если только a или b не равны нулю, интеграл не вычисляется в конечном виде. К тому же заключению приходим и при отрицательном знаке у a^2. Обозначив $\frac{a^2 \mp b^2}{a^2}$ через k^2, можем представить интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}} \quad \text{и} \quad \int \sqrt{a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}\,dx$$

в виде

$$\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \quad \text{и} \quad a\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} - ak^2 \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},$$

и, следовательно, первый интеграл представляет эллиптический интеграл 1-го вида, а второй распадается на два эллиптических интеграла, 1-го и 2-го вида.

Так как при n нечётном

$$\sin nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin x \left\{1 - \frac{n^2-1^2}{2!}\cos^2 x + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\cos^4 x - \ldots\right\} = \sin x f(\cos^2 x),$$

$$\cos nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \left\{\cos x - \frac{n^2-1^2}{3!}\cos^3 x + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\cos^5 x - \ldots\right\} = \cos x f(\cos^2 x),$$

и при n чётном

$$\sin nx = (-1)^{\frac{n}{2}} n \sin x \left\{-\cos x + \frac{n^2-2^2}{3!}\cos^3 x - \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\cos^5 x + \ldots\right\} = \sin x \cos x f(\cos^2 x),$$

$$\cos nx = (-1)^{\frac{n}{2}} \left\{1 - \frac{n^2}{2!}\cos^2 x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\cos^4 x - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\cos^6 x + \ldots\right\} = f(\cos^2 x),$$

где f — рациональная функция, то вычисляется также в конечном виде всякий интеграл вида α') и β') в следующих случаях:

1) если вместо $\sin x$ и $\cos x$ за знаком функции F соответственно имеются $\sin(2n+1)x$ и $\cos(2n+1)x$;

2) если вместо $\cos x$ для интеграла α') или $\sin x$ для интеграла β') за знаком функции F стоит $\sin 2nx$.

Интегралы вида α') и β'), в которых вместо $\cos x$ и $\sin x$ за знаком функции F имеется $\cos 2nx$, во всяком случае теми приёмами, которые указаны для этих интегралов, не вычисляются.

V) Более сложный в смысле иррациональности интеграл

$$\int F\left\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \operatorname{tg}^2 x,\ \ldots,\ \sqrt[q]{(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^p},\ \sqrt[s]{(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^r},\ \ldots,\right\}\sin 2nx\,dx,$$

для которого F означает рациональную функцию, легко приводится к рациональной форме и, следовательно, может быть вычислен в конечном виде.

Полагая $a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x = z^l$, где l — наименьшее кратное всех показателей q, s, ..., имеем

$$\sin^2 x = \frac{a^2-z^l}{a^2 \mp b^2},\quad \cos^2 x = \frac{z^l \mp b^2}{a^2 \mp b^2},\quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{a^2-z^l}{z^l \mp b^2},\ \ldots,$$

$$\sqrt[q]{(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^p} = z^{p\frac{l}{q}},\quad \sqrt[s]{(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^r} = z^{r\frac{l}{s}},\ \ldots,$$

$$\sin 2nx\,dx = f(\cos^2 x)\,2\sin x\cos x\,dx = \\ = -f\left(\frac{z^l \mp b^2}{a^2 \mp b^2}\right)\frac{l}{a^2 \mp b^2} z^{l-1}\,dz,$$

и подставляя эти выражения, приводим интеграл в рациональной алгебраической форме.

Знак перед a^2, разумеется, может быть и отрицательным, так что под знаком интеграла иррациональность может быть всех видов

$$\sqrt{a^2 \pm b^2\sin^2 x}\,, \quad \sqrt{b^2\sin^2 x - a^2}\,,$$
$$\sqrt{a^2 \pm b^2\cos^2 x} \quad \text{и} \quad \sqrt{b^2\cos^2 x - a^2}\,.$$

Для простейшего интеграла рассматриваемого вида имеем

$$\int\left[\sqrt[s]{a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}\right]^{\pm r}\sin 2x\,dx = \\ = -\frac{1}{a^2 \mp b^2}\left[\sqrt[s]{a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x}\right]^{s \pm r}.$$

Так как

$$\sin 2nx = (-1)^n\,2n\sin x\cos x \times \\ \times\left\{-1 + \sum_{k=1}^{k=n-1}(-1)^{k-1}2^{2k}\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\dots(n^2-k^2)}{(2k+1)!}\cos^{2k} x\right\},$$

то для интеграла $\int\sqrt[s]{(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{\pm r}}\sin 2n\,x\,dx$ подстановкой $\sqrt[s]{a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x} = z$ легко получаем формулу

$$\int\sqrt[s]{(a^2\cos^2 x \pm b^2\sin^2 x)^{\pm r}}\sin 2n\,x\,dx = (-1)^{n+1}\frac{ns}{a^2 \mp b^2}\left\{-\frac{z^{s \pm r}}{s \pm r} + \right. \\ + \sum_{k=1}^{k=n-1}(-1)^{k-1}2^{2k}\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-k^2)}{(2k+1)!}\times \\ \left.\times\int\left(\frac{z^s \mp b^2}{a^2 \mp b^2}\right)^k z^{s \pm r-1}\,dz\right\},$$

посредством которой вопрос интегрирования сводится к вычислению элементарных интегралов вида $\int z^{\pm n}dz$.

Принимая в полученной формуле $a^2 = 1$, $b^2 = 0$, заменяя r на $\frac{r}{2}$, и возвращаясь по выполнении интегрирования к прежней переменной x, получаем:

$$\int(\sqrt[s]{\cos x})^{\pm r}\sin 2nx\,dx = (-1)^{n+2}\,2ns(\sqrt[s]{\cos x})^{2s \pm r}\left\{-\frac{1}{2s \pm r} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{k=n-1}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-k^2)}{(2k+1)!\,[2s(k+1) \pm r]}\cos^{2k} x\right\}.$$

Заменяя в полученной формуле x на $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, получаем:

$$\int (\sqrt[s]{\sin x})^{\pm r} \sin 2nx\, dx = 2ns(\sqrt[s]{\sin x})^{2s\pm r} \left\{\frac{1}{2s \pm r} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{k=n-1} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-k^2)}{(2k+1)!\,[2s(k+1)\pm r]} \sin^{2k} x\right\}.$$

VI) $$\int \frac{dx}{\cos x\sqrt{a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + c\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(c\cdot \operatorname{tg} x + b + \sqrt{c}\sqrt{a + 2b\operatorname{tg} x + c\cdot \operatorname{tg}^2 x}), \text{ если } c > 0 \text{ и}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{-c\cdot \operatorname{tg} x - b}{\sqrt{b^2-ac}}, \quad \text{если } c < 0. \qquad (415)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + c\sin^2 x}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a}} \ln(a\operatorname{ctg} x + b + \sqrt{a}\sqrt{a\operatorname{ctg}^2 x + 2b\operatorname{ctg} x + c}), \text{ если } a > 0,$$

$$\text{и } = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-a\operatorname{ctg} x - b}{\sqrt{b^2-ac}}, \quad \text{если } a < 0. \qquad (416)$$

Примеры

83) $$\int \sqrt{(2\cos^2 x + 1)^5} \sin x\, dx = \frac{1}{48}\cos x(32\cos^4 x + 52\cos^2 x + 33)\times$$
$$\times \sqrt{2\cos^2 x + 1} - \frac{5}{16\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2\cos^2 x + 1}).$$

84) $$\int \sqrt{(5\cos^2 x + \sin^2 x)^5} \cos x\, dx = \frac{1}{48}\sin x(825 + 520\sin^2 x + 128\sin^4 x)\times$$
$$\times \sqrt{5\cos^2 x + \sin^2 x} + \frac{625}{32}\arcsin \frac{2\sin x}{\sqrt{5}},$$

85) $$\int \sqrt{(-\cos^2 x - 5\sin^2 x)^3} \cos x\, dx = \int \sqrt{(4\cos^2 x - 5)^3}\cos x\, dx =$$
$$= -\frac{1}{8}\sin x(8\sin^2 x + 5)\sqrt{4\cos^2 x - 5} +$$
$$+ \frac{3}{16}\operatorname{arctg} \frac{2\sin x}{\sqrt{4\cos^2 x - 5}} \quad \left(\text{подст. } \sin x = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\right).$$

86) $$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{(5\cos^2 x - 2\sin^2 x)^7}} = \frac{\cos x(15 - 70\cos^2 x + 98\cos^4 x)}{30\sqrt{(5\cos^2 x - 2\sin^2 x)^5}}.$$

87) $$\int \frac{\cos 2x\cos x}{\sqrt{(2-5\sin^2 x)^3}}\, dx = \frac{\sin x}{10\sqrt{2-5\sin^2 x}} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\sin x\right).$$

88) $$\int \frac{\sin 5x\, dx}{\sqrt{(5\cos^2 x + 9\sin^2 x)^5}} = \frac{20}{243}\,\frac{\cos x(108 - 59\cos^2 x)}{\sqrt{(5\cos^2 x + 9\sin^2 x)^3}} +$$
$$+ \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2}{3}\cos x\right) \quad \left(\text{подст. } \cos x = \frac{3}{2}\sin\varphi\right).$$

89) $$\int \frac{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x}{\sqrt{(4\sin^2 x - 5)^5}}\,dx = \frac{1 + 7\cos^2 x + 4\cos^4 x}{2\sqrt{(4\sin^2 x - 5)^3}}.$$

90) $$\int \frac{\sin x \cos 2x - 2(\sin x - 1)\cos^3 x}{\sin^2 x \sqrt{\sin^2 x - 5}}\,dx = 2\sqrt{\sin^2 x - 5} + \frac{2}{5}\frac{\sqrt{\sin^2 x - 5}}{\sin x} + 2\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x - 5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}\cos x}{\sqrt{\sin^2 x - 5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arcsec}\frac{\sin x}{\sqrt{5}} - \ln\frac{\sin x + \sqrt{\sin^2 x - 5}}{\sin x - \sqrt{\sin^2 x - 5}}.$$

91) $$\int \frac{\cos 3x\,dx}{\sqrt{3\cos^2 x - \sin^2 x} - \sqrt{8\cos^2 x - 1}} = -\frac{1}{2}\sin x\left(\sqrt{3\cos^2 x - \sin^2 x} + \sqrt{8\cos^2 x - 1}\right) + \frac{3}{4}\arcsin\frac{2\sin x}{\sqrt{3}} + \frac{5}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{8}\sin x}{\sqrt{7}} - \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{\sqrt{3\cos^2 x - \sin^2 x}} - \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{\sqrt{8\cos^2 x - 1}}.$$

92) $$\int \sqrt[5]{(2 - 3\sin^2 x)^3}\,\sin 4x\,dx = \frac{5}{936}(48\sin^2 x - 19)\sqrt[5]{(2 - 3\sin^2 x)^8}.$$

§ 18. Интегралы тригонометрических выражений, содержащих иррациональность вида $\sqrt{\cos 2x}$

I) Так как $\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x} = \sqrt{2\cos^2 x - 1} = \sqrt{1 - 2\sin^2 x}$, то интегралы

$$\int F\left\{\sin x,\ \operatorname{cosec} x,\ \cos^2 x,\ \sec^2 x,\ \operatorname{tg}^2 x,\ \operatorname{ctg}^2 x,\ \sqrt{\cos 2x}\right\}\cos x\,dx$$

и

$$\int F\left\{\cos x,\ \sec x,\ \sin^2 x,\ \operatorname{cosec}^2 x,\ \operatorname{tg}^2 x,\ \operatorname{ctg}^2 x,\ \sqrt{\cos 2x}\right\}\sin x\,dx$$

представляют частный случай интегралов α') и β'), рассмотренных в предыдущем параграфе, и, следовательно, также вычисляются в конечном виде. Для вычисления, очевидно, можно пользоваться теми же подстановками.

II) $$\int (\sqrt{\cos 2x})^{2n+1}\cos x\,dx = \frac{\sin x\sqrt{\cos 2x}}{2(n+1)}\left\{\cos^n 2x + \frac{2n+1}{2n}\cos^{n-1} 2x + \frac{(2n+1)(2n-1)}{2n(2n-2)}\cos^{n-2} 2x + \cdots + \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\right\} + \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}{(2n+2)2n\cdots 4\cdot 2}\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x), \qquad (417)$$

$$\int (\sqrt{\cos 2x})^{2n+1} \sin x\, dx = -\frac{\cos x \sqrt{\cos 2x}}{2(n+1)} \left\{ \cos^n 2x - \frac{2n+1}{2n} \cos^{n-1} 2x + \right.$$
$$+ \frac{(2n+1)(2n-1)}{2n(2n-2)} \cos^{n-2} 2x - \cdots + (-1)^n \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2} \Big\} +$$
$$+ (-1)^n \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}{(2n+2)2n\cdots 4\cdot 2} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln (\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}), \quad (418)$$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{(\sqrt{\cos 2x})^{2n+1}} = \frac{\sin x}{(2n-1)(\sqrt{\cos 2x})^{2n-1}} \left\{ 1 + \frac{2n-2}{2n-3} \cos 2x + \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)} \cos^2 2x + \cdots + \frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1} \cos^{n-1} 2x \right\}, \quad (419)$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{(\sqrt{\cos 2x})^{2n+1}} = -\frac{\cos x}{(2n-1)(\sqrt{\cos 2x})^{2n-1}} \left\{ 1 - \frac{2n-2}{2n-3} \cos 2x + \right.$$
$$+ \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)} \operatorname{soc}^2 2x - \cdots$$
$$\left. \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1} \cos^{n-1} 2x \right\}. \quad (420)$$

Формулы теряют значение при $n=0$ и для соответствующих интегралов непосредственно получаем:

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\cos 2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin (\sqrt{2} \sin x)$$

и

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos 2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln (\sqrt{2}\cos x - \sqrt{\cos 2x}).$$

III) Интегралы

$$\int (\sqrt{\cos 2x})^{2n+1} \cos^{2k+1} x\, dx$$

и

$$\int (\sqrt{\cos 2x})^{2n+1} \sin^{2k} x \cos x\, dx$$

подстановкой $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi$, при которой $\sqrt{\cos 2x} = \cos \varphi$, $\cos x\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi\, d\varphi$, приводятся к интегралам

$$\frac{1}{2^k \sqrt{2}} \int (1 + \cos^2 \varphi)^k \cos^{2(n+1)} \varphi\, d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2^k \sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p=k} \binom{k}{p} \int \cos^{2(p+n+1)} \varphi\, d\varphi$$

и

$$\frac{1}{2^k\sqrt{2}}\int(1-\cos^2\varphi)^k\cos^{2(n+1)}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2^k\sqrt{2}}\sum_{p=0}^{p=k}(-1)^p\binom{k}{p}\int\cos^{2(p+n+1)}\varphi\,d\varphi,$$

которые вычисляются приёмами § 2.

Для обратной подстановки имеем

$$\sin\varphi=\sqrt{2}\sin x,\quad \cos\varphi=\sqrt{\cos 2x},\quad \varphi=\arcsin(\sqrt{2}\sin x).$$

Для вычисления интегралов

$$\int(\sqrt{\cos 2x})^{2n+1}\sin^{2k+1}x\,dx$$

и

$$\int(\sqrt{\cos 2x})^{2n+1}\cos^{2k}x\sin x\,dx$$

можно воспользоваться подстановкой $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sec\varphi$.

Пользуясь же подстановкой

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi,$$

при которой $\sqrt{\cos 2x}=i\cos\varphi$,

$$\sin x\,dx=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi\,d\varphi,$$

приходим к тем же интегралам, как и при вычислении двух предыдущих интегралов

$$\frac{(-1)^{n+1}i}{2^k\sqrt{2}}\int(1+\cos^2\varphi)^k\cos^{2(n+1)}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}i}{2^k\sqrt{2}}\sum_{p=0}^{p=k}\binom{k}{p}\int\cos^{2(p+n+1)}\varphi\,d\varphi,$$

и

$$\frac{(-1)^{n+1}i}{2^k\sqrt{2}}\int(1-\cos^2\varphi)^k\cos^{2(n+1)}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}i}{2^k\sqrt{2}}\sum_{p=0}^{p=k}(-1)^p\binom{k}{p}\int\cos^{2(p+n+1)}\varphi\,d\varphi.$$

Для обратной подстановки имеем:

$$\sin\varphi=\sqrt{2}\cos x, \quad i\cos\varphi=\sqrt{\cos 2x},$$

$$i\varphi=i\arcsin(\sqrt{2}\cos x)=i\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{1-2\cos^2 x}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}}$$

или

$$=\ln(\sqrt{2}\cos x-\sqrt{\cos 2x})=-\ln(\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}),$$

так что для результата интегрирования при переходе к прежней переменной возвращаемся к вещественному виду.

Полагая в полученных формулах $k=0$ и пользуясь формулой (224), получаем:

$$\int(\sqrt{\cos 2x})^{2n+1}\cos x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2^{2n+2}\sqrt{2}}\left\{\binom{2n+2}{n+1}\varphi+\sum_{p=0}^{p=n}\binom{2n+2}{p}\frac{\sin 2(n+1-p)\varphi}{n+1-p}\right\},$$

$$\int(\sqrt{\cos 2x})^{2n+1}\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}i}{2^{2n+2}\sqrt{2}}\left\{\binom{2n+2}{n+1}\varphi+\sum_{p=0}^{p=n}\binom{2n+2}{p}\frac{\sin 2(n+1-p)\varphi}{n+1-p}\right\}.$$

IV) Точно так же, как в предыдущем случае, пользуясь подстановками $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi$ для первых двух интегралов и $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi$ для последних двух, получаем:

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{\cos^{2k+1}x\,dx}{(\sqrt{\cos 2x})^{2n+1}}=\\&\qquad=\frac{1}{2^k\sqrt{2}}\sum_{p=0}^{p=k}\binom{k}{p}\int\cos^{2(p-n)}\varphi\,d\varphi,\\&\int\frac{\sin^{2k}x\cos x\,dx}{(\sqrt{\cos 2x})^{2n+1}}=\\&=\frac{1}{2^k\sqrt{2}}\sum_{p=0}^{p=k}(-1)^p\binom{k}{p}\int\cos^{2(p-n)}\varphi\,d\varphi.\end{aligned}\right\}\ \text{где}\ \varphi=\arcsin(\sqrt{2}\sin x).$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\sin^{2k+1} x\,dx}{(\sqrt{\cos 2x})^{2n+1}} = \\
&\qquad = \frac{(-1)^{n+1}}{2^k \sqrt{2}\, i} \sum_{p=0}^{p=k} \binom{k}{p} \int \cos^{2(p-n)} \varphi\, d\varphi, \\
&\int \frac{\cos^{2k} x \sin x\, xd}{(\sqrt{\cos 2x})^{2n+1}} = \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2^k \sqrt{2}\, i} \sum_{p=0}^{p=k} (-1)^p \binom{k}{p} \int \cos^{2(p-n)} \varphi\, d\varphi,
\end{aligned}\right\} \quad \text{где} \quad \varphi = \arcsin(\sqrt{2}\cos x).$$

Интегралы, к которым приходим, для $p > n$ вычисляются приёмами § 2 и для $p < n$ — приёмами § 3. При $p = n$ имеем:

$$\int d\varphi = \varphi = \arcsin\ (\sqrt{2} \sin x) \quad \text{или} \quad = \arcsin(\sqrt{2}\cos x).$$

Полагая в этих формулах $k=0$ и пользуясь формулой (248), получаем:

$$\int \frac{\cos x\, dx}{(\sqrt{\cos 2x})^{2n+1}} = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} \sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{n-1}{p} \frac{2^p}{2p+1} \left(\frac{\sin^2 x}{\cos 2x}\right)^p,$$
$$(n \geqslant 1)$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{(\sqrt{\cos 2x})^{2n+1}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} \sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{n-1}{p} \frac{(-1)^{n+1+p}\, 2^p}{2p+1} \left(\frac{\cos^2 x}{\cos 2x}\right)^p.$$

Примеры

93) $$\int \sqrt{\cos 2x} \cos x\, dx = \frac{1}{2} \sin x \sqrt{\cos 2x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2} \sin x).$$

94) $$\int \sqrt{(\cos 2x)^3} \sin x\, dx = $$
$$= -\frac{1}{8} \cos x\,(2\cos 2x - 3)\sqrt{\cos 2x} + \frac{3}{8\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}).$$

95) $$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{(\cos 2x)^5}} = \frac{\cos x\,(1-\cos 2x)}{3\sqrt{(\cos 2x)^3}} = -\frac{1}{3}\, \frac{\cos 3x}{\sqrt{(\cos 2x)^3}}.$$

96) $$\int \frac{\sqrt{(\cos 2x)^3}}{\cos^3 x}\, dx = -\frac{\sin x \sqrt{\cos 2x}}{1+\cos 2x} + 2\sqrt{2} \arcsin(\sqrt{2} \sin x) - $$
$$- \frac{5}{4} \operatorname{arctg} \frac{4 \sin x \sqrt{\cos 2x}}{3\cos 2x - 1}.$$

97) $$\int \frac{3\sin^3 x - \cos x \sin 4x}{\operatorname{cosec}^2 x \sqrt{(\cos 2x)^7}}\, dx = \frac{\cos x\,(9 - 62\cos 2x + 169\cos^2 2x)}{60\sqrt{(\cos 2x)^5}} +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}\cos x - \sqrt{\cos 2x})$$

§ 19. Интегралы тригонометрических выражений, содержащие иррациональности вида

$$\sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{tg}^2 x}, \quad \sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{ctg}^2 x}, \quad \sqrt{a^2 \sec^2 x \pm b^2},$$
$$\sqrt{a^2 \operatorname{cosec}^2 x \pm b^2}$$

I) Интегралы

$$\int F\{\sin x, \operatorname{cosec} x, \cos^2 x, \sec^2 x, \operatorname{tg}^2 x, \operatorname{ctg}^2 x\} \times \\ \times \left(\sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{tg}^2 x}\right)^{\pm(2n+1)} dx,$$

$$\int F\{\cos x, \sec x, \sin^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \operatorname{tg}^2 x, \operatorname{ctg}^2 x\} \times \\ \times \left(\sqrt{a^2 \operatorname{ctg}^2 x \pm b^2}\right)^{\pm(2n+1)} dx,$$

$$\int F\{\sin x, \operatorname{cosec} x, \cos^2 x, \sec^2 x, \operatorname{tg}^2 x, \operatorname{ctg}^2 x\} \times \\ \times \left(\sqrt{a^2 \sec^2 x \pm b^2}\right)^{\pm(2n+1)} dx,$$

$$\int F\{\cos x, \sec x, \sin^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \operatorname{tg}^2 x, \operatorname{ctg}^2 x\} \times \\ \times \left(\sqrt{a^2 \operatorname{cosec}^2 x \pm b^2}\right)^{\pm(2n+1)} dx,$$

для которых F — знак рациональной функции, лёгким преобразованием приводятся к виду

$$\int F\{\sin x, \operatorname{cosec} x, \cos^2 x, \sec^2 x, \operatorname{tg}^2 x, \operatorname{ctg}^2 x\} \times \\ \times \frac{\left(\sqrt{a^2 \cos^2 x \pm b^2 \sin^2 x}\right)^{\pm(2n+1)}}{(\cos x)^{\pm(2n+1)+1}} \cos x\, dx,$$

$$\int F\{\cos x, \sec x, \sin^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \operatorname{tg}^2 x, \operatorname{ctg}^2 x\} \times \\ \times \frac{\left(\sqrt{a^2 \cos^2 x \pm b^2 \sin^2 x}\right)^{\pm(2n+1)}}{(\sin x)^{\pm(2n+1)+1}} \sin x\, dx,$$

$$\int F\{\sin x, \operatorname{cosec} x, \cos^2 x, \sec^2 x, \operatorname{tg}^2 x, \operatorname{ctg}^2 x\} \times \\ \times \frac{\left(\sqrt{a^2 \pm b^2 \cos^2 x}\right)^{\pm(2n+1)}}{(\cos x)^{\pm(2n+1)+1}} \cos x\, dx,$$

$$\int F\{\cos x, \sec x, \sin^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \operatorname{tg}^2 x, \operatorname{ctg}^2 x\} \times \\ \times \frac{\left(\sqrt{a^2 \pm b^2 \sin^2 x}\right)^{\pm(2n+1)}}{(\sin x)^{\pm(2n+1)+1}} \sin x\, dx,$$

т. е. к виду интегралов α') и β') § 17, и, следовательно, также могут быть выражены в конечном виде элементарными функциями. Так же, как и для интегралов α') и β'), знак перед a^2 может быть и отрицательным. Для вычисления служат те же подстановки. Тригонометрическими подстановками § 17 интегралы приводятся к рациональным тригонометрическим формам.

II) Интегралы

$$\int F\left\{\sin^2 x, \cos^2 x, \sec^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{tg}^2 x}\right\} dx,$$

$$\int F\left\{\sin^2 x, \cos^2 x, \sec^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{ctg}^2 x}\right\} dx,$$

$$\int F\{\sin^2 x, \cos^2 x, \sec^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x, \sqrt{a^2 \pm b^2 \sec^2 x}\} dx,$$

$$\int F\{\sin^2 x, \cos^2 x, \sec^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{cosec}^2 x}\} dx,$$

подстановками $\operatorname{tg} x = z$ и $\operatorname{ctg} x = z$ приводятся к интегралам

$$\pm \int F\left\{\frac{z^2}{1+z^2}, \frac{1}{1+z^2}, 1+z^2, \frac{1+z^2}{z^2}, z, \frac{1}{z}, \sqrt{a^2 \pm b^2 z^2}\right\} \frac{dz}{1+z^2}$$

и

$$\pm \int F\left\{\frac{z^2}{1+z^2}, \frac{1}{1+z^2}, 1+z^2, \frac{1+z^2}{z^2}, z, \frac{1}{z}, \sqrt{a^2 \pm b^2 \pm b^2 z^2}\right\} \frac{dz}{1+z^2}$$

и, следовательно, если F — рациональная функция относительно своих аргументов, вычисляются в конечном виде. Знак перед a^2 может быть и отрицательным.

Выбранными соответственно знакам при a^2 и b^2 тригонометрическими подстановками интегралы прямо приводятся к рациональным формам.

Для простейших интегралов рассматриваемого вида получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2 \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg} x + \sqrt{a^2+b^2 \operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg} x - \sqrt{a^2+b^2 \operatorname{tg}^2 x}},$$

или

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left(\sqrt{b^2-a^2}\sin x + \sqrt{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\right), \quad \text{если } a < b^2,$$

и

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{tg}x}{\sqrt{a^2+b^2\operatorname{tg}^2x}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}},$$

если $a^2>b^2$,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2\operatorname{tg}^2x}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}x}{\sqrt{a^2-b^2\operatorname{tg}^2x}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin x}{\sqrt{a^2\cos^2x-b^2\sin^2x}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-a^2-b^2\operatorname{tg}^2x}}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg}x}{\sqrt{-a^2-b^2\operatorname{tg}^2x}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{\sqrt{-a^2\cos^2x-b^2\sin^2x}},\quad \text{если } a^2<b^2,$$

и

$$=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{tg}x+\sqrt{-a^2-b^2\operatorname{tg}^2x}}{\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{tg}x-\sqrt{-a^2-b^2\operatorname{tg}^2x}}$$

или

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left(\sqrt{a^2-b^2}\sin x+\sqrt{-a^2\cos^2x-b^2\sin^2x}\right),$$

если $a^2>b^2$,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-a^2+b^2\operatorname{tg}^2x}}=\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}x+\sqrt{-a^2+b^2\operatorname{tg}^2x}}{\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}x-\sqrt{-a^2+b^2\operatorname{tg}^2x}}$$

или

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x+\sqrt{-a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}\right),$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2\operatorname{ctg}^2x}}=\frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{ctg}x-\sqrt{a^2+b^2\operatorname{ctg}^2x}}{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{ctg}x+\sqrt{a^2+b^2\operatorname{ctg}^2x}},$$

если $a^2<b^2$,

и,

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{ctg}x}{\sqrt{a^2+b^2\operatorname{ctg}^2x}},\quad \text{если } a^2>b^2,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2\operatorname{ctg}^2x}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{ctg}x}{\sqrt{a^2-b^2\operatorname{ctg}^2x}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-a^2-b^2\operatorname{ctg}^2x}}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{ctg}x}{\sqrt{-a^2-b^2\operatorname{ctg}^2x}},\quad \text{если } a^2<b^2,$$

и

$$=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,\mathrm{ctg}\,x-\sqrt{-a^2-b^2\,\mathrm{ctg}^2 x}}{\sqrt{a^2-b^2}\,\mathrm{ctg}\,x+\sqrt{-a^2-b^2\,\mathrm{ctg}^2 x}},\quad \text{если } a^2>b^2,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-a^2+b^2\,\mathrm{ctg}^2 x}}=\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{ctg}\,x-\sqrt{-a^2+b^2\,\mathrm{ctg}^2 x}}{\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{ctg}\,x+\sqrt{-a^2+b^2\,\mathrm{ctg}^2 x}}.$$

Выражения для последних четырёх интегралов также могут быть представлены в другом виде, аналогично четырём предыдущим.

Примеры

98) $$\int\sqrt{(4-5\sec^2 x)^3}\,dx=\int\sqrt{(-1-5\,\mathrm{tg}^2 x)^3}\,dx=$$

$$=-\frac{5}{2}\,\mathrm{tg}\,x\sqrt{4-5\sec^2 x}+\frac{7\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{5}\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{4-5\sec^2 x}}+$$

$$+8\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{4-5\sec^2 x}}\left(\text{подст. } \mathrm{tg}\,x=\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{tg}\,\varphi, \sqrt{4-5\sec^2 x}=i\sec\varphi\right).$$

99) $$\int\frac{dx}{\sqrt{(4-5\sec^2 x)^3}}=-\frac{5\,\mathrm{tg}\,x}{4\sqrt{4-5\sec^2 x}}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{4-5\sec^2 x}}.$$

100) $$\int\frac{\sin x-2\,\mathrm{ctg}^2 x}{\sqrt{(1+5\,\mathrm{tg}^2 x)^3}}\,dx=-\frac{3+2\sin^2 x}{8\sqrt{1+4\sin^2 x}}+\frac{4+41\sin^2 x}{2\sin x\sqrt{1+4\sin^2 x}}-$$

$$-\frac{1}{4}\ln\left(2\sin x+\sqrt{1+4\sin^2 x}\right).$$

101) $$\int\frac{\cos 2x-3}{\cos^4 x\sqrt{4-\mathrm{ctg}^2 x}}\,dx=-\frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,x\,(2+\mathrm{tg}^2 x)\sqrt{4-\mathrm{ctg}^2 x}.$$

102) $$\int\frac{(3+\sin^2 x)\,\mathrm{tg}^3 x\,dx}{(\cos^2 x-2)\sqrt{(5-4\sec^2 x)^3}}=-\frac{2}{15\sqrt{5-4\sec^2 x}}+$$

$$+\frac{1}{12\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5-4\sec^2 x}}{\sqrt{3}+\sqrt{5-4\sec^2 x}}+\frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5-4\sec^2 x}}{\sqrt{5}+\sqrt{5-4\sec^2 x}}.$$

103) $$\int\frac{\sec^2 x-3\,\mathrm{tg}\,x\sqrt{4\sec^2 x+5\,\mathrm{tg}^2 x}}{\sin^2 x\sqrt{(4\sec^2 x+5\,\mathrm{tg}^2 x)^3}}\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt{4+9\,\mathrm{tg}^2 x}}{16\,\mathrm{tg}\,x}-\frac{5\,\mathrm{tg}\,x}{16\sqrt{4+9\,\mathrm{tg}^2 x}}-\frac{3}{4}\ln\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{4+9\,\mathrm{tg}^2 x}}.$$

§ 20. Интегралы тригонометрических выражений, содержащих иррациональности вида $\sqrt[s]{(a+b\,\mathrm{tg}^2 x)^{\pm r}}$, $\sqrt[s]{(a+b\,\mathrm{ctg}^2 x)^{\pm r}}$, $\sqrt[s]{(a+b\sec^2 x)^{\pm r}}$, $\sqrt[s]{(a+b\,\mathrm{cosec}^2 x)^{\pm r}}$

Интегралы

I) $$\int F\left\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \mathrm{tg}^2 x,\ \mathrm{ctg}^2 x,\ \sec^2 x,\ \mathrm{cosec}^2 x,\ \sqrt[q]{(a+b\,\mathrm{tg}^2 x)^p},\ \sqrt[s]{(a+b\,\mathrm{tg}^2 x)^r},\ \ldots\right\}\mathrm{tg}\,x\,dx,$$

$$\int F\left\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \operatorname{tg}^2 x,\ \operatorname{ctg}^2 x,\ \sec^2 x,\ \operatorname{cosec}^2 x,\ \sqrt[q]{(a+b\operatorname{ctg}^2 x)^p},\ \sqrt[s]{(a+b\operatorname{ctg}^2 x)^r},\ \ldots\right\}\operatorname{ctg} x\,dx,$$

$$\int F\left\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \operatorname{tg}^2 x,\ \operatorname{ctg}^2 x,\ \sec^2 x,\ \operatorname{cosec}^2 x,\ \sqrt[q]{(a+b\sec^2 x)^p},\ \sqrt[s]{(a+b\sec^2 x)^r},\ \ldots\right\}\operatorname{tg} x\,dx,$$

$$\int F\left\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \operatorname{tg}^2 x,\ \operatorname{ctg}^2 x,\ \sec^2 x,\ \operatorname{cosec}^2 x,\ \sqrt[q]{(a+b\operatorname{cosec}^2 x)^p},\ \sqrt[s]{(a+b\operatorname{cosec}^2 x)^r},\ \ldots\right\}\operatorname{ctg} x\,dx,$$

для которых F — знак рациональной функции, подстановками $a+b\operatorname{tg}^2 x=z^l$, $a+b\operatorname{ctg}^2 x=z^l$, $a+b\sec^2 x=z^l$, $a+b\operatorname{cosec}^2 x=z^l$, где l — наименьшее кратное всех показателей $q, s, \ldots$, приводятся к интегралам от рациональных алгебраических дифференциалов и, следовательно, вычисляются в конечном виде.

Так, для первого интеграла при этой подстановке имеем:

$$\operatorname{tg}^2 x=\frac{z^l-a}{b},\quad \operatorname{ctg}^2 x=\frac{b}{z^l-a},\quad \sec^2 x=\frac{z^l-a+b}{b},\quad \operatorname{cosec}^2 x=\frac{z^l-a+b}{z^l-a},$$

$$\sin^2 x=\frac{z^l-a}{z^l-a+b},\quad \cos^2 x=\frac{b}{z^l-a+b},\quad \sqrt[q]{(a+b\operatorname{tg}^2 x)^p}=z^{p\frac{l}{q}},\ \ldots$$

$$\ldots,\quad \operatorname{tg} x\,dx=\frac{lz^{l-1}\,dz}{2(z^l-a+b)}.$$

II) Для простейших интегралов рассматриваемого вида получаем:

$$\int\frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{a^2\pm b^2\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{b^2-a^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}{\sqrt{b^2-a^2}\cos x}$$

для верхнего знака, если $a^2<b^2$, и

$$=\frac{1}{2\sqrt{a^2\mp b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2\mp b^2}-\sqrt{a^2\pm b^2\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{a^2\mp b^2}+\sqrt{a^2\pm b^2\operatorname{tg}^2 x}}$$

или

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2\mp b^2}}\ln\left(\sqrt{a^2\mp b^2}\cos x-\sqrt{a^2\cos^2 x\pm b^2\sin^2 x}\right)$$

для верхнего знака, если $a^2>b^2$, и для нижнего знака;

$$\int\frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{-a^2\pm b^2\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{a^2\pm b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-a^2\pm b^2\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{a^2\pm b^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2\pm b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-a^2\cos^2 x\pm b^2\sin^2 x}}{\sqrt{a^2\pm b^2}\cos x}$$

для верхнего знака и для нижнего, если $a^2 > b^2$, и

$$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{b^2-a^2}-\sqrt{-a^2-b^2\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{b^2-a^2}+\sqrt{-a^2-b^2\operatorname{tg}^2 x}}$$

или

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left(\sqrt{b^2-a^2}\cos x - \sqrt{-a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}\right)$$

для нижнего знака, если $a^2 < b^2$,

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{\sqrt{a^2 \pm b^2\operatorname{ctg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{a^2+b^2\operatorname{ctg}^2 x}}{\sqrt{b^2-a^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}{\sqrt{b^2-a^2}\sin x}$$

для верхнего знака, если $a^2 < b^2$, и

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2 \mp b^2}} \ln \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}+\sqrt{a^2 \pm b^2\operatorname{ctg}^2 x}}{\sqrt{a^2 \mp b^2}-\sqrt{a^2 \pm b^2\operatorname{ctg}^2 x}}$$

или

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 \mp b^2}} \ln \left(\sqrt{a^2 \mp b^2}\sin x + \sqrt{a^2\sin^2 x \pm b^2\cos^2 x}\right)$$

для верхнего знака, если $a^2 > b^2$, и для нижнего знака;

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{\sqrt{-a^2 \pm b^2\operatorname{ctg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm b^2}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{-a^2 \pm b^2\operatorname{ctg}^2 x}}{\sqrt{a^2 \pm b^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm b^2}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{-a^2\sin^2 x \pm b^2\cos^2 x}}{\sqrt{a^2 \pm b^2}\sin x}$$

для верхнего знака и для нижнего знака, если $a^2 > b^2$, и

$$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{b^2-a^2}+\sqrt{-a^2-b^2\operatorname{ctg}^2 x}}{\sqrt{b^2-a^2}-\sqrt{-a^2-b^2\operatorname{ctg}^2 x}}$$

или

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left(\sqrt{b^2-a^2}\sin x + \sqrt{-a^2\sin^2 x - b^2\cos^2 x}\right)$$

для нижнего знака, если $a^2 < b^2$,

$$\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\sqrt{a^2 \pm b^2\sec^2 x}} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a-\sqrt{a^2 \pm b^2\sec^2 x}}{a+\sqrt{a^2 \pm b^2\sec^2 x}}$$

или

$$=\frac{1}{a}\ln\left(a\cos x-\sqrt{a^2\cos^2 x\pm b^2}\right),$$

$$\int\frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{-a^2\pm b^2\sec^2 x}}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-a^2\pm b^2\sec^2 x}}{a}=$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-a^2\cos^2 x\pm b^2}}{a\cos x},$$

$$\int\frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{\sqrt{a^2\pm b^2\operatorname{cosec}^2 x}}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2\pm b^2\operatorname{cosec}^2 x}}{a-\sqrt{a^2\pm b^2\operatorname{cosec}^2 x}}$$

или

$$=\frac{1}{a}\ln\left(a\sin x+\sqrt{a^2\sin^2 x\pm b^2}\right),$$

$$\int\frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{\sqrt{-a^2\pm b^2\operatorname{cosec}^2 x}}=\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{-a^2\pm b^2\operatorname{cosec}^2 x}}{a}=$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{-a^2\sin^2 x\pm b^2}}{a\sin x}.$$

III) Интеграл $\int\left(\sqrt{a^2\pm b^2\operatorname{tg}^2 x}\right)^{2n+1}\operatorname{tg} x\,dx$ подстановкой $a^2\pm b^2\operatorname{tg}^2 x=z^2$ приводится к интегралу

$$\int\frac{z^{2(n+1)}\,dz}{z^2-(a^2\mp b^2)}=\int\left\{\sum_{0}^{n}(a^2\mp b^2)^p z^{2(n-p)}+\frac{(a^2\mp b^2)^{n+1}}{z^2-(a^2\mp b^2)}\right\}dz.$$

Выполняя интегрирование и возвращаясь к прежней переменной x, получаем:

$$\int\left(\sqrt{a^2\pm b^2\operatorname{tg}^2 x}\right)^{2n+1}\operatorname{tg} x\,dx=$$

$$=\sqrt{a^2\pm b^2\operatorname{tg}^2 x}\sum_{0}^{n}(a^2\mp b^2)^p\frac{(a^2\pm b^2\operatorname{tg}^2 x)^{n-p}}{2n+1-2p}+A,$$

где

$$A=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2\mp b^2}\right)^{2n+1}\ln\frac{\sqrt{a^2\mp b^2}-\sqrt{a^2\pm b^2\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{a^2\mp b^2}+\sqrt{a^2\pm b^2\operatorname{tg}^2 x}}$$

для верхнего знака, если $a^2>b^2$, и для нижнего знака, и

$$A=(-1)^{n+1}\sqrt{b^2-a^2}^{\,2n+1}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

для верхнего знака, если $a^2<b^2$.

Точно так же получаем

$$\int \left(\sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{ctg}^2 x}\right)^{2n+1} \operatorname{ctg} x\, dx =$$

$$= -\sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{ctg}^2 x} \sum_0^n (a^2 \mp b^2)^p \frac{(a^2 \pm b^2 \operatorname{ctg}^2 x)^{n-p}}{2n+1-2p} + A,$$

где

$$A = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 \mp b^2}\right)^{2n+1} \ln \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2} + \sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{ctg}^2 x}}{\sqrt{a^2 \mp b^2} - \sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{ctg}^2 x}}$$

для верхнего знака, если $a^2 > b^2$, и для нижнего знака, и

$$A = (-1)^{n+1}\left(\sqrt{b^2 - a^2}\right)^{2n+1} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 x}}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

для верхнего знака, если $a^2 < b^2$.

Аналогичные формулы получаем и для случая отрицательного знака перед a^2:

$$\int \left(\sqrt{a^2 \pm b^2 \sec^2 x}\right)^{2n+1} \operatorname{tg} x\, dx =$$

$$= \sqrt{a^2 \pm b^2 \sec^2 x} \sum_0^n a^{2p} \frac{(a^2 \pm b^2 \sec^2 x)^{n-p}}{2n+1-2p} + \frac{a^{2n+1}}{2} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 \pm b^2 \sec^2 x}}{a + \sqrt{a^2 \pm b^2 \sec^2 x}},$$

$$\int \left(\sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{cosec}^2 x}\right)^{2n+1} \operatorname{ctg} x\, dx =$$

$$= -\sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{cosec}^2 x} \sum_0^n a^{2p} \frac{(a^2 \pm b^2 \operatorname{cosec}^2 x)^{n-p}}{2n+1-2p} +$$

$$+ \frac{a^{2n+1}}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{cosec}^2 x}}{a - \sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{cosec}^2 x}}.$$

IV) Интеграл $\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\left(\sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{tg}^2 x}\right)^{2n+1}}$ подстановкой $a^2 \pm b^2 \operatorname{tg}^2 x = z^2$ приводится к интегралу

$$\int \frac{dz}{z^{2n}[z^2 - (a^2 \mp b^2)]} = -\frac{1}{(a^2 \mp b^2)^n} \int \frac{[z^{2n} - (a^2 \mp b^2)^n] - z^{2n}}{z^{2n}[z^2 - (a^2 \mp b^2)]} dz =$$

$$= -\int \sum_0^{n-1} \frac{dz}{(a^2 \mp b^2)^{n-p} z^{2p+2}} + \frac{1}{(a^2 \mp b^2)^n} \int \frac{dz}{z^2 - (a^2 \mp b^2)}.$$

Выполнив интегрирование и возвращаясь к прежней переменной, получаем:

$$\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{(\sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{tg}^2 x})^{2n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{tg}^2 x}} \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)(a^2 \mp b^2)^{n-p}(a^2 \pm b^2 \operatorname{tg}^2 x)^p} + A,$$

где

$$A = \frac{1}{2(\sqrt{a^2 \mp b^2})^{2n+1}} \ln \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2} - \sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{a^2 \mp b^2} + \sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{tg}^2 x}}$$

для верхнего знака, если $a^2 > b^2$, и для нижнего знака, и

$$A = \frac{(-1)^n}{(\sqrt{b^2 - a^2})^{2n+1}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

для верхнего знака, если $a^2 < b^2$.

Точно так же

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{(\sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{ctg}^2 x})^{2n+1}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{ctg}^2 x}} \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)(a^2 \mp b^2)^{n-p}(a^2 \pm b^2 \operatorname{ctg}^2 x)^p} + A,$$

где

$$A = \frac{1}{2(\sqrt{a^2 \mp b^2})^{2n+1}} \ln \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2} + \sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{ctg}^2 x}}{\sqrt{a^2 \mp b^2} - \sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{ctg}^2 x}}$$

для верхнего знака, если $a^2 > b^2$, и для нижнего знака, и

$$A = \frac{(-1)^n}{(\sqrt{b^2 - a^2})^{2n+1}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 x}}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

для верхнего знака, если $a^2 < b^2$.

$$\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{(\sqrt{a^2 \pm b^2 \sec^2 x})^{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm b^2 \sec^2 x}} \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)\,a^{2(n-p)}(a^2 \pm b^2 \sec^2 x)^p} +$$

$$+ \frac{1}{2a^{2n+1}} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 \pm b^2 \sec^2 x}}{a + \sqrt{a^2 \pm b^2 \sec^2 x}},$$

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{(\sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{cosec}^2 x})^{2n+1}} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{cosec}^2 x}} \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)\,a^{2(n-p)}(a^2 \pm b^2 \operatorname{cosec}^2 x)^p} +$$

$$+ \frac{1}{2a^{2n+1}} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{cosec}^2 x}}{a - \sqrt{a^2 \pm b^2 \operatorname{cosec}^2 x}}.$$

Примеры

104) $$\int \sqrt{(1+5\operatorname{tg}^2 x)^5}\operatorname{tg} x\,dx=$$
$$=\frac{1}{15}(233-70\operatorname{tg}^2 x+75\operatorname{tg}^4 x)\sqrt{1+5\operatorname{tg}^2 x}-32\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+5\operatorname{tg}^2 x}}{2}.$$

105) $$\int\frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{(1+5\operatorname{tg}^2 x)^5}}=\frac{15\operatorname{tg}^2 x-1}{48\sqrt{(1+5\operatorname{tg}^2 x)^3}}+\frac{1}{32}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+5\operatorname{tg}^2 x}}{2}.$$

106) $$\int\frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt[3]{a^2\pm b^3\operatorname{tg}^2 x}}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt[3]{a^2\mp b^3}}\ln\cos x+\frac{3}{4\sqrt[3]{a^3\mp b^3}}\ln\left(\sqrt[3]{a^3\mp b^3}-\sqrt[3]{a^3\pm b^3\operatorname{tg}^2 x}\right)+$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{a^3\mp b^3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{a^3\mp b^3}+2\sqrt[3]{a^3\pm b^3\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{a^3\mp b^3}}.$$

107) $$\int\sqrt[3]{(1-7\operatorname{tg}^2 x)^2}\operatorname{tg} x\,dx=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-7\operatorname{tg}^2 x)^2}-2\ln\sec x+$$
$$+3\ln\left(2-\sqrt[3]{1-7\operatorname{tg}^2 x}\right)+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt[3]{1-7\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{3}}.$$

108) $$\int\frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{\sqrt[4]{a^4\pm b^4\operatorname{cosec}^2 x}}=$$
$$=\frac{1}{2a}\left\{\ln\frac{a+\sqrt[4]{a^4\pm b^4\operatorname{cosec}^2 x}}{a-\sqrt[4]{a^4\pm b^4\operatorname{cosec}^2 x}}-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{a^4\pm b^4\operatorname{cosec}^2 x}}{a}\right\}$$

109) $$\int\frac{3\operatorname{tg}^2 x+\sin^2 x\sqrt[3]{1-3\sec^2 x}}{\cos^2 x\sqrt[6]{(1-3\sec^2 x)^5}\left(1-\sqrt{1-3\sec^2 x}\right)}\operatorname{tg} x\,dx=$$
$$=-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3\sec^2 x)^2}-\sqrt[6]{1-3\sec^2 x}+\frac{1}{2\left(1-\sqrt{1-3\sec^2 x}\right)}+$$
$$+\frac{7}{12}\ln\left(1-\sqrt{1-3\sec^2 x}\right)+\frac{1}{4}\ln\left(1+\sqrt{1-3\sec^2 x}\right)-$$
$$-\frac{3}{2}\ln\left(1-\sqrt[6]{1-3\sec^2 x}\right)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{1-3\sec^2 x}+1}{\sqrt{3}};$$

110) $$\int\frac{2\operatorname{tg}^2 x-\cos 2x}{\cos^2 x\sqrt{(\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}2x)^3}}\,dx=\frac{1}{6\sqrt{2}}(5-\operatorname{tg}^2 x)\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}+$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x}+\frac{11}{4\sqrt{2}}\ln\left(1-\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}\right)-$$
$$-\frac{11}{4\sqrt{2}}\ln\operatorname{tg} x-2\ln\left(\sqrt{2}-\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}\right)+2\ln\sec x.$$

Указание. $$\frac{dx}{\sqrt{(\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}2x)^3}}=\frac{1}{\sqrt{2^3}}\frac{\sqrt{(1-\operatorname{tg}^2 x)^3}}{\operatorname{tg}^4 x}\operatorname{tg} x\,dx.$$

§ 21. Интегралы тригонометрических выражений, содержащие иррациональности вида $\sqrt[s]{(a+b\cos^n x)^{\pm r}}$, $\sqrt[s]{(a+b\sec^n x)^{\pm r}}$, $\sqrt[s]{(a+b\sin^n x)^{\pm r}}$, $\sqrt[s]{(a+b\operatorname{cosec}^n x)^{\pm r}}$

Интегралы:

$$\int F\left\{\cos^n x, \sec^n x, \sqrt[q]{(a+b\cos^n x)^p}, \sqrt[s]{(a+b\cos^n x)^r}, \ldots\right\} \operatorname{tg} x\, dx,$$

$$\int F\left\{\cos^n x, \sec^n x, \sqrt[q]{(a+b\sec^n x)^p}, \sqrt[s]{(a+b\sec^n x)^r}, \ldots\right\} \operatorname{tg} x\, dx,$$

$$\int F\left\{\sin^n x, \operatorname{cosec}^n x, \sqrt[q]{(a+b\sin^n x)^p}, \sqrt[s]{(a+b\sin^n x)^r}, \ldots\right\} \operatorname{ctg} x\, dx,$$

$$\int F\left\{\sin^n x, \operatorname{cosec}^n x, \sqrt[q]{(a+b\operatorname{cosec}^n x^p)}, \sqrt[s]{(a+b\operatorname{cosec}^n x)^r}, \ldots\right\} \operatorname{ctg} x\, dx,$$

для которых F — рациональная функция, подстановками

$$a+b\cos^n x = z^l, \qquad a+b\sec^n x = z^l,$$
$$a+b\sin^n x = z^l, \qquad a+b\operatorname{cosec}^n x = z^l,$$

где l — наименьшее кратное всех показателей корней q, s, ..., приводятся к рациональным формам, к интегралам

$$\pm\frac{l}{n}\int F\left\{\frac{z^l-a}{b}, \frac{b}{z^l-a}, z^{p\frac{l}{q}}, z^{r\frac{l}{s}}, \ldots\right\} \frac{z^{l-1}}{z^l-a}\, dz,$$

и, следовательно, вычисляются в конечном виде.

Для простейших интегралов рассматриваемого вида получаем:

$$\int \left(\sqrt[s]{a+b\cos^n x}\right)^{\pm r} \cos^n x \operatorname{tg} x\, dx = -\frac{s}{bn(s\pm r)}\left(\sqrt[s]{a+b\cos^n x}\right)^{s\pm r},$$

$$\int \left(\sqrt[s]{a+b\sec^n x}\right)^{\pm r} \sec^n x \operatorname{tg} x\, dx = \frac{s}{bn(s\pm r)}\left(\sqrt[s]{a+b\sec^n x}\right)^{s\pm r},$$

$$\int \left(\sqrt[s]{a+b\sin^n x}\right)^{\pm r} \sin^n x \operatorname{ctg} x\, dx = \frac{s}{bn(s\pm r)}\left(\sqrt[s]{a+b\sin^n x}\right)^{s\pm r},$$

$$\int \left(\sqrt[s]{a+b\operatorname{cosec}^n x}\right)^{\pm r} \operatorname{cosec}^n x \operatorname{ctg} x\, dx = -\frac{s}{bn(s\pm r)}\left(\sqrt[s]{a+b\operatorname{cosec}^n x}\right)^{s\pm r},$$

$$\int \left(\sqrt[s]{a+b\cos^n x}\right)^{\pm r} \cos^{kn} x \operatorname{tg} x\, dx =$$

$$= -\frac{s}{nb^k}\left(\sqrt[s]{a+b\cos^n x}\right)^{\pm r} \sum_{p=0}^{p=k-1} (-1)^p \binom{k-1}{p} \frac{a^p(a+b\cos^n x)^{k-p}}{s(k-p)\pm r},$$

$$\int \left(\sqrt[s]{a+b\sec^n x}\right)^{\pm r} \sec^{kn} x \operatorname{tg} x\, dx =$$

$$= \frac{s}{nb^k}\left(\sqrt[s]{a+b\sec^n x}\right)^{\pm r} = \sum_{p=0}^{p=k-1} (-1)^p \binom{k-1}{p} \frac{a^p(a+b\sec^n x)^{k-p}}{s(k-p)\pm r}.$$

$$\int (\sqrt[s]{a+b\sin^n x})^{\pm r} \sin^{kn} x \operatorname{ctg} x\, dx =$$
$$= \frac{s}{nb^k} (\sqrt[s]{a+b\sin^n x})^{\pm r} \sum_{p=0}^{p=k-1} (-1)^p \binom{k-1}{p} \frac{a^p (a+b\sin^n x)^{k-p}}{s(k-p)\pm r},$$

$$\int (\sqrt[s]{a+b\operatorname{cosec}^n x})^{\pm r} \operatorname{cosec}^{kn} x \operatorname{ctg} x\, dx =$$
$$= -\frac{s}{nb^k} (\sqrt[s]{a+b\operatorname{cosec}^n x})^{\pm r} = \sum_{p=0}^{p=k-1} (-1)^p \binom{k-1}{p} \frac{a^p (a+b\operatorname{cosec}^n x)^{k-p}}{s(k-p)\pm r}.$$

Интегралы

$$\int (\sqrt[s]{a+b\cos^n x})^{\pm r} \operatorname{tg} x\, dx, \int (\sqrt[s]{a+b\sec^n x})^{\pm r} \operatorname{tg} x\, dx,$$
$$\int (\sqrt[s]{a+b\sin^n x})^{\pm r} \operatorname{ctg} x\, dx, \int (\sqrt[s]{a+b\operatorname{cosec}^n x})^{\pm r} \operatorname{ctg} x\, dx$$

указанными выше подстановками приводятся к интегралам

$$\pm \frac{s}{n} \int \frac{z^{s\pm r-1} dz}{z^s - a}.$$

Последние интегралы вычисляются по формулам (43) — (53). Интегралы

$$\int (\sqrt[s]{a+b\cos^n x})^{\pm r} \sec^{kn} x \operatorname{tg} x\, dx, \int (\sqrt[s]{a+b\sec^n x})^{\pm r} \cos^{kn} x \operatorname{tg} x\, dx,$$
$$\int (\sqrt[s]{a+b\sin^n x})^{\pm r} \operatorname{cosec}^{kn} x \operatorname{ctg} x\, dx$$

и

$$\int (\sqrt[s]{a+b\operatorname{cosec}^n x})^{\pm r} \sin^{kn} x \operatorname{ctg} x\, dx$$

теми же подстановками приводятся к интегралам

$$\pm \frac{sb^k}{n} \int \frac{z^{s\pm r-1} dz}{(z^s - a)^{k+1}},$$

которые методом приведения (§ 12, гл. II) приводятся к интегралам (43) — (53).

Примеры

111) $$\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\sqrt[3]{(a^3-b^3\cos^n x)^4}} = -\frac{1}{a^3 n} \left\{ \frac{3}{\sqrt[3]{a^3-b^3\cos^n x}} + \frac{3}{2a} \ln (a - \sqrt[3]{a^3-b^3\cos^n x}) - \right.$$
$$\left. - \frac{n}{2a} \ln \cos x + \frac{\sqrt{3}}{a} \operatorname{arctg} \frac{a + 2\sqrt[3]{a^3-b^3\cos^n x}}{a\sqrt{3}} \right\}.$$

112) $$\int \sqrt[6]{(1+2\cos^9 x)^5}\ \operatorname{tg} x\,dx = -\frac{2}{15}\sqrt[6]{(1+2\cos^9 x)^5} + \frac{1}{6}\ln\frac{1-\sqrt[6]{1+2\cos^9 x}}{1+\sqrt[6]{1+2\cos^9 x}} - \frac{1}{18}\ln\frac{1-\sqrt{1+2\cos^9 x}}{1+\sqrt{1+2\cos^9 x}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\sqrt[6]{1+2\cos^9 x}}{1-\sqrt[3]{1+2\cos^9 x}}.$$

113) $$\int \frac{\sin^9 x \operatorname{ctg} x\,dx}{\sqrt[3]{(2-5\sin^3 x)^4}} = \frac{36-30\sin^3 x-25\sin^6 x}{625\sqrt[3]{2-5\sin^3 x}}.$$

§ 22. Интегралы тригонометрических выражений, содержащих иррациональности вида:

$$\sqrt[s]{(a+b\cos^2 x)^{\pm r}},\quad \sqrt[s]{(a+b\sin^2 x)^{\pm r}},\quad \sqrt[s]{(a\cos^2 x+a\sin^2 x)^{\pm r}},$$
$$\sqrt[s]{(a+b\operatorname{tg}^2 x)^{\pm r}},\ \sqrt[s]{(a+b\operatorname{ctg}^2 x)^{\pm r}},\ \sqrt[s]{(a+b\sec^2 x)^{\pm r}},$$
$$\sqrt[s]{(a+b\operatorname{cosec}^2 x)^{\pm r}},\quad \sqrt[s]{(a\operatorname{tg}^2 x+b\sec^2 x)^{\pm r}},$$
$$\sqrt[s]{(a\operatorname{ctg}^2 x+b\operatorname{cosec}^2 x)^{\pm r}}$$

Так как квадрат всякой из шести основных тригонометрических функций рационально выражается через каждую из остальных, то всякий интеграл вида

$$\int F\left\{\sin^2 x, \cos^2 x, \operatorname{tg}^2 x, \operatorname{ctg}^2 x, \sec^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \sqrt[q]{X^p},\ \sqrt[s]{X^r}, \ldots,\right\}\operatorname{tg} x\,dx$$

или

$$\int F\left\{\sin^2 x, \cos^2 x, \operatorname{tg}^2 x, \operatorname{ctg}^2 x, \sec^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \sqrt[q]{X^p},\ \sqrt[s]{X^r}, \ldots,\right\}\operatorname{ctg} x\,dx,$$

для которого F есть знак рациональной функции и X представляет какое-либо из двучленных тригонометрических выражений вида:

$$a+b\cos^2 x,\quad a+b\sin^2 x,\quad a\cos^2 x+b\sin^2 x,\quad a+b\operatorname{tg}^2 x,\quad a+b\operatorname{ctg}^2 x,$$
$$a+b\sec^2 x,\quad a+b\operatorname{cosec}^2 x,\quad a\operatorname{tg}^2 x+b\sec^2 x,\quad a\operatorname{ctg}^2 x+b\operatorname{cosec}^2 x,$$

подстановкой $X=z^l$, где l — наименьшее кратное всех показателей корней $q, s, \ldots,$ приводится к рациональной форме и, следовательно, выражается в конечном виде.

Так, при подстановке $X = a\cos^2 x \pm b\sin^2 x = z^l$, имеем:

$$\sin^2 x = \frac{a-z^l}{a\mp b}, \quad \cos^2 x = \frac{z^l\mp b}{a\mp b}, \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{a-z^l}{z^l\mp b}, \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{z^l\mp b}{a-z^l},$$

$$\sec^2 x = \frac{a\mp b}{z^l\mp b}, \quad \operatorname{cosec}^2 x = \frac{a\mp b}{a-z^l}, \quad \sqrt[q]{a\cos^2 x\pm b\sin^2 x^p} = z^{p\frac{l}{q}},$$

$$\operatorname{tg} x\,dx = -\frac{l}{2}\,\frac{z^{l-1}dz}{z^l\mp b}, \quad \operatorname{ctg} x\,dx = -\frac{l}{2}\,\frac{z^{l-1}dz}{a-z^l},$$

и, таким образом, приходим к интегралу рационального алгебраического выражения.

При более или менее значительном по величине l и уже при некоторой сложности функции F, вообще, получаем интеграл сложного алгебраического выражения, однако, поскольку это выражение является рациональным, интеграл теоретически выражается в конечном виде.

Для простейших интегралов рассматриваемого вида получаем:

$$\int (\cos^{2m} x+\sin^{2n} x)\left(\sqrt[s]{a\cos^2 x+b\sin^2 x}\right)^{\pm r}\operatorname{tg} x\,dx =$$
$$= -\frac{s}{2}\left\{\frac{1}{(a-b)^m}\int (z^s-b)^{m-1}z^{s\pm r-1}dz + \frac{1}{(a-b)^n}\int\frac{(a-z^s)^n z^{s\pm r-1}}{z^s-b}dz\right\},$$

$$\int (\cos^{2m} x+\sin^{2n} x)\left(\sqrt[s]{a\cos^2 x+b\sin^2 x}\right)^{\pm r}\operatorname{ctg} x\,dx =$$
$$= -\frac{s}{2}\,\frac{1}{(a-b)^n}\int (a-z^s)^{n-1}z^{s\pm r-1}\,dz + \frac{1}{(a-b)^m}\int\frac{(z^s-b)^m z^{s\pm r-1}}{a-z^s}dz\Big\},$$
$$z = \sqrt[s]{a\cos^2 x+b\sin^2 x},$$

$$\int (\operatorname{tg}^{2m} x+\operatorname{ctg}^{2n} x)\left(\sqrt[s]{a\cos^2 x+b\sin^2 x}\right)^{\pm r}\operatorname{tg} x\,dx =$$
$$= -\frac{s}{2}\left\{\int\frac{(a-z^s)^m z^{s\pm r-1}}{(z^s-b)^{m+1}}dz + \int\frac{(z^s-b)^{n-1}z^{s\pm r-1}}{(a-z^s)^n}dz\right\},$$

$$\int (\operatorname{tg}^{2m} x+\operatorname{ctg}^{2n} x)\left(\sqrt[s]{a\cos^2 x+b\sin^2 x}\right)^{\pm r}\operatorname{ctg} x\,dx =$$
$$= -\frac{s}{2}\left\{\int\frac{(z^s-b)^n z^{s\pm r-1}}{(a-z^s)^{n+1}}dz + \int\frac{(a-z^s)^{m-1}z^{s\pm r-1}}{(z^s-b)^m}dz\right\},$$

$$\int (\sec^{2m} x+\operatorname{cosec}^{2n} x)\left(\sqrt[s]{a\cos^2 x+b\sin^2 x}\right)^{\pm r}\operatorname{tg} x\,dx =$$
$$= -\frac{s}{2}\left\{(a-b)^m\int\frac{z^{s\pm r-1}}{(z^s-b)^{m+1}}dz + (a-b)^n\int\frac{z^{s\pm r-1}}{(z^s-b)(a-z^s)^n}dz\right\},$$

$$\int (\sec^{2m} x+\operatorname{cosec}^{2n} x)\left(\sqrt[s]{a\cos^2 x+b\sin^2 x}\right)^{\pm r}\operatorname{ctg} x\,dx =$$
$$= -\frac{s}{2}\left\{(a-b)^n\int\frac{z^{s\pm r-1}}{(a-z^s)^{n+1}}dz + (a-b)^m\int\frac{z^{s\pm r-1}}{(a-z^s)(z^s-b)^m}dz\right\},$$

$$\int (\cos^{2m} x + \sin^{2n} x)\,(\sqrt[s]{\cos 2x})^{\pm r} \operatorname{tg} x\,dx =$$
$$= -\frac{s}{2}\left\{\frac{1}{2^m}\int (1+z^s)^{m-1} z^{s\pm r-1}\,dz + \frac{1}{2^n}\int \frac{(1-z^s)^n z^{s\pm r-1}}{1+z^s}\,dz\right\},$$
$$\int (\cos^{2m} x + \sin^{2n} x)\,(\sqrt[s]{\cos 2x})^{\pm r} \operatorname{ctg} x\,dx =$$
$$= -\frac{s}{2}\left\{\frac{1}{2^n}\int (1-z^s))^{n-1} z^{s\pm r-1}dz + \frac{1}{2^m}\int \frac{(1+z^s)^m z^{s\pm r-1}}{1-z^s}\,dz\right\}$$
$$z = \sqrt[s]{\cos 2x},$$

$$\int (\sqrt[s]{a\cos^2 x + b\sin^2 x})^{\pm r} \operatorname{tg} x\,dx = -\frac{s}{2}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s - b}\,dz,$$
$$\int [\sqrt[s]{a\cos^2 x + b\sin^2 x}]^{\pm r} \operatorname{ctg} x\,dx = \frac{s}{2}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s - a}\,dz,$$
$$z = \sqrt[s]{a\cos^2 x + b\sin^2 x},$$

$$\int [\sqrt[s]{a + b\operatorname{tg}^2 x}]^{\pm r} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{s}{2}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s - a + b}\,dz,$$
$$\int [\sqrt[s]{a + b\operatorname{tg}^2 x}]^{\pm r} \operatorname{ctg} x\,dx = -\frac{s}{2}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s - a + b}\,dz + \frac{s}{2}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s - a}\,dz,$$
$$z = \sqrt[s]{a + b\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\int [\sqrt[s]{a + b\operatorname{ctg}^2 x}]^{\pm r} \operatorname{ctg} x\,dx = -\frac{s}{2}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s - a + b}\,dz,$$
$$\int [\sqrt[s]{a + b\operatorname{ctg}^2 x}]^{\pm r} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{s}{2}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s - a + b}\,dz - \frac{s}{2}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s - a}\,dz,$$
$$z = \sqrt[s]{a + b\operatorname{ctg}^2 x},$$

$$\int [\sqrt[s]{a + b\sec^2 x}]^{\pm r} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{s}{2}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s - a}\,dz,$$
$$\int [\sqrt[s]{a + b\sec^2 x}]^{\pm r} \operatorname{ctg} x\,dx = -\frac{s}{2}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s - a}\,dz + \frac{s}{2}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s - a - b}\,dz,$$
$$z = \sqrt[s]{a + b\sec^2 x},$$

$$\int [\sqrt[s]{a + b\operatorname{cosec}^2 x}]^{\pm r} \operatorname{ctg} x\,dx = -\frac{s}{2}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s - a}\,dz,$$
$$\int [\sqrt[s]{a + b\operatorname{cosec}^2 x}]^{\pm r} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{s}{2}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s - a}\,dz - \frac{s}{2}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s - a - b},$$
$$z = \sqrt[s]{a + b\operatorname{cosec}^2 x}.$$

Примеры

114) $$\int \frac{1+\sqrt[3]{1-8\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x\,\sqrt[3]{(1-8\operatorname{tg}^2 x)^2}} \operatorname{tg} x\,dx = -\frac{1}{32}\sqrt[3]{1-8\operatorname{tg}^2 x}\,(2-\sqrt[3]{1-8\operatorname{tg}^2 x}).$$

115) $$\int \frac{1+\sqrt[3]{1-8\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x\,\sqrt[3]{(1-8\operatorname{tg}^2 x)^2}} \operatorname{ctg} x\,dx = \frac{3}{2}\ln(1-\sqrt[3]{1-8\operatorname{tg}^2 x}) - \ln \operatorname{tg} x.$$

116) $$\int \frac{5\cos^2 x-\sqrt{5\sin^2 x-1}}{\sqrt[4]{5\sin^2 x-1}\,(2+\sqrt{5\sin^2 x-1})}\operatorname{tg} x\,dx=$$
$$=2\sqrt[4]{5\sin^2 x-1}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt[4]{5\sin^2 x-1}}{2+\sqrt{5\sin^2 x-1}}+$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{5\sin^2 x-1}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{5\sin^2 x-1}}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{5\sin^2 x-1}}{\sqrt{2}}.$$

117) $$\int \cos^4 x\sqrt[3]{(\cos 2x)^2}\operatorname{tg} x\,dx=-\frac{3}{320}(8+5\cos 2x)\sqrt[3]{(\cos 2x)^5}.$$

118) $$\int \frac{\sin^6 x\operatorname{tg} x}{\sqrt[4]{(\cos 2x)^3}}dx=\frac{1}{180}(5\cos^2 2x-36\cos 2x+315)\sqrt{\cos 2x}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\ln\cos x-\ln(1+\sqrt{2}\sqrt[4]{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x})-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{\cos 2x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}\right\}.$$

119) $$\int \sqrt{\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x}\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}$$

или

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}-\sqrt{\operatorname{tg} 2x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{tg} 2x}}.$$

120) $$\int \sqrt{\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} 2x}+\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} 2x}.$$

ГЛАВА VI

ЗНАЧЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОДСТАНОВОК ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ФОРМУЛАМИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

При интегрировании иррациональных алгебраических выражений во многих случаях приходилось пользоваться преобразованием их к тригонометрическим формам.

Вообще, если интегрируемое выражение имеет вид $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, где f — знак функции, рациональной по отношению к своим аргументам, то путём соответствующих преобразований к тригонометрической форме это выражение всегда может быть приведено к рациональному виду. Небольшим преобразованием радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}$ соответственно знакам коэффициентов a, b, c приводится к одному из видов

$$\text{a) } \sqrt{q^2-x^2}, \quad \text{b) } \sqrt{x^2-q^2}, \quad \text{c) } \sqrt{q^2+x^2},$$

и затем одной из нормальных тригонометрических подстановок

$$\text{a) } x=q\sin\varphi, \quad \text{b) } x=q\sec\varphi, \quad \text{c) } x=q\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

— к рациональной тригонометрической форме.

Значение этих преобразований, однако, заключается не только в том, что они ведут к рациональным формам.

Введение математических символов, вообще, ведёт к цели упрощения и наглядности математических исследований. В данном случае, вместо того, чтобы оперировать с выражениями, которые в различных взаимоотношениях содержат рациональные алгебраические функции и иррациональности вида $\sqrt{q^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-q^2}$, $\sqrt{x^2+q^2}$ или даже $\sqrt{ax^2+bx+c}$, вполне целесообразно свести вопрос к операциям с тригонометрическими формами, которые выполняются проще благодаря стройности тригонометрических формул и эластичности тригонометрических преобразований. В этом, наряду с достигаемой тем же путём рационализацией, главным образом и заключается смысл преобразований некоторых видов интегралов алгебраических выражений к тригонометрическим формам.

В предыдущей главе получены формулы для интегралов тригонометрических выражений. В этих формулах также содержатся, только лишь в скрытом состоянии, и соответствующие формулы для интегралов алгебраических выражений. Выявляем, далее, некоторые из этих формул, которые, конечно, могли бы быть получены и непосредственно, но более сложными путями.

§ 1. Вывод формул для интегралов алгебраических выражений на основании тригонометрических формул, полученных для интеграла $\int \operatorname{tg}^n x\,dx$

I) Подставляя в формулы (252), (255) и (251)

$$\operatorname{tg} y=\frac{x}{a}, \quad \sec y=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}, \quad y=\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \quad dy=\frac{a\,dx}{x^2+a^2}$$

и затем

$$\operatorname{ctg} y=\frac{x}{a}, \quad \operatorname{tg} y=\frac{a}{x}, \quad \sec y=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}, \quad y=\operatorname{arcctg}\frac{x}{a},$$

$$dy=-\frac{a\,dx}{x^2+a^2},$$

получаем после лёгких преобразований, опуская вместе с тем в соответствующих случаях постоянную $\ln a$:

$$\int \frac{x^{2n+1}}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}\sum_0^{n-1}(-1)^p\frac{a^{2p}x^{2n-2p}}{n-p}+(-1)^n a^{2n}\ln\sqrt{x^2+a^2} \quad (421)$$

или

$$=\frac{1}{2}\sum_0^{n-1}(-1)^p\binom{n}{p}\frac{a^{2p}(x^2+a^2)^{n-p}}{n-p}+(-1)^n a^{2n}\ln\sqrt{x^2+a^2},$$

$$\int \frac{x^{2n}}{x^2+a^2}\,dx=\sum_0^{n-1}(-1)^p\frac{a^{2p}x^{2n-1-2p}}{2n-1-2p}+(-1)^n a^{2n-1}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}, \quad (422)$$

$$\int \frac{dx}{x^{2n+1}(x^2+a^2)}=\frac{1}{2}\sum_0^{n-1}\frac{(-1)^{p+1}}{(n-p)\,a^{2(p+1)}\,x^{2(n-p)}}+\frac{(-1)^{n+1}}{a^{2(n+1)}}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} \quad (423)$$

или

$$=\frac{1}{2a^{2(n+1)}}\sum_{0}^{n-1}(-1)^{p+1}\binom{n}{p}\frac{1}{n-p}\left(\frac{x^2+a^2}{x^2}\right)^{n-p}+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{a^{2(n+1)}}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x};$$

$$\int\frac{dx}{x^{2n}(x^2+a^2)}=\sum_{0}^{n-1}\frac{(-1)^{p+1}}{a^{2(p+1)}(2n-1-2p)\,x^{2n-1-2p}}+\frac{(-1)^{n+1}}{a^{2n+1}}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}. \tag{424}$$

В этих формулах n — целое положительное число.

II) Подставляя в те же формулы

$$\sec y=\frac{x}{a},\quad \operatorname{tg} y=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a},\quad y=\operatorname{arcsec}\frac{x}{a},\ dy=\frac{a\,dx}{x\sqrt{x^2-a^2}},$$

и затем

$$\operatorname{cosec} y=\frac{x}{a},\quad \operatorname{tg} y=\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}},\quad \sec y=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$y=\operatorname{arccosec}\frac{x}{a},\quad dy=-\frac{a\,dx}{x\sqrt{x^2-a^2}},$$

после надлежащих преобразований, заменяя в первом случае для последней формулы n на $(n+1)$ и во втором для первых двух формул n на $(n-1)$, получаем:

$$\int(x^2-a^2)^n\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\sum_{0}^{n-1}(-1)^p\frac{a^{2p}(x^2-a^2)^{n-p}}{n-p}+(-1)^n a^{2n}\ln x \tag{425}$$

или

$$=\frac{1}{2}\sum_{0}^{n-1}(-1)^p\binom{n}{p}\frac{a^{2p}x^{2n-2p}}{n-p}+(-1)^n a^{2n}\ln x,$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}^{\,2n+1}\frac{dx}{x}=$$

$$=\sum_{0}^{n}(-1)^p a^{2p}\frac{\sqrt{x^2-a^2}^{\,2n+1-2p}}{2n+1-2p}+(-1)^{n+1}a^{2n+1}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}, \tag{426}$$

$$\int\frac{dx}{x(x^2-a^2)^n}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{0}^{n-2}\frac{(-1)^{p+1}}{(n-1-p)\,a^{2(p+1)}(x^2-a^2)^{n-1-p}}+\frac{(-1)^n}{a^{2n}}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} \tag{427}$$

или

$$=\frac{1}{2a^{2n}}\sum_{0}^{n-2}(-1)^{p+1}\binom{n-1}{p}\frac{1}{n-1-p}\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)^{n-1-p}+$$
$$+\frac{(-1)^n}{a^{2n}}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}^{\,2n+1}}=$$
$$=\sum_{0}^{n-1}\frac{(-1)^{p+1}}{(2n-1-2p)\,a^{2(p+1)}\sqrt{x^2-a^2}^{\,2n-1-2p}}+\frac{(-1)^{n+1}}{a^{2n}}\operatorname{arccosec}\frac{x}{a}. \quad (428)$$

Формулы (425) и (428) действительны для всякого положительного n, формула (426) вместе с тем и для $n=0$, формула (427) для $n\geqslant 2$; при $n=1$ для формулы (427) непосредственно находим

$$\int\frac{dx}{x(x^2-a^2)}=-\frac{1}{a^2}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

III) Подставляя в те же начальные формулы

$$\cos y=\frac{x}{a},\quad \sec y=\frac{a}{x},\quad \operatorname{tg} y\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x},\quad y=\operatorname{arccosec}\frac{x}{a},$$
$$dy=-\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

и затем

$$\sin y=\frac{x}{a},\quad \operatorname{tg} y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad \sec y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$
$$y=\arcsin\frac{x}{a},\quad dy=\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

получаем после преобразований, аналогичных предыдущим,

$$\int\left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^n\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\sum_{0}^{n-1}(-1)^{p+1}\frac{1}{n-p}\left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^{n-p}+(-1)^n\ln x \quad (429)$$

или

$$=\frac{1}{2}\sum_{0}^{n-1}(-1)^{p+1}\binom{n}{p}\frac{1}{n-p}\left(\frac{a^2}{x^2}\right)^{n-p}+(-1)^n\ln x,$$

$$\int\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)^{2n+1}\frac{dx}{x}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\sum_{0}^{n}\frac{(-1)^{p+1}}{2n+1-2p}\left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^{n-p}+$$
$$+(-1)^n\arccos\frac{x}{a}, \quad (430)$$

$$\int\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^n\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\sum_{0}^{n-2}\frac{(-1)^p}{n-1-p}\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^{n-1-p}+$$
$$+(-1)^n\ln\sqrt{a^2-x^2} \qquad (431)$$

или

$$=\frac{1}{2}\sum_{0}^{n-2}(-1)^p\binom{n-1}{p}\frac{1}{n-1-p}\left(\frac{a^2}{a^2-x^2}\right)^{n-1-p}+$$
$$+(-1)^n\ln\sqrt{a^2-x^2},$$

$$\int\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^n\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\sum_{0}^{n-1}\frac{(-1)^p}{2n-1-2p}\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^{n-p}+$$
$$+(-1)^n\arcsin\frac{x}{a}. \qquad (432)$$

Формулы (429) и (432) действительны для всякого положительного целого n, формула (430) и для $n=0$, формула (431) — для $n\geqslant 2$; при $n=1$ для формулы (431) имеем

$$\int\frac{x\,dx}{a^2-x^2}=-\ln\sqrt{a^2-x^2}.$$

Примеры

1) $$\int\frac{dx}{x^5(5+x^2)}=\frac{2x^2-5}{100x^4}-\frac{1}{125}\ln\frac{\sqrt{5+x^2}}{x}$$

или

$$=\frac{(5+x^2)(3x^2-5)}{500x^4}-\frac{1}{125}\ln\frac{\sqrt{5+x^2}}{x}.$$

2) $$\int\frac{dx}{x^6(5+x^2)}=-\frac{3x^4-5x^2+15}{375x^5}+\frac{1}{125\sqrt{5}}\operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{5}}.$$

3) $$\int\frac{dx}{x(x^2-4)^4}=-\frac{3x^4-30x^2+88}{384(x^2-4)^3}+\frac{1}{256}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

или

$$=-\frac{x^2(11x^4-108x^2+288)}{3072(x^2-4)^3}+\frac{1}{256}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}.$$

4) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}=\frac{3x^2-8}{12\sqrt{(x^2-2)^3}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arccosec}\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

5) $$\int\sqrt{(x^2-10)^5}\frac{dx}{x}=\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-10)^5}-\frac{10}{3}\sqrt{(x-10)^3}+100\sqrt{x^2-10}-$$
$$-100\sqrt{10}\operatorname{arcsec}\frac{x}{\sqrt{10}}.$$

§ 2. Формулы для интегралов алгебраических выражений, следуемые из тригонометрических формул, полученных для интеграла $\int \mathrm{tg}^m x \sec^n x\, dx$

1) Подставляя в формулу (271)

$$\mathrm{tg}\, y = \frac{x}{a}, \quad \sec y = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}, \quad dy = \frac{a\, dx}{x^2+a^2},$$

получаем:

$$\int \frac{x^{2n+1}(x^2+a^2)^{\frac{m}{2}-1}}{a^{2n+m}}\, dx = \sum_0^n (-1)^{n+p} \binom{n}{p} \frac{\sqrt{x^2+a^2}^{\,2p+m}}{(2p+m)\, a^{2p+m}},$$

и, заменяя $\left(\frac{m}{2}-1\right)$ на m, имеем:

$$\int (x^2+a^2)^m x^{2n+1}\, dx = \frac{1}{2} \sum_0^n (-1)^{n+p} (a^2)^{n-p} \frac{(x^2+a^2)^{p+m+1}}{p+m+1}.$$

Заменяя в последней формуле a^2 на $(-a^2)$ и замечая, что

$$(-1)^{n+p} = (-1)^{n-p} \quad \text{и} \quad (-1)^{n-p}(-a^2)^{n-p} = a^{2(n-p)},$$

получаем:

$$\int (x^2-a^2)^m x^{2n+1}\, dx = \frac{1}{2} \sum_0^n \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{(x^2-a^2)^{p+m+1}}{p+m+1},$$

и, наконец, соединяя обе формулы,

$$\int (x^2 \pm a^2)^m x^{2n+1}\, dx = \frac{1}{2} \sum_0^n \binom{n}{p} (\mp a^2)^{n-p} \frac{(x^2 \pm a^2)^{p+m+1}}{p+m+1}. \quad (433)$$

В этой формуле n — целое положительное число или равно нулю, m же может быть всяким: целым, дробным, положительным и отрицательным числом.

Заменяя в полученной формуле m на $(-m)$, получаем более наглядную для соответствующего случая формулу

$$\int \frac{x^{2n+1}\, dx}{(x^2 \pm a^2)^m} = \frac{1}{2} \sum_0^n \binom{n}{p} (\mp a^2)^{n-p} \frac{(x^2 \pm a^2)^{p-m+1}}{p-m+1}. \quad (434)$$

При m целом эта формула теряет значение в случае $p = m-1$, и соответствующий член суммы равен

$$\frac{1}{2}\binom{n}{p} (\mp a^2)^{n-p} \int \frac{d(x^2 \pm a^2)}{x^2 \pm a^2} = \binom{n}{m-1} (\mp a^2)^{n-m+1} \ln \sqrt{x^2 \pm a^2}.$$

Принимая в формуле (433) m дробной величиной, т. е. $m=\frac{\pm r}{s}$, получаем формулы для интегралов иррациональных выражений

$$\int\left(\sqrt[s]{x^2\pm a^2}\right)^{\pm r}x^{2n+1}\,dx=\frac{s}{2}\left(\sqrt[s]{x^2\pm a^2}\right)^{\pm r}\times$$
$$\times\sum_0^n\binom{n}{p}(\mp a^2)^{n-p}\frac{(x^2\pm a^2)^{p+1}}{ps+s\pm r}. \quad (435)$$

При $\frac{r}{s}=\frac{2m+1}{2}, \frac{3m+1}{3}, \frac{3m+2}{3}, \ldots$, формула (435) даёт:

$$\int\left(\sqrt{x^2\pm a^2}\right)^{2m+1}x^{2n+1}\,dx=$$
$$=\left(\sqrt{x^2\pm a^2}\right)^{2m+3}\sum_0^n\binom{n}{p}(\mp a^2)^{n-p}\frac{(x^2\pm a^2)^p}{2n+2m+3},$$

$$\int\frac{x^{2n+1}\,dx}{\left(\sqrt{x^2\pm a^2}\right)^{2m+1}}=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2\pm a^2}\right)^{2m-1}}\sum_0^n\binom{n}{p}(\mp a^2)^{n-p}\frac{(x^2\pm a^2)^p}{2p-2m+1},$$

$$\int\left(\sqrt[3]{x^2\pm a^2}\right)^{3m+1}x^{2n+1}\,dx=$$
$$=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x^2\pm a^2}\right)^{3m+4}\sum_0^n\binom{n}{p}(\mp a^2)^{n-p}\frac{(x^2\pm a^2)^p}{3p+3m+4},$$

$$\int\left(\sqrt[3]{x^2\pm a^2}\right)^{3m+2}x^{2n+1}\,dx=$$
$$=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x^2\pm a^2}\right)^{3m+5}\sum_0^n\binom{n}{p}(\mp a^2)^{n-p}\frac{(x^2\pm a^2)^p}{3p+3m+5},$$

$$\int\frac{x^{2n+1}\,dx}{\left(\sqrt[3]{x^2\pm a^2}\right)^{3m+1}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2\pm a^2}\right)^{3m-2}}\sum_0^n\binom{n}{p}(\mp a^2)^{n-p}\frac{(x^2\pm a^2)^p}{3p-3m+2},$$

$$\int\frac{x^{2n+1}\,dx}{\left(\sqrt[3]{x^2\pm a^2}\right)^{3m+2}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2\pm a^2}\right)^{3m-1}}\sum_0^n\binom{n}{p}(\mp a^2)^{n-p}\frac{(x^2\pm a^2)^p}{3p-3m+1}.$$

II) Подставляя в ту же формулу (271)

$$\operatorname{ctg} y=\frac{x}{a},\quad \operatorname{tg} y=\frac{a}{x},\quad \sec y=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x},\quad dy=-\frac{a\,dx}{x^2+a^2},$$

получаем:

$$\int \frac{(\sqrt{x^2+a^2})^{m-2}}{x^{2n+m+1}}\,dx = \frac{1}{(-a^2)^{n+1}} \sum_0^n (-1)^p \binom{n}{p} \frac{\sqrt{x^2+a^2}^{\,2p+m}}{(2p+m)\,x^{2p+m}}.$$

Подставляя сюда $(-a^2)$ вместо a^2, обобщая формулу для того и другого знака перед a^2 и заменяя в ней m на $(2m+2)$ и n на $(n-1)$, получаем:

$$\int \left(\frac{x^2 \pm a^2}{x^2}\right)^m \frac{dx}{x^{2n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2(\pm a^2)^n} \sum_0^{n-1} (-1)^p \binom{n-1}{p} \frac{1}{p+m+1} \left(\frac{x^2 \pm a^2}{x^2}\right)^{p+m+1}. \quad (436)$$

В этой формуле n — целое положительное число, показатель же m не ограничен в своих значениях и может быть всяким: целым, дробным, положительным и отрицательным числом.

Заменяя m на $(-m)$, имеем:

$$\int \left(\frac{x^2}{x^2 \pm a^2}\right)^m \frac{dx}{x^{2n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2(\mp a^2)^n} \sum_0^{n-1} (-1)^p \binom{n-1}{p} \frac{1}{p-m+1} \left(\frac{x^2 \pm a^2}{x^2}\right)^{p-m+1}. \quad (437)$$

Эта формула не даёт выражения для одного из членов суммы при $p=m-1$; этот член при интегрировании даёт логарифмическую функцию и равен

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(\mp a^2)^n} \binom{n-1}{m-1} \ln \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x}.$$

Принимая m дробным, $m = \frac{\pm r}{s}$, имеем формулы для интегралов иррациональных выражений

$$\int \left[\sqrt[s]{\frac{x^2 \pm a^2}{x^2}}\right]^{\pm r} \frac{dx}{x^{2n+1}} =$$

$$= \frac{s}{2(\mp a^2)^n} \left[\sqrt[s]{\frac{x^2 \pm a^2}{x^2}}\right]^{\pm r} \sum_0^{n-1} (-1)^p \binom{n-1}{p} \frac{1}{ps+s\pm r} \left(\frac{x^2 \pm a^2}{x^2}\right)^{p+1}. \quad (438)$$

Заменяя в формуле (436) n на $(n-m)$ и принимая m сначала положительным и затем отрицательным, получаем формулы

$$\int \frac{(x^2 \pm a^2)^m}{x^{2n+1}} dx = \frac{1}{2(\mp a^2)^{n-m}} \sum_0^{n-m-1} (-1)^p \binom{n-m-1}{p} \frac{1}{p+m+1} \left(\frac{x^2 \pm a^2}{x^2}\right)^{p+m+1} \quad (n \geqslant m+1), \tag{439}$$

$$\int \frac{dx}{x^{2n+1}(x^2 \pm a^2)^m} = \frac{1}{2(\mp a^2)^{n+m}} \sum_0^{n+m-1} (-1)^p \binom{n+m-1}{p} \frac{1}{p-m+1} \left(\frac{x^2 \pm a^2}{x^2}\right)^{p-m+1} \ldots \tag{440}$$

В этих формулах m и n — целые положительные числа. Для первой из них должно быть $n \geqslant m+1$; вторая теряет значение только в том случае, если m и n одновременно равны нулю, и в этом случае имеем интеграл $\int \frac{dx}{x} = \ln x$.

Формула (440) не даёт выражения для одного из членов суммы при $p = m-1$, и этот член равен

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(\mp a^2)^{n+m}} \binom{n+m-1}{m-1} \ln \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x}.$$

Заменяя в формуле (436) m на $\frac{2m+1}{2}$ и на $\frac{-2m-1}{2}$ и затем в первом случае n на $(n-m-1)$ и во втором n на $(n+m)$, получаем формулы

$$\int \frac{\left(\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)^{2m+1}}{x^{2n}} dx = \frac{\left(\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)^{2m+3}}{(\mp a^2)^{n-m-1} x^{2m+3}} \sum_0^{n-m-2} (-1)^p \binom{n-m-2}{p} \frac{1}{2p+2m+3} \left(\frac{x^2 \pm a^2}{x^2}\right)^p \quad (n \geqslant m+2), \tag{441}$$

$$\int \frac{dx}{x^{2n}\left(\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)^{2m+1}} = \frac{x^{2m-1}}{(\mp a^2)^{n+m}\left(\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)^{2m-1}} \times \sum_0^{n+m-1} (-1)^p \binom{n+m-1}{p} \frac{1}{2p-2m+1} \left(\frac{x^2 \pm a^2}{x^2}\right)^p. \tag{442}$$

Первая формула действительна для $n \geqslant m+2$, вторая для всяких целых положительных значений m и n и теряет значение лишь в случае, когда они оба одновременно равны нулю; в этом случае имеем интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$.

Принимая в формуле (442) $n=0$ и заменяя p на $m-p'-1$, так что $2p-2m+1 = -(2p'+1)$, $\binom{m-1}{p} = \binom{m-1}{m-1-p'} = \binom{m-1}{p'}$, и возвращаясь для результата к обозначению p вместо p', получаем:

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 \pm a^2})^{2m+1}} = \frac{x}{(\pm a^2)^m \sqrt{x^2 \pm a^2}} \times$$
$$\times \sum_0^{m-1} (-1)^p \binom{m-1}{p} \frac{1}{2p+1} \left(\frac{x^2}{x^2 \pm a^2} \right)^p \quad (m \geqslant 1). \qquad (443)$$

III) Подставляя в ту же формулу (271)

$$\sec y = \frac{x}{a}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}, \quad dy = \frac{a\,dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}},$$

получаем, заменяя m на $(m+1)$,

$$\int (x^2 - a^2)^n x^m dx = \sum_0^n \binom{n}{p} (-a^2)^{n-p} \frac{x^{2p+m+1}}{2p+m+1}.$$

Подставляя сюда $(-a^2)$ вместо a^2 и соединяя обе формулы, получаем:

$$\int (x^2 \pm a^2)^n x^m dx = x^{m+1} \sum_0^n \binom{n}{p} (\pm a^2)^{n-p} \frac{x^{2p}}{2p+m+1}. \qquad (444)$$

Эта формула действительна для целого $n \geqslant 0$ и для всякого целого, дробного, положительного и отрицательного m. Заменяя в ней m на $(-m)$, имеем:

$$\int \frac{(x^2 \pm a^2)^n}{x^m} dx = \frac{1}{x^{m-1}} \sum_0^n \binom{n}{p} (\pm a^2)^{n-p} \frac{x^{2p}}{2p-m+1}. \qquad (445)$$

Последняя формула теряет значение для одного из членов суммы в случае $p = \frac{m-1}{2}$, и этот член тогда равен

$$\binom{n}{\frac{m-1}{2}} (\pm a^2)^{n-\frac{m-1}{2}} \ln x.$$

Заменяя в (444) m на $\frac{\pm r}{s}$, имеем

$$\int (x^2 \pm a^2)^n \sqrt[s]{x^{\pm r}}\, dx = sx \sqrt[s]{x^{\pm r}} \sum_0^n \binom{n}{p} (\pm a^2)^{n-p} \frac{x^{2p}}{2ps+s\pm r}. \quad (446)$$

Полагая в (444) $m=0$ и $m=-2n$ и заменяя в последнем случае p на $(n-p)$, получаем:

$$\int (x^2 \pm a^2)^n dx = \sum_0^n \binom{n}{p} (\pm a^2)^{n-p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}, \quad (447)$$

$$\int \left(\frac{x^2 \pm a^2}{x^2}\right)^n dx = -\sum_0^n \binom{n}{p} \frac{(\pm a^2)^p}{(2p-1)\, x^{2p-1}}. \quad (448)$$

Все эти формулы легко получаются непосредственно путём возведения в степень бинома $(x^2 \pm a^2)$.

IV) Подставляя в ту же начальную тригонометрическую формулу

$$\cos y = \frac{x}{a}, \quad \sec y = \frac{a}{x}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad dy = -\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

получаем, заменяя для результата m на $-(2n+m+1)$,

$$\int (a^2-x^2)^n x^m dx = \sum_0^n (-1)^{n+p} \binom{n}{p} \frac{x^{2n+m+1-2p}}{2n+m+1-2p}.$$

Подставляя сюда $n-p=p'$, замечая вместе с тем, что

$$(-1)^{n+p} = (-1)^{n-p}, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p'} = \binom{n}{p'},$$

и снова возвращаясь к обозначению p вместо p', получаем формулу

$$\int (a^2-x^2)^n x^m dx = x^{m+1} \sum_0^n (-1)^p \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{x^{2p}}{2p+m+1}. \quad (449)$$

В этой формуле также $n \geqslant 0$, значения же m ничем не ограничены. Заменяя m на $(-m)$ и на $\frac{\pm r}{s}$, получаем:

$$\int \frac{(a^2-x^2)^n}{x^m} dx = \frac{1}{x^{m-1}} \sum_0^n (-1)^p \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{x^{2p}}{2p-m+1}, \quad (450)$$

$$\int (a^2-x^2)^n \sqrt[s]{x^{\pm r}}\, dx = sx \sqrt[s]{x^{\pm r}} \sum_0^n (-1)^p \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{x^{2p}}{2ps+s\pm r}. \quad (451)$$

Формула (450) теряет значения для $p=\frac{m-1}{2}$ и соответствующий член суммы тогда равен

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\binom{n}{\frac{m-1}{2}} a^{2\left(n-\frac{m-1}{2}\right)} \ln x.$$

Принимая в формуле (449) $m=0$ и $m=-2n$ и заменяя в последнем случае p на $(n-p)$, получаем:

$$\int (a^2-x^2)^n\, dx=\sum_0^n (-1)^p \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}, \tag{452}$$

$$\int \left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^n dx=\sum_0^n (-1)^{n-p+1}\binom{n}{p}\frac{a^{2p}}{(2p-1)\,x^{2p-1}}. \tag{453}$$

V) Подставляя в ту же начальную формулу

$$\operatorname{cosec} y=\frac{x}{a}, \quad \operatorname{tg} y=\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}, \quad \sec y=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$dy=-\frac{a\,dx}{x\sqrt{x^2-a^2}},$$

получаем, заменяя для результата m на $(2m+1)$ и n на $(n-1)$

$$\int \left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)^m \frac{dx}{(\sqrt{x^2-a^2})^{2n+1}}=$$

$$=\frac{1}{(-a^2)^n}\sum_0^{n-1}(-1)^p\binom{n-1}{p}\frac{1}{2p+2m+1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)^{2p+2m+1}.$$

Заменяя $-a^2$ на $+a^2$ и обобщая формулу для того и другого знака при a^2, получаем:

$$\int \left(\frac{x^2}{x^2\pm a^2}\right)^m \frac{dx}{(\sqrt{x^2\pm a^2})^{2n+1}}=\frac{x^{2m+1}}{(\pm a^2)^n(\sqrt{x^2\pm a^2})^{2m+1}}\times$$

$$\times\sum_0^{n-1}(-1)^p\binom{n-1}{p}\frac{1}{2p+2m+1}\left(\frac{x^2}{x^2\pm a^2}\right)^p. \tag{454}$$

В этой формуле n — целое положительное число, $n\geqslant 1$, m — не ограничено в своих значениях. Заменяя в ней m на $(-m)$ и на $\frac{\pm r}{s}$, получаем:

$$\int \left(\frac{x^2\pm a^2}{x^2}\right)^m \frac{dx}{(\sqrt{x^2\pm a^2})^{2n+1}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x^2\pm a^2})^{2m-1}}{(\pm a^2)^n\, x^{2m-1}}\sum_0^{n-1}(-1)^p\binom{n-1}{p}\frac{1}{2p-2m+1}\left(\frac{x^2}{x^2\pm a^2}\right)^p, \tag{455}$$

$$\int\left(\sqrt[s]{\frac{x^2}{x^2\pm a^2}}\right)^{\pm r}\frac{dx}{(\sqrt{x^2\pm a^2})^{2n+1}}=\frac{sx}{(\pm a^2)^m\sqrt{x^2\pm a^2}}\sqrt[s]{\left(\frac{x^2}{x^2\pm a^2}\right)^{\pm r}}\times$$
$$\times\sum_0^{n-1}(-1)^p\binom{n-1}{p}\frac{1}{2ps+s\pm 2r}\left(\frac{x^2}{x^2\pm a^2}\right)^p. \quad (456)$$

Заменяя в (454) n на $(n-m)$, получаем:

$$\int\frac{x^{2m}dx}{(\sqrt{x^2\pm a^2})^{2n+1}}=\frac{x^{2m+1}}{(\pm a^2)^{n-m}(\sqrt{x^2\pm a^2})^{2m+1}}\times$$
$$\times\sum_0^{n-m-1}(-1)^p\binom{n-m-1}{p}\frac{1}{2p+2m+1}\left(\frac{x^2}{x^2\pm a^2}\right)^p \quad (n\geqslant m+1), \quad (457)$$

и после этого, заменяя ещё в последней формуле m на $(-m)$,

$$\int\frac{dx}{x^{2m}(\sqrt{x^2\pm a^2})^{2n+1}}=\frac{(\sqrt{x^2\pm a^2})^{2m-1}}{(\pm a^2)^{n+m}x^{2m-1}}\times$$
$$\times\sum_0^{n+m-1}(-1)^p\binom{n+m-1}{p}\frac{1}{2p-2m+1}\left(\frac{x^2}{x^2\pm a^2}\right)^p. \quad (458)$$

Формула (457) действительна для $n\geqslant m+1$; формула (458) — для всяких целых и положительных значений m и n; она теряет значение лишь в том случае, когда m и n оба одновременно равны нулю, и в этом случае имеем интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2}).$$

Заменяя в формуле (454) m на $\frac{2m+1}{2}$ и n на $(n-m-1)$ и затем m на $\left(-\frac{2m+1}{2}\right)$ и n на $(n+m)$, получаем формулы

$$\int\frac{x^{2m+1}dx}{(x^2\pm a^2)^n}=$$
$$=\frac{1}{2(\pm a^2)^{n-m-1}}\sum_0^{n-m-2}(-1)^p\binom{n-m-2}{p}\frac{1}{p+m+1}\left(\frac{x^2}{x^2\pm a^2}\right)^{p+m+1} \quad (459)$$
$$(n\geqslant m+2),$$

$$\int\frac{dx}{x^{2m+1}(x^2\pm a^2)^n}=\frac{1}{2(\pm a^2)^{n+m}}=$$
$$=\sum_0^{n+m-1}(-1)^p\binom{n+m-1}{p}\frac{1}{p-m}\left(\frac{x^2}{x^2\pm a^2}\right)^{p-m}. \quad (460)$$

Для первой из этих формул $n \geqslant m+2$, для второй m и n — всякие целые положительные числа и если для неё m и n одновременно равны нулю, то имеем интеграл $\int \frac{dx}{x} = \ln x$.

Формула (460) не даёт выражения для одного из членов суммы при $p=m$, и этот член тогда равен

$$\frac{(-1)^m}{(\pm a^2)^{n+m}} \binom{n+m-1}{m} \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

VI) Подставляя в ту же начальную формулу (271)

$$\sin y = \frac{x}{a}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \sec y = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

получаем:

$$\int \frac{x^{2n+1}dx}{(\sqrt{a^2-x^2})^{2n+m+2}} = \sum_0^n (-1)^{n+p} \binom{n}{p} \frac{a^{2p}}{(2p+m)(\sqrt{a^2-x^2})^{2p+m}}. \qquad (*)$$

Отсюда, заменяя m на $-2(m+n+1)$, получаем:

$$\int (a^2-x^2)^m x^{2n+1}\, dx = \frac{1}{2} \sum_0^n (-1)^{n+p+1} \binom{n}{p} a^{2p} \frac{(a^2-x^2)^{n+m-p+1}}{n+m-p+1}.$$

Этой формуле можем дать более простой вид, полагая $n-p=p'$, так что

$$(-1)^{n+p+1} = (-1)^{n-p+1} = (-1)^{p'+1}, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p'} = \binom{n}{p'}.$$

После этого, возвращаясь к обозначению p вместо p', имеем

$$\int (a^2-x^2)^m x^{2n+1} dx = \frac{1}{2} \sum_0^n (-1)^{p+1} \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{(a^2-x^2)^{p+m+1}}{p+m+1}. \quad (461)$$

Для этой формулы $n \geqslant 0$, показатель же m не ограничен в своих значениях.

Заменяя m на $(-m)$ и на $\frac{\pm r}{s}$, получаем:

$$\int \frac{x^{2n+1}dx}{(a^2-x^2)^m} = \frac{1}{2} \sum_0^n (-1)^{p+1} \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{(a^2-x^2)^{p-m+1}}{p-m+1}, \quad (462)$$

$$\int (\sqrt[s]{a^2-x^2})^{\pm r} x^{2n+1}\, dx =$$

$$= \frac{s}{2} (\sqrt[s]{a^2-x^2})^{\pm r} \sum_0^n (-1)^{p+1} \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{(a^2-x^2)^{p+1}}{ps+s\pm r}. \quad (463)$$

Формула (462) теряет значение для одного из членов суммы в случае $p=m-1$, и этот член тогда равен

$$(-1)^m \binom{n}{m-1} a^{2(n-m+1)} \ln \sqrt{a^2-x^2}.$$

Полагая в формуле (*) $m=\frac{\pm r}{s}-1$ и $m=-1$, получаем:

$$\int [\sqrt[s]{a^2-x^2}]^{\pm r} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^{2n+1} dx =$$

$$= s[\sqrt[2s]{a^2-x^2}]^{s\pm r} \sum_0^n (-1)^{n+p} \binom{n}{p} \frac{a^{2p}}{(2ps-s\pm r)(a^2-x^2)^p},$$

$$\int \left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^{2n+1} dx =$$

$$= \sqrt{a^2-x^2} \sum_0^n (-1)^{n+p} \binom{n}{p} \frac{1}{2p-1} \left(\frac{a^2}{a^2-x^2}\right)^p.$$

Принимая в (463) $\frac{r}{s}=\frac{2m+1}{2}, \frac{3m+1}{3}, \frac{3m+2}{3}, \ldots$, получаем:

$$\int [\sqrt{a^2-x^2}]^{2m+1} x^{2n+1}\, dx =$$

$$= [\sqrt{a^2-x^2}]^{2m+3} \sum_0^n (-1)^{p+1} \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{(a^2-x^2)^p}{2p+2m+3},$$

$$\int \frac{x^{2n+1}\, dx}{[\sqrt{a^2-x^2}]^{2m+1}} = \frac{1}{[\sqrt{a^2-x^2}]^{2m-1}} \sum_0^n (-1)^{p+1} \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{(a^2-x^2)^p}{2p-2m+1},$$

$$\int [\sqrt[3]{a^2-x^2}]^{3m+1} x^{2n+1}\, dx =$$

$$= \frac{3}{2} [\sqrt[3]{a^2-x^2}]^{3m+4} \sum_0^n (-1)^{p+1} \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{(a^2-x^2)^p}{3p+3m+4},$$

$$\int \frac{x^{2n+1}\, dx}{[\sqrt[3]{a^2-x^2}]^{3m+1}} = \frac{3}{2} \frac{1}{[\sqrt[3]{a^2-x^2}]^{3m-2}} \sum_0^n (-1)^{p+1} \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{(a^2-x^2)^p}{3p+3m+2},$$

$$\int [\sqrt[3]{a^2-x^2}]^{3m+2} x^{2n+1}\, dx =$$

$$= \frac{3}{2} [\sqrt{a^2-x^2}]^{3m+5} \sum_0^n (-1)^{p+1} \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{(a^2-x^2)^p}{3p+3m+5},$$

$$\int \frac{x^{2n+1}\, dx}{[\sqrt[3]{a^2-x^2}]^{3m+2}} = \frac{3}{2} \frac{1}{[\sqrt[3]{a^2-x^2}]^{3m-1}} \sum_0^n (-1)^{p+1} \binom{n}{p} a^{2(n-p)} \frac{(a^2-x^2)^p}{3p-3m+1}.$$

VII) Подставляя в формулу (265)

$$\sin y=\frac{x}{a},\quad \operatorname{tg} y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad \sec y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad dy=\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

и заменяя m на $2m$, получаем формулу

$$\int\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^m\frac{dx}{[\sqrt{a^2-x^2}]^{2n+1}}=$$
$$=\frac{x^{2m+1}}{a^{2n}[\sqrt{a^2-x^2}]^{2m+1}}\sum_0^{n-1}\binom{n-1}{p}\frac{1}{2p+2m+1}\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^p,\quad (464)$$

дающую пополнение для круга формул, полученных выше.

Точно так же, на основании этой формулы, получаем:

$$\int\left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^m\frac{dx}{[\sqrt{a^2-x^2}]^{2n+1}}=$$
$$=\frac{[\sqrt{a^2-x^2}]^{2m-1}}{a^{2n}x^{2m-1}}\sum_0^{n-1}\binom{n-1}{p}\frac{1}{2p-2m+1}\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^p\ (n\geqslant 1),\quad (465)$$

$$\int\left(\sqrt[s]{\frac{x^2}{a^2-x^2}}\right)^{\pm r}\frac{dx}{[\sqrt{a^2-x^2}]^{2n+1}}=$$
$$=\frac{sx}{a^{2n}\sqrt{a^2-x^2}}\left(\sqrt[s]{\frac{x^2}{a^2-x^2}}\right)^{\pm r}\sum_0^{n-1}\binom{n-1}{p}\frac{1}{2ps+s\pm 2r}\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^p,\ (466)$$

$$\int\frac{x^{2m}\,dx}{[\sqrt{a^2-x^2}]^{2n+1}}=$$
$$=\frac{x^{2m+1}}{a^{2(n-m)}[\sqrt{a^2-x^2}]^{2m+1}}\sum_0^{n-m-1}\binom{n-m-1}{p}\frac{1}{2p+2m+1}\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^p\quad (467)$$
$$(n\geqslant m+1),$$

$$\int\frac{dx}{x^{2m}[\sqrt{a^2-x^2}]^{2n+1}}=$$
$$=\frac{[\sqrt{a^2-x^2}]^{2m-1}}{a^{2(n+m)}x^{2m-1}}\sum_0^{n+m-1}\binom{n+m-1}{p}\frac{1}{2p-2m+1}\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^p,\quad (468)$$

$$\int\frac{x^{2m+1}\,dx}{(a^2-x^2)^n}=$$
$$=\frac{1}{2a^{2(n-m-1)}}\sum_0^{n-m-2}\binom{n-m-2}{p}\frac{1}{p+m+1}\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^{p+m+1}\quad (469)$$
$$(n\geqslant m+2),$$

$$\int\frac{dx}{x^{2m+1}(a^2-x^2)^n}=\frac{1}{2a^{2(n+m)}}\sum_0^{n+m-1}\binom{n+m-1}{p}\frac{1}{p-m}\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^{p-m}.\ (470)$$

Последняя формула для $p=m$ теряет значение, и соответствующий член суммы равен

$$\frac{1}{a^{2(n+m)}}\binom{n+m-1}{m}\ln\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Формулы (468) и (470) не дают выражений для интегралов в том случае, когда m и n одновременно равны нулю, и в этих условиях имеем интегралы

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a} \quad \text{и} \quad \int\frac{dx}{x}=\ln x.$$

VIII) В целях пополнения группы формул, подставляем

$$\cos y=\frac{x}{a}, \quad \sec y=\frac{a}{x}, \quad \operatorname{tg} y=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad dy=-\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

в ту же формулу (265).

Заменяя для результата подстановки m на $(2m+1)$, получаем:

$$\int\left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^m\frac{dx}{x^{2n+1}}=$$
$$=-\frac{1}{2a^{2n}}\sum_0^{n-1}\binom{n-1}{p}\frac{1}{p+m+1}\left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^{p+m+1} \quad (n\geqslant 1). \tag{471}$$

Точно так же, на основании этой формулы, получаем:

$$\int\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^m\frac{dx}{x^{2n+1}}=$$
$$=-\frac{1}{2a^{2n}}\sum_0^{n-1}\binom{n-1}{p}\frac{1}{p-m+1}\left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^{p-m+1} \quad (n\geqslant 1). \tag{472}$$

В случае $p=m-1$ соответствующий член суммы равен

$$-\frac{1}{a^{2n}}\binom{n-1}{m-1}\ln\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x},$$

$$\int\left(\sqrt[s]{\frac{a^2-x^2}{x^2}}\right)^{\pm r}\frac{dx}{x^{2n+1}}=$$
$$=-\frac{s}{2a^{2n}}\left(\sqrt[s]{\frac{a^2-x^2}{x^2}}\right)^{\pm r}\sum_0^{n-1}\binom{n-1}{p}\frac{1}{ps+s\pm r}\left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^{p+1}, \tag{473}$$

$$\int\frac{(a^2-x^2)^m}{x^{2n+1}}dx=$$
$$=-\frac{1}{2a^{2(n-m)}}\sum_0^{n-m-1}\binom{n-m-1}{p}\frac{1}{p+m+1}\left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^{p+m+1} \tag{474}$$
$$(n\geqslant m+1),$$

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^m x^{2n+1}} =$$

$$= \frac{-1}{2a^{2(m+n)}} \sum_{0}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{p} \frac{1}{p-m+1} \left(\frac{a^2+x^2}{x^2}\right)^{p-m+1}. \tag{475}$$

В случае $p=m-1$ соответствующий член суммы равен

$$\frac{1}{a^{2(n+m)}} \binom{n+m-1}{m-1} \ln \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x},$$

$$\int \frac{[\sqrt{a^2-x^2}]^{2m+1}}{x^{2n}}\,dx =$$

$$= -\frac{[\sqrt{a^2-x^2}]^{2m+3}}{a^{2(n-m-1)}\,x^{2m+3}} \sum_{0}^{n-m-2} \binom{n-m-2}{p} \frac{1}{2p+2m+3} \left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^p \tag{476}$$

$$(n \geqslant m+1),$$

$$\int \frac{dx}{x^{2n}[\sqrt{a^2-x^2}]^{2m+1}} =$$

$$= -\frac{x^{2m-1}}{a^{2(n+m)}[\sqrt{a^2-x^2}]^{2m-1}} \sum_{0}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{p} \frac{1}{2p-2m+1} \left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^p. \tag{477}$$

В том случае, когда для последней формулы m и n одновременно равны нулю, имеем интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$,

$$\int \frac{dx}{[\sqrt{a^2-x^2}]^{2m+1}} =$$

$$= \frac{x}{a^{2m}\sqrt{a^2-x^2}} \sum_{0}^{m-1} \binom{m-1}{p} \frac{1}{2p+1} \left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^p \quad (m \geqslant 1). \tag{478}$$

Примеры

6) $$\int x^{2n+1}\,dx = \frac{1}{2} \sum_{0}^{n} \binom{n}{p} (\mp a^2)^{n-p} \frac{(x^2 \pm a^2)^{p+1}}{p+1}.$$

Формула (433) при $m=0$ для элементарного интеграла $\int x^{2n+1}\,dx = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + c$ даёт выражение, содержащее произвольную постоянную $\pm a^2$, которая при надлежащем преобразовании должна исчезнуть.

7) $$\int \frac{x^7\,dx}{(x^2-5)^3} = \frac{2x^6-30x^4+375}{4\,(x^2-5)^2} + \frac{15}{2} \ln (x^2-5).$$

8) $$\int \frac{3x^5-4x^3}{(x^2-1)^5}\,dx = -\frac{18x^4-28x^2+7}{24\,(x^2-1)^4}.$$

9) $\int (1+x^2)^{\frac{9}{14}} x^3\, dx = \frac{7}{851} (23x^4 + 9x^2 - 14)(1+x^2)^{\frac{9}{14}}$.

10) $\int \frac{x^5\, dx}{(\sqrt[6]{x^2-4})^{13}} = \frac{3}{35} \frac{7x^4 - 336x^2 + 1152}{(\sqrt[6]{x^2-4})^7}$.

11) $\int \frac{dx}{(\sqrt{1+2x^2})^5} = \frac{x(3+4x^2)}{3(\sqrt{1+2x^2})^3}$.

12) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2-2x-1})^5} = \frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{6(\sqrt{x^2-2x-1})^3}$ (подст. $x-1=z$).

13) $\int \frac{dx}{x^4(\sqrt{x^2-8})^3} = \frac{8+4x^2-x^4}{192x^3\sqrt{x^2-8}}$.

14) $\int \frac{(x^2+5)^2}{x^4\sqrt[3]{x}}\, dx = \frac{3}{2} \frac{x^4-5x^2-5}{x^3\sqrt[3]{x}}$.

15) $\int \frac{dx}{x^7(1+x^2)^3} = -\frac{20x^{10}+100x^8+110x^6+20x^4-5x^2+2}{12x^6(1+x^2)^2} + 5\ln\frac{1+x^2}{x^2}$.

16) $\int \left(\sqrt[9]{\frac{2+x^2}{x^2}}\right)^7 \frac{dx}{(\sqrt{2+x^2})^3} = -\frac{9}{10}\left(\sqrt[18]{\frac{2+x^2}{x^2}}\right)^5$.

17) $\int \frac{x^4\, dx}{(\sqrt{\sqrt{10}-x^2})^9} = \frac{x^5(7\sqrt{10}-2x^2)}{350(\sqrt{\sqrt{10}-x^2})^7}$;

18) $\int \frac{x^2\, dx}{(\sqrt{3-x^2})^3} = \frac{x}{\sqrt{3-x^2}} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Интеграл не удовлетворяет условиям формулы (467) и вычисляется непосредственно (подст. $x=\sqrt{3}\sin\varphi$).

19) $\int \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4}\, dx = \frac{(4x^2-25)\sqrt{25-x^2}}{3x^3} - \arccos\frac{x}{5}$.

Формула (476) неприменима, и выражение для интеграла получаем, пользуясь формулой (430).

20) $\int \frac{dx}{(\sqrt{1-2x^2})^7} = \frac{x(32x^4-40x^2+15)}{15(\sqrt{1-2x^2})^5}$.

21) $\int \frac{dx}{(\sqrt{-x^2+6x-7})^5} = -\frac{(x-3)(x^2-6x+6)}{6(\sqrt{-x^2+6x-7})^3}$ (подст. $x-3=z$).

§ 3. Формулы для интегралов

$$\int (a+2bx\pm cx^2)^n\, dx \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{[\sqrt{a+2bx\pm cx^2}]^{2n+1}}$$

Представив трёхчлен $a+2bx\pm cx^2$ в виде

$$\frac{1}{c}\left[(ac\mp b^2)\pm(cx\pm b)^2\right] = \frac{1}{c}(k^2\pm z^2),$$

на основании формул (447), (452), (443) и (478), получаем:

$$\int(a+2bx\pm cx^2)^n\,dx=$$

$$=\frac{1}{c^{n+1}}\sum_{0}^{n}(\pm 1)^p\binom{n}{p}(ac\mp b^2)^{n-p}\frac{(cx\pm b)^{2p+1}}{2p+1}\qquad (c>0),\quad (479)$$

$$\int\frac{dx}{(\sqrt{a+2bx\pm cx^2})^{2n+1}}=$$

$$=\frac{1}{(ac\mp b^2)^n}\sum_{0}^{n-1}(\mp 1)^p\binom{n-1}{p}\frac{c^{n-1-p}}{2p+1}\left(\frac{cx\pm b}{\sqrt{a+2bx\pm cx^2}}\right)^{2p+1}\quad (480)$$

$$(c>0).$$

Обозначая $\sqrt{a+2bx\pm cx^2}=R$, видим, что

$$\frac{cx\pm b}{\sqrt{a+2bx\pm cx^2}}=\pm R',$$

так что интеграл $\int\frac{dx}{(\sqrt{a+2bx\pm cx^2})^{2n+1}}$ является функцией, производной от $\sqrt{a+2bx\pm cx^2}$.

Формулу (480) можем представить в более удобном для пользования виде

$$\int\frac{dx}{(\sqrt{a+2bx\pm cx^2})^{2n+1}}=$$

$$=\frac{c^{n-1}(cx\pm b)}{(ac\mp b^2)^n\sqrt{a+2bx\pm cx^2}}\sum_{0}^{n-1}(\mp 1)^p\binom{n-1}{p}\frac{1}{(2p+1)\,c^p}\,\frac{(cx\pm b)^{2p}}{(a+2bx\pm cx^2)^p}.$$

(481)

Примеры

22) $\int(-2x^2-2x+1)^3\,dx=$

$$=\frac{1}{16}\left\{27(2x+1)-9(2x+1)^3+\frac{9}{5}(2x+1)^5-\frac{1}{7}(2x+1)^7\right\}=$$

$$=-\frac{1}{35}(40x^7+140x^6+84x^5-140x^4-70x^3+105x^2-35x-43).$$

23) $\int(x^2-x-1)^2(5x-1)\,dx=\frac{5}{6}(x^2-x-1)^3+$

$$+\frac{1}{320}(2x-1)\{375-50(2x-1)^2+3(2x-1)^4\}.$$

24) $\int\frac{(3x+1)\,dx}{(\sqrt{2x^2-8x+1})^5}=\frac{8x^3-48x^2+54x-1}{42(\sqrt{2x^2-8x+1})^3}.$

25) $\int\frac{8x^3-8x-1}{(\sqrt{1+2x-4x^2})^5}dx=\frac{488x^3-216x^2-156x-27}{75(\sqrt{1+2x-4x^2})^3}.$

26) Подставляя в формулы (232), (233), (242) и (243)

a) $\operatorname{ctg} x = \frac{y}{a}$, $\sin x = \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}$, $\cos x = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$, $dx = \frac{-a\,dy}{a^2+y^2}$,

$x = \operatorname{arcctg} \frac{y}{a}$ или $= -\operatorname{arctg}\frac{y}{a}$, $\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\ln(y+\sqrt{a^2+y^2})$,

b) $\cos x = \frac{y}{a}$, $\sin x = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}$, $dx = \frac{-dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$, $x = \arccos\frac{y}{a}$

или $= -\arcsin\frac{y}{a}$, $\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \ln\sqrt{\frac{a-y}{x+y}}$ или $= -\ln\sqrt{\frac{a+y}{a-y}}$,

c) $\sin x = \frac{y}{a}$, $\cos x = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}$, $dx = d\arcsin\frac{y}{a}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}$,

d) $\operatorname{cosec} x = \frac{y}{a}$, $\sin x = \frac{a}{y}$, $\cos x = \frac{\sqrt{y^2-a^2}}{y}$, $dx = \frac{-a\,dy}{y\sqrt{y^2-a^2}}$,

$$x = \operatorname{arccosec}\frac{y}{a} \text{ или } = -\operatorname{arcsec}\frac{y}{a},\quad \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \ln(y-\sqrt{y^2-a^2})$$
$$\text{или } = -\ln(y+\sqrt{y^2-a^2}),$$

получаем после небольших преобразований, переходя снова к обозначению переменной через x, формулы для интегралов

$$\int (a^2 \pm x^2)^n\,dx,\quad \int \frac{dx}{(a^2\pm x^2)^n},\quad \int [\sqrt{a^2\pm x^2}]^{2n+1}\,dx,\quad \int \frac{dx}{[\sqrt{a^2\pm x^2}]^{2n+1}},$$
$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad \int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad \int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}};\quad \int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}},$$
$$\int \frac{dx}{x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}},\quad \int \frac{dx}{x^{2n+1}\sqrt{a^2-x^2}},\quad \int \frac{dx}{x^{2n}\sqrt{x^2-a^2}},\quad \int \frac{dx}{x^{2n+1}\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Все эти формулы получены непосредственно в гл. III и IV.

ГЛАВА VII

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ВМЕСТЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Интегралы выражений, содержащих вместе тригонометрические и алгебраические функции, вычисляются в конечном виде лишь в самых элементарных случаях. Как видно будет из дальнейшего, не вычисляются уже такие простые интегралы, как

$$\int\frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int\frac{\cos x}{x}\,dx,\quad \int\frac{x}{\sin x}\,dx,\quad \int\frac{x}{\cos x}\,dx,\quad \int x\operatorname{tg} x\,dx \text{ и т. д.}$$

Основной приём вычисления — интегрирование по частям; при этом, когда интегрирование выполнимо, приходим в результате к интегралам элементарных, тригонометрических и алгебраических функций, так что в качестве основных формул достаточно принять формулы (1) — (17).

§ 1. Интегралы вида

$$\int x^n\sin ax\,dx,\quad \int x^n\cos ax\,dx \quad \text{и} \quad \int x^n\sin ax\cos bx\,dx.$$

Вычисляя интеграл $\int x^n\cos x\,dx$ двукратным интегрированием по частям

$$\int x^n\cos x\,dx = \int x^n\,d\sin x = x^n\sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx =$$
$$= x^n\sin x + n\int x^{n-1}\,d\cos x = \ldots,$$

получаем формулу

$$\int x^n\cos x\,dx = x^n\sin x + nx^{n-1}\cos x - n(n-1)\int x^{n-2}\cos x\,dx. \quad (482)$$

Таким же путём получаем:

$$A' \ldots \int x^n \sin x\,dx =$$
$$= -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)\int x^{n-2} \sin x\,dx. \quad (483)$$

Последовательно применяя формулу (482), имеем

$$\int x^n \cos x\,dx = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1)x^{n-2} \sin x -$$
$$- n(n-1)(n-2)x^{n-3} \cos x + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \sin x + \ldots,$$

или

$$\int x^n \cos x\,dx = \sum_{p=0}^{p=n} p!\binom{n}{p} x^{n-p} \sin\left(x + p\frac{\pi}{2}\right). \quad (484)$$

Точно так же получаем формулу для второго интеграла

$$\int x^n \sin x\,dx = -\sum_{p=0}^{p=n} p!\binom{n}{p} x^{n-p} \cos\left(x + p\frac{\pi}{2}\right). \quad (485)$$

На основании этих формул легко получаем также

$$\int x^n \cos ax\,dx = \sum_{p=0}^{p=n} p!\binom{n}{p} \frac{x^{n-p}}{a^{p+1}} \sin\left(ax + p\frac{\pi}{2}\right), \quad (486)$$

$$\int x^n \sin ax\,dx = -\sum_{p=0}^{p=n} p!\binom{n}{p} \frac{x^{n-p}}{a^{p+1}} \cos\left(ax + p\frac{\pi}{2}\right). \quad (487)$$

Выражая $\sin ax \sin bx$ по формуле

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x],$$

на основании формулы (486) получаем:

$$\int x^n \sin ax \sin bx\,dx = \frac{1}{2}\sum_{0}^{n} \frac{p!\binom{n}{p} x^{n-p}}{(a^2-b^2)^{p+1}} \left\{(a+b)^{p+1} \sin\left[(a-b)x + \right.\right.$$
$$\left.\left. + p\frac{\pi}{2}\right] - (a-b)^{p+1} \sin\left[(a+b)x + p\frac{\pi}{2}\right]\right\}. \quad (488)$$

Таким же путём получаем:

$$\int x^n \cos ax \cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sum_{0}^{n} \frac{p!\binom{n}{p} x^{n-p}}{(a^2-b^2)^{p+1}} \left\{(a+b)^{p+1}\sin\left[(a-b)x + p\frac{\pi}{2}\right] + (a-b)^{p+1}\sin\left[(a+b)x + p\frac{\pi}{2}\right]\right\}, \quad (489)$$

$$\int x^n \sin ax \cos bx\,dx = -\frac{1}{2}\sum_{0}^{n} \frac{p!\binom{n}{p} x^{n-p}}{(a^2-b^2)^{p+1}} \left\{(a+b)^{p+1}\cos\left[(a-b)x + p\frac{\pi}{2}\right] + (a-b)^{p+1}\cos\left[(a+b)x + p\frac{\pi}{2}\right]\right\}. \quad (490)$$

§ 2. Интегралы вида $\int F(x, \sin x, \cos x)\,dx$, где F — целая рациональная функция своих аргументов

На основании формул высшей алгебры, приведённых в § 3 гл. V, имеем

1) $$\int x^n \cos^{2m} x\,dx = \frac{\binom{2m}{m} x^{n+1}}{2^{2m}(n+1)} + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{p=0}^{p=m-1} \binom{2m}{p} \int x^n \cos(2m-2p)x\,dx,$$

2) $$\int x^n \cos^{2m+1} x\,dx = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{p=0}^{p=m} \binom{2m+1}{p} \int x^n \cos(2m+1-2p)x\,dx,$$

3) $$\int x^n \sin^{2m} x\,dx = \frac{\binom{2m}{m} x^{n+1}}{2^{2m}(n+1)} + \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p \binom{2m}{p} \int x^n \cos(2m-2p)x\,dx,$$

4) $$\int x^n \sin^{2m+1} x\,dx = \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \binom{2m+1}{p} \int x^n \sin(2m+1-2p)x\,dx.$$

Получающиеся в правой части интегралы вычисляются по формулам (486) и (487).

Всякий интеграл вида $\int x^n \sin^p x \cos^q x\,dx$ может быть приведён к сумме интегралов вида

$$\int x^n \sin ax\,dx \quad \text{и} \quad \int x^n \cos bx\,dx$$

и, следовательно, также вычисляется в конечном виде.

Отсюда следует, что вычисляется и всякий интеграл $\int F(x, \sin x, \cos x)\,dx$, если F — целая рациональная функция своих аргументов.

Примеры

1) $$\int x^2 \cos^5 x\,dx = \frac{1}{200} x\cos 5x + \left(\frac{1}{80}x^2 - \frac{1}{1000}\right)\sin 5x + \\ + \frac{5}{72} x\cos 3x + \left(\frac{5}{48}x^2 - \frac{5}{216}\right)\sin 3x + \frac{5}{4} x\cos x + \left(\frac{5}{8}x^2 - \frac{5}{4}\right)\sin x.$$

2) $$\int x^3 \sin^3 x\,dx = \frac{1}{12}\left(x^3 - \frac{2}{3}x\right)\cos 3x - \frac{1}{12}\left(x^2 - \frac{2}{9}\right)\sin 3x - \\ - \frac{3}{4}(x^3 - 6x)\cos x + \frac{9}{4}(x^2 - 2)\sin x.$$

3) $$\int x^2 \sin^6 x\,dx = \frac{5}{48}x^6 - \frac{1}{192}\left(x^2 - \frac{1}{18}\right)\sin 6x - \frac{1}{576} x\cos 6x + \\ + \frac{3}{64}\left(x^2 - \frac{1}{8}\right)\sin 4x + \frac{3}{128} x\cos 4x - \frac{15}{64}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\sin 2x - \frac{15}{64} x\cos 2x.$$

4) $$\int x^2 \sin^2 x \cos x\,dx = \frac{1}{3} x^2 \sin^3 x - \frac{1}{18} x\cos 3x + \\ + \frac{1}{54}\sin 3x + \frac{1}{2} x\cos x - \frac{1}{2}\sin x.$$

§ 3. Интегралы вида $\int \frac{\sin x}{x^n}\,dx$ и $\int \frac{\cos x}{x^n}\,dx$

Интегрированием по частям получаем формулы

$$\int \frac{\cos x}{x^n}\,dx = -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\sin x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \\ - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int \frac{\cos x}{x^{n-2}}\,dx \quad (n > 2), \tag{491}$$

$$\int \frac{\sin x}{x^n}\,dx = -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{\cos x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \\ - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int \frac{\sin x}{x^{n-2}}\,dx \quad (n > 2). \tag{492}$$

Последовательно применяя эти формулы, приходим при n нечётном к интегралам $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ и $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$, а при n чётном к интегралам $\int \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ и $\int \frac{\sin x}{x^2}\,dx$; последние же интегрированием по частям также приводятся к интегралам $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ и $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$, т. е. в конечном счёте и в том и в другом случае приходим к интегралам $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ и $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$. Эти интегралы не выражаются какой-либо конечной комбинацией элементарных функций (алгебраических, тригонометрических, логарифмических и т. д.) и причисляются поэтому к функциям не интегрируемым и в математической литературе носят особое название «интеграл-синус» и «интеграл-косинус».

Из курса Дифференциального исчисления известны разложения функций $\sin x$ и $\cos x$ в ряды:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Выражая $\sin x$ и $\cos x$ этими рядами, получаем:

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots$$

$$\int \frac{\cos x}{x}\,dx = \ln x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + \ldots$$

§ 4. Интегралы вида $\int \frac{x\,dx}{\sin^n x}$ и $\int \frac{x\,dx}{\cos^n x}$

Находим сначала простейшие интегралы этого вида:

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = \frac{x \sin x}{\cos x} + \ln \cos x,$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -\frac{x \cos x}{\sin x} + \ln \sin x.$$

Интегрированием по частям получаем формулы приведения:

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^n x} = \frac{(n-2)\,x \sin x - \cos x}{(n-1)(n-2)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x\,dx}{\cos^{n-2} x}, \tag{493}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^n x} = -\frac{(n-2)\,x \cos x + \sin x}{(n-1)(n-2)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x\,dx}{\sin^{n-2} x}. \tag{494}$$

При n чётном последовательным применением этих формул интегралы приводятся в конечном счёте к интегралам $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$ и $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$, для которых выражения получены выше, и, следовательно, при n чётном интегралы вычисляются в конечном виде. При n нечётном приходим к интегралам $\int \frac{x\,dx}{\cos x}$ и $\int \frac{x\,dx}{\sin x}$, которые в конечном виде не вычисляются.

Интегрированием по частям получаем:

$$\int \frac{x\,dx}{\sin x} = x \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \int \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}\,dx.$$

Подстановкой $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + y$ последний интеграл приводим к виду $2 \int \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + y\right) dy$ и на основании известного из дифференциального исчисления ряда

$$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + y\right) = \\ = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{2}{1!} y + \frac{2^3}{3!} y^3 + \frac{5 \cdot 2^5}{5!} y^5 + \frac{61 \cdot 2^7}{7!} y^7 + \frac{1385 \cdot 2^9}{9!} y^9 + \ldots$$

для интеграла $\int \frac{x\,dx}{\sin x}$ получаем:

$$\int \frac{x\,dx}{\sin x} = x \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}{2 \cdot 1!} - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^4}{4 \cdot 3!} - \frac{5\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^6}{6 \cdot 5!} - \\ - \frac{61\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^8}{8 \cdot 7!} - \frac{1385\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{10}}{10 \cdot 9!} - \ldots$$

Подставляя сюда $\frac{\pi}{2} - x$ вместо x, легко получаем ряд и для другого интеграла:

$$\int \frac{x\,dx}{\cos x} = x \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{2 \cdot 1!} - \frac{x^4}{4 \cdot 3!} - \frac{5x^6}{6 \cdot 5!} - \\ - \frac{61x^8}{8 \cdot 7!} - \frac{1385\,x^{10}}{10 \cdot 9!} - \ldots$$

§ 5. Интегралы вида

$$\int \frac{\sin^m x}{x^n} dx, \quad \int \frac{x^m}{\sin^n x} dx, \quad \int \frac{\cos^m x}{x^n} dx, \quad \int \frac{x^m}{\cos^n x} dx$$

Интегрированием по частям получаем формулы:

$$\int \frac{\cos^m x}{x^n} dx = \frac{\cos^{m-1} x\,[mx \sin x - (n-2) \cos x]}{(n-1)(n-2)\,x^{n-1}} + \\ + \frac{m(m-1)}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\cos^{m-2} x}{x^{n-2}} dx - \frac{m^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\cos^m x}{x^{n-2}} dx, \quad (495)$$

$$\int \frac{\sin^m x}{x^n}\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x\,[mx\cos x + (n-2)\sin x]}{(n-1)(n-2)\,x^{n-1}} +$$
$$+\frac{m(m-1)}{(n-1)(n-2)}\int \frac{\sin^{m-2} x}{x^{n-2}}\,dx - \frac{m^2}{(n-1)(n-2)}\int \frac{\sin^m x}{x^{n-2}}\,dx, \quad (496)$$

$$\int \frac{x^m}{\cos^n x}\,dx = \frac{x^{m-1}[(n-2)\,x\sin x - m\cos x]}{(n-1)(n-2)\cos^{n-1}x} +$$
$$+\frac{m(m-1)}{(n-1)(n-2)}\int \frac{x^{m-2}}{\cos^{n-2} x}\,dx + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x^m}{\cos^{n-2} x}\,dx, \quad (497)$$

$$\int \frac{x^m}{\sin^n x}\,dx = -\frac{x^{m-1}[(n-2)\,x\cos x + m\sin x]}{(n-1)(n-2)\sin^{n-1} x} +$$
$$+\frac{m(m-1)}{(n-1)(n-2)}\int \frac{x^{m-2}}{\sin^{n-2} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x^m}{\sin^{n-2} x}\,dx. \quad (498)$$

Интегралы $\int \frac{\cos^k x}{x}\,dx$, $\int \frac{\sin^k x}{x}\,dx$, $\int \frac{\cos^k x}{x^2}\,dx$ и $\int \frac{\sin^k x}{x^2}\,dx$, к которым приходим в результате применения формул (495), не вычисляются в конечном виде.

При $m=1$ из формул (495) следуют формулы (491). При $m=1$ из формул (497) следуют формулы (494) и, если n — чётное число, то интегралы, как там показано, вычисляются в конечном виде. Во всех остальных случаях, т. е. при $m=1$ и n нечётном и при всяком $m>1$, интегралы в конечном виде не вычисляются.

Интегралы $\int \frac{dx}{x\cos x}$, $\int \frac{dx}{x\sin x}$, $\int \frac{dx}{x^m\cos^n x}$ и $\int \frac{dx}{x^m \sin^n x}$ в конечном виде не вычисляются.

§ 6. Интегралы вида $\int x^m \operatorname{tg}^n x\,dx$ и $\int x^m \operatorname{ctg}^n x\,dx$

1) Представив интеграл $\int x \operatorname{tg}^n x\,dx$ в виде

$$\int x d\,\frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int x \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx,$$

интегрированием по частям получаем:

$$\int x\operatorname{tg}^n x\,dx =$$
$$= \frac{x\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1}\int \operatorname{tg}^{n-1} x\,dx - \int x\operatorname{tg}^{n-2} x\,dx \quad (n>1); \quad (499)$$

точно таким же путём получаем:

$$\int x\operatorname{ctg}^n x\,dx =$$
$$= -\frac{x\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} + \frac{1}{n-1}\int \operatorname{ctg}^{n-1} x\,dx - \int x\operatorname{ctg}^{n-2} x\,dx \quad (n>1). \quad (500)$$

Для первых интегралов правых частей формул имеем выражения (251)—(254).

Последовательным применением формул, снижая каждый раз степень n на две единицы, при n чётном приходим в конце концов к интегралу $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$ и, следовательно, при n чётном интегралы всегда вычисляются в конечном виде; при n нечётном формулы приводят к невычисленным интегралам $\int x \operatorname{tg} x\,dx$ и $\int x \operatorname{ctg} x\,dx$.

Выражая $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ рядами

$$\operatorname{tg} x = B_1 \frac{2^2(2^2-1)}{2!}x + B_3 \frac{2^4(2^4-1)}{4!}x^3 + B_5 \frac{2^6(2^6-1)}{6!}x^5 + \ldots,$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - B_1 \frac{2^2}{2!}x - B_3 \frac{2^4}{4!}x^3 - B_5 \frac{2^6}{6!}x^5 - \ldots,$$

где $B_1, B_3, B_5, \ldots$ — так называемые числа Бернулли,

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = \frac{1}{30}, \quad B_9 = \frac{5}{66},$$

$$B_{11} = \frac{691}{2730}, \quad B_{13} = \frac{7}{6}, \quad B_{15} = \frac{3617}{510}, \ldots,$$

для интегралов $\int x \operatorname{tg} x\,dx$ и $\int x \operatorname{ctg} x\,dx$ получаем:

$$\int x \operatorname{tg} x\,dx = B_1 \frac{2^2(2^2-1)}{3!}x^3 + B_3 \frac{2^4(2^4-1)}{5!}x^5 + B_5 \frac{2^6(2^6-1)}{7!}x^7 + \ldots,$$

$$\int x \operatorname{ctg} x\,dx = x - B_1 \frac{2^2}{3!}x^3 - B_3 \frac{2^4}{5!}x^5 - B_5 \frac{2^6}{7!}x^7 - \ldots,$$

II) $\int x^m \operatorname{tg}^n x\,dx =$

$$= \frac{x^m \operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \frac{m}{n-1}\int x^{m-1}\operatorname{tg}^{n-1} x\,dx - \int x^m \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx, \tag{501}$$

$\int x^m \operatorname{ctg}^n x\,dx =$

$$= -\frac{x^m \operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} + \frac{m}{n-1}\int x^{m-1}\operatorname{ctg}^{n-1} x\,dx - \int x^m \operatorname{ctg}^{n-2} x\,dx. \tag{502}$$

Независимо от того, чётное или нечётное n, в результате каждого применения этих формул приходим к выражениям с интегралами, содержащими $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$ как в чётной, так и в нечётной степени. Поэтому в конечном выражении всегда будем иметь невычисляемые интегралы вида $\int x^k \operatorname{tg} x\,dx$ или

$$\int x^k \operatorname{ctg} x\,dx.$$

Опуская случай, когда m или n равен нулю, имеем единственный, составляющий по существу исключение, случай конечного вычисления интегралов. Этот случай рассмотрен выше, когда $m=1$ и n — чётное число. Первые интегралы правых частей формул тогда имеют вид $\int \operatorname{tg}^{2k+1} x\,dx$ и $\int \operatorname{ctg}^{2k+1} x\,dx$, и в результате применения формул приходим к сумме интегралов этого вида и к интегралу $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$.

§ 7. Интегралы вида $\int x^m \frac{\sin^p x}{\cos^q x}\,dx$ и $\int x^m \frac{\cos^p x}{\sin^q x}$

Интегрированием по частям получаем формулы:

$$\int x^m \frac{\sin^p x}{\cos^q x}\,dx = \frac{x^m \sin^{p-1} x}{(q-1)\cos^{q-1} x} - \frac{m}{q-1}\int x^{m-1}\frac{\sin^{p-1} x}{\cos^{q-1} x}\,dx - \frac{p-1}{q-1}\int x^m \frac{\sin^{p-2} x}{\cos^{q-2} x}\,dx, \tag{503}$$

$$\int x^m \frac{\cos^p x}{\sin^q x}\,dx = -\frac{x^m \cos^{p-1} x}{(q-1)\sin^{q-1} x} + \frac{m}{q-1}\int x^{m-1}\frac{\cos^{p-1} x}{\sin^{q-1} x}\,dx - \frac{p-1}{q-1}\int x^m \frac{\cos^{p-2} x}{\sin^{q-2} x}\,dx. \tag{504}$$

Принимая в этих формулах $m=1$, замечаем, что первые интегралы правых частей формул, как интегралы только тригонометрических выражений, всегда вычисляются в конечном виде.

Если затем q — чётное число, то последовательное применение формул приводит в конечном счёте к интегралам

$$\int x \sin^k x\,dx \quad \text{и} \quad \int x\cos^k x\,dx \qquad (k=0, 1, 2, \ldots), \quad \text{если } p \geqslant q,$$

или к интегралам

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^{2k} x}, \quad \int x\frac{\sin x}{\cos^{2k} x}\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{x\,dx}{\sin^{2k} x}, \quad \int x\frac{\cos x}{\sin^{2k} x}\,dx$$
$$(k=1, 2, \ldots), \quad \text{если } p < q.$$

Эти интегралы как при том, так и при другом условии, согласно § 2 и § 5 вычисляются в конечном виде, так что и для рассматриваемых интегралов при условии, что $m=1$ и q — чётное число, получаем конечные выражения.

Если q — нечётное число, а p — чётное, то применением формул в зависимости от того, $p<q$ или $p>q$, приходим к интегралам вида

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^{2k+1} x} \text{ или } \int x \frac{\sin^{2k} x}{\cos x}\,dx =$$

$$= \int x \sum_{p=1}^{p=k} (-1)^p \binom{k}{p} \cos^{2p-1} x\,dx + \int \frac{x\,dx}{\cos x} \quad (k=0, 1, 2, \ldots),$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^{2k+1} x} \text{ или } \int x \frac{\cos^{2k} x}{\sin x}\,dx =$$

$$= \int x \sum_{p=1}^{p=k} (-1)^p \binom{k}{p} \sin^{2p-1} x\,dx + \int \frac{x\,dx}{\sin x}.$$

Отсюда видно, что и в том и в другом случае приходим к невычисляемым в конечном виде интегралам и, следовательно, рассматриваемые интегралы при $m=1$, нечётном q и чётном p не вычисляются в конечном виде.

Если оба числа p и q — нечётные, то при $p<q$ последовательным применением формул приходим к интегралам

$$\int x \frac{\sin x}{\cos^{2k+1} x}\,dx = \frac{x}{2k \sin^{2k} x} - \frac{1}{2k} \int \frac{dx}{\cos^{2k} x} \qquad (k=1, 2, 3, \ldots),$$

$$\int x \frac{\cos x}{\sin^{2k+1} x}\,dx = -\frac{x}{2k \cos^{2k} x} + \frac{1}{2k} \int \frac{dx}{\sin^{2k} x},$$

т. е. к интегралам чисто тригонометрических выражений и, следовательно, при условиях, что $m=1$, p и q — нечётные, $p<q$, интегралы вычисляются в конечном виде.

Если же в условиях нечётных p и q имеем $p=q$ или $p>q$, то в первом случае приходим к интегралам

$$\int x \operatorname{tg} x\,dx \quad \text{и} \quad \int x \operatorname{ctg} x\,dx$$

и во втором имеем:

$$\int x \frac{\sin^{2k+1} x}{\cos x}\,dx = -\int x \sum_{p=1}^{p=k} (-1)^p \binom{k}{p} \cos^{2p-1} x\,d\cos x + \int x \operatorname{tg} x\,dx$$

и

$$\int x \frac{\cos^{2k+1} x}{\sin x}\,dx = \int x \sum_{p=1}^{p=k} (-1)^p \binom{k}{p} \sin^{2p-1} x\,d\sin x + \int x \operatorname{ctg} x\,dx$$

$$(k=1, 2, 3, \ldots),$$

т. е. и в том и в другом случаях приходим к не вычисляемым в конечном виде интегралам $\int x \operatorname{tg} x\,dx$ и $\int x \operatorname{ctg} x\,dx$.

Следовательно, в условиях $m=1$, p и q — нечётные и $p \geqslant q$ интегрирование невыполнимо.

Принимая $m=2$ и сначала $p=1$, имеем:

$$\int x^2 \frac{\sin x}{\cos^q x}\,dx = \frac{x^2}{(q-1)\cos^{q-1} x} - \frac{2}{q-1}\int x \frac{dx}{\cos^{q-1} x},$$

$$\int x^2 \frac{\cos x}{\sin^q x}\,dx = -\frac{x^2}{(q-1)\sin^{q-1} x} + \frac{2}{q-1}\int x \frac{dx}{\sin^{q-1} x},$$

и следовательно, если q — нечётное число, то интегралы вычисляются в конечном виде.

Обращаясь к общему случаю, $m=2$ и $p>1$, замечаем на основании предыдущего, что первые интегралы формул (503) и (504) вычисляются в двух случаях: 1) при q нечётном и 2) при p и q чётных, если $p<q$.

При q нечётном последовательное применение формул, как легко видеть, приводит в результате к интегралам

1) $$\int x^2 \frac{\sin x}{\cos^{2k+1} x}\,dx \quad \text{и} \quad \int x^2 \frac{\cos x}{\sin^{2k+1} x}\,dx,$$

если p — нечётное и $p<q$,

2) $$\int x^2 \frac{dx}{\cos^{2k+1} x} \quad \text{и} \quad \int x^2 \frac{dx}{\sin^{2k+1} x},$$

если p — чётное и $p<q$,

3) $$\left\{\begin{aligned} &\int x^2 \frac{\sin^{2k+1} x}{\cos x}\,dx = \\ &\qquad = \int x^2 \sum_{p=1}^{p=k} (-1)^p \binom{k}{p} \cos^{2p-1} x \sin x\,dx + \int x^2 \operatorname{tg} x\,dx \quad \text{и} \\ &\int x^2 \operatorname{ctg} x\,dx \ \text{или} \ \int x^2 \frac{\cos^{2k+1} x}{\sin x}\,dx = \\ &\qquad = \int x^2 \sum_{p=1}^{p=k} (-1)^p \binom{k}{p} \sin^{2p-1} x \cos x\,dx + \int x^2 \operatorname{ctg} x\,dx, \end{aligned}\right.$$

если p — нечётное и $p=q$ или $p<q$,

4) $$\left\{\begin{aligned} &\int x^2 \frac{\sin^{2k} x}{\cos x}\,dx = \int x^2 \sum_{p=1}^{p=k} (-1)^p \binom{k}{p} \cos^{2p-1} x\,dx + \int \frac{x^2\,dx}{\cos x} \quad \text{и} \\ &\int x^2 \frac{\cos^{2k} x}{\sin x}\,dx = \int x^2 \sum_{p=1}^{p=k} (-1)^p \binom{k}{p} \sin^{2p-1} x\,dx + \int \frac{x^2\,dx}{\sin x}, \\ &\qquad\qquad \text{если } p \text{ — чётное и } p>q. \end{aligned}\right.$$

Таким образом при q нечётном, если p — чётное и $p > q$, во всех случаях, кроме первого, приходим к невычисляемым в конечном виде интегралам. В первом же случае, q — нечётное, p — нечётное и $p < q$, приходим к интегралам, для которых $m = 2$ и $p = 1$ и, следовательно, интегрирование выполняется.

Рассматривая случай p и q — чётные и $p < q$, замечаем, что хотя в этих условиях для первых интегралов формул (503) и (504) интегрирование и выполняется, но в отношении вторых интегралов формулы приводят в конечном счёте к невычисляемым интегралам вида $\int x^2 \frac{dx}{\cos^{2k} x}$ и $\int x^2 \frac{dx}{\sin^{2k} x}$.

Таким образом при $m = 2$ интегрирование выполняется для рассматриваемых интегралов лишь в том случае, когда числа p и q — нечётные и $p < q$.

Принимая для интегралов (503) $m = 3$, видим, что первые интегралы формул вычисляются лишь в случае, когда числа p и q — чётные и $p < q$, но при этих условиях в отношении вторых интегралов формулы приводят к невычисляемым интегралам вида

$$\int x^3 \frac{dx}{\cos^{2k} x} \quad \text{и} \quad \int x^3 \frac{dx}{\sin^{2k} x}.$$

Начиная с $m = 3$, интегрирование, очевидно, невыполнимо, и рассматриваемые интегралы

$$\int x^m \frac{\sin^p x}{\cos^q x} dx \quad \text{и} \quad \int x^m \frac{\cos^p x}{\sin^q x} dx$$

вычисляются в конечном виде только при следующих условиях (не считая, конечно, $m = 0$):

1) $m = 1$, q — чётное число,
2) $m = 1$, оба числа p и q — нечётные, $p < q$,
3) $m = 2$, оба числа p и q — нечётные, $p < q$.

Принимая $p = q = n$, приходим отсюда к тому же выводу, что и в § 6, относительно условий интегрируемости интегралов

$$\int x^m \operatorname{tg}^n x\, dx \quad \text{и} \quad \int x^m \operatorname{ctg}^n x\, dx.$$

Примеры

5) $$\int x \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx = -x \cos x \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{\sin x}\right) + \frac{1}{4} \sin^2 x + \ln \sin x - \frac{3}{4} x^2.$$

6) $$\int x \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = x \left(\frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}\right) - \frac{1}{6} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{5}{6} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

7) $\int x\,\frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$

8) $\int x\,\frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx = \frac{1}{4}\,x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + \int x\operatorname{tg} x\,dx.$

9) $\int x\,\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x - \int x\operatorname{tg} x\,dx.$

§ 8. Интегралы вида $\int \frac{x^m\,dx}{\sin^p x \cos^q x}$

Для интеграла $\int \frac{x^m\,dx}{\sin^p x \cos^q x}$, умножая числитель на $\sin^2 x + \cos^2 x)$, получаем формулу

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sin^p x \cos^q x} = \int \frac{x^m\,dx}{\sin^{p-2} x \cos^q x} + \int \frac{x^m\,dx}{\sin^p x \cos^{q-2} x}.$$

Последовательно применяя эту формулу, приходим в конечном счёте к интегралам следующих видов:

$$\text{a)}\quad \int x^m \frac{\sin x\,dx}{\cos^{2k+1} x} = \frac{x^m}{2k\cos^{2k} x} - \frac{m}{2k}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\cos^{2k} x},$$

$$\int x^m \frac{\cos x\,dx}{\sin^{2k+1} x} = -\frac{x^m}{2k\sin^{2k} x} + \frac{m}{2k}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sin^{2k} x}$$

и

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sin x\cos x} = 2\int \frac{x^m\,dx}{\sin 2x},$$

если числа p и q — нечётные;

$$\text{b)}\quad \int x^m \frac{\sin x\,dx}{\cos^{2k} x} = \frac{x^m}{(2k-1)\cos^{2k-1} x} - \frac{m}{2k-1}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\cos^{2k-1} x} \quad \text{и} \quad \int \frac{x^m\,dx}{\sin^{2k+1} x},$$

$$\int x^m \frac{\cos x\,dx}{\sin^{2k} x} = -\frac{x^m}{(2k-1)\sin^{2k-1} x} + \frac{m}{2k-1}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sin^{2k-1} x} \quad \text{и} \quad \int \frac{x^m\,dx}{\cos^{2k+1} x},$$

если одно из чисел p и q — чётное, а другое нечётное;

$$\text{c)}\quad \int \frac{x^m\,dx}{\cos^{2k} x} \quad \text{и} \quad \int \frac{x^m\,dx}{\sin^{2k} x},$$

если числа p и q — чётные.

В двух первых случаях приходим к интегралам, невычисляемым ни при каких значениях m, и только в последнем — к интегралам, согласно § 7 вычисляемым при $m=1$.

Таким образом для рассматриваемого интеграла интегрирование выполняется при $m=1$ и чётных p и q.

Интегрирование более сложных выражений, особенно более сложных в отношении знаменателя, выполнимо лишь в исклю-

чительных случаях. Для вычисления интеграла следует пользоваться и искусственными приёмами преобразования интегрируемого выражения.

Ограничиваемся двумя примерами.

Примеры

10) $$\int \frac{2x+\sin 2x}{(x \sin x+\cos x)^2}\,dx = -\frac{2\cos x}{x\sin x+\cos x}.$$

Умножая числитель и знаменатель на $\sec^2 x$, приводим интеграл к виду $\displaystyle\int \frac{2d\,(x\operatorname{tg} x+1)}{(x\operatorname{tg} x+1)^2}$.

11) $$\int \left(\frac{x}{x\cos x-\sin x}\right)^2 dx = \frac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}.$$

Замечая, что $d\,(x\cos x-\sin x) = -x\sin x$, представляем интеграл в виде $\displaystyle\int \frac{x}{\sin x}\,d\,\frac{1}{x\cos x-\sin x}$ и затем интегрированием по частям получаем выражение для интеграла.

ГЛАВА VIII

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ОТДЕЛЬНО И ВМЕСТЕ С ДРУГОГО РОДА ФУНКЦИЯМИ, АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ

Интеграл показательной функции, $\int F\{a^x\}\,dx$, как показано в § 7 гл. I, подстановкой $a^x=z$ приводится к алгебраической форме и, следовательно, в качестве основных формул для этого интеграла достаточно принять формулы (1)—(9) и (18).

Основным приёмом интегрирования логарифмических функций и смешанных выражений, содержащих произведения каких-либо функций различного рода, является интегрирование по частям, в основании которого находится формула (4). Если приходим при этом к интегралам алгебраических выражений, то в основании интегрирования имеем также формулы (1) и (9).

Для тех интегралов, под знаком которых имеются в числе других и тригонометрические функции, основными формулами являются, очевидно, формулы главы VII.

§ 1. Интегрирование показательных функций

Всякий интеграл вида $\int F(e^x)\,dx$ подстановкой $e^x=z$ приводится к интегралу $\int F(z)\frac{dz}{z}$, т. е. к интегралу алгебраического выражения; точно так же интеграл $\int F(a^x)\,dx$ подстановкой $a^x=z$ приводится к интегралу $\frac{1}{\ln a}\int F(r)\frac{dz}{z}$. При рациональности функции F, а также и при иррациональности этой функции, если в результате подстановки приходим к вычисляемому интегралу, интегралы показательных функций рассматриваемого вида вычисляются в конечном виде.

Примеры

1) $\int a^{mx}b^{nx}\,dx = \frac{a^{mx}b^{nx}}{m\ln a + n\ln b}$.

2) $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}\,dx = \frac{a^xb^{-x}-a^{-x}b^x}{\ln a - \ln b} - 2x$.

3) $\int (e^x-e^{-x})^n\,dx = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p\binom{n}{p}}{n-2p}\,e^{(n-2p)\,x}$.

При $p=\frac{n}{2}$ выражение, полученное для интеграла, теряет значение для одного из членов суммы, и этот член равен

$$\int (-1)^p\binom{n}{p}e^0\,dx = (-1)^p\binom{n}{p}x.$$

4) $\int (a^{-4x}-a^{2x})^3\,dx = \frac{1}{\ln a}\left\{-\frac{1}{12}a^{-12x}+\frac{1}{2}a^{-6x}-\frac{1}{6}a^{6x}\right\}+3x$.

5) $\int (a^{kx}\pm a^{lx})^n\,dx = \frac{1}{\ln a}\sum_{p=0}^{p=n}\binom{n}{p}\frac{(\pm 1)^p}{kn+(l-k)\,p}\,a^{[kn+(l-k)p]x}$.

Коэффициенты k и l здесь ничем не ограничены в своих значениях и могут представлять всякое, положительное или отрицательное, целое или дробное число. Если одно из чисел k или l отрицательно, то в случае $p=\frac{kn}{k-l}$ выражение, полученное для интеграла, теряет значение для одного из членов суммы, и этот член тогда равен $(\pm 1)^p\binom{n}{p}x$.

6) $\int (1\pm a^{mx})^n\,dx = \frac{1}{\ln a}\sum_{p=0}^{p=n}(\pm 1)^p\binom{n}{p}\frac{a^{mpx}}{mp}$.

7) $\int \frac{dx}{ae^{nx}+b} = \frac{1}{b}x - \frac{1}{nb}\ln(ae^{nx}+b)$ (подст. $ae^{nx}+b=z$).

8) $\int \frac{e^x\,dx}{ae^{3x}+b} = \frac{1}{\sqrt[3]{ab^2}}\left\{\frac{1}{2}\ln(e^x\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}) - \right.$

$$\left. -\frac{1}{6}\ln(ae^{3x}+b)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2e^x\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{b}}\right\}.$$

9) $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = 2\ln(e^x+1)-x = \ln\frac{(e^x+1)^2}{e^x} = \ln(e^x+e^{-x}+2)$.

К последнему выражению можем притти непосредственно следующим путём:

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}\,dx = 2\int \frac{d\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}} =$$

$$= 2\ln\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right) = \ln(e^x+e^{-x}+2).$$

10) $$\int \frac{e^{4x}\,dx}{3e^{4x}-2e^{2x}+1}=\frac{1}{12}\ln(3e^{4x}-2e^{2x}+1)+\frac{1}{6\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3e^{2x}-1}{\sqrt{2}}.$$

11) $$\int \frac{e^{5x}+e^{x}}{e^{3x}-e^{2x}+e^{x}-1}\,dx=\frac{1}{2}(e^{x}+1)^2+\ln\frac{e^{x}-1}{\sqrt{e^{2x}+1}}-\operatorname{arctg} e^{x}.$$

12) $$\int [\sqrt[s]{a+be^{nx}}]^{\pm r} e^{nx}\,dx = \frac{s}{bn(s\pm r)}[\sqrt[s]{a+be^{nx}}]^{s\pm r}$$

(n — всякое, целое, дробное, положительное или отрицательное число).

13) $$\int \sqrt[4]{1-2e^{\frac{x}{3}}}\,dx = 4\sqrt[4]{1-2e^{\frac{x}{3}}}+3\ln\frac{1-\sqrt[4]{1-2e^{\frac{x}{3}}}}{1+\sqrt[4]{1-2e^{\frac{x}{3}}}}+$$
$$+6\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1-2e^{\frac{x}{3}}}\quad (\text{подст. } 1-2e^{\frac{x}{3}}=z^4).$$

14) Интеграл $\int [\sqrt[s]{a+be^{nx}}]^{\pm r}dx$ подстановкой $a+be^{nx}=z^s$ приводится к интегралу $\frac{s}{n}\int \frac{z^{s\pm r-1}}{z^s-a}\,dz$. Последний интеграл вычисляется по формулам (43) — (53) (n — всякое, целое, дробное, положительное или отрицательное число).

15) $$\int \frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}\pm a^2}}=\int \frac{de^{x}}{\sqrt{(e^{x})^2\pm a^2}}=\ln(e^{x}+\sqrt{e^{2x}\pm a^2}).$$

16) $$\int \frac{e^{3/4x}\,dx}{(e^{3/4x}-2)\sqrt{e^{3/2x}+e^{3/4x}-2}}=$$
$$=-\frac{2}{3}\ln\frac{4\sqrt{e^{3/2x}+e^{3/4x}-2}+5e^{3/4x}-2}{e^{3/4x}-2}.$$

Общее замечание

Всякий интеграл вида

$$\int F\left\{e^{nx},\ \sqrt{a+2be^{nx}+ce^{2nx}}\right\}dx,$$

где F — знак рациональной функции и n — всякое, целое, дробное, положительное или отрицательное число, подстановкой $e^{nx}=z$ приводится к интегралу $\int F\left\{z,\ \sqrt{a+2bz+cz^2}\right\}\frac{dz}{nz}$ и, следовательно, вычисляется в конечном виде приёмами §§ 3—10 гл. IV.

Точно так же интеграл $\int F\left\{a^{nx},\ \sqrt{a'+2b'a^{nx}+c'a^{2nx}}\right\}dx$ при тех же условиях подстановкой $a^{nx}=z$ приводится к интегралу $\int F\left\{z,\ \sqrt{a'+2b'z+c'z^2}\right\}\frac{dz}{nz\ln a}$ и, следовательно, вычисляется в конечном виде.

Примеры

17) Интеграл $\int (\sqrt[3]{e^{7x}+3})^2 \frac{dx}{e^{2x}}$ не вычисляется в конечном виде, так как подстановкой $e^x = z$ приводится к интегралу $\int \sqrt[3]{z^7+3}\,\frac{dz}{z^2}$, не удовлетворяющему ни одному из условий интегрируемости биномиальных выражений.

18) $\int \frac{e^{2x}\,dx}{(\sqrt[4]{3-e^{x/2}})^3} = -\frac{1}{65}\left(576+96e^{x/2}+40e^x+20e^{\frac{3x}{2}}\right)\sqrt[4]{3-2e^{x/2}}$.

§ 2. Интегрирование выражений, содержащих произведения показательных и алгебраических функций

Рассматриваемые интегралы редко, лишь для некоторых простейших видов, вычисляются в конечном виде. Основной приём их вычисления — интегрирование по частям.

I) Интегрированием по частям в § 7 гл. I получена формула

$$\int x^m e^{nx}\,dx = \frac{1}{n}x^m e^{nx} - \frac{m}{n}\int x^{m-1}e^{nx}\,dx.$$

Последовательно применяя эту формулу, легко получаем:

$$\int x^m e^{nx}\,dx = \frac{e^{nx}}{n^{m+1}}\sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p\binom{m}{p}p!\,n^{m-p}x^{m-p}. \tag{505}$$

Интегрированием по частям получаем:

$$\int \frac{e^{nx}}{x^m}dx = -\frac{e^{nx}}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{n}{m-1}\int \frac{e^{nx}}{x^{m-1}}dx,$$

и, последовательно применяя эту формулу, будем иметь

$$\int \frac{e^{nx}}{x^m}dx = -\frac{e^{nx}}{(m-1)\,x^{m-1}}\sum_{p=0}^{p=m-2}\frac{n^p x^p}{\binom{m-2}{p}p!} + \frac{n^{m-1}}{(m-1)!}\int \frac{e^{nx}}{x}dx \tag{506}$$

$$(m \geqslant 2).$$

Интеграл $\int \frac{e^{nx}}{x}dx$, к которому приходим, не выражается в конечном виде и выражается лишь бесконечным рядом. Принимая в целях простоты $n=1$ и выражая e^x по формуле Маклорена, имеем:

$$\int \frac{e^x}{x}dx = \ln x + \frac{x}{1\cdot 1!} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \ldots$$

Формулы (505) и (506) действительны и для отрицательного n. Заменяя в них n на $(-n)$, можем представить их в виде:

$$\int \frac{x^m}{e^{nx}}\, dx = -\frac{1}{n^{m+1} e^{nx}} \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} p!\, n^{m-p} x^{m-p}, \tag{507}$$

$$\int \frac{dx}{x^m e^{nx}} = -\frac{1}{(m-1)\, x^{m-1} e^{nx}} \sum_{p=0}^{p=m-2} \frac{(-1)^p n^p x^p}{\binom{m-2}{p} p!} + (-1)^{m-1} \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} \int \frac{dx}{xe^{nx}} \qquad (m \geqslant 2). \tag{508}$$

Интеграл $\int \frac{dx}{xe^{nx}}$, к которому приводит последняя формула, также не вычисляется в конечном виде.

На основании равенства $a^{nx} = e^{xn \ln a}$ интегралы $\int x^m a^{nx}\, dx$ и $\int \frac{a^{nx}}{x^m}\, dx$ приводятся соответственно к виду $\int x^m e^{xn \ln a}\, dx$ и $\int \frac{e^{xn \ln a}}{x^m}\, dx$. Выражая последние интегралы по формулам (505) и (506), получаем:

$$\int x^m a^{nx}\, dx = \frac{a^{nx}}{(n \ln a)^{m+1}} \sum_{0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} p!\, (x \cdot n \cdot \ln a)^{m-p}, \tag{509}$$

$$\int \frac{a^{nx}}{x^m}\, dx = -\frac{a^{nx}}{(m-1)\, x^{m-1}} \sum_{0}^{m-2} \frac{(xn \ln a)^p}{\binom{m-2}{p} p!} + \frac{(n \ln a)^{m-1}}{(m-1)!} \int \frac{a^x}{x}\, dx. \tag{510}$$

$$(m \geqslant 2).$$

В этих формулах n может быть и отрицательным числом.

II) Пользуясь для вычисления интеграла $\int f(x) e^{nx}\, dx$, где $f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$ — целая рациональная функция степени m, последовательно приёмом интегрирования по частям получаем:

$$\int f(x)\, e^{nx}\, dx = \frac{1}{n} f(x)\, e^{nx} - \frac{1}{n^2} f'(x)\, e^{nx} + \frac{1}{n^3} f''(x)\, e^{nx} - \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^m}{n^{m+1}} f^{(m)}(x)\, e^{nx} = F(x) \cdot e^{nx},$$

де $F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$ — также целая рациональ-ая функция степени m. На основании полученного таким образом равенства

$$\int (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m) e^{nx}\, dx = \\ = (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m) e^{nx}$$

можем найти выражение интеграла по методу неопределённых коэффициентов. Дифференцируя и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем необходимое количество уравнений для определения коэффициентов $A_0, \ldots, A_m$.

III) Интеграл $\int x^{2m+1} e^{nx^2}\, dx$ подстановкой $x^2 = y$ приводится к интегралу $\frac{1}{2} \int y^m e^{ny}\, dy$. Выражая последний по формуле (505), получаем:

$$\int x^{2m+1} e^{nx^2}\, dx = \frac{e^{nx^2}}{2n^{m+1}} \sum_0^m (-1)^p \binom{m}{p} p!\, n^{m-p} x^{2(m-p)}, \qquad (511)$$

и, заменяя n на $(-n)$,

$$\int x^{2m+1} e^{-nx^2}\, dx = -\frac{e^{-nx^2}}{2n^{m+1}} \sum_0^m \binom{m}{p} p!\, n^{m-p} x^{2(m-p)}. \qquad (512)$$

Таким же путём получаем:

$$\int x^{2m+1} a^{nx^2}\, dx = \frac{a^{nx^2}}{2(n \ln a)^{m+1}} \sum_0^m (-1)^p \binom{m}{p} p!\, (n \ln a)^{m-p} x^{2(m-p)}, \qquad (513)$$

$$\int x^{2m+1} a^{-nx^2}\, dx = \frac{a^{-nx^2}}{2(n \ln a)^{m+1}} \sum_0^m \binom{m}{p} p!\, (n \ln a)^{m-p} x^{2(m-p)}. \qquad (514)$$

Интегралы $\int x^{2m} e^{\pm nx^2}\, dx$ и $\int x^{2m} a^{\pm nx^2}\, dx$ не вычисляются в конечном виде. Выражая функцию e^{-x^2} рядом по формуле Маклорена, для интеграла $\int e^{-x^2}\, dx$, имеющего важное значение в теории вероятностей и в математической статистике, получаем:

$$\int e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \ldots$$

Примеры

19) $\int \frac{x^3}{e^{x/2}}\,dx = -\frac{2}{e^{1/2 x}}(x^3+6x^2+24x+48).$

20) $\int \frac{dx}{x^3 e^{1/2 x}} = \frac{1}{2x^2 e^{1/2 x}}\left(1-\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{8}\int \frac{dx}{x e^{1/2 x}}.$

21) $\int x^2 a^{3x}\,dx = \frac{a^{3x}}{27 \ln^3 a}(9x^2 \ln^2 a - 6x \ln a + 2).$

22) $\int x(x^2+1)e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2}.$

23) $\int \frac{x\,dx}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{xe^{2x}}{2(e^{2x}+1)} - \frac{1}{4}\ln(e^{2x}+1).$

Представив интеграл в виде $-\frac{1}{2}\int x d\frac{1}{e^{2x}+1}$ или в виде $\frac{1}{4}\int x\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}\,dx = \frac{1}{4}\int x d\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, пользуемся далее приёмом интегрирования по частям. Во втором случае получаем для интеграла выражение $\frac{1}{4}\left\{x\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} - \ln(e^x+e^{-x})\right\}$.

24) $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{1-x^2}}e^x\,dx = e^x\sqrt{1-x^2}.$

§ 3. Интегрирование выражений, содержащих произведения показательных и тригонометрических функций

Рассматриваемые интегралы вычисляются в конечном виде лишь для весьма ограниченного круга наиболее простых выражений, главным образом, целых по отношению входящих в них тригонометрических функций. Основной приём вычисления — также интегрирование по частям.

I) Полагая $a=m+ni$ в равенстве $\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$, имеем

$$\int e^{(m+ni)x}\,dx = \frac{e^{(m+ni)x}}{m+ni},$$

или, на основании известной формулы Эйлера $e^{ax}=e^{mx}(\cos nx + i\sin nx)$,

$$\int e^{mx}(\cos nx + i\sin nx)\,dx = \frac{e^{mx}(\cos nx + i\sin nx)}{m+ni}.$$

Переписав это равенство в виде

$$\int e^{mx}\cos nx\,dx + i\int e^{mx}\sin nx\,dx = \frac{e^{mx}(m\cos nx + n\sin nx)}{m^2+n^2} + i\,\frac{e^{mx}(m\sin nx - n\cos nx)}{m^2+n^2},$$

и приравнивая отдельно вещественные части и коэффициенты при i, находим:

$$\left.\begin{aligned}\int e^{mx}\cos nx\,dx&=\frac{e^{mx}(m\cos nx+n\sin nx)}{m^2+n^2},\\ \int e^{mx}\sin nx\,dx&=\frac{e^{mp}(m\sin nx-n\cos nx)}{m^2+n^3}.\end{aligned}\right\}\quad m>0 \text{ или } m<0 \quad (515)$$

Те же выражения, как и выражения для двух следующих интегралов, легко получаем интегрированием по частям:

$$\left.\begin{aligned}\int a^{mx}\cos nx\,dx&=\frac{a^{mx}(m\ln a\cos nx+n\sin nx)}{m^2\ln^2 a+n^2},\\ \int a^{mx}\sin nx\,dx&=\frac{a^{mx}(m\ln a\sin nx-n\cos nx)}{m^2\ln^2 a+n^2}.\end{aligned}\right\}\quad m> \text{ или } <0. \quad (516)$$

Интегрированием по частям получаем формулы:

$$\int e^{mx}\cos^n x\,dx=\frac{e^{mx}\cos^{n-1}x\,(m\cos x+n\sin x)}{m^2+n^2}+\\ +\frac{n(n-1)}{m^2+n^2}\int e^{mx}\cos^{n-2}x\,dx, \quad (517)$$

$$\int e^{mx}\sin^n x\,dx=\frac{e^{mx}\sin^{n-1}x\,(m\sin x-n\cos x)}{m^2+n^2}+\\ +\frac{n(n-1)}{m^2+n^2}\int e^{mx}\sin^{n-2}x\,dx. \quad (518)$$

Для этих формул m — всякое, целое, дробное, положительное или отрицательное число.

Последовательным применением формул приходим в конечном счёте при n чётном к интегралу $\int e^{mx}\,dx=\frac{e^{mx}}{m}$ и при n нечётном — к интегралам (515). Таким образом все интегралы рассматриваемого вида вычисляются в конечном виде.

II) Выражая $\cos^{2n}x$, $\cos^{2n+1}x$, $\sin^{2n}x$, $\sin^{2n+1}x$ по формулам высшей алгебры, приведённым в § 2 гл. V, получаем:

$$\int e^{mx}\cos^{2n}x\,dx=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}m}e^{mx}+\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{p=0}^{p=n-1}\binom{2n}{p}\int e^{mx}\cos(2n-2p)x\,dx, \quad (519)$$

$$\int e^{mx}\cos^{2n+1}x\,dx=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{p=0}^{p=n}\binom{2n+1}{p}\int e^{mx}\cos(2n+1-2p)x\,dx, \quad (520)$$

$$\int e^{mx}\sin^{2n}x\,dx = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}m}e^{mx} +$$

$$+\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\sum_{p=0}^{p=n-1}(-1)^p\binom{2n}{p}\int e^{mx}\cos(2n-2p)x\,dx, \qquad (521)$$

$$\int e^{mx}\sin^{2n+1}x\,dx =$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\binom{2n+1}{p}\int e^{mx}\sin(2n+1-2p)x\,dx. \qquad (522)$$

Для интегралов правых частей формул имеем выражения (515).

Примеры

25) $$\int\frac{\cos 2x}{e^{3x}}dx = \frac{2\sin 2x - 3\cos 2x}{13e^{3x}}.$$

26) $$\int\frac{\sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x}{\sqrt[3]{e^x}}dx = \frac{6}{13}\,\frac{\sin\frac{1}{2}x - 5\cos\frac{1}{2}x}{\sqrt[3]{e^x}}.$$

27) $$\int\frac{\cos\frac{3}{2}x}{\sqrt[4]{3^{3x}}}dx = \frac{4\left(2\sin\frac{3}{2}x - \ln 3\cos\frac{3}{2}x\right)}{3(4+\ln^2 3)\sqrt[4]{3^{3x}}}.$$

28) $$\int e^{mx}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{mx}\cos x(m\cos x + 2\sin x)}{m^2+4} + \frac{2e^{mx}}{m(m^2+4)}.$$

29) $$\int e^{mx}\sin^3 x\,dx = \frac{e^{mx}\sin^2 x(m\sin x - 3\cos x)}{m^2+9} + \frac{6e^{mx}(m\sin x - \cos x)}{(m^3+1)(m^2+9)}.$$

30) $$\int\frac{\cos^3\frac{x}{3}}{\sqrt{e^x}}dx = \frac{1}{\sqrt{e^x}}\left\{\frac{2}{5}\cos^2\frac{x}{3}\left(2\sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{16}{65}\left(2\sin\frac{x}{3} - 3\cos\frac{x}{3}\right)\right\}$$

или

$$= \frac{1}{\sqrt{e^x}}\left\{\frac{1}{10}(2\sin x - \cos x) + \frac{9}{26}\left(2\sin\frac{x}{3} - 3\cos\frac{x}{3}\right)\right\}.$$

31) $$\int e^{2x}\sin^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{40}e^{2x}(\sin^2 2x - \sin 4x + 2).$$

32) $$\int e^{3x}\sin^2\frac{3}{2}x\cos^2\frac{3}{2}x\,dx = \frac{e^{3x}}{60}(\sin^2 3x - \sin 6x + 2).$$

III) Интегрированием по частям, проводимым в различных вариантах, получаем формулы:

$$\int e^{mx}\cos^p x\sin^q x\,dx = \frac{e^{mx}\cos^{p-1}x\sin^{q-1}x\,[m\cos x+(p+q)\sin x]}{(p+q)^2+m^2} - \\ -\frac{mq}{(p+q)^2+m^2}\int e^{mx}\cos^{p-1}x\sin^{q-1}x\,dx + \\ +\frac{(p-1)(p+q)}{(p+q)^2+m^2}\int e^{mx}\cos^{p-2}x\sin^q x\,dx, \quad (523)$$

$$\int e^{mx}\cos^p x\sin^q x\,dx = \frac{e^{mx}\cos^p x\sin^{q-1}x\,[m\sin x-(p+q)\cos x]}{(p+q)^2+m^2} + \\ +\frac{mp}{(p+q)^2+m^2}\int e^{mx}\cos^{p-1}x\sin^{q-1}x\,dx + \\ +\frac{(q-1)(p+q)}{(p+q)^2+m^2}\int e^{mx}\cos^p x\sin^{q-2}x\,dx, \quad (524)$$

$$\int e^{mx}\cos^p x\sin^q x\,dx = \\ =\frac{e^{mx}\cos^{p-1}x\sin^{q-1}x\,(m\sin x\cos x+p\sin^2 x-q\cos^2 x)}{(p+q)^2+m^2} + \\ +\frac{p(p-1)}{(p+q)^2+m^2}\int e^{mx}\cos^{p-2}x\sin^q x\,dx + \\ +\frac{q(q-1)}{(p+q)^2+m^2}\int e^{mx}\cos^p x\sin^{q-2}x\,dx, \quad (525)$$

$$\int e^{mx}\cos^p x\sin^q x\,dx = \\ =\frac{e^{mx}\cos^{p-1}x\sin^{q-1}x\,(m\sin x\cos x+p\sin^2 x-q\cos^2 x)}{(p+q)^2+m^2} + \\ +\frac{p(p-1)}{(p+q)^2+m^2}\int e^{mx}\cos^{p-2}x\sin^{q-2}x\,dx - \\ -\frac{(p-q)(p+q-1)}{(p+q)^2+m^2}\int e^{mx}\cos^p x\sin^{q-2}x\,dx. \quad (526)$$

Последние две формулы следуют друг из друга. Применением формул приходим в конечном счёте при p и q чётных к интегралу $\int e^{mx}\,dx=\frac{1}{m}e^{mx}$ и в остальных случаях к интегралам вида $\int e^{mx}\cos^n x\,dx$ и $\int e^{mx}\sin^n x\,dx$, которые вычисляются по формулам (517)—(522).

Интеграл $\int e^{mx}\cos^p nx\sin^q nx\,dx$ подстановкой $nx=z$ при замене $\frac{m}{n}$ на m' приводится к интегралу

$$\frac{1}{n}\int e^{m'z}\cos^p z\sin^q z\,dz.$$

Таким образом, все интегралы вида $\int e^{mx}\cos^p nx \sin^q nx\,dx$, где m и n — всякие, целые, дробные, положительные или отрицательные числа, вычисляются в конечном виде:

IV) $$\int e^{mx}\operatorname{tg}^n x\,dx=\frac{e^{mx}\operatorname{tg}^{n-1}x}{n-1}-\frac{m}{n-1}\int e^{mx}\operatorname{tg}^{n-1}x\,dx-\int e^{mx}\operatorname{tg}^{n-2}x\,dx \quad (n>1), \tag{527}$$

$$\int e^{mx}\operatorname{ctg}^n x\,dx=$$
$$=-\frac{e^{mx}\operatorname{ctg}^{n-1}x}{n-1}+\frac{m}{n-1}\int e^{mx}\operatorname{ctg}^{n-1}x\,dx-\int e^{mx}\operatorname{ctg}^{n-2}x\,dx. \tag{528}$$

Применением этих формул приходим в результате к невычисляемым интегралам $\int e^{mx}\operatorname{tg}x\,dx$ и $\int e^{mx}\operatorname{ctg}x\,dx$, так что все интегралы рассматриваемого вида не вычисляются в конечном виде.

Далее получаем

$$\int\frac{e^{mx}}{\cos^n x}\,dx=-\frac{e^{mx}[m\cos x-(n-2)\sin x]}{(n-1)(n-2)\cos^{n-1}x}+$$
$$+\frac{m^2+(n-2)^2}{(n-1)(n-2)}\int\frac{e^{mx}}{\cos^{n-2}x}\,dx \qquad (n>1), \tag{529}$$

$$\int\frac{e^{mx}}{\sin^n x}\,dx=-\frac{e^{mx}[m\sin x+(n-2)\cos x]}{(n-1)(n-2)\sin^{n-1}x}+\frac{m^2+(n-2)^2}{(n-1)(n-2)}\int\frac{e^{mx}}{\sin^{n-2}x}\,dx. \tag{530}$$

Последовательным применением этих формул также приходим к невычисляемым в конечном виде интегралам

$$\int\frac{e^{mx}}{\sin x}dx,\quad \int\frac{e^{mx}}{\sin^2 x}dx,\quad \int\frac{e^{mx}}{\cos x}dx \quad\text{и}\quad \int\frac{e^{mx}}{\cos^2 x}dx.$$

Примеры

33) $$\int e^{mx}\operatorname{tg}^2 x\,dx=\frac{e^{mx}}{m}(m\operatorname{tg}x-1)-m\int e^{mx}\operatorname{tg}x\,dx.$$

34) $$\int\frac{e^{mx}}{\sin^2 x}dx=-e^{mx}\operatorname{ctg}x+m\int e^{mx}\operatorname{ctg}x\,dx.$$

35) $$\int\frac{e^{mx}}{\cos^3 x}dx=-\frac{e^{mx}(m\cos x-\sin x)}{2\cos^2 x}+\frac{m^2+1}{2}\int\frac{e^{mx}}{\cos x}dx.$$

36) a) $$\int e^x\frac{dx}{1+\cos x}=\int e^x\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\int e^x\,d\operatorname{tg}\frac{x}{2}=e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\int e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx,$$

b) $$\int e^x\frac{dx}{1-\cos x}=-e^x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\int e^x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx,$$

c) $$\int e^x\frac{dx}{1+\sin x}=-e^x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\int e^x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx,$$

d) $$\int e^x\frac{dx}{1-\sin x}=e^x\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\int e^x\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx.$$

Таким образом все четыре интеграла, согласно разделу V, не вычисляются в конечном виде.

37) $\int e^x \frac{1-\sin x}{1-\cos x}\,dx = -e^x \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

Выражение для интеграла легко получаем интегрированием по частям, представив интеграл в виде

$$\int e^x \frac{1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx = -\int e^x d\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \int e^x \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx.$$

38) $\int e^x \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx = -e^x \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + 2\int e^x \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx,$

и следовательно, интеграл не выражается в конечном виде.

39) $\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx = e^x \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

40) $\int e^x \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx = e^x \operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2\int e^x \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx.$

41) $\int e^x \frac{1-\cos x}{1-\sin x}\,dx = e^x \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) - 2\int e^x \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx.$

42) $\int e^x \frac{1+\cos x}{1-\sin x}\,dx = e^x \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

43) $\int e^x \frac{1+\cos x}{1+\sin x}\,dx = -e^x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + 2\int e^x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx.$

44) $\int e^x \frac{1-\cos x}{1+\sin x}\,dx = -e^x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

§ 4. Интегрирование выражений, содержащих произведения показательных, алгебраических и тригонометрических функций

Рассматриваемые интегралы также редко, лишь для некоторого круга наиболее простых форм, вычисляются в конечном виде, при этом, главным образом, для выражений, содержащих тригонометрические и алгебраические функции только в числителе. Основной приём вычисления — также интегрирование по частям.

I) Интегрированием по частям получаем:

$$\int e^{mx}x^n \cos x\,dx =$$

$$= e^{mx}x^n \sin x - m\int e^{mx}x^n \sin x\,dx - n\int e^{mx}x^{n-1}\sin x\,dx,$$

$$\int e^{mx}x^n \sin x\,dx =$$
$$= e^{mx}x^n \cos x + m\int e^{mx}x^n \cos x\,dx + n\int e^{mx}x^{n-1}\cos x\,dx.$$

Отсюда, складывая и вычитая после соответствующего умножения на m, получаем формулы

$$\int e^{mx}x^n \cos x\,dx = \frac{e^{mx}x^n(m\cos x+\sin x)}{1+m^2} -$$
$$-\frac{n}{1+m^2}\left\{\int e^{mx}x^{n-1}\sin x\,dx + m\int e^{mx}x^{n-1}\cos x\,dx\right\}, \quad (531)$$

$$\int e^{mx}x^n \sin x\,dx = \frac{e^{mx}x^n(m\sin x-\cos x)}{1+m^2} +$$
$$+\frac{n}{1+m^2}\left\{\int e^{mx}x^{n-1}\cos x\,dx - m\int e^{mx}x^{n-1}\sin x\,dx\right\}. \quad (532)$$

Последовательным применением этих формул приходим в конечном счёте к интегралам (515) и, следовательно, получаем для интегралов конечные выражения.

Интегралы $\int e^{mx}x^n\cos kx\,dx$ и $\int e^{mx}x^n\sin kx\,dx$ подстановкой $kx=z$ и $\frac{m}{k}=m'$ приводятся к интегралам $\frac{1}{k^{n+1}}\int e^{m'z}z^n\cos z\,dz$ и $\frac{1}{k^{n+1}}\int e^{m'z}z^n\sin z\,dz$, т. е. к только что рассмотренным интегралам.

Примеры

45) $\int xe^x\cos x\,dx = \frac{e^x}{2}\{x\cos x+(x-1)\sin x\}.$

46) $\int x^2e^x\sin x\,dx = \frac{e^x}{2}\{(x^2-1)\sin x-(x-1)^2\cos x\}.$

47) $$\int \frac{x^2\sin x}{e^{3x}}\,dx = \frac{1}{5e^{3x}}\left\{\frac{1}{2}x^2(3\sin x+\cos x)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}x(4\sin x+3\cos x)+\frac{1}{50}(9\sin x+13\cos x)\right\}.$$

48) $$\int e^{\frac{x}{2}}x^2\cos^3 x\,dx = e^{\frac{x}{2}}\left\{\frac{1}{2\cdot 37}x^2(6\sin 3x+\cos 3x)-\right.$$
$$-\frac{2}{37^2}x(12\sin 3x-35\cos 3x)-\frac{4}{37^3}(198\sin 3x+107\cos 3x)+$$
$$\left.+\frac{3}{2\cdot 5}(2\sin x+\cos x)-\frac{6}{5^2}x(4\sin x-3\cos x)-\frac{12}{5^3}(2\sin x+11\cos x)\right\}.$$

49) $$\int e^{2x}x^2\sin 4x\,dx=e^{2x}\left\{\frac{3}{32}(2x^2-2x+1)+\frac{1}{80}x^2(2\sin 4x+\cos 4x)-\right.$$
$$-\frac{1}{200}x(4\sin 4x-3\cos 4x)-\frac{1}{4000}(2\sin 4x+11\cos 4x)-$$
$$\left.-\frac{1}{8}x^2(\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{8}x\sin 2x-\frac{1}{32}(\sin 2x-\cos 2x)\right\}.$$

II) Выражая для интегралов

$$\int e^{mx}x^n\cos^{2k}x\,dx,\quad \int e^{mx}x^n\cos^{2k+1}x\,dx,\quad \int e^{mx}x^n\sin^{2k}x\,dx,$$
$$\int e^{mx}x^n\sin^{2k+1}x\,dx$$

тригонометрические функции по формулам высшей алгебры, приведённым в § 2 гл. V, и пользуясь для интеграла $\int e^{mx}x^n\,dx$, получающегося в правой части формул, выражением (505) настоящей главы, получаем:

$$\int e^{mx}x^n\cos^{2k}x\,dx=\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}\frac{e^{mx}}{m^{n+1}}\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\binom{n}{p}p!\,m^{n-p}x^{n-p}+$$
$$+\frac{1}{2^{2k-1}}\sum_{p=0}^{p=k-1}\binom{2k}{p}\int e^{mx}x^n\cos(2k-2p)x\,dx,\quad (533)$$

$$\int e^{mx}x^n\cos^{2k+1}x\,dx=$$
$$=\frac{1}{2^{2k}}\sum_{p=0}^{p=k}\binom{2k+1}{p}\int e^{mx}x^n\cos(2k+1-2p)x\,dx,\quad (534)$$

$$\int e^{mx}x^n\sin^{2k}x\,dx=\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}\frac{e^{mx}}{m^{n+1}}\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\binom{n}{p}p!\,m^{n-p}x^{n-p}+$$
$$+\frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}\sum_{p=0}^{p=k-1}(-1)^p\binom{2k}{p}\int e^{mx}x^n\cos(2k-2p)x\,dx,\quad (535)$$

$$\int e^{mx}x^n\sin^{2k+1}x\,dx=$$
$$=\frac{(-1)^k}{2^{2k}}\sum_{p=0}^{p=k}(-1)^p\binom{2k+1}{p}\int e^{mx}x^n\sin(2k+1-2p)x\,dx.\quad (536)$$

Каждый из интегралов сумм, к которым приводят эти формулы, на основании предыдущего приводятся к интегралам вида (531) и (532).

III) Согласно § 2, имеем:

$$\int f(x)\, e^{ax}\, dx =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\left\{f(x) - \frac{1}{a} f'(x) + \frac{1}{a^2} f''(x) - \ldots + \frac{(-1)^k}{a^k} f^{(k)}(x)\right\} = \frac{e^{ax}}{a} F(x),$$

где $F(x)$ — целая рациональная функция той же степени k, что и $f(x)$.

Заменяя в написанном равенстве a на $(m+ni)$, на основании формулы Эйлера получаем:

$$\int f(x)\, e^{mx} (\cos nx + i \sin nx)\, dx = \frac{e^{mx}(\cos nx + i \sin nx)}{m+ni} \times$$

$$\times \left\{f(x) - \frac{f'(x)}{m+ni} + \frac{f''(x)}{(m+ni)^2} - \ldots + (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{(m+ni)^k}\right\} =$$

$$= \frac{e^{mx}[(m \cos nx + n \sin nx) + i(m \sin nx - n \cos nx)]}{m^2+n^2}[F_1(x) + iF_2(x)],$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — целые рациональные функции степени k, получающиеся в результате отделения вещественной части от мнимой в функции $F(x)$.

Соответственно приравнивая вещественные части равенства и коэффициенты при i, получаем формулы

$$\int f(x)\, e^{mx} \cos nx\, dx =$$

$$= \frac{e^{mx}}{m^2+n^2}[F_1(x)(m \cos nx + n \sin nx) - F_2(x)(m \sin nx - n \cos nx)],$$

$$\int f(x)\, e^{mx} \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{e^{mx}}{m^2+n^2}[F_2(x)(m \cos nx + n \sin nx) - F_1(x)(m \sin nx - n \cos nx)],$$

для которых функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ могут быть вычислены методом неопределённых коэффициентов.

Пример

50) $$\int e^{\frac{x}{2}} x^2 \sin^2 x \cos x\, dx =$$

$$= e^{\frac{x}{2}}\left\{-\frac{1}{2\cdot 37} x^2 (6 \sin 3x + \cos 3x) + \frac{2}{37^2} x (12 \sin 3x - 35 \cos 3x) + \right.$$

$$+ \frac{4}{37^3}(198 \sin 3x + 107 \cos 3x) + \frac{1}{2\cdot 5} x^2 (2 \sin x + \cos x) +$$

$$\left. + \frac{2}{5^2} x (4 \sin x - 3 \cos x) - \frac{4}{5^3}(2 \sin x + 11 \cos x)\right\}.$$

IV) Произведение $\sin^p x \cos^q x$, если одно из чисел p и q или оба вместе чётные, всегда можно представить как целую рациональную функцию от $\sin x$ или $\cos x$, $f(\sin x)$ или $f(\cos x)$.

Если оба показателя произведения — нечётные, то интеграл

$$\int e^{mx} x^n \sin^{2p+1} x \cos^{2q+1} x \, dx$$

всегда можем представить в виде $\int e^{mx} x^n \, df(\sin x)$ или $\int e^{mx} x^n \, df(\cos x)$ и интегрированием по частям

$$\int e^{mx} x^n \, df(\sin x) =$$
$$= e^{mx} x^n f(\sin x) - m \int e^{mx} x^n f(\sin x) \, dx - n \int e^{mx} x^{n-1} f(\sin x) \, dx$$

или

$$\int e^{mx} x^n \, df(\cos x) =$$
$$= e^{mx} x^n f(\cos x) - m \int e^{mx} x^n f(\cos x) \, dx - n \int e^{mx} x^{n-1} f(\cos x) \, dx$$

свести вопрос интегрирования к вычислению интегралов тех же видов $\int e^{mx} x^n f(\sin x) \, dx$ или $\int e^{mx} x^n f(\cos x) \, dx$, как и в первом случае.

Таким образом всякий интеграл вида

$$\int e^{mx} f(x) \varphi(\sin x, \cos x) \, dx,$$

где f и φ — целые рациональные функции своих аргументов, всегда может быть приведён к сумме интегралов вида $\int e^{mx} x^n \sin^k x \, dx$ и $\int e^{mx} x^n \cos^k x \, dx$ и затем к сумме интегралов вида (531) — (532) и, следовательно, вычисляется в конечном виде.

§ 5. Интегрирование гиперболических дифференциальных выражений

Гиперболические функции, введённые в исследование на основании равенств

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x,$$

представляют по существу некоторые комбинации показательных функций, и в соответствии с этим всякий интеграл гиперболической функции подстановкой $e^x = z$ может быть приведён к алгебраической форме. Если при этом приходим к интегрируемому алгебраическому выражению, то этим решается и вопрос интегрируемости гиперболической функции.

Следовательно, всякий интеграл рациональной алгебраической функции теоретически всегда вычисляется в конечном виде.

Аналогично тригонометрическим функциям подстановкой $\operatorname{th}\frac{x}{2} = z$ или, в соответствующих случаях, $\operatorname{th} x = z$ интеграл гиперболической функции также приводится к алгебраической форме.

Однако по большей части интегралы гиперболических функций проще вычисляются непосредственно, путём преобразования самих интегрируемых выражений, так же, как это делается при интегрировании тригонометрических функций.

Вообще, методы вычисления интегралов гиперболических функций и даже общие формулы, которые при этом получаются, вполне аналогичны методам и формулам интегрирования тригонометрических выражений. Простота и стройность гиперболических формул, эластичность операций с преобразованиями гиперболических функций находят своё отражение и в вопросах интегрирования.

Примеры

51) a) $\int \operatorname{ch} x\, dx = \int d \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x$, b) $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x$.

Выразив интегрируемые выражения в показательных функциях, приходим к тем же результатам. Так, для второго интеграла имеем:

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2} \int d\,(e^x + e^{-x}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

52) a) $\int \operatorname{th} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{d \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x} = \ln \operatorname{ch} x$,

b) $\int \operatorname{cth} x\, dx = \ln \operatorname{sh} x$.

53) a) $\int \operatorname{sech} x\, dx = \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{d \operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)$,

b) $\int \operatorname{cosech} x\, dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{sh}\frac{x}{2} \operatorname{ch}\frac{x}{2}} = \int \frac{\operatorname{sech}\frac{x}{2}\, d\frac{x}{2}}{\operatorname{th}\frac{x}{2}} = \ln \operatorname{th}\frac{x}{2}$.

54) $\int \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \frac{1}{2} x$ или $= \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{2} x$.

Первый результат получаем интегрированием по частям, второй — представляя $\operatorname{ch}^2 x$ в виде $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1)$.

55) $\int \operatorname{sh}^5 x\, dx = \frac{1}{5} \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x - \frac{4}{15} \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x + \frac{8}{15} \operatorname{ch} x$,

или

$$=\frac{1}{5}\operatorname{ch}^5 x-\frac{2}{3}\operatorname{ch}^3 x+\operatorname{ch} x.$$

Второй результат получаем, представив интегрируемое выражение в виде $(\operatorname{ch}^2 x-1)^2\, d\operatorname{ch} x$.

I) Интегрированием по частям получаем формулы приведения

$$\int \operatorname{ch}^n x\, dx=\frac{1}{n}\operatorname{ch}^{n-1} x\operatorname{sh} x-\frac{n-1}{n}\int \operatorname{ch}^{n-2} x\, dx, \tag{537}$$

$$\int \operatorname{sh}^n x\, dx=\frac{1}{n}\operatorname{sh}^{n-1} x\operatorname{ch} x-\frac{n-1}{n}\int \operatorname{sh}^{n-2} x\, dx. \tag{538}$$

Пользуясь этими формулами, приходим в конечном счёте при n нечётном к интегралам примера 51) и при n чётном — к интегралу $\int dx=x$.

Представив для интеграла $\int \operatorname{ch}^{2n+1} x\, dx$ интегрируемое выражение в виде $\sum\limits_0^n \binom{n}{p}\operatorname{sh}^{2p} x\, d\operatorname{sh} x$ и выполнив интегрирование, получаем формулу

$$\int \operatorname{ch}^{2n+1} x\, dx=\sum_0^n \binom{n}{p}\frac{\operatorname{sh}^{2p+1} x}{2p+1}, \tag{539}$$

и затем точно так же

$$\int \operatorname{sh}^{2n+1} x\, dx=\sum_0^n (-1)^{n-p}\binom{n}{p}\frac{\operatorname{ch}^{2p+1} x}{2p+1}. \tag{540}$$

На основании формул, выражающих функции $\operatorname{ch}^n x$ и $\operatorname{sh}^n x$ в кратных углах (см. Приложение), получаем:

$$\int \operatorname{ch}^{2n} x\, dx=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}x+\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_0^{n-1}\binom{2n}{p}\frac{\operatorname{sh}(2n-2p)\, x}{2n-2p}, \tag{541}$$

$$\int \operatorname{ch}^{2n+1} x\, dx=\frac{1}{2^{2n}}\sum_0^n \binom{2n+1}{p}\frac{\operatorname{sh}(2n+1-2p)\, x}{2n+1-2p}, \tag{542}$$

$$\int \operatorname{sh}^{2n} x\, dx=\frac{(-1)^n\binom{2n}{n}}{2^{2n}}x+\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_0^{n-1}(-1)^p\binom{2n}{p}\frac{\operatorname{sh}(2n-2p)\, x}{2n-2p}, \tag{543}$$

$$\int \operatorname{sh}^{2n+1} x\, dx=\frac{1}{2^{2n}}\sum_0^n (-1)^p\binom{2n+1}{p}\frac{\operatorname{ch}(2n+1-2p)\, x}{2n+1-2p}, \tag{544}$$

$$\text{II)}\ \int \operatorname{th}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{th}^{n-1} x}{n-1} + \int \operatorname{th}^{n-2} x\,dx, \tag{545}$$

$$\int \operatorname{cth}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{cth}^{n-1} x}{n-1} + \int \operatorname{cth}^{n-1} x\,dx. \tag{546}$$

В результате последовательного применения формул приходим при n нечётном к интегралам примера 52 и при n чётном к интегралу $\int dx = x$.

Непосредственно интегрированием по частям или обращением формул (537) и (538) с заменой $(n-2)$ на $(-n)$ получаем:

$$\int \operatorname{sech}^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\operatorname{sech}^{n-2} x \operatorname{th} x + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} x\,dx, \tag{547}$$

$$\int \operatorname{cosech}^n x\,dx = -\frac{1}{n-1}\operatorname{cosech}^{n-2} x \operatorname{cth} x - \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cosech}^{n-2} x\,dx. \tag{548}$$

В результате приведения приходим при n нечётном к интегралам примера 53 и при n чётном к интегралам $\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \operatorname{th} x$ и $\int \operatorname{cosech}^2 x\,dx = -\operatorname{cth} x$.

$$\int \operatorname{sech}^{2n} x\,dx = \sum_0^{n-1} (-1)^p \binom{n-1}{p} \frac{\operatorname{th}^{2p+1} x}{2p+1}, \tag{549}$$

$$\int \operatorname{cosech}^{2n} x\,dx = \sum_0^{n-1} (-1)^{n-p} \binom{n-1}{p} \frac{\operatorname{cth}^{2p+1} x}{2p+1}, \tag{550}$$

$$\text{III)}\quad \int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^{2n+1} x\,dx = \sum_0^{n} \binom{n}{p} \frac{\operatorname{sh}^{2p+m+1} x}{2p+m+1}, \tag{551}$$

$$\int \operatorname{ch}^m x \operatorname{sh}^{2n+1} x\,dx = \sum_0^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} \frac{\operatorname{ch}^{2p+m+1} x}{2p+m+1}. \tag{552}$$

Формулы действительны для всякого целого, дробного, положительного и отрицательного m. В случае $p = -\frac{m+1}{2}$, что возможно только при целом, нечётном и отрицательном m, формулы не дают выражений для соответствующих членов суммы и эти члены тогда равны для первого интеграла

$$\int \binom{n}{-\frac{m+1}{2}} \operatorname{sh}^{-1} x\, d\operatorname{sh} x = \binom{n}{-\frac{m+1}{2}} \ln \operatorname{sh} x$$

и для второго

$$(-1)^{n+\frac{m+1}{2}}\binom{n}{-\frac{m+1}{2}}\ln \operatorname{ch} x.$$

При $m=0$ из формул (551) и (552) следуют формулы (539) и (540).

$$\text{IV)} \int \operatorname{th}^m x \operatorname{sech}^{2n} x\, dx = \sum_{0}^{n-1} (-1)^p \binom{n-1}{p} \frac{\operatorname{th}^{2p+m+1} x}{2p+m+1}, \tag{553}$$

$$\int \operatorname{cth}^m x \operatorname{cosech}^{2n} x\, dx = \sum_{0}^{n-1} (-1)^{n-p} \binom{n-1}{p} \frac{\operatorname{cth}^{2p+m+1} x}{2p+m+1}. \tag{554}$$

В случае $p=-\frac{m+1}{2}$ формулы не дают выражений для соответствующих членов сумм и эти члены тогда равны

$$(-1)^{\frac{m+1}{2}}\binom{n-1}{-\frac{m+1}{2}}\ln \operatorname{th} x$$

для первого интеграла и

$$(-1)^{n-\frac{m+1}{2}}\binom{n-1}{-\frac{m+1}{2}}\ln \operatorname{cth} x$$

для второго.

При $m=0$ из формул (553) и (554) следуют формулы (549) и (550)

$$\int \operatorname{sech}^m x \operatorname{th}^{2n+1} x\, dx = \operatorname{sech}^m x \sum_{0}^{n} (-1)^{p+1} \binom{n}{p} \frac{\operatorname{sech}^{2p} x}{2p+m}, \tag{555}$$

$$\int \operatorname{cosech}^m x \operatorname{cth}^{2n+1} x\, dx = -\operatorname{cosech}^m x \sum_{0}^{n} \binom{n}{p} \frac{\operatorname{cosech}^{2p} x}{2p+m}. \tag{556}$$

Формулы действительны для всяких, целых, дробных, положительных и отрицательных значений m. При $m=0$ из них следуют формулы

$$\int \operatorname{th}^{2n+1} x\, dx = \sum_{0}^{n} (-1)^{p+1} \binom{n}{p} \frac{\operatorname{sech}^{2p} x}{2p}, \tag{557}$$

$$\int \operatorname{cth}^{2n+1} x\, dx = -\sum_{0}^{n} \binom{n}{p} \frac{\operatorname{cosech}^{2p} x}{2p}. \tag{558}$$

В случае $p=-\frac{m}{2}$ для формул (555) и (556) и $p=0$ для формул (557) и (558) соответствующие члены сумм теряют значения и эти члены тогда равны:

$$(-1)^{-\frac{m}{2}+1}\binom{n}{-\frac{m}{2}}\ln \operatorname{sech} x \quad \text{для интеграла формулы (555)}$$

$$\left(-\binom{n}{-\frac{m}{2}}\right)\ln \operatorname{cosech} x \quad » \quad » \quad » \quad (556)$$

$$-\ln \operatorname{sech} x \quad » \quad » \quad » \quad (557)$$

$$-\ln \operatorname{cosech} x \quad » \quad » \quad » \quad (558)$$

V) Интегралы $\int(\sqrt[s]{\operatorname{sh} x})^{\pm r}\,dx$ и $\int(\sqrt[s]{\operatorname{ch} x})^{\pm r}\,dx$ не вычисляются в конечном виде.

Выразив интегралы $\int \operatorname{sh}^m x\,dx$ и $\int \operatorname{ch}^m x\,dx$ в показательных функциях, подстановкой $e^x=z$ приводим их к виду $\left(\frac{1}{2}\right)^m\int z^{-m-1}(z^2\mp 1)^m\,dz$. Рассматривая последние интегралы как интегралы от биномиальных выражений, видим, что интегрирование для них выполняется лишь в том случае, когда m является целым числом.

Интегралы $\int(\sqrt[s]{\operatorname{th} x})^{\pm r}\,dx$ и $\int(\sqrt[s]{\operatorname{cth} x})^{\pm r}\,dx$ подстановками $\operatorname{th} x=z^s$ и $\operatorname{cth} x=z^s$ приводятся к интегралам $s\int\frac{z^{s\pm r-1}\,dz}{1-z^{2s}}$, т. е. интегралам от рациональных выражений и, следовательно, вычисляются в конечном виде.

Примеры

56) $\int \operatorname{th}^4 x\,dx=-\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x-\operatorname{th} x+x.$

57) $\int \operatorname{cosech}^3 x\,dx=-\frac{1}{2}\operatorname{cth} x\cdot\operatorname{cosech} x-\frac{1}{2}\ln \operatorname{th}\frac{x}{2}.$

58) $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^5 x}=\frac{1}{4}\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^4 x}+\frac{3}{8}\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x).$

59) $\int\frac{\operatorname{th}^5 x}{\operatorname{sech}^4 x}\,dx=\frac{1}{4\operatorname{sech}^4 x}-\frac{1}{\operatorname{sech}^2 x}-\ln \operatorname{sech} x.$

60) $\int \operatorname{th}^5 x\sqrt[4]{\operatorname{sech}^3 x}\,dx=-\frac{4}{627}(209-114\operatorname{sech}^2 x+33\operatorname{sech}^4 x)\sqrt[4]{\operatorname{sech}^3 x}.$

61) $\int\frac{dx}{a+b\operatorname{ch} x}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\pm b+a\operatorname{ch} x+\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{sh} x}{a\pm b\operatorname{ch} x}$, если $a>b$,

и

$$=\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\pm b-a}{\pm b+a}}\operatorname{th}\frac{x}{2} \text{ или } \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{sh}x}{a\operatorname{ch}x\pm b}$$

или

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\arccos\frac{a\operatorname{ch}x\pm b}{a\pm b\operatorname{ch}x}, \text{ если } a<b \quad \left(\text{подст. } \operatorname{th}\frac{x}{2}=z\right).$$

При $a=b$ имеем интеграл $\int\frac{dx}{1\pm\operatorname{ch}x}=\frac{\operatorname{ch}x\mp1}{\operatorname{sh}x}$.

62) $$\int\frac{dx}{(1+\operatorname{ch}x)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}=\frac{(\operatorname{ch}x-1)(\operatorname{ch}^2x+\operatorname{ch}x-2)}{3\operatorname{sh}^3x}.$$

63) $$\int\frac{dx}{a\pm b\operatorname{th}x}=\frac{1}{b^2-a^2}\{a\ln(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)\pm b\ln(a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x)\}$$

(подст. $\operatorname{th}x=z$).

64) $$\int\frac{dx}{a^2\pm b^2\operatorname{ch}^2x}=\frac{1}{2a\sqrt{a^2\pm b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2\pm b^2}+a\operatorname{th}x}{\sqrt{a^2\pm b^2}-a\operatorname{th}x}$$

для верхнего знака, и для нижнего, если $a^2>b^2$, и

$$=\frac{1}{a\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arcctg}\frac{a\operatorname{th}x}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

для нижнего знака, если $a^2<b^2$.

К этим выражениям легко приходим, преобразовав интегрируемое выражение к виду $\frac{d\operatorname{th}x}{a^2\pm b^2-a^2\operatorname{th}^2x}$.

При $a^2=b^2$ для нижнего знака имеем интеграл

$$\int\frac{dx}{1-\operatorname{ch}^2x}=\operatorname{cth}x.$$

65) $$\int\frac{dx}{1-\operatorname{sh}^4x}=\frac{1}{2}\operatorname{th}x+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{\sqrt{2}+\operatorname{cth}x}{\sqrt{2}-\operatorname{cth}x}.$$

Интеграл этот легко приводится к сумме двух интегралов

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-\operatorname{sh}^2x}.$$

66) $$\int\frac{\operatorname{ch}^3x-\operatorname{sh}^3x}{\operatorname{ch}^3x+\operatorname{sh}^3x}\,dx=\frac{1}{3(1+\operatorname{th}x)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{th}x-1}{\sqrt{3}}.$$

67) $$\int\operatorname{ch}x\operatorname{ch}2x\operatorname{ch}3x\,dx=\frac{1}{24}\operatorname{sh}6x+\frac{1}{16}\operatorname{sh}4x+\frac{1}{8}\operatorname{sh}2x+\frac{1}{4}x.$$

68) $$\int\operatorname{sh}x\operatorname{ch}\frac{3}{2}x\operatorname{sh}\frac{5}{2}x\,dx=\frac{1}{20}\operatorname{sh}5x-\frac{1}{12}\operatorname{sh}3x+\frac{1}{8}\operatorname{sh}2x-\frac{1}{4}x.$$

69) $$\int\frac{(\operatorname{th}x-\operatorname{ch}2x)\operatorname{ch}x\,dx}{(\operatorname{sh}2x+\operatorname{sh}^2x)\sqrt{\operatorname{sh}2x}}=\frac{1}{\sqrt{2\operatorname{th}x}}+\frac{\sqrt{2}}{6}\ln\frac{1-\sqrt{\operatorname{th}x}}{1+\sqrt{\operatorname{th}x}}+$$

$$+\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{th}x)+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\operatorname{th}x}{2}} \qquad (\text{подст. } \sqrt{\operatorname{th}x}=z).$$

70) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{\sqrt{4\operatorname{ch}^2 x - 9}^5} = \frac{\operatorname{ch} x\,(8\operatorname{ch}^2 x - 27)}{243\sqrt{4\operatorname{ch}^2 x - 9}^3}$ (подст. $\operatorname{ch} x = z$).

71) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh} 2x\, dx}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2 x}^3} = \frac{\operatorname{sh} x\,(3-\operatorname{sh}^2 x)}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2 x}} - 3\arcsin(\operatorname{sh} x)$ (подст. $\operatorname{sh} x = z$).

72) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{ch} 2x})$.

§ 6. Интегрирование выражений, содержащих гиперболические и алгебраические функции

Интегралы выражений, содержащих вместе с гиперболическими и алгебраические функции, так же, как и вполне аналогичные им интегралы смешанных тригонометрических и алгебраических функций, вычисляются в конечном виде лишь для отдельных простейших видов.

Метод вычисления — интегрирование по частям.

$$\int x^n \operatorname{ch} x\, dx = x^n \operatorname{sh} x - n x^{n-1} \operatorname{ch} x + n(n-1)\int x^{n-2} \operatorname{ch} x\, dx, \tag{559}$$

$$\int x^n \operatorname{sh} x\, dx = x^n \operatorname{ch} x - n x^{n-1} \operatorname{sh} x + n(n-1)\int x^{n-2} \operatorname{sh} x\, dx. \tag{560}$$

Последовательно применяя эти формулы, приходим в конечном счёте к интегралам

$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x \quad \text{и} \quad \int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x,$$

и таким образом получаем для вычисляемых интегралов конечные выражения:

$$\int \frac{x\, dx}{\operatorname{ch}^n x} = \frac{(n-2)\, x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x}{(n-1)(n-2)\operatorname{ch}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\, dx}{\operatorname{ch}^{n-2} x}, \tag{561}$$

$$\int \frac{x\, dx}{\operatorname{sh}^n x} = -\frac{(n-2)\, x \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{(n-1)(n-2)\operatorname{sh}^{n-1} x} - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\, dx}{\operatorname{sh}^{n-2} x}. \tag{562}$$

При n нечётном, последовательно применяя эти формулы, приходим к невычисляемым в конечном виде интегралам $\int \frac{x\, dx}{\operatorname{ch} x}$ и $\int \frac{x\, dx}{\operatorname{sh} x}$, и при n чётном интегрирование выполняется.

Для вычисления интегралов вида $\int x^m \operatorname{ch}^n x\, dx$ и $\int x^m \operatorname{sh}^n x\, dx$ (m и $n > 0$) преобразуем интегрируемое выражение к кратным углам (см. Приложение) и затем по формулам (559) и (560). Вычисление приёмом интегрирования по частям сложнее и, как правило, даёт в результвтате более сложные выражения.

Обобщая вопрос, замечаем, что вычисляется в конечном виде всякий интеграл вида $\int F(x)\cdot \operatorname{ch}^n x\, dx$ и $\int F(x) \operatorname{sh}^n x\, dx$, если F — знак целой рациональной функции.

$$\int x\,\mathrm{th}^n x\,dx = -\frac{x\,\mathrm{th}^{n-1} x}{n-1} + \frac{1}{n-1}\int \mathrm{th}^{n-1} x\,dx + \int x\,\mathrm{th}^{n-2} x\,dx, \qquad (563)$$

$$\int x\,\mathrm{cth}^n x\,dx = -\frac{x\,\mathrm{cth}^{n-1} x}{n-1} + \frac{1}{n-1}\int \mathrm{cth}^{n-1} x\,dx + \int x\,\mathrm{cth}^{n-2} x\,dx. \qquad (564)$$

Для вычисления первых интегралов правых частей этих формул имеем формулы (545) — (546) и (557) — (558). В результате приведения приходим при n нечётном к невычисляемым интегралам $\int x\,\mathrm{th}\,x\,dx$ и $\int x\,\mathrm{cth}\,x\,dx$, а при n чётном интегралы вычисляются в конечном виде.

Примеры

73) a) $\int x\,\mathrm{th}^2 x\,dx = -x\,\mathrm{th}\,x + \ln \mathrm{ch}\,x + \frac{1}{2}x^2,$

b) $\int x\,\mathrm{cth}^2 x\,dx = -x\,\mathrm{cth}\,x + \ln \mathrm{sh}\,x + \frac{1}{2}x^2.$

74) $\int \frac{x + \mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x}\,dx = (x-1)(\mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}\,x) + \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\,2x + \mathrm{ch}\,2x).$

75) $\int \frac{x + \mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}\,x}{1 + \mathrm{ch}\,x}\,dx = \frac{(x-1)(\mathrm{ch}\,x - 1)}{\mathrm{sh}\,x} + x.$

§ 7. Интегрирование выражений, содержащих показательные и гиперболические функции

Всякое гиперболическое выражение представляет функцию показательной функции e^x. Такую же функцию от e^x представляет по существу и выражение, содержащее наряду с показательными функциями и гиперболические. Следовательно, подстановкой $e^x = z$ оно может быть приведено к алгебраической форме и поскольку при этом приходим к интегрируемому выражению, постольку же и для вычисляемого интегрирование выполняется в конечном виде. При рациональности интегрируемого выражения приходим к рациональной алгебраической форме и в этом случае интегрирование теоретически всегда выполнимо.

В § 3 было отмечено, что интегралы выражений, содержащих показательные функции вместе с тригонометрическими, лишь для некоторых наиболее простых форм вычисляются в конечном виде, и уже не интегрируются такие простые функции, как

$$e^x\,\mathrm{tg}\,x,\quad e^x\,\mathrm{ctg}\,x,\quad \frac{e^x}{\sin x},\quad \frac{e^x}{\cos x},\quad \frac{e^x}{\sin^2 x}\quad \text{и т. д.}$$

В то же время круг интегрируемости аналогичных им смешанных показательных и гиперболических функций значительно шире; интеграл рациональной функции во всяком случае всегда выражается в конечном виде.

Основной приём вычисления рассматриваемых интегралов — также интегрирование по частям. В некоторых случаях единственный путь — переход для всего интегрируемого выражения целиком к показательным или же гиперболическим функциям.

$$\text{I)}\ \int e^x \operatorname{ch} x\,dx = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}x \text{ или } = \frac{1}{2}e^x \operatorname{ch} x + \frac{1}{2}x \text{ или } = \frac{1}{2}e^x \operatorname{sh} x + \frac{1}{2}x, \tag{565}$$

$$\int e^x \operatorname{sh} x\,dx = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x \text{ или } = \frac{1}{2}e^x \operatorname{sh} x - \frac{1}{2}x \text{ или } = \frac{1}{2}e^x \operatorname{ch} x - \frac{1}{2}x, \tag{566}$$

$$\int e^{mx} \operatorname{ch}(nx)\,dx = \frac{e^{mx}[m \operatorname{ch}(nx) - n \operatorname{sh}(nx)]}{m^2 - n^2}, \tag{567}$$

$$\int e^{mx} \operatorname{sh}(nx)\,dx = \frac{e^{mx}[m \operatorname{sh}(nx) - n \operatorname{ch}(nx)]}{m^2 - n^2} \tag{568}$$

(m — всякое, целое, дробное, положительное и отрицательное число);

$$\int a^{mx} \operatorname{ch}(nx)\,dx = \frac{a^{mx}[m \ln a \operatorname{ch}(nx) - n \operatorname{sh}(nx)]}{m^2 \ln^2 a - n^2}, \tag{569}$$

$$\int a^{mx} \operatorname{sh}(nx)\,dx = \frac{a^{mx}[m \ln a \operatorname{sh}(nx) - n \operatorname{ch}(nx)]}{m^2 \ln^2 a - n^2}. \tag{570}$$

Интегрированием по частям получаем:

$$\int e^{mx} \operatorname{ch}^n x\,dx = \frac{e^{mx} \operatorname{ch}^{n-1} x\,(m \operatorname{ch} x - n \operatorname{sh} x)}{m^2 - n^2} - \frac{n(n-1)}{m^2 - n^2}\int e^{mx} \operatorname{ch}^{n-2} x\,dx,, \tag{571}$$

$$\int e^{mx} \operatorname{sh}^n x\,dx = \frac{e^{mx} \operatorname{sh}^{n-1} x\,(m \operatorname{sh} x - n \operatorname{ch} x)}{m^2 - n^2} + \frac{n(n-1)}{m^2 - n^2}\int e^{mx} \operatorname{sh}^{n-2} x\,dx. \tag{572}$$

При n нечётном в результате применения формул приходим к интегралам (567) и (568) при n чётном — к интегралу

$$\int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx}.$$

II) Выражая для тех же интегралов гиперболические функции в кратных аргументах (см. Приложение), получаем:

$$\int e^{mx}\operatorname{ch}^{2n}x\,dx=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}m}e^{mx}+\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{0}^{n-1}\binom{2n}{p}\int e^{mx}\operatorname{ch}(2n-2p)x\,dx,\quad(573)$$

$$\int e^{mx}\operatorname{ch}^{2n+1}x\,dx=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{0}^{n}\binom{2n+1}{p}\int e^{mx}\operatorname{ch}(2n+1-2p)x\,dx,\quad(574)$$

$$\int e^{mx}\operatorname{sh}^{2n}x\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^n\binom{2n}{n}}{2^{2n}m}e^{mx}+\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{0}^{n-1}(-1)^p\binom{2n}{p}\int e^{mx}\operatorname{ch}(2n-2p)x\,dx,\quad(575)$$

$$\int e^{mx}\operatorname{sh}^{2n+1}x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{0}^{n}(-1)^p\binom{2n+1}{p}\int e^{mx}\operatorname{sh}(2n+1-2p)x\,dx.\quad(576)$$

Для интегралов правых частей этих формул имеем выражения (567) — (568).

III) $$\int e^x\operatorname{th}x\,dx=e^x-2\operatorname{arctg}e^x=\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x-2\operatorname{arctg}(\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x)\quad(577)$$
или

$$=\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x-\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x),$$

$$\int e^x\operatorname{cth}x\,dx=e^x+\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}=\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x+\ln\operatorname{th}\frac{x}{2},\quad(578)$$

$$\int e^x\operatorname{th}^n x\,dx=$$

$$=-\frac{e^x\operatorname{th}^{n-1}x}{n-1}+\frac{1}{n-1}\int e^x\operatorname{th}^{n-1}x\,dx+\int e^x\operatorname{th}^{n-2}x\,dx,\quad(579)$$

$$\int e^x\operatorname{cth}^n x\,dx=$$

$$=-\frac{e^x\operatorname{cth}^{n-1}x}{n-1}+\frac{1}{n-1}\int e^x\operatorname{cth}^{n-1}x\,dx+\int e^x\operatorname{cth}^{n-2}x\,dx.\quad(580)$$

Последовательным применением этих формул приходим к интегралам (577) — (578) и к интегралу $\int e^x\,dx=e^x$.

IV) $$\int\frac{e^x\,dx}{\operatorname{ch}x}=\ln(e^{2x}+1)=x+\ln\operatorname{ch}x,\quad(581)$$

$$\int\frac{e^x\,dx}{\operatorname{sh}x}=\ln(e^{2x}-1)=x+\ln\operatorname{sh}x,\quad(582)$$

$$\int\frac{e^x\,dx}{\operatorname{ch}^2x}=e^x(\operatorname{th}x-1)+2\operatorname{arctg}e^x=-\frac{1}{\operatorname{ch}x}+2\operatorname{arctg}(\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x)\quad(583)$$

или

$$= -\frac{1}{\operatorname{ch} x} + \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x),$$

$$\int \frac{e^x\,dx}{\operatorname{sh}^2 x} = e^x(1 - \operatorname{cth} x) + \ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -\frac{1}{\operatorname{sh} x} + \ln\operatorname{th}\frac{x}{2}, \tag{584}$$

$$\int \frac{e^{2mx}}{\operatorname{ch} x}\,dx = 2\sum_{0}^{m-1}(-1)^p\frac{e^{(2m-1-2p)x}}{2m-1-2p} + (-1)^m\, 2\operatorname{arctg} e^x, \tag{585}$$

$$\int \frac{e^{2mx}}{\operatorname{sh} x}\,dx = 2\sum_{0}^{m-1}\frac{e^{(2m-1-2p)x}}{2m-1-2p} + \ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \tag{586}$$

$$\int \frac{e^{(2m+1)x}}{\operatorname{ch} x}\,dx = \sum_{0}^{m-1}(-1)^p\frac{e^{2(m-p)x}}{m-p} + (-1)^m\ln(e^{2x} + 1), \tag{587}$$

$$\int \frac{e^{(2m+1)x}}{\operatorname{sh} x}\,dx = \sum_{0}^{m-1}\frac{e^{2(m-p)x}}{m-p} + \ln(e^{2x} - 1), \tag{588}$$

$$\int \frac{e^{2mx}}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = e^{2mx}(\operatorname{th} x - 1) + 2m\sum_{0}^{m-2}(-1)^p\frac{e^{2(m-1-p)x}}{m-1-p} + (-1)^{m-1}\,2m\ln(e^{2x} + 1), \tag{589}$$

$$\int \frac{e^{2mx}}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = e^{2mx}(1 - \operatorname{cth} x) + 2m\sum_{0}^{m-2}\frac{e^{2(m-1-p)x}}{m-1-p} + 2m\ln(e^{2x} - 1), \tag{590}$$

$$\int \frac{e^{(2m+1)x}}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = e^{(2m+1)x}(\operatorname{th} x - 1) + 2(2m+1)\sum_{0}^{m-1}(-1)^p\frac{e^{(2m-1-2p)x}}{2m-1-2p} + (-1)^m\,2(2m+1)\operatorname{arctg} e^x, \tag{591}$$

$$\int \frac{e^{(2m+1)x}}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = e^{(2m+1)x}(1 - \operatorname{cth} x) + 2(2m+1)\sum_{0}^{m-1}\frac{e^{(2m-1-2p)x}}{2m-1-2p} + (2m+1)\ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1}. \tag{592}$$

Формулы (589) и (590) не дают выражений для $m = 1$, и в этом случае имеем интегралы

$$\int \frac{e^{2x}}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = e^{2x}(\operatorname{th} x - 1) + 2\ln(e^{2x} + 1),$$

$$\int \frac{e^{2x}}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = e^{2x}(1 - \operatorname{cth} x) + 2\ln(e^{2x} - 1).$$

Формулы (591) и (592) теряют значение для $m=0$, и в этом случае имеем интегралы (583) и (584).

V) $$\int \frac{dx}{e^{2mx}\operatorname{ch} x} = 2\sum_{0}^{m-1} \frac{(-1)^{m-p}}{(2p+1)\, e^{(2p+1)x}} + (-1)^m\, 2 \operatorname{arctg} e^x, \tag{593}$$

$$\int \frac{dx}{e^{2mx}\operatorname{sh} x} = 2\sum_{0}^{m-1} \frac{1}{(2p+1)\, e^{(2p+1)x}} + \ln\frac{e^x-1}{e^x+1}, \tag{594}$$

$$\int \frac{dx}{e^{(2m+1)x}\operatorname{ch} x} = \sum_{0}^{m-1} \frac{(-1)^{p+1}}{(m-p)\, e^{2(m-p)x}} + (-1)^m\, 2x + (-1)^{m+1} \ln(e^{2x}+1), \tag{595}$$

$$\int \frac{dx}{e^{(2m+1)x}\operatorname{sh} x} = \sum_{0}^{m-1} \frac{1}{(m-p)\, e^{2(m-p)x}} - 2x + \ln(e^{2x}-1), \tag{596}$$

$$\int \frac{dx}{e^{2mx}\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{th} x+1}{e^{2mx}} + 2m\sum_{1}^{m-1} \frac{(-1)^p}{(m-p)\, e^{2(m-p)x}} + (-1)^{m+1} 4mx - (-1)^{m+1} 2m \ln(e^{2x}+1), \tag{597}$$

$$\int \frac{dx}{e^{2mx}\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{\operatorname{cth} x+1}{e^{2mx}} - 2m\sum_{1}^{m-1} \frac{1}{(m-p)\, e^{2(m-p)x}} + 4mx - 2m \ln(e^{2x}-1), \tag{598}$$

$$\int \frac{dx}{e^{(2m+1)x}\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{th} x+1}{e^{(2m+1)x}} + 2\,(2m+1)\sum_{0}^{m-1} \frac{(-1)^{m-p}}{(2p+1)\, e^{(2p+1)x}} + (-1)^m\, 2\,(2m+1) \operatorname{arctg} e^x, \tag{599}$$

$$\int \frac{dx}{e^{(2m+1)x}\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{\operatorname{cth} x+1}{e^{(2m+1)x}} - 2\,(2m+1)\sum_{0}^{m-1} \frac{1}{(2p+1)\, e^{(2p+1)x}} - (2m+1)\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}, \tag{600}$$

VI) $$\int \frac{e^{mx}}{\operatorname{ch}^n x}\,dx = \frac{e^{mx}\,[m \operatorname{ch} x + (n-2)\operatorname{sh} x]}{(n-1)(n-2)\operatorname{ch}^{n-1} x} - \frac{m^2-(n-2)^2}{(n-1)(n-2)}\int \frac{e^{mx}}{\operatorname{ch}^{n-2} x}\,dx, \tag{601}$$

$$\int \frac{e^{mx}}{\operatorname{sh}^n x}\,dx = -\frac{e^{mx}\,[m \operatorname{sh} x + (n-2)\operatorname{ch} x]}{(n-1)(n-2)\operatorname{sh}^{n-1} x} + \frac{m^2-(n-2)^2}{(n-1)(n-2)}\int \frac{e^{mx}}{\operatorname{sh}^{n-2} x}\,dx \quad (n>2). \tag{602}$$

При $m>0$ последовательным применением формул приходим к одному из интегралов (587)—(590) соответственно каждой из возможных комбинаций чётных и нечётных показателей m и n, при $m<0$ — к одному из интегралов (593)—(600).

Примеры

76) $\int \frac{e^{2x}}{\operatorname{sh}^4 x}\,dx = -\frac{e^{3x}}{3\operatorname{sh}^3 x}$.

77) $\int \frac{dx}{e^{2x}\operatorname{ch}^4 x} = -\frac{1}{3e^{3x}\operatorname{ch}^3 x}$.

78) $\int \frac{e^x\,dx}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} = \frac{1}{2}e^{2x}$

или

$$= e^x \operatorname{sh} x \text{ или } = e^x \operatorname{ch} x.$$

79) $\int \frac{e^{mx}\,dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} = \frac{1}{m-1}e^{(m-1)x} \quad (m \neq 1)$.

При $m=1$ имеем интеграл $\int \frac{e^x\,dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} = x$.

80) $\int \frac{e^x\,dx}{1-\operatorname{ch} x} = \frac{1+\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - x - \ln(1-\operatorname{ch} x)$.

81) $\int e^x \frac{1+\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}\,dx = e^x + \frac{1-\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

82) $\int e^x \frac{1-\operatorname{sh} x}{1-\operatorname{ch} x}\,dx = e^x + \frac{1+\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

§ 8. Интегрирование выражений, содержащих логарифмические функции

Основной приём вычисления — также интегрирование по частям. Если имеем интеграл $\int F(x)\ln[f(x)]\,dx$, где F и f — алгебраические функции, и если $\int F(x)\,dx = \varphi(x)$, где φ — также алгебраическая функция, так что

$$F(x)\,dx = d\varphi(x) \quad \text{и} \quad \int F(x)\ln[f(x)]\,dx = \int \ln[f(x)]\,d\varphi(x),$$

то интегрированием по частям

$$\int F(x)\ln[f(x)]\,dx = \varphi(x)\ln[f(x)] - \int \frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}\,dx$$

сводим вычисление интеграла к интегрированию алгебраического выражения.

Если F и f — не алгебраические функции, но для последнего интеграла, к которому приходим интегрированием по частям, интегрирование выполняется, то этим решается вопрос интегрируемости и для вычисляемого интеграла.

Интеграл $\int F(\ln x)\frac{dx}{x}$ вычисляется подстановкой $\ln x = z$. Если при этом F — алгебраическая функция, то приходим к интегралу алгебраического выражения.

Заметим, что интеграл $\int F(x, \ln x)\,dx$ подстановкой $\ln x = z$ приводится к виду $\int F(e^z, z)\,e^z dz = \int F_1(e^z, z)\,dz$, т. е. к интегралу выражения, содержащего показательные и алгебраические функции (§ 2), и обратно, интегралы $\int F(e^x, x)\,dx$ и $\int F(a^x, x)\,dx$ подстановками $e^x = z$ и $a^x = z$ приводятся к интегралам $\int F(z, \ln z)\,\frac{dz}{z}$ и $\int F\left(z, \frac{\ln z}{\ln a}\right)\frac{dz}{z \ln a}$, т. е. вообще к интегралу $\int F(z, \ln z)\,dz$, под знаком которого имеется выражение, содержащее алгебраические и логарифмические функции.

1) Последовательно интегрированием по частям получаем:

$$\int \ln^n x\,dx = x \ln^n x - nx \ln^{n-1} x + n(n-1)\,x \ln^{n-2} x - \\ - n(n-1)(n-2)\,x \ln^{n-3} x + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1} n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot x \ln x + (-1)^n n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot x,$$

или

$$\int \ln^n x\,dx = x \sum_0^n (-1)^p \binom{n}{p} p!\,\ln^{n-p} x \qquad (n > 0). \qquad (603)$$

Интегрированием по частям аналогично получаем:

$$\int x^m \ln^n x\,dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^{n+1}} \sum_0^n (-1)^p \binom{n}{p} p!\,(m+1)^{n-p} \ln^{n-p} x. \qquad (604)$$

Для этой формулы n — целое положительное число, m — всякое число, не равное (-1). При $m = -1$ имеем интеграл $\int \ln^n x \frac{dx}{x} = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} x$. При $m = 0$ из формулы следует формула (603).

К полученной формуле (604) легко приходим также на основании формулы (505), подставляя в неё $e^x = z$ и заменяя для результата $(n-1)$, m и z соответственно на m, n и x.

Интегрированием по частям получаем:

$$\int (a+bx)^n \ln x\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)\,b} \ln x - \frac{1}{(n+1)\,b} \int \frac{(a+bx)^{n+1}}{x}\,dx,$$

и, выражая последний интеграл по формуле (65), получим

$$\int (a+bx)^n \ln x\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)\,b} \ln x - \\ - \frac{1}{(n+1)\,b} \sum_{p=1}^{p=n+1} \binom{n+1}{p} \frac{a^{n+1-p} b^p}{p} x^p. \qquad (605)$$

Примеры

83) $\int x^m \ln x\,dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}\{(m+1)\ln x - 1\}$.

84) $\int x^m \ln^2 x\,dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}\{(m+1)^2\ln^2 x - 2(m+1)\ln x + 2\}$.

85) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}\,dx = -\frac{8}{27\sqrt{x^3}}\left(\frac{9}{4}\ln^2 x + 3\ln x + 2\right)$.

86) $\int (a+bx)\ln x\,dx = \frac{(a+bx)^2 - a^2}{2b}\ln x - ax - \frac{1}{4}bx^2$.

87) $\int (a+bx)^3\ln x\,dx = \frac{(a+bx)^4 - a^4}{4b}\ln x - a^3x -$

$$- \frac{3}{4}a^2bx^2 - \frac{1}{3}ab^2x^3 - \frac{1}{16}b^3x^4.$$

II) Вычисляя интеграл

$$\int (a_0\ln^n x + a_1\ln^{n-1}x + \ldots + a_n)\,dx$$

приёмом интегрирования по частям, имеем

$$\int (a_0\ln^n x + a_1\ln^{n-1}x + \ldots + a_n)\,dx =$$
$$= x(a_0\ln^n x + a_1\ln^{n-1}x + \ldots + a_n) -$$
$$- \int (na_0\ln^{n-1}x + (n-1)a_1\ln^{n-2}x + \ldots + a_{n-1})\,dx.$$

В правой части, очевидно, получаем произведение x на функцию $F(\ln x)$, также n-й степени, относительно $\ln x$. Исходя из этого, можем найти выражение для интеграла по методу неопределённых коэффициентов.

Написав общий вид этого выражения с неопределёнными пока коэффициентами, имеем

$$\int (a_0\ln^n x + a_1\ln^{n-1}x + \ldots + a_n)\,dx =$$
$$= x(A_0\ln^n x + A_1\ln^{n-1}x + \ldots + A_n).$$

После дифференцирования получаем равенство полиномов n-й степени, из которого путём сравнения коэффициентов имеем необходимые $(n+1)$ уравнений для определения $(n+1)$ коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Примеры

88) $\int (3\ln^3 x - 8\ln^2 x - 1)\,dx = x(3\ln^3 x - 17\ln^2 x + 34\ln x - 35)$.

89) $\int (x^4+1)(\ln^3 x - 2\ln x + 1)\,dx = \left(\frac{1}{5}x^5 - x\right)(\ln^3 x - 2\ln x + 1) -$

$$-\left(\frac{1}{25}x^5 - x\right)(3\ln^2 x - 2) + 6\left(\frac{1}{125}x^5 - x\right)\ln x - 6\left(\frac{1}{625}x^5 - x\right)$$

III) Последовательно интегрированием по частям получаем формулу

$$\int \frac{x^m}{\ln^n x} dx = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)\ln^{n-1} x} \sum_{0}^{n-2} \frac{(m+1)^p \ln^p x}{\binom{n-2}{p} p!} + \\ + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)!} \int \frac{x^m}{\ln x} dx \quad (n \geqslant 2). \tag{606}$$

Интеграл $\int \frac{x^m}{\ln x} dx$, к которому приходим, не выражается в конечном виде. Подставляя $\ln x = y$, приводим его к интегралу $\int \frac{e^{(m+1)y}}{y} dy$ и затем подстановкой $(m+1)y = z$ к интегралу $\int \frac{e^z}{z} dz$, для которого в § 2 имеем выражение в форме бесконечного ряда. Пользуясь этим выражением, для интеграла $\int \frac{dx}{\ln x}$, так называемого интегрального логарифма, получаем:

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln \ln x + \frac{\ln x}{1 \cdot 1!} + \frac{\ln^2 x}{2 \cdot 2!} + \frac{\ln^3 x}{3 \cdot 3!} + \ldots$$

Формула (606) следует также из формулы (506) при подстановке $e^x = z$, после замены для результата $(n-1)$, m и z соответственно на m, n и x.

Формула (606) действительна и для отрицательного m, и интеграл $\int \frac{dx}{x^m \ln^n x}$ приводится к интегралу $\int \frac{dx}{x^m \ln x}$, который также не вычисляется в конечном виде.

Примеры

90) $\int \frac{dx}{x^3 \ln^4 x} = -\frac{1 - \ln x + 2\ln^2 x}{3x^2 \ln^3 x} - \frac{4}{3} \int \frac{dx}{x^3 \ln x}$.

91) $\int \frac{\ln x}{a+bx} dx = \frac{1}{b} \ln x \ln(a+bx) - \frac{1}{b} \int \frac{\ln(a+bx)}{x} dx$.

Последний интеграл также не выражается в конечном виде, и выражение для него в форме бесконечного ряда можем получить, разложив в ряд функцию $\ln(a+bx)$.

92) $\int \frac{\ln x}{(a+bx)^2} dx = -\frac{\ln x}{b(a+bx)} + \frac{1}{ab} \ln \frac{x}{a+bx}$.

IV) Интегрированием по частям получаем:

$$\int \frac{\ln x}{(a+bx)^n} dx = -\frac{\ln x}{(n-1)b(a+bx)^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)q} \int \frac{dx}{x(a+bx)^{n-1}},$$

и выражая последний интеграл по формуле (67), будем иметь

$$\int \frac{\ln x}{(a+bx)^n}\,dx = -\frac{\ln x}{(n-1)\,b\,(a+bx)^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)\,b}\sum_{1}^{n-2}\frac{1}{(n-1-p)\,a^p\,(a+bx)^{n-1-p}} + \frac{1}{(n-1)\,a^{n-1}\,b}\ln\frac{x}{a+bx} \quad (n\geqslant 2), \tag{607}$$

$$\int \ln x \ln(a+bx)\,dx = \left[x(\ln x-1)-\frac{a}{b}\right]\ln(a+bx) - x\ln x + 2x + a\int\frac{\ln x}{a+bx}\,dx. \tag{608}$$

Приходим к интегралу примера 91 и, следовательно, интеграл не вычисляется в конечном виде.

Примеры

93) a) $\int \ln^n x\,\frac{dx}{x} = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1}$,

b) $\int (a+b\ln x)^n\,\frac{dx}{x} = \sum_{0}^{n}\binom{n}{p}\frac{a^{n-p}b^p}{p+1}\ln^{p+1} x.$

94) a) $\int \frac{dx}{x(a+b\ln x)} = \frac{1}{b}\ln(a+b\ln x)$,

b) $\int \frac{dx}{x(a+b\ln x)^n} = -\frac{1}{(n-1)\,b\,(a+b\ln x)^{n-1}}$.

95) a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x \pm a^2}} = \ln\left(\ln x + \sqrt{\ln^2 x \pm a^2}\right)$,

b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-\ln^2 x}} = \arcsin\frac{\ln x}{a}$.

96) a) $\int \frac{dx}{x\ln x\sqrt{a^2-\ln^2 x}} = \frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2\pm\ln^2 x}}{\ln x}$,

b) $\int \frac{dx}{x\ln x\sqrt{\ln^2 x - a^2}} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arcsec}\,\frac{\ln x}{a}$.

97) $\int \ln^n(\ln x)\,\frac{dx}{x} = \ln x\sum_{0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}p!\,\ln^{n-p}(\ln x).$

98) $\int \frac{\mathrm{ctg}\, x}{\ln\sin x}\,dx = \ln\ln\sin x.$

99) $\int (e^{\ln\cos x} + e^{-\ln\cos x}) \operatorname{tg} x\,dx = e^{-\ln\cos x} - e^{\ln\cos x}$.

100) $\int \operatorname{sh} x \ln \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{ch} x (\ln \operatorname{ch} x - 1)$.

101) $\int \operatorname{th} x \ln \operatorname{ch} x\,dx = \frac{1}{2} \ln^2 \operatorname{ch} x$.

102) $\int \ln\left(x - \sqrt{1+x^2}\right) dx = x \ln\left(x - \sqrt{1+x^2}\right) + \sqrt{1+x^2}$.

103) $\int \ln(x-1) \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln(x-1)}{2x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x}$.

104) $\int (e^x - e^{-x}) \ln(e^{2x}+1)\,dx = (e^x + e^{-x}) \ln(e^{2x}+1) - 2e^x$.

105) $$\int e^{\frac{3}{2}x} \ln(e^x - 1)\,dx = \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}x} \ln(e^x - 1) - \\ - \frac{4}{9} e^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3} e^{\frac{1}{2}x} - \frac{2}{3} \ln \frac{e^{\frac{1}{2}x} - 1}{e^{\frac{1}{2}x} + 1}.$$

106) $\int \cos^3 x \ln \sin x\,dx = \frac{1}{3} \sin x (\cos^2 x + 2) \ln \sin x - \frac{1}{9} \sin x (\cos^2 x + 8)$.

107) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos^4 x} dx = \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x\right) \ln \operatorname{tg} x - \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{9} \operatorname{tg}^3 x\right)$.

108) $\int \frac{\ln \cos \frac{x}{2}}{1+\cos x} dx = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \ln \cos \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{2}$.

109) $$\int \frac{\cos x \ln \sin x}{(1+\cos x)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}\right) \ln \sin x + \\ + \frac{5}{6} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{18} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} - \frac{2}{3} x.$$

ГЛАВА IX

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОТДЕЛЬНО И ВМЕСТЕ С ДРУГОГО РОДА ФУНКЦИЯМИ

Если имеем интеграл $\int \arcsin [f(x)] F(x)\, dx$ и если F — функция интегрируемая, так что $F(x)\, dx = d\varphi(x)$, то интегрированием по частям получаем:

$$\int \arcsin [f(x)] F(x)\, dx = \varphi(x) \arcsin [f(x)] - \int \frac{\varphi(x) f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\, dx.$$

Последний интеграл уже не содержит круговой функции, и если для него интегрирование выполнимо, то этим решается вопрос интегрируемости и для рассматриваемого интеграла. Если же $F(x)$ или $\frac{\varphi(x) f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$ — неинтегрируемые функции, то интеграл не может быть выражен в конечном виде какой-либо комбинацией элементарных функций.

В более общем случае, когда под знаком интеграла находится круговая функция m-й степени, интегрирование по частям даёт

$$\int [\arcsin f(x)]^m F(x)\, dx =$$
$$= \varphi(x) [\arcsin f(x)]^m - m \int [\arcsin f(x)]^{m-1} F_1(x)\, dx,$$

где $F_1(x) = \frac{\varphi(x) f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$.

Повторение этого приёма, если только это возможно по условиям интегрируемости функций $F_1, F_2, \ldots,$ должно привести в результате к интегралу $\int F_m(x)\, dx$, который уже не содержит круговой функции, и если можем найти выражение для этого интеграла, то и для рассматриваемого интеграла получаем конечное выражение.

В действительности интегрирование выполняется лишь для весьма ограниченного круга интегралов. Если уже при $m=1$ требуется, чтобы $F(x)$ и $F_1(x)$ были интегрируемые функции, то при $m>1$ тому же требованию должны удовлетворять все функции $F, F_1, \ldots, F_m$, и вполне ясно уже по самому виду функции $F_1 = \frac{\varphi(x) f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$, получаемой после первого приёма, что если это требование выполнимо, то только при особых исключительных условиях структуры функций f и F.

Для интегралов того же вида, но содержащих вместо $\arcsin f(x)$ какую-либо из остальных круговых функций, приём интегрирования по частям ведёт к аналогичным результатам, и вопрос интегрирования в общей постановке, для всех этих интегралов, очевидно, обстоит так же, как и в рассмотренном случае интеграла

$$\int [\arcsin f(x)]^m F(x)\, dx.$$

Некоторые виды интегралов соответствующими подстановками могут быть приведены к формам, содержащим тригонометрические функции вместе с алгебраическими.

Так, полагая для интегралов $\int (\arcsin x)^m F(x, \sqrt{1-x^2})\, dx$ и $\int (\arccos x)^m F(x, \sqrt{1-x^2})\, dx$ соответственно $\arcsin x = y$ и $\arccos x = y$, приходим к интегралам $\int y^m F(\sin y, \cos y) \cos y\, dy$ и $-\int y^m F(\cos y, \sin y) \sin y\, dy$.

Точно так же подстановками $\operatorname{arctg} x = y$, $\operatorname{arcctg} x = y$, $\operatorname{arcsec} x = y$ и $\operatorname{arccosec} x = y$ интегралы

$$\int \operatorname{arctg} x F(x, 1+x^2)\, dx, \quad \int \operatorname{arcctg} x F(x, 1+x^2)\, dx,$$

$$\int \operatorname{arcsec} x F(x, \sqrt{x^2-1})\, dx \quad \text{и} \quad \int \operatorname{arccosec} x F(x, \sqrt{x^2-1})\, dx$$

приводятся соответственно к видам

$$\int y^m F(\operatorname{tg} y, \sec y) \sec^2 y\, dy, \quad -\int y^m F(\operatorname{ctg} y, \operatorname{cosec} y) \operatorname{cosec}^2 y\, dy,$$

$$\int y^m F(\sec y, \operatorname{tg} y) \sec y \operatorname{tg} y\, dy \quad \text{и}$$

$$-\int y^m F(\operatorname{cosec} y, \operatorname{ctg} y) \operatorname{cosec} y \operatorname{ctg} y\, dy.$$

Приёмы вычисления получающихся интегралов и условия их интегрируемости рассмотрены в гл. VII.

§ 1. Интегралы вида $\int x^{\pm m} A(x)\,dx$, где $A(x)$ — какая-либо из основных круговых функций

I) Интегрированием по частям легко находим следующие формулы:

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}, \tag{609}$$

$$\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}, \tag{610}$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}, \tag{611}$$

$$\int \operatorname{arcctg} x\,dx = x\operatorname{arcctg} x + \ln\sqrt{1+x^3}, \tag{612}$$

$$\int \operatorname{arcsec} x\,dx = x\operatorname{arcsec} x - \ln(x+\sqrt{x^2-1}), \tag{613}$$

$$\int \operatorname{arccosec} x\,dx = x\operatorname{arccosec} x + \ln(x+\sqrt{x^2-1}), \tag{614}$$

II) $$\int x^{2n}\arcsin x\,dx = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\arcsin x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n+1)^2}\left\{x^{2n} + \frac{2n}{2n-1}x^{2n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}x^{2n-4} + \ldots + \frac{2n(2n-2)\ldots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\ldots3\cdot1}\right\} \tag{615}$$

или

$$= \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\arcsin x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2n+1}\sum_0^n(-1)^p\binom{n}{p}\frac{(1-x^2)^p}{2p+1},$$

$$\int x^{2n}\arccos x\,dx = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\arccos x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n+1)^2}\left\{x^{2n} + \frac{2n}{2n-1}x^{2n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}x^{2n-4} + \ldots + \frac{2n(2n-2)\ldots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\ldots3\cdot1}\right\}, \tag{616}$$

или

$$= \frac{x^{2n-1}}{2n+1}\arccos x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2n+1}\sum_0^n(-1)^p\binom{n}{p}\frac{(1-x^2)^p}{2p+1}.$$

При этом интегрированием по частям приходим к интегралу $\int \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$, для которого пользуемся выражениями (175) или (463).

$$\int x^{2n+1}\arcsin x\,dx = \frac{\arcsin x}{2n+2}\left[x^{2n+2} - \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots3\cdot1}{(2n+2)\,2n\ldots4\cdot2}\right] +$$
$$+ \frac{x\sqrt{1-x^2}}{(2n+2)^2}\left\{x^{2n} + \frac{2n+1}{2n}x^{2n-2} + \frac{(2n+1)(2n-1)}{2n(2n-2)}x^{2n-4} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots5\cdot3}{2n(2n-2)\ldots4\cdot2}\right\}, \tag{617}$$

$$\int x^{2n+1}\arccos x\,dx=\frac{\arccos x}{2n+2}\left[x^{2n+2}-\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}{(2n+2)\,2n\ldots 4\cdot 2}\right]-$$
$$-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{(2n+2)^2}\left\{x^{2n}+\frac{2n+1}{2n}x^{2n-2}+\frac{(2n+1)(2n-1)}{2n(2n-2)}x^{2n-4}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 5\cdot 3}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\right\} \quad (618)$$

[на основании формулы (173)].

III) $$\int x^{2n}\operatorname{arctg} x\,dx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\operatorname{arctg} x-$$
$$-\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{1}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\frac{(1+x^2)^p}{p}-\frac{(-1)^n}{2(2n+1)}\ln(1+x^2), \quad (619)$$

$$\int x^{2n}\operatorname{arcctg} x\,dx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\operatorname{arcctg} x+$$
$$+\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{1}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\frac{(1+x^2)^p}{p}+\frac{(-1)^n}{2(2n+1)}\ln(1+x^2) \quad (620)$$

[на основании формулы (75)],

$$\int x^{2n+1}\operatorname{arctg} x\,dx=\frac{x^{2n+2}+(-1)^n}{2n+2}\operatorname{arctg} x-$$
$$-\frac{1}{2n+2}\sum_{0}^{n}(-1)^p\frac{x^{2n+1-2p}}{2n+1-2p}, \quad (621)$$

$$\int x^{2n+1}\operatorname{arcctg} x\,dx=$$
$$=\frac{x^{2n+2}+(-1)^n}{2n+2}\operatorname{arcctg} x+\frac{1}{2n+2}\sum_{0}^{n}(-1)^p\frac{x^{2n+1-2p}}{2n+1-2p} \quad (622)$$

[на основании формулы (73)],

IV) $$\int x^{2n}\operatorname{arcsec} x\,dx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\operatorname{arcsec} x-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{(2n+1)\,2n}\left\{x^{2n-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2n-1}{2n-2}x^{2n-4}+\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}x^{2n-6}+\ldots+\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\right\}-$$
$$-\frac{1}{2n+1}\,\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \quad (623)$$

$$\int x^{2n}\operatorname{arccosec} x\,dx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\operatorname{arccosec} x+$$
$$+\frac{x\sqrt{x^2-1}}{(2n+1)\,2n}\left\{x^{2n-2}+\frac{2n-1}{2n-2}x^{2n-4}+\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}x^{2n-6}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\right\}+$$
$$+\frac{1}{2n+1}\,\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \quad (624)$$

[на основании формулы (172)],

$$\int x^{2n+1}\operatorname{arcsec} x\,dx =$$

$$= \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\operatorname{arcsec} x - \frac{\sqrt{x^2-1}}{(2n+2)(2n+1)}\left\{x^{2n} + \frac{2n}{2n-1}x^{2n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}x^{2n-4} + \ldots + \frac{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}\right\} \quad (625)$$

или

$$= \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\operatorname{arcsec} x - \frac{\sqrt{x^2-1}}{2n+2}\sum_0^n \binom{n}{p}\frac{(x^2-1)^p}{2p+1},$$

$$\int x^{2n+1}\operatorname{arccosec} x\,dx = \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\operatorname{arccosec} x +$$
$$+ \frac{\sqrt{x^2-1}}{(2n+2)(2n+1)}\left\{x^{2n} + \frac{2n}{2n-1}x^{2n-2} + \frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}x^{2n-4} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}\right\} \quad (626)$$

или

$$= \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\operatorname{arccosec} x + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2n+2}\sum_0^n \binom{n}{p}\frac{(x^2-1)^p}{2p+1}$$

[на основании формул (174) и (435)].

На основании предыдущего заключаем, что всякий интеграл вида $\int F(x) f(x)\,dx$, где F — целая рациональная функция относительно x, а f — какая-либо из шести основных круговых функций, вычисляется в конечном виде.

V) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^{2n}}\,dx =$

$$= -\frac{\arcsin x}{(2n-1)x^{2n-1}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)(2n-2)x^{2n-2}}\left\{1 + \frac{2n-3}{2n-4}x^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}x^4 + \ldots + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4\cdot 2}x^{2n-4}\right\} -$$
$$- \frac{1}{2n-1}\,\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad (627)$$

$$\int \frac{\arccos x}{x^{2n}}\,dx = -\frac{\arccos x}{(2n-1)x^{2n-1}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)(2n-2)x^{2n-2}}\left\{1 + \frac{2n-3}{2n-4}x^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}x^4 + \ldots + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4\cdot 2}x^{2n-4}\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2n-1}\,\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (628)$$

[на основании формулы (178)].

Формулы не дают выражений для интегралов в случае $n=1$, и для соответствующих интегралов непосредственно находим

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = -\frac{\arcsin x}{x} - \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\int \frac{\arccos x}{x^2}\,dx = -\frac{\arccos x}{x} + \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x^{2n+1}}\,dx = -\frac{\arcsin x}{2nx^{2n}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2n(2n-1)x^{2n-1}}\left\{1+\frac{2n-2}{2n-3}x^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}x^4+\ldots+\frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}x^{2n-2}\right\} \quad (629)$$

или

$$= -\frac{\arcsin x}{2nx^{2n}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2nx^{2n-1}}\sum_{0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\frac{x^{2p}(1-x^2)^{n-1-p}}{2n-1-2p};$$

$$\int \frac{\arccos x}{x^{2n+1}}\,dx = -\frac{\arccos x}{2nx^{2n}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2n(2n-1)x^{2n-1}}\left\{1+\frac{2n-2}{2n-3}x^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}x^4+\ldots+\frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}{(2n-3)(2u-5)\ldots 3\cdot 1}x^{2n-2}\right\} \quad (630)$$

или

$$= -\frac{\arccos x}{2nx^{2n}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2nx^{2n-1}}\sum_{0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\frac{x^{2p}(1-x^2)^{n-1-p}}{2n-1-2p}$$

[на основании формул (178) и (466)].

Формулы действительны для $n \geqslant 1$. При $n=0$ имеем не вычисляемые в конечном виде интегралы $\int \frac{\arcsin x}{x}\,dx$ и $\int \frac{\arccos x}{x}\,dx$. Выражая рядами:

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \ldots,$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} - \ldots,$$

получаем:

$$\int \frac{\arcsin x}{x}\,dx = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7^2} + \ldots,$$

$$\int \frac{\arccos x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x - x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7^2} - \ldots$$

$$\text{VI)}\quad \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{2n}}\,dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{(2n-1)\,x^{2n-1}} - \frac{1}{2(2n-1)} \sum_{0}^{n-2} \frac{(-1)^{n-p}}{(p+1)\,x^{2(p+1)}} + \frac{(-1)^n}{2(2n-1)} \ln\frac{1+x^2}{x}, \tag{631}$$

$$\int \frac{\operatorname{arcctg} x}{x^{2n}}\,dx = -\frac{\operatorname{arcctg} x}{(2n-1)\,x^{2n-1}} + \frac{1}{2(2n-1)} \sum_{0}^{n-2} \frac{(-1)^{n-p}}{(p+1)\,x^{2(p+1)}} - \frac{(-1)^n}{2(2n-1)} \ln\frac{1+x^2}{x^2} \tag{632}$$

[на основании формулы (79)].

Формулы не дают выражений для $n=1$. Для соответствующих интегралов непосредственно находим

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \ln\frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

$$\int \frac{\operatorname{arcctg} x}{x^2}\,dx = -\frac{\operatorname{arcctg} x}{x} + \ln\frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{2n+1}}\,dx = \frac{(-1)^n x^{2n}-1}{2nx^{2n}} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2n} \sum_{0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-p}}{(2p+1)\,x^{2p+1}}, \tag{633}$$

$$\int \frac{\operatorname{arcctg} x}{x^{2n+1}}\,dx = \frac{(-1)^n x^{2n}-1}{2nx^{2n}} \operatorname{arcctg} x - \frac{1}{2n} \sum_{0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-p}}{(2p+1)\,x^{2p+1}} \tag{634}$$

[на основании формулы (77)].

При $n=0$ формулы не дают выражений для интегралов и соответствующие интегралы $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ и $\int \frac{\operatorname{arcctg} x}{x}\,dx$ не вычисляются в конечном виде.

Выражая интегрируемые круговые функции рядами:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \ldots,$$

для этих интегралов получаем:

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \ldots,$$

$$\int \frac{\operatorname{arcctg} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x - x + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^5}{5^2} + \frac{x^7}{7^2} - \ldots,$$

$$\text{VII)} \int \frac{\operatorname{arcsec} x}{x^{2n}}\,dx = -\frac{\operatorname{arcsec} x}{(2n-1)\,x^{2n-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{(2n-1)^2\,x^{2n-1}} \left\{1 + \frac{2n-2}{2n-3}x^2 + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}x^4 + \ldots + \frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}x^{2n-2}\right\}, \quad (635)$$

или

$$= -\frac{\operatorname{arcsec} x}{(2n-1)\,x^{2n-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{(2n-1)\,x^{2n-1}} \sum_{0}^{n-1} (-1)^p \binom{n-1}{p} \frac{x^{2(n-1-p)}(x^2-1)^p}{2p+1},$$

$$\int \frac{\operatorname{arccosec} x}{x^{2n}}\,dx = -\frac{\operatorname{arccosec} x}{(2n-1)\,x^{2n-1}} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{(2n-1)^2\,x^{2n-1}} \left\{1 + \frac{2n-2}{2n-3}x^2 + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)}x^4 + \ldots + \frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}x^{2n-2}\right\} \quad (636)$$

или

$$= -\frac{\operatorname{arccosec} x}{(2n-1)\,x^{2n-1}} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{(2n-1)\,x^{2n-1}} \sum_{0}^{n-1} (-1)^p \binom{n-1}{p} \frac{x^{2(n-1-p)}(x^2-1)^p}{2p+1}$$

[на основании формул (177) и (458)];

$$\int \frac{\operatorname{arcsec} x}{x^{2n+1}}\,dx = \left[\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}x^{2n} - 1\right]\frac{\operatorname{arcsec} x}{2nx^{2n}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{(2n)^2\,x^{2n}} \left\{1 + \frac{2n-1}{2n-2}x^2 + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}x^4 + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}x^{2n-2}\right\}, \quad (637)$$

$$\int \frac{\operatorname{arccosec} x}{x^{2n+1}}\,dx = \left[\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}x^{2n} - 1\right]\frac{\operatorname{arccosec} x}{2nx^{2n}} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{(2n)^2\,x^{2n}} \left\{1 + \frac{2n-1}{2n-2}x^2 + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}x^4 + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}x^{2n-2}\right\} \quad (638)$$

[на основании формулы (179)].

Формулы не дают выражений для $n=0$ и соответствующие интегралы $\int \frac{\operatorname{arcsec} x}{x}\,dx$ и $\int \frac{\operatorname{arccosec} x}{x}\,dx$ не вычисляются в конечном виде.

§ 2. Интегралы вида $\int x^{\pm m} A^{\pm n}(x)\,dx$, где $A(x)$ — какая-либо из основных круговых функций

I) Интегрированием по частям получаем формулы

$$\int (\arcsin x)^m\,dx = x(\arcsin x)^m + m\sqrt{1-x^2}\,(\arcsin x)^{m-1} - m(m-1)\int (\arcsin x)^{m-2}\,dx, \qquad (639)$$

$$\int (\arccos x)^m\,dx = x(\arccos x)^m - m\sqrt{1-x^2}\,(\arccos x)^{m-1} - m(m-1)\int (\arccos x)^{m-2}\,dx. \qquad (640)$$

При m целом положительном, пользуясь этими формулами, приходим в конечном счёте к интегралам (609) — (610) или к интегралу $\int dx = x$, так что рассматриваемые интегралы при целом и положительном m вычисляются в конечном виде.

Для случая отрицательного m, сбращая формулы (639) и (649) и заменяя с этой целью $(m-2)$ на $(-m')$, можно было бы также получить аналогичные формулы приведения.

Рассматривая этот случай, т. е. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^m}$ и $\int \frac{dx}{(\arccos x)^m}$, замечаем, что подстановками $\arcsin x = y$ для первого и $\arccos x = y$ для второго они приводятся к интегралам $\int \frac{\cos y}{y^m}\,dy$ и $-\int \frac{\sin y}{y^m}\,dy$, которые, согласно § 3 гл. VII, не вычисляются в конечном виде. Методом приведения они приводятся к интеграл-косинусу и интеграл-синусу, которые выражаются бесконечными рядами

$$\int \frac{\cos y}{y}\,dy = \ln y - \frac{y^2}{2\cdot 2!} + \frac{y^4}{4\cdot 4!} - \frac{y^6}{6\cdot 6!} + \ldots,$$

$$\int \frac{\sin y}{y}\,dy = y - \frac{y^3}{3\cdot 3!} + \frac{y^5}{5\cdot 5!} - \frac{y^7}{7\cdot 7!} + \ldots,$$

На основании этих рядов, для соответствующих интегралов круговых функций имеем:

$$\int \frac{dx}{\arcsin x} =$$
$$= \ln(\arcsin x) - \frac{(\arcsin x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\arcsin x)^4}{4 \cdot 4!} - \frac{(\arcsin x)^6}{6 \cdot 6!} + \ldots,$$

$$\int \frac{dx}{\arccos x} = -\arccos x + \frac{(\arccos x)^3}{3 \cdot 3!} - \frac{(\arccos x)^5}{5 \cdot 5!} + \frac{(\arccos x)^7}{7 \cdot 7!} - \ldots$$

II) Интегралы

$$\int (\arcsin x)^m x^n \, dx \quad \text{и} \quad \int (\arccos x)^m x^n \, dx$$

подстановками $\arcsin x = y$ для первого и $\arccos x = y$ для второго приводятся к интегралам

$$\text{A)} \begin{cases} \displaystyle\int (\arcsin x)^m x^n dx = \int y^m \sin^n y \cos y \, dy = \\ \displaystyle\qquad = \frac{y^m \sin^{n+1} y}{n+1} - \frac{m}{n+1} \int y^{m-1} \sin^{n+1} y \, dy, \\ \displaystyle\int (\arccos x)^m x^n \, dx = -\int y^m \cos^n y \sin y \, dy = \\ \displaystyle\qquad = \frac{y^m \cos^{n+1} y}{n+1} - \frac{m}{n+1} \int y^{m-1} \cos^{n+1} y \, dy. \end{cases}$$

Для последних интералов, как следует из § 2 гл. VII, при целых и положительных значениях m и n интегрирование выполняется, так что и рассматриваемые интегралы при этих условиях также вычисляются в конечном виде.

Обобщая вопрос, приходим к заключению, что вычисляется в конечном виде всякий интеграл вида

$$\int F(x, \arcsin x) \, dx \quad \text{и} \quad \int F(x, \arccos x) \, dx,$$

где F — целая рациональная функция своих аргументов.

Общий приём вычисления - интегрирование по частям. При переходе от круговых к тригонометрическим функциям вычисление облегчается пользованием формул § 2 гл. VII.

При отрицательных значениях m равенства A) приводят к интегралам

$$\int \frac{\sin^{n+1} y}{y^{m+1}} \, dy \quad \text{и} \quad \int \frac{\cos^{n+1} y}{y^{m+1}} \, dy,$$

которые, согласно § 5 гл. VII, как при положительных, так и при отрицательных значениях n, не вычисляются в конечном виде. Хотя при $n=-1$ равенства теряют значение, но и в этом случае имеем также невычисляемые в конечном виде интегралы

$$\int \frac{(\arcsin x)^{\pm m}}{x}\,dy \quad \text{и} \quad \int \frac{(\arccos x)^{\pm m}}{x}\,dx.$$

Принимая для рассматриваемых интегралов m положительным и n отрицательным, замечаем, что при $m=1$ имеем интегралы

$$\int \frac{\arcsin x}{x^n}\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{\arccos x}{x^n}\,dx,$$

для которых, за исключением упомянутого уже случая $n=-1$, имеем выражения (627)—(630). Равенства A) также приводят к вычисляемым интегралам

$$\int \frac{dy}{\sin^{n-1} y} \quad \text{и} \quad \int \frac{dy}{\cos^{n-1} y}.$$

При отрицательных нечётных значениях n, заменяя в равенствах A) n на $(-2n-1)$, приходим к интегралам

$$\int \frac{y^{m-1}}{\sin^{2n} y}\,dy \quad \text{и} \quad \int \frac{y^{m-1}}{\cos^{2n} y}\,dy.$$

Если $m=2$, то имеем в данном случае интегралы

$$\int \frac{y\,dy}{\sin^{2n} y} \quad \text{и} \quad \int \frac{y\,dy}{\cos^{2n} y},$$

которые, согласно § 4 гл. VII, вычисляются в конечном виде, а, следовательно, и интегралы

$$\int \frac{(\arcsin x)^2}{x^{2n+1}}\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{(\arccos x)^2}{x^{2n+1}}\,dx,$$

отвечающие тем же условиям.

Во всех остальных случаях отрицательного n интегралы в конечном виде не выражаются.

III) При подстановках $\operatorname{arctg} x=y$ и $\operatorname{arcctg} x=y$ имеем

$$\int (\operatorname{arctg} x)^m x^n\,dx = \frac{y^m \operatorname{tg}^{n+1} y}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int y^{m-1} \operatorname{tg}^{n+1} y\,dy,$$

$$\int (\operatorname{arcctg} x)^m x^n\,dx = \frac{y^m \operatorname{ctg}^{n+1} y}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int y^{m-1} \operatorname{ctg}^{n+1} y\,dy.$$

При $m=1$ независимо от знака n интегралы выражаются в конечном виде, и для них имеются выражения (619)–(622) и (631)—(634). Равенства, написанные выше, также приводят в этом случае к вычисляемым интегралам

$$\int \operatorname{tg}^{n+1} y\,dy \quad \text{и} \quad \int \operatorname{ctg}^{n+1} y\,dy.$$

При $n=-1$ равенства теряют значение и этому случаю соотвествуют интегралы

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{\operatorname{arcctg} x}{x}\,dx,$$

невычисляемые, как отмечено уже, в конечном виде.

При $m=2$ и нечётном n, положительном или отрицательном, интегралы

$$\int y^{m-1}\operatorname{tg}^{n+1} y\,dy \quad \text{и} \quad \int y^{m-1}\operatorname{ctg}^{n+1} y\,dy,$$

согласно § 6 гл. VII, вычисляются в конечном виде, и, следовательно, конечные выражения имеем при тех же условиях и для рассматриваемых интегралов, которые в этом случае имеют вид

$$\int (\operatorname{arctg} x)^2 x^{\pm(2n+1)}\,dx \quad \text{и} \quad \int (\operatorname{arcctg} x)^2 x^{\pm(2p+1)}\,dx.$$

При всех остальных комбинациях знаков и значений m и n интегралы, согласно § 6 гл. VII, в конечном виде не выражаются.

IV) Пользуясь подстановками $\operatorname{arcsec} x=y$ и $\operatorname{arccosec} x=y$, получаем:

$$\int (\operatorname{arcsec} x)^m x^n\,dx=\frac{y^m}{(n+1)\cos^{n+1} y}-\frac{m}{n+1}\int\frac{y^{m-1}}{\cos^{n+1} y}\,dy,$$

$$\int (\operatorname{arccosec} x)^m x^n\,dx=\frac{y^m}{(n+1)\sin^{n+1} y}-\frac{m}{n+1}\int\frac{y^{m-1}}{\sin^{n+1} y}\,dy.$$

При $m=1$ в этих равенствах имеем интегралы $\int\frac{dy}{\cos^{n+1} y}$ и $\int\frac{dy}{\sin^{n+1} y}$, вычисляемые в конечном виде при всяком целом, положительном или отрицательном n. В соответствии с этим для интегралов

$$\int x^{\pm n}\operatorname{arcsec} x\,dx, \qquad \int x^{\pm n}\operatorname{arccosec} x\,dx$$

получены выражения и (623) — (626) и (635) – (638).

При $n=-1$ равенства теряют значение, и в этом случае для всякого m, исключая, конечно, $m=0$, имеем не вычисляемые в конечном виде интегралы

$$\int \frac{(\operatorname{arcsec} x)^m}{x}\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{(\operatorname{arccosec} x)^m}{x}\,dx.$$

При всяком положительном $m \geqslant 1$ и отрицательном $n < -1$ интегралы

$$\int \frac{y^{m-1}}{\cos^{n+1} y}\,dy \quad \text{и} \quad \int \frac{y^{m-1}}{\sin^{n+1} y}\,dy,$$

если заменить в них для данного случая n на $(-n)$, имеют вид

$$\int y^{m-1}\cos^{n-1} y\,dy \quad \text{и} \quad \int y^{m-1}\sin^{n-1} y\,dy \qquad (m \geqslant 1,\ n > 1),$$

и эти интегралы, согласно § 2 гл. VII, всегда вычисляются в конечном виде. Отвечающие тем же условиям $m \geqslant 1$ и $n > 1$ интегралы

$$\int \frac{(\operatorname{arcsec} x)^m}{x^n}\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{(\operatorname{arccosec} x)^m}{x^n}\,dx,$$

следовательно, также выражаются в конечном виде.

При m и $n > 0$ интегралы

$$\int \frac{y^{m-1}}{\cos^{n+1} y}\,dy \quad \text{и} \quad \int \frac{y^{m-1}}{\sin^{n+1} y}\,dy,$$

кроме отмеченного уже случая $m = 1$, вычисляются, согласно § 5 гл. VII, ещё в том случае, когда $m = 2$ и n представляют нечётное число. Следовательно, конечные выражения получаются также для интегралов вида

$$\int (\operatorname{arcsec} x)^2 x^{2n+1}\,dx \quad \text{и} \quad \int (\operatorname{arccosec} x)^2 x^{2n+1}\,dx \qquad (n > 0).$$

В остальных случаях положительного m и во всех случаях отрицательного m интегрирование не выполняется.

Примеры

1) $$\int \frac{(\arccos x)^2}{x^5}\,dx = -\frac{(\arccos x)^2}{4x^4} + \frac{(1+2x^2)\sqrt{1-x^2}}{6x^3}\arccos x - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{3}\ln x.$$

2) $$\int x^2(\arcsin x)^2\,dx = \frac{1}{3}x^3(\arcsin x)^2 + \frac{2}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{2}{27}x^3 - \frac{4}{9}x.$$

3) $$\int (\operatorname{arctg} x)^2 x^3\,dx = \frac{1}{4}(x^4-1)(\operatorname{arctg} x)^2 - \frac{1}{6}(x^3-3x)\operatorname{arctg} x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}\ln(1+x^2).$$

4) $$\int \frac{(\operatorname{arcctg} x)^2}{x^5}\,dx = \frac{x^4-1}{4x^4}(\operatorname{arcctg} x)^2 + \frac{1-3x^2}{6x^3}\operatorname{arcctg} x - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{3}\ln\frac{1+x^2}{x^2}.$$

5) $$\int (\operatorname{arccosec} x)^2 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4(\operatorname{arccosec} x)^2 + \frac{1}{6}(x^2+2)\sqrt{x^2-1}\operatorname{arccosec} x + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}\ln x.$$

6) $$\int (\operatorname{arcsec} x)^4 \frac{dx}{x^5} = \left(\frac{3}{32} - \frac{1}{4x^4}\right)(\operatorname{arcsec} x)^4 + \left(\frac{1}{4x^4} + \frac{3}{8x^2}\right)\sqrt{x^2-1}(\operatorname{arcsec} x)^3 + \left(\frac{3}{16x^4} + \frac{9}{16x^2} - \frac{45}{128}\right)(\operatorname{arcsec} x)^2 - \left(\frac{3}{32x^4} + \frac{45}{64x^2}\right)\sqrt{x^2-1}\operatorname{arcsec} x - \frac{3}{128x^4} - \frac{45}{128x^2}.$$

§ 3. Интегралы вида $\int (\arcsin x)^p x^m \left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+1} dx$ и $\int (\arccos x)^p x^m \left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+1} dx$

(p, m, n — целые, положительные и отрицательные числа)

I) $$\int (\arcsin x)^m \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(\arcsin x)^{m+1}}{m+1} \qquad (641)$$

при $m = -1$ имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x} = \ln(\arcsin x),$$

$$\int (\arccos x)^m \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{(\arccos x)^{m+1}}{m+1}; \qquad (642)$$

при $m = -1$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos x} = -\ln(\arccos x),$$

$$\int (\operatorname{arctg} x)^m \frac{dx}{1+x^2} = \frac{(\operatorname{arctg} x)^{m+1}}{m+1}; \qquad (643)$$

при $m = -1$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = \ln(\operatorname{arctg} x),$$

$$\int (\operatorname{arcctg} x)^m \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{(\operatorname{arcctg} x)^{m+1}}{m+1}; \qquad (644)$$

при $m = -1$,

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arcctg} x} = -\ln(\operatorname{arcctg} x),$$

$$\int (\operatorname{arcsec} x)^m \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{(\operatorname{arcsec} x)^{m+1}}{m+1}, \qquad (645)$$

при $m=-1$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}\,\operatorname{arcsec} x}=\ln(\operatorname{arcsec} x), \tag{646}$$

$$\int (\operatorname{arccosec} x)^m \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-\frac{(\operatorname{arccosec} x)^{m+1}}{m+1};$$

при $m=-1$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}\,\operatorname{arccosec} x}=-\ln(\operatorname{arccosec} x).$$

II) Представив интеграл $\int \arcsin x\,[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}\,dx$ в виде

$$\int x\arcsin x\, d\,\frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{2n+1}+\int \arcsin x\,[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}\,dx,$$

интегрированием по частям получаем:

$$\int \arcsin x\,[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}\,dx=\frac{x\,[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{2n+2}\arcsin x+$$
$$+\frac{(1-x^2)^{n+1}}{4(n+1)^2}+\frac{2n+1}{2n+2}\int \arcsin x\,[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}\,dx. \tag{647}$$

Точно так же

$$\int \arccos x\,[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}\,dx=\frac{x\,[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{2n+2}\arccos x-$$
$$-\frac{(1-x^2)^{n+1}}{4(n+1)^2}+\frac{2n+1}{2n+2}\int \arccos x\,[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}\,dx. \tag{648}$$

Последовательным применением этих формул приходим в результате к интегралам (641)—(642) и (16a,b) и, таким образом, получаем для вычисляемых интегралов конечные выражения.

III) Интегрированием по частям получаем:

$$\int \arcsin x\cdot x\,[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}\,dx=$$
$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}^{\,2n+2}}{2n+3}\arcsin x+\frac{1}{2n+3}\int (1-x^2)^{n+1}\,dx,$$

$$\int \arccos x\cdot x\,[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}\,dx=$$
$$=-\frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+3}}{2n+3}\arccos x-\frac{1}{2n+3}\int (1-x^2)^{n+1}\,dx$$

или, пользуясь формулой бинома Ньютона, имеем:

$$\int \arcsin x \cdot x \left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+1} dx = -\frac{\left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+3}}{2n+3} \arcsin x + \\ + \frac{1}{2n+3} \sum_{0}^{n+1} (-1)^p \binom{n+1}{p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}, \quad (649)$$

$$\int \arccos x \cdot x \left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+1} dx = -\frac{\left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+3}}{2n+3} \arccos x - \\ - \frac{1}{2n+3} \sum_{0}^{n+1} (-1)^p \binom{n+1}{p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}. \quad (650)$$

Таким образом для интегралов также получаем конечные выражения.

IV) Представив интеграл $\int \arcsin x \cdot x^m \left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+1} dx$ в виде

$$\int \arcsin x \cdot x^{m-1} d\left(-\frac{\left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+3}}{2n+3}\right),$$

интегрированием по частям после простых преобразований получаем формулу

$$\int \arcsin x \cdot x^m \left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+1} dx = -\frac{x^{m-1}\left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+3}}{m+2n+2} \arcsin x + \\ + \frac{1}{m+2n+2} \sum_{0}^{n+1} (-1)^p \binom{n+1}{p} \frac{x^{m+2p}}{m+2p} + \\ + \frac{m-1}{m+2n+2} \int \arcsin x \cdot x^{m-2} \left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+1} dx, \quad (651)$$

и точно так же формулу,

$$\int \arccos x \cdot x^m \left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+1} dx = -\frac{x^{m-1}\left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+3}}{m+2n+2} \arccos x - \\ - \frac{1}{m+2n+2} \sum_{0}^{n+1} (-1)^p \binom{n+1}{p} \frac{x^{m+2p}}{m+2p} + \\ + \frac{m-1}{m+2n+2} \int \arccos x \cdot x^{m-2} \left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+1} dx. \quad (652)$$

В зависимости от того, чётное m или нечётное, формулы приводят или к интегралам (647) — (648) или к интегралам (649) — (650), так что и в том и в другом случае для рассматриваемых интегралов имеем конечные выражения.

Таким образом всякий интеграл вида

$$\int \arcsin x \cdot f(x) [\sqrt{1-x^2}]^{2n+1} dx \text{ и } \int \arccos x \cdot f(x) [\sqrt{1-x^2}]^{2n+1} dx,$$

если f — целая рациональная функция, вычисляется в конечном виде.

$$\text{V)} \int \arcsin x \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx = \sqrt{1-x^2} \arcsin x - x + \int \frac{\arcsin x \, dx}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad (653)$$

$$\int \arccos x \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx = \sqrt{1-x^2} \arccos x + x + \int \frac{\arccos x \, dx}{x\sqrt{1-x^2}}. \quad (654)$$

Интегралы правых частей равенств не вычисляются в конечном виде. Подстановками $\arcsin x = y$ и $\arccos x = y$ они приводятся к интегралам

$$\int \frac{y\,dy}{\sin y} \quad \text{и} \quad -\int \frac{y\,dy}{\cos y}.$$

$$\text{VI)} \int \arcsin x \frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{x} dx = \frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{2n+1} \arcsin x -$$

$$-\frac{1}{2n+1} \sum_{0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \int \arcsin x \frac{[\sqrt{1+x^2}]^{2n-1}}{x} dx, \quad (655)$$

$$\int \arccos x \frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{x} dx = \frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{2n+1} \arccos x +$$

$$+\frac{1}{2n+1} \sum_{0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \int \arccos x \frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}}{x} dx. \quad (656)$$

Формулы приводят в результате к интегралам (653) — (654) и, следовательно, рассматриваемые интегралы не вычисляются в конечном виде.

VII) Обращая формулы (651) — (652) и заменяя m на $(-m+2)$, получаем:

$$\int \arcsin x \frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{x^m} dx = -\frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+3}}{(m-1)\,x^{m-1}} \arcsin x +$$

$$+\frac{1}{m-1} \sum_{0}^{n+1} (-1)^p \binom{n+1}{p} \frac{x^{2p-m+2}}{2p-m+2} -$$

$$-\frac{2n-m+4}{m-1} \int \arcsin x \frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{x^{m-2}} dx, \quad (657)$$

$$\int \arccos x \frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{x^m}dx = -\frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+3}}{(m-1)x^{m-1}}\arccos x - \\ -\frac{1}{m-1}\sum_0^{n+1}(-1)^p\binom{n+1}{p}\frac{x^{2p-m+2}}{2p-m+2} - \\ -\frac{2n-m+4}{m-1}\int \arccos x\frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{x^{m-2}}dx. \quad (658)$$

При m чётном формулы приводят к интегралам (647) — (648) и, следовательно, получаем для интегралов конечные выражения.

При m нечётном приходим к интегралам (655) — (656) и затем к невычисляемым в конечном виде интегралам (653) — (654).

Представив интеграл $\int \arcsin x \frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{x^m}dx$ в виде разности двух интегралов

$$\int \arcsin x\frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}}{x^m}dx - \int \arcsin x\frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}}{x^{m-2}}dx,$$

и выразив первый из них по формуле (657), получаем более эффективную в смысле применения формулу

$$\int \arcsin x \frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{x^m}dx = -\frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{(m-1)x^{m-1}}\arcsin x + \\ +\frac{1}{m-1}\sum_0^{n}(-1)^p\binom{n}{p}\frac{x^{2p-m+2}}{2p-m+2} - \\ -\frac{2n+1}{m-1}\int \arcsin x\frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}}{x^{m-2}}dx, \quad (659)$$

и точно так же

$$\int \arccos x \frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{x^m}dx = -\frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}{(m-1)x^{m-1}}\arccos x - \\ -\frac{1}{m-1}\sum_0^{n}(-1)^p\binom{n}{p}\frac{x^{2p-m+2}}{2p-m+2} - \\ -\frac{2n+1}{m-1}\int \arccos x\frac{[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}}{x^{m-2}}dx. \quad (660)$$

В случае $p=\frac{m}{2}-1$ формулы (657) — (660) не дают выражения для одного из членов суммы и этот член тогда равен

$$\frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1}}{m-1}\binom{n+1}{\frac{m}{2}-1}\ln x,$$

$$\text{VIII)}\quad \int \arcsin x \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x, \tag{661}$$

$$\int \arccos x \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\arccos x - x, \tag{662}$$

$$\int \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{[1-x^2]^3}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x + \ln\sqrt{1-x^2}, \tag{663}$$

$$\int \arccos x \frac{dx}{\sqrt{[1-x^4]^3}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x - \ln\sqrt{1-x^2}. \tag{664}$$

Примеры

7) a) $\int \arcsin x\sqrt{1-x^2}\,dx =$

$$= \frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \frac{1}{4}(1-x^2),$$

b) $\int \arccos x\sqrt{1-x^2}\,dx =$

$$= -\frac{1}{4}(\arccos x)^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arccos x - \frac{1}{4}(1-x^2).$$

8) $\int \arccos x\cdot x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\arccos x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^3.$

9) $\int \arcsin x\cdot\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx =$

$$= \frac{3}{16}(\arcsin x)^2 + \frac{1}{8}x(5-2x^2)\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \frac{1}{16}(4-x^2)(1-x^2).$$

10) $\int \arcsin x\cdot x(\sqrt{1-x^2})^3\,dx =$

$$= -\frac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5}\arcsin x + \frac{1}{5}x - \frac{2}{15}x^3 + \frac{1}{25}x^5.$$

11) $\int \arccos x\cdot x^3\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx =$

$$= -\frac{1}{35}(5x^2+2)\sqrt{(1-x^2)^5}\arccos x - \frac{2}{35}x - \frac{1}{105}x^3 + \frac{8}{175}x^5 - \frac{1}{49}x^7.$$

12) $\int \arccos x\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x}\,dx =$

$$= \frac{1}{3}(4-x^2)\sqrt{1-x^2}\arccos x + \frac{4}{3}x - \frac{1}{9}x^3 + \int\frac{\arccos x\,dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

13) $\int \arcsin x\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^6}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x^5}\arcsin x - \frac{1}{20x^4} + \frac{1}{5x^2} + \frac{1}{5}\ln x.$

14) $\int \arcsin x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{4}(\arcsin x)^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \frac{1}{4}x^2.$

15) $\int \arcsin x\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \frac{3}{16}(\arcsin x)^2 - \frac{1}{8}(2x^3+3x)\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16}x^4.$$

16) a) $\displaystyle\int \arcsin x \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,

b) $\displaystyle\int \arccos x \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

17) $\displaystyle\int \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^5}} = \frac{x(3-2x^2)}{3\sqrt{1-x^2}^3}\arcsin x - \frac{1}{6(1-x^2)} + \frac{1}{3}\ln(1-x^2)$.

18) $\displaystyle\int \arcsin x \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x - x + \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

IX) $\displaystyle\int \arcsin x \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \frac{1}{m}x^{m-1}\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \frac{x^m}{m^2} + \frac{m-1}{m}\int \arcsin x \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (665)$$

$$\int \arccos x \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{m}x^{m-1}\sqrt{1-x^2}\arccos x - \frac{x^m}{m^2} + \frac{m-1}{m}\int \arccos x \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (666)$$

Формулы эти приводят к интегралам (661)—(662) при m нечётном или к интегралам (641)—(642) при m чётном и, следовательно, интегралы вычисляются в конечном виде.

X) Непосредственно интегрированием по частям или обращением формул (647)—(648) при замене n на $(-n)$ получаем:

$$\int \arcsin x \frac{dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} =$$

$$= \frac{x \arcsin x}{(2n-1)[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} - \frac{1}{(2n-1)(2n-2)(1-x^2)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{2n+2}{2n+1}\int \arcsin x \frac{dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}}, \quad (667)$$

$$\int \arccos x \frac{dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} =$$

$$= \frac{x \arccos x}{(2n-1)[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} + \frac{1}{(2n-1)(2n-2)(1-x^2)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{2n+2}{2n+1}\int \arccos x \frac{dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}}. \quad (668)$$

Формулы теряют значение для $n=1$, и для соответствующих интегралов имеем выражения (663)—(664).

К этим интегралам приходим и последовательным применением формул (667)—(668) и, следовательно, получаем для рассматриваемых интегралов конечные выражения.

XI) Непосредственно интегрированием по частям или заменяя в формулах (649)—(650) n на $(-n-1)$, получаем:

$$\int \arcsin x \frac{x\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} = \frac{\arcsin x}{(2n-1)[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} - \frac{1}{2n-1}\int \frac{dx}{(1-x^2)^n},$$

$$\int \arccos x \frac{x\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} = \frac{\arccos x}{(2n-1)[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} + \frac{1}{2n-1}\int \frac{dx}{(1-x^2)^n},$$

или, выражая последний интеграл формул по формуле (94),

$$\int \arcsin x \frac{x\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} = \frac{\arcsin x}{(2n-1)[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} -$$

$$- \frac{x}{(2n-1)(2n-2)(1-x^2)^{n-1}} \left\{1 + \frac{2n-3}{2n-4}(1-x^2) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4\cdot 2}(1-x^2)^{n-2}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2n-1} + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad (669)$$

$$\int \arccos x \frac{x\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} = \frac{\arccos x}{(2n-1)[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} +$$

$$+ \frac{x}{(2n-1)(2n-2)(1-x^2)^{n-1}} \left\{1 + \frac{2n-3}{2n-4}(1-x^2) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4\cdot 2}(1-x^2)^{n-2}\right\} -$$

$$- \frac{1}{2n-1} \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \quad (670)$$

Формулы теряют значение при $n=1$ и в этом случае имеем интегралы примера 16.

XII) Представив интеграл $\int \arcsin x \frac{x^m\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}$ в виде:

$$-\int \frac{\arcsin x}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}}\, d\,\frac{x^{m-1}}{m-1} + \int \arcsin x \frac{x^{m-2}\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}},$$

и затем в виде:

$$\int x^{m-1} \arcsin x\, d\, \frac{1}{(2n-1)[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} - \int \arcsin x \frac{x^{m-2}\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}},$$

получаем формулы:

$$\int \arcsin x \frac{x^m\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} = \frac{x^{m-1}\arcsin x}{(2n-m)[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} - \frac{1}{2n-m}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^2)^n} -$$

$$- \frac{m-1}{2n-m}\int \arcsin x \frac{x^{m-2}\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}, \quad (671)$$

$$\int \arcsin x \frac{x^m\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} = \frac{x^{m-1}\arcsin x}{(2n-1)[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} - \frac{1}{2n-1}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^2)^n} - \frac{m-1}{2n-1}\int \arcsin x \frac{x^{m-2}\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}}. \qquad (672)$$

Таким же путём получаем:

$$\int \arccos x \frac{x^m\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} = \frac{x^{m-1}\arccos x}{(2n-m)[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} + \frac{1}{2n-m}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^2)^n} - \frac{m-1}{2n-m}\int \arcsin x \frac{x^{m-2}\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}, \qquad (673)$$

$$\int \arccos x \frac{x^m\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} = \frac{x^{m-1}\arccos x}{(2n-1)[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} + \frac{1}{2n-1}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^2)^n} - \frac{m-1}{2n-1}\int \arcsin x \frac{x^{m-2}\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}}. \qquad (674)$$

Применением формул (671)—(673), если $m > 2n$ и формул (672)—(674), если $m < 2n$, приходим в зависимости от того, чётное m или нечётное, к интегралам (667)—(668) или (669)—(670). Таким образом и в том и в другом случае получаем для интегралов конечные выражения.

Отсюда следует, что всякий интеграл вида

$$\int \arcsin x \frac{(x)\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} \quad \text{и} \quad \int \arccos x \frac{f(x)\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}},$$

где $f(x)$ — целая рациональная функция, вычисляется в конечном виде.

XIII) Представив интеграл $\int \frac{\arcsin x\,dx}{x[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}$ в виде

$$\int \arcsin x \frac{x\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} + \int \frac{\arcsin x\,dx}{x[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} = \int \arcsin x\, d\frac{1}{(2n-1)[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} + \int \frac{\arcsin x\,dx}{x[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}},$$

интегрированием по частям получаем:

$$\int \frac{\arcsin x\,dx}{x[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} = \frac{\arcsin x}{(2n-1)[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} - \frac{1}{2n-1}\int \frac{dx}{(1-x^2)^n} + \int \frac{\arcsin x\,dx}{x[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}}. \qquad (675)$$

Точно так же получаем:

$$\int \frac{\arccos x\,dx}{x[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} = \frac{\arccos x}{(2n-1)[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} + \frac{1}{2n-1}\int \frac{dx}{(1-x^2)^n} + \int \frac{\arccos x\,dx}{x[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}}. \qquad (676)$$

Из этих формул следует, что интегралы не вычисляются в конечном виде, так как формулы в конечном счёте приводят к невычисляемым интегралам $\int \frac{\arcsin x\,dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ и $\int \frac{\arccos x\,dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ (см. раздел IV).

Непосредственно интегрированием по частям или обращением формул (671)—(674) при замене m на $(-m+2)$ получаем:

$$\int \frac{\arcsin x\,dx}{x^m[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} = -\frac{\arcsin x}{(m-1)\,x^{m-1}[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-1}(1-x^2)^n} + \frac{2n+m-2}{m-1}\int \frac{\arcsin x\,dx}{x^{m-2}[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}, \qquad (677)$$

$$\int \frac{\arccos x\,dx}{x^m[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}} = -\frac{\arccos x}{(m-1)\,x^{m-1}[\sqrt{1-x^2}]^{2n-1}} - \frac{1}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-1}(1-x^2)^n} + \frac{2n+m-2}{m-1}\int \frac{\arccos x\,dx}{x^{m-2}[\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}}. \qquad (678)$$

При m нечётном, в результате применения метода приведения, приходим к интегралам (675) и (676), которые, как показано, не вычисляются в конечном виде, и при m чётном — к интегралам (667) и (668), так что в последнем случае интегрирование выполняется.

Примеры

19) $\int \frac{\arcsin x\,dx}{x\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \int \frac{\arcsin x\,dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

20) $\int \frac{\arccos x\,dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = -\frac{(1+2x^2)\sqrt{1-x^2}}{3x^3}\arccos x + \frac{1}{6x^2} - \frac{2}{3}\ln x$.

21) $\int (\arccos x)^2 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^{\,3}(\arccos x)^2 + \frac{2}{9}(x^2-3)\arccos x + \frac{2}{27}\sqrt{1-x^2}^{\,3} + \frac{4}{9}\sqrt{1-x^2}$ (подст. $\arccos x = y$).

22) $\int \frac{(\arcsin x)^3 x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{8}(\arcsin x)^4 - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^3 - \frac{3}{8}(1-2x^2)(\arcsin x)^2 + \frac{3}{4}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{3}{8}x^2$

(подст. $\arcsin x = y$).

XIV) Рассматривая общий случай, интегралы

$$\int (\arcsin x)^p x^m [\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}\,dx \text{ и } \int (\arccos x)^p x^m [\sqrt{1-x^2}]^{2n+1}\,dx$$

в условиях целых p, m, n и различных комбинаций их знаков, замечаем, что подстановками $\arcsin x = y$ и $\arccos x = y$ эти интегралы приводятся к интегралам

$$\int y^p \sin^m y \cos^{2n+2} y\, dy \quad \text{и} - \int y^p \cos^m y \sin^{2n+2} y\, dy.$$

На основании выводов §§ 2, 7 и 8 гл. VII приходим к заключению, что для рассматриваемых интегралов интегрирование выполняется в следующих случаях:

1) если p и m — числа положительные, считая и нуль, $n \geqslant -1$,
2) при $p=1$ для всякого и отрицательного n, если $m \geqslant 0$,
3) если $m<0$ и число чётное,
4) когда $m=0$ и $n=-1$.

Обобщая несколько случай 1), приходим к выводу, что интегрирование выполняется для всякого интеграла

$$\int F(x, \arcsin x)\left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+1} dx \text{ и } \int F(x, \arccos x)\cdot\left[\sqrt{1-x^2}\right]^{2n+1} dx,$$

если F — целая рациональная функция своих аргументов, и $n \geqslant -1$.

§ 4. Интегралы вида $\int (\operatorname{arctg} x)^p x^m (1+x^2)^n\, dx$ и $\int (\operatorname{arcctg} x)^p x^m (1+x^2)^n\, dx$ (p, m, n — целые, положительные и отрицательные числа)

I) Интегрированием по частям легко получаем:

$$\int x(1+x^2)^n \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{(1+x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2(n+1)} \int (1+x^2)^n\, dx;$$

разложив $(1+x^2)^n$ по степеням x, имеем:

$$\int x(1+x^2)^n \operatorname{arctg} x\, dx =$$

$$= \frac{(1+x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2(n+1)} \sum_0^n \binom{n}{p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}. \quad (679)$$

Точно так же получаем:

$$\int x(1+x^2)^n \operatorname{arcctg} x =$$

$$= \frac{(1+x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2(n+1)} \sum_0^n \binom{n}{p} \frac{x^{2p+1}}{p+1}. \quad (680)$$

Интегрированием по частям получаем:

$$\int x^{2n}(1+x^2)\operatorname{arctg} x\,dx =$$
$$= \left(\frac{x^{2n+3}}{2n+3}+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2n+3}\int \frac{x^{2n+3}}{1+x^2}\,dx - \frac{1}{2n+1}\int\frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,dx,$$

или, выражая после надлежащих преобразований последние интегралы по формуле (75), будем иметь:

$$\int x^{2n}(1+x^2)\operatorname{arctg} x\,dx = x^{2n+1}\left(\frac{x^2}{2n+3}+\frac{1}{2n+1}\right)\operatorname{arctg} x -$$
$$-\frac{x^{2n+2}}{(2n+3)(2n+2)} - \frac{1}{(2n+3)(2n+1)}\sum_{1}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\frac{(1+x^2)^p}{p} -$$
$$-\frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+1)}\ln(1+x^2). \qquad (681)$$

Точно так же

$$\int x^{2n}(1+x^2)\operatorname{arcctg} x\,dx = x^{2n+1}\left(\frac{x^2}{2n+3}+\frac{1}{2n+1}\right)\operatorname{arcctg} x +$$
$$+\frac{x^{2n+2}}{(2n+3)(2n+2)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+1)}\sum_{1}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\frac{(1+x^2)^p}{p} +$$
$$+\frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+1)}\ln(1+x^2), \qquad (682)$$

$$\int x^{2n+1}(1+x^2)\operatorname{arctg} x\,dx =$$
$$=\left[\frac{x^{2n+4}}{2n+4}+\frac{x^{2n+2}}{2n+2}+\frac{(-1)^n\,2}{(2n+4)(2n+2)}\right]\operatorname{arctg} x -$$
$$-\frac{x^{2n+3}}{(2n+4)(2n+3)} - \frac{2}{(2n+4)(2n+2)}\sum_{0}^{n}(-1)^p\frac{x^{2n+1-2p}}{2n+1-2p}, \qquad (683)$$

$$\int x^{2n+1}(1+x^2)\operatorname{arcctg} x\,dx =$$
$$=\left[\frac{x^{2n+4}}{2n+4}+\frac{x^{2n+2}}{2n+2}+\frac{(-1)^n\,2}{(2n+4)(2n+2)}\right]\operatorname{arcctg} x +$$
$$+\frac{x^{2n+3}}{(2n+4)(2n+3)} + \frac{2}{(2n+4)(2n+2)}\sum_{0}^{n}(-1)^p\frac{x^{2n+1-2p}}{2n+1-2p}. \qquad (684)$$

Представив интеграл $\int x^n(1+x^2)^m\operatorname{arctg} x\,dx$ в виде

$$\int \operatorname{arctg} x\, d\sum_{0}^{m}\binom{m}{p}\frac{x^{2p+n+1}}{2p+n+1},$$

получаем:

$$\int x^n (1+x^2)^m \operatorname{arctg} x\, dx =$$
$$= \operatorname{arctg} x \sum_0^m \binom{m}{p} \frac{x^{2p+n+1}}{2p+n+1} - \sum_0^m \frac{\binom{m}{p}}{2p+n+1} \int \frac{x^{2p+n+1}}{1+x^2}\, dx. \quad (685)$$

Точно так же

$$\int x^n (1+x^2)^m \operatorname{arcctg} x\, dx =$$
$$= \operatorname{arcctg} x \sum_0^m \binom{m}{p} \frac{x^{2p+n+1}}{2p+n+1} + \sum_0^m \frac{\binom{m}{p}}{2p+n+1} \int \frac{x^{2p+n+1}\, dx}{1+x^2}. \quad (686)$$

Последний интеграл этих формул, как легко видеть, даёт в результате алгебраическое выражение и $\operatorname{arctg} x$, если n — нечётное, и $\ln(1+x^2)$, если n — чётное.

Таким образом для рассматриваемых интегралов получаем конечные выражения. Отсюда также следует, что всякий интеграл

$$\int F(x) \operatorname{arctg} x\, dx \quad \text{и} \quad \int F(x) \operatorname{arcctg} x\, dx,$$

если F — целая рациональная функция, вычисляется в конечном виде.

Примеры

23) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \frac{x\, dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2}\right] \operatorname{arctg} x + \frac{x}{4(1+x^2)}.$

24) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \frac{x\, dx}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{8} - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right] \operatorname{arctg} x + \frac{x(5+3x^2)}{32(1+x^2)^2}.$

II) Интегрированием по частям получаем:

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{x\, dx}{(1+x^2)^n} = -\frac{\operatorname{arctg} x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^n},$$

и выражая последний интеграл по формуле (91), найдём:

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{x\, dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\operatorname{arctg} x}{2(n-1)} \left[\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2} - \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\right] +$$
$$+ \frac{x}{4(n-1)^2(1+x^2)^{n-1}} \left\{1 + \frac{2n-3}{2n-4}(1+x^2) + \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}(1+x^2)^2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4\cdot 2}(1+x^2)^{n-2}\right\}. \quad (687)$$

Точно так же получаем:

$$\int \operatorname{arcctg} x \frac{x\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\operatorname{arcctg} x}{2(n-1)} \left[\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2} - \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \right] -$$
$$- \frac{x}{4(n-1)^2(1+x^2)^{n-1}} \left\{ 1 + \frac{2n-3}{2n-4}(1+x^2) + \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}(1+x^2)^2 + \right.$$
$$\left. + \ldots \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4\cdot 2}(1+x^2)^{n-2} \right\}. \quad (688)$$

Формулы теряют значение при $n=1$, и в этом случае имеем не вычисляемые в конечном виде интегралы:

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \int \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx, \quad (689)$$

$$\int \operatorname{arcctg} x \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arcctg} x \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \int \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx. \quad (690)$$

Примеры

25) $\int \operatorname{arctg} x \frac{x^2dx}{1+x^2} = -\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$

26) $\int \operatorname{arctg} x \frac{x^3\,dx}{1+x^2} =$
$$= \frac{1}{2}[1+x^2-\ln(1+x^2)]\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx.$$

III) $$\int \operatorname{arctg} x \frac{x^n\,dx}{1+x^2} = \frac{x^{n-1}}{n-1}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{n-1}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{1+x^2} - \int \operatorname{arctg} x \frac{x^{n-2}\,dx}{1+x^2}, \quad (691)$$

$$\int \operatorname{arcctg} x \frac{x^n\,dx}{1+x^2} =$$
$$= \frac{x^{n-1}}{n-1}\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{n-1}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{1+x^2} - \int \operatorname{arcctg} x \frac{x^{n-2}\,dx}{1+x^2}. \quad (692)$$

Последовательным применением этих формул приходим в конечном счёте, если n — чётное, к интегралам

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$$

и

$$\int \operatorname{arcctg} x \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{2}(\operatorname{arcctg} x)^2, \quad (693)$$

и, если n — нечётное, к невычисляемым интегралам (689) и (690).

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x \operatorname{arctg} x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{4(n-1)^2(1+x^2)^{n-1}} +$$
$$+ \frac{2n-3}{2n-2}\int \operatorname{arctg} x \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}, \quad (694)$$

$$\int \operatorname{arcctg} x \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x \operatorname{arcctg} x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{4(n-1)^2(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \operatorname{arcctg} x \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}. \quad (695)$$

В результате применения формул приходим к интегралам (693), так что для интегралов рассматриваемого вида получаем конечные выражения.

Рассматривая отдельно случай n чётного и n нечётного и заменяя $\frac{x^{2n}}{1+x^2}$ и $\frac{x^{2n+1}}{1+x^2}$ выражениями

$$\sum_1^n (-1)^{n-p} x^{2p-2} + \frac{(-1)^n}{1+x^2} \quad \text{и} \quad \sum_1^n (-1)^{n-p} x^{2p-1} + \frac{(-1)^n x}{1+x^2},$$

легко получаем формулы:

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = \frac{(-1)^n}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + \operatorname{arctg} x \sum_1^n (-1)^{n-p} \frac{x^{2p-1}}{2p-1} - \sum_1^n \frac{(-1)^{n-p}}{2p-1} \int \frac{x^{2p-1}\,dx}{1+x^2}, \quad (696)$$

$$\int \operatorname{arcctg} x \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = -\frac{(-1)^n}{2} (\operatorname{arcctg} x)^2 + \operatorname{arcctg} x \sum_1^n (-1)^{n-p} \frac{x^{2p-1}}{2p-1} + \sum_1^n \frac{(-1)^{n-p}}{2p-1} \int \frac{x^{2p-1}\,dx}{1+x^2}, \quad (697)$$

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x \sum_1^n (-1)^{n-p} \frac{x^{2p}}{2p} - \sum_1^n \frac{(-1)^{n-p}}{2p} \int \frac{x^{2p}\,dx}{1+x^2} + (-1)^n \int \operatorname{arctg} x \frac{x\,dx}{1+x^2}, \quad (698)$$

$$\int \operatorname{arcctg} x \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx = \operatorname{arcctg} x \sum_1^n (-1)^{n-p} \frac{x^{2p}}{2p} + \sum_1^n \frac{(-1)^{n-p}}{2p} \int \frac{x^{2p}\,dx}{1+x^2} + (-1)^n \int \operatorname{arcctg} x \frac{x\,dx}{1+x^2}. \quad (699)$$

Из этих формул следует, что при n чётном интегрирование выполняется; если же n — нечётное, то приходим к невычисляемым интегралам (689) и (690).

Примеры

27) $\int \operatorname{arctg} x \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{4}(\operatorname{arctg} x)^2 - \frac{x}{2(1+x^2)} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{8}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

28) $$\int \operatorname{arctg} x \frac{x^3\,dx}{(1+x^2)^2} = \left[\frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{1}{4}\right] \operatorname{arctg} x - \frac{x}{4(1+x^2)} + \int \operatorname{arctg} x \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

29) $$\int \operatorname{arctg} x \frac{x^5\,dx}{(1+x^2)^2} = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{3}{4}\right] \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{x}{4(1+x^2)} - 2\int \operatorname{arctg} x \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

IV) $$\int \operatorname{arctg} x \frac{x^n\,dx}{(1+x^2)^m} = -\frac{x^{n-1}\operatorname{arctg} x}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{(1+x^2)^m} + \frac{n-1}{2(m-1)}\int \operatorname{arctg} x \frac{x^{n-2}\,dx}{(1+x^2)^{m-1}}, \tag{700}$$

$$\int \operatorname{arcctg} x \frac{x^n\,dx}{(1+x^2)^m} = -\frac{x^{n-1}\operatorname{arcctg} x}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(m-1)}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{(1+x^2)^m} + \frac{n-1}{2(m-1)}\int \operatorname{arcctg} x \frac{x^{n-2}\,dx}{(1+x^2)^{m-1}}. \tag{701}$$

При n чётном, в зависимости от того, имеем ли $n < 2m$ или $n \geqslant 2m$, формулы приводят к интегралам вида

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{dx}{(1+x^2)^k}, \quad \int \operatorname{arcctg} x \frac{dx}{(1+x^2)^k}$$

и

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{x^{2k}\,dx}{1+x^2}, \quad \int \operatorname{arcctg} x \frac{x^{2k}\,dx}{1+x^2} \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

которые, согласно (691) — (695) вычисляются в конечном виде.

При n нечётном, если $n < 2m-1$, приходим к интегралам

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{x\,dx}{(1+x^2)^k} \quad \text{и} \quad \int \operatorname{arcctg} x \frac{x\,dx}{(1+x^2)^k} \qquad (k=2, 3, \ldots),$$

для которых имеем выражения (687) — (688).

Если же при n нечётном имеем $n \geqslant 2m-1$, то формулы приводят к невычисляемым, согласно (691)—(692) и (689) — (690) интегралам вида

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{x^{2k+1}\,dx}{1+x^2} \quad \text{и} \quad \int \operatorname{arcctg} x \frac{x^{2k+1}\,dx}{1+x^2},$$

и, следовательно, в этих условиях интегрирование в конечном виде невыполнимо.

Примеры

80) $$\int \operatorname{arcctg} x \frac{1+x^2}{x^2}\,dx = \left(x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{arcctg} x + \ln\frac{1+x^2}{x}.$$

81) $$\int \operatorname{arcctg} x \frac{1+x^2}{x^5}\,dx = -\frac{(1+x^2)^2}{4x^4}\operatorname{arcctg} x + \frac{3x^2+1}{12x^3}.$$

82) $$\int \operatorname{arcctg} x \frac{(1+x^2)^2}{x^5}\,dx =$$
$$= \left(\frac{x^4-1}{4x^4} - \frac{x^2+1}{x^2}\right)\operatorname{arcctg} x + \frac{9x^2+1}{12x^3} + \int \frac{\operatorname{arcctg} x}{x}\,dx.$$

V) Имеем

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{(1+x^2)^m}{x^n}\,dx = \int \operatorname{arctg} x \sum_0^m \binom{m}{p} x^{2p-n}\,dx =$$
$$= \int \operatorname{arctg} x\, d\sum_0^m \binom{m}{p} \frac{x^{2p-n+1}}{2p-n+1}.$$

Отсюда получаем:

$$\int \operatorname{arctg} x \frac{(1+x^2)^m}{x^n}\,dx =$$
$$= \operatorname{arctg} x \sum_0^m \binom{m}{p} \frac{x^{2p-n+1}}{2p-n+1} - \sum_0^m \frac{\binom{m}{p}}{2p-n+1}\int \frac{x^{2p-n+1}}{1+x^2}\,dx. \qquad (702)$$

Точно так же

$$\int \operatorname{arcctg} x \frac{(1+x^{2m})}{x^n}\,dx =$$
$$= \operatorname{arcctg} x \sum_0^m \binom{m}{p} \frac{x^{2p-n+1}}{2p-n+1} + \sum_0^m \frac{\binom{m}{p}}{2p-n+1}\int \frac{x^{2p-n+1}}{2p-n+1}\,dx. \qquad (703)$$

Формулы теряют значение для одного из членов сумм для $p = \frac{n-1}{2}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots, m)$. Один из членов суммы $\sum_0^m \binom{m}{p} x^{2p-n}$ равен тогда $\binom{m}{p}\frac{1}{x}$ и для соответствующих ему выражений $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ и $\frac{\operatorname{arcctg} x}{x}$, как известно из (633)—(634), интегрирование невыполнимо.

При n чётном, и при n нечётном, если $n > 2m+1$, случай $p = \frac{n-1}{2}$ исключается, и для рассматриваемых интегралов имеем выражения конечного вида.

При n нечётном, если $n \leqslant 2m+1$, всегда имеем один из членов суммы вида $\binom{m}{p}\frac{1}{x}$, и соответствующие ему выражения в формулах будут:

$$\binom{m}{p} \operatorname{arctg} x \ln x - \binom{m}{p} \int \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

и

$$\binom{m}{p} \operatorname{arcctg} x \cdot \ln x + \binom{m}{p} \int \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

В этом случае, n — нечётное и $n \leqslant 2m+1$, интегрирование в конечном виде, очевидно, невыполнимо.

Примеры

33) $$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx = -\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x - \ln \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

(подст. $\operatorname{arctg} x = y$).

34) $$\int (\operatorname{arctg} x)^2 \frac{dx}{x^3} = -\frac{1+x^2}{2x^2} (\operatorname{arctg} x)^2 - \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x - \ln \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

35) $$\int (\operatorname{arcctg} x)^2 \frac{1+x^2}{x^5} dx = -\frac{(1+x^2)^2}{4x^4} (\operatorname{arcctg} x)^2 + \frac{1+3x^2}{6x^3} \operatorname{arcctg} x - \frac{1+x^2}{12x^2} - \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$ (подст. $\operatorname{arcctg} x = y$).

36) $$\frac{(\operatorname{arcctg} x)^2 x^3 dx}{(1+x^2)^3} = \frac{5x^4 - 6x^2 - 3}{32(1+x^2)^2} (\operatorname{arcctg} x)^2 - \frac{5x^3+3x}{16(1+x^2)^2} \operatorname{arcctg} x - \frac{17x^4 - 6x^2 - 15}{256(1+x^2)^2}$$ (подст. $\operatorname{arcctg} x = y$).

VI) Рассматривая общий случай, интегралы

$$\int (\operatorname{arctg} x)^p x^m (1+x^2)^n dx \quad \text{и} \quad \int (\operatorname{arcctg} x)^p x^m (1+x^2)^n dx$$

при целых p, m, n, и возможных комбинациях их знаков, замечаем, что подстановками $\operatorname{arctg} x = y$ и $\operatorname{arcctg} x = y$ эти интегралы приводятся к виду

$$\int y^p \sin^m y \cos^{-(2n+m+2)} y\, dy \quad \text{и} \quad \int y^p \cos^m y \sin^{-(2n+m+2)} y\, dy.$$

На основании выводов §§ 2, 7 и 8 гл. VII приходим к заключению, что для рассматриваемых интегралов интегрирование в конечном виде выполняется в следующих случаях:

1) $p>0$, $m>0$, $n<-\frac{m}{2}-1$;
2) $p=1$, m — чётное;
3) $p=1$ или $=2$ m — нечётное, $n>-1$;
4) $m=0$, $n=-1$.

§ 5. Интегралы вида

$$\int (\operatorname{arcsec} x)^p x^m \left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n+1} dx$$

$$\text{и } \int (\operatorname{arccosec} x)^p x^m \left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n+1} dx$$

(p, m, n — целые, положительные и отрицательные числа)

I) Представив интеграл

$$\int \operatorname{arcsec} x \left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n+1} dx$$

в виде

$$\int x \operatorname{arcsec} x\, d\frac{\left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n+1}}{2n+1}-\int \operatorname{arcsec} x \left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n-1} dx,$$

интегрированием по частям получаем формулу

$$\int \operatorname{arcsec} x \left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n+1} dx=\frac{\left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n+1}}{2n+2} x \operatorname{arcsec} x-$$
$$-\frac{1}{2n+2}\sum_{0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\frac{x^{2p+1}}{2p+1}-\frac{2n+1}{2n+2}\int \operatorname{arcsec} x \left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n-1} dx. \quad (704)$$

Точно так же

$$\int \operatorname{arccosec} x \left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n+1} dx=$$
$$=\frac{x\left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n+1}}{2n+2} \operatorname{arccosec} x + \frac{1}{2n+2}\sum_{0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\frac{x^{2p+1}}{2p+1}-$$
$$-\frac{2n+1}{2n+2}\int \operatorname{arccosec} x \left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n-1} dx. \quad (705)$$

При $n=-1$, т. е. для интегралов

$$\int \frac{\operatorname{arcsec} x}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad \text{и} \quad \int \frac{\operatorname{arccosec} x}{\sqrt{x^2-1}} dx, \quad (706)$$

формулы теряют значение. Эти интегралы не вычисляются в конечном виде. К ним приходим и последовательным применением формул, так что для интегралов (704) — (705) интегрирование в конечном виде также невыполнимо.

Подстановками $\operatorname{arcsec} x = y$ и $\operatorname{arccosec} x = y$ интегралы (706) приводятся к интегралам $\int \frac{y\,dy}{\cos y}$ и $\int \frac{y\,dy}{\sin y}$, которые, согласно § 4 гл. VII, также могут быть выражены только бесконечными рядами:

$$\text{II)}\quad \int \operatorname{arcsec} x\,[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}\,x\,dx = \frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+3}}{2n+3}\operatorname{arcsec} x + \frac{(-1)^n}{2n+3}\ln x - \frac{1}{2n+3}\sum_{1}^{n+1}(-1)^{n+1-p}\binom{n+1}{p}\frac{x^{2p}}{2p}, \quad (707)$$

$$\int \operatorname{arccosec} x\,[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}\,x\,dx = \frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+3}}{2n+3}\operatorname{arccosec} x - \frac{(-1)^n}{2n+3}\ln x + \frac{1}{2n+3}\sum_{1}^{n+1}(-1)^{n+1-p}\binom{n+1}{p}\frac{x^{2p}}{2p}. \quad (708)$$

Представив интеграл $\int \operatorname{arcsec} x\cdot x^m\,[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}\,dx$ в виде $\int \operatorname{arcsec} x\cdot x^{m-1}\,d\,\frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+3}}{2n+3}$, затем интегрированием по частям, после простых преобразований, получаем:

$$\int \operatorname{arcsec} x\cdot x^m\,[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}\,dx = \frac{x^{m-1}[\sqrt{x^2-1}]^{2n+3}}{m+2n+2}\operatorname{arcsec} x - \frac{1}{m+2n+2}\sum_{0}^{n+1}(-1)^{n+1-p}\binom{n+1}{p}\frac{x^{m-1-2p}}{m-1-2p} + \frac{m-1}{m+2n+2}\int \operatorname{arcsec} x\cdot x^{m-2}\,[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}\,dx, \quad (709)$$

и точно так же

$$\int \operatorname{arccosec} x\cdot x^m\,[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}\,dx = \frac{x^{m-1}[\sqrt{x^2-1}]^{2n+3}}{m+2n+2}\operatorname{arccosec} x + \frac{1}{m+2n+2}\sum_{0}^{n+1}(-1)^{n+1-p}\binom{n+1}{p}\frac{x^{m-1-2p}}{m-1-2p} + \frac{m-1}{m+2n+2}\int \operatorname{arccosec} x\cdot x^{m-2}\,[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}\,dx. \quad (710)$$

При m чётном приходим к интегралам (704) — (705) и, следовательно, интегрирование — невыполнимо, при m нечётном — к интегралам (708) — (709) и получаем конечные выражения.

Примеры

37) $\int \operatorname{arcsec} x \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\operatorname{arcsec} x - \frac{1}{x} + \int \frac{\operatorname{arcsec} x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

38) $\int \operatorname{arccosec} x \frac{\sqrt{(x^2-1)^5}}{x^3}\,dx = -\frac{5}{4}(\operatorname{arccosec} x)^2 -$
$$-\left(\frac{\sqrt{(x^2-1)^5}}{2x^2} - \frac{5}{6}\sqrt{(x^2-1)^3} + \frac{5}{2}\sqrt{x^2-1}\right)\operatorname{arccosec} x + \frac{1}{4x^2} - \frac{7}{3}\ln x + \frac{1}{6}x^2.$$

39) $\int \operatorname{arcsec} x \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}\operatorname{arcsec} x - \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{3x}.$

III)
$$\int \operatorname{arcsec} x \frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}{x}\,dx = \frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}{2n+1}\operatorname{arcsec} x -$$
$$-\frac{(-1)^n}{2n-1}\ln x - \frac{1}{2n+1}\sum_{1}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\frac{x^{2p}}{2p} -$$
$$-\int \operatorname{arcsec} x \frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}}{x}\,dx, \quad (711)$$

$$\int \operatorname{arccosec} x \frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}{x}\,dx =$$
$$= \frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}{2n+1}\operatorname{arccosec} x + \frac{(-1)^n}{2n+1}\ln x + \frac{1}{2n+1}\sum_{1}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\frac{x^{2p}}{2p} -$$
$$-\int \operatorname{arccosec} x \frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}}{x}\,dx. \quad (712)$$

Применением формул приходим в результате к интегралам

$$\int \operatorname{arcsec} x \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}(\operatorname{arcsec} x)^2 + \sqrt{x^2-1}\operatorname{arcsec} x - \ln x, \quad (713)$$

$$\int \operatorname{arccosec} x \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}(\operatorname{arccosec} x)^2 + \sqrt{x^2-1}\operatorname{arccosec} x + \ln x, \quad (714)$$

и, таким образом, получаем для интегралов конечные выражения.

$$\int \operatorname{arcsec} x \frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}{x^m}\,dx = \frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+3}}{(m-1)x^{m-1}}\operatorname{arcsec} x -$$
$$-\frac{1}{m-1}\sum_{0}^{n+1}(-1)^{n+1-p}\binom{n+1}{p}\frac{x^{2p+1-m}}{2p+1-m} -$$
$$-\frac{2n-m+4}{m-1}\int \operatorname{arcsec} x \frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}{x^{m-2}}\,dx, \quad (715)$$

$$\int \operatorname{arccosec} x \frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}{x^m}\,dx = \frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+3}}{(m-1)\,x^{m-1}} \operatorname{arccosec} x + \\ + \frac{1}{m-1}\sum_{0}^{n+1}(-1)^{n+1-p}\binom{n+1}{p}\frac{x^{2p+1-m}}{2p+1-m} - \\ - \frac{2n-m+4}{m-1}\int \operatorname{arccosec} x \,\frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}{x^{m-2}}\,dx, \quad (716)$$

$$\int \operatorname{arcsec} x \,\frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}{x^m}\,dx = -\frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}{(m-1)\,x^{m-1}} \operatorname{arcsec} x - \\ - \frac{1}{m-1}\sum_{0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\frac{x^{2p+1-m}}{2p+1-m} + \\ + \frac{2n+1}{m-1}\int \operatorname{arcsec} x \,\frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}}{x^{m-2}}\,dx, \quad (717)$$

$$\int \operatorname{arccosec} x \,\frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}{x^m}\,dx = -\frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}{(m-1)\,x^{m-1}} \operatorname{arccosec} x - \\ - \frac{1}{m-1}\sum_{0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\frac{x^{2p+1-m}}{2p+1-m} + \\ + \frac{2n+1}{m-1}\int \operatorname{arccosec} x \,\frac{[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}}{x^{m-2}}\,dx. \quad (718)$$

При m нечётном формулы приводят к (711) и (712) и, следовательно, получаем для интегралов конечные выражения. При m чётном, если $m = 2n+4$, формулы (715) и (716) сразу дают выражения интегралов. Если $m > 2n+4$, то при последовательном применении этих формул придём к интегралам, для которых будем иметь $m' = 2n+4$ и, таким образом, также получаем конечные выражения. Если же $m < 2n+4$, то формулы приводят к интегралам (704)—(705), которые не вычисляются в конечном виде.

Таким образом для рассматриваемых интегралов интегрирование выполняется при всяком нечётном m и при чётном m в том случае, если $m \geqslant 2n+4$.

Примеры

40) $\displaystyle\int \operatorname{arcsec} x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^5}} = \frac{2x^3-3x}{3\sqrt{(x^2-1)^3}} \operatorname{arcsec} x - \frac{x}{6(x^2-1)} - \frac{5}{12}\ln\frac{x-1}{x+1}.$

41) $\displaystyle\int \operatorname{arcsec} x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-1)^5}} = -\frac{x^3}{3\sqrt{(x^2-1)^3}} \operatorname{arcsec} x - \frac{x}{6(x^2-1)} + \frac{1}{12}\ln\frac{x-1}{x+1}.$

42) $\displaystyle\int \operatorname{arcsec} x \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(x^2-1)^5}} = \frac{2-3x^2}{3\sqrt{(x^2-1)^3}} \operatorname{arcsec} x - \frac{1}{6(x^2-1)} + \frac{2}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$

43) $$\int \operatorname{arcsec} x \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(x^2-1)^5}} = \frac{3x^5-20x^3+15x}{6\sqrt{(x^2-1)^3}} \operatorname{arcsec} x + \frac{x^3}{4(x^2-1)} - \frac{5x}{12(x^2-1)} - \frac{3}{4}x + \frac{13}{12}\ln\frac{x-1}{x+1} + \frac{5}{2}\int \frac{\operatorname{arcsec} x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

IV) $$\int \operatorname{arcsec} x \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{m}x^{m-1}\sqrt{x^2-1}\operatorname{arcsec} x - \frac{x^{m-1}}{m(m-1)} + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{arcsec} x \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (719)$$

$$\int \operatorname{arccosec} x \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{m}x^{m-1}\sqrt{x^2-1}\operatorname{arccosec} x + \frac{x^{m-1}}{m(m-1)} + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{arccosec} x \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{x^2-1}}. \quad (720)$$

При m нечётном приходим к интегралам

$$\int \operatorname{arcsec} x \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}\operatorname{arcsec} x - \ln x, \quad (721)$$

$$\int \operatorname{arccosec} x \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}\operatorname{arccosec} x + \ln x, \quad (722)$$

и получаем конечные выражения; при m чётном — к невычисляемым интегралам (706).

V) $$\int \frac{\operatorname{arcsec} x\,dx}{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}} = -\frac{x\operatorname{arcsec} x}{(2n-1)[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}} + \frac{1}{2n-1}\int \frac{dx}{(x^2-1)^n} - \frac{2n-2}{2n-1}\int \frac{\operatorname{arcsec} x\,dx}{[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}}, \quad (723)$$

$$\int \frac{\operatorname{arccosec} x\,dx}{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}} = \frac{x\operatorname{arccosec} x}{(2n-1)[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}} - \frac{1}{2n-1}\int \frac{dx}{(x^2-1)^n} - \frac{2n-2}{2n-1}\int \frac{\operatorname{arccosec} x\,dx}{[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}}. \quad (724)$$

При $n=1$ формулы дают выражения для интегралов

$$\int \frac{\operatorname{arcsec} x\,dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{arcsec} x + \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1},$$

$$\int \frac{\operatorname{arccosec} x\,dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{arccosec} x - \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}.$$

К этим интегралам приходим последовательным применением формул, так что при $n>0$ интегралы вычисляются в конечном виде; при $n=0$ имеем невычисляемые интегралы (706).

Для интеграла $\int \frac{dx}{(x^2-1)^n}$ имеем выражение (88).

Интегрированием по частям получаем:

$$\int \operatorname{arcsec} x \frac{x\,dx}{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}} = -\frac{\operatorname{arcsec} x}{(2n-1)[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}} + \frac{1}{2n-1}\int \frac{dx}{x(x^2-1)^n},$$

или, заменяя последний интеграл его выражением по формуле (71) или по формуле (427):

$$\int \operatorname{arcsec} x \frac{x\,dx}{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}} =$$

$$= -\frac{\operatorname{arcsec} x}{(2n-1)[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}} + \frac{1}{2(2n-1)}\sum_{1}^{n-1}(-1)^{n-p}\binom{n-1}{p}\frac{1}{p}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^p -$$

$$-\frac{(-1)^n}{2n-1}\ln\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}. \quad (725)$$

Точно так же получаем:

$$\int \operatorname{arccosec} x \frac{x\,dx}{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}} = -\frac{\operatorname{arccosec} x}{(2n-1)[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}} -$$

$$-\frac{1}{2(2n-1)}\sum_{1}^{n-1}(-1)^{n-p}\binom{n-1}{p}\frac{1}{p}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^p +$$

$$+\frac{(-1)^n}{2n-1}\ln\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, \quad (726)$$

$$\int \operatorname{arcsec} x \frac{x^m\,dx}{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}} = -\frac{x^{m-1}\operatorname{arcsec} x}{(2n-m)[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}} +$$

$$+\frac{1}{2n-m}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2-1)^n} - \frac{m-1}{2n-m}\int \operatorname{arcsec} x \frac{x^{m-2}\,dx}{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}, \quad (727)$$

$$\int \operatorname{arccosec} x \frac{x^m\,dx}{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}} = -\frac{x^{m-1}\operatorname{arccosec} x}{(2n-m)[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}} -$$

$$-\frac{1}{2n-m}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2-1)^n} - \frac{m-1}{2n-m}\int \operatorname{arccosec} x \frac{x^{m-2}\,dx}{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}, \quad (728)$$

$$\int \operatorname{arcsec} x \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-1}^{2n+1}} = -\frac{x^{m-1}\operatorname{arcsec} x}{(2n-1)[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}} +$$

$$+\frac{1}{2n-1}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2-1)^n} + \frac{m-1}{2n-1}\int \operatorname{arcsec} x \frac{x^{m-2}\,dx}{[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}}, \quad (729)$$

$$\int \operatorname{arccosec} x \frac{x^m\,dx}{[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}} = -\frac{x^{m-1}\operatorname{arccosec} x}{(2n-1)[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}} -$$

$$-\frac{1}{2n-1}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{(x^2-1)^n} + \frac{m-1}{2n-1}\int \operatorname{arccosec} x \frac{x^{m-2}\,dx}{[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}}. \quad (730)$$

При m нечётном формулы приводят к интегралам (725) и (726), и в результате получаем конечные выражения.

При m чётном, если $m=2n$, формулы (727) — (728) теряют значение; нетрудно видеть, что формулы (729) — (730) в этом случае приводят к интегралам $\int \frac{\operatorname{arcsec} x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$ и $\int \frac{\operatorname{arccosec} x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$, которые не вычисляются в конечном виде. Если m — чётное и $>2n$, то применением формул (727) — (728) приходим к интегралам, для которых будет $m'=2n$ и, следовательно, в этом случае интегрирование также не выполняется. При чётном $m<2n$ формулы приводят к интегралам (723) — (724), и для рассматриваемых интегралов получаем конечные выражения.

Таким образом интегрирование в конечном виде выполняется при всяком нечётном m и при чётном m, если $m<2n$.

Примеры

44) $$\int \frac{\operatorname{arcsec} x\, dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\operatorname{arcsec} x + \frac{1}{x}.$$

45) $$\int \frac{\operatorname{arccosec} x\, dx}{x^2\sqrt{(x^2-1)^3}} = \frac{8x^4-12x^2+3}{3x\sqrt{(x^2-1)^3}}\operatorname{arccosec} x + \frac{x}{6(x^2-1)} - \frac{1}{x} + \frac{11}{12}\ln\frac{x-1}{x+1}.$$

VI) $$\int \frac{\operatorname{arcsec} x\, dx}{x\left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n+1}} = -\frac{\operatorname{arcsec} x}{(2n-1)\left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n-1}} + \frac{1}{2n-1}\int \frac{dx}{x(x^2-1)^n} - \int \frac{\operatorname{arcsec} x\, dx}{x\left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n-1}}, \qquad (731)$$

$$\int \frac{\operatorname{arccosec} x\, dx}{x\left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n+1}} = -\frac{\operatorname{arccosec} x}{(2n-1)\left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n-1}} - \frac{1}{2n-1}\int \frac{dx}{x(x^2-1)^n} - \int \frac{\operatorname{arccosec} x\, dx}{x\left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n-1}}. \qquad (732)$$

Формулы приводят к интегралам

$$\int \frac{\operatorname{arcsec} x\, dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsec} x)^2 \quad \text{и} \quad \int \frac{\operatorname{arccosec} x\, dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{2}(\operatorname{arccosec} x)^2,$$

так что для рассматриваемых интегралов получаем конечные выражения.

$$\int \frac{\operatorname{arcsec} x\, dx}{x^m\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}\operatorname{arcsec} x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{\operatorname{arcsec} x\, dx}{x^{m-2}\sqrt{x^2-1}} \quad (m>1), \qquad (733)$$

$$\int \frac{\operatorname{arccosec} x\, dx}{x^m\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}\operatorname{arccosec} x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{\operatorname{arccosec} x\, dx}{x^{m-2}\sqrt{x^2-1}}. \qquad (734)$$

При m нечётном приходим к тем же интегралам, что и в предыдущем случае.

При $m=2$ формулы дают выражения для интегралов

$$\int \frac{\operatorname{arcsec} x\, dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\operatorname{arcsec} x + \frac{1}{x}$$

и

$$\int \frac{\operatorname{arccosec} x\, dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\operatorname{arccosec} x - \frac{1}{x}.$$

К этим интегралам, очевидно, приходим в результате последовательного применения формул при чётном m.

Следовательно, и в том и в другом случае интегрирование выполняется.

$$\int \frac{\operatorname{arcsec} x\, dx}{x^m[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}} = \frac{\operatorname{arcsec} x}{(m-1)x^{m-1}[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}} - \frac{1}{m-1}\int\frac{dx}{x^m(x^2-1)^n} + \frac{2n+m-2}{m-1}\int\frac{\operatorname{arcsec} x\, dx}{x^{m-2}[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}} \quad (m>1), \tag{735}$$

$$\int \frac{\operatorname{arccosec} x\, dx}{x^m[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}} = \frac{\operatorname{arccosec} x}{(m-1)x^{m-1}[\sqrt{x^2-1}]^{2n-1}} + \frac{1}{m-1}\int\frac{dx}{x^m(x^2-1)^n} + \frac{2n+m-2}{m-1}\int\frac{\operatorname{arccosec} x}{x^{m-2}[\sqrt{x^2-1}]^{2n+1}}\,dx. \tag{736}$$

При m нечётном формулы приводят к интегралам (731)—(732) и при чётном—к интегралам (723)—(724), так что для всякого m получаем конечное выражение.

Примеры

46) $$\int \frac{(\operatorname{arccosec} x)^4\, dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}(\operatorname{arccosec} x)^4 - \frac{4}{x}(\operatorname{arccosec} x)^3 - \frac{12\sqrt{x^2-1}}{x}(\operatorname{arccosec} x)^2 + \frac{24}{x}\operatorname{arccosec} x + \frac{24\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

47) $$\int (\operatorname{arcsec} x)^2\sqrt{(x^2-1)^3}\,\frac{dx}{x^5} = \frac{1}{8}(\operatorname{arcsec} x)^3 + \frac{(2-5x^2)\sqrt{x^2-1}}{8x^4}(\operatorname{arcsec} x)^2 + \frac{17x^4-40x^2+8}{64x^4}\operatorname{arcsec} x + \frac{(17x^2-2)\sqrt{x^2-1}}{64x^4}$$

(подст. $\operatorname{arcsec} x = y$).

48) $$\int (\operatorname{arcsec} x)^3\sqrt{x^2-1}\,\frac{dx}{x^4} = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}(\operatorname{arcsec} x)^3 + \frac{3x^2-1}{3x^2}(\operatorname{arcsec} x)^2 - \frac{2(7x^2-1)\sqrt{(x^2-1)^3}}{9x^3}\operatorname{arcsec} x - \frac{2(20x^2-1)}{27x^3}.$$

VII) Рассматривая общий случай, интегралы

$$\int (\operatorname{arcsec} x)^p x^m \left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n+1} dx$$

и

$$\int (\operatorname{arccosec} x)^p x^m \left[\sqrt{x^2-1}\right]^{2n+1} dx,$$

при целом p, m, n для всех возможных комбинаций их знаков и значений, подстановками $\operatorname{arcsec} x = y$ и $\operatorname{arccosec} x = y$ приводим интегралы к виду

$$\int y^p \sin^{2n+2} y \cos^{-(2n+m+3)} dy \quad \text{и} \quad -\int y^p \cos^{2n+2} y \sin^{-(2n+m+3)} y dy.$$

На основании условий интегрируемости последних (§§ 2, 7 и 8 гл. VII) приходим к заключению, что для рассматриваемых интегралов интегрирование выполняется при следующих условиях:

1) $p > 0$, $n \geqslant -1$, $m \leqslant -2n-3$,
2) $p = 1$, $n < -1$, $m \leqslant -2n-3$,
3) $p = 1$, m—нечётное, $m \geqslant -2n-3$,
4) $m = -1$, $n = -1$.

§ 6. Некоторые, вычисляемые в конечном виде, интегралы

вида $\int A[f(x)]\, F(x)\, dx$, где A—какая-либо из основных круговых функций, а $f(x)$ и $F(x)$—алгебраические функции

I) Интегрированием по частям находим:

$$\int \arcsin x \left[\sqrt{1+x}\right]^{2n+1} dx = \frac{2}{2n+3}\left[\sqrt{1+x}\right]^{2n+3} \arcsin x - \\ - \frac{2}{2n+3}\int \frac{(1+x)^{n+1}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

Вставив значение последнего интеграла, получаем:

$$\int \arcsin x \left[\sqrt{1+x}\right]^{2n+1} dx = \frac{2}{2n+3}\left[\sqrt{1+x}\right]^{2n+3} \arcsin x + \\ + \frac{\sqrt{1-x}}{2n+3} \sum_{0}^{n+1} (-1)^p \binom{n+1}{p} 2^{n+3-p} \frac{(1-x)^p}{2p+1}. \quad (737)$$

Точно так же

$$\int \arccos x\,[\sqrt{1+x}]^{2n+1}\,dx=\frac{2}{2n+3}\,[\sqrt{1+x}]^{2n+3}\arccos x-$$

$$-\frac{\sqrt{1-x}}{2n+3}\sum_{0}^{n+1}(-1)^p\binom{n+1}{p}2^{n+3-p}\frac{(1-x)^p}{2p+1}, \qquad (738)$$

$$\int \arcsin x\,[\sqrt{1-x}]^{2n+1}\,dx=-\frac{2}{2n+3}[\sqrt{1-x}]^{2n+3}\arcsin x+$$

$$+\frac{\sqrt{1+x}}{2n+3}\sum_{0}^{n+1}(-1)^p\binom{n+1}{p}2^{n+3-p}\frac{(1+x)^p}{2p+1}, \qquad (739)$$

$$\int \arccos x\,[\sqrt{1-x}]^{2n+1}\,dx=-\frac{2}{2n+3}\,[\sqrt{1-x}]^{2n+3}\arccos x-$$

$$-\frac{\sqrt{1+x}}{2n+3}\sum_{0}^{n+1}(-1)^p\binom{n+1}{p}2^{n+3-p}\frac{(1+x)^p}{2p+1}, \qquad (740)$$

II) $$\int \arcsin x\,\frac{dx}{[\sqrt{1+x}]^{2n+1}}=-\frac{2\arcsin x}{(2n-1)[\sqrt{1+x}]^{2n-1}}-$$

$$-\frac{\sqrt{1-x}}{(2n-1)(2n-2)2^{n-3}(1+x)^{n-1}}\left\{2^{n-2}+\frac{2n-3}{2n-4}2^{n-3}(1+x)+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots5\cdot3}{(2n-4)(2n-6)\ldots4\cdot2}(1+x)^{n-2}\right\}+$$

$$+\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots3\cdot1}{(2n-2)(2n-4)\ldots4\cdot2}\,\frac{1}{(2n-1)2^{n-3}\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}, \qquad (741)$$

$$\int \arccos x\,\frac{dx}{[\sqrt{1+x}]^{2n+1}}=-\frac{2\arccos x}{(2n-1)[\sqrt{1+x}]^{2n-1}}+$$

$$+\frac{\sqrt{1-x}}{(2n-1)(2n-2)2^{n-3}(1+x)^{n+1}}\left\{2^{n-2}+\frac{2n-3}{2n-4}2^{n-3}(1+x)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots5\cdot3}{(2n-4)(2n-6)\ldots4\cdot2}(1+x)^{n-2}\right\}-$$

$$-\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots3\cdot1}{(2n-2)(2n-4)\ldots4\cdot2}\,\frac{1}{(2n-1)2^{n-3}\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}, \qquad (742)$$

$$\int \arcsin x\,\frac{dx}{[\sqrt{1-x}]^{2n+1}}=\frac{2\arcsin x}{(2n-1)[\sqrt{1-x}]^{2n-1}}-$$

$$-\frac{\sqrt{1+x}}{(2n-1)(2n-2)2^{n-3}(1-x)^{n-1}}\left\{2^{n-2}+\frac{2n-3}{2n-4}2^{n-3}(1-x)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots5\cdot3}{(2n-4)(2n-6)\ldots4\cdot2}(1-x)^{n-2}\right\}+$$

$$+\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots3\cdot1}{(2n-2)(2n-4)\ldots4\cdot2}\,\frac{1}{(2n-1)2^{n-3}\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}, \qquad (743)$$

$$\int \arccos x \frac{dx}{[\sqrt{1-x}]^{2n+1}} = \frac{2\arccos x}{(2n-1)[\sqrt{1-x}]^{2n-1}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{1+x}}{(2n-1)(2n-2)\,2^{n-2}(1-x)^{n-1}} \left\{ 2^{n-2} + \frac{2n-3}{2n-4} 2^{n-3}(1-x) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4\cdot 2}(1-x)^{n-2} \right\} -$$

$$- \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2} \frac{1}{(2n-1)\,2^{n-3}\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}, \qquad (744)$$

III) $$\int \operatorname{arcsec} x [\sqrt{x+1}]^{2n+1}\, dx = \frac{2}{2n+3}[\sqrt{x+1}]^{2n+3} \operatorname{arcsec} x -$$

$$- \frac{4}{2n+3} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} - \frac{4}{2n+3} \int \sum_{1}^{n+1} \binom{n+1}{p} (y^2+1)^{p-1} dy, \qquad (745)$$

где $y = \sqrt{x-1}$.

Получающийся после интегрирования по частям интеграл $\int \frac{(x+1)^{n+1}}{x\sqrt{x-1}} dx$, подстановкой $\sqrt{x-1} = y$, приводится к интегралу

$$2\int \frac{(y^2+2)^{n+1}}{y^2+1} dy = 2\int \sum_{0}^{n+1} \binom{n+1}{p} (y^2+1)^{p-1} dy = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} +$$

$$+ 2\int \sum_{1}^{n+1} \binom{n+1}{p} (y^2+1)^{p-1} dy,$$

$$\int \operatorname{arccosec} x [\sqrt{x+1}]^{2n+1}\, dx = \frac{2}{n+3}[\sqrt{x+1}]^{2n+3} \operatorname{arccosec} x +$$

$$+ \frac{4}{2n+3} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + \frac{4}{2n+3} \int \sum_{1}^{n+1} \binom{n+1}{p} (y^2+1)^{p-1} dy, \qquad (746)$$

$$(y = \sqrt{x-1}),$$

$$\int \operatorname{arcsec} [\sqrt{x-1}]^{2n+1}\, dx = \frac{2}{2n+3}[\sqrt{x-1}]^{2n+3} \operatorname{arcsec} x +$$

$$+ \frac{(-1)^n 2}{2n+3} \ln \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} - \frac{4}{2n+3} \int \sum_{1}^{n+1} (-1)^{n+1-p} \binom{n+1}{p} (y^2-1)^p dy,$$

$$(y = \sqrt{x+1}), \qquad (747)$$

$$\int \operatorname{arccosec} x [\sqrt{x-1}]^{2n+1}\, dx = \frac{2}{2n+3}[\sqrt{x-1}]^{2n+3} \operatorname{arccosec} x -$$

$$- \frac{(-1)^n 2}{2n+3} \ln \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{4}{2n+3} \int \sum_{1}^{n+1} (-1)^{n+1-p} \binom{n+1}{p} (y^2-1)^p dy$$

$$(y = \sqrt{x+1}), \qquad (748)$$

IV) $$\int \operatorname{arcsec} x \frac{dx}{[\sqrt{x+1}]^{2n+1}} = -\frac{2 \operatorname{arcsec} x}{(2n-1)[\sqrt{x+1}]^{2n-1}} + \frac{4}{2n-1}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} - \frac{4}{2n-1}\sum_{0}^{n-1}\int \frac{dy}{(y^2+2)^{n-p}} \tag{749}$$

$$(y=\sqrt{x-1}),$$

$$\int \operatorname{arccosec} x \frac{dx}{[\sqrt{x+1}]^{2n+1}} = -\frac{2 \operatorname{arccosec} x}{(2n-1)[\sqrt{x+1}]^{2n-1}} - \frac{4}{2n-1}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + \frac{4}{2n-1}\sum_{0}^{n-1}\int \frac{dy}{(y^2+2)^{n-p}} \tag{750}$$

$$(y=\sqrt{x-1}),$$

$$\int \operatorname{arcsec} x \frac{dx}{[\sqrt{x-1}]^{2n+1}} = -\frac{2 \operatorname{arcsec} x}{(2n-1)[\sqrt{x-1}]^{2n-1}} + \frac{(-1)^n 2}{2n-1}\ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{4}{2n-1}\sum_{0}^{n-1}(-1)^{n-p}\int \frac{dy}{(y^2-2)^{n-p}} \tag{751}$$

$$(y=\sqrt{x+1}),$$

$$\int \operatorname{arccosec} x \frac{dx}{[\sqrt{x-1}]^{2n+1}} = -\frac{2 \operatorname{arccosec} x}{(2n-1)[\sqrt{x-1}]^{2n-1}} - \frac{(-1)^n 2}{2n-1}\ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} - \frac{4}{2n-1}\sum_{0}^{n-1}(-1)^{n-p}\int \frac{dy}{(y^2-2)^{n-p}} \tag{752}$$

$$(y=\sqrt{x+1}).$$

V) Так как

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcsec}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccosec}\frac{1}{x},$$

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsec}\frac{1}{x} = \operatorname{arccosec}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{arcsec} x = \arcsin\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \arccos\frac{1}{x} = \operatorname{arccosec}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$\operatorname{arccosec} x = \arccos\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcctg}\sqrt{x^2-1} = \operatorname{arcsec}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \arcsin\frac{1}{x},$$

то формулы (737) — (752) дают вместе с тем и выражения для интегралов, под знаком которых $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arcsec} x$ и $\operatorname{arccosec} x$ заменены соответствующими им другими круговыми функциями.

Разумеется, те же выражения для этих интегралов можно было бы получить и непосредственно, интегрированием по частям.

Примеры

49) $$\int \arcsin\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx = x\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-a^2}.$$

50) $$\int \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx = x\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} - \frac{a}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right).$$

51) $$\int \operatorname{arctg} x\,\frac{dx}{(1+x)^3} = -\frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

52) $$\int \operatorname{arctg}(x-a)\,\frac{dx}{x+a} = \operatorname{arctg}(x-a)\ln(x+a) - \int \frac{\ln(x+a)}{1+(x-a)^2}\,dx.$$

53) $$\int \arcsin\sqrt{1-x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\arcsin\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2.$$

54) $$\int \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}\,\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\,\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2} - \ln\sqrt{2+x^2}.$$

55) $$\int \arcsin x\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^5}} = \frac{2\arcsin x}{3\sqrt{(1-x)^3}} + \frac{\sqrt{1+x}}{3(x-1)} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}.$$

56) $$\int \operatorname{arccosec} x\,\sqrt{(x-1)^5}\,dx = \frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7}\operatorname{arccosec} x + \frac{4}{35}\sqrt{(x+1)^5} -$$
$$-\frac{20}{21}\sqrt{(x+1)^3} + 4\sqrt{x+1} - \frac{2}{7}\ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}.$$

§ 7. Некоторые, вычисляемые в конечном виде, интегралы вида $\int A[f(x)]\,F(x)\,dx$, где A—какая-либо из основных круговых функций, а $f(x)$ и $F(x)$—тригонометрические функции

I) Интегрированием по частям находим:

$$\int \arcsin(m\sin x)\sin x\,dx =$$
$$= -\cos x\arcsin(m\sin x) + m\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt{1-m^2\sin^2 x}}. \qquad (753)$$

Если $m \neq 1$, интеграл не вычисляется в конечном виде.

$$\int \arcsin(m\sin x)\cos x\,dx =$$
$$= \sin x\arcsin(m\sin x) + \frac{1}{m}\sqrt{1-m^2\sin^2 x}, \qquad (754)$$

$$\int \arcsin(m\sin x)\sec^2 x\,dx =$$
$$\operatorname{tg} x\arcsin(m\sin x) + \ln\left(m\cos x + \sqrt{1-m^2\sin^2 x}\right), \qquad (755)$$

$$\int \arcsin(m\sin x)\operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x\arcsin(m\sin x) -$$
$$-\frac{m}{2}\ln\frac{\cos x+\sqrt{1-m^2\sin^2 x}}{\cos x-\sqrt{1-m^2\sin^2 x}} + \frac{1}{2}\ln\frac{m\cos x+\sqrt{1-m^2\sin^2 x}}{m\cos x-\sqrt{1-m^2\sin^2 x}}, \qquad (756)$$

$$\int \arcsin(m\operatorname{tg} x)\sin x\,dx =$$
$$= -\cos x\arcsin(m\operatorname{tg} x) + m\int\frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x-m^2\sin^2 x}}, \qquad (757)$$

$$\int \arcsin(m\operatorname{tg} x)\cos x\,dx =$$
$$= \sin x\arcsin(m\operatorname{tg} x) + \arcsin\frac{\sqrt{1-m^2\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad (758)$$

$$\int \arcsin(m\operatorname{tg} x)\sec^2 x\,dx =$$
$$= \operatorname{tg} x\arcsin(m\operatorname{tg} x) + \frac{1}{m}\sqrt{1-m^2\operatorname{tg}^2 x}, \qquad (759)$$

$$\int \arcsin(m\operatorname{tg} x)\operatorname{cosec}^2 x\,dx =$$
$$= -\operatorname{ctg} x\arcsin(m\operatorname{tg} x) + m\ln\frac{1-\sqrt{1-m^2\operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x}, \qquad (760)$$

$$\int \arcsin(m\sec x)\sin x\,dx =$$
$$= -\cos x\arcsin(m\sec x) - \ln\left(\cos x+\sqrt{\cos^2 x-m^2}\right), \qquad (761)$$

$$\int \arcsin(m\sec x)\cos x\,dx = \sin x\arcsin(m\sec x) +$$
$$+ \arcsin\frac{m\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-m^2}} - m\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-m^2\sec^2 x}}, \qquad (762)$$

$$\int \arcsin(m\sec x)\sec^2 x\,dx =$$
$$= \operatorname{tg} x\arcsin(m\sec x) - m\int\frac{\operatorname{tg}^2 x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x-m^2}}, \qquad (763)$$

$$\int \arcsin(m\sec x)\operatorname{cosec}^2 x\,dx =$$
$$= -\operatorname{ctg} x\arcsin(m\sec x) + m\int\frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x-m^2}}. \qquad (764)$$

Тем же приёмом производится вычисление интегралов, под знаком которых вместо arcsin находится arccos тех же аргументов и arcsin или arccos аргументов $m\cos x$, $m\operatorname{ctg} x$ и $m\operatorname{cosec} x$.

II) $$\int \operatorname{arctg}(m\operatorname{tg} x)\sin x\,dx = -\cos x\operatorname{arctg}(m\operatorname{tg} x) + \frac{m}{\sqrt{m^2-1}}\operatorname{arctg}(\sqrt{m^2-1}\sin x), \quad \text{если } m>1, \tag{765}$$

или

$$= -\cos x\operatorname{arctg}(m\operatorname{tg} x) + \frac{m}{2\sqrt{1-m^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-m^2}\sin^2 x}{1-\sqrt{1-m^2}\sin x}, \quad \text{если } m<1,$$

$$\int \operatorname{arctg}(m\operatorname{tg} x)\cos x\,dx = \sin x\operatorname{arctg}(m\operatorname{tg} x) + \frac{1}{2\sqrt{m^2-1}}\ln\frac{m+\sqrt{m^2-1}\cos x}{m-\sqrt{m^2-1}\cos x}, \quad \text{если } m>1, \tag{766}$$

или

$$= \sin x\operatorname{arctg}(m\operatorname{tg} x) + \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}\cos x\right), \quad \text{если } m<1,$$

$$\int \operatorname{arctg}(m\operatorname{tg} x)\sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x\operatorname{arctg}(m\operatorname{tg} x) - \frac{1}{m}\ln\sqrt{m^2\operatorname{tg}^2 x+1}, \tag{767}$$

$$\int \operatorname{arctg}(m\operatorname{tg} x)\operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x\operatorname{arctg}(m\operatorname{tg} x) - m\ln\sqrt{m^2+\operatorname{ctg}^2 x}. \tag{768}$$

К аналогичным выражениям приходим для интегралов, у которых вместо $\operatorname{arctg}(m\operatorname{tg} x)$ находится $\operatorname{arcctg}(m\operatorname{tg} x)$, $\operatorname{arctg}(m\operatorname{ctg} x)$ и $\operatorname{arcctg}(m\operatorname{ctg} x)$.

Точно так же конечное выражение получаем для всякого интеграла тех же видов, под знаком которого вместо $\operatorname{arctg}(m\operatorname{tg} x)$ и $\int \operatorname{arcctg}(m\operatorname{tg} x)$ имеется $\operatorname{arctg}(my)$ и $\operatorname{arcctg}(my)$, где y — любая из остальных тригонометрических основных функций.

При этом множителем при круговой функции может находиться и более сложное тригонометрическое выражение, лишь бы результат его интегрирования в соединении с производной круговой функции представлял также интегрируемую функцию.

$$\int \operatorname{arctg}(m\sin x)\sin x\,dx =$$

$$= -\cos x \operatorname{arctg}(m\sin x) - \frac{1}{m}x - \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1+m^2}}, \quad (769)$$

$$\int \operatorname{arcctg}(m\sec x)\cos x\,dx =$$

$$= \sin x \operatorname{arcctg}(m\sec x) - mx + m\sqrt{1+m^2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+m^2}}, \quad (770)$$

$$\int \operatorname{arcctg}(m\operatorname{tg} x)\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx =$$

$$= \frac{1}{2m^2}(m^2\operatorname{tg}^2 x + 1)\operatorname{arcctg}(m\operatorname{tg} x) + \frac{1}{2m}\operatorname{tg} x, \quad (771)$$

$$\int \operatorname{arctg}(m\operatorname{cosec} x)\sec^4 x\,dx = \left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x\right)\operatorname{arctg}(m\operatorname{cosec} x) +$$

$$+ \frac{m}{3(1+m^2)\cos x} + \frac{m(3+2m^2)}{6\sqrt{(1+m^2)^3}}\ln\frac{\sqrt{1+m^2}-\cos x}{\sqrt{1+m^2}+\cos x}, \quad (772)$$

III) $$\int \operatorname{arcsec}(m\sin x)\sin x\,dx = -\cos x \operatorname{arcsec}(m\sin x) +$$

$$+ \frac{1}{m}\arcsin\frac{m\cos x}{\sqrt{m^2-1}} - \operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{m^2\sin^2 x - 1}} \quad (m > 1). \quad (773)$$

$$\int \operatorname{arcsec}(m\sin x)\cos x\,dx = \sin x \operatorname{arcsec}(m\sin x) -$$

$$- \frac{1}{m}\ln\left(m\sin x + \sqrt{m^2\sin^2 x - 1}\right), \quad (774)$$

$$\int \operatorname{arccosec}(m\cos x)\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{m^2}{4}\right)\operatorname{arccosec}(m\cos x) + \frac{\sqrt{m^2\cos^2 x - 1}}{4\cos^2 x}, \quad (775)$$

IV) $$\int \arcsin(\sin^m x)\cos x\,dx =$$

$$= \sin x \arcsin(\sin^m x) - m\int\frac{\sin^m x\,d\sin x}{\sqrt{1-\sin^{2m} x}}. \quad (776)$$

Рассматривая последний интеграл как интеграл от биномиального дифференциала, видим, что интегрирование выполняется в том случае, когда $m = \pm 1$ (§ 10 гл. IV), для всякого же другого m интегрирование — невыполнимо.

$$\int \arcsin(\sin^m x)\sin x\,dx = -\cos x \arcsin(\sin^m x) +$$

$$+ m\int\frac{\sin^{m-1} x\,d\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x + \sin^4 x + \ldots + \sin^{2m-2} x}}. \quad (777)$$

Приходим вообще к невычисляемому интегралу, лишь при $m=2$ имеем:

$$\int \arcsin(\sin^2 x)\sin x\,dx = -\cos x \arcsin(\sin^2 x) + 2\sqrt{1+\sin^2 x},$$

$$\int \operatorname{arcsec}(\sin^m x)\sec^2 x\,dx = \\ = \operatorname{tg} x \operatorname{arcsec}(\sin^m x) - m\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^{2m} x - 1}}, \quad (778)$$

$$\int \operatorname{arctg}(\sin^m x)\cos x\,dx = \\ = -\sin x \operatorname{arctg}(\sin^m x) + m\int \frac{\sin^m x\,d\sin x}{\sin^{2m} x+1}. \quad (779)$$

Последний интеграл подстановкой $\sin x = z$ приводится к интегралу $\int \frac{z^m\,dz}{z^{2m}+1}$, т. е. к интегралу рационального алгебраического выражения и, следовательно, для вычисляемого интеграла (779) получаем конечное выражение.

Вообще, вычисление всякого интеграла вида

$$\int \operatorname{arctg}(y^m)\sin x\,dx, \quad \int \operatorname{arctg}(y^m)\cos x\,dx,$$

$$\int \operatorname{arctg}(y^m)\sec^2 x\,dx, \quad \int \operatorname{arctg}(y^m)\operatorname{cosec}^2 x\,dx,$$

$$\int \operatorname{arcctg}(y^m)\sin x\,dx, \quad \int \operatorname{arcctg}(y^m)\cos x\,dx,$$

$$\int \operatorname{arcctg}(y^m)\sec^2 x\,dx \quad \text{и} \quad \int \operatorname{arcctg}(y^m)\operatorname{cosec}^2 x\,dx,$$

где y — какая-либо из шести основных тригонометрических функций—интегрированием по частям сводится к вычислению интеграла рационального тригонометрического выражения и, следовательно, для этих интегралов интегрирование можно считать теоретически выполнимым.

$$\int \operatorname{arctg}(\cos^2 x)\sin x\,dx = -\cos x \operatorname{arctg}(\cos^2 x) + \\ + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{1-\sqrt{2}\cos x+\cos^2 x}{1+\sqrt{2}\cos x+\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\cos x}{\sin^2 x}, \quad (780)$$

$$\int \operatorname{arcctg}(\sin^3 x)\cos x\,dx = \sin x \operatorname{arcctg}(\sin^3 x) + \\ + \frac{1}{4}\ln(1+\sin^6 x) - \frac{3}{4}\ln(1+\sin^2 x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sin^2 x - 1}{\sqrt{3}}, \quad (781)$$

$$\int \operatorname{arctg}(\sec^3 x)\sin x\,dx = -\cos x \operatorname{arctg}(\sec^3 x) - \\ - \frac{1}{4}\ln(1+\cos^6 x) + \frac{3}{4}\ln(1+\cos^2 x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\cos^2 x - 1}{\sqrt{3}}. \quad (782)$$

§ 8. Интегралы некоторых выражений, содержащих вместе круговые и показательные функции

Интегрированием по частям находим:

$$\int \arcsin(e^x)\, e^{-x}\, dx = -e^{-x} \arcsin(e^x) - x + \ln\left(1 - \sqrt{1 - e^{2x}}\right), \quad (783)$$

$$\int \operatorname{arctg}(e^x)\, e^{-x}\, dx = -e^{-x} \operatorname{arctg}(e^x) + x - \ln\sqrt{e^{2x} - 1}, \quad (784)$$

$$\int \operatorname{arcsec}(e^x)\, e^{-x}\, dx = -e^{-x} \operatorname{arcsec}(e^x) - \frac{\sqrt{e^{2x}-1}}{e^x}. \quad (785)$$

$$\int \arcsin(\operatorname{sh} x) \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x \arcsin(\operatorname{sh} x) - \int \frac{\operatorname{ch}^2 x\, dx}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x}}, \quad (786)$$

$$\int \arcsin(\operatorname{sh} x) \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x \arcsin(\operatorname{sh} x) + \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x}, \quad (787)$$

$$\int \arcsin(\operatorname{sh} x) \operatorname{sech}^2 x\, dx = \operatorname{th} x \arcsin(\operatorname{sh} x) - \arcsin\frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{2}}, \quad (788)$$

$$\int \arcsin(\operatorname{sh} x) \operatorname{cosech}^2 x\, dx = -\operatorname{cth} x \arcsin(\operatorname{sh} x) + \arcsin\frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} x - \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x}}{\operatorname{ch} x + \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x}}, \quad (789)$$

$$\int \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) - x, \quad (790)$$

$$\int \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) - \ln \operatorname{ch} x. \quad (791)$$

Примеры

57) $$\int \arcsin(\operatorname{sh} x) \operatorname{sech}^4 x\, dx = \left(\operatorname{th} x - \frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x\right) \arcsin(\operatorname{sh} x) - \frac{2}{3} \arcsin\frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6} \ln \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x}}{\operatorname{ch} x}.$$

58) $$\int \operatorname{arcctg}(\operatorname{ch} x) \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^4 x}\, dx = -\frac{\operatorname{arcctg}(\operatorname{ch} x)}{3 \operatorname{sh}^3 x} + \frac{1}{6} \operatorname{cth} x + \frac{1}{12\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \operatorname{tgh} x}{\sqrt{2} - \operatorname{tgh} x}.$$

59) $$\int \arcsin(\operatorname{tgh} x)\, e^x\, dx = e^x \arcsin(\operatorname{tgh} x) - \ln(e^{2x} + 1).$$

Приложение

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Определяя $\operatorname{sh} x$ (гиперболический синус) и $\operatorname{ch} x$ (гиперболический косинус) выражениями

$$\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=\operatorname{sh} x, \quad \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})=\operatorname{ch} x,$$

и затем так же, как в тригонометрии, $\operatorname{cosech} x$ (гиперболический косеканс) и $\operatorname{sech} x$ (гиперболический секанс), как функции обратные, $\operatorname{th} x$ (гиперболический тангенс) как отношение $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и $\operatorname{cth} x$ (гиперболический котангенс), как обратное отношение, имеем:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{a)}\ \operatorname{sh} x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}, \quad \text{b)}\ \operatorname{ch} x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}, \quad \text{c)}\ \operatorname{th} x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}, \\
\text{d)}\ \operatorname{cth} x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}, \quad \text{e)}\ \operatorname{sech} x=\dfrac{2}{e^{x}+e^{-x}}, \\
\text{f)}\ \operatorname{cosech} x=\dfrac{2}{e^{x}-e^{-x}}.
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Заменой x на $(-x)$ в этих формулах получаем:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{a)}\ \operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh} x, & \text{b)}\ \operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch} x, \\
\text{c)}\ \operatorname{th}(-x)=-\operatorname{th} x, & \text{d)}\ \operatorname{cosech}(-x)=-\operatorname{cosech} x, \\
\text{e)}\ \operatorname{sech}(-x)=\operatorname{sech} x, & \text{f)}\ \operatorname{cth}(-x)=-\operatorname{cth} x.
\end{array}\right\} \quad (2)$$

На основании определения имеем:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{a)}\ \operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \text{b)}\ \operatorname{cth} x=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad \text{c)}\ \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x=1, \\
\text{d)}\ \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sech} x=1, \quad \text{e)}\ \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{cosech} x=1.
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Складывая и вычитая равенства (1b) и (1a), имеем:

$$\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x=e^{x}, \quad \operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x=e^{-x}.$$

Перемножая эти два равенства, получаем:

$$\text{a) } \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{4}$$

На основании этого равенства и формул (3) получаем ещё следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} &\text{b) } \operatorname{sech}^2 x = 1 - \operatorname{th}^2 x, \quad \text{c) } \operatorname{cosech}^2 x = \operatorname{cth}^2 x - 1,\\ &\text{d) } \operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}},\\ &\text{e) } \operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}} = \frac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Заменяя x на $(a+b)$ в равенствах

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x, \quad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x,$$

имеем:

$$e^{a+b} = \operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{sh}(a+b), \quad e^{-a-b} = \operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{sh}(a+b);$$

с другой стороны, на основании тех же равенств

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b = (\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)(\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b),$$
$$e^{-a-b} = e^{-a} \cdot e^{-b} = (\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a)(\operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b),$$

так что

$$\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{sh}(a+b) = (\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)(\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b),$$
$$\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{sh}(a+b) = (\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a)(\operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b).$$

Вычитая из одного равенства другое и затем складывая их, после простых преобразований получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) } \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a,\\ &\text{b) } \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Разделив первое равенство на второе и затем второе на первое, получаем ещё

$$\left.\begin{aligned} &\text{c) } \operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b} = \frac{\operatorname{cth} a + \operatorname{cth} b}{1 + \operatorname{cth} a \cdot \operatorname{cth} b},\\ &\text{d) } \operatorname{cth}(a+b) = \frac{1 + \operatorname{cth} a \cdot \operatorname{cth} b}{\operatorname{cth} a + \operatorname{cth} b} = \frac{1 + \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}. \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Заменяя в последних четырёх формулах b на $(-b)$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) } \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a,\\ &\text{b) } \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b,\\ &\text{c) } \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b} = \frac{\operatorname{cth} a - \operatorname{cth} b}{1 - \operatorname{cth} a \operatorname{cth} b},\\ &\text{d) } \operatorname{cth}(a-b) = \frac{1 - \operatorname{cth} a \operatorname{cth} b}{\operatorname{cth} a - \operatorname{cth} b} = \frac{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

На основании формул (5ab) и (6ab) получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) } \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b = \frac{1}{2}\{\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)\}, \\ &\text{b) } \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}\{\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)\}, \\ &\text{c) } \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}\{\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)\}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Складывая и вычитая формулы (5a) и (6a), и затем формулы (5b) и (6b), заменяя вместе с тем $(a+b)$ и $(a-b)$ на m и n, так что $a = \frac{m+n}{2}$ и $b = \frac{m-n}{2}$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) } \operatorname{sh} m + \operatorname{sh} n = 2\operatorname{sh}\frac{m+n}{2}\operatorname{ch}\frac{m-n}{2}, \\ &\text{b) } \operatorname{sh} m - \operatorname{sh} n = 2\operatorname{sh}\frac{m-n}{2}\operatorname{ch}\frac{m+n}{2}, \\ &\text{c) } \operatorname{ch} m + \operatorname{ch} n = 2\operatorname{ch}\frac{m+n}{2}\operatorname{ch}\frac{m-n}{2}, \\ &\text{d) } \operatorname{ch} m - \operatorname{ch} n = 2\operatorname{sh}\frac{m+n}{2}\operatorname{sh}\frac{m-n}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Полагая в формулах (5) $a = b = x$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) } \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{2\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th}^2 x} = \frac{2\operatorname{cth} x}{\operatorname{cth}^2 x - 1}, \\ &\text{b) } \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 2\operatorname{sh}^2 x + 1, \\ &\quad \operatorname{ch} 2x = \frac{1+\operatorname{th}^2 x}{1-\operatorname{th}^2 x} = \frac{\operatorname{cth}^2 x + 1}{\operatorname{cth}^2 x - 1}; \\ &\text{c) } \operatorname{th} 2x = \frac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x} = \frac{2\operatorname{cth} x}{1+\operatorname{cth}^2 x}, \\ &\text{d) } \operatorname{cth} 2x = \frac{1+\operatorname{cth}^2 x}{2\operatorname{cth} x} = \frac{1+\operatorname{th}^2 x}{2\operatorname{th} x}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Полагая в формулах (5ab) $a = 2x$, $b = x$, на основании только что полученных формул будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\text{e) } \operatorname{sh} 3x = 4\operatorname{sh}^3 x + 3\operatorname{sh} x, \\ &\text{f) } \operatorname{ch} 3x = 4\operatorname{ch}^3 x - 3\operatorname{ch} x. \end{aligned}\right\} \qquad (9')$$

Заменяя x на $\frac{x}{2}$ в формулах (9b), получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) } \operatorname{sh}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}, \quad \text{b) } \operatorname{ch}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}, \\ &\text{c) } \operatorname{th}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1}, \\ &\text{d) } \operatorname{cth}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

На основании определения гиперболического синуса, имеем:

$$\operatorname{sh}^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n+1}}(e^x - e^{-x})^{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{2^{2n+1}}\left\{e^{(2n+1)x} - \binom{2n+1}{1}e^{(2n-1)x} + \binom{2n+1}{2}e^{(2n-3)x} - \ldots\right.$$

$$\ldots + (-1)^n\binom{2n+1}{n}e^x + (-1)^{n+1}\binom{2n+1}{n}e^{-x} + \ldots$$

$$\left.\ldots - \binom{2n+1}{2}e^{-(2n-3)x} + \binom{2n+1}{1}e^{-(2n-1)x} - e^{-(2n+1)x}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\left\{\operatorname{sh}(2n+1)x - \binom{2n+1}{1}\operatorname{sh}(2n-1)x + \right.$$

$$+ \binom{2n+1}{2}\operatorname{sh}(2n-3)x - \ldots + (-1)^n\binom{2n+1}{n}\operatorname{sh} x.$$

Отсюда получаем формулу

$$\operatorname{sh}^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\binom{2n+1}{p}\operatorname{sh}(2n+1-2p)x. \qquad (11a)$$

Точно так же

$$\operatorname{sh}^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}}(e^x - e^{-x})^{2n} =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\left\{e^{2nx} - \binom{2n}{1}e^{(2n-2)x} + \binom{2n}{2}e^{(2n-4)x} - \ldots\right.$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}e^{2x} + (-1)^n\binom{2n}{n}\cdot 1 +$$

$$+ (-1)^{n+1}\binom{2n}{n-1}e^{-2x} + \ldots + \binom{2n}{2}e^{-(2n-4)x} -$$

$$\left. - \binom{2n}{1}e^{-(2n-2)x} + e^{-2nx}\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^n\binom{2n}{n}}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n-1}}\left\{\operatorname{ch} 2nx - \binom{2n}{1}\operatorname{ch}(2n-2)x + \right.$$

$$\left. + \binom{2n}{2}\operatorname{ch}(2n-4)x - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}\operatorname{ch} 2x\right\}.$$

Отсюда получаем:

$$\operatorname{sh}^{2n} x = \frac{(-1)^n\binom{2n}{n}}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{p=0}^{p=n-1}(-1)^p\binom{2n}{p}\operatorname{ch}(2n-2p)x. \qquad (11b)$$

Аналогичным путём получаем ещё две формулы:

$$\operatorname{ch}^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{p=0}^{p=n} \binom{2n+1}{p} \operatorname{ch}(2n+1-2p)\, x, \tag{11c}$$

$$\operatorname{ch}^{2n} x = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{2n}{p} \operatorname{ch}(2n-2p)\, x. \tag{11d}$$

ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1) $d \operatorname{sh} x = d\,\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = \operatorname{ch} x\, dx,$

2) $d \operatorname{ch} x = d\,\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\, dx = \operatorname{sh} x\, dx.$

Таким же путём или выражая $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$, $\operatorname{sech} x$, $\operatorname{cosech} x$ через $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, получаем:

3) $d \operatorname{th} x = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{sech}^2 x\, dx,$

4) $d \operatorname{cth} x = -\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cosech}^2 x\, dx,$

5) $d \operatorname{sech} x = -\operatorname{th} x \operatorname{sech} x\, dx,$

6) $d \operatorname{cosech} x = -\operatorname{cth} x \operatorname{cosech} x\, dx.$

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
172	7 сн.	$\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a+bx^2}}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{-a}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a+bx^2}}{\sqrt{-a}}$	авт.
178	7 св.	$\ln \frac{x\sqrt{2}+\sqrt{3+4x^4}}{x\sqrt{2}-\sqrt{3+4x^4}}$	$\ln \frac{x\sqrt{2}+\sqrt[4]{3+4x^4}}{x\sqrt{2}-\sqrt[4]{3+4x^4}}$	тип.
»	9 »	$\int x^2 \sqrt{(3+4x^4)^5}\,dx$	$\int x^2 \sqrt[4]{(3+4x^4)^5}\,dx$	»
190	9 »	*)	(*)	»
194	1 сн.	$\sqrt{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}\sqrt[3]{3}$	»
241	8 »	$\pm$	$\mp$	ред.

А. Ф. Тимофеев—«Интегрирование функций»