

# PRINCIPLES OF QUANTUM ELECTRODYNAMICS

**WALTER E. THIRRING**

*Universität Bern, Switzerland*

TRANSLATED FROM THE GERMAN BY

**J. BERNSTEIN**

*The Institute for Advanced Study  
Princeton, New Jersey*

WITH CORRECTIONS AND ADDITIONS BY

**WALTER E. THIRRING**

1958

ACADEMIC PRESS INC., PUBLISHERS

NEW YORK-LONDON

# **ПРИНЦИПЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ**

**ВАЛЬТЕР Е. ТИРРИНГ**

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО  
**И. Ф. ГИНЗБУРГА, Д. А. СЛАВНОВА,  
А. Д. СУХАНОВА**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»**

**Москва—1964**



Элементарные частицы, их свойства, их отношения друг к другу все больше оказываются за последние годы в сосредоточии интересов принципиальных физических исследований. Единственная до сих пор теория, которой мы можем воспользоваться для описания поведения элементарных частиц — это квантовая теория волновых полей. Хотя эта теория и представляет собой одну из фундаментальнейших теорий, которыми мы владеем, — она не только приводит к единому пониманию элементарной квантовой механики, но и является первой теорией, объединяющей квантовую теорию и специальную теорию относительности, — она все еще не стала общим достоянием всех физиков. Частью это происходит, быть может, из-за предъявляемых ею высоких математических требований, но частью и из-за того, что в большинстве работ в этой области физическое содержание теории заслоняется математическим формализмом. Так получается, что теорию поля воспринимают зачастую как сухую математическую схему, с которой можно, правда, работать, если выучить необходимые «правила игры», но которая не дает никакого физического понимания происходящего. Эта книга представляет собой попытку изложить одну из наиболее надежно понятых частей квантовой теории поля — квантовую электродинамику — в ее существеннейших чертах. При этом мы стремились включить по возможности все, казавшееся нужным для физического понимания, и скорее пожертвовать некоторыми формально-математическими деталями. Книга ни в коей мере не должна быть энциклопедией в этой области, но скорее собранием тех интересных и физически удовлетворительных результатов, которые до сих пор получены.

Успехи, достигнутые в квантовой электродинамике за последние годы, внесли существенный вклад в формальную структуру теории. Весь материал удастся теперь сконцентрировать в немногих основных постулатах, исходя из которых вся теория строится чисто дедуктивным путем. Благодаря удачно подобранным релятивистским обозначениям достигаются большие упрощения в прежде весьма утомительных выкладках. Этому более изящному подходу в настоящей книге придается особое значение, не только чтобы скользя возможно сжать математику, но и чтобы связать читателя с текущей литературой.

Из математической подготовки для чтения этой книги требуются анализ и линейная алгебра. Такое обычно менее известное математическое оружие, как дираковы  $\gamma$ -матрицы и инвариантные функции, специально обсуждается в двух дополнениях. Математическая символика поясняется в специальном разделе. Что касается физических сведений, то предполагается знакомство со специальной теорией относительности и элементарной квантовой механикой, причем будут использоваться способ обозначений и образование понятий, принятые в книге Дирака (P. A. M. Dirac. *Quantum Mechanics*, Oxford, 1947; см. русск. перевод: П. А. М. Дирак. *Принципы квантовой механики*. М., Физматгиз, 1960). Дальнейшие физические применения теории читатель найдет у Гайтлера (W. Heitler. *The Quantum Theory of Radiation*, Oxford, 1954; см. русск. перевод: В. Гайтлер. *Квантовая теория излучения*. М., ИЛ, 1956). Математическая сторона дела изложена с элементарной точки зрения у Вентцеля (G. Wentzel, *Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder*, Wien, Deuticke, 1943; русск. перевод: Г. Вентцель. *Введение в квантовую теорию волновых полей*. М.—Л., Гостехиздат, 1947). Другие ссылки будут приводятся только для тех деталей, которые не рассматриваются в тексте. Поэтому ссылки на литературу не будут ни полными, ни отражающими приоритет, но будут называться только работы, представляющиеся наиболее подходящими для дополнения текста.

Чтобы осветить физический фон, на котором строится книга, в начале введен параграф, в котором с помощью элементарных рассуждений оцениваются порядки величин атомных явлений. Для упражнения в вычислительной технике в конце книги добавлен сборник задач с решениями. Но для действительного понимания книги неускушенному в предмете читателю необходимо, конечно, хотя бы раз вывести самому все формулы.

---

---

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К АНГЛИЙСКОМУ  
ИЗДАНИЮ

За те шесть лет, что прошли со времени издания этой книги на немецком языке, в исследуемом вопросе не было сделано никаких существенно новых открытий. Однако произошел значительный прогресс в понимании физики, лежащей в основе послевоенного развития квантовой электродинамики. Поскольку главная цель первоначальной книги состояла в обсуждении именно физических принципов, то, чтобы оправдать появление английского издания, пришлось подвергнуть текст значительной переделке и расширению; в частности, пришлось привести к современному уровню и обсудить более подробно раздел, относящийся к теории перенормировок.

Тем временем были опубликованы две другие книги на ту же тему, а именно книги Ю. М. Яуха и Ф. Рорлиха «Теория фотонов и электронов»\*) и Х. Умезава «Квантовая теория поля»\*\*). В этих книгах тщательно разработаны многие математические и формальные детали. Поэтому мы не пытались достичь большей полноты изложения в этом отношении, имея в виду, что для этой цели можно обратиться к упомянутым выше книгам\*\*\*). Мы старались, однако, провести достаточно подробное обсуждение тех физических понятий, которые не получили необходимой трактовки в литературе.

Английское издание было подготовлено в сотрудничестве с доктором Ю. Бернштейном. Мы очень благодарны профессорам Г. Фешбаху, Ф. Лоу, а также В. Г. Никольсу и Ф. Скарфу за чтение отдельных частей рукописи и ценную критику.

---

\*) J. M. Jauch, F. Rohrlich. The Theory of Photons and Electrons. (Addison — Wesley, 1955).

\*\*\*) Н. Умезава. Quantum Field Theory (Interscience Publishers, 1956).

Перевод: Квантовая теория поля, Физматгиз, 1958.

\*\*\*) См. также Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957; А. И. Ахнезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. Физматгиз, 1959;

С. Швебер, Г. Бете и Ф. Гофман. Мезоны и поля, т. 1, Перевод: ИЛ, 1957;

С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Перевод: ИЛ, 1963.

А. А. Соколов. Введение в квантовую электродинамику, Физматгиз, 1958. (Прим. переводчиков.)

---

**ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА К РУССКОМУ  
ИЗДАНИЮ**

По мере развития науки требование полноты и глубины изложения какой-либо ее отрасли неизбежно вступает в конфликт с желанием расширить круг лиц, которым такое изложение может быть доступно. Еще в начале нашего века можно было высказывать пожелание, чтобы новую научную теорию можно было бы объяснить любому человеку из публики, и существовали книги, совмещавшие популярность с полной научной строгостью. С тех пор специализация науки зашла столь далеко, что не только оригинальные работы, но и монографии и обзорные статьи, печатающиеся, например, в журнале «Успехи физических наук» оказываются уже практически недоступными для людей, не работающих непосредственно в данной узкой области, и приходится желать появления достаточно серьезных книг, понятных хотя бы, скажем, любому человеку с физическим образованием.

Как раз такую задачу по отношению к квантовой электродинамике поставил перед собой автор этой книги профессор Вальтер Тирринг. Многие слышали, что в этой области в послевоенные годы были достигнуты очень большие успехи, которые значительно прояснили наши представления об элементарных частицах и их взаимодействиях и позволили предсказывать результаты определенных экспериментов с поистине спектроскопической точностью. Сейчас существует уже целый ряд монографий, например, указанных в предисловиях автора, но любая из них требует усилий, которые вряд ли оправдаются, если читателем движет только желание расширить свой научный кругозор. Правда, книга Тирринга тоже не относится к легкому чтению, и ее нельзя одолеть за один вечер. Однако нам кажется, что если читатель согласится отдать ей свои вечера в течение месяца, то ясная картина основных физических идей квантовой теории поля, которую он при этом узнает, послужит ему достаточной наградой.

Книга переводилась с английского, более позднего и более подробного издания, которое само является переводом. Поэтому весь текст, перешедший в это издание из первоначального немецкого, был тщательно выверен по немецкому оригиналу; для новой части текста мы, к сожалению, были лишены такой возможности.

---

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

### Гильбертово пространство

Операторы в гильбертовом пространстве будут обозначаться прописными латинскими буквами  $O, A, T_{lk}, Q$  и т. д.; обычные числа, такие, как собственные значения операторов, координаты и индексы будут обозначаться строчными буквами  $o', x, k$  и  $\alpha$ . Векторы в гильбертовом пространстве будут записываться по Дираку так:  $| \rangle$ , а сопряженные векторы —  $\langle |$ . Собственный вектор, соответствующий собственному значению  $o'$ , будет обозначаться значком  $| o' \rangle$ . Произведение двух векторов обозначается  $\langle | \rangle$ , а произведение оператора и вектора —  $\langle | O | \rangle$ . Обе эти операции можно скомбинировать:  $\langle | O | \rangle$ . Мы будем также пользоваться следующими обозначениями и определениями.

### Обычные числа

Комплексно-сопряженные  $\alpha^*$ .

Вещественная часть  $\operatorname{Re} \alpha$ .

Мнимая часть  $\operatorname{Im} \alpha$ .

Знаковая функция  $\epsilon(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{для } \alpha > 0, \\ -1 & \text{для } \alpha < 0. \end{cases}$

Ступенчатая функция  $\theta(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{для } \alpha > 0, \\ 0 & \text{для } \alpha < 0; \end{cases}$

$$\theta(\alpha) = \frac{1}{2} (1 + \epsilon(\alpha)).$$

$\delta$ -функция:  $\delta(\alpha) = 0$ , если  $\alpha \neq 0$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \delta(\alpha) = 1$ ;

$$\theta(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} d\beta \delta(\beta), \quad \delta(-\alpha) = \delta(\alpha);$$

$$\frac{d}{d\alpha} \delta(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} \delta(\alpha);$$

$$\delta(f(\alpha)) = \sum_{\alpha_0} |f'(\alpha_0)|^{-1} \delta(\alpha - \alpha_0),$$



где

$$f(\alpha_0) = 0. \quad (0.1)$$

### Операторы

Транспонированный оператор  $O^T$ ;  $\langle c' | O^T | c'' \rangle = \langle c'' | O | c' \rangle$ .

Эрмитово-сопряженные операторы  $O^\dagger$ ;  $\langle c' | O^\dagger | c'' \rangle = \langle c'' | O | c' \rangle^*$ .

Обратные операторы  $O^{-1}$ ;  $O^{-1}O = 1$ .

Коммутаторы  $[A, B]_- = [A, B] = AB - BA$ .

Антикоммутаторы  $[A, B]_+ = \{A, B\} = AB + BA$ .

### Определения

Эрмитовы операторы  $O^\dagger = O$ .

Унитарные операторы  $O^\dagger = O^{-1}$ .

Симметричные операторы  $O^T = O$ .

Операторы взаимодействующих полей будут обозначаться буквой, набранной жирным шрифтом  $\mathbf{A}$ ,  $\Phi$ .

### Спиновое пространство

Операторы, действующие в спиновом пространстве, дираковы  $\gamma$ -матрицы и выражения, составленные из них. Для  $\gamma$ -инвариантов, т. е. скалярных произведений четырех векторов и  $\gamma$ -векторов, введем обозначения:

$$\hat{p} = p_k \gamma^k, \quad \hat{e} = e_k \gamma^k \text{ и т. д.} \quad (0.2)$$

Векторы, составляющие спиновое пространство (спиноры), обозначаются через  $\psi$  или  $u$ . Матричные индексы всегда стоят внизу и обозначаются малыми греческими буквами, например  $\gamma_{\alpha\beta} \psi_\alpha$ . Однако мы будем часто опускать спиновые индексы и писать  $\gamma^k \gamma^i \psi$  вместо  $\gamma_{\alpha\beta}^k \gamma_{\beta\delta}^i \psi_\delta$  и

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &= \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha; \\ \text{Sp } M &= M_{\alpha\alpha}. \end{aligned} \quad (0.3)$$

Остальные обозначения те же, что и в гильбертовом пространстве.

### Обычное пространство

Мы будем использовать действительные мировые координаты с метрикой

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x^0 &= t, \\ x^1 &= x, \\ x^2 &= y, \\ x^3 &= z. \end{aligned}$$

Пространственная часть четырехвектора будет выделяться жирным шрифтом, например  $x$ . Тензор обычно будет обозначаться малыми латинскими буквами, причем контравариантные индексы пишутся вверху, а ковариантные — внизу:

$$g^{ik}p_k = p^i; g^{ik}g_{ki} = \delta_i^i.$$

Скалярное произведение  $a_i b^i = a_0 b^0 - \mathbf{ab}$  иногда будет обозначаться  $(ab)$ , а иногда просто  $ab$ . Если один из векторов является суммой векторов  $b = c + d$ , то мы будем записывать  $(a, c + d)$ .

### Импульсное пространство

Фурье-преобразование мы записываем в виде

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{-ikx} f(k); f(k) = \int dx e^{ikx} f(x),$$

где  $dk$  — четырехмерный элемент объема, а  $k$  — некоторый четырехмерный вектор. Иногда мы будем использовать  $p$  вместо  $k$ .

Фурье-представление для четырехмерной  $\delta$ -функции  $\delta(x)$

$$\int dx' f(x') \delta(x' - x) = f(x)$$

задается выражением

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{-ikx}. \quad (0.4)$$

### Дифференциальные и интегральные символы

Частная производная  $\frac{\partial}{\partial x^i} f(x)$  иногда будет обозначаться  $\partial_i f$ , а иногда индексом, следующим за запятой  $f_{,i}$ .

Оператор Даламбера записывается в виде:

$$\square^2 = g^{ik} \partial_i \partial_k = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Дифференцирование по собственному времени будет обозначаться через  $\dot{x}$ . Полезным будет так же символ  $\overleftrightarrow{f \partial_\mu g}$ , который означает:  $f g_{,\mu} - f_{,\mu} g$ . Если не будет других указаний, все интегралы надо брать в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ .

Четырехмерный элемент объема

$$dx = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3.$$

Элемент трехмерной поверхности, т. е. ковариантный вектор, направленный по нормали к этой поверхности, обозначим

$$ds_i = (dx^1 dx^2 dx^3, dx^0 dx^2 dx^3, dx^0 dx^1 dx^3, dx^0 dx^1 dx^2).$$

Всякую поверхность, для которой  $d\sigma_i$  — времениподобный вектор во всех точках, будем называть пространственноподобной. Четырехмерное обобщение теоремы Гаусса может быть дано в виде:

$$\int dx \partial_i f = \int d\sigma_i f,$$

где  $\sigma$  — поверхность, ограничивающая данный четырехмерный объем. Для векторного поля без источников  $f^i$  ( $f^i_{;i} = 0$ ), которое на бесконечности обращается в нуль, величина интеграла  $\int d\sigma_i f^i$ , взятого по любой пространственноподобной поверхности, не зависит от частного выбора этой поверхности. Это непосредственно следует из соотношения

$$\int_{\sigma_1} d\sigma_i f^i - \int_{\sigma_2} d\sigma_i f^i = \int_V dV \partial_i f^i, \quad (0.5)$$

где  $V$  — объем, ограниченный  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Обратно, если  $\int d\sigma_i f^i$  не зависит от  $\sigma$ , то

$$\partial_i f^i = 0.$$

В этом случае мы имеем право назвать  $\int d\sigma_i f^i$  скаляром, так как наблюдатели в различных лоренцевых системах координат будут получать одинаковые значения при интегрировании по поверхности  $t = \text{const}$ , каждый в своей системе координат.

Тензоры более высоких порядков могут быть получены аналогично, путем интегрирования только таких полей, которые не содержат источников. Если функция  $f$  достаточно быстро стремится к нулю на бесконечно удаленных частях пространственноподобных поверхностей, то справедлива лемма

$$\int_{\sigma} d\sigma_i \partial_k f - \int_{\sigma} d\sigma_k \partial_i f = 0. \quad (0.6)$$

Доказательство следует из того, что левая часть равенства (0.6) не зависит от поверхности  $\sigma$ , так как  $\partial_i \partial_k f - \partial_k \partial_i f = 0$ . Поэтому можно преобразовать интегралы к пространственноподобной поверхности  $t = \text{const}$ . В этом случае только  $d\sigma_0$  не равно нулю и производные  $\partial_{1,2,3}$  сводятся с помощью обобщенной теоремы Гаусса к исчезающим поверхностным интегралам. Чтобы закончить доказательство, отметим тот очевидный факт, что выражение (0.6) справедливо для  $i = k = 0$ .

Наконец, если поверхность  $\sigma$  или в более общем случае некоторая область  $\Delta V$  содержит точку  $x$ , это будет обозначаться как  $x \subset \sigma$  или  $x \subset \Delta V^*$ .

### Часто встречающиеся обозначения

- $A(x)$  — вектор-потенциал электромагнитного поля;  
 $D(x)$  — инвариантная функция;  
 $e$  — элементарный заряд;  
 $e^i$  — малое смещение;  
 $e^{ik}$  — малый поворот;  
 $f(x)$  — произвольная функция;  
 $f_{ik}$  — тензор электромагнитного поля;  
 $F$  — производящий оператор преобразования;  
 $g_{ik}$  — метрический тензор;  
 $j_i(x)$  — плотность тока;  
 $J_{ik}$  — полный момент;  
 $L(x)$  — функция Лагранжа;  
 $m$  — масса электрона или мезона;  
 $n$  — целое число или нормаль к поверхности;  
 $P_i$  — вектор энергии-импульса;  
 $\dot{P}$  — оператор хронологического произведения;  
 $Q$  — полный заряд;  
 $r$  —  $|\mathbf{x}|$ ;  
 $s$  — собственное время;  
 $S$  — матрица рассеяния;  
 $S(x)$  — инвариантная функция;  
 $\text{Sp}$  — след матрицы (шпур);  
 $T_{ik}(x)$  — тензор энергии-импульса;  
 $u_i(x)$  — волновая функция;  
 $U$  — унитарное преобразование;  
 $v$  — четырехмерный вектор скорости;  
 $V$  — четырехмерный объем;  
 $\mathbf{V}$  — трехмерный объем;  
 $W$  — интеграл действия;  
 $Z$  — заряд ядра;  
 $\alpha$  — постоянная тонкой структуры;  
 $\delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k \\ 0 & \text{при } i \neq k; \end{cases}$   
 $\Delta(x)$  — инвариантная функция;  
 $\epsilon_{iklm}$  — полностью антисимметричный тензор с элементами  
 $0, \pm 1$  и  $\epsilon_{0123} = 1$ ;  
 $\varphi$  — скалярное или псевдоскалярное поле;

\* ) Формулы из раздела «обозначения» записываются как (0. . .), из дополнений I и II — как (Д1. . .) и (Д2. . .).

$\lambda(x)$  — фаза калибровочного преобразования;

$\psi(x)$  — поле Дирака;

$\omega$  — циклическая частота;

$\Omega$  — телесный угол<sup>\*)</sup>.

---

<sup>\*)</sup> Термин *gauge transformation* переводится в этой книге как «градиентное преобразование», а *phase transformation* — как «калибровочное преобразование». Их иногда называют градиентными (калибровочными) преобразованиями второго и первого рода соответственно (*Прим. переводчиков*).

---

---

# Глава I

## ОБЩЕЕ ВВЕДЕНИЕ

### § 1. Единицы и порядки величин

Структура микрокосмоса определяется несколькими безразмерными постоянными. Понять атомный процесс — значит, понять роль, которую играют в нем эти константы.

При попытке наглядно представить себе атомный мир встречаешься с той трудностью, что в формулы атомной физики входят константы, величины которых трудно уложить в макроскопические мерки. С другой стороны, их значения легко представить себе в сравнении друг с другом. Поэтому будет разумным разорвать связи с макроскопическим миром и использовать в качестве единиц измерения сами константы, определяющие ход атомных явлений. В теории, учитывающей как релятивистские, так и квантовые процессы, целесообразно положить  $\hbar = c = 1$ . Тогда оказывается, что все физические величины выражаются через степени единиц длины, которую мы сохраним в явном виде, поскольку до сих пор неизвестно, какая длина в природе играет роль фундаментальной. При таком выборе единиц измерения размерности энергии, частоты и массы совпадают и становятся равными обратной длине.

Другая трудность состоит в том, что для атомных процессов начинают играть роль волновые свойства вещества, которые можно аккуратно описать лишь ценой привлечения довольно сложного математического аппарата. Поэтому существует опасность заблудиться в формулах и не увидеть леса за деревьями. Тем не менее многие явления можно понять в основных чертах и из наивной классической корпускулярной картины, если принимать волновую картину в расчет суммарно, через соотношение неопределенностей. Хотя более тонкие детали и нельзя получить так просто, нам хотелось бы показать как можно оценить таким способом порядки величин в элементарных процессах электродинамики.

**А. Структура атомов.** Постоянной, определяющей по существу все порядки величин обычных атомных явлений, является постоянная тонкой структуры\*)

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}.$$

\*) Заряд измеряется в единицах Хевисайда. Собственно говоря,  $\alpha$  следовало бы называть постоянной грубой структуры, так как она определяет масштаб основных черт строения атома.

Ею измеряется интенсивность взаимодействия элементарно заряженной частицы с электрическим полем. Пространственные размеры, характерные для явлений, в которых участвуют электроны (например, размеры атомной оболочки), определяются комптоновой длиной волны электрона  $m^{-1} = 3,81 \times 10^{-11}$  см. Она равняется деленной на  $2\pi$  длине волны фотона с энергией, равной энергии покоя электрона:  $m = 0,51$  Мэв. Та же длина характеризует, насколько сильно можно сжать волновой пакет одного электрона так, чтобы при этом его кинетическая энергия не превысила его энергии покоя. Вследствие соотношения неопределенностей

$$\Delta p \cdot \Delta x \sim 1$$

всякое дальнейшее уточнение локализации достигается ценой роста разброса в распределении импульса и тем самым кинетической энергии  $p^2/2m$ . Поэтому, для того чтобы заключить электрон в область порядка  $m^{-1}$ , приходится прибегать к энергиям порядка его массы покоя. Рассмотрим прежде всего, каким образом размеры атома определяются этой основной для электрона длиной и величиной элементарного электрического заряда. В атоме волновой пакет электрона сдерживается энергией  $-Za/r$  кулонова поля ядра ( $Z$  — эффективный заряд ядра, грубо учитывающий экранирование ядра другими электронами). В квантовой теории, в отличие от классической физики наименьшая величина полной энергии

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{Za}{r} = E$$

достигается отнюдь не при произвольно малых  $r$ , так как слишком сильное сжатие волнового пакета вело бы к соответствующему росту кинетической энергии. Если связать, в духе соотношения неопределенностей, координаты и импульсы соотношением\*)  $r \cdot p = 1$ , то полная энергия примет минимальное значение при

$$r = \frac{1}{Zam} (= Z^{-1} \cdot 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}).$$

Соответствующая скорость электрона равна  $Za$ , а энергия связи

$$E_0 = -\frac{m}{2} (Za)^2 (= Z^2 \cdot 13 \text{ эв}),$$

что соответствует примерно  $Z^2 \cdot 10^5$  градусам Кельвина. Поправки к этой электростатической энергии из-за магнитных взаимодействий и релятивистского изменения массы бу-

\*) С квантовотеоретической точки зрения сюда следовало бы подставить средние значения  $r$  и  $p$ ; они того же порядка, что  $\Delta r$  и  $\Delta p$ .

дут порядка  $v^2 = \alpha^2 Z^2$ , они незначительны для не слишком тяжелых элементов. Момент в квантовой теории всегда целый или полуцелый, и для основного состояния мал, поскольку  $p \cdot r \sim 1$ .

В то время как размеры и энергия ионизации атомов обнаруживаются более или менее непосредственно, скорость электрона проявляется в более тонких эффектах, таких, как рассеяние света атомами или магнитные свойства вещества. Хотя излучение, рассеянное свободными электронами, остается монохроматичным, движение электронов приводит при рассеянии на атоме к расширению спектральных линий. Это расширение возникает вследствие того, что падающий свет имеет различный цвет для электронов, движущихся с различными скоростями (эффект Доплера); поэтому оно составит по порядку величины:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = v = Z\alpha.$$

Далее, интенсивность магнитного взаимодействия определяется скорее величиной  $e\nu$ , а не  $e$ ; поэтому незначительность скорости электронов по сравнению с  $c$  проявляется в слабости магнитных свойств вещества. Чтобы понять это, заметим, что отклонение диэлектрической постоянной от единицы само порядка единицы, так как оно порядка величины отношения объема атома к объему, приходящемуся на один атом в конденсированном веществе. Соответствующая магнитная величина в  $v^2$  раз (около  $10^{-4}$ ) меньше.

Познакомимся теперь с величинами, которые характеризуют фотоны, излучаемые атомами. Частота испускаемого фотона соответствует разности энергий возбужденных состояний. Для первого возбужденного состояния (по отношению к основному) эта разность того же порядка, что и энергия основного состояния —  $\frac{m}{2}(Z\alpha)^2$ . Таким образом, частота света — величина того же порядка, что и частота «обращения» электронов, равная отношению:

$$\frac{\text{скорость}}{\text{диаметр орбиты}} = m(Z\alpha)^2 = Z\alpha \text{ атомных радиусов} \sim Z^2 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1},$$

что соответствует длине волны  $Z^{-2} \cdot 10^{-5}$  см. Следовательно, геометрия атомной оболочки определяется в основных чертах величиной  $Z\alpha$ , которая задает отношение комптоновой длины волны к диаметру и диаметра к длине волны испускаемого света, а также соответствующие энергии и времена.

Набросав грубую картину строения атома, обратим внимание на некоторые подробности, важные для основного содержания этой книги. Особенный интерес представляет тон-



кая структура энергетических уровней, ибо она обнаруживает такие детали свойств электрона, которые обычно не наблюдаются. Помимо упомянутых выше магнитных и релятивистских массовых эффектов, в эту структуру внесет вклад и спонтанное рождение пар (дарвинов член), так как он того же порядка по  $Z\alpha$ . Спонтанное рождение пар происходит как виртуальный процесс, в котором энергия частиц не сохраняется. В силу соотношения неопределенностей  $\Delta t \cdot \Delta E \sim 1$  виртуальная пара может существовать промежуток времени  $\Delta t \sim 1/\Delta E \sim 1/m$ . За это время пара не может уйти дальше, чем на расстояние  $\Delta x \sim 1/m$ , даже если она движется с релятивистской скоростью. Может случиться, что первоначальный электрон аннигилирует с позитроном виртуальной пары, так что другой электрон окажется на расстоянии  $\Delta x$  (рис. 1). Следовательно, локализация электрона в области меньшей, чем  $\Delta x$ , невозможна, и электрон в электромагнитном поле «чувствует» только усреднение этого поля по области  $(\Delta x)^3$ .

Это обстоятельство можно также описать посредством эффективной квадратичной флуктуации положения электрона

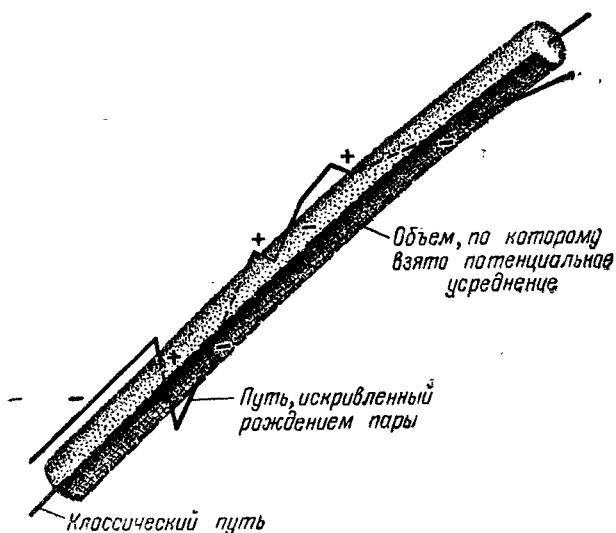


Рис. 1. Ломаная линия изображает зигзагообразный путь электрона, испытывающего «дрожание» (Zitterbewegung). Строго говоря, понятие «классического пути» неприменимо к движению электрона. Смысл графа в том, что он указывает на флуктуации положения, которые претерпевает электрон, благодаря процессам виртуального рождения пар. На этом графе, как и на всех последующих, следует считать, что ось времени идет снизу вверх

$(\Delta x)^2 \sim m^{-2}$ . Благодаря этому изменяется энергия тех электронов, которые находятся в непосредственной близости к ядру ( $S$ -электроны), где величина потенциала отлична от значения, усредненного по близлежащей области. Уравнение  $\Delta V = -Ze\delta(x)$  означает, что внутри ядра потенциал отклоняется от локального среднего. Потенциальная энергия внутри ядра — порядка  $Ze^2/r$ , где  $r$  — радиус ядра. Легко показать, что благодаря флуктуациям  $\Delta x$  этот потенциал изменяется на множитель  $(\Delta x)^2 \Delta V \sim e^2 Z/m^2 r^3$ . Таким образом, возникает сдвиг энергии порядка:

$\delta E =$  (изменение потенциальной энергии внутри ядра)  $\times$   $\times$  (вероятность нахождения электрона в ядре).

Последний множитель приблизительно равен отношению объема ядра к объему атома. Итак,

$$\delta E = \frac{Z\alpha}{m^2 r^3} (mZ\alpha)^3 r^3 = m (Z\alpha)^4,$$

т. е. сдвиг энергии составляет:

$$(Z\alpha)^2 \times (\text{расстояние между уровнями}).$$

**Б. Излучение фотонов.** После рассмотрения этих статических явлений перейдем к обсуждению процессов, в которых возникают фотоны. В основном такие процессы определяются формулой Лармора, согласно которой элементарный электрический заряд теряет в единицу времени на излучение энергию, пропорциональную  $\alpha \dot{v}^2$ \*

Если электрон изменяет свою скорость на  $\Delta v$  за время  $\Delta t$ , то он отдает электрическому полю энергию

$$\Delta E \sim \alpha (\Delta v)^2 (\Delta t)^{-1}.$$

Спектр излучаемого света определяется фурье-разложением движения заряда: пусть он содержит частоты порядка  $(\Delta t)^{-1}$ . Квантовая теория понимает излучение как процесс, в котором электрон испускает фотон \*\* с определенной вероятностью. Энергия таких квантов определяется их частотой и будет порядка  $(\Delta t)^{-1}$ . Так как мы ожидаем, что в квантовой механике электрон будет в среднем отдавать полю энергию в соответствии с формулой Лармора, то вероятность испускания фотона должна быть порядка  $w = \alpha (\Delta v)^2$ . Вероятность испускания нескольких фотонов существенно ниже, так как последовательные испускания в известной степени независимы и, таким образом, вероятность испускания двух фотонов должна быть порядка  $[\alpha (\Delta v)^2]^2$ . Следовательно, вероятность

\* Мы опускаем численные множители, такие, как, в данном случае,  $2/3$  (см. § 2).

\*\* Как будет показано ниже, излучение одного фотона много более вероятно, чем множественное излучение.

того, что осциллятор с частотой  $\omega$  и скоростью  $v$  ( $\Delta v$  за  $1/\omega$  равно  $v$ ) в единицу времени испустит один фотон, будет равна  $\alpha\omega v^2$ . Итак, излучение фотона является медленным процессом. Чтобы создать один квант, осциллятор должен совершить  $137/v^2$  колебаний. Излучение атома, если пренебречь более тонкими деталями движения электронов, будет таким же, как для осциллятора с частотой «обращения» электрона. Следовательно, время жизни возбужденного атомного состояния  $\tau = \frac{1}{\alpha\omega v^2} = \frac{1}{\alpha m (\alpha Z)^4}$  будет порядка  $Z^{-4} \cdot 10^{-9}$  сек. Это время в  $\alpha^{-1}(\alpha Z)^{-2}$  раз больше, чем период обращения электрона. Этот множитель дает также отношение расстояния между уровнями энергии к их ширине, так как из-за соотношения неопределенностей  $\Delta E \Delta t \sim 1$  ширина по порядку величины равняется обратному времени жизни уровня. Этот же множитель можно интерпретировать как количество волн в излученном волновом пакете. Таким образом, когерентная длина для света (длина, на которой сохраняется когерентность) будет порядка  $Z^{-4} (\alpha^5 m)^{-1} \approx 10 Z^{-4}$  см. Излучение фотонов подавляется тем, что они всегда должны уносить по крайней мере одну единицу момента и таким образом становятся связанными со скоростью  $v$ . Фактически, даже если фотон уносит только одну единицу момента, то он все же должен был быть испущен электроном на расстоянии  $1/\omega = 137/Z$  атомных радиусов от атома, если рассматривать его как классическую частицу с моментом  $\omega$ . Это сделало бы процесс практически невозможным, так как электрон никогда не отходит так далеко от атома. Однако в квантовой теории фотон не является настолько строго локализованным, чтобы процесс был полностью запрещен, вместе с тем чем больше момент фотона, тем меньше вероятность его испускания.

Замечательно, что даже излучение, возникающее при аннигиляции вещества, подчиняется в сущности тем же законам. При аннигиляции электрона с позитроном законы сохранения энергии — импульса запрещают возникновение только одного фотона. Однако, например, позитроний\*) может превратиться на короткое время в один фотон в пределах, допускаемых флуктуацией энергии, которая определяется соотношением неопределенностей  $\Delta E \cdot \Delta t \sim 1$ . Строго говоря, электрон и позитрон могут аннигилировать только, если они находятся в одном и том же месте. Вследствие флуктуаций положения, обусловленных эффектом рождения пар, для аннигиляции достаточно, чтобы они сблизилась на расстояние  $m^{-1}$ . При этом они начинают аннигилировать, образуя один

\*) Позитроний — атом водорода, в котором протон заменен на позитрон.

фотон с энергией, вообще говоря, не равной  $2m$ . Так как положение частицы определено с точностью до  $m^{-1}$ , то этот процесс описывается формулой Лармора, где  $\Delta v \sim 1$  и частота  $\omega \sim m$ . Таким образом, вероятность аннигиляции в единицу времени приблизительно равна  $\alpha m^{-1}$ . В связи с тем, что при переходе в состояние с одним фотоном закон сохранения энергии соблюдается лишь с точностью до  $m$ , оно существует только в течение времени  $\Delta t \sim m^{-1}$ . Иначе говоря, в среднем часть времени  $\alpha$  позитроний пребывает в состоянии фотона. Чтобы определить вероятность распада позитрония, следует это время умножить на вероятность того, что частицы окажутся на расстоянии  $m^{-1}$ . В основном состоянии позитроний имеет приблизительно те же размеры, что и атом водорода, так что электрон и позитрон заключены в область порядка  $(\alpha m)^{-1}$ . Поэтому вероятность того, что электрон и позитрон находятся в области, где может произойти аннигиляция, будет порядка  $\alpha^3$ . Следовательно, позитроний превращается в фотон на весьма короткую часть времени  $\alpha^4$  (миллионная доля процента). Это приводит к изменению энергии триплетного  $S$ -состояния на величину:  $\delta E \approx$  (вероятность виртуального состояния)  $\times$  (дефект энергии виртуального состояния)  $\approx m\alpha^4$ . Как и следовало ожидать, эта величина имеет порядок постоянной тонкой структуры. Поскольку момент, как и импульс, в виртуальном процессе сохраняется и поскольку фотон обладает по крайней мере единичным моментом, сдвиг в энергии имеет место только в триплетном  $S$ -состоянии (спины параллельны). Следовательно, виртуальную однофотонную аннигиляцию можно наблюдать на опыте через расщепление энергетических уровней  $S$ -состояний.

Могут также иметь место процессы аннигиляции с образованием двух фотонов. В этом случае энергия и импульс могут сохраниться, если фотоны испускаются в противоположных направлениях, каждый с энергией  $m$ . Двухфотонную аннигиляцию можно наблюдать как *реальный* процесс, в котором конечное состояние может существовать неограниченно долго. Виртуальные процессы, такие, как однофотонная аннигиляция позитрония, могут происходить лишь в течение конечного отрезка времени, допускаемого соотношением неопределенностей. Вероятность распада на два фотона с длиной волны  $1/m$  складывается из следующих вероятностей (рис. 2): *а*) вероятности того, что электрон и позитрон достаточно близко подошли друг к другу, и *б*) вероятности испускания двух фотонов с частотой  $1/m$ . При этом вероятность распада в единицу времени имеет порядок  $m\alpha^5$ . Иначе говоря, время жизни основного состояния  $\tau$  порядка  $1/m\alpha^5 \approx 10^{-9}$  сек, что по порядку величины совпадает со временем перехода из возбужденного состояния в основное.

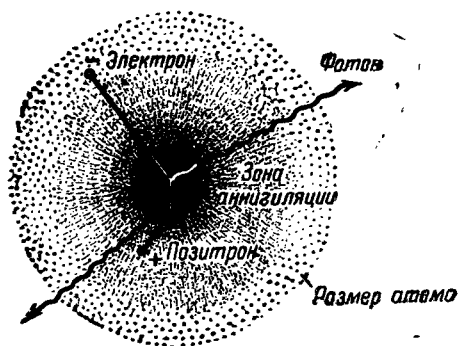


Рис. 2. Двухфотонная аннигиляция позитрония

Следовательно, ширина уровня основного состояния меньше интервала тонкой структуры в  $\alpha$  раз. В силу закона сохранения момента триплетное  $S$ -состояние позитрония (с полным моментом единица) может распасться только на три или более фотонов и поэтому его время жизни в 137 раз больше, чем у синглетного  $S$ -состояния.

### В. Рассеяние частиц.

Другим процессом взаимодействия заряженных тел с полем излучения является рассеяние света на электроне. В классическом рассмотрении электрическая волна с амплитудой  $E$  сообщает электрону ускорение порядка  $eE/m$ . В результате электрон в единицу времени излучает энергию  $\alpha(eE/m)^2$ . Если разделить ее на  $E^2/4\pi$  (первоначальный поток энергии в единицу времени через единицу площади), то получится эффективное сечение рассеяния (комптоново сечение):

$$\sigma \sim (\alpha/m)^2 \approx 10^{-25} \text{ см}^2.$$

Это число наглядно можно представить себе как площадь, которую электрон подставляет падающему пучку фотонов.

С корпускулярной точки зрения акт рассеяния состоит в поглощении и последующем испускании фотона. В этом процессе релятивистские эффекты играют роль даже при низких энергиях. Действительно, поскольку вероятности поглощения и испускания ведут себя как  $\alpha(\Delta v)^2$ , где изменение скорости электрона  $\Delta v$  при поглощении фотона с импульсом  $\omega$  равно  $\omega/m$ , то следовало бы ожидать, что эффективное сечение стремится к нулю вместе с  $\omega$ . Однако может случиться, что начальный фотон создает виртуальную пару, позитрон которой аннигилирует с первоначальным электроном, оставляя электроны и новый фотон (рис. 3). Ясно, что внешне этот процесс также будет выглядеть как рассеяние фотона электроном. Как уже было выяснено, он сможет произойти только в том случае, если пара создалась не дальше, чем на расстоянии  $m^{-1}$  от первоначального электрона. Вероятность всего процесса снова составляется из следующих отдельных вероятностей того, что а) фотон достаточно близко подойдет к электрону, б) образуется пара и в) пара аннигилирует с испусканием фотона.

Если фотон заключен в нормировочном объеме  $V$ , то вероятность того, что он за единицу времени достаточно близко подойдет к электрону, определяется отношением объема с сечением  $m^{-2}$  и длиной  $l$  к нормировочному объему  $V$ , т. е. равна  $(l/V)$   $(1/m^2)$ . Поскольку пара может иметь релятивистские скорости, то в этом случае  $\Delta v \sim 1$ , другие обе вероятности — порядка  $\alpha$ . Чтобы найти эффективное сечение процесса, эту вероятность надо разделить еще на равный  $1/V$  первоначальный поток фотонов, проходящий в единицу времени через единицу поверхности. Все вместе это дает то же эффективное сечение  $(\alpha/m)^2$ , что и раньше.

Длина  $r_0 = \alpha/m = 2,8 \cdot 10^{-13}$  см

принималась в классической электродинамике за радиус электрона, так как электростатическая энергия заряда, сконцентрированного в области размеров  $\frac{\alpha}{m}$  как раз равнялась

бы  $m$ . С квантотеоретической точки зрения применимость этих рассуждений ограничена в силу соотношения неопределенностей; энергию электрона можно считать равной  $m$ , только если он не локализован в области, меньшей  $m^{-1}$ . В процессе более точной локализации будут рождаться пары. Действительно, мы увидим в дальнейшем, что при радиусе электрона  $r < m^{-1}$  его собственная энергия ведет себя как  $\alpha m \ln(rm)$ , так что классический результат здесь совершенно неверен.

Однако эта же длина играет существенную роль в рассеянии заряженных частиц. Спросим себя, сколь близко от протона должен пролетать электрон, чтобы его импульс заметно изменился. Если его траектория проходит на расстоянии  $d$  от протона, то он подвергается воздействию силы порядка  $\alpha/d^2$  в течение времени  $d/v$ . Если потребовать, чтобы изменение его импульса  $(\alpha/d^2) (d/v)$  было порядка первоначального импульса  $mv$ , то  $d$  должно быть порядка  $\alpha/mv^2$ . Отсюда видно, что классический радиус электрона является характеристической длиной для рассеяния быстрых заряженных частиц на большие углы. Однако следует иметь в виду, что для

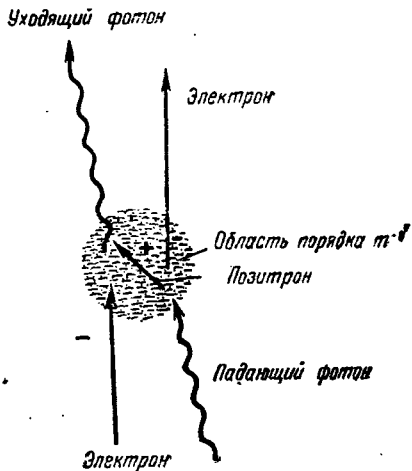


Рис. 3. Комптоново рассеяние фотона на электроне — процесс, который проходит через виртуальное рождение и аннигиляцию пары электрон-позитрон

больших углов рассеяния и  $v \sim 1$  становятся существенными, как и в проблеме тонкой структуры, релятивистские эффекты. Размазывание зрряда электрона, обусловленное виртуальными парами, уменьшает сечение рассеяния для электронов с прицельным параметром  $< m^{-1}$ .

Кроме того, в процессе рассеяния электрон подвергается воздействию переменного (во времени) электрического поля, которое действует на его магнитный момент. Если спин электрона направлен, например, вверх, то соответствующая сила будет иметь противоположные знаки для траекторий, которые проходят справа или слева от протона. Следовательно, при рассеянии поляризованных электронов в угловое распределение войдет азимутальная асимметрия, а неполяризованные электроны станут частично поляризованными. Для электрон-позитронного рассеяния в случае, если прицельный параметр меньше чем  $m^{-1}$ , появляется дополнительная возможность виртуальной однофотонной аннигиляции. Этот эффект также будет проявляться при высоких энергиях и больших углах рассеяния. Эксперимент в самом деле подтверждает все эти любопытные выводы.

Легко также оценить и вероятность излучения фотона при рассеянии (*тормозное излучение*). Если для быстрой частицы положить  $v \sim \Delta v \sim 1$ , то эффективное сечение тормозного излучения будет порядка эффективного сечения рассеяния, умноженного на вероятность излучения

$$\sigma = \alpha (\alpha Z/m)^2 \sim (Z^2 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2).$$

Это соответствует длине свободного пробега, равной 300 м в воздухе или  $1/2$  см в свинце.

**Г. Квантовые эффекты электромагнитного поля.** Свободное электромагнитное поле, удовлетворяющее волновому уравнению  $\square^2 A(x) = 0$ , эквивалентно набору осцилляторов, распределенных по всему пространству, каждый из которых связан со своими соседями. Такая система рассматривается квантовомеханически с помощью нормальных координат, которые служат для того, чтобы «развязать» осцилляторы. Можно представить эти координаты как частоты  $\omega$  и амплитуды  $q_\omega$ , нормированные в единичном объеме. Возбужденное  $n$ -ое состояние такого осциллятора с энергией  $n\omega$  соответствует  $n$  фотонам этой частной моды колебаний с частотой  $\omega$ . При этом неопределенность в амплитуде  $\Delta q_\omega$  будет порядка  $1/\sqrt{n}$ . Если поле  $A$ , а следовательно, и  $q_\omega$  должны иметь точно определенные значения, то состояние системы должно быть суперпозицией состояний с многими фотонами каждой моды. Вообще говоря, электромагнитные явления проявляют то

корпускулярные, то волновые свойства в зависимости от того, велики или малы квантовые числа осцилляторов. Источник электромагнитного поля соответствует внешней силе, приложенной к осцилляторам. Например, статический точечный источник, все фурье-компоненты которого равны, соответствует прибавлению к гамильтониану каждого осциллятора  $1/2(p_{\omega}^2 + \omega^2 q_{\omega}^2)$  члена  $e q_{\omega}$  \*) , при этом центр каждого отдельного осциллятора смещается на  $\delta q_{\omega} = e/\omega^2$ . Основное состояние возмущенной системы может оказаться возбужденным состоянием свободной системы (состоянием с фотонами) с вероятностью порядка:

$$\begin{aligned} & (\text{смещение } q_{\omega} / \text{флуктуация нулевой точки } q_{\omega})^2 = \\ & = \left[ \frac{\delta q_{\omega}}{\Delta q_{\omega}} \right]^2 \cong \frac{\alpha}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Обычно в таких случаях говорят об облаке виртуальных фотонов, окружающих заряд. При временном описании это означает, что заряд излучает, а затем снова поглощает фотоны.

Следует подчеркнуть, что концепция классического пути на самом деле не адекватна описанию такого виртуального поглощения и испускания — иначе можно было бы увлечься детальным описанием траектории этих квантов, что совершенно не имеет смысла с квантовомеханической точки зрения. Лучше представлять себе эти виртуальные процессы по аналогии с процессом проникновения света в плотную среду при полном внутреннем отражении или диффузией частиц в энергетически запрещенные области в  $\alpha$ -распаде.

Вероятность найти вблизи источника фотон с частотой в пределах  $\omega_{\max} \geq \omega \geq \omega_{\min}$  находится интегрированием вышенеписанного выражения, умноженного на число волн, приходящихся на интервал частот  $d\omega$ . Это число волн определяется формулой Рэля-Джинса в виде  $\omega^2 d\omega$ , откуда для вероятности получается выражение  $\alpha \ln(\omega_{\max}/\omega_{\min})$ . Ясно, что оно справедливо только в диапазоне частот, в котором все выражение  $< 1$ . Для многократно заряженных частиц следует заменить  $\alpha$  на  $Z^2\alpha$ , и в высших возбужденных состояниях будет находиться много осцилляторов. Поэтому приведенная выше оценка становится несправедливой. Иначе говоря, если для элементарных частиц применима фотонная картина, то для макроскопических многозарядных тел требуется полевое описание. Хороший случай применить концепцию виртуальных

\*) Читатель, которого смутит размерность в последующих выражениях, не должен забывать, что мы выбрали за объем поля излучения единичный объем.



фотонов, окружающих заряженную частицу, представляет нам другая оценка сечения тормозного излучения. С такой точки зрения падающая частица сталкивается с виртуальным фотоном, который при этом становится реальным. Для вероятности найти виртуальный фотон в интервале частот  $d\omega$  мы получили  $\alpha(d\omega/\omega)$ . В силу соотношения неопределенностей этот фотон заключен в объеме  $\omega^{-3}$  вокруг заряда. Если падающая частица пройдет через этот объем, то вероятность ее столкновения с фотоном будет равна:

(вероятность присутствия фотона)  $\times$  (эффективное сечение рассеяния)  $\times$  (площадь поверхности) $^{-1} = \alpha(d\omega/\omega) \cdot (\alpha/m)^2 \cdot \omega^2$ .

Отсюда сечение тормозного излучения фотона в интервале  $d\omega$  равно

$$\sigma = (\text{площадь поверхности}) \times (\text{вероятность рассеяния}) = (\alpha/m)^2 \alpha(d\omega/\omega).$$

Это означает, что наша предыдущая оценка  $\alpha^3/m^2$  для полного эффективного сечения справедлива с точностью до  $\log(\omega_{\max}/\omega_{\min})$ . Эта величина актуально расходится при  $\omega_{\min} \rightarrow 0$ , в чем отражается бесконечный радиус действия кулонова поля, благодаря чему излучать фотоны могут даже частицы, проходящие на большом расстоянии от заряда. Если ограничить наше рассмотрение фотонами только с заметной (не исчезающей) энергией, то эта расходимость несущественна.

Точно так же может быть оценена вероятность  $\alpha v^2$  излучения фотона, когда заряженная частица приводится в движение. Движущееся кулоново поле сокращено по Лоренцу, и заряду сопутствуют лишь те фотоны покоящегося поля, которые перекрываются с фотонами движущегося. Остающиеся фотоны (их доля составляет  $1 - \sqrt{1 - v^2} \approx v^2$ ) излучаются. Для вероятности излучения это дает величину  $\alpha v^2$ , которую следует умножить на логарифм, зависящий от деталей движения.

Поразительной особенностью, вводимой квантованием осциллятора, является появление нулевой энергии и нулевых колебаний. Пока еще не ясно, каким образом можно сопоставить нулевую энергию с какой-либо наблюдаемой величиной. Однако нулевые колебания осцилляторов вызывают некоторые обнаружимые эффекты. Среднеквадратичное отклонение для данной частоты дается формулой  $(\Delta A_\omega)^2 \sim 1/\omega$ . Поэтому флуктуация напряженности электрического поля данной частоты  $(\Delta E_\omega)^2 \sim \omega$ . Ввиду статистической независимости флуктуации  $E_\omega$  для получения полной величины среднеквадратичной флуктуации надо сложить квадраты флуктуаций для всех частот. Умножая полученную величину на плотность числа колебаний  $\omega^2 d\omega$  и интегрируя до некоторой частоты  $\omega_{\max}$ , мы получим:

$$(\Delta E)^2 \sim \omega_{\max}^4.$$

В результате для полной флуктуации среднего значения  $E$  усредненного по пространственной области порядка  $L^3$ , получаем  $\Delta E \sim L^{-2}$  (частоты, большие  $L^{-1} = \omega_{\max}$ , выпадают при усреднении и не дают вклада). Это удивительный результат, ибо он означает, что в атоме с радиусом  $r$  флуктуации электрического поля имеют порядок  $1/r^2$ , что больше самого кулонова поля, приблизительно равного  $e^2/r^2$ . Однако флуктуирующее поле содержит главным образом высокие частоты и потому не так эффективно, как кулоново, которое в течение длительного времени действует в одном направлении. Поле  $E_\omega$  с частотой  $\omega$  вызывает смещение  $(\Delta x_\omega)^2 \sim (eE_\omega/m\omega^2)$ . Полагая  $E_\omega^2 = \omega$  и интегрируя по частотам с весом  $\omega^2 d\omega$ , получим:}

$$(\Delta x)^2 = \alpha/m^2 \ln(\omega_{\max}/\omega_{\min}).$$

В атомных системах частоты, меньшие частоты обращения электронов, при усреднении выпадают, а частоты, большие  $m$ , гасятся релятивистскими эффектами, так что

$$\ln(\omega_{\max}/\omega_{\min}) \approx \ln \alpha^2$$

(число порядка 5). Итак, этот эффект приводит к флуктуациям в положении электрона, меньшим релятивистских, которые как было показано выше, порядка  $(\Delta x)^2 \sim m^{-2}$ .

Однако эти флуктуации, подобно релятивистским, сдвигают S-уровни на величину

$$\Delta E \approx m\alpha^5 \ln \alpha.$$

Этот эффект был экспериментально обнаружен Лэмбом и Ризерфордом. С корпускулярной точки зрения эти флуктуации надо было бы отнести за счет отдачи электрона при испускании и поглощении виртуального фотона. Действительно, когда электрон испускает виртуальный квант с импульсом  $\omega$ , он приобретает скорость отдачи  $\omega/m$ . В силу соотношения неопределенностей такой квант будет поглощен в течение времени  $\omega^{-1}$ , электрон за это время успеет сместиться на расстояние  $m^{-1}$ . Так как фотоны излучаются в случайных направлениях, то надо, как и раньше, складывать квадраты смещения. Интегрируя вероятность излучения фотонов  $\alpha\omega^3$  с плотностью  $\omega^2 d\omega$ , получим, как и раньше,

$$(\Delta x)^2 \sim e^2/m \ln(\omega_{\max}/\omega_{\min}).$$

Присутствие виртуальных фотонов и пар влияет и на магнитный момент электрона. Этот и подобные эффекты уже совершенно запутаны, так как существует много факторов, вносящих в них вклады со сложными фазовыми соотношениями, и эти эффекты не могут быть легко оценены. Когда в одно и то же время приходится учитывать и релятивист-

ские и квантовые явления, полная картина взаимодействия между элементарными частицами становится очень сложной. Поэтому глубокий и сложный математический аппарат, к построению которого мы сейчас перейдем, является необходимой основой для расчета этих хитроумных явлений.

## § 2. Классическая электродинамика

Многие понятия квантовой электродинамики заимствованы из классической. Поэтому мы дадим здесь краткий обзор классической теории.

Если рассматривать напряженности электрического и магнитного полей как временные и пространственные компоненты одного антисимметричного 4-тензора  $f_{ik}(x) = -f_{ki}(x)$ , то обе пары уравнений Максвелла запишутся в компактной форме

$$\partial_{,k} f_{,k}^{ik} = j^i(x), \quad (1.1)$$

$$\epsilon^{qrst} f_{rs,t} = 0, \quad (1.2)$$

где  $j^i(x)$  — вектор плотности тока. Соотношение (1.2) тождественно удовлетворится, если представить  $f_{ik}$  как четырехмерный ротор 4-потенциала  $A_i(x)$ :

$$f_{ik} = A_{i,k} - A_{k,i}. \quad (1.3)$$

Если наложить на  $A_i$  еще условие

$$A_{,i}^i = 0, \quad (1.4)$$

то (1.1) примет вид:

$$\square^2 A^i(x) = j^i(x). \quad (1.5)$$

Уравнение непрерывности

$$j_{,i}^i = 0 \quad (1.6)$$

обеспечивает совместность (1.4) и (1.5).

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T_k^i = f^{ij} f_{jk} + \frac{1}{4} f^{jl} f_{jl} \delta_k^i. \quad (1.7)$$

Он обладает равным нулю шпуром  $T_i^i = 0$  и, [как легко проверить, используя (1.1) и (1.2) (см. задачу \*) 1), удовлетворяет уравнению непрерывности

$$T_{,i}^{ik} = -j_i f^{ik}. \quad (1.8)$$

Эта система уравнений описывает перенос энергии-импульса между электромагнитным полем и заряженными телами под действием силы с плотностью  $j_i(x) f^{ik}(x)$ . В дальнейшем мы

\*) Задачи помещены в конце книги. (Прим. перевод.)

будем предполагать заряженные тела точечными частицами и поэтому сможем рассчитывать только величины, для которых детальная структура частиц несущественна. Излишне говорить, что таким способом нельзя полностью описать элементарные заряженные частицы, но, во всяком случае, классическое описание явно недостаточно. Однако многие классические соотношения, не зависящие от структуры частиц, имеют место и в квантовой теории. Движение точечной частицы, не обладающей внутренними степенями свободы, можно описать четырьмя ее пространственно-временными координатами  $z$ , как функциями собственного времени  $s$ . Такая частица обладает обычными механическими и электрическими свойствами, т. е. ее тензор энергии-импульса и вектор тока определяются следующим образом:

$$\mathfrak{J}^{ik}(x) = m \int_{-\infty}^{\infty} ds \dot{z}^i(x) \dot{z}^k(s) \delta(x - z(s)) \quad (1.9)$$

и

$$j_i(x) = e \int_{-\infty}^{\infty} ds \dot{z}_i(s) \delta(x - z(s)), \quad (1.10)$$

где  $\delta(x)$  — четырехмерная  $\delta$ -функция, определенная в (0.4)\*.

Если на частицы действуют только электромагнитные силы, то уравнения движения можно записать в обычном виде

$$m\ddot{z}_i(s) = e \dot{z}^k(s) f_{ki}(z(s)) \quad (1.11)$$

В этом случае изменение энергии-импульса поля и частиц компенсируют друг друга (см. задачу 2)

$$\frac{d}{dx_i} (T^{ik} + \mathfrak{J}^{ik}) = 0. \quad (1.12)$$

Из определения  $s$  следует, что

$$\dot{z}^2 = 1, \quad \dot{z} \ddot{z} = \dot{z} \ddot{z} + \ddot{z}^2 = 0. \quad (1.13)$$

Соотношения (1.13) существенны для совместности (1.11), так как  $\dot{z}_i \dot{z}_k f^{ik} = 0$ .

Общее решение (1.5) есть сумма произвольного решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Используя функции Грина (см. Д2.15), мы определим

---

\* Легко видеть, что (1.9) и (1.10) в системе покоя имеют правильную форму. Поскольку они являются инвариантными соотношениями,  $\mathfrak{J}$  и  $j$  будут иметь ту же форму во всех системах.

два решения  $A^{\text{in}}$  и  $A^{\text{out}}$  уравнения без источников с помощью формулы

$$A(x) = A^{\text{in}}(x) + \int dx' D^{\text{ret}}(x - x') j(x') = \\ = A^{\text{out}}(x) + \int dx' D^{\text{adv}}(x - x') j(x'). \quad (1.14)$$

Физически  $A^{\text{in}}$  означает падающее (*incoming*) поле, которое не создается током  $j$ . Это можно увидеть, предположив, что заряд «включается» лишь в некоторый заданный момент времени. Так как  $D^{\text{ret}}$  отлична от нуля только в световом конусе, направленном в будущее, то полагая  $j=0$  для  $x_0 < -t$ , получим  $A = A^{\text{in}}$  для  $x_0 < -t$ . Аналогичным образом  $A^{\text{out}}$  можно представлять себе, как уходящее (*outgoing*) поле, которое остается после того, как заряд «выключен»<sup>\*</sup>.

Важную роль играет поле излучения

$$A^{\text{rad}}(x) = A^{\text{out}}(x) - A^{\text{in}}(x) = \int dx' D(x - x') j(x'), \quad (1.15)$$

которое передает обязанную зарядам разницу между out- и in-полями.

Если падающего поля нет, то с помощью (Д2.15) и (0.1) получаем:

$$A_i(x) = e \int_{-\infty}^{\infty} ds \dot{z}_i(s) D^{\text{ret}}(x - z(s)).$$

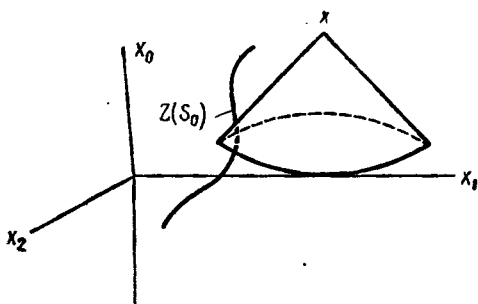


Рис. 4. Иллюстрация к (1.17)

конуса, направленного от  $x$  в сторону прошлого и мировой линии заряда (рис. 4),

$$(z(s_0) - x)^2 = 0 \quad x_0 > z_0(s_0). \quad (1.17)$$

Поскольку  $D^{\text{ret}}$  ведет себя в сущности как  $\delta$ -функция, с помощью которой интеграл по  $ds$  легко вычисляется, то:

$$A_i(x) = \\ = \frac{e}{4\pi} \frac{\dot{z}_i(s_0)}{(z(s_0), x - z(s_0))}. \quad (1.16)$$

При этом  $s_0$  — это собственное время точки пересечения светового

<sup>\*</sup> Рядн краткости будем в дальнейшем часто писать просто in- или out-поле. (Прим. перевод.)

Поскольку  $s_0$  зависит от  $x$ , для вычисления напряженности поля полезно произвести в (1.16) дифференцирование по  $x$  под знаком интеграла, а затем проинтегрировать по частям:

$$\begin{aligned}
 A_{i,k}(x) &= e \int ds \dot{z}_i(s) \frac{d}{ds} D^{\text{ret}}(x - z(s)) \left\{ \frac{d}{ds} (x - z(s))^2 \right\}^{-1} \times \\
 &\times (x - z(s))_{,k}^2 = e \int ds D^{\text{ret}}(x - z(s)) \frac{d}{ds} \frac{\dot{z}_i(s) (x - z(s))_k}{(\dot{z}(s), x - z(s))}; \\
 f_{ik}(x) &= \frac{e}{4\pi} (\dot{z}, x - z)^{-1} \times \\
 &\times \frac{d}{ds} \{ [\dot{z}_i(x - z)_k - \dot{z}_k(x - z)_i] (\dot{z}, x - z)^{-1} \}_{s=s_0} = \\
 &= \frac{e}{4\pi} (\dot{z}, x - z)^{-3} [(\ddot{z}, x - z) \ddot{z}_i(x - z)_k - (\ddot{z}, x - z) \dot{z}_i \times \\
 &\times (x - z)_k + \dot{z}_i(x - z)_k - (i \leftrightarrow k)]_{s=s_0}. \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

Последний символ означает антисимметризацию по  $i$  и  $k$ . Поле  $f$  состоит из части, зависящей от  $\ddot{z}$ , и части, зависящей только от  $\dot{z}$ . Первая обязана своим возникновением ускорению заряда и содержит  $(x - z)^2$  в числителе, в то время как вторая умножается лишь на  $(x - z)$ . Как известно из решения Герца, ускоренный заряд создает поле, убывающее как  $1/r$ , в то время как статическое поле падает как  $1/r^2$ . Асимптотическое поле  $f_{ik}^{(\ddot{z})}(z)$  обладает тем свойством, что напряженности электрического и магнитного полей ортогональны друг к другу и к пространственной части  $x - z$

$$\begin{aligned}
 f_{ik}^{(\ddot{z})}(x - z)^k &= f_{mn}^{(\ddot{z})}(x - z)_k e^{ikmn} = \\
 &= f_{ik}^{(\ddot{z})} f_{mn}^{(\ddot{z})} e^{ikmn} = 0. \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

Если мы хотим узнать, как ведет себя на бесконечности излученный вектор энергии-импульса, то нам нужен только тензор энергии-импульса, создаваемый  $f_{ik}^{(\ddot{z})}$ , так как в поток энергии через бесконечно удаленную сферу дадут вклад только те члены, которые убывают не быстрее  $1/r^2$ . Вычисление дает для этой части тензора энергии-импульса (см. задачу 4):

$$T_{ik}^{(\ddot{z})}(z) = - \left( \frac{e}{4\pi} \right)^2 \frac{(x - z)_i (x - z)_k}{(\dot{z}, x - z)^4} \left\{ \ddot{z}^2 + \left[ \frac{(\ddot{z}, x - z)}{(\dot{z}, x - z)} \right]^2 \right\}_{s=s_0} \quad (1.20)$$

Если рассмотреть  $T_{00}$  в системе покоя  $\dot{z}(s_0)$ , то из (1.20) видно, что плотность энергии в силу  $\ddot{z}^2 < 0$  всегда положительна, и наиболее сильное излучение происходит под прямым углом к  $\ddot{z}$ , который в этой системе пространственно подобен. Воспринимаемое электромагнитным полем в некото-

рой пространственно-временной области  $V$ , ограниченной поверхностью  $\sigma$ , изменение энергии-импульса частицы

$$\Delta P^i = - \int_V dx T_{,k}^{ik} = - \int d\sigma_k T^{ik}. \quad (1.21)$$

Чтобы подсчитать излучение на отрезке  $ds$  мировой линии заряда, выберем в качестве поверхности  $\sigma$  поверхность (рис. 5), образуемую верхними половинами световых конусов, проходящих через начальную и конечную точки  $ds$ , и оболочкой  $\sigma'$  (с нормалью  $\gamma$ , ортогональной к  $\dot{z}(s_0)$ ), связывающей эти конусы на бесконечности.

В системе, где  $\dot{z}(s_0)$  — времениподобна,  $\gamma$  — чисто пространственноподобна и  $\sigma'$  является бесконечно удаленным сегментом сферы, окружающим  $z(s_0)$ .

Если  $x$  — точка интегрирования на  $\sigma$ , то

$$(x - z)^2 = 0, \quad (\gamma, \dot{z}) = 0. \quad (1.22)$$

Если мы определим  $r$  уравнением  $x - z = r\dot{z} + \gamma$ , то можно показать, что (рис. 5):

$$\begin{aligned} (\gamma, x - z) &= \gamma^2 = -r^2, \\ (\dot{z}, x - z) &= r, \\ (\ddot{z}, x - z) &= (\ddot{z}, \gamma). \end{aligned} \quad (1.23)$$

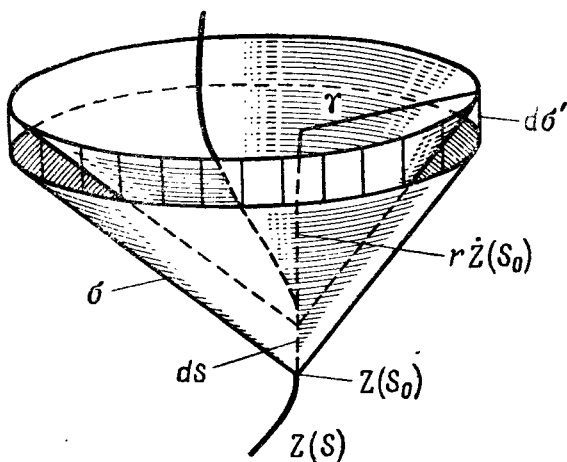


Рис. 5. Геометрические величины, введенные в (1.22) и (1.23)

Так как нормаль к световому конусу ортогональна  $x - z$ , то вклад в (1.21) вносит только  $\sigma'$ . Поверхностный элемент этой

части  $\sigma$  в системе отсчета, где  $\dot{z}$  ( $s_0$ ) — времениподобно, можно записать в виде:

$$d\sigma_i = ds d\Omega r \gamma_i, \quad (1.24)$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла. В этой системе  $\ddot{z}$  — чисто пространственный вектор [ $\dot{z} = (1, 0, 0, 0)$ ], что позволяет нам получить простую оценку для потери энергии. Из (1.20), (1.23) и (1.24) получаем

$$\begin{aligned} \Delta P_k &= \left(\frac{e}{4\pi}\right)^2 ds \int d\Omega r^{-1} (\gamma + r\dot{z})_k \left[ \ddot{z}^2 + \left(\frac{\ddot{z}, \gamma}{r}\right)^2 \right] = \\ &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi} ds \dot{z}_k \ddot{z}^2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Интегрирование по направлениям  $\gamma$  усреднит нечетные степени  $\gamma$ , а  $\left(\frac{\ddot{z}, \gamma}{r}\right)^2$  превратится просто в  $-\frac{1}{3}\ddot{z}^2$ . Потеря энергии-импульса, отнесенная к  $ds$

$$\frac{\Delta P}{ds} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi} \dot{z} \ddot{z}^2, \quad (1.26)$$

будет в системе покоя  $\dot{z}$  чисто времениподобным вектором с отрицательной нулевой компонентой. Следовательно, в этой системе потерь импульса нет, и можно написать

$$\frac{\Delta P_0}{dx_0} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi} \ddot{z}^2. \quad (1.27)$$

В предыдущих расчетах мы рассматривали только электромагнитное поле на бесконечном расстоянии от заряда, и возникает вопрос о том, что же происходит с тем излучением, которое не удаляется на бесконечность. Чтобы исследовать его, перепишем с помощью (1.8) и (1.15) выражения для вектора энергии-импульса, передаваемого полю частицей

$$\Delta P_k = \int dx j^\mu \left\{ f_{\mu k}^{\text{in}} + \frac{1}{2} \left[ f_{\mu k}^{\text{rad}} + \left( f_{\mu k}^{\text{ret}} + f_{\mu k}^{\text{adv}} \right) \right] \right\}. \quad (1.28)$$

Первый член характеризует взаимодействие между зарядом и внешним полем  $f^{\text{in}}$ . Мы покажем теперь, что потери энергии-импульса определяются вторым членом, характеризующим взаимодействие с полем излучения, в то время как третий описывает для точечного заряда только инерционные эффекты.

С учетом (1.10) интеграл по  $dx$  в (1.28) указывает на то, что мы должны брать поле на мировой линии тела. Сейчас



мы увидим, что  $f_{ik}^{\text{rad}}$  конечно вдоль мировой линии. Принимая во внимание (1.15) и (1.18), заметим, что

$$f_{ik}^{\text{rad}}(x) = e \int ds D(x - z(s)) \left( \frac{d}{ds} \left\{ \frac{\dot{z}_i(s)(x - z(s))_k}{(\dot{z}(s), x - z(s))} \right\} - (i \leftrightarrow k) \right). \quad (1.29)$$

Это выражение надо вычислить для точки  $x$  на мировой линии. Мы свяжем значение  $s=0$  с точкой  $z(0)$  и  $f_{ik}^{\text{rad}}$ , разлагая  $z(s)$  в ряд по  $s$  ( $z$  — без аргумента относится к  $s=0$ ):

$$z(s) - z(0) = s\dot{z} + \frac{s^2}{2!} \ddot{z} + \frac{s^3}{3!} \dddot{z} + \dots$$

$$\dot{z}(s) = \dot{z} + s\ddot{z} + \frac{s^2}{2} \dddot{z} + \dots \quad (1.30)$$

Подставляя (1.30) в (1.29), сохраняя только необходимые нам степени  $s$ , понимая  $\delta(s^2)$  как  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta(s^2 - \alpha^2)$ , получим

$$\frac{1}{2} f_{ik}^{\text{rad}}(z(0)) = -\frac{e}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \varepsilon(s) \delta(s^2)$$

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{\left( \dot{z}_i + s\ddot{z}_i + \frac{s^2}{2} \dddot{z}_i \right)}{\left( \dot{z} + s\ddot{z} + \frac{s}{2} \dddot{z} \right)} \frac{\left( \dot{z}_k + \frac{s}{2} \ddot{z}_k + \frac{s^2}{6} \dddot{z}_k \right)}{\left( \dot{z} + \frac{s}{2} \ddot{z} + \frac{s^2}{6} \dddot{z} \right)} \right] - (i \leftrightarrow k);$$

$$\frac{1}{2} f_{ik}^{\text{rad}}(z(s)) = \frac{e}{4\pi} [\dot{z}_i(s) \dddot{z}_k(s) - \dot{z}_k(s) \dddot{z}_i(s)] \cdot \frac{2}{3}. \quad (1.31)$$

В последнем равенстве в качестве аргумента использовано  $s$ , а не 0, так как оно очевидно справедливо для любой точки на мировой линии. Интегрируя (1.28) по  $x$  между двумя пространственноподобными поверхностями, пересекающими мировую линию в точках  $s$  и  $s + ds$ , мы получим вклад только от мировой линии, где  $j \neq 0$ . Отсюда для реакции поля получается:

$$\frac{dP_k^{\text{rad}}}{ds} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{2}{3} (\dot{z}_k \ddot{z}^2 + \ddot{z}_k). \quad (1.32)$$

Первый член здесь — это излученные энергия и импульс на бесконечности. Его нулевая компонента всегда отри-

цательна и соответствует необратимой передаче энергии от частиц к полю. Его пространственная часть представляет собой силу, которая, подобно силе вязкости, пропорциональна импульсу заряженной частицы, взятому со знаком минус. Второй член в (1.32) — это полный дифференциал величины, которую можно назвать энергией ускорения. В противоположность первому члену нулевая компонента второго может принимать разные знаки; это — энергия, которая обратимо запасается в поле. Заряд получает эту энергию обратно, как только он возвращается к первоначальному значению  $\ddot{z}$ . Эта часть энергии поля всегда остается вблизи заряда и не появляется на бесконечности. Пространственная компонента этого члена описывает силу, действующую в направлении изменения  $\ddot{z}$  и в силу этого способствующую увеличению энергии и импульса частицы<sup>\*)</sup>. Этот замечательный эффект возникает из-за того, что при ускорении заряд обладает тенденцией излучать больше назад, чем вперед. Действительно, оба члена могут взаимно компенсироваться, как это и получается при гиперболическом движении, когда  $z^2 = -a^2$ ,  $\dot{z} = z/a^2$ ,  $\ddot{z} = \dot{z}/a^2$ . В этом случае заряд излучает энергию, которую «заимствует» из поля в ближней зоне.

Можно удивляться, почему собственная сила  $(e^2/4\pi)(2/3)\ddot{\ddot{z}}$  меняет знак при замене  $t \leftrightarrow -t$ , в то время как начальные уравнения (1.1) и (1.6) инвариантны относительно этого преобразования. Дело в том, что положительное направление времени у нас существенно отличается от отрицательного, как только мы выбираем  $A^{\text{in}} = 0$ , а не  $A^{\text{out}} = 0$ . Таким образом знак силы реакции излучения определен нашим предположением о том, что более вероятно реализовать определенные начальные условия при  $t = -\infty$ , чем другие условия при  $t = +\infty$ .

Последний член в правой части (1.28) бесконечен, поскольку сумма  $f^{\text{ret}} + f^{\text{adv}}$  сингулярна на мировой линии. Здесь  $\delta$ -образная модель заряда недостаточна, и следует сделать какие-

---

\*) Читатель заметит, что  $(e^2/4\pi) \frac{2}{3} \ddot{\ddot{z}}$  может быть сколь угодно большим.

Это значит, что заряд может заимствовать у поля сколь угодно большое количество энергии. Казалось бы, что это находится в разительном противоречии с положительной определенностью энергии поля. Такая особенность точечной модели объясняется положительно бесконечной собственной энергией точечного заряда, которая всегда может скомпенсировать энергию ускорения.

нибудь предположения о его структуре. Для заряженной сферы с радиусом  $R$  можно получить

$$dP/ds \approx -\ddot{z} (e^2/8\pi R) + \text{члены, стремящиеся к нулю при } R \rightarrow 0.$$

Так как  $D^{\text{ret}} + D^{\text{adv}}$  — четная функция  $x_0$ , то весь вклад от этого члена пропорционален четным производным  $z_\mu$ , а из соображений размерности член  $\ddot{z}$  должен быть пропорционален  $R^{-1}$ . Член, стремящийся к бесконечности при  $R \rightarrow 0$ , характеризует только возрастание массы заряженного тела. Подсчитав действие собственного поля, можно написать уравнение движения

$$\left(m + \frac{e^2}{8\pi R}\right) \ddot{z}_\mu - \frac{e^2}{4\pi} \frac{2}{3} (\ddot{z}_\mu + \dot{z}_\mu \ddot{z}^2 + O(R)) = e \dot{z}' f_{r\mu}^{\text{in}}. \quad (1.33)$$

Здесь  $O(R)$  — член, исчезающий при  $R \rightarrow 0$ . Масса  $m'$ , относящаяся к движению частицы в слабо меняющемся поле  $f^{\text{in}}$ , равна  $m + e^2/8\pi R$ . Следовательно, эта величина может быть названа наблюдаемой массой. Следует помнить, что для заряженных тел конечных размеров необходимо вводить неэлектромагнитные силы, противодействующие кулонову отталкиванию. Другими словами, уравнение движения (1.1) несправедливо внутри тела. Это приводит к тому, что  $T_{ik} + \mathfrak{I}_{ik}$  не будет полным дифференциалом и соответствующий вектор энергии-импульса не будет преобразовываться как 4-вектор. Было сделано много попыток построить модель замкнутой релятивистской теории, где устранялась бы эта трудность. Делались, например, попытки найти предельный процесс, соответствующий  $R \rightarrow 0$ , для которого удовлетворялись бы уравнения движения. Работы, обсуждающие те трудности, с которыми приходится сталкиваться, развивая эту идею, следуют одна за другой и в каждой из них предлагается свое средство, чтобы спасти положение. Мы не будем вникать в эти проблемы, имеющие чисто академический характер и не соответствующие чему бы то ни было в физике. В классической теории трудности возникают, как только мы начинаем рассматривать частицы, меньшие, чем  $\frac{e^2}{m}$ . Однако в квантовой теории релятивистские эффекты начинают сказываться уже на расстояниях порядка комптоновой длины волны ( $\sim \frac{1}{m}$ ). На еще более близких расстояниях эти явления доминируют, и поэтому результаты классической теории, когда речь идет о расстояниях порядка  $e^2/m$ , нельзя воспринимать всерьез. По-видимому, природа справляется с трудностями классической электродинамики способами, отличными от математических трюков.

Классические уравнения движения можно вывести и из гамильтоновой функции

$$H = [p(s) - eA(q(s))]^2/2m. \quad (1.34)$$

Канонические уравнения

$$m\dot{q}_i = (p - eA)_i, \quad p_i = \frac{e}{m} (\dot{p} - eA)_k A^k_i, \quad (1.35)$$

эквивалентны (1.11).

Законы электродинамики можно представить в еще более сжатой форме в принципе действия, в котором электромагнитное поле исключено, и явно рассматривается только движение заряженной частицы.

Если мы рассматриваем систему заряженных частиц, характеризуемых греческими индексами, то оказывается, что (1.1), (1.2) и (1.11) можно скомбинировать в интеграл действия Фоккера — Шварцшильда — Тетроде

$$W = \sum_{\alpha} \int ds \dot{z}_{\alpha}^2 \frac{m_{\alpha}}{2} + \sum_{\alpha > \beta} e_{\alpha} e_{\beta} \int ds ds' \times \\ \times \{ \dot{z}_{\alpha}(s) \dot{z}_{\beta}(s') \bar{D}(z_{\alpha}(s) - z_{\beta}(s')) \}. \quad (1.36)$$

Если варьировать мировые линии частиц, а  $W$  рассматривать как интеграл от функции Лагранжа вдоль этих линий, то уравнения Эйлера

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_{\alpha}(s)} = \frac{\partial L}{\partial z_{\alpha}(s)} \quad (1.37)$$

действительно оказываются как раз уравнениями движения (1.11). Поле, образованное другими частицами, в соответствии с (1.37) следующим образом действует на движение данной частицы:

$$m_{\alpha} \ddot{z}_{\alpha k} = e_{\alpha} \dot{z}_{\alpha}^i(s) \sum_{\beta < \alpha} \int ds' \left[ \dot{z}_{\beta}^j(s') \frac{\partial}{\partial z_{\alpha}^k(s)} - \right. \\ \left. - z_{\beta k}(s') \frac{\partial}{\partial z_{\alpha}^i(s)} \right] \bar{D}(z_{\alpha}(s) - z_{\beta}(s')). \quad (1.38)$$

Поскольку (1.36) симметрично по индексам  $\alpha$  и  $\beta$ , мы вынуждены использовать здесь полусумму опережающего и запаздывающего взаимодействия. Выбрав в двойной сумме в (1.36)  $\alpha > \beta$ , можно устранить бесконечную собственную энергию, но при этом теряется член, соответствующий обратному действию поля излучения. На основе так развитой концепции действия на расстоянии невозможно построить непротиворечивую теорию, которая передавала бы такие

тонкие эффекты, как лэмбов сдвиг. Это показывает, что только полевая концепция, которая связывает с электромагнитным полем его собственные степени свободы, дает правильное описание этих явлений.

### § 3. Общий формализм квантовой теории поля

В квантовой теории наблюдаемые некоторой системы, такие как энергия или заряд, представляются операторами  $O^{\dagger}$ . Они действуют на векторы  $|\rangle$  в бесконечномерном векторном пространстве (обычно называемом гильбертовым) так, что под действием  $O$  вектор  $|\alpha\rangle$  переходит в вектор  $|\beta\rangle$ :  $O|\alpha\rangle = |\beta\rangle$ . В частности, говорят, что вектор  $|\sigma'\rangle$  является собственным вектором оператора  $O$ , соответствующим собственному значению  $\sigma'$ , если

$$O|\sigma'\rangle = \sigma'|\sigma'\rangle, \quad (1.39)$$

где  $\sigma'$  — обычное число. (В матричном представлении число изображается единичной матрицей, помноженной на это число).

Для интерпретации математического формализма существуют следующие аксиомы:

I. *Результат любого измерения некоторой наблюдаемой может быть только одним из собственных значений оператора, поставленного в соответствие этой наблюдаемой.*

II. *Состояние системы характеризуется вектором  $|\rangle$  в гильбертовом пространстве<sup>\*\*</sup>). Далее вероятность  $w_{\sigma'}$  того, что при измерении наблюдаемой  $O$  получится частное значение  $\sigma'$ , равна квадрату модуля компоненты вектора состояния вдоль направления собственного вектора  $|\sigma'\rangle$ , соответствующего собственному значению  $\sigma'$ .*

$$w_{\sigma'} = |\langle \sigma' | \rangle|^2. \quad (1.40)$$

Так как результатом измерения должно быть действительное число, то в силу первой аксиомы наблюдаемым можно ставить в соответствие только эрмитовы операторы  $O^{\dagger} = O$ . Кроме того, эрмитовы операторы обладают тем свойством, что собственные векторы, соответствующие двум различным собственным значениям, ортогональны<sup>\*\*\*</sup>).

<sup>\*</sup>) Например, в элементарной квантовой механике импульс частицы представляется дифференциальным оператором  $-i(\partial/\partial x)$ , который действует на шредингерову функцию (вектор состояния). См. П. А. М. Дирак. Принципы квантовой механики, Физматгиз, 1960, гл. 2.

<sup>\*\*</sup>) В тексте мы берем за основу так называемое гейзенбергово представление, в котором вектор состояния фиксирован во времени, а вся зависимость системы от времени заключена в собственных состояниях наблюдаемых.

<sup>\*\*\*</sup>) Чтобы убедиться в этом, достаточно умножить (1.39) на  $\langle \sigma'' |$ , а уравнение  $\langle \sigma'' | O = \langle \sigma'' | \sigma''$  на  $|\sigma'\rangle$  и вычесть одно из другого.

Уравнение (1.39) определяет собственные векторы только с точностью до численного множителя, который фиксируется условием нормировки \*)

$$\langle o' | o'' \rangle = \delta(o' - o''). \quad (1.41)$$

Среднее значение \*\*) по многим измерениям  $\int do' o' \omega_o'$  просто равно  $\langle |O| \rangle$ ; в этом легко убедиться, разлагая вектор состояния  $| \rangle$  по собственным векторам  $O: | \rangle = \int do' | o' \rangle \langle o' | \rangle$  и используя (1.40) и (1.41).

Если подвергнуть  $O$  преобразованию подобия  $U$ , т. е. написать

$$\bar{O} = UOU^{-1}, \quad (1.42)$$

то спектр собственных значений не изменится; собственный вектор  $|\bar{o}\rangle$ , соответствующий собственному значению  $o'$  оператора  $O$ , определяется формулой

$$|\bar{o}'\rangle = U|o'\rangle, \quad (1.43)$$

следовательно

$$\bar{O}|\bar{o}'\rangle = o'|\bar{o}'\rangle.$$

Для того чтобы сохранить эрмитовость операторов и условие нормировки собственных векторов (уравнение (1.41)), необходимо потребовать, чтобы  $U$  было унитарным:  $U^\dagger = U^{-1}$ . Унитарные преобразования являются обобщением операций вращения на случай комплексных векторов. Если в качестве базиса выбрана система собственных векторов операторов  $\bar{O}$  или  $O$ , то матричным представлением  $U$  будет:

$$\langle o' | U | o'' \rangle = \langle o' | \bar{o}'' \rangle, \quad (1.44)$$

что непосредственно следует из (1.43). Если собственные векторы  $|o'\rangle$  и  $|\bar{o}'\rangle$  нормированы, то (1.44) определяет унитарное  $U$ . Обычно справедлива и обратная теорема, что два эрмитова оператора эквивалентны с точностью до унитарного преобразования, если они имеют один и тот же спектр собственных значений. Поскольку, например, операторы энергии замкнутой системы в разные моменты времени имеют один и тот же спектр собственных значений, то они должны быть связаны унитарным преобразованием

$$O(t_1) = U_{12} O(t_2) U_{12}^{-1}; |o'_i\rangle = U_{12} |o'_i\rangle. \quad (1.45)$$

\*) Здесь мы предполагаем, что  $\delta$ -символ равен  $\delta$ -функции Дирака, если спектр непрерывен, и символу Кронекера  $\delta$ , если спектр дискретен. Встречающееся ниже интегрирование по собственным значениям в случае дискретного спектра должно заменяться суммированием.

\*\*) Часто эту величину называют «математическим ожиданием», но так как она не обязательно равна собственному значению, нельзя, вообще говоря, ожидать, что при измерении мы получим «математическое ожидание».

Этому преобразованию соответствует некоторый поворот собственных векторов  $O$  от момента времени  $t_1$  к моменту времени  $t_2$ . Если система находится в собственном состоянии  $|o'\rangle$  оператора  $O$  (вектор состояния  $|o\rangle = |o'\rangle$ ), то из второй аксиомы следует, что вероятность получить при изменении другой наблюдаемой  $P$  ее собственное значение  $p'$  равна  $|\langle o' | p' \rangle|^2$ . Следовательно,  $U_{21}$ , которое определяется как произведение собственных векторов  $O$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\langle o'_1 | o''_2 \rangle = \langle o'_1 | U_{12}^{-1} | o''_2 \rangle, \quad U_{12}^{-1} = U_{21} \quad (1.46)$$

управляет развитием системы во времени. Фундаментальное свойство унитарных матриц, а именно, возможность представить их в виде скалярных произведений базисных векторов старой и новой системы, можно непосредственно получить из (1.43).

В силу группового свойства вращений достаточно рассмотреть бесконечно малое преобразование, иными словами, задать бесконечно малое приращение матрицы преобразования  $U$ , осуществляющее бесконечно малый поворот операторов. Так как произведение двух унитарных операторов само является унитарным, то унитарный оператор, отличающийся от  $U$  на бесконечно малую величину  $\delta U$ , можно получить просто, умножив  $U$  на инфинитезимальный унитарный оператор  $1 - iF$ :

$$U + \delta U = (1 - iF)U, \quad (1.47)$$

где  $F$  — бесконечно малый эрмитов оператор. При каноническом бесконечно малом преобразовании оператор  $O$  изменяется следующим образом\*:

$$O + \delta O = (1 - iF)O(1 + iF) = O + i[O, F]. \quad (1.48)$$

В матричном представлении (1.46) уравнение (1.47) можно записать в виде:

$$\delta \langle o'_1 | o''_2 \rangle = \langle o'_1 | \delta U_{12}^{-1} | o''_2 \rangle = i \langle o'_1 | F_{12} | o''_2 \rangle. \quad (1.49)$$

Возможный вид  $F$  ограничивается групповыми свойствами преобразования  $U$ :

$$U_{13} = U_{12}U_{23},$$

или

$$\langle o'_1 | o'''_3 \rangle = \int do'' \langle o'_1 | o''_2 \rangle \langle o''_2 | o'''_3 \rangle. \quad (1.50)$$

\* Мы всегда сохраняем только члены, линейные по  $F$ .

Вариация уравнения (1.50) дает:

$$\begin{aligned} & \langle o'_4 | F_{13} | o''_4 \rangle \int \langle o'_4 | F_{12} | o''_4 \rangle do'' \langle o''_4 | o'''_4 \rangle + \\ & + \int \langle o'_4 | o''_4 \rangle do'' \langle o''_4 | F_{23} | o'''_4 \rangle = \langle o'_4 | F_{12} + F_{23} | o'''_4 \rangle, \end{aligned} \quad (1.51)$$

т. е. мультипликативность  $U$  приводит к аддитивности  $F$ .

Третья и последняя аксиома предписывает способ построения производящего оператора  $F^{**}$ .

III. Каждому каноническому преобразованию классической системы сопоставляется унитарное преобразование соответствующей квантовой системы такое, что производящий оператор инфинитезимального унитарного преобразования строится таким же образом, что и производящая функция соответствующего классического канонического преобразования<sup>\*\*</sup>.

В классическом каноническом формализме производящие функции инфинитезимальных преобразований строятся из вариации интеграла действия  $W$ . Так, для одномерного движения свободной частицы, характеризуемого лагранжианом  $L$ , мы имеем

$$W = \int_{t_0}^t dt L(q, \dot{q}), \quad \delta W = p \delta q - H \delta t.$$

Изменение во времени или в пространстве некоторой наблюдаемой  $O$  описывается уравнениями

$$\delta O / \delta t = [O, H], \quad \text{или} \quad \delta O / \delta q = [O, p],$$

где  $[ ]$  — скобки Пуассона, которым в квантово-механическом формализме будет соответствовать коммутатор в (1.48). Таким образом, как в классической, так и в квантовой механике изменение некоторой величины при инфинитезимальном преобразовании определяется либо коммутатором (в квантовой механике), либо скобками Пуассона (в классической механике) этой величины с производящим оператором (функцией) этого преобразования, который задается соответствующим изменением интеграла действия. При этом изменение может быть обусловлено ходом времени, а может и тем, что меняется какой-либо другой параметр лагранжиана. В механике частиц это правило квантования приводит к уравнению Шредингера, и весьма естественно перенести те же самые формальные правила и на квантование полей. Действительно, принято считать, что эти правила квантования имеют гораздо более общее

<sup>\*</sup> См. Дирак, § 26 и J. Schwinger, Phys. Rev., 82, 914 (1951).

<sup>\*\*</sup> Системы, не имеющие классического аналога, могут быть проквантованы тем же способом.



значение и применимы к любым системам. Они были использованы для описания поля упругих смещений в кристалле или движения жидкости. Однако в этих случаях описание системы посредством бесконечного числа степеней свободы излишне, ибо лежащей в основе механической ситуации соответствует только конечное число параметров.

В дальнейшем мы будем иметь дело с полями типа  $\psi^a(x)$ , а именно с электромагнитным или электронно-позитронным, при изучении которых нельзя руководствоваться как образцом наглядными механическими моделями. Все, что нам известно, когда мы приступаем к изучению этих полей, — это некоторые свойства инвариантности и уравнения движения, которые берутся из рассмотрения макроскопических и атомных явлений. Вполне закономерен вопрос о том, каковы пределы применимости полевого описания электронов и фотонов, так как, например, мы знаем, что в кристалле полевое описание несправедливо для областей, размеры которых атомного порядка. Фактически, когда расстояния становятся меньше  $10^{-13}$  см и, соответственно, начинают играть роль высокие энергии, электромагнитное поле начинает порождать, помимо электронов и позитронов, другие частицы, и возникает необходимость введения многих новых полей. Законы, управляющие этими явлениями, пока еще недостаточно поняты. Поэтому теорию, которую мы собираемся развивать, можно с некоторой уверенностью применять только к явлениям, характерные размеры которых лежат между макроскопическими и ядерными размерами. Во всяком случае, мы будем строить квантовую теорию полей в предположении ее инвариантности относительно группы Лоренца, не задумываясь над тем, насколько точно последнее реализуется в природе.

По аналогии с механикой частицы можно ожидать, что уравнения поля для  $\psi^a$  будут уравнениями Эйлера, получающимися из вариационного принципа для действия  $W$ , которое представляет собой четырехмерный интеграл от лагранжиана  $\mathcal{L}$ .

$$W = \int dx L(\psi^a(x), \psi^a_{,i}(x)). \quad (1.52)$$

Чтобы оттенить релятивистскую инвариантность теории, удобно заменить существенно нерелятивистское рассмотрение всего пространства в некоторый момент времени вве-

\* Индекс  $a$  служит для того, чтобы различать компоненты  $\psi$ , когда  $\psi$ , например, вектор или спинор.

\*\* В дальнейшем мы будем рассматривать полевые уравнения только второго порядка, так что  $L$  зависит только от  $\psi_{,i}$  — первых производных от  $\psi$ . Проводимое здесь общее рассмотрение будет проиллюстрировано примерами в § 5.

дением пространственноподобной, а в остальном произвольной поверхности. Это позволит нам, не ограничиваясь определенной системой координат, всегда работать с областями, все точки которых физически независимы.

Таким образом, при интегрировании величин, подобных полной энергии,  $\int dV$  следует заменить на  $\int d\sigma$ . Соответственно, необходимо иметь в виду, что собственные векторы наблюдаемой  $|o'\rangle$  определены на пространственноподобной поверхности, а не на гиперплоскости  $t = \text{const}$ . В соответствии с этим выражение для интеграла действия, используемое в механике частицы:  $W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q})$ , обобщается следующим образом:

$$W_{12} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx L. \quad (1.53)$$

Третья аксиома может быть символически записана так:

$$\delta \langle o'(\sigma_1) | o''(\sigma_2) \rangle = i \langle o'(\sigma_1) | \delta \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx L | o''(\sigma_2) \rangle. \quad (1.54)$$

Аддитивность  $F$  (соотношение (1.51)) тем самым гарантирована, так как очевидно, что  $\delta W_{13} = \delta W_{12} + \delta W_{23}$ . Для того чтобы оператор  $1 + i\delta W$  был унитарен в первом порядке по  $\delta$  в квантовой теории, необходимо, чтобы лагранжиан  $L$  был эрмитов. В силу релятивистской инвариантности и инвариантности относительно отражений уравнения (1.54), лагранжиан  $L$  должен быть скаляром.

Построим теперь производящие операторы вариаций, которые конструируются из вариаций  $\delta_0 \psi^\alpha$  полевых переменных и вариаций  $\delta x$  поверхности  $\sigma$ .

Вариацию  $W$  можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \delta W_{12} &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx \delta_0 L + \left( \int_{\sigma_1} - \int_{\sigma_2} \right) d\sigma, \delta x^j L; \\ \delta_0 L &= \delta_0 \psi^\alpha \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha} + \delta_0 \psi_{,k}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}^\alpha} = \left( \frac{\partial L}{\partial \psi^k} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}^\alpha} \right) \delta_0 \psi^\alpha + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \delta_0 \psi_{,k}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}^\alpha} \right). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Так как  $\psi^\alpha$  и  $\delta_0 \psi^\alpha$  в общем случае не коммутируют друг с другом, то в этом выражении, а также в последующих следует иметь в виду, что положение  $\delta_0 \psi$  в ряду операторов определяется положением соответствующего  $\psi$  в непроявля-

рованном лагранжиане. Если  $\delta x$  и  $\delta_0 \psi$  равны нулю на  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , то и  $\delta W_{12}$  должно обращаться в нуль, так как в этом случае наблюдаемые величины и соответствующие им системы собственных векторов на  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  не меняются и, следовательно, преобразующая их друг в друга функция также должна остаться неизменной. Вариация  $\delta W_{12}$  состоит из поверхностного интеграла, который при этих условиях обращается в нуль, и объемного интеграла от  $(\delta L / \delta \psi^\alpha - (\partial / \partial x^k) \delta L / \delta \psi_{,k}^\alpha) \delta_0 \psi^\alpha$ , где  $\delta_0 \psi^\alpha$  — произвольно.

Поэтому для последовательности нашей процедуры квантования необходимо, чтобы удовлетворялись уравнения Эйлера

$$\frac{\delta L}{\delta \psi^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\delta L}{\delta \psi_{,k}^\alpha} = 0. \quad (1.56)$$

Оставшийся в (1.55) объемный интеграл от дивергенции можно преобразовать в поверхностный, и  $\delta W_{12}$  будет состоять теперь только из величин, определенных на  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . При этом мы всегда будем предполагать, что все переменные поля  $\psi$  на пространственной бесконечности исчезают настолько быстро, что в поверхностные интегралы вносят вклад только области  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , которые не удалены на бесконечность.

$$\delta W_{12} = F(\sigma_1) - F(\sigma_2),$$

$$F(\sigma) = \int d\sigma_j (L \delta x^j + \pi^{aj} \delta_0 \psi^a), \quad \pi^{aj} = \frac{\delta L}{\delta \psi_{,j}^a}. \quad (1.57)$$

Следовательно,  $\delta W$  соответствует унитарным преобразованиям на  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  с производящими операторами  $F$ . В дальнейшем мы ограничимся «жесткими» вариациями  $\sigma$ , т. е. бесконечно малыми вращениями и сдвигами<sup>\*)</sup>, полагая

$$\delta x^i = x'^i - x^i = e^i + e^{ik} x_k, \quad e^{ik} = -e^{ki}. \quad (1.58)$$

Как и в механике частиц полная вариация  $\delta \psi^{**}$  складывается из вариации собственно  $\psi$ , обозначаемой  $\delta_0 \psi$ , и вариации  $\psi$ , связанной с вариацией координат  $\delta x$ . Теперь надо учесть, что из-за бесконечно малых вращений  $e^{ik}$  в игру вступают

\*) Отражение времени образует исключение, так как оно не приводит к унитарному преобразованию. Оно отвечает возможности всюду изменить знак перед  $i$ , что оставит все наблюдаемые инвариантными. (Подробности смотри в книге J. M. Jauch, F. Rohrlich. *Theory of Photons and Electrons*. Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1955). Напротив, пространственные отражения можно, как это будет видно из дальнейшего, представить унитарными преобразованиями.

\*\*\*) Для дальнейшего следует заметить, что должно выполняться равенство  $\delta \psi_{,k} = \delta_k \delta \psi$ .

трансформационные свойства  $\psi^a$  относительно группы Лоренца. Если обозначить  $\psi$  в новой системе через  $\psi'$ , то

$$\psi'^a(x') - \psi^a(x) = \frac{1}{2} e^{ik} S_{ik}^{\alpha\beta} \psi^\beta(x); S_{ik}^{\alpha\beta} = -S_{ki}^{\alpha\beta}, \quad (1.59)$$

при этом

$S = 0$ , если  $\psi$  — скаляр,

$$S_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} (\gamma_i \gamma_k - \gamma_k \gamma_i)^{\alpha\beta}, \text{ если } \psi -$$

спинор<sup>\*)</sup>,

$$S_{ik}^{\alpha\beta} = (g_i^\alpha g_{k\beta} - g_k^\beta g_{i\alpha}), \text{ если } \psi -$$

вектор.

Таким образом (рис. 6),

$$\delta\psi^a = \delta_0\psi^a + \psi^a_{,k} \delta x^k - \frac{1}{2} e^{ik} S_{ik}^{\alpha\beta} \psi^\alpha = \delta_0\psi^a + \psi^a(x) - \psi'^a(x).$$

Подставляя это соотношение в (1.57), получим

$$F(\sigma) = \int d\sigma_j \left( \pi^{aj} \delta\psi^a + L \delta x^j - \pi^{aj} \psi^a_{,k} \delta x^k + \pi^{aj} \frac{e^{ik}}{2} S_{ik}^{\alpha\beta} \psi^\beta \right).$$

Мы можем преобразовать последний член в правой части, введя

$$f_{jik} = -f_{ijk} = \frac{1}{2} (\pi_j^\alpha S_{ik}^{\alpha\beta} \psi^\beta + \pi_k^\alpha S_{ij}^{\alpha\beta} \psi^\beta + \pi_i^\alpha S_{kj}^{\alpha\beta} \psi^\beta) \quad (1.60)$$

и используя (1.58) и (1.59):

$$\frac{1}{2} e^{ik} \pi_j^\alpha S_{ik}^{\alpha\beta} \psi^\beta = e^{ik} f_{jik} = -\partial^j (f_{jik} \delta x^k) + \delta x^k \partial^j f_{jik}.$$

Первый член не дает вклада в величину  $F$ , поскольку  $f_{jik} = -f_{ijk}$  и

$$\int d\sigma_j \partial_j f = \int d\sigma_i \partial_i f. \quad (0.6)$$

Таким образом, получаем окончательно для  $F$

$$F(\sigma) = \int d\sigma_j (\pi^{aj} \delta\psi^a - T^{jk} \delta x_k),$$

$$T^{jk} = \pi^{Bj} \psi^{\beta,k} - \partial_i f^{jik} - L g^{jk}. \quad (1.61)$$

Уравнения поля фиксируют лагранжиан только с точностью до произвольной дивергенции, поскольку уравнения Эйлера инвариантны относительно замены

$$L \rightarrow L + \partial_i h^i. \quad (1.62)$$

\*) См. (Д1.9)

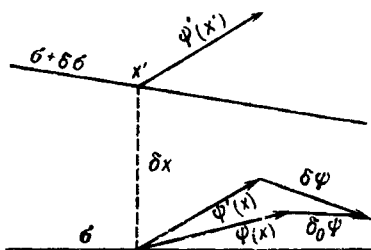


Рис. 6. Вариации и функции поля

Однако  $W_{12}$  не инвариантно относительно (1.62). Теперь мы покажем, что изменение  $W_{12}$  как раз выражает возможность изменения базиса собственных векторов на  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Здесь мы вновь можем ограничиться рассмотрением инфинитезимальных преобразований, и обозначим производящий оператор бесконечно малого преобразования базиса через  $H(\sigma)$ :

$$|\bar{\sigma}'\rangle = (1 - iH)|\sigma'\rangle.$$

Тогда для нового  $W_{12}$  будем иметь:

$$\langle \bar{\sigma}'(\sigma_1) | \bar{\sigma}''(\sigma_2) \rangle = \langle \sigma'(\sigma_1) | 1 - iH(\sigma_2) + iH(\sigma_1) | \sigma''(\sigma_2) \rangle,$$

что с учетом

$$H(\sigma) = \int d\sigma_j h^j$$

как раз равняется изменению величины  $W_{12}$  при замене (1.62)

$$\delta W_{12} = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} dx \partial_j h^j.$$

Если выбрать теперь  $h^j = -\delta(\pi^{\alpha j} \psi^\alpha)$ , то  $\delta W_{12}$  получит дополнительный член:

$$-\int d\sigma_j \delta(\pi^{\alpha j} \psi^\alpha),$$

приводящий для  $F$  ко второму эквивалентному представлению

$$F(\sigma) = -\int d\sigma_j (\psi^\alpha \delta \pi^{\alpha j} + T^{jk} \delta x_k). \quad (1.63)$$

Выражения (1.61) и (1.63) соответствуют хорошо известным соотношениям  $\delta W = p \delta q - H \delta t$  и  $\delta W = -q \delta p - H \delta t$  механики системы материальных точек. Величины, которые соответствуют  $q$  и  $p$  — это  $\psi^\alpha$  и компоненты  $\pi^\alpha(x)$  величин  $\pi^{\alpha j}$ , направленные вдоль нормали  $n_j$  к поверхности  $\sigma$  в точке  $x$ , т. е.  $\pi^\alpha(x) = n_j \pi^{\alpha j}(x)$ . Как и в случае механики материальных точек мы постулируем, что  $\int d\sigma_j \pi^{\alpha j} \delta \psi^\alpha$  является производящим оператором преобразования  $\psi \rightarrow \psi - \delta \psi$ ,  $\pi \rightarrow \pi$ , а  $-\int d\sigma_j \psi^\alpha \delta \pi^{\alpha j}$  — производящим оператором преобразования  $\pi \rightarrow \pi - \delta \pi$ ,  $\psi \rightarrow \psi$  ( $\delta \psi$  изображено на рис. 6). Возвращаясь к (1.48), получим отсюда ряд перестановочных соотношений для  $x$  и  $x'$ , лежащих на пространственноподобной поверхности  $\sigma$ , т. е. для  $(x - x')^2 < 0$ :

$$\begin{aligned} [\psi^\beta(x), \int d\sigma_j \pi^{\alpha j}(x') \delta \psi_\alpha(x')] &= i \delta \psi^\beta(x), \\ [\pi^\beta(x), \int d\sigma_j \pi^{\alpha j}(x') \delta \psi^\alpha(x')] &= 0, \\ [\psi^\beta(x), \int d\sigma_j \psi^\alpha(x') \delta \pi^{\alpha j}(x')] &= 0, \\ -[\pi^\beta(x), \int d\sigma_j \psi^\alpha(x') \delta \pi^{\alpha j}(x')] &= i \delta \pi^\beta(x). \end{aligned} \quad (1.64)$$

В классической механике  $\delta\psi$  и  $\delta\pi$  на пространственноподобной поверхности могут быть выбраны независимо<sup>\*)</sup>, и никакой проблемы коммутативности не возникает. В нашем случае, для того чтобы исключить  $\delta\psi$  и  $\delta\pi$  из (1.64), нужно знать их перестановочные соотношения с  $\psi$  и  $\pi$ . Здесь достаточно рассмотреть простейший случай, когда  $\delta\psi$  и  $\delta\pi$  с некоторыми оговорками обладают свойствами обычных чисел. Именно, можно показать, что последовательную зарядово-симметричную теорию можно построить, только потребовав, чтобы  $\delta\psi$  и  $\delta\pi$  коммутировали со всеми величинами, когда  $\psi^a$  — скаляр, вектор или тензор более высокого ранга, и антикоммутировали, когда  $\psi^a$  — спинор. Это разделение соответствует целому или полуцелому спину частиц, описываемых этими  $\psi$ -полями.

Пользуясь алгебраическим тождеством

$$[A, BC] = [A, B]_{\pm} C - B[C, A]_{\pm}$$

и тем, что  $\delta\psi$  и  $\delta\pi$  как функции  $x$  на поверхности  $\sigma$  — произвольны, мы получим из (1.64) как естественное обобщение перестановочных соотношений  $[q_j, p_k] = i\delta_{jk}$  для систем с дискретным числом степеней свободы на случай полей

$$\left. \begin{aligned} [\psi^a(x), \pi^b(x')]_{\pm} &= i\delta_{ab}^{\alpha} \delta(x - x') \\ [\psi^a(x), \psi^b(x')]_{\pm} &= [\pi^a(x), \pi^b(x')]_{\pm} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ для } (x - x')^2 < 0, \quad (1.65)$$

где в соответствии со сказанным выше при скобках стоит плюс или минус, судя по тому, имеем ли мы дело с частицами полуцелого или целого спина<sup>\*\*)</sup>.

Инвариантность интеграла действия относительно некоторых частных вариаций приводит к законам сохранения, так как  $\delta W_{12} = F(\sigma_1) - F(\sigma_2) = 0$  означает, что  $F$  в данном случае не зависит от  $\sigma$  и тем более от времени.

Рассмотрим сначала вариацию одних лишь координат  $x$ ; тогда (1.58) и (1.61) дадут:

$$-F(\sigma) = e^i P_i + \frac{1}{2} e^{ik} J_{ik},$$

где  $P^i = \int d\sigma_k T^{ki}$  и  $J^{ik} = \int d\sigma_m M^{mik}$ , причем

$$M^{mik} = -M^{mki} = T^{mi} x^k - T^{mk} x^i. \quad (1.66)$$

<sup>\*)</sup> Иногда это не так, и в этом случае надо быть осторожным при применении (1.64).

<sup>\*\*)</sup> Знаки в (1.65) справедливы только в том случае, когда порядок множителей действительно таков, как это выписано в (1.64). В дальнейшем при рассмотрении примеров мы всегда будем выбирать порядок множителей в  $L$  так, чтобы удовлетворить этому требованию.

Если  $L$  не зависит явно от  $x$ , то «жесткие» трансляции и вращения на  $\sigma$  сводятся лишь к переобозначению переменных интегрирования, оставляя поэтому  $W_{12}$  инвариантным. Отсюда следует, что

$$P(\sigma_1) = P(\sigma_2), \quad J(\sigma_1) = J(\sigma_2). \quad (1.67)$$

Выражение  $P^i e_i$  является аналогом  $H\delta t$  в механике материальных точек, поэтому  $P^i$  — это четырехмерное обобщение энергии, т. е. вектор энергии-импульса<sup>\*)</sup>. Аналогично  $T^{ik}$  — это тензор энергии-импульса, а  $J^{ik}$  и  $M^{mik}$  должны приниматься соответственно за полный момент и тензор момента. Три пространственные компоненты  $J^{ik}$  являются компонентами момента, а три временные компоненты описывают движение центра инерции. Поскольку  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  произвольны, то, используя (0.5), можно записать (1.67) и в дифференциальной форме

$$\partial_k T^{ki} = 0, \quad \partial_m M^{mik} = 0. \quad (1.68)$$

Из (1.66) и (1.68) следует, между прочим, что  $T^{ik}$  — симметричный тензор:  $T^{ik} = T^{ki}$ . Уравнение же (1.68) можно было бы получить и непосредственно из (1.56).

Законы сохранения энергии, импульса и момента, а также теорема о центре инерции следуют только из того, что  $L$  не зависит от  $x$ . Другими словами, они основаны лишь на однородности и изотропности четырехмерного пространства—времени. Поэтому они представляют собой самые общие законы нашей теории.

Частицы с внутренними степенями свободы описываются полями с несколькими компонентами. Например, для частицы со спином, различные компоненты соответствуют различным спиновым состояниям. В этом случае преобразование Лоренца индуцирует линейное преобразование этих компонент. Однако существуют внутренние степени свободы, не связанные с какими бы то ни было пространственно-временными свойствами, когда преобразование Лоренца не перемешивает компонент поля, соответствующих различным состояниям, которые представляют такую степень свободы. Оказывается, что к величинам такого рода относится электрический заряд и что закон его сохранения следует из инвариантных свойств лагранжиана по отношению к преобразованию, отличному от лоренцевых. Для описания заряженных частиц необходимо удвоить число компонент поля, за счет чего лагранжиан  $L$  может оказаться инвариантным относительно линейных преобразований этих компонент.

<sup>\*)</sup> Независимость  $L$  от  $\sigma$  позволяет считать  $P$  вектором и производить интегрирование по произвольной пространственноподобной поверхности.

Вообще говоря, инвариантность лагранжиана относительно непрерывной группы преобразований компонент поля  $\psi_\alpha \rightarrow t_{\alpha\beta} \psi_\beta$  влечет за собой существование интеграла движения. Такая величина будет скаляром, в отличие от десяти интегралов движения, существование которых обусловлено релятивистской инвариантностью. Величина  $F$ , соответствующая инфинитезимальному преобразованию ( $e^2 \rightarrow 0$ ),

$$T = 1 - iet, \quad \delta\psi_\alpha = iet_{\alpha\beta} \psi_\beta,$$

определяется следующим образом

$$F(\sigma) = \int d\sigma_k j^k(x), \quad j^k(x) = ie\pi^{\alpha\beta}(x) t^{\alpha\beta} \psi^\beta(x). \quad (1.69)$$

Требование инвариантности  $L$  приводит к тому, что

$$F(\sigma_1) = F(\sigma_2), \quad \text{или} \quad \partial_k j^k(x) = 0.$$

Соответственно,  $F$ , индуцированное преобразованием, связанным с зарядом, будет интерпретироваться как полный заряд  $Q^*$ , а  $j_k(x)$  — как плотность тока. В следующем параграфе будет показано, что собственные значения  $Q$  есть целые кратные собственным значениям  $et$ . Поэтому частицы с зарядом  $0, \pm e$  можно охарактеризовать простейшими представлениями одно- и двухмерных групп вращений:  $t=0$  и  $t = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ , соответственно. Во втором случае удобно объединить две компоненты  $\psi_1$  и  $\psi_2$  в одно комплексное поле.

$$\psi = (\psi_1 + i\psi_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \psi^\dagger = (\psi_1 - i\psi_2) \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда описанная выше инвариантность будет гарантирована, если лагранжиан  $L$  зависит только от эрмитовой комбинации

$\psi\psi^\dagger = \psi_1^2 + \psi_2^2$ . В этих обозначениях действие  $T$  сведется к инфинитезимальному калибровочному преобразованию  $T\psi = e^{ie}\psi$ ,  $T\psi^\dagger = e^{-ie}\psi^\dagger$ .

Величины, инвариантные относительно этого преобразования, будут коммутировать с оператором  $Q$ . Кроме того, описанный выше лагранжиан  $L$  остается инвариантным\*\* при замене знака  $\psi_2$ , что соответствует отражению в нашем дву-

\*) Интересно отметить, что  $P, J$  и  $j$  инвариантны, а  $T$  и  $M$  не инвариантны относительно (1.62), что ставит под вопрос смысл локализации энергии и момента в нашей теории.

\*\*) Как мы увидим в § 5, зарядовое сопряжение для спинорных полей несколько сложнее. В теориях с несколькими видами заряженных частиц можно построить величины типа  $\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1$ , инвариантные относительно вращений, но не относительно отражений. Если  $L$  содержит члены такой структуры, то  $U_c$  может и не существовать, хотя заряд сохраняется.



мерном пространстве, и антикоммутирует вращением  $t$ . Поэтому эта операция изменяет знак  $Q$  и называется зарядовым сопряжением. Ей можно поставить в соответствие унитарное преобразование, которое переводит все состояние в идентичные состояния, все знаки заряда в которых, однако, заменены на противоположные. Состояния, которые не зависят от знака заряда, должны быть инвариантными при этом преобразовании; они должны быть собственными состояниями оператора  $Q$  с нулевым собственным значением.

В соответствии с общим правилом (1.54)  $P$ ,  $J$  и  $Q$  являются производящими операторами бесконечно малых смещений, вращений и калибровочного преобразования. Отражением этого являются перестановочные соотношения \*)

$$\begin{aligned} [\psi^\alpha(x), P_k] &= i\partial_k \psi^\alpha(x), \\ [\psi^\alpha(x), J_{jk}] &= i(x_k \partial_j - x_j \partial_k) \psi^\alpha(x) + iS_{kj}^{\alpha\beta} \psi^\beta(x), \\ [\psi^\beta(x), Q] &= c\psi^\beta, \end{aligned} \quad (1.70)$$

где  $c$  принимает значения 0 или  $\pm 1$  и использовано представление, в котором  $t$  диагонально. Непосредственной проверкой можно убедиться, что эти перестановочные соотношения являются естественным следствием перестановочных соотношений (1.64), так как все величины в (1.70) являются функциями  $\psi^\beta$  и  $\pi^{ak}$ .

Как производящий оператор бесконечно малого калибровочного преобразования  $Q$  коммутирует со всеми эрмитовыми величинами. Следовательно,

$$[Q, P^i] = [Q, J^{ik}] = 0.$$

С другой стороны, это означает, что  $Q$  инвариантно относительно вращения и сдвигов, что касается  $P$ , то он инвариантен относительно сдвигов

$$[P_i, P_k] = 0, \quad (1.71)$$

а относительно вращений преобразуется как вектор

$$\frac{1}{2} e_{mn} [P^k, J^{mn}] = i e^{kl} P_l \quad (1.72)$$

Учитывая свойство антисимметрии  $J$ , получаем:

$$[P^k, J^{mn}] = i(g^{km} P^n - g^{kn} P^m). \quad (1.73)$$

С другой стороны, (1.73) дает изменение  $J$  при сдвиге, происходящее из-за явной зависимости  $J$  от координат (см (1.66)).

\*)  $Q$  — производящий оператор преобразования  $\psi \rightarrow \psi - \delta\psi = \psi - iec\psi$ .

Аналогично, тензорный характер  $J$  проявляется в перестановочных соотношениях

$$[J^{jl}, J^{kl}] = i(g^{ki} J^{lj} + g^{il} J^{jk} + g^{jk} J^{li} + g^{lj} J^{ki}). \quad (1.74)$$

Если индексы в (1.72) и (1.73) положить равными 1, 2 и 3, то получаются обычные перестановочные соотношения для импульса и момента. Однако индексы, входящие в выражения типа  $J_{oi}$ , нуждаются в дальнейшем обсуждении. Так, в нерелятивистском случае  $J_{oi}$  может быть записано в виде

$x_i(t) - P_i t$ , где  $x_i(t) = \int d^3V T_{00}(x) x_i$  — центр тяжести. По-

следний так же, как и центр заряда  $\int d\sigma_\mu j^\mu x_i$ , зависит от точек пространственноподобной поверхности  $\sigma$  и поэтому не обладает такими простыми трансформационными свойствами, как, скажем,  $J_{oi}$ . Из предыдущего следует, что

$$[x_k, P_j] = i \delta_{kj} E, \quad [x_k, E] = iP_k.$$

Эти выражения представляют собой перестановочные соотношения между координатами и импульсами в теории поля. Однако трансформационные свойства скрыты здесь нековариантной формой записи. Кроме того, заметим, что различные компоненты  $x$  перестают коммутировать друг с другом, причем их коммутатор выражается через компоненты момента.

Величины  $F$  в (1.66) образуют представление неоднородной группы Лоренца. Поэтому перестановочные соотношения (1.71), (1.73) и (1.74) определяются перестановочными соотношениями соответствующих элементов группы Лоренца. Если последовательно произвести два инфинитезимальных координатных преобразования группы

$$\delta x_i^{(\alpha)} = e_j^{(\alpha)} + e_{jk}^{(\alpha)} x^k, \quad (1.75)$$

то мы получим преобразование из той же группы. Группе будут принадлежать и преобразования:

$$\begin{aligned} (\delta^{(1)} \delta^{(2)} - \delta^{(2)} \delta^{(1)}) x_i &= e_{ij}^{(2)} e^{(1)j} - e_{ij}^{(1)} e^{(2)j} + \\ + (e_{ij}^{(2)} e^{(1)jk} - e_{ij}^{(1)} e^{(2)jk}) x_k &= e_i^{(12)} + e_{ik}^{(12)} x^k \end{aligned} \quad (1.76)$$

Производящие операторы преобразований (1.75)

$$-F^{(\alpha)} = e_i^{(\alpha)} P^i + \frac{1}{2} e_{ik}^{(\alpha)} J^{ik},$$

так что (1.76) отвечает унитарному преобразованию

$$[1 + iF^{(1)}, 1 + iF^{(2)}] = -[F^{(1)}, F^{(2)}] = iF^{(12)}.$$

Легко убедиться, что перестановочные соотношения (1.71) — (1.74) действительно следуют из выражения

$$-F^{(12)} = e_i^{(12)} P^i + \frac{1}{2} e_{ik}^{(12)} J^{ik}.$$

Резюмируя содержание этого параграфа, можно сказать, что математический формализм квантовой теории поля диктуется принципами квантовой теории и кинематической структурой, которая вытекает из наших понятий о псевдоевклидовом четырехмерном пространстве — времени.

---

СВОБОДНЫЕ ПОЛЯ

## § 4. Общая дискуссия

Развив в предыдущей главе общий математический аппарат, изучим теперь некоторые проблемы, связанные с физической интерпретацией теории. Выясним, действительно ли процедура квантования, избранная выше, вводит в теорию квантовые характеристики, и если это так, то каким образом эти характеристики выражаются в рамках рассмотренного математического аппарата. В качестве первого шага мы определим, что представляют собой собственные векторы оператора  $P$ . В этой главе мы ограничимся рассмотрением лишь тех случаев, когда поля входят в лагранжиан квадратично и, следовательно, удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям (как мы увидим ниже, такие поля соответствуют невзаимодействующим частицам). В силу этих уравнений фурье-образ  $b(k)$  поля  $\psi$  будет отличен от нуля только тогда, когда  $k^2 = m^2$ , где  $m$  — масса рассматриваемых частиц. Иначе говоря, вектор  $k$  должен лежать внутри или на поверхности светового конуса, ибо он удовлетворяет уравнению вектора энергии-импульса свободной частицы.

Как изменится положение вещей, когда частицы взаимодействуют и, следовательно, описываются системами связанных дифференциальных уравнений, мы исследуем в следующих параграфах. Однако мы вообще будем рассматривать только системы, с положительно определенным оператором энергии, для которых, следовательно, собственные значения энергии ограничены снизу. Состояние, относящееся к наименьшей энергии, мы назовем вакуумом, поскольку естественно допустить, что состояние с наименьшей энергией и состояние без частиц совпадают. Чтобы вакуум оказался бы инвариантным состоянием, т. е. воспринимался бы как вакуум любым наблюдателем, нужно потребовать, чтобы в этом состоянии равнялись нулю все компоненты вектора энергии-импульса. Математически это выражается формулой

$$P_k |0\rangle = 0, \quad (2.1)$$

и лагранжиан системы должен выбираться так, чтобы это условие было выполнено. Чтобы использовать свойство (2.1),

разложим  $\psi$  по плоским волнам — собственным функциям оператора сдвига  $\partial_k$ .

Наше основное перестановочное соотношение (1.70)  $[P_j, \psi^\alpha] = -i\partial_j \psi^\alpha$  превращается благодаря тому, что

$$\psi^\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{-ikx} b^\alpha(k),$$

в

$$P_j b^\alpha(k) - b^\alpha(k) P_j = -k_j b^\alpha(k). \quad (2.2)$$

Если умножить (2.2) на  $|0\rangle$ , то мы получим, что  $P_j b^\alpha(k)|0\rangle = -k_j b^\alpha(k)|0\rangle$ . Это значит, что  $b^\alpha(k)|0\rangle$  — опять собственный (правда, не нормированный) вектор оператора  $P$ , принадлежащий собственному значению  $-k$ . Однако так как оператор  $P^0$  положительно определен и не может иметь отрицательных собственных значений, то для  $k_0 > 0$  должно выполняться  $b^\alpha(k)|0\rangle = 0$ . Если разбить  $b$  на положительно и отрицательно частотные части, т. е. положить  $b = b^- + b^+$ , где  $b^+(k) = 0$  при  $k_0 < 0$  и  $b^-(k) = 0$  при  $k_0 > 0$ , то для вакуума будет  $\psi^+|0\rangle = 0$ . Это разбиение на положительно и отрицательно частотные части является релятивистски инвариантной операцией только в том случае, когда вектор  $k$  находится на световом конусе или внутри него. Поэтому наше рассмотрение справедливо только для операторов  $\psi$ , удовлетворяющих линейным уравнениям, упомянутым выше, но не для произведений  $\psi$  или для операторов, удовлетворяющих нелинейным уравнениям.

По индукции\* из (2.2) легко установить, что  $|nk\rangle = [b^-(k)]^n |0\rangle$  — собственный вектор оператора  $P$ , принадлежащий собственному значению  $-nk$  ( $n$  — положительное целое число). Если умножить (2.2) для  $k_0 < 0$  на  $|nk\rangle$ , то получится, что

$$P_j b^-(-k)|nk\rangle = (n+1)k_j b^-(-k)|nk\rangle.$$

В общем случае, состояние\*\*

$$\begin{aligned} & |n_1 k_1, n_2 k_2 \dots n_i k_i\rangle = \\ & = [b^-(-k_1)]^{n_1} [b^-(-k_2)]^{n_2} \dots [b^-(-k_i)]^{n_i} |0\rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} & P_j |n_1 k_1, n_2 k_2 \dots n_i k_i\rangle = \\ & = (n_1 k_1^j + n_2 k_2^j + \dots + n_i k_i^j) |n_1 k_1 \dots n_i k_i\rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

\* Этот метод аналогичен методу, изложенному у Дирака, § 34.

\*\* Заметим без доказательства, что таким образом получается полная система собственных состояний оператора  $P$ , т. е. любой собственный вектор можно записать в таком виде.

Учитывая, что  $k$  — не произвольные векторы, а что  $b(k)$  отлично от нуля только для  $k^2 = m^2$ , получим следующую фундаментальную теорему:

*Любая сумма целочисленных кратных векторов, удовлетворяющих  $k^2 = m^2$ , будет собственным значением вектора энергии-импульса.*

Но собственное значение  $p^j = n_1 k_1^j + n_2 k_2^j + \dots + n_i k_i^j$  как раз равно вектору энергии-импульса системы, содержащей  $n_1$  свободных частиц с векторами энергии-импульса  $k_1$ ,  $n_2$  частиц с векторами  $k_2$  и т. д. Поскольку наша первая фундаментальная аксиома утверждает, что собственные значения являются единственно возможными результатами измерения, то квантовая природа поля выразится следующим образом:

*Любое измерение вектора энергии-импульса может дать только величину, равную сумме векторов энергии-импульса целого числа свободных частиц, обладающих одинаковой массой.* Состояние, соответствующее такому собственному значению, естественно интерпретировать как состояние, в котором имеется  $n_1$  частиц с вектором энергии-импульса  $k_1$ ,  $n_2$  частиц — с вектором энергии-импульса  $k_2$  и т. д. Здесь и в последующих параграфах мы увидим, как в таком состоянии отражены другие свойства частиц, такие как квантованные значения заряда и момента. Так как  $P_j$  и, следовательно, его собственные состояния являются интегралами движения, то векторы энергии-импульса не меняются со временем. Это означает, что развивавшаяся до сих пор теория не описывает никаких процессов, в которых изменяется движение частиц. В частности, мы скоро увидим, что вероятность найти частицы в некоторый момент в заданном положении не зависит от присутствия других частиц, кроме как через принцип Паули. Более интересный случай нелинейных систем, для которых это уже не справедливо и частицы могут взаимодействовать, будет изучаться в главе IV.

Соотношение между энергией и частотой или между импульсом и волновым числом зависит формально только от свойств вектора энергии-импульса как оператора смещения и является одним из существеннейших соотношений квантовой теории, совершенно чуждым классической физике. Оно появляется в виде планкова  $E = h\nu$  в самом начале квантовой теории и составляет содержание эйнштейновой гипотезы световых квантов и соотношения де Бройля.

Так же, как энергия и импульс, квантовой структурой обладает и момент, поскольку для него справедливы аналогичные перестановочные соотношения

$$-[\psi^\alpha(x), J_{mn}] = i(x_m \partial_n - x_n \partial_m) \psi^\alpha(x) + i S_{mn}^{\alpha\beta} \psi^\beta(x). \quad (2.5)$$

Полный момент можно разбить на спиновую и орбитальную части

$$J = J^{\text{orb}} + J^{\text{spin}},$$

где

$$T_{ik}^{\text{orb}} = \pi_i^\beta \psi_k^\beta - g_{ik} L \text{ и } T_{ik}^{\text{spin}} = \partial^j f_{jik}.$$

Как можно убедиться простым вычислением и как это видно из предыдущего параграфа,  $J^{\text{orb}}$  производит пространственно-временной поворот, в то время как  $J^{\text{spin}}$  обеспечивает преобразование компонент поля соответственно их трансформационным свойствам относительно группы Лоренца:

$$\begin{aligned} -[\psi^\alpha(x), J_{mn}^{\text{orb}}] &= i(x_m \partial_n - x_n \partial_m) \psi^\alpha(x), \\ -[\psi^\alpha(x), J_{mn}^{\text{spin}}] &= i S_{mn}^{\alpha\beta} \psi^\beta(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Чтобы определить собственные значения оператора  $J^{\text{orb}}$ , разложим  $\psi$  по собственным функциям  $Y_l^m$  операторов поворота  $i(x_m \partial_n - x_n \partial_m)$ , т. е. напомним  $\psi(x) = \sum_{l,m} b_l^m Y_l^m(x)$ . ( $Y_l^m$  — обычная сферическая гармоника, соответствующая собственным значениям  $l, m$ .) Три пространственные компоненты оператора поворота имеют, как известно, в качестве собственных значений целые числа. Если рассмотреть перестановочное соотношение одной из таких компонент, например  $J_{12}$  с  $\psi^\alpha$ , разложив предварительно  $\psi^\alpha$  по  $Y_l^m$ , умножить его на  $Y_l^m$  и проинтегрировать по всему пространству, то из-за ортогональности  $Y_l^m$  мы получим

$$b_l^m J_{12}^{\text{orb}} - J_{12}^{\text{orb}} b_l^m = m b_l^m.$$

Отсюда следует, что собственными значениями  $J_{12}^{\text{orb}}$  будут целые кратные  $m$ , т. е. целые числа, и что  $b_l^m |0\rangle$  — это собственное состояние оператора  $J_{12}^{\text{orb}}$  с собственным значением  $m$ .

Для скалярного поля  $J^{\text{spin}} = 0$ . Однако для векторного поля  $A_i(x)$  выражение для  $S_{mn}^{\alpha\beta}$ , которое вытекает из (1.59), приводит к следующим перестановочным соотношениям для спиновой части  $J$

$$[J_{12}^{\text{spin}}, A_1] = -i A_2, [J_{12}^{\text{spin}}, A_2] = i A_1, \quad (2.7)$$

или, если перейти от линейных к круговым компонентам,

$$A_1 + i A_2 = A_+, \quad A_1 - i A_2 = A_-,$$

$$[J_{12}^{\text{spin}}, A_+] = -A_-, [J_{12}^{\text{spin}}, A_-] = A_+. \quad (2.8)$$

Из этих уравнений опять можно заключить, что собственные значения  $J_{12}^{\text{spin}}$  для состояний векторного поля, со-

державших кванты, порожденные  $A_l$  и  $A_r$ , будут целыми. Умножение собственного вектора  $z$  — компоненты спина  $J_{12}^{spin}$  на  $A_r$  или  $A_l$  приводит к новому собственному вектору, собственное значение которого соответственно оказывается больше или меньше на единицу. Поскольку  $A^-$  увеличивает, а  $A^+$  уменьшает энергию и число квантов, то можно сказать:

- $A_r^-$  порождает квант с правой круговой поляризацией,
- $A_r^+$  уничтожает квант с левой круговой поляризацией,
- $A_l^-$  порождает квант с левой круговой поляризацией,
- $A_l^+$  уничтожает квант с правой круговой поляризацией.

Для спинорного поля из (1.59) имеем  $-\left[J_{mn}^{spin}, \psi^\alpha\right] = \frac{1}{2} \sigma_{mn}^{\alpha\beta} \psi^\beta$ . Отсюда следует, что соответствующие частицы обладают спином  $1/2$ , так как  $\sigma_{mn}$  имеет собственные значения  $\pm 1$  ( $\sigma^2 = 1$ ). Таким образом, мы пришли к следующему результату:

*Полный момент имеет целые или полуцелые собственные значения.*

Этот результат вытекает только из перестановочных соотношений (1.74) и потому является следствием структуры группы вращений \*).

Последнее из перестановочных соотношений (1.70)

$$\begin{aligned} [\psi^\alpha(x), Q] &= e\psi^\alpha(x), \\ [\psi^{\dot{\alpha}}(x), Q] &= -e\psi^{\dot{\alpha}}(x) \end{aligned}$$

для произвольного комплексного поля указывает нам, что полный заряд является целочисленным, кратным  $e$ . (Требование инвариантности вакуума при зарядовом сопряжении приводит к  $Q|0\rangle = 0$ ). Поскольку этот вывод приложим для произвольно малых объемов, то кванты заряда невозможно расщепить на части. Действительно, перестановочные соотношения (1.70) остаются в силе и для

$$\Delta Q = \int_{\Delta\sigma} d\sigma'_k j^k(x'), \quad (2.9)$$

если только область  $\Delta\sigma$  содержит точку  $x$ : ведь  $\psi(x)$  коммутирует (или антикоммутирует) с  $\psi(x')$ , если  $x$  и  $x'$  разделены пространственноподобным интервалом, так что для коммутатора (1.70) существенен только вклад в  $Q$  от точки  $x$ , а всеми остальными можно пренебречь. Кроме того, это означает, что кванты поля обладают свойствами точечных частиц без распределения заряда конечной протяженности.

\*) См. Дирак, стр. 144.



Так как  $\psi(\psi^\dagger)$  уменьшает (увеличивает)  $\Delta Q$ , для любой  $\Delta\sigma$ , содержащей  $x$ , можно сказать, что  $\bar{\psi}(x)$  рождает точечную частицу в точке  $x$  пространства — времени. Однако мы увидим, что порождение виртуальных пар препятствует проявлению точечной природы частиц, и во многих процессах они будут вести себя так, как если бы их заряд был распределен по области порядка  $1/m$ .

Собственные значения энергии конечного объема будут только целыми кратными волнового числа, если куб соответствующей длины волны существенно меньше этого объема. Хотя (1.70) и справедливо для энергии  $\Delta P$  произвольного объема, включающего точку  $x$ , к формуле (2.2), можно прийти только, если  $1/k^3$  много меньше объема. Оператор спина всегда имеет либо целые, либо полуцелые собственные значения независимо от того, сколь мал объем. Представляет интерес вопрос, можно ли получить релятивистское описание протяженных частиц. На первый взгляд казалось бы естественным связать для этого с полем ток

$$J_\mu(x) = \int dx' F(x, x') j_\mu(x'),$$

где  $F$  — инвариантный форм-фактор. Однако, хотя  $Q = \int d\tau_\mu J(x)$  и инвариантен для некоторых видов форм-факторов  $F$ , он не зависит только от конечного числа производных поля на поверхности  $\sigma$ . Это приводит к серьезнейшим трудностям, если хотят использовать  $J$  как источник электромагнитного поля. Поэтому мы ограничимся точечной моделью.

Так как  $b(k)$  в (2.2), или, в общем случае, любой коэффициент разложения  $\psi$  по произвольной системе собственных функций имеет те же самые перестановочные соотношения с  $Q$ , что и само  $\psi$ , то  $\psi(x)$  и  $b(k)$  уменьшают заряд на  $e$ , в то время, как сопряженные функции  $\bar{\psi}(x)$  и  $\bar{b}(k)$  увеличивают заряд на  $e$ . Если назвать частицы с зарядом  $e$  электронами, а частицы с зарядом  $-e$  — позитронами, то выписанные ниже операторы имеют следующий смысл:

$\psi^-(x)[b^-(k)]$  порождает позитрон в точке  $x$  (с импульсом  $k$ ),  
 $\psi^+(x)[b^+(k)]$  уничтожает электрон в точке  $x$  (с импульсом  $k$ ),  
 $\bar{\psi}^-(x)[\bar{b}^-(k)]$  порождает электрон в точке  $x$  (с импульсом  $k$ ),  
 $\bar{\psi}^+(x)[\bar{b}^+(k)]$  уничтожает позитрон в точке  $x$  (с импульсом  $k$ ).

Понятие частицы в пространственно-временной точке требует еще некоторого уточнения, как то будет показано в § 6.

Итак, формальная процедура квантования действительно воспроизводит квантовые свойства импульса, момента и заряда, с которыми мы сталкиваемся в природе.

## § 5. Частные случаи полей

В этом параграфе мы хотим проиллюстрировать развитый выше формализм на некоторых частных примерах. Мы ограничимся опять рассмотрением полей, которые удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям не выше второго порядка. Поля, подчиняющиеся уравнениям более высокого порядка, не обладают положительно определенной энергией и, тем самым у них нет состояния с наименьшей энергией. Такие поля не будут рассматриваться в этой книге.

Формально простейшим является скалярное или псевдоскалярное\*) поле, которому соответствует эрмитов оператор  $\Phi(x)$ . В этом случае лагранжиан должен иметь вид:

$$L(x) = \frac{1}{2} : \partial_k \Phi(x) \partial^k \Phi(x) : - m^2 : \Phi(x) \Phi(x) :, \quad (2.10)$$

где  $m$  — число с размерностью обратной длины\*\*). Чтобы вакуумное среднее  $L$ , а тем самым также  $T$  и  $J$  равнялось нулю,

$$\langle 0 | L | 0 \rangle = 0, \quad (2.11)$$

как то должно быть из соображений инвариантности, выберем порядок\*\*\*) множителей в  $L$  так, чтобы положительно частотные части полей  $\Phi^+$  всегда стояли справа от отрицательно частотных  $\Phi^-$ . Для этого введем обозначение:  $\dots :$ , означающее:

$$\begin{aligned} & : \Phi(x) \Phi(x') : = \Phi^+(x) \Phi^+(x') + \\ & + \Phi^-(x) \Phi^+(x') + \Phi^-(x') \Phi^+(x) + \Phi^-(x) \Phi^-(x'). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из эрмитовости  $\Phi$  следует, что  $(\Phi^-)^\dagger = \Phi^+$  и поэтому эрмитово сопряжение определения вакуума  $\Phi^\dagger | 0 \rangle = 0$  дает  $\langle 0 | \Phi^- = 0$ . Тем самым обеспечивается, что всегда  $\langle 0 | \dots : | 0 \rangle = 0$ . Кроме того, оператор  $\dots :$  не нарушает

\*) Псевдотензор обладает теми же трансформационными свойствами, что и тензор, за исключением того, что он испытывает дополнительное изменение знака при отражении.

\*\*) В силу вариационного принципа (1.54),  $L(x)$  имеет размерность  $L^{-4}$ , так что  $\Phi$  должно иметь размерность  $L^{-1}$ .

\*\*\*)  $[\Phi^+(x), \Phi^-(x)]$  — обычное число, так что такое переупорядочение  $L$  и соответственно наблюдаемых переопределяет их только на аддитивную постоянную.

эрмитовости лагранжиана  $L$  и подобных ему величин. Уравнение Эйлера (1.56) записывается в данном случае в виде

$$(\square^2 + m^2)\Phi(x) = 0. \quad (2.13)$$

Величина, канонически сопряженная  $\Phi$ , равна

$$\pi^k = \partial^k \Phi, \quad (2.14)$$

а

$$T^{mn} = : \partial^m \Phi \partial^n \Phi : - \frac{g^{mn}}{2} : (\partial^k \Phi \partial_k \Phi - m^2 \Phi \Phi) :. \quad (2.15)$$

Как мы и хотели, плотность энергии будет положительно определенной

$$T_{00} = \frac{1}{2} : (\partial_0 \Phi \partial_0 \Phi + \partial_1 \Phi \partial_1 \Phi + \partial_2 \Phi \partial_2 \Phi + \partial_3 \Phi \partial_3 \Phi + m^2 \Phi \Phi) :. \quad (2.16)$$

Далее, канонические перестановочные соотношения (1.65) запишутся здесь в виде

$$\left. \begin{aligned} [\Phi(x), \Phi(x')] &= 0, \\ \int_{x' \in \sigma'} [\Phi(x), \partial'^k \Phi(x')] f(x') &= if(x), \end{aligned} \right\} \text{если } (x - x')^2 < 0, \quad (2.17)$$

где  $f$  — произвольная функция. Для линейных уравнений можно получить в явном виде коммутаторы полей  $\Phi$  не только для пространственноподобных, но и для произвольных точек. Благодаря уравнениям поля, оператор  $\Phi$  оказывается определенным во всем пространстве-времени, если он задан на некоторой пространственноподобной поверхности вместе с его производной в направлении нормали к этой поверхности. Такое построение  $\Phi$  во всем пространстве-времени осуществляется с помощью  $\Delta$ -функции (см. Д2.12) в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int d\sigma'' (\Delta(x - x'') \partial''^j \Phi(x'') - \\ &\quad - \Phi(x'') \partial''^j \Delta(x - x'')). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Поэтому можно выразить  $\Phi(x)$  в коммутаторе  $[\Phi(x), \Phi(x')]$  через  $\Phi$  и ее нормальную производную на некоторой пространственноподобной поверхности, проходящей через  $x'$ ,

и использовать затем уже установленные перестановочные соотношения (1.65)\*).

$$[\Phi(x), \Phi(x')] = \int_{x' \subset x} d\tau_j [\Delta(x - x'') \partial^{j'} \Phi(x'') - \Phi(x'') \partial^{j'} \Delta(x - x''), \Phi(x')] = -i\Delta(x - x'). \quad (2.19)$$

Для положительно- и отрицательно-частотных частей это дает

$$[\Phi^+(x), \Phi^-(x')] = -i\Delta^+(x - x'), \quad (2.20)$$

$$[\Phi^+(x), \Phi^+(x')] = [\Phi^-(x), \Phi^-(x')] = 0.$$

Такие соотношения предвосхищены в рассуждениях, приведенных в предыдущем параграфе, а потому кванты поля ведут себя подобно свободным частицам.

Если лагранжиан является суммой лагранжианов двух эрмитовых скалярных полей  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  с одинаковой массой, то появляется новое свойство инвариантности. Поскольку лагранжиан  $L$  квадратичен по  $\Phi$ , то он зависит только от

$$\Phi_1^2 + \Phi_2^2 \text{ и } \sum_{i=1}^2 \Phi_{i,\mu} \Phi_i^\mu. \text{ Если рассматривать теперь } \Phi_1 \text{ и } \Phi_2$$

как компоненты вектора в двумерном пространстве, то  $L$  будет инвариантен относительно вращений в этом пространстве. Вводя неэрмитовы линейные комбинации

$$\Phi = (\Phi_1 + i\Phi_2) / \sqrt{2} \text{ и } \Phi^\dagger = (\Phi_1 - i\Phi_2) / \sqrt{2},$$

соответствующие собственным векторам инфинитезимальных вращений, можно записать  $L$  в виде  $L = : \Phi_{,\mu} \Phi^{\mu\dagger} - m^2 \Phi \Phi^\dagger :.$  В этом представлении  $L$  инвариантно относительно калибровочного преобразования  $\Phi \rightarrow \Phi e^{ie}$ . Перестановочные соотношения принимают теперь вид:

$$[\Phi(x), \Phi^\dagger(x')] = -i\Delta(x - x'),$$

$$[\Phi(x), \Phi(x')] = [\Phi^\dagger(x), \Phi^\dagger(x')] = 0, \quad (2.21)$$

а для тока мы найдем

$$\begin{aligned} j_\mu &= e : (\Phi_{1,\mu} \Phi_2 - \Phi_{2,\mu} \Phi_1) : = \\ &= ie : (\Phi_{,\mu} \Phi^\dagger - \Phi \Phi_{,\mu}^\dagger). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Как уже было показано в § 3, лагранжиан  $L$  и перестановочные соотношения инвариантны относительно операции зарядового сопряжения  $U_c$

$$U_c \Phi U_c^{-1} = \Phi^\dagger.$$

\*) Легко убедиться, что для совместности (2.17) и (2.19) необходимо, чтобы  $\Delta(x)$  было инвариантным, нечетным и вещественным решением (2.13) со свойством (Д2.9).

Кроме того,  $T_{ik}$  инвариантно относительно  $U_c$ , в то время как  $j$ , как и следовало ожидать, меняет знак. Из рассуждения, приведенного в предыдущем параграфе, следует, что  $U_c$  преобразует оператор рождения положительно заряженной частицы в оператор рождения отрицательно заряженной частицы. Аналогичное утверждение имеет место для операторов уничтожения. Если фиксировать произвольный фазовый множитель в  $U_c$  условием  $U_c|0\rangle = |0\rangle$ , то окажется, что  $U_c$  в любом состоянии просто меняет положительно заряженные частицы на отрицательно заряженные и наоборот. Это свойство  $U_c$ , отмеченное в § 3, используется для его явного построения. Вообще инвариантность  $L$  и перестановочных соотношений относительно какого-либо преобразования подразумевает существование соответствующей унитарной матрицы. В этом случае можно даже явно увидеть, какие состояния превращаются друг в друга под действием этих преобразований.

Возможность разделить  $\Phi$  на  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$ , каждое из которых удовлетворяет уравнению (2.13), позволяет нам определить векторную плотность с равной нулю дивергенцией даже для одного эрмитова поля

$$d_\mu = i(\Phi^- \Phi_\mu^+ - \Phi_\mu^- \Phi^+); \quad d_\mu^\mu = 0, \quad (2.23)$$

и тем самым интеграл движения

$$N = \int d\sigma_\mu d^\mu \quad (2.24)$$

со свойствами (задача 16)

$$N|0\rangle = 0; \quad [N, \Phi^\pm(x)] = \pm \Phi^\pm(x),$$

которые показывают, что  $\Phi^-(x_1)\Phi^-(x_2)\dots\Phi^-(x_n)|0\rangle$  или любая линейная комбинация таких состояний является собственным состоянием  $N$ , принадлежащим собственному значению  $n$ . Поскольку, как будет вскоре показано, этим путем мы можем построить наиболее общее состояние, содержащее  $n$  частиц, то отсюда можно заключить, что  $N$  представляет собой оператор числа частиц, а  $d$  — плотность числа частиц. Из свойств инвариантности  $N$  имеем

$$[P_k, N] = [J_{ik}, N] = [Q, N] = 0. \quad (2.25)$$

Иначе говоря, состояние с определенным числом частиц может быть собственным состоянием полного заряда, энергии-импульса, момента и центра инерции (см. конец § 3). Важно подчеркнуть, что  $N$ , подобно  $P_k$ , но в отличие от  $Q$ , не коммутирует с локальными наблюдаемыми, такими как  $T_{ik}(x)$  или  $j_i(x)$ . Это может показаться удивительным, если провести следующее рассуждение.

Мы видели, что кванты поля в некотором отношении обладают свойствами точечных частиц, внутренне не протяженных, а испытывающих лишь флуктуации положения, обусловленные соотношением неопределенностей. Это, казалось бы, ведет нас к предположению, что состоянию с точно локализованными частицами следовало бы быть в заданный момент времени собственным состоянием, скажем  $j_0(x)$  для всех точек трехмерного пространства. Это состояние должно было бы обладать нулевыми собственными значениями везде, за исключением некоторых  $\delta$ -образных сингулярностей. Действительно, можно легко построить такого рода состояния для нерелятивистского квантованного шредингера поля. Конечно, такое локализованное состояние не будет собственным состоянием энергии и импульса, ввиду некоммутативности  $P_k$  с  $j_0(x)$ .

Типичной чертой релятивистских теорий является то обстоятельство, что такие состояния не содержат определенного числа частиц, т. е.  $[N, j_0(x)] \neq 0$ . Это возникает из-за возможности рождения частиц, отсутствовавшей в нерелятивистских теориях. Так, например, вакуум не является собственным состоянием  $j_0(x)$  из-за порождающего пары члена  $\Phi^+\Phi^-$ . В нерелятивистских теориях можно также определить число частиц в конечном объеме. Однако оператор  $\Delta N$ , полученный интегрированием (2.24) по конечному трехмерному объему  $\Delta\sigma$ , не обладает, в противоположность оператору  $\Delta Q$ , коммутационными свойствами (2.25) для точек  $x$ , лежащих внутри  $\Delta\sigma$ . Формально это происходит потому, что коммутатор  $[\Phi^+(x), \Phi^-(x')] = -i\Delta^+(x-x')$ , т. е. не обращается в нуль для пространственноподобных интервалов, а убывает как  $e^{-mr}$ . Поэтому, если  $\Delta\sigma \sim m^{-3}$  и  $x \subset \Delta\sigma$ , то  $\Phi^-(x)|0\rangle$  не будет являться собственным состоянием  $\Delta N$ . Физическая интерпретация этого факта состоит в том, что при попытке измерить число частиц в таком малом объеме будут рождаться новые частицы и поэтому их первоначальное число изменится.

Сейчас хорошо известно, что  $\pi$ -мезон — псевдоскалярная частица. Существует три вида  $\pi$ -мезонов:  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  и  $\pi^0$ ; при этом  $\pi^0$  обладает почти той же массой, что и  $\pi^\pm$ . Поэтому полный лагранжиан представляет собой сумму лагранжианов трех полей и приблизительно инвариантен относительно трехмерной группы вращений. Зарядовое сопряжение требует точной инвариантности относительно замены  $\Phi \leftrightarrow \Phi^\dagger$ , что и проявляется в точном равенстве масс и времен жизни  $\pi^+$  и  $\pi^-$ -мезонов \*).

\*) В действительности  $\pi^+$ - и  $\pi^-$ -мезоны должны иметь равные массы в любой релятивистски инвариантной теории, даже если  $U_C$  и не суще-

У тяжелых частиц появляются, по-видимому, еще и другие внутренние инвариантные свойства, кроме свойств, связанных с электрическим зарядом. Эти свойства инвариантности, из которых некоторые только приближены, выражают собой примечательную особенность этой новой отрасли физики. Однако они выходят за рамки нашей книги, посвященной главным образом электронам и фотонам.

Следующим, в порядке возрастающей формальной сложности, является эрмитово многокомпонентное поле, различные компоненты которого связаны с пространственно-временными свойствами. Примером может служить электромагнитное поле, которое можно описать векторным потенциалом  $A_k(x)$ . В отсутствие взаимодействия с зарядами каждая компонента удовлетворяет уравнению типа (2.13). Поскольку масса покоя фотонов равна нулю, эти уравнения принимают вид \*)

$$\square^2 A_k(x) = 0. \quad (2.26)$$

Соответственно  $L$  будет суммой лагранжианов типа (2.10) для каждой из компонент, однако релятивистская инвариантность мешает нам ввести все эти компоненты в лагранжиан с одним и тем же знаком.

Уравнение (2.26) является уравнением Эйлера для лагранжиана

$$L(x) = -\frac{1}{2} : \partial_k A^l(x) \partial^k A_l(x) :. \quad (2.27)$$

Тензор энергии-импульса (1.61) составляется аддитивно из компонент  $A_k$ , причем пространственные компоненты входят с положительным знаком, а временные — с отрицательным.

$$T^{ik} = - : \partial^i A_m \partial^k A^m - \frac{1}{2} g^{ik} \partial^m A_n \partial_m A^n :. \quad (2.28)$$

Для простоты здесь опущена спиновая часть (2.6), которая в силу  $f^{ijk} = -f^{jik}$  и обобщенной формулы интегрирования по частям (0.5) не даст вклада в выражение для  $P$ . Перестановочные соотношения можно получить совершенно тем же путем, что и выше:

$$[A^k(x), A^j(x')] = i g^{kj} D(x - x'). \quad (2.29)$$

ствует. Характерным свойством релятивистских теорий поля является то, что для любых заряженных частиц должны существовать противоположно заряженные частицы. Из опыта неизвестно никаких исключений из этого правила. В нерелятивистских теориях вполне допустимы частицы с одним знаком заряда, не имеющие своих противоположно заряженных антиподов.

\*) Мы рассматриваем здесь только уравнения в вакууме, когда зарядов нет. Уравнение (2.26), как это можно видеть, сравнивая его с (2.13), указывает, что масса покоя фотона равна нулю.

Рассмотрение электромагнитного поля формально усложняется тем, что уравнения (2.26) эквивалентны уравнениям Максвелла только, если компоненты  $A_k$  удовлетворяют условию Лоренца  $\partial_k A^k = 0$ . Как легко видеть, переходя в импульсное пространство, это условие необходимо также для того, чтобы обеспечить положительную определенность энергии. Отрицательный вклад  $A_0$  тогда точно компенсируется вкладом продольной \*) компоненты  $A$  (задача 10).

Это условие нельзя, однако, накладывать непосредственно на операторы  $A_k$ , так как в силу перестановочных соотношений (2.29) оно привело бы к неправильному следствию  $\partial_j D(x - x') = 0$ . Эту трудность можно обойти, рассматривая это дополнительное условие, как условие, наложенное на систему состояний

$$\partial_k A^k(x) | \rangle = 0. \quad (2.30)$$

Если допустить теперь только такие состояния, то уравнения Максвелла удовлетворятся хотя бы для математических ожиданий  $A_k$ .

Исключая все другие состояния, как физически недопустимые, мы получим усеченное гильбертово пространство, внутри которого энергия положительна и уравнения Максвелла выполняются. Поперечность фотона, как это будет сейчас показано, также гарантируется уравнением (2.30).

В § 3 мы узнали, что  $A_1^- \pm iA_2^-$  рождает фотон со спином, параллельным или антипараллельным, например, оси  $z$ . Если взять фурье-компоненту  $A^-(k)$  с  $k$ , направленным вдоль  $z$ , то она будет рождать фотон с импульсом вдоль оси  $z$ . Оператор  $A_1^-(k) \pm iA_2^-(k)$ , действуя на любое состояние, удовлетворяющее (2.30), приводит к другому состоянию, также удовлетворяющему (2.30). Таким образом, состояния фотона со спином, параллельным или антипараллельным его импульсу, допустимы. С другой стороны, оператор  $A_2^-(k) \pm iA_3^-(k)$  приводит к состоянию, не удовлетворяющему (2.30), так что спин фотона не может быть перпендикулярным его импульсу.

В классической электродинамике все наблюдаемые эффекты электромагнитного поля описываются напряженностями поля  $f_{ik} = A_{i,k} - A_{k,i}$ . Они инварианты относительно градиентного преобразования

$$A_k \rightarrow A_k + \partial_k \lambda, \quad (2.31)$$

где  $\lambda(x)$  — произвольная функция пространства и времени. Это заставляет нас потребовать, чтобы все физические следствия теории не зависели от частного выбора функции  $\lambda(x)$ .

\*) Это та компонента  $A$ , направление которой совпадает с направлением импульса фотона. Другие компоненты называются поперечными.



Чтобы сохранить форму перестановочных соотношений (2.29) при градиентном преобразовании, мы будем выбирать в качестве  $\lambda$  обычную (неоператорную) функцию, которая коммутирует со всеми полевыми величинами.

Кроме того, чтобы сохранить форму дополнительного условия (2.30), надо потребовать, чтобы

$$\square^2 \lambda(x) = 0. \quad (2.32)$$

Наш лагранжиан  $L$  такой, как он выписан в (2.27), градиентно инвариантен, однако он отличается от градиентно инвариантного  $L = -\frac{1}{4} f_{ik} f^{ik}$  только на дивергенцию и на член, математическое ожидание которого равно нулю в силу (2.30),

$$\frac{1}{4} f_{ik} f^{ik} = \frac{1}{2} A_{i,k} A^{i,k} - \frac{1}{2} \partial_k (A_i A^{k,i}) + \frac{1}{2} A_i \partial^i A_{,k}^k. \quad (2.33)$$

Аналогично и математическое ожидание вектора энергии-импульса, полученного из (2.28), равно математическому ожиданию энергии-импульса, получающегося из

$$T_k^i = f_{il} f^l_k + \frac{1}{4} g_{ik} f^{mn} f_{mn}. \quad (2.34)$$

Это выражение, совпадающее с обычным максвелловым тензором энергии-импульса, можно было бы получить, подставив градиентно инвариантный лагранжиан  $L$  в (1.61). Поэтому можно удовлетвориться более простыми выражениями (2.27) и (2.28).

Чтобы выяснить подробнее связь между градиентной инвариантностью и дополнительным условием, введем производящий оператор инфинитезимального градиентного преобразования \*)

$$\Sigma = - \int d\sigma_k (\lambda A_i^l{}^k - \lambda_{,k} A^i). \quad (2.35)$$

Оказывается, что вследствие (0.5) и того, что  $\lambda$  и  $A$  удовлетворяют уравнению Даламбера,  $\Sigma$  не зависит от  $\sigma$ . С помощью перестановочных соотношений (2.29) и свойств (Д2.10) и (Д2.11)  $L$ -функции можно установить, что оператор  $\Sigma$  в самом деле, удовлетворяет требуемому перестановочному соотношению  $[A_k, \Sigma] = i\lambda_{,k}$ . Так как  $\Sigma$  зависит только от  $\partial^k A_{,i}^i$  и  $A_{,i}^i$ , все величины, коммутирующие с  $A_{,i}^i$ , коммутируют также и с  $\Sigma$  и, следовательно, градиентно инвариантны. Справедливо и обратное, все градиентно инвариантные величины коммутируют с  $A_{,k}^k$ . Это означает, что если мы ум-

\*) Согласно В. Zumino (неопубликовано).

ножим удовлетворяющий дополнительному условию (2.30) вектор на градиентно инвариантную величину, то снова получим вектор, удовлетворяющий (2.30). Итак, если ограничиться рассмотрением градиентно инвариантных величин или эквивалентных им, то мы никогда не выйдем за пределы гильбертова пространства, ограниченного условием (2.30).

Для электромагнитного поля состоянием вакуума должно быть состояние наименьшей энергии, совместимое с (2.30). Поэтому мы не можем сразу использовать общее определение — соотношение  $A_k^+ (x) | 0 \rangle = 0$  не служит более определением вакуума, так как оно не совместимо ни с градиентной инвариантностью, ни с дополнительным условием (2.30), иначе коммутатор

$$[A_k^+ (x), A_{j'}^- (x')] = i\delta_{kj}^+ D^+ (x - x')$$

должен был бы давать 0 в применении к вакууму, а функция  $D^+$  — обычное число. Кроме того,  $A_0^+$  — это, как мы сейчас убедимся, оператор рождения, а состояний, в котором можно было бы воспрепятствовать рождению частиц, не существует. То, что  $A_0^+$  является\*) оператором рождения кванта с отрицательной энергией, следует из того, что вклад  $A_0$  в энергию отрицателен. Так как применение  $A^+$ , как мы видели, всегда понижает энергию состояния, то  $A_0^+$  должен порождать фотоны. Состояние удовлетворяющее (2.30), можно явно построить, разлагая  $A_k(x)$  по плоским волнам (задача 11). Оказывается, что (2.30) является условием только на продольные и временные компоненты  $A$  и требует, чтобы  $| \rangle$  было смесью всех состояний, содержащих для каждого импульса столько же продольных квантов, сколько и временных. Так как временной фотон обладает отрицательной энергией, энергии этих фотонов в точности компенсируются. Таким образом, мы получим собственное состояние  $P_j$ , отвечающее наименьшему собственному значению, потребовав дополнительно, чтобы в нем отсутствовали поперечные кванты. Все эти условия можно представить в следующей градиентно и релятивистски инвариантной форме\*\*)

$$f_{ik}^+ (x) | 0 \rangle = 0. \quad (2.36)$$

Произвольное состояние, разрешенное (2.30), не будет собственным состоянием числа частиц, если последнее построить,

\*) Обращаем внимание на различие в знаках в перестановочных соотношениях для  $A_0$  и для  $A_1, A_2, A_3$ .  $L$  в (2.27) формально представляет собой сумму лагранжианов четырех независимых полей, но лоренцева инвариантность навязывает разницу в знаках, что и является причиной рассматриваемых усложнений.

\*\*) Согласно В. Zumino (неопубликовано).

как и в скалярном случае, последовательным применением операторов рождения. Обычно это выражают, говоря, что продольная и временная части поля остаются неквантованными. Поэтому, когда говорят о состоянии с  $n$  фотонами, то обычно имеют ввиду только поперечные фотоны.

Наконец, рассмотрим поле Дирака, которое обладает обоими типами внутренних степеней свободы: одни из них связаны с моментом, другие — с зарядом. Это поле применяется для приближенного описания электрона и позитрона. Уравнение Дирака получается как уравнение Эйлера для лагранжиана вида \*) (обозначения см. Д1)

$$L(x) = \bar{\psi}(x)(\partial - m)\psi(x); \quad \partial = i\gamma^k \partial_k, \quad (2.37)$$

$$(\partial - m)\psi = \bar{\psi}(\partial + m) = 0,$$

где  $\psi$  — четырехкомпонентное поле, которое мы выбираем неэрмитовым с тем, чтобы оно описывало заряженные частицы. В результате мы получаем всего восемь независимых полей, которые описывают четыре сорта частиц, различающихся спином и зарядом. Для описания этих четырех сортов частиц приходится привлекать вдвое больше полей, поскольку уравнение Дирака — первого порядка, в противоположность клейн-гордонову уравнению второго порядка.

Лагранжиан  $L$  вида (2.37) неэрмитов, но им можно пользоваться, поскольку он отличается от эрмитова лагранжиана  $\frac{1}{2}(L + \text{эрмитово-сопряженный})$  только на дивергенцию  $-\frac{1}{2}i\partial_k \bar{\psi}\gamma^k\psi$ .

Для канонически сопряженного  $\psi$  поля \*\*) тензор энергии-импульса (без спиновой части) \*\*\*) и вектор плотности тока получается из (2.37) при помощи уравнений поля ( $L=0$ ):

$$\pi^k = i\bar{\psi}\gamma^k,$$

$$T^{mn} = i\bar{\psi}\gamma^m\partial_n\psi,$$

$$j^k = e\bar{\psi}\gamma^k\psi. \quad (2.38)$$

Поскольку мы имеем теперь дело с полем полужелого

\*) Применяя  $(\partial + m)$ , мы получим, что  $(\square^2 + m^2)\psi = 0$ , откуда следует, что наши уравнения описывают частицу с массой  $m$ .

\*\*) Здесь поле, канонически сопряженное  $\psi$ , обращается в нуль тождественно — трудность, которая не возникла бы для эрмитова лагранжиана. Однако легко видеть, что наш  $L$  приводит к тем же перестановочным соотношениям, которые мы могли бы найти с помощью последнего.

\*\*\*) Со спиновой частью

$$T_{mn} \rightarrow \frac{1}{2}(T^{mn} + T^{nm}).$$

спина, в канонических перестановочных соотношениях (1.65) следует выбрать знак плюс, т. е. рассматривать антикомму- таторы

$$\int_{x' \subset \sigma} d\sigma_k \{ \psi(x'), \bar{\psi}(x) \gamma^k \} f(x) = f(x') \quad (2.39)$$

для произвольной  $f$ .

Вскоре мы увидим, какие трудности возникли бы, если бы мы использовали в (2.39) коммутатор. Аналогично мы имеем

$$\int_{x' \subset \sigma} d\sigma_k \{ \psi(x), \gamma^k \psi(x') \} = 0.$$

Из них, как и раньше, получается с помощью (Д2.20) \*)

$$\{ \psi(x), \bar{\psi}(x') \} = i \left\{ \psi(x), \int_{x' \subset \sigma} d\sigma'' \bar{\psi}(x'') \gamma^k S(x'' - x) \right\} = i S(x - x') \quad (2.40)$$

$$\{ \psi(x), \psi(x') \} = \{ \bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x') \} = 0.$$

Чтобы сделать перестановочные соотношения (1.64) и (1.65) совместными друг с другом, мы должны в духе анти- коммутативности  $\psi$  определить произведение: ...: следующим образом

$$: \bar{\psi} \psi : = \bar{\psi}^+ \psi^+ + \bar{\psi}^- \psi^+ - \psi^- \bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^- \psi^-. \quad (2.41)$$

Воспользовавшись этим определением, можно найти уни- тарное преобразование  $U_c$ , обладающее свойствами заря- дового сопряжения. Для случая поля со спином  $1/2$  нельзя принять, что зарядовое сопряжение просто переводит  $\psi$  в  $\check{\psi}$ , так как  $\check{\psi}$  не удовлетворяет даже тому же уравнению, что и  $\psi$ , если при этом не использовать специального выбора представления  $\gamma$ -матриц. Однако, как показано в Д1, неко- торая комбинация  $\check{\psi}_\alpha$ , именно  $\psi' = C\check{\psi}$ , удовлетворяет тому же уравнению и ею можно пользоваться. Действительно, легко видеть, что если  $U_c$  действует на  $\psi$  следующим обра- зом (обозначения такие же, как и в (Д1. 12))

$$\begin{aligned} U_c \psi U_c^{-1} &= \psi', \\ U_c \bar{\psi} U_c^{-1} &= \bar{\psi}', \end{aligned} \quad (2.42)$$

то перестановочные соотношения не меняются (задача 18). Более того, мы сейчас увидим, что при этом преобразовании  $T$  не изменяется, в то время как  $j$  меняет знак. Следова-

\*) В спиновом пространстве

$$\int d\sigma \{ \psi_\alpha, (\bar{\psi} \gamma)_\beta \} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \{ \psi_\alpha, \bar{\psi}_\beta \} = i S_{\alpha\beta}.$$

тельно, мы можем использовать предыдущие рассуждения, чтобы построить явное представление  $U_c$  в терминах состояний с определенным числом частиц.

Если разбить перестановочные соотношения (2.40) на положительно и отрицательно частотные части, то получается

$$\{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(x')\} = iS^+(x - x'),$$

$$\{\psi^-(x), \bar{\psi}^+(x')\} = iS^-(x - x')$$

и

$$\begin{aligned} \{\psi^+, \psi^-\} &= \{\bar{\psi}^+, \bar{\psi}^-\} = \{\psi^+, \bar{\psi}^+\} = \{\psi^-, \bar{\psi}^-\} = \{\psi^+, \psi^+\} = \\ &= \{\psi^-, \psi^-\} = \{\bar{\psi}^+, \bar{\psi}^+\} = \{\bar{\psi}^-, \bar{\psi}^-\} = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Теперь, используя (Д1.11) и (Д1.12), имеем

$$\begin{aligned} \psi^\pm &= C\bar{\psi}^\pm, \quad \bar{\psi}'^\pm = -\psi^\pm C^{-1}, \quad C = -C^T, \\ C^{-1} &= C^\dagger, \quad C^{-1}\gamma C = -\gamma^T, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$:\bar{\psi}'\psi': = -\psi^+\bar{\psi}^+ - \psi^-\bar{\psi}^- + \bar{\psi}^-\psi^+ - \bar{\psi}^+\psi^- = :\bar{\psi}\psi:, \quad (2.45)$$

$$:\bar{\psi}'\gamma\psi': = \psi^+\gamma^T\bar{\psi}^+ + \psi^-\gamma^T\bar{\psi}^- - \bar{\psi}^-\gamma^T\psi^+ + \bar{\psi}^+\gamma^T\psi^- = -:\bar{\psi}\gamma\psi:.$$

Следовательно, знак  $j$  меняется при зарядовом сопряжении на противоположный, а  $T$ , полученное из укороченного лагранжиана (2.37), переходит в эрмитово-сопряженный тензор. Однако  $P$ , полученное интегрированием  $T$ , эрмитово и поэтому совпадает с  $T$ , полученным из  $1/2(L + L^\dagger)$ . Таким образом, до тех пор, пока не рассматривается локализация энергии, можно пользоваться неэрмитовым  $L$ .

Если бы провести квантование при помощи коммутаторов, а не антикоммутаторов, то легко показать, что  $T$  меняло бы знак при зарядовом сопряжении, а  $j$  — нет. Это привело бы, в частности, к невозможности построения положительно определенного  $P$ , и тем самым мы пришли бы к неудовлетворительной теории \*).

С другой стороны невозможно проквантовать скалярное поле с помощью антикоммутаторов, так как перестановочные соотношения типа  $\{\psi(x), \psi(x')\} = i\Delta(x - x')$  ведут к математическому противоречию, ибо замена  $x$  на  $x'$  оставляет левую часть уравнения инвариантной, а знак правой части меняется на противоположный \*\*).

\*) Первоначальная причина, почему здесь квантовали с антикоммутаторами, заключалась в том, что только так получалась положительно определенная энергия. Зарядовая симметрия была изучена позднее; позитрон первоначально рассматривался как «дырка» в бесконечном море электронов отрицательной энергии. Но эти трудности проистекали из-за неудачной формулировки.

\*\*) См. Pauli W., Phys. Rev. 58, 716 (1940).

Как было показано в главе 1, преобразование, переводящее решения уравнения поля  $\psi$  в бесконечно близкое ему  $\psi + \delta\psi$ , является каноническим, и потому при таком преобразовании перестановочные соотношения остаются неизменными<sup>\*)</sup>. Последнее очевидно, если  $\delta\psi$  выбрано так, что оно коммутирует или антикоммутирует со всеми полевыми величинами.

Так же, как это было сделано для свободного скалярного поля, можно определить оператор  $N$ , соответствующий числу частиц

$$N = \int d\sigma_k [\bar{\psi} \gamma^k \psi + \psi \gamma^k \bar{\psi}^T]. \quad (2.46)$$

Легко показать, что  $N$  обладает нужными коммутационными свойствами и инвариантен относительно преобразований Лоренца и зарядового сопряжения.

Если разложить  $\psi$  по полной системе функций  $u_k$

$$\psi(x) = \sum_k b_k u_k(x),$$

то перестановочные соотношения (2.40) приводят к

$$\{b_k^-, b_{k'}^-\} = 0,$$

или, для  $k = k'$ ,

$$(b_k^-)^2 = 0. \quad (2.47)$$

Но  $b_k^-$  рождает позитрон в состоянии  $u_k(x)$ . Следовательно, эти перестановочные соотношения приводят к невозможности порождения двух электронов или позитронов в одном и том же состоянии, так как двукратное применение  $b_k^-$  к любому состоянию дает нуль. Это отвечает статистике Ферми, в которой данное состояние может быть занято одновременно только одной частицей. Такое может, конечно, встретиться только при квантовании с антикоммутаторами, в то время как при квантовании с коммутаторами, соответствующими статистике Бозе<sup>\*\*)</sup>, в одном состоянии может рождаться произвольное число частиц. Это приводит к фундаментальному утверждению:

а) *частицы с целым спином подчиняются статистике Бозе и*

б) *частицы с полуцелым спином подчиняются статистике Ферми.*

<sup>\*)</sup> Надо лишь вспомнить, что правая часть перестановочных соотношений — обычные функции, которые не могут измениться при унитарных преобразованиях.

<sup>\*\*)</sup> Состояния характеризуются исключительно числами заполнения, и возможности установить индивидуальность частиц, как было можно в статистике Больцмана, не существует.

Это теоретическое предсказание связи между спином и статистикой, для которого неизвестно ни одного экспериментального исключения, является одним из крупнейших достижений теории квантованных полей.

## § 6. Матричные элементы

Прежде чем вернуться к обсуждению физических результатов теории, нам следует представить себе общий вид матричных элементов операторов, включающих полевые величины. Если  $\Phi$  — вещественное скалярное поле, то, согласно § 4,  $\Phi^+$  уничтожает одну частицу; иначе говоря,  $\Phi^+$  имеет исчезающие матричные элементы между состояниями, в которых числа частиц различаются на единицу. Матричный элемент  $\Phi^+$  между одночастичным состоянием (состояние, в котором есть одна частица)  $|u\rangle$  и вакуумным состоянием есть положительно-частотная комплексная числовая функция  $\frac{1}{\sqrt{2}}u(x)$ , удовлетворяющая уравнению Клейна—Гордона. Это можно записать, как

$$\Phi^+(x)|u\rangle = \frac{u(x)}{\sqrt{2}}|0\rangle, \quad \Phi^+(x)|0\rangle = 0,$$

а сопряженные соотношения принимают вид:

$$\langle u|\Phi^-(x) = \langle 0|\frac{u^*(x)}{\sqrt{2}}, \quad \langle 0|\Phi^-(x) = 0. \quad (2.48)$$

Если мы вычисляем математическое ожидание фундаментального билинейного скаляра

$$:\Phi(x)\Phi(x): = \Phi^+(x)\Phi^+(x) + \Phi^-(x)\Phi^-(x) + 2\Phi^-(x)\Phi^+(x) \quad (2.49)$$

в этом (одночастичном) состоянии, то в него вносит вклад лишь последний член и

$$\begin{aligned} \langle u|:\Phi(x)\Phi(x):|u\rangle &= 2\langle u|\Phi^-(x)\Phi^+(x)|u\rangle = \\ &= 2\langle u|\Phi^-(x)|0\rangle\langle 0|\Phi^+(x)|u\rangle = u^*(x)u(x). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Пользуясь этой техникой, легко раскрывать матричные элементы. Математическое ожидание в состоянии  $|u\rangle$  наблюдаемой, квадратичной по  $\Phi$ , получается заменой квантованного  $\Phi$  на неквантованное  $u$ , например:

$$\begin{aligned} \langle u|j^\mu(x)|u\rangle &= \frac{1}{i}\langle u|\Phi^-\Phi_\mu^+ - \Phi_\mu^-\Phi^+|u\rangle = \\ &= \frac{1}{2i}(u^* \overleftrightarrow{\partial} u), \end{aligned} \quad (2.51)$$

где мы использовали обозначение

$$A \overleftrightarrow{\partial} B = A \left[ \frac{d}{dx} B \right] - \left[ \frac{d}{dx} A \right] B \quad (2.52)$$

Отсюда видно, что  $u$  играет роль шредингеровой функции некантованной теории. Можно действовать и наоборот, рассматривая сначала положительно-частотное решение уравнения Клейна — Гордона  $u^+$  и строя затем соответствующее состояние  $|u\rangle$ . Именно,  $\Phi^-$  — порождает частицу, и соответствующее состояние находится применением  $\Phi^-$  к вакууму с интенсивностью  $u(x)$ :

$$|u\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \int d\sigma_j \Phi^-(x) \overleftrightarrow{\partial}^j u(x) |0\rangle. \quad (2.53)$$

Действительно, это состояние обладает указанными выше свойствами:

$$\begin{aligned} \Phi^+(x) |u\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x \subset \sigma'} d\sigma'_j \Delta^+(x - x') \overleftrightarrow{\partial}^j u(x') |0\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x \subset \sigma'} d\sigma'_j \Delta(x - x') \overleftrightarrow{\partial}^j u^+(x') |0\rangle = \frac{u^+(x)}{\sqrt{2}} |0\rangle \end{aligned} \quad (2.54)$$

В этой выкладке мы впервые использовали перестановочные соотношения для  $\Phi^-$  и  $\Phi^+$  и определение вакуума. Соотношение (2.53) не зависит от  $\sigma'$ , так как  $\partial_j [\Phi^-(x) \overleftrightarrow{\partial}^j u(x)] = 0$ , поэтому мы можем выбрать за  $\sigma'$  поверхность, содержащую  $x$ , а затем использовать (Д2.12). Ввиду того, что  $u$  содержит только положительные частоты, отрицательно-частотная часть  $\Delta$  вклада не вносит.

Умножая (2.53) на сопряженное ему соотношение, мы найдем, используя (2.54), что состояния, соответствующие разным  $u$ , ортонормированны, если

$$\frac{1}{2} i \int d\sigma_j u_A^*(x) \overleftrightarrow{\partial}^j u_B(x) = \delta_{AB}. \quad (2.55)$$

Для заряженных полей состояния, содержащие положительную или отрицательную частицу с волновой функцией  $u$ , можно построить таким же образом, если воспользоваться в (2.53) соответствующими операторами рождения  $\frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1^- + i\Phi_2^-)$  или  $\frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1^- - i\Phi_2^-)$ .

Состояние с фотоном с волновой функцией

$$|f_i\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \int d\sigma_j A_{\bar{k}}(x) \overleftrightarrow{\partial}^j f_k(x) |0\rangle \quad (2.56)$$

удовлетворяет (2.30) только, если  $\square^2 f_k = 0$  и  $f_k^k = 0$ .



Для комплексного спинорного поля несколько иные перестановочные соотношения требуют для одноэлектронного состояния и условия нормировки волновых функций выражений:

$$|v\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \int d\sigma_j \bar{\psi}^-(x) \gamma^j v(x) |0\rangle$$

(2.57)

и

$$\frac{1}{2} \int d\sigma_j \bar{v}_A \partial^j v_B = \delta_{AB}.$$

$N$  коммутирует с  $P$ ,  $J$  и  $Q$ . Следовательно, мы можем сконструировать одночастичные состояния, являющиеся собственными состояниями  $P$  или  $J$ . С другой стороны, соотношение  $[Q, \bar{\psi}^-] = e\bar{\psi}^-$  обеспечивает нам, что (2.57) всегда будет собственным состоянием  $Q$ . Используя в качестве  $u$  в (2.53) собственную функцию оператора поворота, мы получим собственное состояние момента для бесспиновой частицы. Это очевидно, так как, например,  $J_{12}$  — это оператор бесконечно малого поворота  $\Phi$  вокруг оси  $z$ . Интегрируя по частям, мы можем перевести действие производной в операторе поворота на  $u$ , что приведет нас к  $u$ , умноженному на соответствующее собственное значение.

Чтобы получить это формально, мы используем соотношение:

$$J_{12} \Phi(x) |0\rangle = [J_{12}, \Phi(x)] |0\rangle = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi(x) |0\rangle. \quad (2.58)$$

Далее

$$\begin{aligned} J_{12} |u\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} J_{12} \int d\sigma_j \Phi^-(x) \overleftrightarrow{\partial}^j u(x) |0\rangle = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int d\sigma_j \Phi^-(x) \overleftrightarrow{\partial}^j \frac{\partial}{\partial \varphi} u(x) |0\rangle = m |u\rangle, \end{aligned} \quad (2.59)$$

если

$$u(x) \sim Y_l^m(\theta, \varphi) u(r).$$

Как и в элементарной волновой механике, мы получим состояния с моментом нуль или единица, если  $u$  — инвариант относительно вращения или преобразуется, как вектор. Этот общий результат мы используем в конце настоящего параграфа.

Аналогично мы можем построить собственные функции импульса, используя в качестве  $u$  плоские волны. Однако если мы положим

$$u(x) = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} d^4 k e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) u(k). \quad (2.60)$$

то такое состояние не удовлетворит условию нормировки (2.55), которое в импульсном пространстве гласит:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} d^4 k \delta(k^2 - m^2) u_A^*(k) u_B(k) = \delta_{AB}.$$

Левая часть (2.55) расходится при  $A=B$  и  $u_A = \delta^3(k - k_A)$ , но ее можно сделать конечной, если аппроксимировать  $\delta$ -функцию близким гауссовым распределением. При практических вычислениях явное использование таких волновых пакетов не является необходимым. Однако можно было бы начать и с конечного объема  $V$ , при этом нормированным  $u$  будет

$$u_A(x) = \frac{e^{-ipx}}{V\sqrt{p_0}}, \quad p_0 = +V\sqrt{p^2 + m^2}. \quad (2.61)$$

Переход к пределу при  $V \rightarrow \infty$  для физически разумных величин будет допустимым, при этом релятивистская инвариантность восстановится. Состояние (2.61) или суперпозиция таких состояний с одинаковыми  $p_0$  образуют собственную функцию  $P_0$ . Для фотонов соответствующее состояние имеет вид:

$$f_i = \frac{e_i e^{-ikx}}{V k_0 V}, \quad (2.62)$$

где  $k_0 = |\mathbf{k}|$ ,  $e^2 = 1$  и  $e \cdot \mathbf{k} = 0$ .

Можно заинтересоваться, могут ли быть построены волновые функции, имеющие  $\delta$ -образный вид в координатном пространстве, аналогичный поведению (2.61) и (2.62) в импульсном. Чтобы выяснить это, полезно вычислить амплитуду вероятности  $w(\Delta x)$  найти частицу в состоянии  $u(x + \Delta x)$  для состояния с волновой функцией  $u(x)$ . Если  $u$  — локализованное состояние, то квадрат этой амплитуды дает вероятность найти частицу в момент времени  $t + \Delta t$  в точке  $x + \Delta x$ , если в момент времени  $t$  она была в точке  $x$ . Для скалярного произведения этих состояний мы найдем, вводя фурье-образы:

$$w(\Delta x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} dk e^{-ik\Delta x} \delta(k^2 - m^2) |u(k)|^2. \quad (2.63)$$

Если  $u$  есть  $\delta$ -функция в  $x$ -пространстве  $u(k) \sim k_0$ , то мы найдем, что  $w(\Delta x) \neq 0$  для  $\Delta x \neq 0$ ,  $\Delta t = 0$  и, следовательно, такое состояние не может быть интерпретировано как совершенно локализованное, ибо это означает, что частица занимает несколько положений одновременно. Если теперь  $u(k) \sim V\sqrt{k_0}$ , то  $w(\Delta x) = \delta(\Delta x)$  для  $\Delta t = 0$ . Однако  $w(\Delta x) \neq 0$  для  $|\Delta x| > \Delta t \neq 0$ . Иначе говоря, если допустить, что это

состояние определяет частицу в определенном месте, то местоположение этой частицы может измениться со скоростью, большей единицы. Более того, такое состояние не релятивистски инвариантно, потому что различные наблюдатели не согласятся в том, была ли частица локализована. Наконец в этих состояниях математические ожидания для всех плотностей типа  $T_{ik}(x)$ ,  $M_{ijk}(x)$  и  $j_i(x)$  не  $\delta$ -образны. Это указывает на то, что понятие положения частицы в релятивистских теориях не имеет столь простого смысла, как в нерелятивистской механике. Здесь нет противоречия с точностью квантов поля, скорее это происходит из-за виртуального рождения пар. Это обстоятельство видно из того, что отклонения от  $\delta$ -образного распределения убывают экспоненциально с полушириной, равной комптоновой длине волны. Это — расширение, обязанное облаку виртуальных пар, возникающему из требований соотношения неопределенностей.

Если  $u$  соответствует волновому пакету, много большему комптоновой длины волны  $u(\mathbf{k}) \cong e^{-k^2 b^2/2}$ ,  $b \ll m^{-1}$ , то  $\psi(\Delta x)$  дает для диффузии волновых пакетов обычный результат:

$$|\psi(\Delta x)|^2 = \frac{b^2}{\left[ b^4 + \left( \frac{\Delta t}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}} e^{-\frac{b^2(\Delta x)^2}{\frac{1}{2} \left[ b^4 + \left( \frac{\Delta t}{2m} \right)^2 \right]}}. \quad (2.64)$$

Следовательно,  $\Delta^+(x)$ , из которой непосредственно получается  $\psi(\Delta x)$ , имеет простой смысл, ибо она определяется распространением релятивистской частицы. Обсуждение этих вопросов для частиц спина  $1/2$  проводится совершенно аналогичным образом, и это предоставляется сделать читателю.

Состояние с двумя частицами может быть сконструировано подобным же образом. Для нейтрального бозе-поля мы видим, что необходимыми свойствами обладает

$$\int d\sigma_i d\sigma'_j \Phi^-(x) \Phi^-(x') \overleftrightarrow{\partial}^i \overleftrightarrow{\partial}'^j f(x, x') | 0 \rangle, \quad (2.65)$$

если  $f$  удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона по обоим аргументам и содержит только положительные частоты. В этом случае выражение (2.65) не зависит от  $\sigma$  и  $\sigma'$  и, следовательно, для обеих можно использовать одну и ту же поверхность  $t = \text{const}$ . Кроме того, мы можем ограничиться только теми  $f$ , которые симметричны относительно перестановки  $x$  и  $x'$ , — ведь ввиду симметрии других сомножителей в (2.65) всякая антисимметричная часть выпала бы из результата.

Для полей с внутренними степенями свободы требование симметрии должно быть соответственно расширено. Для

электромагнитного поля, например, волновая функция  $f_{II}(x, x')$  двухфотонного состояния

$$\int d\sigma_j d\sigma'_k A_I^-(x) A_I^-(x') \overleftrightarrow{\partial}^j \overleftrightarrow{\partial}^k f_{II}(x, x') |0\rangle \quad (2.66)$$

должна удовлетворять условию:

$$f_{II}(x, x') = f_{II}(x', x). \quad (2.67)$$

Для заряженного скалярного поля мы требуем соответственно симметрии волновой функции относительно перестановки координатных и зарядовых переменных. Для спинорного поля двухэлектронным состоянием будет (явно выписываем все индексы):

$$\int d\sigma_i d\sigma'_j \bar{\Psi}_\alpha(x) \bar{\Psi}_\alpha(x') \gamma_{\alpha\beta}^i \gamma_{\alpha'\beta'}^j U_{\beta\beta'}(x, x') |0\rangle. \quad (2.68)$$

Ввиду антикоммутируемости  $\psi$  функция  $U$  антисимметрична:

$$U_{\beta\beta'}(x, x') = -U_{\beta'\beta}(x', x). \quad (2.69)$$

Эти свойства симметрии волновых функций хорошо известны из элементарной волновой механики.

Выводя соотношения ортогональности и нормировки для двухчастичных волновых функций, мы получим множитель  $1/2$ , обязанный своим происхождением тождественности частиц \*)

$$\frac{1}{(2\pi)^6} \int_{\substack{k_0 > 0 \\ k_j > 0}} d^4 k d^4 k' [\delta(k^2 - m^2) \delta(k'^2 - m^2) \times \\ \times F_A^*(k, k') F_B(k, k')] = \frac{\delta_{AB}}{2!}. \quad (2.70)$$

$F$  определено по аналогии с (2.60). Если у частиц есть и дискретные степени свободы, то интеграл в (2.70) включает суммирование по соответствующим переменным.

Чтобы изучить влияние статистики на распространение частиц, вычислим, как и прежде, скалярное произведение  $\mathcal{W}(\Delta x_1, \Delta x_2)$  двухчастичных состояний с волновыми функциями  $f(x_1, x_2)$  и  $f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ . Как и ранее, оно получается посредством коммутирования  $\Phi^+$  направо в выражении

$$\langle 0 | \Phi^+(x'_1) \Phi^+(x'_2) \Phi^-(x_1) \Phi^-(x_2) | 0 \rangle \quad (2.71)$$

\*) Читателю, которому надоела эта алгебра, можем указать, что этот множитель  $1/2$  действительно наблюдается на опыте. Из-за него сечение аннигиляции позитронов составляет только половину того, которое было бы, не будь фотоны тождественны.

и использования свойств вакуумного состояния. Тогда получим два члена:

$$\Delta^+(x'_1 - x_1) \Delta^+(x'_2 - x_2) + \Delta^+(x'_1 - x_2) \Delta^+(x'_2 - x_1),$$

которые в импульсном пространстве дадут

$$\omega(\Delta x_1, \Delta x_2) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{\substack{k_1^0 > 0 \\ k_2^0 < 0}} d^4 k_1 d^4 k_2 |F(k_1, k_2)|^2 \times \quad (2.72)$$

$$\times \delta(k_1^2 - m^2) \delta(k_2^2 - m^2) [e^{i(k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2)} + e^{i(k_2 \Delta x_1 + k_1 \Delta x_2)}].$$

Заметим, что даже если частицы некоррелированы, то и тогда  $F(k_1 k_2) = G(k_1) G(k_2) - \omega$  не есть произведение  $u(\Delta x_1) \times u(\Delta x_2)$ , так что частицы не вполне независимы. Однако, как сейчас выяснится, этот эффект не означает взаимодействия в обычном смысле. Состояния, о которых идет речь, не обязательно считать относящимися к непрерывному спектру, как то было бы для настоящего рассеяния. Вполне допустимо рассмотреть состояния, в которых частицы имеют точные значения импульса  $k_1$  и  $k_2$ . Если, однако, частицы тождественны в квантовомеханическом смысле, то все же нельзя точно сказать, какая из них имеет импульс  $k_1$ , какая  $k_2$ . Это типичная черта квантовой теории: эти две возможности могут интерферировать, так что по своей природе бозе-частицы льнут друг к другу, а ферми-частицы — наоборот. Это можно видеть, если характеризовать состояние только относительным положением частиц  $f = f(x_1 - x_2)$ ,  $F = \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \times G(k_1)$ . Тогда множитель в квадратных скобках в (2.72) имеет вид  $\cos[k_1(\Delta x_1 - \Delta x_2)]$ . Для ферми-частиц получается аналогичное выражение, однако, антикоммутативность  $\psi$  ведет к изменению знака и мы получаем  $\sin[k_1(\Delta x_1 - \Delta x_2)]$  вместо косинуса. Если частицы имеют другие степени свободы, то перекрестный член возникает только в том случае, если частицы тождественны и по этим другим квантовым числам, например, спины их параллельны и заряды равны.

Это показывает, что эквивалентные ферми-частицы избегают друг друга в пределах длины волны, в то время как эквивалентные бозе-частицы имеют максимальную вероятность быть в одной точке. У этого факта есть много удивительных следствий, проявляющихся, например, в угловом распределении при рассеянии тождественных частиц. Эти следствия, однако, относятся к области элементарной квантовой механики и не связаны с характерными особенностями релятивистской квантовой теории. Мы не будем подробно обсуждать их далее, но они будут присутствовать во всех наших дальнейших исследованиях.

Как важное применение нашего общего рассмотрения, мы исследуем теперь ограничение, налагаемое (2.30) на возможные состояния фотонов. Для этого удобно ввести операторы  $a_i(k)$ , определяемые соотношением:

$$A_i(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} d^4k e^{-ikx} \delta(k^2) a_i(k), \quad (2.73)$$

которые позволят нам определить однофотонное состояние в инвариантном виде:

$$|f\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2) F_i(k) a_i^-(k) |0\rangle, \quad (2.74)$$

где  $f$  определено в (2.56). Прежде всего заметим, что существование однофотонного состояния с нулевым моментом невозможно, так как  $k^i F_i(k) = 0$ . Можно сказать, что условие Лоренца исключает состояния, в которых спиновый и орбитальный момент антипараллельны. Этого следовало ожидать, ибо условие Лоренца требует поперечности фотонов, а это означает, что спин фотона параллелен импульсу, т. е. перпендикулярен орбитальному моменту. С формальной точки зрения сконструировать состояние с нулевым моментом — значит найти состояние, в котором нет никакого выделенного направления. Единственный пространственный вектор, имеющийся у нас в распоряжении, — это  $\mathbf{k}$ . Следовательно, должно быть  $\mathbf{F} = \mathbf{k} \cdot G(|\mathbf{k}|)$ . Условие  $F_i k^i = 0$  приводит тогда к  $F_i(k) = k_i G(|\mathbf{k}|)$ , что дает нуль в (2.74), так как  $k^i a_i^- |0\rangle = 0$ .

На более обычном трехмерном языке предыдущие выводы выглядят следующим образом. Заметим, что вклад в сумму по  $i$  в (2.74) вносят лишь те члены, в которых вектор поляризации  $\mathbf{e}$ , представленный индексом  $i$ , перпендикулярен  $\mathbf{k}$ . Если мы выберем направление  $1$  вдоль вектора  $\mathbf{k}$ , то наше условие означает, что  $F_0 = F_1$ , а условие Лоренца оставляет только  $a_2 F_2 + a_3 F_3$ . Волновая функция должна быть скаляром, пропорциональным  $\mathbf{e}$ , а так как единственный скаляр  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{k}$  исчезает, то построить состояние с моментом, равным нулю, нельзя.

Хотя мы ничего не говорили пока о взаимодействии, обсудим сейчас некоторые следствия для вызываемых электромагнитным взаимодействием переходов, — следствия, которые возникают из-за ограничения на возможные собственные значения момента фотона. Все что нам потребуется — это только допущение, что при этих взаимодействиях момент сохраняется. Иначе говоря, если мы знаем, что начальное состояние имеет нулевой момент, мы можем быть уверены, что оно никогда не перейдет в однофотонное состояние. Наш результат имеет важное следствие в атомной физике:

он предсказывает, что в переходах без изменения момента, например  $0 \leftrightarrow 0$ -переходах, должен испускаться более, чем один фотон.

Менее очевидным является тот факт, что двухфотонное состояние не может иметь момент, равный единице. Чтобы показать это, можно без ограничения общности перейти к системе, в которой полный импульс равен нулю (барицентрическая, или система центра масс), так что  $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ . Здесь удобнее использовать трехмерные обозначения. Для конструирования волновой функции в нашем распоряжении есть три вектора: два вектора поляризации  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  и вектор импульса  $\mathbf{k}$ . Эта волновая функция должна зависеть от  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  линейно и должна быть инвариантной при одновременной замене  $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$  и  $\mathbf{e}_1 \leftrightarrow \mathbf{e}_2$ . Таким образом, мы можем построить скаляр  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$  и псевдоскаляр  $[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] \cdot \mathbf{k}$ , причем оба эти выражения могут быть умножены на произвольную функцию  $f(k)$ . Однако все возможные векторы  $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{k}$ ,  $([\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$ ,  $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k})\mathbf{e}_2$ ,  $(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k})\mathbf{e}_1$  и  $[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2]$  исчезают либо а) из-за  $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k}) = (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k}) = 0$ , либо б) при симметризации  $\mathbf{e}_1 \leftrightarrow \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{k}_1 \leftrightarrow -\mathbf{k}_2$ , что и доказывает наше утверждение. Этот поразительный факт имел важное значение в истории  $\pi$ -мезонной физики, так как двухфотонный распад  $\pi^0$ -мезона доказал, что последний не может иметь спин единица. Кроме того, это приводит к заметному увеличению времени жизни  $S$ -состояния позитрония с параллельными спинами, так как это состояние не может распасться на два фотона.

Заканчивая этот параграф, отметим некоторые замечательные правила отбора, имеющие отношение к двухфотонному состоянию с нулевым моментом. Эти правила отбора связаны с интегралом движения, существование которого вытекает из одного свойства инвариантности изучаемого пространственно-временного континуума, которое до сих пор мы не использовали.

Мы видели, что существуют десять интегралов движения, связанных с инфинитезимальными элементами  $e_i$  и  $e_{ik}$  неоднородной группы Лоренца. Существование этих интегралов движения выводится по следующей схеме. Если законы природы одинаковы во всех системах, связанных преобразованиями Лоренца, то наблюдаемые в разных системах должны иметь одинаковый спектр собственных значений. Следовательно, мы должны быть в состоянии установить взаимно-однозначное соответствие между состояниями, принадлежащими одинаковым собственным значениям соответствующих операторов в различных системах. Это определяет набор унитарных преобразований и их инфинитезимальных операторов, коммутационные свойства которых диктуются структурой группы.

Рассмотрим теперь таким же образом гипотезу, что законы природы инвариантны относительно отражения пространственных координат. Эта операция означает, что  $x_0 \rightarrow x_0$ ,  $x_1 \rightarrow -x_1$ ,  $x_2 \rightarrow -x_2$ ,  $x_3 \rightarrow -x_3$ ; она заменяет правовинтовую систему координат на левовинтовую. Высказанная гипотеза принимает, что пустое пространство не различает движений по и против часовой стрелки, т. е. не действует как оптически активная жидкость. Какая-нибудь конкретная теория предсказывает или не предсказывает такую инвариантность судя по тому, остается ли лагранжиан неизменным при отражении. Электрические явления, которые нас интересуют, заведомо инвариантны относительно отражения. Однако есть указания, что вообще это не так. Как и для неоднородной группы Лоренца, инвариантность относительно отражения проявится в существовании некоторого унитарного оператора  $R$ . В этом случае, как и при зарядовом сопряжении, группа не непрерывна, но состоит лишь из 1 и  $R$ , если, как то вполне естественно, допустить, что  $R^2 = 1$ . (Для спиноров предлагалось считать, что  $R^2 = \pm 1$ , но это отличие не существенно для наших целей.) Таким образом, инфинитезимального оператора группы нет, и мы не можем использовать наш вариационный принцип, чтобы явно построить  $R$  из операторов поля. Аналогично, мы не можем определить соответствующее классическое выражение через операторы инфинитезимальных канонических преобразований и скобки Пуассона. Отсюда следует, что правила отбора, которые мы установим, нельзя будет пояснить простой классической картиной; это — типичный квантовомеханический эффект, хотя сама концепция инвариантности при отражении и относится к классической теории.

Формально, результатом действия  $R$  на скалярный оператор  $S$ , векторный оператор  $V_i$  или на тензоры высшего ранга, будет

$$\begin{aligned} R S(x, t) R^{-1} &= S(-x, t), \\ R V_0(x, t) R^{-1} &= V_0(-x, t), \\ R \mathbf{V}(x, t) R^{-1} &= -\mathbf{V}(-x, t). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Для величин, проинтегрированных по поверхности  $\sigma$ , мы вправе выбрать в качестве  $\sigma$  плоскость  $t = \text{const}$  системы, в которой  $R$  производит пространственную инверсию. Тогда, если, например,  $R L(x, t) R^{-1} = L(-x, t)$ , мы найдем, что

$$R P_0 R^{-1} = \int dx^3 T_{00}(-x, t) = P_0. \quad (2.76)$$

Аналогично можно найти, что  $R$  антикоммутирует с полным (трехмерным) импульсом и коммутирует с числом частиц,



зарядом и моментом, если последний относится к тому же началу координат, что и  $R$ . (Эти утверждения следует понимать, конечно, как относящиеся к частной лоренцевой системе, определяемой  $R$ ). Это означает, что мы можем сконструировать собственные состояния, исходя из состояний с определенным числом частиц, энергией и моментом. Если они являются также и собственными состояниями полного трехмерного импульса, они должны относиться к нулевому собственному значению.

Состояние с одним бозоном  $| \rangle = \int d\sigma_\mu V(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \Phi^-(x) | 0 \rangle$  будет собственным состоянием  $R$ , если  $V(x, t) = \pm V(-x, t)$ . Заметим, кроме того, что рассмотренные выше состояния с двумя фотонами — собственные состояния  $R$ . Скаляр относится к собственному значению  $+1$ , а псевдоскаляр  $-1$ .

Действие  $R$  на спинорное поле  $\psi$  несколько более запутано, поскольку  $\psi(-x, t)$  не удовлетворяет тому же уравнению, что и  $\psi(x, t)$ . Так как мы не предполагали явной зависимости  $R$  только от  $x$ , то  $R$  не может переводить  $\psi(x, t)$  в  $\psi(-x, t)$ . Однако  $\beta\psi(-x, t)$  удовлетворяет тому же уравнению, что и  $\psi(x, t)$ , и поэтому не будет непоследовательным положить

$$\beta R \psi(x, t) R^{-1} = \beta \psi(-x, t) \quad (2.77)$$

(обозначения смотри в Д1). В дальнейшем мы будем использовать для  $\gamma$  обычное представление, где  $\beta = \gamma_0$ . Безусловно, можно заменить здесь  $\beta$  на  $-\beta$ , но это различие не существенно для нас.

Смысл  $R$  можно распознать, рассматривая состояния, которые описывают покоящиеся частицы. В этом случае положительные и отрицательные частоты в уравнении Дирака принадлежат собственным значениям  $+1$  или  $-1$  оператора  $\beta$ . Таким образом, мы видим, что покоящийся позитрон имеет четность, противоположную четности электрона. В то время как абсолютная четность электрона — это, как уже указывалось, только вопрос соглашения, относительная четность электрона и позитрона имеет физический смысл. Это связано с тем, что электрон и позитрон рождаются и аннигилируют парами и можно наблюдать лишь четность, которую они оставляют, но не четность отдельного электрона. Если аннигиляция пары приводит к образованию двух фотонов и четность в этом процессе сохраняется, то они должны иметь ту же четность, что и пара. Таким образом, электрон и позитрон, не обладающие импульсом, образуют собственное состояние  $R$  с собственным значением  $-1$ , которое может распасться только в псевдоскалярное двухфотонное состояние. Поэтому направления поляризации двух фотонов должны

быть перпендикулярны друг другу. Это поразительное следствие, которое иллюстрирует силу такого, казалось бы, сугубо абстрактного принципа, было экспериментально подтверждено для основного состояния позитрония с нулевым моментом. Здесь частицы не полностью покоятся, но приведенные выше аргументы могут быть распространены и на этот случай.

Подводя итоги этого параграфа, мы можем отметить, что формализм квантования полей включает всю элементарную квантовую механику и выявляет некоторые тонкие особенности, не вытекающие наглядно ни из каких классических представлений.

## § 7. Флуктуационные явления

В заключение этой главы, посвященной *свободным* полям, мы исследуем математические ожидания более сложных выражений. В частности, нас будет интересовать, насколько квадрат математического ожидания заданного оператора отличается от математического ожидания квадрата оператора. Другими словами, мы рассмотрим с точки зрения развитаго до сих пор формализма полевой теории типичные квантовомеханические флуктуации.

Рассмотрим сначала случай оператора, представляющего собой билинейную форму по диракову полю. Символ  $\dots$ : был определен в § 5 так, что его вакуумное ожидание исчезает. Однако  $\psi^+\psi^-$  имеет неисчезающее вакуумное ожидание, которое можно вычислить из перестановочных соотношений

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') | 0 \rangle &= \langle 0 | \psi_\alpha^+(x) \bar{\psi}_\beta^-(x') | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \{ \psi_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(x') \} | 0 \rangle = i S_{\alpha\beta}^+(x - x') = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{p_0 > 0} dp e^{-ip(x-x')} \delta(p^2 - m^2) (\hat{p} + m)_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Этот результат можно выразить в другой форме, рассматривая  $\bar{\psi}^-$  как оператор, переводящий вакуум в одночастичное состояние, определяемое дираковой функцией  $u$ , в то время как  $\psi^+$  переводит это состояние обратно в вакуум. Следовательно, суммируя по всем дираковым функциям  $u$ , мы можем написать

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi^+(x) \bar{\psi}^-(x') | 0 \rangle &= \sum \langle 0 | \psi^+ | u \rangle \langle u | \bar{\psi}^- | 0 \rangle = \\ &= \sum u(x) \bar{u}(x'). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Мы можем выбрать для  $u$  представление плоских волн  $e^{-ip \cdot x}$  и заменить суммирование по импульсам интегрированием по плоским волнам, удовлетворяющим уравнению Дира-

ка, так что  $p^2 = m^2$ . Покажем, далее, что сумма по всем спиновым состояниям с импульсом  $p$  дает инвариант  $(\hat{p} + m)_{\alpha\beta}$ . Для этого выразим  $iS^+$  с помощью приведенного в (0.1) тождества для  $\delta$ -функции

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp_0 \frac{1}{2p_0} \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + m^2}) \int dp e^{-ip(x-x')} (\hat{p} + m) \quad (2.80)$$

(интегрирование по  $p_0$  может быть выполнено, после чего  $p_0$  следует всюду заменить на  $\sqrt{p^2 + m^2}$ ). Остающийся интеграл можно брать по конечному нормировочному объему, при этом  $\frac{1}{(2\pi)^3} \int dp \rightarrow \frac{1}{V} \sum$ . Сравнивая результат (2.78), легко увидеть, что

$$\sum_{\text{spin}} \langle 0 | \psi_\alpha^+(x) | p \rangle \langle p | \bar{\psi}_\beta^-(x') | 0 \rangle = \frac{e^{-ip(x-x')}}{2Vp_0} (\hat{p} + m)_{\alpha\beta}. \quad (2.81)$$

Это выражение пригодится нам, как только мы захотим просуммировать по состояниям с одинаковым импульсом, но с различными спинами.

Такое же вычисление перехода вакуум-вакуум можно выполнить и для других полей. Для скалярного поля оказывается, что

$$\langle 0 | \Phi(x) \Phi(x') | 0 \rangle = -i\Delta^+(x - x'). \quad (2.82)$$

Однако в случае электромагнитного поля определение вакуума не фиксирует математического ожидания  $A^+A^-$ . Здесь остается произвол, соответствующий градиентному преобразованию. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_j(x) A_k(x') | 0 \rangle &= \langle 0 | A_j^+(x) A_k^-(x') | 0 \rangle = \\ &= ig_{jk} D^+(x - x') + \lambda_{,j}(x) \lambda_{,k}(x'). \end{aligned} \quad (2.83)$$

В силу градиентной инвариантности в реальных случаях мы можем полагать  $\lambda = 0$ .

Чтобы вычислять матричные элементы более сложных выражений, удобно записывать их в виде сумм произведений  $\dots$ , т. е. прокоммутировать операторы так, чтобы все операторы поглощения  $\psi^+$  стояли справа от всех операторов рождения  $\psi^-$ . Если провести это для произведения двух спинорных выражений:  $\bar{\psi}\psi$ , то, применяя перестановочные соотношения, получим<sup>\*</sup>:

<sup>\*</sup> Внимательный читатель восстановит порядок спиновых индексов.

$$\begin{aligned}
& : \bar{\psi}(1) \psi(1) : : \bar{\psi}(2) \psi(2) : = : \bar{\psi}(1) \psi(1) \bar{\psi}(2) \psi(2) : + \\
& + i [\bar{\psi}^+(1) S^+(12) \psi^+(2) + \psi^+(1) S^-(21) \bar{\psi}^+(2) - \\
& \quad - \psi^-(2) S^+(12) \bar{\psi}^-(1) - \bar{\psi}^-(2) S^-(21) \psi^-(1) + \\
& \quad + \bar{\psi}^-(1) S^+(12) \psi^-(2) + \bar{\psi}^-(1) S^+(12) \psi^-(2) + \\
& \quad + \psi^-(1) S^-(21) \bar{\psi}^-(2) + \psi^-(1) S^-(21) \bar{\psi}^-(2)] - \\
& \quad - S^+(12) S^-(21), \tag{2.84}
\end{aligned}$$

где вместо аргументов  $x_1, x_2$  мы пишем только индексы, т. е.  $\psi(1)$  вместо  $\psi(x_1)$  и т. д.

Здесь мы видим прежде всего, что вакуумное ожидание (2.84) не исчезает, но равно  $-S^+(12)S^-(21)$ . Это означает, что квадратичная флуктуация тока  $j(x)$  в вакуумном состоянии не обращается в нуль, но

$$(\Delta j)^2 = \langle 0 | \{j - \langle 0 | j | 0 \rangle\}^2 | 0 \rangle = \langle 0 | j^2 | 0 \rangle - \langle 0 | j | 0 \rangle^2 \tag{2.85}$$

равна бесконечной величине  $\gamma S^+(0) \gamma S^-(0)$ . Поэтому приходится рассматривать квадрат флуктуации тока в конечном пространственно-временном объеме \*):

$$\begin{aligned}
[\Delta \int_V dx j_k(x)]^2 &= \langle 0 | \int_V dx dx' j_k(x) j_k(x') | 0 \rangle = \\
&= -e^2 \int_V dx dx' \text{Sp} [\gamma_k S^+(x-x') \gamma_k S^-(x-x')] \tag{2.86}
\end{aligned}$$

(здесь нет суммирования по  $k$ ).

Источником этого флуктуационного эффекта является, конечно, то обстоятельство, что в акте измерения система концентрируется в малом объеме, что порождает пары. Если этот объем имеет резкие границы, то среднеквадратичная флуктуация становится бесконечной. В частности, к бесконечным флуктуациям приводит интегрирование по некоторому пространственному объему, как то легко видеть, записывая (2.86) в импульсном пространстве. Позднее мы увидим, что (2.84) на самом деле соответствует рождению пар электрическим полем, которое необходимо, чтобы ограничить объем.

Важно заметить, что среднеквадратичная флуктуация полного заряда равна нулю. Физически так и должно быть, так как индуцированная поляризация не может изменить полный заряд.

Рассмотрим теперь, как изменяются флуктуации плотности тока в присутствии частиц. Чтобы ответить на этот

\*) Отметим, что  $\langle 0 | j | 0 \rangle = 0$  и что спиновые индексы суть

$$j_{\alpha\beta} j_{\delta\gamma} S_{\beta\delta}^+ S_{\alpha\gamma}^-.$$

вопрос, вычислим математическое ожидание произведения двух  $j$  в состоянии  $|u\rangle$ , в котором присутствует один электрон с волновой функцией  $u$ . Чтобы написать выражение в частотно-упорядоченной форме, мы используем (2.84). Перемножая возникающие  $\gamma$ -матрицы, найдем, что

$$\begin{aligned} \langle u | j_k(x) j_k(x') | u \rangle = & e^2 [\bar{u}(x) \gamma_k i S^+(x-x') \gamma_k u(x') - \\ & - \bar{u}(x') \gamma_k i S^-(x'-x) \gamma_k u(x)] - \\ & - e^2 [\text{Sp}(\gamma_k S^+(x-x') \gamma_k S^-(x-x'))]. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Мы видим, что это выражение состоит из части, зависящей от волновой функции  $u$  и не зависящего от  $u$  остатка точно такого же, какой мы получили бы, если бы электрона не было. Таким образом, первые два члена характеризуют влияние электрона, в то время как последний представляет собой вклад всегда существующих флуктуаций вакуума. Ниже мы рассмотрим только первые. Выясним сначала, что получится, если проинтегрировать  $j$  по пространственному объему, большому по сравнению с комптоновой длиной волны электрона. Выражения упрощаются, если в качестве  $u$  взять плавную волновую функцию, не содержащую компонент импульса, больших  $m$ . Так как для пространственно-подобных аргументов  $S^+$  и  $S^-$  убывают как  $e^{-mr}$ , то они действуют в этом случае, как  $\delta$ -функции. Интегрируя по  $x$  и  $x'$  по некоторому общему для них объему, мы можем скомбинировать два выписанных выше выражения в одном, где в середине будет стоять  $S^+ - S^- = S^1$ . Так как для  $x_0 = 0$  (см. (Д2.9) и (Д2.19))

$$\int dV S_{\alpha\beta}^1(x) = -i\delta_{\alpha\beta}, \quad (2.88)$$

то мы найдем в этом случае, что

$$\int_V dV dV' \langle u | j_k(x) j_k(x') | u \rangle \cong g_{kk} e^2 \int_V dV u(x) u(x). \quad (2.89)$$

Член с  $S^+$  всегда дает положительный вклад в (2.87), в то время как член  $S^-$ , который выражает уменьшение вакуумного ожидания из-за присутствия электрона и действия принципа Паули<sup>\*</sup>, может дать отрицательный вклад. Действительно, при  $k = 1, 2, 3$  член  $S^-$  преобладает и делает выражение отрицательным. Полное выражение (2.87) конечно всегда положительно, так как отрицательный вклад от электрона всегда с избытком компенсируется вакуумным членом, который в данном случае бесконечен и положителен. Первый,

<sup>\*</sup> Если все электронные состояния заняты, то флуктуации тока нет.

однако, конечен и равен по порядку величины  $e^2$ , умноженному на вероятность найти электрон в рассматриваемом объеме. Чтобы убедиться в этом, вспомним, что по предположению волновая функция  $u$  не содержит высокоимпульсных компонент, так что  $\bar{u}(x)u(x) \sim u^\dagger(x)u(x)$  есть плотность частиц. Отметим также, что (2.89) не содержит скорости электрона  $v$ .

Это весьма удивительно. Для квадрата тока можно было бы ожидать величину порядка  $e^2v^2$ , так как  $\int dV \langle u | j(x) | u \rangle \sim \sim ev$ . Истоки такого результата лежат в явлении, которое обычно, называют «Zitterbewegung» — «дрожанием электрона», если о нем упоминают при элементарном обсуждении уравнения Дирака. Там поясняют его тем, что электрон движется в любом направлении со скоростью света, так как, скажем,  $(i\gamma_x)^2 = 1$ . Однако нельзя уравнение Дирака подобно уравнению Шредингера рассматривать как квантовомеханическое описание одной частицы; поэтому аргументы такого рода не умеют здесь большой силы. Уравнение Дирака можно последовательно интерпретировать только в рамках теории квантованных полей или эквивалентных методов, поэтому мы обсудим «дрожание» с этой точки зрения несколько подробнее.

Если ввести «полный ток»  $\mathbf{J} = \int dV \mathbf{J}(x)$ , то мы найдем, что

$$[\mathbf{J}, \psi(x)] = -e\gamma_0\boldsymbol{\gamma}\psi(x). \quad (2.90)$$

(Следует помнить, что  $\mathbf{J}_k$  не зависит от  $x_0$  и это уравнение справедливо только, если  $\psi$  и  $\mathbf{J}$  взяты при одинаковом  $x_0$ .) Как и в случае спина, мы заключаем отсюда, что собственные значения  $\mathbf{J}_k$  суть  $\pm e$ , так как  $(\gamma_0\boldsymbol{\gamma})^2 = +1$ . Однако нельзя построить собственные состояния  $\gamma_0\boldsymbol{\gamma}$  из положительно-частотного решения уравнения Дирака, так что собственные состояния  $\mathbf{J}$  не могут быть одноэлектронными. Это можно понять и из того, что  $\mathbf{J}$  не коммутирует с  $N$ . Таким образом, состояние, в котором заряд движется со скоростью света, — это очень сложное возбужденное состояние уравнения Дирака с некоторыми частными фазовыми соотношениями между положительными и отрицательными частицами.

Казалось бы можно утверждать, что электрон не мыслим движущимся со скоростью света, однако, как показывают аномальные «флуктуации» тока, на него воздействует «дрожание», которое в элементарном изложении представляется в виде зигзагообразного движения электрона с амплитудой  $\sim m^{-1}$ . Подчеркнем, что это обстоятельство только частично обязано квантовой теории поля, ибо, как мы обсуждали

выше, электрон во всяком случае имеет неопределенность в координате, связанную с тем, что он — релятивистская частица, т. е. неопределенность того же порядка, что и зигзагообразное движение, и которую нельзя отличить от него. Флуктуации тока для частиц со спином  $1/2$  и  $0$ , однако, различны; разница связана со спином.

Чтобы увидеть это различие, воспользуемся разбиением тока на орбитальную и спиновую части (см. Д1.13). Мы увидим, что орбитальная часть подобно току скалярных частиц, обладает флуктуациями только такого порядка, какого следует ожидать из уравнения Шредингера. Действительно, используя

$$j_k^{(\text{orb})} = \frac{ie}{2m} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_k \psi, \quad (2.91)$$

мы получим

$$\begin{aligned} & \int \langle u | j^{\text{orb}}(x) j^{\text{orb}}(x') | u \rangle dV dV' = \\ & = -\frac{ie^2}{4m^2} \int dV dV' \bar{u}(x) \overleftrightarrow{\partial}_k S^1(x-x') \overleftrightarrow{\partial}_k u(x') \cong \\ & \cong \frac{e^2}{m^2} \int dV \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

В этих вычислениях мы воспользовались формулой (2.88)

$$\int dV S_{\alpha\beta}^1(x) = -i\delta_{\alpha\beta}.$$

(См. также (Д2.9) и (Д2.19)).

Для скалярного поля соответствующей величиной будет

$$+\frac{ie^2}{4} \int dV dV' \bar{u}^{\dagger}(x) \overleftrightarrow{\partial}_k \Delta^1(x-x') \overleftrightarrow{\partial}_k u(x'), \quad (2.93)$$

причем разница в знаке по сравнению со случаем спина  $1/2$  компенсируется разницей в знаке выражения

$$\int dV \Delta^1(x) = i/m. \quad (2.94)$$

Следовательно, мы получили то же выражение для квадрата флуктуации орбитального тока, что и в случае спинорного поля.

Величина интеграла по  $V$  зависит от ширины волнового пакета  $u$  в импульсном пространстве и может быть сделана малой порядка  $e^2 v^2$ . Аномальный член порядка  $e^2$  возникает из спиновой части и у скалярных частиц отсутствует. Таким образом, мы можем сказать, что спин электрона, будучи далек от области больших квантовых чисел и классического

описания, проявляется в флуктуациях тока, устроенных как раз так, чтобы привести к собственным механическому и магнитному моментам электрона. Тот факт, что величина фактора Ланде для электрона равна двум, как это бывает только в системах, где представлены оба знака заряда, также показывает, что спин связан с флуктуациями виртуальных пар в области порядка  $m^{-1}$ .

Однако все величины, обсуждавшиеся выше, не следует принимать слишком всерьез, так как все они — это пространственные интегралы локальных переменных при точно фиксированном времени. Мы видели, что они обладают бесконечными среднеквадратичными флуктуациями. Поэтому их нельзя называть наблюдаемыми, ведь любой процесс изменения занимает какое-то время, и следует рассматривать локальные переменные, проинтегрированные по некоторому пространственно-временному объему с нерезкими границами. Чтобы сделать вакуумные флуктуации малыми, надо размазать границы объема по области, большей, чем  $m^{-1}$ . В этом случае, однако, получается, что  $\langle 1 | \bar{j}^2 | 1 \rangle \sim e^2 v^2 \int dV \bar{u} u$  с  $\bar{j} = \int dV j$ . Таким образом, при усреднении по временам, большим, чем  $m^{-1}$ , флуктуации, связанные с «дрожанием», исчезают, как и следовало ожидать, ибо их частоты приблизительно равны  $m$ .

В заключение рассмотрим флуктуации в состояниях, где имеется произвольное число частиц.

Для состояния, в которых имеется данное число электронов, скажем  $n$ , с дираковыми функциями  $u_i$ , можно рассмотреть следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned} \langle \text{все } u, \text{ кроме } u_k | \psi^+(x) | \text{все } u \rangle &= u_k(x), \\ \langle \text{все } u, \text{ кроме } u_i \text{ и } u_k | \psi^+(1) \chi^+(2) | \text{все } u \rangle &= \\ &= u_i(1) u_k(2) - u_i(2) u_k(1) \end{aligned} \quad (2.95)$$

и т. д. Таким способом мы можем вычислить математическое ожидание выражения (2.84) в состоянии, где имеется  $n$  электронов с дираковыми функциями  $u_i$

$$\begin{aligned} \langle u_i | \bar{\psi}(1) \psi(1) : \bar{\psi}(2) \psi(2) : | u_i \rangle &= \langle u_i | \bar{\psi}(1) \psi(1) \bar{\psi}(2) \psi(2) : | u_i \rangle + \\ &+ i \langle u_i | \bar{\psi}^-(1) S^+(12) \psi^+(2) - \bar{\psi}^-(2) S^-(21) \psi^+(1) | u_i \rangle = \\ &= \sum_{ik} (\bar{u}_i(1) u_i(1) \bar{u}_k(2) u_k(2) - \bar{u}_i(1) u_k(1) \bar{u}_k(2) u_i(2)) + \\ &+ i \sum_i (\bar{u}_i(1) S^+(12) u_i(2) - \bar{u}_i(2) S^-(21) u_i(1)). \end{aligned} \quad (2.96)$$



Если мы вычисляем для такого состояния среднеквадратичную флуктуацию

$$\begin{aligned} \left[ \Delta \int dx g(x) \right]^2 &= \langle u_i | \int dx dx' g(x) g(x') | u_i \rangle - \\ &- \langle u_i | \int dx g(x) | u_i \rangle \langle u_i | \int dx' g(x') | u_i \rangle, \end{aligned} \quad (2.97)$$

где  $g = \bar{\psi}\phi$ , то первый член правой части последней суммы в (2.96) компенсирует последний член в (2.97), так что среднеквадратичная флуктуация получается интегрированием оставшихся трех членов в (2.96). Второй член первой суммы в (2.96) — это хорошо известный обменный член, возникающий из-за антисимметрии волновых функций. Слагаемые второй суммы — типичные результаты процедуры квантования, поскольку они содержат  $S$ -функции и исчезли бы для коммутирующих величин. Как мы сейчас покажем, они приводят как раз к той части среднеквадратичной флуктуации, которая соответствует классической корпускулярной картине. Как и выше, примем, что  $u$  не слишком сильно меняются в пространственной области порядка  $m^{-3}$  и проинтегрируем (2.96) по объему  $V$ , много большему, чем  $m^{-3}$ . Как и в (2.88) и (2.89), мы получим

$$\begin{aligned} i \sum_i \int dV_1 dV_2 \bar{u}_i(1) \gamma_0 S^i(12) \gamma_0 u_i(2) &= \\ = \sum_i \int dV \bar{u}_i(x) u_i(x) &= n \frac{V}{V_0}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

В последнем шаге в (2.98) мы допустили, что  $V$  заключен в большой нормировочный объем  $V_0$ , внутри которого плотность  $\bar{u}u$  постоянна и  $u$  из (2.98) нерелятивистски нормированы.

Если объем  $V_0$  содержит  $n$  частиц, то в классической корпускулярной картине среднее число частиц в частном объеме  $V$  равно  $nV/V_0 = \bar{n}$  и вероятность  $w(m)$  того, что в объеме  $V$  находится  $m$  частиц, дается распределением Пуассона  $w(m) = e^{-\bar{n}} (\bar{n})^m / m!$  \*). Среднеквадратичная флуктуация числа частиц в  $V$

$$(\Delta n)^2 = \sum_m w(m) m^2 - \left( \sum_m w(m) m \right)^2 = \bar{n}$$

согласуется с (2.98).

\*) Это верно только, если орбиты частиц совершенно независимы, т. е. если они не взаимодействуют.

Обсуждавшийся выше обменный член обычно пропорционален квадрату числа частиц в объеме. Итак, среднеквадратичная флуктуация складывается из корпускулярной и волновой частей и в существенном равна  $\bar{n} - \bar{n}^2 = \bar{n}(1 - \bar{n})$ . Для статистики Бозе вычисления проходят таким же точно образом, только антикоммутаторы заменяются на коммутаторы и изменяется знак обменного члена. Это ведет к выражению вида  $\bar{n}(1 + \bar{n})$  вместо предыдущего. Таким образом, для ферми-частиц флуктуации уменьшаются, а для бозе-частиц — увеличиваются по сравнению с флуктуацией классических частиц. За разницу ответственен обменный член, который возникает из-за интерференции волн, принадлежащих разным частицам; именно в нем проявляется волновой аспект поля.

Мы можем связать эти флуктуационные эффекты с всегда обсуждаемой тенденцией для бозе-частиц находиться рядом, а для ферми-частиц — вдалеке друг от друга. При наблюдении бозонов, скажем фотонов, объединенных в мощные пучки, счет не следует распределению Пуассона, как это можно было ожидать. Наоборот, в нем видно предпочтение к группировке. Формулы для среднего квадрата флуктуаций были получены из термодинамических соображений еще до возникновения квантовой теории поля. Интересно отметить эту связь теории поля с классической физикой.

В заключение попробуем представить себе порядки величин явлений. Если подсчитать средний квадрат вакуумных флуктуаций среднего значения электрического потенциала в пространственном объеме  $L^3$ ,  $\bar{A} = L^{-3} \int dV A(x)$ , то оказывается, что

$$(\Delta \bar{A})^2 = L^{-6} \int dV \cdot dV' \frac{1}{2i} D^1(x - x') \sim L^{-2}, \quad (2.99)$$

или

$$\Delta \bar{A} \sim L^{-1}.$$

В первом параграфе при элементарном рассмотрении мы получили то же значение.

Этот результат не справедлив, правда, ни для продольных, ни для временных компонент, а значит, скажем, и для статического потенциала, так как никакое удовлетворяющее условию Лоренца состояние не может быть собственным состоянием оператора числа фотонов этих компонент.

Вычисляя вакуумную флуктуацию тока, мы получим ее для среднего за время  $T$  заряда в объеме  $L$  с поверхностью, размазанной на толщину  $b$

$$\Delta e = e \frac{L}{T(mb)^{1/2}}.$$

Эти флуктуации не будут существенно больше элементарного заряда, если мы не хотим определять поверхность точнее, чем комптонова длина волны, и измерять заряд быстрее, чем за время, пока луч света пересечет объем.

Так как энергия и напряженность электрического поля не коммутируют, то любое измерение напряженности поля всегда связано с флуктуацией в энергии и, следовательно, в числе фотонов. Справедливо также и обратное утверждение. Если в нашем распоряжении много фотонов, то из состояний с различным их числом можно сконструировать такое состояние, в котором напряженность поля определена точно. В макроскопических электрических явлениях это всегда так.

Например, представим себе, что электрическое поле  $1 \frac{в}{см}$  в  $1 см^3$  строится из волн длиной  $0,1 см$ . Тогда в этой области будет  $10^{10}$  фотонов. Передатчик мощностью  $100 квт$ , работающий на стометровых волнах, излучает  $10^{30}$  фотонов/сек. так что на расстоянии  $100 км$  он все еще поддерживает поток около  $10^{15}$  фотонов/сек·см<sup>2</sup>.

Напротив, в излучении одного отдельного атома редко участвует больше одного фотона. Поэтому в описании электромагнитного поля для макроскопических явлений уместна полевая картина, в то время как для элементарных процессов — корпускулярная.

---

ПОЛЯ С ВНЕШНИМИ ИСТОЧНИКАМИ

## § 8. Общие формулы

Свободные поля, рассматривавшиеся до сих пор, сами по себе физически не интересны, так как они ненаблюдаемы; частицы проявляются только во взаимодействии с другими частицами. Несмотря на это, свойства свободных частиц лягут в основу последующего изложения, так как они предоставляют нам адекватную основу для описания волновых и корпускулярных свойств изолированных частиц. В частности, в следующих параграфах мы изучим действие механизма, который порождает изучаемые частицы, т. е. внешние источники полей, по-прежнему пренебрегая взаимодействием самих частиц. Под словом «внешний» мы понимаем, что источник считается заданной функцией координат и времени, а обратное действие поля на источник не учитывается. Это естественно, если, например, источник — макроскопическое тело, так что квантовые эффекты малы или их легко оценить. Математически мы выражаем это, ставя в соответствие источнику обычное число  $\rho(x)$ , т. е. функцию, умноженную на единичный оператор в гильбертовом пространстве. Введение источника эрмитова поля  $\psi$  означает добавление члена  $eL' = e\rho(x)\psi$  к «свободному» лагранжиану  $L_0$ .

Здесь  $e$  — обычное вещественное число, которое характеризует «мощность» источника. В результате в уравнениях поля появляется неоднородный член  $\rho$ . В этом простом случае можно даже явно решить задачу нахождения операторов, которые удовлетворяют новым уравнениям поля и перестановочным соотношениям, как было это сделано для свободных полей. Однако во многих задачах такая процедура неосуществима, поэтому мы выведем теперь общий метод рассмотрения члена взаимодействия.

С этой целью допустим, что решение задачи с лагранжианом  $L = L_0 + eL'$  можно разложить в ряд по  $e$ .

Коэффициенты разложения могут быть найдены из общего вариационного принципа (1.54), который определяет изменение функции преобразования при инфинитезимальном изменении  $L \rightarrow L + \delta L$ . Итерируя, мы получим разложение в ряд по  $e$ . Полученные таким образом формулы зависят от сделанного допущения, что  $L_0$  — свободный лагранжиан, а  $L'$  —

член с источниками. Они имеют более общее значение, и их можно будет использовать и в следующей части книги. Однако мы ограничимся случаями, когда  $L'$  не содержит производных по времени, вследствие чего канонически сопряженное поле, а значит, и канонические перестановочные соотношения будут иметь один и тот же вид для задач с  $L'$  и без  $L'$ . Поэтому все величины, построенные из канонических величин (поля и его канонически сопряженной), взятых в некоторый момент времени, будут связаны в этих двух задачах одним и тем же унитарным преобразованием.

Применяя общий вариационный принцип (1.54) для  $\delta L = \delta e L'$ , мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta e} \langle o(\sigma_1) | o''(\delta_2) \rangle &= i \langle o'(\sigma_1) | \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} L'(x) | o''(\sigma_2) \rangle = \\ &= i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx \langle o'(\sigma_1) | o'''(\sigma_x) \rangle \langle o'''(\sigma_x) | L'(x) o''''(\sigma_x) \rangle \times \\ &\quad \times \langle o''''(\sigma_x) | o''(\sigma_2) \rangle, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\sigma_x$  — пространственноподобная поверхность, проходящая через  $x$ , а по всем состояниям, индексы которых повторяются дважды, ведется суммирование. Мы переписали (3.1), чтобы облегчить взятие второй вариации от  $\langle 1 | 2 \rangle$  по  $e$ . При повторном варьировании среднее выражение в правой части (3.1) инвариантно, так как унитарное преобразование, порождаемое  $\delta L$ , преобразует собственные состояния и операторы эквивалентным образом\*). Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\delta e^2} \langle o'(\sigma_1) | o''(\sigma_2) \rangle &= i^2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx \int_{\sigma_x}^{\sigma_2} dx' \langle o'(\sigma_1) | L'(x') | o'''(\sigma_x) \rangle \times \\ &\quad \times \langle o'''(\sigma_x) | L'(x) | o''''(\sigma_x) \rangle \langle o''''(\sigma_x) | o''(\sigma_2) \rangle + i^2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx \int_{\sigma_x}^{\sigma_2} dx' \times \\ &\quad \times \langle o'(\sigma_1) | o'''(\sigma_x) \rangle \langle o'''(\sigma_x) | L'(x) | o''''(\sigma_x) \rangle \langle o''''(\sigma_x) | L'(x') | o''(\sigma_2) \rangle = \\ &= i^2 \langle o'(\sigma_1) | P \int dx dx' L'(x) L'(x') o''(\sigma_2) \rangle. \end{aligned} \quad (3.2)$$

\*) Читатель, которому это место покажется трудным, должен вспомнить, что ведь в элементарной квантовой механике матричный элемент  $\langle x' | f(x, P) | x'' \rangle$  в шредингеровом представлении также не зависит от формы гамильтониана. Это получается сразу, если рассмотреть зависящие от времени операторы  $x(t) = e^{-iHt} x e^{iHt}$ . Аналогично мы допускаем, конечно, что  $|o'\rangle$  не зависит явно от  $e$ . Оно может, например, выражаться через собственные состояния  $N$ , построенные из операторов рождения и уничтожения.

Символический оператор  $P$ , который мы ввели здесь, приводит временное упорядочивание последовательных множителей в произведении \*) и определяется следующим образом:

$$P(A(x)B(x')) = \begin{cases} AB & \text{при } x_0 > x'_0, \\ BA & \text{при } x_0 < x'_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Если мы продолжим этот процесс, то придем к ряду Тейлора для матрицы преобразования  $U$ , в котором разложение ведется по  $e$ , а коэффициенты — упорядоченные по времени произведения свободных операторов поля

$$U_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} dx_1 \dots dx_n P(L'(x_1) \dots L'(x_n)), \quad (3.4)$$

или символически

$$U_{12} = P e^{ie \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} dx L'(x)}. \quad (3.5)$$

Если не пользоваться оператором  $P$ , это можно записать так:

$$U_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} (ie)^n \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} dx_1 \int_{\sigma_2}^{\sigma_{x_1}} dx_2 \dots \int_{\sigma_2}^{\sigma_{x_{n-1}}} dx_n (L'(x_1) \dots L'(x_n)). \quad (3.6)$$

Матрица  $U$  определяет изменение собственных состояний операторов во времени под действием возмущения  $eL'$ . Это будет сейчас показано более точно. Обозначим через  $|o(\sigma)\rangle$  собственные состояния операторов, удовлетворяющих уравнениям поля, вытекающим из  $L = L_0 + eL'$ . Собственные состояния, которые получаются, если положить в этом лагранжиане  $e = 0$ , мы записываем как  $|o(\sigma)\rangle$ . Эти состояния будут обладать различной зависимостью от времени, так как эти два рода операторов удовлетворяют разным уравнениям поля. Если случится, что  $|o(\sigma)\rangle$  совпадает с  $|o(\sigma)\rangle$  в какой-нибудь частный момент времени, скажем  $\sigma_2$ , то они будут различаться во все другие времена.  $U_{12}$  выражает это изменение посредством следующего уравнения, суммирующего содержание (3.2) и (3.4):

$$\langle o'(\sigma_1) | o''(\sigma_2) \rangle = \langle o'(\sigma_1) | U_{12} | o''(\sigma_2) \rangle. \quad (3.7)$$

Следовательно, вероятность перехода  $|\langle o'(\sigma_1) | o''(\sigma_2) \rangle|^2$  из собственного состояния  $|o''\rangle$  оператора  $O$  в момент  $\sigma_2$

\*) Операция  $P$  имеет релятивистски инвариантный смысл, если ее применять к операторам, коммутирующим в пространственно-подобных точках.

в собственное состояние  $|\mathbf{o}'\rangle$  оператора  $\mathbf{O}$  в момент  $\sigma_1$  определяется матричным элементом  $U_{12}$  между соответствующими собственными состояниями свободных операторов \*).

Используя, например, (3.5), легко проверить, что оператор  $U$  унитарен

$$U_{12}^{-1} = U_{21} = U_{12}^\dagger$$

и обладает групповым свойством:

$$U_{13} = U_{12} U_{23}.$$

Если мы определим  $O(x)$  так, чтобы он совпадал с  $\mathbf{O}(x)$  в какой-нибудь момент, скажем  $\sigma_2$ , тогда унитарным преобразованием, переводящим  $O(x)$  в  $\mathbf{O}(x)$ , будет как раз  $U_{x_2}$ , так как  $U_{x_2}$  описывает изменение в движении собственного вектора под влиянием  $L'$ .

$$\mathbf{O}(x) |\mathbf{o}'(\sigma_x)\rangle = U_{2x} O(x) U_{x_2} U_{2x} |\mathbf{o}'(\sigma_x)\rangle = \mathbf{o}' |\mathbf{o}'(\sigma_x)\rangle.$$

Это позволяет нам получить явное выражение  $\mathbf{O}(x)$  через свободные полевые операторы между  $\sigma_2$  и  $\sigma_x$

$$\begin{aligned} \mathbf{O}(x) &= U_{\sigma_x} O(x) U_{x\sigma_2} = O(x) + ie \int_{\sigma_2}^{\sigma_x} dx' [O(x), L'(x')] + \\ &+ \frac{1}{2} (ie)^2 \int_{\sigma_2}^{\sigma_x} dx' \int_{\sigma_2}^{\sigma_{x'}} dx'' [[O(x), L'(x')], L'(x'')] + \dots \quad (3.8) \end{aligned}$$

Надо все время помнить, что это справедливо только, если  $\mathbf{O}$  конструируется из канонических величин таких, как  $A, \partial A, \bar{\psi}, \psi$ , но не  $\partial_0 \psi$ . Это различие происходит из-за временной зависимости  $U$ , которая ведет к тому, что

$$\partial/\partial x_0 (U\psi U^{-1}) \neq U((\partial/\partial x_0)\psi) U^{-1}.$$

Получив основные формулы для конструирования представителей полевых операторов в присутствии взаимодействия, мы перейдем теперь к обсуждению физического смысла сложившегося положения. В качестве первого его отличия от обсуждавшегося в предыдущем разделе отметим, что оператор  $N$  числа частиц теперь не инвариантен и не сохраняется во времени. Оба эти свойства были специфичны для линейной формы уравнений поля. Кроме того, мы должны различать здесь случай, когда  $L'$  содержит только полевые операторы и когда  $L'$  содержит заданные функции координат и времени типа обсуждавшихся в начале этого параграфа. Рассмотрение первого случая мы отложим до последней

\* Заметим, что  $U_{12}$  определяется здесь немного иначе, чем в (1.45).

главы. В последнем же случае отметим, что наличие в  $L'$  заданных функций координат и времени исключает возможность релятивистской инвариантности и, следовательно, существования инвариантного и сохраняющегося вектора энергии-импульса. Это означает просто, что внешний источник фиксирует некоторую выделенную систему отсчета и может передавать полю энергию и импульс.

Для облегчения дальнейшего обсуждения мы ограничимся линейной связью с внешним источником  $\rho(x)$ , исчезающим \*) при  $t \rightarrow \pm \infty$  и выберем за  $L_0$  лагранжиан свободных полей. В этом случае полевой оператор, например для бозе-поля  $\Phi(x)$ , совпадает по соображениям, которые станут ясными в следующем параграфе, со свободным  $\Phi_0(x)$  для времен до включения источника. Мы будем называть эти операторы  $\Phi^{\text{In}}(x)$ . Оператор

$$N^{\text{In}}(x) = i \int d\sigma_{\mu} (\Phi^{+\text{In}}(x)_{,\mu} \Phi^{-\text{In}}(x) - \Phi^{+\text{In}}(x) \Phi^{-\text{In}}(x)_{,\mu}) \quad (3.9)$$

можно, очевидно, интерпретировать как оператор числа бозонов, существовавших до включения источника.  $N^{\text{In}}$  и, следовательно, его собственные состояния

$$|n_{\text{In}}\rangle, \quad N^{\text{In}} |n_{\text{In}}\rangle = n |n_{\text{In}}\rangle$$

сохраняются, так что  $|n_{\text{In}}\rangle$  определяет ситуацию, которая развивается из начального состояния с  $n$  частицами. С другой стороны, если бы мы построили оператор числа частиц  $N(t)$  из полевых операторов

$$\Phi(x) = U_{-\infty t} \Phi^{\text{In}}(x) U_{t-\infty},$$

то он не сохранялся бы более. Как только будет включен источник,  $\Phi$  станет удовлетворять другому уравнению, нежели  $\Phi^{\text{In}}$ , а  $N(t)$  начнет отклоняться от  $N^{\text{In}}$ . Наглядно это можно представить себе как рождение частиц источником, так что всем существующим частицам нельзя сопоставить падающие.

Однако не все частицы, рожденные источником, достигнут бесконечности и будут наблюдаться как свободные кванты. Некоторые из них будут, по терминологии главы I, виртуальными. Мы сможем отличить реальные частицы лишь после того, как источник будет окончательно выключен.

\*) Это включение и выключение источника может показаться неосуществимым в случае электрического поля с  $L' = A_j j_j$ , где полный заряд должен сохраняться. В этом случае мы можем, например, при  $t \rightarrow -\infty$  размазать заряд по всему пространству так, чтобы он перестал быть эффективным.



Тогда  $\Phi(x)$  снова будет совпадать со свободным оператором поля, который, вообще говоря, отличается от  $\Phi^{\text{in}}$  и который мы будем называть  $\Phi^{\text{out}}$ . Если обозначать  $U_{\infty, -\infty}$  через  $S$ , то мы получим связь.

$$S^{-1}\Phi^{\text{in}}(x)S = \Phi^{\text{out}}(x). \quad (3.10)$$

Оператор  $N^{\text{out}} = S^{-1}N^{\text{in}}S$ , построенный из  $\Phi^{\text{out}}$ , представляет собой число частиц, остающихся после выключения источника. Оно будет отличаться от  $N^{\text{in}}$ , так что состояние с  $n$  out-частицами

$$\langle n_{\text{out}} | = \langle n_{\text{in}} | S$$

не будет соответствовать  $n$  in-частицам. Последнее будет смесью out-состояний с разными  $n$ , коэффициенты при них даются выражением

$$\langle n'_{\text{out}} | n_{\text{in}} \rangle = \langle n'_{\text{in}} | S | n_{\text{in}} \rangle.$$

Аналогично вектор энергии-импульса  $P$ , сконструированный из операторов  $\Phi$ , будет зависеть от времени. Постоянные операторы  $P^{\text{in}}$  и  $P^{\text{out}}$  не будут совпадать ни с  $P$ , ни друг с другом. Может, конечно, случиться, что  $N^{\text{in}} = N^{\text{out}}$ , в то время как  $P^{\text{in}} \neq P^{\text{out}}$ , иными словами, что число частиц сохраняется, а их энергия и импульс изменяются. Это означает, что частицы рассеялись на внешнем поле. Так как  $S$  определяет связь между in- и out-полями для всех операторов, выражаемых через поля, то он содержит полную информацию обо всех эффектах взаимодействия. Обычно in- и out-состояния называют физическими, так как они соответствуют начальной и конечной ситуациям действительного эксперимента. При этом бесконечные объем и временной интервал означают макроскопические интервалы, в то время как конечный интервал означает интервал атомных размеров.

Напротив, собственные состояния  $|n\rangle$  оператора  $N$ , обладающие свойствами

$$\Phi^+(x, t)|0\rangle = 0, |n\rangle = \Phi^-(x_1) \dots \Phi^-(x_n)|0\rangle_{t_1=\dots=t_n=t} = U_{-\infty t} |n_{\text{in}}\rangle,$$

трудно приготовить в действительности. Например, символ  $|0\rangle$  отвечает состоянию, в котором все частицы как реальные, так и виртуальные, порожденные источником, «погашены» в некоторый момент времени. Такие состояния называют «голыми» и они описывают «голый» источник, т. е. такой, с которого снята «шуба» виртуальных частиц \*).

\*) Физическое состояние иногда называют «одетым». Часто можно услышать, что гейзенбергов оператор  $\Phi(x)$  рождает «одетые» частицы, в то время как оператор в представлении взаимодействия  $\Phi^{\text{in}}(x)$  рождает

Таким образом,  $U_{t-\infty}$  содержит информацию, которая не используется прямо в эксперименте, но представляет несколько академический интерес. Вообще, когда говорят о частицах, подразумевают обычно физические частицы. При употреблении понятия «частицы» в этом смысле полевой оператор  $\Phi$  рождает не одну частицу, а скорее ту смесь частиц, которая характеризует «голую» частицу. Однако законы сохранения ограничивают количество вариантов смеси. Например, комплексное поле всегда изменяет заряд на единицу, так что оно может рождать заряженную частицу плюс пару противоположно заряженных частиц и так далее.

Мы используем эти идеи в следующих параграфах, чтобы рассмотреть задачи об электромагнитном поле с внешним источником и об электроны во внешнем электромагнитном поле. Эти две задачи существенно различны. Первой соответствует лагранжиан  $L' = (A_j)$ , линейный по полевым операторам, второй  $L' = A\bar{\psi}\psi$  ( $A$  не квантовано;  $\psi$  квантовано), билинейный по  $\psi$ . Вышние по полевым операторам члены в  $L'$  соответствуют взаимодействию квантов поля между собой и будут рассмотрены в последней главе.

## § 9. Излучение света

В этом параграфе мы рассмотрим задачу, определяемую лагранжианом

$$L = -1/2 A_{i,k} A^{i,k} - j_i(x) A^i(x), \quad (3.11)$$

где  $j_i(x)$  — заданная функция пространства и времени, удовлетворяющая критериям, введенным в предыдущем параграфе. Константу связи мы включим в  $j$ . Есть много путей решения этой задачи, но мы используем тот, который наиболее непосредственно вытекает из наших предыдущих рассуждений. Вспомним формулу (3.4), в которой для простоты обозначим  $A^{\text{in}}$  через  $A$ . Мы начнем с получения явного представления  $S$  через собственные состояния оператора  $N^{\text{in}}$ .

С этой целью приведем общий член (3.4)

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_m (j(1) \dots j(m) P(A(1) \dots A(m))) \quad (3.12)$$

«голые» частицы. Это просто недоразумение. В действительности дело обстоит как раз наоборот, если только представление взаимодействия не выбрано так, что оно совпадает с гайзенберговым в конечный момент времени. В этом последнем случае оба рода операторов порождают голые частицы. Однако с течением времени все «голые» частицы «одеваются», и в следующей главе книги мы рассмотрим, как можно породить с помощью оператора  $\Phi(x)$  физические состояния.

к нормальному виду, переставляя  $A^+$  направо. Этот процесс проводится по индукции; элементарная операция такого рода выполнялась при выводе (2.96) в § 7. Выбирая произвольное  $A$ , например  $A(k)$ , и используя перестановочные соотношения, мы можем установить тождество

$$\begin{aligned}
 & P(A(1) \dots (A^-(k) + A^+(k)) \dots A(m)) = \\
 & = i \sum_{k \neq l} (D^+(kl) \theta(kl) + D^+(lk) \theta(lk)) \prod_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} P(A(i)) + \\
 & + A^-(k) P \prod_{i \neq k} (A(i)) + P \prod_{i \neq k} (A(i)) A^+(k), \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

где  $\theta(kl) = \theta(x_k^0 - x_l^0)$ . Функция  $\theta(kl)$  отображает тот факт, что, судя по тому, расположена ли точка  $k$  позже  $l$  (по времени) или нет, мы наталкиваемся на данное  $A(l)$  либо коммутируя  $A^-(k)$  налево, либо же  $A^+(k)$  направо. Коммутация же  $A(l)$  с  $A^+(k)$  или  $A^-(k)$  приводит к  $D^+$ -функции.

Применяя этот прием к другим операторам  $A(m)$  в  $P$ -произведении, мы сможем преобразовать в конце концов  $P$ -произведение в частотно-упорядоченное нормальное произведение, которое будет иметь структуру типа

$$\sum \prod D_f : \prod A :. \quad (3.14)$$

Функция  $D_f$  появляется здесь согласно определению (Д2.7)

$$D_f(x) = D^+(x) \theta(x^0) + D^+(-x) \theta(-x^0).$$

Типичный член в (3.14) включает, скажем,  $k$  множителей  $D_f$ ,  $r$  множителей  $A^-$ ,  $m - 2k - r$  множителей  $A^+$  в комбинации типа:

$$\begin{aligned}
 & [D_f(12) \dots D_f(2k-1, 2k)] [A^-(2k+1) \dots A^-(2k+r)] \times \\
 & \times [A^+(2k+r+1) \dots A^+(m)].
 \end{aligned}$$

Координаты  $x_1, \dots, x_m$  могут, конечно, располагаться в написанной выше формуле в любом порядке, а числа  $r$  и  $k$  могут принимать любые неотрицательные целые значения, так чтобы выполнялось неравенство  $2k + r \leq m$ . Каждая из таких возможностей осуществляется в упорядоченном произведении точно один раз. Таким образом, суммирование в (3.14) происходит во всем возможном перестановкам индексов  $l, \dots, m$  (которые ведут к различным членам) и по всем допустимым значениям  $k$  и  $r$ .

Заметим теперь, что члены с одинаковыми  $k$  и  $r$  вносят в (3.14) одинаковый вклад, так как они отличаются друг от друга только нумерацией переменных интегрирования. Следовательно, в (3.14) можно ограничиться суммированием

только по  $k$  и  $r$ , умножив каждое слагаемое на число эквивалентных ему. Это число равно числу перестановок из  $m$  координат, поделенному на число таких перестановок, которые не дают ничего нового. Перестановки последнего типа — это перестановки двух точек в аргументе одной функции  $D_f$  и обмен аргументами между двумя функциями  $D_f$  или между двумя множителями  $A^+$ , или между двумя  $A^-$ . Таким образом, получается число  $m! / 2^k k! r! (m - 2k - r)!$ . Окончательно мы получаем следующее выражение для  $S$ -матрицы<sup>\*)</sup>:

$$\begin{aligned}
 S = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[ \frac{m}{2} \right]} \sum_{r=0}^{m-2k} \left( \frac{(-i)^m}{2^k k! r! (m - 2k - r)!} \right) \times \\
 & \times \int dx_1 \dots dx_m \left[ \prod_{j=1}^m j(j) \prod_{t=1}^k iD_f(2t-1, 2t) \times \right. \\
 & \left. \times \prod_{i=2k+1}^{2k+r} A^-(i) \prod_{i=2k+r+1}^m A^+(i) \right]. \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Общий член в (3.15) включает  $m - 2k - r$  операторов уничтожения и  $r$  операторов рождения. Если мы вычисляем матричный элемент перехода из вакуума в состояние с  $n$  фотонами, нас должны интересовать только те члены  $S$ -матрицы, которые не содержат ни одного оператора  $A^+$  и  $n$  операторов  $A^-$ :

$$\begin{aligned}
 \langle n | S | 0 \rangle = & \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \left[ \langle n \left| \prod_{i=1}^n j(i) A^-(i) \right| 0 \rangle \right] \times \\
 & \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \int dx_1 \dots dx_{2k} [j(1) \dots j(2k)] \times \\
 & \times iD_f(12) \dots iD_f(2k-1, 2k) = \frac{(-i)^n}{n!} e^{-\frac{1}{2}(\bar{n} + i^2)} \times \\
 & \times \int dx_1 \dots dx_n \langle n \left| \prod_{i=1}^n j(i) A^-(i) \right| 0 \rangle. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

<sup>\*)</sup>  $[a]$  — целая часть  $a$ . (Прим. перевод.)

Здесь мы просуммировали ряд в экспоненциальную функцию, показатель которой имеет действительную и мнимую части. Заметим, что

$$iD^1(12)^{\dagger} = iD^1(12):$$

$$\bar{n} + i\beta = \int dx_1 dx_2 j(1) j(2) iD_f(12) =$$

$$= \int dx_1 dx_2 j(1) j(2) \left[ \frac{i}{2} D^1(22) + i\bar{D}(12) \right]. \quad (3.17)$$

Мнимая часть здесь не представляет интереса<sup>\*)</sup>, так как вероятность перехода  $|\langle n | S | 0 \rangle|^2 = \omega_n$ , поэтому мнимая экспонента вносит в  $\omega_n$  лишь единичный множитель.

Соотношение (3.16) содержит, конечно, только переходы в состояния с  $n$  фотонами, имеющими пространственноподобное направление поляризации. Ведь  $A_0^-$  — это не оператор рождения, но скорее оператор уничтожения. Чтобы найти полную вероятность излучения  $n$  фотонов, мы должны просуммировать  $\omega$  по всем направлениям импульсов и по обоим состояниям поперечной поляризации. Однако, чтобы получить явно ковариантное выражение для вероятности излучения, можно распространить сумму на все четыре направления поляризации. Мы докажем ниже, что суммирование по четырем направлениям поляризации дает тот же результат для вероятности, что и суммирование по двум поперечным направлениям. Указанная процедура имеет то преимущество, что здесь сразу же видна лоренцева инвариантность полученного выражения. То что рассмотренное расширение суммирования не изменяет вероятности, есть фундаментальное следствие градиентной инвариантности, которая требует, чтобы вероятность излучения фотона, поляризованного вдоль направления вектора энергии-импульса, обращалась в нуль — ведь такое продольное поле может быть уничтожено градиентным преобразованием. С формальной стороны заметим, что матричный элемент для фотонов может быть записан формально в инвариантной форме  $e_i M^i$  (см. (2.62)): векторный индекс у  $M$  происходит от векторного индекса соответствующего тока. Градиентная же инвариантность требует, чтобы  $k_i M^i = 0$ . Сразу видно, что оно выполняется вследствие уравнения непрерывности  $k_i j^i(k) = 0$ . Если направить  $x_1$  вдоль пространственной части  $k$ , то так как  $k^2 = 0$ , имеем  $M^0 = M^1$ , или

$$- |M^0|^2 + |M^1|^2 + |M^2|^2 + |M^3|^2 = |M^2|^2 + |M^3|^2.$$

<sup>\*)</sup> Однако для точечного заряда она оказывается расходящейся и связана с бесконечной собственной энергией.

Иначе говоря, суммирование квадрата матричного элемента перехода по поперечным поляризациям 2 и 3 эквивалентно образованию скалярного произведения —  $(M^\dagger M)$ . При вычислении  $w$  мы приходим к выражению вида:

$$\Sigma_f \langle 0 | A^+(1) \dots A^+(n) | f \rangle \langle f | A^-(n+1) \dots A^-(2n) | 0 \rangle, \quad (3.18)$$

где сумма распространяется на все состояния с  $n$  фотонами. Так как мы показали, что сумма может включать все направления поляризации, то мы суммируем по полной системе состояний. Таким образом, вычисление полной вероятности излучения сводится, как и в (2.79), к вычислению вакуумного ожидания, а именно:

$$w_n = \frac{e^{-\bar{n}}}{(n!)^2} \int dx_1 \dots dx_n dx'_1 \dots dx'_n \left[ \prod_{i=1}^n j(i) \times \right. \\ \left. \times \prod_{i'=1}^n j(i') \langle 0 | \prod_{i=1}^n A^+(i) \prod_{i'=1}^n A^-(i') | 0 \rangle \right] = \frac{e^{-\bar{n}}}{n!} (\bar{n})^n. \quad (3.19)$$

Математическое ожидание опять вычислялось с помощью перестановки операторов  $A^+$  направо. При этом получается  $n!$  произведений  $n$  функций  $D^+$ , соответствующих  $n!$  возможным порядкам  $i \rightarrow i'$ , а каждое  $D^+$  дает множитель  $\bar{n}$ , так как

$$i \int dx_1 dx_2 j(1) j(2) D^+(12) = \int dx_1 dx_2 \frac{i}{2} [D^+(12) - D^-(12)]. \quad (3.20)$$

Соотношение (3.19) показывает, что фотоны излучаются согласно распределению Пуассона со средним числом фотонов  $\bar{n}$ \*). Среднеквадратичная флуктуация числа частиц  $(\Delta n)^2$  есть  $(\Delta n)^2 = \bar{n}$ , так что флуктуации излученной энергии пропорциональны  $\bar{n}$ . Распределение Пуассона означает, что фотоны излучаются независимо. Оно перестает быть справедливым при учете отдачи фотонов. Однако во многих случаях это хорошая аппроксимация: она подтверждается экспериментом с поглощением микроволн электронами.

\*) Как и должно быть,  $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = 1$ . Обозначение  $\bar{n}$  оправдывается тем,

что  $\sum_{n=0}^{\infty} n w_n = \bar{n}$ ;  $\bar{n}$  — это как раз среднее число излученных фотонов.

Если нас интересует не полная вероятность излучения  $n$  фотонов, а вероятность того, что  $n$  фотонов будут испущены в интервале импульсов  $\Delta k$ , то нужно по аналогии с (2.81) преобразовать выражения для  $\bar{n}$  в импульсное пространство. Используя (Д.2.8) и (0.4), получим:

$$\bar{n} = \int idx_1 dx_2 j(1) j(2) D^+(12) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int dk |j(k)|^2 \delta(k^2) dk^0. \quad (3.20)$$

Интегрируя только в интервале  $\Delta k$ , получим вероятность  $w_n$  излучения  $n$  фотонов в интервале  $\Delta$

$$w_{n, \Delta} = e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n}_\Delta)^n}{n!}, \quad \bar{n}_\Delta = - \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \delta(k^2) |j(k)|^2. \quad (3.21)$$

Из этого формализма ясно, что не только фотоны внутри одной области импульсов испускаются независимо, но и фотоны в разных импульсных областях тоже независимы друг от друга. В самом деле, если мы разделим интервал на два подынтервала  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ , то получим, очевидно,  $\bar{n}_\Delta = \bar{n}_{\Delta_1} + \bar{n}_{\Delta_2}$ , и по теореме сложения распределений Пуассона

$$w_{n, \Delta} = e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n}_\Delta)^n}{n!} = \sum_{m=0}^n w_{m, \Delta_1} w_{n-m, \Delta_2}. \quad (3.22)$$

Аналогично, если мы разобьем все импульсное пространство на два интервала и рассмотрим вероятность  $w_{1, n}$  излучения  $n$  фотонов в первый интервал, независимо от того, что делается во втором, мы получим распределение Пуассона:

$$w_{1, n} = \sum_{m=0}^{\infty} w_{1n} w_{2m} = e^{-\bar{n}_1} \frac{(\bar{n}_1)^n}{n!}. \quad (3.23)$$

Вероятность излучения фотонов с определенным направлением поляризации  $e$  обладает теми же свойствами, что и вероятность излучения с определенным импульсом. Используя матричный элемент, мы видим [ср. (2.73)], что в этом случае надо заменить в нем  $\sum_i |j_i(k)|^2$  на  $|j_i(k) e^i|^2$ . Обозначая соответствующий интеграл через  $\bar{n}_e$ , имеем

$$w_{n, e} = e^{-\bar{n}_e} \frac{(\bar{n}_e)^n}{n!}. \quad (3.24)$$

Что касается математической структуры решения, заметим, что разложение в ряд по константе связи существует

\*) При этом окажется, что  $j(k)$  действительно пространственноподобно, так что  $\bar{n}$  и  $w$  положительны.

при  $\bar{n} < \infty$  и имеет бесконечный радиус сходимости. Но даже, если  $\bar{n}$  расходится в некоторой области импульсного пространства, эта область может быть исключена, и мы можем использовать (3.23) для получения конечного результата в остальных областях.

Чтобы проиллюстрировать предыдущее рассмотрение, вычислим  $\bar{n}$  для  $j(x)$  частного вида. Рассмотрим простейший нетривиальный случай, когда заряженная частица с массой  $M$  движется с постоянной 4-скоростью  $v_k$  вплоть до собственного времени  $s=0$ , а затем мгновенно достигает скорости  $v'_k$  ( $v^2 = v'^2 = 1$ ), с которой и продолжает двигаться равномерно. Это движение легко записывается через  $\theta$ -функции:

$$z(s) = sv\theta(-s) + sv'\theta(s). \quad (3.25)$$

Естественно, что такое мгновенное изменение движения физически совершенно бессмысленно, и мы рассматриваем (3.25) лишь как идеализацию изменения движения, которое не хотим рассматривать детально. В действительности переход от одной скорости к другой будет происходить в течение конечного интервала времени  $\Delta t$ , который в силу соотношения неопределенностей должен быть больше, чем  $1/\Delta E$  ( $\Delta E$  — изменение энергии). В системе покоя каждой из скоростей, т. е. в системе  $S$  или  $S'$ , где  $v$  или  $v'$  равны  $(1, 0, 0, 0)$  находим:

$$\Delta t > (\Delta E)^{-1} = 2(WM)^{-1}, \quad (3.26)$$

где  $W = -\frac{1}{4}(v - v')^2$ . Для каждой из систем  $S$  или  $S'$  эта величина будет равна  $\frac{1}{2}[(1 - \beta^2)^{-1/2} - 1]$ , где  $\beta$  — величина пространственной части  $v$  или  $v'$ , измеренной в  $S$  или  $S'$  соответственно. В предельных случаях  $\beta \rightarrow 0$  или  $\beta \rightarrow 1$  мы имеем  $W \cong \frac{1}{4}\beta^2$ , или  $W \cong \frac{1}{2}(1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

При таком движении ток не будет содержать частот больших, чем  $1/\Delta t$ , следовательно, частица не сможет излучать фотоны с энергией большей, чем  $\Delta E$ . Поэтому мы зададимся вопросом только о вероятности излучения фотонов с частотой меньшей  $L$ , где  $L$  может достигать максимального значения  $L_{\max} = 2WM$  в системе поля  $v'$ .

Фурье-образ тока<sup>\*)</sup>

$$j(x) = e \left[ \int_{-\infty}^0 ds v \delta(x - vs) + \int_0^{\infty} ds v' \delta(x - v's) \right] \quad (3.27)$$

\*) См. (1.10).



может быть записан (соответствующие формулы приведены в разделе обозначений) в виде:

$$j_n(k) = e \left( \int_{-\infty}^0 ds v_n e^{i(vk)s} + \int_0^{\infty} ds v'_n e^{i(v'k)s} \right). \quad (3.28)$$

или, используя формулу

$$\int_0^{\infty} e^{isx} dx = iP \left( \frac{1}{x} \right) + \pi \delta(x),$$

где  $P$  обозначает «главное значение», как

$$j_n(k) = ie \left( \frac{v'_n}{(v'k)} - \frac{v_n}{(vk)} \right) + e\pi [v'_n \delta(v'k) + v_n \delta(vk)]. \quad (3.29)$$

Член в квадратных скобках не дает вклада в (3.27) и (3.28), так как исключая одну точку  $k=0$ ,  $k^2$  и  $(vk)$  не могут быть равны нулю одновременно (заметим, что  $v^2=1$ ). Таким образом, мы получим\*) для  $\bar{n}$  выражение

$$\bar{n} = -e^2 (2\pi)^{-3} \int_{(v'k) < L} dk \left( \frac{v}{(vk)} - \frac{v'}{(v'k)} \right)^2 \delta(k^2) \theta(k_0). \quad (3.30)$$

Чтобы перевести зависимости от  $k$  в инвариантную форму, удобнее всего использовать тождество

$$\left( \frac{v}{(vk)} - \frac{v'}{(v'k)} \right)^2 = - \int_{-1}^{+1} dx \left( 2W - x \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{(Nk)^2},$$

где

$$N = \frac{(v+v')}{2} + x \frac{(v-v')}{2}, \quad N^2 = 1 + W(1-x^2). \quad (3.31)$$

Можно легко проинтегрировать (3.30) по  $k$ , выбирая систему покоя, связанную с времениподобным вектором  $N$ . Мы найдем:

$$e^2 (2\pi)^{-3} \frac{1}{2} \int_{\lambda}^L dk_0 k_0 d\Omega (k_0 [N_0 - N \cos \varphi])^{-2} = \frac{\alpha}{\pi} N^{-2} \ln \left( \frac{L}{\lambda} \right). \quad (3.32)$$

Так как интеграл расходится на нижнем пределе, то мы ввели обрезание снизу  $\lambda$ , при чем  $\bar{n} \rightarrow \infty$ , когда  $\lambda \rightarrow 0$ ; это

\*) В соответствии со сказанным выше, интеграл, вычисленный в системе покоя  $V'$ , берется по всем частотам меньшим  $L$ . Примерно тоже получится, если использовать систему покоя вектора  $N$ .

означает, что вероятность излучения конечного числа фотонов равна нулю, так как всегда излучается бесконечно много фотонов нулевой частоты. Это связано с бесконечным радиусом действия кулонова поля и означает, что для очень больших длин волн фотонная картина неадекватна. Так как волны, для которых  $\bar{n} > 1$ , имеют длину больше  $e^{137} m^{-1}$ , что значительно больше диаметра мира<sup>\*)</sup>, это явление («инфракрасная катастрофа») представляет собой чисто академический курьез. Поэтому мы будем продолжать использовать  $\bar{n}$ , зависящее от обрезания. Иначе говоря, нас интересует вероятность излучения наблюдаемых фотонов без фотонов нулевой частоты, и мы используем уравнение (3.21).

Осталось еще провести интегрирование по вспомогательной переменной  $x$ , что мы и сделаем:

$$\int_{-1}^1 dx \left( 2W - x \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{1 + W(1 - x^2)} = 2 \int_0^1 \frac{dx W(1 + x^2)}{1 + W(1 - x^2)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{8}{3} W & \text{при } W < 1, \\ 2 \ln W & \text{при } W > 1. \end{cases} \quad (3.33)$$

Большое и малое  $W$  соответствуют большому и малому изменению скорости (крайне релятивистский и нерелятивистский пределы).

Собирая результаты, мы получим<sup>\*\*)</sup> для среднего числа фотонов с частотой, меньшей  $L$  и большей  $\lambda$ ,

$$(\text{нерел.}) \quad \bar{n} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{2}{3} \beta^2 \ln \left( \frac{L}{\lambda} \right),$$

$$(\text{крайне рел.}) \quad \bar{n} = \frac{\alpha}{\pi} \ln(1 - \beta^2)^{-1/2} \ln \left( \frac{L}{\lambda} \right). \quad (3.34)$$

Для малых изменений скорости  $\beta$  мы получили результат оценки, приведенной в вводной главе (см. стр. 19). При  $\beta \rightarrow 1$  значение  $\bar{n}$  логарифмически растет.

Мы уже замечали, что при реальном возможном изменении скорости  $L$  не может превзойти  $2MW$ . Иначе говоря, вероятность излучения фотонов, ограниченных лишь условием  $k_0 > \lambda$ , растет при  $W \rightarrow \infty$  как  $\alpha (\ln W)^2$ . Поэтому для разум-

\*) Здесь  $e$  — основание натуральных логарифмов.

\*\*) Точным выражением будет:

$$\bar{n} = \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{L}{\lambda} \left[ -1 + \frac{1 + 2W}{2\sqrt{W(1+W)}} \ln \frac{\sqrt{1+W} + W}{\sqrt{1+W} - W} \right].$$

(Прим. перевод.)

ных энергий и частот вероятность того, что единично заряженная частица при отклонении испустит фотон, оказывается много меньшей единицы. Однако макроскопические, множественно заряженные частицы всегда будут излучать много фотонов и квантовая структура электромагнитного поля станет несущественной. Она вообще обнаруживается только из-за малости  $\alpha$ .

Вычисление  $\bar{n}$  нашим методом при других типичных формах  $j(x)$  ведет к аналогичным результатам и не будет более обсуждаться. Перейдем теперь к вычислению  $U_{t-\infty}$ . Сразу же видно, что оператор

$$- U_{t-\infty} = P e^{-\int_{-\infty}^t dx j(x) A(x)} \quad (3.35)$$

можно получить из  $S$ , заменяя в нем  $j(x')$  на  $j(x')\theta(t-t')$ , т. е. если мы выключим ток в момент  $t$ . Следовательно, даже если  $j(x)$  таково, что реальные фотоны не рождаются (если  $|j(k)|^2 \delta(k^2) = 0$ ),  $U_{t-\infty}$  все же будет содержать матричные элементы, связывающие состояния с различным числом фотонов. Это значит, что если мы представим  $|0_{in}\rangle$  через собственные состояния  $N(t)$ , то получим некоторое вероятностное распределение для наличия фотонов. Это и будут виртуальные фотоны, упомянутые во введении. Их можно определить как частицы, которые останутся, если внезапно отключить источник. Ток с  $|j(k)|^2 \delta(k^2) = 0$  не порождает поля в волновой зоне и все виртуальные частицы сосредотачиваются тогда в ближней зоне. Для фотонов условие Лоренца требует некоторого уточнения понятия виртуальные частицы, которое, однако, не представляется настолько интересным, чтобы детально обсуждать его.

Чтобы избежать этих усложнений, рассмотрим на мгновение скалярное поле с массой  $m$ . Статический точечный источник \*)

$$\rho(x) = e \int ds \delta(x - vs)$$

дает среднее число частиц

$$\bar{n}_{\text{virtual}} = (2\pi)^{-3} e^2 \int dk \delta(k^2 - m^2) \frac{1}{(vk)^2}. \quad (3.36)$$

Сравнивая это с (3.30), мы видим, что среднее число фотонов, испущенных при тормозном излучении, допускает ту

---

\*) Чтобы удовлетворить упоминавшемуся ранее условию, представим себе, что  $\rho(x)$  включается очень медленно, например, что  $\rho(x)_{\alpha \rightarrow 0} \rightarrow \rightarrow e^{-\alpha|x_0|} \rho(x)$ , это не изменит наших вычислений.

простую интерпретацию, которой мы уже пользовались во введении — оно равно среднему числу виртуальных фотонов в поле, равном разности полей до и после отклонения. Интеграл по  $n_{\text{virtual}}$  опять расходится, теперь при больших  $k_0$ . Таким образом, для точечного источника наш метод разложения неприемлем, так как собственные состояния  $N$  ортогональны к собственным состояниям  $N^{\text{in}}$ . Эта трудность опять имеет академический характер, так как она начинает сказываться при  $k_0 \sim e^{137} m$ , кроме того, она исчезает, когда  $\rho(x)$  имеет конечные размеры.

Поучительно сравнить  $|\!|_{\text{in}}^0\rangle$  в представлении собственных состояний  $N(t)$  с вектором состояния тяжелого атома с большим числом электронов. Последний будет собственным состоянием оператора числа частиц, в то время как  $|\!|_{\text{in}}^0\rangle$  — это смесь  $n$ -частичных состояний с разными  $n$ . Соответственно,  $n$ -частичные состояния, содержащиеся в смеси, нормированы не на единицу, а на число, меньшее единицы, равное вероятности найти  $n$  частиц. В этом существенная разница между элементарной квантовой механикой и квантовой теорией поля. В первой шредингера функция всегда нормирована на единицу, так как мы уверены, что частица находится хотя бы где-нибудь. В квантовой теории поля, однако, мы имеем дело с системами, где число частиц флуктуирует, так что частицы то рождаются, то исчезают. В остальном структура волновой функции  $n$ -частичного состояния в  $|\!|_{\text{in}}^0\rangle$  несложна. Это просто произведение одночастичных волновых функций, как и следовало ожидать, ибо частицы в этой тривиальной задаче независимы.

Обращаясь к (3.36), заметим, что, как мы и предполагали во введении, поведение волновых функций отдельных частиц в импульсном пространстве характеризуется величиной  $k_0^{-3/2}$ . Кроме этой зависимости, виртуальные частицы не имеют других обычных свойств. Так как  $N$  — не инвариант, наблюдатели в различных лоренцевых системах не придут к единому мнению относительно их числа. Более того, так как частицы образуют поле в ближней зоне, то их волновая функция в  $x$ -пространстве ведет себя, как  $e^{-mr}$ . Волновых функций, которым соответствовали бы орбиты с большими квантовыми числами, не окажется. Это значит, что у этих частиц нет ничего аналогичного классическому понятию пути — они исчезают прежде, чем сместятся на расстояние, превышающее неопределенность в их положении. В пределах этих случайных флуктуаций виртуальные частицы исчезают в одной точке и одновременно возникают в другой, это и не позволяет дать лоренц-инвариантное определение их числа.

Явное представление для полевого оператора  $A$  можно легко получить с помощью формулы (3.8). Так как коммутатор  $A$  с  $L'$  — обычное число, то все многократные коммутаторы в (3.8) исчезают, и бесконечный ряд обрывается на втором члене. Взяв в качестве начального значения для  $A$  оператор  $A_{in}^{\text{in}}(x)$ , мы получим:

$$A_i(x)_i = A_i^{\text{in}}(x) + \int D^{\text{ret}}(x-x') j_i(x') dx'. \quad (3.37)$$

$A_i(x)_i$  — очевидно, удовлетворяет уравнению поля  $\square^2 A_i(x) = j_i(x)$ , которое получается из (3.11). Более того,  $A_i(x)$  удовлетворяет тем же перестановочным соотношениям, что и оператор свободного поля, так как он отличается от  $A^{\text{in}}$  только на обычное число и, таким образом, удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на решение.

Заметим, что  $A^{\text{in}}$  — это действительно аналог соответствующей классической величины в (1.14). Так как  $A$  — оператор, теперь невозможно положить  $A^{\text{in}}(x) \equiv 0$ . Однако в состоянии  $|0_{in}\rangle$ , например, среднее значение  $A^{\text{in}}$  равно нулю, так что математическое ожидание величины  $A$  таково же, как и при классическом расчете с  $A^{\text{in}} = 0$ . То же справедливо и для  $P_k$ , так как члены, линейные по  $A$ , здесь исчезают, а члены, квадратичные по  $A^{\text{in}}$  упорядочены так, чтобы дать нуль для математического ожидания.

Можно проверить, что вызванное током  $j$  в процессе существования системы изменение вектора энергии-импульса  $\langle P^{\text{out}} \rangle - \langle P^{\text{in}} \rangle$  отвечает классическим потерям на излучение, проинтегрированным по времени. Мы находим (задача 20)

$$\begin{aligned} \langle 0_{in} | P_m^{\text{out}} | 0_{in} \rangle &= \langle 0_{in} | P_m^{\text{rad}} | 0_{in} \rangle = \\ &= \langle 0_{in} | \int dx j_i(x) f_{im}(x) | 0_{in} \rangle = \\ &= \langle 0_{in} | \int dx j_i(x) f_{im}^{\text{rad}}(x) | 0_{in} \rangle, \end{aligned} \quad (3.38)$$

что можно привести к удобной форме:

$$\begin{aligned} \sum_n \langle 0_{in} | n_{out} \rangle \langle n_{out} | P_m^{\text{out}} | n_{out} \rangle &= \\ &= (2\pi)^{-3} \int dk \delta(k^2) |j_i(k)|^2 k_m. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Суммирование в (3.39) идет по всем  $out$ -состояниям; оно дает в точности среднее число фотонов на интервал импульсов, умноженное на соответствующий вектор энергии импульса и проинтегрированное по всему импульсному про-

странству. Для энергетических потерь в данном частном интервале тоже получается формула такой же структуры, но интегрирование по  $k$  идет здесь только по рассматриваемому интервалу. Например, выбирая опять специальный вид тока (3.27), мы находим:

$$P_m(\Delta) = (2\pi)^{-3} \int_{\Delta} dk \delta(k^2) k_m \left( \frac{v}{(vk)} - \frac{v'}{(v'k)} \right)^2 \quad (3.40)$$

откуда видно, что тормозное излучение воспроизводит спектр виртуальных фотонов в разностном поле. Вычисляя потери энергии в системе покоя  $v$  или  $v'$ , мы найдем теми же методами, что и при вычислении  $\bar{n}$ :

$$(\text{нерел.}) \Delta P_0 = \frac{\alpha}{\pi} \frac{2}{3} \beta^2 L, \quad (3.41)$$

$$(\text{крайне рел.}) \Delta P_0 = \frac{\alpha}{\pi} \ln(1 - \beta^2)^{-1/2} L. \quad (3.42)$$

В этом случае не существует расходимостей, связанных с большими длинами волн. С увеличением верхней границы  $L$  частотного интервала потери энергии увеличиваются линейно. Это вызывается тем, что спектр излучения  $\sim \frac{dv}{v}$ ; последнее происходит из-за того, что (волновая функция)<sup>2</sup>  $\sim \frac{1}{k^3}$  умножается на число состояний в частотном интервале  $\sim k^2 dk$ . Вследствие этого любые потери энергии в интервале от 0 до  $L_{\max}$  равновероятны.

Хотя  $A^{\text{in}}$  и не дает вклада в математическое ожидание  $A$ , он делает среднеквадратичную флуктуацию  $A$  отличной от нуля. В состоянии с определенным числом  $\text{in}$ -частиц она равна флуктуациям свободного поля. Эти флуктуации электромагнитного поля вокруг его классического значения были обсуждены во введении и с более формальной точки зрения будут рассмотрены в дальнейшем.

## § 10. Частица Дирака во внешнем электромагнитном поле

Задача этого параграфа определяется лагранжианом

$$L(x) = : \bar{\psi}(x) (\partial - m) \psi(x) : - A_\mu(x) j^\mu(x), \quad (3.43)$$

где  $j^\mu(x) = e : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) :$  (символ...: имеет обычный смысл, если мы выражаем решение через свободные поля),  $A_\mu(x)$  — заданная (неквантованная) функция координат и времени,

исчезающая при  $t \rightarrow \pm \infty$ . Как и в предыдущем параграфе, мы начнем с определения  $S$ . Чтобы получить явное выражение, нам опять придется преобразовать упорядоченную по времени форму  $S$ ,

$$S = P e^{-i \int dx A_{\mu}(x) j^{\mu}(x)}, \quad (3.44)$$

к нормальной форме. Соответствующая перестройка немного сложнее, чем в предыдущем параграфе. Прежде чем перейти к этой перестройке в члене  $n$ -го порядка  $S^{(n)}$ , мы вычислим члены низшего порядка по  $A$ . Типичный матричный элемент  $S$  связывает данное электронное состояние с волновой функцией  $v$  с другим, которому отвечает волновая функция  $u$ . Используя результаты § 6, мы сразу же увидим, что этот матричный элемент равен \*)

$$\langle 1, u | S^{(1)} | 1, v \rangle = -i \int dx A_{\mu}(x) \bar{u}(x) \gamma^{\mu} v(x). \quad (3.45)$$

Его квадрат дает, в низшем порядке по  $e$ , вероятность перехода электрона из состояния  $v$  в состояние  $u$  под действием поля  $A$ . Мы не будем продолжать этот расчет дальше, так как (3.45) — это хорошо известное борново приближение, его можно получить элементарными методами и оно не типично для квантовой теории поля. Обратимся поэтому к процессу, недоступному элементарной квантовой механике, а именно, к рождению электрон-позитронных пар электромагнитным полем. В соответствующем матричном элементе между вакуумом и состоянием с парой  $|2\rangle$ :

$$\langle 2 | S^{(1)} | 0 \rangle = -ie \int dx A_{\mu}(x) \langle 2 | \bar{\psi}^{-}(x) \gamma^{\mu} \psi^{-}(x) | 0 \rangle \quad (3.46)$$

опять надо заменить  $\bar{\psi}^{-}$  и  $\psi^{-}$  на волновые функции электрона и позитрона соответственно. Характерная разница между (3.45) и (3.46) состоит в том, что первый содержит и положительно- и отрицательно-частотные волновые функции, в то время как в последнем обе волновые функции отрицательно-частотны. Поэтому, чтобы получить отличный от нуля результат,  $A$  в (3.46) должно содержать частоты, большие  $2m$ . Только такое поле имеет, в этом порядке по  $e$ , энергию, достаточную, чтобы породить пару.

Вычислим теперь полную вероятность рождения пары  $w$ ; это — квадрат (3.46), просуммированный по всем возможным состояниям пары. Хотя изучение таких более тонких деталей, как поляризация электрона и позитрона, и представило бы значительный интерес, нам надо поторопиться ответить на

\*) Здесь и далее мы всюду опускаем индекс «in» у вектора состояния.

вопрос, который окажется пробным камнем для квантовой теории поля. Подобно случаю излучения света, мы найдем

$$\begin{aligned} w &= \sum_2 |\langle 2 | S^{(1)} | 0 \rangle|^2 = \\ &= -e^2 \int dx dx' \{ A_\mu(x) A_\nu(x') \text{Sp} [\gamma^\mu S^+(x-x') \gamma^\nu S^-(x'-x)] \}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Так как суммирование по двухчастичным состояниям можно распространить на полную систему состояний (остальные состояния не дают вклада в сумму), то мы можем свести дело к вакуумному ожиданию, которое мы уже вычислили с помощью (2.43). Тензор

$$K_{\mu\nu}(x) = e^2 \text{Sp} [\gamma_\mu S^+(x) \gamma_\nu S^-(x)] \quad (3.48)$$

вследствие закона сохранения тока обладает следующим свойством:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} K_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} K_{\mu\nu} = 0. \quad (3.49)$$

Так как это инвариантная\*) функция  $x$ , она может содержать только члены типа  $\delta_{\mu\nu} f(x)$  или  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} g(x)$ . Тогда из (3.49) следует, что

$$K_{\mu\nu}(x) = \left( \delta_{\mu\nu} \square^2 - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) K(x), \quad (3.50)$$

где  $K(x)$  — инвариантная функция, которая содержит только положительные частоты. Мы можем, следовательно, представить ее как линейную комбинацию  $\Delta^+$ -функций с разными массами. Весовая функция получается из (Д2.23).

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} K_\mu^\mu(x) &= \square^2 K(x) = \\ &= -i \int_{4m^2}^{\infty} dc^2 \sigma(c) c^4 \Delta^+(x, c), \end{aligned} \quad (3.51)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma(c) &= \frac{2ie^2}{3c^5} f_{ss}(m, m, c) = \\ &= \frac{\alpha}{3\pi} \left( \frac{1}{c^2} + \frac{2m^2}{c^4} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{c^2}} \theta(c^2 - 4m^2). \end{aligned}$$

\*) Относительно собственной группы Лоренца.



Подставляя (3.50) в (3.45), мы видим после интегрирования по частям, что член  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} K$  не вносит вклада в матричный элемент, так как  $A$  удовлетворяет условию  $A_\mu^\mu = 0$ . Таким образом, мы получаем

$$w = i \int dx dx' A_\mu(x) A^\nu(x') \int dc^2 \sigma(c) c^4 \Delta^+(x - x', c).$$

Это выражение становится более удобным в импульсном пространстве, если ввести ток  $J$ , который можно представить себе как источник поля  $A$ , т. е.  $\square^2 A = J$ , или  $A(k) = -J(k)/k^2$ . Тогда \*)

$$w = -\frac{\alpha}{3\pi} \int_{\substack{k^2 > 4m^2 \\ k_0 > 0}} \frac{dk}{(2\pi)^3} |J(k)|^2 \left( \frac{1}{k^2} + \frac{2m^2}{k^4} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}. \quad (3.52)$$

Как мы увидим ниже, в этой форме  $w$  есть интеграл от дифференциальной вероятности рождения пары с вектором кинетической энергии-импульса  $k$ . Под последним мы подразумеваем выражение в (2.38). Оно не сохраняется, но если  $O(x)$  построено из  $\psi(x)$ , оно обладает свойством  $[O(x), P_\mu] = i(\partial O/\partial x_\mu)$ . Следовательно \*\*, матричный элемент  $\langle k | J(x) | 0 \rangle$ , где  $|k\rangle$  — собственное состояние  $P$  с собственным значением  $k$ , должен иметь пространственно-временную зависимость  $e^{ikx} \langle k | J(0) | 0 \rangle$ . Сравнивая это с (3.46), мы видим, что фурье-вектор  $k$  в (3.52) действительно имеет смысл собственного значения  $P$  для пары. Для источника определенной частоты  $|J(k)|^2 \sim \delta(k_0 - \omega)$  поведение дифференциальной вероятности при низких энергиях  $\omega$  имеет обычный вид  $\sqrt{\epsilon}$ , где  $\epsilon$  — энергия над порогом. При высоких энергиях  $w$  падает как  $1/\epsilon^2$ , что отражает общее уменьшение электромагнитного взаимодействия при энергиях, больших  $m$ . Это происходит от того, что электрон размазан в области порядка  $1/m$  благодаря облаку виртуальных пар, которые он испускает (см. замечания во введении).

Выражение (2.86) для среднеквадратичной флуктуации заряда в объеме  $V$  может быть записано в форме

$$-e^2 \int dx dx' a(x) a(x') \text{Sp} [\gamma S^+(x - x') \gamma S^-(x' - x)],$$

где  $a(x) = 1$ , если  $x$  содержится в  $V$ , и  $a(x) = 0$ , если  $x$  не содержится в  $V$ . Оно похоже на формулу для рождения пар

\*) Как и в предыдущем параграфе  $|J|^2 = |J_0|^2 - |J_1|^2 - |J_2|^2 - |J_3|^2$ .

\*\*) Заметим, что  $\langle k | [P_\mu, O(x)] | 0 \rangle = -i(\partial/\partial x_\mu) \langle k | O(x) | 0 \rangle$ .

на потенциале  $a(x)$ , что правдоподобно физически, так как объем  $V$  может быть ограничен электромагнитными средствами, только если мы используем поле той же формы. Поскольку введенная выше функция  $a(x)$  содержит сколь угодно высокие частоты, флуктуационный интеграл расходится, и мы получим конечный результат, только если система заключена в объеме, границы которого не слишком резки. Подобные же расходимости возникают и в том случае, когда вместо  $S$  вычисляется  $U_{12}$ .

Можно использовать (3.52), чтобы определить, как велика вероятность найти пару, образованную за счет энергии, которую заряженная частица теряет при рассеянии. Для этого возьмем ток  $J(x)$  таким же, как и в (3.27), с той только разницей, что заряд рассеиваемой частицы выбирается равным  $Ze$ . Кроме того, мы ограничимся случаем, когда  $WM^2 > 4m^2$ . Основной вклад в (3.52) вносят те  $k$ , для которых  $k^2/4m^2 > 1$ , так что при интегрировании по  $k$  в подынтегральном выражении останутся лишь члены, ведущие себя как  $(4m^2/k^2)$ .

За наибольшую эффективную частоту мы снова примем  $2WM$  и будем интегрировать (3.52), после подстановки  $J(k)$  — только в области  $(k\nu) < 2ML$ . Дальнейшие вычисления проводятся по образцу (3.27) и последующих. Воспользуемся нашими предыдущими результатами, в которых для вычисления интеграла использовалось следующее его представление:

$$\begin{aligned} \omega_P &= \frac{\alpha}{8m^2} (2\pi)^{-4} \int_{\substack{k^2 > 4m^2 \\ (k\nu) < 2ML}} dk \frac{8m^2}{3k^2} \int_{-1}^1 dx \left( 2W - x \frac{\partial}{\partial x} \right) Z^2 e^2 (Nk)^{-2} = \\ &= \frac{\alpha Z^2}{6\pi} \int_{4m^2}^{4M^2 L} d\lambda^2 e^2 \lambda^{-2} \int_{(k\nu) < 2ML} dk (2\pi)^{-3} \delta(k^2 - \lambda^2) \times \\ &\quad \times \int_{-1}^1 dx \left( 2W - x \frac{\partial}{\partial x} \right) (Nk)^{-2} = \\ &= \frac{Z^2}{3} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 2 \int_{2m}^{2ML} \frac{d\lambda}{\lambda} \ln \left( \frac{L}{\lambda} \right) \int_{-1}^1 dx \left( 2W - x \frac{\partial}{\partial x} \right) N^{-2}, \quad (3.53) \\ &\quad \left( \begin{array}{l} \text{нерел.} \\ \text{крайне рел.} \end{array} \right) : \omega_P = 2 \frac{Z^2 \alpha^2}{3\pi^2} \ln \left( \frac{WM}{m} \right)^2 \left( \frac{4}{3} \frac{W}{\ln W} \right). \end{aligned}$$

Отношение вероятности рождения пары к вероятности того, что при столкновении будет испущен фотон с энергией, большей  $2m$ , есть  $(2\alpha/3\pi) \ln(WM/m)$ . Ввиду малости  $\alpha$  рождение пары, вообще говоря, маловероятно, и этот про-

цесс становится существенным лишь для больших передач энергии при столкновении. Однако рождение пар очень легко обнаруживается при наблюдении следов космических лучей на фотопластинках. На них видно, как единичный трек внезапно переходит в тройной — картина эта известна в экспериментальной физике как *trident* (тройник). Статистика их пока еще не достаточно хороша, чтобы представлять собой детальное доказательство (3.53), но порядки величин даются этим соотношением в общем правильно.

Соотношение (3.52) применимо также и к внутренней конверсии в ядрах. В ядерных переходах, при которых полные моменты начального и конечного состояний оба равны нулю, излучение одного фотона запрещено, и освобождающаяся энергия может быть отдана только путем внутренней конверсии. Некоторые переходы обладают энергией, достаточной для такого процесса, который и наблюдается в действительности. Самый обычный источник рождения пар — это фотоны в кулоновом поле. Этот процесс, однако, относится к следующей главе.

Скажем теперь несколько слов о членах высшего порядка в разложении уравнения (3.44). Чтобы найти вероятность рассеяния из состояния  $u$  в состояние  $v$ , мы должны вычислить матричный элемент, подобно тому, как делали это при получении (2.84)

$$\begin{aligned} & \langle v | P : \bar{\psi}(1) \psi(1) :: (\bar{\psi}(2) \psi(2)) : | u \rangle = \\ & = i \langle v | [\bar{\psi}^-(1) S^+(12) \psi^+(2) - \bar{\psi}^-(2) S^-(12) \psi^+(1)] \theta(12) + \\ & + [\bar{\psi}^-(2) S^+(21) \psi^+(1) - \bar{\psi}^-(1) S^-(21) \psi^+(2)] \theta(21) | u \rangle = \\ & = i [\bar{v}(1) S_f(12) u(2) + \bar{v}(2) S_f(21) u(1)]. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали функцию

$$S_f(x) = \theta(x) S^+(x) - \theta(-x) S^-(x).$$

Следовательно, мы получили

$$\langle v | S^{(2)} | u \rangle = ie^2 \int dx_1 dx_2 \bar{v}(1) \gamma_\mu A^\mu(1) S_f(12) \gamma_\nu A^\nu(2) u(2). \quad (3.54)$$

Соотношение (3.54) соответствует второму борнову приближению для процесса рассеяния. Матричные элементы (3.45) и (3.54) можно интерпретировать как

$$\bar{V}(1) \times \frac{S_A(12)}{A(1) \cdot A(2)} \times U(2)$$

Рис. 7.

Мы можем охарактеризовать эти процессы графами типа представленных на рис. 7. Как это характерно для квантовой механики, по всем координатам, где может происходить рассеяние, суммируются

матричные элементы (амплитуды), но отнюдь не сами вероятности. Оказывается, кроме того, что в  $S^{(2)}$  функция, соответствующая распространению электрона между двумя рассеивателями, есть  $S_f$ . Мы можем записать (3.54), как сумму по амплитудам, где электрон распространяется от 1 к 2 или от 2 к 1 в зависимости от порядка следования времен. При этом  $S_f$  содержит сумму по всем возможным волновым функциям, совместимым с положительностью энергии свободного электрона. Это ограничение по энергии вызывает (как мы неоднократно отмечали) пространственное и временное размывание функции  $S_f$ , проявляющееся в том, что она не исчезает и вне светового конуса. Мы увидим далее, что распространение, идущее порой со скоростью выше скорости света, оказывается в пределах соотношений неопределенностей для пространства-времени и энергии-импульса и, следовательно, не наблюдаемо.

После этих замечаний мы рассмотрим теперь общую структуру разложения (3.44). Выберем для этого какой-нибудь один матричный элемент, к примеру  $\langle 0|S|0\rangle$ . Все остальные матричные элементы можно получить либо тем же методом, либо дифференцированием  $\langle 0|S|0\rangle$ . Они, однако, не потребуются ниже. Задачу раскрытия выражения

$$\langle 0|j(1)\dots j(n)|0\rangle$$

можно решить нашим стандартным методом перестановки операторов уничтожения направо. Так же постепенно, как и в предыдущем разделе (и опуская спинорные индексы), мы начнем этот процесс с  $\psi(1)$ :

$$\begin{aligned} \langle 0|P:\bar{\psi}(1)[\psi^-(1) + \psi^+(1)]::\bar{\psi}(2)\psi(2)::\dots::\bar{\psi}(n)\psi(n):|0\rangle = \\ = \sum_{l \neq 1} [\theta(1l) iS^+(1l) + \theta(l1) iS^-(l1)] \times \\ \times \langle 0|P\bar{\psi}(1):\bar{\psi}(2)\psi(2): \dots \psi(l):\bar{\psi}(n)\psi(n):|0\rangle. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Легко заметить, что выражение, вынесенное из-под знака среднего, равно  $\varepsilon(1l) iS_f(1l)$ . Повторяя это для  $\psi(2)$  и т. д., мы получим:

$$\sum_P \varepsilon \prod_j \varepsilon(jP_j) \prod_j iS_f(jP_j),$$

где  $P_1, \dots, P_n$  — перестановки  $1, 2, \dots, n$ , а  $\varepsilon$  — знаковый множитель, который происходит из-за антикоммутативности  $\psi$  и который мы сейчас определим. Написанная сумма распространяется по всем возможным перестановкам  $P$ , соответствующим всем возможным спариваниям между  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ . Чтобы определить  $\varepsilon$ , заметим, что  $\varepsilon$  — это знак, который мы получим, коммутируя  $\psi^+$  или  $\psi^-$  с их партнерами при временном упорядочивании для образования  $S$ -функций. В зави-

симости от порядка времен партнеры появляются справа или слева. Полагая на мгновение все антикоммутаторы равными нулю и исходя из упорядоченного по времени выражения, мы получим  $\varepsilon$  как знак выражения

$$\bar{\psi}^+(1)\psi^-(P_1)\dots\psi^+(a)\bar{\psi}^-(P_a)\dots\bar{\psi}^+(n)\psi^-(P_n),$$

где порядок

$$\bar{\psi}^+(i)\psi^-(P_i) \text{ соответствует } \varepsilon(iP_i) = 1,$$

а порядок

$$\psi^+(a)\bar{\psi}^-(P_a) \text{ соответствует } \varepsilon(aP_a) = -1.$$

Таким образом,  $\varepsilon \prod_j \varepsilon(jP_j)$  есть знак выражения

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(1)\psi(P_1)\bar{\psi}(2)\psi(P_2)\dots\bar{\psi}(n)\psi(P_n) = \\ & = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \bar{\psi}(1)\dots\bar{\psi}(n)\psi(P_1)\dots\psi(P_n) = \\ & = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^P \bar{\psi}(1)\bar{\psi}(n)\psi(1)\dots\psi(n) = \\ & = (-1)^P \bar{\psi}(1)\psi(1)\dots\bar{\psi}(n)\psi(n), \end{aligned}$$

которое можно преобразовать четными перестановками (т. е. двигая  $\bar{\psi}\psi$  вместе) в выражение, упорядоченное по времени. Таким образом, (3.55) равно

$$i^n \sum_P (-1)^P \prod_j S_f(j, P_j) = (i)^n |S_f(ij)|_{(n)},$$

где индекс  $|n \cdot \bar{n} \cdot y|$  детерминанта означает, что  $i$  и  $j$  меняются от 1 до  $n$ .

Восстанавливая опущенные множители, получим для матричного элемента порядка  $n$ :

$$\begin{aligned} \langle 0 | S^{(n)} | 0 \rangle &= \frac{e^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \sum_{\mu_i \alpha_i \beta_i} A_{\mu_1}(1) \dots A_{\mu_n}(n) \times \\ & \times [\gamma_{\beta_1 \alpha_1}^{\mu_1} \dots \gamma_{\beta_n \alpha_n}^{\mu_n}] \begin{vmatrix} 0 & S_f^{\alpha_1 \beta_2}(12) & \dots & S_f^{\alpha_1 \beta_n}(1n) \\ S_f^{\alpha_2 \beta_1}(21) & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_f^{\alpha_n \beta_1}(n1) & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} = \\ & = \frac{1}{n!} \sum |K_{ij}|_n. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Чтобы упростить запись, мы ввели здесь сокращенные обозначения:

$$K_{ij} = eA_{\mu}(x_i) \gamma_{\beta}^{\mu} S_j^{\alpha\beta}(x_i, x_j), \quad K_{ii} = 0,$$

и обозначили через  $\Sigma$  суммирование по всем дискретным и интегрирование по непрерывным переменным. Не все  $n!$  членов детерминанта дают разные вклады. Если перестановка содержит  $c_l$  циклов с  $l$  элементами:  $c_1 + 2c_2 + \dots + nc_n = n$ , то она будет давать вклад

$$(-1)^{c_1+c_2+\dots} (\text{Sp } K^1)^{c_1} (\text{Sp } K^2)^{c_2} \dots (\text{Sp } K^n)^{c_n},$$

где  $\text{Sp}$  означает интегрирование по координатам. Таким образом, все члены с одинаковыми  $c_l$  дают одинаковые вклады. Число перестановок класса

$$\underbrace{(\cdot)(\cdot)\dots(\cdot)}_{c_1} \underbrace{(\cdot\cdot)\dots(\cdot\cdot)}_{c_2} \dots \underbrace{(\dots)}_{c_n}$$

равно числу всех возможных распределений  $1, 2, \dots, n$  на подобные циклы, поделенному на число таких перестановок, которые не дают ничего нового

$$\frac{n!}{c_1! c_2! 2^{c_2} \dots c_n! n^{c_n}}.$$

Таким образом, мы можем написать

$$\langle 0 | S^{(n)} | 0 \rangle = \sum_c \frac{\left(-\frac{1}{2} \text{Sp } K^2\right)^{c_2}}{c_2!} \frac{\left(\frac{1}{3} \text{Sp } K^3\right)^{c_3}}{c_3!} \dots \frac{(1/n \text{Sp } K^n)^{c_n}}{c_n!},$$

где сумма распространяется на все возможные значения  $c_l$  и мы использовали, что  $\text{Sp } K = 0$ . Суммируя по  $n$ , мы получим произведение экспонент:

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{Sp } (K^n)} \quad (3.57)$$

Перестройка, которая привела нас от (3.56) к окончательной форме, хорошо известна в теории интегральных уравнений. Там доказывается, что (3.56) есть член разложения в ряд функции  $|1 + K|$ , которую можно записать как  $e^{\text{Sp}[\ln(1+K)]}$ , и, разлагая в ряд экспоненту, получить (3.57).

Соотношение (3.57) можно еще упростить, заметив, что члены с нечетным  $n$  исчезают, так как вообще вакуумные ожидания произведения нечетного числа токов исчезают

ввиду инвариантности вакуума относительно зарядового сопряжения

$$\begin{aligned} \langle 0 | j(1) \dots j(2n+1) | 0 \rangle &= \langle 0 | U_c^{-1} j(1) \dots j(2n+1) U_c | 0 \rangle = \\ &= - \langle 0 | j(1) \dots j(2n+1) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Вводя квадрат  $K$ ,

$$(K^2)_{ij} = Q_{ij} = e^2 \int dx A_{\mu_1}(x_i) \gamma_{\beta_1 \alpha_1}^{\mu_1} S_f^{\alpha_1 \beta_1}(x_i x) A_{\mu_2}(x) \gamma_{\beta_2 \alpha_2}^{\mu_2} S_f^{\alpha_2 \beta_2}(x x_j) \quad (3.58)$$

мы можем написать

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = e^{-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sp} \frac{Q^n}{n}} = e^{\frac{1}{2} \text{Sp} \ln(1-Q)}. \quad (3.59)$$

Экспоненциальная форма соответствует результату, полученному для излучения фотона. При рождении пары имеется дополнительная возможность того, что она  $(n-2)$  раза рассеется на  $A$  за время от ее рождения до поглощения. Таково значение ряда в экспоненте (3.59).

Чтобы исследовать аналитическую структуру (3.59) как функции  $e^2$ , заметим, что легко получить следующую оценку сверху

$$|\langle 0 | S | 0 \rangle|^2 = e^{2 \text{Sp} \ln(1-Q-Q\ddagger+QQ\ddagger)} \leq e^{-\text{Re}(\text{Sp} Q + \frac{1}{2} \text{Sp} QQ\ddagger)}, \quad (3.60)$$

так как  $\ln(1+x) \leq x$  при  $(1+x) > 0$ , а  $(1-Q)(1-Q\ddagger)$  положительно определено. Член

$$\text{Sp} Q = e^2 \int dx dx' A_{\mu}(x) A_{\nu}(x') \text{Sp} [\gamma^{\mu} S_f(x-x') \gamma_{\nu} S_f(x'-x)]$$

с помощью (3.46) — (3.49) может быть записан как

$$\begin{aligned} &-i \int dx dx' A_{\mu}(x) A_{\nu}(x') \int_{4m^2}^{\infty} dc^2 c^2 \sigma(c) \times \\ &\times [\theta(x-x')(g^{\mu\nu} \square^2 - \partial^{\mu} \partial^{\nu}) \Delta^+(x-x', c) + \\ &+ \theta(x'-x)(g^{\mu\nu} \square^2 - \partial^{\mu} \partial^{\nu}) \Delta^+(x'-x, c)]. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Его вещественная часть, ввиду того, что

$$\text{Re } i\Delta^+(x) = \frac{i}{2} \Delta^1(x) = \text{Re } i\Delta^+(-x),$$

равна

$$\operatorname{Re} \operatorname{Sp} Q = -i \int dx dx' A_{\mu}(x) A^{\mu}(x') \int_{4m^2}^{\infty} dc^2 c^4 \sigma(c) \Delta^1(x-x', c), \quad (3.62)$$

что совпадает с (3.52). Этого можно было бы ожидать из-за унитарности  $S$ , которая означает, что  $SS^{\dagger} = 1$  или

$$S^{(2)} + S^{\dagger(2)} + S^{(1)}S^{(1)\dagger} = 0,$$

или же, что

$$-2 \operatorname{Re} \langle 0 | S^{(2)} | 0 \rangle = \sum_f |\langle f | S^{(1)} | 0 \rangle|^2. \quad (3.63)$$

Таким образом, (3.62) конечно для большого класса  $A$ , для которых сходится (3.52). Вскоре мы увидим, однако, что мнимая часть  $\operatorname{Sp} Q$  расходится для всех  $A$ . Мы отложим пока

задачу исследования  $\operatorname{Sp} Q Q^{\dagger}$ , который оказывается конечным для полей  $A$  с конечной полной энергией. Для этого класса полей поведение  $|\langle 0 | S | 0 \rangle|^2$  может быть описано так: эта величина конечна (включая нуль) для вещественных  $e$ , как этого и требует унитарность  $S$ . Она не существует для комплексных  $e$ , так как  $\operatorname{Im} \operatorname{Sp} Q e^2 \rightarrow \infty$ . После отделения расходящейся части величина  $\langle 0 | S | 0 \rangle e^{\operatorname{Sp} Q/2}$  ограничена сверху величиной  $e^{c|e|^2}$  с конечным  $c$ . Следовательно, она не имеет расходимостей во всей комплексной плоскости. Более детальный анализ \*) исключает также и точки ветвления, т. е. это — целая функция и ее разложение имеет бесконечный радиус сходимости.

Расходимость в мнимой части  $\ln \langle 0 | S | 0 \rangle$  имеет физическое значение как и в случае бозе-поля с точечным источником. Ее следствием является бесконечный заряд, индуцируемый внешним полем. Оказывается, что вакуумное ожидание тока теперь уже не нуль, как это было для свободных полей. Иначе говоря, даже в отсутствии реальных частиц дираково поле порождает ток, который вызывается виртуальными частицами, рождаемыми внешним полем. Чтобы вычислить этот индуцированный ток, мы используем наш общий вариационный принцип (1.49), который применим теперь к изменению  $\delta A$  внешнего поля \*\*):

$$\delta \left\langle \begin{array}{c} 0 \\ \text{out} \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ \text{in} \end{array} \right\rangle = -i \left\langle \begin{array}{c} 0 \\ \text{out} \end{array} \middle| j(x) \delta A(x) \middle| \begin{array}{c} 0 \\ \text{in} \end{array} \right\rangle. \quad (3.64)$$

\*) Смотри F. Smithies, Duke Math. J. 8, 107 (1941).

\*\*\*) Здесь мы вернулись к нашим старым обозначениям  $|0\rangle = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \text{in} \end{array} \right\rangle$ .



Вводя функциональную производную  $\delta/\delta A_\mu$

$$\left[ \frac{\delta}{\delta A(x)} A(x') = \delta(x - x') \right],$$

мы можем переписать (3.64) как

$$\langle 0_{\text{out}} | j_\mu(x) | 0_{\text{in}} \rangle = i \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \langle 0_{\text{out}} | 0_{\text{in}} \rangle. \quad (3.65)$$

Допустим, что  $A$  не рождает реальных пар. Иначе говоря, вакуум  $|0_{\text{in}}\rangle$  при  $t \rightarrow -\infty$  отличается от вакуума  $|0_{\text{out}}\rangle$  при  $t \rightarrow +\infty$  только на фазовый множитель  $\langle 0|S|0\rangle$ . Мы можем, следовательно, используя (3.57), выразить вакуумное ожидание тока в виде

$$\begin{aligned} \langle 0|j_\mu|0\rangle &= \frac{i}{\langle 0|S|0\rangle} \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \langle 0|S|0\rangle = \\ &= i \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \ln \langle 0|S|0\rangle = i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{Sp} \left( K^n \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} K \right). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Важнейшим в этом ряду является первый член. Его легко вычислить подстановкой значения  $K$  из (3.56):

$$\langle 0|j_\mu^{(2)}(x)|0\rangle = \int dx' A^\nu(x') K_{f,\mu\nu}(x, x'), \quad (3.67)$$

$$K_{f,\mu\nu}(x - x') = -i e^2 \text{Sp} [\gamma_\mu^\dagger S_f(x - x') \gamma_\nu S_f(x' - x)].$$



Рис. 8.

Ток  $j(x)$  можно интерпретировать как сумму токов, которые вносятся полями  $A(x')$  во всех точках  $x'$  и распространяются к точке  $x$  с характеристической функцией распространения  $S_f$  (рис. 8). Для вычисления  $K_{f,\mu\nu}$  вернемся к (3.61),

где была определена вещественная часть  $K_{f,\nu}$ . Аналогично мы получим мнимую часть  $x - x' = y$ :

$$\varepsilon(y) (\square^2 \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) \Delta(y).$$

В силу градиентной инвариантности преобразование  $A \rightarrow A + \partial \Delta$  не может изменить  $\langle 0|j|0\rangle$ , а сохранение тока требует, чтобы  $\partial^\nu K_{\mu\nu} = \partial^\mu K_{\mu\nu} = 0$ . Действительно, из (3.67) можно прямо проверить, что эти условия выполняются. Они оба требуют, чтобы  $K_{f,\nu}^\mu(x)$  представлялась в виде  $(\square^2 \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) K_f(x)$ , что будет справедливым, если мы вправе написать под интегралом в (3.67)  $\varepsilon(y) \partial_\mu \partial_\nu \Delta(y) = \partial_\mu \partial_\nu \varepsilon(y) \Delta(y)$ . Однако такая операция ведет к некоторым неоднозначным

выражениям типа  $\delta(y_0) \partial_\mu \Delta(y)$ , обсуждение которых вызвало к жизни обширную литературу<sup>\*)</sup>. Мы не будем более останавливаться на этом, но примем градиентную инвариантность в качестве руководящего принципа и допустим, что упомянутая перестройка допустима. Вместе с (3.51) это дает нам

$$\begin{aligned} \langle 0 | j_\mu^{(2)}(x) | 0 \rangle = & - \int dx' A^\nu(x') \int_{4m^2}^{\infty} dc^2 c^2 \sigma(c) \times \\ & \times (\square^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) \Delta_f(x - x', c). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Член  $\sim \partial_\mu \partial_\nu$  опять исчезает, а  $\square^2$  при интегрировании по частям дает ток  $\mathcal{J}$ , который порождает  $A$ . Переходя к импульсному пространству, мы найдем, что

$$\langle 0 | j_\mu^{(2)}(x) | 0 \rangle = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathcal{J}_\mu(k) e^{-ikx} d_\mu^+(k), \quad (3.69)$$

где

$$d(k) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dc^2}{c^2 - k^2} \left( 1 + \frac{2m^2}{c^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{c^2}}.$$

Еще раз повторим, что это было получено в предположении, что  $j(k) = 0$  для  $k^2 \geq 4m^2$ , иначе могли бы рождаться реальные пары. Они проявились бы в существовании мнимого вклада в  $d$ , возникающего из полюса в  $\int dc^2$ . Как мы и ожидали,  $\int dc^2$  в  $d(k)$  расходится, и мы заключаем, что любой внешний ток индуцирует в дираковом поле бесконечный ток. Эти расходимости проистекают формально из наложения сингулярностей функций  $S_f$  на световом конусе и связаны с бесконечными флуктуациями заряда в объеме с резкими границами. Чтобы сделать это яснее, запишем половину этих расходимостей в виде, подобном выражению для флуктуации заряда:

$$\int dx' A(x') \theta(x - x') \text{Sp} [\gamma S^+(x - x') \gamma S^-(x' - x)].$$

Это означает, что пара распространяется с положительной частотой, если  $x'$  предшествует  $x$ . Введение резких временных границ влечет здесь за собой появление бесконечных частот. В соответствии с этим интеграл для  $d(k)$  расходится, подобно выражениям для рождения пары или для флуктуации заряда для полей  $A$  с резкими границами. Для дальнейшего

<sup>\*)</sup> См. Pauli W. and Willars F. Revs. Modern. Phys. 21, 434 (1949) (Перевод в сборнике: «Сдвиг уровней атомных электронов». ИЛ, 1950, стр. 139).

обсуждения мы допустим, что некоторый механизм изменяет наши формулы на малых ( $\ll m^{-1}$ ) пространственно-временных интервалах и вводит верхний предел ( $M^2 \gg m^2$ ) в  $\int dc^2$ . Однако в следующей главе книги мы увидим, что в рамках развитой до сих пор теории поля такой механизм не может существовать.

Заметим теперь, что при допустимых  $k$  функция  $d(k)$  положительна. Если мы имеем, статический заряд <sup>\*)</sup>,  $J_0(x)$  то мы можем переписать (3.68) в более удобной форме

$$\left( \int dx_0 \Delta_f(x) = e^{-m|x_0|/4\pi|x|} \right).$$

$$\langle 0 | j_0^{(2)}(x) | 0 \rangle = - \int dx' J_0(x') \int_{4m^2}^{M^2} dc^2 \frac{e^{-|x-x'|c}}{4\pi|x-x'|} c^2 \sigma(c). \quad (3.70)$$

Следовательно, наведенный заряд имеет знак, противоположный знаку первоначального заряда. Этого отчасти можно было бы ожидать, так как при поляризации виртуальными парами диракова поля внешний ток будет притягивать из пар частицы с противоположными зарядами. То же происходит и в диэлектрике, где заряд всегда индуцирует компенсирующий заряд, а остаточный заряд распределяется на поверхности диэлектрика. Так как дираково поле не имеет ограничивающей его поверхности, то другие партнеры пар, т. е. частицы с тем же зарядом, что и  $J_0$  удалены на бесконечность и не проявляются в наших формулах. Это объясняет видимое противоречие с законом сохранения заряда, состоящее в индуцировании полного заряда.

Так как  $jA$ , как и должно быть, — эрмитово, оно коммутирует с  $Q$  и не может, следовательно, изменить того, что  $\langle 0 | Q | 0 \rangle = 0$ . Чтобы устранить это противоречие, можно ограничить бесконечный радиус действия кулонова поля введением массы  $\mu$  фотонного поля, так что  $(\square^2 + \mu^2)A = J$ . Это дает формулу

$$\langle 0 | j(x) | 0 \rangle = \int \frac{dk}{(2\pi)^4} e^{-ikx} J(k) \frac{k^2 \varepsilon(k)}{\mu^2 - k^2}. \quad (3.71)$$

В этом случае полный индуцированный заряд  $\int dx \langle 0 | j_0(x) | 0 \rangle$  исчезает для статического  $J_0$  ( $\int dx$  означает  $k \rightarrow 0$ ).

<sup>\*)</sup> Чтобы согласовать это с нашим общим ограничением на  $A$ , мы положим  $J \sim \delta(x) e^{-\alpha|x_0|}$ ,  $\alpha \ll m$ .

Соотношение (3.70) показывает, что индуцированный заряд в основном пропорционален  $J_0$ ; к нему только добавляется экспоненциальный хвост порядка  $\frac{1}{2m}$  или меньше. Удобно объединить часть индуцированного тока, строго пропорциональную  $J$ , с самим  $J$ , чтобы определить таким образом «перенормированный» или наблюдаемый заряд, так как они (эти два тока) не могут наблюдаться по отдельности. Это можно сделать, подставив в (3.69)

$$1/(c^2 - k^2) = \frac{1}{c^2} + \frac{k}{c^2(c^2 - k^2)},$$

откуда видно, что конечный остаток, пропорциональный  $k^2$ , имеет нулевой полный заряд. Для токов  $J(x)$ , медленно изменяющихся на расстояниях порядка, например,  $m^{-1}$ , можно разложить  $d(k)$  в ряд по  $k^2$

$$d(k) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} - \frac{k^2}{m^2} \frac{\alpha}{15\pi} \dots$$

и получить два члена

$$\langle 0 | j_s^{(2)} | 0 \rangle = -\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} J_s(x) + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{\square^2}{m^2} J_s(x) + \dots \quad (3.72)$$

Важно отметить, что последний член с полным зарядом нуль не дает вклада в асимптотику кулонова поля, вызываемого индуцированным током. Действительно, если мы решим уравнение

$$\square^2 A = J + \langle 0 | j | 0 \rangle$$

для  $J(x) = e_0 \delta(x)$ , то получим для  $r \rightarrow \infty$ ,

$$A_0 \sim (1 - c) e_0 / 4\pi r,$$

где  $c = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2}$ , так как другой член дает вклад  $A_0(x) \sim J(x)$ . Таким образом, классические методы наблюдения, которые позволяют наблюдать поле на расстояниях, много больших  $m^{-1}$ , от заряда, измеряют скорее  $e_0(1 - c)$ , а не «голый» заряд  $e_0$ , так что естественно назвать  $e_0(1 - c)$  зарядом  $e$ . В этом нашем обсуждении мы не рассматриваем обратной реакции поля индуцированного заряда на дираково поле, что мы сможем последовательно провести только в последней главе. Мы ожидаем согласно рассмотренным соображениям, что компенсирующий заряд притягивает заряды первоначального знака. Математически это означает, что

$$e = e_0(1 - c + c^2 - c^3 \dots) = e_0/(1 + c),$$

так что заряд полностью гасится, как в среде с бесконечной диэлектрической постоянной.

Мы рассмотрим записанное выше выражение, удерживая только члены порядка  $\alpha$ :

$$A_0(x) = \frac{e}{4\pi r} + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{e\delta(x)^2}{m^2}. \quad (3.73)$$

Второй член (наблюдаемые следствия поляризации вакуума дает только он) соответствует размерам порядка  $m^{-1}$  и дает увеличение электрического взаимодействия на малых расстояниях. Грубо говоря, это происходит из-за того, что внутри облака виртуальных пар находится большой заряд. Более детально, «голый» заряд  $e_0$  и индуцированный заряд  $\mathcal{J}$ , складываясь, дают результирующий заряд, как это показано на рис. 9. Результирующий заряд мы рассматриваем как состоящий из перенормированного заряда, который зависит от координат как  $e_0$ , но включает полный заряд тока  $\mathcal{J}$  и остатка (рис. 10), который ведет себя как  $-\Delta\mathcal{J}(x)$ , т. е. пропорционален излишку  $\mathcal{J}$  над его локальным средним. Таким образом, он увеличивает действие заряда на малых расстояниях. Этот

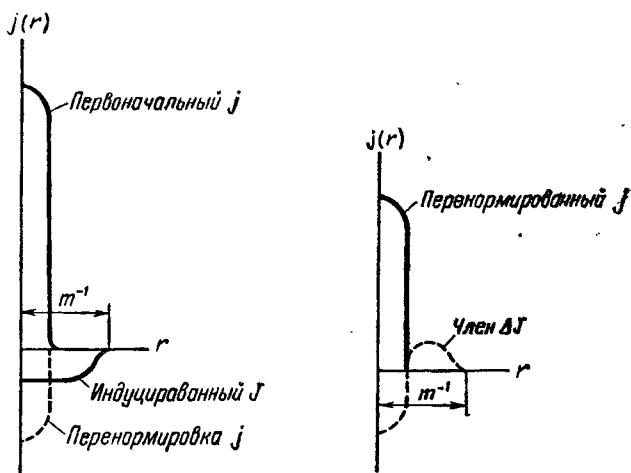


Рис. 9 и рис. 10  
Перенормировка заряда

эффект ощутим только, если заряженные частицы подходят достаточно близко друг к другу, как это имеет место, например, в  $\mu$ -мезоатомах. Из-за большого радиуса действия он сказывается даже в  $P$ -волне протон-протонного рассеяния вблизи 1 Мэв, хотя он (этот эффект) и много слабее ядерных сил.

Наиболее точное измерение получается из сдвига между  $2^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$  уровнями водорода. Этот эффект много меньше, чем основной вклад в сдвиг, который обсуждался во введении и имеет противоположный знак, но экспериментальные ошибки измерения составляют всего 1% от относящейся к поляризации вакуума части. Следовательно, эта экспериментальная проверка — важный контроль фундаментальных принципов квантовой теории, согласно которым поляризация вакуума является неизбежным следствием любой теории, в которой возможно рождение пар.

Возвращаясь назад, к общему разложению (3.66) мы отметим, что остальные члены — высшего порядка по  $A$  и соответствуют зависимости  $\epsilon$  от напряженности поля. Эти нелинейные члены вызывают рассеяние света на свете или на кулоновом поле. Они очень малы и едва наблюдаемы. Мы обсудим их позднее.

Заканчивая этот раздел, заметим, что наше рассмотрение не включало некоторых случаев электромагнитного поля. Например, важная задача о рассеянии на статическом поле требует специального обсуждения. Мы не будем в него углубляться, так как это не продемонстрирует нам новых свойств квантовой теории поля<sup>\*)</sup>. Мы только упомянем забавный результат в случае, представляющем лишь академический интерес, а именно, для электромагнитного поля  $F_{ik}$ , постоянного в пространстве и времени,

$$-F^2 = -\frac{1}{2}F_{ik}F^{ik} > 0$$

(это означает достаточно сильное электрическое поле). В этом случае пары рождаются непрерывно с вероятностью на единицу пространственно-временного объема, равной приблизительно (парадокс Клейна):

$$\frac{\alpha^2}{\pi^2} F^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} e^{-n\pi m^2/eF}.$$

Экспонента возникает из-за закона сохранения энергии, который требует, чтобы пары рождались отделенными расстоянием, большим чем  $2m/e|E|$  так, чтобы увеличение потенциальной энергии, равное величине электрического поля  $|E|$ , умноженной на расстояние, превышало величину энергии покоя пары  $2m$ . Как мы уже отмечали, вероятность найти пару

<sup>\*)</sup> Читатель, желающий изучить эту задачу с точки зрения теории поля, может обратиться к работе J. Schwinger, Phys. Rev. 94, 1352 (1954). (См. также А. И. Ахнезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. Физматгиз, 1959. Прим. переводчиков.)

на расстоянии  $d$  при  $d > m^{-1}$  имеет вид  $e^{-dm}$ . Эта экспонента не может быть разложена в ряд по  $e$ . Если мы будем рассчитывать рождение пар в этом поле, то мы получим нуль в каждом порядке. Постоянное поле не имеет компонент Фурье для  $k \neq 0$ , а условие рождения пар в первом порядке  $k^2 > 4m^2$ , во втором  $-k^2 > 0$  и т. д. Таким образом, в этом случае теория возмущений дает для точного решения асимптотическое разложение. Это разложение дает тождественный нуль, так как  $\lim_{e \rightarrow 0} e^{-n} e^{-(m^2/eF)} \rightarrow 0$ . Это показывает, что метод разложения в ряд иногда не ведет к желаемой цели, хотя он и может давать асимптотические ряды.

## § 11. Ограничения измеримости

В то время, как коммутирующие операторы имеют общие собственные векторы, операторы с не равным нулю коммутатором не могут быть одновременно приведены к диагональной форме. Поэтому математическое ожидание двух некоммутирующих операторов не может быть собственным значением для них обоих сразу, но для флуктуаций  $\Delta A$  и  $\Delta B$  двух величин  $A$  и  $B$  в состоянии  $|\rangle$  выполняется известное неравенство.

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle |. \quad (3.74)$$

Чтобы наша интерпретация формализма имела смысл, необходимо потребовать, чтобы измерение  $A$  с точностью  $\Delta A$  порождало в  $B$  неопределенность, которая стояла бы с  $\Delta A$  в задаваемом (3.74) соотношении. Таким образом, мы должны показать, что формально введенные в теорию коммутаторы обуславливают соотношения неопределенностей, соответствующие возможностям идеализированного физического эксперимента.

Измерение, естественно, всегда предполагает взаимодействие с измерительным прибором. Чтобы придерживаться развития уже изложенного материала, мы ограничимся рассмотрением систем, взаимодействующих с внешним полем. Следовательно, взаимодействием частиц друг с другом мы будем пренебрегать. Мы рассмотрим только самые общие формальные основы совместности перестановочных соотношений.

Начнем наше обсуждение со знакомого примера электромагнитного поля. Электромагнитное поле определяется физически силой, с которой оно действует на заряженное тело. Следовательно, измерение электромагнитного поля в некоторой точке  $x$  состоит, в принципе, всегда из внесения в точку

$x$  электрически заряженного тела и наблюдения ускорения, сообщаемого ему полем. Что же касается ограничений измеримости поля, то они возникают из-за неопределенностей в наблюдении движения частицы. Сделаем для пробного тела допущение, что его масса  $M$  и его заряд  $e$  ( $e$  всегда означает у нас заряд электрона) могут быть выбраны произвольно и что соотношения неопределенностей

$$\Delta x^i \Delta p_k = \delta_{ik}, \quad \Delta x^i \Delta x^k = \Delta p^i \Delta p^k = 0 \quad (3.75)$$

образуют единственные ограничения для его наблюдения. Для измерения электрического поля эти допущения представляются разумными, ибо мы можем выбрать массу пробного заряда достаточно большой; при этом волновой пакет становится столь малым, что его движение можно описать в терминах классических уравнений (1.11) и т. п.

Перестановочные соотношения (1.70) утверждают, что между любой сконструированной из потенциалов  $A$  полевой величиной  $f$  и вектором энергии-импульса  $P$  существуют соотношения неопределенностей вида

$$\Delta P_i \Delta f(x) \geq |f_{,i}(x)|. \quad (3.76)$$

Мы написали здесь просто  $f$  для математического ожидания величины  $f$ ; аналогично и в классических уравнениях движения  $A$  надо понимать как математическое ожидание квантовой величины  $A$ .

Обсудим теперь, как неопределенности в (3.76) проявляются в идеализированном эксперименте.

Локализация пробного тела с точностью  $\Delta x$  при измерении  $f(x)$  может быть достигнута лишь ценой неопределенности в его импульсе. Эта неопределенность в импульсе пробного тела проявляется в том, что изменение импульса пробного тела в электрическом поле, а следовательно, и обмен импульсом с ним, отягощается неопределенностью  $\Delta p$ . Запишем теперь обусловленную неточным знанием импульса и положения пробного заряда неопределенность величины  $f$  в общем виде

$$\Delta f(x) = \Delta x^i f_{,i}(x) + \Delta p_i \frac{\delta}{\delta p_i} f(x), \quad (3.77)$$

где последний член должен выражать символически неопределенность в  $f$ , порождаемую  $\Delta p$ . Естественно, что этот член сильно зависит от природы пробного заряда и структуры величины  $f$  (см. дальнейшие рассуждения), но если умножить уравнение (3.77) на  $\Delta p_k$ , то получится

$$\Delta p_k \Delta f(x) = \Delta p_k \Delta x^i f_{,i}(x) + \Delta p_k \Delta p^i \frac{\delta}{\delta p^i} f(x). \quad (3.78)$$



Согласно нашему допущению неопределенность в импульсе поля  $\Delta P$  обусловлена только неопределенностью в импульсе пробной частицы, так что мы можем положить  $\Delta P$ , равным  $\Delta p$ . Далее, путем возможно более точного измерения импульса всегда можно сделать второй член справа сколь угодно малым, в то время как первый из-за соотношения неопределенностей (3.75) не может быть сделан меньше  $f_{,i}$ . А это и означает, что выполняется (3.76).

Итак, перестановочные соотношения полей с вектором энергии-импульса есть, следовательно, прямое логическое следствие соответствующих перестановочных соотношений для частиц. Так как собственные векторы числа квантов являются одновременно и собственными векторами  $P$ , то (3.76) показывает, что одновременные измерения числа квантов и напряженности поля невозможны. В частности, собственному состоянию числа фотонов присущи характерные флуктуации напряженности поля, которые обсуждались ранее; волновой и корпускулярный аспекты оказываются взаимно дополнительными характеристиками квантового поля. Таким образом, квантовая теория поля дает согласованное описание часто воспринимавшегося как парадокс корпускулярно-волнового дуализма.

Покажем теперь более детально, как соотношения неопределенностей для  $A$  в разных точках, вытекающие из

$$[A(x), A(x')] = iD(x - x'), \quad (3.79)$$

проявляются в идеализированном измерении.  $A$  не измеряется прямо, из измерения движения частицы можно определить только производные  $A$ . Теория предсказывает, что если производные  $A$  в точке  $x$  известны с точностью  $\Delta A^k_{,i}(x)$ , то  $A$  в точке  $x'$  может быть известно лишь с неопределенностью  $\Delta A^j(x')$ , которая определяется соотношением

$$\Delta A^k_{,i}(x) \Delta A^j(x') \geq |g^{kj} \partial_i D(x - x')|. \quad (3.80)$$

Допустим, что  $x'$  лежит позже во времени, чем  $x$  — иначе мы должны были бы искать, как влияет на  $A(x)$  измерение в точке  $x'$ . Как и должно быть,  $D(x - x')$  исчезает для  $(x - x')^2 < 0$ , ведь измерение в  $x$  не может вызывать возмущение, распространяющееся быстрее скорости света. Неопределенности в  $A$  и в координате пробного заряда связаны соотношением

$$\Delta p_i = c \dot{x}_k \Delta A^k_{,i} + c A^k_{,i} \Delta x_k, \quad (3.81)$$

которое получается применением операции  $\Delta$  к уравнению движения (1.35). При этом мы допустили, что неопределенности малы, так что  $\Delta$  действует как дифференциальный опе-

ратор. Чтобы измерить  $A_{,i}^k(x)$ , пробный заряд должен оставаться в области  $V$  вокруг  $x$  в течение данного времени  $ds$  (рис. 11).

Вызванная измерением неопределенность в  $p$  записывается как  $\Delta p = \Delta p/ds$ , ибо неопределенность в разности значений  $p$  в разных временных точках, конечно тоже порядка  $\Delta p$ , так что  $\Delta p$  растет, как  $1/ds$ . Неопределенность  $\Delta x = \left(\frac{1}{M}\right) \Delta(p - cA)$  будет, по сравнению с  $\Delta p$ , иметь порядок  $\frac{1}{M}$ , и благодаря свободе в выборе массы, не будет играть роли. Таким образом, мы получаем для неопределенности в напряженности поля выражение

$$\dot{x}_k \Delta A_{,i}^k = \frac{\Delta p_i}{c} ds + 0\left(\frac{1}{M}\right). \quad (3.82)$$

Неопределенность в  $A^j(x')$  происходит из-за того, что вследствие неточно известного движения пробного тела его поле также точно неизвестно. Выражая поле, порождаемое пробным зарядом через запаздывающую функцию Грина  $D^{\text{ret}}$  (Д2.16), получим для него:

$$A^j(x') = c \int ds D^{\text{ret}}(x' - x(s)) \dot{x}^j(s), \quad (3.83)$$

откуда для его неопределенности получается

$$\Delta A^j(x') = cds D^{\text{ret}}(x' - x) \Delta \dot{x}^j + eds \dot{x}^j \Delta x^k \partial_k D^{\text{ret}}(x' - x). \quad (3.84)$$

Вклад в подынтегральное выражение для  $A(x')$  вносят только те точки, в которых мировая линия пробного заряда пересекает световой конус точки  $x'$ . Поэтому мы заменили интегрирование умножением на  $ds$  и взяли значение подынтегральной функции в точке  $x$ . Ввиду протяженности пробного заряда в действительности нужно было бы проинтегрировать (3.84) по конечным областям вокруг  $x$  и  $x'$ . Поскольку мы, однако, приняли, что пробный заряд можно сделать сколь угодно малым, мы можем опустить это интегрирование, оно все равно выпало бы из окончательного результата. Умножив (3.84) на (3.82), найдем, используя соотношение неопределенностей для пробного заряда, что

$$\dot{x}_k \Delta A_{,i}^k(x) \Delta A^j(x') = \dot{x}^j \partial_i D^{\text{ret}}(x' - x) + 0(M^{-1}, c). \quad (3.85)$$

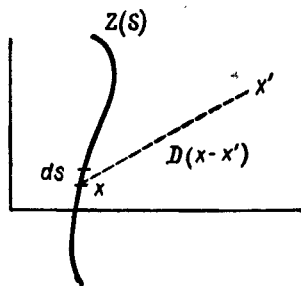


Рис. 11. Мировая линия пробного заряда

Только выписанный в явном виде член в (3.85) не может быть сделан сколь угодно малым с помощью подбора подходящих значений массы  $M$  и заряда  $c$  пробной частицы. Поскольку скорость  $x$  можно выбирать произвольно и, так как

$$D^{\text{ret}}(x' - x) = -D(x - x') \quad \text{для } x'_0 > x_0,$$

то из 3.85) можно заключить о справедливости (3.80).

Мы можем заметить далее, что в выражении (3.82) для неопределенности в напряженности поля все члены содержат либо  $M$ , либо  $c$ , так что измерения самой напряженности можно выполнить со сколь угодно большой точностью. Это обстоятельство было предметом многочисленных дискуссий, в которых выдвигались следующие возражения. Чтобы измерить напряженность поля с возможно большей точностью, надо сделать пробный заряд  $c$  по возможности больше. Но тогда, однако, заведомо нельзя пренебрегать реакцией поля на пробное тело и наблюдение движения частицы ничего не скажет нам о первоначальной напряженности поля, так как силы (немалые теперь), возникающие от излучения пробными зарядами, будут влиять на эти заряды в той же степени, что и первоначальное поле. Если учесть силы излучения в наших вычислениях, то мы увидим, что в выражение для неопределенности напряженности поля добавится член, растущий вместе с  $c$ , так что мы не сможем найти такого значения заряда  $c$ , для которого полная неопределенность исчезла бы. Разрешению трудности мы обязаны Бору и Розенфельду<sup>\*)</sup>. Им удалось показать, что обратное действие собственного поля можно последовательно учесть, если принять во внимание конечные размеры пробного заряда и поэтому пытаться измерить лишь среднее значение напряженности поля в протяженной пространственно-временной области. Правда, описание соответствующей аппаратуры весьма сложно, поэтому мы не будем вдаваться здесь в его обсуждение, а в следующей части этого параграфа примем просто, что реакция поля не играет роли. В то время, как наши упрощенные рассуждения сразу покажут, что теоретическая неопределенность не может быть уменьшена, трудно во всех деталях показать, что эта оптимальная неопределенность действительно может быть достигнута.

Физически масштаб ограничений измеримости конечно очень мал. Если выписать соотношения неопределенностей через напряженности электрического и магнитного полей в определенной системе отсчета, то выяснится следующее: изме-

<sup>\*)</sup> Мы отсылаем читателя к оригинальной статье, содержащей много тщательно разработанных деталей. См. Bohr N. and Rosenfeld L. Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Biol. Medd. 12, 8 (1933).

рения напряженностей только электрического или только магнитного поля в разных точках не мешают друг другу. Однако, если измерять электрическое поле в одной точке, а магнитное поле в перпендикулярном направлении в другой точке, то возникают взаимные помехи. Это можно понять, наглядно представив себе магнитное поле ускоряющегося пробного заряда. В этом случае вычисление по общей формуле (3.74) неопределенностей в напряженностях электрического и магнитного полей  $E$  и  $H$  в двух объемах размеров  $L$  за время  $T > L$ , расположенных на расстоянии  $R$  друг от друга, дает  $\Delta E_x \Delta H_y \sim \frac{1}{R^2 T^2}$ . Если взять, скажем,  $R = L = 1$  см,  $T = 1$  сек и  $\Delta E \sim \Delta H$ , то получается  $\Delta E \sim 10^{-13}$  в/см. Если мы хотим добиться, чтобы в некотором объеме  $\Delta E$  было бы существенно меньше, чем  $E$ , то мы должны (если  $R \sim L$ ) выбрать  $E^2 L^3 T > 1$ . Так как частота  $\nu$  поля  $E$  должна быть больше, чем  $T^{-1}$ , и поскольку для числа фотонов  $n$  выполняется условие  $E^2 L^3 = n\nu$ , то написанное условие означает, что  $n \gg 1$ , — большое число фотонов. В противоположность электронам для фотонов не существует выражения для плотности числа частиц. Если спросить себя, в сколь малый пространственно-временной объем  $\Delta x \Delta t$  можно заключить фотон, то окажется, что должно быть  $\Delta x \gg \frac{1}{\omega}$ ,  $\Delta t \gg \frac{1}{\omega}$ , т. е. должны выполняться условия применимости геометрической оптики. Возможность локализации фотона не означает ничего больше, чем понятие лучей в геометрической оптике.

Обратимся теперь к дираковому полю. Тогда окажется прежде всего, что согласно (2.40)  $\psi$  в точках, разделенных пространственноподобным интервалом не коммутируют, но антикоммутируют. Однако, наблюдаемы не сами  $\psi$ , а только билинейные по ним величины, а эти последние коммутируют в пространственноподобных точках в силу алгебраического тождества

$$[AB, CD] = -AC\{B, D\} + A\{B, C\}D - C\{A, D\}B + \{A, C\}DB. \quad (3.86)$$

Оно позволяет нам вычислить коммутатор между, скажем, операторами  $j$  в двух разных точках, используя (2.38) и (2.40)

$$[j_i(x), j_k(x')] = ie^2 \{ \bar{\psi}(x) \gamma_i S(x-x') \gamma_k \psi(x') - \bar{\psi}(x') \gamma_k S(x'-x) \gamma_i \psi(x) \}. \quad (3.87)$$

Измерение заряда состоит в измерении создаваемого этим зарядом электромагнитного поля, благодаря чему задача об измеримости  $j$  сводится к ранее обсужденной. С этой целью рассмотрим заряд, находящийся в некотором объеме  $V$ , огра-

ниченном поверхностью  $\sigma$ . Тогда имеем с помощью теоремы Гаусса (0.5) и уравнений поля  $\square^2 A_k = j_k(x)$ :

$$\int_V dx j_k(x) = \int_{\sigma} d\sigma^i A_{k,i}(x), \quad (3.88)$$

так что

$$\int_V dx \Delta j_k(x) = \int_{\sigma} d\sigma^i \Delta A_{k,i}. \quad (3.89)$$

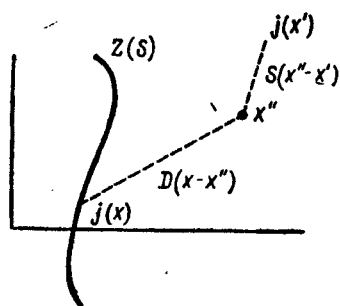


Рис. 12. Влияние пробного заряда в  $x$  на ток  $j(x')$

Неопределенность в  $j(x)$  зависит, следовательно, прямо от неопределенности в  $A(x)$ . Так как электрическое поле пробного заряда известно недостаточно хорошо, изменение тока не может быть зафиксировано точно. Пробное тело, которое используется для измерения  $A(x)$ , будет создавать электрическое поле в  $x''$ , а оно в свою очередь влияет на ток в  $x'$  (рис. 12). Изменение  $\psi(x')$ , обусловленное электромагнитным полем было найдено в предыдущем параграфе.

Применяя соответствующую формулу для изменения  $j$  в одностичном состоянии, получим

$$\begin{aligned} \Delta j_i(x') &= e^2 \int dx'' K_{ik}(x', x'') \Delta A^k(x'') = \\ &= \dot{x}^k c e^2 \Delta x^j ds \int dx'' K_{ij}(x', x'') \partial_j D^{\text{ret}}(x'' - x), \end{aligned} \quad (3.90)$$

где

$$\begin{aligned} K^{kj}(x', x'') &= \bar{\psi}(x'') \gamma^j S^{\text{adv}}(x'' - x') \gamma^k \psi(x') + \\ &+ \bar{\psi}(x') \gamma^k S^{\text{ret}}(x' - x'') \gamma^j \psi(x''). \end{aligned} \quad (3.91)$$

В соотношении неопределенностей для  $j(x)$  содержится  $A_{k,i}^k$ , которое не определяется прямо из измерений, так как уравнения движения содержат только  $\dot{x}^k A_{k,i}$ . Поэтому мы умножим (3.89) на  $\dot{x}^k$ , отбросим, как и выше, члены порядка  $1/M$ , возьмем  $\dot{x}^k A_{k,i}$  из (3.82) и помножим все выражение на (3.90):

$$\begin{aligned} \dot{x}^k \int dx \Delta j_k(x) \Delta j_i(x') &= \int d\sigma^j \dot{x}^k \Delta A_{k,j} \Delta j_i(x') = \\ &= \frac{\dot{x}^k e^2 \Delta x^j ds \Delta P^m}{ds} \int d\sigma_m \int dx'' K_{ik}(x', x'') \partial_j D^{\text{ret}}(x'' - x'). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Подставляя соотношение неопределенностей для пробного заряда и используя

$$\int_V d\sigma^j \partial_j D^{\text{ret}}(x'' - x) = \int_V dx \square^2 D^{\text{ret}}(x'' - x) = \int_V dx \delta(x'' - x), \quad (3.93)$$

мы установим, что

$$\dot{x}^k \int_V dx \Delta j_k(x) \Delta j_l(x') = e^2 \dot{x}^k \int_V dx K_{lk}(x', x). \quad (3.94)$$

Так как скорость  $\dot{x}$  и объем  $V$  произвольны, а  $K$  совпадает в существенном с выражением в квадратных скобках (3.87), мы показали, что перестановочные соотношения, введенные в теории, физически необходимы.

Эти примеры показывают, как соединяются математический формализм и физическая интерпретация. При этом надо подчеркнуть, что дело состоит здесь отнюдь не в проверке математических тождеств, но что существенным образом входят физические свойства пробного заряда<sup>\*</sup>. В квантовой теории полей квантовая теория и классическая электродинамика объединяются в логически замкнутой системе, которая последовательно трактует соотношения неопределенностей для частиц и квантовую природу полей.

---

<sup>\*</sup> Очень может быть, что в будущей теории некоторые идеализации пробного тела, такие, как пренебрежение атомной структурой, не будут возможны.

---

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОЛЯ

§ 12. Общие соображения

В этой части книги мы рассмотрим взаимодействие квантованных полей. Главным образом мы будем иметь дело с квантованным электромагнитным полем, источником которого является квантованное поле Дирака. Это означает, что в член взаимодействия  $Aj$  в качестве оператора  $j$  мы подставим оператор тока диракова поля. Тем самым, член взаимодействия записывается в виде произведения трех операторов поля и описывает такие элементарные процессы, как излучение фотона электроном и рождение фотоном электрон-позитронной пары. К различным комбинациям этих элементарных процессов можно свести широкий класс более сложных электромагнитных явлений.

Лагранжиан, ответственный за эти процессы, имеет вид \*):

$$L = L^{el} + L^{phot} + eL', \quad L' = - :A_k \bar{\psi} \gamma^k \psi:, \quad (4.1)$$

где  $L^{el}$  и  $L^{phot}$  — лагранжианы электрон-позитронного (2.37) и фотонного (2.27) полей. Применяя к данному случаю общий метод, развитый в § 3, мы найдем прежде всего, что операторы поля  $A$  и  $\psi$  удовлетворяют системе уравнений Дирака-Максвелла:

$$\begin{aligned} (\gamma^k (i\partial_k - eA_k(x)) - m)\psi(x) &= 0, \\ \square^2 A_k(x) &= e\bar{\psi}(x)\gamma_k\psi(x). \end{aligned} \quad (4.2)$$

По тем же самым причинам, что и в теории свободных полей, эти уравнения нужно дополнить условием Лоренца  $A_{,k}|0\rangle = 0$ . Канонические перестановочные соотношения для пространственноподобных точек

$$\begin{aligned} \int_{x' \subset \sigma} d\sigma_k \{\psi(x'), \bar{\psi}(x)\gamma^k\} f(x) &= f(x') \\ \int d\sigma_k \{\psi(x'), \psi(x)\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

\*) Мы опять используем жирный шрифт для операторов, соответствующих взаимодействующим полям, в противоположность операторам свободных полей, для которых употребляется обычный шрифт.

и

$$\int d\sigma_k [A_i(x), A^{j,k}(x')] f(x') = -i\delta_{ij} f(x)$$

$$\int d\sigma_k [A^i(x'), A^j(x)] = 0 \quad (4.4)$$

остаются без изменения, поскольку  $L'$  не содержит производных. Кроме того, мы можем принять, что вариация  $\psi$  коммутирует с  $A$  и наоборот. По общим правилам, использованным при выводе (1.64), отсюда следует<sup>\*)</sup>, что

$$\int d\sigma_k [A(x), \psi(x')] = 0. \quad (4.5)$$

Вычисляя тензор энергии-импульса, мы найдем (задача 22), что он точно равен сумме тензоров энергии-импульса электронов (2.38) и фотонов (2.28) подобно тому, как это имеет место в классической теории (1.12):

$$T = T^{\text{el}} + T^{\text{phot}}. \quad (4.6)$$

То что константа связи  $e$  не входит в (4.6) — это лишь чисто кажущийся эффект. Она появится, как только мы выразим тензор  $T$  через канонические величины, т. е. исключим  $\psi$  с помощью уравнения Дирака. Это означает, что поскольку тензор  $T$  построен из операторов взаимодействующих, а не свободных полей, то он состоит не только из кинетической энергии, но включает и энергию взаимодействия. Так как  $L'$  не зависит явно от точек пространства-времени (от них зависят только операторы полей), то остаются справедливыми все соотношения, полученные в § 3 на основе релятивистской инвариантности.

Кроме того, легко проверить, что лагранжиан  $L$  инвариантен относительно одновременного градиентного преобразования всех полей

$$A_i \rightarrow A_i + \partial_i \lambda, \quad \psi \rightarrow e^{ie\lambda} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-ie\lambda} \bar{\psi}, \quad (4.7)$$

где  $\lambda(x)$  коммутирует со всеми величинами и удовлетворяет уравнению  $\square^2 \lambda = 0$ . Таким образом, относительная фаза  $\psi(x)$  в различных пространственно-временных точках теряет свое значение. Так как преобразование (4.7) не изменяет ни  $L$ ,  $T$ ,  $J$ , ни перестановочных соотношений, то оно может быть представлено в виде некоторого канонического преобразования. Инфинитезимальные операторы, порождающие это

<sup>\*)</sup> Однако невозможно дать простое выражение для коммутаторов полей при произвольных значениях времени. Действительно,  $A$  зависит не только от  $A$  и  $\dot{A}$  в некоторый предыдущий момент времени, но также и от  $\psi$  во все промежуточные моменты. Оказывается, что коммутатор для разных времен не будет даже  $c$  — числом.



преобразование, встретятся нам позднее. Отметим также, что лагранжиан  $L$  будет инвариантен относительно зарядового сопряжения, если мы постулируем, что при этой операции  $A$  меняет знак:  $A_k \rightarrow -A_k$ ,  $\psi \rightarrow \psi'$ ,  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}'$ .

Хотя введенные в § 3 перестановочные соотношения операторов  $P_k$ ,  $J_{ik}$  и  $Q$  с операторами поля остаются верными и при наличии взаимодействия, исходя из них нельзя получить полную информацию о физических свойствах системы. Из них видно только, что собственные значения импульса, момента и заряда останутся теми же, что и для свободных полей, но эти соотношения ничего не говорят об энергетическом спектре. Причина лежит в том, что не удается получить решение нелинейных уравнений (4.2), так как зависимость операторов поля от времени далеко не проста. Поскольку фурье-компоненты операторов поля не будут, вообще говоря, даже времениподобны, то положительно- и отрицательно-частотные части нельзя определить инвариантным образом, и вопрос о том, как ввести понятие частицы, требует специального обсуждения. Явные результаты здесь удастся получить только путем разложения в ряд по степеням  $e$ ; при этом все величины выражаются через операторы свободных полей  $A$  и  $\psi$ . Тем самым приобретает ясный смысл и символ:..., использованный в (4.1).

При использовании общих формул из § 8 для разложения в ряд по степеням  $e$  в данном случае встречаются некоторые трудности. Эти формулы дают вероятности переходов между состояниями «голых» частиц и, следовательно, не описывают ту физическую ситуацию, которой мы интересуемся. Как видно из результатов предыдущей главы, присутствие  $L'$  в формуле (4.1) приводит к тому, что электрон окружает себя виртуальными фотонами; они будут в свою очередь порождать виртуальные пары и т. д. Таким образом, как и в § 8, матрица  $U_{t_1 t_2}$  будет отвечать на вопросы типа: если в момент времени  $t = t_1$  имелся «голый» электрон, то какова вероятность найти в момент  $t = t_2$  «голый» фотон и «голый» электрон?

Однако частицы, с которыми имеют дело в реальных опытах, являются, конечно, физическими, окруженными облаком виртуальных, а вовсе не «голыми» частицами. Как мы увидим далее, масса «одетой» частицы отличается (на бесконечную величину!) от  $m$ , так что непосредственное применение методов, развитых в предыдущей главе, приведет даже к неверным энергиям начального и конечного состояний. В задачах, обсуждавшихся в главе 3, мы рассматривали только внешние поля, которые выключались при  $t \rightarrow \pm \infty$ , так что для этих моментов времени полный лагранжиан  $L$  сводился

к свободному лагранжиану  $L$ . В отличие от этого, в данном случае заряд  $e$  нужно считать постоянным, так как иначе нарушалась бы релятивистская инвариантность и закон сохранения заряда. Физически это означает, что мы не можем исключить заряд электрона и, следовательно, электрон всегда взаимодействует с облаком виртуальных частиц. Единственное, что мы можем сделать, это разнести физические частицы пространственно так, чтобы взаимодействие между ними стало пренебрежимо малым. Эти соображения можно учесть, перегруппировав члены полного лагранжиана (4.1) и включив в  $L'$  слагаемые, которые, например, компенсируют изменение массы физической частицы.

Мы отложим детальное обсуждение этих вопросов до § 14. Здесь же мы подсчитаем, чтобы получить первоначальную ориентировку, вероятности переходов в низшем порядке по  $e$ . Упомянутые ранее эффекты проявляются только при расчете поправок высшего порядка, которыми мы пока не будем интересоваться.

Используя формулы из § 8, мы выразим теперь операторы взаимодействующих полей через операторы свободных полей, с которыми мы уже знакомы. Предположим, что при  $t \rightarrow -\infty$  оба типа операторов совпадают, и что собственные состояния так выраженных операторов свободных полей соответствуют падающим частицам, с которыми приходится иметь дело на опыте. В соответствии со сказанным выше, последнее справедливо в том порядке по  $e$ , с которым мы в данный момент имеем дело. Итак, согласно (3.8), имеем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}(x) = & O(x) + ie \int_{-\infty}^x dx' [O(x), L'(x')] + \\
 & + (ie)^2 \int_{-\infty}^x dx' \int_{-\infty}^{x'} dx'' [[O(x), L'(x)], L'(x'')] + \dots \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Применение (4.8) к типичному оператору приводит к формулам, аналогичным тем, которые были получены в предыдущей главе, хотя и несколько более сложным. Полный заряд при этом не изменяется  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}$ , так как оператор  $L'$  эрмитов и, следовательно, коммутирует с  $\mathbf{Q}$ . Однако для заряда в некотором конечном объеме это, как мы видели в § 10, уже несправедливо. Чтобы выразить вектор энергии-импульса через энергию и импульс падающих частиц, мы должны действовать с большой осторожностью, так как тензор  $\mathbf{T}$  содержит  $\psi_i$  и

$$U_{x, -\infty} \psi_i(x) U_{x, -\infty}^{-1} \neq \frac{\partial}{\partial x_i} U_{x, -\infty} \psi(x) U_{x, -\infty}^{-1}.$$

Выбирая в качестве  $\sigma$  гиперплоскость  $t = \text{const}$ , мы легко находим, что

$$\int_{\sigma_x} d\sigma_i \mathbf{T}_{ik}(x) = U_{-\infty, x} \int_{\sigma_x} d\sigma_i [T_{ik}^{\text{el}}(x) + T_{ik}^{\text{phot}}(x) - g_{ik} L'(x)] U_{x, -\infty}.$$

Снова применяя (3.8) и используя

$$P_k = \int d\sigma_i (T_{ik}^{\text{el}} + T_{ik}^{\text{phot}}), [O(x), P_k] = iO(x)_{,k},$$

мы получаем

$$P_k = P_k - e \int_{\sigma=-\infty} d\sigma_k L'(x) \quad (4.9)$$

в согласии с тем фактом, что  $\mathbf{P}$  и  $P$  сохраняются.

Если последний член исчезает, то полная энергия равна кинетической энергии падающих частиц. Можно спросить, как может исчезать этот интеграл при  $t \rightarrow -\infty$ , если теория трансляционно инвариантна и, следовательно, все времена, казалось бы, одинаково хороши. Идея ответа заключается в том, что концентрация волновых пакетов, имеющая для конечных моментов времени конечное значение, при  $t \rightarrow -\infty$  становится бесконечно малой. Тем самым частицы оказываются в среднем бесконечно далеко друг от друга, так что энергия взаимодействия должна стать пренебрежимо малой. Если только собственная энергия в  $L'$  скомпенсирована, то не следует ожидать, что вследствие взаимодействия энергия изменится.

Состояния с определенным числом падающих частиц представляют собой собственные состояния оператора  $N$ , который можно построить из операторов  $A$  и  $\psi$  по методу, изложенному в § 4. Однако не существует никакого оператора  $\mathbf{N}$  который сохранялся бы подобно  $N$ . Можно, конечно, удовлетворить соотношениям коммутации (4.3) и (4.4), вводя операторы рождения и уничтожения\*).  $\mathbf{N}$ , построенное из этих операторов, — оператор числа «голых» частиц — не будет сохраняющейся величиной. Поэтому число частиц сохраняется только в асимптотическом смысле. О числе физических частиц можно говорить лишь в том случае, когда они достаточно разделены, так что нельзя спутать ни

\*) Это эквивалентно предположению о том, что операторы  $A$  и  $\psi$  совпадают с операторами свободных полей в некоторый конечный момент времени.

одну из физических частиц с виртуальными частицами другой.

Основной величиной, с которой мы будем иметь дело в дальнейшем, будет  $S$ -матрица

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int_{\mathcal{V}} dx_1 \dots dx_n P A_{\nu_1}(x_1) \dots A_{\nu_n}(x_n) \times \\ \times P: \bar{\psi}(x_1) \gamma^{\nu_1} \psi(x_1) : \dots : \bar{\psi}(x_n) \gamma^{\nu_n} \psi(x_n) : . \quad (4.10)$$

Ее матричные элементы, взятые между собственными состояниями оператора  $N$ , говорят нам о вероятности, с которой при  $t = +\infty$  будет найдена некоторая конфигурация физических частиц, если конфигурация частиц при  $t = -\infty$  была известна. Так как интегрирование в (4.10) распространено по всему бесконечному пространству-времени, то  $S$  будет коммутировать с операторами трансляции и вращения  $P$  и  $J$ . Это означает, что если  $|\text{in}\rangle$  — собственное состояние  $P$  и  $J$ , то и  $|\text{out}\rangle = S|\text{in}\rangle$  также будет собственным состоянием этих операторов, отвечающим тем же самым собственным значениям. Это, конечно, не значит, что при  $t = +\infty$  у каждой частицы будет тот же самый вектор энергии-импульса (или момент), что и при  $t = -\infty$ . Сохраняется только полный вектор энергии-импульса (или момент), причем этому не будет даже противоречить и изменение числа частиц. Действительно,  $N$  не коммутирует с  $S$  и, следовательно, не сохраняется.

Сохранение  $P$  и  $J$  предполагалось при обсуждении правил отбора в § 6. Такие законы сохранения отражают инвариантность теории относительно собственной группы Лоренца и являются характерной чертой всех релятивистски инвариантных теорий. В частности, отсюда следует, что в такой теории число частиц со спином  $1/2$  может измениться в соответствии с законом сохранения момента только на четное число. Вообще  $S$ -матрица будет обладать теми же свойствами инвариантности, что и  $L'$ , и переводить их на язык процессов между физическими частицами. Так, если  $L'$  инвариантен также и относительно пространственных отражений, то  $S$  будет коммутировать с оператором четности. Аналогично инвариантность  $L'$  относительно вращений в пространстве внутренних степеней свободы электронного поля гарантирует нам сохранение  $Q$  и  $U_c$ . Это вращение может даже зависеть от координат, когда оно комбинируется с градиентным преобра-

зованием  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \partial\lambda$ , — тогда  $U_{\sigma_1, \sigma_2}$  умножится на производящий оператор

$$E(\sigma) = \exp\left(-i \int d\sigma_k f^k(x) \lambda(x)\right)$$

калибровочного преобразования \*)

$$\psi(x) \rightarrow e^{-ie\lambda(x)} \psi(x)$$

$$U_{12} \rightarrow P \exp\left[-i \left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx j_k(x) [A^k(x) + \partial^k \lambda(x)]\right)\right] = \\ = E(\sigma_1) U_{12} E(\sigma_2)$$

и если  $\lambda(x)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \pm \infty$ , то  $S$  останется относительно этой операции инвариантной.

Чтобы найти матричные элементы  $S$ -матрицы между собственными состояниями  $N$ , мы должны перегруппировать операторы в  $S$ -матрице так, чтобы все операторы уничтожения оказались справа от операторов рождения. Соответствующие перегруппировки  $PA(x_1) \dots A(x_n)$  и  $P: \bar{\psi}(x_1) \psi(x_1) : \dots : \bar{\psi}(x_n) \psi(x_n) :$  были выполнены в §§ 9 и 10. Так как член  $n$ -го порядка  $S^{(n)}$  в (4.10) равен произведению двух только что приведенных выражений, то перегруппировка приводит к произведению результатов §§ 9 и 10.

Рассмотрим некоторые простейшие члены.  $S^{(1)}$  тождественно равно нулю. Это можно видеть, записав его в импульсном представлении:

$$S^{(1)} = -ie \int d^4x A_j(x) \bar{\psi}(x) \gamma^j \psi(x) = \\ = -ie (2\pi)^{-8} \int dk dp_1 dp_2 A_j(k) \bar{\psi}(p_1) \gamma^j \psi(p_2) \delta(k - p_1 - p_2), \quad (4.11)$$

где  $\delta$ -функция в (4.11) возникает в результате интегрирования по всему пространству-времени и выражает закон сохранения энергии-импульса физических частиц. Она приводит к тождественному обращению  $S^{(1)}$  в нуль, так как подынтегральное выражение отлично от нуля только при  $k^2 = 0$ ,  $p_1^2 = p_2^2 = m^2$  и  $k - p_1 + p_2 = 0$ , а эти условия никогда не выполняются одновременно (кроме одной точки  $k \equiv 0$ ), что является

\*) Разложение в ряд показывает, что

$$e^{iG} \psi e^{-iG} = \psi + i[G, \psi] - \frac{1}{2!} [G, [G, \psi]] + \dots = \psi - ie\lambda\psi + \\ + \frac{(-ie\lambda)^2}{2!} \psi + \dots = \psi e^{-ie\lambda}.$$

отражением того хорошо известного факта, что ни свободный электрон не может испустить фотон, ни фотон не может породить пару в свободном пространстве. Процессы подобного рода происходят только виртуально и описываются соответствующими членами в  $U_{e, \gamma}$ , в которой  $\delta$ -функция заменена на более размазанную функцию.  $S^{(2)}$  приводит к переходам между состояниями двух падающих и двух уходящих частиц. Это типичные процессы рассеяния, подобные рассеянию фотонов электронами или электронов электронами. В первом случае, например, условия для векторов энергии-импульса имеют вид

$$k_1^2 = k_2^2 = 0, \quad p_1^2 = p_2^2 = m^2 \quad \text{и} \quad k_1 - k_2 + p_1 - p_2 = 0.$$

Эти соотношения совместны в некотором конечном интервале импульсного пространства и приводят к конечным вероятностям переходов. Они будут вычислены в следующем параграфе.

Заканчивая этот параграф, обсудим некоторые аспекты еще более общей задачи, в которой лагранжиан содержит также и внешние источники. Эта задача имеет практическое значение, если, например, рассматриваются ситуации, в которых наряду с электронами и фотонами присутствуют электрические поля атомных ядер. Кроме того, внешние источники будут служить пробными телами при выяснении физического содержания теории, которое мы проведем в § 14. В проблемах, подобных рассмотренным в третьей главе, внешние поля передают полю энергию и импульс и нарушают равноправие разных лоренцевых систем. При этом закон сохранения энергии-импульса видоизменяется и становится возможным важный процесс испускания фотона связанным электроном. Удобно рассмотреть эту задачу (в низшем порядке по  $e$ ), группируя лагранжиан  $L$  следующим образом:

$$L^0 = L^{el} + L^{phot} + \frac{e^2}{4\pi r} : \psi \dot{\psi} : \quad (4.12)$$

и

$$L' = -eA(x) : \bar{\psi}(x) \gamma \psi(x) : .$$

Разлагая  $\psi$  по кулоновым волновым функциям, мы найдем собственные состояния оператора  $P^0$  и сумеем вычислить вероятности переходов между связанными состояниями для оператора  $U$ , построенного с помощью  $L'$ . Теперь член первого порядка

$$U^{(1)} = -ie \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} dx A(x) \bar{\psi} \gamma \psi \quad (4.13)$$

не обратится в нуль. Взять матричный элемент между состояниями с волновыми функциями  $u_m$  и  $u_n$  — значит заменить  $\psi(x)$  на  $u_m(x)$ , а  $\bar{\psi}(x)$  на  $u_n(x)$ .

Таким образом, тем же самым способом, как и в § 9, мы получим для вероятности перехода между состояниями  $u_m$  и  $u_n$ , соответствующего испусканию одного фотона, выражение

$$\begin{aligned} & \sum_j |\langle j, n | U^{(1)} | m \rangle|^2 = \\ & = -e^2 \int dx dx' j_{nm}^{\dot{}}(x) D^+(x-x') j_{mn}(x'), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где ток перехода  $j_{nm}(x)$  равен  $u_n(x) \gamma u_m(x)$ . Его зависимость от времени имеет вид  $e^{it(E_n - E_m)}$  и извлекает из интеграла только те фотоны, которые удовлетворяют условию частот Бора. Равенство (4.14) передает известный элементарный результат, что вероятность испускания фотонов атомами соответствует вероятности излучения классическим током, периодическая зависимость от времени и пространственное распределение которого совпадают с зависимостью от времени и пространственным распределением произведения волновых функций. Мы предлагаем в качестве задачи привести (4.14) к обычной форме дипольного излучения (задача 23).

В заключение остановимся на задаче, иллюстрирующей специфические свойства функции  $D_f$ . Рассмотрим два вполне обособленных атома и спросим себя о вероятности одновременного перехода, характеризующегося током перехода  $j^{(I)}$  в первом атоме и  $j^{(II)}$  — во втором, который происходит без испускания фотона. Вероятность такой передачи энергии от одного атома к другому равна

$$-e^2 \int dx dx' j^{(I)}(x) j^{(II)}(x') D_f(x-x'). \quad (4.15)$$

Характерные свойства  $D_f$ -функции проявляются в выборе правил обхода полюса в  $k$ -плоскости при интегрировании в импульсном пространстве. Полюс  $D_f$ -функции соответствует реальным фотонам. Действительно, связанные частицы могут передавать энергию-импульс также и посредством обмена реальными фотонами. Если акты испускания и поглощения можно в достаточной мере локализовать в пространстве-времени, то мы, естественно, должны потребовать, чтобы испускание предшествовало поглощению. Так как свободные поля имеют положительную энергию, то это, грубо говоря, означает, что мы не можем «взять взаймы» энергию у электромагнитного поля.

Функция  $D_f$  содержит только положительные частоты для положительных времен, а для отрицательных — только отрицательные. Отсюда немедленно следует, что благодаря этому свойству функция  $D_f$  действительно удовлетворяет требованию причинности, упомянутому выше. Однако нужно помнить, что энергия и время дополнительные. Поэтому необходимо выяснить, в какой мере локализация акта излучения во времени не противоречит определенности знака энергии. Предположим, что фотонный спектр, обозначенный  $f_{k_0}$ , содержит только положительные частоты и что распределение частот около средней величины  $\omega$  имеет ширину  $\Delta\omega$ . Тогда очевидно, что  $\omega > \Delta\omega$ . С учетом соотношения неопределенности  $\Delta\omega\Delta T \sim 1$ , это неравенство должно принять вид  $\omega\Delta T > 1$ , где  $\Delta T$  измеряет длительность процесса испускания фотона (рис. 13).

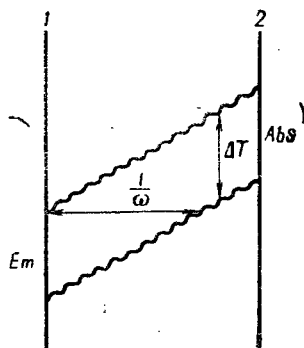


Рис. 13

Наша формулировка принципа причинности предполагает, что время  $T$  между актами испускания и поглощения фотона велико по сравнению с  $\Delta T$ . Это значит, что пространственное разделение точек, в которых происходит испускание и поглощение фотона, должно быть больше, чем  $1/\omega$ . Следовательно, вторая частица должна находиться в волновой зоне первой. Легко видеть, что поле в волновой зоне обязано полюсам  $D_f$  функции, соответствующим реальным частицам, в то время как поле в ближней зоне обязано виртуальным фотонам. Тем самым принцип причинности неприменим к виртуальным фотонам.

Теперь мы покажем формально, что если  $j^1(x)$  содержит только положительные частоты, то этот ток вносит вклад в (4.15) лишь в том случае, когда (грубо говоря)  $j^{11}(x')$  лежит позже, чем  $j^1$ . Для простоты допустим, что ток первой частицы можно представить в виде  $j_s(x) = v_s \delta(x) f(t)$ , где  $f(t)$  — фурье-образ  $f_{k_0}$ . Тогда мы должны вычислить

$$\int dx j_s(x) D_f(x - x') = v_s \int dk e^{-ikx'} f_{k_0} k^{-2}.$$

Так как \*)

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{ikx} (k^2 + i\varepsilon)^{-1} = - \frac{e^{i|k_0|r}}{4\pi r},$$

\*) Чтобы конкретизировать путь интегрирования, мы вводим в знаменатель малую отрицательную мнимую часть, которую положим равной нулю в окончательном результате.



$$\frac{1}{2\pi} \int dk_0 f_{k_0} e^{-ik_0(t-r_{\mathbf{k}_0})} = f(t-r),$$

поскольку  $f$  по предположению не содержит отрицательных частот. Если  $f$  содержит только отрицательные частоты, то результатом будет  $f(t+r)$ . Это показывает, что на самом деле сигнал распространяется в верхнем световом конусе. Хотя  $D_f$  не исчезает вне верхнего светового конуса, реальные фотоны разбросаны только внутри светового конуса около  $f(t)$  с шириной  $\Delta T$ . Иначе говоря, если отвлечься от неопределенности  $\Delta T$  во времени испускания фотона, то не существует никаких процессов, в которых частицы распространяются со скоростью, большей скорости света.

### § 13. Процессы рассеяния

В этом параграфе мы изложим методы расчета эффективных сечений рассеяния в низшем порядке по  $e$ . Рассмотрим для этого матричные элементы  $S$ -матрицы между двухчастичными состояниями. Типичным примером может служить рассеяние света на электроне. Наша задача будет состоять в том, чтобы подсчитать вероятность перехода из начального состояния  $|ekp\rangle$ , описывающего фотон с поляризацией  $e$  и импульсом  $k$  и электрон с импульсом  $p$ , в конечное состояние  $\langle p'k'e' |$ , описывающее фотон с поляризацией  $e'$  и импульсом  $k'$  и электрон с импульсом  $p'$ .

Поляризацию электрона наблюдать трудно, поэтому надо будет усреднить вероятность перехода по спиновым состояниям начального электрона и просуммировать по спиновым состояниям конечного. В низшем порядке по  $e$  элемент этого перехода содержится во втором члене разложения  $S$ -матрицы

$$S^{(2)} = -\frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 P j_i(x_1) j_k(x_2) A^i(x_1) A^k(x_2). \quad (4.16)$$

Чтобы лучше выявить свойства этого матричного элемента, мы должны разложить  $j(1)j(2)$  и  $A(1)A(2)$  по нормальным произведениям, как мы это делали в (2.84), предварительно выполнив хронологическое упорядочение по формуле (3.14). Тогда матричный элемент примет вид:

$$\begin{aligned} \langle p'k'e' | S^{(2)} | ekp \rangle = & -\frac{ie^2}{2} \int dx_1 dx_2 \langle p'k'e' | [\bar{\psi}^-(1) \gamma_i S_f(12) \gamma_k \psi^+(2) + \\ & + \bar{\psi}^-(2) \gamma_k S_f(21) \gamma_i \psi^+(1)] [A^{-i}(1) A^{+k}(2) + A^{-k}(2) A^{+i}(1)] | ekp \rangle. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Поскольку состояние с одним электроном и одним фотоном можно представить в этом порядке просто в виде произведения свободных электронного и фотонного состояний, то

$$\begin{aligned} & \langle p' k' e' | S^{(2)} | e k p \rangle = \\ & = -ie^2 \int dx_1 dx_2 \langle p' | \bar{\psi}^-(1) | 0 \rangle \gamma_i S_f(21) \gamma_k \langle 0 | \psi^+(2) | p \rangle \times \\ & \quad \times [ \langle k' e' | A^{-i}(1) | 0 \rangle \langle 0 | A^{+k}(2) | k e \rangle + \\ & \quad + \langle k' e' | A^{-k}(2) | 0 \rangle \langle 0 | A^{+i}(1) | k e \rangle ]. \end{aligned}$$

Наглядно можно было бы интерпретировать (4.17), говоря, что электрон поглощает в точке 2 начальный фотон, после чего испускает конечный фотон в точке 1 или наоборот. Наконец, амплитуды вероятности этого процесса, получающиеся для всех точек  $x_1$  и  $x_2$ , собираются интегрированием по  $x_1$  и  $x_2$ . Как мы указывали в § 10,  $S_f(12)$  характеризует способность электронов распространяться между двумя пространственно-временными точками 1 и 2. Оба члена выражения (4.17) можно представить графически<sup>\*)</sup>, как это наглядно показано на рис. 14, где прямые линии изображают распространение электронов, а волнистые — фотонов.

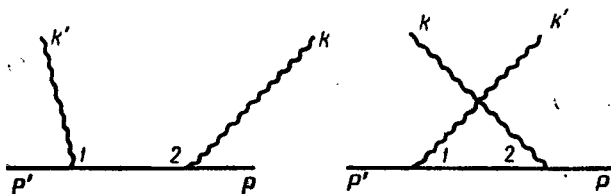


Рис. 14

Чтобы подсчитать вероятность перехода, мы должны умножить (4.17) на комплексно-сопряженное ему выражение, в результате чего все выражение примет следующую структуру:

$$\begin{aligned} | \langle p' k' e' | S^{(2)} | e k p \rangle |^2 & = e^4 \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \{ \langle p' | \bar{\psi}^-(1) | 0 \rangle \gamma^i S_f(12) \gamma^k \times \\ & \quad \times \langle 0 | \psi^+(2) | p \rangle \langle p | \bar{\psi}^-(3) | 0 \rangle \gamma^m S_f(34) \gamma^n \langle 0 | \psi^+(4) | p' \rangle \times \\ & \quad \times [ \langle k' e' | A_i^-(1) | 0 \rangle \langle 0 | A_k^+(2) | k e \rangle \langle k e | A_m^-(3) | 0 \rangle \langle 0 | A_n^+(4) | k' e' \rangle + \\ & \quad + \langle k' e' | A_i^-(1) | 0 \rangle \langle 0 | A_k^+(2) | k e \rangle \langle k e | A_n^-(4) | 0 \rangle \times \\ & \quad \times \langle 0 | A_m^+(3) | k' e' \rangle + \langle k' e' | A_k^-(2) | 0 \rangle \langle 0 | A_i^+(1) | k e \rangle \times \end{aligned}$$

<sup>\*)</sup> В каждом графе необходимо выбрать для  $S_f$ -функции подходящий путь интегрирования. Однако, пока вклад полюса не играет никакой роли, это несущественно.

$$\begin{aligned} & \times \langle ke | A_m^-(3) | 0 \rangle \langle 0 | A_n^+(4) | k'e' \rangle + \\ & + \langle k'e' | A_k^-(2) | 0 \rangle \langle 0 | A_l^+(1) | ke \rangle \langle ke | A_n^-(4) | 0 \rangle \times \\ & \times \langle 0 | A_m^+(3) | k'e' \rangle \}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

На языке графов умножение на комплексно-сопряженное выражение означает, что мы присоединяем к каждому начальному графу зеркальное отражение другого начального графа. В результате мы получим четыре члена, которые дают вклад в вероятность перехода (рис. 15).

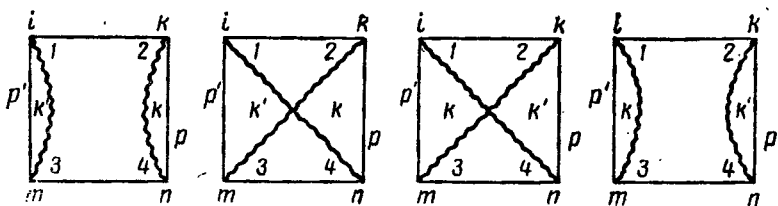


Рис. 15

Для дальнейшего расчета удобно перейти к импульсному представлению. Матричные элементы падающих электрона и фотона даны формулами (2.81) и (2.62), в которых нормировка выбирается так, чтобы до столкновения во всем большом объеме  $V$  находился один электрон, а фотоны были бы нормированы на единичный объем. Кроме того, мы проинтегрируем еще вероятность перехода по некоторой окрестности  $k'$  и  $p'$ , т. е. используем для матричных элементов частиц в конечном состоянии выражения (2.78) и (2.83), в которых фурье-образы  $S^+$ - и  $D^+$ -функций интегрируются только по избранной области вокруг точек  $p'$  и  $k'$ . Если подставить фурье-образ  $S_f$ -функции, то интегрирование по пространству — времени сейчас же выполняется, ибо подынтегральное выражение зависит от координат только экспоненциальным образом.

Если обозначить переменную интегрирования в  $S_f(12)$  через  $p''$ , то вся зависимость от  $x_2$  представится экспонентой  $e^{-ix_2(p+k-p'')}$ . Интегрирование по  $x_2$  с использованием (0.4) приводит просто к выражению

$$(2\pi)^4 \delta(p + k - p''),$$

или

$$(2\pi)^4 \delta(p - k' - p'').$$

Тогда интегрирование по  $p''$  сводится к замене  $p''$  на  $p + k$  или  $p - k'$ . Аналогично, интегрирование по  $x_1$  дает такие же соотношения. Комбинируя их, найдем соотношение  $p + k = p' + k'$ , выражающее закон сохранения энергии-импульса

для всего процесса. Интегрирование по  $x_4$  определяет вектор энергии-импульса других виртуальных электронов графа, в то время как интегрирование по  $x_3$  сводится к умножению на полный пространственно-временной объем, так как после интегрирования по  $x_4$  подынтегральное выражение не зависит больше от  $x_3$ . Это происходит потому, что каждый вектор энергии-импульса встречается в показателе экспоненты один раз с положительным и один раз с отрицательным знаками, так что сумма векторов энергии-импульса в показателе экспоненты тождественно равна нулю. За счет предшествующих интегрирований уже были обращены в нуль множители при  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$  и поэтому множитель при  $x_3$  исчезает автоматически. Таким образом, мы получаем для отдельных элементов первого члена (4.18) вклады <sup>\*</sup>), иллюстрируемые рис. 16.

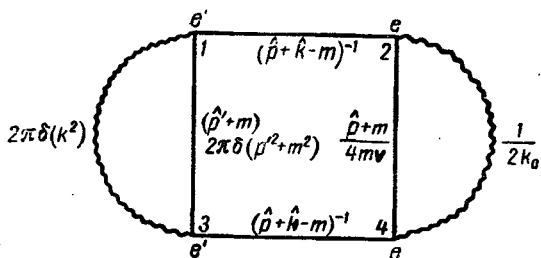


Рис. 16. Граф, соответствующий первому члену (4.18)

Три других графа дают аналогичные выражения, и мы получаем окончательно для полной вероятности перехода:

$$\omega = \frac{eV/V}{2(p_0 k_0)} \int dk' (2\pi)^{-4} (2\pi)^2 \delta(k'^2) \delta((p+k-k')^2 - m^2) \times \\ \times \frac{1}{4} \text{Sp} \{ [ \hat{e} (\hat{p} + \hat{k} - m)^{-1} \hat{e}' + \hat{e}' (\hat{p} - k' - m)^{-1} \hat{e} ] (\hat{p} + \hat{k} - k' + m) [ \hat{e}' (\hat{p} + \hat{k} - m)^{-1} \hat{e} + \hat{e} (\hat{p} - k' - m)^{-1} \hat{e}' ] (\hat{p} + m) \}. \quad (4.19)$$

Если выписать спиновые индексы явно, то будет видно, что они приводят к образованию шнура вдоль электронных линий, как мы и написали в (4.19). Совершенно естественно, что вероятность перехода пропорциональна полному времени  $T = V/V$ .

Эффективное сечение этого процесса определяется в системе покоя падающего электрона как

<sup>\*</sup>) Следует воспользоваться (0.2), где  $\hat{e} = (\gamma e)$  и т. д. В матричном элементе (2.8) надо просуммировать по обоим спиновым состояниям. Поэтому для сравнения нужно поделить результат на два.

поперечное сечение рассеяния =

вероятность перехода в единицу времени

число фотонов, падающих в единицу времени на единицу площади

Благодаря выбранной нами нормировке в единицу времени через единичную площадку проходит как раз один фотон ( $c = 1!$ ), так что эффективное сечение можно найти, просто разделив вероятность перехода (4.19) на полное время. Чтобы определить поперечное сечение в любой системе координат, полезно переписать его в системе покоя падающего электрона релятивистски инвариантным образом. В этой системе падающие частицы дают множитель  $1/mk_0$ , который можно записать в инвариантной форме как  $1/(pk)$ . Поэтому инвариантная формула для эффективного сечения, справедливая в любой системе координат, получается из (4.19) заменой  $(V/V)(1/p_0k_0)$  на  $1/(pk)$  \*).

Теперь мы можем дать общий рецепт для построения эффективных сечений\*\*):

а) начертим все графы для данного процесса и присоединим к ним все отраженные графы. Каждый граф  $n$ -го порядка имеет  $n$  вершин, где вершиной называется точка, в которую входит одна электронная линия, выходит другая и входит или выходит одна фотонная линия. Элемент  $S$ -матрицы представляет собой сумму всех топологически неэквивалентных графов, которые имеют одни и те же входящие и выходящие линии;

в) заменим входящие линии правильно нормированными матричными элементами операторов уничтожения. Внутренние электронные и фотонные линии заменим на  $S_f$  и  $D_f$  функции соответственно, а выходящие линии — функциями  $S^+$  и  $D^+$ ;

с) каждой вершине поставим в соответствие  $\gamma$ -матрицу, умноженную на вектор поляризации фотона и на заряд  $e$ , и просуммируем по векторам поляризации внутренних фотонных линий;

д) перейдя в импульсное пространство, заменим инвариантные функции их фурье-образами. При этом сумма векто-

\*) Если обе частицы имеют массы покоя, то соответствующая величина равна  $V(\overline{pk^2} - p^2k^2)$ .

\*\*) Множитель  $n!$  в  $S$ -матрице всегда сокращается, так как имеется  $n!$  членов, соответствующих тем же графам и отличающихся только  $n!$  возможными перестановками переменных  $x_1 \dots x_n$ . Для замкнутых внутренних электронных линий может получиться так, что при перестановках точек графы оказываются неэквивалентными и множитель  $n!$  не исчезает (см. § 10). При сложении членов, отвечающих различным порядкам интегрирования, оказываются существенными относительные фазовые множители. Каждая вершина дает  $-i$ , каждая внутренняя или внешняя линия дает  $i$  и каждый замкнутый электронный цикл дает  $-1$ .

ров энергии-импульса, входящих в вершину линий, должна равняться сумме векторов энергии-импульса, выходящих линий. По всем векторам энергии-импульса, которые не фиксируются этим правилом, надо проинтегрировать;

е) если отказаться от информации о направлениях поляризации электронов, что уже произошло для конечных электронов за счет использования  $S^+$ -функции, то входящую электронную линию следует заменить на  $(\hat{p} + m)/4m$  и взять шпур вдоль всех электронных линий.

С помощью этих правил можно быстро подсчитывать эффективные сечения, не проделывая заново всех сложных выкладок. Однако всегда нужно помнить, что графы являются лишь вспомогательным и не единственным средством при расчетах, позволяющих удобно представить рассматриваемые матричные элементы. Не надо приписывать им никакого более глубокого физического смысла.

Наиболее утомительная\*) часть расчета (4.19) заключается во взятии шпуров. При этом большую помощь может оказать тождество  $\overset{\wedge}{a}\overset{\wedge}{b} = -\overset{\wedge}{b}\overset{\wedge}{a} + 2(ab)$  и соотношения между введенными выше векторами

$$k^2 = k'^2 = 0, p^2 = m^2, (pk) - (pk') - (kk') = 0. \quad (4.20)$$

Кроме того, векторы поляризации пространственноподобны:  $e^2 = e'^2 = -1$ , и в силу дополнительного условия поперечны:  $(ek) = (e'k') = 0$ . Наконец, с помощью градиентного преобразования  $e \rightarrow e + \beta k$  можно добиться, чтобы  $(pe) = (pe') = 0$ .

При таком выборе калибровки  $\hat{p}$  антикоммутирует с  $\hat{e}$  и  $\hat{e}'$ . Этот факт, а также соотношения

$$(-\hat{p} + m)(\hat{p} + \hat{k} - m)^{-1} = (-\hat{p} + m) \frac{\hat{k}}{2(pk)}$$

и

$$(\hat{p} + \hat{k} + m)^{-1}(-\hat{p} + m) = \frac{\hat{k}}{2(pk)}(-\hat{p} + m)$$

и выражения, получающиеся из них при замене  $k$  на  $-k$ , можно использовать для упрощения\*\*) выражения в квадратных скобках в (4.19). Шпур удобно разбить на две части, записав скобку  $(\hat{p} + \hat{k} - \hat{k}' + m)$  в виде двух слагаемых. Сла-

\*) Необдуманное применение (Д1.17) может привести к возникновению свыше тысячи членов, которые затем сведутся к трем.

\*\*) Так как  $\text{Sp } AB = \text{Sp } BA$ , то  $(\hat{p} + m)$  можно поставить как в начале, так и в конце шпура.

гаемому  $(\hat{p} + m)$  соответствует нерелятивистское выражение, получающееся при пренебрежении отдачей электрона, а слагаемому  $(\hat{k} - \hat{k}')$  — выражение, дающее поправку на отдачу.

Первая из них дает

$$\frac{1}{4} \text{Sp} \left\{ (\hat{p} + m) \left[ \frac{\hat{e} \hat{k} \hat{e}'}{2(pk)} + \frac{\hat{e}' \hat{k}' \hat{e}}{2(pk')} (\hat{p} + m) \left[ \frac{\hat{e}' \hat{k} \hat{e}}{2(pk)} + \frac{\hat{e} \hat{k}' \hat{e}'}{2(pk')} \right] \right\} =$$

$$= -2(ee') \frac{1}{4} \text{Sp} \left\{ (\hat{p} + m) \left[ \frac{\hat{e}' \hat{k} \hat{e}}{2(pk)} + \frac{\hat{e} \hat{k}' \hat{e}'}{2(pk')} \right] \right\} = 2(ee')^2.$$

Это выражение получено коммутированием  $\hat{p} + m$  справа налево и использованием (4.20).

В выражении для релятивистской поправки \*)

$$\frac{1}{4} \text{Sp} \left\{ \hat{p} \left[ \frac{\hat{e} \hat{k} \hat{e}'}{2(pk)} + \frac{\hat{e}' \hat{k}' \hat{e}}{2(pk')} \right] (\hat{k} - \hat{k}') \left[ \frac{\hat{e}' \hat{k} \hat{e}}{2(pk)} + \frac{\hat{e} \hat{k}' \hat{e}'}{2(pk')} \right] \right\}$$

мы возьмем шпур только тех членов, которые соединены линиями. Другие шесть членов, три из которых включают  $k$  и три  $k'$ , в точности компенсируют друг друга. Оставшиеся члены дают

$$\frac{1}{4} \text{Sp} \{ [2(pk')]^{-2} \hat{p} \hat{e}' \hat{k}' \hat{e} \hat{k} \hat{e}' - [2(pk)]^{-2} \hat{p} \hat{e} \hat{k} \hat{e}' \hat{k}' \hat{e} \hat{k} \hat{e}' \} =$$

$$= \frac{1}{4} \text{Sp} \{ [2(pk')]^{-2} \hat{p} \hat{k}' \hat{k} \hat{k}' - [2(pk)]^{-2} \hat{p} \hat{k} \hat{k} \hat{k}' \} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{(pk)}{(pk')} + \frac{(pk')}{(pk)} - 2 \right].$$

Если сложить теперь все полученные результаты, то мы придем к следующему инвариантному выражению для эффективного сечения

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{(pk)} \int dk' \delta(k'^2) \delta((p + k - k')^2 - m^2) \times$$

$$\times \left[ \frac{(pk)}{(pk')} + \frac{(pk')}{(pk)} - 2 + 4(ee')^2 \right]. \quad (4.21)$$

Чтобы определить теперь вероятность рассеяния фотона в некоторый телесный угол, нужно прежде всего записать (4.21) в той лоренцевой системе координат, в которой задан этот телесный угол. Если нам нужно подсчитать вероятность рассеяния фотона на некоторый угол  $\theta$  в системе, в которой начальный электрон покоится, то надо положить  $p = (m, 0,$

\*) Вспомним, что шпур нечетного числа матриц  $\gamma$  равен нулю (см. (Д1.15)).

0, 0). Для интегрирования по  $k'_0$  и  $|\mathbf{k}'|$  удобно представить обе  $\delta$ -функции согласно уравнению (0.1) в виде

$$\delta(k'^2) = \frac{1}{2k'_0} \delta(k'_0 - |\mathbf{k}'|)$$

(другой нуль аргумента  $\delta$ -функции не входит в область интегрирования),

и

$$\begin{aligned} \delta((p+k-k')^2 - m^2) &= \frac{1}{2} \delta((pk) - (pk') - (kk')) = \\ &= \frac{1}{2} \delta(m(k_0 - k'_0) - k_0 k'_0 (1 - \cos \theta)) = \\ &= \frac{k'_0}{2\pi k_0} \delta\left(|\mathbf{k}'| - \frac{mk_0}{m + k_0(1 - \cos \theta)}\right). \end{aligned}$$

Благодаря первой  $\delta$ -функции мы будем иногда рассматривать  $k'_0$  как сокращенную запись для  $|\mathbf{k}'|$ , а вторая содержит, конечно, комптоново соотношение между частотами падающего и рассеянного фотонов. С так преобразованными  $\delta$ -функциями все интегрирования выполняются сразу, кроме интегрирования по телесному углу в пространстве  $k'$ . Если обозначить угол между векторами поляризации в выбранной нами системе координат через  $\varphi$ , то (4.21) приводится к форме

$$\sigma = \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 \int d\Omega \left(\frac{k'_0}{k_0}\right)^2 \left(\frac{k_0}{k'_0} + \frac{k'_0}{k_0} - 2 + 4 \cos^2 \varphi\right), \quad (4.22)$$

в которой она известна как формула Клейна — Нишины, по имени впервые получивших ее авторов. Экспериментальное подтверждение этой формулы было одним из первых успехов уравнения Дирака.

Подынтегральное выражение в (4.22) представляет собой дифференциальное эффективное сечение, определяющее вероятность рассеяния в телесный угол между направлениями векторов поляризации. При суммировании по направлениям поляризации рассеянного фотона, сумму по двум поперечным направлениям можно, как в (3.18), заменить суммой по всем четырем направлениям.

Чтобы подсчитать усредненное эффективное сечение, следует просто заменить в формуле (4.19)  $\hat{e}$  в матричном элементе на  $\gamma_j$ , а в сопряженном — на  $\gamma^j$  и поступить так же с  $\hat{e}'$ . При практических расчетах это приводит иногда к у-



рошениям, так как становится возможным применять формулу (Д1.18). В нашем случае это дает

$$\sigma = \frac{2a^2}{(pk)} \int dk' \delta(k'^2) \delta((p+k-k')^2 - m^2) \times \\ \times \left\{ \frac{(pk)}{(pk')} + \frac{(pk')}{(pk)} + \frac{m^2(kk')}{(pk)(pk')} \left[ \frac{m^2(kk')}{(pk)(pk')} - 2 \right] \right\},$$

или, в системе покоя электрона,

$$\sigma = \frac{a^2}{2m^2} \int d\Omega \left( \frac{k^{0'}}{k^0} \right)^2 \left( \frac{k^0}{k^{0'}} + \frac{k^{0'}}{k^0} - \sin^2 \theta \right). \quad (4.23)$$

Если нас интересует полная вероятность рассеяния, то мы должны проинтегрировать (4.23) по всему пространству  $k'$  при  $k^{0'} > 0$  и  $(p+k-k')^0 > 0$ . Это интеграл того же типа, что и использующийся при вычислении  $D^+$ - и  $S^+$ -функций в Д2. Интегрирование легче всего выполнить в системе центра инерции, в которой суммарный вектор энергии-импульса  $p+k$  будет чисто времениподобным. Мы получим при этом

$$\sigma = 2\pi \left( \frac{a}{m} \right)^2 \left[ \left( \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^3} \right) \ln(1+2\beta) + \frac{(1+\beta)}{(1+2\beta)^2} + \frac{2}{\beta^2} \right], \quad (4.24)$$

где

$$\beta = (pk)/m^2.$$

При малых энергиях ( $\beta \ll 1$ ) полное сечение постоянно и равно  $(8\pi/3)(a/m)^2$ , а при больших энергиях убывает как  $((a/m)^2/\beta) \ln(2\beta)$ . При малых энергиях, как известно, это эффективное сечение в точности совпадает с сечением рассеяния света на классическом электроде; при этом рассеянное излучение совпадает с излучением осциллятора частоты  $k_0$  в направлении  $e$ . Убывание эффективного сечения при больших энергиях — типичный эффект релятивистской квантовой теории. Оно связано с тем обстоятельством, что для волн, меньших комптоновой длины волны, становится заметной пространственная размазанность  $S_f$ -функции и действие электромагнитного поля «выинтерферируется». В этом можно убедиться, вводя в матричном элементе

$$\int A(1) \bar{\psi}(1) S_f(12) A(2) \psi(2)$$

относительную координату  $y = x_1 - x_2$ , что приводит по существу к выражению

$$\int dy S_f(y) e^{-iy(p+k)}.$$

Так как для пространственноподобных  $u$  функция  $Sf(y)$  ведет себя как  $e^{-my}$ , то при  $k \gg m$ , когда длина волны меньше чем релятивистская размазанность электрона, имеет место гасящая интерференция. В результате полное поперечное сечение уменьшается, а при рассеянии вперед возникает пик в угловом распределении фотонов. Последнее означает, что у электрона нет резкой границы, которая давала бы сильное отражение даже при высоких энергиях.

Излишне говорить, что  $S^{(2)}$  содержит матричные элементы целого ряда других процессов, которые можно было бы рассчитать тем же самым способом. Мы не будем более вдаваться в арифметические детали, а просто обсудим некоторые существенные особенности получающихся результатов.

Оба графа для комптонова рассеяния можно также использовать для расчета рождения пары двумя фотонами или обратного процесса двухфотонной аннигиляции пары. Для этого совсем необязательно снова вычислять шпур — достаточно просто переопределить входящие и выходящие линии графов (задача 24). Для полного сечения аннигиляции пар в двух предельных случаях находим (в системе центра инерции и полагая  $m = 1$ )

$$\sigma_A = \begin{cases} \frac{\pi\alpha^2}{p} & \text{для } p \ll 1 \\ \frac{\pi\alpha^2}{p^2} \ln(p^2) & \text{для } p \gg 1, \end{cases} \quad (4.25)$$

где  $p$  — относительный импульс аннигилирующих частиц. Отсюда видно, что при  $p \ll 1$  имеет место обычный закон  $1/v$ , которого и следовало бы ожидать, исходя из простых вероятностных соображений. Релятивистское уменьшение сечения опять связано с размазыванием заряда по области  $\sim m^{-1}$ .

Рассеяние двух заряженных фермионов, обязанное обмену виртуальным фотоном, описывается графом на рис. 17. Согласно общим правилам нужно просуммировать матричные элементы по всем четырем направлениям поляризации фотона. Однако для временных и продольных компонент нельзя строго говорить об обмене фотонами, так как их числа заполнения уже установлены условием Лоренца. Их вклад в матричный элемент в точности соответствует статическому кулонову полю, как видно из следующего рассуждения. Обмен

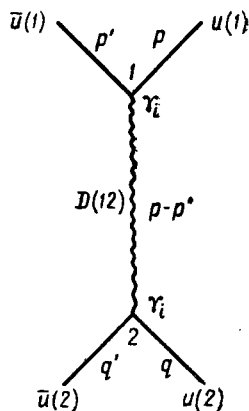


Рис. 17. Граф для рассеяния двух заряженных фермионов

фотоном с поляризацией, направленной по  $k = p - p'$ , не дает, естественно, никакого вклада в рассеяние, так как из уравнения Дирака следует, что

$$\bar{u}(2) \hat{k} u(1) = 0. \quad (4.26)$$

Поэтому, принимая за ось 1 направление пространственной части  $k$ , имеем из (4.26)

$$\bar{u}(2) \gamma_1 u(1) = \bar{u}(2) \gamma_0 u(1) \frac{k_0}{|k|},$$

и, таким образом, сумма матричных элементов для фотонов с поляризациями 0 и 1 дает:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p) \gamma_0 u(p') \bar{u}(q) \gamma_0 u(q') \frac{i}{k_0^2 - |k|^2} \left(1 - \frac{k_0^2}{|k|^2}\right) = \\ & = u^\dagger(p) u(p') u^\dagger(q) u(q') \frac{-i}{|k|^2} \end{aligned}$$

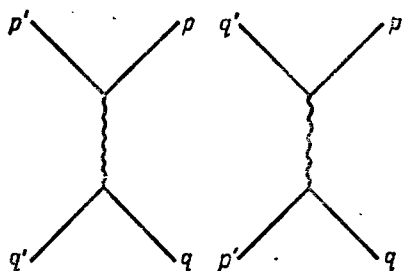


Рис. 18. Графы для рассеяния одинаковых частиц

что в точности совпадает с матричным элементом рассеяния кулоновым полем. Фактически продольные и временные фотоны можно исключить вовсе и заменить их кулоновым взаимодействием. Однако этого нельзя сделать без ссылок на частный выбор направления времени и поэтому для наших целей такая процедура себя не оправдывает.

Если речь идет о рассеянии двух одинаковых частиц, то в данном порядке теории возмущений этому процессу будут соответствовать два графа (рис. 18). При этом следует отметить, что для фермионов вклад от второго графа будет вычитаться, так как

$$\begin{aligned} & \langle p'q' | \bar{\psi}^-(2) \bar{\psi}^-(1) | 0 \rangle \langle 0 | \psi^+(2) \psi^+(1) | pq \rangle = \\ & = \{ [\bar{u}_{p'}(2) \bar{u}_{q'}(1) - \bar{u}_{q'}(2) \bar{u}_{p'}(1)] [u_p(2) u_q(1) - u_q(2) u_p(1)] \}, \end{aligned}$$

что соответствует антисимметрии волновых функций. В результате классическая формула Резерфорда при низких энергиях должна быть модифицирована следующим образом:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{16p^4} [\sin^{-4} \theta/2 + \cos^{-4} \theta/2 - \sin^2 \theta/2 \cdot \cos^2 \theta/2].$$

Для нее характерно, что она не будет простой суммой угловых распределений от волновых функций обеих рассеянных частиц, а содержит интерференционный член, в котором проявляется принцип Паули. Это уменьшает на 75% число электронов (с параллельными спинами), рассеянных на угол  $90^\circ$ . При высоких энергиях появляются вклады от поперечных фотонов, соответствующие магнитным взаимодействиям. Эти взаимодействия более сингулярны, чем кулоновы и соответствующее рассеяние более изотропно. В итоге в пределе высоких энергий находим:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4p^2} [1 + \sin^{-4} \theta/2 + \cos^{-4} \theta/2].$$

Рассеянию электрона на позитроне тоже будут соответствовать два графа (рис. 19). Самый интересный из них отвечает аннигиляции пары в фотон, который затем снова порождает пару. Этот процесс приводит к короткодействующим силам, величина которых была оценена во введении. Вопреки наивному представлению, они оказываются отталкивающими и поэтому при интерференции с кулоновым рассеянием ослабляют его.

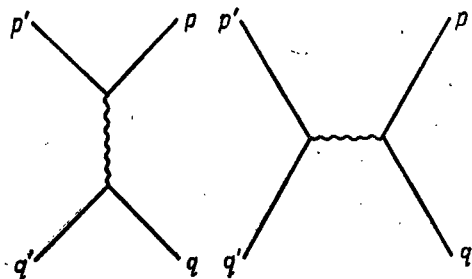


Рис. 19. Графы для рассеяния электрона на позитроне

При низких энергиях эти силы не оказывают, конечно, заметного влияния на сечение, которое дается просто формулой Резерфорда. При высоких энергиях получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4p^2} \left\{ \frac{1 + \cos^4 \theta/2}{\sin^4 \theta/2} - \frac{\cos^4 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} + 1 + \cos^2 \theta \right\}.$$

Первый член соответствует кулонову рассеянию, включая магнитные эффекты, последний — рассеянию через аннигиляцию, а член с отрицательным знаком — интерференции двух этих членов. Благодаря короткодействующему характеру сил при рассеянии через аннигиляцию угловое распределение имеет довольно гладкий характер.

## § 14. Теория перенормировок

После того как мы рассмотрели некоторые следствия теории, вытекающие из расчетов в низшем порядке по  $e$ , перейдем к обсуждению физического содержания теории, не обращаясь к какому-либо разложению по константе связи. Так

как невозможно получить точное решение уравнений поля, мы продолжим наше рассмотрение полуэмпирически. Допустим, что решение нашей системы уравнений (помня, однако, что существование такого решения весьма сомнительно) отражает некоторые основные свойства системы частиц, которые мы наблюдаем в природе.

Прежде всего предположим, что у системы имеется состояние наиминимальшей энергии  $|0\rangle$ , которое соответствует вакууму. Если мы для простоты ограничимся теорией, описывающей только один тип частиц с конечной массой покоя, то состоянием, следующим по величине энергии за вакуумом, будет одночастичное состояние. Его энергия отделена от энергии вакуума конечной щелью ширины  $m$ . Такие одночастичные состояния, являющиеся собственными состояниями  $P_\mu$ , соответствуют «одетым» частицам. Если мы выразим  $P_\mu$  через операторы рождения и уничтожения «голых» частиц, то тогда  $P_\mu$  будет связывать состояния с различным числом этих частиц. Следовательно, собственные состояния  $P_\mu$  — это состояния с облаками виртуальных частиц. После следующей конечной щели появляются состояния с еще более высокой энергией. Мы на время оставим открытым вопрос, существуют ли среди многочастичных состояний связанные состоя-

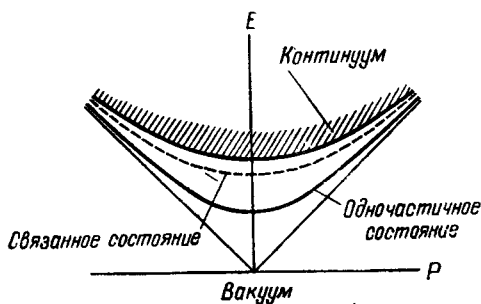


Рис. 20. Спектр масс

ния, или они все принадлежат непрерывному спектру. В последнем случае эти состояния представляют собой состояния частиц, рассеивающихся друг на друге при конечных временах, в то время как при  $t \rightarrow \pm \infty$  они были и будут бесконечно удалены друг от друга. Поэтому спектр энергий этих состояний начинается с  $2m$ .

Наши предположения о спектре масс схематически представлены на рис. 20. В действительности они приводят к далеко идущим следствиям для вакуумных средних от произведения двух операторов поля. Мы вскоре увидим, что такие величины можно непосредственно связать с полями, порождаемыми внешними источниками. Исследуем в качестве простейшего примера эрмитово скалярное поле  $\Phi$ . Рассмотрим выражение

$$\Delta^+(x-x') = i\langle 0 | \Phi(x) \Phi(x') | 0 \rangle. \quad (4.26)$$

Состояние  $\Phi(x')|0\rangle$  не представляет собой ни просто одну «одетую», ни просто одну «голую» частицу. Мы увидим ниже, что это вело бы к тому, что  $\Phi$  имело бы фурье-компоненты только с  $p^2 = m^2$  и, таким образом, удовлетворяло бы уравнению свободного поля, а не уравнению взаимодействующих полей, которое мы хотим исследовать. То что  $\Phi(x')|0\rangle$  не может быть просто состоянием с одной «голой» частицей, следует также из того факта, что  $|0\rangle$  не является собственным состоянием оператора уничтожения с нулевым собственным значением. Можно даже показать, что  $P_\mu$  содержит члены, состоящие только из операторов рождения \*). Назовем  $\Phi(x)|0\rangle$  «неодетой» частицей в точке  $x$ . Мы увидим в дальнейшем, что она порождается слабым внешним источником из вакуума.  $\Delta^{+}$  описывает распространение «неодетых» частиц. Это — амплитуда относительной (поскольку  $\Phi|0\rangle$  не нормировано) вероятности найти «неодетую» частицу в точке  $x'$ , если известно, что она находилась в точке  $x$ . Для вычисления  $\Delta^{+}$  разложим  $\Phi(x)|0\rangle$  в ряд по собственным состояниям  $\langle p|$  вектора энергии-импульса  $P_\mu$ . Из соотношения

$$\langle p|[\Phi(x), P_\mu]|0\rangle = i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \langle p|\Phi(x)|0\rangle = -p_\mu \langle p|\Phi(x)|0\rangle \quad (4.27)$$

для коэффициентов разложения  $\langle p|\Phi(x)|0\rangle$  получаем зависимость от  $x$  в виде

$$\langle p|\Phi(x)|0\rangle = e^{+ipx} \langle p|\Phi(0)|0\rangle.$$

Это дает

$$\begin{aligned} \Delta^{+}(x-x') &= i \sum_p \langle 0|\Phi(x)|p\rangle \langle p|\Phi(x')|0\rangle = \\ &= i \sum_p e^{-ip(x-x')} |\langle p|\Phi(0)|0\rangle|^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Из релятивистской инвариантности следует, что  $|\langle p|\Phi(0)|0\rangle|^2$ , просуммированное по всем состояниям с одним и тем же  $p$ , может зависеть только от  $p^2$ . Обозначим эту величину через  $\rho(p^2)$ . Тогда получим

$$\Delta^{+}(x-x') = i \sum_{p'} e^{-ip'(x-x')} \sum_p |\langle p|\Phi(0)|0\rangle|^2 \delta(p-p') =$$

\*) Состояние  $|0\rangle$  — это не состояние, в котором нет «голых» частиц, а скорее состояние без «одетых» частиц. В нашей терминологии понятия физической и «одетой» частицы тождественно совпадают. Понятие  $ip$ -частицы будет использовано при специализации граничных условий для физических частиц.

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{(2\pi)^3} \int_0^\infty da^2 \rho(a^2) \int_{p_0 > 0} dp' e^{-ip'(x-x')} \delta(p^2 - a^2) = \\
&= \int_0^\infty da^2 \rho(a^2) \Delta^+(x - x', a). \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали предположение о виде спектра масс, из которого вытекает, что при суммировании  $p$  все время остается времениподобным вектором с  $p_0 > 0$ .

Из определения  $\rho(a^2)$  видно, что эта величина дает вероятность найти «неодетую» частицу в состоянии с полной массой  $a$ , и следовательно,  $\rho(a^2)$  всегда положительно. Соотношение (4.29) показывает, что свойства распространения носят чисто кинематический характер. Функция распространения «неодетой» частицы является суперпозицией функций распространения с массой  $a$ , усредненных с соответствующим статистическим весом. Для свободных полей  $\rho(a^2) = \delta(a^2 - m^2)$ , т. е. в этом случае «неодетая» частица, уже оказывается физической. Взаимодействие приводит к тому, что в  $\rho(a^2)$  начинают давать вклад другие состояния, масса которых, если вакуумное среднее  $\Phi$  равно нулю, больше  $a$ . Это имеет место, если, например,  $\Phi$  антикоммутирует с какой-либо мультипликативной операцией симметрии, входящей в теорию, подобно четности или зарядовому сопряжению. Так было бы для псевдоскалярного или электромагнитного поля.

При таких предположениях относительно  $\Phi$  мы найдем

$$\rho(a^2) = Z \delta(a^2 - m^2) + \sigma(a^2), \tag{4.30}$$

где  $\sigma(a^2) = 0$  при  $a^2 < m^2 + \delta$ ,  $\delta > 0$  и  $Z = \text{const} > 0$ .  $Z$  оказывается связанным с интегралом от  $\sigma$ , если  $\Phi$ , удовлетворяет каноническим перестановочным соотношениям

$$[\Phi(x, t), \dot{\Phi}(x', t)] = i\delta(x - x').$$

Беря от этого соотношения вакуумное среднее, мы найдем

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [\Phi(x, t), \dot{\Phi}(x', t)] | 0 \rangle &= i\delta(x - x') = \\
&= \frac{\partial}{\partial t'} \int_0^\infty da^2 \rho(a^2) \Delta(x - x', a) = i\delta(x - x') \int_0^\infty da^2 \rho(a^2).
\end{aligned}$$

Отсюда получаем условие нормировки для  $\rho(a^2)$

$$\int_0^\infty da^2 \rho(a^2) = 1,$$

или

$$Z = 1 - \int_{m^2 + \delta}^{\infty} da^2 \sigma(a^2) < 1. \quad (4.31)$$

Соотношения (4.29) — (4.31) охватывают все общие утверждения, которые можно сделать о функциях распространения. Детальный вид  $\sigma$  зависит от динамических свойств системы. Предположим, что  $\Phi$  удовлетворяет уравнению поля вида

$$(\square^2 + m_0^2) \Phi(x) = \mathbf{j}(x). \quad (4.32)$$

Имея в виду случай электромагнитного поля, мы написали в правой части (4.32) ток  $\mathbf{j}(x)$ , который определяется этим уравнением. Так как взаимодействие изменяет массу частиц,  $m_0$  будет отличаться от  $m$ . Если вакуумное среднее коммутатора  $[\dot{\Phi}(x, t), \mathbf{j}(x', t)]$  равно нулю, то для  $m_0$  можно получить интересную формулу. Именно, так как

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0 | [\dot{\Phi}(x, t), (\square^2 + m_0^2) \Phi(x', t)] | 0 \rangle = \\ &= i\delta(x - x') \left[ m_0^2 - \int_0^{\infty} da^2 a^2 \rho(a^2) \right], \end{aligned}$$

то

$$m_0^2 = \int_0^{\infty} da^2 a^2 \rho(a^2). \quad (4.33)$$

Таким образом,  $m_0^2$  равно  $a^2$ , усредненному с весом  $\rho(a^2)$ . Это означает, что «неодетая» частица не является собственным состоянием оператора массы  $\mathbf{P}^2$ , а математическое ожидание оператора  $\mathbf{P}^2$  в состоянии с одной неодетой частицей равно  $m_0^2$ . Отсюда, кстати, видно, что при сделанных выше предположениях взаимодействие уменьшает массу.

После того как мы из кинематических соображений получили общий вид функции распространения, попытаемся выявить физический смысл теории с помощью введения внешних источников. Иными словами, изучим следствия введения в лагранжиан члена  $L' = \Phi(x) \mathcal{J}(x)$ , где  $\mathcal{J}(x)$  — число, которое мы можем рассматривать классически. Кроме того, мы хотим, чтобы возмущение системы было как можно меньше. Поэтому мы выберем  $\mathcal{J}(x)$  малым настолько, чтобы в дальнейшем учитывать только первый член в разложении по степеням  $L'$ \*). Теперь можно поставить вопросы типа:

\* Конечно, мы не допускаем здесь никакого разложения по степеням внутренних констант связи, но предполагаем, что у нас имеется точное решение для взаимодействующей системы.



какова вероятность излучения частицы под действием тока  $\mathcal{J}(x)$ , если до его включения система находилась в основном состоянии, или каково изменение энергии, или среднего значения  $\Phi(x)$  в этих условиях?

На все эти вопросы легко ответить с помощью формул, выведенных в § 8. Вероятность возникновения состояния  $\langle p_{\text{out}} |$  уходящих частиц с энергией-импульсом  $p$  равна

$$w_p = |\langle \text{out}^p | \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi(x) \mathcal{J}(x) | 0 \rangle|^2. \quad (4.34)$$

Используя предыдущие выражения, получим для полной вероятности излучения в импульсном пространстве формулу

$$w = \sum_p w_p = \int_0^{\infty} da^2 \rho(a^2) \int \frac{dk}{(2\pi)^3} |\mathcal{J}(k)|^2 \delta(k^2 - a^2). \quad (4.35)$$

Отсюда для энергии-импульса, унесенного излучением, имеем

$$\Delta P_i = \int_0^{\infty} da^2 \rho(a^2) \int \frac{dk}{(2\pi)^3} |\mathcal{J}(k)|^2 \delta(k^2 - a^2) k_i. \quad (4.36)$$

Для изменения  $\langle 0 | \Phi(x) | 0 \rangle$  получаем

$$\delta \langle 0 | \Phi(x) | 0 \rangle = i \langle 0 | \int_{-\infty}^x dx' [\Phi(x), \Phi(x')] \mathcal{J}(x') | 0 \rangle, \quad (4.37)$$

или

$$\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x)} \langle 0 | \Phi(x) | 0 \rangle = i \theta(x - x') \Delta'(x - x'), \quad (4.38)$$

или

$$\begin{aligned} \delta \langle 0 | \Phi(x) | 0 \rangle &= \int_0^{\infty} da^2 \rho(a^2) \Delta^{\text{ret}}(x - x', a) \mathcal{J}(x') dx' = \\ &= \int_0^{\infty} da^2 \rho(a^2) \int \frac{dk}{(2\pi)^4} e^{ikx} \frac{\mathcal{J}(k)}{a^2 - k^2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Так как  $\langle 0 | \Phi | 0 \rangle = 0$ , то в выражение для изменения энергии при  $t=0$  вносит вклад только член второго порядка

$$\delta P_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 dx dx' \langle 0 | [P_0, \Phi(x)], \Phi(x')] | 0 \rangle \mathcal{J}(x) \mathcal{J}(x') =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 dx dx' \langle 0 | [\Phi(x), \Phi(x')] | 0 \rangle \mathcal{J}(x) \mathcal{J}(x'). \quad (4.40)$$

Используя адиабатическое включение источника

$$\mathcal{J}(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [e^{\alpha t} \mathcal{J}(x)],$$

получаем

$$\delta P_0 = -\frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \mathcal{J}(x) \mathcal{J}(x') \int_0^{\infty} da^2 \rho(a^2) \frac{e^{-a|x-x'|}}{4\pi|x-x'|}. \quad (4.41)$$

Все эти формулы очень похожи на те, которые мы получили, решая задачу о возмущении свободного поля внешним источником. Отсюда следует, что вид их определяется в основном кинематикой, а динамические свойства системы проявляются только через функцию  $\rho(a^2)$ . В частности, в макроскопическом пределе, т. е. при больших расстояниях (по сравнению с  $m^{-1}$ ) и низких энергиях, единственным следствием наличия внутренних взаимодействий будет появление множителя перенормировки  $Z$ . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим такое  $\mathcal{J}$ , которое отлично от нуля только для первого энергетического уровня, т. е.  $\mathcal{J}(k) = 0$  при  $k^2 \geq m^2 + \delta$ . Тогда  $\sigma(a^2)$  не вносит вклада в  $\rho(a^2)$ , и формула (4.35) приобретает вид

$$w = Z \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) |\mathcal{J}(k)|^2. \quad (4.42)$$

Аналогично, если

$$\mathcal{J}(x, t) = e^{\delta(x)}, \quad (4.43)$$

то

$$\lim_{|\mathbf{x}| \gg m^{-1}} \delta \langle 0 | \Phi(x) | 0 \rangle = Z e \frac{e^{-m|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad (4.44)$$

или для  $\delta P_0$  в случае двух источников  $\mathcal{J}(x) = e[\delta(0) + \delta(x)]$  после вычитания собственной энергии  $E_0$  получаем

$$\lim_{|\mathbf{x}| \gg m^{-1}} (\delta P_0 - 2E_0) = -Z e^2 \frac{e^{-m|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}. \quad (4.45)$$

Эти результаты можно, очевидно, интерпретировать следующим образом.  $\mathcal{J}(x)$  в основном связано с «неодетой» частицей. Если энергия источника достаточна как раз для порождения некоторой «одетой» частицы, то порождение соответствующей ей части «неодетой» частицы произойдет как реальный процесс. Тем самым вероятность испускания

будет такой же, как и для свободных полей, только последнюю нужно умножить на вероятность найти «одетую» частицу среди состояний, которые образуют «неодетую» частицу. Аналогично, «одетая» частица, соответствующая состоянию с наименьшей энергией, содержащемуся в состоянии «неодетой» частицы, будет всего дальше отходить от источника в облаке виртуальных частиц. Другие состояния приобретают значение только при более высоких энергиях или меньших расстояниях.

Интересно отметить, что все они дают вклад одного и того же знака. Например, для собственной энергии статического источника имеем

$$-\left( Z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{J}(k)|^2}{k^2 + m^2} + \int_{m^2 + \delta}^{\infty} da^2 \sigma(a^2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{J}(k)|^2}{k^2 + a^2} \right).$$

Отсюда видно, что для точечного источника собственная энергия обращается в бесконечность. Это верно в общем случае, а не только для первого члена разложения в ряд по степеням константы связи. С другой стороны, при высоких энергиях или малых расстояниях наши результаты переходят в результаты, получающиеся в пределе высоких энергий для свободных полей, без вероятностного множителя  $Z$ . Например, для  $\mathcal{J}(k) = \delta(k_0 - E)$ , учитывая (4.31), мы имеем

$$\lim_{E \rightarrow \infty} W = \frac{Te^2}{4\pi^2} \lim_{E \rightarrow \infty} \int_0^E da^2 \rho(a^2) \sqrt{E^2 - a^2} = \frac{Te^2 E}{4\pi^2}, \quad (4.46)$$

или для энергии взаимодействия на малых расстояниях

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} (2E_0 - \delta E) = \lim_{|x| \rightarrow 0} \int_0^{\infty} da^2 \frac{e^{-a|x|}}{4\pi|x|} \rho(a^2) = \frac{e^2}{4\pi|x|}. \quad (4.47)$$

Иначе говоря, для достаточно высоких энергий или малых промежутков времени размытие массы «неодетой» частицы становится несущественным и она действует подобно физической частице. Мы уже рассматривали такое поведение частиц в § 10, а теперь мы видим, что оно следует из общих кинематических соображений.

В обычной терминологии поля и «силы» источников определяются с помощью макроскопических аспектов поля. Однако «сила» тока  $e$  в (4.43) скорее характеризует способность  $\mathcal{J}$  к порождению «неодетых», чем «одетых» частиц. Чтобы выразить наши результаты в обычных терминах, мы должны ввести вместо  $e$  параметры, характеризующие «одетую» частицу. Для этой цели мы введем перенормиро-

ванный заряд  $e_r$ , таким образом, чтобы в пределе низких энергий процессы описывались бы обычными формулами, игнорирующими внутреннее взаимодействие, а следовательно, и облако виртуальных частиц вокруг «одетой» частицы. Аналогично мы определим перенормированное поле  $\Phi_r$ , так, чтобы его среднее значение сводилось бы на больших расстояниях от источника к классическому результату (например,  $e_r/4\pi|\mathbf{x}|$  для  $m=0$ ). Положим:

$$Ze^2 = e_r^2; \Phi_r \underset{=}{=} \frac{e_r}{4\pi|\mathbf{x}|} \underset{=}{=} \sqrt{\frac{1}{Z}} \Phi. \quad (4.48)$$

Это приводит к определению

$$e_r = \sqrt{Z}e; \Phi_r = \frac{1}{\sqrt{Z}} \Phi,$$

которое не меняет произведения  $\Phi J$ . Кроме того, для энергии взаимодействия на больших расстояниях (для  $m=0$ ) мы найдем значение  $e_r^2/4\pi|\mathbf{x}|$ , которое также могло бы быть выбрано в качестве определения  $e_r$ . Переписывая предыдущие формулы в терминах новых величин и определяя  $\rho_r$  через  $\Phi_r$ , мы получим:

$$[\Phi_r(\mathbf{x}, t) \dot{\Phi}_r(\mathbf{x}', t)] = \frac{i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{Z},$$

$$\rho_r = \delta(a^2 - m^2) + \sigma_r(a^2), \quad (4.49)$$

$$\frac{1}{Z} = 1 + \int_{m^2+\delta}^{\infty} da^2 \sigma_r(a^2).$$

Изучив значение перенормировки на примере скалярного поля, мы теперь вернемся к случаю, представляющему наибольший интерес, а именно — к квантовой электродинамике. Мы предположим, что у системы, характеризуемой (4.1), есть одно состояние с нулевой энергией и нулевым зарядом, которое мы интерпретируем как вакуум. Состояние с зарядом, равным единице, мы назовем одноэлектронным состоянием. Зарядовое сопряжение говорит нам, что должно существовать состояние с такой же массой, но противоположным зарядом. Это состояние мы назовем позитроном. Состояние с наименьшей массой и нулевым зарядом является фотоном.

Для первоначального рассмотрения лучше начать с невырожденного случая, считая, что масса фотона отлична от нуля. Таким образом, на время мы предположим, что

фотонное состояние отделено от вакуума конечной щелью  $\mu_0^{**}$ , т. е., что мы должны исходить из уравнения поля вида

$$(\square^2 + \mu_0^2) \mathbf{A}_i = e \bar{\psi} \gamma_i \psi. \quad (4.50)$$

В этом случае нельзя требовать, чтобы  $\mathbf{A}_i^i | 0 \rangle = 0$ , \*\*\*) что кажется весьма серьезной проблемой, так как тогда теория будет содержать отрицательные энергии. Однако они оказываются довольно безвредными. Представив поле  $\mathbf{A}$  в виде

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{U}_i + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{,i}$$

с

$$\mathbf{U}_{,i}^i = 0$$

и потребовав, чтобы

$$(\square^2 + \mu_0^2) \mathbf{B} = 0 \quad [\mathbf{B}(x), \mathbf{B}(x')] = i\Delta(x - x')$$

$$[\mathbf{B}(x), \mathbf{U}(x')] = 0,$$

мы найдем, что все отрицательные энергии связаны с полем  $\mathbf{B}$ . Оказывается, что это поле фактически ни с чем не взаимодействует. От него можно избавиться с помощью калибровочного преобразования, при котором изменяется фаза  $\psi$ . Таким образом, частицы с отрицательной энергией не рождаются в физических процессах и поэтому не приводят к каким-либо трудностям. Вся динамика описывается полем  $\mathbf{U}$ , которое удовлетворяет условию Лоренца. Мы определим теперь перенормировочную константу так же, как и в случае скалярного поля.

При построении кинематически допустимых форм  $\langle 0 | \mathbf{U}_i \mathbf{U}_j | 0 \rangle$  обратим внимание на то, что в силу  $\mathbf{U}_{,i}^i = 0$ , все выражения в импульсном пространстве должны содержать индексы  $i$  и  $j$  только в комбинациях  $q_{ij} k^2 - k_i k_j$ . Поэтому мы положим

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathbf{U}_i(x) \mathbf{U}_j(x') | 0 \rangle &= - (2\pi)^3 \int_{k_0 > 0} dk e^{-ik(x-x')} \times \\ &\times \int_0^\infty da^2 \delta(k^2 - a^2) \Pi(a^2) (g_{ij} k^2 - k_i k_j) \end{aligned} \quad (4.51)$$

\*) Детальное обсуждение многих способов рассмотрения электромагнитного поля можно найти J. M. Jauch, F. Rohrlich, Theory of Photons and Electrons, Chap. 6, Addison - Wesley Reading, Massachusetts, 1955.

\*\*) Даже для  $e=0$ ,  $[A_i, A_m] = ig_{im} \Delta$  обеспечивает

$$\langle 0 | [A_{,i}^i, A_{,m}^m] | 0 \rangle = i\mu_0^2 \Delta.$$

Так как для  $i=j$  и  $k^2 > 0$  величина  $(k^2 g_{ij} - k_i k_j)$  отрицательна, то  $\Pi(a^2) > 0$ . Чтобы использовать канонические перестановочные соотношения для поля  $\mathbf{A}$  так же как и в случае скалярного поля, мы должны добавить сюда вклад от поля  $\mathbf{B}$ , что дает

$$\langle 0 | [\mathbf{A}_i(x), \mathbf{A}_j(x')] | 0 \rangle = - (2\pi)^3 \int dk e^{-ik(x-x')} \varepsilon(k) \int_0^\infty da^2 \times \\ \times \left[ \delta(k^2 - a^2) [\Pi(a^2)(a^2 g_{ij} - k_i k_j)] + \frac{k_i k_j}{m_0^2} \delta(a^2 - m_0^2) \right]. \quad (4.52)$$

Для  $t = t'$  из

$$[\mathbf{A}_i(x), \mathbf{A}_j(x')] = 0$$

мы заключаем, что

$$\int_0^\infty da^2 \Pi(a^2) = \frac{1}{m_0^2},$$

а из

$$[\mathbf{A}_i(x), \dot{\mathbf{A}}_j(x')] = -ig_{ij} \delta(x - x'),$$

что

$$\int_0^\infty da^2 \Pi(a^2) a^2 = 1.$$

Введение внешнего тока  $\mathcal{J}_i(x)$  возбуждает электромагнитное поле с функцией Грина

$$\theta(x - x') \langle 0 | [\mathbf{A}_i(x), \mathbf{A}_j(x')] | 0 \rangle.$$

Производя преобразования, подобные сделанным в § 10, мы можем переписать это выражение в виде суперпозиции запаздывающих функций  $\Delta^{\text{ret}}$  с такими же весовыми функциями, как и для  $\Delta$ . Конечно, мы требуем, чтобы внешний ток удовлетворял условию  $\mathcal{J}^i_{;i} = 0$ . В этом случае члены  $k_i k_j$  не дают вклада и мы получаем

$$\delta \langle 0 | \mathbf{A}^i(x) | 0 \rangle = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \int_0^\infty da^2 \frac{\Pi(a^2) a^2}{a^2 - k^2} \mathcal{J}^i(k). \quad (4.53)$$

Это выражение вполне аналогично тому, которое мы имели в скалярном случае, только здесь  $\rho(a^2)$  заменено на  $\Pi(a^2) a^2$ . Чтобы изучить структуру  $\Pi(a^2)$  более детально, примем «эмпирический» спектр масс и учтем, что  $\langle 0 | \mathbf{A}_i | 0 \rangle$  должно равняться нулю за счет релятивистской инвариантности и

инвариантности относительно зарядового сопряжения<sup>\*)</sup>. Поэтому первый вклад в  $\Pi(a^2)$  будет давать однофотонное состояние, массу которого мы положили равной  $\mu$ . Далее мы предположим, что фотоны не образуют связанных состояний, так что следующим состоянием будет непрерывный спектр двух фотонов, начинающийся с энергии  $2\mu$ . Однако это состояние не дает вклада в  $\Pi(a^2)$ , так как благодаря инвариантности относительно зарядового сопряжения  $A|0\rangle$  может содержать только нечетное число фотонов. Таким образом, мы имеем

$$\Pi(a^2)a^2 = Z\delta(a^2 - \mu^2) + \sigma(a^2).$$

То, что  $\sigma(a^2) = 0$  для  $a < 3\mu$  и  $\int_0^\infty \Pi(a^2)a^2 da^2 = 1$ , приводит к

$$Z + \int_{(3\mu)^2}^\infty da^2 \sigma(a^2) = 1. \quad (4.54)$$

Теория вновь обнаруживает то же самое поведение относительно макроскопического (низкая энергия) и микроскопического (высокая энергия) пределов, что и в случае скалярного поля. Чтобы получить величины, обычно характеризующие электромагнитное поле, мы должны, как и прежде, ввести перенормированные величины

$$A_r = \frac{f A}{\sqrt{Z}}; e_r = e\sqrt{Z}; \mathcal{J}_r = \mathcal{J}\sqrt{Z}.$$

Фактически, в дальнейшем мы будем иметь дело исключительно с перенормированными величинами, и поэтому во всех наших обозначениях индекс  $r$  будет опущен. Некоторой осмотрительности требует определение полного наблюдаемого тока  $\mathbf{J}$ . Он состоит из внешнего тока  $\mathcal{J}$  и индуцированного тока  $\mathbf{j}$ . Для статического источника  $\mathbf{A}$  ведет себя асимптотически как  $e(e^{-\mu r}/4\pi r)$ , что наводит на мысль определить  $\mathbf{J}$  из условия  $(\square^2 + \mu^2)\mathbf{A} = \mathbf{J}$ . Таким образом, мы имеем

$$\mathbf{J}_i(x) = (\square^2 + \mu^2)\mathbf{A}_i = \frac{1}{Z}\mathcal{J}_i(x) + \mathbf{j}_i(x). \quad (4.55)$$

где

$$\mathbf{j}_i(x) = \frac{e}{Z}\bar{\psi}\gamma_i\psi + (\mu^2 - \mu_0^2)\mathbf{A}_i.$$

<sup>\*)</sup> Для  $\mu_0 = 0$  существует свобода в выборе калибровки, и условие  $\langle 0|A|0\rangle = 0$  фиксирует эту калибровку.

В импульсном пространстве это дает в первом порядке следующую связь между внешним и полным токами в состоянии вакуума

$$\langle 0 | \mathbf{J}_i(x) | 0 \rangle = \int \frac{dk}{(2\pi)^4} e^{-ikx} d(k) \mathcal{J}_i(k), \quad (4.56)$$

где

$$d(k) = \int_0^\infty da^2 a^2 \Pi(a^2) \frac{\mu^2 - k^2}{a^2 - k^2}. \quad (4.57)$$

Нормировка выбрана таким образом, чтобы  $d(\mu) = 1$ . Вследствие этого для внешнего заряда вида  $\mathcal{J}^0 = e\delta(x)$  мы имеем в пределе при  $\mu \rightarrow 0$ :

$$\int dV \mathcal{J}^0(x) = ed(0) = e. \quad (4.58)$$

Таким образом, с помощью нашей перенормировочной процедуры мы выполнили задачу, выдвинутую в § 10. Поляризация вакуума не изменяет полного заряда. Формальная непротиворечивость этого утверждения требует, чтобы

$$\int d\sigma_i \langle 0 | \mathbf{j}^i | 0 \rangle = e \left( 1 - \frac{1}{Z} \right). \quad (4.59)$$

Последнее не противоречит закону сохранения заряда, поскольку  $\mathbf{j}$  содержит не только  $\bar{\psi} \gamma \psi$ . Имеется также вклад и от другого члена, для которого из предыдущей формулы мы находим

$$\begin{aligned} \int d\sigma_i \langle 0 | \mathbf{A}^i(x) | 0 \rangle (\mu^2 - \mu_0^2) &= e \int_0^\infty da^2 \Pi(a^2) (\mu^2 - \mu_0^2) = \\ &= e \left[ 1 + \mu^2 \int_{(3\mu)^2}^\infty da^2 \sigma(a^2)/a^2 - \frac{1}{Z} \right]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Это совпадает с (4.59), если

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu^2 \int_{(3\mu)^2}^\infty da^2 \sigma(a^2)/a^2 = 0.$$

Первый член разложения  $\sigma(a^2)$  в ряд по степеням  $e^2$  был подсчитан в § 10. Он соответствует случаю, когда в промежуточном состоянии имеется электрон-позитронная пара и поэтому равен нулю для  $a < 2m$ . Далее мы отметим, что

$$\int_{4m^2}^\infty dc^2 \sigma(c^2) \rightarrow \infty$$



влечет за собой  $Z \rightarrow 0$ . Иными словами, во втором порядке «голый» заряд должен быть бесконечным, и высокоэнергетические пределы соответствующих величин должны расходиться. Аналогично, лагранжиан  $L$  и выражения, подобные каноническим коммутаторам, содержат бесконечные величины. Тем не менее, величины при конечных значениях энергии, а также  $\langle 0|[A, \dot{A}]|0\rangle$ , сглаженное в некоторых пространственно-временных областях\*), конечны в этом порядке по  $\epsilon$ . В § 16 мы обсудим вопрос, в какой мере с точки зрения общих положений можно не обращать внимания на наличие расходящихся пределов. Иногда выдвигались предположения, что за счет введения связи с несколькими полями расходимости могли бы скомпенсироваться. Однако, поскольку  $\Pi(a^2)$  положительно, легко видеть, что в рамках нашего рассмотрения вклады от различных полей будут складываться и тем самым положение только усугубилось бы. Компенсация возможна только за счет введения отрицательных вероятностей или энергий.

Связь между  $\mathcal{J}$  и  $\mathbf{J}$ , данная уравнениями (4.56), аналогична связи между  $\text{div } \mathbf{P}$  и  $\text{div } \mathbf{E}$  в диэлектрике. То условие, что свет не может распространяться со скоростью большей  $c$ , приводит к выводу, что диэлектрическая постоянная является аналитической функцией в одной из полуплоскостей в импульсном пространстве\*\*). Мы заметим, что  $d(k^2)$  является аналитической функцией всюду, кроме точек на положительной действительной оси. Это соответствует в  $x$ -пространстве тому факту, что величина  $\langle 0|\mathbf{A}|0\rangle$  порождается током  $\mathcal{J}$  с помощью суперпозиции запаздывающих функций  $\Delta^{\text{ret}}$ , что эквивалентно аналитическим свойствам в импульсном пространстве. Так же как и в теории диэлектриков, мнимая часть  $d(k^2)$  непосредственно связана с  $\Pi(k^2)$ , а отсюда с процессами поглощения. Условие аналитичности требует отличия от нуля и действительной части  $d(k^2)$ , так что поляризация вакуума неизбежна в любой теории, где существует рождение пар.

Наконец, мы построим функцию распространения для поля Дирака. Здесь взаимодействие с векторным полем порождает некоторые трудности, связанные с тем, что  $\psi$ , будучи величиной, зависящей от калибровки, может приводить к состоя-

\*) Подобно

$$\langle 0 | \left[ \int dx A(x), \int dx' A(x') \right] | 0 \rangle$$

в отличие от

$$\langle 0 | [A(x), A(x')] | 0 \rangle.$$

\*\*) См., например, J. Toll. Phys. Rev. 104, 1760 (1956).

ниям с отрицательной энергией. Откладывая дискуссию по этому вопросу, мы лишь укажем, что в соответствии с аргументами, аналогичными приведенным ранее, для теории с положительными энергиями мы должны получить общую формулу

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_\beta(x') | 0 \rangle = \\ & = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} da r(a) \int_{k_0 > 0} dk e^{-ik(x-x')} \delta(k^2 - a^2) (\gamma k + a). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Отсюда, выражение для  $\bar{\psi}\psi$  можно получить тогда с помощью зарядового сопряжения. Используя

$$U_c \psi U_c^{-1} = c \bar{\psi}, \quad U_c \bar{\psi} U_c^{-1} = -\psi c^{-1} \quad \text{и} \quad U_c |0\rangle = |0\rangle,$$

мы найдем

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(x') \psi_a(x) | 0 \rangle = \\ & = - (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} da r(a) \int_{k_0 > 0} dk e^{-ik(x-x')} \delta(k^2 - a^2) (\gamma k + a), \end{aligned}$$

что дает нам

$$\begin{aligned} S'(x-x') &= \langle 0 | \{ \psi_a(x), \bar{\psi}_\beta(x') \} | 0 \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} da r(a) iS(x-x', a). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Канонические перестановочные соотношения приводят к тому, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} da r(a) = 1.$$

Если уравнения поля имеют вид

$$(\partial + m_0) \psi(x) = \mathbf{f}(x)$$

и

$$\langle 0 | \{ \mathbf{f}(x), \bar{\psi}(x') \}_{t=x'} | 0 \rangle = 0,$$

то тем же путем, что и в случае скалярного поля, мы получим

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} da a r(a). \quad (4.63)$$

Оказывается, что все эти соотношения справедливы также и в квантовой электродинамике, несмотря на наличие отрицательных энергий. С помощью введения индефинитной мет-

рики в гильбертовом пространстве состояния с отрицательной энергией можно переинтерпретировать как состояния с положительной энергией, но с отрицательными вероятностями<sup>\*)</sup>. В такой формулировке все приведенные выше положения остаются справедливыми, за исключением того, что теперь  $\langle | \rangle$  не обязательно больше нуля. Вследствие этого в квантовой электродинамике  $r(a)$  не является более положительной величиной. Однако читатель может убедиться, что в наших рассуждениях это положение фактически не использовалось.

Так как  $\psi$  изменяет заряд состояния на единицу, то состоянием с наименьшей энергией, входящим в  $\psi|0\rangle$ , будет одноэлектронное состояние с массой  $m$ . Следующее состояние асимптотически представляет из себя один электрон и один фотон и начинается с энергии  $m + \mu$ . Отсюда мы имеем:

$$r(a) = N\delta(a - m) + s(a); s(a) = 0$$

для  $|a| < m + \mu$ .

Перенормировка спинорного поля отличается тем, что часть  $\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle$ , соответствующая распространению физической частицы, равна функции распространения свободного поля. Отсюда

$$\psi_r = \frac{1}{\sqrt{1-N}} \psi. \quad (4.64)$$

Впредь мы будем использовать только перенормированные поля и опускать индекс  $r$ . Перенормированные уравнения запишутся в виде

$$L_e^1 = \frac{1}{N} \bar{\psi}(\partial - m_0)\psi,$$

$$\{\psi(x), \psi^\dagger(x')\}_{t=t'} = \frac{1}{N} \delta_3(x - x'),$$

$$\frac{1}{N} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} da \sigma(a),$$

$$\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} da r(a) i S^+(x - x', a),$$

$$r(a) = \delta(a - m) + \sigma,$$

<sup>\*)</sup> См. J. M. Jauch, F. Rohrlich. Theory of Photons and Electrons, Chapter 6, Addison — Wesley, Reading, Massachusetts, 1955.

где  $m_0$  — это опять масса, соответствующая распространению за малые временные интервалы. Чтобы увидеть это, мы напишем разложение

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} S'_f(p) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da r(a)}{p-a} \cong \\ &\cong \frac{1}{p} \frac{1}{N} + \frac{m_0}{p^2 N} \cong \frac{1}{N} \frac{1}{p-m_0}. \end{aligned}$$

Однако эти формальные операции опять справедливы только, если  $\int_{-\infty}^{\infty} da r(a)$  существует. Покажем, что при разложении в ряд по степеням  $e$  это не так. Используя уравнение Дирака, мы находим:

$$\begin{aligned} e^2 \langle 0 | \psi(x) \gamma A(x) \bar{\psi}(x') \gamma A(x') | 0 \rangle &= \\ &= -e^2 \gamma_i S^+(x-x') \gamma^i D^+(x-x') = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} da r(a) (a-m)^2 i S^+(x-x', a). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Теперь, если мы применим формулы, приведенные в дополнении 2, то во втором порядке найдем

$$r(a) = \delta(a-m) + \frac{\alpha}{4\pi} \frac{(a^2 - 4am + m^2)}{|a|^3(a-m)} (a+m) \theta(a^2 - m^2).$$

Таким образом, для спинорного поля выражение для  $1/N$  расходится логарифмически. Также ведет себя интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} da r(a) a$ , который определяет величину  $m_0$ , поскольку

линейная расходимость выпадает. Заменяя  $\int_{-\infty}^{\infty} da$  на  $\int_{-M}^M da$ , мы видим, что для  $M \gg m$

$$m_0 = m \left[ 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \ln \left( \frac{M}{m} \right) \right]. \quad (4.66)$$

Иными словами, взаимодействие с электромагнитным полем приводит к тому, что частица оказывается тяжелее, чем это следовало бы из вычислений классической собственной энергии. Однако более тщательная проверка показывает<sup>\*)</sup>, что эти два выражения вообще существенно отличаются друг

<sup>\*)</sup> См. К. Huang, Phys. Rev. 101, 1173 (1956).

от друга. Прежде всего электростатическая собственная энергия расходуется в теории поля только логарифмически, благодаря размазыванию заряда виртуальных пар. Кроме того, кинетическую энергию электрона увеличивает отдача виртуальных фотонов. Этот эффект увеличивает массу и расходится квадратично. Значение  $g$ -фактора электрона, равное 2 в этом порядке, как раз и обеспечивает, что два последних вклада в точности компенсируются, и остается лишь приведенный выше результат.

## § 15. Поправки высших порядков

В предыдущем параграфе мы ввели определения различных перенормированных величин, которые встречаются в квантовой электродинамике. Это было сделано таким образом, что определяемые величины связывались с обычно наблюдаемыми при макроскопических измерениях. Нашей целью являлось исследование эффектов, связанных с введением макроскопических пробных тел во взаимодействующие поля. Теперь мы выясним, какие предсказания делает теория о поведении самих характеристик поля (например, о поправках к поперечным сечениям рассеяния), когда теория сформулирована в терминах перенормированных величин. Как и раньше, мы будем иметь дело с системой взаимодействующих полей Максвелла-Дирака, но в данном случае без внешних источников. Оказывается, что первое приближение к различным поперечным сечениям, которое мы получили в § 13, является само по себе очень хорошим. Действие членов высших порядков сводится главным образом к замене перенормированных величин перенормированными. Лишь в нескольких случаях мы обнаружим наблюдаемые отклонения от наших предыдущих результатов.

Первый вопрос, который мы рассмотрим, касается тока, связанного с одним электроном. Выражая все в терминах перенормированных величин и физических состояний, мы будем изучать среднее значение тока  $\mathbf{j} = eN^2/Z: \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma} \psi : + \delta \mu^2 \mathbf{A}$ . Для получения сведений об этой величине полезно выразить одночастичное состояние в виде произведения оператора порождения и состояния вакуума. Это как раз то, что мы делали в случае свободных полей. Выше мы видели, что та часть фурье-образа поля  $\psi$ , для которой  $p^2 = m^2$ , связывает вакуум с одноэлектронными состояниями. Поэтому мы должны выделить эту часть из поля  $\psi$  и подействовать ею на вакуум. Наиболее удобно это сделать с помощью предельного перехода. Введем определение

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iat} = \begin{cases} 1 & \text{для } a = 0, \\ 0 & \text{для } a \neq 0, \end{cases}$$

где предел понимается в смысле среднего. Исходя из этого определения, мы утверждаем, что

$$|1\rangle = \lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} \int d\sigma_\mu \bar{\psi}_\alpha(x) |0\rangle \gamma_{\alpha\beta}^\mu v_\beta(x), \quad (4.67)$$

где  $v$  — положительно-частотное решение уравнения Дирака  $(\partial - m)v = 0$ . Например, для плоской волны  $\int d\sigma$  отбирает из  $\psi$  часть, которая ведет себя как  $e^{ipx}$ , а предельный переход оставляет только те частоты, для которых  $p_0 = \sqrt{m^2 + p^2}$ . Если  $v$  — отрицательно-частотное решение, обозначаемое ниже  $v^-$ , то мы должны потребовать, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int d\sigma_\mu \bar{\psi}(x) |0\rangle \gamma^\mu v^-(x) = 0, \quad (4.68)$$

так как иначе это состояние имело бы энергию меньшую, чем вакуум. Таким образом, операторы  $\lim \int d\sigma \bar{\psi} \gamma v^\mp$  обладают свойствами операторов рождения и уничтожения  $\psi^\mp$  свободных полей. Оператор рождения создает состояние с одним «одетым» электроном, которое описывается волновой функцией  $v$ . Физически это означает, что хотя сначала  $\bar{\psi}(x)$  и создает «неодетую» частицу, спустя достаточно большое время частица сама «одевается». Такое описание соответствует реальной экспериментальной ситуации, если, например, используются радиоактивные ядра в качестве источника  $\beta$ -лучей. Процесс распада приводит к возникновению голого электрона, который очень скоро создает вокруг себя кулоново поле. Использование перенормированного поля  $\psi$  в (4.67) гарантирует нам, что состояние  $|1\rangle$  правильно нормировано при условии, что  $v$  — волновой пакет, нормированный стандартным образом.

С помощью этого выражения для одноэлектронного состояния мы можем записать матричный элемент любого оператора в виде<sup>\*)</sup>:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathbf{O}(x) | 1 \rangle &= i \int dx' P \langle 0 | \mathbf{O}(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle \times \\ &\times (\overleftarrow{\partial}' + m) v(x'), \end{aligned} \quad (4.69)$$

где  $\overleftarrow{\partial}'$  означает, что этот оператор действует налево. При интегрировании по частям  $(\overleftarrow{\partial}' + m)$  переходит в  $(-\partial' + m)$ ,

<sup>\*)</sup> Для антикоммутирующих величин мы определим  $P$  следующим образом:

$$2P\psi(1)\psi(2) = [\psi(1), \psi(2)] + \varepsilon(1,2)\{\psi(1), \psi(2)\}.$$

что, действуя на  $v$ , дает нуль. В поверхностном члене верхний предел

$$\lim_{\sigma' \rightarrow \infty} \int d\sigma_\mu \langle 0 | \bar{\Psi}(x') \mathbf{O}(x) | 0 \rangle \gamma^\mu v(x')$$

также равен нулю, поскольку  $\lim_{\sigma' \rightarrow \infty} \int \bar{\Psi} \gamma v$  действует налево подобно оператору уничтожения. Таким образом, единственный неисчезающий вклад в (4.69) дает нижний предел в поверхностном члене

$$\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \int d\sigma'_\mu \langle 0 | \mathbf{O}(x) \bar{\Psi}(x') | 0 \rangle \gamma^\mu v(x').$$

Аналогичное рассмотрение показывает, что

$$\begin{aligned} \langle 1 | \mathbf{O}(x) | 1 \rangle &= \int dx' dx'' \bar{v}(x') (\partial' - m) \times \\ &\times P \langle 0 | \Psi(x') \mathbf{O}(x) \bar{\Psi}(x'') | 0 \rangle (\partial'' + m) v(x''). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Теперь применим эти формулы к изучению  $\langle 1 | \mathbf{j}_\mu(x) | 1 \rangle$ . Мы сохраним член  $\delta\mu^2$  в токе  $\mathbf{j}_\mu$ , так как мы хотим сначала проверить, имеет ли электрон правильный заряд, т. е. выполняется ли равенство

$$\int d\sigma_\mu \langle 1 | \mathbf{j}_\mu(x) | 1 \rangle = e.$$

Без учета  $\delta\mu^2$  мы натолкнулись бы на те же самые противоречия, связанные с вопросом сохранения заряда, с которыми мы сталкивались при обсуждении соответствующего пункта в случае теории с внешними источниками. Действительно, из перестановочных соотношений немедленно следует, что

$$\int \langle 1 | \frac{eN^2}{Z} : \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi : | 1 \rangle d\sigma_\mu = \frac{e}{Z},$$

где символ  $: \dots :$  означает

$$: \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi : = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi - \langle 0 | \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi | 0 \rangle.$$

Как и в случае внешнего поля, член  $\delta\mu^2$  может быть использован для придания этой величине правильного значения. Как и выше, мы интегрируем уравнение поля

$$(\square^2 + \mu_0^2) \mathbf{A}_k = \frac{eN^2}{Z} \bar{\Psi} \gamma_k \Psi$$

и получаем

$$\int d\sigma_k \langle 1 | \mathbf{A}^k | 1 \rangle = \frac{e}{Z\mu_0^2},$$

что дает нам

$$\int d\sigma_k \langle 1 | j^k | 1 \rangle = \frac{e}{|Z|} \frac{\mu^2}{\mu_0^2}.$$

По соображениям, упомянутым в предыдущей главе, последнее выражение действительно стремится к  $e$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Поэтому мысль о том, что заряд стремится к бесконечности при  $\mu \rightarrow 0$  не должна вызывать удивление. В дальнейшем мы будем всегда переходить к пределу  $\mu \rightarrow 0$ , когда это только возможно.

Убедившись, что зарядом электрона является перенормированное значение  $e$ , можно посмотреть теперь, как влияет взаимодействие полей на распределение токов. Для этой цели мы должны преобразовать формулу (4.70), используя уравнения для перенормированных полей (которые определяют  $\mathbf{f}$ ):

$$\begin{aligned} (\partial - m)\psi(x) &= \mathbf{f}(x) = e\mathbf{A}\gamma\psi + \delta m\psi \\ \square^2 \mathbf{A}(x) &= \mathbf{J}(x) = \frac{eN^2}{Z} : \bar{\psi}\gamma\psi : \\ \bar{\psi}(\partial + m) &= \bar{\mathbf{f}}(x) = -\bar{\psi}\gamma\mathbf{A}e - \delta m\bar{\psi} \end{aligned} \quad (4.71)$$

и перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} \{\psi(x), \psi^\dagger(x')\}_{t=t'} &= \frac{\delta(x-x')}{N^2}; \\ [\dot{\mathbf{A}}(x), \mathbf{A}(x')]_{t=t'} &= \frac{i\delta(x-x')}{Z}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Вспоминая определение символа  $P$ , мы получаем

$$\begin{aligned} &\langle 1 | : \bar{\psi}(x)\gamma_j\psi(x) : | 1 \rangle = \\ &= i \int dx'' P \langle 1 | : \bar{\psi}(x)\gamma_j\psi(x) : \bar{\psi}(x'') | 0 \rangle (\overleftarrow{\partial}'' + m)v(x'') = \\ &= i \int dx'' P \langle 1 | : \bar{\psi}(x)\gamma_j\psi(x) : \bar{\mathbf{f}}(x'') | 0 \rangle v(x'') + \\ &+ \frac{1}{N^2} \langle 1 | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle \gamma_j v(x) = \frac{\bar{v}(x)\gamma_j v(x)}{N^2} + \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$+ \int dx' dx'' \bar{v}(x') (\partial' - m) P \langle 0 | \psi(x') : \bar{\psi}(x)\gamma\psi(x) : \bar{\mathbf{f}}(x'') | 0 \rangle v(x'').$$

Оператор  $\partial'$  можно внести под знак  $P$ . Таким образом, мы получаем, что второй член, умноженный на  $N^2/Z$ , равняется (с выписанными спинорными индексами)

$$\begin{aligned} &i \int dx'' \bar{v}_\alpha(x) \gamma_{\alpha\beta}^j \frac{1}{Z} P \langle 0 | \psi_\beta(x) \bar{\mathbf{f}}_\lambda(x'') | 0 \rangle v_\lambda(x'') - \\ &- i \int dx'' \bar{v}_\alpha(x'') \frac{1}{Z} P \langle 0 | : \bar{\psi}_\sigma(x) \gamma'_{\sigma\tau} \psi_\tau(x) : e\mathbf{A}_\kappa(x'') \gamma_{\alpha\beta}^k | 0 \rangle v_\beta(x'') + \end{aligned}$$



$$+ \frac{N^2}{Z} \int dx'' dx' \bar{v}_a(x') P \langle 0 | \mathbf{f}_a(x') : \bar{\Psi}_0(x) \gamma_{\sigma\tau}^j \Psi_\tau(x) : \times \\ \times \bar{\mathbf{f}}_p(x'') | 0 \rangle v_p(x''). \quad (4.74)$$

Так как использование символа нормального произведения  $\dots$ : переопределяет ток  $\mathbf{j}$  только на  $c$ -число, то никакого изменения в перестановочное соотношение  $\mathbf{j}$  с  $\Psi$  это внести не может. Первые два члена в (4.74) могут быть далее упрощены, если заметить, что

$$P \langle 0 | \Psi(x) \bar{\Psi}(x'') | 0 \rangle (\partial'' + m) = i S'_f(x - x'') (\partial'' + m) = \\ = P \langle 0 | \Psi(x) \bar{\mathbf{f}}(x'') | 0 \rangle - \frac{i}{N^2} \delta(x - x''). \quad (4.75)$$

Поэтому первый член в (4.74) преобразуется к виду  $\bar{v}(x) \gamma v(x) (1/Z) (1 - N^{-2})$ . Аналогично из

$$\square^2 P \langle 0 | \mathbf{A}_j(x) \mathbf{A}_k(x'') | 0 \rangle = \\ = \frac{e N^2}{Z} P \langle 0 | \Psi(x) \gamma_j \Psi(x) \mathbf{A}_k(x'') | 0 \rangle + \\ + i \frac{g_{jk}}{Z} \delta(x - x'')$$

мы заключаем, что второй член в (4.74) равен

$$- \bar{v}(x) \gamma v(x) \frac{1}{ZN^2} + \\ + \int dx'' \bar{v}(x'') \gamma v(x'') \square^2 D'(x - x'') \frac{1}{N^2}.$$

Собирая все члены вместе, получаем

$$\langle 1 | \mathbf{j}_j(x) | 1 \rangle = \frac{N^2 e}{Z} \langle 1 | \bar{\Psi}(x) \gamma_j \Psi(x) | 1 \rangle = \\ = e \int dx'' \bar{v}(x'') \gamma_j v(x'') \square^2 D'(x - x'') + \\ + \left( \frac{1}{N^2} - 1 \right) e \int dx'' \bar{v}(x'') \gamma_j v(x'') \left[ \square^2 D'(x - x'') - \right. \\ \left. - 2 \frac{\delta(x - x'')}{Z} \right] + \frac{N^2}{Z} e \int dx' dx'' \bar{v}(x') P \langle 0 | \mathbf{f}(x') : \bar{\Psi}(x) \gamma_j \Psi(x) : \times \\ \times \bar{\mathbf{f}}(x'') | 0 \rangle v(x''). \quad (4.76)$$

Первый член в правой части равенства дает эффект поляризации вакуума. Ему соответствует наблюдаемый ток, который возникает при введении в вакуум внешнего тока  $\bar{v} \gamma v$ . Остальные члены содержат другие эффекты более высокого порядка, которые мы будем теперь изучать в низшем, не исчезающем порядке по  $e$ . Это сводится к замене операторов

поля в последнем члене на операторы свободных полей, что приводит к появлению члена третьего порядка

$$\begin{aligned}
 & -e^3 \int dx' dx'' \bar{v}(x') \langle 0 | A_s(x') \gamma^s \psi(x') : \bar{\psi}(x) \gamma_j \psi(x) : \times \\
 & \quad \times \bar{\psi}(x'') \gamma^j A_f(x'') | 0 \rangle v(x'') = \quad (4.77) \\
 & = ie^3 \int dx' dx'' \bar{v}(x') \gamma^s S_f(x' - x) \gamma_j S_f(x - x'') \gamma_s v(x'') D_f(x' - x'') = \\
 & = \frac{e}{(2\pi)^8} \int dp' dp'' e^{ix(p' - p'')} \bar{v}(p') \Delta_j(p', p'') v(p''),
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta_j = -ie^2 \int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} \gamma^s \frac{\hat{p}' - \hat{k} + m}{(p' - k)^2 - m^2} \gamma_j \frac{\hat{p}'' - \hat{k} + m}{(p'' - k)^2 - m^2} \gamma_s \frac{1}{k^2}.$$

Соответствующий граф изображен на рис. 21.

Последнее выражение было получено с помощью фурье-преобразования функций распространения. Чтобы выполнить интегрирование по  $k$ , удобно скомбинировать знаменатели, используя тождество

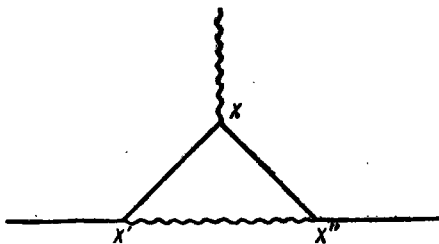


Рис. 21. Граф для последнего члена правой части в (4.76)

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy [ay + b(x - y) + c(1 - x)]^{-3}.$$

Такая комбинация знаменателей сводится к одному знаменателю вида (вспоминая, что  $p'^2 = p''^2 = m^2$ ).

$$[k - p''x + (p'' - p')y]^2 - m^2x^2 - (p' - p'')^2 y(x - y).$$

Если сделать замену переменных  $[k - p''x + (p'' - p')y] \rightarrow k$ , то последнее выражение будет зависеть только от квадрата  $k$ . Вводя сокращенное обозначение  $\Delta = p' - p''$ , мы получаем

$$\Delta_j = -ie^2 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^s (\hat{q}' + m) \gamma_j (\hat{q}'' + m) \gamma_s}{[k^2 - m^2x^2 - \Delta^2 y(x - y)]^3}, \quad (4.78)$$

где  $q' = p'(1 - y) - p''(x - y) - k$ ,  $q'' = p''(1 - x + y) - p'y - k$ . Числитель в (4.78) может быть подвергнут дальнейшему упрощению, если воспользоваться формулой (Д1.18)

$$\begin{aligned}
 \gamma^s (\hat{q}' + m) \gamma_j (\hat{q}'' + m) \gamma_s = & -2(\gamma_j m^2 + \hat{q}'' \gamma_j \hat{q}') + \\
 & + 4m(q'_j + q''_j). \quad (4.79)
 \end{aligned}$$

Теперь мы должны вспомнить, что это выражение необходимо брать между  $\bar{v}(p')$  и  $v(p'')$ . Поэтому крайнее правое  $\hat{p}''$  и крайнее левое  $\hat{p}'$  можно заменить на  $m$ . В соответствии с этим в члене  $\hat{q}''\gamma_j\hat{q}'$  мы переставим все  $\hat{p}''$  направо, а все  $\hat{p}'$  налево. Члены с  $\hat{p}'_j$  и  $\hat{p}''_j$  могут быть оценены, если их записать в виде

$$p'_j = \frac{1}{2}(p'_j + p''_j) + \frac{1}{2}\Delta_j, \quad p''_j = \frac{1}{2}(p'_j + p''_j) - \frac{1}{2}\Delta_j.$$

Вклад от члена, пропорционального  $\Delta_j$ , приводит к появлению тока, пропорционального  $\partial/\partial x_j$ , который не взаимодействует с электромагнитным потенциалом, удовлетворяющим условию  $A^i_{,i} = 0$ . Воспользовавшись формулой (Д1.13), мы можем написать

$$(p' + p'')_j = 2m\gamma_j + i\sigma_{j\mu}\Delta_\mu + (\hat{p}' - m)\gamma_j + \gamma_j(\hat{p}'' - m).$$

Отсюда, не меняя результата, мы можем сделать замену

$$p'_j, p''_j \rightarrow m\gamma_j + \frac{i}{2}\sigma_{j\mu}\Delta_\mu.$$

Таким образом, окончательно мы можем записать

$$\begin{aligned} \hat{p}''\gamma_j\hat{p}' &\rightarrow \gamma_j(\Delta^2 + m^2) + i2m\sigma_{j\mu}\Delta_\mu, \\ \hat{p}'\gamma_j\hat{p}' &\rightarrow \gamma_j m^2 + mi\sigma_{j\mu}\Delta_\mu. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Поскольку знаменатель в (4.78) содержит только четные степени  $k$ , мы можем в числителе отбросить члены, линейные по  $k$ , и заменить  $k_s k_t$  на  $(1/4)k^2\delta_{st}$ . Произведя эти упрощения, мы найдем:

$$\begin{aligned} \hat{q}''\gamma_j\hat{q}' &\rightarrow \gamma_j \left[ -\frac{k^2}{2} + m^2(1-x^2) + \right. \\ &\left. + \Delta^2(1-x-y)(1-y) \right] + im\sigma\Delta[2-3x+x^2], \\ q'_j + q''_j &\rightarrow (2m\gamma + i\sigma\Delta)(1-x). \end{aligned}$$

Тогда числитель в (4.78) примет вид:

$$\begin{aligned} &\gamma_j \left[ k^2 + 4m^2(1-x - \frac{1}{2}x^2) - \right. \\ &\left. - 2\Delta^2(1-x+y)(1-y) \right] + 2mi\sigma_{j\mu}\Delta_\mu x(1-x). \end{aligned}$$

Если мы подставим это выражение в (4.78), то увидим, что  $\Delta_j$  все еще содержит член, пропорциональный  $\bar{v}\gamma v$ . Чтобы его выделить, мы представим  $\Delta$  в виде  $\Delta(\Delta=0) + [\Delta(\Delta) -$

—  $\Lambda (\Delta = 0)$ ]. Последний член будет по крайней мере порядка  $\Delta$  и поэтому пропорционален производной от  $\bar{v}\gamma v$  или  $\bar{v}\sigma v$ . Соответственно, он не содержит никакого заряда в целом. Необходимое представление  $\Delta$  можно реально произвести с помощью тождества

$$\frac{1}{[k^2 - m^2 x^2 - \Delta^2 y (x - y)]^2} = \frac{1}{[k^2 - m^2 x^2]^2} - 3\Delta^2 \int_0^1 \frac{dz y (x - y)}{[k^2 - m^2 x^2 - \Delta^2 z (x - y)]^4}, \quad (4.81)$$

которое мы применим к членам, не содержащим  $\Delta$  в числителе. Интеграл по  $k$  легко вычислить, заметив, что стандартный интеграл

$$\int \frac{dk}{[k^2 - L]^3}$$

может быть записан как

$$- \text{Im} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2\pi)^4}{2} \frac{\partial^2}{\partial L^2} \Delta_f(x, \sqrt{L}).$$

Используя формулу (Д2.14), это выражение можно привести к виду \*)

$$\int \frac{dk}{[k^2 - L]^2} = -\frac{i\pi^2}{2L}. \quad (4.82)$$

Далее с помощью дифференцирования, мы можем получить

$$\int \frac{dk}{[k^2 - L]^4} = \frac{i\pi^2}{6L^2}, \quad \int \frac{dk k^2}{[k^2 - L]^4} = -\frac{i\pi^2}{3L}. \quad (4.83)$$

Собирая все эти замечания вместе, мы находим, что

$$\begin{aligned} \bar{v}(p') \Delta_f(p', p'') v(p'') &= \bar{v}(p') \gamma_k v(p'') \left\{ B + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\Delta^2}{m^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \times \right. \\ &\times \left[ \frac{(1-x+y)(1-y)}{x^2 + y(x-y)} \frac{\Delta^2}{m^2} + \int_0^1 \frac{dz y(x-y)}{x^2 + zy(x-y)} \frac{\Delta^2}{m^2} \times \right. \\ &\left. \left. \times \left( 1 - \frac{2-2x-x^2}{x^2 + zy(x-y)} \frac{\Delta^2}{m^2} \right) \right] \right\} - \end{aligned}$$

\*) Можно также выполнить интегрирование в  $k$ -пространстве, выбирая подходящий путь обхода сингулярностей.

$$-\frac{\alpha}{2\pi} m i \bar{v}(p') \sigma_{j\mu} v(p'') \Delta_{\mu} \left[ \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{x(1-x)}{x^2 + y(x-y) \frac{\Delta^2}{m^2}} \right], \quad (4.84)$$

где  $B$  — бесконечная константа:

$$B = -2ie^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{k^2 + 4m^2(1-x-x^2)/2}{[k^2 - m^2x^2]^3}. \quad (4.85)$$

Возвращаясь к общему выражению для тока (4.76), мы видим, что второй член порядка  $\alpha$  строго пропорционален  $\bar{v}\gamma v$  и фактически равен

$$\left(1 - \frac{1}{N^2}\right) e \bar{v}\gamma v.$$

Внимательный читатель (в противовес просто интересующемуся) может показать, что во втором порядке  $1/N^2 = 1 + B$ , где  $B$  в этом выражении совпадает с  $B$  в (4.85). Таким образом, член в (4.84), который содержит  $B$ , точно компенсируется вторым членом (4.76). Это можно было ожидать, поскольку

$$e \int dx' \bar{v}(x') \gamma v(x') \square^2 D_f(x-x')$$

содержит заряд  $e$  в целом, так что все остальные члены не могут дать вклад в полный заряд.

Точное выражение (4.84) очень громоздко, так что мы рассмотрим только предельный случай  $\Delta^2/m^2 \ll 1$ . Другой предельный случай  $\Delta^2/m^2 \gg 1$  читатель может найти в статье Швингера<sup>\*)</sup>. В рассматриваемом нами предельном случае интегралы по  $x$ ,  $y$  и  $z$  легко вычисляются. Однако интеграл по  $x$  на нижнем пределе логарифмически расходится. Здесь вновь проявляется инфракрасная расходимость, но если приписать фотону массу  $\mu$ , то в знаменателе  $x^2$  заменится на  $x^2 + (1-x)\mu^2/m^2$  и в этом случае интеграл оказывается конечным. Сохраняя только члены, которые не исчезают в пределе  $\mu \rightarrow 0$ , мы находим,

$$\begin{aligned} \bar{v}(p') \Delta_{j\mu} v(p'') &= \bar{v}\gamma_j v \left\{ B + \frac{\alpha}{3\pi} \Delta^2 \left[ \ln\left(\frac{m}{\mu}\right) - \frac{3}{8} \right] \right\} - \\ &- \frac{\alpha}{4\pi} m i \bar{v} \sigma_{j\mu} v \Delta_{\mu}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

<sup>\*)</sup> J. Schwinger Phys. Rev. 76, 790 (1949). Перевод в сб. Новейшее развитие квантовой электродинамики. ИЛ, 1954, стр. 78.

или, в рамках использованных выше приближений, мы имеем для  $\langle 1 | j_i(x) | 1 \rangle$  окончательное выражение

$$\begin{aligned} \langle 1 | j_i(x) | 1 \rangle = & e \int \bar{v}(x') \gamma_j v(x') \square^2 D'_j(x-x') dx' - \\ & - \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{m}{\mu} \right) - \frac{3}{8} \right] \frac{\square^2}{m^2} \bar{v}(x) \gamma_j v(x) - \\ & - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\bar{v}(x) \sigma_{jk} v(x)}{2m}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Для волнового пакета настолько гладкого, что мы можем пренебречь  $\square^2/m^2$ , выражение для тока примет вид

$$\begin{aligned} \langle 1 | j_i | 1 \rangle = & \frac{ei}{2m} \bar{\psi} (\partial_j - \partial_j) \psi - \\ & - \frac{e}{2m} \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\bar{v}(x) \sigma_{jk} v(x)}{2m}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Важность  $\langle 1 | j | 1 \rangle$  можно увидеть, вводя взаимодействие с внешним током  $\delta L = \mathcal{J}(x) A(x)$ . Принимая во внимание уравнение поля (4.71), мы заключаем, что

$$\langle 1 | \delta L | 1 \rangle = \int dx dx' j(x) D^{\text{ret}}(x-x') \langle 1 | j(x) | 1 \rangle,$$

где частный выбор функции Грина значения не имеет, поскольку  $\mathcal{J}$  не порождает фотоны. Таким образом, в первом порядке по  $\mathcal{J}(x)$  все поправки включены в  $\langle 1 | j(x) | 1 \rangle$ .

Во внешнем магнитном поле только последний член в (4.88) дает вклад в энергию, если электрон покоится. Поэтому электрон имеет связанный со спином магнитный момент, равный  $(1 + \alpha/2\pi)$  магнетонов Бора. Конечно, никаких поправок к полному механическому моменту электрона нет, так что множитель Ланде  $g$  равняется  $(1 + \alpha/2\pi)^2$ . Он был измерен с большой точностью<sup>\*)</sup>, так что ошибка в определении  $\alpha$  не превышает 1%.

Второй член в (4.88) характеризует размытие электрона за счет отдачи виртуальных фотонов. Этот вопрос мы уже обсуждали во введении. Для электрона, связанного в атоме, инфракрасной расходимости не существует, так как фотоны, длины волн которых велики по сравнению с радиусом атома, не воздействуют на электрон. Расчет<sup>\*\*)</sup> показывает, что

<sup>\*)</sup> См. J. M. Jauch, F. Rohrlich. Theory Photons and Electrons, стр. 15, ссылки на экспериментальные статьи.

<sup>\*\*)</sup> R. Karplus, A. Klein and J. Schwinger. Rhys, Rev. 86, 288 (1952).

в этом случае  $\ln \frac{m}{\mu} \approx 8$ . Поэтому в кулоновом поле мы получаем поправку к величине энергии порядка

$$\alpha \int \frac{e^2}{4\pi r} \Delta\rho(x) \ln\left(\frac{m}{\mu}\right).$$

Как показано во введении, это представляет собой главный вклад в лэмбов сдвиг.

Если мы интересуемся рассеянием свободных электронов внешним полем, то в низшем порядке по этому полю основной интересующей нас величиной будет матричный элемент тока  $\mathbf{j}$  между начальным и конечным состоянием. Нетрудно видеть, что выражение для  $\mathbf{j}$ , введенное выше, имеет место и здесь. Инфракрасная расходимость в этом случае отсутствует. Это происходит из-за того, что к упругому поперечному сечению рассеяния следует добавить поперечное сечение для «слегка» неупругих процессов, таких, как испускание фотона с энергией, меньшей, чем  $\Delta E$ , которое также расходится логарифмически для  $\mu \rightarrow 0$ . Эти два поперечных сечения экспериментально неразличимы и поэтому складываются вместе. В результате такого сложения инфракрасная расходимость исчезает. Таким образом, поперечное сечение рассеяния имеет вид:

$$d\sigma = d\sigma^{(2)} \left( 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \frac{(p-p')^2}{m^2} \ln \frac{m}{\Delta E} \right),$$

где  $d\sigma^{(2)}$  — поперечное сечение во втором порядке, выраженное через перенормированные величины, а  $p$  и  $p'$  — начальный и конечный импульс электрона. Это выражение справедливо, конечно, только до тех пор, пока  $d\sigma$  больше нуля. Наши результаты, полученные в § 9, заставляют ожидать, что точное выражение будет вести себя как

$$d\sigma = d\sigma^{(2)} e^{-\frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{p-p'}{m}\right)^2 \ln \frac{m}{\Delta E}} = d\sigma^{(2)} \left(\frac{\Delta E}{m}\right)^{\frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{p-p'}{m}\right)^2}. \quad (4.89)$$

Таким образом, никакого рассеяния без испускания фотона не существует.

Важно отметить, что при  $(p-p')^2/m^2 \rightarrow 0$  поправки к  $d\sigma^{(2)}$  стремятся к нулю, и наличие членов высшего порядка сказывается только в том, что все выражается через перенормированные величины. Таким образом, (4.89) иллюстрирует тот факт, что полный заряд правильно нормирован и что для больших длин волн детальная форма распределения заряда электрона не может быть обнаружена. Ниже мы увидим, что это обстоятельство является общим свойством наблюдаемых величин и причиной того, что расчеты в низшем порядке

теории возмущений дают хорошее согласие с экспериментами нормальной точности.

Наконец, мы обратимся к изучению состояний с несколькими физическими частицами. В нашем общем обсуждении спектра масс мы сделали вывод, что такие состояния соответствуют физическим частицам, которые при  $t \rightarrow -\infty$  далеко разнесены. Отсюда при  $t \rightarrow -\infty$  эти состояния превращаются в состояния невзаимодействующих физических частиц. Соответственно мы должны принять, что они порождаются многократным применением к вакууму оператора

$$\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \int d\sigma_\mu \bar{\Psi} \gamma_\mu v.$$

Основная идея заключается в том, что в пределе  $t \rightarrow -\infty$  волновые пакеты распределены в пространстве достаточно редко, так что они в среднем находятся друг от друга на бесконечно большом расстоянии. Возникает вопрос, можно ли таким образом построить полную систему состояний. Ответ зависит от наличия или отсутствия связанных состояний. В электрон-фотонной системе связанных состояний нет, поскольку позитроний является лишь узким резонансом в рассеянии двух или трех фотонов. Поэтому в электродинамике все состояния в пределе  $t \rightarrow -\infty$  должны переходить в состояния свободных частиц и могут быть сконструированы указанными выше способами\*).

Используя обычную нормировку для бозонов, можно написать, например, состояние с одним физическим электроном и одним физическим фотоном в виде:

$$|e^+ \gamma\rangle_{\text{in}} = \lim_{\substack{\sigma \rightarrow -\infty \\ \sigma' \rightarrow -\infty}} \int d\sigma_\mu d\sigma'_\mu \bar{\Psi}(x) A_i(x) |0\rangle \gamma^\mu v(x) \partial'^\mu f_i(x'),$$

где  $f$  — положительно-частотное решение уравнения  $\square^2 f = 0$ . Индекс «in» означает, что мы имеем дело с падающими электроном и фотоном, волновые функции которых —  $v$  и  $f$  соответственно. Это состояние отличается от состояния, в котором они уходят с теми же волновыми функциями, поскольку мог произойти процесс рассеяния. Последнее состояние получается, если в приведенном выше уравнении взять  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty, \sigma' \rightarrow \infty}$ . Для отдельной частицы разницы между падающим и уходящим состоянием нет, здесь же это разли-

\*) Леман, Шиманчик и Циммерман получили из этого факта далеко идущие следствия. См. H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann *Nuovo Cimento*. 2, 425 (1955).



чие как раз определяет  $S$ -матрицу, которую мы записываем в виде:

$$\begin{aligned} \langle e' + \gamma' | S | e + \gamma \rangle &= \langle e' + \gamma' \Big|_{\text{out}} \Big|_{\text{in}} e + \gamma \rangle = \quad (4.90) \\ &= \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \infty \\ \sigma' \rightarrow -\infty}} \int d\sigma_\mu d\sigma'_\mu f_i'^*(x') [\vec{\partial}'_\mu \langle e' | \mathbf{A}_l(x') \mathbf{A}_k(x) | e \rangle \vec{\partial}_\mu f_k(x)]. \end{aligned}$$

Применяя технику, использованную ранее в этом параграфе, мы найдем

$$\begin{aligned} \langle e' + \gamma' | S | e + \gamma \rangle &= \\ &= \int dx dx' f_i'^*(x') f_k(x) \square^2 \square'^2 P \langle e' | \mathbf{A}_l(x) \mathbf{A}_k(x') | e \rangle = \\ &= \int dx dx' f_i'^*(x') P \langle e' | \mathbf{j}_l(x') \mathbf{j}_k(x) | e \rangle f_k(x), \quad (4.91) \end{aligned}$$

поскольку коммутаторы либо равны нулю, либо не дают вклада, так как

$$\square^2 f = \square'^2 f' = 0.$$

Аппроксимируя волновые пакеты  $f$  и  $f'$  плоскими волнами, мы можем переписать выражение (4.91) в виде, аналогичном функции распространения, рассмотренной в предыдущем параграфе

$$\begin{aligned} \langle e' + \gamma' | S | e + \gamma \rangle &= \int dx dx' e^{ik'x'} e^{-ikx} \times \\ &\times \sum_n \{ \theta(x - x') \langle e' | \mathbf{j}_l(x') | n \rangle \langle n | \mathbf{j}_k(x) | e \rangle + \\ &\quad + \theta(x' - x) \langle e' | \mathbf{j}_k(x) | n \rangle \langle n | \mathbf{j}_l(x') | e \rangle \} = \\ &= i(2\pi)^7 \delta(p + k - p' - k') \times \\ &\times \sum_{p_n = p + k} \left[ \frac{\langle e' | \mathbf{j}_l(0) | n \rangle \langle n | \mathbf{j}_k(0) | e \rangle}{k_0 + p_0 - p_0^n + i\epsilon} + \frac{\langle e' | \mathbf{j}_k(0) | n \rangle \langle n | \mathbf{j}_l(0) | e \rangle}{p_0 - p_0^n - k_0 + i\epsilon} \right], \end{aligned}$$

где  $|n\rangle$  — полная система собственных состояний вектора энергии-импульса с собственными значениями  $p^n$ , а  $p$  — вектор энергии импульса падающего электрона. Так как  $|e\rangle$  — состояние с одним физическим электроном, то, конечно,  $p^2 = m^2$ , где  $m$  — перенормированная масса электрона. Если в выписанном уравнении мы заменим все величины соответствующими величинами, относящимися к свободным полям, то мы получим найденное ранее выражение во втором порядке теории возмущений.

Теперь мы покажем, что в пределе  $k \rightarrow 0$  выражение (4.91) переходит в элемент второго порядка  $S$ -матрицы, записанной

через перенормированные величины. Для этого мы предположим на минуту, что фотоны имеют массу покоя  $\mu$  (но мы все-таки будем рассматривать  $k_0$  как независимую переменную). В лабораторной системе  $p_0 = m$ , а следующее состояние имеет энергию  $p_0 = m + \mu$  для  $k \rightarrow 0$ . Таким образом, в этом пределе сумма по всем  $n$  принимает вид:

$$\begin{aligned} \langle e' + \gamma' | S | e + \gamma \rangle = & i(2\pi)^7 \frac{1}{k_0} [\langle e | \mathbf{j}_i | e \rangle \langle e | \mathbf{j}_k | e \rangle - \\ & - \langle e | \mathbf{j}_k | e \rangle \langle e | \mathbf{j}_i | e \rangle] + \frac{1}{k_0 + \mu} [\langle e | \mathbf{j}_i | e + \gamma \rangle \langle e + \gamma | \mathbf{j}_k | e \rangle - \\ & - \langle e | \mathbf{j}_k | e + \gamma \rangle \langle e + \gamma | \mathbf{j}_i | e \rangle] + \dots \end{aligned}$$

Следовательно, при  $k \rightarrow 0$  доминирует первый член. Однако, как мы видели раньше, интеграл по всему пространству от матричного элемента  $\mathbf{j}$  между одноэлектронными состояниями совпадает с соответствующим выражением в нашем порядке, записанным через перенормированный заряд. Поправки более высокого порядка возникают только при учете высших фурье-компонент  $\mathbf{j}$  и дают себя знать при  $k_0 \sim m$ . Поэтому вновь сохранение полного заряда гарантирует отсутствие радиационных поправок при низких энергиях. Для  $\mu \rightarrow 0$  существует инфракрасная расходимость, которая, как и следовало ожидать, исчезает, если при расчете процесса рассеяния дополнительно учесть сечение рассеяния низкоэнергетических фотонов<sup>\*</sup>). Они, однако, стремятся к нулю при  $k \rightarrow 0$ , и формула Томсона является точным низкоэнергетическим пределом для сечения комптонова рассеяния.

Подводя итог, мы можем сказать, что при низких энергиях поправки высших порядков приводят только к тому, что в выражениях низшего порядка перенормированные величины заменяются перенормированными. Поправки обычно малы, так как для малых передач импульса они ведут себя во втором порядке как  $1 + \alpha(\Delta p/m)^2$ . Для  $\Delta p \gg m$  они обычно имеют вид  $1 + \alpha \ln(p/m)$ . Из явных вычислений во втором порядке виден тот чрезвычайно важный факт, что расходящиеся интегралы сосредоточиваются в константах перенормировки  $Z$ ,  $N$  и  $\delta m$  и что все наблюдаемые величины после перенормировки оказываются конечными. В следующем параграфе мы обсудим вопрос, справедливо ли это во всех порядках и приобретает ли теория после проведения перенормировки вид непротиворечивой схемы.

<sup>\*</sup> Расчет этих процессов смотри в книге J. M. Jauch, F. Rohrlich, Theory of Photons and Electrons.

## § 16. Перспективы

В предыдущем параграфе мы убедились, что до второго порядка теория приводит к конечным соотношениям между наблюдаемыми величинами. Поскольку константы перенормировки бесконечны, то приписывание конечных свойств физическим частицам означает, что «голые» частицы должны характеризоваться бесконечными величинами. Теперь мы выясним, так ли это и во всех порядках теории возмущений. Ясно, что в члены высшего порядка будут входить функции распространения  $D'$  и  $S'$ , и поэтому эти члены будут содержать, по крайней мере, те бесконечности, которые имеются в таких функциях. Фактически мы покажем, что при переходе к высшим порядкам никаких новых типов бесконечностей не возникает. Бесконечности, которые встречаются при расчетах во втором порядке, образуют, так сказать, полный набор.

Для того чтобы придать определенный смысл понятию «высший порядок», рассмотрим общий член  $S$ -матрицы, записанной в форме (4.10), и исследуем вопрос о том, компенсируются ли содержащиеся в этом выражении бесконечности константами перенормировки. Пусть в общем графе  $n$ -го порядка будет  $F_e$  внешних (падающих или уходящих) фотонных линий и, скажем,  $E_e$  внешних электронных линий. Число внутренних линий  $E_i$  и  $F_i$  связано с числом внешних линий и с числом вершин формулами:

$$\frac{1}{2}E_e + E_i = n, \quad F_e + 2F_i = n.$$

Каждая вершина дает нам соотношение между векторами энергии-импульса, сходящихся в ней линий. Если ограничиться только связными диаграммами, то существует точно одно соотношение между импульсами внешних линий, так что всего в графе будет  $E_i + F_i - n + 1$  независимых векторов энергии-импульса, по которым нужно интегрировать. Для обсуждения вопросов сходимости этих интегралов удобно ввести понятие примитивно расходящихся графов — таких графов, для которых интегралы, взятые по всем векторам энергии-импульса виртуальных частиц, расходятся, но они сошлись бы, если исключить интегрирование хотя бы по какому-нибудь одному из этих векторов. Из этого определения немедленно следует, что любой расходящийся граф либо сам примитивно расходится, либо содержит примитивно расходящиеся подграфы. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением только примитивно расходящихся графов.

Рассматривая интегралы по импульсам для графа общего вида, мы видим, что бесконечности могут появляться из-за

расходимости этих интегралов как на верхнем, так и на нижнем пределе. (В предыдущем параграфе мы встречались с некоторыми примерами расходимостей при малых импульсах—инфракрасными расходимостями.) В дальнейшем мы будем иметь дело только с расходимостями при больших импульсах (ультрафиолетовые расходимости), поскольку от остальных расходимостей можно избавиться более или менее легко. Чтобы узнать, расходится ли примитивный граф<sup>\*)</sup> при больших импульсах, можно просто сравнить степени  $k_i$  в числителе и знаменателе подынтегрального выражения. Условием сходимости будет то, очевидно, что степень  $k$  в знаменателе должна превышать степень  $k$  в числителе, включая элемент объема. Поскольку каждой электронной линии соответствует  $(\hat{k} - m)^{-1}$ , т. е. она добавляет в знаменатель одну степень  $k$ , а каждая фотонная вносит две, то условием сходимости будет:

$$K = -E_i - 2F_i + 4(E_i + F_i - n + 1) < 0,$$

или, если выразить  $E_i$  и  $F_i$  через число внешних линий,

$$K = -\frac{3}{2}E_e + F_e + 4 < 0.$$

Самым важным оказывается здесь то, что порядок  $n$  графа исчез из аргументов  $K$ . Это значит, что вопрос о том, будет ли граф примитивно расходиться или нет, зависит только от числа внешних линий, но не от его порядка. Значит, при переходе к высшим порядкам новых типов примитивно расходящихся графов не возникнет.

В табл. 1 мы приводим значения  $K$  для различных наборов  $(E_e, F_e)$ . Значения  $K$ , соответствующие примитивно рас-

Таблица 1

$F_e \backslash E_e$	0	1	2	3	4
0	4	3	2	1	0
2	1	0	-1		
4	-2				

<sup>\*)</sup> Это утверждение справедливо только для примитивно расходящихся графов. Для интегралов вида  $\int \frac{dkdk'}{(k^2)^5}$  эта оценка указывала бы на сходимость, между тем такой интеграл явно расходится.

ходящимся графам, очерчены жирной линией. Рассмотрим их теперь один за другим.

(0, 0). Графы без внешних линий приводят к появлению множителя, общего для всех элементов  $S$ -матрицы, квадрат модуля которого дает вероятность того, что вакуум остается вакуумом, поэтому этот квадрат модуля должен равняться единице. В действительности этот множитель имеет вид  $e^{i\infty}$ , однако такая бесконечность не приводит к каким-либо динамическим следствиям.

(0, 1). Запрещен законом сохранения энергии-импульса.

(0, 2). Соответствует тем графам, которые мы рассматривали, обсуждая поляризацию вакуума. Они соответствуют функции распространения фотона и поэтому определяют перенормировку заряда.

(0,3). Обращается в нуль из соображений симметрии по заряду, так как такие графы приводят к вкладам, пропорциональным  $e^{2n+1}$ , а в отсутствие внешних полей один знак заряда нельзя отличить от другого.

(0,4). Сходится вследствие градиентной инвариантности. Он ведет к эффективному

$$\delta L \sim A^4.$$

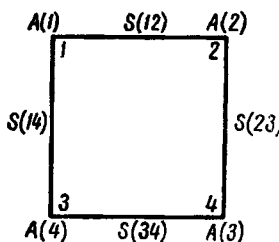


Рис. 22. Граф для рассеяния света на свете

(На рис. 22 изображен низший порядок этого графа), а градиентная инвариантность требует, чтобы такой добавок к лагранжиану выражался через напряженности полей. Но напряженностям полей отвечает дифференцирование графа по внешним импульсам, что и делает интеграл сходящимся. Легко проверить, что расходящиеся члены действительно компенсируются (задача 26). Для медленно меняющегося поля  $A$  в низшем порядке по  $e$  находим выражение

$$\delta L = \frac{\alpha^2}{180m^4} [5(F^{lk} F_{lk})^2 - 14(F_k^l F_l^k F_m^l F_l^m)],$$

которое приводит к эффектам типа рассеяния света на свете или рассеяния света на кулоновом поле. Подобные эффекты возникают, например, при рассеянии фотона виртуальной парой, рожденной кулоновым полем, и формально соответствуют нелинейностям в диэлектрической постоянной вакуума. Однако, как можно убедиться из простых вероятностных соображений, поперечное сечение этого процесса очень мало  $\leq 10^{-30} \text{ см}^2$ . Поскольку наши экспериментальные сведения

об этих явлениях очень скудны, то мы ограничимся этими краткими замечаниями.

(2,0). Соответствует функции распространения электрона и определяет перенормировку массы и перенормировку электронного поля.

(2,1). Его вычисление по существу эквивалентно расчету выражения  $\langle 1|J|1 \rangle$ . Возникающая из этого графа бесконечная перенормировка заряда является кажущейся: мы видели, что во втором порядке она компенсируется перенормировочной постоянной  $N$  поля  $\psi$ . Для придания нашей перенормировочной процедуре последовательного характера требуется, чтобы такая компенсация имела место во всех порядках, поскольку перенормировка заряда определяется только вкладами от диаграмм типа (0,2).

Чтобы показать, что благодаря перенормировке все перенормировочные бесконечности компенсируются константами перенормировки в любом порядке по  $\epsilon$ , необходимо провести более детальное рассмотрение. Кроме того, во всех наших формальных доказательствах об асимптотическом поведении и т. п. мы обращались с бесконечностями как бы то были обычные числа и поэтому было бы поучительно явно посмотреть, как работает такая техника в  $n$ -ом порядке. Мы не будем, однако, детализировать здесь такие технические вопросы<sup>\*)</sup>, ибо, во-первых, это не приведет к дополнительному прояснению лежащей в основе физики, и, во-вторых, потому что последовательность всей схемы, возникающей в результате таких манипуляций, вызывает сомнения.

Ясно, что можно попытаться распространить перенормировочную процедуру на теории, в которых, кроме электронов и фотонов, участвуют и другие частицы. В этой связи особенно важно то предсказание программы перенормировок, что перенормировка заряда будет одной и той же для всех частиц и фактически не зависит от массы. Если бы это было не так, то пришлось бы сделать весьма неправдоподобное предположение, что «голые» заряды различных частиц отличаются как раз таким образом, что их наблюдаемые заряды равны. Однако в теории, содержащей, например, несколько ферми-полей, сразу видно<sup>\*\*)</sup>, что перенормировка заряда для различных полей опять определяется выражением  $\langle 0|AA|0 \rangle$ , в которое дают вклад все поля. Все заряды умножаются на

<sup>\*)</sup> См. J. M. Jauch, F. Rohrlich. Theory of Photons and Electrons. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1955, и цитированную там оригинальную литературу.

<sup>\*\*)</sup> Можно было бы беспокоиться о появлении возможных обменных вкладов за счет принципа Паули, однако вследствие того, что виртуальные пары занимают бесконечно много состояний, принцип Паули для одного состояния оказывает пренебрежимо малое влияние.

домн и тот же множитель  $\sqrt{Z}$ , так что равенство наблюдаемых зарядов означает равенство «голых» зарядов.

Применение программы перенормировок к теориям с другими типами связей не всегда ведет к исключению всех бесконечностей. Например, если бы взаимодействие включало напряженность электрического поля, то каждая вершина давала бы дополнительные степени  $k$  в числителе. В результате, условие сходимости не было бы более независимым от порядка данного члена разложения  $S$ -матрицы. Это означало бы, что для любых значений  $E_e$  и  $F_e$  можно было бы достичь примитивно расходящихся графов, если только дойти достаточно высоких порядков. Бесконечные вклады таких диаграмм нельзя было бы, конечно, собрать в конечное число констант. К такому же типу связей относятся электромагнитные взаимодействия частиц со спином больше  $1/2$ . Тот факт, что не существует элементарных в обычном смысле заряженных частиц со спином больше  $1/2$ , можно рассматривать как указание, что электромагнитные взаимодействия должны быть перенормируемы.

Возможно здесь у читателя возникнет вопрос, решает ли программа перенормировок классические проблемы электромагнитной теории, как например, вопрос о собственных натяжениях электрона. Мы уже видели (задача 5), что из условия  $T_{,i}^{ik} = 0$  и предположения о том, что в покоящейся системе координат тензор  $T_{ik}(x)$  не зависит от времени, следует, что в этой системе собственные натяжения электрона равны нулю. В классической электродинамике условие  $T_{,i}^{ik} = 0$  не имеет места, поскольку уравнения Максвелла — Лоренца несправедливы внутри электрона. Чтобы удержать электрон от взрыва, необходимы силы неэлектромагнитного происхождения, и они тоже дадут вклад в собственные натяжения. Кажется, что программа перенормировок разрешила эту проблему, ибо чтобы получить конечные значения для наблюдаемых величин не потребовалось (по крайней мере, в теории возмущений) вводить никаких других полей, которые сдерживали бы электрон. Тем самым условие, ведущее к исчезновению собственных натяжений, удовлетворяется. Прямой расчет показывает, что для собственных натяжений получается расходящееся, а следовательно, и неопределенное выражение, хотя соображения инвариантности и говорят о том, что этот член надо положить равным нулю. Поэтому, если программа перенормировок определяет последовательную схему, то она решает проблему собственных натяжений. Однако, как мы сейчас покажем, непротиворечивость программы перенормировок довольно сомнительна и для того, чтобы сделать эту схему последовательной, необходимо

вести другие (нереалистические) поля, которые привели бы к сокращению бесконечностей. Такие поля опять дадут вклад в собственные натяжения, и мы вновь приходим к той же классической проблеме.

В нашей формулировке теории перенормировок участвуют (по крайней мере, во втором порядке) бесконечные постоянные в лагранжиане, а следовательно, и во всех основных уравнениях. Конечные величины появляются только в конце расчета как разность бесконечных членов. Кроме того, все формальные доказательства, необходимые для последовательности теории, например доказательство унитарности  $S$ -матрицы, также содержат манипуляции с бесконечными величинами. Можно задать вопрос, являются ли эти манипуляции ошибочными, или их можно сформулировать более строгим образом.

Относительно этих вопросов предлагались две основные точки зрения. Либо предпринималась попытка сделать бесконечные величины конечными с помощью некоторой процедуры обрезания и определить затем теорию, как предел при обрезании, отодвигаемом на бесконечность <sup>\*</sup>), или же пытались игнорировать факт наличия бесконечных величин в основных уравнениях теории в надежде на то, что конечные наблюдаемые величины, которые возникают в результате применения перенормировочной процедуры, определяют последовательную схему. Сейчас мы произведем обзор тех трудностей, с которыми встречается каждая из этих возможностей.

Процедуру обрезания можно сформулировать как релятивистским, так и нерелятивистским образом. В последнем случае лагранжиан  $L^f(x)$  заменяют на

$$\int dy^3 dy'^3 dy''^3 \bar{\psi}(t, y) \gamma^k \psi(t, y') A_k(t, y'') f(y, y', y'', x). \quad (4.92)$$

Теорию взаимодействующих полей, соответствующую такому лагранжиану, можно исследовать теми же методами, которые мы использовали повсюду, за тем исключением, что получающаяся теория релятивистски неинвариантна. При подходящем выборе форм-фактора  $f$  можно избавиться от всех бесконечностей, которые встречаются в теории возмущений. Однако требования релятивистской инвариантности — это столь могущественное орудие для определения общего вида выражений, что этот подход не привлек многих исследователей. Поэтому вопрос о сходимости ряда теорий возмущений остается неизвестным, хотя есть основания допустить, что радиус сходимости этого ряда больше нуля.

<sup>\*</sup>) В импульсном пространстве.



Существует большое искушение обобщить (4.92) таким образом, чтобы форм-фактор  $f$  стал инвариантной функцией всех четырех координат. В самом деле, ведь тогда теория стала бы релятивистски инвариантной.

Однако квантование такой теории приводит к серьезнейшим трудностям. Формальная причина этого заключается в том, что  $L'(x)$  в такой теории не зависит от переменных поля только на некоторой пространственноподобной поверхности. Физически эти трудности совершенно аналогичны тем, с которыми сталкиваются в специальной теории относительности при рассмотрении твердого тела конечной протяженности. В релятивистской теории поля с точечным взаимодействием физическая частица является, строго говоря, тоже объектом конечной протяженности, но она не ведет себя как твердое тело — сигнал не может передаваться сквозь нее со скоростью, большей скорости света. В теории же с форм-фактором «голая» частица ведет себя скорее как твердое тело конечного размера, а не как точечная частица. Иначе говоря, поле  $A(x)$  может излучать фотоны в точках, которые не лежат в будущем световом конусе точки  $x$ . Такое поведение ведет к передаче сигналов со скоростью, большей единицы. Следовательно, нарушается правильный порядок причины и следствия, так как в некоторых системах координат фотоны будут рождаться раньше, чем электрон, который их порождает, т. е. кулоново поле появится раньше, чем родится электрон. Хотя такая ситуация может иметь место только в микроскопических областях, если ее соответствующим образом повторять, нарушения причинности могут распространиться и на макроскопические области.

Эти трудности приводят к тому, что обычно обращаются к рассмотрению другой процедуры устранения бесконечностей, которая релятивистски инвариантна, но, к сожалению, не имеет физического смысла. Эта процедура состоит в том, что в гильбертовом пространстве амплитуд состояний вводят индефинитную метрику и связывают появляющиеся отрицательные вероятности переходов с некоторыми вспомогательными полями, которые взаимодействуют с интересующей нас системой. В этом случае спектральная функция  $\Pi(a)$ , которую мы ввели в § 14, не обязана быть положительно определенной, и можно будет погасить  $\delta$ -функции, которые имеются в функциях распространения, и бесконечности на световом конусе. Массы этих патологических частиц приходится брать очень большими, чтобы они не могли рождаться в реальных процессах при низких энергиях. Пока они не сказываются на балансе вероятностей реальных процессов,  $S$ -матрица остается унитарной в обычном смысле.

Конечно, эта процедура приводит и к бессмысленным следствиям, например к отрицательным значениям квадратичных флуктуаций, но эти следствия появляются только при высоких энергиях или на малых расстояниях. Таким образом, можно сказать, что этот метод приводит к математически корректной схеме, которая физически допустима в пределах ограниченной области применимости.

Наконец, можно присоединить к теории рецепт обрезания, не вводя его в основные уравнения. Такое предписание можно рассматривать как всего лишь определение прежде произвольных выражений, подобное определению несобственного интеграла.

Несмотря на все недостатки, «обрезательные» методы могут послужить для придания теории некоторой математической строгости до перехода к пределу. Так можно рассматривать последовательность теорий, характеризуемых импульсом обрезания  $L$ , и считать первоначальные параметры, например  $e_0$ , функциями  $L$  такими, что в пределе  $L \rightarrow \infty$  перенормированные величины можно сопоставить с экспериментальными значениями

$$\frac{1}{137} = \frac{e^2}{4\pi} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{e_0^2(L)}{4\pi} Z(L, e_0(L)). \quad (4.93)$$

Так как  $Z$ , вероятно, стремится к нулю при  $L \rightarrow \infty$ , то это значит, что «голый» заряд  $e_0$  надо заставить стремиться к бесконечности таким образом, чтобы  $e_0^2 Z$  оставалось конечным. Однако нельзя быть уверенным даже в том, что увеличение  $e_0$  сказывается в увеличении наблюдаемого заряда  $e$ .

Увеличение  $e_0$  будет усиливать и поляризацию вакуума, которая противодействует увеличению «голого» заряда. Действительно, возьмем в качестве примера обычный диэлектрик, в котором наше  $1/Z$  соответствует статической диэлектрической постоянной  $\epsilon$ . Пренебрегая дипольными взаимодействиями, имеем

$$\epsilon = 1 + e_0^2 \frac{v}{V} N,$$

где  $v$  — объем атома,  $V$  — объем диэлектрика, а  $N$  число атомов. Отсюда на языке теории поля

$$e^2 = \frac{e_0^2}{1 + e_0^2 \frac{v}{V} N},$$

что всегда меньше отвечающего насыщению значения  $V/(vN)$ , независимо от величины  $e_0$ . Такая формула аналогична нашей

формуле второго порядка, в которой  $vN/V$  заменяется логарифмически расходящейся величиной, соответствующей бесконечному числу заряженных частиц произвольно высоких энергий. Однако, если  $N \rightarrow \infty$ , а  $v/V$  — фиксировано, то полученный только что верхний предел для  $e^2$  всегда стремится к нулю. Приписывание наблюдаемому заряду  $e$  конечного значения влечет за собой комплексные значения для  $e_0$ , которые не оставляют от последовательности теории камня на камне. Существует нерелятивистская модель теории поля<sup>\*)</sup>, которая ведет себя в точности таким же образом. Оказывается, что и в квантовой электродинамике при использовании определенного рецепта для обрезания наблюдаемый заряд стремится в пределе к нулю<sup>\*\*</sup>). Таким образом, попытка определить перенормированную теорию с помощью процедуры обрезания не кажется такой уж многообещающей.

Суть другого подхода вертится вокруг вопроса, становятся ли все величины или же только коэффициенты разложения по степеням  $e$  конечными после перенормировки. Другими словами, сходится ли перенормированный ряд теории возмущений? Для того чтобы ответить на него, можно попытаться получить верхний предел для спектральной функции  $\Pi(a)$ , оставляя в сумме

$$\sum |\langle 0 | j | n \rangle|^2$$

только некоторые состояния  $|n\rangle$ , для которых выражение может быть вычислено. Например, если мы ограничимся только состояниями с  $n$  фотонами ( $n$  — нечетное число), то в пределе высоких энергий в низшем порядке по  $\alpha$  получим<sup>\*\*\*</sup>):

$$|\langle 0 | j | n \rangle|^2 \cong \alpha^n \frac{\ln(a)^{2n}}{n!},$$

что аналогично выражению для классического тока в § 9. Здесь  $a$  — полная масса состояния  $|n\rangle$ .

Как ведет себя соответствующее точное выражение неизвестно, но интуитивно можно ожидать, что при высоких энергиях оно будет больше, чем в низшем порядке, так как при высоких энергиях в игру вступает больший по величине голый заряд. Если это так, то наблюдаемые величины, подобные

$$D_f'(k) = \int_{9\mu^2}^{\infty} \frac{da \Pi(a)}{-k^2 + a^2} = \int_{9\mu^2}^{\infty} \frac{da}{a^2} \left(\frac{a}{m}\right)^{\alpha \ln(a/m)},$$

<sup>\*)</sup> T. D. Lee, Phys. Rev. 95, 1329 (1954).

<sup>\*\*</sup>) См. Л. Д. Ландау в сб.: Нильс Бор и развитие физики (под редакцией В. Паули). Рус. перев. (1958).

<sup>\*\*\*</sup>) См. G. Källén, Rept. CERN Conference, Geneva, 1956.

не существуют, ибо интегралы в

$$\sum_n \alpha^n \int_{9\mu^2}^{\infty} \frac{da}{a^2} \frac{\ln(a/m)^{2n}}{n!}$$

расходятся на верхнем пределе. Точное выражение для подынтегральной части будет даже больше, если приведенное выше предположение правильно. Тем не менее разложение интеграла в ряд по  $\alpha$  сходится для каждого члена, но приводит при этом к сумме, которая расходится как  $\sum \alpha^n n!$ . Именно такая расходимость разложения была установлена в упрощенной модели<sup>\*</sup>), в которой можно было выяснить, сходится или нет перенормированный ряд теории возмущений. По сравнению с электродинамикой существенным упрощением в этой модели является то, что ферми-поля заменены на бозе-поля.

Хотя все эти соображения и не доказывают того утверждения, что перенормированная квантовая электродинамика не представляет нам логически замкнутой схемы, однако они являются весьма сильными аргументами в его пользу. Несмотря на это, благодаря всего лишь логарифмической расходимости теории, ее краха можно ожидать только при очень высоких энергиях или на очень малых расстояниях. Например, если имеет место формула типа

$$e^2 = \frac{e_0^2}{1 + \frac{e_0^2}{4\pi} \ln\left(\frac{L}{m}\right)},$$

то  $L$  может достигать столь грандиозной величины как  $m \cdot e^{137}$ <sup>\*\*</sup>), прежде чем непоследовательности начнут сказываться. Однако уже при гораздо меньших энергиях, именно при энергиях порядка  $m \cdot 2 \cdot 137$ , могут начать рождаться мезоны, так что теория одних только электронов и фотонов перестанет исчерпывать проблему. Таким образом, математические недостатки теории перенормировок по всей вероятности существенно не умаляют справедливости квантовой электродинамики, так как вполне вероятно, что она теряет физический смысл еще до того, когда начнут сказываться эти недостатки. Аналогичная ситуация имеет место и в классической электродинамике, в которой математические противоречия начинаются с расстояний порядка классического радиуса электрона, в то время как в действительности теория становится несправедливой уже при расстояниях порядка комптоновой

<sup>\*</sup>) См. C. Hurst, Proc. Cambridge Phil. Soc. 48, 625 (1952); W. Thirring, Helv. Phys. Acta, 26, 33 (1953); A. Petermann, Arch. sci. (Geneva) 6, 5 (1953)

<sup>\*\*</sup>) Здесь  $e$ -основание натуральных логарифмов.

длины электрона. Тем не менее противоречия теории поля, которая объединяет в себе основные законы теории относительности и квантовой механики, показывают, что эти законы должны, в конце концов, нарушаться, и на малых расстояниях основные положения теории должны быть изменены. Как это можно сделать, остается только догадываться. Вероятно, решение этой проблемы приведет к теории, которая охватит сразу все элементарные частицы и все их взаимодействия.

---

## ДОПОЛНЕНИЕ I

Формальные трансформационные свойства полей могут быть изучены уже в классической теории без ссылок на квантование. Для диракова поля они менее привычны, чем для электромагнитного, поэтому мы приведем здесь обзор необходимых нам свойств уравнения Дирака, рассматривая его скорее как классическое поле, чем как квантовомеханическое описание одной частицы. В то время, как уравнения для бозе-полей удобнее записывать в виде уравнений второго порядка, для описания ферми-полей более всего подходят уравнения первого порядка. В соответствии с этим начнем с уравнения Дирака

$$(\gamma^k (i\partial_k - eA_k(x)) - m)\psi(x) = 0, \quad (D1.1)$$

где  $\gamma$  — числовые матрицы, которые действуют на компоненты  $\psi$ , образуя их линейные комбинации, и подчиняются перестановочным соотношениям

$$\gamma^i \gamma^k + \gamma^k \gamma^i = 2g^{ik}. \quad (D1.2)$$

Так как мы не рассматриваем поле Майорана, которое обязано быть вещественным, то мы не накладываем на  $\gamma$ -матрицы условия вещественности. Таким образом, мы вольны совершать в спиновом пространстве линейные преобразования с комплексными коэффициентами. Поскольку эрмитово-сопряженные матрицы  $\hat{\gamma}^i$  удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям и поэтому также образуют представление дираковой алгебры, то должна существовать эрмитова\*) матрица  $\beta$ , такая, что

$$\beta^{-1} \hat{\gamma}^i \beta = \gamma^i. \quad (D1.3)$$

Если определить

$$\bar{\psi} = \psi \hat{\gamma}^0 \beta, \quad (D1.4)$$

то уравнение, сопряженное к (D1.1) запишется в виде

$$\bar{\psi}(x) (\gamma^k (i\partial_k + eA_k(x)) + m) = 0. \quad (D1.5)$$

Как легко видеть, величины  $\bar{\psi}\psi$  и  $\bar{\psi}\hat{\gamma}^i\psi$  эрмитовы\*\*). Можно

\*) Из рассмотрения равенства  $\beta \hat{\gamma}^i \beta^{-1} = \gamma^i$  эрмитово-сопряженного к (D1.3), следует, что  $\beta \hat{\gamma}^i = C \beta$ , где  $CC \hat{\gamma}^i = 1$ . Тогда выражение  $C^{1/2} \beta$  эрмитово и удовлетворяет (D1.3).

\*\*\*) Эрмитовы, но не вещественны, так как  $\psi$  — это операторы, действующие в гильбертовом пространстве.

добиться релятивистской инвариантности этого формализма, если постулировать, что преобразование Лоренца  $x_i \rightarrow a_{ik} x^k$

$$a_{ik} a^{il} = \delta_k^l \quad (Д1.6)$$

вызывает линейное преобразование  $S$  в спиновом пространстве  $\psi \rightarrow S\psi$ , такое, что  $S$  обладает свойством:

$$S^{-1} \gamma_i S = a_{ik} \gamma^k. \quad (Д1.7)$$

Эта матрица  $S$  наверняка существует, так как из равенства (Д1.6) следует, что  $\gamma'_i = a_{ik} \gamma^k$  также удовлетворяет перестановочным соотношениям (Д1.2).

Исходя из равенства, эрмитово-сопряженного к (Д1.7), мы получаем\*), используя  $a_{ik}^{\dagger} = a_{ik}$ , что

$$S^{\dagger} = \beta S^{-1} \beta^{-1}, \quad (Д1.8)$$

откуда следует, что  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} S^{-1}$ . Поэтому  $\bar{\psi} \psi$  будет скаляром, а  $\bar{\psi} \gamma \psi$  — вектором, и, следовательно, уравнения (Д1.1) и (Д1.5) сохранят в новой системе координат ту же форму, что и в старой. Отметим, что матрица  $S$  в обычном смысле не унитарна, а равенство (Д1.8) представляет обобщенное условие унитарности в пространстве с индефинитной метрикой  $\beta$ . Для бесконечно малых преобразований Лоренца матрица  $S$  принимает вид

$$S = 1 + \frac{i}{4} \epsilon^{ik} \sigma_{ik}, \quad \text{где } \sigma^{ik} = \frac{\gamma^i \gamma^k - \gamma^k \gamma^i}{2i}. \quad (Д1.9)$$

Легко убедиться, что благодаря перестановочным соотношениям (Д1.2), определенная таким образом матрица  $S$  обладает свойством (Д1.7) с точностью до квадратичных по  $a$  членов. Это соотношение, сформулированное для бесконечно малых  $a$ , может быть проинтегрировано, и для конечных  $a$  оно примет экспоненциальный вид, но мы не будем им явно пользоваться. Так как транспонированные матрицы  $\gamma$  также образуют представление дираковой алгебры, то существует матрица  $C$  такая, что

$$C \gamma^{\dagger} C^{-1} = -\gamma, \quad (Д1.10)$$

где можно показать\*\*), что  $C^{\dagger} = -C$ . Тогда величина  $\psi' = C \psi$  будет удовлетворять уравнению

$$(\gamma^k (i \partial_k + e A_k) - m) \psi' = 0, \quad (Д1.11)$$

\*) И здесь можно получить сперва только  $S^{\dagger} = C \beta S^{-1} \beta^{-1}$ , где  $C^{\dagger} = C$ , но  $SC^{-1}$  удовлетворяет уравнениям (Д1.7) и (Д1.8).

\*\*) Ясно, что  $C^T = \pm C$ . Поэтому имеют место равенства  $\sigma_{ik} C = \pm (\sigma_{ik} C)^T$  и  $\gamma_i C = \pm (\gamma_i C)^T$ . Однако в алгебре имеется только шесть антисимметричных матриц.

т. е. уравнению (Д1.1) с противоположным знаком заряда. Это значит, что  $\psi'$  и  $\bar{\psi}' = -\psi C^{-1}$  описывают частицы с зарядом, противоположным отвечающему  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ . Отсюда следует, что если не стремиться дать какое-либо преимущество частицам одного знака, то надо потребовать инвариантности всех наблюдаемых величин относительно «зарядового сопряжения»

$$\psi \rightarrow \psi', \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}', e \rightarrow -e. \quad (Д1.12)$$

Эту программу можно провести только в квантовой теории, поскольку

$$\bar{\psi}'\psi' = -\bar{\psi}\psi \text{ и } \bar{\psi}'\gamma\psi' = \psi\gamma^T\bar{\psi},$$

так что в теории, в которой  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  коммутируют,  $T_i^i = m\bar{\psi}\psi$  и ток  $e\bar{\psi}\gamma\psi$  не будут зарядово симметричны.

Согласно уравнению Дирака

$$\psi = \frac{1}{m} \gamma^k (i\partial_k - eA_k)\psi,$$

можно разделить ток на две части, одна из которых аналогична току заряженных скалярных частиц, а другая связана с магнитным моментом\*)

$$\begin{aligned} e\bar{\psi}\gamma_k\psi &= \frac{e}{2m} \bar{\psi} (i\partial_k - eA_k - \overleftarrow{i\partial_k} - eA_k)\psi - \\ &- \frac{e}{2m} \partial^j \bar{\psi} \sigma_{kj} \psi. \end{aligned} \quad (Д1.13)$$

( $\overleftarrow{\partial}$  действует налево на  $\bar{\psi}$ ). Каждый из двух членов в правой части (Д1.13) удовлетворяет уравнению непрерывности по отдельности. Влияние магнитного момента на уравнения поля можно лучше всего понять, умножив (Д1.1) слева на  $(\gamma^k (i\partial_k - eA_k) + m)$ . Тогда получим

$$((i\partial_k - eA_k)(i\partial^k - eA^k) - m^2)\psi = \frac{e}{2} f^{kj} \sigma_{kj} \psi,$$

где  $f_{ik} = A_{i,k} - A_{k,i}$ . Скалярное поле удовлетворяет такому же уравнению с  $\sigma_{kj} = 0$ .

Шпур произведения нечетного числа  $\gamma$ -матриц равен нулю. Это свойство наиболее просто устанавливается с помощью матрицы

$$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \gamma_5^2 = -1, \quad (Д1.14)$$

которая, очевидно, антикоммутирует со всеми четырьмя  $\gamma$ .

\*) В. Паули. Релятивистская теория элементарных частиц. ИИЛ, 1947.



Исходя из основного свойства шпура

$$\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA), \quad (\text{Д1.15})$$

получаем,

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\gamma_{\alpha_1} \dots \gamma_{\alpha_{2n+1}}) &= \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_{\alpha_1} \dots \gamma_{\alpha_{2n+1}} \gamma_5) = \\ &= -\text{Sp}(\gamma_{\alpha_1} \dots \gamma_{\alpha_{2n+1}}). \end{aligned}$$

Из равенства (Д1.2) следует, что

$$\text{Sp}(\gamma_i \gamma_k) = 4\delta_{ik},$$

поскольку неприводимое представление  $\gamma$ -матриц четырехрядно, и поэтому шпур единичной матрицы равен 4. Шпур произведения произвольного четного числа  $2n$  матриц  $\gamma$  или лучше их инвариантных комбинаций  $\hat{A}_1 \dots \hat{A}_{2n}$  можно, переставляя  $\hat{A}_1$  направо и используя перестановочное соотношение  $\hat{A}\hat{B} = 2(AB) - \hat{B}\hat{A}$  и равенство (Д1.15), свести к случаю  $2n - 2$

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\hat{A}_1 \dots \hat{A}_{2n}) &= (A_1 A_2) \text{Sp}(\hat{A}_3 \dots \hat{A}_n) - (A_1 A_3) \text{Sp}(\hat{A}_2 \hat{A}_4 \dots \hat{A}_{2n}) + \dots + \\ &+ (A_1 A_{2n}) \text{Sp}(\hat{A}_2 \dots \hat{A}_{2n-1}). \end{aligned} \quad (\text{Д1.16})$$

Из равенства (Д1.16) по индукции следует, что

$$\text{Sp}(\hat{A}_1 \dots \hat{A}_n) = 4 \sum_P (-1)^P (A_{\alpha_1} A_{\alpha_1}) \dots (A_{\alpha_{2n-1}} A_{\alpha_{2n-1}}). \quad (\text{Д1.17})$$

Здесь индексы  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$  образуют некоторую перестановку чисел  $1, \dots, 2$ , и суммирование идет по всем перестановкам  $P$ , которые приводят к различным членам в формуле (Д1.17). Каждый член в этой сумме умножается на  $(-1)^P$ , т. е. на знак, характеризующий четность или нечетность числа перестановок. Всего сумма в формуле (Д1.17) содержит  $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \dots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$  членов\*). Существуют еще два соотношения,

которые могут быть доказаны по индукции с помощью перестановочных соотношений

$$\begin{aligned} \gamma_k \hat{A}_1 \dots \hat{A}_{2n+1} \gamma^k &= -2 \hat{A}_{2n+1} \dots \hat{A}_1, \\ \gamma_k \hat{A}_1 \dots \hat{A}_{2n} \gamma^k &= 2 (\hat{A}_{2n} \hat{A}_1 \dots \hat{A}_{2n-1} + \hat{A}_{2n-1} \dots \hat{A}_1 \hat{A}_{2n}). \end{aligned} \quad (\text{Д1.18})$$

Выражения вида  $\gamma_k M \gamma^k$  часто возникают в квантовой электродинамике, когда суммируют по направлениям поляризации фотонов. Приведенные выше соотношения позволяют нам упрощать члены такого вида.

\*) Из  $(2n)!$  перестановок  $n!$  перестановок отличаются только последовательностью пар, а каждые  $2^n$  перестановок — только порядком множителей в скобках.

## ДОПОЛНЕНИЕ II

Наиболее мощным орудием для решения дифференциальных уравнений в частных производных, встречающихся в теории поля, является аппарат функций Грина. Мы рассмотрим здесь свойства этих и некоторых родственных им функций, которые встречаются в теории в связи с релятивистскими уравнениями.

Благодаря линейности волнового уравнения решение неоднородного уравнения

$$(\square^2 + m^2)f(x) = g(x) \quad (\text{Д2.1})$$

может быть построено в виде суперпозиции решений уравнения (Д2.1) для точечного источника

$$(\square^2 + m^2)\bar{\Delta}(x) = \delta(x), \quad (\text{Д2.2})$$

т. е. в форме

$$f(x) = \int dx' g(x') \bar{\Delta}(x - x'). \quad (\text{Д2.3})$$

Фурье-образ функции Грина  $\bar{\Delta}$  можно найти, исходя из фурье-образа  $\delta$ -функции, (0.5) и учитывая, что оператор  $\square^2 + m^2$  в импульсном пространстве имеет вид:  $-k^2 + m^2$ . Тогда

$$\bar{\Delta}(x) = (2\pi)^{-4} \int dk \frac{e^{-ikx}}{-k^2 + m^2}. \quad (\text{Д2.4})$$

Поскольку подынтегральная часть выражения (Д2.4) имеет полюс при  $k_0 = \pm \sqrt{k^2 + m^2}$ , то выражение (Д2.4) не определено полностью до тех пор, пока не заданы правила обхода полюса. Определим теперь функцию  $\bar{\Delta}$  тем, что при интегрировании по  $k_0$  в сингулярных точках интеграл берется в смысле главного значения. Если выбрать какой-либо другой путь интегрирования в комплексной плоскости, то это приведет к другой функции Грина, в соответствии с тем, что функции Грина определены лишь с точностью до произвольного решения одно-

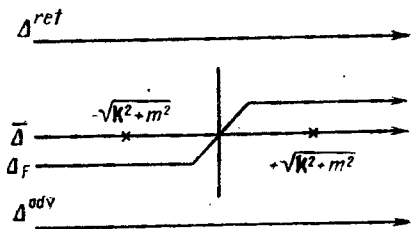


Рис. 23. Пути интегрирования для разных функций Грина

родного уравнения. Ведь вклады от полюсов удовлетворяют соотношению  $k^2 = m^2$  и поэтому являются решениями однородного уравнения. Мы определим теперь три других функции Грина, которые характеризуются путями интегрирования, изображенными на рис. 23.

Между различными функциями Грина существует следующие очевидные соотношения

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= \frac{1}{2} (\Delta^{\text{ret}} + \Delta^{\text{adv}}), \quad \bar{\Delta}(x) = \bar{\Delta}(-x), \\ \Delta^{\text{ret}}(x) &= \Delta^{\text{adv}}(-x), \quad \bar{\Delta}^{\dagger} = \bar{\Delta}, \\ \Delta^{\text{ret} \dagger} &= \Delta^{\text{ret}}; \quad \Delta^{\text{adv} \dagger} = \Delta^{\text{adv}}. \end{aligned} \quad (\text{Д2.5})$$

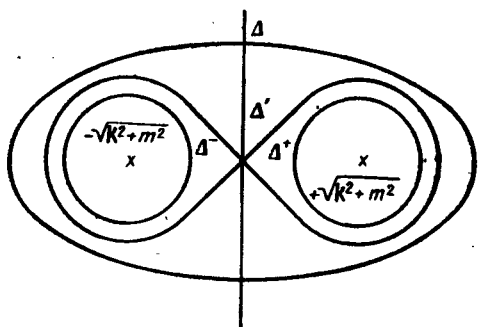


Рис. 24. Пути интегрирования для разных решений однородного уравнения

Разность двух решений неоднородного уравнения будет решением однородного уравнения. Мы определим частные решения однородного уравнения с особыми инвариантными свойствами, выбирая пути интегрирования в комплексной плоскости, показанные на рис. 24.

Тогда возникнут соотношения \*)

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta^+ + \Delta^-, & \Delta^1 &= \Delta^+ - \Delta^-, \\ \Delta^{\text{ret}} &= \bar{\Delta} + \frac{\Delta}{2}, & \Delta^{\text{adv}} &= \bar{\Delta} - \frac{\Delta}{2}, & \Delta_f &= \bar{\Delta} + \frac{\Delta^1}{2}, \\ \Delta^+(-x) &= -\Delta^-(x), & \Delta^1(x) &= \Delta^1(-x), & \Delta(x) &= -\Delta(-x), \\ (\Delta)^{\dagger} &= \Delta; & (\Delta^1)^{\dagger} &= -\Delta^1; & (\Delta^-)^{\dagger} &= \Delta^+. \end{aligned} \quad (\text{Д2.6})$$

Для  $x^0 < 0$  ( $> 0$ ) благодаря множителю  $e^{-ib^*x^0}$  можно замкнуть пути интегрирования на рис. 23 выше (ниже) действительной оси полуокружностью бесконечного радиуса. В этом случае получим следующие соотношения

$$\begin{aligned} \Delta^{\text{ret}} &= 2\theta(x^0)\bar{\Delta}(x), \quad \Delta^{\text{adv}} = 2\theta(-x^0)\bar{\Delta}(x), & (\text{Д2.7}) \\ \Delta(x) &= 2\epsilon(x^0)\bar{\Delta}(x); \quad \Delta_f(x) = \theta(x^0)\Delta^+(x) - \theta(-x^0)\Delta^-(x). \end{aligned}$$

\*) Все  $\Delta$ -функции имеют интегральное представление вида (Д2.4) с путями интегрирования, взятыми в направлении часовой стрелки.

Вследствие аналогии между правилами обращения с выражениями вида  $\delta(f(x))$  и правилами образования вычетов для функции  $f^{-1}(x)$  (ср. (0.1)), решения однородного уравнения можно вместо (Д2.4) записать и в форме:

$$\begin{aligned} & (\Delta^1, \Delta, \Delta^+, \Delta^-) = \\ & = i(2\pi)^{-3} \int dk e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) (1, \varepsilon(k^0), \theta(k^0), -\theta(-k^0)); \quad (Д2.8) \end{aligned}$$

Если оставаться внутри непрерывной собственной группы Лоренца, т. е. не рассматривать обращение времени, то все  $\Delta$ -функции будут инвариантными функциями, как ясно из самой формы записи (Д2.4) и (Д2.8). Следовательно, эти функции зависят только от интервала  $x^2$  и от знака времени  $\varepsilon(x^0)$ \*. С учетом соображений симметрии из уравнения (Д2.8) можно заключить, что  $\Delta = 0$  при  $x^0 = 0$ . Тогда она, как инвариантная функция, равна нулю во всей области  $x^2 < 0$ . Далее, из формулы (Д2.8) и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k_0| dk_0 \delta(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m^2) = 1$$

следует, что

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^0} \Delta^1, \Delta, \Delta^+, \Delta^- \right)_{x^0=0} = \left( 0, \delta(x), \frac{\delta(x)}{2}, \frac{\delta(x)}{2} \right), \quad (Д2.9)$$

или в инвариантной интегральной форме

$$\int_{x' \in \sigma} d\sigma_k f(x) \partial^k \Delta(x - x') = f(x'). \quad (Д2.10)$$

где  $f$  — произвольная функция.

Так как  $\Delta$  — инвариантная функция, исчезающая вне светового конуса и к тому же нечетная, так что можно положить  $\Delta(0) = 0$ , то для любой пространственноподобной поверхности мы имеем:

$$\int_{x' \in \sigma} d\sigma_k f(x) \Delta(x - x') = \int d\sigma_k f(x) \partial^m \partial^n \Delta(x - x') = 0. \quad (Д2.11)$$

Из формул (Д2.10) и (Д2.11) можно заключить, что  $\Delta$ -функция имеет смысл решения задачи Коши: *Решение однород-*

\*) Часто встречается ошибочная точка зрения, что релятивистская инвариантность означает эквивалентность пространства и времени. Между тем едва ли можно представить себе большее различие, чем то, которое порождает знак метрики между пространственно- и времениподобными направлениями. Релятивистская инвариантность означает только, что все времениподобные направления полностью эквивалентны.

ного уравнения  $(\square^2 + m^2)f(x) = 0$  задано на некоторой пространственноподобной гиперповерхности  $\sigma'$  вместе с его производной в направлении нормали к поверхности. Требуется найти значение этой функции в произвольной пространственно-временной точке  $x$ .

Решением этой задачи будет:

$$f(x) = \int d\sigma'_k (\Delta(x - x') \partial'^k f(x') - f(x') \partial'^k \Delta(x - x')). \quad (D2.12)$$

В самом деле, выражение (D2.12) очевидно является решением однородного уравнения, а из-за (D2.10) и (D2.11) функция  $f(x)$  и ее нормальная производная принимают для  $x \in \sigma'$  требуемые значения. Единственность решения следует из того факта, что если функции  $f$  и  $\frac{\partial f}{\partial t}$  равны нулю для всех точек  $x$  в некоторый момент времени, то из уравнения  $(\square^2 + m^2)f = 0$  следует, что  $f$  должна быть всюду равна нулю.

Вычисляя интегралы по  $dk$  в формулах для функций Грина с тем, чтобы получить для них явные выражения, мы скоро можем убедиться, что эти интегралы не сходятся. Однако, если рассмотреть, например, выражение для  $\Delta^+$ -функции, то можно видеть, что соответствующий интеграл сойдется, если вычесть из  $x$  чисто мнимый вектор  $i\eta$ , лежащий в верхнем световом конусе. Тогда  $\Delta^+$ -функция будет определена как предел при  $\eta \rightarrow 0$  выражения

$$(2\pi)^{-3} \int_{k_0 > 0} dk e^{-ik(x-i\eta)} \delta(k^2 - m^2).$$

Из соображений релятивистской инвариантности этот интеграл должен зависеть только от  $\lambda^2 = (x - i\eta)^2 = x^2 - \eta^2 - 2i\eta x$ ;  $t > 0$  и  $t < 0$  соответствуют нижней и верхней полуплоскости этой переменной. Так как интеграл сходится равномерно, для векторов  $\eta$ , расположенных в верхней половине светового конуса, и не равен нулю, то можно заключить, что он является аналитической функцией этой переменной во всей области, кроме положительной действительной полуоси. Следовательно,  $\Delta^+$ -функция, будучи пределом этого интеграла при  $\eta \rightarrow 0$ , будет граничным значением некоторой аналитической функции. Для определения  $\Delta^+$ -функции мы вычислим интеграл, считая, что векторы  $x$  и  $\eta$  имеют только временную компоненту

$$\begin{aligned} & \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-ik_0(t-i\eta)} \delta(k^2 - m^2) = \\ & = (2\pi)^2 \int_m^\infty dk_0 \sqrt{k_0^2 - m^2} e^{-ik_0(t-i\eta)} = \frac{m^2}{8\pi} \frac{H_1^{(1)}(m(t-i\eta))}{m(t-i\eta)}. \end{aligned}$$

Вследствие упомянутых выше инвариантных свойств мы должны иметь в общем случае:

$$\Delta^+(x) = \frac{m^2}{8\pi} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{H_1^{(1)}(m\lambda)}{m\lambda^3}.$$

Переходя к пределу, мы должны помнить, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{-i}{x - i\alpha} = \pm \pi \delta(x)$$

(со знаком плюс или минус в зависимости от того, стремится ли  $\alpha$  к нулю вдоль положительной или отрицательной действительной оси). Отделяя сингулярную часть, получим<sup>\*)</sup>:

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= 2 \operatorname{Re} \Delta^+(x) = \\ &= \varepsilon(x) \left( \frac{\delta(x^2)}{2\pi} - \theta(x^2) \frac{m^2}{4\pi} \frac{J_1(m\sqrt{x^2})}{m\sqrt{x^2}} \right), \end{aligned} \quad (D2.13)$$

$$\Delta^1(x) = 2 \operatorname{Im} \Delta^+(x) = \frac{im^2}{4\pi} \operatorname{Im} \frac{H_1^{(1)}(m\sqrt{x^2})}{m\sqrt{x^2}}.$$

С помощью соотношений (D2.5), (D2.6) и (D2.7) все другие интересующие нас функции могут быть выражены через эти две. Для интервалов  $\lambda$ , меньших комптоновой длины волны электрона, мы можем разложить (D2.13) в ряд

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \left[ \frac{\delta(x^2)}{2\pi} + \frac{\theta(x^2)}{2\pi} \left( \frac{m^2}{4} + x^2 \frac{m^4}{32} + \dots \right) \right] \varepsilon(x), \\ \Delta^1(x) &= \frac{i}{4\pi^2} \left[ -\frac{2}{x^2} + m^2 \ln \left( \frac{\gamma}{2} \right) m\lambda - \frac{m^2}{2} + \dots \right], \end{aligned} \quad (D2.14)$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера.

Во времениподобных направлениях на больших расстояниях  $\Delta^1$  и  $\Delta$ -функции осциллируют. В пространственноподобных направлениях  $\Delta^1$ -функция стремится к нулю как  $e^{-mr}$ , а  $\Delta$ -функция равна нулю. В частном случае, когда  $m=0$ , мы будем обозначать  $\Delta$ -функцию буквой  $D$ . Тогда

$$(\bar{D}, D, D^{\text{ret}}, D^{\text{adv}}) = \frac{\delta(x^2)}{2\pi} \left[ \frac{1}{2}, \varepsilon(x^0), \theta(x^0), \theta(-x^0) \right], \quad (D2.15)$$

что схематически изображено на рис. 25.

Для уравнения Дирака в отсутствие внешнего поля  $(\partial - m)\psi = 0$ , где  $\partial = i\gamma_k \partial^k$ , также легко определить соответ-

<sup>\*)</sup> Представляет интерес убедиться, что эти функции удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона, не обращаясь к преобразованию Фурье. См. W. Thirring. Acta Phys. Austriaca 4, 125 (1950).

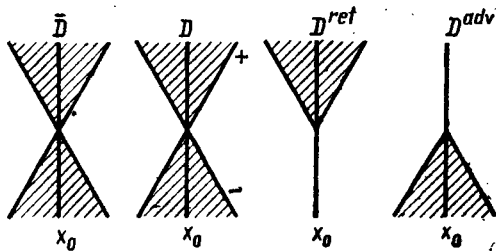


Рис. 25. Схематическое изображение  $D$ -функций

ствующие функции. Поскольку  $(\partial - m)(\partial + m) = -\square^2 - m^2$ , то функции<sup>\*)</sup>

$$\begin{aligned}
 &(\bar{S}, S, S^{\text{ret}}, S^{\text{adv}}, S_f, S^1, S^+, S^-) = \\
 &= -(\partial + m)(\bar{\Delta}, \Delta, \Delta^{\text{ret}}, \Delta^{\text{adv}}, \Delta_f, \Delta^1, \Delta^+, \Delta^-) \quad (\text{Д2.16})
 \end{aligned}$$

играют такую же роль по отношению к уравнению Дирака<sup>\*\*)</sup> какую  $\Delta$ -функции играют по отношению к уравнению Клейна-Гордона (Д2.2).

В импульсном пространстве  $S$ -функции записываются в виде

$$S = (2\pi)^{-4} \int d^4p e^{-ipx} \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2},$$

или

$$S = (2\pi)^{-4} \int d^4p e^{-ipx} (\hat{p} - m)^{-1}, \quad (\text{Д2.17})$$

где  $\hat{p} = \gamma^k p_k$ , и имеются в виду те же пути интегрирования, как и в соответствующих случаях у  $\Delta$ -функций. Поскольку уравнение Дирака во внешнем поле  $(\partial - m)\psi = e\gamma A\psi$  является однородным, то его нельзя решить с помощью функций Грина, а можно только преобразовать в интегральное уравнение

$$\psi(x) = \int dx' S^{\text{ret}}(x - x') e\gamma A(x') \psi(x'),$$

<sup>\*)</sup> Читатель может выяснить самостоятельно, какие из соотношений (Д2.5), (Д2.6), (Д2.7) сохраняются и для  $S$ -функций.

<sup>\*\*)</sup> Заметим, что  $(\partial - m)_{\alpha\beta} \bar{S}_{\beta\gamma} = \delta(x) \delta_{\alpha\gamma}$ . Таким образом, в случае, когда спин равен 1/2, в правой части фактически стоит  $\delta$ -функция не только по пространственным, но и по спиновым переменным.

которое уже можно, следуя Нейману, решить методом последовательных приближений

$$\psi = \sum_i \psi^i, \psi^{i+1} = \int S^{\text{ret}} e_{\Gamma} A \psi^i, \quad (\text{D2.18})$$

где  $\psi^0$  — решение уравнения для свободного поля ( $A = 0$ ).

Функция  $S$  дает решение задачи Коши. Она обладает тем свойством, что

$$\begin{aligned} \int_{x \in \sigma'} d\sigma_k S(x - x') \gamma^k f(x') &= \int d\sigma'_k (-i \gamma^j \gamma^k \partial_j - m \gamma^k) [\Delta(x - x') f(x')] = \\ &= -i \int d\sigma'_k \partial^k [\Delta(x - x') f(x')] - \\ &- \frac{i}{2} \int d\sigma'_k (\gamma^j \gamma^k \partial_j - \gamma^k \gamma^j \partial_j) [\Delta(x - x') f(x')] = -i f(x). \end{aligned} \quad (\text{D2.19})$$

Здесь мы воспользовались формулой (D2.11) и теоремой (0.6), следствием которой явилось исчезновение членов, антисимметричных по  $j$  и  $k$ . Поскольку уравнение Дирака является уравнением первого порядка, задания всех компонент  $\psi$  в некоторый момент времени достаточно для определения их в произвольный момент времени. В соответствии с этим, если  $\psi(x)$  удовлетворяет уравнению свободных полей и задано на некоторой пространственноподобной поверхности, то имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \psi(x) &= i \int d\sigma'_k S(x - x') \gamma^k \psi(x'), \\ \bar{\psi}(x) &= i \int d\sigma'_k \bar{\psi}(x') \gamma^k S(x' - x). \end{aligned} \quad (\text{D2.20})$$

Выведем теперь формулы для комбинаций инвариантных функций, которые являются основой для расчетов эффектов собственной энергии. Заметим для этого, что, например, произведение двух  $\Delta^+$ -функций  $\Delta^+(x, a) \Delta^+(x, b)$  с массами  $a$  и  $b$  соответственно также будет инвариантной функцией, для фурье-образа которой вектор  $p$  будет лежать в верхней половине светового конуса, и поэтому она должна была бы выражаться в виде суперпозиции  $\Delta^+$ -функций с различными массами. Необходимое преобразование более удобно провести в импульсном пространстве, где

$$\begin{aligned} \Delta^+(x, a) \Delta^+(x, b) &= \\ &= -(2\pi)^{-6} \int dk dq e^{-ix \cdot (k+q)} \theta(k_0) \theta(q_0) \delta(k^2 - a^2) \delta(q^2 - b^2). \end{aligned}$$



Вводя переменную  $p = k + q$ , мы приходим к интегралу

$$\int a^4 q \theta(q_0) \theta(p_0 - q_0) \delta(q^2 - b^2) \delta((p - q)^2 - a^2) = \\ = \frac{4\pi}{8p^2} \sqrt{(p^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2} [\theta(p^2 - (a + b)^2) \theta(p_0)],$$

который легко вычислить, перейдя в систему координат, в которой  $p = 0$ . Это дает

$$\Delta^+(x, a) \Delta^+(x, b) = - \frac{1}{16\pi^3} \int_{p_0 > 0} \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ipx}}{p^2} \sqrt{(p^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2} = \\ = \int_0^\infty dc f_{\Delta\Delta}(abc) \Delta^+(x, c), \quad (Д2.21)$$

где

$$f_{\Delta\Delta}(abc) = \frac{i}{8\pi^3 c} \sqrt{(c^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2} \theta(c^2 - (a + b)^2).$$

Аналогично имеем

$$\Delta^-(x, a) \Delta^-(x, b) = - \int_0^\infty dc f_{\Delta\Delta}(abc) \Delta^-(x, c).$$

Так как

$$\Delta_f = \theta(x^0) \Delta^+(x) - \theta(-x^0) \Delta^+(-x) \quad \text{и} \quad \theta^2(x^0) = \theta(x^0); \\ \theta(x^0) \theta(-x^0) = 0,$$

то следовало бы ожидать, что

$$\Delta_f(x, a) \Delta_f(x, b) = \int_0^\infty dc f_{\Delta\Delta}(abc) \Delta_f'(x, c).$$

Однако, рассматривая интеграл по  $c$  в случае, когда  $\Delta_f$  функция выражена в импульсном представлении, мы убеждаемся, что он не существует, так как не сходится на верхнем пределе. Тем не менее, этой формулой можно пользоваться, если интегрировать по  $a$  и  $b$  с подходящими (не положительно определенными) весовыми функциями  $\rho(a)$  и  $\bar{\rho}(b)$

$$\int_0^\infty da db \rho(a) \bar{\rho}(b) \Delta_f(x, a) \Delta_f(x, b) = \\ = \int_0^\infty da db dc \rho(a) \bar{\rho}(b) f_{\Delta\Delta}(abc) \Delta_f(x, c)$$

при условии, что все интегралы существуют.

Аналогичным образом мы можем построить произведение

$$\Delta^+(x, a) S^+(x, b) = \Delta^+(x, a) \left( -i\gamma \frac{\partial}{\partial x} - \not{b} \right) \Delta^+(x, b).$$

Здесь мы приходим в импульсном пространстве к новому интегралу

$$\int da \theta(q_0) \theta(p_0 - q_0) \delta(q^2 - b^2) \delta^2((p - q)^2 - a^2) q_\mu.$$

Соображения инвариантности подсказывают нам, что он должен иметь вид  $p_\mu G(a, b, c)$ , где  $c^2 = p^2$ . Умножение на  $p_\mu$  позволяет свести вычисление  $G$  к предыдущему случаю

$$c^2 G(a, b, c) = \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) f(abc).$$

Тем же способом получаем:

$$\Delta^+(x, a) S^+(x, b) = \int_{-\infty}^{\infty} dc f_{\Delta S}(abc) S^+(x, c),$$

где

$$f_{\Delta S}(abc) = \frac{-i}{16\pi^2 c} \sqrt{(c^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2} \times \\ \times \frac{(c + b)^2 - a^2}{2c^2} \theta(c^2 - (|a| + |b|)^2). \quad (D2.22)$$

Наконец, для вычисления поляризации вакуума нам потребуется выражение:

$$\frac{1}{4} \text{Sp} (S^+(x, a) \gamma_r S^+(x, -a) \gamma^r).$$

В импульсном пространстве это выражение аналогично выражению для  $\Delta^+ \Delta^+$ , за исключением множителя

$$\frac{1}{4} \text{Sp} ((\hat{q} + a) \gamma_i (\hat{k} - a) \gamma^i) = -\frac{1}{2} \text{Sp} ((\hat{q} + a) (\hat{k} + 2a)) = \\ = -2qk - 4a^2 = -(p^2 + 2a^2).$$

Это дает

$$\frac{1}{4} \text{Sp} (S^+(x, a) \gamma_r S^+(x, -a) \gamma^r) = \\ = \int_0^{\infty} dc f_{ss}(a, -a, c) \Delta^+(x, c), \quad (D2.23)$$

где

$$f_{ss}(a, -a, c) = -i \frac{(c^2 + 2a^2)c}{8\pi} \sqrt{1 - \frac{4a^2}{c^2}} \theta(c^2 - 4a^2).$$

## ЗАДАЧИ

### Глава I

1. Вывести (1.8).
2. Показать, что  $j_{,i}^i = T_{,i}^{ik} + \mathfrak{J}_{,i}^{ik} = 0$ , если  $j$  и  $\mathfrak{J}$  — это вектор тока и тензор энергии-импульса зарядов.
3. Показать, что для частицы в покое  $z = (s, 0, 0, 0)$  соотношения (1.16) и (1.18) дают обычные выражения для кулонова поля.
4. Получить (1.20).
5. Доказать, что если  $T_{ik}(x)$  не зависит от времени в некоторой лоренцевой системе, то собственные натяжения  $\int dV T_{ik}(x)$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) исчезают в этой системе.
6. Вычислить радиационные потери электрона в линейном ускорителе и в синхротроне.
7. Вычислить  $\langle q' t_1 | q'' t_2 \rangle$  для линейного осциллятора  $L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$  с помощью (1.54) для вариации по  $t$ . Показать, что соотношения типа (1.54) справедливы также для вариаций по  $q'$  и  $\omega$ .
8. Доказать (1.70) прямым вычислением из (1.65).

### Глава II

9. Используя определение вакуума  $q^+ |0\rangle = 0$ , получить представление  $\langle q | 0 \rangle$  для основного состояния осциллятора.
10. Получить импульсное представление  $P_k$ , используя

$$A(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk e^{-ikx} \delta(k^2) a(k),$$

и показать, используя (2.30), что  $P_0 > 0$ .

11. Найти состояния в представлении числа фотонов, которые удовлетворяют (2.30).
12. Доказать, что  $[A_k, \Sigma] = i\lambda_{,k}$  и сконструировать  $\Sigma$  из бесконечно малых градиентных преобразований лагранжиана

$$L = f^{ik} f_{ik} / 4 - (A^i_{,i})^2 / 2.$$

13. Обсудить (2.36) в импульсном представлении задачи 10.
14. Получить (2.34), используя (1.61) и  $L = f^{ik} f_{ik} / 4$  и показать,

- что разница между (2.34) и (2.28) не дает вклада в  $P$ .
15. Найти представления для  $\psi(x)$  и  $\delta\psi(x)$  в матрицах

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \{a, a^\dagger\} = 1$$

и

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \{c, a\} = 0, c^2 = 1.$$

16. Используя импульсное представление, подобное введенному в задаче 10, представить для скалярного поля величины  $P_\mu$ ,  $Q$  и  $N$  в виде интегралов по импульсному пространству. Доказать, в частности, что

$$[N, \Phi^\pm] = \mp \Phi^\pm.$$

17. Проквантовать поле частиц, удовлетворяющих нерелятивистскому уравнению Шредингера. Показать, что операторы координаты и импульса удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям. Найти собственное состояние оператора координаты (локализованное состояние) и проверить, что математические ожидания плотностей энергии и заряда имеют  $\delta$ -образный характер.
18. Доказать, что перестановочные соотношения (2.40) инвариантны относительно зарядового сопряжения.

### Глава III

19. Вывести (3.4) интегрированием уравнения для зависимости вектора состояния в шредингеровом представлении от времени.
20. Показать, что (3.38) совпадает с классическим выражением для радиационных потерь (1.27).
21. При каких условиях  $\text{Sp} QQ^\dagger$  в (3.60) конечен?

### Глава IV

22. Доказать (4.6).
23. Предполагая, что длина волны много больше пространственного протяжения  $j_{m,m}$ , свести (4.14) к известной формуле дипольного излучения.
24. Вычислить сечение аннигиляции электрона и позитрона на два фотона.
25. Вычислить сечение упругого рассеяния двух электронов.
26. Показать в четвертом порядке, что расходящиеся члены для рассеяния света на свете исчезают.

## Глава I

$$1. T_{i,k}^k = f_{i,k}^m f_m^k + f_i^m f_{m,k}^k - \frac{f_k^m f_{m,i}^k}{2} =$$

$$= f_i^m j_m + f^{mk} \frac{(f_{im,k} + f_{ki,m} + f_{mk,i})}{2} = -f^m f_{mi}.$$

$$2. j_{,i}^i(x) = \int ds \frac{d}{ds} \delta(x - z(s)) = 0; \mathcal{J}_{,i}^{ik}(x) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \int ds m \dot{z}^i(s) \dot{z}^k(s) \delta(x - z) = m \int ds \ddot{z}^k \delta(x - z) = f^m f_{mk}.$$

$$3. \dot{z} = (1, 0, 0, 0), \ddot{z} = 0, (\dot{z}, x - z) = x_0 - z_0 = |x - z| = r,$$

$$A(x) = \frac{e}{4\pi r} (1, 0, 0, 0);$$

$$f(x) = \frac{e}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} 0 - x - y - z \\ x & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.  $L \cong f^{ik} f_{ik}$  исчезает в волновой зоне, а другая часть дает

$$f_i^{m(\ddot{z})} f_{mk}^{(\ddot{z})} = \left( \frac{e}{4\pi (\dot{z}, x - z)^3} \right)^2 [(\dot{z}, x - z) (\ddot{z}_i (x - z)^m - \ddot{z}^m (x - z)_i) -$$

$$- (\ddot{z}, x - z) (\dot{z}_i (x - z)^m - \dot{z}^m (x - z)_i)] [(\dot{z}, x - z) (\ddot{z}_m (x - z)_k -$$

$$- \ddot{z}_k (x - z)_m) - (\ddot{z}, x - z) (\dot{z}_m (x - z)_k - \dot{z}_k (x - z)_m)].$$

Это выражение с использованием (1.13) и (1.17) ведет к (1.20).

$$5. \text{Из } \frac{\partial}{\partial x_0} T_{0i} + \frac{\partial}{\partial x_a} T_{ai} = 0,$$

$$a = 1, 2, 3$$

мы получаем

$$\int dV x_\beta \frac{\partial}{\partial x_a} T_{ai} = - \int dV T_{\beta i} = 0.$$

6. В линейном ускорителе радиационных потерь практически нет; они становятся существенными только, если электрон приобретает энергию, равную массе покоя, на расстоянии, соответствующем классическому радиусу электрона. При круговом движении потери энергии

$$\Delta E_{\text{за оборот}} \cong \left( \frac{E}{10^4} \right) \frac{1}{R},$$

если энергия измеряется в Бэв ( $= 10^9$  эв), а радиус круга  $R$  в метрах.

7. Интегрирование уравнений движения дает

$$q_t = q_0 \cos \omega t + p_0/\omega \sin \omega t;$$

$$p_t = p_0 \cos \omega t - \omega x_0 \sin \omega t.$$

Из соотношения  $[q_t, p_t] = i$  мы заключаем, что

$$[q_0, q_t] = i \frac{\sin \omega t}{\omega}.$$

Переставляя  $q_t$  влево, найдем

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial}{\partial t} \langle q' t | q'' 0 \rangle &= \langle q' t | H | q'' 0 \rangle = \\ &= \langle q' t | \left[ \frac{\omega^2}{2} \left( \frac{(q_t - q_0) \cos \omega t)^2 + \sin^2 \omega t \cdot q_0^2}{\sin^2 \omega t} \right) \right] | q'' 0 \rangle = \\ &= \frac{\omega^2}{2 \sin^2 \omega t} \left( q'^2 + q''^2 - 2q'q'' \cos \omega t - i \frac{\cos \omega t \cdot \sin \omega t}{\omega} \right) \langle q' t | q'' 0 \rangle. \end{aligned}$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\begin{aligned} \langle q' t | q'' 0 \rangle &= \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi \sin \omega t}} \exp \left[ -i \frac{\omega}{2 \sin \omega t} \{ (q' + q'')^2 \cos \omega t - 2q'q'' \} \right]. \end{aligned}$$

Это выражение приобретает более удобную форму, если первоначальный волновой пакет — гауссов:

$$\left| \int dq'' e^{-(q''-a)^2 \omega/2} \langle q' t | q'' 0 \rangle \right|^2 \cong e^{-(q'-a \cos \omega t)^2 \omega},$$

что соответствует классическому движению. Заметим также, что

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial}{\partial q''} \langle q' t | q'' 0 \rangle &= \langle q' t | P | q'' 0 \rangle, \\ -i \frac{\partial}{\partial \omega} \langle q' t | q'' 0 \rangle &= \omega \langle q' t | \int_0^t dt' q^2 | q'' 0 \rangle. \end{aligned}$$

$$8. [\psi^\alpha(x), P_k] = i \frac{\delta P_k}{\delta \pi^\alpha(x)};$$

$$\delta P_k = \delta \left( \int d\sigma \pi^\alpha \psi_{,k}^\alpha - \int d\sigma_k L \right); \quad d\sigma = d\sigma_k n^k;$$

$$\int d\sigma_k \delta L = \int d\sigma_k \partial_l (\pi^{l\alpha} \delta \psi^\alpha) = \int d\sigma (\pi_{,k}^\alpha \delta \psi^\alpha + \pi^\alpha \delta \psi_{,k}^\alpha).$$

Используя (1.55)

$$\delta P_k = \int d\sigma (\delta \pi^{\alpha} \psi_{,k}^{\alpha} - \delta \psi^{\alpha} \pi_{,k}^{\alpha}),$$

$$\frac{\delta P_k}{\delta \pi^{\alpha}} = \psi_{,k}^{\alpha}.$$

## Глава II

9.  $\dot{p} = -q, \dot{q} = p;$

$$q(t) = (q(0) + ip(0))e^{-it/2} + (q(0) - ip(0))e^{it/2};$$

$$q^{\dagger}|0\rangle = \left(q + \frac{\partial}{\partial q}\right)|0\rangle = 0;$$

$$|0\rangle = \pi^{-1/4} e^{-q^2/2},$$

где

$$q(0) = q, p(0) = -i \frac{\partial}{\partial q}.$$

10.  $P_k = \frac{1}{2} \int d\sigma^j : A_{,j}^n A_{n,k} - A_{n,k} A_{,j}^n :$

Здесь мы использовали (6.6). Вводя фурье-образ и используя

$$\int d\sigma^j (k - k')_j \delta(k^2) \delta(k'^2) e^{-ix(k+k')} = \delta(k+k') \delta(k^2) (2\pi)^3 \varepsilon(k_0),$$

мы получим

$$P_i = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \delta(k^2) : a(k) a(-k) : k_i \varepsilon(k_0) =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} dk (a^-(k) a^+(k)) k_i,$$

где  $a(k) = a^+(k) + a^-(-k)$ , причем для  $k_0 < 0$   $a^+(k) = a^-(-k) = 0$ , и, следовательно,

$$: a(k) a(-k) : = a^+(k) a^+(-k) + a^-(k) a^+(k) +$$

$$+ a^-(-k) a^+(-k) + a^-(k) a^-(-k),$$

так что только два средних члена отличны от нуля. Фурье-представление (2.30), если  $k = (k_0, k_0, 0, 0)$  есть

$$k^0 (a_0 - a_1) | \neq 0,$$

поэтому

$$-\langle | : a(k) a(-k) : | \rangle = \langle | a_2^- a_2^+ + a_3^- a_3^+ | \rangle.$$

11. Из  $a_0^{\pm} | \rangle = a_1^{\pm} | \rangle$  следует, что если мы разложим состояние по состояниям с числом  $n_0, \dots, n_3$  фотонов с поляризациями  $0, \dots, 3$

$$| \rangle = \sum_{n_i} c_{n_0 \dots n_3} | n_0 \dots n_3 \rangle,$$

то  $c_{n_i}$  удовлетворяет уравнению

$$c_{n_0 \pm 1, n_1, n_2, n_3} = c_{n_0, n_1 \pm 1, n_2, n_3},$$

которое имеет решение

$$| \rangle = \sum_{n_1, n_2} c'_{n_1 n_2} \{ |0, 0, n_2, n_3\rangle + |1, 1, n_2, n_3\rangle + |2, 2, n_2, n_3\rangle + \dots \}.$$

Вид состояния, которое подчиняется (2.30) относительно числа временных и продольных фотонов, следовательно, определен, и, действительно, эти состояния не есть собственные состояния числа частиц. Это часто подразумевают говоря, что эта часть поля не квантована.

12. Функция Лагранжа, которую мы употребляем, имеет преимущество над  $f^{ik} f_{ik}$ , так как из нее получается (2.26) без использования дополнительного условия и далее  $\pi^0$  не исчезает тождественно. Мы имеем

$$\pi_k^i = f_k^i - \delta_k^i A_{,m}^m;$$

$$\int d\sigma_k \pi_k^i \delta A_i = \int d\sigma_k \lambda_{,i} (f_k^i - \delta_k^i A_{,m}^m) = \int d\sigma_k (\lambda A_i^{i,k} - \lambda^{,k} A_{,i}^i),$$

где мы использовали (0.6).

Уравнение, которое мы ищем, следует прямо из перестановочных соотношений (2.29), так как мы замечаем, что в выражении

$$[A^m(x), \pi_k^j(x')] = i(g^{mi} \partial_k - g_k^m \partial^j + g_k^j \partial^m) D(x - x')$$

последние два члена взаимно компенсируются. Как и должно быть в этом случае,  $\Sigma$  не зависит от  $\sigma$

$$\delta \Sigma / \delta \sigma(x) = \partial_k (\lambda^{,k} A_{,i}^i - \lambda A_i^{i,k}) = 0.$$

Поэтому можно предположить, что точка интегрирования  $x'$  находится на пространственноподобной поверхности, проходящей через  $x$ . Теперь, чтобы дать явное доказательство перестановочных соотношений между  $A$  и  $\Sigma$ , можно использовать (Д2.9).

13. В импульсном пространстве

$$f(k) = \begin{pmatrix} 0, & a_1 - a_0, & a_2, & a_3 \\ & 0, & a_2, & a_3 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} k_0, \quad f^+(k) |0\rangle = 0$$

дает, кроме (2.30), уравнения  $a_2^+ |0\rangle = a_3^+ |0\rangle = 0$ . Следовательно,  $|0\rangle$  — вакуумное состояние для поперечного поля, которое мы хотели сконструировать.



$$14. \pi^{ik} = \frac{\partial L}{\partial A_{i,k}} = f^{ki}, f_{jik} = f_{ji} A_{k,i}$$

$$\pi^{ml} A_{m,i} - \partial_m f_{ilm} = f_{im} f^{mk}.$$

Разность между тензорами энергии-импульса равна

$$-\partial^m (A_i f_{mk}) - A_{,i}^m A_{k,m} + \frac{1}{2} g_{ik} A_{m,s} A^{s,m}.$$

Из (0.6) и равенств  $f_{mk} = -f_{km}$ ,  $\int d\sigma_k \partial^m (A_i f_m^k) = 0$  следует

$$\int d\sigma^k A_{k,m} A_{,i}^m = \frac{1}{2} \int d\sigma^k (A_{k,m} A_{,i}^m + A^m A_{k,mi}) = \frac{1}{2} \int d\sigma_i A_{k,m} A^{m,k},$$

если применить это выражение к состоянию, которое удовлетворяет (2.30).

15. Мы разложим  $\psi$  по полной ортонормированной системе собственных функций  $u_s(x)$  уравнения Дирака  $(\partial - m)u = 0$ , где коэффициенты — операторы в гильбертовом пространстве,

$$\psi^a(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_s u_s^a(x) b_s.$$

Здесь  $\alpha$  — спиновый индекс, а  $s$  — немой индекс, нумерующий собственные функции. Если мы потребуем, чтобы  $b$  удовлетворял перестановочным соотношениям

$$\{b_s, b_t^\dagger\} = \delta_{st}; \quad \{b_s, b_t\} = 0,$$

то найдем

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(x')\} = \frac{1}{V} \sum_s u_s^\alpha(x) u_s^\beta(x') = \delta(x - x') \delta_{\alpha\beta},$$

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} = 0.$$

Мы получим представление для  $b$  в виде бесконечного прямого произведения матриц типа  $a$  и положим  $b_s = a_s \prod_{t>s} c_t$ .

Эти матрицы удовлетворяют указанным перестановочным соотношениям. Для величины  $\delta\psi$ , которая антикоммутирует со всеми другими операторами, мы получим соответствующее представление  $\delta\psi = \prod_t c_t \delta u_t$  с произвольным  $\delta u_t$ .

16. Как и в задаче 10, мы найдем

$$P_t = (2\pi)^{-3} \int d^4 k k_t a^-(k) a^+(k) \delta(k^2),$$

$$N = (2\pi)^{-3} \int d^4 k a^-(k) a^+(k) \delta(k^2).$$

Из соотношения

$$\delta(k^2)[a(k), a(k')] = (2\pi)^3 \delta(k - k') \varepsilon(k - k')$$

следует, что

$$\left[ N_1 \int dk \delta(k^2) a^+(k) e^{ikx} \right] = \int dk \delta(k^2) a^+(k) e^{ikx}.$$

17. Уравнения поля и перестановочные соотношения суть:

$$\frac{1}{i} \dot{\psi} - \frac{\nabla}{2m} \psi = 0; \{\psi(x, t), \psi(x', t)\} = \delta(x - x').$$

Наблюдаемые определяются как обычно:

$$N = \int dx \psi \dot{\psi}, \quad X_i = \int dx \psi \dot{\psi}^{\dagger}(x, t) x_i \psi(x, t),$$

$$P_j = \int dx \psi \dot{\psi}^{\dagger}(x, t) \frac{\nabla_j}{i} \psi(x, t);$$

и удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[X_i, P_j] = i\delta_{ij}N.$$

Локализованное одночастичное состояние

$$|x\rangle = \psi^{\dagger}(x)|0\rangle \quad (\text{где } \psi(x')|0\rangle = 0)$$

не нормируемо, но оно есть предел нормируемых состояний. В этом пределе мы находим:

$$\frac{\langle x | \psi^{\dagger}(x') \psi(x') | x \rangle}{\langle x | x \rangle} \rightarrow \delta(x - x'); \quad \frac{\langle x | X | x \rangle}{\langle x | x \rangle} = x.$$

18. Гипотеза

$$\begin{aligned} \{\psi'_\alpha(x), \bar{\psi}'_\beta(x')\} &= i \int dp e^{ip(x-x')} \delta(p^2 - m^2) \varepsilon(p) (\hat{p} + m) = \\ &= -c_{\alpha\alpha}^{-1} \{\bar{\psi}'_{\alpha'}(x), \psi_{\beta'}(x')\} c_{\beta\beta} \end{aligned}$$

действительно ведет к тому, что

$$\begin{aligned} \{\psi_\beta(x'), \bar{\psi}_\alpha(x)\} &= , \\ &= -i \int dp e^{ip(x-x')} \delta(p^2 - m^2) (c \hat{p} c^{-1} + m)_{\beta\alpha} \varepsilon(p), \end{aligned}$$

или

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = iS(x - x').$$

19. Из уравнения движения для вектора состояния  $|s\rangle$  в шредингеровом представлении

$$(H_0 + H')|s\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} |s\rangle$$

можно исключить энергию свободного поля  $H_0$  при помощи преобразования  $|s\rangle = e^{-iH_0 t} |\omega\rangle$ . Уравнение движения в «представлении взаимодействия» для преобразованного состояния  $|\omega\rangle$  содержит только энергию взаимодействия  $H'(t)$

$$H'(t)|\omega\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} |\omega\rangle, \quad \text{где } H'(t) = e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t}.$$

Это уравнение легко интегрируется. Однако надо иметь в виду, что  $H'(t)$  в разные моменты времени не коммутирует. Поэтому решение выражается через упорядоченную по времени экспоненту

$$|\omega, t\rangle = P e^{-i \int_{t_0}^t H'(t) dt} |\omega, t_0\rangle.$$

Так как операторы в представлении взаимодействия удовлетворяют свободным уравнениям поля, легко видеть, что  $H'(t)$  совпадает с  $\int dV L'(x)$ , когда  $L'$  не зависит от производных полевых величин по времени.

20. Классические радиационные потери во всем пространстве времени есть

$$\Delta P_r = \frac{1}{2} \int dx dx' j_s(x) (j^s(x') \partial_r - j_r(x') \partial^s) D(x - x').$$

Второй член исчезает при интегрировании по частям и в силу того, что  $j^s_s = 0$ . Импульсное представление первого члена есть

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int dk k_r \varepsilon(k_0) \delta(k^2) (j(k) j(-k)).$$

Легко показать, что  $\langle 0_{\text{in}} | P^{\text{out}} | 0_{\text{in}} \rangle$  равен вектору энергии-импульса поля излучения  $A^{\text{rad}} = A^{\text{ret}} - A^{\text{adv}} = A^{\text{out}} - A^{\text{in}}$ .  $A^{\text{in}}$  играет роль вакуумного поля  $A$ . Таким образом, мы имеем

$$\langle 0 | S^{-1} P^{\text{in}} S | 0 \rangle = \langle 0 | P^{\text{out}} | 0 \rangle = \langle 0 | P^{\text{rad}} | 0 \rangle,$$

где индекс у  $P$  указывает, из каких полей конструируется  $P$  в (2.28). При нахождении вакуумного ожидания  $P^{\text{rad}}$  остается только  $P^{\text{out}}$ , так как члены линейные и билинейные по  $A^{\text{in}}$  дают исчезающие математические ожидания.

21. Записывая  $\text{Sp}(QQ^\dagger)$  более подробно, мы заметим, что

$$|\text{Sp} QQ^\dagger| < \int dk_1 dk_2 dq_1 dq_2 \text{Sp} |A(q_1 - k_1) S_f(k_1) \times \\ \times A(k_1 - q_2) S_f(q_2) A(q_2 - k_2) S_f(k_2) A(k_2 - q_2) S_f(q_2)|.$$

Так как для больших импульсов  $|S_f(k)| \rightarrow 1/k$  мы должны иметь  $A(k) \rightarrow 1/k^3$ , при этом

$$E = \int dk k^2 |A(k)|^2 < \infty.$$

#### Глава IV

22. Из уравнения Дирака мы имеем  $L^{\text{el}} + eL' = 0$  и  $\pi_a$  не изменяется.

23. Применяя (2.28) мы найдем для вероятности излучения фотона с пространственной поляризацией в направлении  $n$ :

$$e^2 \int d\mathbf{V} d\mathbf{V}' ((nj^\dagger)(\mathbf{x})) (nj(\mathbf{x}')) \times \int dx_0 dx'_0 e^{i\omega(x_0 - x'_0)} \times \\ \times \int_{k_0 > 0} \frac{dk}{(2\pi)^3} \delta(k^2) e^{-ik(x - x')}.$$

Интегрирование по времени дает  $\delta$ -функцию, которая ограничивает частоты при интегрировании по  $k_0$ , и дает в качестве множителя полное время. Для вероятности излучения за единицу времени мы находим:

$$2\alpha\omega \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \int d\mathbf{V} d\mathbf{V}' (nj^\dagger(\mathbf{x}), (nj(\mathbf{x}')) \cdot e^{i\omega|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cos \delta}.$$

Если пространственное протяжение много меньше длины волны, экспоненту можно положить равной единице. Тогда пространственное интегрирование может быть проведено с использованием (0.6) и уравнения непрерывности для тока

$$\int d\sigma_i \partial_s (x_k j^s) = \int d\sigma_j j_k = \int d\sigma_s j^s g_{ik} + \int d\tau_s x_k \partial_{ij_s},$$

или

$$\int d\mathbf{V} \mathbf{j} = \int d\mathbf{V} \mathbf{x} \partial_0 j_0(\mathbf{x}).$$

Если принять во внимание временную зависимость для тока перехода, то можно найти полную вероятность перехода за единицу времени

$$\omega = 2\alpha\omega^3 |(Xn)|^2, \quad \text{где } X = \int d\mathbf{V} \mathbf{x} j_0(\mathbf{x}).$$

Эти формулы подтверждают элементарные аргументы введения.

24. Если  $p$  и  $p'$  — векторы энергии-импульса электрона и позитрона, то после суммирования по поляризациям фотона, найдем сечение:

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{((pp')^2 - 1)^{1/2}} \int dk \delta(k^2) \delta((p + p' - k)^2) \times \\ \times \left[ \frac{(pk)}{(p'k)} + \frac{(p'k)}{(pk)} + 2 \left( \frac{1}{(pk)} + \frac{1}{(p'k)} \right) - \left( \frac{(p + p', k)}{(pk)(p'k)} \right)^2 \right].$$

Для простоты положили здесь  $m=1$ . Обозначения те же, что использованы в (4.13). Обозначив

$$\beta^2 = (pp' - 1)(pp' + 1)^{-1},$$

можно записать сечение в виде

$$[\sigma = \pi \alpha^2 \frac{1 - \beta^2}{2\beta} \left[ 2(\beta^2 - 2) + \frac{3 - \beta^4}{\beta} \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right]].$$

При  $\beta < 1$  справедливо приближенное выражение  $\sigma = \pi \alpha^2 / \beta$ . Физический смысл  $\beta$  — скорость электрона в системе центра масс. Порядок величины сечения легко находится, как мы отметили во введении. Сечение равно вероятности одновременного прихода электрона и позитрона в одну и ту же точку, умноженной на вероятность излучения двух фотонов в единицу времени и объема начальных частиц

$$\frac{1}{m^3 V} \alpha \frac{am}{v} V = \left( \frac{\alpha}{m} \right)^2 / v.$$

25.

$$\sigma = \frac{e^4}{16} ((pq)^2 - 1)^{-1/2} \int \frac{dp'}{(2\pi)^2} \delta(p'^2 - 1) \delta(q'^2 - 1) \times \\ \times \{ (p - p')^{-4} \text{Sp}((\hat{p} + 1)\gamma_n (\hat{p}' + 1)\gamma_m) \text{Sp}((\hat{q} + 1)\gamma^n (\hat{q}' + 1)\gamma^m) + \\ + (p - q')^{-4} \text{Sp}((\hat{p} + 1)\gamma_n (\hat{q}' + 1)\gamma_m) \text{Sp}((\hat{q} + 1)\gamma^n (\hat{p}' + 1)\gamma^m) - \\ - 2(p - p')^{-2} (p - q')^{-2} \text{Sp}(\hat{p} + 1)\gamma_n (\hat{p}' + 1)\gamma^m (\hat{q} + 1)\gamma^n (\hat{q}' + 1)\gamma_m \}.$$

Здесь мы положили  $m=1$  и ввели обозначение  $q' = p + q - p'$ . Используя соотношения  $pp' = qq'$ ,  $pq = p'q'$ ,  $pq' = qp'$ , мы приведем скобки к виду:

$$2(p - p')^{-4} [(pq)^2 - 2pq + (p'q)^2 + 2pq] + \\ + 2(p - q')^{-4} [(pq)^2 - 2pq + (pp')^2 + 2pp'] - \\ - 4(p - p')^{-2} (q - q')^2 [(pq)^2 - 2pq].$$

Вводя квадрат импульса в системе центра масс  $u = pq - 1$ , а также замечая (для определения сечения в этой системе), что угол рассеяния определяется соотношением  $(p - p')^2 = -2u \sin^2 \theta/2$ , мы находим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2(u+1)^2}{2u^2(u+2)} \left\{ \sin^{-4}(\theta/2) + \cos^{-4}(\theta/2) - \right. \\ \left. - \sin^{-2}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^{-2}\left(\frac{\theta}{2}\right) + u^2(1+u)^{-2} \times \right. \\ \left. \times (1 + \sin^{-2}(\theta/2) \cos^{-2}(\theta/2)) \right\}.$$

26. Если фотон не имеет импульса, диаграмма четвертого порядка дает член вида

$$\int \frac{dp}{(p^2 - m^2)^4} \text{Sp} (\hat{p}\hat{\gamma}_a \hat{p}\hat{\gamma}_b \hat{p}\hat{\gamma}_c \hat{p}\hat{\gamma}_d + \hat{p}\hat{\gamma}_a \hat{p}\hat{\gamma}_c \hat{p}\hat{\gamma}_b \hat{p}\hat{\gamma}_d + \hat{p}\hat{\gamma}_a \hat{p}\hat{\gamma}_b \hat{p}\hat{\gamma}_d \hat{p}\hat{\gamma}_c).$$

Так как знаменатель зависит лишь от  $p^2$ , мы можем заменить  $p_i p_k p_m p_n$  на

$$\frac{p^4}{24} (\delta_{ik} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kn}).$$

Шпур может быть взят с помощью (Д1.18), и для первого слагаемого под интегралом он дает

$$\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ad} \delta_{bc} - 2\delta_{ac} \delta_{bd}.$$

Если мы сложим соответствующие вклады от остальных членов, то сразу же получим нуль.



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амплитуда состояния (см. вектор состояний)  
 Аннигиляция электрон-позитронных пар (см. Пар аннигиляция)  
 Аннигиляция позитрония (см. Позитроний)  
 Антиккоммутационные соотношения 10  
 Борново приближение 112  
 Бозе — Эйнштейна статистика 71  
 Вакуум, определение 53  
   — фотонного поля 66  
 Вакуума поляризация 121  
 Вакуумные флуктуации 85  
 Вектор-потенциал электромагнитного поля 13  
 Вектор состояния 38  
 Векторное пространство, линейное 38  
 Виртуальные кванты 25  
 Взаимодействия оператор 136  
 Внешнее поле 112  
 Время жизни 20  
   — — позитрония 21  
 Время собственное 13  
 Времени отражение 44  
 Гамильтониан в механике 37  
 Гаусса теорема 12  
 Гейзенбергово представление 38  
 Гильбертово пространство 9  
 Главное значение 106  
 Градиентное преобразование 14  
 Графы в импульсном пространстве 147  
   — примитивные 188  
   — рассеяния 147  
 Грина функция 203  
 Даламбера оператор 11  
 Дарвинов член 18  
 Действия интеграл 37  
 Действия принцип 43  
 Дельта-функция 9  
 Дирака матрицы 10  
   — поле 14  
   — уравнение 68  
   — — проблема граничных условий 208  
   — — релятивистская инвариантность 200  
 Дополнительное условие 65  
 Допплер-эффект (см. Уширение спектральных линий)  
 Дрожание (Zitterbewegung) 18  
 Заряда перенормировка (см. Перенормировка)  
 Зарядовое сопряжение (см. также Инвариантность) 50  
 Законы сохранения 47  
   — — заряда 48  
   — — четности 80  
 Замкнутая петля 189  
 Знаковая функция 9  
 Излучение тормозное (Bremsstrahlung) 24  
 Излучения поле 30  
 Излучения поля операторы 64  
   — — продольные компоненты 65  
 Измеримость полей 128  
 Измерение плотности тока 132  
 Импульса операторы 46  
   — — для взаимодействующих полей 140  
   — — для поля излучения 110  
 Инвариантные свойства полей относительно градиентного преобразования 65  
   — — — — зарядового сопряжения 50  
   — — — — калибровочного преобразования 50  
   — — — — лоренцевых преобразований 45  
   — — — — отражения времени 44  
   — — — — пространственного отражения 80  
 Инвариантные функции 203  
   — — интегральное представление 203  
   — — неоднородные 203  
   — — однородные 60  
 Индефинитная метрика 172  
 Инфинитезимальные преобразования 49  
 Инфракрасные расходимости (см. Расходимости)  
 Источника функция 93  
 Калибровочное преобразование 14  
   — — инфинитезимальное 66  
 Каоиническое преобразование 46  
 Канонический тензор энергии-импульса (см. Энергии-импульса тензор)  
 Квантование поля 56  
 Классическая теория точечного заряда 28

- Клейна — Гордона уравнение 59  
 Клейна — Нишины формула 153  
 Клейна парадокс 127  
 Коммутационные соотношения 10  
 Комптонова длина волны электро-  
на 16  
 Комптон-эффект 22  
 Кулоново взаимодействие 156  
 Кулоново рассеяние 16  
 — — радиационные поправки 184  
 Лагранжиан 41  
 — взаимодействующих полей 93  
 — электрон-позитронного поля 68  
 — мезонного поля 59  
 — поля излучения 64  
 Лармора формула 19  
 Локализуемость 128  
 Лоренца группа 52  
 Лоренца преобразования 45  
 — — инфинитезимальные 45  
 Лоренца условие 65  
 Лэмбов сдвиг 27  
 Магнитный момент электрона 88  
 Максвелла уравнения 28  
 Массы электромагнитная 36  
 — механическая 36  
 — наблюдаемая 36  
 Масса перенормировка (см. Пере-  
нормировка)  
 Математическое ожидание 84  
 Матрица рассеяния (см. S-матрица)  
 Мёллерово рассеяние 156  
 Метрический тензор 13  
 Наблюдаемая 38  
 Нелокальные теории поля 57  
 Неопределенностей соотношение 16  
 Непрерывности уравнение 28  
 Нормаль к поверхности 13  
 Нулевые флуктуации 25  
 Нулевая энергия 26  
 Одночастичная теория 199  
 Оператор уничтожения 54  
 — рождения 54  
 — плотности тока 49  
 — числа электронов 70  
 — эрмитов 38  
 — числа мезонов 53  
 — унитарный 39  
 — хронологического произведения 13  
 Падающие поля (ip-поля) 30  
 Пар аннигиляция однофотонная 20  
 — — двухфотонная 21  
 — — рождение во внешнем поле 112  
 — — — в фотои-фотоиных столкно-  
вениях 155  
 — — — спонтанное 18  
 Переменные динамические 47  
 — поля 42  
 Перенормировка заряда 126  
 Перенормировка массы 161  
 — поля 164  
 — S-матрицы 187  
 Перехода вероятность 95  
 $\pi$ -мезон 63  
 Плотность заряда-тока (см. Тока  
плотность)  
 Поверхностный член 44  
 Позитроний 20  
 — время жизни 80  
 — правила отбора 80  
 — пространственная четность 82  
 — двухфотонная аннигиляция 82  
 Позитрон-позитронное рассеяние (см.  
Мёллерово рассеяние)  
 Позитроны 58  
 Поля уравнения (см. Эйлера урав-  
нения)  
 — измеримость (см. Измеримость)  
 — переменные 42  
 — вариации 43  
 Поляризация круговая 56  
 Поперечное сечение 149  
 — — дифференциальное 149  
 Постоянная тонкой структуры 13  
 Преобразования матрица 39  
 Производящая функция инфинитези-  
мальных градиентных  
преобразований 40  
 — — инфинитезимальных лоренце-  
вых преобразова-  
ний 45  
 Пространственное отражение 80  
 Пространственноподобная поверх-  
ность 12  
 Правила отбора при распаде  $\pi$ -мезо-  
на 80  
 — — при распаде позитрония 80  
 Пуассона распределение 90  
 Пуассона скобки 41  
 Радиационные потери 110  
 Радиационные поправки 174  
 — — к рассеянию 184  
 Разложение полей по плоским вол-  
нам векторного 56  
 — — — — скалярного 56  
 — — — — спинорного 56  
 Распространения функции причинный  
характер 144  
 — — точные 156  
 — — электрона во внешнем поле 117  
 Рассеяние света на свете (см. Фо-  
тон-фотонное рассея-  
ние)  
 Расходимости классификация 189  
 — степень 189  
 — инфракрасные 25  
 — примитивные 188  
 Резерфордovo рассеяние 23



- Рождения оператор (см. Оператор)  
 Рэля-Джинса формула 25  
 Скалярное поле 13  
 S-матрица определение 98  
 — вычисление 99  
 — инвариантность 141  
 — физический смысл 98  
 — знак и численные множители 117  
 — унитарность 121  
 — вакуумные матричные элемен-  
 ты 117  
 Собственные натяжения электро-  
 на 173  
 Собственная сила электрона 34  
 Собственная энергия 163  
 — — электрона 173  
 Сопряженный спинор 199  
 Состояние одноэлектронное 74  
 — одномезонное 72  
 — одифотонное 74  
 — двухэлектронное 77  
 — двухмезонное 76  
 — двухфотонное 77  
 Ступенчатая функция 9  
 Тензор электромагнитного поля 13  
 Томсона формула 187  
 Тонкая структура 17  
 Ток орбитальный 88  
 — спиновый 87  
 — частиц 29  
 Тока измерение 134  
 — оператор 49  
 — плотность 61  
 Тройник (*trident*) 116  
 Унитарный оператор 39  
 Уничтожения оператор (см. Опе-  
 ратор)  
 Упорядоченное произведение 62  
 — — для антикоммутирующих по-  
 лей 69  
 Уходящие поля (*out*-поля) 30  
 Уширение спектральных линий 17  
 Ферми — Дирака статистика 71  
 Флуктуация заряда 123  
 — тока 85  
 — влияние на энергетические уров-  
 ни 27  
 Фотона масса 124  
 Фотона рассеяние кулоновым по-  
 лем 190  
 Фотон-фотонное рассеяние 186  
 Функциональная производная 122  
 Хронологическое произведение 95  
 Четности оператор (см. Инвариант-  
 ность)  
 Числа частиц оператор (см. Опе-  
 ратор)  
 Шредингера уравнение 41  
 Эйлера уравнения 44  
 — — для диракова поля 68  
 — — — скалярного поля 59  
 — — — электромагнитного поля 65  
 Электрон классическая точка 26  
 — классический радиус 23  
 — магнитный момент 88  
 — рассеяние 156  
 Электрона линия 150  
 — масса 36  
 — собственная энергия 173  
 — собственные натяжения 192  
 — траектория 18  
 Электрон-позитронное рассеяние 157  
 Энергии-импульса вектор 13  
 — — тензор взаимодействующих по-  
 лей 137  
 — — — квантованного поля 46  
 — — — классического поля 28  
 — — — частиц 29  
 Эрмитово сопряжение 10  
 Эрмитов оператор (см. Оператор)  
 Эффективный заряд ядра 16

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие автора к немецкому изданию . . . . .	5
Предисловие автора к английскому изданию . . . . .	7
Предисловие редактора к русскому изданию . . . . .	8
Обозначения . . . . .	9

### Глава I. Общее введение

§ 1. Единицы и порядки величин . . . . .	15
А. Структура атомов . . . . .	15
Б. Излучение фотонов . . . . .	19
В. Рассеяние частиц . . . . .	22
Г. Квантовые эффекты электромагнитного поля . . . . .	24
§§ 2. Классическая электродинамика . . . . .	28
§ 3. Общий формализм квантовой теории поля . . . . .	38

### Глава II. Свободные поля

§§ 4. Общая дискуссия . . . . .	53
§ 5. Частные случаи полей . . . . .	59
§§ 6. Матричные элементы . . . . .	72
§ 7. Флуктуационные явления . . . . .	83

### Глава III. Поля с внешними источниками

§ 8. Общие формулы . . . . .	93
§ 9. Излучение света . . . . .	99
§§ 10. Частица Дирака во внешнем электромагнитном поле . . . . .	111
§ 11. Ограничения измеримости . . . . .	128

### Глава IV. Взаимодействующие поля

§ 12. Общие соображения . . . . .	136
§ 13. Процессы рассеяния . . . . .	146
§ 14. Теория перенормировок . . . . .	157
§ 15. Поправки высших порядков . . . . .	174
§ 16. Перспективы . . . . .	188
Дополнение I . . . . .	199
Дополнение II . . . . .	203
Задачи . . . . .	212
Решения . . . . .	214
Предметный указатель . . . . .	224