

*В. В. Толмачев*

---

Квази-  
классическое  
приближение  
в квантовой  
механике

---

*Издательство  
Московского  
университета  
1980*

*Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
Московского университета*

Рецензенты:

проф. *И. И. Ольховский*;  
проф. *И. П. Базаров*

**Толмачев В. В.**

Квазиклассическое приближение в квантовой механике. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. — 187 с. 36 ил. Библ. 6 назв.

Излагаются важные применения квазиклассического приближения к теории квантовомеханического углового момента. Выводятся удобные формулы для сферических функций,  $D$ -функций, коэффициентов Клебша — Гордона или  $3j$ - и  $6j$ -символов Вигнера. В приложении описывается вывод формул «сшивания» в одномерном классическом приближении. Кроме того, решаются важные задачи о потенциальной яме, потенциальном барьере, двух потенциальных ямах, одномерном периодическом потенциале.

Книга предназначена студентам и аспирантам, углубленно изучающим курс квантовой механики.

Т  $\frac{20402 - 149}{677(02) - 80}$  95—80 1704020000

© Издательство Московского университета, 1980 г.

Настоящее пособие предназначено прежде всего студентам и всем тем, кто желает научиться пользоваться квазиклассическим приближением в квантовой механике. Подробно, со всеми необходимыми деталями, излагается основанный на квазиклассическом приближении вывод приближенных асимптотических формул для сферических функций  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , функций волчка  $D_{mm'}^l(\varphi, \theta, \psi)$ ,  $3j$ -символов Вигнера  $\begin{pmatrix} l_1 l_2 l_3 \\ m_1 m_2 m_3 \end{pmatrix}$  и  $6j$ -символов Вигнера  $\left\{ \begin{matrix} j_1 j_2 j_3 \\ l_1 l_2 l_3 \end{matrix} \right\}$ . Изложение, как представляется автору, доступно студентам третьего и четвертого курсов физических и механико-математических специальностей, но оно будет также полезно и студентам физико-химического профиля. В приложении к пособию описывается вывод известных формул «сшивания» в одномерной квазиклассике, используемых в основном тексте пособия, а также решается серия важных квазиклассических задач на одномерное уравнение Шредингера. В этих задачах проиллюстрированы практически все основные нетривиальные квантовомеханические эффекты.

Классическое приближение важно для многих приложений квантовой механики. Оно с успехом было использовано на заре квантовой теории при исследовании  $\alpha$ -распадов ядер и в теории потенциального и непотенциального рассеяний (теория Зинера—Штюкельберга—Ландау). В настоящее время это приближение успешно применяют в теории реакционных и нерекционных эффективных сечений в атомно-молекулярном рассеянии и в рассеянии элементарных частиц.

Всегда надо помнить, оценивая значение квазиклассического приближения в теоретическом образовании студентов, что оно играет исключительно важную роль в понимании самой сути квантовой теории. Поэтому, как надеется автор, данное учебное пособие окажет пользу всем, кто желает глубже взглянуть в математическую структуру современной квантовой теории.

Квазиклассическое приближение показывает, с каким трудом квантовая механика переходит в классическую. Строя соответствующие аналоги известных задач классической теоретической механики и применяя к ним квазиклассическое приближение, мы получаем возможность выводить новые результаты в квантовой теории и получать новые полезные точные формулы в самой теоретической механике. На

последнее обстоятельство, как представляется, еще не обратили должного внимания, хотя несомненно, что квантовая механика не только способствует более глубокому пониманию чисто классической механической динамической теории, но и представляет собой мощный математический инструмент для решения трудных и пока нерешенных проблем современной классической теоретической механики.

В отмеченном направлении исследований сделано, к сожалению, еще очень мало. Механики не знают квантовой механики, а физики не интересуются теоретической механикой. И вместе с тем в классической теоретической механике имеется целый ряд прекрасных тщательно разработанных задач (например, в небесной механике), имеющих общие точные решения или достаточно полно изученных. Многие из них все еще ждут «переложения» на язык квантовой теории.

Прежде всего мы имеем здесь в виду задачу о движении произвольного абсолютно твердого тела с одной закрепленной точкой (случаи Эйлера—Пуансо и Пуассона). Фактически в настоящее время в классической механике квантовомеханически осознаны лишь самые простые, точно решаемые одномерные задачи и задача Кеплера.

В данном пособии в качестве основной выбрана задача о движении симметричного волчка, закрепленного в одной точке, с двумя равными моментами инерции  $A=B \neq C$ . Квазиклассическая теория этой задачи связана с проблемой построения удобных асимптотических формул для  $D$ -функций, а также для  $3j$ - и  $6j$ -символов Вигнера в случае больших значений квантовых чисел моментов и проекций моментов. Автору представляется, что чисто аналитические трудности, связанные с необходимостью выполнить довольно громоздкие математические вычисления и исследования, объясняют, почему указанные задачи окончательно были изучены только в самое недавнее время (см., впрочем, работы Бруссара и Толуека, Вигнера, Эдмондса, Понцано и Редже).

Следует особо отметить непосредственное отношение излагаемых в данном учебном пособии результатов к математической теории ортогональных многочленов, в которой, как представляется, еще не достигнута та степень ясности, которая раскрывается перед нами в излагаемых здесь квазиклассических квантовомеханических задачах, в частности в теории  $D$ -функций, являющихся по существу ортогональными полиномами Якоби.

Основным используемым здесь математическим аппаратом служит известный метод стационарной фазы. Он прекрасно «работает», а получаемые с его помощью чисто математические результаты не только ценны сами по себе, но и показывают, что, по-видимому, кроме обычных представлений рассматриваемой здесь группы вращений в трехмер-



ном пространстве, задаваемых функциями  $D_{mm}^l(\varphi, \theta, \psi)$ , существуют также еще и особые, неоткрытые пока и неисследованные «континуальные» представления, носителями которых являются в каком-то смысле «пределы» очень быстро осциллирующих функций в окрестности каждой точки отрезка  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Пополнение обычных математических функциональных пространств такого рода новыми элементами (наряду с добавленными в них функциями типа  $\delta$ -функций) представляется настоятельно необходимым.

Основной текст снабжен приложением, посвященным одномерной квазиклассике. В нем излагается простой единый метод решения различных квазиклассических задач для одномерного уравнения Шредингера. Этот метод основан на обычных формулах «сшивания» квазиклассических кусков решений, которые выводятся подробно в задачах 1 и 2. В задаче 3 исследуется простая потенциальная яма. Задача 4 посвящена коэффициенту прохождения через потенциальный барьер. В задачах 5 и 6 иллюстрируется проблема так называемого квазистационарного уровня, погруженного в непрерывный спектр. Вычислена ширина этого уровня и показано, что коэффициент прозрачности потенциального поля  $D(E)$  при энергиях, соответствующих энергиям квазистационарных уровней, имеет острые максимумы. Наконец, в задаче 7 изучается двойная потенциальная яма, а в задаче 8, специально придуманной автором для этой серии задач,— яма, состоящая из  $N$  потенциальных ям.

Серия разобранных в приложении задач позволит неподготовленному читателю или студенту очень быстро войти в суть проблем современного квантового классического приближения.

Материал, помещенный автором в приложении, был написан еще в 1952 г. и впервые опубликован (к сожалению, с сокращениями) в известном задачнике по квантовой механике В. Д. Кривченкова. В настоящем учебном пособии этот материал в полном виде публикуется впервые.

# КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$Y_{lm}(\theta, \varphi)$

1. Напомним сначала определение сферических функций  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  как решений системы дифференциальных уравнений

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + l(l+1) \right] Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0, \quad (1.1)$$

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) = m Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (1.2)$$

которые нормированы на единицу

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) = 1 \quad (1.3)$$

и удовлетворяют дополнительным условиям

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \\ = \sqrt{(l-m)(l+m+1)} Y_{l,m+1}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \\ = \sqrt{(l+m)(l-m+1)} Y_{l,m-1}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta), \quad (1.6)$$

носящим название условий Кондона — Шортли.

Сферические функции можно представить в виде произведений двух функций: одной, зависящей от  $\varphi$ , и другой, зависящей от  $\theta$ , т. е.

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \Theta_{lm}(\theta), \quad (1.7)$$

где  $m$  пробегает целочисленные значения, а функции  $\Theta_{lm}(\theta)$  определяются следующим образом. Они являются решениями дифференциального уравнения

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + l(l+1) \right] \Theta_{lm}(\theta) = 0, \quad (1.8)$$

нормированы на единицу

$$\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \Theta_{lm}^2(\theta) = 1 \quad (1.9)$$

и удовлетворяют условиям

$$\left( \frac{d}{d\theta} - m \operatorname{ctg} \theta \right) \Theta_{lm}(\theta) = \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \Theta_{l,m+1}(\theta), \quad (1.10)$$

$$\left( -\frac{d}{d\theta} - m \operatorname{ctg} \theta \right) \Theta_{lm}(\theta) = \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \Theta_{l,m-1}(\theta), \quad (1.11)$$

$$\Theta_{l0}(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(\cos \theta). \quad (1.12)$$

2. Приступим теперь к выводу квазиклассических формул для функций  $\Theta_{lm}(\theta)$ , т. е. приближенных асимптотических формул для них, справедливых при больших значениях индексов  $l$  и  $m$ . Для этого займемся приближенным решением следующей задачи на собственные функции и собственные значения. Требуется найти собственные функции, т. е. регулярные решения дифференциального уравнения

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \varepsilon \right] \Theta(\theta) = 0, \quad (1.13)$$

соответствующие определенным значениям параметра  $\varepsilon$ , т. е. его собственным значениям, которые надо находить из решения этой задачи. Функция  $\Theta(\theta)$  должна быть регулярной на всем отрезке  $0 \leq \theta \leq \pi$  и, в частности, ограниченной при  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$ .

Будем искать решение приведенного дифференциального уравнения в виде

$$\Theta(\theta) = e^{i\sigma(\theta)}, \quad (1.14)$$

где новую неизвестную функцию  $\sigma(\theta)$  будем искать в виде разложения

$$\sigma(\theta) = \sigma_0(\theta) + i\sigma_1(\theta) + \dots, \quad (1.15)$$

соответствующего рассматриваемому нами приближению, которое заключается в том, что функцию  $\sigma(\theta)$  считаем очень большой величиной.

Делая замену неизвестной функции (1.14) в уравнении (1.13), приходим к дифференциальному уравнению

$$-\left( \frac{d\sigma}{d\theta} \right)^2 + i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\sigma}{d\theta} + i \frac{d^2\sigma}{d\theta^2} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \varepsilon = 0, \quad (1.16)$$

в котором первое и два последних слагаемых будем считать главными в нашем приближении, а второе и третье слагаемые — как бы сопровождающимися малым параметром. Тогда в нулевом приближении получим уравнение

$$-\left(\frac{d\sigma_0}{d\theta}\right)^2 - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + \varepsilon = 0, \quad (1.17)$$

а в первом приближении — уравнение

$$-2 \frac{d\sigma_0}{d\theta} \frac{d\sigma_1}{d\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\sigma_0}{d\theta} + \frac{d^2\sigma_0}{d\theta^2} = 0. \quad (1.18)$$

Введем очень важную для всего дальнейшего функцию

$$F(\theta) \equiv \varepsilon - \frac{m^2}{\sin^2\theta},$$

которая при  $\theta=0, \pi$  обращается в  $-\infty$ . При  $\varepsilon \leq m^2$  она принимает только отрицательные или равные нулю значения, а при  $\varepsilon > m^2$  может иметь еще область строго положитель-

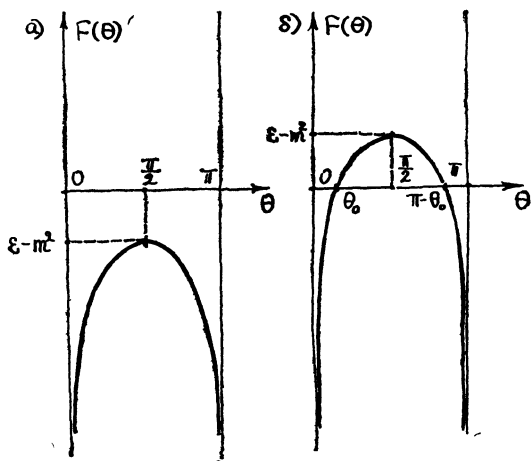


Рис. 1. График функции  $F(\theta)$  в зависимости от  $\theta$ : а — случай  $\varepsilon - m^2 \leq 0$ ; б — случай  $\varepsilon - m^2 > 0$

ных значений, симметрично расположенную относительно точки  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (рис. 1). Область положительных значений простирается от  $\theta_0$  до  $\pi - \theta_0$ , где  $\theta_0$  определяется из условия

$$\sin\theta_0 = \frac{|m|}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad 0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}. \quad (1.19)$$

Рассмотрим уравнение нулевого приближения (1.17). На любом отрезке  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , где функция  $F(\theta)$  принимает положительные значения, имеем

$$\frac{d\sigma_0}{d\theta} = \pm p(\theta),$$

где  $p(\theta) = \sqrt{F(\theta)}$  (имеется в виду арифметическое значение корня). Так что

$$\sigma_0(\theta) = \pm \int^{\theta} p(\theta) d\theta + \text{const}; \quad (1.20)$$

здесь интегралом обозначена любая первообразная функция для функции  $p(\theta)$ . На произвольном отрезке  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , где функция  $F(\theta)$  принимает отрицательные значения, имеем

$$\frac{d\sigma_0}{d\theta} = \pm i |p(\theta)|,$$

где  $|p(\theta)| = \sqrt{-F(\theta)}$  (арифметическое значение корня). Так что

$$\sigma_0(\theta) = \pm i \int^{\theta} |p(\theta)| d\theta + \text{const}; \quad (1.21)$$

здесь интеграл обозначает любую первообразную функцию для функции  $|p(\theta)|$ .

Рассмотрим теперь уравнение первого приближения (1.18). Подставим в это уравнение функции (1.20), (1.21). Тогда получим

$$\mp 2p(\theta) \frac{d\sigma_1}{d\theta} \pm \frac{\cos \theta}{\sin \theta} p(\theta) \pm \frac{dp(\theta)}{d\theta} = 0,$$

$$\mp 2i |p(\theta)| \frac{d\sigma_1}{d\theta} \pm i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} |p(\theta)| \pm i \frac{d|p(\theta)|}{d\theta} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d\sigma_1}{d\theta} = \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} + \frac{1}{2p(\theta)} \frac{dp(\theta)}{d\theta},$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\theta} = \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} + \frac{1}{2|p(\theta)|} \frac{d|p(\theta)|}{d\theta}.$$

Таким образом,

$$\sigma_1(\theta) = \ln \sqrt{\sin \theta p(\theta)} + \text{const}, \quad (1.22)$$

$$\sigma_1(\theta) = \ln \sqrt{\sin \theta |p(\theta)|} + \text{const}. \quad (1.23)$$

Из (1.20), (1.22) и (1.21), (1.23) соответственно имеем окончательные приближенные формулы

$$\sigma(\theta) = \pm i \int^{\theta} p(\theta) d\theta - \ln \sqrt{\sin \theta p(\theta)} + \text{const}, \quad (1.24)$$

$$\sigma(\theta) = \mp \int^{\theta} |p(\theta)| d\theta - \ln \sqrt{\sin \theta |p(\theta)|} + \text{const}, \quad (1.25)$$

а следовательно, на любом отрезке  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , где функция  $F(\theta)$  положительна, приближенная формула для любого решения уравнения (1.13) имеет вид

$$\Theta(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\sin \theta p(\theta)}} e^{i \int^{\theta} p(\theta) d\theta} + \frac{C_2}{\sqrt{\sin \theta p(\theta)}} e^{-i \int^{\theta} p(\theta) d\theta} \quad (1.26)$$

и на любом отрезке  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , где функция  $F(\theta)$  отрицательна, она имеет вид

$$\Theta(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{\int^{\theta} |p(\theta)| d\theta} + \frac{C_2}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{-\int^{\theta} |p(\theta)| d\theta}; \quad (1.27)$$

здесь  $C_1, C_2$  — совершенно произвольные постоянные.

Формулы (1.26), (1.27) представляют произвольное решение уравнения (1.13) на отдельных отрезках соответствующего типа. Нам же нужно знать регулярное решение  $\Theta(\theta)$  на всем отрезке  $0 \leq \theta \leq \pi$  и поэтому надо согласовывать, или «сшивать», формулы (1.26), (1.27), имеющиеся на разных отрезках. Этим мы сейчас и займемся.

Рассмотрим сперва случай  $\varepsilon > m^2$ , когда отрезок  $0 \leq \theta \leq \pi$  естественным образом распадается на следующие три:  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ ,  $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$ ,  $\pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi$ . На крайних этих отрезках функция  $F(\theta)$  отрицательна, а на среднем она положительна.

На отрезке  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  искомое регулярное собственное решение может быть представлено формулой (1.27):

$$\Theta(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{\int_{\theta_0}^{\theta} |p(\theta)| d\theta} + \frac{C_2}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{-\int_{\theta_0}^{\theta} |p(\theta)| d\theta}.$$

Константы  $C_1$  и  $C_2$  мы должны выбрать вполне определенным образом. Чтобы произвести этот выбор, заметим, что согласно своему определению функция  $|p(\theta)|$  равна

$$|p(\theta)| = \sqrt{\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \varepsilon}, \quad (1.28)$$

откуда непосредственно следует, что при  $\theta \cong 0$

$$|p(\theta)| \cong \frac{|m|}{\theta}.$$

Таким образом, при  $\theta \cong 0$  имеем

$$\int_{\theta_0}^{\theta} |p(\theta)| d\theta \cong |m| \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = |m| \ln \theta - |m| \ln \theta_0,$$

а поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{\int_{\theta_0}^{\theta} |p(\theta)| d\theta} \cong \frac{1}{\sqrt{|m|}} \left( \frac{\theta}{\theta_0} \right)^{|m|} \text{ при } \theta \cong 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{-\int_{\theta_0}^{\theta} |p(\theta)| d\theta} \cong \frac{1}{\sqrt{|m|}} \left( \frac{\theta_0}{\theta} \right)^{|m|} \text{ при } \theta \cong 0.$$

Отметим, что  $\sin \theta |p(\theta)| \cong |m|$  при  $\theta \cong 0$ . Из приведенных формул видим, что для регулярного при  $\theta \cong 0$  решения должно обязательно выполняться условие  $C_2 = 0$ . Обозначая  $C_1$  просто через  $C$ , получаем, таким образом, следующую формулу для квазиклассической собственной функции  $\Theta(\theta)$  на отрезке  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ :

$$\Theta(\theta) = \frac{C}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{\int_{\theta_0}^{\theta} |p(\theta)| d\theta}, \quad (1.29)$$

причем для нее справедлива приближенная формула

$$\Theta(\theta) \cong \frac{C}{\sqrt{|m|}} \left( \frac{\theta}{\theta_0} \right)^{|m|} \text{ при } \theta \cong 0. \quad (1.30)$$

Найдем теперь формулу, которой представляется рассматриваемое регулярное решение  $\Theta(\theta)$  на следующем отрезке, т. е. на отрезке  $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$ . Для этого надо взять формулу (1.26) и входящие в нее произвольные константы  $C_1$  и  $C_2$  выбрать с помощью известных квазиклассических формул сшивания решений (см. задачи 1 и 2 в прил.). Решение на отрезке  $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$  должно согласовываться с решением (1.29) на отрезке  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ . Применяя указанные квазиклассические формулы сшивания, получим искомую формулу

$$\Theta(\theta) = \frac{Ce^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin \theta p(\theta)}} e^{i \int_{\theta_0}^{\theta} p(\theta) d\theta} + \frac{Ce^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin \theta p(\theta)}} e^{-i \int_{\theta_0}^{\theta} p(\theta) d\theta} =$$

$$= \frac{2C}{\sqrt{\sin \theta \rho(\theta)}} \cos \left[ \int_{\theta_0}^{\theta} \rho(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right], \quad (1.31)$$

где  $C$  — та же константа, какая входит в формулу (1.29). В (1.31) функция  $\rho(\theta)$ , по определению, равна

$$\rho(\theta) = \sqrt{\varepsilon - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}}. \quad (1.32)$$

Найдем, наконец, выражение, представляющее рассматриваемое решение  $\Theta(\theta)$  на отрезке  $\pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi$ . Для этого надо взять формулу (1.31) и применить к ней квазиклассические формулы сшивания. Тогда получим, что при  $\pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi$

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) = C \cos \left[ \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} \rho(\theta) d\theta - \frac{\pi}{2} \right] \frac{1}{\sqrt{\sin \theta |\rho(\theta)|}} e^{-\int_{\pi - \theta_0}^{\theta} |\rho(\theta)| d\theta} + \\ + 2C \cos \left[ \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} \rho(\theta) d\theta \right] \frac{1}{\sqrt{\sin \theta |\rho(\theta)|}} e^{\int_{\pi - \theta_0}^{\theta} |\rho(\theta)| d\theta}. \end{aligned}$$

У нас есть еще условие регулярности решения при  $\theta \cong \pi$ , которое пока что никак не было использовано. Приведенная функция  $\Theta(\theta)$  при любом  $\varepsilon$ , вообще говоря, не удовлетворяет этому условию. Действительно, при  $\theta \cong \pi$

$$|\rho(\theta)| = \sqrt{\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \varepsilon} \cong \frac{|m|}{\pi - \theta},$$

и поэтому при  $\theta \cong \pi$

$$\int_{\pi - \theta_0}^{\theta} |\rho(\theta)| d\theta \cong |m| \int_{\pi - \theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\pi - \theta} = -|m| \ln(\pi - \theta) + |m| \ln \theta_0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{\sin \theta |\rho(\theta)|}} e^{-\int_{\pi - \theta_0}^{\theta} |\rho(\theta)| d\theta} \cong \frac{1}{\sqrt{|m|}} \frac{\theta_0^{|m|}}{(\pi - \theta)^{|m|}} \text{ при } \theta \cong \pi,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sin \theta |\rho(\theta)|}} e^{\int_{\pi - \theta_0}^{\theta} |\rho(\theta)| d\theta} \cong \frac{1}{\sqrt{|m|}} \frac{\theta_0^{|m|}}{(\pi - \theta)^{|m|}} \text{ при } \theta \cong \pi.$$



Таким образом, второе слагаемое в приведенной формуле для  $\Theta(\theta)$  оказывается сингулярным при  $\theta \cong \pi$ . Чтобы получить регулярное решение, мы должны потребовать, чтобы коэффициент при этом втором слагаемом обращался в нуль, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} p(\theta) d\theta = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.33)$$

где  $n=0, 1, 2$  и т. д. Это условие позволяет находить собственные значения  $\varepsilon$ . Если  $\varepsilon$  таково, что удовлетворяет приведенному условию, то для него мы можем построить регулярное на всем отрезке  $0 \leq \theta \leq \pi$  решение  $\Theta(\theta)$ . Если  $\varepsilon$  не такое, то регулярного решения построить нельзя. Используя приведенное условие, получаем окончательно следующую формулу для рассматриваемого собственного решения  $\Theta(\theta)$  на отрезке  $\pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi$ :

$$\Theta(\theta) = \frac{C(-1)^n}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{-\int_{\pi-\theta_0}^{\theta} |p(\theta)| d\theta}, \quad (1.34)$$

причем для этой квазиклассической собственной функции справедлива приближенная формула

$$\Theta(\theta) \cong \frac{C(-1)^n}{\sqrt{|m|}} \frac{(\pi - \theta)^{|m|}}{\theta_0^{|m|}} \text{ при } \theta \cong \pi. \quad (1.35)$$

Пока мы рассмотрели случай  $\varepsilon > m^2$  и нашли для него соответствующие собственные функции и собственные значения. В случае  $\varepsilon \leq m^2$  никаких собственных функций и собственных значений нашей задачи нет. Действительно, при  $\varepsilon < m^2$  ограниченное регулярное (если  $\theta=0$ ) решение на всем отрезке  $0 \leq \theta \leq \pi$  будет даваться формулой (1.29), а согласно ей при  $\theta \cong \pi$

$$|p(\theta)| \cong \frac{|m|}{\pi - \theta},$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} |p(\theta)| d\theta \cong |m| \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\pi - \theta} = -|m| \ln(\pi - \theta) + |m| \ln(\pi - \theta_0),$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{\int_{\pi-\theta_0}^{\theta} |p(\theta)| d\theta} \cong \frac{1}{\sqrt{|m|}} \left( \frac{\pi - \theta_0}{\pi - \theta} \right)^{|m|},$$

т. е. решение (1.29) обращается в бесконечность при  $\theta = \pi$ . Напротив, если возьмем решение (1.34), регулярное при

$\theta = \pi$ , то получим, что оно при  $\theta = 0$  обращается в бесконечность.

Итак, окончательно построенная нами квазиклассическая собственная функция нашей задачи (1.13) имеет вид (см. (1.29), (1.31), (1.34)):

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{\int_0^\theta |p(\theta)| d\theta} & \text{при } 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \frac{2C}{\sqrt{\sin \theta p(\theta)}} \cos \left[ \int_{\theta_0}^\theta p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right] & \text{при } \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0, \\ \frac{C(-1)^n}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{-\int_{\pi-\theta_0}^\theta |p(\theta)| d\theta} & \text{при } \pi - \theta_0 < \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (1.36)$$

При этом собственное значение  $\varepsilon$  надо находить как решение следующего трансцендентного уравнения (см. (1.33)):

$$\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} p(\theta) d\theta = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.37)$$

здесь  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

3. Изучим теперь трансцендентное уравнение (1.37). В раскрытом виде оно имеет вид

$$\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \sqrt{\varepsilon - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}} d\theta = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

Переходя в интеграле к новой переменной интегрирования  $x = \cos \theta$ , получим

$$\sqrt{\varepsilon} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{\sqrt{(\cos \theta_0 - x)(x + \cos \theta_0)}}{1 - x^2} dx = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (1.38)$$

Чтобы преобразовать последний интеграл в контурный интеграл на комплексной плоскости, рассмотрим функцию комплексного переменного

$$f(z) = \frac{\sqrt{(\cos \theta_0 - z)(z + \cos \theta_0)}}{1 - z^2}.$$

Эта функция имеет две точки ветвления второго порядка при  $z = -\cos \theta_0$  и  $z = \cos \theta_0$ , а также два простых полюса

при  $z=-1$  и  $z=+1$  (рис. 2). Определим ветвь корня в выражении для  $f(z)$  следующим образом:

$$\sqrt{(\cos \theta_0 - z)(z + \cos \theta_0)} = \sqrt{|\cos \theta_0 - z| |z + \cos \theta_0|} e^{i \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}},$$

где  $\varphi_2 = \arg(\cos \theta_0 - z)$ ,  $\varphi_1 = \arg(z + \cos \theta_0)$ , причем угол  $\varphi_1$  отсчитывается против часовой стрелки и пробегает значения от 0 до  $2\pi$ , а угол  $\varphi_2$  отсчитывается по часовой стрелке от

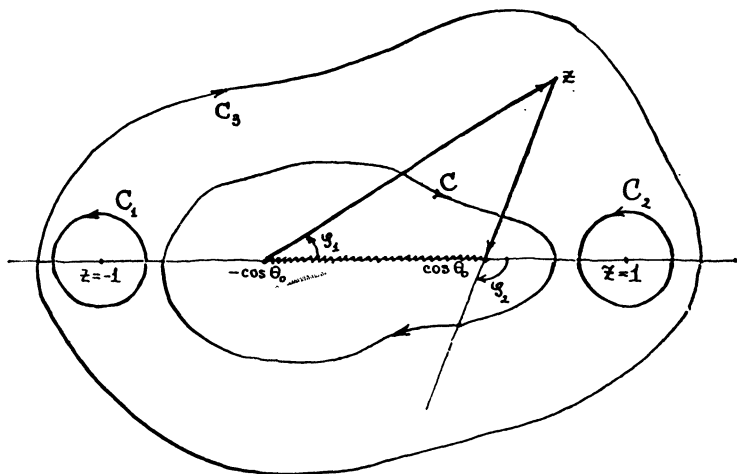


Рис. 2. Иллюстрация контурного интегрирования для условия для определения собственных значений

0 до  $\pi$  и против часовой стрелки от 0 до  $-\pi$ , так что он пробегает значения от  $-\pi$  до  $\pi$ . На верхнем берегу разреза, простирающегося от  $-\cos \theta_0$  до  $\cos \theta_0$ , имеем  $\varphi_1=0$ ,  $\varphi_2=0$  и, следовательно,

$$f(z) = \frac{\sqrt{(\cos \theta_0 - x)(x + \cos \theta_0)}}{1 - x^2};$$

на нижнем берегу этого разреза имеем  $\varphi_1=2\pi$ ,  $\varphi_2=0$  и поэтому

$$f(z) = - \frac{\sqrt{(\cos \theta_0 - x)(x + \cos \theta_0)}}{1 - x^2}.$$

Таким образом, получаем равенство

$$\sqrt{\varepsilon} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{\sqrt{(\cos \theta_0 - x)(x + \cos \theta_0)}}{1 - x^2} dx = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int_C f(z) dz, \quad (1.39)$$

где контур  $C$  окружает разрез от  $-\cos \theta_0$  до  $+\cos \theta_0$  в направлении по часовой стрелке (рис. 2). Интегрирование по

контур можно свести к интегрированию по контурам  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , причем контур  $C_3$  можно считать удаленным на бесконечность. Таким образом, имеем

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \left( \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} \right) f(z) dz. \quad (1.40)$$

Интегралы по  $C_1$  и  $C_2$  сводятся к вычетам функции  $f(z)$  в точках  $z=-1$  и  $z=+1$  соответственно.

Рассмотрим сначала интеграл по бесконечно удаленному контуру  $C_3$ . При  $|z| \rightarrow \infty$  мы имеем  $\varphi_1 \cong \varphi$ ,  $\varphi_2 \cong -(\pi - \varphi)$ , где  $\varphi = \arg z$ , причем  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Так что  $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi - \frac{\pi}{2}$  и, следовательно, при  $|z| \rightarrow \infty$

$$f(z) \cong \frac{|z| e^{i\varphi - i\frac{\pi}{2}}}{-z^2} = \frac{i}{z}. \quad (1.41)$$

Учитывая это приближенное соотношение, имеем

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int_{C_3} f(z) dz = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{i}{Re^{i\varphi}} Re^{i\varphi} i d\varphi = \pi \sqrt{\varepsilon}. \quad (1.42)$$

Контур  $C_3$  считаем окружностью бесконечно большого радиуса  $R$  с центром в точке  $z=0$ .

Рассмотрим теперь интегралы по контурам  $C_1$  и  $C_2$ . Для них имеем

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int_{C_1} f(z) dz = i\pi \sqrt{\varepsilon} \operatorname{Выч}_{z=-1} f(z),$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int_{C_2} f(z) dz = i\pi \sqrt{\varepsilon} \operatorname{Выч}_{z=+1} f(z);$$

направления обхода обоих контуров — против часовой стрелки. Найдем сначала  $\operatorname{Выч}_{z=-1} f(z)$ . Для точки  $z=-1$  имеем  $\varphi_1 = \pi$ ,  $\varphi_2 = 0$ . Следовательно,  $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{\pi}{2}$ . Таким образом, в окрестности точки  $z=-1$  можно написать

$$f(z) \cong \frac{\sqrt{(\cos \theta_0 + 1)(1 - \cos \theta_0)}}{2(z+1)} i = i \frac{\sin \theta_0}{2(z+1)} \text{ при } z \cong -1$$

и поэтому

$$\text{Выч}_{z=-1} f(z) = \frac{i}{2} \sin \theta_0, \quad (1.43)$$

Найдем далее  $\text{Выч}_{z=+1} f(z)$ . Для точки  $z=+1$  имеем  $\varphi_1=0$ ,  $\varphi_2=-\pi$  и поэтому  $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = -\frac{\pi}{2}$ . Таким образом, в окрестности точки  $z=1$  имеем

$$f(z) \cong \frac{\sqrt{(1 - \cos \theta_0)(1 + \cos \theta_0)}}{2(z-1)} i = i \frac{\sin \theta_0}{2(z-1)} \text{ при } z \cong 1.$$

Следовательно,

$$\text{Выч}_{z=+1} f(z) = \frac{i}{2} \sin \theta_0. \quad (1.44)$$

Учитывая полученные формулы и то, что  $\sin \theta_0 = |m|/\sqrt{\varepsilon^-}$ , окончательно получим

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^-}}{2} \int_{C_1} f(z) dz = \frac{\sqrt{\varepsilon^-}}{2} \int_{C_2} f(z) dz = -\frac{\pi}{2} \sin \theta_0 = -\frac{\pi}{2} |m|. \quad (1.45)$$

Собирая вместе все результаты, получаем для интеграла, входящего в трансцендентное уравнение (1.38), простое выражение

$$\sqrt{\varepsilon^-} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{\sqrt{(\cos \theta_0 - x)(x + \cos \theta_0)}}{1 - x^2} dx = \pi (\sqrt{\varepsilon^-} - |m|), \quad (1.46)$$

так что вместо (1.37) имеем простое уравнение

$$\pi (\sqrt{\varepsilon^-} - |m|) = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

служащее для определения собственных значений  $\varepsilon$ , из которого сразу имеем

$$\varepsilon = \left( l + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (1.47)$$

где целое число  $l = n + |m|$ ; оно пробегает целые значения  $|m|$ ,  $|m|+1$  и т. д.

Итак, собственные функции  $\Theta(\theta)$  надо нумеровать следующими двумя целыми числами: целым числом  $l$ , которое пробегает значение  $l=0, 1, 2$ , и т. д., и целым числом  $m$ , которое при заданном  $l$  пробегает  $2l+1$  значений  $m=-l, -l+1, \dots, l-1, l$ . Для функции  $\Theta_{lm}(\theta)$  имеем квазиклассическую формулу

$$\Theta_{lm}(\theta) = \begin{cases} \frac{C_{lm}}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{\int_{\theta_0}^{\theta} |p(\theta)| d\theta} & \text{при } 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \frac{2C_{lm}}{\sqrt{\sin \theta p(\theta)}} \cos \left[ \int_{\theta_0}^{\theta} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right] & \text{при } \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0, \\ \frac{C_{lm}(-1)^{l-|m|}}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{-\int_{\pi-\theta_0}^{\theta} |p(\theta)| d\theta} & \text{при } \pi - \theta_0 < \theta \leq \pi; \end{cases} \quad (1.48)$$

причем здесь

$$\begin{aligned} p(\theta) &= \sqrt{(l + 1/2)^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}}, \\ |p(\theta)| &= \sqrt{\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - (l + 1/2)^2}; \\ \sin \theta_0 &= \frac{|m|}{l + 1/2}, \quad 0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Схематически поведение функции  $\Theta_{lm}(\theta)$  представлено на рис. 3. Константу  $C_{lm}$  нам еще предстоит определить.

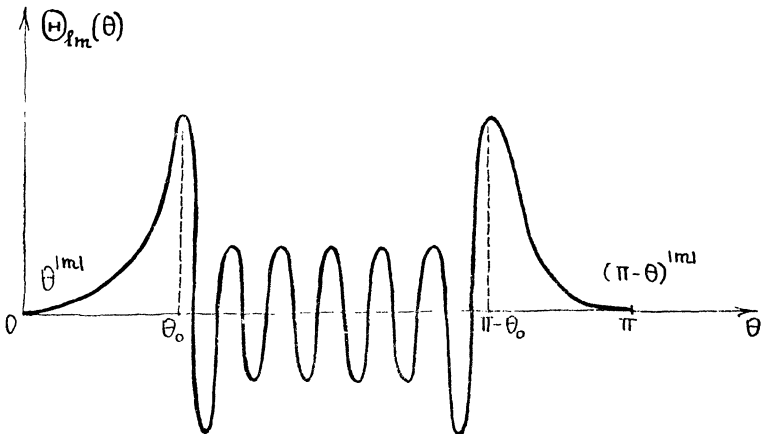


Рис. 3. Примерный график функции  $\Theta_{lm}(\theta)$  при больших значениях  $l$  и  $m$

4. Чтобы найти эту константу  $C_{lm}$ , прежде всего используем условие нормировки каждой функции  $\Theta_{lm}(\theta)$  на единицу, т. е. условие (1.9). При этом сразу отбросим асимпто-

тически малые «хвосты» функции  $\Theta_{lm}$  при  $0 \leq \theta < \theta_0$  и при  $\pi - \theta_0 < \theta \leq \pi$ . Тогда получим условие

$$4C_{lm}^2 \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \sin \theta d\theta \frac{\cos^2 \left[ \int_{\theta_0}^{\theta} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{\sin \theta p(\theta)} = 1,$$

в котором в рамках обсуждаемого здесь приближения мы должны квадрат косинуса заменить на  $1/2$ . Тогда окончательно будем иметь

$$2C_{lm}^2 \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \frac{d\theta}{p(\theta)} = 1, \quad (1.50)$$

или

$$2C_{lm}^2 \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{(l+1/2)^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}}} = 1. \quad (1.51)$$

Переходя в интеграле к новой переменной интегрирования  $x = \cos \theta$ , получим

$$\frac{2C_{lm}^2}{l+1/2} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{dx}{\sqrt{(\cos \theta_0 - x)(x + \cos \theta_0)}} = 1. \quad (1.52)$$

Преобразуем этот интеграл в контурный интеграл на комплексной плоскости, для чего рассмотрим функцию комплексного переменного

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(\cos \theta_0 - z)(z + \cos \theta_0)}}.$$

Эта функция имеет две полюсные точки ветвления при  $z = -\cos \theta_0$  и  $z = \cos \theta_0$ . Ветвь корня определим так же, как выше, т. е. положим

$$\sqrt{(\cos \theta_0 - z)(z + \cos \theta_0)} = \sqrt{|\cos \theta_0 - z| |z + \cos \theta_0|} e^{i \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}},$$

где  $\varphi_1 = \arg(z + \cos \theta_0)$ , причем  $0 \leq \varphi_1 < 2\pi$ ,  $\varphi_2 = \arg(\cos \theta_0 - z)$ , причем  $-\pi \leq \varphi_2 \leq \pi$  (рис. 4). На верхнем берегу разреза, простирающегося от  $-\cos \theta_0$  до  $\cos \theta_0$ , имеем  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$  и поэтому

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(\cos \theta_0 - x)(x + \cos \theta_0)}};$$

на нижнем берегу этого разреза  $\varphi_1 = 2\pi$ ,  $\varphi_2 = 0$  и поэтому

$$f(z) = -\frac{1}{\sqrt{(\cos \theta_0 - x)(x + \cos \theta_0)}}.$$

Таким образом, имеем соотношение

$$\frac{2C_{lm}^2}{l+1/2} \int_{-\cos \theta_0}^{\cos \theta_0} \frac{dx}{\sqrt{(\cos \theta_0 - x)(x + \cos \theta_0)}} = \frac{C_{lm}^2}{l+1/2} \int_C f(z) dz, \quad (1.53)$$

где контур  $C$  окружает разрез от  $-\cos \theta_0$  до  $+\cos \theta_0$  и пробегается в направлении часовой стрелки (рис. 4). Интеграл

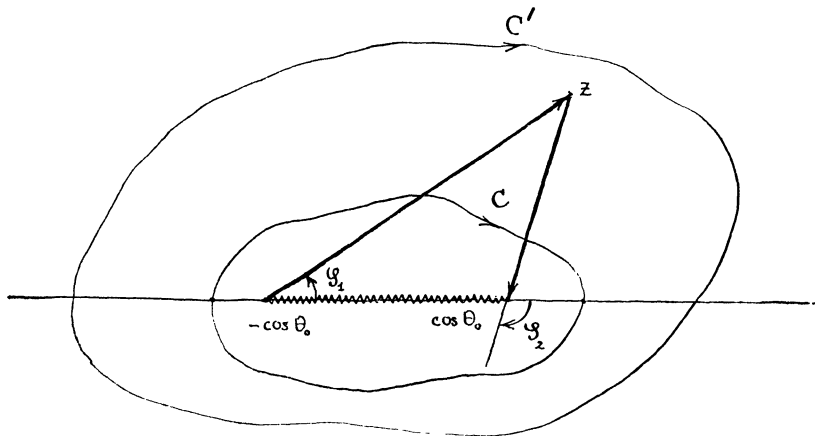


Рис. 4. Иллюстрация контурного интегрирования для условия нормировки

по контуру  $C$  можно преобразовать в интеграл по контуру  $C'$ , уходящему в бесконечность, так как

$$\frac{C_{lm}^2}{l+1/2} \int_C f(z) dz = \frac{C_{lm}^2}{l+1/2} \int_{C'} f(z) dz. \quad (1.54)$$

При  $|z| \rightarrow \infty$  мы имеем  $\varphi_1 \cong \varphi$ ,  $\varphi_2 \cong -(\pi - \varphi)$ , где  $\varphi = \arg z$ , причем  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Так что при  $|z| \rightarrow \infty$

$$f(z) \cong \frac{1}{|z| e^{i\varphi - i\frac{\pi}{2}}} = \frac{i}{z}. \quad (1.55)$$

Учитывая этот результат, получаем

$$\frac{C_{lm}^2}{l+1/2} \int_{C'} f(z) dz \cong -\frac{C_{lm}^2}{l+1/2} i \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\varphi}} Re^{i\varphi} i d\varphi = 2\pi \frac{C_{lm}^2}{l+1/2}.$$



Таким образом, условие нормировки (1.52) принимает вид

$$2\pi \frac{C_{lm}^2}{l+1/2} = 1,$$

откуда имеем

$$|C_{lm}| = \sqrt{\frac{l+1/2}{2\pi}} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}. \quad (1.56)$$

Нам остается определить знак константы  $C_{lm}$ . Чтобы это сделать, обратимся к условиям (1.10)–(1.12). Подставим в них наши квазиклассические функции (1.48). Нам достаточно рассмотреть эти формулы только на центральном отрезке  $\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0$ , хотя ниже мы рассмотрим их и на отрезках  $0 < \theta < \theta_0$  и  $\pi - \theta_0 < \theta \leq \pi$ .

На среднем отрезке  $\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0$  имеем приближенные соотношения

$$\begin{aligned} & \left( \pm \frac{d}{d\theta} - m \operatorname{ctg} \theta \right) \left\{ \frac{2C_{lm}}{\sqrt{\sin \theta \rho_m(\theta)}} \cos \left[ \int_{\theta_{0m}}^{\theta} \rho_m(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right] \right\} \cong \\ & \cong \pm \frac{2C_{lm}}{\sqrt{\sin \theta \rho_m(\theta)}} \sin [ ] \cdot \rho_m(\theta) - m \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{2C_{lm}}{\sqrt{\sin \theta \rho_m(\theta)}} \cos [ ] = \\ & = - \frac{2C_{lm}}{\sqrt{\sin \theta \rho_m(\theta)}} \sqrt{(l+1/2)^2 - m^2} \times \\ & \times \left\{ \pm \frac{\rho_m(\theta)}{\sqrt{(l+1/2)^2 - m^2}} \sin [ ] + \frac{m \operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{(l+1/2)^2 - m^2}} \cos [ ] \right\} = \\ & = - \frac{2C_{lm}}{\sqrt{\sin \theta \rho_m(\theta)}} \sqrt{(l+1/2)^2 - m^2} \cos \left[ \int_{\theta_{0m}}^{\theta} \rho_m(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} - \delta \right]; \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \frac{2C_{l,m \pm 1}}{\sqrt{\sin \theta \rho_{m \pm 1}(\theta)}} \cos \left[ \int_{\theta_{0,m \pm 1}}^{\theta} \rho_{m \pm 1}(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right] \cong \\ & \cong \sqrt{(l+1/2)^2 - m^2} \frac{2C_{l,m \pm 1}}{\sqrt{\sin \theta \rho_m(\theta)}} \times \\ & \times \cos \left[ \int_{\theta_m}^{\theta} \rho_m(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \mp m \int_{\theta_{0m}}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \rho_m(\theta)} \right]. \end{aligned} \quad (1.58)$$

В них ради удобства мы ввели обозначение  $\rho_m(\theta)$  вместо использовавшегося ранее обозначения  $\rho(\theta)$ , так как в формулах (1.10), (1.11) содержатся разные  $\rho(\theta)$ , а именно

$p_m(\theta)$ ,  $p_{m+1}(\theta)$  и  $p_{m-1}(\theta)$ . Кроме того, вместо  $\theta_0$  теперь назовем  $\theta_{0m}$ , так как опять у нас встречаются три разные величины  $\theta_{0m}$ ,  $\theta_{0,m+1}$  и  $\theta_{0,m-1}$ . Напомним, что

$$p_m(\theta) = \sqrt{(l + 1/2)^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}},$$

$$\sin \theta_{0m} = \frac{|m|}{\sqrt{l + 1/2}}, \quad 0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$p_m^2(\theta) + m^2 \operatorname{ctg}^2 \theta = (l + 1/2)^2 - m^2. \quad (1.59)$$

Угол  $\delta$ , входящий в выражение в последней строке формулы (1.57), мы определяем из соотношений

$$\cos \delta = \frac{m \operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2}}, \quad \sin \delta = \pm \frac{p_m(\theta)}{\sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2}},$$

из которых следует, что

$$\delta = \pm \arccos \left( \frac{m \operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2}} \right). \quad (1.60)$$

При получении первого соотношения (1.57) мы просто продифференцировали по  $\theta$  выражение, стоящее в аргументе косинуса, так как при больших  $l + 1/2$ ,  $m$  можно учитывать только эту зависимость от  $\theta$ , как самую главную. Потом мы без каких-либо дальнейших приближений преобразовали полученный результат. При получении второго соотношения (1.58) мы взяли асимптотическую приближенную формулу, справедливую при больших  $l + 1/2$  и  $m$ , для выражения, стоящего множителем перед косинусом, а для выражения, стоящего в аргументе косинуса, мы взяли главный и следующий за ним асимптотические члены. При этом мы учли, что

$$\frac{dp_m(\theta)}{dm} = - \frac{m}{\sin^2 \theta p_m(\theta)},$$

а также то, что  $p_m(\theta_{0m}) = 0$ , в силу чего мы смогли в нижнем пределе интеграла, стоящего в аргументе косинуса, заменить  $\theta_{0,m+1}$  на  $\theta_{0m}$ .

Согласно (1.10), (1.11) оба выражения (1.57) и (1.58) равны друг другу, но чтобы иметь возможность их действительно приравнять, необходимо воспользоваться точным равенством

$$m \int_{\theta_{0m}}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta p_m(\theta)} = \arccos \left( \frac{m \operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2}} \right) - \begin{cases} 0 & \text{при } m > 0 \\ \pi & \text{при } m < 0 \end{cases}, \quad (1.61)$$

которое справедливо потому, что, во-первых, оно правильно при  $\theta = \theta_{0m}$  и, во-вторых, производные по  $\theta$  для правой и левой частей равны друг другу. Используя формулу (1.61), мы убеждаемся, что выражения (1.57) и (1.58) действительно равны, если только считать, что

$$C_{lm} = -\frac{m}{|m|} C_{l,m\pm 1}. \quad (1.62)$$

На отрезке  $0 < \theta < \theta_0$  имеем приближенные соотношения

$$\begin{aligned} & \left( \pm \frac{d}{d\theta} - m \operatorname{ctg} \theta \right) \frac{C_{lm}}{\sqrt{\sin \theta |p_m(\theta)|}} e^{\int_{\theta_{0m}}^{\theta} |p_m(\theta)| d\theta} \cong \\ & \cong \frac{C_{lm}}{\sqrt{\sin \theta |p_m(\theta)|}} (\pm |p_m(\theta)| - m \operatorname{ctg} \theta) e^{\int_{\theta_{0m}}^{\theta} |p_m(\theta)| d\theta}, \quad (1.63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \frac{C_{l,m\pm 1}}{\sqrt{\sin \theta |p_{m\pm 1}(\theta)|}} e^{\int_{\theta_{0,m\pm 1}}^{\theta} |p_{m\pm 1}(\theta)| d\theta} \cong \\ & \cong \sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2} \frac{C_{l,m\pm 1}}{\sqrt{\sin \theta |p_m(\theta)|}} e^{\int_{\theta_{0m}}^{\theta} |p_m(\theta)| d\theta \pm \int_{\theta_{0m}}^{\theta} \frac{m d\theta}{|p_m(\theta)| \sin^2 \theta}}. \quad (1.64) \end{aligned}$$

При получении первого соотношения надо дифференцировать только показатель экспоненты, а при получении второго соотношения надо оставить главный член асимптотики в предэкспоненциальном множителе и два члена разложения — в показателе экспоненты.

Убедившись в справедливости равенства

$$\int_{\theta_{0m}}^{\theta} \frac{m d\theta}{|p_m(\theta)| \sin^2 \theta} = \ln \left\{ \frac{m}{|m|} \frac{m \operatorname{ctg} \theta - |p_m(\theta)|}{\sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2}} \right\}, \quad (1.65)$$

которое устанавливается тем же способом, что и (1.61), можно легко сравнить формулы (1.63), (1.64). Приравнявая их друг другу, получаем

$$C_{lm} = -\frac{m}{|m|} C_{l,m\pm 1}, \quad (1.66)$$

т. е. опять имеем в точности соотношение (1.62), как и должно быть.

На отрезке  $\pi - \theta_0 < \theta < \pi$  имеем приближенные соотношения

$$\begin{aligned} \left( \pm \frac{d}{d\theta} - m \operatorname{ctg} \theta \right) \frac{C_{lm} (-1)^{l-|m|}}{\sqrt{\sin \theta |p_m(\theta)|}} e^{-\int_{\pi-\theta_{0m}}^{\theta} |p_m(\theta)| d\theta} &\cong \\ \cong \frac{C_{lm} (-1)^{l-|m|}}{\sqrt{\sin \theta |p_m(\theta)|}} (\pm |p_m(\theta)| - m \operatorname{ctg} \theta) e^{-\int_{\pi-\theta_{0m}}^{\theta} |p_m(\theta)| d\theta}, & \quad (1.67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \frac{C_{l,m \pm 1} (-1)^{l-|m \pm 1|}}{\sqrt{\sin \theta |p_{m \pm 1}(\theta)|}} e^{-\int_{\pi-\theta_{0,m \pm 1}}^{\theta} |p_{m \pm 1}(\theta)| d\theta} &\cong \\ \cong -\sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2} \times \\ \times \frac{C_{l,m \pm 1} (-1)^{l-|m|}}{\sqrt{\sin \theta |p_m(\theta)|}} e^{-\int_{\pi-\theta_{0m}}^{\theta} |p_m(\theta)| d\theta \mp \int_{\pi-\theta_{0m}}^{\theta} \frac{m}{|p_m(\theta)| \sin^2 \theta} d\theta} & \quad (1.68) \end{aligned}$$

При получении первого соотношения надо дифференцировать только показатель экспоненты, а при получении второго соотношения — оставить главный член асимптотики в предэкспоненциальном множителе и два члена асимптотического разложения — в показателе экспоненты.

Убедившись тем же способом, что и при получении (1.61), в справедливости равенства

$$\int_{\pi-\theta_{0m}}^{\theta} \frac{md\theta}{|p_m(\theta)| \sin^2 \theta} = -\ln \left( -\frac{m}{|m|} \frac{|p_m(\theta)| + m \operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2}} \right) \quad (1.69)$$

и приравнивая друг другу формулы (1.67), (1.68), получаем

$$C_{lm} = -\frac{m}{|m|} C_{l,m \pm 1}, \quad (1.70)$$

т. е. опять в точности соотношение (1.62), как это и должно быть.

Рассмотрим, наконец, соотношение (1.12). Оно относится к случаю  $m=0$ , когда  $\sin \theta_0=0$ , т. е.  $\theta_0=0$ . При этом центральный отрезок оказывается совпадающим со всем отрезком  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Кроме того, теперь  $p(\theta) = l + 1/2$ , а следовательно,

$$\int_{\theta_0}^{\theta} p(\theta) d\theta = (l + 1/2) \theta.$$

Таким образом, мы имеем следующую квазиклассическую формулу

$$\Theta_{l_0}(\theta) = \frac{2C_{l_0}}{\sqrt{\sin \theta (l+1/2)}} \cos \left[ \left( l + 1/2 \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (1.71)$$

Согласно известной формуле Дарбу для полиномов Лежандра при больших  $l$  имеем

$$P_l(\cos \theta) \cong \sqrt{\frac{2}{l\pi \sin \theta}} \cos \left[ \left( l + 1/2 \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (1.72)$$

Подставляя (1.71), (1.72) в (1.12), получаем при больших  $l$

$$C_{l_0} = \sqrt{\frac{l}{2\pi}} \cong \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}. \quad (1.73)$$

Сопоставляя эту формулу с формулой (1.62), непосредственно видим, что

$$C_{lm} = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}. \quad (1.74)$$

Итак, окончательно имеем квазиклассические формулы для функций  $\Theta_{lm}(\theta)$ :

$$\Theta_{lm}(\theta) = \begin{cases} (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{\int_{\theta_0}^{\theta} |\rho(\theta)| d\theta} & \text{при } 0 \leq \theta < \theta_0, \\ (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta \rho(\theta)}} \cos \left[ \int_{\theta_0}^{\theta} \rho(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right] & \text{при } \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0, \\ (-1)^{l + \frac{m-|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{-\int_{\pi-\theta_0}^{\theta} |\rho(\theta)| d\theta} & \text{при } \pi - \theta_0 < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (1.75)$$

причем

$$\rho(\theta) = \sqrt{(l+1/2)^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}}, \quad |p(\theta)| = \sqrt{\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - (l+1/2)^2}. \quad (1.76)$$

1. Приступим к выводу квазиклассических формул для функций  $D_{mm'}^l(\varphi, \theta, \psi)$ . Изучение этих функций сводится к изучению функций  $d_{mm'}^l(\theta)$ , с которыми они связаны простым соотношением

$$D_{mm'}^l(\varphi, \theta, \psi) = e^{-im\varphi} d_{mm'}^l(\theta) e^{im'\psi}.$$

Функции  $d_{mm'}^l(\theta)$  определяются как регулярные на всем отрезке  $0 \leq \theta \leq \pi$  решения дифференциального уравнения

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) - \frac{m^2 - 2mm' \cos \theta + m'^2}{\sin^2 \theta} + l(l+1) \right] d_{mm'}^l(\theta) = 0, \quad (2.1)$$

которые нормированы условием

$$\int_0^\pi \sin \theta [d_{mm'}^l(\theta)]^2 = \frac{2}{2l+1} \quad (2.2)$$

и которые удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$d_{m, m' \pm 1}^l(\theta) = [(l \pm m' + 1)(l \mp m')]^{-1/2} \times \\ \times \left\{ -\frac{m}{\sin \theta} + m' \operatorname{ctg} \theta \mp \frac{d}{d\theta} \right\} d_{mm'}^l(\theta), \quad (2.3)$$

а также дополнительным условиям

$$d_{mm'}^l(\theta) = (-1)^{m-m'} d_{m'm}^l(\theta), \quad (2.4)$$

$$d_{00}^l(\theta) = P_l(\cos \theta); \quad (2.5)$$

в последнюю формулу входит полином Лежандра.

2. Выведем теперь квазиклассические формулы для  $d_{mm'}^l(\theta)$ . Эти функции будем искать как решения следующей задачи на собственные функции и значения: требуется найти регулярные на всем отрезке  $0 \leq \theta \leq \pi$  решения дифференциального уравнения

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) - \frac{m^2 - 2mm' \cos \theta + m'^2}{\sin^2 \theta} + \varepsilon \right] \Theta(\theta) = 0, \quad (2.6)$$

существующие лишь при определенных, собственных, значениях параметра  $\varepsilon$ .

Будем искать решение в виде

$$\Theta(\theta) = e^{i\sigma(\theta)}, \quad (2.7)$$

считая  $\sigma(\theta)$  очень большой величиной, т. е. представляя ее в виде разложения

$$\sigma(\theta) = \sigma_0(\theta) + i\sigma_1(\theta) \dots, \quad (2.8)$$

при этом будем считать, что в уравнении (2.6) перед первым слагаемым в квадратных скобках как бы стоит малый параметр.

В нулевом и первом приближениях получим следующие уравнения:

$$-\left(\frac{d\sigma_0}{d\theta}\right)^2 - \frac{m^2 - 2mm' \cos \theta + m'^2}{\sin^2 \theta} + \varepsilon = 0, \quad (2.9)$$

$$-2 \frac{d\sigma_0}{d\theta} \frac{d\sigma_1}{d\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\sigma_0}{d\theta} + \frac{d^2\sigma_0}{d\theta^2} = 0. \quad (2.10)$$

Рассмотрим теперь очень важную для всего дальнейшего функцию

$$F(\theta) = \varepsilon - \frac{m^2 - 2mm' \cos \theta + m'^2}{\sin^2 \theta}, \quad (2.11)$$

которая при  $\theta=0, \pi$  обращается в отрицательную бесконечность. При  $\varepsilon \leq 0$  имеем  $F(\theta) \leq 0$  всюду на отрезке  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Действительно,

$$\begin{aligned} -\sin^2 \theta F(\theta) &= -\varepsilon \sin^2 \theta + m^2 + m'^2 - 2mm' \cos \theta \geq \\ &\geq m^2 + m'^2 - 2mm' \cos \theta \geq m^2 + m'^2 - 2|m||m'| = \\ &= (|m| - |m'|)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что функция  $F(\theta)$  в этом случае действительно не может принимать положительных значений на отрезке  $0 \leq \theta \leq \pi$  (рис. 5).

Нетрудно также показать, что в случае  $\varepsilon > 0$ , когда выполняется хотя бы одно неравенство:  $|m| \geq \sqrt{\varepsilon}$  или  $|m'| \geq \sqrt{\varepsilon}$ , на отрезке  $0 \leq \theta \leq \pi$  имеем неравенство  $F(\theta) \leq 0$ . Действительно, в этом случае при  $|m| \geq \sqrt{\varepsilon}$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} -\sin^2 \theta F(\theta) &= -\varepsilon \sin^2 \theta - 2mm' \cos \theta + m^2 + m'^2 = \\ &= -\varepsilon \sin^2 \theta - 2mm' \cos \theta + m^2 \sin^2 \theta + m^2 \cos^2 \theta + m'^2 = \\ &= (m \cos \theta - m')^2 + (m^2 - \varepsilon) \sin^2 \theta \geq 0; \end{aligned}$$

аналогичное неравенство имеет место при  $|m'| \geq \sqrt{\varepsilon}$ .

Таким образом, теперь остается рассмотреть случай  $\varepsilon > 0$ ,  $|m| < \sqrt{\varepsilon}$ ,  $|m'| < \sqrt{\varepsilon}$ , для которого  $(\varepsilon - m^2)(\varepsilon - m'^2) > 0$  и поэтому квадратное уравнение

$$\varepsilon x^2 - 2mm'x + m^2 + m'^2 - \varepsilon = 0$$

имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = \frac{mm' + \sqrt{(\varepsilon - m^2)(\varepsilon - m'^2)}}{\varepsilon} \equiv \cos \theta_1, \quad (2.12)$$

$$x_2 = \frac{mm' - \sqrt{(\varepsilon - m^2)(\varepsilon - m'^2)}}{\varepsilon} \equiv \cos \theta_2, \quad (2.13)$$

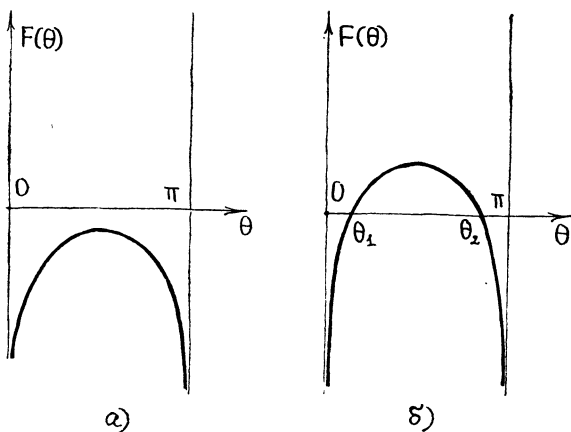


Рис. 5. График функции  $F(\theta)$ : а — случай  $\varepsilon \leq 0$  или  $\varepsilon > 0$ , но при этом выполняется хотя бы одно неравенство  $|m| \geq \sqrt{\varepsilon}$ ,  $|m'| \geq \sqrt{\varepsilon}$ ; б — случай  $\varepsilon > 0$ ,  $|m| < \sqrt{\varepsilon}$ ,  $|m'| < \sqrt{\varepsilon}$

причем мы здесь ввели такие обозначения, что  $x_1 > x_2$ . Дискриминант этого квадратного уравнения равен

$$\begin{aligned} & 4m^2m'^2 - 4\varepsilon(m^2 + m'^2 - \varepsilon) = \\ & = 4[m^2m'^2 - \varepsilon(m^2 + m'^2) + \varepsilon^2] = 4(\varepsilon - m^2)(\varepsilon - m'^2). \end{aligned}$$

Докажем, что в рассматриваемом случае, т. е. в случае  $\varepsilon > 0$ ,  $|m| < \sqrt{\varepsilon}$ ,  $|m'| < \sqrt{\varepsilon}$ , найденные нами действительные корни  $x_1$ ,  $x_2$  по модулю меньше единицы, т. е. они действительно дают некоторые углы  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  ( $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ ) (рис. 6). Функция  $\cos \theta$  взаимно-однозначно отображает отрезок  $0 \leq \theta \leq \pi$  на отрезок  $-1 \leq x \leq +1$ . Чтобы показать,



что  $|x_1| < 1$ ,  $|x_2| < 1$ , удобно рассмотреть углы, определяемые соотношениями

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{\varepsilon - m^2}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (2.14)$$

$$\cos \beta = \frac{m'}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{\varepsilon - m'^2}}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (2.15)$$

Причем будем считать, что  $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ . Тогда имеем простые формулы

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{m'}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\sqrt{\varepsilon - m^2}}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\sqrt{\varepsilon - m'^2}}{\sqrt{\varepsilon}} = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{m'}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\sqrt{\varepsilon - m^2}}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\sqrt{\varepsilon - m'^2}}{\sqrt{\varepsilon}} = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

из которых непосредственно следует, что  $|x_1| < 1$ ,  $|x_2| < 1$ .

Покажем, что в рассматриваемом нами сейчас случае, когда  $\varepsilon > 0$ ,  $|m| < \sqrt{\varepsilon}$ ,  $|m'| < \sqrt{\varepsilon}$ , функция  $F(\theta)$  строго положительна, т. е.  $F(\theta) > 0$  при  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  и  $F(\theta) \leq 0$  вне этого отрезка (рис. 5, б).

Действительно, из неравенства  $0 \leq \theta_1 < \theta < \theta_2 \leq \pi$  сразу следует очевидное неравенство

$$1 \geq \cos \theta_1 > \cos \theta > \cos \theta_2 \geq -1,$$

а следовательно, неравенство

$$x_1 > \cos \theta > x_2.$$

Отсюда сразу имеем

$$\cos \theta - x_1 < 0, \quad \cos \theta - x_2 > 0,$$

и поэтому

$$(\cos \theta - x_1)(\cos \theta - x_2) < 0.$$

Таким образом, при  $\theta_1 < \theta < \theta_2$

$$\begin{aligned} -\sin^2 \theta F(\theta) &= \varepsilon \cos^2 \theta - 2mm' \cos \theta + m^2 + m'^2 - \varepsilon \equiv \\ &\equiv \varepsilon (\cos \theta - x_1)(\cos \theta - x_2) < 0, \end{aligned}$$

а следовательно, на этом отрезке  $F(\theta) > 0$ . Вне этого отрезка, как видно из приведенного рассуждения,  $F(\theta) \leq 0$ .

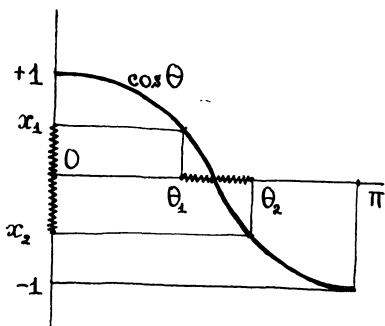


Рис. 6. Замена  $x = \cos \theta$ . Точки  $x_1$ ,  $x_2$  и соответствующие им углы  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ . При  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  имеем  $F(\theta) > 0$ , вне этого отрезка  $F(\theta) \leq 0$ .

Рассмотрим уравнение нулевого приближения (2.9). На любом отрезке  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , где функция  $F(\theta)$  принимает положительные значения, имеем

$$\frac{d\sigma_0}{d\theta} = \pm p(\theta),$$

где  $p(\theta) = \sqrt{F(\theta)}$ . Здесь подразумевается арифметическое значение корня. Так что

$$\sigma_0(\theta) = \pm \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta + \text{const}, \quad (2.16)$$

где интеграл обозначает любую первообразную функцию для функции  $p(\theta)$ . На любом отрезке  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , где функция  $F(\theta)$  принимает отрицательные значения, имеем

$$\frac{d\sigma_0}{d\theta} = \pm i |p(\theta)|,$$

где  $|p(\theta)| = \sqrt{-F(\theta)}$ . Снова берется арифметическое значение корня. Так что

$$\sigma_0(\theta) = \pm i \int_{\theta_1}^{\theta} |p(\theta)| d\theta + \text{const}, \quad (2.17)$$

где интеграл обозначает любую первообразную для функции  $|p(\theta)|$ .

Рассмотрим теперь уравнение первого приближения (2.10). Подставим в это уравнение функции (2.16), (2.17). Тогда получим

$$\mp 2p(\theta) \frac{d\sigma_1}{d\theta} \pm \frac{\cos \theta}{\sin \theta} p(\theta) \pm \frac{dp(\theta)}{d\theta} = 0,$$

$$\mp 2i |p(\theta)| \frac{d\sigma_1}{d\theta} \pm i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} |p(\theta)| \pm i \frac{d|p(\theta)|}{d\theta} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d\sigma_1}{d\theta} = \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} \mp \frac{1}{2p(\theta)} \frac{dp(\theta)}{d\theta},$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\theta} = \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} \mp \frac{1}{2|p(\theta)|} \frac{d|p(\theta)|}{d\theta}.$$

Таким образом,

$$\sigma_1(\theta) = \ln \sqrt{\sin \theta p(\theta)} + \text{const}, \quad (2.18)$$

$$\sigma_1(\theta) = \ln \sqrt{\sin \theta |p(\theta)|} + \text{const}. \quad (2.19)$$

Объединяя формулы (2.16), (2.18) и (2.17), (2.19), получаем

$$\sigma(\theta) = \pm i \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta - \ln \sqrt{\sin \theta p(\theta)} + \text{const}, \quad (2.20)$$

$$\sigma(\theta) = \mp i \int_{\theta_1}^{\theta} |p(\theta)| d\theta - \ln \sqrt{\sin \theta |p(\theta)|} + \text{const}. \quad (2.21)$$

Следовательно, на любом отрезке  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , где функция  $F(\theta)$  положительна, любое решение уравнения (2.6) приближенно представляется в виде

$$\Theta(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\sin \theta \rho(\theta)}} e^{i \int_{\theta_1}^{\theta} \rho(\theta) d\theta} + \frac{C_2}{\sqrt{\sin \theta \rho(\theta)}} e^{-i \int_{\theta_1}^{\theta} \rho(\theta) d\theta}. \quad (2.22)$$

Соответственно, на любом отрезке  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , где функция  $F(\theta)$  отрицательна, любое решение уравнения (2.6) приближенно может быть записано в виде

$$\Theta(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\sin \theta |\rho(\theta)|}} e^{\int_{\theta_1}^{\theta} |\rho(\theta)| d\theta} + \frac{C_2}{\sqrt{\sin \theta |\rho(\theta)|}} e^{-\int_{\theta_1}^{\theta} |\rho(\theta)| d\theta}; \quad (2.23)$$

здесь  $C_1, C_2$  — свои константы для каждого соответствующего отрезка.

Найдем теперь квазиклассические собственные функции  $\Theta(\theta)$  и собственные значения  $\varepsilon$  дифференциального уравнения (2.6) на всем отрезке  $0 \leq \theta \leq \pi$ . При  $0 \leq \theta < \theta_1$  мы должны воспользоваться условием регулярности описываемого собственного решения  $\Theta(\theta)$  при  $\theta=0$ . Учитывая это условие, в формуле (2.23) мы должны положить  $C_2=0$ . Обозначая, кроме того,  $C_1$  просто через  $C$ , получим

$$\Theta(\theta) = \frac{C}{\sqrt{\sin \theta |\rho(\theta)|}} e^{\int_{\theta_1}^{\theta} |\rho(\theta)| d\theta}. \quad (2.24)$$

Покажем, что мы действительно сделали правильный выбор. Согласно своему определению

$$|\rho(\theta)| = \frac{\sqrt{\varepsilon \cos^2 \theta - 2mm' \cos \theta + m^2 + m'^2 - \varepsilon}}{\sin \theta}, \quad (2.25)$$

и поэтому при  $\theta \cong 0$  имеем

$$|\rho(\theta)| \cong \frac{|m - m'|}{\theta}.$$

Таким образом, при  $\theta \cong 0$

$$\int_{\theta_1}^{\theta} |\rho(\theta)| d\theta \cong |m - m'| \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = |m - m'| \ln \frac{\theta}{\theta_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{\sin \theta |\rho(\theta)|}} e^{\int_{\theta_1}^{\theta} |\rho(\theta)| d\theta} \cong \frac{1}{\sqrt{|m - m'|}} \left( \frac{\theta}{\theta_1} \right)^{|m - m'|} \text{ при } \theta \cong 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|\sin \theta| |p(\theta)|}} e^{-\int_{\theta_1}^{\theta} |p(\theta)| d\theta} \cong \frac{1}{\sqrt{|m-m'|}} \left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)^{|m-m'|} \text{ при } \theta \cong 0. \quad (2.27)$$

Отсюда видно, что в формуле (2.23) первая экспонента обращается в нуль при  $\theta \rightarrow 0$ , а вторая экспонента — в бесконечность.

Из исходного дифференциального уравнения (2.6) при  $\theta \cong 0$  получаем (заменяя  $\sin \theta$  на  $\theta$ )

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{d\Theta}{d\theta} - \frac{(m-m')^2}{\theta^2} \Theta = 0.$$

Отсюда сразу видно, что регулярное при  $\theta \cong 0$  решение этого уравнения дается функцией

$$\Theta(\theta) = C' \theta^{|m-m'|},$$

где  $C'$  — произвольная константа. Действительно, при  $\theta \cong 0$  мы можем искать нужное нам решение в виде  $\theta^\alpha$ . Тогда для  $\alpha$  получаем соотношение

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - (m-m')^2 = 0,$$

из которого непосредственно следует, что

$$\alpha = \pm |m-m'|.$$

Для регулярного при  $\theta \cong 0$  решения мы должны взять  $\alpha = |m-m'|$ .

Найдем теперь квазиклассическую собственную функцию на отрезке  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ . Она должна представлять то же решение дифференциального уравнения (2.6), которое описывается квазиклассической собственной функцией (2.24) на отрезке  $0 \leq \theta < \theta_1$ . Искомое решение мы должны представить формулой (2.22) и значения констант  $C_1, C_2$  в этой формуле должны выбрать с помощью известных квазистатических формул сшивания (см. задачи 1 и 2 в прил.). Так приходим к формуле

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) &= \frac{C e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\sin \theta| p(\theta)}} e^{i \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta} + \frac{C e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\sin \theta| p(\theta)}} e^{-i \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta} = \\ &= \frac{2C}{\sqrt{|\sin \theta| p(\theta)}} \cos \left[ \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right], \end{aligned} \quad (2.28)$$

где  $C$  — та же самая константа, которая входит в (2.24). Согласно определению

$$p(\theta) = \frac{\sqrt{-\varepsilon \cos^2 \theta + 2mm' \cos \theta - m^2 - m'^2 + \varepsilon}}{\sin \theta}. \quad (2.29)$$

Найдем, наконец, рассматриваемую квазиклассическую собственную функцию на отрезке  $\theta_2 < \theta \leq \pi$ . Для этого возьмем формулу (2.28) и продолжим ее с помощью квазиклассических формул сшивания на отрезок  $\theta_2 < \theta \leq \pi$ . Тогда мы придем к формуле

$$\Theta(\theta) = C \cos \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{2} \right] \frac{1}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{-\int_{\theta_2}^{\theta} |p(\theta)| d\theta} + \\ + 2C \cos \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta) d\theta \right] \frac{1}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{\int_{\theta_2}^{\theta} |p(\theta)| d\theta}, \quad (2.30)$$

где  $C$  — та же константа, которая входит в (2.28), (2.24).

Используем теперь условие ограниченности квазиклассической собственной функции  $\Theta(\theta)$  при  $\theta = \pi$ . Из (2.25) при  $\theta \cong \pi$  непосредственно получаем

$$|p(\theta)| \cong \frac{|m + m'|}{\pi - \theta}.$$

Таким образом, при  $\theta \cong \pi$

$$\int_{\theta_2}^{\theta} |p(\theta)| d\theta \cong |m + m'| \int_{\theta_2}^{\theta} \frac{d\theta}{\pi - \theta} = -|m + m'| \ln \frac{\pi - \theta}{\pi - \theta_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{-\int_{\theta_2}^{\theta} |p(\theta)| d\theta} \cong \\ \cong \frac{1}{\sqrt{|m + m'|}} \left( \frac{\pi - \theta}{\pi - \theta_2} \right)^{|m + m'|} \quad \text{при } \theta \cong \pi, \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{\int_{\theta_2}^{\theta} |p(\theta)| d\theta} \cong \\ \cong \frac{1}{\sqrt{|m + m'|}} \left( \frac{\pi - \theta_2}{\pi - \theta} \right)^{|m + m'|} \quad \text{при } \theta \cong \pi. \quad (2.32)$$

Отсюда видно, что при  $\theta \rightarrow \pi$  в формуле (2.30) вторая экспонента неограниченно возрастает, а первая — обращается в нуль. Условие ограниченности квазиклассической функ-

ции  $\Theta(\theta)$  может быть, таким образом, удовлетворено только в том случае, если

$$\cos \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta) d\theta \right] = 0,$$

т. е. при условии, что

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta) d\theta = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (2.33)$$

в котором  $n=0, 1, 2$  и т. д. Условие (2.33) позволяет находить собственные значения  $\epsilon$ , при которых дифференциальное уравнение (2.6) имеет ограниченные регулярные решения  $\Theta(\theta)$  на всем отрезке  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Используя (2.33), из (2.30) получаем при  $\theta_2 < \theta \leq \pi$ , что

$$\Theta(\theta) = \frac{C(-1)^n}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{-\int_{\theta_2}^{\theta} |p(\theta)| d\theta}. \quad (2.34)$$

Из исходного дифференциального уравнения (2.6) при  $\theta \cong \pi$  (заменяем  $\sin \theta$  на  $\pi - \theta$ ) уравнение

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{\pi - \theta} \frac{d\Theta}{d\theta} - \frac{(m+m')^2}{(\pi - \theta)^2} \Theta = 0.$$

Отсюда сразу видно, что регулярным при  $\theta \cong 0$  решением этого уравнения является функция

$$\Theta(\theta) = C''(\pi - \theta)^{|m+m'|},$$

где  $C''$  — произвольная постоянная. Эта формула находится в полном согласии с формулой (2.31).

Итак, на всем отрезке  $0 \leq \theta \leq \pi$  квазиклассическая собственная функция  $\Theta_n(\theta)$  описывается формулами [см. (2.24), (2.28), (2.34)]:

$$\begin{aligned} & \frac{C}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{\int_{\theta_1}^{\theta} |p(\theta)| d\theta} \quad \text{при } 0 \leq \theta < \theta_1, \\ & \frac{2C}{\sqrt{\sin \theta p(\theta)}} \cos \left[ \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{при } \theta_1 < \theta < \theta_2, \\ & \frac{C(-1)^n}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{-\int_{\theta_2}^{\theta} |p(\theta)| d\theta} \quad \text{при } \theta_2 < \theta \leq \pi. \end{aligned} \quad (2.35)$$

3. Квазиклассическое собственное значение  $\varepsilon_n$  мы должны найти из решения следующего трансцендентного уравнения [см. (2.33)]:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta) d\theta = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (2.36)$$

где  $n=0, 1, 2$  и т. д.

Исследуем теперь это последнее уравнение (2.36). Запишем его в подробном виде, используя явное выражение (2.29) для функции  $p(\theta)$ :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{\varepsilon \sin^2 \theta - m^2 + 2mm' \cos \theta - m'^2}}{\sin \theta} d\theta = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.37)$$

Интеграл в левой части преобразуем, вводя новую переменную интегрирования  $x = \cos \theta$ :

$$- \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{\varepsilon - \varepsilon x^2 - m^2 + 2mm'x - m'^2}}{1-x^2} dx = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.38)$$

Здесь  $x_1 = \cos \theta_1$ ,  $x_2 = \cos \theta_2$ . Используем далее тождество

$$\varepsilon - \varepsilon x^2 - m^2 + 2mm'x - m'^2 \equiv \varepsilon (x_1 - x)(x - x_2),$$

после чего получим условие

$$\sqrt{\varepsilon} \int_{x_2}^{x_1} \frac{\sqrt{(x_1 - x)(x - x_2)}}{1-x^2} dx = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.39)$$

Рассмотрим входящую в этот интеграл подынтегральную функцию на комплексной плоскости  $z$ :

$$f(z) = \frac{\sqrt{(x_1 - z)(z - x_2)}}{1 - z^2}.$$

Функция эта имеет две квадратичные точки ветвления при  $z=x_1$  и  $z=x_2$  и два простых полюса при  $z=1$  и  $z=-1$  (рис. 7). Чтобы полностью задать функцию  $f(z)$ , нам надо выбрать ветвь корня. Для этого проведем разрез на комплексной плоскости  $z$  от  $x_2$  до  $x_1$ . Аргументы  $\varphi_1 = \arg(x_1 - z)$  и  $\varphi_2 = \arg(z - x_2)$  отсчитываются, разумеется, от положительного направления действительной оси  $Ox$ , но так, чтобы никогда не пересекалась линия разреза, т. е. угол  $\varphi_1$  изменяется от  $-\pi$  до  $\pi$ , а угол  $\varphi_2$  изменяется от  $0$  до  $2\pi$ . Будем теперь рассматривать такую ветвь корня, для которой

$$\sqrt{(x_1 - z)(z - x_2)} = \sqrt{|x_1 - z| |z - x_2|} e^{i \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}.$$

На верхнем берегу разреза  $\varphi_1=0$  и  $\varphi_2=0$ , и поэтому

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x_1-x)(x-x_2)}}{1-x^2},$$

где  $x$  — действительное. На нижнем берегу разреза  $\varphi_1=0$  и  $\varphi_2=2\pi$ , и поэтому

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x_1-x)(x-x_2)}}{1-x^2},$$

где  $x$  — действительное. В последних двух формулах имеем в виду арифметическое значение корня. При  $z=-1$  имеем  $\varphi_1=0$ ,  $\varphi_2=\pi$  и, следовательно,

$$f(z) \cong \frac{i \sqrt{(1+x_1)(1+x_2)}}{2(1+z)} \quad \text{при } z \cong -1.$$

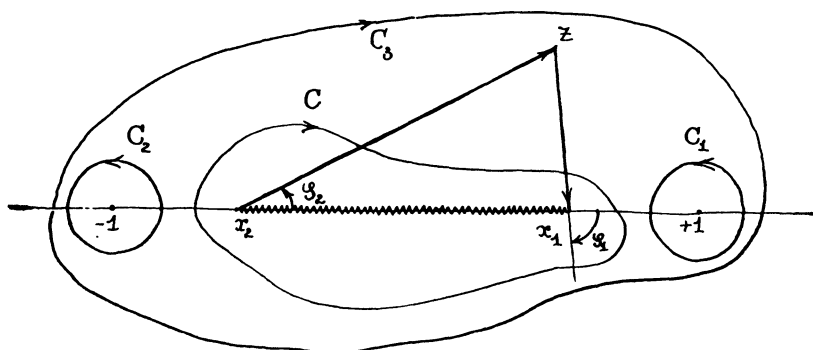


Рис. 7. Иллюстрация контурного интегрирования для условия для отыскания собственных значений

При  $z \cong +1$  имеем  $\varphi_1 = -\pi$ ,  $\varphi_2 = 0$  и, следовательно,

$$f(z) \cong -\frac{\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}}{2(1-z)} \quad \text{при } z \cong 1.$$

Нам остается посмотреть, как ведет себя функция  $f(z)$  при больших  $|z| \rightarrow \infty$ . Например, при действительных положительных  $x \rightarrow \infty$  имеем  $\varphi_1 = -\pi$ ,  $\varphi_2 = 0$ , и поэтому  $f(x) \cong i/x$ . При действительных отрицательных  $x \rightarrow -\infty$  имеем  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$ , и поэтому  $f(x) \cong i/x$  (снова тот же самый результат). Таким образом,

$$f(z) \cong \frac{i}{z} \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty.$$

Используя теперь описанные свойства функции  $f(z)$  на комплексной плоскости  $z$ , мы можем интеграл в (2.39) пред-



ставить в виде контурного интеграла по контуру  $C$  (рис. 7). Тогда вместо (2.39) будем иметь условие

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \oint_C f(z) dz = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.40)$$

Интеграл в левой части вычислим, преобразовав его в сумму контурных интегралов по контурам  $C_1, C_2, C_3$ , причем контур  $C_3$  уходит в бесконечность, а контуры  $C_2, C_1$  стягиваются вокруг точек  $x = -1$  и  $x = 1$ . Тогда будем иметь

$$\oint_{C_3} f(z) dz = - \int_0^{2\pi} \frac{i}{Re^{i\varphi}} i Re^{i\varphi} d\varphi = 2\pi,$$

$$\oint_{C_2} f(z) dz = 2\pi i \text{ Выч. } f(z) \Big|_{z=-1} = -\pi \sqrt{(1+x_1)(1+x_2)},$$

$$\oint_{C_1} f(z) dz = 2\pi i \text{ Выч. } f(z) \Big|_{z=+1} = -\pi \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}.$$

В силу вышеприведенного тождества имеем соотношения

$$\varepsilon (1+x_1)(1+x_2) = m^2 - 2mm' + m'^2 = (m-m')^2,$$

$$\varepsilon (1-x_1)(1-x_2) = m^2 + 2mm' + m'^2 = (m+m')^2,$$

и поэтому

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi - \pi \frac{|m-m'|}{\sqrt{\varepsilon}} - \pi \frac{|m+m'|}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Таким образом, условие для нахождения собственных значений принимает простой вид:

$$\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{2}|m-m'| - \frac{1}{2}|m+m'| = n + \frac{1}{2}.$$

Следовательно, окончательно имеем

$$\sqrt{\varepsilon} = n + \frac{1}{2}|m+m'| + \frac{1}{2}|m-m'| + \frac{1}{2},$$

откуда непосредственно получаем

$$\varepsilon = \left( n + \frac{1}{2}|m+m'| + \frac{1}{2}|m-m'| + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (2.41)$$

причем здесь  $n = 0, 1, 2$  и т. д. Вводя вместо  $n$  новое целое число  $l = n + \frac{1}{2}|m+m'| + \frac{1}{2}|m-m'|$ , которое больше или равно  $|m|$  и  $|m'|$ , для собственных значений получаем

$$\varepsilon = \left( l + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (2.42)$$

Согласно (2.35) собственному значению  $\varepsilon = (l + 1/2)^2$  соответствует собственная функция:

$$d_{mm'}^l(\theta) = \begin{cases} \frac{C_{mm'}^l}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{\int_{\theta_1}^{\theta} |p(\theta)| d\theta} & \text{при } 0 \leq \theta < \theta_1, \\ \frac{2C_{mm'}^l}{\sqrt{\sin \theta p(\theta)}} \cos \left[ \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right] & \text{при } \theta_1 < \theta < \theta_2, \\ \frac{2C_{mm'}^l (-1)^{l - \frac{1}{2}|m+m'| - \frac{1}{2}|m-m'|}}{\sqrt{\sin \theta |p(\theta)|}} e^{-\int_{\theta_2}^{\theta} |p(\theta)| d\theta} & \text{при } \theta_2 < \theta < \pi. \end{cases} \quad (2.43)$$

Причем в формуле (2.43) использованы сокращенные обозначения

$$p(\theta) = \frac{\sqrt{(l + 1/2)^2 \sin^2 \theta - m^2 - m'^2 + 2mm' \cos \theta}}{\sin \theta}, \quad (2.44)$$

$$|p(\theta)| = \frac{\sqrt{-(l + 1/2)^2 \sin^2 \theta + m^2 + m'^2 - 2mm' \cos \theta}}{\sin \theta}. \quad (2.45)$$

Константу  $C_{mm'}^l$  нам предстоит еще найти.

4. Интегралы, входящие в формулу (2.43), можно вычислить. При этом оказывается, что они равны выражениям

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta &= -\sqrt{\varepsilon} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\varepsilon \cos \theta - mm'}{\sqrt{\varepsilon} p(\theta) \sin \theta} \right] + \\ &+ m \operatorname{arctg} \left[ \frac{m \cos \theta - m'}{p(\theta) \sin \theta} \right] + m' \operatorname{arctg} \left[ \frac{m' \cos \theta - m}{p(\theta) \sin \theta} \right] + \\ &+ \sqrt{\varepsilon} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} |m - m'|, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta} |p(\theta)| d\theta &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\varepsilon} |p(\theta)| \sin \theta + \varepsilon \cos \theta - mm'}{\sqrt{\varepsilon} |p(\theta)| \sin \theta - \varepsilon \cos \theta + mm'} \right| - \\ &- \frac{m}{2} \ln \left| \frac{|p(\theta)| \sin \theta + m \cos \theta - m'}{|p(\theta)| \sin \theta - m \cos \theta + m'} \right| - \\ &- \frac{m'}{2} \ln \left| \frac{|p(\theta)| \sin \theta + m' \cos \theta - m}{|p(\theta)| \sin \theta - m' \cos \theta + m} \right|; \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\int_{\theta_2}^{\theta_1} |\rho(\theta)| d\theta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\varepsilon} |\rho(\theta)| \sin \theta + \varepsilon \cos \theta - mm'}{\sqrt{\varepsilon} |\rho(\theta)| \sin \theta - \varepsilon \cos \theta + mm'} \right| -$$

$$- \frac{m}{2} \ln \left| \frac{|\rho(\theta)| \sin \theta + m \cos \theta - m'}{|\rho(\theta)| \sin \theta - m \cos \theta + m'} \right| -$$

$$- \frac{m'}{2} \ln \left| \frac{|\rho(\theta)| \sin \theta + m' \cos \theta - m}{|\rho(\theta)| \sin \theta - m' \cos \theta + m} \right|. \quad (2.48)$$

Убедиться в справедливости этих формул нетрудно. Для этого надо просто продифференцировать их по  $\theta$  и проверить, что получаются правильные соотношения. Нужно также проверить справедливость этих формул при  $\theta = \theta_1$  и при  $\theta = \theta_2$ .

Не будем здесь проводить этих, по существу, тривиальных, хотя и очень громоздких, дифференцирований. Убедиться в справедливости формулы (2.47) при  $\theta = \theta_1$  и формулы (2.48) при  $\theta = \theta_2$  не представляет никакого труда, для этого надо только учесть, что  $|\rho(\theta_1)| = 0$  и  $|\rho(\theta_2)| = 0$ . Остановимся на проверке справедливости формулы (2.46) при  $\theta = \theta_1$  и при  $\theta = \theta_2$ .

При  $\theta = \theta_1$  имеем  $\rho(\theta_1) = 0$ , так что все аргументы арктангенсов в формуле (2.46) обращаются в бесконечность. Нам нужно знать, однако, в какую именно, положительную или отрицательную, бесконечность обращаются эти аргументы. Согласно (2.12) получаем

$$m \cos \theta_1 - m' = \sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2} \times$$

$$\times \left( -\frac{m'}{l + 1/2} \cdot \frac{\sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2}}{l + 1/2} + \frac{m}{l + 1/2} \cdot \frac{\sqrt{(l + 1/2)^2 - m'^2}}{l + 1/2} \right),$$

$$m' \cos \theta_1 - m = \sqrt{(l + 1/2)^2 - m'^2} \times$$

$$\times \left( -\frac{m}{l + 1/2} \cdot \frac{\sqrt{(l + 1/2)^2 - m'^2}}{l + 1/2} + \frac{m'}{l + 1/2} \cdot \frac{\sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2}}{l + 1/2} \right).$$

В соответствии с формулами (2.14), (2.15) рассмотрим теперь углы, определяемые соотношениями

$$\cos \alpha = \frac{m}{l + 1/2}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2}}{l + 1/2}, \quad (2.49)$$

$$\cos \beta = \frac{m'}{l + 1/2}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{(l + 1/2)^2 - m'^2}}{l + 1/2}, \quad (2.50)$$

причем будем считать, что  $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ . Тогда непосредственно видим, что

$$m \cos \theta_1 - m' = -\sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2} \sin(\alpha - \beta),$$

$$m' \cos \theta_1 - m = \sqrt{(l + 1/2)^2 - m'^2} \sin(\alpha - \beta).$$

При  $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$  неравенство  $\sin(\alpha - \beta) > 0$  имеет место при  $\cos \alpha - \cos \beta < 0$  (т. е. при  $m - m' < 0$ ), а неравенство  $\sin(\alpha - \beta) < 0$  имеет место при  $\cos \alpha - \cos \beta > 0$  (т. е. при  $m - m' > 0$ ). Таким образом,

$$\begin{aligned} m \cos \theta_1 - m' &> 0 \text{ при } m - m' > 0, \\ m \cos \theta_1 - m' &< 0 \text{ при } m - m' < 0, \\ m' \cos \theta_1 - m &> 0 \text{ при } m - m' < 0, \\ m' \cos \theta_1 - m &< 0 \text{ при } m - m' > 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

При  $\theta = \theta_1$ , используя снова формулу (2.12), получаем

$$(l + 1/2)^2 \cos \theta_1 - mm' = \sqrt{[(l + 1/2)^2 - m^2][(l + 1/2)^2 - m'^2]},$$

т. е. всегда

$$(l + 1/2)^2 \cos \theta_1 - mm' > 0. \quad (2.52)$$

Таким образом, при  $\theta = \theta_1$  и при  $m - m' > 0$  первый, второй и третий арктангенсы в формуле (2.46) обращаются соответственно в  $\pi/2$ ,  $\pi/2$ ,  $-\pi/2$ , а при  $m - m' < 0$  они обращаются соответственно в  $\pi/2$ ,  $-\pi/2$ ,  $\pi/2$ , т. е. формула (2.46) действительно имеет место при  $\theta = \theta_1$ .

При  $\theta = \theta_2$  имеем  $p(\theta_2) = 0$ . Здесь снова можно провести рассуждения, подобные только что приведенным, используя формулы (2.13), (2.14), (2.15), и получить

$$\begin{aligned} m \cos \theta_2 - m' &> 0 \text{ при } m + m' < 0, \\ m \cos \theta_2 - m' &< 0 \text{ при } m + m' > 0, \\ m' \cos \theta_2 - m &> 0 \text{ при } m + m' < 0, \\ m' \cos \theta_2 - m &< 0 \text{ при } m + m' > 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Можно также сделать заключение, что всегда

$$(l + 1/2)^2 \cos \theta_2 - mm' < 0. \quad (2.54)$$

Таким образом, при  $\theta = \theta_2$  и при  $m + m' > 0$  первый, второй и третий аргументы в формуле (2.46) обращаются в  $-\pi/2$ ,  $-\pi/2$ ,  $-\pi/2$  соответственно, а при  $m + m' < 0$  они обращаются в  $-\pi/2$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi/2$ . Следовательно, при  $\theta = \theta_2$  имеем формулу

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta) d\theta = \pi(l + 1/2) - \frac{\pi}{2} |m - m'| - \frac{\pi}{2} |m + m'|, \quad (2.55)$$

полностью совпадающую с результатом описанного выше контурного интегрирования.

5. Формуле (2.46) можно дать следующую наглядную геометрическую интерпретацию. Возьмем в пространстве точку  $O$  и отложим от нее полуоси  $Oz$  и  $Oz'$ , составляющие друг с другом фиксированный угол  $\theta$ . Пусть  $\vec{k}$  — направляющий единичный вектор оси  $Oz$ , а  $\vec{k}'$  — направляющий еди-

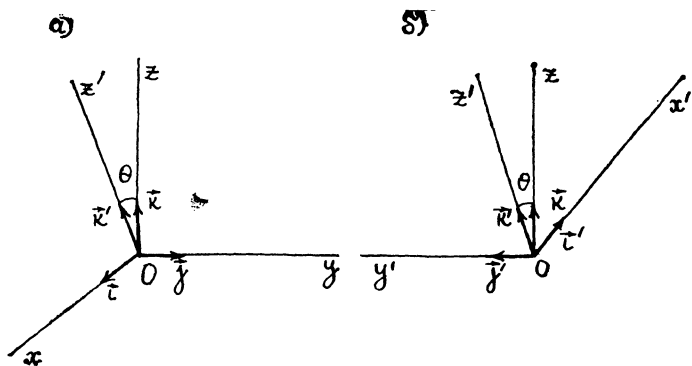


Рис. 8. Декартовы системы координат  $Oxyz$  и  $Ox'y'z'$ , связанные с осями  $Oz$  и  $Oz'$ , проекции на последние углового момента  $\vec{l}$  равны  $m$  и  $m'$  соответственно

ничный вектор оси  $Oz'$ . Можно рассмотреть две следующие декартовы системы координат  $Oxyz$  и  $Ox'y'z'$  соответственно с ортами

$$\vec{i} = [\vec{j} \cdot \vec{k}], \quad \vec{j} = \frac{[\vec{k} \cdot \vec{k}']}{|\vec{k} \cdot \vec{k}'|}, \quad \vec{k}, \quad (2.56)$$

$$\vec{i}' = [\vec{j}' \cdot \vec{k}'], \quad \vec{j}' = \frac{[\vec{k}' \cdot \vec{k}]}{|\vec{k}' \cdot \vec{k}|} = -\vec{j}, \quad \vec{k}' \quad (2.57)$$

(рис. 8). Будем считать заданными числа  $l+1/2$ ,  $m$ ,  $m'$  и фиксируем значения некоторых сигнатурных множителей  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$ , которые принимают только значения, равные  $\pm 1$ , причем эти  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$  такие, что всегда  $\varepsilon' = -\varepsilon$ . Возьмем теперь вектор  $\vec{l}$  заданной длины  $|\vec{l}| = l+1/2$ , имеющий проекции на оси  $Oz$  и  $Oz'$ , равные соответственно  $m$  и  $m'$ , и такой, что  $\text{sign } p_y = \varepsilon$  или  $\text{sign } p'_y = \varepsilon'$  (так как  $\vec{j}' = -\vec{j}$ , то  $p'_y = -p_y$ ).

Вектор  $\vec{l}$  будем называть вектором классического момента количества движения. Разлагая вектор  $\vec{l}$  по ортам  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  и  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$ ,  $\vec{k}'$ , имеем формулы

$$\vec{l} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j} + l_z \vec{k}, \quad (2.58)$$

$$\vec{l} = l'_x \vec{i}' + l'_y \vec{j}' + l'_z \vec{k}', \quad (2.59)$$

при этом очевидно, что  $l_z = m$ ,  $l'_z = m'$ . Обратим внимание, что введенные нами орты удовлетворяют соотношениям

$$\vec{k}' = \vec{k} \cos \theta + \vec{i} \sin \theta, \quad \vec{k} = \vec{k}' \cos \theta + \vec{i} \sin \theta. \quad (2.60)$$

Умножая скалярно эти соотношения на вектор  $\vec{l}$ , непосредственно получаем проекции  $l_x = \frac{m' - m \cos \theta}{\sin \theta}$ ,

$l'_x = \frac{m - m' \cos \theta}{\sin \theta}$ . Нам остается определить проекции  $l_y$  и  $l'_y$ . Для них имеем очевидные формулы

$$l_y = \varepsilon \sqrt{(l + 1/2)^2 - l_x^2 - l_z^2} \equiv \varepsilon p(\theta),$$

$$l'_y = \varepsilon' \sqrt{(l + 1/2)^2 - l_x'^2 - l_z'^2} \equiv \varepsilon' p(\theta),$$

где  $p(\theta)$  дается формулой (2.44). Таким образом, окончательно имеем два разложения:

$$\vec{l} = \frac{m' - m \cos \theta}{\sin \theta} \vec{i} + \varepsilon p(\theta) \vec{j} + m \vec{k}, \quad (2.61)$$

$$\vec{l} = \frac{m - m' \cos \theta}{\sin \theta} \vec{i} + \varepsilon' p(\theta) \vec{j} + m' \vec{k}. \quad (2.62)$$

Так как системы декартовых осей координат  $Oxyz$  и  $Ox'y'z'$  полностью подобны, то дальнейшие рассуждения будем проводить только в отношении декартовых осей  $Oxyz$ . Рассмотрим сферические координаты  $l + 1/2$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$  вектора  $\vec{l}$  в декартовой системе  $Oxyz$ , т. е. положим

$$l_x = (l + 1/2) \sin \Theta \cos \Phi,$$

$$l_y = (l + 1/2) \sin \Theta \sin \Phi,$$

$$l_z = (l + 1/2) \cos \Theta. \quad (2.63)$$

Угол  $\Theta$  — полярный угол, изменяющийся в пределах  $0 \leq \Theta \leq \pi$  и равный, по определению, углу между вектором  $\vec{l}$  и полуосью  $Oz$ . Угол  $\Phi$  — азимутальный угол, изменяющийся в пределах  $0 \leq \Phi < 2\pi$ . Это угол, на который надо повернуть по правому винту с осью, направленной по  $Oz$ , полуплоскость  $Oxz$  до совпадения ее с полуплоскостью, проведенной через ось  $Oz$  и вектор  $\vec{l}$  (рис. 9).

Дифференцируя формулы (2.63) с использованием (2.61) по  $\theta$ , легко убедиться, что имеют место простые формулы для производных

$$\frac{d\theta}{d\theta} = 0, \quad \frac{d\Phi}{d\theta} = -\varepsilon \frac{m - m' \cos \theta}{\sin^2 \theta p(\theta)}. \quad (2.64)$$

Легко получить также аналогичные этим формулы

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = 0, \quad \frac{d\Phi'}{d\theta} = -\varepsilon' \frac{m' - m \cos \theta}{\sin^2 \theta p(\theta)}, \quad (2.65)$$

где  $\theta'$ ,  $\Phi'$  — сферические углы вектора  $\vec{l}$  относительно декартовых осей  $Ox'y'z'$ .

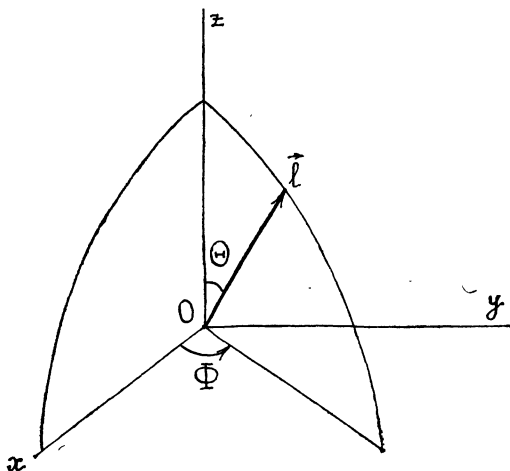


Рис. 9. Сферические координаты  $\theta$ ,  $\Phi$  вектора  $\vec{l}$ , связанные с системой декартовых осей  $Oxyz$

Рассмотрим теперь орты  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$ , которые определим формулами

$$\vec{e}_1 = \frac{[\vec{l}, \vec{k}]}{|[\vec{l}, \vec{k}]|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{[\vec{l}, [\vec{l}, \vec{k}]]}{|[\vec{l}, [\vec{l}, \vec{k}]]|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}. \quad (2.66)$$

Используя формулы (2.58), непосредственно получаем

$$[\vec{l}, \vec{k}] = l_y \vec{i} - l_x \vec{j},$$

$$[\vec{l}, [\vec{l}, \vec{k}]] = l_x l_z \vec{i} + l_y l_z \vec{j} - (l_x^2 + l_y^2) \vec{k}.$$

Нетрудно получить далее, что

$$|[\vec{l}, \vec{k}]| = (l + 1/2) \sin \theta = \sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2}, \quad (2.67)$$

$$|[\vec{l}, [\vec{l}, \vec{k}]]| = |\vec{l}| |[\vec{l}, \vec{k}]| = (l + 1/2) \sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2}. \quad (2.68)$$

Рассмотрим, кроме того, вектор  $[\vec{l}, \vec{k}']$ , который согласно (2.60) равен

$$[\vec{l}, \vec{k}'] = l_y \cos \theta \vec{i} + (l_z \sin \theta - l_x \cos \theta) \vec{j} - l_y \sin \theta \vec{k}. \quad (2.69)$$

Рассчитаем проекции вектора  $[\vec{l}, \vec{k}']$  на оси с направляющими единичными векторами  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ . Для этого рассчитаем следующие скалярные произведения:

$$\begin{aligned} ([\vec{l}, \vec{k}'] \cdot [\vec{l}, \vec{k}']) &= l_y^2 \cos^2 \theta - l_x (l_z \sin \theta - l_x \cos \theta) = \\ &= (l + 1/2)^2 \cos^2 \theta - mm', \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} ([\vec{l}, [\vec{l}, \vec{k}']] \cdot [\vec{l}, \vec{k}']) &= l_x l_y l_z \cos \theta + l_y l_z (l_z \sin \theta - l_x \cos \theta) + \\ &+ l_y (l_x^2 + l_y^2) \sin \theta = \varepsilon \rho(\theta) (l + 1/2)^2 \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Проекции  $[\vec{l}, \vec{k}']_{\xi}$  и  $[\vec{l}, \vec{k}']_{\eta}$  вектора  $[\vec{l}, \vec{k}']$  на осях  $O\xi$  и  $O\eta$  (рис. 10) вдоль векторов  $\vec{l}_1$  и  $\vec{l}_2$  рассчитаем с помощью соотношений

$$\begin{aligned} ([\vec{l}, \vec{k}'] \cdot [\vec{l}, \vec{k}']) &= |[\vec{l}, \vec{k}']| |[\vec{l}, \vec{k}']_{\xi}, \\ ([\vec{l}, [\vec{l}, \vec{k}']] \cdot [\vec{l}, \vec{k}']) &= |[\vec{l}, [\vec{l}, \vec{k}]]| |[\vec{l}, \vec{k}']_{\eta}, \end{aligned}$$

из которых с использованием (2.67), (2.68) и (2.70), (2.71) получаем

$$[\vec{l}, \vec{k}']_{\xi} = \frac{(l + 1/2)^2 \cos^2 \theta - mm'}{\sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2}}, \quad (2.72)$$

$$[\vec{l}, \vec{k}']_{\eta} = \frac{\varepsilon \rho(\theta) (l + 1/2) \sin \theta}{\sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2}}. \quad (2.73)$$

Введем теперь азимутальный угол  $\Psi$ , определяемый соотношениями

$$\begin{aligned} [\vec{l}, \vec{k}']_{\xi} &= \sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2} \cos \Psi, \\ [\vec{l}, \vec{k}']_{\eta} &= \sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2} \sin \Psi, \end{aligned} \quad (2.74)$$

причем угол  $\Psi$  изменяется в пределах  $0 \leq \Psi < 2\pi$ . Угол  $\Psi$  — угол, на который надо повернуть по правому винту, ввинчи-



ваемому в вектор  $\vec{l}$ , полуплоскость, проходящую через  $Oz$  и вектор  $\vec{l}$ , до совпадения ее с полуплоскостью, проходящей через  $Oz'$  и вектор  $\vec{l}$ . Дифференцируя по  $\theta$  соотношения (2.74), с использованием формул (2.72), (2.73) получаем

$$\frac{d\Psi}{d\theta} = \varepsilon \frac{l + 1/2}{\rho(\theta)}. \quad (2.75)$$

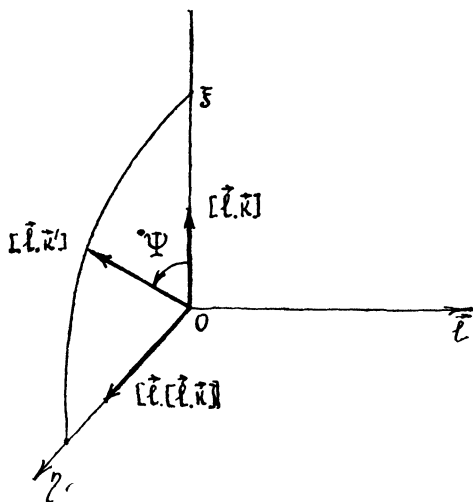


Рис. 10. Иллюстрация ортов  $e_1, e_2, e_3$  и угла  $\Psi$

Формулы (2.75), (2.64), (2.65) таковы, что из них непосредственно следует, что

$$m \frac{d\Phi}{d\theta} - m' \frac{d\Phi'}{d\theta} + (l + 1/2) \frac{d\Psi}{d\theta} = \varepsilon \rho(\theta), \quad (2.76)$$

где  $\rho(\theta)$  дается формулой (2.44). Таким образом,

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\theta_1}^{\theta} \rho(\theta) d\theta = m(\Phi - \Phi_1) - m'(\Phi' - \Phi'_1) + \\ + (l + 1/2)(\Psi - \Psi_1), \end{aligned} \quad (2.77)$$

где предельные углы  $\Phi_1, \Phi'_1, \Psi_1$  — значения углов  $\Phi, \Phi', \Psi$  при  $\theta = \theta_1$ .

Углы  $\Phi, \Phi', \Psi$  еще раз изображены на рис. 11. Чтобы не загромождать рисунок, угол  $\Phi'$ , полностью подобный углу  $\Phi$ , не показан.

Убедимся, что формула (2.77) совпадает с формулой (2.46), а также вычислим предельные углы  $\Psi_1, \Phi_1, \Phi'_1$  и  $\Psi_2, \Phi_2, \Phi'_2$  при  $\theta = \theta_1$  и при  $\theta = \theta_2$  соответственно.

Прежде всего заметим, что для полярных координат  $r, \varphi$  на плоскости  $x, y$ , для которых имеют место соотношения

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (2.78)$$

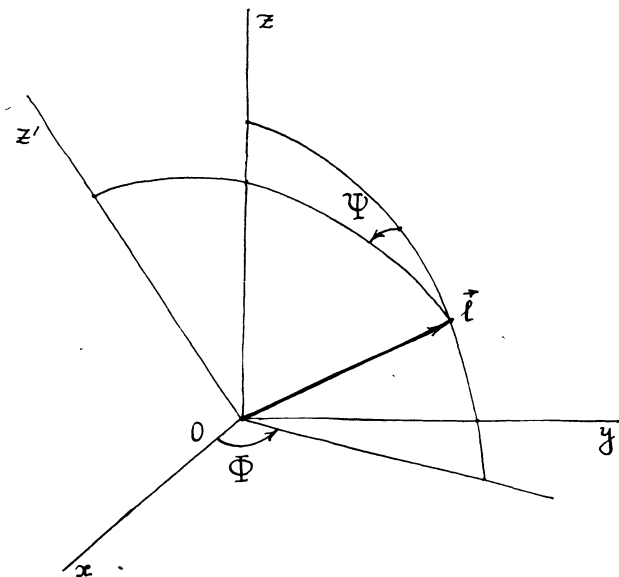


Рис. 11. Иллюстрация углов  $\Psi, \Phi, \Phi'$ . Угол  $\Phi'$ , полностью аналогичный  $\Phi$ , не показан

причем мы считаем угол  $\varphi$  изменяющимся в пределах  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , имеет место простая формула

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \pm \pi - \eta \frac{\pi}{2}, \quad (2.79)$$

где  $\eta = \operatorname{sign} y$ . Убедиться в ее правильности не представляет большого труда.

Отмечая, что согласно нашим определениям  $\varepsilon = \operatorname{sign} l_y$ ,  $\varepsilon' = \operatorname{sign} l'_y = -\varepsilon$ , пользуясь формулами (2.79) и (2.61), (2.62), получаем

$$\begin{aligned} \Phi &= -\operatorname{arctg} \frac{l_x}{l_y} \pm \pi - \varepsilon \frac{\pi}{2} = \varepsilon \operatorname{arctg} \left[ \frac{m \cos \theta - m'}{p(\theta) \sin \theta} \right] \pm \\ &\pm \pi - \varepsilon \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\Phi' = -\operatorname{arctg} \frac{l'_x}{l'_y} + \pi - \varepsilon' \frac{\pi}{2} = -\varepsilon \operatorname{arctg} \left[ \frac{m' \cos \theta - m}{\rho(\theta) \sin \theta} \right] + \pi + \varepsilon \frac{\pi}{2}. \quad (2.81)$$

Замечая, что согласно (2.73)  $\operatorname{sign} [\vec{l}, \vec{k}']_{\eta} = \varepsilon$ , мы имеем далее

$$\begin{aligned} \Psi &= -\operatorname{arctg} \frac{[\vec{l}, \vec{k}']_{\xi}}{[\vec{l}, \vec{k}']_{\eta}} + \pi - \varepsilon \frac{\pi}{2} = \\ &= -\varepsilon \operatorname{arctg} \left[ \frac{(l+1/2)^2 \cos \theta - mm'}{(l+1/2) \rho(\theta) \sin \theta} \right] + \pi - \varepsilon \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Подставляя (2.80)—(2.82) в (2.77), непосредственно получаем формулу (2.46), если только будем считать, что

$$\begin{aligned} -m\Phi_1 + m'\Phi_1' - (l+1/2)\Psi_1 &= (\varepsilon-1)(l+1/2)\pi + \\ + \varepsilon m \frac{\pi}{2} + \varepsilon m' \frac{\pi}{2} - \varepsilon \frac{\pi}{2} |m-m'| - m\pi + m'\pi. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Убедимся, что это соотношение действительно имеет место. Вычислим предельные углы  $\Phi_1$ ,  $\Phi_1'$ ,  $\Psi_1$ , используя определяющие формулы (2.80)—(2.82) и формулы (2.51), (2.52). Будем иметь

$$\Phi_1 = \begin{cases} \pi & \text{при } m-m' > 0 \\ (1-\varepsilon)\pi & \text{при } m-m' < 0, \end{cases} \quad (2.84)$$

$$\Phi_1' = \begin{cases} (1+\varepsilon)\pi & \text{при } m-m' > 0 \\ \pi & \text{при } m-m' < 0, \end{cases} \quad (2.85)$$

$$\Psi_1 = (1-\varepsilon)\pi. \quad (2.86)$$

Подставляя (2.84)—(2.86) в (2.83), убеждаемся, что действительно имеем тождество (2.83).

Вычислим теперь предельные углы  $\Phi_2$ ,  $\Phi_2'$ ,  $\Psi_2$ , полагая в формулах (2.80)—(2.82)  $\theta = \theta_2$  и используя формулы (2.53), (2.54). Будем иметь

$$\Phi_2 = \begin{cases} (1-\varepsilon)\pi & \text{при } m+m' > 0 \\ \pi & \text{при } m+m' < 0, \end{cases} \quad (2.87)$$

$$\Phi_2' = \begin{cases} (1+\varepsilon)\pi & \text{при } m+m' > 0, \\ \pi & \text{при } m+m' \leq 0, \end{cases} \quad (2.88)$$

$$\Psi_2 = \pi. \quad (2.89)$$

Используя этот результат, согласно (2.77) непосредственно имеем формулу

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta) d\theta = \pi \left( l + \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi}{2} |m + m'| - \frac{\pi}{2} |m - m'|, \quad (2.90)$$

т. е. в точности формулу (2.55).

6. Приступим к отысканию константы  $C_{mm'}^l$  и воспользуемся прежде всего условием нормировки (2.2). При этом сразу отбросим асимптотически малые «хвосты» функции  $d_{mm'}^l(\theta)$  на отрезках  $0 \leq \theta < \theta_1$ ,  $\theta_2 \leq \theta < \pi$ . Тогда получим условие

$$4 [C_{mm'}^l]^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \frac{\cos^2 \left[ \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{\sin \theta p(\theta)} = \frac{1}{l + 1/2},$$

в котором квадрат косинуса мы приближенно заменим на  $1/2$ . Тогда окончательно получим

$$2 [C_{mm'}^l]^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{p(\theta)} = \frac{1}{l + 1/2}, \quad (2.91)$$

или

$$2 [C_{mm'}^l]^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin \theta d\theta}{V(l + 1/2)^2 \sin^2 \theta - m^2 - m'^2 + 2mm' \cos \theta} = \frac{1}{l + 1/2}. \quad (2.91a)$$

Интеграл, стоящий в левой части, преобразуем, вводя новую переменную интегрирования  $x = \cos \theta$ :

$$2 [C_{mm'}^l]^2 \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{V(x_1 - x)(x - x_2)} = 1. \quad (2.92)$$

Здесь  $x_1 = \cos \theta_1$ ,  $x_2 = \cos \theta_2$ .

Рассмотрим подынтегральную функцию на комплексной плоскости  $z$ :

$$f(z) = \frac{1}{V(x_1 - z)(z - x_2)}.$$

Функция  $f(z)$  имеет два ветвящихся полюса второго порядка при  $z = x_1$  и при  $z = x_2$  (рис. 12). При этом надо выбрать определенную ветвь корня, для чего проведем разрез на

комплексной плоскости  $z$  от  $x_2$  до  $x_1$ . Аргументы  $\varphi_1 = \arg(x_1 - z)$  и  $\varphi_2 = \arg(z - x_2)$ , которые отсчитываются от положительного направления действительной оси  $x$  так, чтобы никогда не пересекалась линия разреза, изменяются в пределах  $-\pi \leq \varphi_1 \leq \pi$  и  $0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$ . Выберем ветвь корня так, чтобы для нее

$$\sqrt{(x_1 - z)(z - x_2)} = \sqrt{|x_1 - z| \cdot |z - x_2|} e^{i \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}.$$

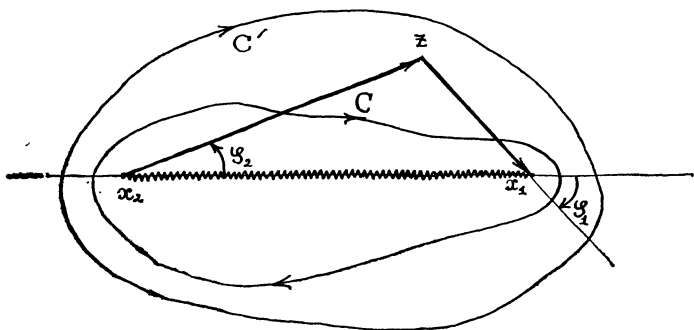


Рис. 12. Иллюстрация контурного интегрирования для условия нормировки

На верхнем берегу разреза  $\varphi_2 = 0$ ,  $\varphi_1 = 0$  и поэтому

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x)(x - x_2)}},$$

где  $x$  — действительное. На нижнем берегу разреза  $\varphi_2 = 2\pi$ ,  $\varphi_1 = 0$  и поэтому

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x_1 - x)(x - x_2)}},$$

где  $x$  — действительное. В последних двух формулах подразумевается арифметическое значение корня. При больших  $|z| \rightarrow \infty$ , например при действительных положительных  $x \rightarrow \infty$ , имеем  $\varphi_1 = -\pi$ ,  $\varphi_2 = 0$ . Поэтому  $f(x) \cong i/x$ . При действительных отрицательных  $x \rightarrow -\infty$  имеем  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$  и поэтому  $f(x) \cong i/x$ . Таким образом, вообще

$$f(z) \cong \frac{i}{z} \text{ при } |z| \rightarrow \infty.$$

Учитывая свойства функции  $f(z)$ , можно интеграл в (2.92) преобразовать в контурный интеграл и получить

$$[C_{mm}^l] \int_C f(z) dz = 1, \quad (2.93)$$

где контур  $C$  изображен на рис. 12. Интеграл по контуру  $C$  можно преобразовать в интеграл по бесконечно большому контуру  $C'$ , так что

$$\int_C f(z) dz = \int_{C'} f(z) dz = - \int_0^{2\pi} \frac{i}{Re^{i\varphi}} Re^{i\varphi} i d\varphi = 2\pi.$$

Из условия (2.93) получаем

$$2\pi [C_{mm'}^l]^2 = 1.$$

Следовательно,

$$|C_{mm'}^l| = 1/\sqrt{2\pi}. \quad (2.94)$$

Предстоит еще определить знак констант  $C_{mm'}^l$ , исходя из требования справедливости соотношений (2.3)—(2.5), в частности рекуррентного соотношения (2.3). При этом достаточно рассмотреть функцию  $d_{mm'}^l(\theta)$ , даваемую формулой (2.43), только на отрезке  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ .

Рассмотрим правую часть рекуррентной формулы (2.3). Нам нужно продифференцировать по  $\theta$  функцию  $d_{mm'}^l(\theta)$ . Приблизительно при этом дифференцировании можно дифференцировать только аргумент косинуса, так что при  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  получим

$$\frac{d}{d\theta} [d_{mm'}^l(\theta)] = - \frac{2C_{mm'}^l}{V \sin \theta p(\theta)} p(\theta) \sin \left[ \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right].$$

Таким образом, в правой части рекуррентной формулы (2.3) стоит выражение, равное приближенно

$$[l^2 - m^2]^{-1/2} \frac{2C_{mm'}^l}{V \sin \theta p(\theta)} \left\{ \left( -\frac{m}{\sin \theta} ; m' \operatorname{ctg} \theta \right) \cos \left[ \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right] \pm \right. \\ \left. \pm p(\theta) \sin \left[ \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right] \right\}.$$

Заметим, что

$$\left( -\frac{m}{\sin \theta} ; m' \operatorname{ctg} \theta \right)^2 ; p^2(\theta) = l^2 - m'^2.$$

Следовательно, можно ввести угол  $\delta$ , изменяющийся в пределах  $0 \leq \delta \leq \pi$  и такой, что

$$\cos \delta = \frac{1}{V l^2 - m'^2} \left( -\frac{m}{\sin \theta} ; m' \operatorname{ctg} \theta \right), \\ \sin \delta = \frac{p(\theta)}{V l^2 - m'^2}.$$

Согласно (2.79) имеем

$$\delta = -\operatorname{arctg} \left[ \frac{-m + m' \cos \theta}{\sin \theta \rho(\theta)} \right] + \frac{\pi}{2}.$$

Используя приведенные формулы, мы выписанное выше выражение для правой части (2.3) можем записать в виде

$$\frac{2C_{mm'}^l}{\sqrt{\sin \theta \rho(\theta)}} \cos \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \pm \operatorname{arctg} \left[ \frac{-m + m' \cos \theta}{\sin \theta \rho(\theta)} \right] \mp \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Рассмотрим теперь левую часть рекуррентной формулы (2.3). Мы должны ее тоже представить в приближенном виде, учитывая, что  $m' \gg 1$ . Тогда на отрезке  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  получим для левой части (2.3) следующее выражение:

$$\frac{2C_{m,m'\pm 1}^l}{\sqrt{\sin \theta \rho(\theta)}} \cos \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \pm \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{dp(\theta)}{dm'} d\theta \right\}.$$

Так как функция  $d_{m,m'\pm 1}^l(\theta)$  очень сильно осциллирует, саму ее разлагать по малости  $\pm 1$  нельзя; можно разложить только аргумент косинуса, что мы и сделали. Это весьма важное обстоятельство. Дифференцируя правую и левую части формулы (2.46) по  $m'$ , нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{dp(\theta)}{dm'} d\theta = \operatorname{arctg} \left[ \frac{m' \cos \theta - m}{\rho(\theta) \sin \theta} \right] + \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(m - m'),$$

так что левую часть рекуррентной формулы (2.3) можно представить в виде

$$\frac{2C_{m,m'\pm 1}^l}{\sqrt{\sin \theta \rho(\theta)}} \cos \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \pm \operatorname{arctg} \left[ \frac{m' \cos \theta - m}{\rho(\theta) \sin \theta} \right] \pm \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(m - m') \right\}.$$

Правая часть должна равняться левой, а поэтому должно выполняться соотношение

$$C_{mm'}^l \sin \left( \mp \frac{\pi}{2} \right) = C_{m,m'\pm 1}^l \sin \left( \pm \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(m - m') \right),$$

откуда непосредственно получаем, что

$$C_{m,m'\pm 1}^l = -C_{mm'}^l \frac{m - m'}{|m - m'|}.$$

Используя теперь соотношение (2.4), сразу получаем, что

$$C_{mm'}^l = (-1)^{m-m'} C_{m'm}^l,$$

а потому из только что выведенного соотношения непосредственно следует

$$C_{m\pm 1, m'}^l = -C_{mm'}^l \frac{m-m'}{|m-m'|}.$$

Объединяя вместе полученные результаты, приходим к следующему выводу:

$$C_{mm'}^l = (-1)^{\frac{m-m'+|m-m'|}{2}} C_{00}^l. \quad (2.95)$$

Нам остается воспользоваться соотношением (2.5), чтобы найти знак величины  $C_{00}^l$ . Пользуясь известной формулой Дарбу

$$P_l(\cos \theta) \cong \sqrt{\frac{2}{l\pi \sin \theta}} \cos \left[ (l + 1/2)\theta - \frac{\pi}{4} \right],$$

из (2.5) непосредственно получаем, что

$$C_{00}^l = 1/\sqrt{2\pi}. \quad (2.96)$$

Подставляя (2.96) в (2.95), окончательно имеем

$$C_{mm'}^l = (-1)^{\frac{m-m'+|m-m'|}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.97)$$

7. Итак, в результате всех наших рассуждений в этой главе мы получили следующие квазиклассические формулы для функций  $d_{mm'}^l(\theta)$ :

$$d_{mm'}^l(\theta) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{m-m'+|m-m'|}{2}}}{\sqrt{2\pi} |\rho(\theta)| \sin \theta} e^{\int_0^\theta \rho(\theta) d\theta} & \text{при } 0 \leq \theta < \theta_1, \\ \frac{2(-1)^{\frac{m-m'+|m-m'|}{2}}}{\sqrt{2\pi} \rho(\theta) \sin \theta} \cos \left[ \int_{\theta_1}^\theta \rho(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right] & \text{при } \theta_1 < \theta < \theta_2, \\ \frac{(-1)^{l - \frac{1}{2}|m-m'| + \frac{1}{2}(m-m')}}{\sqrt{2\pi} |\rho(\theta)| \sin \theta} e^{\int_{\theta_2}^\theta \rho(\theta) d\theta} & \text{при } \theta_2 < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (2.98)$$



причем в этих формулах

$$\rho(\theta) = \frac{\sqrt{(l+1/2)^2 \sin^2 \theta - m^2 - m'^2 + 2mm' \cos \theta}}{\sin \theta}, \quad (2.99)$$

$$|\rho(\theta)| = \frac{\sqrt{-(l+1/2)^2 \sin^2 \theta + m^2 + m'^2 - 2mm' \cos \theta}}{\sin \theta}, \quad (2.100)$$

а углы  $\theta_1, \theta_2$  удовлетворяют условию  $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \pi$  и определяются из соотношений

$$\cos \theta_1 = \frac{mm' + \sqrt{[(l+1/2)^2 - m^2][(l+1/2)^2 - m'^2]}}{(l+1/2)^2}, \quad (2.101)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{mm' - \sqrt{[(l+1/2)^2 - m^2][(l+1/2)^2 - m'^2]}}{(l+1/2)^2}. \quad (2.102)$$

1. Выведем приближенную квазиклассическую формулу для 3j-символов Вигнера, основываясь на квазиклассических формулах для функций  $D_{mm'}^l(\varphi, \theta, \psi)$ , полученных в гл. 2.

В качестве исходной возьмем здесь точную формулу для произведения двух 3j-символов Вигнера:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi d\psi D_{m_1 m_1'}^{l_1}(\varphi, \theta, \psi) D_{m_2 m_2'}^{l_2}(\varphi, \theta, \psi) \times \\ & \quad \times D_{m_3 m_3'}^{l_3}(\varphi, \theta, \psi), \end{aligned} \quad (3.1)$$

Вместо функций  $D_{mm'}^l(\varphi, \theta, \psi)$ , входящих в интеграл в правой части, подставим следующие точные выражения для них:

$$D_{mm'}^l(\varphi, \theta, \psi) = e^{-im\varphi} d_{mm'}^l(\theta) e^{im'\psi}; \quad (3.2)$$

после этого проведем тривиальные интегрирования по углам  $\varphi, \psi$  и получим действительно исходную здесь формулу

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d_{m_1 m_1'}^{l_1}(\theta) d_{m_2 m_2'}^{l_2}(\theta) d_{m_3 m_3'}^{l_3}(\theta). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Неотрицательные целые числа  $l_1, l_2, l_3$  и целые числа  $m_1, m_2, m_3$  и  $m_1', m_2', m_3'$  будем считать заданными и неизменными во всем нашем рассмотрении. При этом, чтобы сразу исключить неинтересные случаи, когда заведомо правая и левая части формулы (3.3) обращаются в нуль, будем предполагать: 1) числа  $l_1, l_2, l_3$  таковы, что удовлетворяют условию треугольника, т. е. из отрезков длины  $l_1, l_2, l_3$  можно составить некоторый треугольник; 2) числа  $m_1, m_2, m_3$  и  $m_1', m_2', m_3'$  удовлетворяют неравенствам  $|m_j| \leq l_j, |m_j'| \leq l_j$ , где  $j=1, 2, 3$ , и соотношениям  $m_1 + m_2 + m_3 = 0, m_1' + m_2' + m_3' = 0$ .

Формулу (3.3) используем для вывода приближенных квазиклассических формул для  $3j$ -символов Вигнера  $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ . С этой целью подставим в подынтегральное выражение в интеграле (3.3) приближенные квазиклассические выражения для функций  $d_{mm'}^l(\theta)$ ; полученные в гл. 2. Затем приближенно вычислим получившийся интеграл и выведем некоторую приближенную формулу для произведения двух  $3j$ -символов Вигнера, стоящих в левой части формулы (3.3). При этом таким образом получаемое приближенное выражение для интеграла, имеющегося в правой части формулы (3.3), должно распадаться на два множителя, один из которых будет зависеть только от  $m_1, m_2, m_3$ , а другой — только от  $m_1', m_2', m_3'$ . Один из этих множителей даст приближенное выражение для  $3j$ -символа  $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ , а другой — для  $3j$ -символа  $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix}$ .

К сожалению, с помощью одной только формулы (3.3) мы не сможем, однако, совершенно однозначно построить искомые приближенные квазиклассические формулы для указанных  $3j$ -символов Вигнера. Их можно найти описанным способом лишь с точностью до произвольного знаменного множителя  $C_{l_1 l_2 l_3}$ , являющегося вещественной функцией  $l_1, l_2, l_3$ , удовлетворяющей условию  $C_{l_1 l_2 l_3}^2 = 1$ .

Чтобы фиксировать указанный произвол и найти все же явный вид множителя  $C_{l_1 l_2 l_3}$ , необходимо в дополнение к нашей основной формуле (3.3) воспользоваться формулами, выражающими свойства симметрии  $3j$ -символов Вигнера:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} l_2 & l_3 & l_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_3 & l_1 & l_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} l_1 & l_3 & l_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} &= (-1)^{l_1 + l_2 + l_3} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= [L(L+1)(L-2l_1)(L-2l_1-1)]^{-1/2} \times \\ &\times \left\{ \begin{pmatrix} l_1 & l_2-1 & l_3-1 \\ m_1 & m_2-1 & m_3+1 \end{pmatrix} [(l_2+m_2)(l_2+m_2-1) \times \right. \\ &\quad \times (l_3-m_3)(l_3-m_3-1)]^{1/2} - \\ &\quad \left. - 2 \begin{pmatrix} l_1 & l_2-1 & l_3-1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} [(l_2^2-m_2^2)(l_3^2-m_3^2)]^{1/2} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left( \begin{matrix} l_1 & l_2 - 1 & l_3 - 1 \\ m_1 & m_2 + 1 & m_3 - 1 \end{matrix} \right) [(l_2 - m_2)(l_2 - m_2 - 1) \times \\ \times (l_3 + m_3)(l_3 + m_3 - 1)]^{1/2} \}, \quad (3.5)$$

в котором  $L = l_1 + l_2 + l_3$ , и асимптотической формулой

$$\left( \begin{matrix} l_1 & l_3 - l & l_3 \\ m_1 & m_3 - m_1 & -m_3 \end{matrix} \right) \cong \frac{(-1)^{l_3+m_3}}{\sqrt{2l_3+1}} d_{m_1 l}^{l_1}(\theta), \quad (3.6)$$

в которой  $\cos \theta = m_3 / (l_3 + 1/2)$  и которая справедлива, когда  $l_1, m_1, l$  — малые величины одного порядка малости.

2. Займемся приближенным вычислением интеграла, стоящего в правой части формулы (3.3):

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d_{m_1 m_1}^{l_1}(\theta) d_{m_2 m_2}^{l_2}(\theta) d_{m_3 m_3}^{l_3}(\theta). \quad (3.7)$$

В подынтегральное выражение вместо функций  $d_{mm'}^l(\theta)$ , как мы уже сказали, подставим приближенные выражения для них, полученные в гл. 2. В отличие от последней главы, однако, в указанных выражениях для функций  $d_{mm'}^l(\theta)$  вообще пренебрежем значениями функций вне центральных отрезков, т. е. используем здесь грубое приближенное выражение

$$d_{mm'}^l(\theta) \cong \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \theta < \theta_1 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{\frac{m-m'+|m-m'|}{2}}}{V \rho(\theta) \sin \theta}} \cos \left[ \int_{\theta_1}^{\theta} \rho(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right] & \text{при } \theta_1 < \theta < \theta_2, \\ 0 & \text{при } \theta_2 < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (3.8)$$

где

$$\rho(\theta) = \frac{V[(l+1/2)^2 \sin^2 \theta - m^2 - m'^2 + 2mm' \cos \theta]}{\sin \theta}; \quad (3.9)$$

предельные углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , ограничивающие центральный отрезок, находятся из формул

$$\cos \theta_1 = \frac{mm' + V[(l+1/2)^2 - m^2][(l+1/2)^2 - m'^2]}{(l+1/2)^2}, \\ \cos \theta_2 = \frac{mm' - V[(l+1/2)^2 - m^2][(l+1/2)^2 - m'^2]}{(l+1/2)^2}. \quad (3.10)$$

После подстановки (3.8) в (3.7) получим простую формулу

$$\begin{aligned}
 I \cong & (-1)^x \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta \rho_1(\theta) \rho_2(\theta) \rho_3(\theta)}} \times \\
 & \times \cos \left[ \int_{\theta_{11}}^{\theta} \rho_1(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[ \int_{\theta_{12}}^{\theta} \rho_2(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right] \times \\
 & \times \cos \left[ \int_{\theta_{13}}^{\theta} \rho_3(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right], \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

в которой  $x = 1/2 \{ |m_1 - m'_1| + |m_2 - m'_2| + |m_3 - m'_3| \}$  и в которой  $\alpha = \max(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13})$  и  $\beta = \min(\theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23})$ . Используя для косинусов, входящих в подынтегральное выражение интегралы (3.11), известную формулу Эйлера, представляющую их в виде сумм экспонент, представим интеграл (3.11) в виде

$$\begin{aligned}
 I \cong & (-1)^x \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta \rho_1(\theta) \rho_2(\theta) \rho_3(\theta)}} \times \\
 & \times \exp \left\{ i\varepsilon_1 \int_{\theta_{11}}^{\theta} \rho_1(\theta) d\theta + i\varepsilon_2 \int_{\theta_{12}}^{\theta} \rho_2(\theta) d\theta + \right. \\
 & \left. + i\varepsilon_3 \int_{\theta_{13}}^{\theta} \rho_3(\theta) d\theta - i \frac{\pi}{4} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right\}, \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

где суммирование ведется по восьми наборам значений сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1$ .

К интегралу  $I$  в виде (3.11) непосредственно применять метод стационарной фазы нельзя. Однако к этому интегралу в форме (3.12) метод стационарной фазы применять уже можно. Вернее, его можно применить для приближенного вычисления каждого из восьми отдельных интегралов, являющихся слагаемыми в правой части формулы (3.12). Для этого, собственно говоря, мы и преобразовали формулу (3.11) к виду (3.12).

Метод стационарной фазы заключается в использовании общей приближенной формулы

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\theta f(\theta) \exp \{ ig(\theta) \} \cong \sum_n f(\theta_n) \frac{\sqrt{2\pi}}{|g''(\theta_n)|^{1/2}} \exp \left\{ ig(\theta_n) \pm i \frac{\pi}{4} \right\}, \quad (3.13)$$

в которой суммирование по  $n$  ведется по всем решениям  $\theta_n$  уравнения стационарности

$$g'(\theta_n) = 0, \quad (3.14)$$

заключенным в пределах  $\alpha < \theta_n < \beta$ . В (3.13) перед  $i \frac{\pi}{4}$  верхний знак надо брать, когда

$$g''(\theta_n) > 0, \quad (3.15a)$$

и нижний знак — когда

$$g''(\theta_n) < 0. \quad (3.15б)$$

Используя только что приведенную общую формулу метода стационарной фазы для каждого из восьми интегралов, входящих в правую часть формулы (3.12), непосредственно получим формулу

$$I \cong (-1)^x \frac{1}{4\pi} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} \sum_{\theta_n \in \mathfrak{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_n p_1(\theta_n) p_2(\theta_n) p_3(\theta_n)}} \times$$

$$\times \left| \varepsilon_1 \frac{dp_1(\theta_n)}{d\theta_n} + \varepsilon_2 \frac{dp_2(\theta_n)}{d\theta_n} + \varepsilon_3 \frac{dp_3(\theta_n)}{d\theta_n} \right|^{-1/2} \times$$

$$\times \exp \left\{ i\varepsilon_1 \int_{\theta_{11}}^{\theta_n} p_1(\theta) d\theta + i\varepsilon_2 \int_{\theta_{12}}^{\theta_n} p_2(\theta) d\theta + \right.$$

$$\left. + i\varepsilon_3 \int_{\theta_{13}}^{\theta_n} p_3(\theta) d\theta - i \frac{\pi}{4} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \pm i \frac{\pi}{4} \right\}. \quad (3.16)$$

В этой формуле суммирование ведется по восьми наборам значений сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и для каждого данного набора  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  по всем решениям  $\theta_n \in \mathfrak{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  уравнения стационарности

$$\varepsilon_1 p_1(\theta_n) + \varepsilon_2 p_2(\theta_n) + \varepsilon_3 p_3(\theta_n) = 0, \quad (3.17)$$

лежащим на отрезке  $\alpha < \theta_n < \beta$ . Перед  $i \frac{\pi}{4}$  верхний знак надо брать, когда

$$\varepsilon_1 \frac{dp_1(\theta_n)}{d\theta_n} + \varepsilon_2 \frac{dp_2(\theta_n)}{d\theta_n} + \varepsilon_3 \frac{dp_3(\theta_n)}{d\theta_n} > 0, \quad (3.18a)$$

и нижний знак — когда

$$\varepsilon_1 \frac{dp_1(\theta_n)}{d\theta_n} + \varepsilon_2 \frac{dp_2(\theta_n)}{d\theta_n} + \varepsilon_3 \frac{dp_3(\theta_n)}{d\theta_n} < 0. \quad (3.18б)$$

Всего у нас имеется, как мы уже сказали, восемь наборов значений сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , причем, как легко видеть, сумма  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  может равняться только 3, 1,  $-1, -3$ .

Единственные наборы, для которых  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3, -3, -1$  это наборы  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$  и  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$ . Их можно вообще исключить из нашего рассмотрения, так как для каждого из них уравнение (3.17) не имеет решений, потому что в этом уравнении все  $p_j(\theta_n) > 0$  ( $j=1, 2, 3$ ). Для данных наборов значений сигнатур, следовательно,  $\mathfrak{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  есть пустое множество.

Наборы, для которых  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1, -1$ , распадаются на два класса: для которых  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1$  и для которых  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -1$ ; причем, оказывается, можно рассматривать только наборы первого класса. Это связано со следующим важным свойством уравнений (3.17). Угол  $\theta_n$ , являющийся решением уравнения (3.17), составленного для данного набора значений сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , очевидно, будет также решением уравнения (3.17), составленного для противоположного набора значений сигнатур  $-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -\varepsilon_3$ . Для любых двух таких наборов значений сигнатур, следовательно,  $\mathfrak{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathfrak{A}(-\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ . Кроме того, если для одного такого набора значений сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и соответствующего ему угла  $\theta_n$  выполняется, скажем, неравенство (3.18а), то для противоположного ему набора значений сигнатур  $-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -\varepsilon_3$  и этого же угла  $\theta_n$  выполняется противоположное неравенство (3.18б).

Сводя суммирование в формуле (3.16), ведущееся по всевозможным наборам значений сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , к суммированию только по таким наборам, для которых  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1$ , получаем

$$I \cong (-1)^x \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1)}} \sum_{\theta_n \in \mathfrak{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_n p_1(\theta_n) p_2(\theta_n) p_3(\theta_n)}} \times \\ \times \left| \varepsilon_1 \frac{dp_1(\theta_n)}{d\theta_n} + \varepsilon_2 \frac{dp_2(\theta_n)}{d\theta_n} + \varepsilon_3 \frac{dp_3(\theta_n)}{d\theta_n} \right|^{-1/2} \times \\ \times \cos \left\{ \varepsilon_1 \int_{\theta_{11}}^{\theta_n} p_1(\theta) d\theta + \varepsilon_2 \int_{\theta_{12}}^{\theta_n} p_2(\theta) d\theta + \varepsilon_3 \int_{\theta_{13}}^{\theta_n} p_3(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} \right\}, \quad (3.19)$$

где  $x = 1/2 \{ |m_1 - m'_1| + |m_2 - m'_2| + |m_3 - m'_3| \}$  и где множество  $\mathfrak{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  есть множество решений соответствующего данному набору значений сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  (для которого  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1$ ) уравнения стационарности

$$\varepsilon_1 p_1(\theta_n) + \varepsilon_2 p_2(\theta_n) + \varepsilon_3 p_3(\theta_n) = 0 \quad (3.20)$$

решений, удовлетворяющих условию  $\alpha < \theta_n < \beta$ . Перед  $\pi/4$  верхний знак надо брать, когда

$$\varepsilon_1 \frac{dp_1(\theta_n)}{d\theta_n} + \varepsilon_2 \frac{dp_2(\theta_n)}{d\theta_n} + \varepsilon_3 \frac{dp_3(\theta_n)}{d\theta_n} > 0, \quad (3.21a)$$

и нижний — когда

$$\varepsilon_1 \frac{dp_1(\theta_n)}{d\theta_n} + \varepsilon_2 \frac{dp_2(\theta_n)}{d\theta_n} + \varepsilon_3 \frac{dp_3(\theta_n)}{d\theta_n} < 0. \quad (3.21б)$$

Формула (3.19) есть сумма небольшого числа слагаемых, каждое из которых характеризуется определенным набором значений сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и соответствующим этому набору определенным значением угла  $\theta_n$ . Совокупность

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n \quad (3.22)$$

будем называть стационарной точкой. Таким образом, можно сказать, что в формуле (3.19) суммирование ведется по всем стационарным точкам  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$ , для которых  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1$ .

Чтобы раскрыть в явном виде формулу (3.19), необходимо теперь для нашего раз навсегда зафиксированного набора значений чисел  $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, m'_1, m'_2, m'_3$ , удовлетворяющих перечисленным выше условиям, разрешить три следующие вспомогательные задачи:

1) найти все нужные нам стационарные точки  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$ , т. е. для каждого набора значений сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , для которого  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1$ , надо найти все решения  $\theta_n$  уравнения стационарности

$$\varepsilon_1 p_1(\theta_n) + \varepsilon_2 p_2(\theta_n) + \varepsilon_3 p_3(\theta_n) = 0;$$

2) вычислить в каждой интересующей нас стационарной точке  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$  выражение

$$\varepsilon_1 \frac{dp_1(\theta_n)}{d\theta_n} + \varepsilon_2 \frac{dp_2(\theta_n)}{d\theta_n} + \varepsilon_3 \frac{dp_3(\theta_n)}{d\theta_n}$$

и, в частности, определить его знак;

3) вычислить в каждой интересующей нас стационарной точке  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$  значение выражения, стоящего в аргументе косинуса:

$$\varepsilon_1 \int_{\theta_{11}}^{\theta_n} p_1(\theta) d\theta + \varepsilon_2 \int_{\theta_{12}}^{\theta_n} p_2(\theta) d\theta + \varepsilon_3 \int_{\theta_{13}}^{\theta_n} p_3(\theta) d\theta.$$

3. Займемся исследованием стационарных точек  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$ . Возьмем уравнение стационарности (3.20) и представим его, например, в виде

$$\varepsilon_1 p_1(\theta_n) + \varepsilon_2 p_2(\theta_n) = -\varepsilon_3 p(\theta_n).$$



Возводя правую и левую части в квадрат, получим

$$2\varepsilon_1\varepsilon_2p_1(\theta_n)p_2(\theta_n) = p_3^2(\theta_n) - p_1^2(\theta_n) - p_2^2(\theta_n).$$

Возводя еще раз в квадрат, придем окончательно к следующему уравнению:

$$p_1^4(\theta_n) + p_2^4(\theta_n) + p_3^4(\theta_n) - 2p_1^2(\theta_n)p_2^2(\theta_n) - 2p_2^2(\theta_n)p_3^2(\theta_n) - 2p_3^2(\theta_n)p_1^2(\theta_n) = 0, \quad (3.23)$$

которому должен удовлетворять угол  $\theta_n$  для любой стационарной точки  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$  и которое уже не содержит  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

Используя формулу (3.9), после некоторых довольно громоздких преобразований уравнение (3.23) можно записать в виде

$$A \cos^2 \theta_n + 4D \cos \theta_n + 2(B + B') - A - 4C = 0, \quad (3.24)$$

где введены следующие сокращенные обозначения:

$$C = (m_1m'_2 - m'_1m_2)^2 = (m'_1m_3 - m_1m'_3)^2 = (m_2m'_3 - m'_2m_3)^2, \quad (3.25)$$

$$A = 2(l_1 + 1/2)^2(l_2 + 1/2)^2 + 2(l_2 + 1/2)^2(l_3 + 1/2)^2 + 2(l_3 + 1/2)^2(l_1 + 1/2)^2 - (l_1 + 1/2)^4 - (l_2 + 1/2)^4 - (l_3 + 1/2)^4 \quad (3.26)$$

$$B = (l_1 + 1/2)^2(-m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) + (l_2 + 1/2)^2(-m_2^2 + m_3^2 + m_1^2) + (l_3 + 1/2)^2(-m_3^2 + m_1^2 + m_2^2), \quad (3.27a)$$

$$B' = (l_1 + 1/2)^2(-m_1'^2 + m_2'^2 + m_3'^2) + (l_2 + 1/2)^2(-m_2'^2 + m_3'^2 + m_1'^2) + (l_3 + 1/2)^2(-m_3'^2 + m_1'^2 + m_2'^2), \quad (3.27b)$$

$$D = (l_1 + 1/2)^2(m_1m'_1 - m_2m'_2 - m_3m'_3) - (l_2 + 1/2)^2(m_2m'_2 - m_3m'_3 - m_1m'_1) + (l_3 + 1/2)^2(m_3m'_3 - m_1m'_1 - m_2m'_2). \quad (3.28)$$

Приведенные величины не независимы. Они удовлетворяют соотношению

$$BB' = D^2 + AC, \quad (3.29)$$

в справедливости которого можно убедиться непосредственными вычислениями.

Разрешая квадратное уравнение (3.24), мы получаем формулу для стационарного угла:

$$\cos \theta_n = \frac{-2D \pm \sqrt{4D^2 + A(A + 4C - 2B - 2B')}}{A}$$

или с использованием тождества (3.29) формулу

$$\cos \theta_n = \frac{-2D \pm \sqrt{(A - 2B)(A - 2B')}}{A}.$$

Величина  $A$ , как можно показать, в силу ее определения (3.26) всегда положительна. Поэтому если в приведенной формуле для  $\cos \theta_n$  взять перед квадратным корнем знак «плюс», то получим большее значение  $\cos \theta_n$ , чем в том случае, если перед квадратным корнем в этой формуле возьмем знак «минус». Обозначим через  $\theta_a$  значение  $\theta_n$ , для которого  $\cos \theta_n$  больший, а через  $\theta_b$  — значение  $\theta_n$ , для которого  $\cos \theta_n$  меньший. Таким образом, имеем  $\theta_n = \theta_a$  или  $\theta_n = \theta_b$ , причем  $0 \leq \theta_a \leq \theta_b \leq \pi$  и

$$\cos \theta_a = \frac{-2D + \sqrt{(A - 2B)(A - 2B')}}{A}, \quad (3.30a)$$

$$\cos \theta_b = \frac{-2D - \sqrt{(A - 2B)(A - 2B')}}{A}. \quad (3.30b)$$

Уравнение (3.23) является следствием уравнений (3.20), составленных для разных значений сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , и поэтому найденные значения углов  $\theta_n = \theta_a$  и  $\theta_n = \theta_b$ , вообще говоря, не должны обязательно соответствовать определенным стационарным точкам  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$ . Однако в данном случае это не так, и они им соответствуют.

Действительно, так как углы  $\theta_n = \theta_a$  и  $\theta_n = \theta_b$  удовлетворяют уравнению (3.24), то они автоматически должны удовлетворять также и уравнению (3.23), т. е. имеем соотношение

$$p_1^4(\theta_n) + p_2^4(\theta_n) + p_3^4(\theta_n) - \\ - 2p_1^2(\theta_n)p_2^2(\theta_n) - 2p_2^2(\theta_n)p_3^2(\theta_n) - 2p_3^2(\theta_n)p_1^2(\theta_n) = 0,$$

которое можно представить в виде

$$4p_1^2(\theta_n)p_2^2(\theta_n) = (p_3^2(\theta_n) - p_1^2(\theta_n) - p_2^2(\theta_n))^2.$$

Из последнего соотношения непосредственно [следует, что

$$2p_1(\theta_n)p_2(\theta_n) = \pm (p_3^2(\theta_n) - p_1^2(\theta_n) - p_2^2(\theta_n)),$$

причем здесь для данного  $\theta_n = \theta_a$  или  $\theta_n = \theta_b$  надо взять какой-то один конкретный знак: «плюс» или «минус». Просто

надо вычислить правую и левую части этого соотношения при  $\theta_n = \theta_a$  или  $\theta_n = \theta_b$  и определить этот знак. Последнее соотношение с правильным знаком можно записать в виде

$$2\varepsilon_{1n} \varepsilon_{2n} p_1(\theta_n) p_2(\theta_n) = p_3^2(\theta_n) - p_1^2(\theta_n) - p_2^2(\theta_n),$$

если ввести в рассмотрение сигнатуры  $\varepsilon_{1n} = \pm 1$  и  $\varepsilon_{2n} = \pm 1$  и фиксировать определенное значение произведения  $\varepsilon_{1n}\varepsilon_{2n}$  этих сигнатур. Последнее полученное соотношение можно преобразовать и получить еще одно соотношение

$$p_1^2(\theta_n) + 2\varepsilon_{1n} \varepsilon_{2n} p_1(\theta_n) p_2(\theta_n) + p_2^2(\theta_n) = p_3^2(\theta_n),$$

из которого непосредственно следует соотношение

$$\varepsilon_{1n} p_1(\theta_n) \pm \varepsilon_{2n} p_2(\theta_n) = \pm p_3(\theta_n).$$

Значение произведения сигнатур  $\varepsilon_{1n}\varepsilon_{2n}$  мы уже фиксировали, но теперь при написании последнего соотношения мы выбираем какие-нибудь их индивидуальные значения  $\varepsilon_{1n}$ ,  $\varepsilon_{2n}$ , согласованные с известным нам значением произведения  $\varepsilon_{1n}\varepsilon_{2n}$ . Эти индивидуальные значения  $\varepsilon_{1n}$ ,  $\varepsilon_{2n}$  можно фиксировать двумя разными способами, причем значения  $\varepsilon_{1n}$ ,  $\varepsilon_{2n}$  при двух этих способах будут отличаться друг от друга только общим знаком. При взятых индивидуальных значениях сигнатур  $\varepsilon_{1n}$ ,  $\varepsilon_{2n}$  для данного  $\theta_n = \theta_a$  или  $\theta_n = \theta_b$ , в последнем приведенном соотношении надо взять какой-то один конкретный знак: «плюс» или «минус». Для этого просто при  $\theta_n = \theta_a$  или  $\theta_n = \theta_b$  и при выбранных значениях сигнатур  $\varepsilon_{1n}$ ,  $\varepsilon_{2n}$  надо вычислить правую и левую части последнего соотношения и определить этот знак. Последнее соотношение с правильным знаком запишем в виде

$$\varepsilon_{1n} p_1(\theta_n) \pm \varepsilon_{2n} p_2(\theta_n) = \pm p_3(\theta_n),$$

вводя в рассмотрение еще одну сигнатуру  $\varepsilon_{3n} = \pm 1$  и фиксируя тем самым ее значение.

Таким образом, для каждого данного значения угла  $\theta_n = \theta_a$  или  $\theta_n = \theta_b$  мы построили по два набора значений сигнатур:  $\varepsilon_{1a}$ ,  $\varepsilon_{2a}$ ,  $\varepsilon_{3a}$  и  $-\varepsilon_{1a}$ ,  $-\varepsilon_{2a}$ ,  $-\varepsilon_{3a}$ , а также  $\varepsilon_{1b}$ ,  $\varepsilon_{2b}$ ,  $\varepsilon_{3b}$  и  $-\varepsilon_{1b}$ ,  $-\varepsilon_{2b}$ ,  $-\varepsilon_{3b}$ , отличающихся друг от друга общим знаком и такие, что выполняются соотношения

$$\varepsilon_{1a} p_1(\theta_a) + \varepsilon_{2a} p_2(\theta_a) + \varepsilon_{3a} p_3(\theta_a) = 0,$$

$$\varepsilon_{1b} p_1(\theta_b) \pm \varepsilon_{2b} p_2(\theta_b) \mp \varepsilon_{3b} p_3(\theta_b) = 0.$$

Другими словами, мы построили все возможные стационарные точки, которые можно представить с помощью следующей таблички:

$$\begin{array}{cccc}
 \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \theta_n \\
 \hline
 \varepsilon_{1a} & \varepsilon_{2a} & \varepsilon_{3a} & \theta_a \\
 -\varepsilon_{1a} & -\varepsilon_{2a} & -\varepsilon_{3a} & \theta_a \\
 \varepsilon_{1b} & \varepsilon_{2b} & \varepsilon_{3b} & \theta_b \\
 -\varepsilon_{1b} & -\varepsilon_{2b} & -\varepsilon_{3b} & \theta_b
 \end{array} \quad (3.31)$$

Нам остается сделать последнее замечание. Найденные наборы значений сигнатур  $\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \varepsilon_{3n}$ , соответствующие стационарным точкам, таковы, что обязательно для них  $\varepsilon_{1n} + \varepsilon_{2n} + \varepsilon_{3n} = \pm 1$ , т. е. всегда для любого набора трех значений сигнатур  $\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \varepsilon_{3n}$  два значения имеют одинаковый знак, скажем  $+1$ , а третье — противоположный им знак, скажем  $-1$ . Действительно, среди трех положительных чисел  $p_1(\theta_n), p_2(\theta_n), p_3(\theta_n)$  для заданного стационарного значения угла  $\theta_n$  одно должно равняться сумме двух других, в чем, собственно говоря, и состоит суть условия стационарности

$$\varepsilon_{1n} p_1(\theta_n) + \varepsilon_{2n} p_2(\theta_n) + \varepsilon_{3n} p_3(\theta_n) = 0,$$

а следовательно, наборы значений сигнатур  $\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \varepsilon_{3n}$  именно таковы, как мы сказали. Условимся для определенности считать, что

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2} + \varepsilon_{a3} &= 1, \\
 \varepsilon_{b1} + \varepsilon_{b2} + \varepsilon_{b3} &= 1.
 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Условие стационарности (3.17) или (3.20) для определения стационарных точек  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$  можно геометрически наглядно интерпретировать, для чего воспользуемся геометрическим построением, описанным в гл. 2.

Зададимся определенным набором значений сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и определенным значением угла  $\theta$ . Возьмем некоторую точку  $O$  в пространстве и отложим из нее каким-нибудь образом две оси  $Oz$  и  $Oz'$ , составляющие между собой угол  $\theta$ . Пусть единичные векторы этих осей будут  $\vec{k}$  и  $\vec{k}'$ . Рассмотрим далее связанные с этими осями две декартовы системы координат  $Oxyz$  и  $Ox'y'z'$  со следующими ортами:

$$\vec{i} = [\vec{j}, \vec{k}], \quad \vec{j} = \frac{[\vec{k}, \vec{k}']}{|[\vec{k}, \vec{k}']|}, \quad \vec{k}, \quad (3.33a)$$

$$\vec{i}' = [\vec{j}', \vec{k}'], \quad \vec{j}' = \frac{[\vec{k}', \vec{k}]}{|[\vec{k}', \vec{k}]|} = -\vec{j}, \quad \vec{k}'. \quad (3.33b)$$

Рассмотрим, наконец, три вектора классических угловых моментов ( $j=1, 2, 3$ ):

$$\vec{l}_j = \frac{m_j - m_j \cos \theta}{\sin \theta} \vec{i} + \varepsilon_j p_j(\theta) \vec{j} + m_j \vec{k}. \quad (3.34)$$

Вектор  $\vec{l}_j$  имеет длину  $l_j + 1/2$  и проекции на оси  $Oz$  и  $Oz'$ , равные  $m_j$  и  $m_j'$  соответственно. На ось  $Oy$  вектор  $\vec{l}_j$  имеет проекцию, равную  $\varepsilon_j p_j(\theta)$ , причем сигнатура  $\varepsilon_j = \pm 1$  характеризует знак этой проекции.

Угол  $\theta$  может оказаться таким, что векторная сумма указанных классических угловых моментов  $\vec{l}_j$  будет равна нулю, т. е.

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 = 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что тогда помимо соотношений

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0, \quad m_1' + m_2' + m_3' = 0$$

будет удовлетворяться и соотношение

$$\varepsilon_1 p_1(\theta) + \varepsilon_2 p_2(\theta) + \varepsilon_3 p_3(\theta) = 0,$$

представляющее собой условие стационарности (3.17), или (3.20), служащее для определения стационарных точек, соответствующих взятому набору значений сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

Зададим теперь определенный набор значений сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и определенное стационарное значение угла  $\theta_n$ , удовлетворяющее условию стационарности для данного набора значения сигнатур, т. е. рассмотрим стационарную точку  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$ . Для нее можно описанным образом построить две системы декартовых координат  $Oxyz$  и  $Ox'y'z'$  с совмещенным началом  $O$  и с углом  $\theta_n$  между осями  $Oz$  и  $Oz'$ , а также три вектора классических угловых моментов ( $j = 1, 2, 3$ )

$$\vec{l}_j = \frac{m_j' - m_j \cos \theta_n}{\sin \theta_n} \vec{i} = \varepsilon_j p_j(\theta_n) \vec{j} + m_j \vec{k}, \quad (3.35)$$

в сумме равные нулю

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 = 0.$$

Равенство нулю векторной суммы трех векторов означает, что из них можно составить некоторый треугольник. Фактически, однако, из таких векторов можно составить не один, а два разных треугольника, и для определенности мы всегда будем мыслить себе только следующий треугольник.

Возьмем вектор  $\vec{l}_1$  и от его конца отложим вектор  $\vec{l}_2$ . От конца вектора  $\vec{l}_2$  отложим вектор  $\vec{l}_3$ . При этом конец вектора  $\vec{l}_3$  попадет в начало вектора  $\vec{l}_1$ . Получившийся треугольник будем называть стационарным треугольником, соответствующим стационарной точке  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$ . Выберем нормаль  $\vec{N}$  к плоскости построенного треугольника таким образом, чтобы при рассмотрении этого треугольника со сто-

роны этой нормали он обходился бы против часовой стрелки. Следовательно, нужно положить

$$\vec{N} = \frac{[\vec{l}_1, \vec{l}_2]}{|[\vec{l}_1, \vec{l}_2]|} = \frac{[\vec{l}_2, \vec{l}_3]}{|[\vec{l}_2, \vec{l}_3]|} = \frac{[\vec{l}_3, \vec{l}_1]}{|[\vec{l}_3, \vec{l}_1]|}, \quad (3.36)$$

причем, разумеется,  $|\vec{N}| = 1$ .

Указанный стационарный треугольник, соответствующий стационарной точке  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$ , можно спроектировать теперь на плоскости  $Oxy$  и  $Ox'y'$  и построить два треугольника проекций, образуемых векторами ( $j=1, 2, 3$ )

$$\vec{a}_j = \frac{m_j - m_j \cos \theta_n}{\sin \theta_n} \vec{i} - \varepsilon_j p_j(\theta_n) \quad (3.37a)$$

и векторами ( $j=1, 2, 3$ )

$$\vec{a}'_j = \frac{m_j - m_j \cos \theta_n}{\sin \theta_n} \vec{i}' - \varepsilon_j p_j(\theta_n). \quad (3.37b)$$

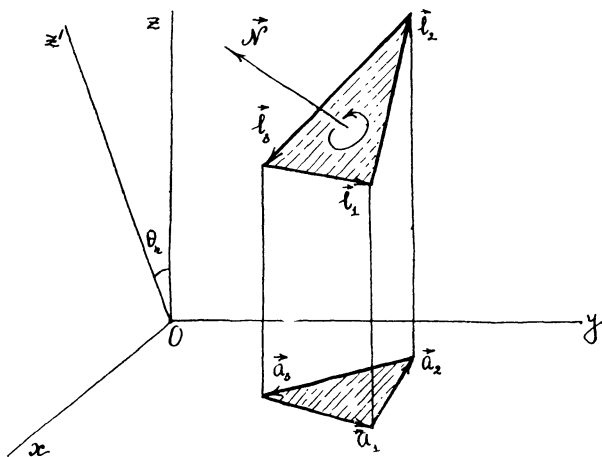


Рис. 13. Стационарный треугольник, соответствующий стационарной точке  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$ . Оси  $Ox'$  и  $Oy'$  не показаны. Изображен только один треугольник проекций для плоскости  $Oxy$

Векторы  $\vec{a}_j$  лежат в плоскости  $Oxy$  и векторы  $\vec{a}'_j$  — в плоскости  $Ox'y'$ . Вектор  $\vec{a}_j$  имеет длину  $\sqrt{(l_j + 1/2)^2 - m_j^2}$  и вектор  $\vec{a}'_j$  — длину  $\sqrt{(l_j + 1/2)^2 - m_j'^2}$ .

На рис. 13 показан стационарный треугольник, соответствующий стационарной точке  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$ . Чтобы не загромождать чертеж, мы изобразили полностью только си-

стему декартовых координат  $Oxyz$  и только ось  $Oz'$  второй декартовой системы координат  $Ox'y'z'$ . Кроме того, показан только один треугольник проекций, а именно треугольник проекций на плоскость  $Oxy$ . Полностью подобный ему треугольник проекций на плоскость  $Ox'y'$  не изображен.

Введенные выше величины  $A, B, B', C$  допускают очень наглядную геометрическую интерпретацию. Прежде всего, величина  $A$  оказывается непосредственно связанной с площадью самого стационарного треугольника. Действительно, длины сторон стационарного треугольника равны  $a=l_1+1/2$ ,  $b=l_2+1/2$ ,  $c=l_3+1/2$ , а потому квадрат площади этого треугольника, вычисленный по известной формуле Герона

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

где  $p = 1/2(a+b+c)$ , равен

$$S^2 = \frac{A}{16}, \quad (3.38)$$

так что, в частности, видим, что величина  $A$  строго положительна. Величины  $B$  и  $B'$ , оказывается, связаны с площадями треугольников проекций на плоскости  $Oxy$  и  $Ox'y'$  соответственно. Действительно, длины сторон, например, треугольника проекций на плоскость  $Oxy$  равны

$$a = \sqrt{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2}, \quad b = \sqrt{(l_2 + 1/2)^2 - m_2^2},$$

$$c = \sqrt{(l_3 + 1/2)^2 - m_3^2},$$

а потому согласно формуле Герона

$$16 S_{\text{пр}}^2 = A - 2B, \quad (3.39a)$$

где  $S_{\text{пр}}$  — площадь треугольника проекций на плоскость  $Oxy$ . Аналогичным образом убеждаемся, что

$$16 S_{\text{пр}}'^2 = A - 2B', \quad (3.39б)$$

где  $S_{\text{пр}}'$  — площадь треугольника проекций на плоскость  $Ox'y'$ . Величина  $C$ , как в этом нетрудно убедиться в результате непосредственных довольно громоздких вычислений, проводимых тоже по формуле Герона, связана с площадью  $\sigma$  треугольника, представляющего собой проекцию нашего стационарного треугольника на плоскость  $Ozz'$ , соотношением

$$4\sigma^2 = \frac{C}{\sin^2 \theta_n}. \quad (3.40)$$

Обратим внимание на то, что только площадь  $\sigma$  зависит от угла  $\theta_n$ , площади  $S, S_{\text{пр}}, S_{\text{пр}}'$  от стационарного угла  $\theta_n$  не зависят. Величины  $\sigma, S, S_{\text{пр}}, S_{\text{пр}}'$  не зависят от сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

При проектировании стационарного треугольника на плоскости  $Oxy$  и  $Ox'y'$  необходимо рассматривать косинусы углов  $\delta$  и  $\delta'$  между нормалью  $\vec{N}$  и единичными векторами  $\vec{k}$  и  $\vec{k}'$  осей  $Oz$  и  $Oz'$ :

$$\cos \delta = (\vec{k} \cdot \vec{N}), \quad \cos \delta' = (\vec{k}' \cdot \vec{N}). \quad (3.41)$$

Очевидно,

$$S_{\text{пр}} = S |\cos \delta|, \quad S'_{\text{пр}} = S |\cos \delta'|; \quad (3.42)$$

мы рассматриваем здесь площади как существенно положительные величины. В связи с формулой (3.42) введем в рассмотрение две сигнатуры:

$$\lambda = \text{sign}(\cos \delta) = \text{sign}(\vec{k} \cdot \vec{N}), \quad (3.43a)$$

$$\lambda' = \text{sign}(\cos \delta') \text{sign}(\vec{k} \cdot \vec{N}). \quad (3.43b)$$

Геометрический смысл сигнатур  $\lambda$  и  $\lambda'$  состоит в следующем. Если, например,  $\lambda = +1$ , то рассматриваемое с положительной полуоси  $Oz$  направление обхода треугольника проекций на плоскость  $Oxy$ , индуцированное направлением обхода самого стационарного треугольника, будет против часовой стрелки. Если  $\lambda = -1$ , то оно будет по часовой стрелке. Для каждой стационарной точки  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$  значения сигнатур  $\lambda, \lambda'$  всегда можно вычислить непосредственно по формулам (3.43a), (3.43b).

Подведем итог. Задавшись определенной стационарной точкой  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$  и взяв произвольно два единичных вектора  $\vec{k}$  и  $\vec{k}'$ , образующих между собой угол  $\theta_n$ , мы построили векторы  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ , в сумме равные нулю ( $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 = 0$ ), длины которых равны  $l_1 + 1/2, l_2 + 1/2, l_3 + 1/2$  и проекции которых на оси  $Oz$  и  $Oz'$ , задаваемые единичными векторами  $\vec{k}$  и  $\vec{k}'$ , равны  $m_1, m_2, m_3$  и  $m'_1, m'_2, m'_3$  соответственно. Мы построили также вектор нормали  $\vec{N}$  к плоскости треугольника, образованного этими векторами  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ , и наконец, нашли значения сигнатур  $\lambda$  и  $\lambda'$ . Оказывается, наоборот, задавшись произвольными тремя векторами  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ , длины которых равны  $l_1 + 1/2, l_2 + 1/2, l_3 + 1/2$  и которые в сумме равны нулю ( $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 = 0$ ), и задавшись, кроме того, определенными значениями сигнатур  $\lambda, \lambda'$ , мы можем построить два единичных вектора  $\vec{k}$  и  $\vec{k}'$ , которые задают в пространстве такие оси  $Oz$  и  $Oz'$ , что проекции на них наших векторов  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  будут равны  $m_1, m_2, m_3$  и  $m'_1, m'_2, m'_3$  соответственно. Построив единичные векторы  $\vec{k}$  и  $\vec{k}'$ , мы сможем рассчи-



тать угол  $\theta_n$  между ними, а также, построив дополнительно ось  $Oy$  с единичным вектором  $\vec{j} = \frac{[\vec{k}, \vec{k}']}{|[\vec{k}, \vec{k}']|}$  и отыскав

знаки проекций наших векторов  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  на эту ось  $Oy$ , найти значения сигнатур  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

Другими словами, стационарную точку можно задавать либо совокупностью величин  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_n$ , либо совокупностью величин  $\lambda, \lambda'$ .

Приступим к доказательству этого важного утверждения. Прежде всего найдем единичные векторы  $\vec{k}$  и  $\vec{k}'$ . Будем искать их в виде разложений

$$\begin{aligned}\vec{k} &= x\vec{l}_1 + y\vec{l}_2 + z[\vec{l}_1, \vec{l}_2], \\ \vec{k}' &= x'\vec{l}_1 + y'\vec{l}_2 + z'[\vec{l}_1, \vec{l}_2],\end{aligned}$$

где  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  — неизвестные числа, подлежащие определению. Их надо нам найти, принимая во внимание следующие условия:

$$\begin{aligned}|\vec{k}| &= 1, (\vec{k}, \vec{l}_1) = m_1, (\vec{k}, \vec{l}_2) = m_2, \text{sign}(\vec{k}, [\vec{l}_1, \vec{l}_2]) = \lambda, \\ |\vec{k}'| &= 1, (\vec{k}', \vec{l}_1) = m'_1, (\vec{k}', \vec{l}_2) = m'_2, \text{sign}(\vec{k}', [\vec{l}_1, \vec{l}_2]) = \lambda'.\end{aligned}$$

Умножая взятые разложения для  $\vec{k}$  и  $\vec{k}'$  скалярно на  $\vec{l}_1$  и  $\vec{l}_2$ , мы составим две системы уравнений, из которых можно найти числа  $x, y$  и  $x', y'$ . Разрешая указанные системы уравнений, получаем

$$\begin{aligned}x &= \frac{m_1(l_2 + 1/2)^2 - m_2(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{|[\vec{l}_1, \vec{l}_2]|^2}, \quad y = \frac{m_2(l_1 + 1/2)^2 - m_1(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{|[\vec{l}_1, \vec{l}_2]|}, \\ x' &= \frac{m'_1(l_2 + 1/2)^2 - m'_2(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{|[\vec{l}_1, \vec{l}_2]|^2}, \quad y' = \frac{m'_2(l_1 + 1/2)^2 - m'_1(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{|[\vec{l}_1, \vec{l}_2]|^2},\end{aligned}$$

причем здесь

$$(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = \frac{1}{2} \{ (l_3 + 1/2)^2 - (l_1 + 1/2)^2 - (l_2 + 1/2)^2 \}, \quad (3.44)$$

$$|[\vec{l}_1, \vec{l}_2]|^2 = (l_1 - 1/2)^2 (l_2 + 1/2)^2 - (\vec{l}_1, \vec{l}_2)^2. \quad (3.45)$$

Зная  $x, y$  и  $x', y'$  и используя соотношения  $(\vec{k}, \vec{k}) = 1$  и  $(\vec{k}', \vec{k}') = 1$ , составим теперь для определения чисел  $z$  и  $z'$  уравнения

$$1 = \frac{m_1^2 (l_2 + 1/2)^2 + m_2^2 (l_1 + 1/2)^2 - 2m_1 m_2 (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)}{|\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2|^2} + z^2 |\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2|^2,$$

$$1 = \frac{m_1'^2 (l_2 + 1/2)^2 + m_2'^2 (l_1 + 1/2)^2 - 2m_1' m_2' (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)}{|\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2|^2} + z' |\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2|^2,$$

из которых числа  $z$  и  $z'$  могут быть найдены однозначно, если, кроме того, учесть, что нам известны значения сигнатур  $\lambda = \text{sign}(\vec{k} \cdot [\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2])$  и  $\lambda' = \text{sign}(\vec{k}' \cdot [\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2])$ . В результате приходим к следующим выражениям для единичных векторов  $\vec{k}$  и  $\vec{k}'$  осей  $Oz$  и  $Oz'$ :

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \frac{4}{A} \{m_1 (l_2 + 1/2)^2 - m_2 (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)\} \vec{l}_1 + \\ &+ \frac{4}{A} \{m_2 (l_1 + 1/2)^2 - m_1 (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)\} \vec{l}_2 + 2\lambda \frac{\sqrt{A-2B}}{A} [\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2], \end{aligned} \quad (3.46a)$$

$$\begin{aligned} \vec{k}' &= \frac{4}{A} \{m_1' (l_2 + 1/2)^2 - m_2' (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)\} \vec{l}_1 + \\ &+ \frac{4}{A} \{m_2' (l_1 + 1/2)^2 - m_1' (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)\} \vec{l}_2 + 2\lambda' \frac{\sqrt{A-2B'}}{A} [\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2], \end{aligned} \quad (3.46б)$$

причем, очевидно, в силу (3.38)

$$4 |\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2|^2 = A. \quad (3.47)$$

Зная единичные векторы  $\vec{k}$  и  $\vec{k}'$ , можно вычислить стационарный угол  $\theta_n$ . Для этого нужно рассчитать скалярное произведение этих векторов, так как

$$(\vec{k} \cdot \vec{k}') = \cos \theta_n. \quad (3.48)$$

Используя (3.46a), (3.46б), после несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} \cos \theta_n &= \frac{4}{A} \{m_1 m_1' (l_2 + 1/2)^2 + m_2 m_2' (l_1 + 1/2)^2 - \\ &- m_1 m_2' (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) - m_2 m_1' (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)\} + \lambda \lambda' \frac{\sqrt{(A-2B)(A-2B')}}{A}, \end{aligned}$$

или

$$\cos \theta_n = \frac{-2D + \lambda \lambda' \sqrt{(A-2B)(A-2B')}}{A}. \quad (3.49)$$

Из этой важной формулы сразу заключаем, что если нам известны значения сигнатур  $\lambda, \lambda'$  для стационарной точки, то для нее мы можем сразу указать значение угла  $\theta_n$ .

Зная векторы  $\vec{k}$  и  $\vec{k}'$ , можно вычислить также и сигнатуры  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ . Для этого прежде всего надо рассчитать векторное произведение этих векторов, так как единичный вектор оси  $Oy$  равен

$$\vec{j} = \frac{[\vec{k}, \vec{k}']}{|[\vec{k}, \vec{k}']|}. \quad (3.50)$$

Используя (3.46а), (3.46б), после несложного вычисления получим

$$\begin{aligned} [\vec{k}, \vec{k}'] &= \frac{4}{A} (m_1 m_2' - m_2 m_1') [\vec{l}_1, \vec{l}_2] + \\ &+ \frac{2}{A} (\lambda' \sqrt{A - 2B'} m_2 - \lambda \sqrt{A - 2B} m_2') \vec{l}_1 + \\ &+ \frac{2}{A} (-\lambda' \sqrt{A - 2B'} m_1 + \lambda \sqrt{A - 2B} m_1') \vec{l}_2. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Сигнатуры  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  можно теперь найти, используя формулы

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \text{sign}(\vec{l}_1, [\vec{k}, \vec{k}']), \\ \varepsilon_2 &= \text{sign}(\vec{l}_2, [\vec{k}, \vec{k}']), \\ \varepsilon_3 &= -\text{sign}\{(\vec{l}_1, [\vec{k}, \vec{k}']) + (\vec{l}_2, [\vec{k}, \vec{k}'])\}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Проводя вычисления, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \text{sign}\{(\lambda' \sqrt{A - 2B'} m_2 - \lambda \sqrt{A - 2B} m_2') (l_1 + 1/2)^2 + \\ &+ (-\lambda' \sqrt{A - 2B'} m_1 + \lambda \sqrt{A - 2B} m_1') (\vec{l}_1, \vec{l}_2)\}, \\ \varepsilon_2 &= \text{sign}\{(\lambda' \sqrt{A - 2B'} m_2 - \lambda \sqrt{A - 2B} m_2') (\vec{l}_1, \vec{l}_2) + \\ &+ (-\lambda' \sqrt{A - 2B'} m_2 + \lambda \sqrt{A - 2B} m_1') (l_2 + 1/2')\}, \\ \varepsilon_3 &= \text{sign}\{(-\lambda' \sqrt{A - 2B'} m_2 + \lambda \sqrt{A - 2B} m_2') (l_1 + 1/2)^2 + \\ &+ (\lambda' \sqrt{A - 2B'} m_1 - \lambda \sqrt{A - 2B} m_1') (\vec{l}_1, \vec{l}_2) + \\ &+ (-\lambda' \sqrt{A - 2B'} m_2 + \lambda \sqrt{A - 2B} m_2') (\vec{l}_1, \vec{l}_2) + \\ &+ (\lambda' \sqrt{A - 2B'} m_1 - \lambda \sqrt{A - 2B} m_1') (l_2 + 1/2')^2\}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

где  $(\vec{l}_1, \vec{l}_2)$  дается формулой (3.44).

Из полученных важных формул мы сразу заключаем, что если нам известны значения сигнатур  $\lambda$ ,  $\lambda'$  для стационарной точки, то для нее можно сразу указать значения сигнатур  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ .

Таким образом, мы действительно приходим к выводу, что стационарную точку можно характеризовать либо совокупностью величин  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\theta_n$ , либо совокупностью величин  $\lambda$ ,  $\lambda'$ .

Отсюда непосредственно следует, в частности, что у нас действительно имеется всего-навсего четыре стационарные точки, задаваемые теперь четырьмя наборами значений сигнатур  $\lambda$ ,  $\lambda'$ . При этом функции  $\theta_n = \theta_n(\lambda, \lambda')$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\lambda, \lambda')$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\lambda, \lambda')$ ,  $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\lambda, \lambda')$ , как это сразу видно из формул (3.49), (3.53), таковы, что угол  $\theta_n$  зависит только от произведения сигнатур  $\lambda \cdot \lambda'$ , т. е.

$$\theta_n = \theta_n(\lambda \cdot \lambda'), \quad (3.54)$$

и, кроме того, функции  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(-\lambda, -\lambda') &= -\varepsilon_1(\lambda, \lambda'), \\ \varepsilon_2(-\lambda, -\lambda') &= -\varepsilon_2(\lambda, \lambda'), \\ \varepsilon_3(-\lambda, -\lambda') &= -\varepsilon_3(\lambda, \lambda'), \end{aligned} \quad (3.55)$$

т. е. если для заданных  $\lambda$ ,  $\lambda'$  вычислим значения сигнатур  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ , то для  $-\lambda$ ,  $-\lambda'$  эти значения будут  $-\varepsilon_1$ ,  $-\varepsilon_2$ ,  $-\varepsilon_3$ .

Выше в (3.31) мы уже приводили табличку стационарных точек; теперь эту же табличку можно расширить и представить в следующем виде:

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\theta_n$	$\lambda$	$\lambda'$	$\lambda \cdot \lambda'$	$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$	$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$
$\varepsilon_{1a}$	$\varepsilon_{2a}$	$\varepsilon_{3a}$	$\theta_a$	$\lambda_a$	$\lambda'_a$	1	1	-1
$-\varepsilon_{1a}$	$-\varepsilon_{2a}$	$-\varepsilon_{3a}$	$\theta_a$	$-\lambda_a$	$-\lambda'_a$	1	-1	+1
$\varepsilon_{1b}$	$\varepsilon_{2b}$	$\varepsilon_{3b}$	$\theta_b$	$\lambda_b$	$\lambda'_b$	-1	1	-1
$-\varepsilon_{1b}$	$-\varepsilon_{2b}$	$-\varepsilon_{3b}$	$\theta_b$	$-\lambda_b$	$-\lambda'_b$	-1	-1	+1

$$(3.56)$$

Обратим внимание на геометрию расположения осей  $Oz$  и  $Oz'$  относительно стационарного треугольника, соответствующего одной из наших четырех стационарных точек. Все четыре стационарных треугольника конгруэнтны друг другу, так как имеют равные стороны, длины которых равны  $l_1 + 1/2$ ,  $l_2 + 1/2$ ,  $l_3 + 1/2$ . Как это непосредственно видно из формулы (3.46а), ось  $Oz$ , откладываемая здесь для определенности

из вершины стационарного треугольника, в которой сходятся его стороны  $l_1+1/2$  и  $l_3+1/2$ , может занимать относительно стационарного треугольника только два вполне определенных положения, получаемых одно из другого зеркальным отражением в плоскости стационарного треугольника. Из формулы (3.46б) можно сделать в точности такое же заключение и в отношении оси  $Oz'$ . На рис. 14 показано два воз-

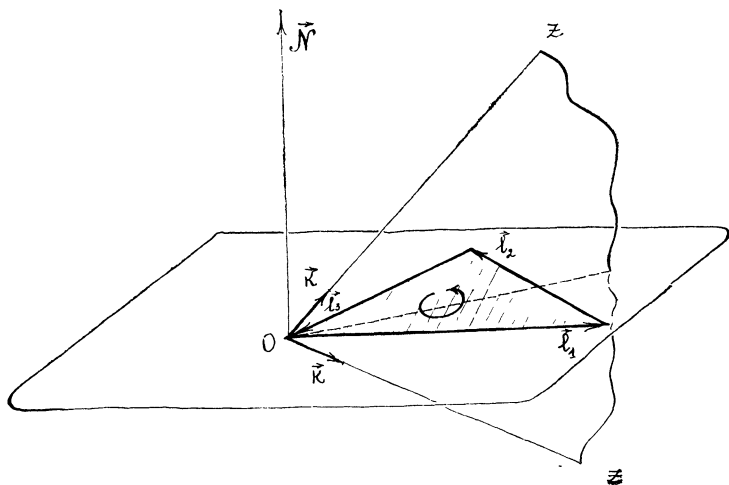


Рис. 14. Два возможных положения оси  $Oz$ , откладываемой из вершины стационарного треугольника, в которой сходятся его стороны  $l_1+1/2$  и  $l_3+1/2$ , относительно этого стационарного треугольника. При  $\lambda = +1$  ось  $Oz$  занимает верхнее положение, при  $\lambda = -1$  нижнее положение

можных положения оси  $Oz$  относительно стационарного треугольника. Из формул (3.46а), (3.46б) следует, что при  $\lambda = +1$  ось  $Oz$  и вектор нормали  $\vec{N}$  лежат по одну сторону от плоскости стационарного треугольника и что при  $\lambda = -1$  они лежат по разные стороны; при  $\lambda' = +1$  ось  $Oz'$  и вектор нормали  $\vec{N}$  лежат по одну сторону, а при  $\lambda' = -1$  — по разные стороны от плоскости стационарного треугольника. Угол  $\theta_n$ , являющийся углом между осями  $Oz$  и  $Oz'$ , таким образом, действительно может принимать только два значения  $\theta_a$  и  $\theta_b$ , причем этот угол будет большим, если оси  $Oz$  и  $Oz'$  лежат по разные стороны от плоскости стационарного треугольника, и меньшим, если они лежат по одну сторону. Таким образом, еще раз убеждаемся, что при  $\lambda\lambda' = 1$  получаем  $\theta_n = \theta_a$  и при  $\lambda\lambda' = -1$  получаем  $\theta_n = \theta_b$ . На рис. 15 схематически проиллюстрированы четыре возможных спосо-

ба расположения осей  $Oz$  и  $Oz'$  относительно стационарного треугольника.

4. Вычислим теперь важную для нас величину

$$\varepsilon_{1s} \frac{dp_1(\theta_s)}{d\theta_s} + \varepsilon_{2s} \frac{dp_2(\theta_s)}{d\theta_s} + \varepsilon_{3s} \frac{dp_3(\theta_s)}{d\theta_s} \quad (3.57)$$

в обеих нужных нам стационарных точках  $\varepsilon_{1s}, \varepsilon_{2s}, \varepsilon_{3s}, \theta_s$  при  $s=a, b$ , причем  $\varepsilon_{1s} + \varepsilon_{2s} + \varepsilon_{3s} = 1$ . Используя формулу (3.9) для величины  $p(\theta)$  и дифференцируя правую и левую части этой формулы по  $\theta$ , получим

$$\varepsilon \frac{dp(\theta)}{d\theta} = -\varepsilon p(\theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \varepsilon \frac{(l+1/2)^2 \cos \theta - mm'}{\sin \theta p(\theta)}. \quad (3.58)$$

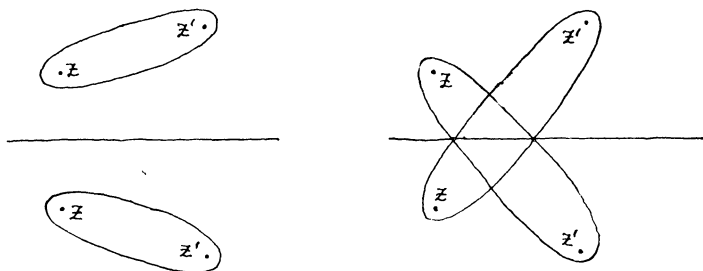


Рис. 15. Четыре возможных способа расположения осей  $Oz$  и  $Oz'$  построенных в вершине стационарного треугольника, где встречаются стороны  $l_1 + 1/2$  и  $l_3 + 1/2$ . Горизонтальная прямая изображает плоскость стационарного треугольника

Таким образом, в стационарной точке, в которой

$$\varepsilon_{1s} p_1(\theta_s) + \varepsilon_{2s} p_2(\theta_s) + \varepsilon_{3s} p_3(\theta_s) = 0,$$

можно опустить первое слагаемое в правой части приведенной формулы и получить

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{1s} \frac{dp_1(\theta_s)}{d\theta_s} + \varepsilon_{2s} \frac{dp_2(\theta_s)}{d\theta_s} + \varepsilon_{3s} \frac{dp_3(\theta_s)}{d\theta_s} = \\ & = \frac{\varepsilon_{1s} \varepsilon_{2s} \varepsilon_{3s}}{2 \sin \theta_s p_1(\theta_s) p_2(\theta_s) p_3(\theta_s)} \{ 2\varepsilon_{2s} \varepsilon_{3s} p_2(\theta_s) p_3(\theta_s) \times \\ & \quad \times [(l_1 + 1/2)^2 \cos \theta_s - m_1 m'_1] + \\ & \quad + 2\varepsilon_{3s} \varepsilon_{1s} p_3(\theta_s) p_1(\theta_s) [(l_2 + 1/2)^2 \cos \theta_s - m_2 m'_2] + \\ & \quad + 2\varepsilon_{1s} \varepsilon_{2s} p_1(\theta_s) p_2(\theta_s) [(l_3 + 1/2)^2 \cos \theta_s - m_3 m'_3] \}. \end{aligned}$$

Это выражение можно еще дальше преобразовать, если еще раз воспользоваться условием стационарности. Согласно этому условию мы имеем, в частности, соотношение

$$2\varepsilon_{1s} \varepsilon_{2s} p_1(\theta_s) p_2(\theta_s) = p_3^2(\theta_s) - p_1^2(\theta_s) - p_2^2(\theta_s) = \\ = (l_3 + 1/2)^2 - (l_1 + 1/2)^2 - (l_2 + 1/2)^2 + \\ + \frac{2}{\sin^2 \theta_s} \{ (m_1 m_2 + m'_1 m'_2) \cos \theta_s - m_1 m_2 - m'_1 m'_2 \}$$

и еще два подобных ему соотношения, получающихся из приведенного циклической перестановкой 123. Подставляя эти три формулы в предыдущий результат, после небольших преобразований получим формулу

$$\varepsilon_{1s} \frac{dp_1(\theta_s)}{d\theta_s} + \varepsilon_{2s} \frac{dp_2(\theta_s)}{d\theta_s} + \varepsilon_{3s} \frac{dp_3(\theta_s)}{d\theta_s} = \\ = \frac{\varepsilon_{1s} \varepsilon_{2s} \varepsilon_{3s}}{2 \sin \theta_s p_1(\theta_s) p_2(\theta_s) p_3(\theta_s)} \times \\ \times \frac{2D \cos^2 \theta_s + (-A \sin^2 \theta_s - 2C + B + B') \cos \theta_s - D \sin^2 \theta_s}{\sin^2 \theta_s},$$

причем в ней  $\varepsilon_{1s} \varepsilon_{2s} \varepsilon_{3s} = -1$ , так как у нас  $\varepsilon_{1s} + \varepsilon_{2s} + \varepsilon_{3s} = 1$ . Чтобы еще более упростить полученный результат, воспользуемся уравнением (3.24), которому удовлетворяет  $\cos \theta_s$ , а также формулой (3.49). Тогда придем к окончательной формуле

$$\varepsilon_{1s} \frac{dp_1(\theta_s)}{d\theta_s} + \varepsilon_{2s} \frac{dp_2(\theta_s)}{d\theta_s} + \varepsilon_{3s} \frac{dp_3(\theta_s)}{d\theta_s} = \\ = -\lambda_s \lambda'_s \frac{\varepsilon_{1s} \varepsilon_{2s} \varepsilon_{3s}}{4 \sin \theta_s p_1(\theta_s) p_2(\theta_s) p_3(\theta_s)} \sqrt{(A - 2B)(A - 2B')}, \quad (3.59)$$

в которой  $\varepsilon_{1s} \varepsilon_{2s} \varepsilon_{3s} = -1$  и  $\lambda_s \lambda'_s = \pm 1$ , так что при  $s=a$  рассчитываемое выражение всегда положительно, а при  $s=b$  — отрицательно.

Согласно (3.39) из (3.59) получаем, кроме того, еще одну важную формулу:

$$\left| \varepsilon_{1s} \frac{dp_1(\theta_s)}{d\theta_s} + \varepsilon_{2s} \frac{dp_2(\theta_s)}{d\theta_s} + \varepsilon_{3s} \frac{dp_3(\theta_s)}{d\theta_s} \right|^{1/2} = \\ = \frac{2 \sqrt{S_{np} S'_{np}}}{\sqrt{\sin \theta_s p_1(\theta_s) p_2(\theta_s) p_3(\theta_s)}}, \quad (3.60)$$

где  $S_{np}$ ,  $S'_{np}$  — площади треугольников проекций на плоскости  $Oxy$ ,  $Ox'y'$ .

Используя выведенные формулы (3.59) и (3.60) для нашего основного интеграла  $I$ , даваемого формулой (3.19), получим для него важную формулу

$$I \cong (-1)^x \frac{1}{4\pi \sqrt{S_{\text{пр}} S'_{\text{пр}}}} \times \\ \times \left\{ \cos \left[ \varepsilon_{a1} \int_{\theta_{11}}^{\theta_a} p_1(\theta) d\theta + \varepsilon_{a2} \int_{\theta_{12}}^{\theta_a} p_2(\theta) d\theta + \varepsilon_{a3} \int_{\theta_{13}}^{\theta_a} p_3(\theta) d\theta \right] + \right. \\ \left. + \cos \left[ \varepsilon_{b1} \int_{\theta_{11}}^{\theta_b} p_1(\theta) d\theta + \varepsilon_{b2} \int_{\theta_{12}}^{\theta_b} p_2(\theta) d\theta + \varepsilon_{b3} \int_{\theta_{13}}^{\theta_b} p_3(\theta) d\theta - \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \quad (3.61)$$

в которой  $x = 1/2 \{ |m_1 - m'_1| + |m_2 - m'_2| + |m_3 - m'_3| \}$ .

5. Приступим теперь к исследованию выражений, стоящих в аргументах косинусов в формуле (3.61) и берущихся в обеих рассматриваемых нами стационарных точках  $\varepsilon_{1s}$ ,  $\varepsilon_{2s}$ ,  $\varepsilon_{3s}$ ,  $\theta_s$  при  $s=a, b$ . Используем для них единое обозначение

$$\mathfrak{A}_s = \varepsilon_{1s} \int_{\theta_{11}}^{\theta_s} p_1(\theta) d\theta + \varepsilon_{2s} \int_{\theta_{12}}^{\theta_s} p_2(\theta) d\theta + \varepsilon_{3s} \int_{\theta_{13}}^{\theta_s} p_3(\theta) d\theta,$$

где  $s=a, b$ . В соответствии с одной из основных формул (2.77) из гл. 2 приведенное выражение можно представить в виде

$$\mathfrak{A}_s = P_s - P'_s + Q_s + R,$$

где величина  $P_s, P'_s, Q_s, R$  даются формулами

$$P_s = m_1 \Phi_{s1} + m_2 \Phi_{s2} + m_3 \Phi_{s3}, \quad (3.62a)$$

$$P'_s = m'_1 \Phi'_{s1} + m'_2 \Phi'_{s2} + m'_3 \Phi'_{s3}, \quad (3.62b)$$

$$Q_s = (l_1 + 1/2) \Psi_{s1} + (l_2 + 1/2) \Psi_{s2} + (l_3 + 1/2) \Psi_{s3}, \quad (3.63)$$

$$R = -m_1 \Phi_{11} + m'_1 \Phi'_{11} - (l_1 + 1/2) \Psi_{11} - \\ - m_2 \Phi_{12} + m'_2 \Phi'_{12} - (l_2 + 1/2) \Psi_{12} - \\ - m_3 \Phi_{13} + m'_3 \Phi'_{13} - (l_3 + 1/2) \Psi_{13}. \quad (3.64)$$

Входящие сюда углы  $\Phi_{sj}$ ,  $\Phi'_{sj}$  и  $\Psi_{sj}$  ( $j=1, 2, 3$ ) формально определяются следующим образом (см. гл. 2). Для каждой стационарной точки  $\varepsilon_{1s}$ ,  $\varepsilon_{2s}$ ,  $\varepsilon_{3s}$ ,  $\theta_s$  при  $s=a, b$  мы



должны рассмотреть векторы классических угловых моментов  $\vec{l}_j$  ( $j=1, 2, 3$ ), образующие соответствующий стационарный треугольник (рис. 13). Угол  $\Phi_{sj}$ , изменяющийся в пределах  $0 \leq \Phi_{sj} < 2\pi$ , — это угол, на который надо повернуть по правому винту, ввинчиваемому в положительную полуось  $Oz$ , полуплоскость, опирающуюся на ось  $Oz$  и содержащую положительную полуось  $Ox$ , до совпадения ее с полуплоскостью, опирающейся на ось  $Oz$  и содержащей вектор  $\vec{l}_j$ , отложенный из точки  $O$ . Угол  $\Phi'_{sj}$ , изменяющийся в пределах  $0 \leq \Phi'_{sj} < 2\pi$ , — это угол, на который надо повернуть по правому винту, ввинчиваемому в положительную полуось  $Oz'$ , полуплоскость, опирающуюся на ось  $Oz'$  и содержащую положительную полуось  $Ox'$ , до совпадения ее с полуплоскостью, опирающейся на ось  $Oz'$  и содержащей вектор  $\vec{l}_j$ , отложенный из точки  $O$ . Угол  $\Psi_{sj}$  — это угол, тоже изменяющийся в пределах  $0 \leq \Psi_{sj} < 2\pi$ , на который надо повернуть по правому винту, ввинчиваемому в вектор  $\vec{l}_j$ , отложенный из точки  $O$ , полуплоскость, опирающуюся на вектор  $\vec{l}_j$  и содержащую положительную полуось  $Oz$  до совпадения ее с полуплоскостью, опирающейся на этот вектор  $\vec{l}_j$  и содержащей положительную полуось  $Oz'$ . Предельные значения этих углов, входящие в формулу (3.64), надо брать из формул (2.84) — (2.86) из гл. 2.

Отметим здесь с самого начала, что так как выражения  $\mathfrak{M}_s$  входят у нас только аргументами косинусов, не нужно стремиться их вычислять абсолютно точно. Вполне достаточно их знать с точностью до произвольного слагаемого, представляющего собой любое целое кратное  $2\pi$ , т. е. выражения  $\mathfrak{M}_s$  можно вычислять по  $\text{mod } 2\pi$  (что мы и будем делать).

Займемся сначала последней величиной  $R$ . Согласно формулам (2.84) — (2.86) имеем формулу

$$\begin{aligned}
 & -m\Phi_1 + m'\Phi'_1 - (l : 12)\Psi_1 = \\
 = & \begin{cases} -m\pi - (1 - \varepsilon)\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} & \text{при } m - m' > 0, \\ m'\pi - (1 - \varepsilon)\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} & \text{при } m - m' < 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Равенство по  $\text{mod } 2\pi$  означает равенство двух частей ее с точностью до добавления к одной из них некоторого целого кратного  $2\pi$ . При установлении приведенного равенства по  $\text{mod } 2\pi$  мы учли, что  $-m(1 - \varepsilon)\pi = 0 \pmod{2\pi}$ ,  $m'(1 + \varepsilon) = 0 \pmod{2\pi}$ ,  $l\pi(1 - \varepsilon) = 0 \pmod{2\pi}$ . Заметим теперь, что

$$-m\pi = \vdash m\pi \pmod{2\pi}$$

и что

$$\frac{1}{2}(m+m') + \frac{1}{2}|m-m'| = \begin{cases} m & \text{при } m-m' > 0, \\ m' & \text{при } m-m' < 0. \end{cases}$$

Используя эти соотношения, из вышеприведенной формулы получим

$$-m\Phi_1 + m'\Phi_1 - (l+1/2)\Psi_1 = \frac{1}{2}(m+m')\pi + \\ + \frac{1}{2}|m-m'|\pi - (1-\varepsilon)\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Этот результат позволяет нам вычислить величину  $R$ . С учетом имеющихся условий  $m_1+m_2+m_3=0$ ,  $m_1+m_2+m_3=0$ ,  $\varepsilon_{1s}+\varepsilon_{2s}+\varepsilon_{3s}=1$  окончательно получаем

$$R = \frac{\pi}{2}|m_1-m'_1| + \frac{\pi}{2}|m_2-m'_2| + \\ + \frac{\pi}{2}|m_3-m'_3| - \pi \pmod{2\pi}; \quad (3.65)$$

выражение, стоящее в правой части, представляет собой целое кратное  $\pi$ .

Займемся теперь величинами  $P_s, P'_s$  ( $s=a, b$ ). Согласно формулам (3.62) эти величины выражаются через углы  $\Phi_{sj}, \Phi'_{sj}$  ( $j=1, 2, 3$ ), которые мы здесь формально определим следующим образом. Возьмем стационарную точку  $\varepsilon_{1s}, \varepsilon_{2s}, \varepsilon_{3s}, \theta_s$  ( $s=a, b$ ) и построим для нее векторы  $\vec{l}_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) (см. (3.35)), а также векторы  $\vec{a}_j, \vec{a}'_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) (см. (3.37)). Согласно формулам (2.63) и только что указанным формулам, определяющим рассматриваемые векторы, имеют место соотношения

$$a_{jx} = \sqrt{(l_j+1/2)^2 - m_j^2} \cos \Phi_j, \quad (3.66a)$$

$$a_{jy} = \sqrt{(l_j+1/2)^2 - m_j^2} \sin \Phi_j,$$

$$a'_{jx} = \sqrt{(l_j+1/2)^2 - m_j'^2} \cos \Phi'_j,$$

$$a'_{jy} = \sqrt{(l_j+1/2)^2 - m_j'^2} \sin \Phi'_j, \quad (3.66b)$$

которые вместе с условиями  $0 \leq \Phi_j < 2\pi$ ,  $0 \leq \Phi'_j < 2\pi$  и возьмем здесь в качестве основных соотношений, формально определяющих наши углы  $\Phi_j, \Phi'_j$ . Величины  $P_s, P'_s$  полностью аналогичны друг другу, и поэтому ниже мы подробно рас-

смотрим только первую из них. Нам достаточно рассчитать ее по mod  $2\pi$ .

Величина  $P_s$  определяется формулой (3.62а). Используя условие  $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ , эту формулу можно представить в виде

$$P_s = m_1 \Phi_{s1} + m_2 \Phi_{s2} + m_3 \Phi_{s3} = \\ = m_2 (\Phi_{s2} - \Phi_{s1}) + m_3 (\Phi_{s3} - \Phi_{s2} + \Phi_{s2} - \Phi_{s1}), \quad (3.67)$$

так что нужно вычислить по mod  $2\pi$  только разности углов  $\Phi_{s2} - \Phi_{s1}$  и  $\Phi_{s3} - \Phi_{s2}$ . Чтобы их найти, рассмотрим треугольник проекций на плоскость  $Oxy$  для нашей стационарной точки  $\epsilon_{1s}, \epsilon_{2s}, \epsilon_{3s}, \theta_s$ . Он образован из векторов  $\vec{a}_j$  ( $j=1, 2, 3$ ), имеющих заданные длины  $\sqrt{(l_j + 1/2)^2 - m_j^2}$ . Углы этого треугольника обозначим через  $H_1, H_2, H_3$ . Они, очевидно, удовлетворяют неравенствам  $0 < H_j < \pi$  ( $j=1, 2, 3$ ). Их можно определить из следующих точных соотношений:

$$(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2 = (l_2 + 1/2)^2 - m_2^2 + (l_3 + 1/2)^2 - m_3^2 - \\ - 2 \sqrt{(l_2 + 1/2)^2 - m_2^2} \sqrt{(l_3 + 1/2)^2 - m_3^2} \cos H_1, \\ (l_2 + 1/2)^2 - m_2^2 = (l_3 + 1/2)^2 - m_3^2 + (l_1 + 1/2)^2 - m_1^2 - \\ - 2 \sqrt{(l_3 + 1/2)^2 - m_3^2} \sqrt{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} \cos H_2, \\ (l_3 + 1/2)^2 - m_3^2 = (l_1 + 1/2)^2 - m_1^2 + (l_2 + 1/2)^2 - m_2^2 - \\ - 2 \sqrt{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} \sqrt{(l_2 + 1/2)^2 - m_2^2} \cos H_3, \quad (3.68)$$

которые показывают, что углы  $H_1, H_2, H_3$  не зависят ни от  $\theta_s$ , ни от  $\epsilon_{1s}, \epsilon_{2s}, \epsilon_{3s}$ . Формулы (3.66а) позволяют нам провести простые вычисления:

$$\cos(\Phi_2 - \Phi_1) = \cos \Phi_1 \cos \Phi_1 - \sin \Phi_2 \sin \Phi_1 = \frac{a_{1x} a_{2x} + a_{1y} a_{2y}}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|} = \\ = \frac{(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|},$$

$$\sin(\Phi_2 - \Phi_1) = \sin \Phi_2 \cos \Phi_1 - \cos \Phi_2 \sin \Phi_1 = \frac{a_{2y} a_{1x} - a_{2x} a_{1y}}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|} = \\ = \frac{(\vec{k} \cdot [\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2])}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|} = \frac{(\vec{k} \cdot [\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2])}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|},$$

которые с учетом (3.68) и (3.36), (3.43а) непосредственно показывают, что

$$\cos(\Phi_2 - \Phi_1) = \cos(\pi - H_3),$$

$$\text{sign}[\sin(\Phi_2 - \Phi_1)] = \lambda,$$

а следовательно,

$$\Phi_{s_2} - \Phi_{s_1} = \pi - \lambda_s H_3 \pmod{2\pi}. \quad (3.69a)$$

Пользуясь имеющейся здесь симметрией относительно циклической перестановки 1, 2, 3, отсюда непосредственно получаем

$$\Phi_{s_3} - \Phi_{s_2} = \pi - \lambda_s H_1 \pmod{2\pi}. \quad (3.69б)$$

Подставляя (3.69a), (3.69б) в (3.67) и используя равенство  $\pi m_2 = \lambda_s \pi m_2 \pmod{2\pi}$ , получим формулу

$$P_s = \lambda_s [\pi m_2 - m_2 H_3 - m_3 (H_1 + H_3)] \pmod{2\pi},$$

которую представим в более симметричном виде, учитывая, что  $\pi = H_1 + H_2 + H_3$ :

$$P_s = \lambda_s [h_1^0 H_1 + h_2^0 H_2 - h_3^0 H_3] \pmod{2\pi}, \quad (3.70)$$

где мы ввели следующие обозначения:

$$h_1^0 = m_2 - m_3, \quad h_2^0 = m_2, \quad h_3^0 = -m_3.$$

Формулу (3.70) можно еще дальше преобразовать, если сдвинуть целые числа  $h_1^0, h_2^0, h_3^0$  на произвольное четное целое число  $k$  и рассмотреть новые целые числа:

$$h_1 = h_1^0 + k, \quad h_2 = h_2^0 + k, \quad h_3 = h_3^0 + k.$$

Очевидно, что для этих последних

$$\begin{aligned} \lambda_s [h_1 H_1 + h_2 H_2 + h_3 H_3] &= \lambda_s [h_1^0 H_1 + h_2^0 H_2 + h_3^0 H_3] + \lambda_s k \pi = \\ &= \lambda_s [h_1^0 H_1 + h_2^0 H_2 - h_3^0 H_3] \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

где мы еще раз воспользовались соотношением  $H_1 + H_2 + H_3 = \pi$ . Таким образом, получаем окончательную формулу

$$P_s = \lambda_s P \pmod{2\pi}$$

$$P = h_1 H_1 + h_2 H_2 + h_3 H_3, \quad (3.71a)$$

где  $h_1, h_2, h_3$  — целые числа, определенные выше, которые, однако, можно определить проще, считая их некоторым целочисленным решением следующих уравнений:

$$h_3 - h_2 = m_1, \quad h_1 - h_3 = m_2, \quad h_2 - h_1 = m_3,$$

$$h_1 - m_1 = \text{четн. число}, \quad h_2 - m_2 = \text{четн. число},$$

$$h_3 - m_3 = \text{четн. число}. \quad (3.72a)$$

Аналогичную формулу можно получить для величины  $P'_s$ . Проводя в точности такие же рассуждения, как для величины  $P_s$ , приходим к формуле

$$P'_s = \lambda'_s P' \pmod{2\pi},$$

$$P' = h'_1 H'_1 + h'_2 H'_2 + h'_3 H'_3, \quad (3.716)$$

где  $H'_1, H'_2, H'_3$  — углы треугольника проекций на плоскость  $Ox'y'$ , даваемые формулами, полностью аналогичными (3.68), и где  $h'_1, h'_2, h'_3$  — целые числа, являющиеся некоторым целочисленным решением следующих уравнений:

$$h'_3 - h'_2 = m'_1, \quad h'_1 - h'_3 = m'_2, \quad h'_2 - h'_1 = m'_3,$$

$$h'_1 - m'_1 = \text{четн. число}, \quad h'_2 - m'_2 = \text{четн. число},$$

$$h'_3 - m'_3 = \text{четн. число}. \quad (3.726)$$

Займемся, наконец, величиной  $Q_s$  ( $s=a, b$ ). Согласно определяющей ее формуле (3.63) она выражается через углы  $\Psi_{sj}$  ( $j=1, 2, 3$ ), которые придется вычислять точно, а не по  $\text{mod } 2\pi$ , так как в формуле (3.63) они умножаются не на целые, а на полуцелые числа. Углы  $\Psi_{sj}$  мы здесь формально определим следующим образом. Рассмотрим стационарную точку  $\epsilon_{1s}, \epsilon_{2s}, \epsilon_{3s}, \theta_s$  ( $s=a, b$ ) и векторы  $\vec{l}_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) для нее (см. (3.35)).

Согласно формулам (2.74), (2.66) имеет место соотношение

$$[\vec{l}_j, \vec{k}'] = \sqrt{(l_j + 1/2)^2 - m_j'^2} (\cos \Psi_j \vec{l}_1 - \sin \Psi_j \vec{l}_2), \quad (3.73)$$

в котором  $\vec{l}_1, \vec{l}_2$  — единичные векторы, перпендикулярные вектору  $\vec{l}_3$  и задаваемые формулами

$$\vec{e}_1 = \frac{[\vec{l}_j, \vec{k}']}{|[\vec{l}_j, \vec{k}']|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{[\vec{l}_j, [\vec{l}_j, \vec{k}']]}{|[\vec{l}_j, [\vec{l}_j, \vec{k}']]|}. \quad (3.74)$$

Это соотношение вместе с условием  $0 \leq \Psi_j < 2\pi$  мы возьмем здесь как основное, определяющее формально угол  $\Psi_j$ .

Рассмотрим два новых единичных вектора  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ , тоже перпендикулярных вектору  $\vec{l}_j$ :

$$\vec{E}_1 = \vec{N}, \quad \vec{E}_2 = \frac{[\vec{l}_j, \vec{N}]}{|[\vec{l}_j, \vec{N}]|}, \quad (3.75)$$

где  $\vec{N}$  — вектор нормали к плоскости стационарного треугольника (см. (3.36)). Разложим векторы  $[\vec{l}_j, \vec{k}']$  и  $[\vec{l}_j, \vec{k}']$  по векто-

рам  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$  и тем самым введем еще одни важные для нас сейчас углы  $\zeta_j, \zeta'_j$ :

$$[\vec{l}_j, \vec{k}] = \sqrt{(l_j - 1/2)^2 - m_j^2} (\cos \zeta_j \vec{E}_1 + \sin \zeta_j \vec{E}_2), \quad (3.76a)$$

$$[\vec{l}_j, \vec{k}'] = \sqrt{(l_j + 1/2)^2 - m_j'^2} (\cos \zeta'_j \vec{E}_1 + \sin \zeta'_j \vec{E}_2). \quad (3.76b)$$

Эти формулы вместе с дополнительными условиями  $0 \leq \zeta_j < 2\pi$ ,  $0 \leq \zeta'_j < 2\pi$  мы берем в качестве соотношений, формально строго определяющих наши углы  $\zeta_j, \zeta'_j$ .

Как непосредственно видно из первой формулы (3.74), формулу (3.76a) можно представить в виде

$$\vec{e}_1 = \cos \zeta_j \vec{E}_1 + \sin \zeta_j \vec{E}_2; \quad (3.77)$$

к этой последней формуле можно сразу же присовокупить еще одну формулу:

$$\vec{e}_2 = -\sin \zeta_j \vec{E}_1 + \cos \zeta_j \vec{E}_2; \quad (3.78)$$

векторы  $\vec{l}_j, \vec{e}_1, \vec{e}_2$  так же, как векторы  $\vec{l}_j, \vec{E}_1, \vec{E}_2$ , образуют правые тройки взаимно перпендикулярных векторов.

Подставим (3.77), (3.78) в (3.73). После несложного преобразования получим

$$[\vec{l}_j, \vec{k}'] = \sqrt{(l_j + 1/2)^2 - m_j'^2} \{ \cos(\Psi_j + \zeta_j) \vec{E}_1 + \sin(\Psi_j + \zeta_j) \vec{E}_2 \}. \quad (3.79)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (3.76b) и учитывая, что каждый из углов  $\zeta'_j, \zeta_j, \Psi_j$  изменяется только от 0 до  $2\pi$ , получим важную для нас формулу

$$\zeta'_j = \zeta_j + \Psi_j - 2\pi \omega, \quad (3.80)$$

где  $\omega = 0, 1$ .

Для того чтобы рассчитать величину  $\omega$ , воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} \text{sign}(\sin \zeta_j) &= \lambda, \quad \text{sign}(\sin \zeta'_j) = \lambda', \\ \text{sign}(\sin \Psi_j) &= \varepsilon_j, \end{aligned} \quad (3.81)$$

которые определяют знаки синусов углов  $\zeta_j, \zeta'_j, \Psi_j$ , т. е. устанавливают, лежат эти углы на интервале от 0 до  $\pi$  или же на интервале от  $\pi$  до  $2\pi$ .

Докажем первую из этих формул. По самому определению этой сигнатуры  $\lambda = \text{sign}(\vec{k} \cdot \vec{N}) = \text{sign}(\vec{k} \cdot \vec{E}_1)$ . Далее из

формулы (3.76a) непосредственно получаем, что  $\text{sign}(\text{sign } \zeta_j = = \text{sign}([\vec{l}_j \cdot \vec{k}] \cdot \vec{E}_2) = \text{sign}([\vec{l}_j \cdot \vec{k}] \cdot [\vec{l}_j \cdot \vec{E}_1])$ . Воспользуемся, кроме того, тем, что  $\vec{l}_j \perp \vec{E}_1$ , т. е.  $(\vec{l}_j \cdot \vec{E}_1) = 0$ . В декартовой системе координат  $Oxyz$  имеем очевидные формулы

$$\begin{aligned} [\vec{l}_j \cdot \vec{k}] &= l_{jy} \vec{i} - l_{jx} \vec{j}, \\ [\vec{l}_j \cdot \vec{E}_1] &= (l_{jy} E_{1z} - l_{jz} E_{1y}) \vec{i} + (l_{jz} E_{1x} - l_{jx} E_{1z}) \vec{j} + \\ &+ (l_{jx} E_{1y} - l_{1y} E_{1x}) \vec{k}, \\ (\vec{E}_1 \cdot \vec{l}_j) &= 0 = E_{1x} l_{jx} + E_{1y} l_{jy} + E_{1z} l_{jz}. \end{aligned}$$

Таким образом, в этой системе координат

$$([\vec{l}_j \cdot \vec{k}] \cdot [\vec{l}_j \cdot \vec{E}_1]) = (l_{jx}^2 + l_{jy}^2 + l_{jz}^2) E_{1z}$$

и, кроме того, очевидно, что

$$(\vec{k} \cdot \vec{E}_1) = E_{1z}.$$

Следовательно, действительно,

$$\text{sign}(\sin \zeta_j) = \lambda,$$

что и требовалось доказать.

Мы доказали первую формулу (3.81). Вторая формула (3.81) доказывается в точности так же. Что касается третьей формулы (3.81), то она непосредственно следует из формул (2.72) — (2.74).

Используя теперь формулы (3.80), (3.81) и просто перебирая все возможные случаи, можно прийти к результату

$$\zeta_j' = \zeta_j + \Psi_j - 2\pi\omega,$$

где

$$\omega = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_j) & \text{при } \lambda\lambda' = 1, \\ \frac{1}{2}(1 - \lambda) & \text{при } \lambda\lambda' = -1. \end{cases}$$

Таким образом, получаем важную формулу

$$\Psi_j = \begin{cases} \zeta_j' - \zeta_j + \pi(1 - \varepsilon_j) & \text{при } \lambda\lambda' = 1, \\ \zeta_j' - \zeta_j + \pi(1 - \lambda) & \text{при } \lambda\lambda' = -1. \end{cases} \quad (3.82)$$

Эта формула показывает нам, что вычисление угла  $\Psi_j$  сводится к вычислению углов  $\zeta_j$ ,  $\zeta_j'$ . Как видно из определяющих их формул (3.76) и (3.75), эти углы полностью анало-

гичны друг другу, и поэтому нам достаточно рассмотреть только угол  $\zeta_j$ .

Выразим угол  $\zeta_j$  через угол  $\Lambda_j$ , представляющий собой по определению угол между векторами  $-\vec{N}$  и  $[\vec{l}_j, \vec{k}]$ . Таким образом, угол  $\Lambda_j$  надо определять из формулы

$$-(\vec{N}, [\vec{l}_j, \vec{k}]) = \sqrt{(l_j + 1/2)^2 - m_j^2} \cos \Lambda_j \quad (3.83)$$

и дополнительного условия  $0 \leq \Lambda_j \leq \pi$ . Используя формулы (3.36) и непосредственно вычисляя скалярные произведения, стоящие в левой части (3.83), получим формулы

$$\begin{aligned} m_1 [(l_2 + 1/2)^2 - (l_3 + 1/2)^2] + (m_2 - m_3) (l_1 + 1/2)^2 &= \\ &= -4S \sqrt{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} \cos \Lambda_1, \\ m_2 [(l_3 + 1/2)^2 - (l_1 + 1/2)^2] + (m_3 - m_1) (l_2 + 1/2)^2 &= \\ &= -4S \sqrt{(l_2 + 1/2)^2 - m_2^2} \cos \Lambda_2, \\ m_3 [(l_1 + 1/2)^2 - (l_2 + 1/2)^2] + (m_1 - m_2) (l_3 + 1/2)^2 &= \\ &= -4S \sqrt{(l_3 + 1/2)^2 - m_3^2} \cos \Lambda_3, \end{aligned} \quad (3.84)$$

в которых площадь  $S$  стационарного треугольника вычисляется по формулам (3.38), (3.26) и выражается только через числа  $l_1, l_2, l_3$ . Из формул (3.84) непосредственно получаем, что

$$(l_j + 1/2) S_{\text{пр}} = S \sqrt{(l_j + 1/2)^2 - m_j^2} \sin \Lambda_j \quad (3.85)$$

при  $j=1, 2, 3$ . Площадь  $S_{\text{пр}}$  треугольника проекций выражается по формулам (3.39а), (3.26), (3.27а) только через числа  $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3$ . Формулы (3.84), (3.85) показывают, что углы  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  не зависят ни от  $\theta_s$ , ни от  $\varepsilon_{1s}, \varepsilon_{2s}, \varepsilon_{3s}$ .

Для того чтобы выразить угол  $\zeta_j$  через угол  $\Lambda_j$ , обратимся к формулам (3.76а) и (3.83). Непосредственно из этих формул видим, что

$$-\cos \zeta_j = \cos \Lambda_j,$$

причем согласно (3.81)

$$\text{sign}(\sin \zeta_j) = \lambda.$$

Следовательно, получаем

$$\zeta_j = \pi - \lambda \Lambda_j. \quad (3.86а)$$

Угол  $\zeta_j'$  можно рассчитать, проводя в точности такие же рассуждения, как для угла  $\zeta_j$ , и для него получим формулу

$$\zeta_j' = \pi - \lambda' \Lambda_j', \quad (3.86б)$$



в которую входят углы  $\Lambda'_j$ , формально определяемые как углы между вектором  $-\vec{N}$  и векторами  $[\vec{l}_j, \vec{k}]$ . Углы  $\Lambda'_1, \Lambda'_2, \Lambda'_3$  можно найти из формул, полностью аналогичных формулам (3.84), (3.85) для углов  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ , и тоже убедиться, что они не зависят ни от  $\theta$ , ни от  $\varepsilon_{1s}, \varepsilon_{2s}, \varepsilon_{3s}$ .

Объединяя формулы (3.86) с формулой (3.82), окончательно приходим к следующей формуле ( $s=a, b$ ):

$$\Psi_{sj} = \begin{cases} -\lambda'_s \Lambda'_j + \lambda_s \Lambda_j + \pi(1 - \varepsilon_{sj}) & \text{при } \lambda_s \lambda'_s = 1, \\ -\lambda'_s \Lambda'_j + \lambda_s \Lambda_j + \pi(1 - \lambda_s) & \text{при } \lambda_s \lambda'_s = -1. \end{cases} \quad (3.87)$$

Подставляя (3.87) в (3.63), непосредственно получаем, что рассчитываемая нами величина  $Q_s$  ( $s=a, b$ ) равна

$$Q_s = \begin{cases} \lambda_s(Q - Q') + 3\pi \pmod{2\pi} & \text{при } \lambda_s \lambda'_s = 1, \\ \lambda_s(Q + Q') + \frac{3\pi}{2}(1 - \lambda_s) \pmod{2\pi} & \text{при } \lambda_s \lambda'_s = -1, \end{cases} \quad (3.88)$$

где

$$Q = (l_1 + 1/2) \Lambda_1 + (l_2 + 1/2) \Lambda_2 + (l_3 + 1/2) \Lambda_3, \quad (3.89a)$$

$$Q' = (l_1 + 1/2) \Lambda'_1 + (l_2 + 1/2) \Lambda'_2 + (l_3 + 1/2) \Lambda'_3; \quad (3.89b)$$

при выводе формулы (3.88) мы воспользовались соотношением  $\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{s2} + \varepsilon_{s3} = 1$ .

Собирая, наконец, вместе все полученные нами результаты в отношении величин  $R, P_s, P'_s, Q_s$  (см. (3.65), (3.71), (3.72), (3.88), (3.89)) и учитывая, что  $\lambda_a \lambda'_a = 1$  и  $\lambda_b \lambda'_b = -1$ , приходим к формулам

$$\mathfrak{A}_a = P_a - P'_a + Q_a + R = \lambda_a(P - P' + Q - Q') + \pi x \pmod{2\pi},$$

$$\mathfrak{A}_b - \frac{\pi}{2} = P_b - P'_b + Q_b + R - \frac{\pi}{2} =$$

$$= \lambda_b \left( P + P' + Q + Q' - \frac{3\pi}{2} \right) + \pi x \pmod{2\pi},$$

где  $x = 1/2 \{ |m_1 - m'_1| + |m_2 - m'_2| + |m_3 - m'_3| \}$ , подставляя которые в формулу (3.61) и преобразуя возникающую сумму косинусов в произведение косинусов, получаем очень простую окончательную формулу

$$I \cong \frac{1}{2\pi \sqrt{S_{\text{пр}} S'_{\text{пр}}}} \cos \left( P + Q - \frac{3\pi}{4} \right) \cos \left( P' + Q' - \frac{3\pi}{4} \right). \quad (3.90)$$

Как видим, полученное приближенное выражение для интеграла  $I$  распалось на произведение двух множителей, один

из которых зависит только от  $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3$ , а другой — только от  $l_1, l_2, l_3, m'_1, m'_2, m'_3$ .

Сравнивая нашу формулу (3.90) с точной формулой (3.3), приходим к приближенным формулам для  $3j$ -символов Вигнера

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \cong C_{l_1 l_2 l_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi S_{\text{пр}}}} \cos \left( P + Q - \frac{3\pi}{4} \right), \quad (3.91a)$$

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} \cong C_{l_1 l_2 l_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi S'_{\text{пр}}}} \cos \left( P' + Q' - \frac{3\pi}{4} \right), \quad (3.91b)$$

где знаковый множитель  $C_{l_1 l_2 l_3}$  нам еще предстоит определить.

6. Найдем вид знакового множителя, для чего, конечно, будем рассматривать теперь только первую формулу (3.91a).

Обратимся сначала к соотношениям (3.5), выражающим симметрию  $3j$ -символов Вигнера. Первое из них утверждает, что этот символ не изменяется при циклических перестановках индексов 1, 2, 3. Наши величины  $S_{\text{пр}}$ ,  $P$  и  $Q$ , как можно видеть, тоже остаются неизменными при таких перестановках и поэтому из (3.91a) заключаем, что

$$C_{l_1 l_2 l_3} = C_{l_2 l_3 l_1} = C_{l_3 l_1 l_2}. \quad (3.92)$$

Второе соотношение рассмотреть сложнее. При перестановке индексов 2 и 3 площадь  $S_{\text{пр}}$  остается неизменной, однако величины  $P$  и  $Q$  изменяются. Величина  $P$  дается формулой (3.71a), в которой углы  $H_1, H_2, H_3$  (как видно из определяющих их формул (3.68)) при перестановке 2 и 3 переставляются следующим образом:

$$H_1 \rightarrow H_1, \quad H_2 \rightarrow H_3, \quad H_3 \rightarrow H_2,$$

а величины  $h_1, h_2, h_3$ , даваемые, например, формулами

$$h_1 = m_2 - m_3, \quad h_2 = m_2, \quad h_3 = -m_3,$$

при рассматриваемой перестановке 2 и 3 изменяются следующим образом:

$$h_1 \rightarrow -h_1, \quad h_2 \rightarrow -h_3, \quad h_3 \rightarrow -h_2;$$

произвольно выбираемое четное целое число  $k$  мы здесь полагаем равным нулю. Таким образом,

$$P \rightarrow -P.$$

Величина  $Q$  дается формулой (3.89а), в которой углы  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  определяются из формул (3.84). Как непосредственно видно из этих последних формул, при перестановке 2 и 3

$$\Lambda_1 \rightarrow \pi - \Lambda_1, \quad \Lambda_2 \rightarrow \pi - \Lambda_3, \quad \Lambda_3 \rightarrow \pi - \Lambda_2,$$

так что

$$Q \rightarrow \pi (l_1 + l_2 + l_3) + \frac{3\pi}{2} - Q.$$

Определив, как при перестановке индексов 2 и 3 изменяются величины  $P$  и  $Q$ , сразу заключаем, что при этой перестановке

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi S_{\text{пп}}}} \cos \left( P + Q - \frac{3\pi}{4} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow (-1)^{l_1+l_2+l_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi S_{\text{пп}}}} \cos \left( P + Q - \frac{3\pi}{4} \right); \end{aligned}$$

таким образом, при перестановке индексов 2 и 3 в правой части формулы (3.91а) появляется множитель  $(-1)^{l_1+l_2+l_3}$ , но в точности этот же самый множитель появляется и в левой части формулы (3.91а) при перестановке 2 и 3, как это непосредственно утверждает второе соотношение (3.4). Следовательно, заключаем, что

$$C_{l_1 l_2 l_3} = C_{l_1 l_3 l_2}. \quad (3.93)$$

Обратимся теперь к рекуррентному соотношению (3.5) и подставим в него формулу (3.91а). В множителях, стоящих перед косинусами, вообще пренебрегаем отклонениями  $l_2 - 1, l_3 - 1, m_2 \pm 1, m_3 \pm 1$  от  $l_2, l_3, m_2, m_3$  соответственно, а выражения, стоящие аргументами косинусов, разложим по малости  $\pm 1$  по отношению к  $l_2, l_3, m_2, m_3$  и оставим только первые члены разложений в ряды Тэйлора. Тогда вместо формулы (3.5) получим формулу

$$\begin{aligned} & (l_2 + l_3 + l_1)(l_2 + l_3 - 1) C_{l_1 l_2 l_3} \cos \left( P + Q - \frac{3\pi}{4} \right) = \\ & = (l_2 + m_2)(l_3 - m_3) C_{l_1, l_2-1, l_3-1} \cos \left( P + Q - \frac{3\pi}{4} - \frac{\partial}{\partial l_3} (P + Q) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial l_2} (P + Q) - \frac{d}{dx} (P + Q) \right) + \\ & + (l_2 - m_2)(l_3 + m_3) C_{l_1, l_2-1, l_3+1} \cos \left( P + Q - \frac{3\pi}{4} - \frac{\partial}{\partial l_3} (P + Q) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial l_2} (P + Q) + \frac{d}{dx} (P + Q) \right) - \\ & - 2 [(l_2^2 - m_2^2)(l_3^2 - m_3^2)]^{1/2} C_{l_1, l_2-1, l_3-1} \cos \left( P + Q - \frac{3\pi}{4} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial l_3} (P + Q) - \frac{\partial}{\partial l_2} (P + Q) \right), \quad (3.94) \end{aligned}$$

в которой через  $x$  обозначен некоторый параметр, от которого зависят  $m_1, m_2, m_3$ , причем таким образом, что  $dm_1/dx = 0, dm_2/dx = 1, dm_3/dx = -1$ ; этот параметр удобно вводить потому, что наши  $m_1, m_2, m_3$  изменяются не независимо, а таким образом, чтобы никогда не нарушалось соотношение  $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ ; очевидно, что  $d/dx = \partial/\partial m_2 - \partial/\partial m_3$ .

Чтобы дальше преобразовать формулу (3.94), необходимо вычислить производные  $\frac{\partial}{\partial l_2}(P + Q), \frac{\partial}{\partial l_3}(P + Q), \frac{d}{dx}(P + Q)$ , стоящие в аргументах косинусов; этим сейчас и займемся. При этом вычислении удобно использовать сокращенные обозначения

$$a_1 = \sqrt{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2}, \quad a_2 = \sqrt{(l_2 + 1/2)^2 - m_2^2},$$

$$a_3 = \sqrt{(l_3 + 1/2)^2 - m_3^2}, \quad b_1 = l_1 + 1/2, \quad b_2 = l_2 + 1/2, \quad b_3 = l_3 + 1/2.$$

Рассмотрим сначала углы  $H_1, H_2, H_3$ , которые даются формулами (3.68). Вторая и третья формулы в (3.68) получаются из первой циклической перестановкой 1, 2, 3, и поэтому достаточно рассмотреть только первую формулу, которую здесь представим в виде

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3 \cos H_1. \quad (3.95)$$

В дополнение к ней возьмем формулу

$$a_2a_3 \sin H_1 = 2S_{\text{пр}}. \quad (3.96)$$

Дифференцируя правую и левую части первой формулы по  $a_1, a_2, a_3$  и исключая получающийся  $\sin H_1$  с помощью второй формулы, а затем совершая циклические перестановки 1, 2, 3 в окончательно получаемых формулах, придем, в частности, к формулам

$$\frac{\partial H_1}{\partial a_3} = \frac{-a_3^2 + a_2^2 - a_1^2}{4a_3 S_{\text{пр}}}, \quad \frac{\partial H_2}{\partial a_3} = \frac{-a_3^2 + a_1^2 - a_2^2}{4a_3 S_{\text{пр}}}, \quad \frac{\partial H_3}{\partial a_3} = \frac{a_3}{2S_{\text{пр}}},$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial a_2} = \frac{-a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{4a_2 S_{\text{пр}}}, \quad \frac{\partial H_2}{\partial a_2} = \frac{a_2}{2S_{\text{пр}}}, \quad \frac{\partial H_3}{\partial a_2} = \frac{-a_2^2 + a_1^2 - a_3^2}{4a_2 S_{\text{пр}}}.$$

Учитывая, что  $\frac{\partial a_3}{\partial l_3} = \frac{b_3}{a_3}$ , отсюда непосредственно получаем

$$\frac{\partial H_1}{\partial l_3} = \frac{-a_3^2 + a_2^2 - a_1^2}{4a_3^2 S_{\text{пр}}} b_3, \quad \frac{\partial H_2}{\partial l_3} = \frac{-a_3^2 + a_1^2 - a_2^2}{4a_3^2 S_{\text{пр}}} b_3, \quad \frac{\partial H_3}{\partial l_3} = \frac{b_3}{2S_{\text{пр}}}.$$

Учитывая далее, что  $\frac{\partial a_2}{\partial m_2} = -\frac{m_2}{a_2}, \frac{\partial a_3}{\partial m_3} = -\frac{m_3}{a_3}$ , будем иметь

$$\frac{dH_1}{dx} = -m_2 \frac{-a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{4a_2^2 S_{\text{пр}}} + m_3 \frac{-a_3^2 + a_2^2 - a_1^2}{4a_3^2 S_{\text{пр}}},$$

$$\frac{dH_2}{dx} = -m_2 \frac{1}{2S_{\text{пр}}} + m_3 \frac{-a_3^2 + a_1^2 - a_2^2}{4a_3^2 S_{\text{пр}}},$$

$$\frac{dH_3}{dx} = -m_2 \frac{-a_2^2 + a_1^2 - a_3^2}{4a_2^2 S_{\text{пр}}} + m_3 \frac{1}{2S_{\text{пр}}}.$$

Используя эти формулы, а также то, что, согласно соотношениям  $h_1 = m_2 - m_3 + k$ ,  $h_2 = m_2 + k$ ,  $h_3 = -m_3 + k$ ,  $\frac{dk}{dx} = 0$  имеют место формулы  $\frac{dh_1}{dx} = 2$ ,  $\frac{dh_2}{dx} = \frac{dh_3}{dx} = 1$ , после небольших преобразований получаем

$$\frac{\partial P}{\partial l_3} = \frac{b_3}{4a_3^2 S_{\text{пр}}} [m_3 (b_1^2 - b_2^2) + (m_1 - m_2) b_3^2], \quad (3.97)$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{m_3^2 - m_1^2}{4S_{\text{пр}}} - \frac{m_2^2 (a_3^2 - a_1^2)}{4a_2^2 S_{\text{пр}}} - \frac{m_1^2 - m_2^2}{4S_{\text{пр}}} + \frac{m_3^2 (a_1^2 - a_2^2)}{4a_3^2 S_{\text{пр}}} + \pi + H_1. \quad (3.98)$$

Рассмотрим теперь углы  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ , которые даются формулами (3.84). Поскольку вторая и третья формулы в (3.84) получаются из первой циклической перестановкой 1, 2, 3, то снова достаточно рассмотреть только первую формулу (3.84), которую здесь представим в виде

$$m_3 (b_2^2 - b_1^2) + (m_2 - m_1) b_3^2 = 4Sa_3 \cos \Lambda_3. \quad (3.99)$$

Из этой формулы непосредственными вычислениями выведем еще одну формулу:

$$4b_3 S_{\text{пр}} = 4Sa_3 \sin \Lambda_3; \quad (3.100)$$

в этих формулах площадь  $S$  стационарного треугольника вычисляется по формулам (3.38), (3.26):

$$16S^2 = 2b_1^2 b_3^2 + 2b_2^2 b_3^2 + 2b_3^2 b_1^2 - b_1^4 - b_2^4 - b_3^4.$$

Дифференцируя последнюю формулу по  $b_1, b_2, b_3$ , непосредственно имеем

$$8S \frac{\partial S}{\partial b_1} = b_1 (b_2^2 + b_3^2 - b_1^2),$$

$$8S \frac{\partial S}{\partial b_2} = b_2 (b_3^2 + b_1^2 - b_2^2),$$

$$8S \frac{\partial S}{\partial b_3} = b_3 (b_1^2 + b_2^2 - b_3^2).$$

Дифференцируя теперь последовательно формулу (3.99) по  $b_1, b_2, b_3$ , используя формулу (3.100) и только что приведенные формулы, а также совершая циклические перестановки 1, 2, 3 в получаемых формулах, будем иметь, в частности, формулы

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial b_3} = - \frac{b_3 b_1}{16 S^2 S_{\text{пр}}} [m_2 (b_1^2 - b_2^2 - b_1^2) - 2m_3 b_2^2],$$

$$\frac{\partial \Lambda_2}{\partial b_3} = - \frac{b_3 b_1}{16 S^2 S_{\text{пр}}} [2m_3 b_1^2 + m_1 (b_1^2 + b_3^2 - b_2^2)],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_3}{\partial b_3} = & - \frac{1}{16 S^2 S_{\text{пр}}} [m_1 b_2^2 (b_2^2 - b_3^2 - b_1^2) - m_2 b_1^2 (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)] - \\ & - \frac{1}{4 S_{\text{пр}} a_3^2} [m_3 (b_1^2 - b_2^2) + (m_1 - m_2) b_3^2]. \end{aligned}$$

Дифференцируя последовательно формулу (3.99) по  $m_1, m_2, m_3$ , используя формулу (3.100) и совершая циклические перестановки 1, 2, 3 в получаемых формулах, получим, в частности, формулы

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial m_3} = - \frac{b_1}{4 S_{\text{пр}}}, \quad \frac{\partial \Lambda_2}{\partial m_3} = \frac{b_2}{4 S_{\text{пр}}}, \quad \frac{\partial \Lambda_3}{\partial m_3} = \frac{b_2 (a_3^2 - a_1^2)}{4 S_{\text{пр}} a_2^2},$$

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial m_2} = \frac{b_1}{4 S_{\text{пр}}}, \quad \frac{\partial \Lambda_2}{\partial m_2} = \frac{b_2 (a_3^2 - a_1^2)}{4 S_{\text{пр}} a_2^2}, \quad \frac{\partial \Lambda_3}{\partial m_2} = - \frac{b_3}{4 S_{\text{пр}}}.$$

Отсюда, учитывая, что  $\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial m_2} - \frac{\partial}{\partial m_3}$ , найдем

$$\frac{d \Lambda_1}{dx} = \frac{b_1}{2 S_{\text{пр}}}, \quad \frac{d \Lambda_2}{dx} = \frac{b_2}{4 S_{\text{пр}} a_2^2} (a_3^2 - a_1^2 - a_2^2),$$

$$\frac{d \Lambda_3}{dx} = - \frac{b_3}{4 S_{\text{пр}} a_3^2} (a_3^2 + a_1^2 - a_2^2).$$

Используя все эти формулы, после несложных вычислений получаем формулы

$$\frac{\partial Q}{\partial l_3} = \Lambda_3 - \frac{b_3}{4 S_{\text{пр}} a_3^2} [m_3 (b_1^2 - b_2^2) + (m_1 - m_2) b_3^2], \quad (3.101)$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{b_1^2}{2 S_{\text{пр}}} + \frac{b_2^2}{4 S_{\text{пр}} a_2^2} (a_3^2 - a_1^2 - a_2^2) - \frac{b_3^2}{4 S_{\text{пр}} a_3^2} (a_3^2 + a_1^2 - a_2^2).$$

(3.102)

Комбинируя, наконец, формулы (3.97), (3.98) и (3.101), (3.102), окончательно приходим к исключительно простому результату:

$$\frac{\partial}{\partial l_3} (P + Q) = \Lambda_3, \quad \frac{d}{dx} (P + Q) = \pi + H_1; \quad (3.103a)$$

из первой формулы непосредственно получаем

$$\frac{\partial}{\partial l_2} (P + Q) = \Lambda_2. \quad (3.103b)$$

Таким образом, производная по  $l_3$  от  $P+Q$  равна просто углу  $\Lambda_3$ , производная  $P+Q$  по  $l_2$  равна углу  $\Lambda_2$ , а производная  $P+Q$  по параметру  $x$  равна простому выражению  $\pi+H_1$ .

Вернемся теперь к формуле (3.94), которой мы приближенно представили рекуррентное соотношение (3.5). Подставляя (3.103a), (3.103b) в (3.94), приходим к результату

$$\begin{aligned} & - [(l_2 + l_3)^2 - l_1^2] \frac{C_{l_1 l_2 l_3}}{C_{l_1, l_2-1, l_3-1}} \cos \left( P + Q - \frac{3\pi}{4} \right) = \\ & = (l_2 + m_2)(l_3 - m_3) \cos \left( P + Q - \frac{3\pi}{4} - \Lambda_2 - \Lambda_3 - H_1 \right) + \\ & + (l_2 - m_2)(l_3 - m_3) \cos \left( P + Q - \frac{3\pi}{4} - \Lambda_2 - \Lambda_3 + H_1 \right) + \\ & + 2 [(l_2^2 - m_2^2)(l_3^2 - m_3^2)]^{1/2} \cos \left( P + Q - \frac{3\pi}{4} - \Lambda_2 - \Lambda_3 \right). \end{aligned} \quad (3.104)$$

Дальнейшее преобразование формулы (3.104) элементарно, хотя и довольно громоздко. Не будем его описывать подробно. Укажем только, что оно основано на двух тождествах

$$\begin{aligned} & (l_2 l_3 - m_2 m_3) \sin (\Lambda_2 + \Lambda_3) \cos H_1 + \\ & + (m_2 l_3 - m_3 l_2) \cos (\Lambda_2 + \Lambda_3) \sin H_1 + \\ & + [(l_2^2 - m_2^2)(l_3^2 - m_3^2)]^{1/2} \sin (\Lambda_2 + \Lambda_3) = 0, \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} [(l_2 + l_3)^2 - l_1^2] & = -2 (l_2 l_3 - m_2 m_3) \cos (\Lambda_2 + \Lambda_3) \cos H_1 + \\ & + 2 (m_2 l_3 - m_3 l_2) \sin (\Lambda_2 + \Lambda_3) \sin H_1 - \\ & - 2 [(l_2^2 - m_2^2)(l_3^2 - m_3^2)]^{1/2} \cos (\Lambda_2 + \Lambda_3), \end{aligned} \quad (3.106)$$

которые сравнительно легко доказать, если воспользоваться точными формулами

$$\begin{aligned} \sin (\Lambda_2 \mp \Lambda_3) &= \frac{S_{\text{np}}(m_3 l_2 - m_2 l_3)(l_2^2 + l_3^2 - l_1^2 - 2l_2 l_3)}{4S^2 [(l_2^2 - m_2^2)(l_3^2 - m_3^2)]^{1/2}}, \\ \cos (\Lambda_2 \mp \Lambda_3) &= \\ &= \frac{[(l_2 l_3 - m_2 m_3)(l_2^2 + l_3^2 - l_1^2 + 2m_2 m_3) + 2(l_2^2 - m_2^2)(l_3^2 - m_3^2)]}{16S^2 [(l_2^2 - m_2^2)(l_3^2 - m_3^2)]^{1/2}} \times \\ &\quad \times (l_2^2 \mp l_3^2 - l_1^2 - 2l_2 l_3), \\ 16S^2 &= 4l_2^2 l_3^2 - (l_2^2 \mp l_3^2 - l_1^2)^2, \\ 16S_{\text{np}}^2 &= 4(l_2^2 - m_2^2)(l_3^2 - m_3^2) - (l_2^2 \mp l_3^2 - l_1^2 \mp 2m_2 m_3)^2. \end{aligned}$$

Используя (3.105), (3.106), из формулы (3.104) окончательно заключаем, что

$$\frac{C_{l_1 l_2 l_3}}{C_{l_1, l_2-1, l_3-1}} = 1; \quad (3.107)$$

таким образом, видим, что знаковый множитель  $C_{l_1 l_2 l_3}$  один и тот же для всех  $3j$ -символов с четным значением суммы  $l_1 + l_2 + l_3$  и он один и тот же для всех  $3j$ -символов с нечетным значением суммы  $l_1 + l_2 + l_3$ , т. е. нам нужно определить лишь два эти его значения.

Какие именно эти два значения, установим, обратившись к асимптотической формуле (3.6), к рассмотрению которой теперь переходим. Подставляя в левую часть этой формулы приближенную формулу (3.91а) для  $3j$ -символа Вигнера, получим формулу

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_3 - l & l_3 \\ m_1 & m_3 - m_1 & -m_3 \end{pmatrix} \cong \frac{C_{l_1, l_2-l, l_3}}{\sqrt{2\pi} S_{\text{np}}} \cos \left( P \mp Q - \frac{3\pi}{4} \right), \quad (3.108)$$

которая должна быть справедлива при малых величинах  $l_1$ ,  $m$ ,  $l$  одного порядка малости. Учитывая эту малость, непосредственно приходим к приближенным формулам

$$2S \cong b_3 (b_1^2 - l^2)^{1/2},$$

$$2S_{\text{np}} \cong \sqrt{a_1^2 a_3^2 - (m_3 m_1 - b_3 l)^2}, \quad (3.109)$$

$$\cos H_1 \cong 1, \quad \cos H_2 \cong \frac{b_3 l - m_1 m_3}{a_3 a_1}, \quad \cos H_3 \cong \frac{m_3 m_1 - b_3 l}{a_3 a_1},$$

$$\cos \Lambda_1 \cong \frac{lm_1 b_3 - m_3 b_1^2}{a_1 b_3 (b_1^2 - l^2)^{1/2}}, \quad \cos \Lambda_2 \cong \frac{m_1 b_3 - m_3 l}{a_3 (b_1^2 - l^2)^{1/2}},$$



$$\cos \Lambda_3 \cong \frac{m_3 l - m_1 b_3}{a_3 (b_1^2 - l^2)^{1/2}}.$$

Отсюда следует, что в пределе малых значений  $l_1, m, l$  существуют предельные углы  $H_1^0 = 0, H_2^0, H_3^0 = \pi - H_2^0$  и  $\Lambda_1^0, \Lambda_2^0, \Lambda_3^0 = \pi - \Lambda_2^0$ , причем углы  $H_2^0, \Lambda_1^0, \Lambda_2^0$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \cos H_2^0 &= \frac{b_3 l - m_1 m_3}{a_3 a_1}, \quad \cos \Lambda_1^0 = \frac{l m_1 b_3 - m_3 b_1^2}{a_1 b_3 (b_1^2 - l^2)^{1/2}}, \\ \cos \Lambda_2^0 &= \frac{m_1 b_1 - m_3 l}{a_3 (b_1^2 - l^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.110)$$

и условиями  $0 \leq H_2^0 \leq \pi, 0 \leq \Lambda_1^0 \leq \pi, 0 \leq \Lambda_2^0 \leq \pi$ . Вычислив углы  $H_1, H_2, H_3$  и  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ , мы можем рассчитать нужные нам величины  $P$  и  $Q$ :

$$\begin{aligned} P &= \pi m_3 - m_1 H_2^0, \\ Q &= (l_3 + 1/2) \Lambda_1^0 - l \Lambda_2^0 + \pi l_3 + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (3.111)$$

и, таким образом, из (3.108) окончательно получаем формулу

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l_1 & l_3 - l & l_3 \\ m_1 & m_3 - m_1 & -m_3 \end{pmatrix} &\cong \frac{C_{l_1, l_3 - l, l_3} (-1)^{l_3 + m_3}}{\sqrt{\pi}^4 \sqrt{a_1^2 a_3^2 - (m_2 m_1 - b_3 l)^2}} \times \\ &\times \cos \left[ -m_1 H_2^0 + (l_1 + 1/2) \Lambda_1^0 - l \Lambda_2^0 - \frac{\pi}{4} \right], \end{aligned} \quad (3.112)$$

которая представляет левую часть асимптотического соотношения (3.6).

Обратим внимание на то, что выражение, стоящее под корнем четвертой степени в (3.112), можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_1^2 a_3^2 - (m_3 m_1 - b_3 l)^2 &= \\ &= (l_3 + 1/2)^2 \left\{ (l_1 + 1/2)^2 \left( 1 - \frac{m_3^2}{(l_3 + 1/2)^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - m_1^2 - l^2 + 2 m_1 l \frac{m_3}{l_3 + 1/2} \right\} \end{aligned}$$

и, если положить  $m_3 / (l_3 + 1/2) = \cos \theta$ , где  $\theta$  — некоторый угол, его можно еще дальше преобразовать и получить

$$a_1^2 a_3^2 - (m_3 m_1 - b_3 l)^2 = (l_3 + 1/2)^2 \sin^2 \theta \rho^2(\theta), \quad (3.113)$$

где  $\rho(\theta)$  дается формулой (3.9), если только в ней положить  $l = l_1, m = m_1, m' = l$ .

Как видим, формулу (3.112) имеет смысл преобразовать к приближенному выражению для функции  $d_{mm'}^l(\theta)$  при  $l=l_1, m=m_1, m'=l$ , т. е. к выражению

$$d_{mm'}^l(\theta) \cong \frac{2(-1)^{\frac{m-m'+|m-m'|}{2}}}{\sqrt{2\pi\rho(\theta)\sin\theta}} \cos \left[ \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right],$$

причем согласно формуле (2.77), полагая в ней  $\varepsilon=1$ , имеем

$$\int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta = m(\Phi - \Phi_1) - m'(\Phi' - \Phi'_1)(l + 1/2) + (\Psi - \Psi_1),$$

где угол  $\Psi$  находится из формул (см. (2.72) — (2.74))

$$\begin{aligned} p(\theta)(l + 1/2)\sin\theta &= \sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2} \sqrt{(l + 1/2)^2 - m'^2} \sin\Psi, \\ (l + 1/2)^2 \cos\theta - mm' &= \sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2} \sqrt{(l + 1/2)^2 - m'^2} \cos\Psi \end{aligned}$$

и условия  $0 \leq \Psi < 2\pi$ , а углы  $\Phi$  и  $\Phi'$  — из формул (см. (2.63)):

$$\begin{aligned} \sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2} \cos\Phi &= \frac{m' - m \cos\theta}{\sin\theta}, \\ \sqrt{(l + 1/2)^2 - m'^2} \cos\Phi' &= \frac{m - m' \cos\theta}{\sin\theta}, \end{aligned}$$

$$\sqrt{(l + 1/2)^2 - m^2} \sin\Phi = p(\theta), \quad \sqrt{(l + 1/2)^2 - m'^2} \sin\Phi' = -p(\theta) \quad (3.114)$$

и условий  $0 \leq \Phi < 2\pi, 0 \leq \Phi' < 2\pi$ ; для предельных углов  $\Phi_1, \Phi'_1, \Psi_1$  имеем выражения (см. (2.84) — (2.86))

$$\Phi_1 = \begin{cases} \pi & \text{при } m > m' \\ 0 & \text{при } m < m' \end{cases}, \quad \Phi'_1 = \begin{cases} 2\pi & \text{при } m > m' \\ 0 & \text{при } m < m' \end{cases}, \quad \Psi_1 = 0. \quad (3.115)$$

Сопоставляя все эти формулы, в которых надо положить  $l=l_1, m=m_1, m'=l, \cos\theta = \frac{m_3}{l_3 + 1/2}$ , с формулами (3.110), непосредственно убеждаемся, что имеют место равенства

$$\Phi = H_2^0, \quad \Phi' = 2\pi - \Lambda_2^0, \quad \Phi = \pi - \Lambda_1^0. \quad (3.116)$$

Следовательно, после небольшого преобразования получаем

$$\begin{aligned} \cos \left[ \int_{\theta_1}^{\theta} p(\theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \right] &= (-1)^{l_1 + 1/2(l_{m_1} - l_1 + m_1 + l)} \times \\ &\times \cos \left[ m_1 H_2^0 + l \Lambda_2^0 - (l_1 + 1/2) \Lambda_1^0 + \frac{\pi}{4} \right]. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Сопоставляя формулы (3.112) и (3.117), приходим к окончательному результату

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_3 - l & l_3 \\ m_1 & m_3 - m_1 & -m_3 \end{pmatrix} \cong C_{l_1, l_3 - l, l_3} (-1)^{l_1 + l} \frac{(-1)^{l_3 + m_3}}{\sqrt{2l_3 + 1}} d_{mm}^l(\theta). \quad (3.118)$$

Эта формула будет совпадать с асимптотической формулой (3.6) только в том случае, если считать

$$C_{l_1 l_2 l_3} = (-1)^{l_1 + l_2 + l_3}. \quad (3.119)$$

Таким образом, мы устанавливаем вид знакового множителя в нашей приближенной формуле для  $3j$ -символа Вигнера (3.91а).

7. Определив вид знакового множителя  $C_{l_1 l_2 l_3}$ , мы тем самым закончили вывод приближенной квазиклассической формулы для  $3j$ -символа Вигнера. Подставив (3.119) в (3.91а), получаем окончательную формулу

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \cong \frac{(-1)^{l_1 + l_2 + l_3}}{\sqrt{2\pi S_{\text{пр}}}} \cos \left( P + Q - \frac{3\pi}{4} \right), \quad (3.120)$$

которую, однако, более удобно представлять в виде

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \cong \sum_{\lambda = \pm 1} \frac{(-1)^{l_1 + l_2 + l_3}}{2\sqrt{2\pi S_{\text{пр}}}} \exp \left\{ i\lambda \left( P + Q - \frac{3\pi}{4} \right) \right\}. \quad (3.121)$$

вводя суммирование по двум значениям сигнатуры  $\lambda$ .

Дадим геометрическую интерпретацию отдельного слагаемого в сумме (3.121). Для этого возьмем некоторую декартову систему координат  $Oxyz$  с единичным вектором  $\vec{k}$ , направленным вдоль оси  $Oz$ . Далее, возьмем какой-нибудь (неважно, какой) вектор  $\vec{l}_1$ , имеющий заданные длину  $l_1 + 1/2$  и проекцию  $m_1$  на ось  $Oz$ . Все такие векторы получаются один из другого произвольными поворотами вокруг оси  $Oz$ , если только считать, конечно, что все они отложены из начала координат  $O$ . Берем один из этих векторов  $\vec{l}_1$  и откладываем его не из начала координат, а из некоторой точки  $B$ , достаточно высоко лежащей над плоскостью  $Oxy$  на некотором целочисленном расстоянии  $h_2$ , таком, что  $h_2 - m_2$  равно четному числу. По этому вектору  $\vec{l}_1$  и по заданному значению сигнатуры  $\lambda$  мы построим другой вектор  $\vec{l}_2$ , имеющий заданные длину  $l_2 + 1/2$  и проекцию  $m_2$  на ось  $Oz$  и удовлетворяющий условию  $\text{sign}(\vec{k} \cdot [\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2]) = \lambda$ . Этот вектор  $\vec{l}_2$ , как покажем ниже, имеет вид

$$\vec{l}_2 = \frac{(l_1 + 1/2)^2 m_2 - m_1 (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} \vec{k} - \frac{(\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) - m_1 m_2}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} \vec{l}_1 - \frac{2\lambda S_{\text{пр}}}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} [\vec{l}_1, \vec{k}], \quad (3.122)$$

причем

$$2(\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) = b_3^2 - b_1^2 - b_2^2,$$

$$16S_{\text{пр}}^2 = -a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 + 2a_1^2 a_2^2 + 2a_2^2 a_3^2 + 2a_3^2 a_1^2, \quad (3.122a)$$

где  $b_j = l_j + 1/2$ ,  $a_j^2 = (l_j + 1/2)^2 - m_j^2$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Вектор  $\vec{l}_2$  отложим из конца вектора  $\vec{l}_1$ , т. е. из точки  $C$ . Вектор, идущий из конца вектора  $\vec{l}_2$  — точки  $A$  в начало вектора  $\vec{l}_1$ , назовем  $\vec{l}_3$ . Таким образом, векторы  $\vec{l}_1$ ,  $\vec{l}_2$ ,  $\vec{l}_3$  в сумме равны нулю, т. е.  $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 = 0$ . Для вектора  $\vec{l}_3$  имеем формулу, подобную (3.122):

$$\vec{l}_3 = \frac{(l_1 + 1/2)^2 m_3 - m_1 (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3)}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} \vec{k} + \frac{(\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3) - m_1 m_3}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} \vec{l}_1 + \frac{2\lambda S_{\text{пр}}}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} [\vec{l}_1, \vec{k}], \quad (3.123)$$

причем здесь

$$2(\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3) = b_2^2 - b_1^2 - b_3^2, \quad (3.123a)$$

где  $b_j = l_j + 1/2$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Вектор  $\vec{l}_3$  имеет длину  $l_3 + 1/2$  и проекцию на ось  $Oz$ , равную  $m_3$ . Числа  $l_3$ ,  $m_3$  заранее заданы.

Остановимся на выводе формулы (3.122) и непосредственно следующей из нее формулы (3.123). Будем искать вектор  $\vec{l}_2$  с требуемыми свойствами в виде разложения

$$\vec{l}_2 = x\vec{k} + y\vec{l}_1 + z[\vec{l}_1, \vec{k}],$$

причем числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  определим из условий

$$(\vec{k} \cdot \vec{l}_2) = m_2, \quad (\vec{l}_2 \cdot \vec{l}_2) = (l_2 + 1/2)^2, \quad \text{sign}(\vec{k} \cdot [\vec{l}_1, \vec{l}_2]) = \lambda.$$

Помножая приведенное выражение для  $\vec{l}_2$  скалярно соответственно на  $\vec{k}$ ,  $\vec{l}_1$  и  $\vec{l}_2$ , получим уравнения

$$m_2 = x + m_1 y, \quad (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) = m_1 x + y(l_1 + 1/2)^2,$$

$$(l_2 + 1/2)^2 = x^2 + y^2(l_1 + 1/2)^2 + 2xym_1 + z^2[(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2].$$

Разрешая систему первых двух уравнений относительно чисел  $x, y$ , приходим к формулам

$$x = \frac{(l_1 + 1/2)^2 m_2 - m_1 (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2}, \quad y = \frac{(\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) - m_1 m_2}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2},$$

подставляя которые в третье приведенное уравнение, после довольно громоздкой, но элементарной выкладки получим очень простое соотношение

$$4S_{\text{пр}}^2 = z^2 [(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2]^2.$$

Помножая теперь наше исходное выражение для  $\vec{l}_2$  слева векторно на  $\vec{l}_1$ , будем иметь формулу

$$[\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2] = x [\vec{l}_1 \cdot \vec{k}] - z m_1 \vec{l}_1 - z \vec{k} (l_1 + 1/2)^2,$$

а следовательно, формулу

$$(\vec{k} \cdot [\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2]) = -z [(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2].$$

Таким образом,

$$\text{sign}(\vec{k} \cdot [\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2]) = -\text{sign} z.$$

Отсюда для числа  $z$  сразу получаем формулу

$$z = -\lambda \frac{2S_{\text{пр}}}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2}.$$

Подставляя найденные выражения для чисел  $x, y, z$  в нашу исходную формулу для  $\vec{l}_2$ , получаем в точности формулу (3.122), формулу (3.123) — непосредственно из формулы (3.122), если воспользоваться соотношением  $\vec{l}_3 = -\vec{l}_2 - \vec{l}_1$ .

Проектируя векторы  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  на плоскость  $Oxy$ , построим векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ , причем  $\vec{a}_1 = \vec{l}_1 - m_1 \vec{k}$ ,  $\vec{a}_2 = \vec{l}_2 - m_2 \vec{k}$ ,  $[\vec{l}_1 \cdot \vec{k}] = [\vec{a}_1 \cdot \vec{k}]$ . Непосредственно от формул (3.122), (3.123) переходим к формулам

$$\vec{a}_2 = \frac{(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} \vec{a}_1 - \frac{2\lambda S_{\text{пр}}}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} [\vec{a}_1 \cdot \vec{k}], \quad (3.124)$$

$$\vec{a}_3 = \frac{(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3)}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} \vec{a}_1 - \frac{2\lambda S_{\text{пр}}}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} [\vec{a}_1 \cdot \vec{k}], \quad (3.125)$$

в которых

$$2(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2) = a_3^2 - a_1^2 - a_2^2, \quad (3.124a)$$

$$2(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3) = a_2^2 - a_1^2 - a_3^2, \quad (3.125a)$$

где  $a_j^2 = (l_j + 1/2)^2 - m_j^2$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Отметим, что

$$[\vec{a}_2, \vec{k}] = \frac{(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} [\vec{a}_1, \vec{k}] + \frac{2\lambda S_{\text{пр}}}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} \vec{a}_1, \quad (3.126)$$

$$[\vec{a}_3, \vec{k}] = \frac{(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3)}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} [\vec{a}_1, \vec{k}] - \frac{2\lambda S_{\text{пр}}}{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2} \vec{a}_1. \quad (3.127)$$

Итак, мы взяли декартову систему координат  $Oxyz$  и построили три вектора  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ , в сумме равных нулю, имеющих заданные длины  $l_j + 1/2$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и заданные проекции  $m_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) на ось  $Oz$ , причем эти векторы такие, что удовлетворяют условию  $\text{sign}(\vec{k} \cdot [\vec{l}_1, \vec{l}_2]) = \lambda$  (рис. 16).

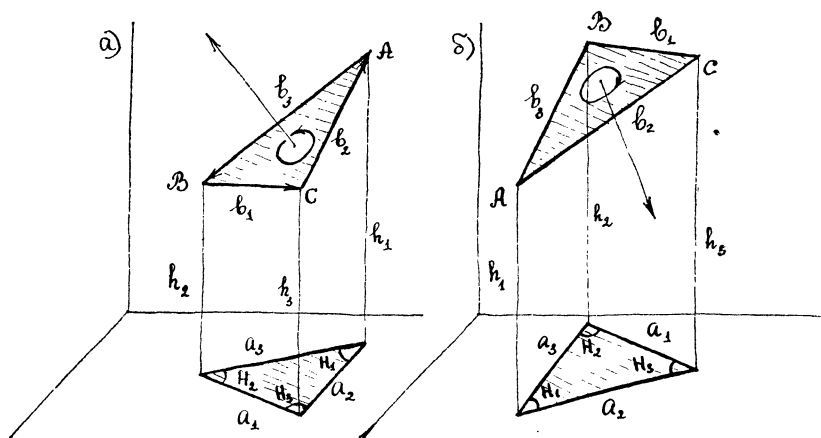


Рис. 16. Прямоугольные призмы, изображающие  $3j$ -символы Вигнера  $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ : а) в случае  $\lambda = +1$ , б) в случае  $\lambda = -1$

Вектор  $\vec{l}_1$  идет из точки  $B$  в точку  $C$ , вектор  $\vec{l}_2$  — из точки  $C$  в точку  $A$ , вектор  $\vec{l}_3$  — из точки  $A$  в точку  $B$ , причем расстояния  $h_1, h_2, h_3$  точек  $A, B, C$  от плоскости  $Oxy$  целочисленные и удовлетворяют условиям:  $h_1 - m_1, h_2 - m_2$  и  $h_3 - m_3$  равны четным числам.

Мы построили, таким образом, некоторый треугольник  $ABC$  в пространстве. Опуская из вершин этого треугольника перпендикуляры на плоскость  $Oxy$ , получим некоторую прямоугольную трехгранную призму, которая в случаях  $\lambda = +1$  и  $\lambda = -1$  изображена на рис. 16.

Чтобы составить выражения для величин  $P$  и  $Q$ , входящих в формулу (3.121), надо рассмотреть двухгранные углы при вертикальных ребрах  $h_1, h_2, h_3$  нашей прямоугольной призмы, которые равны соответственно углам  $H_1, H_2, H_3$  треугольника, лежащего в основании призмы на плоскости  $Oxy$ , а также двухгранные углы  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  при ребрах  $b_1, b_2, b_3$ , являющихся сторонами треугольника  $ABC$ . Найдя эти углы, можно найти величины  $P$  и  $Q$  по формулам

$$P = h_1 H_1 \div h_2 H_2 \div h_3 H_3, \quad (3.128)$$

$$Q = b_1 \Lambda_1 \dots b_2 \Lambda_2 \div b_3 \Lambda_3, \quad (3.129)$$

где  $b_j = l_j + 1/2$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Легко непосредственно убедиться, что рассматриваемые здесь двухгранные углы  $H_1, H_2, H_3, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  вычисляются по формулам (3.68), (3.84). Приведем здесь для удобства еще раз эти формулы для углов  $H_1, H_2, H_3$ :

$$\begin{aligned} a_1^2 &= a_2^2 \div a_3^2 - 2a_2 a_3 \cos H_1, \\ a_2^2 &= a_3^2 \div a_1^2 - 2a_3 a_1 \cos H_2, \\ a_3^2 &= a_1^2 \div a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos H_3 \end{aligned} \quad (3.130)$$

и для углов  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ :

$$\begin{aligned} m_1 (b_3^2 - b_2^2) \div (m_3 - m_2) b_1^2 &= 4Sa_1 \cos \Lambda_1, \\ m_2 (b_1^2 - b_3^2) \div (m_1 - m_3) b_2^2 &= 4Sa_2 \cos \Lambda_2, \\ m_3 (b_2^2 - b_1^2) \div (m_2 - m_1) b_3^2 &= 4Sa_3 \cos \Lambda_3, \end{aligned} \quad (3.131)$$

причем здесь  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ , которая вычисляется по формуле

$$16S^2 = -b_1^4 - b_2^4 - b_3^4 \div 2b_1^2 b_2^2 \div 2b_2^2 b_3^2 \div 2b_3^2 b_1^2. \quad (3.132)$$

Как и прежде,  $b_j = l_j \div 1/2$ ,  $a_j = \sqrt{(l_j \div 1/2)^2 - m_j^2}$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Разумеется,  $0 \leq H_j \leq \pi$ ,  $0 \leq \Lambda_j \leq \pi$ .

# КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ $6j$ -СИМВОЛОВ ВИГНЕРА

1. Основываясь на приближенных квазиклассических формулах для  $3j$ -символов Вигнера, полученных в гл. 3, выведем приближенную квазиклассическую формулу для  $6j$ -символа Вигнера. Возьмем в качестве исходной следующую абсолютно точную формулу

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} = \\ = & \sum_{m_1, m_2, m_3} (-1)^x \begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ -q_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -m_1 & -q_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ m_1 & -m_2 & -q_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

в которой  $x = j_1 + j_2 + j_3 + l_1 + l_2 + l_3 + m_1 + m_2 + m_3$ . Неотрицательные целые числа  $j_1, j_2, j_3; l_1, l_2, l_3$  и целые числа  $q_1, q_2, q_3$  будем считать фиксированными во всем нашем рассмотрении.

Предположим относительно них следующее:

1) тройки чисел  $j_1, j_2, j_3; j_1, l_2, l_3; l_1, j_2, l_3$  и  $l_1, l_2, j_3$  удовлетворяют условию треугольника, т. е. из отрезков соответствующих длин можно составить треугольники;

2) числа  $q_1, q_2, q_3$  удовлетворяют неравенствам  $|q_p| \leq j_p$ , где  $p = 1, 2, 3$ , и соотношению  $q_1 + q_2 + q_3 = 0$ .

Если хотя бы одно из приведенных условий не выполняется, то правая и левая части формулы (4.1) обращаются в нуль; и эту формулу в таком случае рассматривать неинтересно.

В формуле (4.1) суммирование проводится по всем наборам значений целых чисел  $m_1, m_2, m_3$ , причем эти числа удовлетворяют неравенствам  $|m_j| \leq l_j$ , где  $j = 1, 2, 3$ , и подчиняются соотношениям

$$q_1 = m_2 - m_3, \quad q_2 = m_3 - m_1, \quad q_3 = m_1 - m_2. \quad (4.2)$$

Если хотя бы одно из приведенных условий не выполняется, то соответствующее слагаемое в правой части формулы (4.1) обратится в нуль. Соотношения (4.2) с учетом требования  $q_1 + q_2 + q_3 = 0$  означают, что среди чисел  $m_1, m_2, m_3$  лишь одно может меняться независимо. В качестве этого независимого числа можно взять либо  $k = m_1$ , либо  $k = m_2$ , либо  $k = m_3$ . При этом совершенно неважно, какую конкретно из



этих трех возможностей мы используем, так как при любой из них числа  $m_1, m_2, m_3$  зависят от  $k$  таким образом, что выполняется соотношение

$$\frac{dm_1}{dk} = \frac{dm_2}{dk} = \frac{dm_3}{dk} = 1, \quad (4.3)$$

в чем нетрудно убедиться, дифференцируя по  $k$  соотношения (4.2), а только эти соотношения (4.3) и нужны будут в дальнейшем.

Таким образом, правую часть нашей основной формулы (4.1) можно записать в виде

$$I = \sum_k (-1)^x \begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ -q_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -m_1 & -q_1 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ m_1 & -m_2 & -q_3 \end{pmatrix}; \quad (4.4)$$

здесь суммирование идет по всем допустимым целочисленным значениям числа  $k$ , причем либо  $k=m_1$ , либо  $k=m_2$ , либо  $k=m_3$ .

Преобразуем сумму по  $k$  в (4.4) в интеграл по  $k$ , пользуясь известной формулой Пуассона — Эйлера

$$\sum_k f(k) = \sum_v \int dk e^{2\pi i k v} f(k), \quad (4.5)$$

суммирование в правой части которой ведется по всем целочисленным значениям  $v$ . Далее, подставим вместо каждого  $3j$ -символа Вигнера в правой части (4.4) его приближенное выражение, даваемое формулой (3.121). Тогда для правой части формулы (4.4) получим приближенное выражение

$$I \cong \frac{(-1)^z}{8(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \sum_v \int dk \frac{1}{\sqrt{S_{\text{пр}1} S_{\text{пр}2} S_{\text{пр}3}}} \times \\ \times \exp \left\{ i\lambda_1 (P_1 \div Q_1) - i\lambda_2 (P_2 \div Q_2) \div i\lambda_3 (P_3 \div Q_3) - \right. \\ \left. - \frac{3\pi i}{4} (\lambda_1 \div \lambda_2 \div \lambda_3) \div 2\pi i k v \div i\pi (m_1 \div m_2 \div m_3) \right\}, \quad (4.6)$$

в котором  $z=l_1+l_2+l_3$  и в котором суммирование по  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  проводится по всем восьми наборам значений сигнатур  $\lambda_1=\pm 1, \lambda_2=\pm 1, \lambda_3=\pm 1$ . При написании формулы (4.6) мы предположили, что  $3j$ -символы Вигнера, стоящие в правой части формулы (4.4) или (4.1), имеют номера  $p=1, 2, 3$ , которые уславливаемся приписывать этим символам таким образом, чтобы они перечислялись в формулах (4.4) и (4.1) в порядке слева направо.

Каждый интеграл в правой части формулы (4.6), соответствующий заданным значениям сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и задан-

ному значению целого числа  $\nu$ , будем вычислять по методу стационарной фазы, т. е. с использованием общей формулы

$$\int dk f(k) \exp \{ig(k)\} \cong \sum_n f(k_n) \frac{\sqrt{2\pi}}{|g''(k_n)|^{1/2}} \exp \left\{ ig(k_n) \pm i \frac{\pi}{4} \right\}, \quad (4.7)$$

в которой суммирование по  $n$  ведется по всем решениям уравнения стационарности

$$g'(k_n) = 0 \quad (4.8)$$

и в которой перед  $i\pi/4$  надо брать знак «плюс», когда

$$g''(k_n) > 0, \quad (4.9a)$$

и знак «минус», когда

$$g''(k_n) < 0. \quad (4.9b)$$

Применяя формулу метода стационарной фазы к каждому интегралу по  $k$ , имеющемуся в формуле (4.6) и соответствующему заданным значениям чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и  $\nu$ , мы должны прежде всего составить в явном виде соответствующее уравнение стационарности. Для этого согласно (4.8) надо просто продифференцировать по  $k$  выражение, стоящее в показателе экспоненты в формуле (4.6) и приравнять производную нулю. Таким образом, получим следующее уравнение стационарности:

$$\lambda_1 \frac{d}{dk} (P_1 \div Q_1) \div \lambda_2 \frac{d}{dk} (P_2 \dots Q_2) \dots \lambda_3 \frac{d}{dk} (P_3 \dots Q_3) \div \dots \div 2\pi\nu \dots 3\pi = 0, \quad (4.10)$$

написанное с учетом соотношений (4.3). Величины  $P_p + Q_p$  ( $p=1, 2, 3$ ), входящие в (4.10), являются функциями  $m_1, m_2, m_3$ , вид которых определен формулами (3.128), (3.129). Уравнение (4.10) позволяет найти стационарные значения  $k=k_n$ .

Пользуясь формулой (3.103a) (в которой  $x$  считалось таким, что для него имели место соотношения  $\frac{dm_1}{dx} = 0$ ,

$\frac{dm_2}{dx} = 1$ ,  $\frac{dm_3}{dx} = -1$ ) и производя в ней циклические перестановки индексов 1, 2, 3, получим формулы дифференцирования

$$\begin{array}{l} \frac{dm_1}{dx} = 0 \quad \frac{dm_2}{dx} = 1 \quad \frac{dm_3}{dx} = -1 \quad \left| \frac{d}{dx} (P \dots Q) = \pi \div H_1 \right. \\ \hline \frac{dm_1}{dx} = -1 \quad \frac{dm_2}{dx} = 0 \quad \frac{dm_3}{dx} = 1 \quad \left| \frac{d}{dx} (P \div \dots Q) = \pi \cdot H_2 \right. \\ \hline \frac{dm_1}{dx} = 1 \quad \frac{dm_2}{dx} = -1 \quad \frac{dm_3}{dx} = 0 \quad \left| \frac{d}{dx} (P \div Q) = \pi \div H_3, \right. \end{array} \quad (4.11)$$

с помощью которых уравнение стационарности (4.10) можно преобразовать к виду

$$\lambda_1(\pi + H_{11}) + \lambda_2(\pi + H_{22}) + \lambda_3(\pi + H_{33}) + 2\pi\nu + 3\pi = 0, \quad (4.12)$$

где использованы очевидные обозначения  $H_{pj}$  ( $j=1, 2, 3$ ) для углов треугольников проекций соответствующих  $3j$ -символов Вигнера ( $p=1, 2, 3$ ), имеющих в формуле (4.4).

Уравнение стационарности (4.12), составленное для данного набора значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и числа  $\nu$ , как оказывается, заведомо не имеет решений при всех  $\nu$ , кроме одного определенного  $\nu = \nu(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

В этом можно убедиться, проводя следующее рассуждение. Формулу (4.12) можно представить в виде

$$\lambda_1 H_{11} + \lambda_2 H_{22} + \lambda_3 H_{33} = 2\pi\omega, \quad (4.13)$$

где  $\omega = -\nu - 1/2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 3)$  является некоторым целым числом, так как сумма  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$  может принимать только значения 3, 1, -1, -3, а  $\nu$  — целое число. Так как углы  $H_{11}, H_{22}, H_{33}$  согласно их определению (см. (3.130)) удовлетворяют неравенствам  $0 < H_{11} < \pi, 0 < H_{22} < \pi, 0 < H_{33} < \pi$ , то, очевидно, имеют место неравенства

$$-3\pi < \lambda_1 H_{11} + \lambda_2 H_{22} + \lambda_3 H_{33} < 3\pi,$$

так как  $\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \pm 1, \lambda_3 = \pm 1$ . Из этих неравенств сразу следует, что в формуле (4.13) число  $\omega = 0, \pm 1$ ; при других значениях  $\omega$  мы заведомо не сможем удовлетворить соотношению (4.13). Теперь для набора значений сигнатур  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , единственного, для которого  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3$ , имеем

$$\lambda_1 H_{11} + \lambda_2 H_{22} + \lambda_3 H_{33} = H_{11} + H_{22} + H_{33} > 0,$$

поэтому в силу (4.13) для него  $\omega$  может равняться только +1, так как при  $\omega = 0, -1$  имеем  $2\pi\omega \leq 0$ . Для набора значений сигнатур  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ , единственного, для которого  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -3$ , имеем

$$\lambda_1 H_{11} + \lambda_2 H_{22} + \lambda_3 H_{33} = -(H_{11} + H_{22} + H_{33}) < 0,$$

поэтому в силу (4.13) для него  $\omega$  может равняться только -1, так как при  $\omega = 0, 1$  получаем  $2\pi\omega \geq 0$ . Для наборов значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , для которых  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ , две сигнатуры, скажем  $\lambda_\alpha$  и  $\lambda_\beta$ , равны +1, а оставшаяся третья, скажем  $\lambda_\gamma$ , равна -1, и поэтому для этих наборов

$$\lambda_1 H_{11} + \lambda_2 H_{22} + \lambda_3 H_{33} = H_{\alpha\alpha} + H_{\beta\beta} - H_{\gamma\gamma},$$

причем имеет место очевидное неравенство

$$-\pi < H_{\alpha\alpha} + H_{\beta\beta} - H_{\gamma\gamma} < 2\pi,$$

так что для этих наборов сигнатур  $\omega$  может равняться только 0. Для наборов значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , для которых  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1$ , две сигнатуры, пусть это будут сигнатуры  $\lambda_\alpha$  и  $\lambda_\beta$ , равны  $-1$ , а третья сигнатура, скажем  $\lambda_\gamma$ , равна  $+1$ , и поэтому

$$\lambda_1 H_{11} + \lambda_2 H_{22} + \lambda_3 H_{33} = -H_{\alpha\alpha} - H_{\beta\beta} + H_{\gamma\gamma},$$

причем мы тоже имеем очевидное неравенство

$$-2\pi < -H_{\alpha\alpha} - H_{\beta\beta} + H_{\gamma\gamma} < \pi,$$

так что для этих наборов значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  число  $\omega$  может быть равным только 0.

Таким образом, можно заключить, что  $\omega$  является следующей функцией  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ :

$$\omega = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \\ -1 & \text{при } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (4.14a)$$

и легко убедиться, что эта функция от  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  может быть записана с помощью простой формулы

$$\omega = \frac{1}{4} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3). \quad (4.14b)$$

Подставляя эту формулу для  $\omega$  в формулу  $v = -\omega - -1/2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 3)$ , окончательно получим

$$v = -\frac{1}{4} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \frac{3}{4} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \frac{3}{2}, \quad (4.15)$$

так что, действительно, только при одном значении  $v = v(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  уравнение стационарности (4.12) для заданного набора значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  может иметь решения. При остальных  $v$  оно заведомо не имеет решений.

Вернемся к нашей основной формуле (4.6) и рассчитаем в ней интегралы по  $k$  методом стационарной фазы, т. е. по формулам (4.7), (4.8), (4.9а, б). Учитывая только что полученный результат относительно значений числа  $v$ , получим из (4.6) формулу

$$I \cong \frac{(-1)^z}{16\pi} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \sum_{k_n \in \mathfrak{Q}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} \frac{1}{V S_{\text{пр}1} S_{\text{пр}2} S_{\text{пр}3}} \times$$

$$\times \left| \lambda_1 \frac{dH_{11}}{dk_n} + \lambda_2 \frac{dH_{22}}{dk_n} + \lambda_3 \frac{dH_{33}}{dk_n} \right|^{-1/2} \times$$

$$\times \exp \left\{ i\lambda_1 (P_{1n} + Q_{1n}) + i\lambda_2 (P_{2n} + Q_{2n}) + i\lambda_3 (P_{3n} + Q_{3n}) - \right.$$

$$\left. - \frac{3\pi i}{4} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 2\pi i k_n v + i\pi (m_{1n} + m_{2n} + m_{3n}) \pm i \frac{\pi}{4} \right\}, \quad (4.16)$$

в которой  $z = l_1 + l_2 + l_3$  и в которой суммирование ведется по восьми наборам значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и для каждого такого набора по всем решениям  $k_n \in \mathfrak{A}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  уравнения стационарности

$$\lambda_1 H_{11n} - \lambda_2 H_{22n} - \lambda_3 H_{33n} = \frac{\pi}{2} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \pm \lambda_1 \mp \lambda_2 \mp \lambda_3); \quad (4.17)$$

причем перед  $i \frac{\pi}{4}$  надо брать знак «плюс», когда для соответствующего стационарного  $k_n$  имеем неравенство

$$\lambda_1 \frac{dH_{11}}{dk_n} - \lambda_2 \frac{dH_{22}}{dk_n} - \lambda_3 \frac{dH_{33}}{dk_n} > 0, \quad (4.18a)$$

и надо брать знак «минус», когда имеем неравенство

$$\lambda_1 \frac{dH_{11}}{dk_n} \pm \lambda_2 \frac{dH_{22}}{dk_n} \pm \lambda_3 \frac{dH_{33}}{dk_n} < 0. \quad (4.18б)$$

Отметим здесь сразу одно важное свойство уравнения стационарности (4.17), которое состоит в следующем. Если для данного набора значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  нам удалось найти решение  $k_n$  уравнения стационарности, то можно утверждать, что для противоположного набора значений сигнатур  $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$  это же число  $k_n$  будет решением уравнения стационарности, т. е., другими словами,  $\mathfrak{A}(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3) = \mathfrak{A}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . В самом деле, при замене сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  на  $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$  уравнение (4.17) никак не меняется. Можно утверждать также, что если для данного набора значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  решение  $k_n$  таково, что, скажем, выполняется неравенство (4.18a), то для противоположного набора сигнатур  $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$  и того же числа  $k_n$  будет удовлетворяться противоположное неравенство, в данном случае (4.18б).

Чтобы дальше раскрыть формулу (4.16), нам необходимо теперь решить следующие три вспомогательные задачи:

1) для каждого набора значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  необходимо найти все решения  $k_n$  уравнения стационарности (4.17), т. е. построить множества  $\mathfrak{A}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  и, в частности, установить, не являются ли они пустыми;

2) для каждого данного набора значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , для каждого стационарного значения  $k_n \in \mathfrak{A}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  рассчитать величину

$$\lambda_1 \frac{dH_{11}}{dk_n} \pm \lambda_2 \frac{dH_{22}}{dk_n} \pm \lambda_3 \frac{dH_{33}}{dk_n}$$

и, в частности, найти ее знак;

3) для каждого набора значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и соответствующего стационарного  $k_n \in \mathfrak{A}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  рассчитать показатель экспоненты в формуле (4.16).

2. Приступим к исследованию уравнений стационарности (4.17), составленных для всех восьми наборов значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Это уравнения для определения стационарных чисел  $k_n$ , а само  $k$  — это либо  $m_1$ , либо  $m_2$ , либо  $m_3$ . Удобно ради сохранения симметрии вообще исключить из рассмотрения значения  $k_n$  и говорить дальше не о стационарных числах  $k_n$ , а о соответствующих им стационарных наборах чисел  $m_{1n}, m_{2n}, m_{3n}$ , которые являются для каждого заданного набора значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  решениями следующей, как мы ее будем называть, системы уравнений стационарности

$$\begin{cases} \lambda_1 H_{11n} + \lambda_2 H_{22n} + \lambda_3 H_{33n} = \frac{\pi}{2} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), & (4.19a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_{2n} - m_{3n} = q_1, \quad m_{3n} - m_{1n} = q_2, \quad m_{1n} - m_{2n} = q_3 & (4.19б) \end{cases}$$

(см. (4.17), (4.2)).

Исследование приведенной системы уравнений стационарности существенно облегчается тем, что существует очень наглядная и простая геометрическая интерпретация уравнения стационарности (4.19а), основанная на геометрической интерпретации  $3j$ -символов Вигнера, подробно разобранный в гл. 3.

Объясним эту интерпретацию (рис. 17). Рассмотрим сначала только плоскость  $Oxy$  и начнем с того, что построим на ней треугольник проекций для нашего первого  $3j$ -символа  $\begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ -q_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix}$ . Для этого из произвольной точки  $C_1$  плоскости  $Oxy$  отложим лежащий в плоскости  $Oxy$  произвольный вектор  $\vec{c}_1$ , имеющий заданную длину  $c_1 = \sqrt{(j_1 + 1/2)^2 - q_1^2}$ . По этому вектору и по заданному значению сигнатуры  $\lambda_1$  по формулам (3.124), (3.125) построим два вектора

$$\vec{a}_2 = \frac{(\vec{a}_2 \cdot \vec{c}_1)}{c_1^2} \vec{c}_1 + \frac{2\lambda_1 S_{\text{пр1}}}{c_1^2} [\vec{c}_1 \cdot \vec{k}], \quad (4.20)$$

$$\vec{a}_3 = \frac{(\vec{a}_3 \cdot \vec{c}_1)}{c_1^2} \vec{c}_1 + \frac{2\lambda_1 S_{\text{пр1}}}{c_1^2} [\vec{c}_1 \cdot \vec{k}], \quad (4.21)$$

которые тоже лежат в плоскости  $Oxy$  и подчиняются условию  $\vec{a}_2 = \vec{c}_1 + \vec{a}_3$  и которые вместе с вектором  $\vec{c}_1$  образуют треугольник проекций для рассматриваемого  $3j$ -символа  $\begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ -q_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix}$ . Вектор  $\vec{a}_2$  отложим тоже из точки  $C_1$ , а вектор  $\vec{a}_3$  — из конца вектора  $\vec{c}_1$  (точки  $B_1$ ). Векторы  $\vec{a}_2$  и  $\vec{a}_3$  бу-

дуг оканчиваться в одной и той же точке  $A_1$ . Входящие в (4.20), (4.21) величины равны

$$2(\vec{a}_2, \vec{c}_1) = a_2^2 \dots c_1^2 - a_3^2,$$

$$2(\vec{a}_3, \vec{c}_1) = a_2^2 - a_3^2 - c_1^2,$$

$$16S_{\text{пр1}}^2 = -c_1^4 - a_2^4 - a_3^4 \dots 2c_1^2 a_2^2 - 2c_1^2 a_3^2 - 2a_2^2 a_3^2. \quad (4.22)$$

Длины векторов  $\vec{a}_2$  и  $\vec{a}_3$  соответственно равны

$$a_2 = \sqrt{(l_2 + 1/2)^2 - m_2^2}, \quad a_3 = \sqrt{(l_3 + 1/2)^2 - m_3^2}.$$

Пристроим теперь к вектору  $\vec{a}_3$  построенного треугольника проекций для первого  $3j$ -символа треугольник проекций для

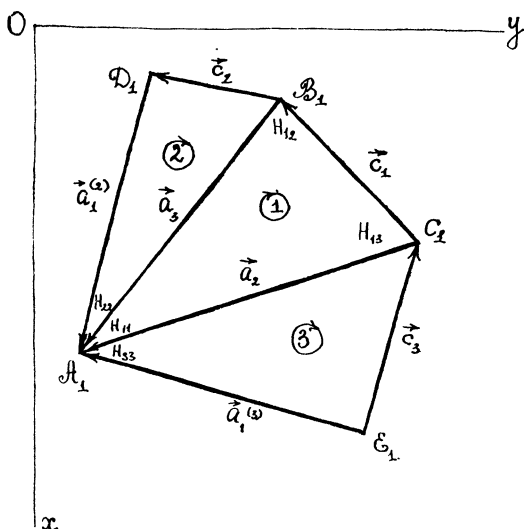


Рис. 17. Схематическое изображение треугольников проекций для трех рассматриваемых в тексте  $3j$ -символов Вигнера 1, 2, 3

второго нашего  $3j$ -символа  $\begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -m_1 & -q_2 & m_2 \end{pmatrix}$ . Для этого, задавшись вектором  $\vec{a}_3$  и определенным значением сигнатуры  $\lambda_2$ , по формуле (3.124) из гл. 3 построим лежащий в плоскости  $Oxy$  вектор

$$\vec{a}_1^{(2)} = \frac{(\vec{a}_1^{(2)}, \vec{a}_3)}{a_3^2} \vec{a}_3 + \frac{2\lambda_2 S_{\text{пр2}}}{a_3^2} [\vec{a}_3, \vec{k}] \quad (4.23)$$

и расположим его на плоскости  $Oxy$  так, чтобы он оканчивался в точке  $A_1$ . Пусть начальной точкой этого вектора будет точка  $D_1$ . Вектор, идущий из точки  $B_1$  в точку  $D_1$ , будет нашим вектором  $\vec{c}_2$ ; для него, таким образом, выполняется соотношение  $\vec{a}_3 = \vec{c}_2 + \vec{a}_1^{(2)}$ , и он, как мы знаем, имеет длину  $c_2 = \sqrt{(j_2 + 1/2)^2 - q_2^2}$ . Входящие в (4.23) величины равны

$$2(\vec{a}_1^{(2)} \cdot \vec{a}_3) = a_3^2 + a_1^2 - c_2^2, \\ 16S_{\text{пр}2}^2 = -a_1^4 - a_3^4 - c_2^4 + 2a_1^2 a_3^2 - 2a_1^2 c_2^2 - 2a_3^2 c_2^2, \quad (4.24)$$

причем здесь  $a_1 = \sqrt{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2}$ .

Аналогичным образом пристроим к вектору  $\vec{a}_2$  построенного треугольника проекций для первого  $3j$ -символа треугольник проекций для третьего нашего  $3j$ -символа  $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ m_1 & -m_2 & -q_3 \end{pmatrix}$ .

Для этого, задавшись вектором  $\vec{a}_2$  и определенным значением сигнатуры  $\lambda_3$ , по формуле (3.125) построим лежащий в плоскости  $Oxy$  вектор

$$\vec{a}_1^{(3)} = \frac{(\vec{a}_1^{(3)} \cdot \vec{a}_2)}{a_2^2} \vec{a}_2 - \frac{2\lambda_3 S_{\text{пр}3}}{a_2^2} [\vec{a}_2 \cdot \vec{k}] \quad (4.25)$$

и расположим его на плоскости  $Oxy$  так, чтобы он оканчивался в точке  $A_1$ . Пусть его начальной точкой будет точка  $E_1$ . Вектор, идущий из точки  $E_1$  в точку  $C_1$ , назовем вектором  $\vec{c}_3$ . Для этого последнего вектора выполняется соотношение

$\vec{a}_1^{(3)} = \vec{c}_3 + \vec{a}_2$  и длина его равна  $c_3 = \sqrt{(j_3 + 1/2)^2 - q_3^2}$ . Входящие в (4.25) величины равны

$$2(\vec{a}_1^{(3)} \cdot \vec{a}_2) = a_2^2 + a_1^2 - c_3^2, \\ 16S_{\text{пр}3}^2 = -a_2^4 - a_1^4 - c_3^4 + 2a_2^2 a_1^2 + 2a_2^2 c_3^2 - 2a_1^2 c_3^2, \quad (4.26)$$

причем здесь тоже  $a_1 = \sqrt{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2}$ .

Пользуясь формулами (4.20), (4.21), выразим, наконец, векторы  $\vec{a}_1^{(2)}$  и  $\vec{a}_1^{(3)}$ , даваемые формулами (4.23), (4.25), через векторы  $\vec{c}_1$  и  $[\vec{c}_1 \cdot \vec{k}]$ . После несложного вычисления получим

$$\vec{a}_1^{(2)} = \left\{ \frac{(\vec{a}_1^{(2)} \cdot \vec{a}_3)}{a_3^2} \frac{(\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3)}{c_1^2} - \frac{2\lambda_2 S_{\text{пр}2}}{a_3^2} \frac{2\lambda_1 S_{\text{пр}}}{c_1^2} \right\} \vec{c}_1 + \\ + \left\{ \frac{(\vec{a}_1^{(2)} \cdot \vec{a}_3)}{a_3^2} \frac{2\lambda_1 S_{\text{пр}1}}{c_1^2} + \frac{2\lambda_2 S_{\text{пр}2}}{a_3^2} \frac{(\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3)}{c_1^2} \right\} [\vec{c}_1 \cdot \vec{k}], \quad (4.27)$$



$$\vec{a}_1^{(3)} = \left\{ \frac{(\vec{a}_1^{(3)} \cdot \vec{a}_2)}{a_2^2} \quad \frac{(\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_2)}{c_1^2} \quad ; \quad \frac{2\lambda_3 S_{\text{нрз}}}{a_2^2} \quad \frac{2\lambda_1 S_{\text{нр1}}}{c_1^2} \right\} \vec{c}_1 \quad ;$$

$$+ \left\{ \frac{(\vec{a}_1^{(3)} \cdot \vec{a}_2)}{a_2^2} \quad \frac{2\lambda_1 S_{\text{нр1}}}{c_1^2} \quad - \quad \frac{2\lambda_3 S_{\text{нрз}}}{a_2^2} \quad \frac{(\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_2)}{c_1^2} \right\} [\vec{c}_1 \cdot \vec{k}]. \quad (4.28)$$

Таким образом, мы построили на плоскости  $Oxy$  три прилегающих друг к другу треугольника проекций для наших трех  $3j$ -символов Вигнера, задавшись произвольной точкой  $C_1$  на плоскости  $Oxy$  и лежащим в этой плоскости произвольным вектором  $\vec{c}_1$  заданной длины  $c_1 = \sqrt{(j_1 + 1/2)^2 - q_1^2}$ , а также задавшись значениями сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Это геометрическое построение мы можем выслнить для любого набора значений чисел  $m_1, m_2, m_3$ , и при этом получающиеся векторы  $\vec{a}_1^{(2)}$  и  $\vec{a}_1^{(3)}$ , вообще говоря, окажутся различными, хотя и имеющими одинаковую длину  $a_1 = \sqrt{(l_1 + 1/2)^2 - m_1^2}$ .

Потребуем теперь, чтобы числа  $m_1, m_2, m_3$  были такими, чтобы векторы  $\vec{a}_1^{(2)}$  и  $\vec{a}_1^{(3)}$  оказались тождественно совпадающими, т. е. потребуем, чтобы в нашем геометрическом построении совмещались друг с другом точки  $D_1$  и  $E_1$ . Тогда будем иметь векторное условие

$$\vec{a}_1^{(2)} = \vec{a}_1^{(3)}, \quad (4.29)$$

из которого в силу (4.27), (4.28) вытекают два следующих скалярных условия:

$$\begin{aligned} a_2^2 \{(\vec{a}_1^{(2)} \cdot \vec{a}_3) (\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3) - 2\lambda_2 S_{\text{нр2}} \cdot 2\lambda_1 S_{\text{нр1}}\} = \\ = a_3^2 \{(\vec{a}_1^{(3)} \cdot \vec{a}_2) (\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_2) ; 2\lambda_3 S_{\text{нрз}} \cdot 2\lambda_1 S_{\text{нр1}}\}, \\ a_2^2 \{(\vec{a}_1^{(2)} \cdot \vec{a}_3) \cdot 2\lambda_1 S_{\text{нр1}} ; 2\lambda_2 S_{\text{нр2}} (\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3)\} = \\ = a_3^2 \{(\vec{a}_1^{(2)} \cdot \vec{a}_2) \cdot 2\lambda_1 S_{\text{нр1}} - 2\lambda_3 S_{\text{нрз}} (\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_2)\}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

которые преобразуем еще дальше, выразив входящие в них скалярные произведения и площади треугольников через углы  $H_{12}, H_{13}, H_{22}, H_{33}$ . Действительно, имеем очевидные соотношения

$$\begin{aligned} (\vec{a}_1^{(2)} \cdot \vec{a}_3) = a_1 a_3 \cos H_{22}, \quad (\vec{a}_1^{(3)} \cdot \vec{a}_2) = a_1 a_2 \cos H_{33}, \\ 2S_{\text{нр2}} = a_1 a_3 \sin H_{22}, \quad 2S_{\text{нр3}} = a_1 a_2 \sin H_{33}, \\ (\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3) = c_1 a_3 \cos H_{12}, \quad (\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_2) = c_1 a_2 \cos H_{13}, \\ 2S_{\text{нр1}} = c_1 a_3 \sin H_{12}, \quad 2S_{\text{нр1}} = c_1 a_2 \sin H_{13}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

используя которые, из вышесприведенных двух скалярных условий непосредственным преобразованием получим простые формулы

$$\begin{aligned} -\cos(\lambda_2 H_{22} - \lambda_1 H_{12}) &= \cos(\lambda_3 H_{33} - \lambda_1 H_{13}), \\ \sin(\lambda_2 H_{22} - \lambda_1 H_{12}) &= \sin(\lambda_3 H_{33} - \lambda_1 H_{13}), \end{aligned} \quad (4.32)$$

из которых непосредственно следует, что углы  $\lambda_2 H_{22} - \lambda_1 H_{12}$  и  $\lambda_3 H_{33} - \lambda_1 H_{13}$  связаны условием

$$\lambda_2 H_{22} - \lambda_1 H_{12} = \pi - \lambda_3 H_{33} + \lambda_1 H_{13} + 2\pi\rho,$$

где  $\rho$  — некоторое целое число. С учетом очевидного соотношения  $H_{11} + H_{12} + H_{13} = \pi$  это последнее условие можно представить в виде

$$\lambda_1 H_{11} + \lambda_2 H_{22} + \lambda_3 H_{33} = 2\pi\omega, \quad (4.33)$$

где  $\omega = \rho + 1/2(\lambda_1 + 1)$  — другое некоторое целое число. Учитывая, наконец, что углы  $H_{11}$ ,  $H_{22}$ ,  $H_{33}$  изменяются только в пределах  $0 < H_{11} < \pi$ ,  $0 < H_{22} < \pi$ ,  $0 < H_{33} < \pi$ , из формулы (4.33) окончательно получим, что

$$\lambda_1 H_{11} + \lambda_2 H_{22} + \lambda_3 H_{33} = \frac{\pi}{2}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \quad (4.34)$$

т. е. приходим в точности к уравнению стационарности (4.19а). Эквивалентность соотношений (4.34) и (4.33) уже подробно обсуждалась выше (см. (4.13), (4.14)).

До сих пор мы рассматривали только плоскость  $Oxy$ . На этой плоскости мы построили треугольники проекций для  $3j$ -символов  $\begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ -q_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -m_1 & -q_2 & m_3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ m_1 & -m_2 & -q_3 \end{pmatrix}$ .

Для заданного набора значений сигнатур  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  и для соответствующих этому набору чисел  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , удовлетворяющих условию стационарности (4.19а), мы построили векторы  $\vec{c}_1$ ,  $\vec{c}_2$ ,  $\vec{c}_3$ ,  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$ , удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 + \vec{c}_2 + \vec{c}_3 &= 0, \quad \vec{a}_2 = \vec{c}_1 + \vec{a}_3, \\ \vec{a}_3 &= \vec{c}_2 + \vec{a}_1, \quad \vec{a}_1 = \vec{c}_3 + \vec{a}_2 \end{aligned} \quad (4.35)$$

и образующие стороны примыкающих друг к другу трех треугольников проекций, лежащих на плоскости  $Oxy$ .

Теперь для этого набора значений сигнатур  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  и для этих чисел  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  построим указанные три треугольника проекций до трехгранных прямоугольных призм, изображающих согласно гл. 3 вышеупомянутые  $3j$ -символы. Для этого возьмем векторы

$$\begin{aligned} \vec{j}_1 &= \vec{c}_1 + q_1 \vec{k}, \quad \vec{j}_2 = \vec{c}_2 + q_2 \vec{k}, \quad \vec{j}_3 = \vec{c}_3 + q_3 \vec{k}, \\ \vec{l}_1 &= \vec{a}_1 + m_1 \vec{k}, \quad \vec{l}_2 = \vec{a}_2 + m_2 \vec{k}, \quad \vec{l}_3 = \vec{a}_3 + m_3 \vec{k}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

где числа  $q_1, q_2, q_3, m_1, m_2, m_3$  удовлетворяют условиям  $q_1 + q_2 + q_3 = 0, m_2 = q_1 + m_3, m_3 = q_2 + m_1, m_1 = q_3 + m_2$ . (см. (4.196)). Выберем, кроме того, в пространстве какую-нибудь точку  $C$ , расположенную достаточно высоко над плоскостью  $Oxy$  на таком целочисленном расстоянии  $h_C$  от нее, чтобы проекцией точки  $C$  на плоскость  $Oxy$  была наша точка  $C_1$ , уже фиксированная нами ранее.

Из точки  $C$  отложим вектор  $\vec{j}_1$ . Он окончится в некоторой точке  $B$ . Из точки  $B$  отложим вектор  $\vec{l}_3$ , а из точки  $C$  — вектор  $\vec{l}_2$ . В силу (4.36) и (4.35)  $\vec{l}_2 = \vec{j}_1 + \vec{l}_3$ , и поэтому оба вектора  $\vec{l}_3$  и  $\vec{l}_2$  окончатся в одной и той же точке. Назовем ее точкой  $A$ . Образованный векторами  $\vec{j}_1, \vec{l}_3, \vec{l}_2$  треугольник  $CBA$  вместе с треугольником проекций  $C_1B_1A_1$ , образованным векторами  $\vec{c}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_2$ , составляют основания прямоугольной трехгранной призмы для  $3j$ -символа  $\begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ -q_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix}$  для взятого значения сигнатуры  $\lambda_1$ . Теперь из точки  $B$  отложим вектор  $\vec{j}_2$ . Он окончится в некоторой точке  $D$ , из которой мы отложим вектор  $\vec{l}_1$ . В силу (4.36) и (4.35)  $\vec{l}_3 = \vec{j}_2 + \vec{l}_1$ , и поэтому вектор  $\vec{l}_1$  окончится тоже в точке  $A$ . Образованный векторами  $\vec{j}_2, \vec{l}_1, \vec{l}_3$  треугольник  $DBA$  вместе с треугольником проекции  $D_1B_1A_1$ , составленным векторами  $\vec{c}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_1$ , образуют основания прямоугольной трехгранной призмы для  $3j$ -символа  $\begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -m_1 & -q_2 & m_3 \end{pmatrix}$  для выбранного значения сигнатуры  $\lambda_2$ .

Наконец, отложим из точки  $D$  вектор  $\vec{j}_3$ . Он оканчивается в первоначально взятой точке  $C$ , так как в силу (4.36), (4.35)  $\vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3 = 0$ . У нас получается, таким образом, треугольник  $DCA$ , образованный векторами  $\vec{j}_3, \vec{l}_2, \vec{l}_1$ , который вместе с соответствующим треугольником проекций  $D_1C_1A_1$ , составленным векторами  $\vec{c}_3, \vec{a}_2, \vec{a}_1$ , образует основание трехгранной прямоугольной призмы, изображающей  $3j$ -символ  $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ m_1 & -m_2 & -q_3 \end{pmatrix}$  для выбранного значения сигнатуры  $\lambda_3$ .

Таким образом, три построенных треугольника  $CBA, DBA, DCA$  являются тремя гранями некоторого тетраэдра

$ABCD$ , четвертой гранью которого служит треугольник  $CBD$ , составленный векторами  $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$  (рис. 18). Особо подчеркнем, что треугольники  $BCA, DBA, CDA$  образуют грани тетраэдра только для наборов чисел  $m_{1n}, m_{2n}, m_{3n}$ , удовлет-

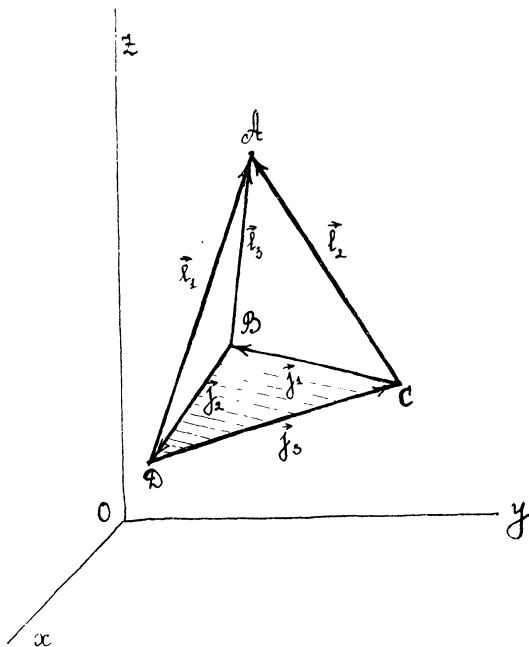


Рис. 18. Тетраэдр, представляющий условие стационарности

воряющих системам уравнений стационарности (4.19а, б) составленным для разных наборов значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Приступим теперь непосредственно к решению системы уравнений стационарности (4.19), составленной для любого конкретного набора значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Представим уравнение стационарности (4.19а) в следующем виде:

$$\lambda_1 H_{11} + \lambda_2 H_{22} = -\lambda_3 H_{33} + 2\pi\omega, \quad (4.37)$$

где

$$\omega = \frac{\pi}{2} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3).$$

Из этого равенства следует, что

$$\cos(\lambda_1 H_{11} + \lambda_2 H_{22}) = \cos H_{33},$$

а потому

$$\cos H_{11} \cos H_{22} - \lambda_1 \lambda_2 \sin H_{11} \sin H_{22} = \cos H_{33}.$$

Последнее равенство можно представить в виде

$$\cos H_{11} \cos H_{22} - \cos H_{33} = \lambda_1 \lambda_2 \sin H_{11} \sin H_{22},$$

и после этого следует возвести его в квадрат. Тогда окончательно получим соотношение

$$\begin{aligned} \cos^2 H_{11} \cos^2 H_{22} + \cos^2 H_{33} - 2 \cos H_{11} \cos H_{22} \cos H_{33} = \\ = \sin^2 H_{11} \sin^2 H_{22}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Если числа  $m_1, m_2, m_3$  удовлетворяют уравнению (4.37), то они должны удовлетворять также и уравнению (4.38). Обратное, разумеется, верно не всегда. Уравнение (4.37) содержит сигнатуры  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , уравнение (4.38), являющееся его следствием, никаких сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  не содержит.

Косинусы и синусы, входящие в уравнение (4.38), легко выразить непосредственно через неизвестные  $m_1, m_2, m_3$ ; для этого надо только воспользоваться соотношениями

$$\begin{aligned} 2a_2 a_3 \cos H_{11} = a_2^2 + a_3^2 - c_1^2, \quad 2a_3 a_1 \cos H_{22} = a_3^2 + a_1^2 - c_2^2, \\ 2S_{\text{пр1}} = a_2 a_3 \sin H_{11}, \quad 2S_{\text{пр2}} = a_3 a_1 \sin H_{22} \end{aligned} \quad (4.39)$$

и соотношением

$$2a_1 a_2 \cos H_{33} = a_1^2 + a_2^2 - c_3^2 \quad (4.40)$$

(см. (3.130)). Подставляя (4.39), (4.40) в (4.38) и производя необходимые преобразования, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} a_1^2 (a_2^2 + a_3^2 - c_1^2)^2 + a_2^2 (a_3^2 + a_1^2 - c_2^2)^2 + a_3^2 (a_1^2 + a_2^2 - c_3^2)^2 - \\ - (a_2^2 + a_3^2 - c_1^2) (a_3^2 + a_1^2 - c_2^2) (a_1^2 + a_2^2 - c_3^2) - 4a_1^2 a_2^2 a_3^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.41)$$

которое теперь уже симметрично относительно циклических перестановок индексов 1, 2, 3.

Вводя удобные обозначения  $b_j = l_j + 1/2$  ( $j=1, 2, 3$ ) и  $d_p = j_p + 1/2$  ( $p=1, 2, 3$ ), выведенное уравнение (4.41) можно представить в развернутом виде

$$\begin{aligned} (b_1^2 - m_1^2) (b_2^2 + b_2^2 - d_1^2 - 2m_2 m_3)^2 + \\ + (b_2^2 - m_2^2) (b_3^2 + b_1^2 - d_2^2 - 2m_3 m_1)^2 + \\ + (b_3^2 - m_3^2) (b_1^2 + b_2^2 - d_3^2 - 2m_1 m_2)^2 - (b_2^2 + b_3^2 - d_1^2 - 2m_1 m_2) \times \\ \times (b_3^2 + b_1^2 - d_2^2 - 2m_3 m_1) (b_1^2 + b_2^2 - d_3^2 - 2m_1 m_2) - \\ - 4 (b_1^2 - m_1^2) (b_2^2 - m_2^2) (b_3^2 - m_3^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Фактически выписанное уравнение квадратичное относительно неизвестных  $m_1, m_2, m_3$ , так как члены шестой и четвертой степеней в нем взаимно сокращаются. После преобразований уравнение (4.42) можно записать в виде

$$A_1 m_1^2 + A_2 m_2^2 + A_3 m_3^2 + \\ + 2B_1 m_2 m_3 + 2B_2 m_3 m_1 + 2B_3 m_1 m_2 - C = 0, \quad (4.43)$$

где использованы сокращенные обозначения

$$A_1 = -b_2^4 - b_3^4 - d_1^4 + 2b_2^2 b_3^2 + 2b_2^2 d_1^2 + 2b_3^2 d_1^2, \\ A_2 = -b_3^4 - b_1^4 - d_2^4 + 2b_3^2 b_1^2 + 2b_3^2 d_2^2 + b_1^2 d_2^2, \\ A_3 = -b_1^4 - b_2^4 - d_3^4 + 2b_1^2 b_2^2 + 2b_1^2 d_3^2 + 2b_2^2 d_3^2, \quad (4.44)$$

$$B_1 = (b_3^2 + b_1^2 - d_2^2)(b_1^2 + b_2^2 - d_3^2) - 2b_1^2(b_2^2 + b_3^2 - d_1^2),$$

$$B_2 = (b_1^2 + b_2^2 - d_3^2)(b_2^2 + b_3^2 - d_1^2) - 2b_2^2(b_3^2 + b_1^2 - d_2^2),$$

$$B_3 = (b_2^2 + b_3^2 - d_1^2)(b_3^2 + b_1^2 - d_2^2) - 2b_3^2(b_1^2 + b_2^2 - d_3^2). \quad (4.45)$$

$$C = -b_1^2(b_2^2 + b_3^2 - d_1^2)^2 - b_2^2(b_1^2 + b_3^2 - d_2^2)^2 - b_3^2(b_1^2 + b_2^2 - d_3^2)^2 + \\ + (b_2^2 + b_3^2 - d_1^2)(b_1^2 + b_3^2 - d_2^2)(b_1^2 + b_3^2 - d_3^2) + 4b_1^2 b_2^2 b_3^2. \quad (4.46)$$

Добавляя к уравнению (4.43) три уравнения

$$m_2 - m_3 = q_1, \quad m_3 - m_1 = q_2, \quad m_1 - m_2 = q_3, \quad (4.47)$$

получим систему уравнений для определения чисел  $m_1, m_2, m_3$ . Последние входят в систему уравнений (4.43), (4.47) симметричным образом.

Систему уравнений (4.43), (4.47) будем решать, пользуясь ее симметрией относительно циклических замен индексов 1, 2, 3. Она позволяет поступить следующим образом. Можно сначала исключить из уравнения (4.43) с помощью уравнений (4.47) неизвестные  $m_2$  и  $m_3$  и получить квадратное уравнение относительно  $m_1$ . Разрешая это квадратное уравнение, можно отыскать формулу для  $m_1$ . Делая далее в этой формуле циклические замены 1, 2, 3, можно сразу получить формулы для  $m_2$  и  $m_3$ .

Квадратное уравнение для  $m_1$ , получаемое описанным образом, имеет вид

$$E m_1^2 + 2F m_1 + G = 0, \quad (4.48)$$

где использованы сокращенные обозначения

$$E = A_1 + A_2 + A_3 + 2B_1 + 2B_2 + 2B_3, \quad (4.49)$$

$$F = q_3(A_2 + B_1 + B_2) + q_2(A_3 + B_1 + B_2), \quad (4.50)$$

$$G = q_3^2 A_2 + q_2^2 A_3 - 2B_1 q_2 q_3 - C. \quad (4.51)$$

Проводя несложные вычисления, убеждаемся, что

$$E = -d_1^4 - d_2^4 - d_3^4 - 2d_1^2 d_2^2 - 2d_2^2 d_3^2 - 2d_3^2 d_1^2, \quad (4.52)$$

$$F = q_3 D_2 - q_2 D_3, \quad (4.53)$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= (d_2^2 - d_1^2 - d_3^2)(b_3^2 - b_2^2 - d_1^2) - 2d_1^2(d_3^2 + b_3^2 - b_1^2) = \\ &= (d_3^2 - d_1^2 - d_2^2)(b_2^2 - b_3^2 - d_1^2) - 2d_1^2(d_2^2 + b_3^2 - b_1^2) = \\ &= d_1^2(2b_1^2 - b_2^2 - b_3^2) - (d_3^2 - d_2^2)(b_3^2 - b_2^2) + d_1^2(d_1^2 - d_3^2 - d_2^2), \\ D_2 &= (d_3^2 - d_2^2 - d_1^2)(b_1^2 - b_3^2 - d_2^2) - 2d_2^2(d_1^2 + b_3^2 - b_2^2) = \\ &= (d_1^2 - d_2^2 - d_3^2)(b_3^2 - b_1^2 - d_2^2) - 2d_2^2(d_2^2 + b_1^2 - b_2^2) = \\ &= d_2^2(2b_2^2 - b_3^2 - b_1^2) - (d_1^2 - d_3^2)(b_1^2 - b_3^2) + d_2^2(d_2^2 - d_1^2 - d_3^2), \\ D_3 &= (d_1^2 - d_3^2 - d_2^2)(b_2^2 - b_1^2 - d_3^2) - 2d_3^2(d_2^2 + b_1^2 - b_3^2) = \\ &= (d_2^2 - d_3^2 - d_1^2)(b_1^2 - b_2^2 - d_3^2) - 2d_3^2(d_1^2 + b_2^2 - b_3^2) = \\ &= d_3^2(2b_3^2 - b_1^2 - b_2^2) - (d_2^2 - d_1^2)(b_2^2 - b_1^2) + d_3^2(d_3^2 - d_2^2 - d_1^2). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Чтобы решить квадратное уравнение (4.48), необходимо вычислить его дискриминант  $F^2 - EG$ . Его можно представить в симметричном виде

$$F^2 - EG = EC +$$

$$+ q_1 q_3 (EA_2 - D_2) + q_2 q_1 (EA_3 - D_3) + q_3 q_2 (EA_1 - D_1),$$

если воспользоваться тождеством

$$EA_2 + EA_3 + 2EB_1 - D_2^2 - D_3^2 - 2D_2 D_3 \equiv EA_1 - D_1^2. \quad (4.55)$$

Вычисляя выражения  $EA_p - D_p^2$  ( $p = 1, 2, 3$ ), получаем

$$EA_p - D_p^2 = 4d_p^2 C. \quad (4.56)$$

Таким образом, приходим к результату

$$F^2 - EG = CK, \quad (4.57)$$

причем

$$\begin{aligned} K &= E + 4d_1^2 q_2 q_3 + 4d_2^2 q_3 q_1 + 4d_3^2 q_1 q_2 = \\ &= 4c_1^2 c_2^2 - (c_1^2 + c_2^2 - c_3^2)^2, \end{aligned} \quad (4.58)$$

где  $c_p = \sqrt{d_p^2 - q_p^2}$  ( $p = 1, 2, 3$ ). Отметим, кроме того, что имеют место тождества

$$\begin{aligned} A_1 - B_3 : B_2 : D_1 &= 0, \\ A_2 - B_1 : B_3 : D_2 &= 0, \\ A_3 - B_2 : B_1 - D_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Решая квадратное уравнение (4.48), используя формулы (4.57), (4.59) для преобразования его решений и производя циклические замены индексов 1, 2, 3, окончательно получим формулы

$$\begin{aligned} Em_1 &= -q_3 D_2 \mp q_2 D_3 \pm \sqrt{C.K}, \\ Em_2 &= -q_1 D_3 \mp q_3 D_1 \pm \sqrt{C.K}, \\ Em_3 &= -q_2 D_1 \mp q_1 D_2 \pm \sqrt{C.K}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

причем в них перед последними слагаемыми надо одновременно брать либо знак «плюс», либо знак «минус», так как должны удовлетворяться уравнения (4.47). Наборы чисел  $m_1, m_2, m_3$ , даваемые формулами (4.60) для знака «плюс», обозначим  $m_{1a}, m_{2a}, m_{3a}$ , а для знака «минус» —  $m_{1b}, m_{2b}, m_{3b}$ .

Напомним, что мы здесь решаем систему уравнений (4.19а, б), составленную для некоторого заданного, вообще говоря, произвольного набора значений сигнатур  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Пока что мы показали только, что решениями  $m_1, m_2, m_3$  каждой такой системы могут быть только два набора чисел  $m_{1a}, m_{2a}, m_{3a}$  и  $m_{1b}, m_{2b}, m_{3b}$ , даваемые формулами (4.60). Еще неясно, будут ли эти наборы чисел решениями какой-либо исходной системы или систем уравнений (4.19). Оказывается, каждый набор  $m_{1a}, m_{2a}, m_{3a}$  или  $m_{1b}, m_{2b}, m_{3b}$  будет решением только двух вполне определенных систем уравнений (4.19) для некоторых вполне определенных значений сигнатур  $\lambda_{1a}, \lambda_{2a}, \lambda_{3a}$  и  $-\lambda_{1a}, -\lambda_{2a}, -\lambda_{3a}$ , а также  $\lambda_{1b}, \lambda_{2b}, \lambda_{3b}$  и  $-\lambda_{1b}, -\lambda_{2b}, -\lambda_{3b}$  соответственно, причем условимся здесь считать, что  $\lambda_{1a} + \lambda_{2a} + \lambda_{3a} = 3$  или 1 и  $\lambda_{1b} + \lambda_{2b} + \lambda_{3b} = 3$  или 1.

Чтобы найти значения сигнатур  $\lambda_{1s}, \lambda_{2s}, \lambda_{3s}$ , соответствующие набору  $m_{1s}, m_{2s}, m_{3s}$  ( $s = a, b$ ), поступим следующим образом. Числа  $m_{1s}, m_{2s}, m_{3s}$  даются формулами (4.60), а потому удовлетворяют уравнениям (4.47), (4.43). Уравнения (4.47) — это просто переписанные уравнения (4.19б). Формулы (4.39), (4.40) можно теперь понимать как уравнения для нахождения углов  $H_{11s}, H_{22s}, H_{33s}$ ; в эти формулы мы должны подставить

$$a_j = a_{js} = \sqrt{(l_j \mp 1/2)^2 - m_{js}^2}, \quad c_p = \sqrt{(j_p \mp 1/2)^2 - q_p^2}$$



( $j, p=1, 2, 3$ ). В силу того что для  $m_{1s}, m_{2s}, m_{3s}$  имеет место равенство (4.42) и имеют место соотношения (4.39), (4.40), для углов  $H_{11s}, H_{22s}, H_{33s}$  должно выполняться соотношение (4.38):

$$\begin{aligned} \cos^2 H_{11s} \cos^2 H_{22s} \pm \cos^2 H_{33s} - 2 \cos H_{11s} \cos H_{22s} \cos H_{33s} = \\ = \sin^2 H_{11s} \sin^2 H_{22s}. \end{aligned}$$

Извлекая квадратный корень из правой и левой частей этого соотношения, получим соотношение

$$\cos H_{11s} \cos H_{22s} - \cos H_{33s} = \pm \sin H_{11s} \sin H_{22s},$$

которое удовлетворяется, разумеется, лишь при каком-то одном вполне определенном знаке в правой части. Вводя теперь сигнатуры  $\lambda_{1s}, \lambda_{2s}$  так, чтобы их произведение  $\lambda_{1s}\lambda_{2s}$  давало правильный знак в правой части в последнем выписанном соотношении, мы можем это соотношение переписать в виде

$$\cos H_{11s} \cos H_{22s} - \cos H_{33s} = \lambda_{1s} \lambda_{2s} \sin H_{11s} \sin H_{22s}$$

или в виде

$$\cos(\lambda_{1s} H_{11s} \pm \lambda_{2s} H_{22s}) = \cos H_{33s}.$$

Отсюда непосредственно получаем, что

$$\lambda_{1s} H_{11s} \pm \lambda_{2s} H_{22s} = \pm H_{33s} \pm 2\pi\omega,$$

где  $\omega$  — некоторое целое число. При заданных определенных нами выше по формулам (4.39), (4.40) углах  $H_{11s}, H_{22s}, H_{33s}$  и при выбранных значениях отдельных сигнатур  $\lambda_{1s}, \lambda_{2s}$  (их можно выбрать двумя способами: взять либо  $\lambda_{1s}, \lambda_{2s}$ , либо  $-\lambda_{1s}, -\lambda_{2s}$ ) в правой части последнего соотношения надо взять либо знак «минус», либо знак «плюс». Это позволяет ввести третью сигнатуру  $\lambda_{3s}$  и представить последнее соотношение в виде

$$\lambda_{1s} H_{11s} \pm \lambda_{2s} H_{22s} \pm \lambda_{3s} H_{33s} = 2\pi\omega$$

(при противоположных значениях сигнатур  $-\lambda_{1s}, -\lambda_{2s}$  мы должны взять не  $\lambda_{3s}$ , а  $-\lambda_{3s}$ ). Последнее соотношение, как мы подробно объясняли выше, математически эквивалентно соотношению

$$\lambda_{1s} H_{11s} - \lambda_{2s} H_{22s} \pm \lambda_{3s} H_{33s} = \frac{\pi}{2} (\lambda_{1s} \lambda_{2s} \lambda_{3s} - \lambda_{1s} \pm \lambda_{2s} - \lambda_{3s}),$$

т. е. в точности уравнению (4.19а), в которое подставлены числа  $m_{1s}, m_{2s}, m_{3s}$ . Как следует из приведенного рассуждения, для набора чисел  $m_{1s}, m_{2s}, m_{3s}$  мы построили два определенных набора значений сигнатур  $\lambda_{1s}, \lambda_{2s}, \lambda_{3s}$  и  $-\lambda_{1s}, -\lambda_{2s}, -\lambda_{3s}$ . Условимся считать, что  $\lambda_{1s} + \lambda_{2s} + \lambda_{3s} = 1$  или 3.

Таким образом, мы нашли все стационарные значения  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ; их оказывается четыре и они могут быть представлены в виде таблицы

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	
$\lambda_{1a}$	$\lambda_{2a}$	$\lambda_{3a}$	$m_{1a}$	$m_{2a}$	$m_{3a}$	
$-\lambda_{1a}$	$-\lambda_{2a}$	$-\lambda_{3a}$	$m_{1a}$	$m_{2a}$	$m_{3a}$	(4.61)
$\lambda_{1b}$	$\lambda_{2b}$	$\lambda_{3b}$	$m_{1b}$	$m_{2b}$	$m_{3b}$	
$-\lambda_{1b}$	$-\lambda_{2b}$	$-\lambda_{3b}$	$m_{1b}$	$m_{2b}$	$m_{3b}$	

Введенные нами выше величины  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $C$ ,  $E$  и  $K$  имеют простой геометрический смысл. Из определяющих эти величины формул (4.44), (4.46), (4.52), (4.57) видно, что

$$A_1 = 16 S_1^2, \quad A_2 = 16 S_2^2, \quad A_3 = 16 S_3^2,$$

$$E = 16 S_0^2, \quad K = 16 S_{\text{пр}0}^2, \quad C = 144 V^2, \quad (4.62)$$

где  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_0$  — площади треугольников  $CBA$ ,  $BDA$ ,  $DCA$ ,  $BDC$ , являющихся гранями рассматриваемого выше тетраэдра  $ABCD$  (рис. 18),  $S_{\text{пр}}$  — площадь треугольника проекций  $C_1B_1D_1$ , о котором мы тоже говорили выше,  $V$  — объем вышеуказанного тетраэдра. Площади треугольников выражаются через длины их сторон, а объем тетраэдра — через длины его ребер.

Основные полученные нами формулы (4.60) тоже допускают простую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим наш тетраэдр  $ABCD$  и его четвертую грань  $CBD$ , составленную из векторов  $\vec{j}_1$ ,  $\vec{j}_2$ ,  $\vec{j}_3$  (рис. 18). Считая векторы  $j_1$  и  $j_2$  заданными и считая заданным значение некоторой новой сигнатуры  $\lambda_0 \equiv \text{sign}(\vec{k} \cdot [\vec{j}_1, \vec{j}_2])$ , можно по формуле (3.46a) рассчитать единичный вектор  $\vec{k}$ , идущий вдоль оси  $Oz$ . Он оказывается равным

$$\vec{k} = \frac{1}{4S_0^2} \{q_1 d_2^2 - q_2 (\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2)\} \vec{j}_1 + \frac{1}{4S_0^2} \{q_2 d_1^2 - q_1 (\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2)\} \vec{j}_2 + \dots$$

$$\dots - 2\lambda_0 \frac{4S_{\text{пр}0}}{16 S_0^2} [\vec{j}_1, \vec{j}_2], \quad (4.63)$$

причем

$$2(\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2) = d_3^2 - d_1^2 - d_2^2, \quad |[\vec{j}_1, \vec{j}_2]| = 2S_0. \quad (4.63a)$$

Здесь  $S_0$  — площадь треугольника  $CBD$  и  $S_{\text{пр}0}$  — площадь треугольника проекций  $C_1B_1D_1$ . Помножим правую и левую части (4.63) скалярно на вектор  $4S_0 l_3$  и учтем, что  $(\vec{k} \cdot l_3) = m_3$ . Тогда получим формулу

$$4S_0^2 m_3 = \{q_1 d_2^2 - q_2 (\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2)\} (\vec{j}_1 \cdot \vec{l}_3) \dots \{q_2 d_1^2 - q_1 (\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2)\} (\vec{j}_2 \cdot \vec{l}_3) + \\ + 2\lambda_0 S_{\text{пр}0} (\vec{l}_3 [\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2]), \quad (4.64)$$

в которой необходимо учесть, что

$$2(\vec{l}_3 \cdot \vec{j}_1) = b_2^2 - b_3^2 - d_1^2, \\ 2(\vec{j}_2 \cdot \vec{l}_3) = d_2^2 - b_3^2 - b_1^2, \\ |(\vec{l}_3 \cdot [\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2])| = 6V, \quad (4.65)$$

где  $V$  — объем тетраэдра  $ABCD$ . Вводя в рассмотрение еще одну, новую сигнатуру

$$\mu = \text{sign}(\vec{l}_3 \cdot [\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2]) = \\ = \text{sign}(\vec{l}_1 \cdot [\vec{j}_2 \cdot \vec{j}_3]) = \text{sign}(\vec{l}_2 \cdot [\vec{j}_3 \cdot \vec{j}_1]), \quad (4.66)$$

можно последнюю формулу (4.65) представить в следующем уточненном виде

$$(\vec{l}_3 \cdot [\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2]) = 6\mu V. \quad (4.67)$$

Подставляя (4.67) в (4.64), получим окончательную формулу

$$16S_0^2 m_3 = \{2q_1 d_2^2 - q_2 (d_3^2 - d_1^2 - d_2^2)\} (b_2^2 - b_3^2 - d_1^2) + \\ + \{2q_2 d_1^2 - q_1 (d_3^2 - d_1^2 - d_2^2)\} (d_2^2 - b_3^2 - b_1^2) + 48\mu\lambda_0 S_{\text{пр}0} V, \quad (4.68)$$

которая в точности совпадает с третьей формулой (4.60), полученной выше другим непосредственным, но намного более сложным способом. Циклической перестановкой индексов 1, 2, 3 из формулы (4.68) получают также и две другие формулы (4.60). Согласно принятому выше условию  $\mu\lambda_0 = +1$  для  $m_{1a}$ ,  $m_{2a}$ ,  $m_{3a}$  и  $\mu\lambda_0 = -1$  для  $m_{1b}$ ,  $m_{2b}$ ,  $m_{3b}$ . Таким образом, можно формулы (4.60) представить в виде

$$16S_0^2 m_1 = -q_3 D_2 + q_2 D_3 + 48\mu\lambda_0 S_{\text{пр}0} V, \\ 16S_0^2 m_2 = -q_1 D_3 + q_3 D_1 + 48\mu\lambda_0 S_{\text{пр}0} V, \\ 16S_0^2 m_3 = -q_2 D_1 + q_1 D_2 + 48\mu\lambda_0 S_{\text{пр}0} V. \quad (4.69)$$

Сигнатура  $\mu$  имеет следующий наглядный геометрический смысл. Возьмем наш тетраэдр  $ABCD$ . Рассмотрим треугольники его четырех граней  $CBA$ ,  $BDA$ ,  $DCA$ ,  $CBD$ . Зададим на них направления обхода таким образом, чтобы моменты  $l_p$ ,  $d_p$  ( $j=1, 2, 3$ ), являющиеся сторонами этих треуголь-

пиков, при обходе каждого треугольника перечислялись именно в том порядке, в котором они следуют в  $\mathfrak{S}_j$ -символах

$$\begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ q_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -m_1 & -q_2 & m_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ m_1 & -m_2 & -q_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}.$$

при этом условимся угловые моменты в последних перебирать по порядку слева направо. Тогда если рассматривать все эти четыре направления обхода извне тетраэдра  $ABCD$ , то при  $\mu = +1$  все они будут по часовой стрелке, а при  $\mu = -1$  — против часовой стрелки.

Нормали  $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3, \vec{N}_0$  к граням  $CBA, BDA, DCA, CBD$  нашего тетраэдра  $ABCD$ , определенные согласно гл. 3 формулами

$$\begin{aligned} 2S_1 \vec{N}_1 &= -[\vec{j}_1, \vec{l}_2] = -[\vec{l}_2, \vec{l}_3] = [\vec{l}_3, \vec{j}_1], \\ 2S_2 \vec{N}_2 &= [\vec{l}_1, \vec{j}_1] = -[\vec{j}_2, \vec{l}_3] = -[\vec{l}_3, \vec{l}_1], \\ 2S_3 \vec{N}_3 &= -[\vec{l}_1, \vec{l}_2] = [\vec{l}_2, \vec{j}_3] = -[\vec{j}_3, \vec{l}_1], \\ 2S_0 \vec{N}_0 &= [\vec{j}_1, \vec{j}_2] = [\vec{j}_2, \vec{j}_3] = [\vec{j}_3, \vec{j}_1], \end{aligned} \quad (4.70)$$

при  $\mu = +1$  будут смотреть наружу тетраэдра  $ABCD$ , а при  $\mu = -1$  — внутрь него.

Введенные выше величины  $B_1, B_2, B_3$  (см. (4.45)) и  $D_1, D_2, D_3$  (см. (4.54)) тоже имеют очень простой геометрический смысл. Рассмотрим наш тетраэдр  $ABCD$ . Возьмем, например, величину

$$B_3 = (b_2^2 - b_3^2 - d_1^2)(b_2^2 + b_1^2 - d_2^2) - 2b_3^2(b_1^2 + b_2^2 - d_3^2);$$

она может быть представлена в виде

$$B_3 = 4 \{ (\vec{l}_2, \vec{l}_3) (\vec{l}_3, \vec{l}_1) - (\vec{l}_3, \vec{l}_3) (\vec{l}_1, \vec{l}_3) \},$$

так как

$$2(\vec{l}_2, \vec{l}_3) = b_2^2 + b_3^2 - d_1^2,$$

$$2(\vec{l}_3, \vec{l}_1) = b_3^2 + b_1^2 - d_2^2,$$

$$2(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = b_1^2 + b_2^2 - d_3^2.$$

Следовательно, пользуясь известной формулой векторной алгебры для скалярного произведения двух векторных произведений, получим

$$B_3 = 4 ([\vec{l}_2, \vec{l}_3] \cdot [\vec{l}_3, \vec{l}_1]).$$

Но согласно (4.70)  $-\vec{l}_2 \cdot \vec{l}_3 = 2S_1 \vec{N}_1$ ,  $-\vec{l}_3 \cdot \vec{l}_1 = 2S_2 \vec{N}_2$  и, таким образом,

$$\begin{aligned} B_3 &= 16S_1 S_2 (\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2), \\ B_2 &= 16S_3 S_1 (\vec{N}_3 \cdot \vec{N}_1), \\ B_1 &= 16S_2 S_3 (\vec{N}_2 \cdot \vec{N}_3). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Две последние формулы получаются из первой циклической заменой индексов 1, 2, 3. Возьмем теперь, например, величину

$$D_3 = (d_2^2 - d_3^2 - d_1^2)(b_1^2 - b_2^2 - d_3^2) - 2d_3^2(d_1^2 - b_2^2 - b_3^2);$$

ее можно представить в виде

$$D_3 = 4 \{ (\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_3) (\vec{j}_3 \cdot \vec{l}_2) - (\vec{j}_3 \cdot \vec{j}_3) (\vec{j}_1 \cdot \vec{l}_2) \},$$

так как

$$2(\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_3) = d_2^2 - d_1^2 - d_3^2,$$

$$2(\vec{j}_3 \cdot \vec{l}_2) = b_1^2 - b_2^2 - d_3^2,$$

$$2(\vec{j}_1 \cdot \vec{l}_2) = d_1^2 - b_2^2 - b_3^2.$$

Пользуясь еще раз упомянутой формулой векторной алгебры, получим, что

$$D_3 = 4([\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_3] \cdot [\vec{j}_3 \cdot \vec{l}_2]).$$

Учитывая, что согласно (4.70)  $-\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_3 = 2S_0 \vec{N}_0$ ,  $-\vec{j}_3 \cdot \vec{l}_2 = 2S_3 \vec{N}_3$ , отсюда непосредственно имеем

$$D_3 = 16S_0 S_3 (\vec{N}_0 \cdot \vec{N}_3),$$

$$D_2 = 16S_0 S_2 (\vec{N}_0 \cdot \vec{N}_2),$$

$$D_1 = 16S_3 S_1 (\vec{N}_0 \cdot \vec{N}_1). \quad (4.72)$$

Две последние формулы получаются из первой циклической заменой индексов 1, 2, 3.

Используя формулы (4.70), легко убедиться, что имеет место простое векторное соотношение

$$S_0 \vec{N}_0 + S_1 \vec{N}_1 + S_2 \vec{N}_2 + S_3 \vec{N}_3 = 0, \quad (4.73)$$

являющееся частным случаем известного соотношения из векторного анализа о том, что поверхностный интеграл по

любой замкнутой поверхности от вектора нормали к элементам этой поверхности равен нулю:

$$\int_S \vec{n} dS = 0.$$

Здесь докажем формулу (4.73), исходя из формул (4.70). Имеем

$$\begin{aligned} & 2S_1 \vec{N}_1 + 2S_2 \vec{N}_2 + 2S_3 \vec{N}_3 + 2S_0 \vec{N}_0 = \\ & = -[\vec{j}_1 \cdot \vec{l}_2] + [\vec{l}_1 \cdot \vec{j}_2] + [\vec{l}_2 \cdot \vec{j}_3] + [\vec{j}_2 \cdot \vec{j}_3] = \\ & = [\vec{l}_2 \cdot \vec{j}_1 + \vec{j}_3] + [\vec{j}_2 \cdot -\vec{l}_1 + \vec{j}_3] = -[\vec{l}_2 \cdot \vec{j}_2] - [\vec{j}_2 \cdot \vec{l}_2] = 0. \end{aligned}$$

Умножая скалярно векторное соотношение (4.73) на единичный вектор  $\vec{k}$ , направленный вдоль оси  $Oz$ , и учитывая, что

$$\begin{aligned} \lambda_1 S_{\text{пр1}} &= S_1 (\vec{N}_1 \cdot \vec{k}), \quad \lambda_2 S_{\text{пр2}} = S_2 (\vec{N}_2 \cdot \vec{k}), \\ \lambda_3 S_{\text{пр3}} &= S_3 (\vec{N}_3 \cdot \vec{k}), \quad \lambda_0 S_{\text{пр0}} = S_0 (\vec{N}_0 \cdot \vec{k}), \end{aligned} \quad (4.74)$$

из (4.73) получаем соотношение

$$\lambda_0 S_{\text{пр0}} + \lambda_1 S_{\text{пр1}} + \lambda_2 S_{\text{пр2}} + \lambda_3 S_{\text{пр3}} = 0. \quad (4.75)$$

Умножая скалярно векторное равенство (4.73) поочередно на векторы  $S_1 \vec{N}_1$ ,  $S_2 \vec{N}_2$ ,  $S_3 \vec{N}_3$ , получим в точности соотношения (4.59). Умножая его скалярно на вектор  $S_0 \vec{N}_0$ , получим еще одно соотношение:

$$E + D_1 + D_2 + D_3 = 0, \quad (4.76)$$

в справедливости которого можно также убедиться и непосредственной проверкой, исходя из формул (4.52), (4.54).

Наконец, перенося в (4.73) слагаемое  $S_0 \vec{N}_0$  в правую часть и возводя в скалярный квадрат обе части полученного векторного равенства, будем иметь соотношение

$$(S_1 \vec{N}_1 + S_2 \vec{N}_2 + S_3 \vec{N}_3)^2 = (S_0 \vec{N}_0)^2,$$

а следовательно, используя формулы (4.71), получим

$$A_1 + A_2 + A_3 + 2B_1 + 2B_2 + 2B_3 = E. \quad (4.77)$$

3. Приступим теперь к вычислению важной для нас величины

$$\lambda_1 \frac{dH_{11}}{dk_n} + \lambda_2 \frac{dH_{22}}{dk_n} + \lambda_3 \frac{dH_{33}}{dk_n} \quad (4.78)$$

при стационарных значениях  $k=k_n$ . Удобнее рассуждать, однако, не о стационарных числах  $k_n$ , а о наборах стационарных значений чисел  $m_{1n}, m_{2n}, m_{3n}$ .

Необходимо вычислить производные в формуле (4.78). Рассмотрим, например, производную  $\frac{dH_{11}}{dk_n}$ . Возьмем определяющие угол  $H_{11}$  формулы

$$2a_2a_3 \cos H_{11} = a_2^2 + a_3^2 - c_1^2,$$

$$2S_{\text{пр1}} = a_2a_3 \sin H_{11},$$

в которых

$$a_2^2 = b_2^2 - m_2^2, \quad a_3^2 = b_3^2 - m_3^2,$$

$$c_1^2 = d_1^2 - q_1^2 = d_1^2 - (m_2 - m_3)^2,$$

Продифференцируем по  $k$  первую и три последние формулы. После необходимых преобразований придем тогда к формуле

$$\begin{aligned} \frac{dH_{11}}{dk_n} = & - \frac{1}{4S_{\text{пр1}}a_2^2a_3^2} (m_2a_3^2 \div m_3a_2^2) \times \\ & \times (a_2^2 \div a_3^2 - c_1^2) \div \frac{1}{2S_{\text{пр1}}} (m_2 \div m_3), \end{aligned} \quad (4.79a)$$

при получении которой мы воспользовались тем, что  $\frac{dm_1}{dk} = \frac{dm_2}{dk} = \frac{dm_3}{dk} = 1$ . Производя в формуле (4.79a) циклические замены индексов 1, 2, 3, получим еще две формулы:

$$\begin{aligned} \frac{dH_{22}}{dk_n} = & - \frac{1}{4S_{\text{пр2}}a_3^2a_1^2} (m_3a_1^2 \div m_1a_3^2) \times \\ & \times (a_3^2 \div a_1^2 - c_2^2) \div \frac{1}{2S_{\text{пр2}}} (m_3 \div m_1), \\ \frac{dH_{33}}{dk_n} = & - \frac{1}{4S_{\text{пр3}}a_1^2a_2^2} (m_1a_2^2 \div m_2a_1^2) \times \\ & \times (a_1^2 \div a_2^2 - c_3^2) \div \frac{1}{2S_{\text{пр3}}} (m_1 \div m_2). \end{aligned} \quad (4.79б)$$

Подставляя (4.79а, б) в (4.78) и немного преобразуя результат, приходим к выводу:

$$\lambda_1 \frac{dH_{11}}{dk_n} \div \lambda_2 \frac{dH_{22}}{dk_n} \div \lambda_3 \frac{dH_{33}}{dk_n} = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{64S_{\text{пр1}}S_{\text{пр2}}S_{\text{пр3}}a_1^2a_2^2a_3^2} \times$$

$$\times \{m_1 a_2^2 a_3^2 [-16\lambda_3 S_{\text{пр3}} \lambda_1 S_{\text{пр1}} ((a_3^2 + a_1^2 - c_2^2) - 2a_1^2) - \\ - 16\lambda_1 S_{\text{пр1}} \lambda_2 S_{\text{пр2}} ((a_1^2 + a_2^2 - c_3^2) - 2a_2^2)] \} \cdot \text{два слагаемых,}$$

получаемых циклической заменой 1, 2, 3}.

Вычислим теперь величину  $16\lambda_1 S_{\text{пр1}} \cdot 16\lambda_2 S_{\text{пр2}}$ . Для этого обратимся к формуле, выведенной после (4.37):

$$\cos H_{11} \cos H_{22} - \cos H_{33} = \lambda_1 \lambda_2 \sin H_{11} \sin H_{22},$$

и в ней косинусы и синусы выразим по формулам

$$(\vec{a}_2, \vec{a}_3) = a_2 a_3 \cos H_{11}, \quad (\vec{a}_3, \vec{a}_1) = a_3 a_1 \cos H_{22},$$

$$2S_{\text{пр1}} = a_2 a_3 \sin H_{11}, \quad 2S_{\text{пр2}} = a_3 a_1 \sin H_{22},$$

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = a_1 a_2 \cos H_{33}.$$

Тогда получим соотношение

$$2(\vec{a}_2, \vec{a}_3) \cdot 2(\vec{a}_3, \vec{a}_1) - 2a_3^2 (\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 4\lambda_1 \lambda_2 2S_{\text{пр1}} 2S_{\text{пр2}},$$

которое с учетом формул

$$2(\vec{a}_2, \vec{a}_3) = a_2^2 + a_3^2 - c_1^2, \quad 2(\vec{a}_3, \vec{a}_1) = a_3^2 + a_1^2 - c_2^2,$$

$$2(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = a_1^2 + a_2^2 - c_3^2$$

можно представить в окончательном виде

$$16\lambda_1 S_{\text{пр1}} \lambda_2 S_{\text{пр2}} = (a_2^2 + a_3^2 - c_1^2)(a_3^2 + a_1^2 - c_2^2) - 2a_3^2 (a_1^2 + a_2^2 - c_3^2). \quad (4.80a)$$

Циклическими перестановками 1, 2, 3 отсюда можно получить еще два соотношения

$$16\lambda_2 S_{\text{пр2}} \lambda_3 S_{\text{пр3}} = (a_3^2 + a_1^2 - c_2^2)(a_1^2 + a_2^2 - c_3^2) - 2a_1^2 (a_2^2 + a_3^2 - c_1^2),$$

$$16\lambda_3 S_{\text{пр3}} \lambda_1 S_{\text{пр1}} = (a_1^2 + a_2^2 - c_3^2)(a_2^2 + a_3^2 - c_1^2) - 2a_2^2 (a_3^2 + a_1^2 - c_2^2). \quad (4.80b)$$

Используя (4.80), выражение, стоящее первым слагаемым в фигурных скобках в вышеприведенной формуле, можно преобразовать к виду

$$2m_1 a_1^2 a_2^2 a_3^2 ((c_1^2 - c_2^2 - c_3^2)(a_2^2 + a_3^2 - c_1^2) - 2a_1^2 c_1^2 - 2a_2^2 c_2^2 - 2a_3^2 c_3^2);$$

при этом только надо воспользоваться соотношением (4.41).

Учитывая выведенную формулу (4.75) и формулы (4.80), можно получить формулы, аналогичные (4.80):

$$16\lambda_0 S_{\text{пр0}} \lambda_1 S_{\text{пр1}} = (c_3^2 - c_1^2 - c_2^2)(a_2^2 + a_3^2 - c_1^2) - 2c_1^2 (c_2^2 + a_3^2 - a_1^2),$$



$$\begin{aligned}
 16\lambda_0 S_{\text{пр}0} \lambda_2 S_{\text{пр}2} &= (c_1^2 - c_2^2 - c_3^2)(a_3^2 - a_1^2 - c_2^2) - 2c_2^2(c_3^2 + a_1^2 - a_2^2), \\
 16\lambda_0 S_{\text{пр}0} \lambda_3 S_{\text{пр}3} &= (c_2^2 - c_3^2 - c_1^2)(a_1^2 - a_2^2 - c_3^2) - 2c_3^2(c_1^2 + a_2^2 - a_3^2).
 \end{aligned}
 \tag{4.81}$$

Первая из них позволяет представить вычисляемое выражение

$$\lambda_1 \frac{dH_{11}}{dk_n} \vdots \lambda_2 \frac{dH_{22}}{dk_n} \vdots \lambda_3 \frac{dH_{33}}{dk_n}$$

$$- 32m_1 a_1^2 a_2^2 a_3^2 \lambda_0 S_{\text{пр}0} \lambda_1 S_{\text{пр}1}.$$

Таким образом, для рассчитываемой здесь нами величины получается довольно простое выражение

$$\lambda_1 \frac{dH_{11}}{dk_n} \vdots \lambda_2 \frac{dH_{22}}{dk_n} \vdots \lambda_3 \frac{dH_{33}}{dk_n} =$$

$$= - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{2S_{\text{пр}1} S_{\text{пр}2} S_{\text{пр}3}} \lambda_0 S_{\text{пр}0} \{ m_1 \lambda_1 S_{\text{пр}1} \vdots m_2 \lambda_2 S_{\text{пр}2} \vdots m_3 \lambda_3 S_{\text{пр}3} \},
 \tag{4.82}$$

которое можно еще дальше преобразовать, если воспользоваться выводимой ниже формулой.

Для объема нашего тетраэдра  $ABCD$  имеем формулу (4.67)

$$6\mu V = (\vec{l}_3 \cdot [\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2]),$$

которую можно преобразовать, если учесть, что  $\vec{j}_1 = \vec{l}_2 - \vec{l}_3$ ,  $\vec{j}_2 = \vec{l}_3 - \vec{l}_1$ , к виду

$$6\mu V = (\vec{l}_3 \cdot [\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2]).
 \tag{4.83}$$

Из этой формулы, используя (4.36), сразу получаем

$$\begin{aligned}
 6\mu V &= (m_3 \vec{k} \vdots \vec{a}_3 \cdot [m_1 \vec{k} \vdots \vec{a}_1 \cdot m_2 \vec{k} \vdots \vec{a}_2]) = \\
 &= m_3 (\vec{k} \cdot [\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2]) \vdots m_2 (\vec{k} \cdot [\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1]) \vdots m_1 (\vec{k} \cdot [\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3]).
 \end{aligned}$$

Очевидно

$$\begin{aligned}
 (\vec{k} \cdot [\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3]) &= -2\lambda_1 S_{\text{пр}1}, \quad (\vec{k} \cdot [\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1]) = -2\lambda_2 S_{\text{пр}2}, \\
 (\vec{k} \cdot [\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2]) &= -2\lambda_3 S_{\text{пр}3},
 \end{aligned}$$

и поэтому имеем формулу

$$-3\mu V = m_1 \lambda_1 S_{\text{пр}1} \vdots m_2 \lambda_2 S_{\text{пр}2} \vdots m_3 \lambda_3 S_{\text{пр}3}.
 \tag{4.84}$$

Используя эту формулу, формулу (4.82), можно преобразовать к окончательному виду

$$\lambda_1 \frac{dH_{11}}{dk_n} + \lambda_2 \frac{dH_{22}}{dk_n} + \lambda_3 \frac{dH_{33}}{dk_n} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{2S_{\text{пр1}} S_{\text{пр2}} S_{\text{пр3}}} \lambda_0 S_{\text{пр0}} 3\mu V. \quad (4.85)$$

Полученные результаты (4.61) и (4.85) позволяют преобразовать основную формулу (4.16) к виду

$$I \cong (-1)^z \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi S_{\text{пр0}}}} \frac{1}{\sqrt{12\pi V}} \times \\ \times \left[ \cos \left\{ \lambda_{1a}(P_{1a} + Q_{1a}) + \lambda_{2a}(P_{2a} + Q_{2a}) + \lambda_{3a}(P_{3a} + Q_{3a}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3\pi}{4}(\lambda_{1a} + \lambda_{2a} + \lambda_{3a}) + 2\pi k_a v_a + \pi(m_{1a} + m_{2a} + m_{3a}) + \frac{\pi}{4} \lambda_{1a} \lambda_{2a} \lambda_{3a} \right\} + \right. \\ \left. + \cos \left\{ \lambda_{1b}(P_{1b} + Q_{1b}) + \lambda_{2b}(P_{2b} + Q_{2b}) + \lambda_{3b}(P_{3b} + Q_{3b}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3\pi}{4}(\lambda_{1b} + \lambda_{2b} + \lambda_{3b}) + 2\pi k_b v_b + \pi(m_{1b} + m_{2b} + m_{3b}) - \frac{\pi}{4} \lambda_{1b} \lambda_{2b} \lambda_{3b} \right\} \right], \quad (4.86)$$

где  $z = l_1 + l_2 + l_3$ .

4. Нам нужно раскрыть теперь выражения, стоящие аргументами под знаком косинуса в формуле (4.86). Введем обозначение  $s = a, b$  и рассчитаем по мод  $2\pi$  следующее выражение:

$$\mathfrak{M}_s \equiv \lambda_{1s}(P_{1s} + Q_{1s}) + \lambda_{2s}(P_{2s} + Q_{2s}) + \lambda_{3s}(P_{3s} + Q_{3s}) - \\ - \frac{3\pi}{4}(\lambda_{1s} + \lambda_{2s} + \lambda_{3s}) + 2\pi k_s v_s + \pi(m_{1s} + m_{2s} + m_{3s}) + \frac{\pi}{4} \lambda_{0s} \mu_s \lambda_{1s} \lambda_{2s} \lambda_{3s}.$$

Остановимся прежде всего на выводе нескольких необходимых для этого расчета важных формулах. Речь идет о трех группах формул.

Получим формулы первой группы. Используя очевидные равенства  $\vec{c}_3 = \vec{c}_1 + \vec{c}_2$ ,  $\vec{a}_2 = \vec{a}_3 + \vec{c}_1$ ,  $\vec{a}_1 = -\vec{a}_3 + \vec{c}_2$ , получим

$$2(\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2) = c_3^2 - c_1^2 - c_2^2,$$

$$2(\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3) = a_2^2 - a_3^2 - c_1^2, \quad 2(\vec{a}_3 \cdot \vec{c}_2) = a_3^2 - a_1^2 + c_2^2.$$

Кроме того, имеем определяющие углы  $H_{03}$ ,  $H_{12}$  и  $H_{21}$  соотношения

$$(\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2) = -c_1 c_2 \cos H_{03}, \quad (\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3) = -c_1 a_3 \cos H_{12},$$

$$(\vec{a}_3 \cdot \vec{c}_2) = a_3 c_2 \cos H_{21},$$

$$2S_{\text{пр}0} = c_1 c_2 \sin H_{03}, \quad 2S_{\text{пр}1} = c_1 a_3 \sin H_{12},$$

$$2S_{\text{пр}2} = a_3 c_2 \sin H_{21},$$

из которых эти углы находятся совершенно однозначно, если дополнительно учесть условия  $0 < H_{03} < \pi$ ,  $0 < H_{12} < \pi$ ,  $0 < H_{21} < \pi$ . Используя эти последние формулы, мы можем представить формулу (4.80а) в виде

$$2(\vec{a}_3 \cdot \vec{c}_2) \cdot 2(\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3) : 16\lambda_1 S_{\text{пр}1} \lambda_2 S_{\text{пр}2} = 2a_3^2 \cdot 2(\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2),$$

что с учетом формул, только что приведенных выше, можно записать как соотношение

$$\cos H_{21} \cos H_{12} - \lambda_1 \lambda_2 \sin H_{21} \sin H_{12} = \cos H_{03},$$

или

$$\cos(\lambda_2 H_{21} : \lambda_1 H_{12}) = \cos H_{03}. \quad (4.87)$$

Пользуясь формулами (4.58), (4.62), (4.81), после несложной, хотя и громоздкой, выкладки можно установить справедливость следующего соотношения:

$$\lambda_2 S_{\text{пр}2} (a_2^2 - a_3^2 - c_1^2) : \lambda_1 S_{\text{пр}1} (a_3^2 - a_1^2 - c_2^2) = 2\lambda_0 S_{\text{пр}0} a_3^2.$$

Надо правую и левую части этого соотношения умножить на  $8\lambda_0 S_{\text{пр}0}$  и проверить непосредственно получаемое равенство. Учитывая вышеприведенные формулы для углов  $H_{12}$  и  $H_{21}$ , последнее соотношение можно представить в виде

$$\sin(\lambda_2 H_{21} : \lambda_1 H_{12}) = -\lambda_0 \sin H_{03}. \quad (4.88)$$

Это последнее равенство можно получить и другим способом. Заметим, что соотношение, из которого его вывели, можно записать с учетом приведенных выше формул в виде

$$2\lambda_2 S_{\text{пр}2} (\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3) - 2\lambda_1 S_{\text{пр}1} (\vec{c}_2 \cdot \vec{a}_3) = 2\lambda_0 S_{\text{пр}0} a_3^2$$

или с учетом очевидных формул

$$\lambda_1 S_{\text{пр}1} = S_1 (\vec{N}_1 \cdot \vec{k}), \quad \lambda_2 S_{\text{пр}2} = S_2 (\vec{N}_2 \cdot \vec{k}), \quad \lambda_0 S_{\text{пр}0} = S_0 (\vec{N}_0 \cdot \vec{k})$$

в виде

$$2S_2 (\vec{N}_2 \cdot \vec{k}) (\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3) - 2S_1 (\vec{N}_1 \cdot \vec{k}) (\vec{c}_2 \cdot \vec{a}_3) = 2S_0 (\vec{N}_0 \cdot \vec{k}) a_3^2.$$

Теперь легко видеть из (4.70), что

$$2S_2 \vec{N}_2 = -[\vec{j}_2, \vec{l}_3], \quad 2S_1 \vec{N}_1 = [\vec{l}_3, \vec{j}_1], \quad 2S_0 \vec{N}_0 = [\vec{j}_1, \vec{j}_2]$$

и поэтому

$$2S_2(\vec{N}_2, \vec{k}) = -([\vec{k}, \vec{c}_2] \cdot \vec{a}_3), 2S_1(\vec{N}_1, \vec{k}) = -([\vec{k}, \vec{c}_1] \cdot \vec{a}_3), \\ 2S_0(\vec{N}_0, \vec{k}) = ([\vec{c}_2, \vec{c}_3] \cdot \vec{k}).$$

Таким образом, надо установить правильность соотношения

$$-([\vec{a}_3, \vec{k}] \cdot \vec{c}_2)(\vec{c}_1 \cdot \vec{a}_3) = ([\vec{a}_3, \vec{k}] \cdot \vec{c}_1)(\vec{c}_2 \cdot \vec{a}_3) = ([\vec{c}_1, \vec{c}_2] \cdot \vec{k}) a_3^2.$$

Последнее действительно верно, так как согласно (3.124), (3.125)

$$\vec{c}_2 = \frac{(\vec{a}_3 \cdot \vec{c}_2)}{a_3^2} \vec{a}_3 + \frac{([\vec{a}_3, \vec{k}] \cdot \vec{c}_2)}{a_3^2} [\vec{a}_3, \vec{k}], \\ \vec{c}_1 = \frac{(\vec{a}_3 \cdot \vec{c}_1)}{a_3^2} \vec{a}_3 + \frac{([\vec{a}_3, \vec{k}] \cdot \vec{c}_1)}{a_3^2} [\vec{a}_3, \vec{k}]$$

и, следовательно,

$$a_3^2 [\vec{c}_1, \vec{c}_2] = \{(\vec{a}_3 \cdot \vec{c}_2)([\vec{a}_3, \vec{k}] \cdot \vec{c}_1) - (\vec{a}_3 \cdot \vec{c}_1)([\vec{a}_3, \vec{k}] \cdot \vec{c}_2)\} \vec{k}.$$

Умножая скалярно последнее соотношение на  $\vec{k}$ , непосредственно приходим к доказываемому соотношению.

Из формул (4.87), (4.88) сразу следует, что

$$\lambda_2 H_{21} + \lambda_1 H_{12} + \lambda_0 H_{03} = \frac{\pi}{2} (\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2), \quad (4.89a)$$

так как  $0 < H_{21} < \pi$ ,  $0 < H_{12} < \pi$ ,  $0 < H_{03} < \pi$  и так как  $\lambda_0 = \pm 1$ ,  $\lambda_1 = \pm 1$ ,  $\lambda_2 = \pm 1$ . Производя в полученной формуле циклические перестановки индексов 1, 2, 3, выводим из нее еще две формулы:

$$\lambda_3 H_{32} + \lambda_2 H_{23} + \lambda_0 H_{01} = \frac{\pi}{2} (\lambda_0 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_0 + \lambda_2 + \lambda_3), \\ \lambda_1 H_{13} + \lambda_3 H_{31} + \lambda_0 H_{02} = \frac{\pi}{2} (\lambda_0 \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_0 + \lambda_3 + \lambda_1). \quad (4.89b)$$

Формулы (4.89) — это первая группа нужных нам формул.

Теперь выведем формулы второй группы и для этого рассмотрим двугранные углы нашего тетраэдра  $ABCD$ , примыкающие к ребрам  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ . Возьмем, например, угол  $X_3$ , опирающийся на ребро  $l_3$ . Он изменяется в пределах  $0 <$

$\angle X_3 < \pi$  и для него можно написать определяющие его формулы

$$(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = -\cos X_3, \quad 16S_1S_2(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = B_3,$$

(см (4.71), (4.45)). Знак «минус» в первой формуле появился потому, что угол между нормальями  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$  — дополнение до  $\pi$  рассматриваемого двугранного угла  $X_3$ . Мы имеем, далее, непосредственно следующие из (3.131) определяющие углы  $\Lambda_{13}$  и  $\Lambda_{23}$  формулы

$$4S_1a_3 \cos \Lambda_{13} = m_3(d_1^2 - b_2^2 - b_3^2) + 2m_2b_3^2,$$

$$S_1a_3 \sin \Lambda_{13} = b_3S_{np1},$$

$$4S_2a_3 \cos \Lambda_{23} = m_3(d_2^2 - b_1^2 - b_3^2) + 2m_1b_3^2,$$

$$S_2a_3 \sin \Lambda_{23} = b_3S_{np2}.$$

Надо только воспользоваться формулами (4.2). Комбинируя приведенные формулы, после небольшого вычисления убеждаемся в справедливости соотношения

$$\cos X_3 = \cos \Lambda_{13} \cos \Lambda_{23} - \lambda_1 \lambda_2 \sin \Lambda_{13} \sin \Lambda_{23},$$

или соотношения

$$\cos(\lambda_1 \Lambda_{13} + \lambda_2 \Lambda_{23}) = \cos X_3. \quad (4.90)$$

Еще одно соотношение мы получим следующим образом. Учитывая только что приведенные формулы для углов  $\Lambda_{13}$  и  $\Lambda_{23}$ , легко получить равенство

$$\begin{aligned} 4S_1S_2a_3^2 \sin(\lambda_1 \Lambda_{13} + \lambda_2 \Lambda_{23}) = \\ = \lambda_1 b_3 S_{np1} [m_3(d_2^2 - b_1^2 - b_3^2) + 2m_1b_3^2] + \\ + \lambda_2 b_3 S_{np2} [m_3(d_1^2 - b_2^2 - b_3^2) + 2m_2b_3^2], \end{aligned}$$

правую часть которого можно дальше преобразовать, если использовать, что

$$\lambda_1 S_{np1} = S_1(\vec{N}_1, \vec{k}), \quad \lambda_2 S_{np2} = S_2(\vec{N}_2, \vec{k}),$$

$$d_2^2 - b_3^2 - b_1^2 = -2(\vec{l}_3, \vec{l}_1), \quad d_1^2 - b_2^2 - b_3^2 = -2(\vec{l}_2, \vec{l}_3).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} m_3(d_2^2 - b_1^2 - b_3^2) + 2m_1b_3^2 = -(\vec{l}_3, \vec{k}) \cdot 2(\vec{l}_3, \vec{l}_1) + 2(\vec{l}_1, \vec{k})(\vec{l}_2, \vec{l}_3) = \\ = 2([\vec{l}_1, \vec{l}_3] \cdot [\vec{k}, \vec{l}_3]) = 4S_2(\vec{N}_2, [\vec{k}, \vec{l}_3]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_3(d_1^2 - b_2^2 - b_3^2) + 2m_2b_3^2 = -(\vec{l}_3, \vec{k}) \cdot 2(\vec{l}_2, \vec{l}_3) + 2(\vec{l}_2, \vec{k})(\vec{l}_3, \vec{l}_3) = \\ = 2([\vec{l}_2, \vec{l}_3] \cdot [\vec{k}, \vec{l}_3]) = -4S_1(\vec{N}_1, [\vec{k}, \vec{l}_3]). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$4S_1S_2a_3^2 \sin(\lambda_1\Lambda_{13} + \lambda_2\Lambda_{23}) = 4S_1S_2b_3([\vec{N}_1, \vec{N}_2] \cdot [\vec{k}, [\vec{k}, \vec{l}_3]]) = \\ = 4S_1S_2([\vec{N}_1, \vec{N}_2] \cdot \vec{a}_3),$$

так как

$$[\vec{k}, [\vec{k}, \vec{l}_3]] = \vec{k}(\vec{l}_3 \cdot \vec{k}) - \vec{l}_3 = m_3\vec{k} - \vec{l}_3 = -\vec{a}_3.$$

Далее,

$$4S_1S_2[\vec{N}_1, \vec{N}_2] = [[\vec{l}_2, \vec{l}_3] \cdot [\vec{l}_3, \vec{l}_1]] = \vec{l}_3(\vec{l}_1 \cdot [\vec{l}_2, \vec{l}_3]) = 6\mu\vec{l}_3.$$

Следовательно,

$$4S_1S_2|[\vec{N}_1, \vec{N}_2]| = 4S_1S_2 \sin X_3 = 6b_3V,$$

так что

$$4S_1S_2[\vec{N}_1, \vec{N}_2] = \mu\vec{l}_3 \frac{4S_1S_2 \sin X_3}{b_3}.$$

Используя этот результат, окончательно приходим к соотношению

$$\sin(\lambda_1\Lambda_{13} + \lambda_2\Lambda_{23}) = -\mu \sin X_3. \quad (4.91)$$

Из (4.90), (4.91) с учетом того, что  $0 < \Lambda_{13} < \pi$ ,  $0 < \Lambda_{23} < \pi$ ,  $0 < X_3 < \pi$ , сразу следует формула

$$\lambda_1\Lambda_{13} + \lambda_2\Lambda_{23} + \mu X_3 = \frac{\pi}{2} (\mu\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2 + \mu). \quad (4.92a)$$

Две другие важные формулы получаются из этой последней циклическими перестановками индексов 1, 2, 3:

$$\lambda_2\Lambda_{21} + \lambda_3\Lambda_{31} + \mu X_1 = \frac{\pi}{2} (\mu\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_3 + \mu),$$

$$\lambda_3\Lambda_{32} + \lambda_1\Lambda_{12} + \mu X_2 = \frac{\pi}{2} (\mu\lambda_3\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_1 + \mu). \quad (4.92б)$$

Формулы (4.92) — это вторая группа нужных нам формул.

Выведем, наконец, формулы третьей группы и для этого рассмотрим двугранные углы, примыкающие к ребрам  $j_1$ ,  $j_2$ ,  $j_3$  нашего тетраэдра  $ABCD$ . Возьмем, к примеру, угол  $Z_1$  при ребре  $j_1$ . Согласно его формальному определению  $0 < Z_1 < \pi$  и

$$\cos Z_1 = -(\vec{N}_0, \vec{N}_1)$$

$$16S_0S_1(\vec{N}_0, \vec{N}_1) = D_1$$

(см. (4.72), (4.54)). Согласно (3.131) имеем простые формулы

$$4S_0 c_1 \sin \Lambda_{01} = (m_2 - m_3)(d_3^2 - d_2^2) + (2m_1 - m_2 - m_3)d_1^2,$$

$$S_0 c_1 \sin \Lambda_{01} = d_1 S_{\text{пр}0},$$

$$4S_1 c_1 \cos \Lambda_{11} = (m_3 - m_2)(b_3^2 - b_2^2) - (m_3 + m_2)d_1^2,$$

$$S_0 c_1 \sin \Lambda_{11} = d_1 S_{\text{пр}1},$$

из которых непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} 16S_1 S_0 c_1^2 \cos(\lambda_0 \Lambda_{01} + \lambda_1 \Lambda_{11}) &= -c_1^2 \cdot 16S_0 S_1 (\vec{N}_0 \cdot \vec{N}_1) = \\ &= c_1^2 \cdot 16S_0 S_1 \cos Z_1. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем соотношение

$$\cos(\lambda_0 \Lambda_{01} + \lambda_1 \Lambda_{11}) = \cos Z_1. \quad (4.93)$$

Простые вычисления показывают также, что

$$4S_1 S_2 c_1^2 \sin(\lambda_0 \Lambda_{01} + \lambda_1 \Lambda_{11}) =$$

$$\begin{aligned} &= -d_1 S_0 (\vec{k} \cdot \vec{N}_0) \cdot 4S_1 (\vec{N}_1 \cdot [\vec{k} \cdot \vec{j}_1]) + d_1 S_1 (\vec{k} \cdot \vec{N}_1) \cdot 4S_0 (\vec{N}_0 \cdot [\vec{k} \cdot \vec{j}_1]) = \\ &= 4d_1 S_0 S_1 ([\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_0] \cdot [\vec{k} \cdot \vec{j}_1]) = -4d_1 S_0 S_1 ([\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_0] \cdot \vec{c}_1), \end{aligned}$$

так как

$$[\vec{k} \cdot \vec{j}_1] = \vec{k} (\vec{j}_1 \cdot \vec{k}) - \vec{j}_1 (\vec{k} \cdot \vec{k}) = \vec{k} q_1 - \vec{j}_1 = -\vec{c}_1.$$

Как видно,

$$4S_0 S_1 [\vec{N}_0 \cdot \vec{N}_1] = ([\vec{l}_3 \cdot \vec{j}_1] \cdot [\vec{j}_3 \cdot \vec{j}_1]) = -\vec{j}_1 (\vec{l}_3 \cdot [\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_3]).$$

Используя далее, что

$$|[\vec{N}_0 \cdot \vec{N}_1]| = \sin Z_1,$$

имеем

$$[\vec{N}_0 \cdot \vec{N}_1] = -\frac{\mu}{d_1} \sin Z_1 \vec{j}_1.$$

Следовательно, имеем соотношение

$$\sin(\lambda_0 \Lambda_{01} + \lambda_1 \Lambda_{11}) = -\mu \sin Z_1. \quad (4.94)$$

Из формул (4.93), (4.94) с учетом ограничений  $0 < \Lambda_{01} < \pi$ ,  $0 < \Lambda_{11} < \pi$ ,  $0 < Z_1 < \pi$  сразу получаем, что

$$\lambda_0 \Lambda_{01} + \lambda_1 \Lambda_{11} + \mu Z_1 = \frac{\pi}{2} (\mu \lambda_0 \lambda_1 + \lambda_0 + \lambda_1 + \mu). \quad (4.95a)$$

Две другие формулы получаются из этой циклическими заменами индексов 1, 2, 3:

$$\lambda_0 \Lambda_{02} : \lambda_2 \Lambda_{22} : \mu Z_2 = \frac{\pi}{2} (\mu \lambda_0 \lambda_2 : \lambda_0 : \lambda_2 + \mu),$$

$$\lambda_0 \Lambda_{03} : \lambda_3 \Lambda_{33} : \mu Z_3 = \frac{\pi}{2} (\mu \lambda_0 \lambda_3 : \lambda_0 : \lambda_3 + \mu). \quad (4.95б)$$

Это нужные нам формулы третьей группы.

Вернемся теперь к формуле, приведенной в начале этого пункта, обозначающей рассчитываемую здесь величину

$$\mathfrak{A} \equiv \lambda_1 (P_1 : Q_1) : \lambda_2 (P_2 : Q_2) : \lambda_3 (P_3 : Q_3) -$$

$$- \frac{3\pi}{4} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \frac{\pi k}{2} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 : 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3) +$$

$$: \lambda_0 \mu \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 3k\pi - \pi (m_1 + m_2 + m_3).$$

Причем здесь мы опускаем индекс  $s = a, b$ . В отношении величин  $P_p, Q_p$  ( $p = 1, 2, 3$ ) необходимо сделать следующее замечание. В гл. 3 мы везде считали, что проекции моментов

$m_1, m_2, m_3$  рассматриваемого там  $3j$ -символа  $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$

целочисленные. Здесь же нам нужно рассматривать  $3j$ -символы с нецелочисленными проекциями. Поэтому величину  $P$  для любого встречающегося здесь у нас  $3j$ -символа  $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$  будем теперь вычислять по формуле

$$P = h_1 H_1 : h_2 H_2 : h_3 H_3 - \pi s,$$

где  $H_1, H_2, H_3$  — углы соответствующего треугольника проекций и где, как в гл. 3, будем полагать

$$h_1 = m_2 - m_3 + s, \quad h_2 = m_3 + s, \quad h_3 = -m_3 + s,$$

но где теперь  $s$  — произвольное действительное число.

Согласно этому предписанию обращаясь к построенному нами выше тетраэдру  $ABCD$ , рассматривая расстояния  $h_A, h_B, h_C, h_D$  его вершин  $A, B, C, D$  до плоскости  $Oxy$ , для первого, второго и третьего наших  $3j$ -символов ( $p = 1, 2, 3$ ) можно написать

$$h_A = m_2 + m_3 + s_1, \quad h_A = m_3 + m_1 + s_2, \quad h_A = m_1 + m_2 + s_3,$$

$$h_B = m_2 + s_1, \quad h_D = m_3 + s_2, \quad h_C = m_1 + s_3, \quad (4.96)$$

$$h_C = m_3 + s_1, \quad h_B = m_1 + s_2, \quad h_D = m_2 + s_3,$$

где  $s_1, s_2, s_3$  — некоторые действительные числа, связанные соотношениями

$$s_1 - s_2 = q_3, \quad s_2 - s_3 = q_1, \quad s_3 - s_1 = q_2. \quad (4.97)$$



Величины проекций  $m_1, m_2, m_3$  нецелочисленные и даются формулами (4.69), а целые числа  $q_1, q_2, q_3$  — заданные с самого начала. Полагая далее, что

$$s_1 = -m_1 + s_0, \quad s_2 = -2m_1 + m_2 + s_0, \quad s_3 = -2m_1 + m_3 + s_0, \quad (4.98)$$

где  $s_0$  — достаточно большое целое четное число, можно написать также

$$\begin{aligned} h_D &= q_2 - q_3 + s_0, \\ h_C &= q_2 + s_0, \\ h_B &= -q_3 + s_0. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Таким образом, теперь  $h_B, h_C, h_D$  — целые числа, а  $h_A$  — число нецелое. Так же нецелыми будут числа  $m_1, m_2, m_3$  и  $s_1, s_2, s_3$ .

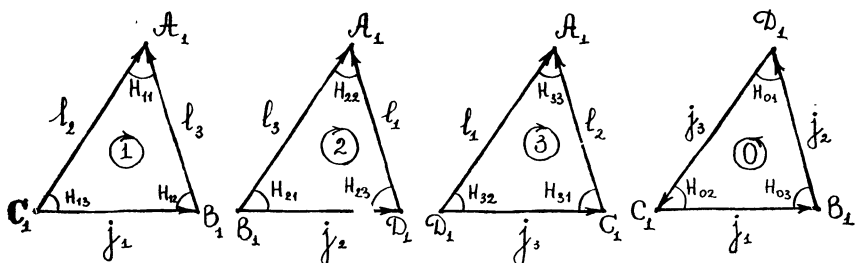


Рис. 19. Четыре треугольника проекций и обозначения их углов

На рис. 19 мы изображаем треугольники проекций  $C_1B_1A_1, B_1D_1A_1, D_1C_1A_1$  и  $C_1B_1D_1$  и иллюстрируем обозначения для соответствующих углов. Используя эти обозначения, имеем

$$\begin{aligned} P_1 &= h_A H_{11} + h_B H_{12} + h_C H_{13} - \pi s_1, \\ P_2 &= h_B H_{21} + h_A H_{22} + h_D H_{23} - \pi s_2, \\ P_3 &= h_C H_{31} + h_D H_{32} + h_A H_{33} - \pi s_3. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Кроме того, можно написать определяющие формулы

$$\begin{aligned} Q_1 &= d_1 \Lambda_{11} + b_3 \Lambda_{13} + b_2 \Lambda_{12}, \\ Q_2 &= d_2 \Lambda_{22} + b_1 \Lambda_{21} + b_3 \Lambda_{23}, \\ Q_3 &= d_3 \Lambda_{33} + b_2 \Lambda_{32} + b_1 \Lambda_{31}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Рассчитаем выражение

$$\mathfrak{A}' \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 - \frac{\pi k}{2} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3) - \\ - 3k\pi + \pi (m_1 + m_2 + m_3),$$

являющееся частью выражения  $\mathfrak{A}$ . Используя формулы (4.100) и (4.17), (4.89), а также то, что  $h_B, h_C, h_D$  — целые числа, получим

$$\mathfrak{A}' = h_A \frac{\pi}{2} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + h_B (-\lambda_0 H_{03}) + h_C (-\lambda_0 H_{02}) + \\ + h_D (-\lambda_0 H_{01}) - \pi (\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \lambda_3 s_3) - \\ - \frac{\pi k}{2} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3) - 3k\pi + \pi (m_1 + m_2 + m_3) \pmod{2\pi}.$$

Воспользуемся теперь формулой  $h_A = m_2 + m_3 + s_1 = m_2 + m_3 - m_1 + s_0 = m_2 + q_2 + s_0$  (см. (4.96), (4.98)) и положим, например, что  $k = m_2$ . Используем, кроме того, все три формулы (4.98). Тогда после несложных вычислений получим очень простой результат

$$\mathfrak{A}' = -\lambda_0 P_0 \pmod{2\pi}, \quad (4.102)$$

где

$$P_0 = h_D H_{01} + h_C H_{02} + h_B H_{03} - \pi s_0 \quad (4.103)$$

(рис. 19).

Рассчитаем далее выражение

$$\mathfrak{A}'' = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 - \frac{3\pi}{4} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \frac{\pi}{4} \lambda_0 \mu \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3,$$

являющееся оставшейся частью выражения  $\mathfrak{A}$ . Используя формулы (4.101), будем иметь

$$\mathfrak{A}'' = d_1 \lambda_1 \Lambda_{11} + d_2 \lambda_2 \Lambda_{22} + d_3 \lambda_3 \Lambda_{33} + \\ + b_1 (\lambda_2 \Lambda_{21} + \lambda_3 \Lambda_{31}) + b_2 (\lambda_1 \Lambda_{12} + \lambda_3 \Lambda_{32}) + b_3 (\lambda_1 \Lambda_{13} + \lambda_2 \Lambda_{23}) - \\ - \frac{3\pi}{4} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \frac{\pi}{4} \lambda_0 \mu \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Дальнейшие преобразования позволяют проделать формулы (4.92), (4.95), а также соотношение

$$\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_1 + \lambda_0 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1,$$

имеющее место для наших сигнатур. В результате получим очень простую формулу

$$\mathfrak{A}'' = -\mu \left( W - \frac{5\pi}{4} \right) - \lambda_0 \left( Q_0 - \frac{3\pi}{4} \right), \quad (4.104)$$

где

$$Q_0 = d_1 \Lambda_{01} + d_2 \Lambda_{02} + d_3 \Lambda_{03}, \quad (4.105)$$

$$W = d_1 Z_1 + d_2 Z_2 + d_3 Z_3 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3. \quad (4.106)$$

Величина  $W$  особенно примечательна. Она является суммой произведений длин всех шести ребер нашего тетраэдра  $ABCD$  на соответствующие двугранные углы этого тетраэдра, опирающиеся на эти ребра.

Объединяя формулы (4.102) и (4.104), окончательно получаем

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' = -\mu \left( W - \frac{5\pi}{4} \right) - \lambda_0 \left( P_0 + Q_0 - \frac{3\pi}{4} \right). \quad (4.107)$$

Восстанавливая опущенный индекс  $s=a, b$  и замечая, что  $\lambda_{0a}\mu_a = 1$  и  $\lambda_{0b}\mu_b = -1$ , получаем

$$I \cong (-1)^z \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_{\text{про}}} \frac{1}{\sqrt{12\pi V}} \cos \left( P_0 + Q_0 - \frac{3\pi}{4} \right) \cos \left( W - \frac{5\pi}{4} \right), \quad (4.108)$$

где  $z = l_1 + l_2 + l_3$ . Вспоминая формулы (4.1), (4.4) и (3.120), отсюда непосредственно приходим к следующей окончательной приближенной формуле для  $bj$ -символа:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\} \cong (-1)^y \frac{1}{\sqrt{12\pi V}} \cos \left( W - \frac{5\pi}{4} \right), \quad (4.109)$$

где  $y = j_1 + j_2 + j_3 + l_1 + l_2 + l_3$ . Эта асимптотическая формула исключительно проста.

Перед тем как приступить к решению ряда конкретных задач одномерной квазиклассики, остановимся на общих положениях квантовомеханического квазиклассического приближения для одномерного уравнения Шредингера.

Будем искать решение одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + u(x) \psi = E \psi \quad (1)$$

в виде

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (2)$$

Подставляя последнюю формулу в уравнение Шредингера (1), получим

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{i}{\hbar} \frac{dS}{dx} e^{\frac{i}{\hbar} S},$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{1}{\hbar^2} \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 e^{\frac{i}{\hbar} S} + \frac{i}{\hbar} \frac{d^2S}{dx^2} e^{\frac{i}{\hbar} S},$$

так что для величины  $S$  имеем уравнение

$$\frac{1}{2\mu} \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 - \frac{i\hbar}{2\mu} \frac{d^2S}{dx^2} = E - u(x), \quad (3)$$

решение которого будем искать в виде ряда по степеням малого параметра  $\hbar/i$ :

$$S = S_0 + \frac{\hbar}{i} S_1 + \dots \quad (4)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (3), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dS_0}{dx} + \frac{\hbar}{i} \frac{dS_1}{dx} + \dots \right)^2 - \\ & - \frac{i\hbar}{2\mu} \left( \frac{d^2S_0}{dx^2} + \frac{\hbar}{i} \frac{d^2S_1}{dx^2} + \dots \right) = E - u(x), \end{aligned}$$

из которого с необходимостью следует, что в нулевом порядке нужно потребовать, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\frac{1}{2\mu} \left( \frac{dS_0}{dx} \right)^2 = E - u(x), \quad (5)$$

в первом порядке малости — чтобы удовлетворялось уравнение

$$\frac{dS_1}{dx} \frac{dS_0}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2S_0}{dx^2} = 0, \quad (6)$$

и т. д.

Решая уравнение нулевого приближения (5), находим без труда  $S_0$ . Извлекая из (5) квадратный корень, имеем

$$\frac{dS_0}{dx} = \pm \sqrt{2\mu(E - u(x))}.$$

Так как  $E = u(x) + p^2(x)/2\mu$ , то для классического импульса частицы имеем следующее выражение:  $p(x) = \sqrt{2\mu(E - u(x))}$ . Таким образом, уравнение для  $S_0$  можно записать проще:

$$\frac{dS_0}{dx} = \pm p(x)$$

и, разрешая последнее уравнение, окончательно получить

$$S_0 = \pm \int^x p(x) dx. \quad (7)$$

Интегрирование здесь ведется от произвольного нижнего предела, который характеризует имеющуюся в задаче произвольную постоянную интегрирования. (Можно было бы, очевидно, с таким же успехом писать  $S_0 = \pm \int_x^x p(x) dx$ , считая, что произвольная постоянная интегрирования входит в неопределенный верхний предел интеграла.)

Зная выражение для  $S_0$ , из уравнения первого приближения (6) находим  $S_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dx} (\pm p(x)) + \frac{1}{2} \left( \pm \frac{dp(x)}{dx} \right) &= 0, \\ \frac{dS_1}{dx} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{p(x)} \frac{dp(x)}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln p(x), \\ S_1 &= -\frac{1}{2} \ln p(x) + C, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $C$  — произвольная постоянная интегрирования. Таким образом, для волновой функции имеем приближенную формулу

$$\psi = C_1 e^{\frac{i}{\hbar} \int^x p(x) dx - \frac{1}{2} \ln p(x)} + C_2 e^{-\frac{i}{\hbar} \int^x p(x) dx - \frac{1}{2} \ln p(x)} =$$

$$= \frac{C_1}{\sqrt{p(x)}} e^{\frac{i}{\hbar} \int^x p(x) dx} + \frac{C_2}{\sqrt{p(x)}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int^x p(x) dx}, \quad (9)$$

в которой  $C_1, C_2$  — константы.

Представление решения в таком виде удобно, когда рассматриваются области одномерного пространства, в которых сосредоточено движение классической частицы с энергией  $E$ , ибо для них  $E \geq u(x)$ , а следовательно, импульс  $p(x)$  действителен. Для областей одномерного пространства, запрещенных для классической частицы с энергией  $E$ , т. е. там, где  $E < u(x)$   $p(x)$  становится чисто мнимым, удобнее пользоваться приближенным выражением для  $\psi$ . Получается оно следующим образом. Заметим, что в классически недоступной области  $p(x) = i|p(x)|$ , где  $|p(x)| = \sqrt{2\mu(u(x) - E)}$ . Тогда вместо формулы (9) имеем формулу

$$\psi = \frac{C'_1}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int^x |p(x)| dx} + \frac{C'_2}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int^x |p(x)| dx}, \quad (10)$$

в которой  $C'_1, C'_2$  — константы.

Посмотрим теперь, при каких условиях описанный приближенный квазиклассический метод эффективен. Вероятно, он годится тогда, когда

$$\frac{\hbar}{2\mu} \left| \frac{d^2 S_0}{dx^2} \right| \ll |E - u(x)|,$$

т. е. когда выполняется условие

$$\frac{\hbar}{2\mu} \left| \frac{dp(x)}{dx} \right| \ll \frac{p^2(x)}{2\mu},$$

из которого непосредственно следует, что

$$\left| \frac{dp(x)}{dx} \right| \ll \frac{p^2(x)}{\hbar}.$$

Ввиду того что

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{2\mu(E - u(x))} = -\frac{\mu}{p} \frac{du}{dx} = \frac{\mu F}{p},$$

где  $F$  — сила, действующая на частицу в точке  $x$ , имеем

$$\frac{\mu |F|}{|p|} \ll \frac{p^2}{\hbar}, \quad \frac{\mu \hbar |F|}{|p|^3} \ll 1. \quad (1)$$

Условие (11) означает, что поле в одномерных областях, где справедливо квазиклассическое решение для частицы с фиксированной энергией  $E$ , должно достаточно медленно меняться от точки к точке. Оно показывает также, что в областях, в которых классический импульс  $p$  мал, квазиклассическое приближение становится неприменимым; оно заведомо непригодно, таким образом, вблизи классических «точек возврата», определяемых из условия  $u(x) = E$ , потому что в их окрестностях  $p(x) = \sqrt{2\mu(E - u(x))} \cong 0$ . Только что выведенному условию (11) можно придать другую форму. Очевидно,

$$\frac{\hbar}{2\mu} \left| \frac{dS_0}{dx^2} \right| \ll \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dS_0}{dx} \right)^2.$$

Следовательно,

$$\hbar \left| \frac{d^2 S_0}{dx^2} \right| \left| \frac{dS_0}{dx} \right|^{-1} \ll 1, \quad \hbar \frac{d}{dx} \left| \frac{dS_0}{dx} \right|^{-1} \ll 1,$$

т. е.

$$\left| \frac{d}{dx} \left( \frac{\hbar}{p} \right) \right| \ll 1, \quad \left| \frac{d}{dx} \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right) \right| \ll 1, \quad (12)$$

где  $\lambda = \hbar/p$  — де-бройлевская длина волны частицы. Де-бройлевская длина волны частицы  $\lambda$  должна мало меняться при переходе от одного узла волны (или пучности) к другому.

Итак, квазиклассический метод отыскания решений одномерного уравнения Шредингера непосредственно неприменим для нахождения решений в области (или областях), включающей (или включающих) точку (или точки) возврата, так как вблизи точек возврата он теряет силу. Для решения подобных задач требуются более тонкие рассуждения.

**Задача 1.** Найти для области, включающей точку возврата, такое решение одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + u(x) \psi = E \psi, \quad (13)$$

которое переходило бы слева от точки возврата в квазиклассическое решение

$$\frac{C}{\sqrt{p}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int^a p dx} \quad (14)$$

Поведение потенциальной функции  $u(x)$  вблизи точки возврата показано на рис. 20.

Решение. Будем для определенности решать первую частную задачу, когда слева от точки возврата решение бе-

$$-\frac{i}{\hbar} \int_x^a p dx$$

рется в виде  $e^{\dots}$ . Таким образом, по предположению, слева от точки  $x=a$  (за исключением близкой окрестности точки  $x=a$ ) волновая функция имеет вид

$$\frac{C}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^a p dx}. \quad (15)$$

Это приближенное квазиклассическое решение. Справа от точки  $x=a$  (также за исключением близкой окрестности точки  $x=a$ ) эта же самая волновая функция должна иметь вид

$$\frac{C_1}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx} + \frac{C_2}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx}. \quad (16)$$

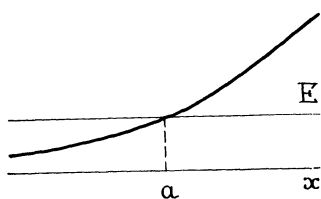


Рис. 20. Поведение потенциальной функции  $u(x)$  вблизи точки возврата в задаче 1

Такой вид тоже получается из квазиклассического приближения, (см. (10)). Так как функции (15) и (16) — представления одного и того же решения одномерного уравнения Шредингера, мы не можем считать постоянные  $C$ ,  $C_1$  и  $C_2$  независимыми друг от друга. Ниже покажем, что постоянные  $C_1$  и  $C_2$  однозначно выражаются через постоянную  $C$ . Чтобы выяснить связь  $C_1$  и  $C_2$  с  $C$ , необходимо произве-

сти «сшивание» формул (15) и (16) в точке  $x=a$ .

Для «сшивания» напишем в явном виде точное решение одномерного уравнения Шредингера вблизи точки  $x=a$ . Считаем поле в окрестности этой точки строго однородным и получаем, что

$$u(x) = E + \frac{du}{dx}(x-a) = E + |F|(x-a)$$

(так как  $\frac{du}{dx} > 0$ , то  $F = -\frac{du}{dx}$  будет меньше нуля, и для удобства дальнейших рассуждений мы вводим в формулы  $|F|$  вместо  $F$ ). Уравнение Шредингера в окрестности  $x=a$ , таким образом, примет вид

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} |F|(x-a) \psi = 0. \quad (17)$$



Сделаем замену  $\xi = (x - a) \left( \frac{2\mu |F|}{\hbar^2} \right)^{1/3}$ . Тогда будем иметь

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi\psi = 0, \quad (18)$$

так называемое дифференциальное уравнение Эйри.

Нам требуется отыскать такое решение уравнения (18), которое при  $\xi \rightarrow -\infty$  (что соответствует области слева от точки  $x = a$ ) имело бы асимптотический вид, совпадающий с (15), если только в этом последнем выражении сделать замену  $x$  на  $\xi$ , что дает

$$\frac{C}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^a p dx} = \frac{C}{(2\mu |F| \hbar)^{1/6} |\xi|^{1/4}} e^{-i \frac{2}{3} |\xi|^{3/2}}. \quad (19)$$

Вопрос о существовании такого решения остается пока что открытым.

Приступим к отысканию нужного нам решения. Будем его искать в виде контурного интеграла

$$\psi(\xi) = \int_L e^{\xi z} \Psi(z) dz. \quad (20)$$

Подставляя этот интеграл в уравнение Эйри, получим

$$\int_L e^{\xi z} \Psi(z) z^2 dz - \int_L \xi e^{\xi z} \Psi(z) dz = 0.$$

Интегрируя по частям второй интеграл в этом соотношении, придем окончательно к формуле

$$\int_L e^{\xi z} \left( z^2 \Psi(z) + \frac{d\Psi(z)}{dz} \right) dz - e^{\xi z} \Psi(z) \Big|_L = 0.$$

Для того чтобы она была справедливой, достаточно потребовать: а) чтобы функция  $\Psi(z)$  удовлетворяла уравнению  $\Psi z^2 + \frac{d\Psi}{dz} = 0$  и б) чтобы путь  $L$  был выбран таким образом, чтобы  $\Psi e^{\xi z} \Big|_L = 0$ . Уравнение для  $\Psi(z)$  решается без затруднений, так как переменные в нем разделяются. Решением будет функция  $\Psi = C e^{-z^3/3}$ . Путь  $L$ , таким образом, должен быть выбран таким, чтобы он удовлетворял условию

$$e^{\xi z - \frac{z^3}{3}} \Big|_L = 0. \quad (21)$$

Рассмотрим величину

$$\left| e^{\xi z - \frac{z^3}{3}} \right| e = e^{\xi \operatorname{Re} z - \frac{1}{3} \operatorname{Re} z^2} = e^{\xi r \cos \varphi - \frac{r^3}{3} \cos 3\varphi}$$

(здесь положено  $z = re^{i\varphi}$ ). Для того чтобы функция  $e^{\xi z - z^3/3}$  на концах пути  $L$  обращалась в нуль, достаточно потребовать, чтобы путь  $L$  уходил в бесконечность, таким образом, чтобы выполнялось условие  $\cos 3\varphi > 0$ , ибо тогда  $\xi r \cos \varphi - \frac{r^3}{3} \cos 3\varphi \rightarrow -\infty$  при  $r \rightarrow \infty$ , когда  $\cos 3\varphi > 0$ .

Исследуем знак  $\cos 3\varphi$  при различных углах

$-\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2} < 3\varphi < +\frac{\pi}{2}$	$\oplus$
$\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < 3\varphi < \frac{3\pi}{2}$	$\ominus$
$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2} < 3\varphi < \frac{5\pi}{2}$	$\oplus$
$\frac{5\pi}{6} < \varphi < \frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2} < 3\varphi < \frac{7\pi}{2}$	$\ominus$
$\frac{7\pi}{6} < \varphi < \frac{9\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{2} < 3\varphi < \frac{9\pi}{2}$	$\oplus$

Графически результаты этого простого исследования представлены на рис. 21. Путь  $L$ , следовательно, надо выбирать так, чтобы его концы уходили в бесконечность, все время оставаясь в заштрихованных областях.

Оказывается, если взять путь  $L$  таким, как это показано на рис. 21, то соответствующее ему частное решение уравнения Эйри

$$\psi(\xi) = C' \int_L e^{\xi z - \frac{z^3}{3}} dz \quad (22)$$

будет иметь при  $\xi \rightarrow -\infty$  требуемую асимптотику (19). Действительно, найдем асимптотику контурного интеграла при  $\xi \rightarrow -\infty$ , воспользовавшись известным *методом перевала*. Прежде всего перейдем в (22) к новой переменной интегрирования  $z = |\xi|^{1/2} \zeta$ . Тогда получим интеграл

$$\psi(\xi) = C' |\xi|^{1/2} \int_i e^{|\xi|^{3/2} \left(-\zeta - \frac{\zeta^3}{3}\right)} d\zeta. \quad (23)$$

Определим в согласии с методом перевала так называемые седловые точки для последнего интеграла:

$$\frac{d}{d\zeta} \left( -\zeta - \frac{\zeta^3}{3} \right) = -1 - \zeta^2 = 0, \quad \zeta = \pm i.$$

Найдем кроме того путь, который проходил бы через седловую точку и вдоль которого выполнялось бы условие  $\operatorname{Im}\left(-\zeta - \frac{\zeta^3}{3}\right) = \text{const}$ , которое требует теория метода перевала. Нетрудно проверить, что для седловой точки  $\zeta = i$  таким путем будет кривая, уравнение которой имеет вид

$$-y - x^2y - \frac{y^3}{3} = -\frac{2}{3}$$

или следующий немного более удобный вид

$$x^2 = \frac{(y-1)^2(y+2)}{3y}$$

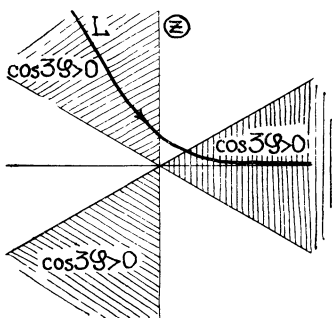


Рис. 21. Области положительных значений  $\cos 3\varphi$  и выбор пути интегрирования  $L$  в контурном интеграле

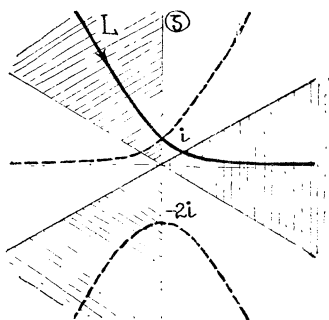


Рис. 22. Кривая  $\operatorname{Im}\left(-\zeta - \frac{\zeta^3}{3}\right) = -\frac{2}{3}$  на комплексной плоскости  $\zeta$  и выбор пути контурного интегрирования  $L$

(мы положили  $\zeta = x + iy$ ). Построим указанную кривую на комплексной плоскости (рис. 22, пунктир и путь  $L$ ). В точке  $\zeta = i$  обе ветви кривой пересекаются с осью ординат под углом  $\pi/4$ . Это является следствием того факта, что

$$\left[ \frac{dx}{dy} \right]_{\zeta=i} = \left[ \pm \frac{y^2 + y + 1}{\sqrt{3} y \sqrt{y^2 + 2y}} \right]_{\zeta=i} = \pm 1.$$

Из рассмотрения поведения кривой  $\operatorname{Im}\left(-\zeta - \frac{\zeta^3}{3}\right) = -\frac{2}{3}$  заключаем, что деформированный согласно методу перевала путь  $L$  следует выбрать таким образом, чтобы он совпадал с одной ее ветвью. Путь  $L$  рассматриваемой кривой показан на рис. 22 сплошной линией.

Как известно из теории метода перевала, основной вклад в контурный интеграл по деформированному пути  $L$  проис-

ходит от отрезка пути, близкого к седловой точке. Вклад от седловой точки  $\zeta=i$  будет

$$\begin{aligned}
 & C' |\xi|^{1/2} \int_{i-\varepsilon e}^{i+\varepsilon e} e^{-|\xi|^{3/2} \left( \zeta + \frac{\zeta^3}{3} \right)} d\zeta = \\
 & = C' |\xi|^{1/2} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-|\xi|^{3/2} \left[ (i+\alpha e^{-i\frac{\pi}{4}}) + \frac{1}{3} (i+\alpha e^{-i\frac{\pi}{4}})^3 \right]} e^{-i\frac{\pi}{4}} d\alpha \cong \\
 & \cong C' |\xi|^{1/2} e^{-\frac{2}{3} i |\xi|^{3/2} - i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|^{3/2} \alpha^2} d\alpha = \\
 & = \frac{C' \sqrt{\pi}}{|\xi|^{1/4}} e^{-\frac{2}{3} i |\xi|^{3/2} - i\frac{\pi}{4}}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, асимптотика при  $\xi \rightarrow -\infty$  контурного интеграла (22) имеет вид

$$\psi(\xi) \cong \frac{C' \sqrt{\pi}}{|\xi|^{1/4}} e^{-\frac{2}{3} i |\xi|^{3/2} - i\frac{\pi}{4}}. \quad (24)$$

Если выбрать теперь константу  $C'$  такой, чтобы

$$\frac{C}{(2\mu |F| \hbar)^{1/2}} = C' \sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

т. е. положить

$$C' = \frac{C e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi} (2\mu |F| \hbar)^{1/2}}, \quad (25)$$

то асимптотика (22) при  $\xi \rightarrow -\infty$  будет совпадать с асимптотикой (19) при  $\xi \rightarrow -\infty$ , как это требуется.

Теперь рассмотрим асимптотику контурного интеграла (22) в обратном предельном случае при  $\xi \rightarrow +\infty$ . Для этого еще раз воспользуемся методом перевала, сделав, однако, предварительно в интеграле (22) замену переменной интегрирования  $z = \xi^{1/2} \zeta$ , после чего контурный интеграл (22) примет вид

$$\psi(\xi) = C' \xi^{1/2} \int_i e^{\xi^{3/2} \left( \zeta - \frac{\zeta^3}{3} \right)} d\zeta. \quad (26)$$

Найдем седловые точки

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi - \frac{\xi^3}{3} \right) = 1 - \xi^2 = 0, \quad \xi = \pm 1,$$

и путь, который проходил бы через седловую точку и вдоль которого в соответствии с требованием теории метода перевала

$$\operatorname{Im} \left( \xi - \frac{\xi^3}{3} \right) = \text{const.}$$

Для точки  $\xi = +1$  этим путем будет кривая, уравнение которой записывается в виде

$$y - x^2 y + \frac{y^3}{3} = 0.$$

Эта же самая кривая, как нетрудно убедиться, будет проходить и через седловую точку  $\xi = -1$ . Рассматриваемая кривая изображена на рис. 23 пунктиром и путем  $L$ . Деформированный согласно методу перевала путь  $L$  следует выбрать так, как это показано сплошной линией.

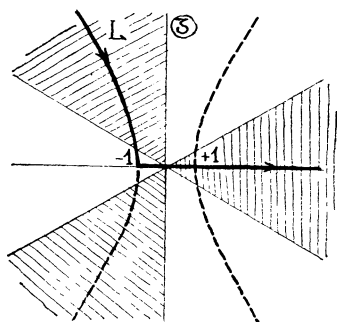


Рис. 23. Кривая  $\operatorname{Im}(-\xi - \xi^3/3) = 0$  на комплексной плоскости  $\xi$  и выбор пути контурного интегрирования  $L$

Вклад в асимптотику контурного интеграла (20) от седловой точки  $\xi = -1$  будет

$$\begin{aligned} & C' \xi^{1/2} \int_{-1+\varepsilon i}^{-1} e^{\xi^{1/2} \left( \xi - \frac{\xi^3}{3} \right)} d\xi = \\ & = C' \xi^{1/2} \int_{-\varepsilon}^0 e^{\xi^{3/2} \left[ -1 - \alpha i - \frac{1}{3}(-1 - \alpha i)^3 \right]} (-i) d\alpha = \\ & = -i C' \xi^{1/2} e^{-\frac{2}{3} \xi^{3/2}} \int_{-\varepsilon}^0 e^{-\xi^{3/2} \alpha^2} d\alpha \cong \frac{-i C' \sqrt{\pi}}{\xi^{1/4} 2} e^{-\frac{2}{3} \xi^{3/2}}; \end{aligned}$$

вклад от седловой точки  $\xi = +1$  равен

$$\begin{aligned} & C' \xi^{1/2} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{\xi^{3/2} \left( \xi - \frac{\xi^3}{3} \right)} d\xi = \\ & = C' \xi^{1/2} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{\xi \left[ (1+\alpha) - \frac{1}{3}(1+\alpha)^3 \right]} d\alpha = \\ & = C' \xi^{1/2} e^{\frac{2}{3} \xi^{3/2}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-\xi^{3/2} \alpha^2} d\alpha \cong \frac{C' \sqrt{\pi}}{\xi^{1/4}} e^{\frac{2}{3} \xi^{3/2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, асимптотическая формула для функции (22), справедливая при  $\xi \rightarrow +\infty$ , будет иметь вид

$$\psi(\xi) \cong -\frac{iC' \sqrt{\pi}}{2\xi^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}\xi^{3/2}} + \frac{C' \sqrt{\pi}}{\xi^{1/4}} e^{\frac{2}{3}\xi^{3/2}}. \quad (27)$$

На первый взгляд, включение в асимптотическую формулу вклада от седловой точки  $\zeta = -1$  малооправданно, так как он лежит в пределах ошибок асимптотического метода. Однако нам представляется целесообразным сохранить в асимптотической формуле (27) наряду с вкладом от седловой точки  $\zeta = +1$  вклад от седловой точки  $\zeta = -1$ , так как вклад от седловой точки  $\zeta = +1$  сопровождается множителем  $i$ . Полученная асимптотическая формула для  $\xi \rightarrow +\infty$  должна совпадать с асимптотикой квазиклассической приближенной волновой функции справа от точки  $x = a$ . Возьмем формулу (16), сделаем в ней замену  $x$  на  $\xi$  и устремим  $\xi$  к нулю, после чего получим

$$\psi(\xi) = \frac{C_1}{(2\mu |F| \hbar)^{1/6} \xi^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}\xi^{3/2}} + \frac{C_2}{(2\mu |F| \hbar)^{1/6} \xi^{1/4}} e^{\frac{2}{3}\xi^{3/2}}. \quad (28)$$

Сравнивая эту последнюю формулу с полученной выше асимптотической формулой (27), получим в качестве условий совпадения этих формул соотношения

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{(2\mu |F| \hbar)^{1/6} \xi^{1/4}} &= -\frac{iC'}{2} \sqrt{\pi} = -i \frac{C e^{i\frac{\pi}{4}}}{2(2\mu |F| \hbar)^{1/2}}, \\ \frac{C_2}{(2\mu |F| \hbar)^{1/6}} &= C' \sqrt{\pi} = \frac{C e^{i\frac{\pi}{4}}}{(2\mu |F| \hbar)^{1/6}}. \end{aligned} \quad (29)$$

из которых непосредственно следует, что

$$C_1 = e^{-\frac{i\pi}{4}} \frac{C}{2}, \quad C_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} C. \quad (30)$$

Итак, приходим к следующему окончательному результату. Решение одномерного уравнения Шредингера, которое слева от точки возврата переходит в квазиклассическое решение

$$\frac{iC}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^a p dx}, \quad (31)$$

справа от точки возврата представляется формулой

$$\frac{Ce^{-\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx} + \frac{Ce^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx} \quad (32)$$

Взяв комплексно сопряженные формулы, получим решение нашей второй частной задачи. Квазиклассическое решение, которое слева от точки возврата  $x=a$  имеет вид

$$\frac{C}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^a p dx}, \quad (33)$$

справа от точки возврата будет даваться формулой

$$\frac{Ce^{\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx} + \frac{Ce^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx} \quad (34)$$

Ответ.

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^a p dx} \quad (x < a),$$

$$\psi = \frac{Ce^{-\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx} + \frac{Ce^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx} \quad (x > a),$$

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^a p dx} \quad (x < a),$$

$$\psi = \frac{Ce^{\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx} + \frac{Ce^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx} \quad (x > a).$$

**Задача 2.** Найти для области, включающей точку возврата, такое решение одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - u(x) \psi = E \psi, \quad (35)$$

которое переходило бы слева от точки возврата в квазиклассическое решение

$$\frac{C}{\sqrt{|p|}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx} \quad (36)$$

Поведение потенциальной функции  $u(x)$  вблизи точки возврата показано на рис. 24.

Решение. Решение этой задачи почти полностью аналогично решению задачи 1. Так же, как и там, необходимо произвести «сшивание» квазиклассических решений справа и слева от точки  $x=a$  посредством асимптотических формул для однородного поля, каковым мы считаем заданное поле  $u(x)$  вблизи точки возврата  $x=a$ .

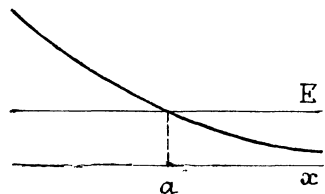


Рис. 24. Поведение потенциальной функции  $u(x)$  вблизи точки возврата в задаче 2

Уравнение Шредингера вблизи точки возврата  $x=a$ , таким образом, имеет вид

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} F(x-a) \psi = 0. \quad (37)$$

После замены  $\xi = -(x-a) \left( \frac{2\mu F}{\hbar^2} \right)^{1/3}$  из него получим дифференциальное уравнение Эйри

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - \xi \psi = 0. \quad (38)$$

Необходимо найти такие решения уравнения (38), которые бы при  $\xi \rightarrow +\infty$  (что соответствует области слева от точки  $x=a$ ) имели бы асимптотический вид

$$\frac{C}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx} = \frac{C}{(2\mu F \hbar)^{1/6} \xi^{1/4}} e^{-\frac{2}{3} \xi^{3/2}}, \quad (39)$$

$$\frac{C}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx} = \frac{C}{(2\mu F \hbar)^{1/6} \xi^{1/4}} e^{\frac{2}{3} \xi^{3/2}}. \quad (39')$$

Такие решения представляются контурными интегралами

$$\psi(\xi) = C' \int_{L_1} e^{\xi z - \frac{z^3}{3}} dz, \quad (40)$$

$$\psi(\xi) = C' \int_{L_2} e^{\xi z - \frac{z^3}{3}} dz. \quad (40')$$

Пути  $L_1$  и  $L_2$  следует выбрать так, как это показано на рис. 25. (Путь  $L_2$  состоит из двух ветвей  $L_2 = L_2' \dots L_2''$ .)

Для того чтобы убедиться в правильности только что сделанного утверждения, найдем асимптотические формулы для (40) и (40') при  $\xi \rightarrow +\infty$ . Воспользуемся снова мето-



дом перевала, сделав предварительно замену переменной интегрирования  $z = \xi^{1/2} \zeta$  в интегралах (40) и (40'). Получим соответственно

$$\psi(\xi) = C' \xi^{1/2} \int_{L_1} e^{\xi^{3/2} \left( \zeta - \frac{\zeta^3}{3} \right)} d\zeta, \quad (41)$$

$$\psi(\xi) = C' \xi \int_{L_2} e^{\xi^{3/2} \left( \zeta - \frac{\zeta^3}{3} \right)} d\zeta. \quad (41')$$

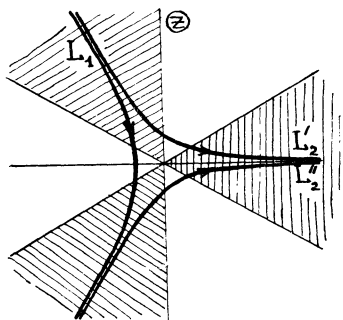


Рис. 25. Выбор путей контурного интегрирования  $L_1$  и  $L_2$  (две ветви  $L'_2, L''_2$ ) для контурных интегралов

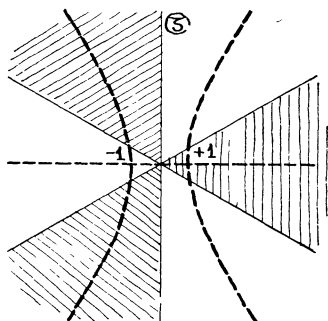


Рис. 26. Кривая  $\text{Im} \left( \zeta - \frac{\zeta^3}{3} \right) = 0$  на комплексной плоскости  $\zeta$

Седловые точки приведенных интегралов следующие:

$$\frac{d}{d\zeta} \left( \zeta - \frac{\zeta^3}{3} \right) = 1 - \zeta^2 = 0, \quad \zeta = \pm 1.$$

Кривая, для которой  $\text{Im} \left( \zeta - \frac{\zeta^3}{3} \right) = 0$ , показана на рис. 26. Деформированные согласно методу перевала путь  $L_1$  и соответственно путь  $L_2$  надо выбрать так, как это показано на рис. 27.

Для интеграла (41), берущегося по пути  $L_1$ , получим асимптотическую формулу

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &\cong C' \xi^{1/2} \int_{-1+i\epsilon}^{-1-i\epsilon} e^{\xi^{3/2} \left[ (-1-i\alpha) - \frac{1}{3} (-1-i\alpha)^3 \right]} (-i) d\alpha \cong \\ &\cong -i C' \xi^{1/2} e^{-\frac{2}{3} \xi^{3/2}} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} e^{-\alpha^2 \xi^{3/2}} d\alpha \cong -\frac{i C' \sqrt{\pi}}{\xi^{1/4}} e^{-\frac{2}{3} \xi^{3/2}}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученный результат с требующейся асимптотической формулой (39), видим, что он совпадает с ней, если только положить

$$\frac{C}{(2\mu F \hbar)^{1/6}} = -iC' \sqrt{\pi}. \quad (42)$$

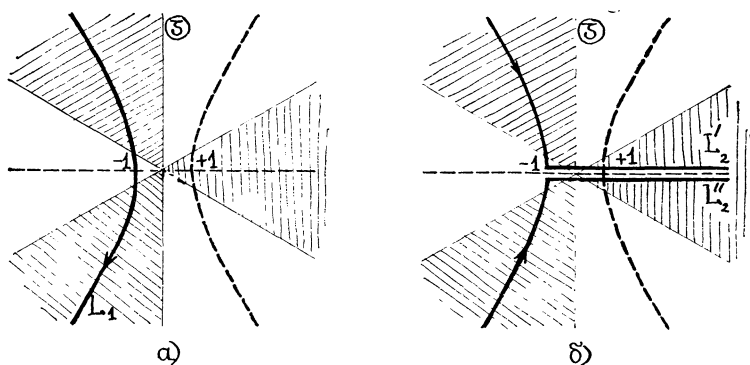


Рис. 27. Выбор путей контурного интегрирования

Получим теперь асимптотическую формулу для интеграла (40'), берущегося по пути  $L_2 = L_2' + L_2''$ :

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &\cong C' \xi^{1/2} \int_{-1+i\varepsilon}^0 e^{\xi^{3/2} \left[ (-1-i\alpha) - \frac{1}{3} (-1-i\alpha)^3 \right]} (-i) d\alpha + \\ &+ C' \xi^{1/2} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{\xi^{3/2} \left[ (1+\alpha) - \frac{1}{3} (1+\alpha)^3 \right]} d\alpha + \\ &+ C' \xi^{1/2} \int_{-1-i\varepsilon}^0 e^{\xi^{3/2} \left[ (-1+i\alpha) - \frac{1}{3} (-1+i\alpha)^3 \right]} i d\alpha + \\ &+ C' \xi^{1/2} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{\xi^{3/2} \left[ (1+\alpha) - \frac{1}{3} (1+\alpha)^3 \right]} d\alpha \cong \\ &\cong -iC' \xi^{1/2} e^{-\frac{3}{2} \xi^{3/2}} \int_{-\infty}^0 e^{-\xi^{3/2} \alpha^2} d\alpha + \\ &+ iC' \xi^{1/2} e^{-\frac{2}{3} \xi^{3/2}} \int_{-\infty}^0 e^{-\xi^{3/2} \alpha^2} d\alpha + \end{aligned}$$

$$2C' \xi^{1/2} e^{\frac{2}{3} \xi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^{3/2} \alpha^2} d\alpha = \frac{2C' \sqrt{\pi}}{\xi^{1/4}} e^{\frac{2}{3} \xi^{3/2}}.$$

Сравнивая получаемый результат с требуемой асимптотической формулой (39'), убеждаемся в их тождественности при условии, что

$$\frac{C}{(2\mu F\hbar)^{1/6}} = 2C' \sqrt{\pi}. \quad (42')$$

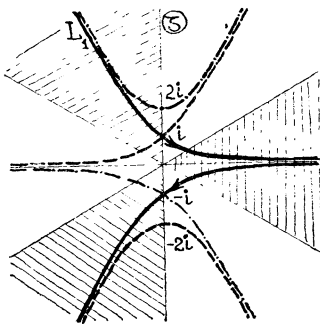
Найдем теперь асимптотические формулы для интегралов (40) и (40') справа от точки возврата  $x=a$ , т. е. при  $\xi \rightarrow -\infty$ . Воспользуемся снова методом перевала, сделав теперь предварительно в указанных интегралах замену переменной интегрирования  $z = |\xi|^{1/2} \zeta$ . После этого наши интегралы примут вид

$$\psi(\xi) = C' |\xi|^{1/2} \int_{L_1} e^{|\xi|^{3/2} \left(-\zeta - \frac{\zeta^3}{3}\right)} d\zeta, \quad (43)$$

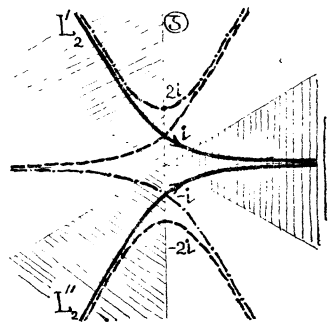
$$\psi(\xi) = C' |\xi|^{1/2} \int_{L_2} e^{|\xi|^{3/2} \left(-\zeta - \frac{\zeta^3}{3}\right)} d\zeta. \quad (43')$$

Находим седловые точки

$$\frac{d}{d\zeta} \left(-\zeta - \frac{\zeta^3}{3}\right) = -1 - \zeta^2 = 0, \quad \zeta = \pm i.$$



а)



б)

Рис. 28. Выбор путей контурного интегрирования

Деформированный согласно методу перевала путь  $L_1$ , соответственно  $L_2$ , надо выбрать так, как показано на рис. 28.

Асимптотическая формула для интеграла (43) имеет вид

$$\begin{aligned}
\psi(\xi) &\cong C' |\xi|^{1/2} \int_{i-\epsilon e}^{i+\epsilon e} e^{-i\frac{\pi}{4}} |\xi|^{3/2} \left[ -(i+\alpha e)^{-i\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3} (i+\alpha e)^{-i\frac{\pi}{4}} \right] e^{-i\frac{\pi}{4}} d\alpha + \\
&+ C' |\xi|^{1/2} \int_{-i-\epsilon e}^{-i+\epsilon e} e^{-i\frac{3\pi}{4}} |\xi|^{3/2} \left[ -(-i+\alpha e)^{-i\frac{3\pi}{4}} - \frac{1}{3} (-i+\alpha e)^{-i\frac{3\pi}{4}} \right] e^{-i\frac{3\pi}{4}} d\alpha \cong \\
&\cong C' e^{-i\frac{\pi}{4}} |\xi|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{2}{3} i|\xi|^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 |\xi|^{3/2}} d\alpha + \\
&+ C' e^{-i\frac{3\pi}{4}} |\xi|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{3} i|\xi|^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 |\xi|^{3/2}} d\alpha = \\
&= \frac{C' e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi}}{|\xi|^{1/4}} e^{-\frac{2}{3} i|\xi|^{3/2}} + \frac{C' e^{-i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\pi}}{|\xi|^{1/4}} e^{\frac{2}{3} i|\xi|^{3/2}}
\end{aligned} \tag{44}$$

и соответственно асимптотическая формула для интеграла (43') будет

$$\psi(\xi) \cong \frac{C' e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi}}{|\xi|^{1/4}} e^{-\frac{2}{3} i|\xi|^{3/2}} + \frac{C' e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi}}{|\xi|^{1/4}} e^{\frac{2}{3} i|\xi|^{3/2}}. \tag{44'}$$

Необходимо теперь подобрать константы  $C_1$  и  $C_2$  в квазиклассическом выражении для волновой функции, составленным для области справа от точки возврата:

$$\psi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx} + \frac{C_2}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx}, \tag{45}$$

чтобы оно совпадало с (44) и, соответственно, с (44'). Для этого надо заменить в (45)  $x$  на  $\xi$  и устремить  $\xi$  к нулю, после чего из (45) получим

$$\psi(\xi) = \frac{C_1}{(2\mu F\hbar)^{1/6} |\xi|^{1/4}} e^{\frac{2}{3} i|\xi|^{3/2}} + \frac{C_2}{(2\mu F\hbar)^{1/2} |\xi|^{1/4}} e^{-\frac{2}{3} i|\xi|^{3/2}} \tag{46}$$

Чтобы формула (46) совпала с (44), необходимо потребовать, чтобы выполнялись соотношения

$$C'e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\pi} = \frac{C_1}{(2\mu F\hbar)^{1/6}}, \quad [C'e^{-i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{\pi} = \frac{C_1}{(2\mu F\hbar)^{1/6}}, \quad (47)$$

откуда непосредственно имеем

$$C_1 = Ce^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad C_2 = Ce^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (48)$$

Соответственно, чтобы формула (46) совпала с формулой (44'), необходимо, чтобы имели место равенства

$$C'e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\pi} = \frac{C_2}{(2\mu F\hbar)^{1/6}}, \quad C'e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\pi} = \frac{C_1}{(2\mu F\hbar)^{1/6}}, \quad (47')$$

откуда получаем

$$C_1 = \frac{C}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad C_2 = \frac{C}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (48')$$

Ответ.

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x) = \frac{C}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx} \quad (x < a), \\ \psi(x) = \frac{Ce^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx} + \frac{Ce^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx} \quad (x > a), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x) = \frac{C}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx} \quad (x < a), \\ \psi(x) = \frac{Ce^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx} + \frac{Ce^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx} \quad (x > a). \end{array} \right.$$

**Задача 3.** Считая поле потенциальной ямы  $u(x)$  квазиклассическим, найти в этом поле стационарные состояния (рис. 29).

Решение. Слева от точки  $x=a$  решение, даваемое квазиклассическим приближением, имеет вид

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx} + \frac{C'}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx}. \quad (49)$$

Ввиду того что мы ищем решение, удовлетворяющее условию нормировки в бесконечной области, простирающейся от  $x = -\infty$  до  $x = +\infty$ , т. е. заведомо стремящееся при  $x \rightarrow \pm\infty$  к нулю, нам необходимо положить  $C' = 0$ . Таким образом, слева от точки  $x = a$  имеем формулу

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx}. \quad (49a)$$

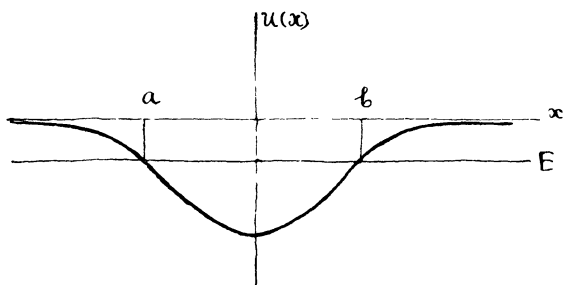


Рис. 29. Потенциальное поле одномерной потенциальной ямы для задачи 3

С этим решением в точке  $x = a$  «сшивается» следующее квазиклассическое решение, имеющееся внутри потенциальной ямы  $a < x < b$  (см. задачу 2):

$$\psi = \frac{Ce^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx} + \frac{Ce^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx}. \quad (50)$$

Нам удобно представить эту формулу несколько в ином виде, а именно в виде

$$\psi = \frac{Ce^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^b p dx} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^b p dx} + \frac{Ce^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^b p dx} e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^b p dx}. \quad (50a)$$

«Сшивание» последней формулы с квазиклассическим решением, имеющимся справа от точки  $x = b$ , дает следующее выражение для последнего (см. задачу 1):

$$\psi = Ce^{-\frac{i\pi}{4}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^b p dx} \left\{ \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} - \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + C e^{i \frac{\pi}{\hbar}} e^{-\frac{i}{4} \int_a^b p dx} \left\{ \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{2 \sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} + \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} \right\} = \\
& = \frac{C}{2 \sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} \left\{ e^{-i \frac{\pi}{2} + \frac{i}{\hbar} \int_a^b p dx} + e^{i \frac{\pi}{2} - \frac{i}{\hbar} \int_a^b p dx} \right\} + \\
& + \frac{C}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} \left\{ e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^b p dx} + e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^b p dx} \right\}. \quad (51)
\end{aligned}$$

Для того чтобы решение  $x \rightarrow \infty$  стремилось к нулю, необходимо потребовать, чтобы

$$e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^b p dx} + e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^b p dx} = 0. \quad (52)$$

т. е. чтобы выполнялось условие

$$\cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) = 0. \quad (52a)$$

Из последнего условия находим следующее условие для нахождения стационарных уровней энергии:

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx = \frac{\pi}{2} + n\pi = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots \quad (52b)$$

Это известное условие квантования Бора.

Ответ. Стационарные уровни энергии в поле потенциальной ямы определяются из условия

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

в котором  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Задача 4.** Считая поле потенциального барьера  $u(x)$  квазиклассическим, вычислить коэффициент прохождения  $D$  через потенциальный барьер (рис. 30).

Решение. Слева от точки  $x=a$  берем решение, даваемое квазиклассическим приближением, в виде уходящей волны

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^a p dx} . \quad (53)$$

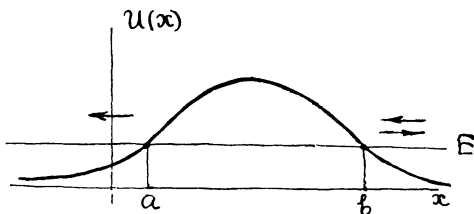


Рис. 30. Поле одномерного потенциально-го барьера в задаче 4

Продолженное внутрь потенциального барьера это решение будет иметь вид (см. задачу 1)

$$\psi = \frac{Ce^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} + \frac{Ce^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx} , \quad (54)$$

или в другой форме

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{Ce^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^b |p| dx} + \\ & + \frac{Ce^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx} . \end{aligned} \quad (54a)$$

«Сшивание» последнего решения с квазиклассическим решением, имеющимся справа от точки  $x=b$ , дает следующее выражение для этого последнего (см. задачу 2):

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{C}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_b^x p dx} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_b^x p dx} \right\} + \\ & + Ce^{-i\frac{\pi}{4}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_b^x p dx} + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx} \right\} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{C}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_b^x p dx} \left\{ \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} + e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} \right\} + \\
 &+ \frac{C}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_b^x p dx} \left\{ \frac{1}{4} e^{i \frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} - e^{-i \frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} \right\}. \quad (55)
 \end{aligned}$$

Отсюда для коэффициента прохождения через потенциальный барьер выводим выражение

$$D = \left| \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} + e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} \right|^{-2} \cong e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p| dx}. \quad (56)$$

Ответ. Коэффициент прохождения через потенциальный барьер вычисляется по формуле

$$D = e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p| dx}.$$

Задача 5. Считая поле  $u(x)$ , изображенное на рис. 31, квазиклассическим, найти имеющиеся в нем квазистационарные уровни энергии. Определить ширины квазистационарных уровней.

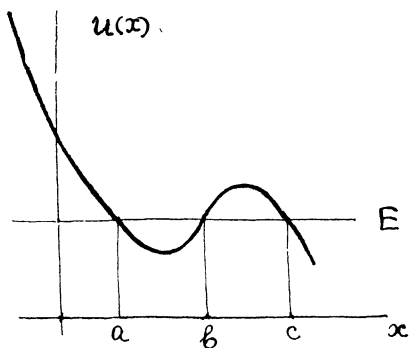


Рис. 31. Поле, имеющее квазистационарные уровни энергии, в задаче 5

Решение. При  $x < a$  имеем приближенную формулу

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx}. \quad (57)$$

Квазиклассическое решение выбираем именно таким образом, чтобы оно при  $x \rightarrow -\infty$  убывало и удовлетворяло условию нормировки. При  $a < x < b$  квазиклассическое решение имеет вид (см. задачу 2)

$$\psi = \frac{C e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx} + \frac{C e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx}, \quad (58)$$

или в другой форме

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{p}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^b p dx} - \frac{i}{\hbar} \int_x^b p dx - \frac{C}{\sqrt{p}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^b p dx} e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^b p dx} . \quad (58a)$$

При  $b < x < c$  для искомого квазиклассического решения имеем (см. задачу 1):

$$\begin{aligned} \psi &= C e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^b p dx} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} \right\} + \\ &+ C e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^b p dx} \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} \right\} = \\ &= \frac{C}{\sqrt{|p|}} \cos \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} + \\ &+ \frac{2C}{\sqrt{|p|}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} = \\ &= \frac{C}{\sqrt{|p|}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} + \\ &+ \frac{2C}{\sqrt{|p|}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} , \quad (59) \end{aligned}$$

или в более удобной форме

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{C}{\sqrt{|p|}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^c |p| dx} e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^c |p| dx} + \\ &+ \frac{2C}{\sqrt{|p|}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^c |p| dx} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^c |p| dx} . \quad (59a) \end{aligned}$$

Наконец, при  $x > c$  квазиклассическое решение имеет вид (см. задачу 2)

$$\begin{aligned}
 \psi &= C \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^c |p| dx} \times \\
 &\times \left\{ \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{2 \sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_c^x p dx} + \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{2 \sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_c^x p dx} \right\} + \\
 &+ 2C \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^c |p| dx} \times \\
 &\times \left\{ \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_c^x p dx} + \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_c^x p dx} \right\} = \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^c |p| dx - i \frac{\pi}{4}} + \right. \\
 &+ \left. 2 \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^c |p| dx + i \frac{\pi}{4}} \right\} \frac{C}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_c^x p dx} + \\
 &+ \left\{ \frac{1}{2} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^c |p| dx + i \frac{\pi}{4}} + \right. \\
 &+ \left. 2 \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^c |p| dx - i \frac{\pi}{4}} \right\} \frac{C}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_c^x p dx}. \quad (60)
 \end{aligned}$$

Наложим теперь на искомое решение нашей задачи, соответствующее некоторому квазиклассическому уровню, условие, чтобы при  $x \rightarrow +\infty$  оно представляло собой только уходящую в бесконечность волну. Тогда для выполнения этого условия необходимо потребовать, чтобы коэффициент в первой фигурной скобке равнялся нулю:

$$\frac{1}{2} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^c |p| dx - i \frac{\pi}{4}} +$$

$$+ 2 \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^c |p| dx + i \frac{\pi}{4}} = 0, \quad (61)$$

откуда непосредственно имеем условие

$$\operatorname{ctg} \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) = \frac{i}{4} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_b^c |p| dx} \quad (61a)$$

для отыскания квазистационарных уровней энергии.

Считая величину  $e^{-\frac{2}{\hbar} \int_b^c |p| dx}$  малой, отсюда найдем

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx = \frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{i}{4} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_b^c |p| dx}. \quad (61b)$$

Таким образом, условие для определения квазистационарных уровней  $E_0$  и их ширины  $\Gamma$  ( $E = E_0 - i\Gamma$ ) следующее:

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2\mu (E_n^0 - u(x))} dx + \frac{2\mu}{2\hbar} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2\mu (E_n^0 - u(x))}} (-i\Gamma) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{i}{4} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_b^c |p| dx}. \quad (61в)$$

Отсюда сразу получаем условие для определения энергий квазистационарных уровней (условия квантования Бора)

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots \quad (62)$$

и формулу для вычисления ширины

$$\Gamma = \frac{\hbar \omega}{4\pi} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_b^c |p| dx}. \quad (63)$$

Здесь  $\omega$  определяется из условия  $\frac{2\pi}{\omega} = 2\mu \int_a^b \frac{dx}{p}$ . Это угловая частота классических колебаний частицы в яме между точками  $a$  и  $b$ .

Ответ. Условие для определения квазистационарных уровней энергии имеет вид

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi,$$

причем  $n=0, 1, 2, \dots$ . Ширины квазистационарных уровней находятся по формуле

$$\Gamma = \frac{\hbar \omega}{4\pi} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_b^c |p| dx}.$$

**Задача 6.** Считая поле  $u(x)$  (рис. 32) квазиклассическим, найти квазистационарные уровни энергии в этом поле

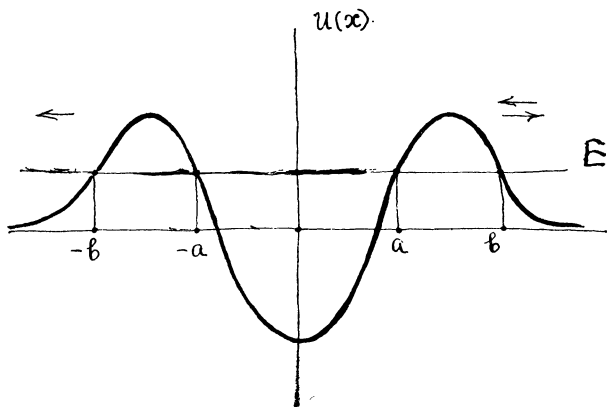


Рис. 32. Симметричное поле, имеющее квазистационарные уровни энергии, в задаче 6

и коэффициент прохождения  $D(E)$  частицы с энергией  $E > 0$  через это поле.

Решение. При  $x < -b$ , по смыслу задачи, имеем лишь уходящую в  $-\infty$  волну, т. е.

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^{-b} p dx} \quad (64)$$

При  $-b < x < -a$  волновая функция имеет вид (см. задачу 1)

$$\psi = \frac{Ce^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{|\rho|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^x |\rho| dx} + \frac{Ce^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\rho|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^x |\rho| dx} \quad (65)$$

или в другой форме

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{Ce^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{|\rho|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^{-a} |\rho| dx} + \\ & + \frac{Ce^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\rho|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{-a} |\rho| dx}. \end{aligned} \quad (65a)$$

При  $-a < x < a$  искомая волновая функция будет (см. задачу 2)

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{C}{2\sqrt{\rho}} e^{i\frac{\pi}{\hbar}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} \left\{ \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-b}^x \rho dx} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^x \rho dx} \right\} + \\ & + \frac{C}{\sqrt{\rho}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^x \rho dx} + e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^x \rho dx} \right\} = \\ = & \frac{C}{\sqrt{\rho}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^x \rho dx} \left\{ \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} + e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} \right\} + \\ & + \frac{C}{\sqrt{\rho}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^x \rho dx} \left\{ \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} + e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} \right\}, \end{aligned} \quad (66)$$

или в более удобной форме

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{C}{\sqrt{\rho}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^a \rho dx} \left\{ \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} + \right. \\ & \left. + e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} \right\} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^a \rho dx} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{C}{\sqrt{\rho}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^a p dx} \left\{ \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} + e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} \right\} e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^a p dx} . \quad (66a)$$

При  $a < x < b$  волновая функция будет иметь следующий вид (см. задачу 1)

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{C}{\sqrt{|\rho|}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^x p dx} \left\{ \frac{1}{4} e^{i \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} + e^{-i \frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2} e^{-i \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\hbar} \int_a^x |\rho| dx} + e^{i \frac{\pi}{4}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^x |\rho| dx} \right\} + \\ &\quad + \frac{C}{\sqrt{|\rho|}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^a p dx} \left\{ \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} + e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2} e^{i \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\hbar} \int_a^x |\rho| dx} + e^{-i \frac{\pi}{4}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^x |\rho| dx} \right\} = \\ &= \frac{C}{\sqrt{|\rho|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^x |\rho| dx} \left\{ \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} e^{i \frac{\pi}{4}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} e^{-i \frac{\pi}{4}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) \right\} + \\ &\quad + \frac{C}{\sqrt{|\rho|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^x |\rho| dx} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} e^{i \frac{\pi}{4}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} e^{-i \frac{\pi}{4}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) \right\}, \quad (67) \end{aligned}$$

или в более удобной форме

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{|\rho|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^b |\rho| dx} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |\rho| dx} \left\{ \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |\rho| dx} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{i \frac{\pi}{4}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) + e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |p| dx} e^{-i \frac{\pi}{4}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) \} + \\
& + \frac{C}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^b |p| dx} e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} \times \\
& \times \left\{ -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |p| dx} e^{i \frac{\pi}{4}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) + \right. \\
& \left. + 2e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} |p| dx} e^{-i \frac{\pi}{4}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) \right\}. \quad (67a)
\end{aligned}$$

Заметим, что благодаря симметрии задачи выполняется условие

$$\int_{-b}^{-a} |p| dx = \int_a^b |p| dx.$$

Наконец, при  $x > b$  волновая функция примет вид (см. задачу 2)

$$\begin{aligned}
\psi = & \frac{C}{\sqrt{p}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} \left\{ \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} e^{i \frac{\pi}{4}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) + \right. \\
& \left. + e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} e^{-i \frac{\pi}{4}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) \right\} \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{2} e^{i \frac{\pi}{4}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_b^x p dx} + \frac{1}{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_b^x p dx} \right\} + \\
& + \frac{C}{\sqrt{p}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_a^b |p| dx} e^{i \frac{\pi}{4}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) + \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + 2e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^b |\rho| dx} e^{-i \frac{\pi}{4}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) \} \times \\
& \times \left\{ e^{-i \frac{\pi}{4}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_b^x p dx} + e^{i \frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_b^x p dx} \right\} = \\
& = \frac{C}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_b^x p dx} \left\{ \frac{1}{8} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |\rho| dx} e^{i \frac{\pi}{2}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) - \frac{1}{2} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) + \\
& + 2e^{\frac{2}{\hbar} \int_a^b |\rho| dx} e^{-i \frac{\pi}{2}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) \} + \\
& + \frac{C}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_b^x p dx} \left\{ \frac{1}{8} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |\rho| dx} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} e^{-i \frac{\pi}{2}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) - \frac{1}{2} e^{i \frac{\pi}{2}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) + \\
& \left. + 2e^{\frac{2}{\hbar} \int_a^b |\rho| dx} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) \right\}. \quad (68)
\end{aligned}$$

Условие, из которого определяются квазистационарные уровни, является требованием того, чтобы приходящая из  $+\infty$  волна отсутствовала. Это обеспечивается, если положить

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |\rho| dx} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) - i \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) + \\
& + 2e^{\frac{2}{\hbar} \int_a^b |\rho| dx} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) = 0, \quad (69)
\end{aligned}$$

или

$$\left( \frac{1}{8} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p| dx} + 2e^{\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p| dx} \right) \operatorname{ctg} \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) = i, \quad (69a)$$

откуда

$$\operatorname{ctg} \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) = i \left( \frac{1}{8} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p| dx} + 2e^{\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p| dx} \right)^{-1}. \quad (69б)$$

Считая  $e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p| dx}$  малой величиной, найдем окончательное условие для определения энергий квазистационарных уровней  $E_0$  и их ширин  $\Gamma$ :

$$\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx = \frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{i}{2} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p| dx}. \quad (69в)$$

Из этого условия получаем условие для определения энергий квазистационарных уровней  $E_0$  и их ширин  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a \sqrt{2\mu(E_n^0 - u(x))} dx + \frac{2\mu}{2\hbar} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{2\mu(E_n^0 - u(x))}} \cdot (-i\Gamma) = \\ = \frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{i}{2} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p| dx}. \end{aligned} \quad (70)$$

Отсюда

$$\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (71)$$

т. е. приходим к условию для энергий квазистационарных уровней (условие квантования Бора). Далее для ширин  $\Gamma$  имеем формулу

$$\Gamma = \frac{\hbar \omega}{2\pi} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p| dx} \quad (72)$$

(где  $\omega$  определяется из условия  $\frac{2\pi}{\omega} = 2\mu \int_{-a}^a \frac{dx}{p}$ ).

Теперь определим коэффициент прохождения  $D(E)$  частицы с энергией  $E > 0$ , налетающей на рассматриваемое поле из  $x = -\infty$ . Очевидно, имеем

$$D(E) = \left| \left( \frac{1}{8} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |\rho| dx} + 2e^{\frac{2}{\hbar} \int_a^b |\rho| dx} \right) \times \right. \\ \left. \times \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) - i \sin \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right|^{-2}. \quad (73)$$

Считая  $e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |\rho| dx}$  очень малой величиной, окончательно находим формулу

$$D(E) = \left[ 4e^{\frac{4}{\hbar} \int_a^b |\rho| dx} \cos^2 \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) + \sin^2 \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) \right]^{-1}. \quad (74)$$

Из этой формулы видим, что при  $E$ , совпадающем с энергией одного из квазистационарных уровней, будем иметь

$$D(E) = 1,$$

так как

$$\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) = 0, \\ \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) = (-1)^n.$$

При такой энергии  $E$  частица беспрепятственно проходит через потенциальный барьер.

При энергиях  $E \approx E_0$  имеем очевидные формулы

$$\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx = \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a \sqrt{2\mu(E_0 + \Delta E - u(x))} dx \cong \\ \cong \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a \sqrt{2\mu(E_0 - u(x))} dx + \frac{2\mu}{2\hbar} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{2\mu(E_0 - u(x))}} \cdot \Delta E = \\ = \frac{\pi}{2} + n\pi + \frac{\pi}{\hbar\omega} \Delta E,$$

$$\cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx\right) \cong (-1)^n \frac{\pi^1}{\hbar \omega} \Delta E,$$

$$\sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx\right) \cong (-1)^n,$$

из которых, замечая, что  $e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p| dx} = \frac{\hbar \omega}{2\pi\Gamma}$ , непосредственно заключаем, что

$$D(E) = \left(4 \frac{\hbar^2 \omega^2}{4\pi^2 \Gamma^2} \frac{\pi^2}{\hbar^2 \omega^2} (\Delta E)^2 + 1\right)^{-1}. \quad (75)$$

Как видно из рис. 33, на котором изображено поведение  $D(E)$  вблизи квазистационарного уровня  $E_0$ ,

$$D(E) = \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (\Delta E)^2}. \quad (76)$$

Величина  $D(E)$  в точке  $E=E_0$  принимает максимальное значение  $D(E)=1$ . «Ширина» кривой  $D(E)$  вблизи максимума находится из условия

$$\frac{1}{2} = \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (\Delta E)^2}, \quad (77)$$

откуда  $\Delta E = \Gamma$ . Таким образом, «ширина» кривой  $D(E)$  вблизи максимума равна  $\Gamma$ .

Ответ. Квазистационарные уровни энергии определяются из условия

$$\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots,$$

их ширины вычисляются по формуле

$$\Gamma = \frac{\hbar \omega}{2\pi} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p| dx}.$$

Коэффициент прохождения

$$D(E) = \left[ 4e^{\frac{4}{\hbar} \int_a^b |p| dx} \cos^2 \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) + \sin^2 \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a p dx \right) \right]^{-1}.$$

**Задача 7.** Поле  $u(x)$  представляет собой две симметричные потенциальные ямы, разделенные барьером (рис. 34). Считая поле  $u(x)$  удовлетворяющим условию квазиклассич-

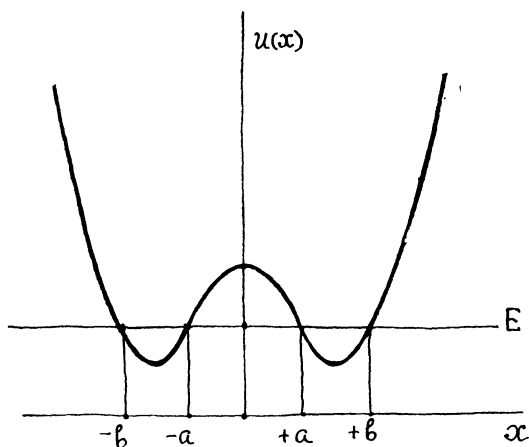


Рис. 34. Поле двойной потенциальной ямы в задаче 7

ности, определить уровни энергии в поле  $u(x)$ . Сравнить полученный энергетический спектр с энергетическим спектром отдельной потенциальной ямы. Найти энергию расщепления.

Решение. При  $x < -b$  имеем

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^{-b} |p| dx} \quad (78)$$

Ввиду того что квазиклассическое решение должно удовлетворять условию нормировки, оно на бесконечности должно обращаться в нуль.

При  $-b < x < -a$  имеем (см. задачу 2) формулу

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{p}} e^{-i \frac{\pi}{4}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-b}^x p dx} + \frac{C}{\sqrt{p}} e^{i \frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-b}^x p dx} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{C}{\sqrt{p}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx} e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^{-a} p dx} + \\
&+ \frac{C}{\sqrt{p}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx} e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^{-a} p dx}. \quad (79)
\end{aligned}$$

При  $-a < x < +a$  имеем (см. задачу 1) формулу

$$\begin{aligned}
\psi &= C e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{|p|}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^x |p| dx} + \right. \\
&+ \left. \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^x |p| dx} \right\} + C e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx} \times \\
&\times \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{|p|}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^x |p| dx} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^x |p| dx} \right\} = \\
&= \frac{C}{\sqrt{|p|}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^x |p| dx} + \\
&+ \frac{2C}{\sqrt{|p|}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx \right) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^x |p| dx} = \\
&= \frac{C}{\sqrt{|p|}} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx} + \\
&+ \frac{2C}{\sqrt{|p|}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx \right) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^{+a} |p| dx}. \quad (80)
\end{aligned}$$

При  $+a < x < +b$  имеем (см. задачу 2), далее, формулу

$$\psi = C \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx} + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx} \right\} + \\
& + 2C \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx} \times \\
& \times \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx} + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx} \right\} = \\
& = \frac{C}{\sqrt{p}} \left\{ \frac{1}{2} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx - i\frac{\pi}{4}} + \right. \\
& + 2 \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx + i\frac{\pi}{4}} \left. \right\} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^{+b} p dx} e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^{+b} p dx} + \\
& + \frac{C}{\sqrt{p}} \left\{ \frac{1}{2} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx + i\frac{\pi}{4}} + \right. \\
& + 2 \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} p dx} \left. \right\} e^{\frac{i}{\hbar} \int_a^{+b} p dx} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^{+b} p dx} \quad (81)
\end{aligned}$$

и при  $x > +b$ , следовательно, имеем (см. задачу 1) формулу

$$\begin{aligned}
\psi & = C \left\{ \frac{1}{2} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx - i\frac{\pi}{4}} + \right. \\
& + 2 \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx + i\frac{\pi}{4}} \left. \right\} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^{+b} p dx} \times \\
& \times \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C \left\{ \frac{1}{2} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx + i \frac{\pi}{4}} + \right. \\
& + 2 \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{-b}^{-a} p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx - i \frac{\pi}{4}} \left. \right\} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{+a}^{+b} p dx} \times \\
& \times \left\{ \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{2 \sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{+b}^x |p| dx} + \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{+b}^x |p| dx} \right\} = \\
& = \frac{C}{\sqrt{|p|}} \left\{ \frac{1}{2} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx} + \right. \\
& + 2 \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx} \left. \right\} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx} + \\
& + \frac{C}{\sqrt{|p|}} \left\{ -\sin^2 \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx} + \right. \\
& \left. + 4 \cos^2 \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx} \right\} e^{\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx}. \quad (82)
\end{aligned}$$

Для того чтобы решение при  $x \rightarrow +\infty$  стремилось к нулю (оно удовлетворяет условию нормировки), необходимо потребовать, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{aligned}
& -\sin^2 \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx} + \\
& + 4 \cos^2 \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) e^{\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx} = 0, \quad (83)
\end{aligned}$$



Из которого получаем условие

$$\operatorname{ctg}^2 \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) = \frac{1}{4} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx}, \quad (83a)$$

или условие

$$\operatorname{ctg} \left( \frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx \right) = \pm \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx}. \quad (83b)$$

Считая  $e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx}$  малой величиной, получаем отсюда

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b p dx = \frac{\pi}{2} + n\pi \pm \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+b} |p| dx}, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots \quad (84)$$

Таким образом, мы нашли условие для определения уровней энергии. Рассматривая это условие, заключаем, что энергетический спектр в поле двойной ямы представляет собой расщепленный надвое спектр одинарной ямы. Определим ширину, или энергию расщепления, уровня  $E_n$ . Ее можно найти из приближенного условия

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2\mu(E_n - u)} dx + \frac{2\mu}{2\hbar} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2\mu(E_n - u)}} \Delta E = \\ = \frac{\pi}{2} + n\pi \pm \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx}, \end{aligned} \quad (85)$$

которое, вводя обозначение

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\mu \int_a^b \frac{dx}{p} = 2\mu \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2\mu(E_n - u)}},$$

можно представить в виде

$$\Delta E = \pm \frac{\hbar \omega}{2\pi} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx}. \quad (86)$$

Энергия расщепления уровней  $\Delta E$  схематически изображена на рис. 35. Расщепление уровня  $E_n$  равно  $2|\Delta E|$ , т. е.

$$2|\Delta E| = \frac{\hbar \omega}{\pi} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx}. \quad (87)$$

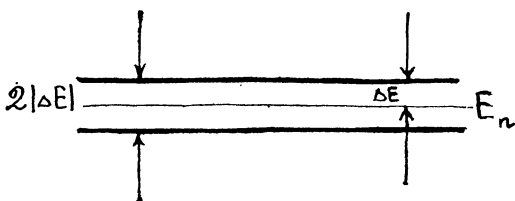


Рис. 35. Расщепление энергетического уровня в двойной потенциальной яме

Ответ. Энергетический спектр представляет собой расщепленный надвое энергетический спектр отдельной ямы. Ширина расщепления равна

$$2|\Delta E| = \frac{\hbar \omega}{\pi} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^{+a} |p| dx}.$$

**Задача 8.** Поле  $u(x)$  представляет собой  $N$  одинаковых потенциальных ям, разделенных одинаковыми потенциальными барьерами (рис. 36). Считая поле  $u(x)$  квазикласси-

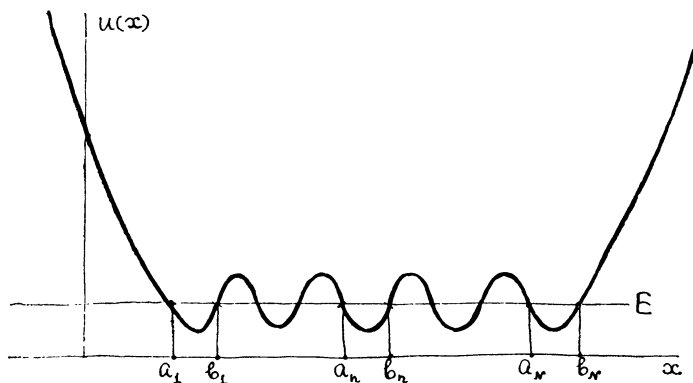


Рис. 36. Поле  $N$  потенциальных ям в задаче 8

ческим, определить уровни энергии в поле  $u(x)$ . Сравнить полученный энергетический спектр с энергетическим спектром отдельной ямы.

Решение. Сначала выведем формулу, связывающую коэффициенты квазиклассического решения внутри  $n$ -го потенциального барьера с коэффициентами решения внутри  $(n+1)$ -го потенциального барьера. Для  $n$ -го потенциального барьера  $b_n < x < a_{n+1}$  имеем

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{C_n}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^x |p| dx} + \frac{D_n}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^x |p| dx} = \\ &= \frac{C_n}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx} e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^{a_{n+1}} |p| dx} + \\ &+ \frac{D_n}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{a_{n+1}} |p| dx}. \end{aligned} \quad (88)$$

Для  $(n+1)$ -й потенциальной ямы  $a_{n+1} < x < b_{n+1}$ , отсюда имеем

$$\begin{aligned} \psi &= C_n e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{a_{n+1}}^x p dx} + \right. \\ &+ \left. \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{a_{n+1}}^x p dx} \right\} - D_n e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx} \times \\ &\times \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{a_{n+1}}^x p dx} + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{p}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{a_{n+1}}^x p dx} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \left\{ \frac{C_n}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx - i\frac{\pi}{4}} + \right. \\ &+ \left. D_n e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx + i\frac{\pi}{4}} \right\} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{a_{n+1}}^x p dx} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left\{ \frac{C_n}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |\rho| dx + i \frac{\pi}{4}} + \right. \\
& \left. + D_n e^{\frac{1}{\hbar} \int_{a_n}^{a_{n+1}} |\rho| dx - i \frac{\pi}{4}} \right\} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{a_{n+1}}^x \rho dx} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left\{ \frac{C_n}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |\rho| dx - i \frac{\pi}{4}} + \right. \\
& \left. + D_n e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |\rho| dx + i \frac{\pi}{4}} \right\} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} \rho dx} e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^{b_{n+1}} \rho dx} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left\{ \frac{C_n}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |\rho| dx + i \frac{\pi}{4}} + \right. \\
& \left. + D_n e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |\rho| dx - i \frac{\pi}{4}} \right\} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} \rho dx} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^{b_{n+1}} \rho dx} . \quad (89)
\end{aligned}$$

Для  $(n+1)$ -го потенциального барьера  $b_{n+1} < x < a_{n+2}$ , будем отсюда иметь

$$\begin{aligned}
\psi = & \left\{ \frac{C_n}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |\rho| dx - i \frac{\pi}{4}} + \right. \\
& \left. + D_n e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |\rho| dx + i \frac{\pi}{4}} \right\} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} \rho dx} \times \\
& \times \left\{ \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{2 \sqrt{|\rho|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_{n+1}}^x |\rho| dx} + \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\rho|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_{n+1}}^x |\rho| dx} \right\} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{C_n}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx + i \frac{\pi}{4}} + \right. \\
& \left. + D_n e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx - i \frac{\pi}{4}} \right\} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} p dx} \times \\
& \times \left\{ \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_{n+1}}^x |p| dx} + \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_{n+1}}^x |p| dx} \right\} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_{n+1}}^x |p| dx} \left\{ \frac{C_n}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} p dx \right) + \right. \\
& \left. + D_n e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} p dx \right) \right\} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_{n+1}}^x |p| dx} \left\{ -C_n e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx} \sin \left( \frac{1}{\hbar} \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} p dx \right) + \right. \\
& \left. + 2D_n e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} p dx \right) \right\}. \quad (90)
\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hbar} \int_{b_1}^{a_2} |p| dx &= \frac{1}{\hbar} \int_{b_2}^{a_3} |p| dx = \dots = \frac{1}{\hbar} \int_{b_{N-1}}^{a_N} |p| dx = \eta, \\
\frac{1}{\hbar} \int_{a_1}^{b_1} p dx &= \frac{1}{\hbar} \int_{a_2}^{b_2} p dx = \dots = \frac{1}{\hbar} \int_{a_N}^{b_N} p dx = \xi,
\end{aligned}$$

тогда предыдущее выражение для волновой функции  $\psi$  преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_{n+1}}^x |p| dx} \left\{ \frac{C_n}{2} e^{-\eta \cos \xi} + D_n e^{\eta \sin \xi} \right\} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_{n+1}}^x |p| dx} \left\{ -C_n e^{-\eta \sin \xi} + 2D_n e^{\eta \cos \xi} \right\} = \\ &= \frac{C_{n+1}}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_{n+1}}^x |p| dx} + \frac{D_{n+1}}{\sqrt{|p|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_{b_{n+1}}^x |p| dx}, \end{aligned} \quad (90a)$$

где

$$\begin{cases} C_{n+1} = \frac{C_n}{2} e^{-\eta \cos \xi} + D_n e^{\eta \sin \xi}, \\ D_{n+1} = -C_n e^{-\eta \sin \xi} + 2D_n e^{\eta \cos \xi}, \end{cases} \quad (91)$$

или в матричной записи

$$\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-\eta \cos \xi} & e^{\eta \sin \xi} \\ -e^{-\eta \sin \xi} & 2e^{\eta \cos \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix}. \quad (92)$$

Получаем формулу, связывающую коэффициенты  $C_n$  и  $D_n$  квазиклассического решения внутри  $n$ -го потенциального барьера с коэффициентами  $C_{n+1}$  и  $D_{n+1}$  решения внутри  $(n+1)$ -го потенциального барьера.

Теперь непосредственно приступим к решению задачи. При  $x < a_1$  имеем

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{|p|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{a_1} |p| dx}. \quad (93)$$

Ввиду условия нормировки волновой функции берем лишь убывающее на бесконечности решение. Для определения коэффициентов  $C_1$  и  $D_1$ , определяющих вид решения в первом потенциальном барьере  $b_1 < x < a_2$ , можно воспользоваться только что выведенной формулой (92), положив в ней

$$C_0 = 0, \quad D_0 e^{\eta} = C. \quad (94)$$

Тогда приходим к матричному соотношению

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-\eta} \cos \xi & e^{\eta} \sin \xi \\ -e^{-\eta} \sin \xi & 2 e^{\eta} \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ C e^{-\eta} \end{pmatrix}. \quad (95)$$

Применяя еще раз формулу (92), получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-\eta} \cos \xi & e^{\eta} \sin \xi \\ -e^{-\eta} \sin \xi & 2 e^{\eta} \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-\eta} \cos \xi & e^{\eta} \sin \xi \\ -e^{-\eta} \sin \xi & 2 e^{\eta} \cos \xi \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ C e^{-\eta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (96)$$

и т. д. В области  $x > b_N$  будем иметь

$$\begin{pmatrix} C_N \\ D_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-\eta} \cos \xi & e^{\eta} \sin \xi \\ -e^{-\eta} \sin \xi & 2 e^{\eta} \cos \xi \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\eta} C \end{pmatrix}. \quad (97)$$

Опять-таки ввиду условия нормировки волновой функции мы должны потребовать, чтобы коэффициент  $D_N$  при возрастающей в бесконечности части волновой функции обращался в нуль. Это дает условие

$$D_N = 0, \quad (98)$$

из которого можно определить весь энергетический спектр задачи.

Однако чтобы воспользоваться условием (98), необходимо уметь вычислять коэффициент  $D_N$ , а для этого необходимо возвести матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-\eta} \cos \xi & e^{\eta} \sin \xi \\ -e^{-\eta} \sin \xi & 2 e^{\eta} \cos \xi \end{pmatrix}$$

в  $N$ -ю степень, что мы сейчас и сделаем.

Итак, пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (99)$$

Требуется найти матрицу  $A^N$ . Для этого рассмотрим матрицу

$$S = e^{At} = 1 + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^N}{N!} A^N + \dots \quad (100)$$

Нетрудно убедиться, что матрица  $S$  удовлетворяет простому дифференциальному матричному уравнению

$$\frac{dS}{dt} = AS \quad (101)$$

с начальным условием

$$S(0) = 1. \quad (102)$$

Распишем уравнение (101) подробно:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}. \quad (103)$$

Таким образом, имеем две системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dS_{11}}{dt} = \alpha S_{11} + \beta S_{21}, \\ \frac{dS_{21}}{dt} = \gamma S_{11} + \delta S_{21}; \end{cases} \quad (103a)$$

$$\begin{cases} \frac{dS_{12}}{dt} = \alpha S_{12} + \beta S_{22}, \\ \frac{dS_{22}}{dt} = \gamma S_{12} + \delta S_{22}. \end{cases} \quad (103b)$$

Обе эти системы уравнений одинаковы. Чтобы выписать их решения, рассмотрим следующую систему двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \alpha y + \beta z, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma y + \delta z. \end{cases} \quad (104)$$

Для нахождения интегралов последней системы умножим первое уравнение на  $a$ , второе — на  $b$  и сложим. В результате получим

$$\frac{d}{dt} (ay + bz) = (\alpha a + \gamma b)y + (\beta a + \delta b)z. \quad (105)$$

Выберем теперь числа  $a$  и  $b$  таким образом, чтобы удовлетворялась алгебраическая система уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda a &= \alpha a + \gamma b, \\ \lambda b &= \beta a + \delta b. \end{aligned} \quad (106)$$



Приравняем нулю детерминант этой алгебраической системы:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \gamma \\ \beta & \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (107)$$

Это даст два корня  $\lambda = \lambda_1$  и  $\lambda = \lambda_2$ . Предположим, что эти корни различны. Решение системы (106) будет иметь следующий вид:

$$a = \gamma, \quad b = \lambda - \alpha, \quad (108)$$

где  $\lambda = \lambda_1$  или  $\lambda = \lambda_2$ . Решение определено с точностью до умножения на произвольную постоянную. Подставляя (108) в (105), будем иметь

$$\frac{d}{dt} [\gamma y + (\lambda - \alpha) z] = \lambda [\gamma y + (\lambda - \alpha) z], \quad (109)$$

откуда получим

$$\gamma y + (\lambda - \alpha) z = C e^{\lambda t}, \quad (110)$$

где  $C$  — произвольная постоянная интегрирования. Таким образом, мы нашли два независимых интеграла нашей системы уравнений (104):

$$\begin{aligned} \gamma y + (\lambda_1 - \alpha) z &= C_1 e^{t\lambda_1}, \\ \gamma y + (\lambda_2 - \alpha) z &= C_2 e^{t\lambda_2}. \end{aligned} \quad (111)$$

Вычитая второй интеграл из первого, получаем

$$(\lambda_1 - \lambda_2) z = C_1 e^{t\lambda_1} - C_2 e^{t\lambda_2},$$

откуда

$$z = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (C_1 e^{t\lambda_1} - C_2 e^{t\lambda_2}). \quad (112)$$

Умножая первый интеграл на  $(\lambda_2 - \alpha)$  и второй на  $(\lambda_1 - \alpha)$  и вычитая первое полученное выражение из второго, будем иметь

$$\begin{aligned} [(\lambda_2 - \alpha) \gamma - (\lambda_1 - \alpha) \gamma] y &= C_1 (\lambda_2 - \alpha) e^{t\lambda_1} - C_2 (\lambda_1 - \alpha) e^{t\lambda_2}, \\ \gamma (\lambda_2 - \lambda_1) y &= C_1 (\lambda_2 - \alpha) e^{t\lambda_1} - C_2 (\lambda_1 - \alpha) e^{t\lambda_2}, \end{aligned}$$

откуда

$$y = -\frac{1}{\gamma(\lambda_1 - \lambda_2)} (C_1 (\lambda_2 - \alpha) e^{t\lambda_1} - C_2 (\lambda_1 - \alpha) e^{t\lambda_2}). \quad (113)$$

Используя (112), (113) и начальное условие (102), придем к начальным условиям для системы (103а):

$$S_{11}(0) = y(0) = 1, \quad S_{21}(0) = z(0) = 0. \quad (114)$$

Следовательно, в (112), (113)  $C_2 = C_1$  и

$$-\frac{C_1(\lambda_2 - \alpha) - C_1(\lambda_1 - \alpha)}{\gamma(\lambda_1 - \lambda_2)} = -\frac{C_1(\lambda_2 - \lambda_1)}{\gamma(\lambda_1 - \lambda_2)} = 1, \quad C_1 = \gamma. \quad (115)$$

Таким образом,

$$S_{11} = \frac{(\lambda_1 - \alpha)e^{t\lambda_1} - (\lambda_2 - \alpha)e^{t\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$S_{21} = \frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (116)$$

Для системы (103б) с использованием (112), (113) и начального условия (102) имеем начальные условия:

$$S_{12}(0) = y(0) = 0, \quad S_{22}(0) = z(0) = 1, \quad (117)$$

откуда

$$C_1(\lambda_2 - \alpha) = C_2(\lambda_1 - \alpha),$$

$$\frac{C_1 - C_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{C_1 - C_1 \frac{\lambda_2 - \alpha}{\lambda_1 - \alpha}}{\lambda_1 - \lambda_2} = C_1 \frac{\lambda_1 - \alpha - \lambda_2 + \alpha}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \alpha)} = 1,$$

т. е.

$$C_1 = \lambda_1 - \alpha, \quad C_2 = \lambda_2 - \alpha. \quad (118)$$

Следовательно,

$$S_{12} = -\frac{(\lambda_1 - \alpha)(\lambda_2 - \alpha)}{\gamma(\lambda_1 - \lambda_2)}(e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}),$$

$$S_{22} = \frac{(\lambda_1 - \alpha)e^{t\lambda_1} - (\lambda_2 - \alpha)e^{t\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (119)$$

Таким образом, окончательно имеем выражение для матрицы  $S$ :

$$S = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \alpha)e^{t\lambda_2} - (\lambda_2 - \alpha)e^{t\lambda_1} & -\frac{(\lambda_1 - \alpha)(\lambda_2 - \alpha)}{\gamma}(e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) \\ \gamma(e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & (\lambda_1 - \alpha)e^{t\lambda_1} - (\lambda_2 - \alpha)e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Разлагая эту матрицу по целым положительным степеням  $t$  и сравнивая полученное разложение с разложением

$$S = 1 + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^N}{N!} A^N + \dots,$$

Находим

$$A^N = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \alpha)\lambda_2^N - (\lambda_2 - \alpha)\lambda_1^N & -\frac{(\lambda_1 - \alpha)(\lambda_2 - \alpha)(\lambda_1^N - \lambda_2^N)}{\gamma} \\ \gamma(\lambda_1^N - \lambda_2^N) & (\lambda_1 - \alpha)\lambda_1^N - (\lambda_2 - \alpha)\lambda_2^N \end{pmatrix}. \quad (121)$$

Применим теперь эту формулу для вычисления по формуле (97) коэффициента  $D_N$ . В этом случае  $\alpha = \frac{1}{2} e^{-\eta} \sin \xi$ ,  $\gamma = -e^{-\eta} \sin \xi$ , а характеристические корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} e^{-\eta} \cos \xi - \lambda & e^{\eta} \sin \xi \\ -e^{-\eta} \sin \xi & 2e^{\eta} \cos \xi - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (122)$$

или квадратного уравнения

$$\lambda^2 - \lambda \left( 2e^{\eta} + \frac{1}{2} e^{-\eta} \right) \cos \xi + 1 = 0, \quad (122a)$$

из которого следует, что

$$\lambda_{1,2} = \frac{2e^{\eta} + \frac{1}{2} e^{-\eta}}{2} \cos \xi \pm \sqrt{\frac{(2e^{\eta} + \frac{1}{2} e^{-\eta})^2}{4} \cos^2 \xi - 1}. \quad (123)$$

Согласно (97) и (121), имеем

$$D_N = \frac{C}{\lambda_1 - \lambda_2} \{ (\lambda_1 - \alpha)\lambda_1^N - (\lambda_2 - \alpha)\lambda_2^N \} e^{-\eta}. \quad (124)$$

Поэтому для определения энергетического спектра задачи получаем условие

$$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \{ (\lambda_1 - \alpha)\lambda_1^N - (\lambda_2 - \alpha)\lambda_2^N \} = 0. \quad (125)$$

Ввиду сложности трансцендентного уравнения (125) будем искать его приближенные решения, считая коэффициент прозрачности барьера между ямами очень малым, что соответствует предположению, что  $\eta$  велико. Тогда формулы (123) можно представить в виде

$$\lambda_{1,2} \cong e^{\eta} \cos \xi \pm \sqrt{e^{2\eta} \cos^2 \xi - 1}. \quad (123a)$$

Вводя новую величину  $u$ :

$$e^{\eta} \cos \xi = \cos u,$$

будем иметь

$$\lambda_{1,2} = \cos u \pm i \sin u = e^{\pm iu}. \quad (126)$$

При том же предположении больших значений  $\eta$  условие (125) примет вид

$$\frac{1}{2i \sin u} \{e^{i(N+1)u} - e^{-i(N+1)u}\} = 0, \quad (127)$$

или

$$\frac{\sin(N+1)u}{\sin u} = 0. \quad (127a)$$

Уравнение (127a) имеет  $N$  корней:

$$u = \frac{n\pi}{N+1}, \quad \text{где } n = 1, 2, \dots, N \quad (128)$$

(значения  $u=0$  и  $u=\pi$  не являются корнями уравнения, так как и числитель и знаменатель обращаются при этом в нуль одинакового порядка малости). Переходя в (128) от  $u$  к  $\xi$ ,  $\eta$ , имеем

$$\cos \xi = e^{-\eta} \cos \frac{i n \pi}{N+1}, \quad \text{где } n = 1, 2, \dots, N, \quad (129)$$

или более подробно

$$\left( \cos \frac{1}{\hbar} \int_{a_1}^{b_1} p dx \right) = e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_1}^{a_2} |p| dx} \cos \frac{\pi n}{N+1}, \quad (130)$$

где  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Так как  $e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_1}^{a_2} |p| dx}$  — малая величина, то последнее соотношение можно переписать в виде

$$\frac{1}{\hbar} \int_{a_1}^{b_1} p dx = \frac{\pi}{2} + m\pi + e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_1}^{a_2} |p| dx} \cos \frac{\pi n}{N+1}, \quad (131)$$

где  $n=1, 2, \dots, N$ ,  $m=0, 1, 2, \dots$ . Получаем искомое условие для определения энергетических уровней. Оно очень похоже на условие квантования для поля отдельной ямы. Из формулы (131) можно непосредственно заключить, что энергетический спектр в поле  $u(x)$  представляет собой, грубо говоря, энергетический спектр отдельной ямы, все уровни

которого расщеплены на  $N$  подуровней. Определим величину расщепления:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{2\mu(E_m - u)} dx + \frac{2\mu}{2\hbar} \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{2\mu(E_m - u)}} \Delta E_n = \\ = \frac{\pi}{2} + m\pi + e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_1}^{a_2} |p| dx} \cos \frac{\pi n}{N+1}, \end{aligned}$$

где  $n=1, 2, \dots, N$ , откуда, вводя обозначение

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\mu \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{p} = 2\mu \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{2\mu(E_m - u)}},$$

получим

$$\Delta E = \frac{\hbar\omega}{\pi} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_1}^{a_2} |p| dx} \cos \frac{n\pi}{N+1}, \quad (132)$$

где  $n=1, 2, \dots, N$ .

Ответ. Энергетический спектр представляет собой энергетический спектр отдельной ямы, все уровни которого расщеплены на  $N$  уровней согласно формуле

$$\Delta E_n = \frac{\hbar\omega}{\pi} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_1}^{a_2} |p| dx} \cos \frac{n\pi}{N+1},$$

где  $n=1, 2, \dots, N$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Brussard P., Tolhoek J. H.— «Physica», 23, 955 (1957).
2. Edmonds A. R. Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton, 1957, Sect. 2.7, App. 2. Имеется перевод в сб.: Деформация атомных ядер. Москва, ИЛ, 1958.
3. Вигнер Е. Теория групп, гл. 27. Москва, ИЛ, 1961.
4. Ponzano G. and Regge T. In Spectroscopic and group theoretical methods in physics. Racah memorial Volume, Amsterdam, 1968.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.
6. Гольдман И. И., Кривченков В. Д. Сборник задач по квантовой механике. М., ГИТТЛ, 1957.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i> . . . . .	3
Глава 1. Квазиклассические формулы для сферических функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ . . . . .	6
Глава 2. Квазиклассические формулы для функций $D_{mm'}^l(\varphi, \theta, \psi)$ . . . . .	26
Глава 3. Квазиклассические формулы для $3j$ -символов Вигнера . . . . .	54
Глава 4. Квазиклассические формулы для $6j$ -символов Вигнера . . . . .	100
Приложение. Одномерная квазиклассика . . . . .	136

*Владимир Вениаминович  
Толмачёв*

Квазиклассическое  
приближение  
в квантовой механике

---

Заведующий редакцией  
*С. И. Зеленский*

Редактор *Ф. И. Горобец*

Художественный редактор  
*Б. С. Вехтер*

Технический редактор  
*З. С. Кондрашова*

Корректоры *Н. В. Тютина,  
Л. С. Клочкова*



Тематический план 1980 г. № 95

ИБ № 906

Сдано в набор 20.02.80.

Подписано к печати 16.10.80.

Л-113096. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Бумага тип. № 3.

Гарнитура Литературная.

Высокая печать.

Усл. печ. л. 12,0. Уч.-изд.

л. 11,20. Тираж 2300 экз.

Зак. 316. Цена 35 коп.

Изд. № 814.

Издательство

---

Московского университета.

103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография Изд-ва МГУ.

Москва, Ленинские горы