

МАРИ-АНТУАНЕТТ ЖОННЕЛ

ОСНОВЫ

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

И ТЕОРИИ

ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ



Marie-Antoinette TONNELAT

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

LES PRINCIPES
DE LA
THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE
ET DE LA
RELATIVITÉ

MASSON ET C^{IE}, ÉDITEURS

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS, VI^E

==== 1959 ====

МАРИ-АНТУАНЕТТ ТОННЕЛА

О С Н О В Ы
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА
И ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Перевод с французского
Г. А. ЗАЙЦЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
===== МОСКВА, 1962 =====

АННОТАЦИЯ

В книге изложены теория электромагнитного поля и специальная и общая теория относительности с учетом новейших работ по гравитации, которые в последнее время приобрели большое значение. Книга написана с большим педагогическим мастерством, много внимания уделено обсуждению экспериментальных основ теории, обычно слабо освещаемых в курсах по теории относительности.

Книга рассчитана на широкий круг физиков, научных работников и преподавателей и может служить дополнительным пособием для аспирантов и студентов физических факультетов.

ОТ РЕДАКЦИИ

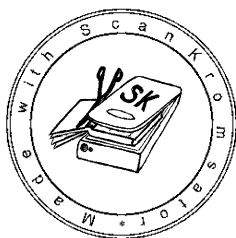
Автор настоящей книги, профессор Парижского университета Мари-Антуанетт Тоннела, принадлежит к числу крупных современных ученых, работающих в области теории относительности и гравитационной физики. В этой книге с единой точки зрения изложены основы электромагнетизма, специальной и общей теории относительности. Эта сторона изложения отличает книгу Тоннела от имеющихся у нас оригинальных и переводных курсов электродинамики, где специальная теория относительности затрагивается не всегда, а общая — обычно отсутствует. Другим ценным качеством книги является то, что автор во всех важных случаях обращает большое внимание на экспериментальные обоснования развиваемых теоретических соображений и результатов и на тесную связь теории с опытом.

Было сочтено целесообразным поместить в конце книги дополнение о связи теории относительности с теорией групп, написанное переводчиком кандидатом физ.-мат. наук Г. А. Зайцевым, которое рассчитано на читателей, интересующихся математическим аппаратом теории и ее методами, поскольку в книге, в соответствии с ее назначением, эти вопросы затронуты сравнительно мало.

В целом настоящая книга будет хорошим пополнением имеющейся у нас литературы по электродинамике и теории относительности. Благодаря глубокому физическому подходу к изложению трудных вопросов и высокому педагогическому мастерству книга может служить дополнительным пособием для преподавателей и студентов университетов и вузов, где читаются соответствующие курсы. Книга может оказаться интересной также для научных работников и инженеров физической и других специальностей, желающих восстановить или пополнить свои знания в этой области физики.

Профессор М.-А. Тоннела с большим интересом и вниманием отнеслась к подготовке перевода ее книги. Ею было написано предисловие к русскому изданию, по просьбе редакции сделано дополнение об эффекте Мёссбауэра, прислан список замеченных опечаток. Редакция пользуется случаем выразить проф. М.-А. Тоннела искреннюю благодарность.

Эта страница пуста



ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее время основные положения теории электромагнетизма и теории относительности служат исходным пунктом при построении как классических, так в значительной степени и квантовых теорий поля.

Действительно, теорию Максвелла и общую теорию относительности трудно рассматривать в качестве теорий, значение которых ограничивается только тем, что они дают возможность описывать электромагнитные явления и гравитационные эффекты. Влияние этих теорий выходит далеко за пределы какой-либо одной области физики: электромагнитная теория Максвелла, фактически носящая релятивистский характер, приводит к необходимости построения новой кинематики, а общая теория относительности — к естественному и до некоторой степени неизбежному обобщению основных положений механики. В связи с этим принципы, лежащие в основе двух указанных теорий, в значительной степени повлияли также и на другие области физики, что можно сравнить с тем влиянием, какое в XVIII веке имели теории притяжения, с помощью которых в то время пытались объяснить большинство законов физики.

Специальная теория относительности служит тем общим фундаментом, который лежит в основе теорий поля. Однако ее трудно считать физической теорией в обычном смысле, т. е. такой теорией, которая используется при анализе и столкновении частных явлений. По существу, она является своего рода кинематикой, аналогичной в этом отношении классической механике и проявляющейся во всех физических явлениях. Как и классическая механика, специальная теория относительности сравнительно легко подтверждается на опыте.

Именно поэтому при написании данной книги мне хотелось подчеркнуть опытное происхождение основных положений теории электромагнетизма и теории относительности. Эти две теории нередко излагают чисто аксиоматически, что дает возможность добиться большей лаконичности и, может быть, большей логической строгости. При этом вся наука выглядит как бы „завершенной“.

Однако я думаю, что аксиоматический подход не дает возможности правильно понять побудительные причины, которые привели к появлению данных теорий и которые до некоторой степени сделали их физически неизбежными.

При любом аксиоматическом изложении в основу строгих построений кладутся постулаты, в определенном смысле остающиеся произвольными. Представляется очень интересным подойти к этим вопросам с точки зрения исторической перспективы, что даст возможность уяснить, в какой мере можно считать неизбежным появление той или иной теории. Считают, что физик-теоретик на первых этапах развития теории путем введения искусственных гипотез старается избрать наиболее легкий путь и стремится воздерживаться от пересмотра вытекающих из опыта основных положений. Так было с Планком незадолго до введения гипотез о квантах. Так же было во времена Фицджералда и Лоренца, которые путем введения ряда специальных предположений пытались не выходить из рамок классической механики. Но, несмотря на успехи подобных попыток, вскоре они оказываются недостаточными, и под давлением опытных фактов физик вынужден пересматривать понятия, которые незадолго до этого казались ему бесспорными.

Что касается общей теории относительности, то и здесь было бы неправильно думать, что она является чисто математической спекуляцией, более или менее случайным образом возникшей из потребности формального обобщения. Замена закона Ньютона на релятивистский (в смысле специальной теории относительности) закон тяготения и более глубокое обоснование принципа эквивалентности фактически были неизбежны.

Разумеется, теория не может являться непосредственным следствием опытных данных: было бы упрощением думать, что Ньютон чуть ли не обязательно должен был прийти к закону всемирного тяготения в результате наблюдения падения яблока. Источники общей теории относительности лежат в таких простых опытах, как демонстрируемый школьникам опыт с трубкой Ньютона, согласно которому „в пустоте все тела падают с одинаковой скоростью“. Тем не менее ни одному школьнику не удалось вывести непосредственно из этого опыта общую теорию относительности.

К опытным данным необходимо еще добавить глубокое размышление, которое должно обнаружить ошибочный, нередко подразумеваемый неявным образом, постулат, мешающий связному описанию или обобщению теоретических толкований. Но особенно необходимо критическое воображение, позволяющее обнаружить новые пути и выбраться из возникших до этого тупиков. В качестве примеров можно указать на понятие о релятивистской

инвариантности, связанное с пересмотром классической кинематики, и на идею о геометрической структуре пространства, позволившую придать более широкий смысл понятию о геодезической линии и старому принципу наименьшего действия.

Подобные построения, первоначально имевшие зыбкое основание, в результате соответствующих опытных подтверждений становились более убедительными. Конечно, какого-либо абсолютного „решающего опыта“ не существует, если под этим подразумевать опыт, позволяющий с определенностью обосновать теорию вне зависимости от того, каковым будет дальнейшее развитие физики. В противном случае нужно было бы выяснить все (зачастую неизвестные) постулаты и перечислить все возможности. Однако для каждой данной эпохи и для каждого уровня развития науки имеются „решающие опыты“ временного значения, позволяющие решить, будет ли новый путь хотя и не единственно возможным, но по крайней мере допустимым и совместимым с опытными данными.

Уже после того, как данная книга была написана, открылись перспективы для очень большого числа дальнейших теоретических и экспериментальных исследований, связанных с теорией относительности. Теории, развивавшие общую теорию относительности, несмотря на свою логическую необходимость, до 1930 г. в практическом отношении казались почти бесплодными. Их, с одной стороны, не удавалось связать с основными понятиями квантовой теории полей; по самой своей природе нелинейные уравнения гравитационного поля казались неквантуемыми. С другой стороны, те предсказания, которые можно было получить с их помощью, в большинстве случаев лежали за границами опытных возможностей.

В настоящее время квантование гравитационного поля осуществляется не только в линейном приближении, но производится уже и строгим образом. Не исключено, что соответствующие приемы смогут служить образцами для квантования других полей, точные уравнения для которых также являются нелинейными. При этом важной, хотя еще и не решенной, проблемой для будущих исследований является изучение гравитационного излучения.

В области чисто опытных явлений большой прогресс был достигнут в результате использования чрезвычайно точных атомных часов, которые можно помещать на спутниках, и методики, основанной на использовании явлений резонансного испускания и поглощения γ -лучей (эффект Мёссбауэра), что уже позволило получить остроумное подтверждение принципа эквивалентности. К настоящему времени тождественный характер гравитационного и инерциального полей стал почти очевидным. В стране, являющейся родиной Гагарина, имеются лучшие, чем где бы то ни было в другом месте, возможности для изучения многих подобных эффектов.

Наконец, последнее. В предлагаемой книге была предпринята попытка сделать основные положения теории электромагнитного поля и теории относительности доступными для тех читателей, которые только приступают к изучению физики и еще не обладают какими-либо слишком специальными познаниями. По этой причине, а также из-за желания не прерывать изложение, те сведения из алгебры и тензорного анализа, которые необходимы для изучения общей теории относительности, собраны в математическом дополнении. Мне представлялось целесообразным поместить изложение основных математических результатов в самой книге, так как переход от одних обозначений к другим является делом довольно утомительным. При изложении основ римановой геометрии использован метод подвижного репера Э. Картана, который, как мне кажется, является наиболее наглядным.

Мне приятно думать, что в результате все расширяющегося культурного обмена и международного обмена книгами и периодическими изданиями молодые физики из различных стран могут вносить общий вклад в то существенно общее дело, каковым всегда является дело построения физических теорий.

М.-А. Тоннела.

Париж, июнь 1961 г.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая книга посвящена изучению исходных положений, на которых основываются классические и релятивистские теории электромагнитного и гравитационного полей. В связи с этим основная задача книги заключается в том, чтобы дать простое изложение теории Максвелла, общей теории относительности и связывающей их специальной теории относительности.

В течение последнего столетия понятие о непрерывном поле постепенно заменило представление о действии на расстоянии. При этом большое число разделов физики было объединено в одно целое электромагнитной теорией, позволившей дать описание как стационарных явлений — электростатики и магнитостатики, так и явлений, меняющихся с течением времени. Она предсказала существование волн, после чего теория света также оказалась включенной в эту обширную область физики.

Однако оказалось, что если уравнения Максвелла рассматривать в системах отсчета, связанных с двумя наблюдателями, один из которых движется по отношению к другому прямолинейно и равномерно, и если оба наблюдателя пользуются абсолютным временем классической механики, то уравнения в разных системах не сохраняют своего вида. Этот факт был в высшей степени примечателен. В самом деле, если бы мы захотели проверить следствия из классической кинематики при помощи опытов, связанных с распространением света, то мы столкнулись бы с рядом противоречий.

Это противоречие между старой ньютоновской механикой и возникшей позднее электромагнитной теорией разрешилось в пользу последней. Такой результат не будет представляться удивительным, если учесть, что механика, как и другие разделы физики, ни в какой степени не покоится на незыблемом основании, а подвержена экспериментальным пересмотрам. Ввиду этого механика была перестроена, исходя из значительно более разумных и реалистичных понятий об одновременности для удаленных объектов, о пространстве и времени. В результате в 1905 г. Альберт Эйнштейн создал

специальную теорию относительности, подготовленную критическими работами Лоренца и Пуанкаре. Выводимая из теории Эйнштейна кинематика очень просто объясняла некоторые классические опыты, такие, как знаменитый опыт Физо. С другой стороны, новая динамика, признающая эквивалентность массы и энергии, позволила предвидеть существование в атомном ядре значительных запасов энергии.

Специальная теория относительности, строго говоря, не является теорией поля, но она образует основу, на которой должна базироваться любая классическая или квантовая теория поля. По существу, электромагнитная теория Максвелла еще задолго до 1905 г. была релятивистской: ее формализм находился в полном соответствии с принципами специальной теории относительности.

В начале нашего столетия классическая и релятивистская теории электромагнитного поля практически были, таким образом, уже созданы. Что же касается классической релятивистской теории гравитационного поля, то она была построена только в 1916 г. До этого времени явления гравитации выводились из закона Ньютона при предположении о действии на расстоянии. Если не считать небольшого числа незначительных расхождений с опытом, наиболее заметным среди которых было смещение перигелия Меркурия, закон Ньютона давал возможность с большим успехом построить стройное здание небесной механики.

Однако из-за лежащего в его основе принципа дальнего действия закон Ньютона не связывался с какой-либо полевой теорией, в которой действие непрерывно распространяется от одной точки к другой. И хотя описывающий взаимодействие между заряженными частицами закон Кулона, построенный по аналогии с законом Ньютона, удалось включить в систему уравнений теории Максвелла, многочисленные попытки получить закон Ньютона из гипотетической релятивистской теории гравитационного поля оставались безуспешными.

Только после того, как Эйнштейн предложил постулат о локальной эквивалентности гравитационных сил и сил инерции, ему удалось достичь двойной цели: во-первых, обобщить принцип специальной теории относительности на произвольные системы отсчета — другими словами, перенести на системы отсчета, движущиеся с ускорением, установленную в специальной теории относительности эквивалентность галилеевых систем отсчета — и, во-вторых, этим самым обосновать известный из опыта, но до этого времени не объясненный факт идентичности гравитационной и инертной масс.

Первая посвященная гравитации теория Эйнштейна (1911 г.) была теорией чисто евклидовой. В 1915 г. Эйнштейну удалось показать, что введение неевклидова пространства дает возможность

очень просто сформулировать релятивистскую теорию гравитационного поля и в то же время чисто локальным образом истолковать эквивалентность инерции и гравитации. При этом из релятивистской теории Эйнштейна в качестве приближения получается закон Ньютона. С другой стороны, в важном частном случае, когда гравитационное поле создается сферическим телом, теория позволяет преодолеть трудности, связанные с тремя отклонениями от закона Ньютона.

Согласно общей теории относительности, релятивистские законы гравитационного поля являются структурными условиями, наложенными на неевклидово пространство. Явления гравитации получают, таким образом, наиболее простое и в то же время наиболее проникнутое картезианским духом объяснение, какое только можно себе представить: они сводятся к пространству и движению. Но эта геометризация не относится к остальной физике, в частности, к электромагнетизму. Чтобы для электромагнитных и гравитационных явлений получить аналогичную геометрическую интерпретацию, пытались также, все время оставаясь в чисто классической области, построить так называемые „единые“ теории. Оба типа явлений связывались при этом с обобщенным полем, которое должно было подчиняться уравнениям, характеризующим структурные условия для более сложного неевклидова мира.

Попытки перенесения положений общей теории относительности в область квантовых явлений натолкнулись на очень серьезные трудности. В настоящее время не существует строгой квантовой теории, которая давала бы вполне удовлетворительное описание гравитационного поля. Можно даже думать, что это поле не квантуется, так что геометрические теории должны применяться в ограниченной степени и только в общей теории относительности. Гравитационные явления, таким образом, допускают совершенно особый подход.

В этом отношении электромагнитные или ядерные явления, даже если они протекают в неевклидовом пространстве, оказываются совсем иными. Они подчиняются линейным уравнениям, к которым применимы обычные методы квантования.

Подобный разрыв между гравитацией и всеми другими явлениями нельзя считать удовлетворительным. Если он должен быть уничтожен, то общая теория полей, детали которой, разумеется, предсказать в настоящее время трудно, тем не менее должна, вероятно, развиваться в одном из следующих двух направлений.

Соответствующее развитие математического аппарата должно привести к квантованию гравитационных уравнений любого типа — эвклидовых или неевклидовых, линейных или нелинейных. В настоящее время связанные с этим направлением вполне удовлетворительные методы квантования развиты еще недостаточно. Они,

во всяком случае, смогут приобрести гораздо большее значение, если с их помощью будут получены подтверждаемые опытом предсказания. Однако пока, по-видимому, выводы, которые делаются из предполагаемого возможным квантования гравитационных волн, остаются в области чисто умозрительных заключений. Поэтому успехи подобного формализма относятся главным образом к области методологии, а сам формализм связан с методами, которые в случае необходимости можно будет использовать в квантовой нелинейной теории поля.

С другой стороны, можно думать, и таково было мнение Эйнштейна, что с помощью чисто полевой теории удастся получить более рациональное объяснение, чем то, которое основывается на эвристических и зачастую слишком формальных представлениях, возникающих в результате развития квантовых теорий. Разумеется, предположение о том, что частицы, являющиеся сингулярными особенностями поля, по существу от него не отличаются и что их свойства, в частности, законы движения, могут быть без каких-либо дополнительных допущений выведены из заданных уравнений поля, представляется очень заманчивым. Точные уравнения поля должны были бы быть в этом случае нелинейными. Однако если бы даже эта программа была выполнена, чего на самом деле нет, то еще нужно было бы найти способ квантования обобщенного поля, или по крайней мере какие-то заменяющие его и имеющие шансы на успех приемы.

Мы хотели указать здесь на перспективы, открывающиеся перед теориями гравитационного поля, а также на возникающие при этом трудности. Цель же данной книги по существу более скромна, так как книга ограничена обзором основных положений, которые привели к развитию двух великих классических теорий поля: электромагнитного поля и поля тяготения. Основную наиболее связную часть ее составляют вопросы о происхождении и развитии специальной теории относительности и синтез максвелловской теории и общей теории относительности — то, что является также наиболее внушительным в ансамбле физических теорий.

В связи с этим книга естественным образом состоит из трех частей.

В первой части (гл. 1—4) излагаются основы электромагнетизма; дается краткий вывод основных уравнений и их истолкование при помощи электронной теории Максвелла — Лоренца. Электродинамика движущихся тел позволяет предвидеть необходимость создания специальной теории относительности.

Вторая часть (гл. 5—10) посвящена основам и принципам построения специальной теории относительности. Мы хотели показать, что создание этой теории было для физики настоящей необходимостью, тогда как все другие пути по существу были непригодны.

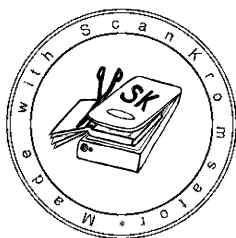
Наконец, в третьей части (гл. 11—13) излагаются основы общей теории относительности. Здесь рассматриваются некоторые особенности ее развития, которые, с одной стороны, привели к возможности ее опытной проверки, а, с другой, — придали ей преимущественно полевой характер.

Знакомство с вопросами, рассмотренными в математическом дополнении (гл. 14 и 15), будет полезным при изучении материала третьей части. Эти главы, таким образом, не являются продолжением третьей части, но могут оказаться полезными для ее понимания.

За последние годы было опубликовано большое число книг, посвященных специальной теории относительности. В настоящей книге сделана попытка рассмотреть эту теорию с учетом перспективы предшествующей ей теории электромагнетизма и следующей за ней общей теории относительности. Книга ставит также своей целью выделить наиболее простые идеи, лежащие в основе всех этих теорий и связать их с опытом. Основные результаты классических теорий поля позволяют проследить замечательную связь идей, навязываемых фактами, управляемых строгим формализмом и проверяемых вытекающими из них следствиями.

Мы считали необходимым исследовать происхождение и значимость принципов, которые, с одной стороны, приводят к результатам современной классической электродинамики, а с другой, — служат основой для создания единых теорий электромагнетизма и тяготения. В книге лишь слегка затрагиваются вопросы развития этих теорий, которые должны быть предметом других курсов.

Эта страница пуста

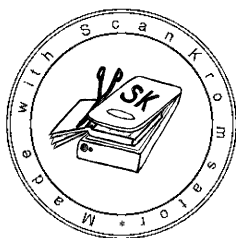


ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА



Эта страница пуста



Изучение электрических и магнитных явлений было проведено в XIX веке. До этого времени были известны только силовые законы, которым подчиняются явления тяготения и которые нашли обширную область применения при разработке небесной механики. Точное выражение для сил электрического и магнитного происхождения было получено лишь Кулоном и затем Фарадеем. Позже заметили, что эти силы принимают участие в значительно более широкой области явлений, чем это предполагалось вначале. С одной стороны, область применения электромагнитной теории очень расширилась и сомкнулась с областью оптических явлений; с другой стороны, оказалось, что все межмолекулярные силы и силы химической связи имеют электрическое происхождение. Можно было даже предположить, что все силы имеют такое происхождение, однако в настоящее время результаты, полученные при изучении ядерных явлений, показали, что существуют очень большие специфические силы, не подчиняющиеся законам, заимствованным из теории электромагнитных явлений. Несмотря на это, область применения теории электромагнетизма остается чрезвычайно широкой.

Лежащие в основе теории электромагнетизма положения, начиная с введенного Ньютоном принципа дальнего действия и кончая понятием о поле сил, постоянно развивались. В теории дальнего действия сила однозначно зависит от соответственных положений взаимодействующих частиц. Таким же был и закон Кулона, описывающий взаимодействие между электрическими зарядами. В полевой теории сила, действующая на пробное тело, зависит от поля в окрестности этого тела, а само поле не определяется заданием положений и скоростей различных частиц.

Теории, исходящие из предположения о дальнем действии, начали изменяться под влиянием опытов Эрстеда. Законы подобного типа,

связанные с магнитным действием тока, были сформулированы Ампером. Магнитная сила, создаваемая отрезком проводника, по которому проходит ток, пропорциональна его длине и убывает, по аналогии с законом Кулона, как r^{-2} (закон Био — Савара).

Решительный поворот в пользу объяснения электромагнитных явлений при помощи понятий полевой теории был совершен Фарадеем, который обратил внимание на важные свойства электрических и магнитных сред (или диэлектриков). Будучи помещенными между зарядами, эти среды изменяются и поляризуются. Но в таком случае они будут играть активную роль и на их свойствах будет сказываться распределение сил. Поэтому нужно предположить, что в любой точке среды существуют силовые линии, число которых пропорционально величине силы. Любая среда, или даже пустое пространство, пронизываемые подобными силовыми линиями, становятся, таким образом, местом нахождения поля. Открытие явлений индукции, вызываемых изменением пронизывающего проводник магнитного потока, убедило Фарадея в необходимости приписывать силовым линиям электромагнитного поля вполне конкретный смысл. Математическую формулировку введенных Фарадеем основных положений начал разрабатывать еще Гаусс, однако удовлетворительные результаты удалось получить Максвеллу только лет тридцать спустя.

При объяснении полевых законов, которым было приписано важное физическое значение, Максвелл мог исходить из работ Гаусса, а также из той формулировки в терминах поля, которую Лаплас и Пуассон придали кулоновской теории дальнего действия. Однако теория Максвелла показала, что электромагнитное действие должно иметь конечную скорость распространения, а измерения доказали, что эта скорость равна скорости света. Поскольку действие на пробное тело, находящееся в поле, зависит от положений и состояний движения других частиц в предыдущий момент времени, то теория электромагнитного поля приводит к выводам, существенно отличающимся от тех, которые можно было ожидать, исходя из теории дальнего действия.

Важность теории электромагнитного поля связана также с тем, что она включает всю оптику. Известно, что в эпоху Ньютона световые явления объясняли при помощи или корпускулярной

(Ньютон), или волновой (Гюйгенс) теории света. По существу эти объяснения не были резко разграничены. Ньютон, знакомый с явлениями интерференции и диффракции, объяснял их тем, что приписал самой корпускуле периодические свойства. Находясь в различных состояниях, она испытывает, например, „приступы“ легкого отражения и „приступы“ легкого преломления¹⁾. В то же время Ньютон считал, что корпускулярной концепции света следует придерживаться для объяснения прямолинейности распространения света и образования тени.

Теория Гюйгенса, исходившая из предположения о распространении вторичных сферических волн, вызванных главной сферической волной, правильно объясняла явления отражения и преломления. Однако волновая теория смогла ясно обосновать прямолинейность распространения света только после открытий Юнга и создания теории Френеля.

В этой теории предполагалось, что свет вызывает не продольные колебания, как считалось раньше, а поперечные, перпендикулярные к направлению распространения. Эта особенность объясняла явление двойного преломления, но само существование подобных колебаний требовало наличия колеблющейся среды — эфира. Указанная среда имела исключительно парадоксальные свойства: будучи бесконечно упругой, она, однако, не мешала свободному движению тел. К такому состоянию пришла оптика, когда Максвелл начал построение электромагнитной теории. Работы Максвелла привели к замене механической теории колеблющегося эфира на теорию колебаний электромагнитного поля. При этом прямолинейность распространения света получается как следствие исключительной малости длины световой волны.

Развитие электродинамики должно было привести к полному пересмотру основ классической кинематики. Создание специальной теории относительности дало возможность полностью обосновать электромагнитную теорию Максвелла и в то же время позволило придать ей правильное выражение. Предельному случаю новой релятивистской кинематики соответствует распространение света.

¹⁾ В механической теории, каковой являлась теория Ньютона, эти „приступы“ могли, например, возникать из-за вращательного движения летящих корпускул, имеющих эллипсоидальную форму. Таким образом, при их движении одинаковые положения периодически повторяются.

Когда обнаружившийся в световых явлениях дуализм между волной и частицей привел Луи де-Бройля к построению волновой механики материальных частиц, то сама оптика, подсказавшую такой подход, оказалось трудным включить в новую схему. Релятивистская квантовая теория фотонов создавалась с большим трудом, и оказалось нелегко совместить формализм новой квантовой электродинамики с теорией относительности, хотя классические основы последней были надежно обоснованы.

Таким образом, теория электромагнетизма остается одновременно исходным пунктом и частным случаем современных теорий поля. Мы ограничимся здесь чисто классическим рассмотрением ее основных положений.

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§ 1. Экспериментальные законы. Закон Кулона

Закон, описывающий действие на расстоянии между двумя заряженными частицами, был экспериментально установлен Кулоном (1780 г.). Аналогично ньютоновской силе тяготения сила, действующая между двумя частицами с зарядами q и q' , обратно пропорциональна квадрату расстояния между частицами. В пустоте величина этой силы равна

$$F = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}. \quad (1.1)$$

Значение постоянной ϵ_0 однозначно определяется выбором системы единиц, в которой записывается заряд частицы.

Силу подобного типа всегда можно выразить через скалярную функцию

$$V' = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q'}{r}, \quad (1.2)$$

которую называют *потенциалом*, создаваемым зарядом q' . Тогда имеем

$$F = -q \operatorname{grad} V'. \quad (1.3)$$

Если мы рассмотрим систему из $n - 1$ частиц q_1, q_2, \dots, q_{n-1} , взаимодействующих с n -й пробной частицей с зарядом q , то по-прежнему будем иметь

$$F = -q \operatorname{grad} V', \quad (1.4)$$

где

$$V' = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_i}{r_i}. \quad (1.5)$$

Величина

$$r_i = \sqrt{\sum_p (x_p - x_p^{(i)})(x_p - x_p^{(i)})}$$

является расстоянием между частицей $x_p^{(i)}$ с зарядом q_i и пробной частицей x_p ($p = 1, 2, 3$).

Величины V' и $-\text{grad } V'$ относятся к точке нахождения пробной частицы, но они не включают потенциал, создаваемый самой пробной частицей, который, впрочем, в этой точке будет бесконечным.

В какой-либо точке среды аналогичным образом могут быть определены потенциал

$$V = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad (1.6)$$

и напряженность поля

$$E = -\text{grad } V. \quad (1.7)$$

Если в этой точке имеется частица с зарядом q , то будем также иметь ¹⁾

$$F = qE. \quad (1.8)$$

При непрерывном распределении заряда в объеме \mathcal{V} каждый заряд q_i следует заменить на заряд $\rho d\mathcal{V}$, относящийся к элементу объема $d\mathcal{V} = d\xi d\eta d\zeta$. Величина $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ означает плотность заряда в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$ объема $d\mathcal{V}$. Если расстояние между перпендикулярной точкой M и точкой $P(x, y, z)$, в которой вычисляется потенциал, равно r , то (1.8) также (по определению) заменяется

¹⁾ Поскольку V определяет потенциал, создаваемый в точке всеми частицами, а V' не содержит потенциала, создаваемого находящейся в этой точке частицей, то фактически в формулах (1.6) и (1.5) $V' \neq V$ и $E' \neq E$. Но создаваемый частицей потенциал в точке ее нахождения имеет бесконечное значение, поэтому в этой точке и потенциал V бесконечен, тогда как потенциал V' всегда конечен. В связи с этим может показаться, что поблизости от точки, в которой находится заряженная частица, потенциалы V и V' отличаются на величину, которой нельзя пренебречь, и один из них нельзя заменять на другой (в самой этой точке разность между ними становится бесконечной). Однако на практике оказываются известными только приближенные положения зарядов и средние значения для потенциала в их окрестности. В области $d\mathcal{V}$ около точечного заряда, принятого за начало координат, среднее значение создаваемого этим зарядом потенциала равно

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mathcal{V}} \int_0^R \frac{q}{r} d\mathcal{V} = \frac{3}{4\epsilon_0 \pi R^3} \int_0^R \frac{q}{r} 4\pi r^2 dr = \frac{3}{2\epsilon_0} \frac{e}{R}.$$

Вклад от этого потенциала будет пренебрежимо малым, если мы условимся определять потенциал и поле только вне окружающей точечный заряд сферы радиусом R .

на плотность силы

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{E} = -\rho \operatorname{grad} V, \quad (1.9)$$

где

$$V = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \frac{\rho}{r} d\mathcal{V}. \quad (1.10)$$

§ 2. Общие законы электростатики

Кулоновский закон действия на расстоянии можно заменить соотношениями (1.9) и (1.10), вводящими напряженность поля и электростатический потенциал. Из этих соотношений могут быть выведены основные законы электростатики. Но такой путь противоречит общим представлениям теории Максвелла, отвергающей понятие о дальнем действии и принимающей только существование ближнего действия. Теория Максвелла основывается на свойствах сред — эфира и диэлектриков. Что же касается ближнего действия, то оно связано с локальными соотношениями, которые являются уравнениями в частных производных. Поэтому была сделана попытка заменить определение потенциала при помощи соотношения (1.10) на такое определение, при котором использовались бы только локальные величины. В результате были получены уравнения в частных производных, справедливые для общего случая и относящиеся к величинам, имеющим физический смысл.

Из полученной таким путем системы уравнений можно было вывести интегральные соотношения, которые в некоторых частных случаях, например, в электростатике, приводят к тем же результатам, что и гипотеза о дальнем действии.

Таким способом из уравнений в частных производных для электростатического поля можно было вывести закон Кулона. Но подобный закон можно обосновать только в том случае, когда теория дальнего действия соответствует теории Максвелла; другими словами, когда даваемые ею соотношения совпадают с интегральными соотношениями, выводимыми из локальных уравнений теории поля. Поэтому мы всегда будем исходить из локальных уравнений для электромагнитного поля.

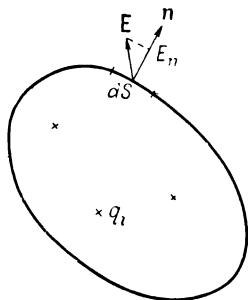
Распределение зарядов, по самому существу теории Максвелла, изменяет состояние среды и приводит к появлению силового поля, характеризуемого заданием в каждой точке вектора \mathbf{E} , касательного к силовым линиям. Действующая на пробное тело сила равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (1.8)$$

где q характеризует пробное тело, а \mathbf{E} является силой, отнесенной к единичному заряду. Сила \mathbf{E} называется *напряженностью электрического поля* в рассматриваемой точке

§ 3. Первый закон. Теорема Гаусса

Пусть внутри замкнутой поверхности расположены заряды q_i . В каждой точке на поверхности они создают напряженность электрического поля \mathbf{E} . Связанный с наличием \mathbf{E} поток $d\Phi$ через элемент поверхности dS равен произведению $E_n dS$ этого элемента поверхности на проекцию напряженности поля на внешнюю нормаль \mathbf{n} данного элемента (фиг. 1).



Фиг. 1. Поток через замкнутую поверхность, ограничивающую область с зарядами.

Теорема Гаусса. Поток вектора \mathbf{E} через поверхность S , ограничивающую объем \mathcal{V} , в котором имеются электрические заряды, пропорционален сумме этих зарядов:

$$\int_S E_n dS = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (1.11)$$

Множитель ϵ_0 однозначно определяется выбором системы единиц для q . Если $\epsilon_0 = 1$, то мы имеем дело с *электростатической системой единиц*. Такой выбор упрощает многие формулы¹⁾.

Если заменить заряды на непрерывное распределение электричества, характеризуемое плотностью заряда ρ , то теорема Гаусса запишется в виде

$$\int_S E_n dS = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}. \quad (1.12)$$

Учитывая формулу Грина

$$\int_S E_n dS = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{E} d\mathcal{V}, \quad (1.13)$$

окончательно получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \rho. \quad (1.14)$$

Теорема Гаусса является *опытным законом*, допускающим непосредственную проверку, основанную на измерении, например, зарядов при помощи цилиндра Фарадея и значений напряженности

¹⁾ В частности, он упрощает все формулы, связанные с предположением о сферической симметрии.

поля при помощи пробного тела. Впрочем, справедливость этой теоремы экспериментально доказывается проверкой всех извлекаемых из нее следствий, к числу которых относится и закон Кулона (см. § 7).

§ 4. Применения. Напряженность электрического поля на поверхности проводника. Электростатическое давление

Если заряды распределены с поверхностной плотностью σ , то, рассматривая силовую трубку Σ , основаниями которой являются два элемента поверхности dS_1 и dS_2 , расположенных параллельно элементу dS по обе стороны от него (фиг. 2), получаем

$$\int_{\Sigma} E_n d\Sigma = \int_S (E_{n1} + E_{n2}) dS = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_S \sigma dS, \quad (1.15)$$

где

$$E_{n1} + E_{n2} = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \sigma. \quad (1.16)$$

Если dS является элементом поверхности S некоторого проводника, то в состоянии равновесия $E_{n2} = 0$. Поэтому вблизи от этого проводника электрическое поле будет равно

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.17)$$

Если dS является элементом поверхности, которая не составляет части замкнутого проводника, то $E_{n1} = E_{n2}$. Поэтому вблизи от этого проводника электрическое поле будет равно

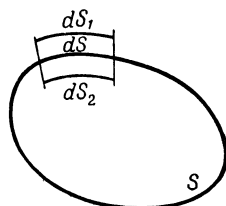
$$E' = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.18)$$

Напряженность поля на *наэлектризованном проводнике* S равна напряженности поля E , создаваемой проводником в бесконечно близкой точке, что уменьшает вклад от рассматриваемого изолированного элемента dS . Фактически заряд этого элемента на него самого никак не действует. В этом случае

$$E_S = E - E' = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.19)$$

Таким образом на заряд σdS этого элемента поверхности действует сила

$$dF = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon_0} \sigma dS, \quad (1.20)$$



Фиг. 2. Электрическое поле на поверхности проводника.

т. е. возникает давление ¹⁾

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon_0}. \quad (1.21)$$

Измерение давления p позволяет определить σ , а в электростатической системе единиц ($\epsilon_0 = 1$), зная σ , легко найти напряженность поля E ; в этом заключается принцип действия абсолютного электрометра Кельвина.

§ 5. Второй закон. Определение потенциала

Если пробное тело в электрическом поле описывает замкнутую траекторию, то совершаемая при этом работа

$$W = q \int E_t dl, \quad (1.22)$$

где E_t — проекция напряженности электрического поля на направление перемещения.

Поскольку траектория замкнута, то для любого вида траектории должно быть

$$W = 0. \quad (1.23)$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием для выполнения этого равенства, или, что то же самое, для того чтобы работа dW не зависела от пути между двумя фиксированными точками, будет

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0.} \quad (1.24)$$

Это условие будет выполнено, если напряженность поля \mathbf{E} является градиентом скалярной функции $V(x, y, z)$, называемой *электростатическим потенциалом*:

$$\boxed{\mathbf{E} = - \operatorname{grad} V.} \quad (1.25)$$

Сравнение выражений (1.14) и (1.25) сразу же приводит к *уравнению Пуассона*

$$\boxed{\Delta V = - \frac{4\pi}{\epsilon_0} \rho,} \quad (1.26)$$

где Δ — оператор Лапласа, выражение для которого в декартовой системе координат имеет вид

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.27)$$

¹⁾ Это давление, направленное наружу, по существу является натяжением.

Если плотность электрического заряда ρ в рассматриваемой области равна нулю, то уравнение Пуассона переходит в *уравнение Лапласа*

$$\boxed{\Delta V = 0.} \quad (1.28)$$

§ 6. Решения уравнений Лапласа и Пуассона

Уравнения в частных производных, к числу которых относятся уравнения Лапласа и Пуассона, имеют большое число возможных решений.

Общее решение уравнения Пуассона является суммой частного решения и общего решения уравнения без правой части (т. е. уравнения Лапласа). Если общее решение содержит достаточное число произвольных постоянных, то их можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись определенные граничные условия.

Найдем частное решение уравнения Пуассона. Для этого рассмотрим замкнутую поверхность S , ограничивающую объем \mathcal{V} . Согласно теореме Грина, для любого вектора F

$$\int_S F_n dS = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} F d\mathcal{V}. \quad (1.29)$$

Если положить

$$F = \varphi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \varphi,$$

где ψ и φ — две скалярные функции, то получим

$$\int_S (\varphi \operatorname{grad}_n \psi - \psi \operatorname{grad}_n \varphi) dS = \int_{\mathcal{V}} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d\mathcal{V}. \quad (1.30)$$

В частном случае $\psi = 1/r$, поскольку

$$\Delta \psi = \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \equiv 0,$$

имеем

$$\int_S \left(\varphi \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad}_n \varphi \right) dS = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\Delta \varphi}{r} d\mathcal{V}. \quad (1.31)$$

Предположим, что поверхность S , ограничивающая объем \mathcal{V} , является малой сферой радиуса R с центром в точке P . Тогда

$$- \int_R^\infty \left(\frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) dS = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\Delta \varphi}{r} d\mathcal{V}. \quad (1.32)$$

Если $\bar{\varphi}$ и $\bar{\partial\varphi/\partial r}$ равны средним значениям φ и $\partial\varphi/\partial r$ на сфере радиуса R , то получим

$$\left[\frac{\bar{\varphi}}{R^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{\bar{\partial\varphi}}{\partial r} \right) \right] \int_S dS = - \int_V \frac{\Delta\varphi}{r} d\mathcal{V}, \quad (1.33)$$

т. е.

$$4\pi\bar{\varphi} + 4\pi R \left(\frac{\bar{\partial\varphi}}{\partial r} \right) = - \int_V \frac{\Delta\varphi}{r} d\mathcal{V}. \quad (1.34)$$

Когда радиус R стремится к нулю, $\bar{\varphi}$ будет приближенно равняться потенциалу V в точке P . Поэтому

$$4\pi V = - \int_V \frac{\Delta V}{r} d\mathcal{V}. \quad (1.35)$$

Если теперь предположить, что во всем пространстве вне малой сферы с центром в точке P потенциал подчиняется уравнению Пуассона (1.26), то получим

$$V = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} d\mathcal{V}. \quad (1.36)$$

Для нахождения общего решения уравнения Лапласа удобно переписать его в сферических координатах:

$$\Delta\psi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0, \quad (1.37)$$

где

$$x = r \sin\theta \sin\varphi, \quad y = r \sin\theta \cos\varphi, \quad z = r \cos\theta. \quad (1.38)$$

Общее решение уравнения (1.37) можно выразить с помощью произведения трех функций, зависящих соответственно от r , θ и φ :

$$\psi = \left(ar^l + \frac{b}{r^{l+1}} \right) P_l^m(\cos\theta) (C \sin m\varphi + D \cos m\varphi), \quad (1.39)$$

где a , b , C и D — постоянные интегрирования, а $P_l^m(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра.

Наиболее простыми решениями будут:

$$\text{для } l=0, m=0 \quad \psi = a + \frac{b}{r}; \quad (1.40)$$

$$\text{для } l=1, m=0 \quad \psi = \left(ar + \frac{b}{r^2} \right) \cos\theta. \quad (1.41)$$

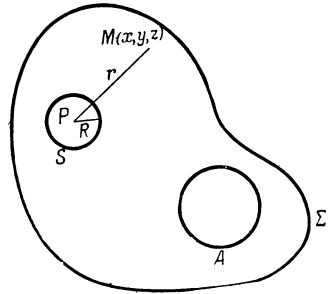
§ 7. Уравнение Пуассона и граничные условия

Потенциал в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$, представляемый в виде функции от значений плотности заряда ρ , задаваемых в неограниченной области, определяется при помощи выражения (1.39).

Аналогично, если заряд распределен в области, ограниченной поверхностью Σ , проходящей внутри проводника, то можно вычислить потенциал V , создаваемый в фиксированной точке $P(\xi, \eta, \zeta)$. Предположим (фиг. 3), что в данном поле находится несколько проводников, одним из которых пусть будет A , и обозначим через r расстояние от фиксированной точки P , в которой мы хотим определить потенциал, до переменной точки поля $M(x, y, z)$.

Окружим точку P малой сферой S радиуса R . По-прежнему можно воспользоваться формулой Грина (1.29). Положив $\psi = 1/r$, снова получим выражение (1.31):

$$\int_S \left(\varphi \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad}_n \varphi \right) dS = - \int_{\mathcal{V}'} \frac{\Delta \varphi}{r} d\mathcal{V}', \quad (1.42)$$



Фиг. 3. Потенциал в точке P , находящейся в области, ограничиваемой поверхностью Σ .

но только теперь интеграл нужно брать по области, лежащей внутри Σ , исключив из нее внутреннюю часть малой сферы S , где мы желаем определить потенциал. Если потенциал φ внутри проводника подчиняется уравнению Пуассона, то

$$- \int_{\mathcal{V}'} \frac{\Delta \varphi}{r} d\mathcal{V}' = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\rho}{r} d\mathcal{V}'. \quad (1.43)$$

С другой стороны, интеграл по поверхности в левой части (1.42) может быть вычислен для следующих случаев:

Поверхность совпадает с малой сферой S . Когда ее радиус $R \rightarrow 0$, как и в предыдущем параграфе, имеем

$$\int_S \left(\varphi \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad}_n \varphi \right) dS \rightarrow 4\pi V. \quad (1.44)$$

Поверхность совпадает с поверхностью проводника A . Положим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_0}, \quad (1.45)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности проводника (положительным считается направление по нормали наружу от проводника). Обозначим через V_A постоянный

потенциал φ на поверхности проводника A . Теперь имеем

$$\int_S \left(\varphi \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad}_n \varphi \right) dS = -V_A \int_{\Omega} d\Omega - \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{r} dS, \quad (1.46)$$

где

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_S \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} dS = \int_S \frac{dS}{r^2} \cos \theta \quad (\theta = \widehat{r, n}), \quad (1.47)$$

а Ω — телесный угол, под которым из точки M виден проводник A . Если M находится вне этого проводника, то $\Omega = 0$.

Поверхность совпадает с граничной поверхностью Σ . По-прежнему справедливо полученное для проводника A выражение (1.46), но теперь точка M находится внутри Σ . Поэтому

$$\Omega = - \int_S \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} dS = 4\pi. \quad (1.48)$$

С другой стороны, обозначив через V_0 потенциал на граничной поверхности (который постоянен, так как напряженность поля E_0 равна нулю), получим

$$\int \left(\varphi \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad}_n \varphi \right) dS = 4\pi V_0 - \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int \frac{\sigma_0}{r} dS, \quad (1.49)$$

где $(4\pi\sigma_0/\epsilon_0) = [(\partial V/\partial n)_0] = 0$. Для определенности полагая $V_0 = 0$ и подставляя выражение (1.43) в правую часть (1.42), а выражения (1.44), (1.46) и (1.49) в левую часть того же соотношения (1.42), получаем

$$\boxed{V = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r} d\mathcal{V} + \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{r} dS.} \quad (1.50)$$

В частности, если внутри проводника заряды отсутствуют ($\rho = 0$), то

$$V = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{r} dS. \quad (1.51)$$

Наконец, если размеры каждого проводника настолько малы, что расстояния от точки P , в которой мы хотим определить потенциал, до каждой из его точек практически одинаковы, то мы имеем просто

$$V = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad E = - \operatorname{grad} V = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \frac{r_i}{r_i}. \quad (1.52)$$

Если при этих условиях в точке P будет находиться пробное тело с зарядом q' , то на него, таким образом, будет действовать

механическая сила

$$F = q'E = \frac{1}{\epsilon_0} q' \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \frac{r_i}{r_i}. \quad (1.53)$$

Это есть не что иное, как закон Кулона. Он получен из выражения (1.50), т. е. косвенным путем из теоремы Гаусса. Таким образом, закон Кулона можно получить, не прибегая к допущению о существовании точечных частиц, действующих друг на друга на расстоянии.

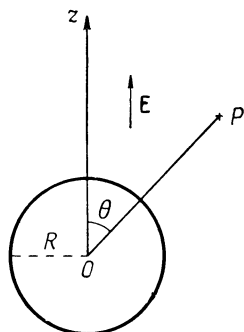
Впервые теорема Гаусса была выведена из закона Кулона, который позволяет получить основные законы электростатики. Большинство авторов также „доказывают“ теорему Гаусса, основываясь на вытекающем из закона Кулона выражении $E = q/r^2$ для напряженности электрического поля. Мы же, напротив, исходим здесь из выражения (1.12), как из общего закона, который вместе со всеми выводимыми из него следствиями *подтверждается на опыте, но сам из других положений не выводится*. Из всегда справедливого локального соотношения (1.14) закон Кулона выводится, во-первых, в частном случае, имеющем место, например, в электростатике, когда можно пользоваться интегральными соотношениями типа (1.50), и, во-вторых, когда соотношение (1.14) применяется к бесконечно малым электрическим зарядам.

§ 8. Применения

1. *Потенциал, создаваемый находящейся в постоянном поле проводящей заземленной сферой.* Пусть проводящая заземленная сфера радиуса R находится в однородном электрическом поле напряженностью E , направление которого мы будем считать совпадающим с осью Oz (фиг. 4). Решение (1.41) уравнения Лапласа, соответствующее значениям $l = 1$, $m = 0$,

$$\psi = \left(ar + \frac{b}{r^2} \right) \cos \theta \quad (1.54)$$

позволяет нам получить выражение для потенциала в точке P , причем постоянные a и b могут быть использованы для учета граничных условий.



Фиг. 4. Потенциал, создаваемый проводящей однородной сферой, находящейся в постоянном внешнем поле.

На большом расстоянии от начала координат

$$E = -\text{grad } V = -\frac{\partial V}{\partial z} e_z, \quad (1.55)$$

так что

$$V = -Ez = -Er \cos \theta, \quad a = -E. \quad (1.56)$$

На сфере

$$V = 0, \quad (1.57)$$

откуда, сравнивая с (1.54), имеем

$$-ER + \frac{b}{R^2} = 0, \quad b = ER^3.$$

Таким образом, потенциал в точке P

$$V = -\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right) E \cos \theta, \quad (1.58)$$

являющийся решением уравнения Лапласа, удовлетворяет граничным условиям.

2. *Потенциал, создаваемый диполем.* Вычислим теперь потенциал, создаваемый в точке P диполем $(+q, -q)$, направленным вдоль оси Oz (фиг. 5). В этом случае

$$V = \frac{q}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + d \cos \theta} \right). \quad (1.59)$$

Предполагая, что расстояние между двумя зарядами d мало по сравнению с r , и обозначая через n единичный вектор, направленный вдоль диполя, и через $m_e = qd$ — дипольный электрический момент, получаем

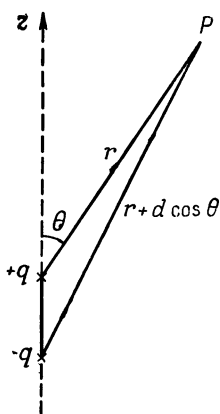
$$V \approx \frac{qd}{\epsilon_0 r^2} \cos \theta \approx -\frac{m_e}{\epsilon_0} \text{grad}_n \left(\frac{1}{r} \right). \quad (1.60)$$

Если диполь находится в постоянном электрическом поле, направленном параллельно диполю, то, поскольку к потенциалу свободного диполя добавится потенциал внешнего поля $-rE \cos \theta$, полный потенциал в точке P будет равен

$$V = -\left(r - \frac{m_e}{\epsilon_0 r^2 E}\right) E \cos \theta. \quad (1.61)$$

Этот потенциал получается из решения уравнения Лапласа (1.41), если положить

$$a = -E, \quad b = \frac{m_e}{\epsilon_0} = q \frac{d}{\epsilon_0}. \quad (1.62)$$



Фиг. 5. Поле, создаваемое диполем.

полный потенциал в точке P будет равен

Из сравнения с (1.58) видно, что находящаяся во внешнем поле E проводящая заземленная сфера ведет себя как диполь, момент которого $m_e = qd$ пропорционален E :

$$m_e = \epsilon_0 R^3 E = \alpha E, \quad \text{где } \alpha = \epsilon_0 R^3. \quad (1.63)$$

Таким образом, проводящая заземленная сфера, помещенная во внешнее однородное электрическое поле, приобретает дипольный момент, или, как говорят, поляризуется. Следовательно, она эквивалентна диполю с моментом $qd = \epsilon_0 R^3 E$ или двойному слою с электрической плотностью σ , определяемой из выражения $\sigma d = \epsilon_0 R^3 E$.

§ 9. Диэлектрики

Опыты Фарадея (1831 г.) показали, что если заменить воздух между прокладками конденсатора на изолятор, то разность потенциалов между прокладками уменьшается. Это дает основания сказать, что возрастает емкость конденсатора. Таким образом можно определить множитель $\chi_e > 1$, равный отношению диэлектрической проницаемости среды ϵ к теоретическому значению диэлектрической проницаемости для пустоты:

$$\chi_e = \frac{\text{Емкость при наличии диэлектрика}}{\text{Емкость в пустоте}} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}. \quad (1.64)$$

Следовательно, если электростатические явления имеют место не в пустоте, а в диэлектриках, то общие законы видоизменяются.

Согласно опытам Фарадея, перестает быть справедливым первый закон, выражающий сохранение потока сил. Тем не менее можно постулировать аналогичный закон, отличие которого состоит лишь в том, что применявшийся в пустоте вектор E заменен на вектор D , по определению подчиняющийся условиям

$$\int_S D_n dS = 4\pi \int_{\mathcal{V}^p} \rho d\mathcal{V}^p, \quad (1.65)$$

т. е.

$$\boxed{\operatorname{div} D = 4\pi\rho.} \quad (1.66)$$

Поскольку поле, создаваемое постоянным зарядом, в диэлектрике в ϵ раз слабее, чем в пустоте, то вектор D связан с напряженностью электрического поля соотношением

$$\boxed{D = \epsilon E.} \quad (1.67)$$

Второй закон электростатики не изменяется, так как он по-прежнему выражает независимость работы электростатических сил

от формы пути между двумя точками. По-прежнему

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,} \quad (1.68)$$

т. е.

$$\boxed{\mathbf{E} = - \operatorname{grad} V.} \quad (1.69)$$

Обычно \mathbf{D} называют *вектором электрической индукции*. По аналогии с теорией упругости Максвелл назвал его *электрическим смещением*; в упругой среде сила \mathbf{E}' и смещение \mathbf{D}' связаны соотношением типа (1.67), где ϵ — обратная величина коэффициента упругости.

Из соотношения (1.66) следует

$$\operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.70)$$

т. е.

$$\operatorname{div} \left(\epsilon \frac{\partial V}{\partial n} \mathbf{n} \right) = -4\pi\rho. \quad (1.71)$$

Сравнивая это равенство с выражениями (1.50), (1.53) и (1.21), получаем:

Если $\epsilon = \text{const}$, то выражение для потенциала как функции зарядов имеет вид

$$\boxed{V = \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho d\mathcal{V}}{r} + \frac{1}{\epsilon} \int_S \frac{\sigma dS}{r}.} \quad (1.72)$$

Закон Кулона принимает вид

$$\boxed{f = \frac{1}{\epsilon} \frac{qq'}{r^2}.} \quad (1.73)$$

Электростатическое давление равно

$$p = E_S \sigma, \quad \text{где} \quad E_S = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon}. \quad (1.74)$$

Таким образом, в среде это давление будет в ϵ/ϵ_0 раз меньше или больше, чем в пустоте, в зависимости от того, остается ли той же самой плотность заряда (тогда $p = 2\pi\sigma^2/\epsilon$) или напряженность внешнего поля [тогда $p = (\epsilon/2\pi) E_S^2$].

Теорию диэлектриков можно легко связать с теорией электрических токов. Первоначально „фиктивные“ заряды, находящиеся внутри диэлектриков, отличали от „истинных“ зарядов, появляющихся на поверхности металла. В электронной теории это отличие проявляется в существовании связанных и свободных

электронов, но в то же время в отношении явлений влияния проводник ведет себя как диэлектрик; у которого диэлектрическая проницаемость ϵ становится бесконечно большой. Таким образом, представление о диэлектрике, играющее важную роль в теории Максвелла, по-видимому, значительно обобщило электростатическую теорию вакуума.

Однако мы должны отметить, что в той степени, в какой оно понималось у Максвелла и в какой мы собираемся его вводить, представление о диэлектрике по существу отражает только внешнюю сторону явлений, так как с точки зрения электронных представлений существуют только движущиеся в пустоте заряды. Следовательно, представление о диэлектрике возникает только в результате статистических наблюдений и обобщения теории вакуума на существенно макроскопические явления. Если же мы захотим объяснить электромагнитные явления при помощи микроскопической теории, как это делается, например, в теории Лоренца или в теории фотонов, то микроскопический смысл сохранит только вектор напряженности поля, заменяющий в этом случае вектор индукции.

§ 10. Диэлектрики и диполи

Диэлектрик состоит из совокупности диполей, а его дипольный электрический момент в общем случае пропорционален напряженности действующего на диполи внешнего электрического поля.

С одной стороны, появление таких диполей может быть вызвано самим внешним полем. Под действием внешнего электрического поля электронное облако, окружающее положительно заряженный остов молекулы, и сам остов смещаются. При этом молекулу можно приближенно рассматривать как эквивалентную дипольно заряженную сферу.

В соответствии с результатами § 8 дипольный момент равен

$$q\mathbf{d} = \alpha\mathbf{E} \quad (\alpha = \epsilon_0 R^3), \quad (1.75)$$

где R имеет такой же порядок величины, как и линейные размеры молекулы. Если внутри объема \mathcal{V} находится N атомов, то дипольный момент, отнесенный к единице объема, равен

$$\mathbf{P} = \frac{N}{\mathcal{V}} q\mathbf{d} = \frac{N}{\mathcal{V}} \alpha\mathbf{E}. \quad (1.76)$$

Дипольный электрический момент \mathbf{P} единицы объема называется также *вектором поляризации диэлектрика*.

С другой стороны, диполи могут существовать и в отсутствие внешнего электрического поля. Например, это имеет место, если каждая из молекул газа или жидкости состоит из положительного

и отрицательного ионов. В отсутствие внешнего поля ориентация моментов отдельных молекул носит случайный характер и средний момент равен нулю. Внешнее электрическое поле ориентирует молекулы в направлении, параллельном напряженности поля, и результирующий дипольный электрический момент, как и в предыдущем случае, становится пропорциональным напряженности внешнего поля.

Различить эти два возможных способа образования полного дипольного электрического момента среды можно, учитывая, что постоянные диполи испытывают тепловые колебания, препятствующие появлению дипольного момента у всей системы. Величина этого дипольного момента системы при заданном внешнем поле обратно пропорциональна абсолютной температуре. В случае же наведенных диполей дипольный момент совершенно не зависит от температуры.

§ 11. Поляризация и смещение

Пусть диэлектрик находится в объеме \mathcal{V} , ограниченном поверхностью S (фиг. 6). Поляризация молекулы вызвана смещением d заряда q . Если в единице объема находится N/\mathcal{V} зарядов, то заряд, переносимый через площадку dS вдоль направленной наружу нормали \mathbf{n} , равен

$$dq = \frac{N}{\mathcal{V}} q d_n dS. \quad (1.77)$$

Но $(N/\mathcal{V}) q d$ — это отнесенный к единице объема дипольный момент, т. е. вектор поляризации \mathbf{P} . Поэтому переносимый через поверхность S заряд равен

Фиг. 6. Смещение зарядов и поляризация диэлектрика.

$$\int_S P_n dS.$$

Если ρ' — плотность заряда, который в результате появляется внутри объема \mathcal{V} , то

$$\int_S P_n dS = - \int_{\mathcal{V}} \rho' d\mathcal{V}. \quad (1.78)$$

Применяя теорему Грина

$$\int_S P_n dS = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{P} d\mathcal{V}, \quad (1.79)$$

получаем локальные соотношения

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho'. \quad (1.80)$$

Если в объеме \mathcal{V} дополнительно имеются еще заряды с плотностью ρ , не связанные с поляризацией, то, поскольку мы пользуемся микроскопическим описанием, уравнение (1.14), вытекающее из теоремы Гаусса, следует записать, разумеется, для пустого пространства. Таким образом, в него будет входить постоянная ϵ_0 и полная плотность заряда $\rho + \rho'$, так что

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon_0} (\rho + \rho'), \quad (1.81)$$

т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi\rho}{\epsilon_0} - \frac{4\pi}{\epsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (1.82)$$

Значит

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = 4\pi\rho; \quad (1.83)$$

сравнение с определением \mathbf{D} [см. (1.66)] дает возможность записать

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}.} \quad (1.84)$$

С другой стороны, как \mathbf{D} , так и \mathbf{P} пропорциональны \mathbf{E} . Поэтому, согласно (1.67), (1.64) и (1.76),

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.85)$$

$$\mathbf{P} = \frac{N\alpha}{\gamma^p} \mathbf{E} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.86)$$

где мы положили

$$\chi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{N\alpha}{\gamma^p}. \quad (1.87)$$

Величиной χ_e определяется *поляризуемость*. Из (1.84) следует

$$\boxed{\chi_e = 1 + 4\pi\chi_e.} \quad (1.88)$$

На значения α , разумеется, влияет присутствие окружающих молекул. При достаточной плотности диэлектрика значения поляризуемости и диэлектрической проницаемости определяются из опыта. Соотношение (1.84) всегда справедливо, однако для векторов индукции, поляризации и напряженности электрического поля в общем случае уже не будет выполняться условие пропорциональности.

Задачи

1. Заряд имеет сферически-симметричное непрерывное распределение. Определить, какова должна быть плотность $\rho(r)$ для создания потенциала вида

$$V = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{qe^{-ar}}{r},$$

где a и q — постоянные. Вычислить заряд, который должна была бы иметь находящаяся в центре материальная точка для того, чтобы был создан такой же потенциал.

2. Вычислить напряженность создаваемого диполем электрического поля.

3. а) Вычислить напряженность электрического поля E_1 внутри шара из однородного диэлектрика, помещенного в постоянное электрическое поле напряженностью E_0 .

б) Рассмотреть предельные случаи, когда диэлектрик отсутствует и когда он заменен проводником.

в) Чему равен момент диполя, создающего такое же внешнее поле, как и поляризованная сфера?

г) При тех же условиях вычислить напряженность поля, создаваемого в сферической полости внутри диэлектрика. Каковы для этого случая предельные значения?

У к а з а н и е. а) Для потенциала вне шара взять решение V в виде (1.54) и выбрать три постоянные a , b и ϵ_1 таким образом, чтобы имели место равенство $E_0 = -(\partial V/\partial z)_\infty$, равенство потенциалов $(\varphi_1)_{r=R} = (V)_{r=R}$ ($E_1 = -\partial\varphi_1/\partial z$) и равенство нормальных составляющих индукции $\epsilon_0(\partial V/\partial r) = \epsilon_1(\partial V/\partial r)$.

б) Предельные случаи соответствуют $\epsilon_1 = \epsilon_0$; $\epsilon_1 = \infty$.

в) Воспользоваться тем, что $m_e = qd = \epsilon_0 b$.

г) Следует поменять местами ϵ_0 и ϵ_1 .

Напряженность поля E_1 внутри полости меняется от E_0 до $(\epsilon_1/\epsilon_0)E_0$.

4. Как влияет электрический заряд $+e$ на бесконечный диэлектрик, ограниченный плоской поверхностью.

У к а з а н и е. Вычислить потенциал, создаваемый зарядом $+e$ и зеркально расположенным зарядом $-e$ (симметричным заряду $+e$ по отношению к поверхности диэлектрика). Записать условия непрерывности потенциала для плоскости, разделяющей диэлектрик и пустоту.

ГЛАВА 2

МАГНЕТОСТАТИКА

§ 1. Состояния, не меняющиеся с течением времени. Опытный закон Био — Савара

Магнитное поле может создаваться как токами, т. е. движущимися зарядами, так и намагниченными телами. Мы начнем с изучения намагничивания, создаваемого токами, что позволит получить простую модель диполей, используемых для описания намагниченных тел.

Электрическое и магнитное поля не зависят одно от другого только в чисто статическом случае. Для нестационарных процессов величины, характеризующие электрическое и магнитное поля, зависят друг от друга. В магнетостатике рассматривается только относительно простой случай не меняющихся с течением времени состояний, связанных с существованием постоянной плотности электрического тока i .

Постоянный ток есть равномерное движение электрических зарядов. Если \mathbf{v} — скорость заряда, проходящего в проводнике через площадку dS , и v_n — проекция этой скорости на нормаль к dS , то

$$\rho v_n dS = i, \quad (2.1)$$

и для отрезка пути длиной dl получаем

$$i dl = v_n \rho dS dl = qv, \quad (2.2)$$

где q — заряд, содержащийся в элементе объема $dS dl$ проводника.

Если заряд q поместить вблизи проводника, по которому течет электрический ток, или постоянного магнита, то можно показать, что на этот заряд действует сила

$$\boxed{F = q [\mathbf{v} \times \mathbf{B}].} \quad (2.3)$$

Вектор \mathbf{B} характеризует поле, создаваемое магнитом или элементом тока.

Аналогично на расположенный вблизи электрического тока или магнита элемент проводника dl , по которому проходит ток i , действует сила

$$F = i [dl \times B]. \quad (2.4)$$

Магнитная индукция \mathbf{B} обусловлена зарядом q' , движущимся равномерно со скоростью \mathbf{v}' , или же постоянным током i' , протекающим по элементу проводника $d\mathbf{l}'$. Величина вектора магнитной индукции определяется из опытного закона Био — Савара:

$$\mathbf{B} = \frac{q' [\mathbf{v}' \times \mathbf{r}]}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{i' [d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}']}{|\mathbf{r}|^3}, \quad (2.5)$$

т. е.

$$\mathbf{F} = \frac{qq'}{|\mathbf{r}|^3} [\mathbf{v} \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{r})] = \frac{ii'}{|\mathbf{r}|^3} [d\mathbf{l} \times (d\mathbf{l}' \times \mathbf{r})], \quad (2.6)$$

где r — расстояние между пробной частицей и зарядом (или элементом тока), обуславливающим индукцию \mathbf{B} .

В электростатике мы видели, что значение напряженности электрического поля может быть получено из закона Кулона, но что такой метод определения имеет очень ограниченную область применения. Более целесообразным оказывается введение потенциала, являющегося решением уравнений Лапласа или Пуассона, что соответствует замене интегральных соотношений (которые в отдельных частных случаях эквивалентны закону дальнего действия) на систему уравнений в частных производных. Так же обстоит дело и в магнетостатике. Необходимо получить систему локальных уравнений (уравнений в частных производных), из которых могут быть выведены основные законы магнетостатики и, в частности, закон Био — Савара.

§ 2. Общие законы магнитных явлений

1. Первый закон. Вокруг тока или магнита имеется поток магнитной индукции. График силовых линий показывает, что они выходят из магнита (или из магнитного листка, эквивалентного замкнутому току) и в него возвращаются. Не пересекающая магнит (или магнитный листок) замкнутая поверхность пересекается силовыми линиями $2n$ раз. Таким образом, полный поток через нее равен нулю, т. е.

$$\int_S B_n dS = 0, \quad (2.7)$$

так что

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.} \quad (2.8)$$

Вектор \mathbf{B} характеризует магнитную индукцию в рассматриваемой среде. Поэтому при помощи соотношения типа (1.67), исходя из \mathbf{B} , можно определить напряженность магнитного поля

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}.} \quad (2.9)$$

Величиной μ характеризуется *магнитная проницаемость* среды, а \mathbf{H} является предельным значением, которое принимает вектор индукции для пустоты. Несмотря на аналогию между выражениями (1.67) и (2.9), в дальнейшем мы увидим, что \mathbf{H} , как и \mathbf{D} в электростатике, не является в теории первичной величиной. Основными величинами, непосредственно вводимыми в микроскопической теории, являются напряженность электрического поля \mathbf{E} и магнитная индукция \mathbf{B} , которую как раз и следует считать истинным аналогом напряженности электрического поля.

2. Второй закон. Сравним смещения электрического заряда и фиктивного магнитного заряда. В обоих случаях при перемещении вдоль замкнутой траектории L' совершаемая частицей работа должна равняться нулю:

$$W_{L'} = 0. \quad (2.10)$$

При перемещении вдоль силовой линии L совершаемая частицей работа не может равняться нулю:

$$W_L \neq 0. \quad (2.11)$$

Из сравнения (2.10) и (2.11), казалось бы, можно сделать вывод, что силовая линия L не может быть замкнута, так как, согласно закону сохранения энергии, полная совершаемая работа должна равняться нулю. Это действительно имеет место для силовых линий в поле зарядов и элементарных магнитов; они не замыкаются, так что в этом случае соотношение (2.10) будет выполняться для перемещений по *любым* поверхностям, натянутым на замкнутые контуры (которые не могут совпадать с какими-либо из силовых линий). Поэтому

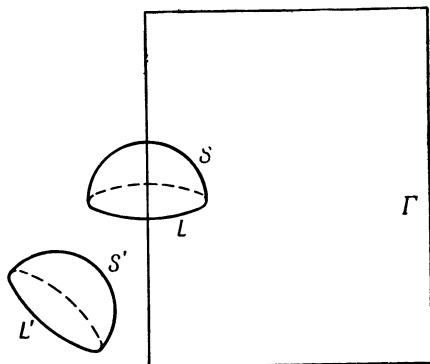
$$W_{L'} = \int E_{L'} dL' = \int \text{rot}_n \mathbf{E} dS' = 0 \quad (2.12)$$

или

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{E} = 0, \mathbf{E} = \text{grad } V.} \quad (2.13)$$

Таким образом, поле может здесь характеризоваться заданием потенциала.

Напротив, силовые линии в поле тока замыкаются. Поэтому для некоторых замкнутых траекторий, являющихся силовыми



Фиг. 7. Силовые линии и замкнутые траектории.

линиями L , должно иметь место соотношение (2.11). Тем не менее, поскольку невозможно перемещать изолированные фиктивные магнитные заряды, закон сохранения энергии практически остается справедливым, но поле \mathbf{H} больше уже нельзя характеризовать заданием потенциала, как это сделано в (2.13). Для интеграла вдоль замкнутой траектории, которая теперь может совпадать с силовой линией, вместо (2.12) имеем

$$W_L = \int H_L dL = \int \text{rot}_n \mathbf{H} dS \neq 0. \quad (2.14)$$

Между тем, согласно (2.10), если натянутая на L' поверхность S' не пересекает проводник, то $\text{rot} \mathbf{H}$ везде равен нулю. Поэтому $\text{rot} \mathbf{H}$ может отличаться от нуля лишь в тех местах, где эта поверхность пересекает проводник Γ . Любая натянутая на силовую линию поверхность S , на которой, следовательно, не везде $\text{rot} \mathbf{H} = 0$, должна пересекаться проводником в одной точке (или в нечетном числе точек). Если силовая линия L замкнута, то это возможно только в том случае, если и сам проводник Γ замкнут; каждый ток течет, таким образом, по замкнутому пути, что а posteriori оправдывает точку зрения Максвелла и введение токов смещения.

Вычислим теперь W_L для случая, когда силовая линия L лежит на поверхности S . Положим

$$W_L = 4\pi i, \quad (2.15)$$

мы этим определим систему электромагнитных единиц для тока i ¹⁾. Тогда

$$\int_L H_L dL = 4\pi \int_S I_n dS, \quad \text{где } i = \int I_n dS. \quad (2.16)$$

Здесь I_n — проекция вектора плотности тока \mathbf{I} на нормаль к поверхности dS .

Таким образом, для любой точки проводника Γ

$$\boxed{\text{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{I}.} \quad (2.17)$$

Сравнение уравнений (2.8), (2.9) и (2.17) показывает, что магнитное равновесие установится лишь в том случае, если \mathbf{B} одновременно подчиняется уравнениям

$$\boxed{\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot} \mathbf{B} = 4\pi \mu \mathbf{I}.} \quad (2.18)$$

¹⁾ Если при таком выборе единиц для среды с диэлектрической проницаемостью ϵ закон Кулона записать в виде $F = (1/\epsilon)(qq'/r^2)$ и q и q' выразить в электромагнитных единицах, то для пустоты $\epsilon_0 \neq 1$.

Решением этих уравнений будет

$$\boxed{B = \text{rot } A,} \quad (2.19)$$

где вектор A должен подчиняться уравнениям ¹⁾

$$\Delta A = -4\pi\mu I, \quad \text{div } A = 0. \quad (2.20)$$

В частности, решением последних уравнений будет

$$\boxed{A = \mu \int \frac{I}{r} d\mathcal{V}.} \quad (2.21)$$

Это решение указывает на возможность магнитного равновесия ²⁾, точно так же, как решение $V = (1/\epsilon) \int \rho (d\mathcal{V}/r) + (1/\epsilon) \int \sigma (dS/r)$ говорит о возможности электрического равновесия в однородном диэлектрике.

3. Применение: закон Био — Савара. Рассмотрим теперь частный случай, когда через отрезок проводника постоянного сечения a и длиной dl протекает ток плотностью I . При этом

$$I d\mathcal{V} = I a dl = i dl. \quad (2.22)$$

Из (2.21) следует, что

$$dA = \frac{\mu i}{r} dl. \quad (2.23)$$

Отсюда, согласно (2.19),

$$dB = \text{rot } dA = \frac{\mu i}{r} \text{rot } dl + \mu i \left[\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \times dl \right] = \mu i \frac{[dl \times r]}{|r|^3}. \quad (2.24)$$

Это соотношение в точности совпадает с формулой (2.5), установленной экспериментально Био и Саваром. Оно выведено из локальных уравнений в частных производных, при получении которых было использовано допущение об аналогичном характере поведения электрических зарядов и фиктивных магнитных зарядов.

¹⁾ В самом деле, с решением в виде (2.19) первое из уравнений (2.18) выполняется, а второе переписывается в виде

$$\text{rot rot } A = \text{grad div } A - \Delta A = 4\pi\mu I,$$

откуда и вытекает условие (2.20).

²⁾ Разность между двумя решениями B и B' , подчиняющимися уравнениям (2.18), будет конечным решением однородных уравнений во всех точках. Поэтому она будет тождественно равна нулю и состояние при магнитном равновесии будет однозначно характеризоваться заданием B .

§ 3. Магнитные диполи

Рассмотрим замкнутый контур с током, ограничивающий элемент поверхности dS . Из точки P он виден под телесным углом Ω . Из фиг. 8 видно, что смещению точки P на dP соответствует приращение телесного угла $d\Omega$:

$$d\Omega = \int d\omega, \quad \text{где } \omega = -\frac{(dP \times dl)_n}{|r|} = \frac{([dP \times dl] \cdot r)}{|r|^2}, \quad (2.25)$$

а $-(dP \times dl)_n$ является проекцией элемента поверхности, построенного на векторах $-dP$ и dl , на плоскость, перпендикулярную к r .

Таким образом,

$$\begin{aligned} d\Omega &= -\int \frac{([dP \times dl] \cdot r)}{|r|^3} = \\ &= -\int \frac{(dP \cdot [dl \times r])}{|r|^3}. \end{aligned}$$

Но

$$d\Omega = (\text{grad } \Omega \cdot dP); \quad (2.26)$$

следовательно,

$$\text{grad } \Omega = -\int \frac{dl \times r}{|r|^3} \quad (2.27)$$

и, согласно (2.24),

$$B = -\mu i \text{grad } \Omega. \quad (2.28)$$

В нашем частном случае индукция B определяется по заданному скалярному потенциалу

$$V = \mu i \Omega, \quad (2.29)$$

и из (2.28) следует

$$\text{rot } B = 0. \quad (2.30)$$

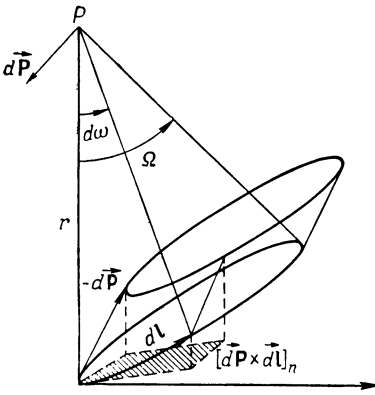
Полученное выражение для потенциала

$$V = \mu i \Omega = \frac{\mu i}{r^2} S \cos \theta \quad (2.31)$$

очень похоже на выражение для потенциала

$$V = \frac{1}{\epsilon} \frac{qd}{r^2} \cos \theta,$$

создаваемого электрическим диполем. Поэтому можно сказать, что замкнутый контур с током является фиктивным магнитным диполем с моментом iS (так называемым *магнитным листком*).



Фиг. 8. Определение $\text{grad } \Omega$.

С помощью понятия о магнитном листке легко снова получить соотношения (2.18). В самом деле, согласно (2.28),

$$\int B_L dL = -\mu i \int d\Omega. \quad (2.32)$$

Для любого контура L , пересекающего листок только один раз,

$$\int d\Omega = -4\pi, \quad (2.33)$$

где Ω считается положительным. Таким образом,

$$\int B_L dL = 4\pi\mu i. \quad (2.34)$$

Для любого другого контура L'

$$\int B_{L'} dL' = 0. \quad (2.35)$$

Но если I — плотность тока, проходящего через поверхность S , т. е. если $i = \int I_n dS$, то, согласно теореме Стокса и соотношению (2.34),

$$\int B_L dL = \int_S \text{rot}_n \mathbf{B} dS = 4\pi \int_S \mu I_n dS. \quad (2.36)$$

Отсюда получаем уравнение в частных производных

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\mu \mathbf{I}. \quad (2.37)$$

Соотношение (2.34) называется также *законом Ампера*; уравнение (2.37) является его дифференциальной формой.

В любой области, где $\mathbf{I} = 0$, т. е. в любой точке пространства, лежащей вне проводника Γ , $\text{rot } \mathbf{B} = 0$.

Закон Ампера, содержащийся в уравнениях (2.18), был выведен из общих законов магнетостатики. Мы только что получили его как следствие из опытного закона Био — Савара. Таким образом, закон Био — Савара позволяет связать понятия о токе и магнитном листке и получить общие уравнения (2.18). Но и здесь такой путь мало соответствует духу теории Максвелла, которая ставит своей целью заменить дальное действие на локальные уравнения в частных производных. В связи с этим можно или принять *гипотезу* Ампера и произвольным образом связывать элементы тока с магнитными листками или диполями — в этом случае общие уравнения (2.18) выводятся так же, как это делалось в настоящем параграфе — или же можно по аналогии с электростатикой сохранить гипотетическое соотношение (2.17), допускающее существование и перемещение фиктивных магнитных зарядов.

В любом случае эти постулаты обосновываются своими следствиями — выводом из закона Био — Савара и опытным подтверждением всех вытекающих из них следствий.

§ 4. Намагничивающиеся среды

Аналогично тому, как электризующиеся среды образованы из электрических диполей, намагничивающиеся среды образованы из магнитных диполей. А priori известно три типа намагничивающихся сред.

1. *Диамagnetики*. Диамagnetные среды не содержат постоянных диполей; диполи образуются при наложении внешнего поля. Явление поляризации атома во внешнем электрическом поле мы уже объяснили, предположив, что атомные электроны (электронная оболочка) могут более или менее свободно перемещаться внутри атома и в результате превратить его в электрический диполь. Аналогично, если этот атом находится в области, где вектор магнитной индукции \mathbf{B} изменяется с течением времени, то в атоме возникает электрический ток, направление циркуляции которого будет определяться из условия, чтобы наведенный магнитный момент был направлен противоположно вызвавшему его появление вектору магнитной индукции \mathbf{B} . Если среда обладает только таким направленным противоположно вектору \mathbf{B} дипольным моментом, то она называется *диамagnetной*.

2. *Парамагнетики*. Мы видели, что в некоторых средах электрические диполи имеются даже в отсутствие внешнего электрического поля. Аналогично, постоянные магнитные диполи могут существовать и в том случае, когда вектор магнитной индукции равен нулю. В отсутствие внешнего магнитного поля такие диполи ориентированы беспорядочно и создаваемый ими момент равен нулю. Если же на среду накладывается ориентирующее их внешнее магнитное поле, то у системы возникает результирующий дипольный момент, который добавляется к вектору магнитной индукции. Этот эффект называется *парамагнетизмом*. Если такой эффект существует, то, вообще говоря, он играет довольно значительную роль и всегда преобладает над диамagnetизмом. Как и в случае соответствующего электрического дипольного момента, величина парамагнитного дипольного момента обратно пропорциональна абсолютной температуре. (Напротив, диамagnetный момент не зависит от абсолютной температуры.) Существование магнитных диполей в отсутствие внешнего поля, более полное описание которых возможно только на основе квантовых теорий, обусловлено следующими двумя причинами.

а) Электроны в атоме вращаются вокруг ядра. Они могут двигаться в противоположных направлениях и их действия, как это

имеет место в случае диамагнитных веществ, могут компенсироваться. Если этого не происходит, то появляется остаточный ток, существование которого уже было постулировано Ампером и который называется поэтому током Ампера. Природа таких токов и величина результирующего магнитного момента была определена в квантовой теории Зоммерфельда.

б) Кроме того, электроны испытывают характерное „собственное вращение“. Собственному моменту количества движения электронов, называемому спином, соответствует магнитный момент. Поэтому атом может обладать собственным остаточным магнитным моментом, связанным со спинами входящих в него электронов. Диамагнитным будет такое вещество, у которого для совокупности электронов сумма орбитального и спинового магнитных моментов обращается в нуль. Гипотеза вращающегося магнитного электрона рассматривалась уже в первых квантовых теориях, но правильное объяснение она получила только в релятивистской теории Дирака.

3. *Ферромагнетики.* Предельным случаем парамагнетизма является ферромагнетизм. Его объяснение может быть получено только в квантовой теории, где показывается, что на постоянные диполи, моменты которых, например, обусловлены спинами электронов, действуют обменные силы, стремящиеся одинаково ориентировать спины двух соседних атомов или молекул. В связи с этим в некоторых веществах возникают области, размер которых порядка атомных размеров; для этих областей магнитные моменты имеют значительную величину, что объясняется сложением спинов находящихся в этих областях различных электронов. В отсутствие поля распределение магнитных моментов областей носит случайный характер, но во внешнем поле они ориентируются по направлению поля, и у вещества появляется значительный магнитный момент. Когда спины всех различных областей, так называемых доменов, становятся параллельными, этот момент достигает своего предельного значения, которое называется *моментом насыщения*. При уменьшении внешнего поля результирующий магнитный момент убывает, но с некоторым запозданием, вызванным своего рода внутримолекулярным трением. Это явление называется *гистерезисом*. Оно лежит в основе *остаточного магнетизма*, связанного с существованием остаточного магнитного момента даже для случая, когда внешнее поле становится равным нулю.

Поскольку для ферромагнитных явлений магнитный момент не пропорционален величине поля, как это имеет место для диамагнитных или парамагнитных явлений, то поведение ферромагнитных веществ довольно сложно. При возрастании температуры намагниченность ферромагнетиков уменьшается, и они теряют ферромагнитные свойства при критической температуре θ , соответствующей

так называемой „точке Кюри“. При достаточно высоких температурах тепловое движение препятствует одинаковой ориентации магнитных моментов различных доменов и ниже критической точки магнитный момент пропорционален $(T - \theta)^{-1}$.

§ 5. Магнитный момент листка. Магнитная проницаемость и восприимчивость

В диамагнитной или парамагнитной среде магнитный момент пропорционален индукции B . Обозначим этот момент, отнесенный к единице объема, через M . Он будет равен моменту магнитного листка, образованного элементарным контуром, по которому течет постоянный ток j , где

$$\int_L M_L dL = \int_S \text{rot } M \cdot dS = j = \int_S J_n dS. \quad (2.38)$$

Поэтому

$$\text{rot } M = J. \quad (2.39)$$

Полученное нами для стационарного режима уравнение ¹⁾

$$\text{rot } B = 4\pi\mu_0 I \quad (2.40)$$

имеет место для *полного* тока, который проходит через поверхность, натянутую на контур L . При отсутствии намагничивающейся среды контур с током Γ образует магнитный листок, момент которого iS зависит от плотности тока I , где $i = \int I_n dS$. Такой ток возникает в проводнике при обычном переносе зарядов. Однако если листок Γ находится в намагничивающемся веществе, то имеется также ток плотностью J , возникающий в результате магнитной поляризации этого вещества. Поэтому в магнетике, как и в диэлектрике, где одновременно существуют ток проводимости и ток поляризации, имеем

$$\text{rot } B = 4\pi\mu_0 (I + J). \quad (2.41)$$

Но, согласно (2.39),

$$\text{rot } M = J, \quad (2.39)$$

т. е.

$$\boxed{\text{rot } H = 4\pi I}, \quad (2.42)$$

где мы положили

$$H = \frac{B}{\mu_0} - 4\pi M. \quad (2.43)$$

¹⁾ Здесь, разумеется, необходимо положить $\mu = \mu_0$. В рассматриваемом случае предполагается существование в пустоте только магнитных диполей.

Таким образом, напряженность магнитного поля H играет здесь такую же роль, как и электрическая индукция D в электростатике. В общем случае

$$\boxed{B = \mu_0(H + 4\pi M)}. \quad (2.44)$$

С другой стороны, известно, что для диа- или парамагнитных сред магнитный момент M пропорционален B . Поэтому

$$M = aB, \quad (2.45)$$

причем, согласно (2.9),

$$B = \mu H. \quad (2.46)$$

Таким образом, из (2.44) — (2.46) имеем

$$\mu = \mu_0(1 + 4\pi a\mu). \quad (2.47)$$

Оказывается удобным ввести *магнитную проницаемость* среды

$$\boxed{\chi_m = \frac{\mu}{\mu_0}} \quad (2.48)$$

и *магнитную восприимчивость* этой же среды

$$\boxed{\chi_m = \frac{M}{H}}. \quad (2.49)$$

Последняя будет положительной или отрицательной в зависимости от того, будет ли рассматриваемое вещество парамагнитным или диамагнитным.

С другой стороны, для диа- или парамагнитных веществ величина χ_m будет близка к единице, тогда как χ_m по сравнению с единицей очень мала. (В противоположность этому, величина χ_e может быть значительно больше единицы.)

Согласно (2.45) и (2.46),

$$\chi_m = a\mu. \quad (2.50)$$

С учетом (2.47) и (2.50) соотношение (2.48) перепишется также в виде

$$\boxed{\chi_m = 1 + 4\pi\chi_m}. \quad (2.51)$$

Задачи

1. Вычислить векторный потенциал A снаружи и внутри бесконечного прямолинейного провода радиусом R , по которому течет ток плотностью I . Найти напряженность магнитного поля снаружи и внутри провода.

Указание. Выбрать направление провода за ось Oz ($I = J_z$, $A = A_z$ и в уравнениях (2.20) ввести переменную $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Интегрирование дает $|A| = C_1 Lr + C_2 - \pi\mu I r^2$.

а) Снаружи провода $I = 0$ и из (2.15) следует, что $C_1 = -2\mu i$.

б) Внутри провода из условий $C = 0$ (потенциал A конечен), $\pi R^2 I = i$ и $A_{\text{внутр.}} = A_{\text{внешн.}}$ следует, что

$$|A| = -2\mu i \left[LR + C_2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R} \right) \right].$$

С учетом (2.19) из „а“ и „б“ получим

$$|H|_{\text{внешн.}} = \frac{2i}{r}, \quad |H|_{\text{внутр.}} = 2i \frac{r}{R^2}.$$

2. Определить величину и направление напряженности магнитного поля H , создаваемого равномерным вращением заряженной сферы вокруг одного из своих диаметров. (Сфера характеризуется заданием радиуса R и поверхностной плотности заряда σ .) Показать, что внутри сферы напряженность поля H не меняется.

3. Электрон с зарядом e движется со скоростью v по кругу радиуса r . Вычислить создаваемый им магнитный момент. Показать, что этот момент пропорционален моменту количества движения. Найти магнитный момент для случая, когда момент количества движения равен $h/2\pi$.

ГЛАВА 3

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Электростатика и магнетостатика рассматривают две группы явлений, которые до начала прошлого века казались совершенно различными по своей природе. Только при изучении магнитного поля, создаваемого постоянными токами, впервые удалось установить аналогию в действии магнитов и движущихся зарядов (Эрстед). Приблизительно в 1830 г. Фарадей провел серию опытов, ставящих своей целью установить взаимный характер эффекта Эрстеда. Он предположил, что магнитная индукция должна вызывать электрический ток. Если бы эта гипотеза оказалась правильной, то наличия магнитной индукции, обусловленной первичным контуром с током, оказалось бы достаточным для того, чтобы в находящемся поблизости вторичном контуре возникал ток. В действительности же Фарадей обнаружил, что индукционный ток появляется не тогда, когда просто имеется магнитная индукция, а когда она изменяется. Электрический ток в находящемся поблизости вторичном контуре возникает только в том случае, когда ток в первичном контуре включается или выключается, т. е. когда поток индукции изменяется. Таким оказался результат опытов Фарадея.

Наличие электродвижущей силы индукции нужно было отразить в математическом аппарате, что позволило бы дать единое описание электрических и магнитных явлений и нового закона Фарадея. Эта программа была осуществлена Максвеллом несколько лет спустя. Он составил систему уравнений в частных производных, дающих возможность удовлетворительным образом объединить все законы электромагнетизма. Но при этом в уравнения Максвелла вошел новый член, наличие которого оказалось необходимым для их самосогласованности; сам Максвелл истолковывал этот член как ток смещения, причем он предположил, что любой электрический ток обязательно является замкнутым током. Существование тока смещения было доказано на опыте, и его величина фактически оказалась именно такой, как предсказывала теория. Уравнения Максвелла, с помощью которых можно было

описать все известные к тому времени электрические и магнитные явления, позволили, кроме того, предвидеть существование электромагнитных волн. Таким образом, теория была распространена на громадную область явлений, в которую оказалась включенной и оптика.

В связи с широкой областью применимости и достигнутыми успехами электромагнитная теория Максвелла приобрела такое большое значение, что когда обнаружилось противоречие между ее основными положениями и основами классической кинематики, то выбор был сделан в пользу теории Максвелла. Обобщение максвелловской теории, которая в неявном виде содержала релятивистскую кинематику, позволило создать специальную теорию относительности.

А. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ И ТОК СМЕЩЕНИЯ

§ 1. Опытный закон Фарадея

Создание магнитного поля электрическим током постоянной интенсивности относится к области стационарных явлений. Если же интенсивность тока с течением времени меняется или если контур перемещается, то мы получим изменяющиеся состояния. Если изменение происходит медленно, точнее, если время изменения велико по сравнению с временем распространения электромагнитного возмущения внутри рассматриваемой системы, то можно воспользоваться теорией Максвелла для стационарных режимов. Указанное условие выполняется для большого числа случаев, к рассмотрению которых мы и собираемся теперь перейти.

Если поблизости от контура вектор магнитной индукции изменяется, то в контуре возникает ток, связанный с появлением электродвижущей силы индукции. Опыт показывает, что э. д. с. индукции пропорциональна скорости изменения проходящего через контур потока индукции:

$$e = - \frac{d}{dt} \int_S B_n dS. \quad (3.1)$$

Здесь e — полная создаваемая в контуре э. д. с. индукции, равная работе электрического поля

$$\int_L E_L dL = \int_S \text{rot}_n E dS. \quad (3.2)$$

Таким образом, мы получаем локальное уравнение

$$\frac{\partial B}{\partial t} = - \text{rot } E. \quad (3.3)$$

Это уравнение представляет собой запись в дифференциальной форме опытного закона Фарадея.

Как мы знаем, \mathbf{B} можно выразить через векторный потенциал A :

$$\mathbf{B} = \text{rot } A. \quad (3.4)$$

Сравнение (3.3) и (3.4) показывает, что роторы векторов — $(\partial A/\partial t)$ и \mathbf{E} одинаковы, т. е. они отличаются только на градиент. Поэтому можно положить

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \psi, \quad (3.5)$$

где ψ — некоторая скалярная функция.

§ 2. Ток проводимости. Ток смещения

1. Ток проводимости. Электрический ток, возникающий в проводнике при движении зарядов, связан с наличием напряженности электрического поля \mathbf{E} , определяемой по заданному потенциалу V :

$$\mathbf{E} = \text{grad } V. \quad (3.6)$$

Для линейного проводника можно определить силу тока

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (3.7)$$

которая равна количеству электричества, протекающего через сечение проводника за единицу времени.

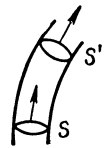
Согласно вытекающему из опытных данных закону Ома, каждый проводник можно характеризовать удельным сопротивлением ρ_c и удельной проводимостью $\sigma_c = 1/\rho_c$. Из определения напряженности электрического поля \mathbf{E} и из закона Ома следует, что напряженность и электрический ток связаны соотношениями

$$\mathbf{E} = \rho_c \mathbf{I} \quad \text{или} \quad \mathbf{I} = \sigma_c \mathbf{E}. \quad (3.8)$$

В этих соотношениях \mathbf{I} является плотностью тока, т. е. силой тока, отнесенной к единице поверхности, через которую проходит ток.

Для стационарного режима ток, проходящий через поверхность S , равен току, проходящему через поверхность S' (фиг. 9). Другими словами, электричество ведет себя как несжимаемая жидкость, что приводит к соотношению

$$\text{div } \mathbf{I} = 0, \quad (3.9)$$



Фиг. 9. Стационарный режим. Поток сохраняется.

2. Электрический ток смещения. Определением тока (3.7) можно пользоваться не только для замкнутых контуров, в которых существует электродвижущая сила: она может служить также для характеристики силы тока, возникающего при разрядке конденсатора. При этом dq будет равно изменению заряда обкладок конденсатора за единицу времени, однако ток кажется протекающим по незамкнутому контуру.

Максвелл предложил гипотезу, согласно которой незамкнутых контуров не существует, в связи с чем силовые линии всегда замыкаются. Поэтому в случае разрядки конденсатора нужно предположить, что как и для равновесных состояний, остается по-прежнему справедливой теорема Гаусса:

$$\int_S D_n dS = 4\pi q, \quad (3.10)$$

т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho. \quad (3.11)$$

С учетом (3.7) можно определить электрический ток смещения

$$i' = \frac{dq}{dt} = \int I'_n dS, \quad (3.12)$$

так что

$$\boxed{I' = \frac{1}{4\pi} \frac{dD}{dt}}. \quad (3.13)$$

Поэтому для среды, являющейся одновременно проводником (характеризуемым заданием σ_c) и диэлектриком (характеризуемым заданием ϵ), ток необходимо определять следующим образом:

$$\boxed{I_e = I + \frac{1}{4\pi} \frac{dD}{dt} = \sigma_c E + \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t}}. \quad (3.14)$$

Полный электрический ток несжимаем и для него выполняется соотношение

$$\operatorname{div} I_e = 0, \quad (3.15)$$

причем учитывается существование тока смещения.

3. Введение тока смещения в уравнения для поля. Выше было получено уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{I}, \quad (3.16)$$

где в соответствии с законом Ампера предполагается, что \mathbf{I} является *током проводимости в рассматриваемом контуре*.

Если это уравнение применить к напряженности магнитного поля, которое имеет место в случае, казалось бы, незамкнутого контура с разряжающимся конденсатором, то получим

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{I} = 0; \quad (3.17)$$

фактически это означает, что контур замкнут.

Максвелл предположил, что так оно и есть, но только в уравнение (3.16) должен входить ток \mathbf{I}_e , являющийся суммой тока \mathbf{I} и дополнительного тока \mathbf{I}' , называемого током смещения.

Для стационарного режима $\mathbf{I}' = 0$, и здесь, следовательно, можно пользоваться законом Ампера. Но для режима, меняющегося с течением времени (как это имеет место, например, когда разряжается конденсатор), мы должны будем записать

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{I}_e}, \quad (3.18)$$

причем

$$\operatorname{div} \mathbf{I}_e = \operatorname{div} (\mathbf{I} + \mathbf{I}') = 0. \quad (3.19)$$

Таким образом, согласно (3.13) и (3.11),

$$\operatorname{div} \mathbf{I} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \frac{d\mathbf{D}}{dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.20)$$

Б. УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

§ 3. Система единиц

Во всех предыдущих соотношениях можно было пользоваться *электростатической системой единиц CGSE*, в которой произвольно полагается

$$\epsilon_0 = 1. \quad (3.21)$$

Аналогично можно определить *электромагнитную систему единиц CGSM*, в которой

$$\mu_0 = 1. \quad (3.22)$$

Если диэлектрическую проницаемость пустого пространства произвольно положить равной единице ($\epsilon_0 = 1$), то этим определится также единица заряда; это определение будет несовместимо с определением единицы-заряда из условия $\mu_0 = 1$.

Тем не менее оказывается удобным пользоваться *смешанной системой единиц*, когда величины \mathbf{E} , \mathbf{D} , ϵ определяются в электростатической системе CGSE ($\epsilon_0 = 1$), а величины \mathbf{H} , \mathbf{B} , μ — в электромагнитной системе CGSM ($\mu_0 = 1$).

Обозначим соотношение между единицами в этих системах через c и будем индексами (e) и (m) указывать, в какой из двух

систем единиц, электростатической или электромагнитной, определяется та или иная величина. Тогда

$$\frac{q_{(e)}}{q_{(m)}} = \frac{J_{(e)}}{J_{(m)}} = \frac{\rho_{(e)}}{\rho_{(m)}} = c. \quad (3.23)$$

Если воспользоваться выражениями для силы

$$|F| = q|E| = \frac{1}{\epsilon} \frac{q^2}{r^2}, \quad F = q[v \times B], \quad (3.24)$$

справедливыми в любой системе единиц, и учесть определения $D = \epsilon E$, $B = \mu H$ и уравнение (3.18), то получим также

$$\begin{aligned} \frac{E_{(e)}}{E_{(m)}} = \frac{1}{c}, \quad \frac{\epsilon_{(e)}}{\epsilon_{(m)}} = c^2, \quad \frac{D_{(e)}}{D_{(m)}} = c, \\ \frac{B_{(e)}}{B_{(m)}} = \frac{1}{c}, \quad \frac{\mu_{(e)}}{\mu_{(m)}} = \frac{1}{c^2}, \quad \frac{H_{(e)}}{H_{(m)}} = c. \end{aligned} \quad (3.25)$$

§ 4. Основные уравнения

По аналогии с электрическим током смещения

$$I' = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} \quad (3.26)$$

оказывается удобным ввести магнитное смещение

$$J' = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial t} = J_m. \quad (3.27)$$

По существу J' характеризует полный магнитный ток J_m , так как не существует свободных магнитных полюсов, которые могли бы создавать ток проводимости типа I .

Используя эти обозначения и применяя смешанную систему единиц, можно переписать уравнения для электромагнитного поля (3.3) и (3.18) в следующем виде:

$$\text{rot } H = 4\pi J_e, \quad (3.1a)$$

$$\text{rot } E = -4\pi J_m, \quad (3.1b)$$

где

$$J_e = \frac{I}{c} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial D}{\partial t} \quad D = \epsilon E, \quad (3.1a)$$

$$\text{и } I = \sigma_c E.$$

$$J_m = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad B = \mu H. \quad (3.1b)$$

Из уравнений (3. Iа) и (3. Iб) следует

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{J}_e = 0,} \quad (3. I'a)$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{J}_m = 0.} \quad (3. I'б)$$

С другой стороны, уравнения для электрической и магнитной индукции (3.11) и (3.4) имеют вид

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho,} \quad (3. IIIа)$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.} \quad (3. IIIб)$$

Они получаются в результате применения теоремы Гаусса, причем уравнение (3. IIIб) означает, что свободных магнитных зарядов (или полюсов) не существует.

Наконец, если учесть определения (3. IIа) и (3. IIб), то из уравнений (3. IIIа) и (3. IIIб) будут следовать уравнения (3. I'a) и (3. I'б) в том случае, если

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{I} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.} \quad (3. III')$$

Это уравнение называется *уравнением непрерывности*.

Уравнения (3. I), (3. II) и (3. III) являются основными уравнениями, справедливыми для всех электромагнитных явлений¹⁾.

§ 5. Потенциал

Известно, что для статических явлений напряженность электрического поля \mathbf{E} и вектор магнитной индукции \mathbf{B} можно получить из скалярного потенциала V и векторного потенциала \mathbf{A} :

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} V, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (3.28)$$

С другой стороны, изучение индукционных явлений показывает, что индуцируемая напряженность электрического поля связана с векторным потенциалом, причем

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \Psi. \quad (3.29)$$

¹⁾ Здесь имеются в виду электромагнитные явления в изотропных средах. Для анизотропных сред выражения в правой части определений (3. IIа) и (3. IIб) должны быть обобщены. (См., например, Г. А. Лоренц, Теория электронов, М.—Л., 1956; Дж. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма, М.—Л., 1948.)—Прим. перев.

Сопоставляя эти результаты и пользуясь смешанной системой единиц, найдем соотношения, которым должны удовлетворять напряженность электрического поля \mathbf{E} и вектор магнитной индукции \mathbf{B} :

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } V, \quad (3. IVa)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (3. IVб)$$

При этом из (3. Ia), (3. Ib) и (3. IIIa), (3. IIIб) имеем

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{J}_e, \quad (3. Va)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho. \quad (3. Vб)$$

§ 6. Уравнения распространения. Запаздывающие потенциалы

Считая диэлектрическую проницаемость ϵ и магнитную проницаемость μ постоянными, с учетом (3. IVa) и (3. IVб) образуем выражения $-(\mu\epsilon/c)(\partial\mathbf{E}/\partial t) + \text{rot } \mathbf{B}$ и $\text{div } \mathbf{E}$. Используя (3. Va), (3. Vб) и определения (3. II), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{I}, \\ \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V &= \frac{4\pi}{\epsilon} \rho, \end{aligned} \quad (3. VI)$$

($\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$), причем мы ввели условие

$$\frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0, \quad (3. VII)$$

называемое *условием Лоренца*. Уравнения (3. VI) — так называемые *уравнения Даламбера* — позволяют вычислить \mathbf{A} и V . Известно, что уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} \quad (3.30)$$

имеет частное решение

$$\varphi = \int_{\mathcal{V}'} \frac{\rho}{\epsilon r} d\mathcal{V}'. \quad (3.31)$$

Каждый элемент потенциала

$$d\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\rho}{r} d\mathcal{V} \quad (3.32)$$

создается зарядом $\rho d\mathcal{V}$, находящимся на расстоянии r . Если исключить точку $r=0$, то этот потенциал будет решением уравнения Лапласа. Чтобы сумма потенциалов типа (3.32) была решением уравнений Даламбера (3. VI), нужно, чтобы каждый из этих потенциалов определялся по значениям заряда в точке $M(r)$ не для момента t , а для момента $t - (r/c')$, где $c' = c/\sqrt{\mu\varepsilon}$. Этот заряд, величина которого равна

$$\rho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c'}\right) d\mathcal{V},$$

создает в точке $P(x, y, z)$ потенциал $(1/\varepsilon r)\rho(\xi, \eta, \zeta, t - (r/c')) d\mathcal{V}$. Поскольку r/c' в точности равно времени, необходимому для того, чтобы изменение поля передавалось от точки M до точки P , в которой ищется потенциал, то именно этот потенциал будет потенциалом, создаваемым в точке P в момент времени t .

Таким образом, скалярный потенциал, являющийся решением уравнений (3. VI), имеет вид

$$V = \int_{\mathcal{V}'} \frac{1}{\varepsilon r} \rho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c'}\right) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}'} \frac{(\rho)_{t-(r/c')}}{\varepsilon r} d\mathcal{V}. \quad (3.33)$$

Аналогично

$$A = \int_{\mathcal{V}'} \frac{\mu (j)_{t-(r/c')}}{r} d\mathcal{V}. \quad (3.34)$$

Во всех точках, за исключением начала координат, эти решения подчиняются уравнениям распространения (3. VI). Они называются *запаздывающими потенциалами*, так как из-за конечной скорости распространения электромагнитных возмущений действие заряда передается в точку P с запазданием.

С другой стороны, при учете граничных условий решение уравнения Пуассона для конечной области запишется в виде¹⁾

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\Delta\varphi}{r} d\mathcal{V} - \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\varphi \operatorname{grad}_n \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \operatorname{grad}_n \varphi \right] dS. \quad (3.35)$$

¹⁾ Это решение эквивалентно решению (1.72), если положить

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma, \quad \int \varphi \operatorname{grad}_n \left(\frac{1}{r} \right) dS = 4\pi V_0$$

и произвольным образом принять потенциал V_0 равным нулю.

Можно показать¹⁾, что для ограниченной области решением уравнения Даламбера будет

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{[\Delta\varphi - (1/c'^2)(\partial^2\varphi/\partial t^2)]_{t-\frac{r}{c'}}}{r} d\mathcal{V}' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \left\{ \left[\frac{1}{c'} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)_{t-\frac{r}{c'}} + \frac{\varphi(t-\frac{r}{c'})}{r} \right] \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_{t-\frac{r}{c'}} \right\} dS. \quad (3.36)$$

Первый интеграл связан с пространственным распределением заряда, а второй — характеризует распределение заряда на поверхности. Этот интеграл играет важную роль в оптике, так как он позволяет дать математическую формулировку теоремы Гюйгенса. Каждый элемент сферической волновой поверхности ведет себя как источник, испускающий вторичную волну, поведение которого описывается формулой (3.36).

В. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ЭНЕРГИЯ. ПОТОК ЭНЕРГИИ

§ 7. Плотность энергии электрического и магнитного полей

Энергия системы из двух зарядов q_1 и q_2 , расположенных на расстоянии r_{12} один от другого, равна

$$W_{12} = \frac{q_1 q_2}{\epsilon_0 r_{12}}. \quad (3.37)$$

Если имеется n зарядов, то энергия системы будет равна

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n \frac{q_i q_j}{\epsilon_0 r_{ij}}. \quad (3.38)$$

Суммирование по i и j здесь можно проводить лишь для $i \neq j$ (так как каждый заряд сам на себя не действует), а коэффициент $1/2$ берется из-за того, что члены W_{ij} и W_{ji} равны между собой. Таким образом,

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i, \quad (3.39)$$

¹⁾ См., например, Слэтер и Франк [1].

где

$$V_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n \frac{q_j}{\epsilon_0 r_{ij}}. \quad (3.40)$$

Для непрерывного распределения заряда

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}'} \rho V d\mathcal{V}'. \quad (3.41)$$

Запишем это выражение в виде функции от векторов индукции и напряженности

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V, \quad \text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho. \quad (3.42)$$

Согласно (3.42),

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}'} V \text{div } \mathbf{D} d\mathcal{V}' = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}'} [\text{div}(\mathbf{V}\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \text{grad } V] d\mathcal{V}' = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}'} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) d\mathcal{V}' + \frac{1}{8\pi} \int_S \mathbf{V} D_n dS. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Второй интеграл приводится к виду

$$\frac{1}{8\pi} \int_S \mathbf{V} D_n dS = -\frac{1}{2} \int_S V \sigma dS, \quad (3.44)$$

так как

$$D_n = \frac{\partial D}{\partial n} \mathbf{n} = -4\pi\sigma.$$

Если поверхность S , ограничивающая объем \mathcal{V}' , достаточно удалена, то интегралом (3.44) можно пренебречь. Тогда ¹⁾

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}'} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) d\mathcal{V}'. \quad (3.45)$$

Таким образом, плотность энергии электрического поля равна

$$u_e = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{8\pi} \epsilon \mathbf{E}^2, \quad (3.46)$$

если справедливо соотношение $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$.

¹⁾ Это же выражение можно получить в результате вычисления работы, совершаемой при обратимом перемещении заряда q . Если этот заряд перемещается из бесконечно удаленной области с нулевым потенциалом до места нахождения нейтрального проводника, то этот проводник приобретает заряд и потенциал, изменяющиеся от 0 до q и V . Поэтому

Для плотности энергии магнитного поля строгое вычисление оказывается более сложным¹⁾. Здесь мы просто допустим, что справедливо выражение, аналогичное выражению, полученному в электростатике. Тогда плотность энергии магнитного поля будет равна

$$u_m = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = \frac{1}{8\pi} \mu H^2, \quad (3.47)$$

если справедливо соотношение $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$.

Это выражение, разумеется, характеризует не внутреннюю энергию магнитов, величину которой мы определить не можем, а только энергию внешних сред, в которых может существовать магнитное поле напряженностью \mathbf{H} и индукцией \mathbf{B} . В частности, если магнитное поле создается токами, то по определению для энергии будем иметь выражение $W_m = \int u_m dV$, причем в этом случае плотность энергии известна для всего пространства и ее можно представить в виде функции от значений силы тока. Можно показать²⁾, что опытные результаты находятся в полном соответствии с определением (3.47).

Для электромагнитного поля в общем случае допускается, что значения энергии электрического и магнитного полей складываются без изменения своего вида. Тогда плотность электромагнитной энергии будет равна

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2). \quad (3.48)$$

Нетрудно проверить, что это выражение находится в соответствии с законом сохранения энергии.

заряд и потенциал можно записать в виде qa и Va , где за время перемещения a изменяется от 0 до 1. Таким образом, элементарная работа, соответствующая бесконечно малому увеличению a , равна

$$dC = q daV,$$

а для полной работы получим выражение

$$W_e = qV \int_0^1 ada = \frac{1}{2} qV.$$

Отсюда, согласно (3.42) и (3.44), для диэлектрика будем иметь

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dV.$$

¹⁾ См., например, Стрэттон [2], формулы (2.14)—(2.18).

²⁾ Например, сравнивая формулу (3.47) с определением плотности энергии для случая самоиндукции или взаимной индукции постоянных токов.

§ 8. Вектор Пойнтинга и теорема Пойнтинга

Энергию электромагнитного поля мы вычисляли для чисто статического случая. Однако полученное выражение справедливо также для состояний, которые с течением времени изменяются. Чтобы показать это, найдем величину вектора

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}], \quad (3.49)$$

называемого *вектором Пойнтинга*¹⁾. Для произвольного случая

$$\begin{aligned} 4\pi \operatorname{div} \mathbf{S} &= \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{c \partial t} \right) - \mathbf{E} \cdot \left(\frac{4\pi \mathbf{I}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \\ &= -\mathbf{H} \cdot \left(\frac{\partial \mu \mathbf{H}}{c \partial t} \right) - \mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{c \partial t} \right) - \frac{4\pi \mathbf{I}}{c} \cdot \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

так что

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{c \partial t} (\mu \mathbf{H}^2 + \varepsilon \mathbf{E}^2) - \frac{\mathbf{I} \cdot \mathbf{E}}{c}. \quad (3.51)$$

Отсюда с учетом (3.48) получим соотношение, нередко называемое *теоремой Пойнтинга*:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{\mathbf{I} \cdot \mathbf{E}}{c}, \quad (3.52)$$

которое является уравнением непрерывности для энергии. Увеличение энергии в единице объема $(1/c)(\partial u/\partial t)$ равно энергии $-(\mathbf{I} \cdot \mathbf{E})/c$, отнесенной к единице объема, минус поток вектора \mathbf{S} через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем; таким образом, вектор Пойнтинга \mathbf{S} характеризует *поток энергии*, т. е. количество энергии, проходящее через перпендикулярный к этому вектору единичный элемент поверхности за единицу времени.

¹⁾ В советской литературе вектор (3.49) часто называют также вектором Умова или вектором Умова — Пойнтинга, так как уравнение для передачи энергии упругой волны, в котором используется аналогичный вектор, рассматривалось Умовым в 1874 г. (Н. А. У м о в, Уравнения движения энергии в телах, Одесса, 1874; см. Н. А. У м о в, Избранные сочинения, Гостехиздат, 1950), за 10 лет до того, как уравнение типа (3.52) было получено Дж. Пойнтингом. — *Прим. перев.*

Г. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 9. Уравнения распространения поля

Одним из наибольших достижений теории Максвелла оказалось то, что она смогла предвидеть существование электромагнитных волн, скорость распространения которых можно было определить из теоретических соображений и измерить на опыте.

Из уравнений (3. I) и (3. II) следует, что для напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{H} должны иметь место следующие уравнения распространения:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\frac{\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(4\pi \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \\ &= -\frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{I} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{I} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (3.54)$$

Но для произвольного вектора \mathbf{A} всегда имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}, \quad (3.55)$$

откуда получаем

$$-\Delta \mathbf{E} + \frac{4\pi}{\varepsilon} \operatorname{grad} \rho = -\frac{4\pi}{c^2} \mu \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (3.56)$$

$$-\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{I} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (3.57)$$

Предположим, что заряды отсутствуют ($\rho = 0$). В этом случае с учетом соотношения (3.8)

$$\mathbf{I} = \sigma_c \mathbf{E}$$

уравнения распространения примут следующую окончательную форму:

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} + \frac{4\pi\sigma_c}{c^2} \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (3.58)$$

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{H} + \frac{4\pi\sigma_c}{c^2} \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad (3.59)$$

где мы приняли во внимание (3.8) и (3.16).

Таким образом, векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} подчиняются уравнению распространения следующего вида:

$$\boxed{\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{a} + \frac{4\pi\sigma_c}{c^2} \mu \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = 0,} \quad (3.60)$$

причем для непроводящей среды ($\sigma_c = 0$) это уравнение переходит в

$$\square a = 0, \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (3.61)$$

§ 10. Плоские волны

Уравнение (3.60) допускает частное решение

$$a = a_0 e^{i\omega t - \gamma z}, \quad (3.62)$$

характеризующее плоскую волну, которая распространяется вдоль оси Oz . Подставляя его в (3.60), найдем комплексную постоянную γ :

$$\gamma = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{\left(\epsilon - \frac{4\pi i \sigma_c}{\omega}\right) \mu}. \quad (3.63)$$

Для непроводящей среды ($\sigma_c = 0$), в частности, получим

$$\gamma = \pm \frac{i\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} \quad (3.64)$$

и

$$a = a_0 \exp \left[i\omega \left(t \pm \frac{z}{u} \right) \right], \quad (3.65)$$

где мы положили

$$\boxed{u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n}}. \quad (3.66)$$

Здесь

$$n = \sqrt{\epsilon \mu} = \sqrt{\epsilon_e \epsilon_m}, \quad (3.67)$$

поскольку

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_e, \quad \mu = \mu_0 \epsilon_m, \quad (3.68)$$

а для выбранной системы единиц (смешанной системы) $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$.

С другой стороны, из того же уравнения распространения (3.60) следует

$$\frac{\epsilon \mu}{c^2} = \frac{1}{V^2}, \quad (3.69)$$

где через V в настоящем параграфе будем обозначать скорость распространения плоской волны.

Из решения в виде плоской волны (3.65) видно, что u является также фазовой скоростью, которая определяет те значения времени $t = (z + k\lambda)/u$, когда фаза $\varphi = \omega [t - (z/u)]$ принимает одни и те же значения, и что период колебаний равен $T = \lambda/u$.

В соответствии с замечаниями, сделанными в § 3 этой главы, входящая в (3.66) постоянная c характеризует отношение электромагнитных и электростатических единиц системы CGS ($c = q_e/q_m = [Q]_m/[Q]_e$).

Но, согласно (3.69), она равна также скорости передачи электромагнитных колебаний в пустом пространстве. Действительно, поскольку в смешанной системе единиц $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$, то в данном случае

$$V_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c. \quad (3.70)$$

Таким образом, по теории Максвелла скорость перемещения плоских электромагнитных волн в пустоте V_0 совпадает с их фазовой скоростью u_0 и равна отношению электростатических и электромагнитных единиц системы CGS.

Электромагнитные и световые волны. В период, когда создавалась теория Максвелла, величина скорости света в воздухе, приближенно равная скорости света в пустоте, была известна с большой точностью. При ее определении использовались как взвешенные источники света (Ремер, Брэдли), так и источники, расположенные на Земле (Физо, Фуко, Майкельсон). За последние годы эта скорость определялась со все возрастающей точностью (Бирдж [3], Бергstrand [4, 5], Коста-де-Борегар [6]). При этом измерялась как скорость сигналов V , что делалось *непосредственно* для световых волн (Бергstrand [7]), радиочастотных колебаний (Эсаксон [8, 9]) и γ -лучей (Джастрам [10]), так и фазовая скорость u , измерявшаяся косвенным образом путем определения частот и длин волн радиочастотного (Эссен и Гордон-Смит [11—13], Калшоу [14], Фрум [15, 16], Флорман [17]) или светового (Рэнк и Ван-дер-Слуис [18, 19], Таунс [20], Рэнк и др. [21—23]) диапазона. Известно, что для сред, в которых отсутствует дисперсия, значения u и V совпадают. Наилучшие результаты были получены при помощи метода резонансной полости (Эссен и Гордон-Смит [11—13], Хансен-Бол [24]), метода направленного пучка волн (Фрум [15, 16], Флорман [17]) и методов инфракрасной и радиочастотной спектроскопии (Рэнк и др. [21, 22], Плайлер [25]). Укажем, наконец, на радиолокационный метод (Эсаксон [8, 9]) и метод оптического „геодиметра“ Бергstrandа [7]. Бергstrand модернизировал метод зубчатого колеса Физо и использовал поляризованный пучок света, прерываемый с очень большой частотой при помощи ячейки Керра. Окончательно для скорости света было найдено следующее значение:

$$V_0 \approx 299790 \pm 1 \text{ км/сек.}$$

Заметим, что большинство указанных методов связано с изменением относительных значений длины волны и периода электро-

магнитных колебаний. Но эти измерения оказываются настолько точными, что становится невозможным длину волны, определяемую при помощи оптических методов, выражать через метр, рассматриваемый в качестве эталона длины. Поэтому представляется возможным и даже желательным (Бирдж [3], Бергstrand [4, 5], Коста-де-Борега [6]) постулировать, что значение V_0 в точности равно тому, которое дают наилучшие измерения, и таким образом связать эталоны длины и времени. Измерение одного из этих эталонов позволит определить второй эталон (причем более предпочтительным оказывается эталон времени, так как радиочастотная хронометрия превышает по точности оптическую метрологию).

Что же касается первого измерения величины c как отношения электростатических и электромагнитных единиц системы CGS, то оно было осуществлено Вебером и Кольраушем [26]. Они сравнивали в двух системах единиц одну и ту же разность потенциалов. Величина потенциала в электростатической системе единиц находилась путем измерений показаний электрометра, а в электромагнитной системе единиц она определялась при помощи электродинамометра. Измерения можно проводить также для одной и той же емкости. В последнем случае опыты с точностью до $1 \cdot 10^{-4}$ дали следующее значение для постоянной c :

$$c = 299790 \text{ км/сек.}$$

Установленное на опыте равенство между V_0 и c приводит к мысли о том, что световые явления должны описываться уравнениями Максвелла, из которых вытекает это равенство. Световые волны следует при этом рассматривать как частный случай электромагнитных волн.

По существу предположение о связи между световыми и электромагнитными колебаниями высказывалось уже давно: еще Фарадей обнаружил явление вращения плоскости поляризации светового пучка под влиянием магнитного поля. Это явление, получившее в то время только качественное объяснение, оказалось частным случаем открытого 50 лет спустя эффекта Зеемана¹⁾.

Но доказательство тождественного характера световых и электромагнитных явлений было получено только Герцем; ему удалось

¹⁾ Аналогично диамагнетизму эффект Зеемана объясняется влиянием магнитного поля на вращение электронов в атомах. К первоначальному вращению электронов добавляется вращение вокруг фиксированного направления с постоянной круговой частотой

$$\omega_2 = -\frac{e}{2mc} H.$$

На это вращение накладывается вращение с круговой частотой $\pm\omega$, которым обладают две поляризованных по кругу составляющих падающего светового луча.

создать электромагнитные волны, используя для этого осциллирующий разряд между двумя электродами, соединенными с двумя сферами большой емкости, имеющими высокий потенциал. Такая система образует осциллятор, излучающий электромагнитные волны высокой частоты. Измерение этой частоты приводит к результату, совпадающему с теоретическим значением, даваемым формулой Томсона:

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Можно показать, что для волн Герца имеют место явления интерференции, дифракции и поляризации, характерные для световых волн. Получение ультракоротких электромагнитных волн дало возможность получить частоты, соответствующие ультрафиолетовой области и γ -лучам, что дало возможность окончательно объединить световые и электромагнитные колебания в единое стройное целое.

Разумеется, соотношение (3.66)

$$u = \frac{c}{n} \quad (3.71)$$

справедливо только для *идеального диэлектрика* ($\sigma_e = 0$). Если среда, из которой состоит диэлектрик, обладает дисперсией, то соотношение (3.71) будет иметь место только в предельном случае строго монохроматической волны. В следующем параграфе мы увидим, к чему приведет это соотношение, если среда обладает небольшой дисперсией и волны имеют несколько отличающиеся частоты.

Для большинства прозрачных сред магнитная проницаемость близка к единице. В этом случае из (3.67) следует

$$n^2 = \epsilon. \quad (3.72)$$

Максвелл проверил это соотношение для газа и некоторых диэлектриков (сера, парафин). Во многих случаях (как показал опыт Больцмана с окисью углерода) n можно найти по известным значениям ϵ , определяемым из электрических измерений. В большинстве случаев с изменением длины волны ϵ быстро меняется, достигая своего предельного значения для T_∞ . Поэтому хорошее соответствие с опытом можно получить при больших длинах волн¹⁾. На практике формулу Максвелла можно проверить при помощи

¹⁾ Напомним основные определения волновой теории. Если ω , ν , T , λ и u характеризуют соответственно круговую частоту, частоту, период, длину волны и фазовую скорость волны, то

$$\omega = 2\pi\nu, \quad T = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{u}.$$

радиоволн. Но даже в этом предельном случае некоторые диэлектрики еще обладают значительной дисперсией. При таких условиях может оказаться целесообразным рассматривать с помощью теории Максвелла не идеальные диэлектрики (однозначно характеризуемые заданием ϵ , μ и токов смещения), а полупроводящие среды, в которых имеются токи проводимости, определяемые при помощи константы σ_c . Из-за резонансных явлений полупроводящие среды всегда обладают селективным поглощением и дисперсией. Последняя зависит от разности между частотой падающей волны и частотой колебаний электронов среды¹⁾.

§ 11. Пакеты волн

Рассмотрим две плоские монохроматические волны с одинаковыми амплитудами a_0 и близкими частотами $\nu + d\nu$ и $\nu - d\nu$. Этим частотам соответствуют круговые частоты $\omega + d\omega$ и $\omega - d\omega$. С другой стороны, в среде с дисперсией фазовые скорости будут равны соответственно $u + du$ и $u - du$. Поэтому при пренебрежении произведениями бесконечно малых элементов du и $d\omega$ результирующее колебание будет характеризоваться формулой

$$\begin{aligned}
 A &= a_0 \exp \left[i(\omega + d\omega) \left(t - \frac{z}{u + du} \right) \right] + \\
 &+ a_0 \exp \left[i(\omega - d\omega) \left(t - \frac{z}{u - du} \right) \right] \approx \\
 &\approx a_0 \exp \left\{ i \left[\omega t + t d\omega - \frac{z}{u} d\omega - \frac{\omega z}{u} \left(1 - \frac{du}{u} \right) \right] \right\} - \\
 &+ a_0 \exp \left\{ i \left[\omega t - t d\omega + \frac{z}{u} d\omega - \frac{\omega z}{u} \left(1 + \frac{du}{u} \right) \right] \right\}, \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
 A &\approx 2a_0 \cos \left(t d\omega - \frac{z}{u} d\omega + \frac{\omega z}{u^2} du \right) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{u} \right) \right] \approx \\
 &\approx 2a_0 \cos 2\pi \left(t d\nu - \frac{z}{u} d\nu + \frac{\nu z}{u^2} du \right) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{u} \right) \right]. \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

Следовательно, можно положить

$$A \approx 2a_0 \cos 2\pi d\nu \left(t - \frac{z}{U} \right) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{u} \right) \right], \quad (3.75)$$

где

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{u} - \frac{\nu}{u^2} \frac{du}{d\nu} = \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\nu}{u} \right), \quad (3.76)$$

¹⁾ В настоящее время все эти явления более строго рассчитываются при помощи квантовой механики, с учетом конкретных особенностей молекул среды (см., например, М. В. Волькенштейн, Строение молекул, Изд-во АН СССР, 1955). — *Прим. перев.*

так что

$$\frac{1}{U} = \frac{d}{d\nu} \frac{1}{\lambda} \quad (3.77)$$

или

$$U = \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}. \quad (3.78)$$

Таким образом, при суперпозиции двух колебаний с одинаковыми амплитудами и близкими частотами возникает результирующая волна, у которой частота колебания равна ν , а амплитуда является периодической функцией, обладающей частотой $d\nu$ и скоростью U . Следовательно, первоначальный пакет волн соответствует так называемому *модулированному* колебанию, у которого осталась прежняя частота ν , но *амплитуда периодически изменяется с другой частотой $d\nu$* . Величина U , равная скорости распространения амплитуды и, следовательно, скорости распространения энергии результирующего колебания, называется *групповой скоростью*. Что же касается фазовой скорости, то она по-прежнему имеет значение u .

Согласно (3.75), мы должны иметь

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2\pi d\nu \left(t - \frac{z}{U}\right) \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3.79)$$

т. е.

$$Ut - l \leq z \leq l + Ut, \quad (3.80)$$

где мы положили

$$l = \frac{U}{4d\nu}. \quad (3.81)$$

Таким образом, пакет волн¹⁾ располагается между точками $Ut - l$ и $Ut + l$, а его длина равна $2l$.

В среде без дисперсии скорость u не зависит от λ . Поэтому, согласно (3.76), получим

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{u^2}{\nu} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{U}\right) = 0, \quad (3.82)$$

т. е.

$$u = U \quad (3.83)$$

и групповая скорость равна фазовой скорости. Это условие, очевидно, выполняется при распространении электромагнитной волны в пустоте.

¹⁾ Точнее, участок пакета между двумя минимумами амплитуды. — Прим. перев.

Предыдущие вычисления были связаны с предположением $d\nu/\nu \leq 1$. Но, согласно (3.81),

$$l = \frac{U}{4 d\nu} = \frac{1}{4d} \frac{1}{(1/\lambda)} = -\frac{\lambda^2}{4 d\lambda}, \quad (3.84)$$

так что

$$\frac{l}{\lambda} = -\frac{\lambda}{4 d\lambda} = \frac{\nu}{4 d\nu} \gg 1. \quad (3.85)$$

Для справедливости сделанных выше допущений нужно, чтобы длина пакета волн l была велика по сравнению с λ . Тогда волновой пакет будет перемещаться, не деформируясь, и его амплитуда будет периодической функцией, распространяющейся со скоростью U .

Обозначим через n показатель преломления диспергирующей среды, соответствующий длине волны в пустоте λ_0 :

$$\lambda_0 = \frac{u}{\nu}, \quad u = \frac{c}{n}. \quad (3.86)$$

Из (3.78) следует

$$\begin{aligned} U &= \frac{d\nu}{d(1/\lambda)} = \frac{d(u/\lambda_0)}{d(1/\lambda_0)} = u - \lambda_0 \frac{du}{d\lambda_0} = \\ &= u \left(1 - \frac{\lambda_0}{u} \frac{du}{d\lambda_0} \right) = u \left(1 + \frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda_0} \right), \end{aligned} \quad (3.87)$$

так как с учетом (3.86)

$$\frac{du}{u} = -\frac{dn}{n}. \quad (3.88)$$

Выражение (3.87) можно записать также в виде

$$U = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda_0} \right). \quad (3.89)$$

Для монохроматических волн измерения всегда дают групповую скорость U , которая равна скорости распространения энергии.

В среде без дисперсии или с небольшой дисперсией (воздух) измеряется также фазовая скорость, так как по-прежнему

$$U = u = \frac{c}{n}. \quad (3.90)$$

Напротив, можно убедиться, что в среде с дисперсией (например, в сероуглероде) справедлива формула (3.89).

§ 12. Сферические волны

При нахождении решений уравнений Максвелла последние можно переписать в сферических координатах. Здесь мы ограничимся частным случаем.

Рассмотрим уравнение распространения (3. VIб), которому подчиняется скалярный потенциал. Для пустоты $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$ и в отсутствие зарядов ($\rho = 0$) скалярный потенциал V подчиняется уравнению

$$\square V \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = 0. \quad (3.91)$$

В сферических координатах

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (3.92)$$

для произвольной скалярной функции V имеем

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}. \quad (3.93)$$

Уравнение (3.91) допускает решения вида

$$V = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) e^{i\omega t}. \quad (3.94)$$

В частном случае, когда V не зависит от r и t , из (3.91) получаем

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rV) - \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} = 0. \quad (3.95)$$

Это уравнение имеет решение

$$V = \frac{f\left(t \pm \frac{r}{c}\right)}{r}, \quad (3.96)$$

где f — произвольная функция. Таким решением особенно просто определяется сферическая волна, причем если в приведенном выражении выбрать знак минус, то волна будет распространяться в направлении возрастающих значений r . Если, наконец, f взять в виде простой плоской волны

$$f\left(t - \frac{r}{c}\right) = a_0 \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right], \quad (3.97)$$

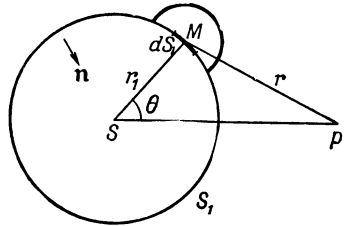
то потенциал в точке $P(r, t)$, создаваемый находящимся в начале координат источником S , будет иметь вид

$$V(r, t) = a_0 \frac{\exp\left[i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]}{r}. \quad (3.98)$$

Теперь в соответствии с принципом Гюйгенса предположим, что в момент времени, который мы примем за начальный, волновая поверхность с центром в S излучает вторичные волны (фиг. 10),

Согласно Гюйгенсу, каждая из вторичных волн к моменту времени t имеет радиус ct , а огибающая вторичных волн является новой поверхностью, которая образует фронт волны в момент t . Возбуждение, создаваемое в точке P элементом поверхности dS_1 , будет пропорционально величине dS_1 . Но, согласно (3.98), амплитуда в точке $M(r_1, t)$ определяется выражением

$$V(r_1, t) = a_0 \frac{\exp\left[i\omega\left(t - \frac{r_1}{c}\right)\right]}{r_1}, \quad (3.99)$$



Фиг. 10. Принцип Гюйгенса.

где r_1 — расстояние от источника до точки M .

В связи с этим потенциал в точке P , создаваемый удаленной от нее на расстояние r точкой M , будет иметь вид

$$V\left(t - \frac{r}{c}\right) = a_0 \frac{\exp\left[i\omega\left(t - \frac{r + r_1}{c}\right)\right]}{r_1}. \quad (3.100)$$

Этот потенциал подчиняется уравнению Даламбера, поэтому его можно представить в форме (3.36). С учетом граничных условий получим

$$V = -\frac{1}{4\pi} \int \left[\frac{\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}}{r} \right]_{t - \frac{r}{c}} dV' + \\ + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \left\{ \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_{t - \frac{r}{c}} + \frac{V\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right] \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{t - \frac{r}{c}} \right\} dS. \quad (3.101)$$

Принимая во внимание (3.100), находим

$$\frac{\partial V\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial t} = i\omega \frac{a_0 \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r + r_1}{c}\right)\right]}{r_1}, \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial V\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial n} = -a_0 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{i\omega}{c} \right) \frac{\exp\left[i\omega\left(t - \frac{r + r_1}{c}\right)\right]}{r_1}. \quad (3.103)$$

Подставляя полученные выражения в (3.101), будем иметь

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{a_0}{rr_1} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{r+r_1}{c} \right) \right] \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c} \right) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{i\omega}{c} \right) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) \right] dS. \quad (3.104)$$

Предположим, что, как это всегда имеет место в оптике, расстояния r и r_1 велики по сравнению с длиной волны. Тогда формула (3.104) дает

$$V = \int \frac{ia_0}{2\lambda r_1 r} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{r+r_1}{c} \right) \right] [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1)] dS, \quad (3.105)$$

где $\omega = 2\pi c/\lambda$, а выражение $a_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{r_1}{c} \right) \right] / r_1$ означает амплитуду a_1 колебаний в точке M . Если вторичная волна с такой амплитудой распространяется из точки M , то в точке P она будет создавать возбуждение

$$\int \left(\frac{a_1 dS_1}{r} \right)_{t - \frac{r}{c}} = \int \frac{a_0}{rr_1} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{r+r_1}{c} \right) \right] dS, \quad r = MP. \quad (3.106)$$

Приближенно это совпадает с результатом, найденным в (3.105). Однако принцип Гюйгенса не учитывает добавочного множителя

$$\frac{i}{2\lambda} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1)].$$

Его наличие означает, что амплитуды приходящих в точку P вторичных волн зависят от углов, образуемых векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}_1 с нормалью \mathbf{n}^1 .

Формула (3.106) дает возможность решать обычные задачи о дифракции, служащие иллюстрацией применимости принципа Гюйгенса. Таким образом, путем решения уравнения Даламбера оказывается возможным придать этому принципу математически строгую формулировку и одновременно внести в него необходимые поправки.

¹⁾ Если S_1 — сфера, то $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) = -1$. Если положить $R = SP$ и приближенно вычислить (3.105) при помощи метода зон Френеля, то получим выражение $V = A \exp \left[i\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]$, которое характеризует возбуждение, непосредственно создаваемое в точке P источником S , что служит оправданием принципа Гюйгенса. Вычисление (3.105) для случая, когда между S и P помещен экран со щелями, позволяет сделать правильные предсказания о виде дифракционной картины.

**Д. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ,
СПРАВЕДЛИВЫЕ ДЛЯ МЕДЛЕННО ДВИЖУЩИХСЯ
НЕМАГНИЧЕННЫХ ТЕЛ**

**§ 13. Применение теории Максвелла
к движущимся телам**

Применяя введенные Максвеллом представления к стационарным или квазистационарным явлениям, мы всегда предполагали, что материальные среды находятся в покое. Поэтому мы систематически оставляли в стороне изучение полей, возникающих при движении заряженного проводника или поляризованного диэлектрика.

Вместе с тем, изучая нестационарные явления, мы видели, что электромагнитная индукция, связанная с изменением потока индукции, может вызываться как изменением силы тока, так и движением контура, по которому течет постоянный ток (или движением магнита). На опыте доказана эквивалентность электродвижущих сил индукции, вызываемых каждой из двух указанных выше причин. Это вытекает из закона Фарадея (3.1):

$$e = - \frac{d}{dt} \int_S B_n dS,$$

где изменение $B_n dS$ с течением времени может быть связано как с изменением силы тока, создающего индукцию B , так и с изменением dS . Однако мы не знаем, будет ли магнитное поле действовать на движущиеся контуры или диэлектрики так же, как и на неподвижные. Более того, объяснения, предложенные Герцем, Лоренцом и Эйнштейном, существенно различаются между собой. Начнем с обсуждения требующих объяснения опытных данных.

**§ 14. Движение проводника или изолятора
в электрическом поле**

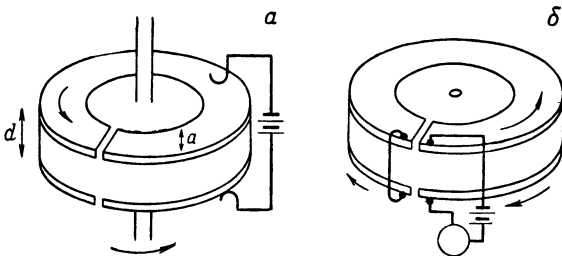
Первые опыты, связанные с движением проводника в электрическом поле, были выполнены Роулэндом в 1875 г.; результаты этих опытов были подтверждены Эйхенвальдом. Опыты заключались в сравнении магнитных эффектов, вызывавшихся равномерным вращением металлического диска с поверхностной плотностью заряда σ и током проводимости I , возникающим в неподвижном диске. Эффекты оказываются одинаковыми в том случае, если для силы тока имеет место соотношение

$$I = \sigma v, \tag{3.107}$$

которое свидетельствует (см. гл. 2) об эквивалентности токов проводимости и токов переноса, возникающих при равномерном движении какого-либо проводника.

Движение изолятора в электрическом поле изучал Рентген [27] (1885 г.); затем его опыты были повторены и уточнены Эйхенвальдом [28]¹⁾ (1903 г.).

Эйхенвальд воспользовался конденсатором, состоящим из двух металлических плоских колец с узким вырезом, между которыми помещен изолятор — эбонитовый диск (фиг. 11а). Изолятор мог



Ф и г. 11. Схема опыта Рентгена и Эйхенвальда.

По Беккеру [29].

вращаться вокруг оси zz' , в случае необходимости вокруг этой оси можно было вращать и металлические диски.

Плотность заряда на металлическом диске равна

$$\sigma_p = \frac{\varepsilon V}{4\pi d} = \frac{\varepsilon E}{4\pi}. \quad (3.108)$$

Она совпадает со взятой с обратным знаком плотностью заряда на неподвижном изоляционном слое. Поэтому, когда изолятор один вращается со скоростью v , то в соответствии с замечаниями, сделанными в предыдущем параграфе, можно ожидать появления тока переноса с плотностью

$$i = \frac{\varepsilon E}{4\pi} av = \frac{\varepsilon V}{4\pi d} av. \quad (3.109)$$

Между тем опыты Рентгена показали, что ток получается более слабым. Измеренная Рентгеном плотность тока проводимости равна

$$i = \frac{(\varepsilon - 1)}{4\pi d} Vav = \frac{(\varepsilon - 1)}{4\pi} Eav. \quad (3.110)$$

¹⁾ См. также А. А. Эйхенвальд, О магнитном действии тел, движущихся в электромагнитном поле, Москва, 1904. — *Прим. перев.*

Таким образом, все происходит так, словно плотность заряда на движущемся изоляторе равна

$$\sigma_i = (\epsilon - 1) \frac{E}{4\pi}, \quad (3.111)$$

т. е. как если бы напряженность E была заменена на

$$E' = \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) E. \quad (3.112)$$

Если, как это делалось в опытах Эйхенвальда, одновременно вращать изолятор и металлические диски, то мы должны наблюдать полный ток, создаваемый одновременно плотностью заряда на диске σ_p и плотностью заряда на изоляторе $-\sigma_i$. Результаты Рентгена показывают, что этот ток определяется из (3.108) и (3.111), а сила тока равна

$$(\sigma_p - \sigma_i) a v = \frac{\epsilon E}{4\pi} a v - \frac{(\epsilon - 1)}{4\pi} E a v = \frac{E}{4\pi} a v. \quad (3.113)$$

Если a — ширина металлического кольца, то будет наблюдаться ток

$$i = (\sigma_p - \sigma_i) v a = \frac{E}{4\pi} v a = \frac{V}{4\pi d} v a. \quad (3.114)$$

Его величина не зависит от значения диэлектрической проницаемости изолятора. Опыт полностью подтверждает эти вытекающие из результатов Роуланда выводы. Эйхенвальд наблюдал отклонение магнитной стрелки, обусловленное данным током. Во втором опыте он измерял силу тока проводимости в неподвижных дисках, приводящего к такому же отклонению стрелки (см. фиг. 11б). Величина тока не зависит от природы изолятора и находится в хорошем соответствии с (3.114).

§ 15. Перемещение проводника или изолятора в магнитном поле

Перемещение проводника в магнитном поле изучалось в хорошо известных опытах Фарадея, связанных с движением проводника вблизи магнита. Возникающие при этом явления лежат в основе работы динамомашии и различного рода генераторов тока.

Перемещение диэлектрика в магнитном поле изучал Вильсон [30]. Вблизи магнита помещался сделанный из диэлектрика полый цилиндр с толщиной стенки a . Внутренняя и наружная поверхности цилиндра были покрыты металлическим слоем и их можно было подсоединить к клеммам электромметра.

Однако на находящийся в магнитном поле заряд q действует сила Лоренца [см. (2.3)]

$$\mathbf{F} = q \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right]$$

(использована смешанная система единиц). Поэтому здесь все происходит так, словно на движущуюся частицу действует электрическое поле

$$\mathbf{E} = \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right]. \quad (3.115)$$

Следовательно, при вращении цилиндра вокруг параллельной магнитному полю оси должно возникать направленное вдоль радиуса электрическое поле напряженностью E .

Таким образом, между двумя проводящими обкладками цилиндра должна возникать разность потенциалов, равная $V = aE$.

В изоляторе должна будет существовать поляризация, определяемая из соотношения

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad (3.116)$$

а именно

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\epsilon - 1}{4\pi} \right) \mathbf{E} = \left(\frac{\epsilon - 1}{4\pi} \right) \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right]. \quad (3.117)$$

При помощи электрометра можно опытным путем определить заряд цилиндра. Плотность заряда оказывается равной

$$\sigma = \left(\frac{\epsilon - 1}{4\pi} \right) \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right]. \quad (3.118)$$

Следовательно, плотность заряда на цилиндре совпадает с плотностью заряда, создаваемой электрическим полем, напряженность которого не E , а $E' = [1 - (1/\epsilon)] E$. Заряд диэлектрика, движущегося в магнитном поле, определяется, таким образом, заданием указанной напряженности $|E'| < |E|$ или поляризации P .

§ 16. Гипотезы Герца и Лоренца

В гл. 5 будут рассмотрены оптические опыты (опыты Доплера, Физо, Зеемана), в которых приходится иметь дело с относительным движением сред. Мы увидим, что эти опыты, проведенные задолго до создания специальной теории относительности, привели к предположению о существовании определенной эквивалентности, имеющей место при описании движения в двух системах отсчета, одна из которых движется по отношению к другой прямолинейно и равномерно со скоростью, значительно меньшей скорости света c (так что можно пренебречь членами

порядка v^2/c^2). Этот результат объяснялся или гипотезой местного увлечения световых волн движущейся материей (Стокс), или гипотезой частичного увлечения (Френель).

Герц попытался обобщить постулат Стокса, перенеся его на случай электромагнитных явлений. В связи с этим он предположил, что максвелловский эфир, характеризуемый одновременным заданием векторов напряженности и индукции E , D , H , и B , полностью увлекается движущейся материей. Однако описанные выше опыты опровергают гипотезу Герца¹⁾.

В самом деле, например, для индукции D всегда имеет место выражение

$$D = E + 4\pi P.$$

Вектор поляризации P , по самому своему определению связанный с существованием вещества, полностью увлекается при его движении. Что же касается вектора напряженности электрического поля E , то для него это ни в какой мере не имеет места.

Эти выводы естественным образом вытекают из микроскопической теории Лоренца, основывающейся на гипотезе о совершенно неподвижном эфире. Микроскопические значения напряженности поля (e , h), которые позволяют определить макроскопические величины E , B , связаны с неподвижным эфиром. Напротив, векторы электрической поляризации P и магнитного момента M полностью увлекаются движущейся материей. Следовательно, это приводит нас к определению частично увлекаемых макроскопических величин $D(E, P)$, $H(B, M)$. Все это происходит так, словно в соответствии с описанными в этой главе опытами, напряженность E заменяется на $E' = [1 - (1/\epsilon)] E$. Таким образом, постулат Лоренца позволяет, по крайней мере для движения проводников или диэлектриков с малыми скоростями ($v \ll c$), получить результаты, которые Френель в случае оптики вывел из гипотезы о частичном увлечении (см. стр. 118).

Мы ограничимся здесь лишь приведенными качественными замечаниями о теориях, основы которых были пересмотрены специальной теорией относительности. Тем не менее, если мы хотим физически обосновать теорию Эйнштейна и показать, что ее появление было до некоторой степени необходимым, т. е. что к ней приводят как логика, так и опыт, то при этом оказывается необходимым знакомство с основами предшествующих теорий.

¹⁾ Теория Герца, например, предсказывала полную компенсацию токов Роуланда и Рентгена, с которыми приходится иметь дело в опыте Эйхенвальда, однако его опыт опровергает этот вывод. (См. по этому вопросу, например, книгу Блоха [31].)

Действительно, как мы увидим, теория Максвелла и обобщающая ее теория Лоренца естественным образом приводят к исходным положениям специальной теории относительности.

Задачи

1. Исходя из решения в виде плоской волны (3.62)

$$E = E_0 e^{i\omega t - \gamma z}, \quad H = H_0 e^{i\omega t - \gamma z},$$

путем подстановки в уравнения (3. I), (3. II) и (3. III) найти соотношение между составляющими E и H .

Получить следующие выводы:

а) Векторы напряженности E и H обязательно являются поперечными ($E_z = H_z = 0$).

б) Векторы напряженности E и H ортогональны и их компоненты связаны соотношениями

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - 4\pi\sigma_c}} \cdot \frac{1}{\omega}.$$

2. Рассмотреть видоизмененные уравнения Максвелла, отличающиеся добавочными малыми членами ($k_0^2 \ll 1$), содержащими электромагнитный потенциал A , V (мезонное поле или фотонное поле с массой покоя, не равной нулю):

$$\text{rot } H = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + k_0^2 A, \quad \text{div } E = k_0^2 V,$$

$$\text{rot } E = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \text{div } H = 0.$$

Показать, что эти уравнения имеют решения в виде плоских волн, соответствующих наличию продольного электрического поля ($E_z \neq 0$).

Вывести для видоизмененных уравнений Максвелла накладываемое на потенциалы условие Лоренца (которое в случае чисто максвелловской теории считается справедливым a priori).

3. Показать, что решение уравнения (3.58), имеющее вид плоской волны

$$E = E_0 e^{i\omega t - \gamma z},$$

является также решением уравнения

$$\frac{\mu \epsilon'}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E = 0, \quad \text{где } \epsilon' = \epsilon - 4\pi i \sigma_c \tau \quad \left(\tau = \frac{1}{\omega} \right).$$

Показать, что E можно представить в виде затухающего гармонического колебания

$$E = E_0 e^{-p' z / \tau} e^{i(1/\tau)(t - pz)},$$

где

$$p = \frac{1}{u} = \frac{n}{c}, \quad p' = \frac{k}{c}$$

и $k = 2\pi \mu \sigma_c \tau / n$ — характерный для среды коэффициент поглощения,

ГЛАВА 4

ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ТЕОРИЯ ЛОРЕНЦА

Теория Лоренца¹⁾ (1892 г.) была вызвана к жизни многочисленными опытами, которые к концу XIX века сделали очевидным дискретный характер вещества и электричества. Когда гипотеза об атомном строении вещества применялась для объяснения таких хорошо известных явлений, как электролиз, то приходилось делать предположение о том, что и электричество имеет дискретную структуру. Поэтому любой заряд должен рассматриваться как кратное элементарного заряда e , который может быть измерен непосредственно или косвенным путем.

Прямые измерения заключаются в определении заряда малых капелек, находящихся между обкладками конденсатора (Милликен [35], Эренхафт, Регенер [36]), или в измерении заряда, передаваемого α -лучами RaC (Регенер [37])²⁾.

Косвенные измерения во времена Лоренца основывались главным образом на определении числа Авогадро N , которое в свою очередь находили путем определения величины постоянной Больцмана, т. е. с учетом результатов кинетической теории газа. Чтобы можно было осуществить подобные измерения, были предложены многочисленные методы, связанные главным образом с броуновским движением и разработанные, в частности, Жаном Перреном.

Если $F = 96\,600$ кулон, то, поскольку по закону Фарадея такое количество электричества выделяет грамм-эквивалент вещества,

$$e = \frac{96\,600}{N} = 4,77 \cdot 10^{-10} \text{ единиц CGSE.}$$

С другой стороны, опыты по отклонению катодных лучей в электрическом и магнитном полях дают возможность измерить

¹⁾ См. Лоренц [32], Герлах [33], Розенфельд [34], Беккер [29].

²⁾ Укажем также на определение величины e , основанное на эффекте Шотта. См. Беккер [29] и Шоттки [38].

отношение e/m . Если пучок движущихся параллельно, но с различными скоростями одинаковых частиц пропустить через параллельные между собой электрическое и магнитное поля, которые перпендикулярны к первоначальному направлению пучка, то отклонившиеся частицы будут распределены по параболе

$$\frac{y^2}{x} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{H^2}{c^2} \frac{l^2}{E}.$$

Если этот опыт проводится для катодных лучей, то всегда будет получаться одно и то же отношение

$$\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^7 \text{ единиц CGSM.}$$

§ 1. „Микроскопические“ напряженности поля и потенциалы, связанные с электроном

Существование электронов заставляет пересмотреть теорию таким образом, чтобы в нее входили микроскопические поля, связанные с отдельными зарядами. Описание электромагнитного поля по существу должно сводиться к описанию явлений, возникающих при движении элементарных зарядов в пустоте. Именно с помощью последних должны объясняться свойства векторов напряженности и индукции, используемые в теории Максвелла.

Лоренц предположил, что движущийся заряд определяет связанные с этим зарядом микроскопические напряженности поля e и h . Как мы уже отмечали, понятие о векторах индукции возникает при макроскопическом описании явлений, тогда как при описании элементарных явлений эти векторы не применяются. Обозначим через ρ и v плотность зарядов и их скорость. Электрический ток может существовать только в виде тока проводимости, обусловленного движением электронов.

Гипотеза Лоренца заключается в предположении, что электроны перемещаются в неподвижном эфире и что величины e , h , ρ и ρv связаны уравнениями максвелловского вида. Таким образом, учитывая уравнения Максвелла (3. I), (3. II) и (3. III), получаем

$$\text{rot } h = \frac{4\pi}{c} \rho v + \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t}, \quad (4.1)$$

$$\text{rot } e = -\frac{1}{c} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.2)$$

и

$$\text{div } e = 4\pi\rho, \quad (4.3)$$

$$\text{div } h = 0. \quad (4.4)$$

Аналогично для плотности силы, действующей на заряд, будем иметь

$$\mathbf{f} = \rho \left(\mathbf{e} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{h}] \right). \quad (4.5)$$

Если электрон имеет конечные размеры, то эта действующая на него сила должна компенсироваться силами другого происхождения, так как в противном случае электрон не будет устойчивым. Заметим¹⁾, что основные уравнения электронной теории (4.1) — (4.5), в которые входят напряженности поля, содержат только непрерывно изменяющиеся величины. Что же касается величин, определяющих собственные характеристики частицы, то они непосредственно в эти уравнения не входят, да и само существование частицы будет представляться невозможным, если существует только сила вида (4.5).

Связанные с электроном плотность и поток энергии задаются выражениями

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2), \quad (4.6)$$

$$\mathbf{s} = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{e} \times \mathbf{h}]. \quad (4.7)$$

При этом выражение (4.5) позволяет вычислить \mathbf{f} как функцию от напряженностей \mathbf{e} и \mathbf{h} . Подставляя полученные из (4.3) и (4.1) выражения ρ и $\rho\mathbf{v}$ в (4.5) и учитывая (4.2), находим

$$f_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial s_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{xz}, \quad (4.8a)$$

$$f_y = -\frac{1}{c} \frac{\partial s_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} T_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{yz}, \quad (4.8b)$$

$$f_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial s_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} T_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{zy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zz}, \quad (4.8b)$$

где мы положили

$$T_{pq} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} e_x^2 + h_x^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2) & e_x e_y + h_x h_y & e_x e_z + h_x h_z \\ e_x e_y + h_x h_y & e_y^2 + h_y^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2) & e_y e_z + h_y h_z \\ e_x e_z + h_x h_z & e_y e_z + h_y h_z & e_z^2 + h_z^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2) \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

¹⁾ См. Беккер [29].

Интегрируя (4.8) по объему \mathcal{V} и полагая

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{f} d\mathcal{V}, \quad \mathbf{S} = \int \mathbf{s} d\mathcal{V}, \quad (4.10)$$

находим

$$F_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial S_x}{\partial t} + \int [T_{xx} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + T_{xy} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) + T_{xz} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z})] dS \quad (4.11)$$

и два других аналогичных соотношения.

Если предположить, что имеются только силы электромагнитного происхождения, то \mathbf{F} будет определять полную силу, действующую на объем \mathcal{V} . Поэтому она будет равна изменению количества движения $\mathbf{P}^{(m)}$ вещества, заключенного в объеме \mathcal{V} , т. е.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}^{(m)}}{dt}, \quad \mathbf{P}^{(m)} = (P_x^{(m)}, P_y^{(m)}, P_z^{(m)}). \quad (4.12)$$

Полагая

$$\mathbf{P}^{(r)} = \frac{\mathbf{S}}{c}, \quad \text{где} \quad \mathbf{P}^{(r)} = \int \mathbf{p}^{(r)} d\mathcal{V}, \quad \mathbf{p}^{(r)} = (P_x^{(r)}, P_y^{(r)}, P_z^{(r)}), \quad (4.13)$$

согласно (4.11), получаем

$$\frac{d}{dt} (P_x^{(m)} + P_x^{(r)}) = \int_S [T_{xx} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + T_{xy} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) + T_{xz} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z})] dS \quad (4.14)$$

и два других аналогичных уравнения.

Тензор T_{pq} характеризует „электромагнитные натяжения“, и если допустить, что связанное с наличием вещества количество движения $\mathbf{P}^{(m)}$ должно складываться с количеством движения излучения $\mathbf{P}^{(r)}$, то (4.14) будет выражать закон сохранения количества движения. Вектор Пойнтинга, деленный на c ,

$$\mathbf{p}^{(r)} = \frac{\mathbf{s}}{c} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{e} \times \mathbf{h}] \quad (4.15)$$

характеризует, таким образом, количество движения, связанное с существованием микроскопического электромагнитного поля \mathbf{e} , \mathbf{h} .

§ 2. „Структура“ электрона Лоренца

Проще всего было бы предположить, что заряженная частица аналогична шару малого, но конечного размера. Соответственно в первоначальных теориях электрона (Хэвисайд, Сирл, Дж. Дж. Томсон, Абрагам) предполагалось, что электрон является твердым и имеет сферическую форму¹⁾. Согласно (4.13), плотность

¹⁾ Мы увидим, что эта модель, развивавшаяся главным образом Абрагамом, несовместима с выводами специальной теории относительности.

количества движения, создаваемого электромагнитным полем этого электрона, равна¹⁾

$$\mathbf{p}^{(r)} = \frac{\mathbf{s}}{c} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{e} \times \mathbf{h}], \quad \text{где} \quad \mathbf{h} = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{e}], \quad (4.15)$$

или

$$\mathbf{p}^{(r)} = \frac{1}{4\pi c^2} [\mathbf{e} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{e}]] = \frac{1}{4\pi c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^2 - \mathbf{e} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})). \quad (4.16)$$

Если движение происходит в направлении оси Oz ($\mathbf{v} = \mathbf{v}_z = \mathbf{v}$), то

$$p_z^{(r)} = \frac{v}{4\pi c^2} (e_x^2 + e_y^2), \quad (4.17)$$

и полное количество движения равно

$$P_z^{(r)} = \frac{v}{4\pi c^2} \int_{\mathcal{V}} (e_x^2 + e_y^2) d\mathcal{V}. \quad (4.18)$$

Если распределение заряда характеризуется сферической симметрией, то

$$e_x^2 + e_y^2 = \frac{2}{3} e^2. \quad (4.19)$$

Предполагая, что поле создается зарядом q , распределенным в сфере радиуса r , получаем

$$\mathbf{e} = \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr. \quad (4.20)$$

При вычислении количества движения необходимо провести интегрирование по всему пространству за исключением сферы радиусом r_0 , где r_0 характеризует „радиус электрона“. Поэтому

$$P^{(r)} = \frac{v}{4\pi c^2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{2}{3} \frac{q^2}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2vq^2}{3c^2 r_0}. \quad (4.21)$$

Поскольку $P^{(r)}$ определяет количество движения, то все происходит так, словно частица имеет инертную массу

$$m_0 = \frac{2q^2}{3c^2 r_0}; \quad (4.22)$$

m_0 — называется *электромагнитной массой частицы*. Но ее можно будет находить только в том случае, если удастся непосредственно измерить радиус электрона r_0 .

¹⁾ В действительности напряженность \mathbf{e} необходимо заменить на относительную напряженность \mathbf{e}' , учитывающую движение заряда. Однако выражения для этих двух напряженностей отличаются зависящими от скорости членами порядка $\beta = v/c$ (см. § 3), которые в большинстве случаев являются малыми величинами. Поэтому мы здесь будем предполагать, что разностью между ними можно пренебречь.

С другой стороны, r_0 всегда можно определить как функцию от находимых из независимых измерений значений массы m_0 и заряда q ¹⁾:

$$r_0 = \frac{2q^2}{3c^2 m_0} \approx 1,9 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (4.23)$$

Если вся масса частицы имеет электромагнитное происхождение, то r_0 по определению будет радиусом частицы. Длиной r_0 , как мы знаем, определяются размеры области, в которой обычные законы электромагнетизма можно применять лишь с определенными ограничениями.

Далее, согласно (4.6), энергия частицы равна

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} e^2 d\mathcal{V} = \frac{1}{8\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2r_0}. \quad (4.24)$$

Сравнивая (4.22) и (4.24), в результате получаем

$$m_0 = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2}. \quad (4.25)$$

Гипотеза об электромагнитном происхождении массы является довольно естественной. В самом деле, мы знаем, что при прямолинейном равномерном движении заряда возникает магнитное поле. При торможении заряда магнитное поле изменяется, что приводит к появлению электрического поля, а последнее в свою очередь в соответствии с законом индукции вызывает ускорение частицы. Таким образом, при торможении электрона возникают силы инерции, полностью обязанные своим появлением электромагнитной индукции.

Но, несмотря на правдоподобность гипотезы об электромагнитном происхождении массы, нельзя сказать, что опытные факты ее подтверждают (как, впрочем, нельзя сказать, что они ее опровергают). Для суждения по этому поводу нужно было бы иметь возможность непосредственно измерять r_0 . Кроме того, при этом остается произвольным множитель $4/3$, так как он зависит от гипотез о характере распределения заряда.

Вскоре теория твердого сферического электрона Абрагама была заменена на теорию деформируемого электрона Бюхерера и Лоренца. Последние предположили, что при движении продольные размеры

¹⁾ Заряд q выражен здесь в единицах CGSE. Согласно (3.23) и численным значениям, приведенным на стр. 83, имеем $q = 4,77 \cdot 10^{-10}$ единиц CGSE и

$$\left(\frac{q}{m_0}\right)_{\text{CGSE}} = c \left(\frac{q}{m_0}\right)_{\text{CGSM}} = 1,76 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ единиц CGSE.}$$

электрона могут сокращаться в отношении $1/\sqrt{1-\beta^2}$ ($\beta = v/c$, v — скорость электрона). Эта гипотеза, порожденная результатами опытов Майкельсона, тесно связана с понятиями специальной теории относительности. Поэтому здесь мы не будем рассматривать ее обоснование и отложим обсуждение соответствующих вопросов до гл. 5, § 11. Укажем только на то, в какой степени выводы Лоренца отличаются от выводов Абрагама.

В случае электрона, движущегося со скоростью v вдоль оси Oz , введение плотности заряда

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \rho_0 \left(x, y, \frac{z}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (4.26)$$

приводит к следующему значению плотности количества движения вдоль Oz :

$$p_z^{(r)} = \frac{v}{4\pi c^2 \sqrt{1-\beta^2}} (e_x^2 + e_y^2). \quad (4.27)$$

В результате вычисления, аналогичного проводившемуся выше, найдем, что этой плотности соответствует полное количество движения

$$P^{(r)} = \frac{v}{4\pi c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{2}{3} \frac{q^2}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2}{3} \frac{v}{c^2} \frac{q^2}{r_0 \sqrt{1-\beta^2}}, \quad (4.28)$$

т. е. вместо $P = m_0 v$ имеем

$$P^{(r)} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (4.29)$$

где с учетом (4.25) мы положили

$$m_0 = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^2 r_0} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2}.$$

Опыт подтверждает соотношение Лоренца (4.29), а не соотношение $P = m_0 v$, вытекающее из гипотезы Абрагама.

Действительно, если воспользоваться опытами по отклонению заряженных частиц в параллельных электрическом и магнитном полях и если считать справедливой формулу (4.29), то при достаточно больших скоростях отклоненные частицы будут распределяться вдоль кривой

$$\frac{y^2}{x} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{H^2}{c^2} \frac{l^2}{E} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (4.30)$$

которая при заданных значениях e/m будет тем больше отклоняться от параболы, предсказываемой первыми теориями, чем ближе v к скорости света. Получаемые результаты находятся в полном соответствии с формулой (4.30) (см. гл. 10, § 2).

С другой стороны, если сила F равна действующей на электрон силе, то, согласно (4.29), мы должны иметь

$$F = \frac{dP}{dt}, \quad \text{где } P = \mathbf{v}f(v^2). \quad (4.31)$$

Разлагая F на составляющую F_l , параллельную \mathbf{v} , и на составляющую F_t , перпендикулярную к \mathbf{v} , получаем

$$F = F_l + F_t = \frac{d\mathbf{v}}{dt} f(v^2) + 2\mathbf{v}f'(v^2) \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right), \quad (4.32)$$

т. е.

$$F_l = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_l [f(v^2) + 2v^2 f'(v^2)] = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_l \frac{d|P|}{dv}, \quad (4.33)$$

$$F_t = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_t f(v^2) = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_t \frac{|P|}{v}. \quad (4.34)$$

Продольная и поперечная составляющие силы F_l и F_t пропорциональны соответствующим составляющим ускорения $\gamma_l = (d\mathbf{v}/dt)_l$ и $\gamma_t = (d\mathbf{v}/dt)_t$, причем множители пропорциональности, соответствующие инертной массе, различны. Поэтому вводятся понятия о продольной массе

$$m_l = \frac{d|P|}{dv} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}} \quad (4.35)$$

и поперечной массе

$$m_t = \frac{|P|}{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (4.36)$$

В специальной теории относительности эти результаты претерпевают глубокое изменение, поскольку там, как мы увидим, в основу уже не кладется закон $F = m\gamma$. Правильным будет считаться только полученное Лоренцом и подтверждаемое опытом соотношение (4.29), однако и оно будет рассматриваться не в том смысле, как это делалось первоначально. Именно, в теории Лоренца предполагалось, что с увеличением скорости изменяется только определяемая выражением (4.25) электромагнитная масса, тогда как механическая масса остается неизменной. В связи с этим важные опыты по спектрографическому определению массы вселяли надежду на то, что удастся обнаружить, какой вклад в значение массы вносят электромагнитная или чисто механическая массы.

В таком случае опытное подтверждение формулы Лоренца приводило к выводу, что вся масса частицы носит электромагнитное происхождение. При таких условиях следовало отказаться от предположения о существовании чисто механической массы и от двойственности понятий частицы и поля. Однако, согласно представлениям специальной теории относительности, масса меняется с изменением скорости независимо от своего происхождения.

Масс-спектрография дает возможность проверить этот вывод, но с ее помощью нельзя получить критерий для выяснения „истинной“ природы массы.

§ 3. Потенциалы и напряженности поля, создаваемого электронами

Всегда имеющие место уравнения (4.2) и (4.4) дают возможность представить напряженности \mathbf{e} и \mathbf{h} в виде функции от потенциалов \mathbf{A} и φ :

$$\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad (4.38)$$

причем предполагается, что потенциалы связаны условием

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (4.39)$$

Это условие совместно с уравнениями (4.1) и (4.3) позволяет полностью определить \mathbf{A} и φ ¹⁾.

Из (4.1), (4.3) и (4.39) получаются уравнения распространения

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, \quad (4.40)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 4\pi \rho. \quad (4.41)$$

Их решение складывается из частного решения и общего решения уравнения без правой части. Таким образом, получим

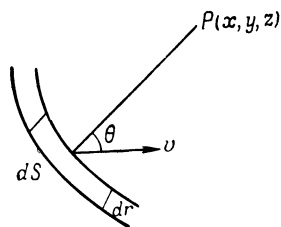
$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{V}'} \frac{[\rho \mathbf{v}]_{t-\frac{r}{c}}}{r} d\mathcal{V}', \quad (4.42)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \int_{\mathcal{V}'} \frac{[\rho]_{t-\frac{r}{c}}}{r} d\mathcal{V}', \quad (4.43)$$

¹⁾ Это замечание не точно, так как без нарушения условия Лоренца к \mathbf{A} , можно добавить $\partial \psi / \partial x$, где ψ — произвольная функция, подчиняющаяся уравнению $\square \psi = 0$ (см. также гл. 9, § 3). — *Прим. перев.*

где A и φ — потенциалы Максвелла — Герца, создаваемые в точке $P(x, y, z)$ в момент времени t элементами $d\mathcal{V} = d\xi d\eta d\zeta$ с плотностью заряда $\rho(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})$ и плотностью тока $\rho\mathbf{v}(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})$. Для вычисления интегралов (4.42) и (4.43), у которых подынтегральные выражения зависят от различных моментов времени $t - (r/c)$, воспользуемся следующей наглядной картиной, предложенной Планком.

Допустим, что радиус ограничивающей объем \mathcal{V} сферы с центром в точке $P(x, y, z)$ непрерывно уменьшается, тогда поверхность сферы последовательно пересекает все элементы $d\mathcal{V}$. В момент времени $t - (r/c)$ эта поверхность проходит через точку $M(\xi, \eta, \zeta)$, в которой определены плотность заряда ρ и плотность тока $\rho\mathbf{v}$. При своем движении сферическая поверхность „собирает“ вклады от последовательных областей пространства, определяющих потенциал в точке P .



Фиг. 12. Метод вычисления потенциалов Максвелла — Герца.

Для двух моментов времени τ и $\tau + d\tau$, которым соответствуют значения радиуса $r = c(t - \tau)$ и $r' = r - c d\tau$, количество заряда, содержащееся в сферическом слое толщины dr , элемент поверхности которого определяется величиной ds , будет равно¹⁾

$$\int \rho(x, y, z, \tau) ds dr. \quad (4.44a)$$

С другой стороны, за время $d\tau$ заряды, движущиеся со скоростью \mathbf{v} , могут с наружной или внутренней стороны пересечь сферическую поверхность (фиг. 12). Полное количество заряда, пересекающего со скоростью \mathbf{v} поверхность за время $d\tau$, будет равно

$$\int \rho ds v \cos \theta d\tau = \int \rho \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r} ds d\tau = \int \rho \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{cr} ds dr. \quad (4.44b)$$

Таким образом, количество электричества q , „собираемое“ за время $d\tau$ движущейся сферической поверхностью, будет равно разности между (4.44a) и (4.44b):

$$q = \int \rho \left[1 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{cr} \right] ds dr. \quad (4.45)$$

Выражение

$$\rho \left[1 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{cr} \right] \quad (4.46)$$

¹⁾ Для моментов времени τ и $\tau + d\tau$ этот интеграл имеет близкие значения: в пределе, когда $dr \rightarrow 0$, их разность стремится к нулю.

характеризует также заряд dq , содержащийся в объеме $d\mathcal{V} = ds dr$, если только считать, что ds велико по сравнению с dr . При выполнении последнего условия потоком заряда через dr можно пренебречь по сравнению с потоком заряда через ds . Следовательно, в этом случае

$$\rho d\mathcal{V} = \frac{dq}{1 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{cr}}. \quad (4.47)$$

Сравним это выражение с формулами (4.42) и (4.43), что позволит переписать последние также в следующем виде:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{v} dq}{\left[r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c} \right]_{t - \frac{r}{c}}}, \quad (4.48)$$

$$\varphi = \int \frac{dq}{\left[r - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{c} \right]_{t - \frac{r}{c}}}. \quad (4.49)$$

Если частица очень мала, то в области порядка r_0^3 величины $r - [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})/c]$ будут приближенно иметь постоянные значения. Поэтому

$$\mathbf{A} = \frac{q\mathbf{v}}{c \left[r - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{c} \right]_{t - \frac{r}{c}}}, \quad (4.50)$$

$$\varphi = \frac{q}{\left[r - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{c} \right]_{t - \frac{r}{c}}}. \quad (4.51)$$

По имени исследователей, получивших данные выражения, эти связанные с электроном потенциалы называются также *потенциалами Льенара — Вихерта*. Они дают возможность вычислить напряженности поля, создаваемого распределением зарядов, характеризующихся потенциалами \mathbf{A} и φ . Действительно, подстановка в уравнения Максвелла

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (4.52)$$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (4.53)$$

выражений (4.50) и (4.51) после ряда вычислений¹⁾ приводит к следующим результатам:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2, \quad (4.54)$$

¹⁾ См., например, Беккер [29].

где

$$E_1 = \frac{q(1-\beta^2)}{\left(r - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{c}\right)^3} \left(\mathbf{r} - \mathbf{v} \frac{r}{c}\right), \quad H_1 = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times E_1], \quad (4.55)$$

$$E_2 = \frac{q}{\left(r - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{c}\right)^3} \frac{1}{c^2} \left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} r\right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right], \quad H_2 = \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times E_2\right]. \quad (4.56)$$

Напряженности E_1 и H_1 соответствуют электростатическому полю, создаваемому электроном, движущимся с постоянной скоростью, и увлекаемому им.

Напряженности E_2 и H_2 однозначным образом связаны с изменением скорости, т. е. с явлениями ускорения и торможения. Они изменяются пропорционально r^{-1} и начинают играть преобладающее значение для больших расстояний. Наконец, они перпендикулярны к направлению распространения характеризуемой ими сферической электромагнитной волны, связанной с наличием ускорения.

При изложении теории Максвелла мы учитывали свойства электронов, позволяющие объяснить поляризацию диэлектриков и намагничивание магнетиков. Несомненно, теория Максвелла станет значительно более ясной, если появится возможность объяснить строение магнетиков и диэлектриков, исходя из свойств зарядов и токов. Однако полные теории поляризации и намагничивания будут включать вопросы, связанные с движением электронов внутри атомов. Первоначально эти вопросы рассматривались, исходя из предположения, носящего классический характер, что электрон связан в атоме упругими силами; более глубокое рассмотрение по необходимости должно основываться на квантовых теориях. Здесь мы ограничимся выводом формализма теории Максвелла, исходя из основных положений теории Лоренца.

§ 4. Уравнения для сред и макроскопическая теория Максвелла

Согласно Лоренцу, уравнения (4.1) — (4.4) для напряженностей микроскопического поля \mathbf{e} и \mathbf{h} справедливы для всех точек, находящихся как вне, так и внутри электрона.

Здесь мы применим их к областям, которые достаточно велики, чтобы содержать большое число молекул, но в то же время настолько малы, чтобы в этих областях используемые в теории Максвелла векторы результирующего поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} и \mathbf{B} практически оставались постоянными. (Действительно, векторы напряженности и индукции мало изменяются для расстояний, по порядку величины равных молекулярным размерам.) При этих условиях гетерогенный характер микроскопических областей заменяется на кажущуюся непрерывность,

Чтобы вычислить среднее значение величины A в точке $P(x, y, z)$ в момент времени t_1 , окружим точку P бесконечно малой сферой, имеющей радиус a и объем \mathcal{V} . Среднее значение \bar{A} будет определяться интегралом

$$\bar{A} = \frac{1}{2\tau} \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{-\tau}^{+\tau} \int_{\mathcal{V}} A(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \theta) d\xi d\eta d\zeta d\theta, \quad (4.57)$$

взятым по объему *внутренней части сферы* и по интервалу времени от $t - \tau$ до $t + \tau$. Поэтому

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t}, \quad \frac{\partial \bar{A}}{\partial x^p} = \frac{\partial A}{\partial x^p}. \quad (4.58)$$

Для области, на которую наложены упомянутые выше условия (т. е. исключаются очень короткие длины волн и не рассматриваются слишком разреженные среды), из микроскопических уравнений (4.1) — (4.4) всегда можно получить также уравнения для средних значений:

$$\text{rot } \bar{\mathbf{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \bar{\rho} \mathbf{v}, \quad (4.59)$$

$$\text{rot } \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial t} = 0, \quad (4.60)$$

$$\text{div } \bar{\mathbf{E}} = 4\pi \bar{\rho}, \quad (4.61)$$

$$\text{div } \bar{\mathbf{H}} = 0. \quad (4.62)$$

§ 5. Истолкование смысла применяемых в теории Максвелла векторов напряженности и индукции. Уравнения теории электромагнетизма для случая покоящегося вещества

Если вещество по отношению к эфиру покоится, то \mathbf{v} характеризует скорость электронов по отношению к рассматриваемой неподвижной материальной системе.

Для проводника плотность ρ и ток проводимости \mathbf{I} записываются в виде

$$\rho = (\bar{\rho})_1 = nq, \quad (4.63)$$

$$\mathbf{I} = (\bar{\rho}\mathbf{v})_1 = nq\mathbf{v}, \quad (4.64)$$

где $n = N/\mathcal{V}$. Этот ток проводимости создается „свободными электронами“.

Для диэлектриков смещение зарядов не приводит к появлению дополнительного заряда у всей молекулы, но, как мы постулировали (см. гл. 1, § 10), оно создает поляризацию

$$\mathbf{P} = nq\mathbf{d}. \quad (4.65)$$

Эта поляризация приводит к тому, что на поверхности молекулы появляется заряд $\int P_n dS$. Как мы указывали в гл. 1, этот поверхностный заряд компенсируется зарядом $-\int \rho' d\mathcal{V}$ внутри молекулы (ρ' — плотность этого заряда). Следовательно,

$$\int P_n dS = \int \operatorname{div} P d\mathcal{V} = -\int \rho' d\mathcal{V}, \quad (4.66)$$

т. е. появляется дополнительная плотность заряда

$$\rho' = (\bar{\rho})_2 = -\operatorname{div} P. \quad (4.67)$$

С другой стороны, изменение P с течением времени приводит к появлению тока индукции

$$(\bar{\rho\vartheta})_2 = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (4.68)$$

Величины $(\bar{\rho})_2$ и $(\bar{\rho\vartheta})_2$ характеризуют вклад имеющих внутри диэлектрика и соответствующих связанным электронам зарядов, которые называются „фиктивными“.

Наконец, некоторые молекулы имеют *магнитный момент*, причину появления которого можно объяснить с помощью квантовых теорий. Магнитный момент, отнесенный к единице объема, равен

$$M = nm, \quad (4.69)$$

где m — магнитный момент одной молекулы. Каждая из таких молекул эквивалентна магнитному листку, создаваемому внутри-молекулярным конвекционным током j' . Таким образом, имеем

$$\int m_l dl = j', \quad (4.70)$$

т. е.

$$\int \operatorname{rot} m dS = \int J' dS, \quad (4.71)$$

откуда

$$\operatorname{rot} m = J'. \quad (4.72)$$

Далее, можно определить конвекционный ток, отнесенный к единице объема намагничивающегося вещества:

$$(\bar{\rho\vartheta})_3 = nJ' = c \operatorname{rot} M \quad (4.73)$$

(здесь используется применявшаяся ранее смешанная система единиц).

Отсюда для средних значений получим следующие соотношения:

$$\bar{\rho} = (\bar{\rho})_1 + (\bar{\rho})_2 = \rho - \operatorname{div} P, \quad (4.74)$$

$$\bar{\rho\vartheta} = (\bar{\rho\vartheta})_1 + (\bar{\rho\vartheta})_2 + (\bar{\rho\vartheta})_3 = I + \frac{\partial P}{\partial t} + c \operatorname{rot} M. \quad (4.75)$$

Если теперь положить

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{B}, \quad (4.76)$$

то усредненные уравнения (4.59)–(4.62) запишутся в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \left(\frac{\mathbf{I}}{c} + \frac{\partial \mathbf{P}}{c \partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{M} \right), \quad (4.77)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.78)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho - 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (4.79)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4.80)$$

Положим

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (4.81)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}. \quad (4.82)$$

Тогда уравнения (4.77) и (4.79) примут вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \frac{\mathbf{I}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (4.83)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (4.84)$$

и система уравнений (4.78), (4.80), (4.83) и (4.84) совпадает с макроскопическими уравнениями Максвелла [см. систему уравнений (3. I) и (3. II) из гл. 3].

Следует отметить, что в результате непосредственного усреднения векторов, используемых в микроскопической теории, получаются векторы напряженности электрического поля и магнитной индукции (а не напряженности магнитного поля). Поэтому именно вектор магнитной индукции является истинным аналогом напряженности электрического поля.

§ 6. Теория Лоренца и электродинамика движущихся тел

Теперь предположим, что вещество движется со скоростью \mathbf{u} , которую в пределах области, по порядку величины соответствующей молекулярным размерам, мы будем считать постоянной. Если ¹⁾

$$u \ll c, \quad (4.85)$$

то мы можем воспользоваться нерелятивистским законом сложения скоростей. В результате получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}', \quad (4.86)$$

$$\overline{\rho\mathbf{v}} = \overline{\rho\mathbf{u}} + \overline{\rho\mathbf{v}'}. \quad (4.87)$$

¹⁾ Как это имеет место в случае движения Земли по орбите (скорость которого равна 30 км/сек).

Как и в рассматривавшемся ранее случае, ток $\overline{\rho\mathbf{v}'}$ записывается в виде

$$\overline{\rho\mathbf{v}'} = (\overline{\rho\mathbf{v}'})_1 + (\overline{\rho\mathbf{v}'})_2 + (\overline{\rho\mathbf{v}'})_3 = \mathbf{I}' + \frac{d\mathbf{P}'}{dt} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}', \quad (4.88)$$

где \mathbf{I}' , $d\mathbf{P}'/dt$ и $\operatorname{rot} \mathbf{M}'$ измеряются при помощи инструментов, связанных с движущимся веществом.

Индукционный ток $(\overline{\rho\mathbf{v}'})_2 = d\mathbf{P}'/dt$ определяется, исходя из поверхностного интеграла

$$\int_S (\overline{\rho\mathbf{v}'})_n dS = \frac{d}{dt} \int_S P_n dS. \quad (4.89)$$

При помощи известных из векторного исчисления теорем получим

$$\frac{d}{dt} \int_S P'_n dS = \int_S \left(\frac{\partial P'_n}{\partial t} + \operatorname{rot} [\mathbf{P}' \times \mathbf{u}] + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{P}' \right)_n dS, \quad (4.90)$$

так что

$$(\overline{\rho\mathbf{v}'})_2 = \frac{d\mathbf{P}'}{dt} = \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial t} + \operatorname{rot} [\mathbf{P}' \times \mathbf{u}] + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{P}'. \quad (4.91)$$

В самом деле,

$$\frac{d}{dt} \int P_n dS = \int \frac{\partial P_n}{\partial t} dS + \int \frac{P_n}{dt} [(dS)_{t+dt} - (dS)_t]. \quad (A)$$

Применим теорему Грина к объему, ограниченному замкнутой поверхностью $d\Sigma$, которая образована из $(dS)_{t+dt}$, $(dS)_t$ и из совокупности площадок $d\sigma = [d\mathbf{l} \times \mathbf{u} dt]$, построенных на ограничивающих dS элементах $d\mathbf{l}$. Получим

$$\int P_n (dS)_{t+dt} - \int P_n (dS)_t + \int \mathbf{P} \cdot [d\mathbf{l} \times \mathbf{u} dt] = \int \operatorname{div} \mathbf{P} dV, \quad (B)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \int P_n (dS)_{t+dt} - \int P_n (dS)_t &= \int \operatorname{div} \mathbf{P} dV + \int [\mathbf{P} \times \mathbf{u}] d\mathbf{l} dt = \\ &= dt \int \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{P} dS + dt \int \operatorname{rot} [\mathbf{P} \times \mathbf{u}] dS, \end{aligned} \quad (B)$$

где последний член преобразован при помощи теоремы Стокса. Подставляя (B) в (A), непосредственно получаем (4.90).

Таким образом, уравнения для усредненных векторов (4.59) и (4.61) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \\ &= \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial t} + \operatorname{rot} [\mathbf{P}' \times \mathbf{u}] + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{P}' + c \operatorname{rot} \mathbf{M}' + \overline{\rho\mathbf{u}} \right), \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho - 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}'. \quad (4.93)$$

Векторы P' и M' определяют связанные с движущейся системой поляризацию и магнитный момент. Полагая

$$D = E + 4\pi P', \quad (4.94)$$

$$H = B - 4\pi M', \quad (4.95)$$

получаем также

$$\operatorname{rot} H - \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} (I + \rho u + \operatorname{rot} [P' \times u]), \quad (4.96)$$

$$\operatorname{div} D = 4\pi \rho. \quad (4.97)$$

При этом мы учли, что, согласно (4.74),

$$\overline{\rho u} = \rho u - u \operatorname{div} P'. \quad (4.98)$$

Если векторы P и M мы определим теперь таким образом, что

$$M' - M = - \left[\frac{P' \times u}{c} \right], \quad (4.99)$$

$$P' - P = \left[\frac{M' \times u}{c} \right], \quad (4.100)$$

то мы можем ввести новые векторы

$$B = H_1 + 4\pi M, \quad (4.101)$$

$$D_1 = E + 4\pi P, \quad (4.102)$$

т. е. напряженность H_1 и индукцию D_1 , которые при помощи обычных соотношений выражаются через B , M , E и P . Уравнения (4.83) и (4.84) принимают при этом следующий вид:

$$\operatorname{rot} H_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial D_1}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} (I + \rho u), \quad (4.103)$$

$$\operatorname{div} D_1 = 4\pi \rho. \quad (4.104)$$

Минковский эти уравнения получил другим путем. Но в то время, как, согласно Минковскому, векторами напряженности магнитного поля и поляризации для неподвижного наблюдателя являются H_1 и P' , в теории Лоренца такими векторами будут H и P . Впрочем, они отличаются от H_1 и P' только на величины

$$H_1 - H = 4\pi (M' - M) = - \frac{4\pi}{c} [P' \times u], \quad (4.105)$$

которые при $u \ll c$ малы по сравнению с самой напряженностью

Сила Лоренца. Выражение для силы в зависимости от микроскопических напряженностей e и h :

$$\boxed{f = q \left(e + \frac{1}{c} [v \times h] \right)} \quad (4.106)$$

при переходе к усредненным величинам и затем, согласно (4.76), к векторам \mathbf{E} и \mathbf{B} , запишется следующим образом:

$$\mathbf{f} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right). \quad (4.107)$$

Поэтому, согласно (4.86),

$$\mathbf{f} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] + \frac{1}{c} [\mathbf{v}' \times \mathbf{B}] \right). \quad (4.108)$$

Если заряд увлекается движущимся веществом ($\mathbf{v}' = 0$), то все происходит так, словно на движущийся заряд действует такая напряженность электрического поля \mathbf{E}' , что

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}' = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] \right). \quad (4.109)$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]. \quad (4.110)$$

В движущейся системе отсчета всегда имеют место соотношения

$$\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E}' = \mathbf{E}' + 4\pi \mathbf{P}', \quad (4.111)$$

т. е.

$$\mathbf{P}' = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}'. \quad (4.112)$$

Поэтому вектор поляризации определяют следующим образом:

$$\mathbf{P}' = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] \right). \quad (4.113)$$

Рассмотрим, в частности, ненамагничивающуюся среду. Согласно соотношению (4.100), $\mathbf{M}' = 0$ и $\mathbf{P}' = \mathbf{P}$. Тогда из уравнений Лоренца (4.94) и (4.96) имеем

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{I} + \rho \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot} [\mathbf{P} \times \mathbf{u}] \right). \quad (4.114)$$

Из (4.114) и (4.91) следует, что полный ток, возникающий при движении заряженного диэлектрика, равен

$$\mathbf{I} + \rho \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot} [\mathbf{P} \times \mathbf{u}] = \mathbf{u} (\rho - \text{div } \mathbf{P}) + \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{I}. \quad (4.115)$$

Если рассматривать стационарные состояния, как это имело место в случае опытов Рентгена и Эйхенвальда, то для первого из этих опытов, когда вращаются одновременно изолятор и металлические обкладки, наблюдаемая плотность тока конвекции равна

$$\mathbf{u} (\rho - \text{div } \mathbf{P}). \quad (4.116)$$

Напротив, во втором опыте, когда в неподвижной системе имеется ток проводимости, эта плотность равна I . Если путем изменения сопротивления внешнего контура добиться равенства обоих этих токов, то получим

$$i = \int_S \mathbf{u} (\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}) dS. \quad (4.117)$$

Учитывая формулу (3.108) и используя обозначения, примененные на фиг. 11, получаем, что полный ток $i = \int I dS$ должен равняться сумме тока конвекции

$$i_1 = \int u \rho dS_1 = u \rho a d = a u \sigma_p = a u \frac{\epsilon E}{4\pi} \quad (4.118)$$

и тока Рентгена

$$\begin{aligned} i_2 &= - \int \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{P} dS_2 = - \int \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{P} a dx = \\ &= - a u \int \frac{\partial P}{\partial x} dx = - a u |P|, \end{aligned} \quad (4.119)$$

где для опыта Эйхенвальда вектор \mathbf{P} параллелен оси вращения. Поэтому с учетом (4.112)

$$i_2 = - a u \frac{(\epsilon - 1)}{4\pi} E. \quad (4.120)$$

Таким образом, мы должны наблюдать полный ток

$$i = i_1 + i_2 = a u \frac{E}{4\pi} = a u \frac{V}{4\pi d}, \quad (4.121)$$

что совпадает со значением, найденным в опытах Эйхенвальда. Ток, возникающий при движении диэлектрика, имеет плотность

$$I = - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{P} = - \mathbf{u} \frac{(\epsilon - 1)}{4\pi} E. \quad (4.122)$$

Этот ток называется также током Рентгена. Во всех тех опытах, в которых имеет место медленное движение вещества ($u/c \ll 1$), следует поэтому заменить конвекционный ток $i = - \mathbf{u} (a\epsilon/4\pi) E$ на ток Рентгена $i' = - \mathbf{u} a [(\epsilon - 1)/4\pi] E$. На практике это сводится к необходимости заменить напряженность E на напряженность $E' = [1 - (1/\epsilon)] E$, и как раз к этому приводят опыты Рентгена, Эйхенвальда и Вильсона.

Поскольку E заменяется на E' , то может возникнуть впечатление о частичном увлечении векторов напряженности поля, т. е. об увлечении электромагнитного эфира движущимся веществом. Внешне выводы Лоренца близки к выводам, которые можно сделать из предложенной Френелем гипотезы о частичном увлечении

эфира. Однако предлагаемое в теории Лоренца объяснение в действительности носит совсем другой характер: напряженность E' сводится лишь для удобства записи формулы (4.122), а ток Рентгена в теории Лоренца связывается с влиянием поляризации диэлектрика. Увлекаются лишь величины P и M , характеризующие диэлектрики и намагничиваемые среды, тогда как эфир, строго говоря, остается неподвижным. К этому выводу мы еще вернемся при обсуждении специальной теории относительности (см. гл. 5, § 5).

Таким образом, с помощью теории Максвелла — Лоренца удалось правильно объяснить опыты, относящиеся к электродинамике не слишком быстро движущихся тел, когда членами порядка u^2/c^2 можно пренебречь. При учете только членов первого порядка относительно u/c удастся, следовательно, как сохранить неизменной форму уравнений Максвелла, так и согласовать их с гипотезой Лоренца о свойствах источников поля.

С другой стороны, сами свойства источников приводят к введению массы, изменяющейся со скоростью. Этот вывод, подтверждаемый на опыте и объясняемый с помощью классических (нерелятивистских) понятий, казалось бы, приводит к заключению, что вся масса имеет электромагнитное происхождение.

Думается также, что теории Максвелла — Лоренца удалось обосновать представление о близкодействии, передаваемом с конечной скоростью, и связать классическую теорию поля с понятием о существовании источников поля. С другой стороны, казалось, что характеристики источников в конечном итоге можно будет выразить через величины, по существу не отличающиеся от полевых величин. Представлялось, что все явления, за исключением гравитации, можно будет объяснить при помощи электромагнитных действий максвелловского типа. Поэтому теперь казалось, что тот синтез, которого безуспешно пытались достигнуть при помощи теории дальнодействия, должен быть связан с теорией поля. Основой классической теории полей явились по существу релятивистские, но все еще связывавшиеся с нерелятивистской интерпретацией уравнения Максвелла, теории.

Задачи

1. Электрон движется в постоянном магнитном поле H , направленном вдоль Oz .

а) Показать, что траектория является спиралью, ось которой параллельна Oz .

б) Проекция траектории на плоскость xOy является окружностью. Найти радиус окружности как функцию от e/m , начальной скорости v и напряженности H .

в) Предполагая начальную скорость направленной вдоль Ox , вычислить отклонение, которое возникнет на экране, перпендикулярном к Ox и отстоящем от последней диафрагмы на расстоянии l .

У к а з а н и е. а) Воспользоваться определением силы Лоренца:

$$\mathbf{f} = e \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right] \quad \left(m\ddot{x} = \frac{e}{c} \dot{y}H, \quad m\ddot{y} = -\frac{e}{c} \dot{x}H, \quad \ddot{z} = 0 \right).$$

Полагая

$$\xi = x + iy, \quad \ddot{\xi} = -i\omega\dot{\xi}, \quad \text{где } \omega = \frac{eH}{mc},$$

в результате интегрирования получаем

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0 e^{-i\omega t}, \quad \xi = \xi_0 + \frac{\dot{\xi}_0}{i\omega} (1 - e^{-i\omega t}).$$

б) В плоскости xOy траектория является окружностью:

$$x = x_0 + \frac{1}{\omega} (\dot{y}_0 (1 - \cos \omega t) + \dot{x}_0 \sin \omega t),$$

$$y = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Радиус окружности равен

$$R^2 = \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}{\omega^2} \quad \text{или} \quad R = \frac{v}{\omega} = \frac{vmc}{eH}.$$

в) Из $(\dot{x} + i\dot{y}) = (\dot{x}_0 + i\dot{y}_0) e^{-i\omega t}$ имеем

$$\dot{x} = \dot{x}_0 \cos \omega t + \dot{y}_0 \sin \omega t,$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 \cos \omega t - \dot{x}_0 \sin \omega t.$$

Если начальная скорость направлена вдоль Ox ($\dot{x}_0 = v$, $\dot{y}_0 = 0$), то, применяя уравнения движения [$m(d^2x/dt^2) = 0$, $m(d^2y/dt^2) = 0$] к электрону, прошедшему через диафрагму, получаем $dx/dt = v \cos \omega t \approx v$, $dy/dt = v \sin \omega t \approx v\omega t$, т. е.

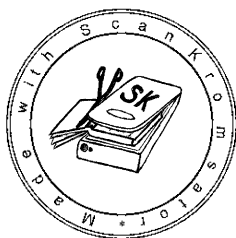
$$x \approx vt, \quad y = -\frac{v\omega t^2}{2} = \frac{v\omega}{2} \left(\frac{l}{v} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{e}{mc} \frac{Hl^2}{v}.$$

2. Найти траекторию электрона, движущегося в параллельных между собой и перпендикулярных к начальной скорости электрическом и магнитном полях ($|H| = H_z$, $|E| = E_z$, $|v| = v_x$).

3. Найти траекторию электрона, движущегося в перпендикулярных электрическом и магнитном полях ($|E| = E_x$, $|H| = H_y$). Показать, что если в момент $t = 0$ электрон находится в начале координат, а его начальная скорость v_0 равна нулю, то его траектория будет циклоидой.

4. Магнитное поле циклотрона составляет 20 000 эрстед. Чему равна угловая скорость ускоряемого в этом поле протона?

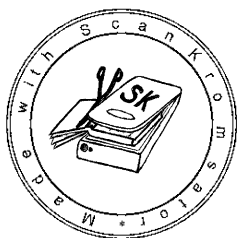
Эта страница пуста



ЧАСТЬ ВТОРАЯ

**СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

Эта страница пуста



ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ДО ЭЙНШТЕЙНА

§ 1. Принцип относительности в классической механике

В ньютоновской механике постулируется существование абсолютного пространства, „не зависящего от находящихся в нем тел“, и „равномерно текущего“ универсального времени.

Гипотеза об универсальном времени означает, что движение пространственной системы отсчета не должно влиять на протекающие в ней явления. Аналитически это выражается в том, что преобразования координат должны иметь следующий вид:

$$x_p = x'_p(x_q, t), \quad t' = t, \quad \text{где } p, q = 1, 2, 3.$$

Понятие об абсолютном пространстве является более неопределенным. Если ограничиться классической кинематикой, то оно говорит о возможности описывать движение твердого тела в системе отсчета, образованной другим твердым телом, причем здесь имеет место полная обратимость. При выборе за систему отсчета любого из двух твердых тел уравнения движения для другого тела будут иметь один и тот же вид. В классической кинематике, следовательно, существует полная обратимость в описании движений, что приводит к широкой применимости принципа относительности. Что же касается понятия об абсолютном пространстве, то оно при этом отражает только своего рода психологическую потребность. Абсолютное пространство является как бы неподвижным каркасом, по отношению к которому перемещаются все твердые тела, но который на самом деле не определяет какую-либо привилегированную систему отсчета. Понятие об абсолютном пространстве представляет скорее метафизический или психологический интерес и для кинематики не играет никакой роли.

Понятие об абсолютном пространстве приобретает физический смысл только в динамике, в которой на принцип относительности накладываются ограничения. Здесь это понятие по крайней мере можно связать с возможностью определения класса выделенных (привилегированных) систем отсчета, в которых свободная материальная точка движется прямолинейно и равномерно. Подобная система отсчета называется *инерциальной*, а утверждение о воз-

возможности найти такую систему составляет содержание закона инерции. В этом смысле можно вместе с Эйлером считать, что применимость понятия об абсолютном пространстве гарантирует справедливость закона инерции.

С физической точки зрения инерциальные системы существуют только приближенно. Для явлений, протекающих в лаборатории, инерциальная система отсчета определяется ее стенами. Для земных явлений инерциальную систему можно считать образованной осями, проведенными из центра Земли в направлении фиксированных звезд. Представление об идеальной системе отсчета, в которой всегда строго выполняется закон инерции, как раз и возникло, причем задолго до Ньютона, в результате рассмотрения частных случаев инерциальных систем.

По отношению к одной инерциальной системе можно определить бесконечное множество других инерциальных систем, движущихся с постоянной скоростью и получаемых в результате преобразования Галилея

$$\boxed{x' = x - vt, \quad t' = t.} \quad (5.1)$$

Это преобразование дает возможность ограничить относительность, существующую в классической кинематике, и считать классическую кинематику справедливой только для инерциальных систем. С помощью преобразования Галилея систему отсчета всегда можно выбрать таким образом, что тело, которое находилось в состоянии прямолинейного равномерного движения, будет теперь находиться в состоянии покоя. Декарт даже говорил: „Будет или не будет изменяться состояние тела — это зависит от того, как определять его положение“.

Таким образом, в механике закон инерции дает возможность определить эквивалентность выделенных систем отсчета или, что то же самое, устанавливает относительный характер скорости. Но само понятие о движущейся прямолинейно и равномерно выделенной системе отсчета имеет место для частного случая, который приобретает смысл только в более общих рамках динамики. Свой истинный смысл закон инерции приобретает только в том случае, когда он включается в ньютоновскую динамику в виде неявного предположения.

Ньютоновская динамика основывается на определении силы

$$\mathbf{f} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\boldsymbol{\gamma}, \quad (5.2)$$

которое переходит в более общий закон

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \quad (5.3)$$

где масса m является внутренней характеристикой материальной точки.

Для Ньютона ускорение связано с существованием абсолютного движения: движение носит абсолютный характер, если на вещество действуют так называемые *реальные* силы; система отсчета находится в состоянии абсолютного движения, если в ней имеются так называемые *фиктивные* силы, к числу которых относятся силы инерции и силы Кориолиса.

Прилагательное *фиктивные* означает только то, что эти силы могут быть устранены в результате соответствующего выбора системы отсчета и что закон инерции остается справедливым при переходе к другим координатам. Но фактически в динамике смысл закона инерции оказывается не столь простым. Если этот закон не выполняется, то это можно объяснить как неправильным выбором системы отсчета, так и существованием действительных сил, о которых мы не знаем, каким образом они могут быть обнаружены. В механике Ньютона предполагается, что всегда существует возможность определить, какая материальная точка является свободной, или, что сводится к тому же, отличить реальные силы от фиктивных. Однако в общей теории относительности это предположение критикуется и доказывается, что дело обстоит не так просто.

Если инерциальная система определена, то при помощи принципа относительности можно определить бесконечное число других инерциальных систем. Основной закон динамики инвариантен относительно преобразования Галилея, поэтому во всех инерциальных системах отсчета он сохраняет одинаковый вид.

§ 2. Принцип относительности в электродинамике

Принцип специальной или частной относительности имеет место по отношению к механике. Можно задать вопрос, будет ли он справедлив также и в других областях физики.

В оптике этот вопрос формулируется следующим образом. До появления специальной теории относительности казалось очевидным, что если в некоторой системе отсчета электромагнитная волна изотропна, то в другой системе отсчета, движущейся по отношению к первой прямолинейно с постоянной скоростью v , она уже не может быть изотропной. В самом деле, если в первой системе отсчета скорость света равна c , то, согласно закону сложения скоростей, принимаемому в классической механике, во второй системе отсчета она будет равна $c \pm v$. Таким образом, представляется, что этот результат противоречит вытекающему из классической динамики принципу относительности. Тогда при помощи оптического опыта можно будет определить движение системы

источник — измерительный прибор по отношению к эфиру, который будет считаться неподвижным. В электромагнитной теории эта возможность сразу же вытекает из того, что уравнения Максвелла не инвариантны по отношению к преобразованию Галилея.

§ 3. Экспериментальные возможности обнаружить абсолютное движение при помощи оптических методов

Говорят, что скорость равномерного движения по отношению к эфиру, по абсолютной величине равная v , вызывает эффекты первого порядка, если они зависят от отношения $\beta = v/c$, и эффекты второго порядка, если характеризующие их члены зависят только от β^2 . При помощи оптических методов нетрудно обнаружить эффекты первого порядка, а в отдельных случаях, хотя и с большим трудом, также и эффекты второго порядка.

При вращении вокруг Солнца Земля движется со скоростью, приблизительно равной 30 км/сек, и для промежутка времени, малого по сравнению со временем полного оборота, ее движение с большой точностью можно считать прямолинейным и равномерным. Здесь

$$\beta = \frac{1}{10\,000}$$

и при помощи оптических методов можно надеяться обнаружить „эфирный ветер“ в плоскости эклиптики, что даст возможность обнаружить движение абсолютной системы отсчета.

Однако необходимо отметить, что в наиболее известных опытах, связанных с оптическими свойствами движущихся тел, эфирный ветер не будет приводить к эффектам первого порядка.

1. Измерение времени прохождения светового луча в прямом и обратном направлении. Может показаться, что эфирный ветер легко обнаружить путем измерения скорости $c \pm v$ света, распространяющегося вдоль твердого стержня. Однако при помощи какой-либо экспериментальной установки этого сделать нельзя. Всегда предполагается, что имеет место синхронизация часов, расположенных вдоль пути, а чтобы осуществить синхронизацию, нужно измерить времена прохождения света в прямом и обратном направлении ¹⁾.

¹⁾ Были предложены различные способы измерения скорости света, проходящего в одном направлении, и доказательства вероятной анизотропии пространства, проявляющейся при прохождении света в прямом и обратном направлениях.

Большинство из таких способов непригодны, так как в них неявно предполагается существование изотропии, наличие которой как раз и требуется доказать (или опровергнуть). Другие способы хотя теорети-

При таком измерении автоматически исключаются все эффекты первого порядка ¹⁾.

2. Эффект Доплера и абберация. Наиболее известные явления, связанные с движением источников, суть явления абберации и эффект Доплера.

Эффект Доплера, обнаруженный им в 1842 г. (см. Допплер [41]), заключается в изменении длины световых волн, испускаемых движущимся источником.

Приведем нерелятивистское объяснение эффекта Доплера.

Если пучок плоских волн, выходящих в начальный момент из точки O , распространяется в направлении Ox , то число волн, достигающих в момент t точки $P(x)$, связанной с системой S , будет равно $\nu(t - x/c)$. Пусть система S' , в начальный момент времени совпадающая с S , движется вдоль Ox прямолинейно и равномерно со скоростью v . Тогда число волн, достигающих связанной с этой системой точки $Q(x')$, будет равно $\nu'(t - x'/c)$, где через ν и ν' обозначены частоты волн в системах S и S' .

Если в момент t точка P совпадает с Q , то должно иметь место равенство

$$\nu \left(t - \frac{x}{c} \right) = \nu' \left(t - \frac{x'}{c} \right).$$

чески и правильны, но они не дают возможности обеспечить точность, достаточную для выявления анизотропии.

См. по этому вопросу работу Коста-де-Борегаара [39] и книгу Арзелье [40], где имеются ссылки на соответствующую литературу.

¹⁾ Если длина пути равна l , то полное время, в течение которого свет проходит по этому пути в прямом и обратном направлениях, равно

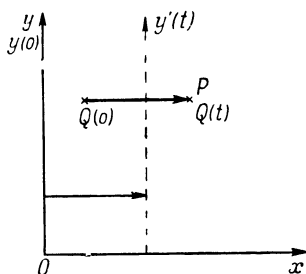
$$t = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2},$$

где v — подлежащая определению абсолютная скорость.

В связи с этим средняя наблюдаемая скорость

$$c' = \frac{2l}{t} = \frac{c^2 - v^2}{c} = c(1 - \beta^2)$$

будет отличаться от c только членами второго порядка,



Ф и г. 13. Эффект Доплера.

Плоские волны распространяются вдоль оси Ox .

Переходя от x' к x при помощи преобразования Галилея, получим

$$x' = x - vt, \quad x = x' + vt,$$

$$\nu \left(t - \frac{x' + vt}{c} \right) = \nu' \left(t - \frac{x'}{c} \right).$$

В частности, для $x' = 0$ $\nu(1 - \beta) = \nu'$.

Обозначим через ν_0 частоту источника в системе S .

а) В рассмотренном выше случае, когда наблюдатель перемещается вместе с системой S' , $\nu = \nu_0$ и наблюдаемая частота будет равна $\nu' = \nu_0(1 - \beta_{\text{набл.}})$.

б) Если источник перемещается вместе с системой S' , а наблюдатель неподвижен, то $\nu' = \nu_0$. Наблюдаемая частота будет равна $\nu = \nu_0/(1 - \beta_{\text{ист.}})$.

Таким образом, не существует обратимости между наблюдаемыми частотами; когда наблюдатель перемещается, частота равна $\nu_1 = \nu_0(1 - \beta)$, а когда с той же скоростью, но в противоположном направлении движется источник, то $\nu_2 = \nu_0/(1 + \beta)$. Однако в практических условиях этим нельзя воспользоваться для определения абсолютного движения, так как разность между частотами имеет порядок β^2 :

$$\nu_2 - \nu_1 = \nu_0 \left\{ \frac{1}{1 + \beta} - (1 - \beta) \right\} = \nu_0 \frac{\beta^2}{1 + \beta}.$$

в) В общем случае, когда движутся как наблюдатель, так и источник,

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{1 - \beta_{\text{набл.}}}{1 - \beta_{\text{ист.}}} \right), \quad \nu - \nu_0 = \nu_0 \left(\frac{\beta_{\text{ист.}} - \beta_{\text{набл.}}}{1 - \beta_{\text{ист.}}} \right).$$

Если источник и наблюдатель движутся с одинаковой скоростью, то эффект Доплера отсутствует. Он возникает в том случае, когда $\beta_{\text{ист.}} \neq \beta_{\text{набл.}}$, причем в приближении первого порядка он зависит только от относительного движения источника и наблюдателя, характеризуемого значением $\beta_{\text{ист.}} - \beta_{\text{набл.}}$. Абсолютные скорости появляются только в приближении второго порядка.

Явление аберрации, обнаруженное Брэдли в 1728 г., проявляется в том, что в результате относительного движения источника и наблюдателя направление световых лучей изменяется¹⁾. Например, наблюдение в подзорную трубу показывает, что положение изображения фиксированной звезды изменяется. В течение года направление движения Земли меняется и изображение звезды описывает небольшой эллипс.

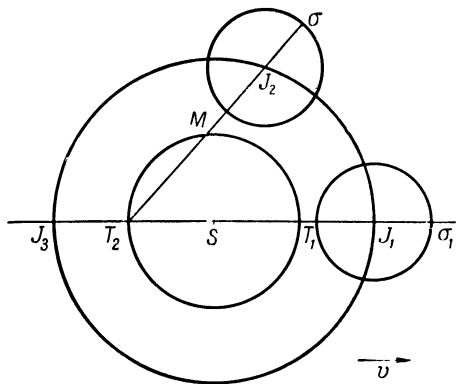
В случаях эффекта Доплера и аберрации эффекты первого порядка возникают только при относительном движении источника

¹⁾ См. работу Брэдли [42]. Отклонение световых лучей не зависит от присутствия преломляющей среды, роль которой играет наполняющая телескоп вода. См. работы Эйри [43, 44].

и измерительного прибора. Что же касается абсолютного движения по отношению к эфиру, то оно может проявляться только в эффектах второго порядка, однако до недавнего времени наблюдение последних находилось вне пределов экспериментальных возможностей¹⁾. В знаменитых опытах Рёмера (1676 г.), основанных на предвосхищении эффекта Доплера и на aberrации, а затем в опытах Брэдли [42] (1728 г.) скорость света была определена путем измерений, проводившихся над световым лучом, идущим только в одном направлении.

Измерения Рёмера можно считать относящимися к эффекту Доплера, в котором частота испускания световой волны заменяется на частоту, с которой происходят затмения спутников Юпитера. Принцип измерений Рёмера заключался в следующем.

Рассмотрим наблюдаемые с Земли с интервалом в полгода последовательные затмения спутника Юпитера. При первом наблюдении Солнце, Земля, Юпитер и его спутник занимают положение S, T_1, J_1, σ_1 , при втором наблюдении — положение S, T_2, J_2, σ_2 . Поскольку Юпитер совершает полный оборот вокруг Солнца за 12 лет, то положение Юпитера J_1 очень близко к положению J_2 . По-



Ф и г. 14. Схема измерения Рёмера.

этому дополнительный путь, проходимый световым лучом при втором затмении, будет очень близок к диаметру орбиты Земли $T_1 T_2 = l$.

Если солнечная система неподвижна относительно эфира, то второе затмение будет, следовательно, запаздывать на время $t_1 = l/c$. Если же по отношению к эфиру она движется со скоростью v (вдоль $T_2 T_1$), то запаздывание будет равно $t_2 = l/(c + v)$. Разность между этими запаздываниями будет второго порядка относительно β :

$$t_1 - t_2 = l \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c + v} \right) = \frac{lv}{c(c + v)} = \frac{l\beta^2}{v(1 + \beta)} \approx \frac{l\beta^2}{v}.$$

Аналогично получим, что если измерения двух затмений производятся через 6 лет, т. е. когда Юпитер будет находиться в положении J_3 ,

¹⁾ Для земных источников эффект Доплера удалось осуществить, например, для каналовых лучей (Штарк и др., 1906 г., см. [45—47]), однако измерение эффектов второго порядка, связанных с эффектом Доплера, было осуществлено только в опытах Айвса и Стилуэлла [48] (см. также гл. 10, § 2).

то при движении Солнечной системы со скоростью v запаздывание двух затмений будет равно $t_3 = l/(c - v)$. Здесь снова появляется член второго порядка:

$$t_3 - t_2 = l \left(\frac{1}{c - v} - \frac{1}{c + v} \right) = \frac{2lv}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{v} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}.$$

Как заметил Максвелл, наблюдение последовательных затмений спутников Юпитера дает возможность определить, каким образом Солнечная система движется по отношению к эфиру. Однако связанные с этим движением эффекты будут только второго порядка, поэтому измерения Рёмера, осуществленные с точностью до величин первого порядка, дают возможность правильно определить скорость света $c = l/t_1$.

Именно потому, что в эффектах первого порядка влияние эфирного ветра не проявляется, эти опыты, вне зависимости от того, существует или нет „эфирный ветер“, можно рассматривать как опыты по определению скорости света c .

§ 4. Эффекты первого порядка. Гипотеза о частичном увлечении света прозрачными телами

Чтобы обнаружить эффект первого порядка, возникающий при абсолютном движении, необходимо обратиться к опытам, связанным с возможным увлечением эфира и световых волн, распространяющихся в прозрачной среде¹⁾. Независимо от того, будет ли увлечение отсутствовать или оно будет полным, увлечение приводит к эффектам первого порядка, связанным с „эфирным ветром“. Поэтому при помощи опытов, в которых рассматривается распространение света в прозрачной среде, казалось бы, можно обнаружить абсолютное движение. В многочисленных опытах, проводившихся Араго, потом Физо, Хекком, Маскартом, Майкельсоном и, наконец, Зеemanом (1914 г.), неизменно получались отрицательные результаты²⁾.

¹⁾ Стокс (1845 г.) предложил значительно более радикальную гипотезу. Он допустил, что движущееся вещество полностью увлекает с собою эфир. Если внутри и в непосредственной близости от движущегося вещества эфир полностью увлекается, то все будет происходить так, словно для оптических опытов движения как бы вовсе не существует. В этом случае движение эфирного ветра нельзя будет обнаружить ни в каком порядке. Но при такой формулировке гипотеза Стокса наталкивается на затруднения, так как не удастся объяснить постоянство направления испускаемых звездой световых лучей и неизменность величины их скорости при переходе от неподвижного межзвездного эфира к эфиру, увлекаемому Землей. См. Стокс [40, 50].

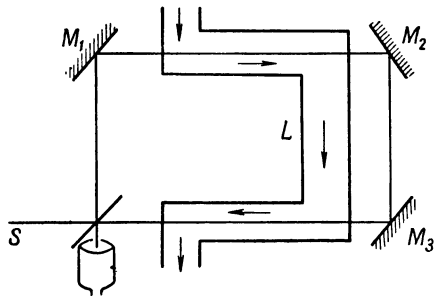
²⁾ Укажем, однако, на опыт Физо по вращению плоскости поляризации светового луча в стеклянных пластинках. Он, казалось бы, привел к положительному результату, однако более точные опыты Брэйса (1905 г.) и Штрассера (1907 г.) дали строго отрицательный результат.

В первых опытах подобного типа, проведенных Араго в 1818 г. [51], использовалось преломление световых лучей, проходящих через систему линз. Вскоре после этого Френель предложил объяснение отрицательного результата опыта Араго, основанное на допущении о частичном увлечении эфира прозрачными средами. Коэффициент увлечения должен равняться

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad (5.4)$$

где n — показатель преломления среды.

Формула Френеля была получена из теоретических данных, основанных на гипотезах о эфире как упругой среде. Хотя эти соображения были мало убедительны, они объяснили отрицательный результат опыта Араго и, казалось бы, были вполне удовлетворительно подтверждены предложенным Физо (1851 г.) опытом с увлечением световых волн движущейся водой. Наблюдая смещение интерференционной картины для случая, когда световые волны распространяются внутри трубки L (фиг. 15) с быстро текущей водой, Физо обнаружил существование частичного увлечения (см. работы Физо [52], а также Майкельсона и Морлея [53]). Величина смещения находилась в соответствии с тем значением, которое предсказывалось формулой Френеля.



Фиг. 15. Схема опыта Физо.

С еще большей точностью предсказания Френеля были подтверждены Зеemanом [54], измерявшим скорость света в быстро движущемся кварцевом стержне. Впрочем, опыты Зеемана были уже настолько точны, что в них сказывалась дисперсия среды (см. конец § 10, гл. 7).

На примере опыта Хека [55], эквивалентного опыту Физо, мы покажем, что *вытекающее из формулы Френеля частичное увлечение световых волн должно автоматически компенсировать любые эффекты первого порядка, связанные с эфирным ветром.*

Рассмотрим установку, изображенную на фиг. 16. Свет, испускаемый источником S , падает на полупрозрачное зеркало M под углом 45° . Падающий пучок разделяется на два пучка, которые в противоположных направлениях проходят путь $M_1M_2M_3$. После

Второй пучок проходит оптический путь $MM_3M_2M_1M$. Для него время прохождения участков пути $L'_1L'_2$ и L_2L_1 соответствует

$$t_2 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c_1 - \varphi + v}. \quad (5.6)$$

Поэтому разность между этими двумя временами прохождения равна

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_1 - t_2 = l \left\{ \frac{1}{c_1 + \varphi - v} + \frac{1}{c + v} - \frac{1}{c - v} - \frac{1}{c_1 - \varphi + v} \right\} = \\ &= 2l \left\{ \frac{-\varphi + v}{c_1^2 - (\varphi - v)^2} - \frac{v}{c^2 - v^2} \right\} = \frac{2l(v\varphi^2 - v^2\varphi - c^2\varphi + c^2v - vc_1^2)}{(c^2 - v^2)[c_1^2 - (\varphi - v)^2]} = \\ &= \frac{2l \left(\frac{\varphi^2}{c^2} - \beta \frac{\varphi}{c} - \frac{\varphi}{v} + 1 - \frac{1}{n^2} \right)}{v(1 - \beta^2) \left[\left(\frac{c_1}{v} \right)^2 - \left(1 - \frac{\varphi}{v} \right)^2 \right]}, \quad (5.7) \end{aligned}$$

где показатель преломления среды n определяется с помощью обычной формулы:

$$n = \frac{c}{c_1}. \quad (5.8)$$

Таким образом, приближенно имеем

$$\Delta t \approx \frac{2l}{v} \left(-\frac{\varphi}{v} - \frac{1}{n^2} + 1 \right) n^2 \beta^2, \quad (5.9)$$

т. е. разность фаз равна ¹⁾

$$\Delta \psi = v \Delta t = \frac{c}{\lambda} \frac{2l}{v} n^2 \beta^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\varphi}{v} \right) = \frac{2ln^2}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\varphi}{v} \right) \beta.$$

Если вместе с Френелем [56] предположить, что движущиеся прозрачные тела частично увлекают эфир, причем

$$\varphi = v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad (5.10)$$

так что коэффициент увлечения равен [см. (5.4)]

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2},$$

¹⁾ Δt имеет тот же порядок величины, что и β^2 . Но измеряемый эффект, связанный, например, со смещением интерференционных полос, имеет порядок $c\Delta t$, т. е. является эффектом первого порядка (связанным с членом $\beta \approx 1/c$).

В противоположность этому, например, измерения, основанные на опыте Рёмера, дают $\Delta t \approx \beta^2$.

В опыте Майкельсона (см. стр. 120), как и в опыте Физо, измеряются величины $\Delta l = c\Delta t$. Но Δt имеют такой же порядок величины, как и β^2/c [см. (5.19)], поэтому наблюдаемый эффект будет также второго порядка ($\sim \beta^2$).

то, согласно (5.9), $\Delta t = 0$. Поэтому при помощи опыта рассматриваемого типа невозможно обнаружить эффект первого (и только первого) порядка, связанный с эфирным ветром.

Таким образом, формула Френеля [56] и многочисленные подтверждающие ее опыты заранее делают безнадёжной любую попытку обнаружить эффект первого порядка, обусловленный эфирным ветром: увлечение эфира является таким, что оно автоматически компенсирует этот эффект.

В общем виде этот вывод, говорящий о полной невозможности определить абсолютное движение по отношению к эфиру при помощи оптических методов, стал очевидным только к 1874 г. после работ Маскарта (см. его статью [57] и книгу [58], гл. 15, стр. 38), Вельтмана [59] и Потьера [60]. Разумеется, такие выводы относятся только к возможности обнаружить эффекты первого порядка, но уже в то время Маскарт высказал предположение, что в оптике, как и в динамике, никакие опыты не дают возможности выделить привилегированную галилееву систему отсчета.

§ 5. Электронная теория Лоренца и эффекты первого порядка. Гипотеза неподвижного эфира

Гипотеза о частичном увлечении эфира позволила объяснить отрицательные результаты, полученные при изучении распространения света в прозрачных средах, если только при этом величина коэффициента увлечения определяется формулой Френеля.

Найденные результаты сохранили свое значение и после создания теории Максвелла. Хотя Герц и пытался перенести в электромагнитную теорию гипотезу Стокса о полном увлечении эфира движущимся веществом, однако опыт показал ¹⁾, что здесь также следует принять гипотезу о частичном увлечении эфира. Разумеется, прежним осталось и значение коэффициента увлечения.

Вместе с тем в электронной теории Лоренца [32], позволившей дать микроскопическое истолкование теории Максвелла и предсказавшей отсутствие любых эффектов первого порядка, связанных с эфирным ветром, предполагалось, что эфир является строго неподвижным. Если ограничиться настолько малыми скоростями, чтобы можно было пренебречь величинами второго порядка относительно $\beta = v/c$, то вывод уравнений Максвелла из теории Лоренца фактически будет справедлив не только в электродинамике покоящихся сред, но также и в электродинамике движущихся сред. Что касается уравнений Максвелла, то они были установлены для неподвижных сред, т. е. для такого наблюдателя, который

¹⁾ Опыты с диэлектриками, движущимися в электрическом (Рентген 1885 г., Эйхенвальд, 1903 г., Блондлот) или магнитном полях (Вильсон).

неподвижен по отношению к веществу и, следовательно, движется прямолинейно и равномерно по отношению к эфиру. Напротив, в случае микроскопических уравнений Лоренца эфир предполагается строго неподвижным, а наблюдатель — связанным с неподвижным эфиром. Вещество, состоящее из электронов, движется по отношению к эфиру, причем эквивалентность с теорией Максвелла означает, что с точностью до величин второго порядка по β электромагнитные опыты не дадут возможности обнаружить прямолинейное и равномерное движение по отношению к эфиру. Например, нет необходимости предполагать частичное увлечение эфира вблизи движущегося вещества¹⁾, чтобы объяснить отрицательный результат опытов с абберацией в преломляющей среде (в подзорной трубе с водой). Так, опыт Физо можно объяснить таким образом, что эфир строго неподвижен, но электромагнитные волны, распространяющиеся внутри движущегося вещества, частично увлекаются²⁾, причем величина коэффициента α остается прежней.

Следуя Борну [62], это можно показать на следующем примере (фиг. 17).

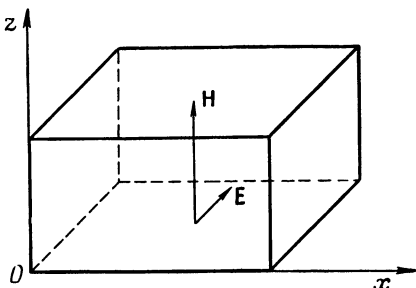
Рассмотрим диэлектрик, движущийся в направлении Ox со скоростью v , внутри которого в том же направлении движется плоская монохроматическая волна.

Характеризующие эту волну векторы напряженности электрического поля (E_y) и магнитного поля (H_z) перпендикулярны к направлению распространения волны. Ток поляризации P увлекается веществом, что приводит к смещению напряженности магнитного поля, определяющему дополнительное электрическое смещение. Это смещение направлено вдоль оси Oy , а его величина, согласно результатам опыта Вильсона, равна

$$D = \epsilon E' = (\epsilon - 1) vH. \quad (A)$$

Таким образом, напряженность дополнительного электрического поля оказывается равной

$$E' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} vH, \quad (B)$$



Фиг. 17. Увлечение плоской волны диэлектриком, движущимся с постоянной скоростью.

¹⁾ См. примечание 1 на стр. 112.

²⁾ Точнее, электромагнитное поле остается строго неподвижным, а веществом увлекаются вектор поляризации P и вектор магнитной индукции M , что и приводит к изменению скорости распространения и показателя преломления в движущихся средах. См. Блох [61].

а не $E' = vH$, как было бы в том случае, если бы эфир в диэлектрике полностью увлекался движущимся веществом. Опыт Вильсона с вращающимся диэлектриком хорошо подтверждает формулу (Б).

Предсказываемое теорией Максвелла значение коэффициента увлечения эфира движущимся веществом, равное $(\epsilon - 1)/\epsilon$, совпадает с тем значением, которое предсказывалось Френелем, исходящим из менее убедительных соображений. В самом деле, как доказывается в теории Максвелла [см. (3.72)], $\epsilon = n^2$, так что

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} = \frac{n^2 - 1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2} = \alpha.$$

Но это как раз то значение коэффициента увлечения, которое предсказывалось Френелем. Разница заключается лишь в том, что в теории Лоренца не эфир частично увлекается, а движутся находящиеся в веществе электроны. (См. также более детальное обсуждение в книге Беккера [29].)

§ 6. Эффекты второго порядка

После создания теории Лоренца стали надеяться, что „эфирный ветер“, быть может, удастся обнаружить в эффектах второго порядка¹⁾. Именно с этой целью Майкельсоном [63] (1881 г.), а затем Майкельсоном и Морлеем [64] были поставлены соответствующие опыты.

Опыт Майкельсона. В опыте используется следующая интерференционная установка (фиг. 18). Свет, испускаемый источником S , падает на полупрозрачную пластинку M и разделяется ею на два пучка. Проходящий через пластинку пучок 1 отражается от зеркала M_1 , возвращается к M и в результате проходит путь SMM_1MF . Отражаемый от пластинки M пучок 2 вторично отражается от M_2 и, возвратившись,

Фиг. 18. Схема опыта Майкельсона.

проходит через M ; проходимый им путь равен SMM_2MF . В точке F оба пучка интерферируют и наблюдаются через окуляр. Разность хода двух пучков определяется по смещению интерференционных полос²⁾.

¹⁾ Напомним, что речь идет об эффектах второго порядка, так как в электродинамике движущихся сред уравнения Максвелла выводятся из теории Лоренца с точностью до второго порядка. (См. гл. 4, § 6.)

²⁾ При помощи этого интерферометра Майкельсон сравнил длину эталона метра с длиной волны красной линии кадмия.

Вся установка укрепляется на твердом основании, которое плавает в ртути, что дает возможность легко ее поворачивать. Будем проводить вычисления в системе отсчета, связанной с эфиром, так как в этой системе скорость света всегда равна c .

1. Повернем установку таким образом, чтобы направление плеча L_1 , длина которого равна l_1 , совпало с направлением движения Земли по отношению к эфиру.

а) Пусть t_A — время, за которое пучок I проходит путь MM_1 , а t_B — время, за которое он проходит путь M_1M . В системе отсчета, связанной с эфиром, имеем

$$t_A = \frac{l_1 + vt_A}{c}, \quad t_B = \frac{l_1 - vt_B}{c}.$$

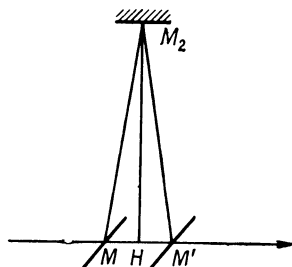
Отсюда

$$t_A(1 - \beta) = \frac{l_1}{c} \quad \text{и} \quad t_B(1 + \beta) = \frac{l_1}{c}$$

или

$$t_A = \frac{l_1}{c(1 - \beta)} = \frac{l_1}{c - v},$$

$$t_B = \frac{l_1}{c(1 + \beta)} = \frac{l_1}{c + v}.$$



Фиг. 19. Учет движения Земли в опыте Майкельсона.

Время t_1 , за которое свет проходит путь MM_1M , равно¹⁾

$$t_1 = t_A + t_B = \frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \beta^2}. \quad (5.11)$$

б) Поскольку установка движется вместе с Землей, то пучок 2 проходит путь MM_2M' , где M' — положение зеркала по истечении времени t_2 , за которое свет проходит путь до M_2 и обратно (фиг. 19). Таким образом,

$$MM' = vt_2$$

и

$$MM_2 + M_2M' = 2\sqrt{l_2^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2} = \sqrt{4l_2^2 + v^2t_2^2}.$$

¹⁾ В лабораторной системе отсчета свет проходит „туда“ и „обратно“ один и тот же путь $MM_1 = M_1M = l_1$, но его скорость равна $c + v$ при пути „туда“ и $c - v$ при пути „обратно“. Поэтому время пролета в лабораторной системе

$$\bar{t}_1 = \frac{l_1}{c + v} + \frac{l_1}{c - v} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \beta^2}$$

совпадает с временем пролета, вычисленным в системе отсчета, связанной с эфиром.

Поскольку скорость света в направлении, перпендикулярном к плечу L_1 , очень близка к скорости света в направлениях MM_2 или M_2M' , то

$$t_2 = \frac{MM_2 + M_2M'}{c} = \sqrt{\frac{4l_2^2}{c^2} + \beta^2 t_2'^2}. \quad (5.12)$$

Из (5.12) следует, что

$$t_2^2 (1 - \beta^2) = \frac{4l_2^2}{c^2} \quad (5.13)$$

или¹⁾

$$t_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.14)$$

Следовательно, разность хода между пучками 1 и 2 равна

$$\Delta_1 t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{l_1}{1 - \beta^2} \right). \quad (5.15)$$

2. Повернем установку на $\pi/2$, так чтобы плечи интерферометра L_1 и L_2 поменялись местами²⁾. Тогда направление L_2 будет совпадать с направлением движения, а времена прохождения путей будут соответственно равны

$$t_2' = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad t_1' = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5.16)$$

так что разность между ними

$$\Delta_2 t = t_2' - t_1' = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{1 - \beta^2} - \frac{l_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right). \quad (5.17)$$

¹⁾ В лабораторной системе свет проходит туда и обратно одно и то же расстояние $MM_2 = M_2M' = l_2$. Скорость света c' на пути MM_2 получается как результирующая из скорости v движения по пути MM_1 и скорости c . Имеем

$$c' = \sqrt{c^2 - v^2} = c \sqrt{1 - \beta^2},$$

что дает идентичный с (5.14) результат

$$\bar{t}_2 = \frac{2l_2}{c'} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Разность $\bar{\Delta}_1 \bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1$, вычисленная в лабораторной системе, также совпадает с разностью хода, вычисленной в системе отсчета, связанной с эфиром. Смещение интерференционных полос, обусловленное разностью Δt , приводит в обеих системах отсчета к значению (5.20). Этот результат можно было ожидать, исходя из абсолютного характера времени в классической кинематике: время, разделяющее два события (испускание и возвращение в точку M фронта волны), оказывается одним и тем же независимо от той галилеевой системы отсчета, в какой оно вычислено.

²⁾ Цель такого поворота — устранить влияние возможной разницы длин плеч интерферометра. (Если $l_1 \equiv l_2$, то интерференционные полосы, наблюдаемые перед поворотом, будут однозначно определяться движением установки.)

Таким образом, при этом повороте возникает смещение интерференционных полос, определяемое разностью

$$\Delta t = \Delta_2 t - \Delta_1 t = \frac{2}{c} (l_1 + l_2) \left(\frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \quad (5.18)$$

и приближенно равное

$$\Delta t \approx \frac{2}{c} (l_1 + l_2) \left[(1 + \beta^2) - \left(1 + \frac{\beta^2}{2} \right) \right] = \frac{l_1 + l_2}{c} \beta^2. \quad (5.19)$$

Смещение интерференционных полос определяется периодом $\tau = \lambda/c$. Для наблюдаемого смещения

$$\Delta t \approx \tau, \quad l_1 + l_2 \approx \frac{\lambda}{\beta^2}. \quad (5.20)$$

Если по порядку величину $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$ см, $v \approx 30$ км/сек, так что $\beta \approx 10^{-4}$, то нужно будет поставить опыт, в котором длина траектории по порядку величины равна

$$l_1 + l_2 \approx 5 \cdot 10^3 \text{ см} = 50 \text{ м}. \quad (5.21)$$

Пользуясь многократным отражением, можно добиться, чтобы световой луч в системе проходил примерно такой путь. Более того, можно улучшить точность таких измерений и провести опыты, которые дадут возможность обнаружить скорость эфирного ветра в 1,5 км/сек (см. работы Кеннеди [65], Иллингворта [66], Пикара и Штахеля [67] и Йооса [68]).

Как опыты Майкельсона и Морлея, так и последующие повторные опыты, в которых была достигнута более высокая точность, привели к не оставляющим никакого сомнения отрицательным результатам¹⁾. С точностью от 4 до 5 км/сек отрицательные результаты были получены также и в других опытах, проведенных Трутоном и Ноблом [70]²⁾, Трутоном и Рэнкином [71], Чейзом [72] и Томашеком [73].

Таким образом, гипотезу неподвижного эфира, основывающуюся на теории Лоренца, казалось, подтверждали явления первого порядка, но ей противоречили явления второго порядка.

Отрицательный результат опыта Майкельсона можно было объяснить, постулируя полное увлечение эфира движущимся веществом (Герц) или считая, что для движущихся источников скорость

¹⁾ Укажем, однако, на полученный Миллером [69] результат (который, впрочем, отличается от того, что можно было бы ожидать), свидетельствующий о слабом частичном увлечении. Этот результат, по-видимому, не получил подтверждения в последующих опытах.

²⁾ Этот опыт должен был обнаружить вращение плоского конденсатора, прикрепленного к стержню унифилярного подвеса, обусловленное эфирным ветром.

света изменяется (Ритц [74]). Однако оба эти допущения нельзя считать приемлемыми. Первое из них теоретически мало обосновано и находится в противоречии с явлениями аберрации и с эффектом Физо. Второе противоречит данным, полученным при изучении двойных звезд, а также результату опыта Томашека. Напротив, скорость света представляется не зависящей от скорости излучающих тел (Де-Ситтер [75, 76]) и от движения находящихся поблизости тел (Лодж [77]).

§ 7. Гипотеза Фицджералда — Лоренца

Фицджералду (см. Лодж [77]) и Лоренцу [78] удалось „спасти“ гипотезу о совершенно неподвижном эфире, но при этом им пришлось допустить существование следующего дополнительного постулата.

Для всех тел, движущихся прямолинейно и равномерно, размеры тел в направлении движения сокращаются в отношении $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$.

Этот постулат дает возможность полностью объяснить отрицательный результат опыта Майкельсона. Действительно, теперь при вычислении времени t необходимо заменить l_1 на $l_1 \sqrt{1 - \beta^2}$, так что

$$t_1 = \frac{2l_1}{c} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2} = \frac{l_1}{l_2} t_2 \quad (5.22)$$

или

$$\Delta_1 t = \frac{2}{c} (l_2 - l_1) \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Delta_2 t. \quad (5.23)$$

Гипотеза о сокращении длины в отношении $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$, в равной мере относящаяся к любым измерительным установкам, автоматически предсказывает отрицательный результат опыта по обнаружению эфирного ветра, и не только с точностью до величин второго порядка, а и в приближении любого порядка.

Может показаться, что такое сокращение в свою очередь является измеримым эффектом и что можно придумать опыты, которые позволят его обнаружить. Так, например, при движении должен был бы изменяться показатель преломления твердого тела. Однако соответствующие опыты, поставленные Релеем [79] и Брэйсом [80], привели к отрицательным результатам. То же самое получилось и с опытами Трутона и Рэнкина [71], определявших электрическое сопротивление движущегося проводника, и Вуда, Томлисона и Эссекса [81], измерявших частоту колебаний кварцевого стержня.

Поэтому можно представить себе дело таким образом, что эффект сокращения длины, как и влияние эфирного ветра, также

компенсируется другим связанным с движением эффектом — возрастанием массы покоя.

В самом деле, если длины и массы одновременно изменяются таким образом, что

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (5.24)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5.25)$$

то это приводит к невозможности обнаружить влияние прямолинейного равномерного движения в любых оптических явлениях.

Формула (5.25), естественным образом вытекающая как из формулы сокращения Лоренца, так и из рассматриваемой в дальнейшем динамики Эйнштейна, применима и к электрону. Можно поставить также вопрос, не является ли условие (5.25), необходимое для объяснения отрицательных результатов опыта Майкельсона, также и достаточным для того, чтобы все электромагнитные явления не зависели от прямолинейного и равномерного движения системы отсчета, в которой они описываются.

Лоренц и независимо от него Пуанкаре показали, что, кроме того, необходимо определить, каким образом следует измерять собственное время в каждой галилеевой системе отсчета. Если первая система отсчета движется по отношению ко второй прямолинейно и равномерно в направлении оси Ox , то для того, чтобы уравнения Максвелла полностью не зависели от применяемой галилеевой системы, при переходе от одной системы отсчета к другой должны иметь место формулы преобразования

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{\beta}{c} x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.26)$$

Соотношения (5.26), вытекающие также из обсуждаемых в дальнейшем гипотез Эйнштейна, определяют преобразование координат, называемое *преобразованием Лоренца*.

Если принять электронную теорию Лоренца и вытекающее из нее соотношение (5.25), то формулы (5.26) обеспечивают инвариантность уравнений Максвелла по отношению к преобразованию галилеевой системы отсчета¹⁾ и, следовательно, указывают на невозможность обнаружить абсолютное движение по отношению к эфиру при помощи какого-либо электромагнитного опыта. Таким

¹⁾ Под галилеевыми системами отсчета мы подразумеваем системы прямолинейных осей (декартовы системы), движущиеся относительно друг друга прямолинейно и равномерно, но, разумеется, не все системы, получаемые одна из другой при помощи преобразования Галилея. Эти два определения совпадают только в случае ньютоновской механики.

образом, при развитии теории Лоренца представление о существовании неподвижного эфира сменилось представлением о том, что любые опыты, ставящие своей целью обнаружить существование неподвижного эфира, обречены на неудачу.

Б. ПРИНЦИП СПЕЦИАЛЬНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 8. Основной постулат Эйнштейна

Классическая динамика основывается на следующем утверждении:

I. *Все галилеевы системы отсчета эквивалентны в отношении описания движения*¹⁾.

Если при этом допустить *пригодность преобразований Галилея*, то из этого утверждения вытекает закон сложения скоростей классической механики. Из этого закона следует:

I'. *В двух различных галилеевых системах скорость света будет различной.*

С другой стороны, опытные результаты, полученные в классической электродинамике, приводят к следующему выводу²⁾.

II. *При любом движении источника свет в пустоте распространяется изотропно. В любой галилеевой системе отсчета скорость света равна абсолютной постоянной c .*

В первых теориях эфира делалась попытка примирить несовместимые утверждения I' и II, для чего скорость света по отношению к универсальному эфиру разлагалась на сумму двух членов — скорость эфира, имеющегося в прозрачных телах или диэлектриках, по отношению к универсальному эфиру и скорость света по отношению к эфиру, имеющемуся в прозрачных телах.

¹⁾ См. примечание на стр. 125.

²⁾ Вместе с Коста-де-Борегаром заметим, что опыты не исключают двух следующих возможностей:

а) Величина скорости света зависит от абсолютной величины (но не от направления) эфирного ветра. Конкретно в данном случае это может приводить к вековому изменению скорости света.

б) При прохождении света в одном направлении величина его скорости зависит от направления эфирного ветра.

Первая возможность, как бы мало вероятной она ни казалась, совместима с принципом специальной относительности. Вторая не поддается проверке. (См. книгу Коста-де-Борегара [82], стр. 15.)

В принципе специальной относительности постулируется изотропность распространения света при прохождении в одном направлении и допускается его независимость от движения источника (тогда как фактически независимость можно проверить только для движения в системе источник — наблюдатель), в связи с чем этот принцип опытными данными, строго говоря, не определяется. Он является наиболее простой гипотезой, позволяющей объяснить опытные данные и приводящей к связанной теории, все предсказания которой подтверждаются на опыте.

Первый член связан с введением соответствующего коэффициента увлечения, а второй — остается постоянным. В результате эквивалентность выделенных систем отсчета имеет место только для величин первого порядка.

В противоположность этому из предложенной Лоренцом гипотезы о сокращении длин и увеличении промежутков времени следует эквивалентность с точностью до величин любого порядка, что связано со своего рода „надлежащими искажениями“, возникающими при измерениях, производимых над движущимися системами. Перефразируя выражение Борна, можно сказать, что эквивалентность возникает из-за своего рода оптической иллюзии.

Противоречие фактически существует не между утверждениями I и II, а между утверждениями I' и II. В самом деле, принятый в классической механике закон сложения скоростей основан на предположении о справедливости преобразования Галилея, что обеспечивает инвариантность основного уравнения динамики во всех галилеевых системах отсчета. В противоположность этому изотропия и постоянство скорости света предполагают справедливость преобразования Лоренца, что обеспечивает инвариантность уравнений Максвелла во всех галилеевых системах отсчета.

Таким образом, в конечном итоге необходимо выбрать преобразование одного из этих двух типов и допустить одну из следующих возможностей.

1. Или нужно сохранить уравнения Ньютона и оставляющие их инвариантными преобразования Галилея. Тогда в электродинамике мы должны будем допустить существование новых явлений, которые приводят к преобразованиям Лоренца — Пуанкаре (5.24) и (5.25), а также своего рода компенсирующих явлений, обеспечивающих инвариантность уравнений Максвелла и объясняющих „неуловимость“ эфира.

2. Или нужно допустить универсальную применимость преобразований Лоренца — Пуанкаре. Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца, но необходимо построить также находящиеся в соответствии с этими преобразованиями кинематику и динамику.

После того как возникло это противоречие между кинематикой и оптикой, стала создаваться релятивистская механика, находящаяся в соответствии с оптикой¹⁾. Вопрос о выборе одной из этих двух

¹⁾ Такой выбор в пользу одной из двух возможностей будет представляться вполне естественным, если вспомнить, что оптика является наиболее точной и, по выражению Коста-де-Борега, „наиболее геометрической и кинематической из всех физических наук“ (см. [82]). Вместе с тем заметим, что кинематика и динамика являются частями физики и при ее развитии они должны изменяться. Поэтому взгляд на эти отрасли знания как на *неизменные* лишен какого-либо основания.

возможностей решается постулатом специальной относительности, который является не чем иным, как уже формально содержащимися в теориях Лоренца и Пуанкаре постулатами I и II.

I. Все галилеевы системы отсчета эквивалентны между собой. Эта эквивалентность относится не только к динамике, но и ко всей физике.

II. В пустоте свет распространяется изотропно. Скорость света является универсальной постоянной c .

Эти утверждения, разумеется, вытекают из формул Лоренца и Пуанкаре. Оригинальность теории Эйнштейна заключается в показе того, что они связаны с более глубоким анализом понятий о пространстве и времени и что они приводят к общей справедливости формул Лоренца, которые оказываются связанными не с кажущимися явлениями, а с основными свойствами пространства-времени.

Действительно, в 1905 г. Эйнштейн показал, что сокращение длин, определяемое формулой Лоренца, не носит искусственного характера. Оно вытекает из анализа понятия об одновременности с точки зрения второго постулата, согласно которому скорость света в пустоте является абсолютной постоянной, не зависящей от выбора галилеевой системы отсчета.

§ 9. Критика понятия одновременности

В доэйнштейновской физике понятие об одновременности на расстоянии рассматривалось как такое понятие, смысл которого очевиден. Однако для того, чтобы можно было фактически установить существование одновременности, нужно, чтобы в двух различных точках A и B , удаленных друг от друга на l , имелись синхронизованные часы. Для синхронизации или для проверки того, что она существует, необходимо воспользоваться сигналом. Наиболее быстрыми являются электромагнитные сигналы, поэтому поправки, связанные с конечностью времени распространения, будут для них наименьшими.

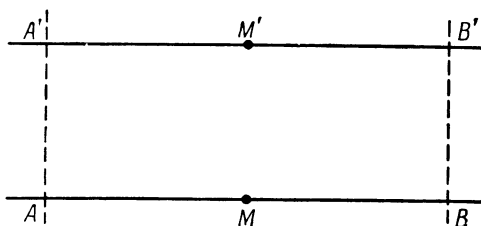
Для двух точек A и B , находящихся в системе отсчета, которую мы будем считать неподвижной, абсолютную одновременность определить невозможно, однако мы можем следующим образом определить относительную одновременность.

Два события, происходящие в A и B , согласно Эйнштейну [83, 84], считаются одновременными, если сигналы, выходящие из A и B , в одно и то же время доходят до наблюдателя M , расположенного посередине расстояния AB ¹⁾. Этот же критерий

¹⁾ Как заметил Эйнштейн, говорить, что свет за одинаковое время проходит отрезки AM и BM , это значит вводить соглашение, которое никак не уточняет свойств света. Однако для определения абсолютной

остаётся справедливым и в том случае, когда система AB движется прямолинейно и равномерно, и наблюдатели в ней на движение могут не обращать внимания. При обмене световыми сигналами между наблюдателями, находящимися в одной системе, это как раз и имеет место, что связано с невозможностью обнаружить абсолютное движение этой системы по отношению к эфиру.

Основываясь на предыдущем определении одновременности, относящемся к заданной галилеевой системе отсчета, нетрудно показать, что при переходе к другой галилеевой системе отсчета одновременность не сохраняется. Рассмотрим классический пример Эйнштейна, когда вдоль участка железнодорожного пути AB со скоростью v движется поезд $A'B'$ (фиг. 20).



Фиг. 20. К понятию относительной одновременности.

Пусть M' — середина поезда $A'B'$, совпадающая с серединой M отрезка пути AB для того момента, когда из A и B (одновременно для наблюдателя в точке M) выходят световые сигналы. Наблюдатель в M' , движущийся по направлению к B , очевидно, воспримет вышедшие из B сигналы с опережением по сравнению с сигналами, вышедшими из A . Но поскольку единственным возможным критерием одновременности является совпадение моментов прихода сигналов в точку, лежащую посередине $A'B'$, то два события, одновременные для M , не будут одновременными для M' . Действительно, поскольку никакой опыт не может обнаружить относительное движение двух галилеевых систем отсчета, то наблюдатели в M и M' с одинаковым основанием могут утверждать, что их собственные системы отсчета находятся в покое. Поэтому абсолютной одновременности не существует¹⁾. Этот вывод опро-

одновременности необходимо уже знать, что свет за одинаковое время проходит отрезки AM и BM , т. е. уже нужно обладать прибором для измерения времени.

¹⁾ К этому заключению пришел уже Анри Пуанкаре. Но Пуанкаре не дошел до того, чтобы исключить „теоретическую“ возможность существования мгновенных сигналов, и не сделал логических выводов из чисто физического определения одновременности. См. работы Пуанкаре [85, 86].

вергает гипотезу о существовании универсального времени и о законности преобразования Галилея.

§ 10. Преобразование Лоренца

Формулы преобразований Лоренца фактически получаются из предположения, что во всех системах отсчета свет распространяется изотропно и его скорость равна c (постулат II).

Основываясь на идеях Эйнштейна, исследуем несколько более подробно, каким образом электромагнитное возмущение распространяется в двух галилеевых системах отсчета $S(Oxyz)$ и $S'(O'x'y'z')$. Поскольку в обеих системах скорость света равна c , то для материальной точки, движущейся со скоростью $v < c$, выражения

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2, \quad (5.27)$$

$$ds'^2 = -dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + c^2 dt'^2 \quad (5.28)$$

будут положительными. В случае световой волны, распространяющейся со скоростью света, эти выражения обращаются в нуль. Поэтому

$$ds'^2 = f(x, y, z, t) ds^2. \quad (5.29)$$

Основываясь на обратимом характере перехода от одной системы отсчета к другой, можно показать (см., например, Шази [87], а также Борель [88]), что

$$f(x, y, z, t) = k = 1. \quad (5.30)$$

Таким образом, мы приходим к задаче о нахождении такого преобразования координат, для которого

$$ds'^2 \equiv ds^2, \quad (5.31)$$

т. е. для которого четырехмерное евклидово пространство преобразуется само в себя. Искомыми решениями этой задачи являются *линейные ортогональные преобразования четырехмерного пространства*¹⁾.

Для простоты выберем здесь системы координат таким образом, чтобы скорость v движения системы $S'(O'x'y'z')$ по отношению к системе $S(Oxyz)$ и оси Ox и $O'x'$ были параллельными между собой. Из соображений симметрии следует, что искомое линейное ортогональное преобразование будет иметь следующий вид:

$$x' = g(v)(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = h(v)t - l(v)x. \quad (5.32)$$

¹⁾ Четырехмерное пространство-время было введено в работах Пуанкаре [89] и Минковского [90].

Из тождества (5.31) вытекают соотношения

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)^2 = 1, \quad (5.33)$$

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 = -1, \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial t} - c^2 \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial t} = 0. \quad (5.35)$$

Подставляя сюда значения частных производных, определяемые из (5.32), получаем простые выражения

$$g(v) = h(v) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (5.36)$$

$$l(v) = g(v) \frac{v}{c^2}, \quad (5.37)$$

где для того чтобы в начальный момент координатные оси совпали, необходимо выбрать знак плюс.

Таким образом, формулы преобразования, выведенные Лоренцом из совершенно других предположений, примут вид

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (5.38a)$$

$$y' = y, \quad (5.38б)$$

$$z' = z, \quad (5.38в)$$

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c} x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (5.38г)$$

И наоборот

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (5.39a)$$

$$y = y' \quad (5.39б)$$

$$z = z' \quad (5.39в)$$

$$t = \frac{t' + \frac{\beta}{c} x'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (5.39г)$$

Формулы (5.38a) — (5.38г) и (5.39a) — (5.39г), пригодные для того частного случая, когда в системах S и S' одна из координатных осей параллельна относительной скорости v , характеризуют преобразование, которое называется *специальным преобразова-*

нием Лоренца. Из преобразований (5.38) легко получаются результаты, найденные Лоренцом и Пуанкаре. Системы отсчета, получаемые одна из другой при помощи преобразований (5.38), (5.39) и их обобщений, мы будем называть *лоренцевыми системами*.

§ 11. Следствия из формул преобразования

1. Сокращение длин. Длина отрезка прямой, покоящегося относительно системы S' и параллельного оси $O'x'$, равна

$$l'_0 = x'_1 - x'_2. \quad (5.40)$$

Чтобы найти длину отрезка прямой в системе S , нужно для одного и того же момента времени, определяемого с точки зрения наблюдателя из системы S , найти координаты x_1 и x_2 , соответствующие x'_1 и x'_2 . Поэтому, полагая $\Delta t = t_1 - t_2 = 0$, согласно (5.38а), получаем

$$l = x_1 - x_2 = (x'_1 - x'_2) \sqrt{1 - \beta^2} = l'_0 \sqrt{1 - \beta^2} < l'_0, \quad (5.41)$$

где l — длина, которую наблюдатель из S приписывает стержню из S' . Если эталон длины равен l'_0 , то наблюдатель из системы S найдет стержень, связанный с системой S' , слишком коротким.

Наоборот, если длина стержня, связанного с S , при измерении в собственной системе отсчета равна l_0 :

$$l_0 = x_1 - x_2, \quad (5.42)$$

то с точки зрения наблюдателя из системы S' для данного момента времени ($\Delta t' = 0$) координатам x'_1 и x'_2 будут соответствовать координаты x_1 и x_2 . Поэтому, согласно (5.39а), стержень из S будет иметь длину

$$l' = x'_1 - x'_2 = (x_1 - x_2) \sqrt{1 - \beta^2} = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} < l_0. \quad (5.43)$$

Другими словами, для наблюдателя из системы S' эталон длины, связанный с системой S , также будет представляться слишком коротким.

Таким образом в системе отсчета, связанной с отрезком прямой (т. е. в собственной системе отсчета), длина отрезка, определяемая при помощи измерений, будет иметь максимальное значение. При измерении в любой другой системе отсчета эта длина сократится в отношении $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$. Такое сокращение больше нельзя объяснять влиянием „эфирного ветра“, т. е. результатом истинного движения в абсолютном пространстве. В действительности это явление носит *обратимый характер*: если у двух

покоящихся наблюдателей имеются равные линейки, то при прямолинейном и равномерном движении одного из них по отношению к другому будет отмечаться взаимное относительное сокращение их эталонов длины. Гипотеза сокращения длины, введенная Лоренцом, является следствием относительного движения. Она непосредственно вытекает из законов преобразования и не требует какого-либо специального предположения о строении вещества ¹⁾.

2. Увеличение промежутков времени. При помощи формулы (5.39г) аналогичным путем получим, что промежутку времени $t'_1 - t'_2$, измеряемому в одной и той же точке ($\Delta x' = x'_1 - x'_2 = 0$) системы S' , в системе S будет соответствовать промежуток времени

$$t_1 - t_2 = \frac{t'_1 - t'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} > t'_1 - t'_2. \quad (5.44)$$

Другими словами, для наблюдателя из системы S все явления, протекающие в S' , замедляются в отношении $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$.

Наоборот, согласно (5.38), промежутку времени $t_1 - t_2$, измеряемому в одной и той же точке $x = 0$ системы S , в системе S' будет соответствовать промежуток времени

$$t'_1 - t'_2 = \frac{t_1 - t_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} > t_1 - t_2. \quad (5.45)$$

Для наблюдателя из системы S' явления, протекающие в системе S , также замедляются в отношении $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$.

¹⁾ В первоначальном виде гипотеза сокращения длины, введенная в работах Фицджералда, связывалась с силами, действующими со стороны эфира на движущиеся тела. Они приводили к абсолютной деформации, не зависящей от используемой системы отсчета. Лоренц попытался связать эти силы с более общими молекулярными взаимодействиями. Анизотропия, проявляющаяся в сокращении длин, не может быть обнаружена из-за соответствующего изменения отрезков времени и масс, но тем не менее она не носит абсолютного характера.

Согласно критическим замечаниям Эйнштейна, сокращение длины не следует считать связанным с влиянием специфических сил. Оно объективно (т. е. вне зависимости от наблюдателя) зависит от системы отсчета. Имея обратимый характер, оно не является „кажущимся“ явлением, так как ему невозможно противопоставить какое-либо выделенное „действительное“ явление. Поэтому понятие длины или размеров является объективным и в то же время существенно относительным, причем отсюда непосредственно следует, что и понятие об одновременности на расстоянии, относящееся к двум галилеевым системам отсчета, является относительным и не сводится к другим понятиям.

Обратим внимание читателя на обширную библиографию по данному вопросу, имеющуюся в книге Арзелье [40]. [О философской стороне затрагиваемых вопросов см., например, сборник „Философские вопросы современной физики“, Изд. АН СССР, 1959. — *Прим. перев.*]

Здесь можно провести интересное обсуждение вопросов о порядке временного следования двух событий и о возможности причинной связи (см. например, Арзелье [40]).

а) Между двумя событиями, одновременно происходящими в двух различных точках A и B системы $S' \equiv S_0$, удаленных друг от друга на расстояние l_0 , причинная связь невозможна. (Она может наблюдаться лишь в том случае, если события разделены промежутком времени $t_0 \geq l_0/c$.)

То же самое происходит и в том случае, когда эти же два события рассматриваются в другой лоренцевой системе S . В самом деле, из (5.39) следует, что два события, одновременные в системах $S' \equiv S_0$, т. е. такие, что $t' = t_0 = 0$, в системе S будут разделены интервалами

$$l = \frac{l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t = \frac{\beta l_0}{c \sqrt{1-\beta^2}}, \quad \frac{l}{t} = \frac{c}{\beta} > c.$$

б) Между двумя событиями $A(t'_A)$ и $B(t'_B)$, происходящими в двух различных точках системы $S' \equiv S_0$ ($AB = l_0$), и такими, что $t_0 = t'_B - t'_A$, может наблюдаться причинная связь, если $u_0 = l_0/t_0 \leq c$.

При $u_0 \leq c$ для лоренцевой системы S мы, кроме того, имеем

$$u = \frac{l}{t} = \frac{l_0 + vt_0}{t_0 + \frac{v}{c^2} l_0} = \frac{u_0 + v}{1 + \frac{vu_0}{c^2}} \leq c.$$

События A и B с необходимостью будут следовать друг за другом в том же порядке, и в отдельных случаях их можно будет рассматривать как причину и следствие.

в) Если

$$u_0 = \frac{l_0}{t_0} > c,$$

то между событиями $A(t'_A)$ и $B(t'_B)$, происходящими в двух различных точках системы $S' \equiv S_0$ ($AB = l_0$) и такими, что $t_0 = t'_B - t'_A > 0$, причинная связь невозможна. Из (5.39) следует, что в лоренцевой системе S

$$t = t_B - t_A = \frac{t_0 + \frac{v}{c^2} l_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = t_0 \frac{1 + \frac{v}{c^2} u_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Порядок событий можно изменить, т. е. положить

$$t < 0, \text{ если } \frac{1 + \frac{v}{c^2} u_0}{\sqrt{1-\beta^2}} < 0 \text{ или } u_0(-v) > c^2,$$

где v — скорость системы S по отношению к системам $S' \equiv S_0$. Это условие выполнимо, так как в собственной системе отсчета из-за условия $u_0 > c$ причинная связь между последовательными событиями невозможна.

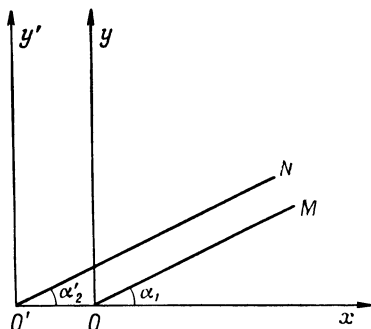
См. рассматриваемый у Арзелье [40] пример, предложенный Эсклангоном для иллюстрации этой возможности.

3. Следствие из сокращения длины — изменение углов и объемов. Рассмотрим в системе координат S с началом в $O(x_0, y_0)$ прямую OM , которая расположена в плоскости xOy , для которой

$\widehat{Ox, OM} = \alpha$ (фиг. 21). Для одного и того же момента времени ($\Delta t = 0$) все точки этой прямой подчиняются уравнению

$$y - y_0 = (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha. \quad (5.46)$$

Чтобы найти наклон этой кривой, наблюдатель из лоренцевой системы S' должен определить координаты точек $M(x, y)$ и $O(x_0, y_0)$ для одного и того же момента времени t' в системе S' ($\Delta t' = 0$), причем этот момент, разумеется, соответствует различным моментам времени в системе S). Полагая в формулах преобразования (5.39) $\Delta t' = 0$, получаем



Фиг. 21. Изменение углов.

$$x - x_0 = \frac{x' - x'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad y - y_0 = y' - y'_0. \quad (5.47)$$

Поэтому в системе S' тангенс угла наклона будет равен

$$(\operatorname{tg} \alpha')_{\Delta t' = 0} = \frac{y' - y'_0}{x' - x'_0} = \frac{(\operatorname{tg} \alpha)_{\Delta t = 0}}{\sqrt{1 - \beta^2}} > (\operatorname{tg} \alpha)_{\Delta t = 0}. \quad (5.48)$$

Минимальное его значение имеет место в собственной системе отсчета.

Аналогичным путем найдем угол, который образует прямая OM , связанная с системой S , с прямой $O'N$, связанной с системой S'

¹⁾ Отсюда следует, что угол наклона кривой в „пространстве“ не может иметь абсолютного смысла, как это считалось в дорелятивистских теориях. Фактически сравниваются величины, которые в системах S и S' не могут быть одновременными. Это означает, что классическое представление о твердом теле, строго говоря, теряет силу. При более точном описании результаты любых измерений представляются в виде пространственно-временных диаграмм, относящихся к двум рассматриваемым лоренцевым системам отсчета. При этом ограничиваются сравнением двух „моментальных фотоснимков“ (по терминологии Синга [91] snapshots of „world-maps of Milne“), получающихся при сечении пространства-времени плоскостями $t = \text{const}$ или $t' = \text{const}$.

(см. фиг. 21). Предполагая, что обе эти прямые лежат в плоскости xOy , положим

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 \text{ для прямой } OM \text{ в системе } S (\Delta t = 0), \quad (5.49)$$

$$y'_2 = x'_2 \operatorname{tg} \alpha'_2 \text{ для прямой } O'N \text{ в системе } S' (\Delta t' = 0). \quad (5.50)$$

Из (5.48) следует, что с точки зрения наблюдателя из системы S' угол наклона прямой OM должен определяться из условия

$$(\operatorname{tg} \alpha'_1)_{\Delta t'=0} = \frac{(\operatorname{tg} \alpha_1)_{\Delta t=0}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (5.51)$$

Если углы наклона прямых, определяемые в соответствующих собственных системах отсчета, равны между собой, т. е. если $(\alpha'_2)_{\Delta t'=0} = (\alpha_1)_{\Delta t=0}$, то

$$\frac{y'_2}{x'_2} = (\operatorname{tg} \alpha'_2)_{\Delta t'=0} = (\operatorname{tg} \alpha_1)_{\Delta t=0} < \frac{(\operatorname{tg} \alpha_1)_{\Delta t=0}}{\sqrt{1-\beta^2}} = (\operatorname{tg} \alpha'_1)_{\Delta t'=0} = \frac{y'_1}{x'_1}. \quad (5.52)$$

Аналогично в системе S

$$\frac{y_2}{x_1} = (\operatorname{tg} \alpha_1)_{\Delta t=0} = (\operatorname{tg} \alpha'_2)_{\Delta t'=0} < \frac{(\operatorname{tg} \alpha'_2)_{\Delta t'=0}}{\sqrt{1-\beta^2}} = (\operatorname{tg} \alpha_2)_{\Delta t=0} = \frac{y_2}{x_2}. \quad (5.53)$$

Если в соответствующих собственных системах отсчета прямые OM и $O'N$ образуют с осью Ox одинаковые углы α , то они не будут параллельны ни в системе S , ни в системе S' .

Это непосредственно вытекает из предыдущих соображений, указывающих на то, что форма тела зависит от лоренцевой системы отсчета, в которой оно описывается. Отсюда же следует, что если в системе S_0 имеется сфера радиуса R :

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2, \quad (5.54)$$

то в галилеевой системе S , движущейся со скоростью v , она будет иметь вид эллипсоида. Действительно из (5.39) получим

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + y^2 + z^2 = R^2. \quad (5.55)$$

Объем тела в общем случае будет максимальным тогда, когда он измеряется в собственной системе отсчета.

§ 12. Собственное время

Собственным временем τ называется время, измеряемое теми часами, которые связаны с системой отсчета. Бесконечно малый интервал собственного времени системы S равен

$$\boxed{d\tau = dt \sqrt{1-\beta^2}}, \quad (5.56)$$

т. е.

$$d\tau^2 = dt^2 \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right\} = \\ = \frac{1}{c^2} [c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2] = \frac{1}{c^2} ds^2. \quad (5.57)$$

Инвариантом преобразования Лоренца является выражение (см. § 10)

$$ds^2 = c^2 d\tau^2, \quad (5.58)$$

так что инвариантом является и собственное время $d\tau = \frac{1}{c} ds$.

§ 13. Геометрическое представление формул Лоренца

Пользуясь соответствующим представлением, можно сделать очевидной симметрию пространственных и временных координат, проявляющуюся в формулах Лоренца.

Ограничимся рассмотрением пространственных координат x^1 и x'^1 , отнесенных к осям, параллельным направлению движения. Формулы (5.38) и (5.39), применяемые к $x = x^1$ и $ct = x^0$, примут простой вид:

$$\left. \begin{aligned} x'^1 &= \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ x'^0 &= \frac{-\beta x^1 + x^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \right| \begin{aligned} x^1 &= \frac{x'^1 + \beta x'^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ x^0 &= \frac{\beta x'^1 + x'^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Движение материальной точки изображается кривой пространственно-временного мира $x^0 = f(x^1)$ (фиг. 22). Касательная к этой кривой образует с осью времени угол θ , для которого

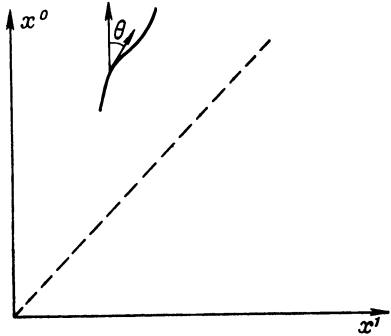
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dx^1}{dx^0} = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = \beta \leq 1. \quad (5.60)$$

Поэтому всегда

$$\theta \leq 45^\circ.$$

В пределе получается прямая, которая имеет угол наклона 45° и для которой $\beta = 1$; она соответствует траектории световых лучей.

При помощи формул (5.59) найдем положение осей (x'^1, x'^0) системы S' по отношению к осям (x^1, x^0) системы S . С этой



Фиг. 22. Направление траектории материальной точки.

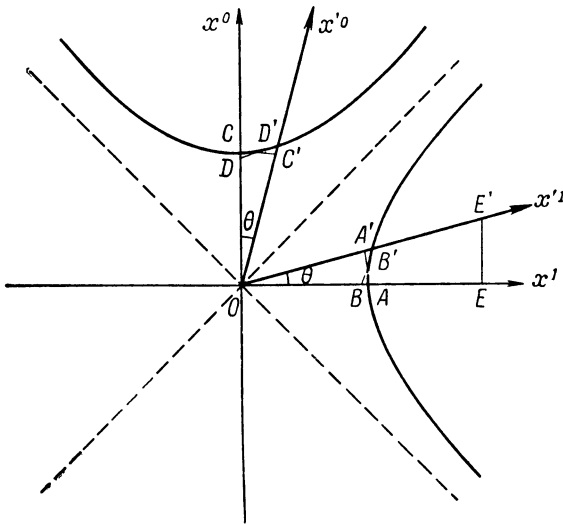
целью учтем, что они имеют одно и то же начало, и положим, воспользовавшись формулами (5.59):

$$\text{для оси } Ox'^0: x'^1 = 0, \text{ т. е. } x^1 = \beta x^0;$$

$$\text{для оси } Ox'^1: x'^0 = 0, \text{ т. е. } x^0 = \beta x^1.$$

Таким образом, ось Ox'^0 образует с Ox^0 угол θ , тангенс которого равен β .

Ось Ox'^1 образует с Ox^1 такой же угол θ , тангенс которого равен β (фиг. 23).



Фиг. 23. Сокращение длин и увеличение промежутков времени (пространственно-временная диаграмма).

1. Относительный характер одновременности. В системе $S(x^0, x^1)$ все события, расположенные на оси Ox , будут одновременны между собой, но в системе $S'(x'^0, x'^1)$ они уже не будут одновременными, так как проектируются на различные точки оси Ox'^0 .

Наоборот, события, одновременные в системе S' (т. е. расположенные на оси Ox'^1), не будут одновременными для наблюдателя из S , так как они проектируются на различные точки оси Ox^0 . В частности, событие E' , соответствующее значению $x'^0 = 0$ (или $t' = 0$), произойдет в соответствующей точке E из S через промежуток времени $t = EE'/c$,

2. Сокращение длин. Проведем две сопряженные гиперболы (см. фиг. 23)

$$(x^1)^2 - (x^0)^2 = 1, \quad (x^1)^2 - (x^0)^2 = -1. \quad (5.61)$$

Первая из них пересечет ось Ox^1 в точках A и A_1 ($x^1 = \pm 1$), а ось Ox'^1 — в точках B' и B'_1 ($x'^0 = 0$, $x'^1 = \pm 1$), соответствующих координатам $x^1 = \pm 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $x^0 = \pm \beta/\sqrt{1-\beta^2}$, для которых $(x^1)^2 - (x^0)^2 = 1$.

Вторая гипербола пересечет ось Ox^0 в точках C и C_1 ($x^0 = \pm 1$), а ось Ox'^0 — в точках D' и D'_1 ($x'^1 = 0$, $x'^0 = \pm 1$), соответствующих координатам $x^1 = \pm \beta/\sqrt{1-\beta^2}$, $x^0 = \pm 1/\sqrt{1-\beta^2}$, для которых $(x^1)^2 - (x^0)^2 = -1$.

Если эталон длины, характеризуемый отрезком $OA = 1$, в первой системе отсчета неподвижен, то его концы описывают мировые линии Ox^0 и AA' , параллельные оси Ox^0 . Пусть наблюдатель из второй системы отсчета отмечает одновременные положения начала и конца этого эталона. Тогда для значения $x'^0 = 0$ наблюдатель измерит длину

$$OA' < OB' = 1$$

и найдет, что она меньше длины его собственного эталона OB' .

Обратно, концы эталона длины $OB' = 1$, неподвижного во второй системе S' ($x'^0 x'^1$), описывают мировые линии Ox'^0 и $B'B$, параллельные оси Ox'^0 . Пусть наблюдатель из системы S отмечает одновременные положения начала и конца этого эталона для момента $x^0 = 0$. Тогда он измерит длину

$$OB < OA = 1$$

и также найдет, что она меньше его собственного эталона длины OA .

3. Увеличение промежутков времени. Часы, неподвижные в системе S (так что $x^1 = 0$), изображаются точкой, которая с течением времени описывает прямую Ox^0 . Когда стрелка часов сделает полный оборот (что, как мы будем предполагать, соответствует единице времени), изображающая точка будет находиться в \bar{C} ($OC = 1$). Если в момент $x^0 = OC = 1$ вторые часы пространственно совпадают с первыми, то в системе S' они также будут характеризоваться точкой C' на оси Ox'^0 ($x'^1 = x^1 = 0$), где отрезок CC' параллелен Ox^1 (CC' в системе S соответствует времени $x^0 = 1$). Отрезок OC' характеризует такой промежуток времени, когда

$$OC' < OD' = 1.$$

Наблюдатель из системы S констатирует, что когда стрелка его часов совершит полный оборот, стрелка часов из системы S' ,

расположенных в той же точке пространства, полного оборота еще не сделает, так что, с точки зрения этого наблюдателя, часы из системы S' запаздывают.

Но и наоборот, если часы пространственно связаны с системой S' , то точка, изображающая время на них, движется по оси Ox'^0 . Полному обороту стрелки (единице времени) соответствует точка D' , которая пространственно ($x^1 = x'^1 = 0$) совпадает с точкой D из системы S . (Отрезок DD' , соответствующий времени $x'^0 = 1$ в системе S' , параллелен оси Ox'^1 .) При этом

$$OD < OC = 1.$$

Таким образом, стрелка часов из системы S , находящихся в точке C , еще не сделает полного оборота, и наблюдатель, связанный с системой S' , также придет к выводу, что часы в системе S запаздывают.

Другими словами, движущиеся часы по отношению к неподвижным всегда запаздывают, в связи с чем говорят, что при движении промежутки времени увеличиваются. Этот вывод, в свое время казавшийся парадоксальным, развивался Ланжевром, проиллюстрировавшим его на многочисленных примерах.

Фактически взаимное сокращение длин и увеличение промежутков времени естественным образом связано с отказом от допущения о возможности определить абсолютную одновременность. Именно неявное допущение такой возможности приводит к тому, что в галилеевых системах отсчета *относительные свойства* пространства и времени становятся *необратимыми*, что приводит к отрицанию принципа относительности.

§ 14. Запись специального преобразования Лоренца в другом виде

1. Действительные координаты. Соотношения (5.59) можно записать таким образом, чтобы более явно выступала симметрия между координатами x^1 и x^0 . Положим

$$\boxed{\beta = \text{th } \varphi,} \quad (5.62)$$

т. е.

$$\text{ch } \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{sh } \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (5.63)$$

Тогда формулы (5.59) примут вид

$$\boxed{\begin{aligned} x'^1 &= x^1 \text{ch } \varphi - x^0 \text{sh } \varphi, & x^1 &= x'^1 \text{ch } \varphi + x'^0 \text{sh } \varphi, \\ x'^0 &= -x^1 \text{sh } \varphi + x^0 \text{ch } \varphi, & x^0 &= x'^1 \text{sh } \varphi + x'^0 \text{ch } \varphi. \end{aligned}} \quad (5.64)$$

2. Мнимые координаты. В соответствии с Минковским положим теперь

$$x^4 = ict \quad (5.65)$$

и

$$\boxed{i\beta = \operatorname{tg} \psi.} \quad (5.66)$$

Тогда

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sin \psi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (5.67)$$

и формулы (5.59) перепишутся в виде

$$\boxed{\begin{aligned} x'^1 &= x^1 \cos \psi + x^4 \sin \psi, & x^1 &= x'^1 \cos \psi - x'^4 \sin \psi, \\ x'^4 &= -x^1 \sin \psi + x^4 \cos \psi, & x^4 &= x'^1 \sin \psi + x'^4 \cos \psi. \end{aligned}} \quad (5.68)$$

В мнимой плоскости ($x^1 O x^4$) эти формулы характеризуют поворот координатных осей на мнимый угол ψ . Из (5.62) и (5.66) имеем

$$\psi = i\varphi. \quad (5.69)$$

§ 15. Общее преобразование Лоренца. Метод Мёллера

Если в любой системе отсчета считать скорость света постоянной, или, что сводится к тому же, исходить из инвариантности ds^2 (имеющей место для лоренцевых систем), то задача преобразования Лоренца (см. § 3) заключается в том, чтобы определить изменения координат, возникающие при переходе от одной декартовой системы отсчета S к другой декартовой системе отсчета S' , движущейся по отношению к первой прямолинейно и равномерно (галилеевы системы).

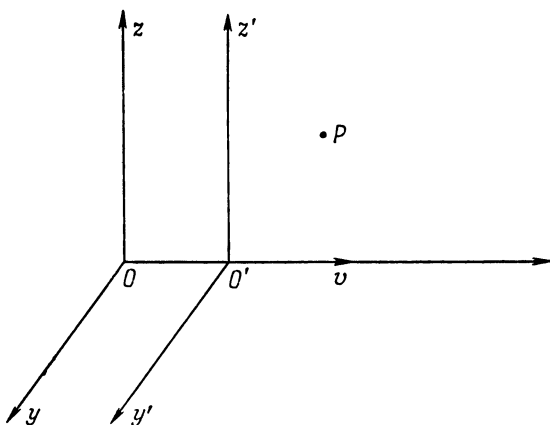
До настоящего времени мы всегда принимали, что координатные оси декартовых систем S и S' параллельны между собой, а относительная скорость этих систем направлена параллельно осям Ox и Ox' . Соответственно формулы (5.38) и (5.39) или (5.64) и (5.68) характеризуют *специальное преобразование* Лоренца.

1. Вновь рассмотрим тот частный случай, когда имеет место специальное преобразование, так что относительная скорость систем отсчета S и S' направлена параллельно осям Ox и Ox' (фиг. 24).

Четыре соотношения (5.38) можно сгруппировать в два векторных соотношения. Для этого воспользуемся векторами, характеризующими положение точки P в системах S и S' :

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{r}' = (x', y', z'). \quad (5.70)$$

Будем считать, что векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}' „изображаются“, исходя из одного и того же фиксированного репера (см. Мёллер [92]), и через \mathbf{v} ($v_x, 0, 0$) обозначим скорость системы S' по отношению



Фиг. 24. Изменение галилеевой системы отсчета при специальном преобразовании Лоренца.

к системе S . Тогда формулы (5.38) получим из двух векторных соотношений:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v} \left[\left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) - \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} \right], \quad (5.71a)$$

$$t' = \frac{t - \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (5.71b)$$

Действительно, компонентам скорости $v_x, 0$ и 0 соответствуют компоненты x, y и z вектора \mathbf{r} , откуда непосредственно получаются указанные формулы.

Аналогично формулы (5.39) вытекают из двух векторных соотношений

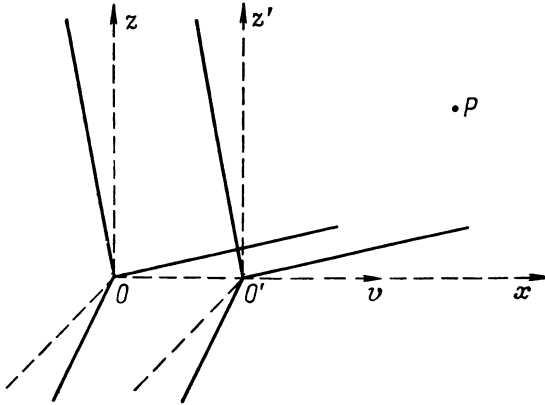
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}' \left[\left(\frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}'}{v'^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) - \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \right], \quad (5.72a)$$

$$t = \frac{t' - \left(\frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}'}{c^2} \right)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (5.72b)$$

где $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ характеризует скорость системы S по отношению к системе S' . Компонентам скорости \mathbf{v}' ($-v_x, 0, 0$) соответствуют

компоненты x' , y' , z' вектора \mathbf{r}' , откуда получаются формулы специального преобразования (5.39).

2. Теперь преобразуем трехгранники S и S' , применив к ним одну и ту же операцию пространственного поворота (фиг. 25).



Фиг. 25. Изменение галилеевой системы отсчета при преобразовании Лоренца без поворота.

В этом случае векторы \mathbf{r} , \mathbf{r}' и \mathbf{v} , \mathbf{v}' преобразуются одинаковым образом, и формулы (5.71) и (5.72) по-прежнему справедливы. Но только теперь

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad (5.73)$$

и

$$\mathbf{v}' = (-v_x, -v_y, -v_z).$$

Таким образом, из векторных соотношений (5.71) вытекают следующие четыре формулы преобразования, справедливые в том случае, когда скорость \mathbf{v} по отношению к осям ориентируется произвольным образом:

$$x' = x + \frac{av_x}{v^2} [v_x x + v_y y + v_z z - c^2 t (1 + \sqrt{1 - \beta^2})], \quad (5.74a)$$

$$y' = y + \frac{av_y}{v^2} [v_x x + v_y y + v_z z - c^2 t (1 + \sqrt{1 - \beta^2})], \quad (5.74б)$$

$$z' = z + \frac{av_z}{v^2} [v_x x + v_y y + v_z z - c^2 t (1 + \sqrt{1 - \beta^2})], \quad (5.74в)$$

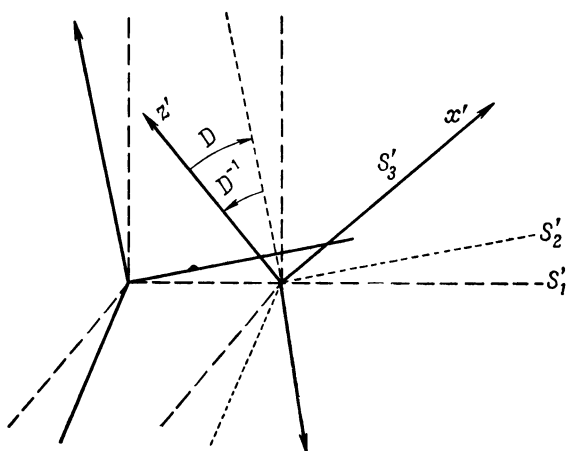
$$t' = t - \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} [v_x x + v_y y + v_z z - c^2 t (1 - \sqrt{1 - \beta^2})], \quad (5.74г)$$

где мы положили

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1. \quad (5.75)$$

Из (5.74) непосредственно получаются обратные преобразования, если заменить x, y, z на x', y', z' и наоборот, а v_x, v_y, v_z на $-v_x, -v_y, -v_z$.

3. Приняв за начальное положение трехгранников S и S' на фиг. 24, применим теперь к ним различные операции пространственных поворотов. Тот же результат получится, если, исходя из начального положения, изображенного на фиг. 25, применить пространственный поворот только к одному трехграннику S' . Пусть таким поворотом будет D^{-1} . Тогда оси будут направлены



Фиг. 26. Изменение галилеевой системы отсчета при общем преобразовании Лоренца.

так, как показано на фиг. 26 сплошными линиями. Формула преобразования (5.716) не изменится, но формула (5.71a) останется справедливой только в том случае, если к новому вектору r' из системы S'_3 применить обратный поворот D , переводящий систему S'_3 в положение S'_2 , соответствующее фиг. 25.

Таким образом,

$$Dr' = r + v \left[\frac{\alpha}{v^2} (r \cdot v) - \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} \right]. \quad (5.76)$$

С другой стороны, после указанного обратного поворота скорость v' системы S по отношению к системе S' станет рав-

ной $D\mathbf{v}'$. При этом (для случая, изображенного на фиг. 24) она станет равной $-\mathbf{v}$:

$$D\mathbf{v}' = -\mathbf{v}. \quad (5.77)$$

Применяя D^{-1} к (5.76), окончательно получаем следующие формулы преобразования:

$$\mathbf{r}' = D^{-1}\mathbf{r} - \mathbf{v}' \left[\frac{\alpha}{v^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) - \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} \right], \quad (5.78a)$$

$$t' = \frac{t - \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (5.78b)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1. \quad (5.75)$$

Аналогично, если исходить из положения, изображенного на фиг. 25, и применять поворот D^{-1} к трехграннику S , а не к S' , получатся следующие формулы обратного преобразования:

$$\mathbf{r} = D^{-1}\mathbf{r}' - \mathbf{v} \left[\frac{\alpha}{v^2} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}') - \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \right], \quad (5.79a)$$

$$t = \frac{t' - \left(\frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}'}{c^2} \right)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (5.79b)$$

4. Наконец, если предположить, что в момент $t = t' = 0$ вершины трехгранников S и S' не совпадают, то вместо \mathbf{r}' и t' нужно будет подставить

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}' + \mathbf{a}', \quad t'_1 = t' + \theta', \quad (5.80)$$

где \mathbf{a}' и θ' постоянные. Но по-прежнему

$$\Delta \mathbf{r}'_1 = \Delta \mathbf{r}', \quad \Delta t'_1 = \Delta t', \quad (5.81)$$

так что все формулы преобразования останутся справедливыми, если их применять к интервалам $\Delta \mathbf{r}'_1$, $\Delta t'_1$ и $\Delta \mathbf{r}$, Δt .

Таким образом, преобразование координат, связывающее две декартовы системы, складывается из специального преобразования Лоренца, пространственного поворота и пространственного смещения и изменения начала отсчета времени [математически оно описывается формулами (5.79) и (5.80)].

Нетрудно видеть, что при таком преобразовании ds^2 является инвариантом:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 dt'^2 - dr'^2 = ds'^2. \quad (5.82)$$

Формулы (5.78) и (5.79) определяют общее преобразование Лоренца, причем при переходе от одной галилеевой системы к другой обеспечивается инвариантность ds^2 [см. (5.82)], а ориентация осей и относительная скорость могут быть любыми. Этими формулами определяются преобразования произвольных лоренцевых систем отсчета.

В дальнейшем (см. гл. 6, § 7) мы рассмотрим также тензорный формализм для общего преобразования Лоренца.

§ 16. Изменение собственной системы отсчета для одного и того же движущегося тела. Парадокс часов¹⁾

Преобразования Лоренца, вытекающие из основных положений специальной теории относительности, дают возможность сравнить явления, протекающие в двух галилеевых системах отсчета: при этом каждому движущемуся телу можно приписать собственную галилееву систему отсчета, с которой оно постоянно остается связанным. Формулы Лоренца позволяют перейти от собственной системы отсчета к другой системе и показать наличие полной обратимости в описании наблюдаемых эффектов, что как раз и позволяет сделать вывод об относительности движения.

Кроме того, мы хотим сравнивать длины и промежутки времени лишь при помощи двух стержней или двух часов, из которых по крайней мере один стержень (или одни часы) не остается в одной и той же собственной галилеевой системе.

Например, рассмотрим стержень длины l_0 в его собственной галилеевой системе S . Придадим ему в течение очень короткого промежутка времени ускорение, после чего его скорость по отношению к S станет равной v . Если скорость v постоянна, то новая собственная система будет галилеевой системой S' , движущейся относительно S со скоростью v . Поэтому в системе S' длина стержня будет равна l'_0 , а в системе S , согласно формулам Лоренца, $l = l'_0 \sqrt{1 - \beta^2}$. Но, разумеется, l (или l'_0) сравнивать с l_0 нельзя. Обеспечив неподвижность стержня в системе S (для чего, например, может оказаться необходимым сообщить ему новое ускорение), мы получим длину l_{00} , которая может отличаться от l_0 . Действительно, значение длины l_{00} получено после того, как стержень дважды находился в состоянии ускоренного движе-

¹⁾ См. работы Ланжевена [93] и Мёллера [92].

ния, или, что то же самое, после того, как собственная система изменялась, а это не дает возможности делать обратимые высказывания¹⁾.

Аналогичные выводы получаются при сравнении показаний двух часов, для одних из которых имеют место изменения собственной системы отсчета.

Пусть двое часов A и A' связаны соответственно с галилеевыми системами S и S' . Как известно [см. (5.44)], если сравнивать показания часов A' с показаниями часов A , то в системе S будет отмечаться запаздывание часов A' :

$$\begin{aligned} (\Delta t)_S - (\Delta t')_{S(\Delta x'=0)} &= (\Delta t)_S - (\Delta t)_S \sqrt{1 - \beta^2} = \\ &= (\Delta t)_S (1 - \sqrt{1 - \beta^2}). \end{aligned} \quad (5.83)$$

Здесь имеет место обратимость. В системе S' будет отмечаться запаздывание часов A :

$$\begin{aligned} (\Delta t')_{S'} - (\Delta t)_{S'(\Delta x=0)} &= (\Delta t')_{S'} - (\Delta t')_{S'} \sqrt{1 - \beta^2} = \\ &= (\Delta t')_{S'} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}). \end{aligned} \quad (5.84)$$

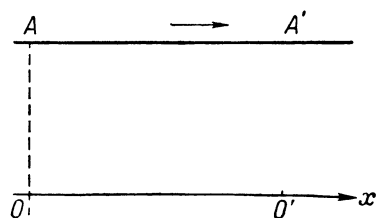
Теперь предположим, что часы A и A' первоначально находились в одной и той же собственной системе S . Сообщим часам A' ускорение, в результате чего они получают скорость v ; тогда в течение времени $\Delta t'$ часы A' будут связаны с собственной системой S' . Сообщая этим часам затем противоположное ускорение, мы придем к выводу, что часы A' окажутся в первоначальной системе S в состоянии покоя. Если временем, в течение которого происходят ускорения, можно пренебречь, то сравнение часов A и A' покажет, что часы A' (но не A) запаздывают, как это следует из формулы (5.83).

Но в данном случае сравнение показаний часов A и A' в конечном итоге производится в одной и той же собственной системе отсчета, а именно в системе S . Оно показывает, что результаты опыта не носят обратимого характера: в той системе, которая постоянно связана с часами A' (и которая, следовательно, в начале и конце опыта отличается от системы S'), очевидно, будет справедлива формула (5.83), а не (5.84).

Эйнштейн сам обратил внимание на этот „парадокс“, который, казалось бы, в противоречии с принципами относительности, позволяет решить, какие из часов остаются неподвижными. Но фактически данный „парадокс“ не относится к области специаль-

¹⁾ В этой связи можно исследовать проблемы, возникающие при быстрой остановке и переходе в состояние равномерного движения после кратковременного ускорения. Некоторые примеры можно найти в работе Мак-Кри [94].

ной теории относительности, так как здесь имеют место ускорения, позволяющие отличить те часы, которые подвержены ускорению и у которых во время опыта собственная галилеева система отсчета изменяется. В частности, этот парадокс возникает в опыте с так называемым путешественником Ланжевена, когда запаздывание часов A' проявляется в постарении путешественника. Отсутствие



Фиг. 27. К парадоксу часов.

сигналы, частота которых в его собственной системе отсчета S равна ν_0 . Для тела A' , движущегося из O в O' со скоростью v , в собственной системе S'_a , связанной с A' , частота этих сигналов будет равна²⁾

$$\nu_a = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} < \nu_0. \quad (5.85)$$

При возвращении (скорость равна $-v$) частота плоских волн, воспринимаемая движущимся телом A' , будет равна

$$\nu_r = \nu_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > \nu_0, \quad (5.86)$$

причем собственная система S'_r , связанная с A' , будет теперь новой галилеевой системой отсчета.

Если число испускаемых сигналов равно N , а число воспринимаемых сигналов равно N_a и N_r , то

$$N = N_a + N_r, \quad \frac{N_a}{\nu_a} = \frac{N_r}{\nu_r}, \quad (5.87)$$

¹⁾ Продольный эффект Доплера складывается из нерелятивистского эффекта Доплера, в котором частота $\nu = \nu_0 (1 \pm \beta \cos \theta)$ максимально изменяется для продольного направления [$\cos \theta = 1$; $\nu = \nu_0 (1 \pm \beta)$], и из релятивистских поправок.

Поперечный эффект Доплера носит чисто релятивистский характер; в этом случае $\cos \theta = 0$ и нерелятивистский эффект отсутствует. Он является непосредственным следствием замедления часов (см. гл. 10, а также книгу Арзелье [40]).

²⁾ См. формулу (10.15).

обратимости здесь, очевидно, связано с наличием ускорений, возникающих в результате изменения собственной галилеевой системы при отправлении и прибытии.

Пользуясь свойствами продольного эффекта Доплера¹⁾, эти выводы можно уточнить. Предположим (фиг. 27), что тело A в направлении Ox испускает световые

и, следовательно,

$$N_a = \frac{N}{1 + \frac{v_r}{v_a}}, \quad N_r = \frac{N}{1 + \frac{v_a}{v_r}}. \quad (5.88)$$

Сравнивая (после двух последовательных противоположных по знаку ускорений) времена, которые требуются телу A' для прохождения из O в O' и затем обратно в O , находим в системе S :

$$\Delta t = \frac{N}{v_0};$$

в системе S'_a , а затем в системе S'_r :

$$\Delta t' = \frac{N_a}{v_a} + \frac{N_r}{v_r} = \frac{2N}{v_a + v_r} = \frac{N}{v_0} \sqrt{1 - \beta^2} = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (5.89)$$

Окончательное сравнение производится в системе S , с которой система S'_r после остановки совпадает. Обратимость, таким образом, отсутствует; после возвращения оказывается, что тело A' прибыло в пути время, уменьшенное на¹⁾

$$\Delta t - \Delta t' = \Delta t (1 - \sqrt{1 - \beta^2}). \quad (5.90)$$

В данном случае приходится иметь дело с ускорениями, поэтому этот вопрос относится к области общей теории относительности. Таким образом, последняя является не просто математическим обобщением, связанным с внесением в какой-то степени необязательных дополнений к основным положениям специальной теории относительности, — она служит дальнейшим развитием теории, необходимым для правильной постановки ряда проблем, которые в кинематике и динамике специальной теории относительности строго не решаются.

¹⁾ Этот же вывод получится в том случае, если предположить, что источник излучения связан с A . (См. книгу Арзелье [40].) [Дополнительные соображения о парадоксе часов, связанные с критическим обзором ряда последних работ, имеются также в другой недавно вышедшей книге Арзелье (H. Arzeliers, La dynamique relativiste et les applications. Fasc. 2. Problèmes de mouvement en dynamique du point faiblement accéléré, Paris, 1958), Приложение 6, где содержится также библиография более старых работ по данному вопросу. — *Прим. перев.*]

ГЛАВА 6

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Несобственно евклидово пространство специальной теории относительности

Важнейший постулат специальной теории относительности — о постоянстве скорости света во всех галилеевых системах отсчета — приводит к инвариантности основной квадратичной формы

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (6.1)$$

которая не меняется при общем преобразовании Лоренца.

Выражением (6.1) определяется элементарный интервал четырехмерного евклидова пространства, отнесенного, как мы увидим, к системе прямолинейных ортонормированных координатных осей. В ортогональной системе координат для данного момента t условием $ds^2 = 0$ определяется световая волна, в начальный момент времени вышедшая из начала координат. Вместе с тем евклидово пространство, характеризуемое формулой (6.1), является несобственно евклидовым, так как длина в нем не обязательно является положительно определенной¹⁾.

Все изменения координат, допускаемые основными положениями специальной теории относительности, соответствуют случаю, когда берется ортонормированная система координатных осей.

Если координаты действительны, то условия нормировки, разумеется, отличаются от условий, вводимых для собственно евклидова пространства.

Чтобы можно было применить формализм собственно евклидова пространства, можно воспользоваться искусственным приемом, заключающимся во введении *мнимых координат* (см. гл. 5, § 14). Преимущество этого приема заключается в том, что выражение (6.1) для ds^2 принимает *эллиптическую форму* (является суммой четырех квадратов), а это, как мы увидим (см. гл. 14), позволяет не различать между собой ковариантные и контрвариантные индексы. Неудобство введения таких координат заключается в том, что мнимыми в какой-то степени начинают казаться и сами „естественные“ релятивистские законы.

¹⁾ Такое пространство называют также псевдоевклидовым. — *Прим. перев.*

При использовании *действительных координат* форма ds^2 , определяемая по (6.1), сводится к *нормальной гиперболической* форме (+ — — —). Это накладывает условие нормировки, которое мы запишем в виде (6.28), и заставляет вводить различие между ковариантными и контравариантными индексами.

Однако нецелесообразно ограничиваться только ортонормированными системами координатных осей, для которых имеет место условие (6.28). И действительно, этим условием нормировки заметное упрощение в формализм не вносится. Поэтому вместо того, чтобы предопределять выбор эллиптической или гиперболической „сигнатуры“ у ds^2 , зависящей от выбора координат, лучше пользоваться *произвольной* (в общем случае косоугольной) *прямолинейной системой координат*. Изучение таких координат будет проведено в гл. 14, раздел А.

Если речь идет о преобразованиях Лоренца, где существенны только ортонормированные системы, то формализм косоугольных координат, разумеется, будет слишком широк, однако в частном случае он переходит в формализм ортонормированных координатных осей. Следовательно, мы придем к преобразованиям Лоренца, если произвольным образом выберем условия нормировки, зависящие от типа используемых координат. Эти условия накладывают ограничения на преобразования косоугольных осей, которые сводятся к преобразованиям ортонормированных реперов, что приводит к четырехмерному формализму, пригодному для выражения преобразования Лоренца.

Такой метод, т. е. предварительное введение косоугольных осей, имеет то преимущество, что можно одновременно рассматривать разные частные случаи, соответствующие различному выбору координат и, следовательно, разным условиям нормировки. Из последних для каждого случая очевидным образом определяются накладываемые ограничения.

С другой стороны, нетрудно получить дальнейшее обобщение, связанное с переходом от описания евклидова пространства в косоугольных координатах (см. гл. 14, раздел А) к описанию того же пространства при помощи произвольных криволинейных координат (см. гл. 14, раздел Б). После этого легко осуществляется переход к неевклидову пространству, где уже нельзя обойтись без использования криволинейных координат¹⁾. В результате оказывается возможным сформулировать законы, которые в соответствии с принципами общей теории относительности являются ковариантными по отношению к любым преобразованиям координат.

¹⁾ Если в неевклидовом пространстве рассматривается значительная область пространства, то необходимо использовать криволинейные координаты (см. гл. 15). Прямолинейные координаты можно применять *только локально*.

З а м е ч а н и е. Явления, протекающие в четырехмерном евклидовом пространстве, разумеется, не обязательно описывать в ортонормированной системе координат. Можно пользоваться косоугольными координатами (гл. 14, раздел А) или даже произвольными криволинейными координатами (гл. 14, раздел Б). Но, конечно, в этом случае необходимо отличать ковариантные индексы от контравариантных, а при переходе к криволинейным координатам нужно воспользоваться понятием о ковариантной производной. Однако применение таких координат, как бы оно ни казалось удобным или необходимым для решения отдельных задач, в случае евклидова пространства тем не менее является *необязательным*. Другими словами, большую область такого пространства всегда можно описывать в ортонормированной системе координат.

§ 2. Применяемые условия

1. Индексы. Если координаты выбраны так, что $x' = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = ict$, то *греческие индексы* μ, ν, ρ, σ принимают значения 1, 2, 3, 4; если же координаты действительны ($x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^0 = ct$), то они принимают значения 1, 2, 3, 0.

Латинские индексы p, q, r, s принимают значения 1, 2, 3.

2. Условие о суммировании. Примем следующее условие о суммировании.

Если в одном и том же члене индекс повторяется один раз вверху и один раз внизу, то по этому индексу всегда будет подразумеваться суммирование.

Такой „немой“ индекс, следовательно, не принимает какого-то частного значения, а только указывает на наличие суммирования. Таким образом, в системе координат x^μ (x^1, x^2, x^3, x^0):

$$A_\mu B^\mu = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 + A_0 B^0,$$

$$A_p A^p = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3.$$

3. Представление вектора и тензора. Вектор в трехмерном евклидовом пространстве мы обозначали символом A . Компоненты этого вектора равны

$$A_x = A_1, \quad A_y = A_2, \quad A_z = A_3,$$

или, короче, A_p , где $p = 1, 2, 3$.

Вектор в четырехмерном евклидовом пространстве мы также будем обозначать символом A . Компоненты этого вектора равны $A_x = A_1, A_y = A_2, A_z = A_3, A_{ct} = A_0$ (или $A_{ict} = A_4$). Для краткости мы их обозначим через A_μ , где $\mu = 1, 2, 3, 0$ (или 1, 2, 3, 4).

Отметим, что три компоненты A_p вектора из трехмерного пространства не обязательно являются тремя первыми (пространственными) компонентами четырехмерного вектора. Как мы увидим, это имеет место для координат $x^\mu = (x, x^0)$, но не для компонент скорости.

§ 3. Выражения для формы ds^2 в специальной теории относительности

1. Выбор мнимых координат. Если положить

$$\boxed{x^1 = ix, \quad x^2 = iy, \quad x^3 = iz, \quad x^4 = ct,} \quad (6.2)$$

то (6.1) запишется в виде

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 = \sum_{\mu} (dx^{\mu})^2, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (6.3)$$

причем это выражение является элементарным интервалом четырехмерного евклидова пространства, отнесенным к системе ортонормированных прямолинейных координатных осей.

В самом деле, если прямолинейные оси характеризовать заданием четырех единичных векторов $e_{\mu} (e_1, e_2, e_3, e_4)$, то можно положить

$$ds = e_1 dx^1 + e_2 dx^2 + e_3 dx^3 + e_4 dx^4. \quad (6.4)$$

Скалярное произведение $(ds \cdot ds) = ds^2$ будет совпадать с (6.3) в том случае, если векторы e_{μ} , во-первых, ортогональны:

$$(e_{\mu} \cdot e_{\nu}) = 0 \quad \text{для } \mu \neq \nu, \quad (6.5)$$

и, во-вторых, нормированы:

$$e_{\mu}^2 = 1. \quad (6.6)$$

Условия (6.5) и (6.6), взятые совместно, образуют условие ортонормированности:

$$(e_{\mu} \cdot e_{\nu}) = \delta_{\mu\nu}, \quad (6.7)$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера:

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = \nu, \\ 0, & \text{если } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (6.8)$$

Если выбрать координаты в виде (6.2) и в соответствии с (6.7) ввести ортонормированные оси, то эллиптическая форма интервала (6.3) непосредственно вытекает из выражения для ds^2 в произвольных косоугольных координатах (см. гл. 14, раздел А):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (6.9)$$

где

$$\boxed{g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}.} \quad (6.10)$$

Из условия ортонормированности (6.10) следует равенство между собой ковариантных и контравариантных компонент вектора:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = \delta_{\mu\nu} A^\nu = A^\mu. \quad (6.11)$$

Наконец, выражения для *скалярного произведения* двух векторов (14.16) и для *нормы* или *квадрата длины* вектора (14.18) имеют следующий вид ¹⁾:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = \sum_\mu A^\mu B^\mu, \quad (6.12)$$

$$|\mathbf{A}|^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \sum_\mu (A^\mu)^2. \quad (6.13)$$

Чаше полагают

$$\boxed{x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ict,} \quad (6.14)$$

так что

$$ds^2 = - \sum_\mu (dx^\mu)^2, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (6.15)$$

Такая форма получается в том случае, когда прямолинейные оси характеризуются единичными векторами \mathbf{e}_μ , ортонормируемыми с помощью условия

$$(\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) = - \delta_{\mu\nu}, \quad (6.16)$$

заменяющего (6.7). Выражение ds^2 будет получаться из общей формы (6.9), если положить

$$\boxed{g_{\mu\nu} = - \delta_{\mu\nu}.} \quad (6.17)$$

Для этих осей соотношения между ковариантными и контравариантными компонентами вектора принимают вид

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = - \delta_{\mu\nu} A^\nu = - A^\mu, \quad (6.18)$$

¹⁾ Несмотря на соотношение (6.13), норма ненулевого вектора не обязательно является положительной (как это имеет место для собственно евклидова пространства), поскольку не все компоненты вектора действительны:

$$|\mathbf{A}|^2 = \sum_p (A^p)^2 + (A^4)^2 = (A^4)^2 - (A_x)^2 - (A_y)^2 - (A_z)^2 \geq 0.$$

а скалярное произведение двух векторов и норма вектора равны

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = - \sum_{\mu} A^\mu B^\mu, \quad (6.19)$$

$$|\mathbf{A}|^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = - \sum_{\mu} (A^\mu)^2. \quad (6.20)$$

2. Выбор действительных координат. Если воспользоваться действительными координатами

$$\boxed{x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^0 = ct,} \quad (6.21)$$

то форму (6.1) можно привести к следующему виду:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \sum_p (dx^p)^2, \quad p = 1, 2, 3. \quad (6.22)$$

Эта „приведенная“ форма ds^2 характеризуется нормальной гиперболической сигнатурой (+ — — —). Она соответствует выбору системы прямолинейных осей, характеризующимся единичными векторами e_μ (e_1, e_2, e_3, e_0).

В любом случае

$$ds = e_1 dx^1 + e_2 dx^2 + e_3 dx^3 + e_0 dx^0, \quad (6.23)$$

и выражение для скалярного произведения $(ds \cdot ds) = ds^2$ будет совпадать с (6.22), если векторы e_μ , во-первых, ортогональны

$$(e_\mu \cdot e_\nu) = 0 \quad \text{для } \mu \neq \nu, \quad (6.24)$$

и, во-вторых, нормированы с помощью условий

$$e_0^2 = 1, \quad e_p^2 = -1, \quad p = 1, 2, 3. \quad (6.25)$$

Эти условия объединяются в одной формуле

$$(e_\mu \cdot e_\nu) = \eta_{\mu\nu}, \quad (6.26)$$

где

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Условия (6.26), связанные с использованием действительных координат, дают возможность представить ds^2 в виде (6.22). Форма (6.22) будет получаться из общего выражения (6.9), если положить

$$\boxed{g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}.} \quad (6.28)$$

Таким образом, ковариантные и контравариантные компоненты вектора связаны соотношениями

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = \eta_{\mu\nu} A^\nu, \quad (6.29)$$

т. е.

$$A_p = \eta_{p\nu} A^\nu = -\delta_{p\nu} A^\nu = -A^p, \quad (6.30)$$

$$A_0 = \eta_{0\nu} A^\nu = \delta_{0\nu} A^\nu = A^0. \quad (6.31)$$

Следовательно, скалярное произведение двух векторов и норма вектора определяются выражениями

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \sum_p A^p B^p, \quad p = 1, 2, 3, \quad (6.32)$$

$$|A|^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = (A^0)^2 - \sum_p (A^p)^2. \quad (6.33)$$

Из выражений (6.13), (6.20) и (6.33) видно, что у произвольного ненулевого *действительного* вектора норма не обязательно положительна: четырехмерное пространство специальной теории относительности является *несобственно евклидовым*.

§ 4. Пространственно-подобные, времени-подобные и изотропные четырехмерные векторы

Четырехмерный вектор \mathbf{A} называют *времени-подобным*, *пространственно-подобным* или *изотропным* в зависимости от того, будет ли его норма положительной, отрицательной или равной нулю.

Выберем координаты действительными. В системе координат, ортонормированной в соответствии с (6.28), согласно (6.33) имеем

$$|A|^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = (A^0)^2 - \sum_p (A^p)^2 \geq 0. \quad (6.34)$$

Вектор \mathbf{A} времени-подобен, если $|A|^2 > 0$ или $(A^0)^2 > \sum_p (A^p)^2$.

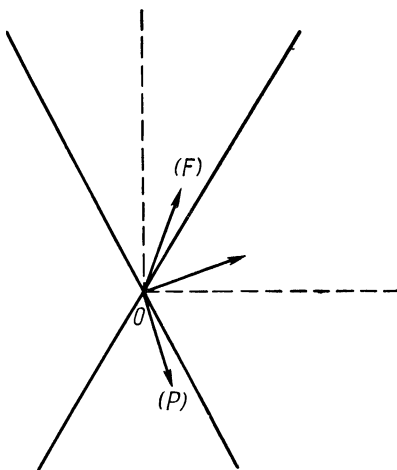
Вектор \mathbf{A} пространственно-подобен, если $|A|^2 < 0$ или $(A^0)^2 < \sum_p (A^p)^2$.

Вектор \mathbf{A} изотропен, если $\sum_p (A^p)^2 = (A^0)^2$.

В частности, если скорость $v < c$, то ds^2 больше нуля. Поэтому касательные к траектории материальной частицы направлены вдоль времени-подобных четырехмерных векторов, так как $(dx^0)^2 - \sum_p (dx^p)^2 > 0$. Следовательно, траектории лежат внутри характеристического конуса, определяемого соотношением $ds = 0$.

Траектории, для которых $ds^2 = 0$, соответствуют световым лучам $v = c$. Касательные к этим траекториям расположены на характеристическом конусе $ds^2 = 0$.

Характеристический конус $ds^2 = 0$ делит четырехмерное пространство на две области (фиг. 28). Первая область ($ds^2 > 0$), содержащая все времени-подобные векторы, соответствует внутренней части конуса, вершина которого находится в начале координат, а образующие направлены по изотропным векторам, касательным к траекториям световых лучей. Сама эта область подразделяется на верхнюю полость конуса (F) и на нижнюю полость конуса (P). В подобласти (F) все составляющие A^0 времени-подобных четырехмерных векторов положительны — это область будущего. В подобласти (P) указанные составляющие, напротив, отрицательны — это область прошедшего. Вторая область ($ds^2 < 0$), соответствующая внешней части конуса, содержит все пространственно-подобные векторы — эта область „других мест“.



Фиг. 28. Характеристический конус.

§ 5. Инвариантность ds^2 и группа движений четырехмерного евклидова пространства

Найдем преобразования, не меняющие единицу длины и позволяющие перейти от одной системы координат, в которой имеют место условия ортонормированности (6.10), (6.17) или (6.28), к другой системе, в которой выполняются те же самые условия.

В случае, когда используются мнимые координаты, условия ортонормированности имеют вид (6.10) ($g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$) или (6.17) ($g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$), и форма ds^2 сводится к (6.3) или (6.15). При этом должны выполняться условия

$$\sum_p (dx^p)^2 = \sum_p (dx'^p)^2. \quad (6.35)$$

В случае, когда используются действительные координаты ($x^0 = ct$), имеют место условия нормировки (6.28) ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$), форма ds^2 определяется согласно (6.22) и должно оставаться

инвариантным выражение

$$-\sum_p (dx^p)^2 + (dx^0)^2 = -\sum_p (dx'^p)^2 + (dx'^0)^2. \quad (6.36)$$

Такая инвариантность наблюдается для преобразований, образующих *группу движений евклидова (или несобственно евклидова) четырехмерного пространства*. Эта группа включает:

Смещения, которые определяются согласно

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \quad (6.37)$$

($a^{\mu} = \text{const}$), откуда следует

$$dx'^{\mu} = dx^{\mu}. \quad (6.38)$$

Линейные ортогональные преобразования четырехмерного евклидова или несобственно евклидова пространства. Согласно (14.23), такие преобразования всегда имеют вид

$$e'_{\mu} = a^{\nu}_{\mu} e_{\nu}, \quad e_{\mu} = a'^{\nu}_{\mu} e'_{\nu}, \quad (6.39a)$$

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad x^{\mu} = a'^{\mu}_{\nu} x'^{\nu}, \quad (6.39b)$$

где (см. 14.28)

$$a^{\rho}_{\mu} a^{\nu}_{\rho} = a^{\rho}_{\mu} a^{\nu}_{\rho} = \delta^{\nu}_{\mu}. \quad (6.40)$$

Необходимо также добиться того, чтобы после преобразования координатные оси оставались ортогональными. Это будет иметь место при любой норме, если скалярное произведение инвариантно (см. гл. 14)

$$g'_{\mu\nu} = (e'_{\mu} \cdot e'_{\nu}) = (e_{\mu} \cdot e_{\nu}) = g_{\mu\nu}, \quad (6.41)$$

т. е. если выполняются условия (14.70):

$$a^{\rho}_{\mu} g^{\lambda}_{\rho} = a^{\rho}_{\lambda} g^{\lambda}_{\mu\rho}. \quad (6.42)$$

Если оси ортонормированы с помощью условий $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ или $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$, то, согласно (6.42),

$$a^{\lambda}_{\mu} = a^{\mu}_{\lambda}. \quad (6.43)$$

Таким образом, в соответствии с (6.40) и (6.43), на преобразование (6.39) в обоих случаях накладываются ограничения

$$\sum_{\rho} a^{\rho}_{\mu} a^{\rho}_{\nu} = \delta_{\mu\nu}. \quad (6.44)$$

Если оси ортонормированы с помощью условий $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, то из (6.42) следует

$$a_{p'}^q = a_{q'}^{p'}, \quad a_0^0 = a_0^{0'}, \quad a_{p'}^0 = -a_0^{p'}, \quad a_0^{p'} = -a_{p'}^0. \quad (6.45)$$

З а м е ч а н и е. Если положить $x^4 = ict$, то коэффициенты $a_{\mu'}^p$, и $a_{\mu'}^{p'}$ будут действительными, а $a_{p'}^4$ и $a_4^{p'}$ — чисто мнимыми. Поэтому, согласно (6.40), будем иметь

$$(a_4^{p'})^2 = 1 - \sum_p (a_{p'}^4)^2 \geq 1. \quad (6.46)$$

Если же положить $x^0 = ct$, то действительными будут как коэффициенты $a_{\mu'}^p$, так и $a_{\mu'}^{p'}$. Поэтому, согласно (6.40) и (6.45),

$$(a_0^{p'})^2 = 1 + \sum_p (a_{p'}^0)^2 \geq 1. \quad (6.47)$$

В обоих случаях из неравенства $(a_0^{p'})^2 \geq 1$ должно также следовать

$$\boxed{a_0^{p'} \geq 1 \quad (\text{или } a_4^{p'} \geq 1),} \quad (6.48)$$

причем мы исключаем преобразования, для которых $a_0^{p'} \leq -1$. Учет условия (6.48) приводит к ограничению теми преобразованиями (6.39), которые образуют группу. Действительно, если это условие имеет место, то переход от x к x' , а затем от x' к x'' осуществляется по тому же образцу, как и переход от x к x'' . Мы имеем

$$x'^{\mu} = a_{\nu'}^{\mu'} x^{\nu}, \quad x''^{\mu} = a_{\nu''}^{\mu''} x'^{\nu}, \quad (6.49)$$

т. е.

$$x''^{\mu} = a_{\nu''}^{\mu''} a_{\rho'}^{\nu'} x^{\rho} = a_{\rho''}^{\mu''} x^{\rho}. \quad (6.50)$$

При этом коэффициенты

$$a_{\rho''}^{\mu''} = a_{\nu''}^{\mu''} a_{\rho'}^{\nu'} \quad (6.51)$$

обладают такими же свойствами, как и коэффициенты $a_{\rho'}^{\mu'}$ и a_{ρ}^{μ} . Чтобы преобразования (6.49) составляли группу, в них должно входить *тождественное* преобразование, что ограничивает коэффициенты a_0^0 и приводит к неравенству (6.48)¹⁾.

Это неравенство показывает, что линейное ортогональное преобразование рассматриваемого типа сохраняет знак у составляющей A^0 четырехмерного времени-подобного ($A^2 > 0$) вектора.

¹⁾ Следует отметить, что преобразования (6.39) с условием (6.40) образуют группу и в том случае, когда требование (6.48) не накладывается. См. наше дополнение в конце книги. — *Прим. перев.*

Следовательно, при изменении галилеевой системы отсчета этот знак не меняется.

В частности, если в галилеевых системах отсчета используются действительные координаты, то вектор dx всегда будет времени-подобным, так как при $v < c$ форма $ds^2 > 0$. Поскольку составляющая dx^0 положительна в области будущего, то она, следовательно, сохранит этот же знак при определенных выше преобразованиях координатных осей, т. е. при переходе от одной галилеевой системы отсчета к другой. Это означает, что во всех имеющих физический смысл ($ds^2 > 0$) галилеевых системах отсчета *время течет в одном и том же направлении*.

Таким образом, соотношения (6.39) свидетельствуют об одинаковой роли, которую играют пространственные и временные координаты, но в связи с неравенством $a_0^0 \gg 0$ добавляется фундаментальный постулат необратимости времени.

§ 6. Общее и специальное преобразование Лоренца

Мы только что видели, что группа движений четырехмерного евклидова пространства оставляет инвариантной форму ds^2 . Этим, следовательно, определяется выделенная роль и эквивалентность между собой любых галилеевых систем отсчета, а также, согласно (6.48), направление течения времени. Этой группой определяется общее преобразование Лоренца¹⁾.

Важно отметить, что если скорости ориентируются произвольно по отношению к координатным осям, то одни преобразования Лоренца, *без поворотов*, не образуют группу (см. Лалан [95, 96], Метц [97]). Действительно, двумя последовательными преобразованиями Лоренца *без поворота* $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$ определяется преобразование Лоренца $S_1 \rightarrow S_3$, но оно уже не будет преобразованием *без поворота*: в общем случае с ним связан поворот D пространственных осей. В самом деле, если преобразования $S_1 \rightarrow S_2$ и $S_2 \rightarrow S_3$ описываются формулами типа (5.71a), то для преобразования $S_1 \rightarrow S_3$ получается выражение (5.78a). Если, с другой стороны, через $v_{(ij)}$ обозначена скорость системы S_i по отношению к системе S_j , то

$$v_{(12)} = -v_{(21)}, \quad v_{(23)} = -v_{(32)}, \quad \text{но} \quad Dv_{(31)} = -v_{13}.$$

¹⁾ Более детально затрагиваемые вопросы рассмотрены в помещенном в конце книги дополнении „О связи теории относительности с теорией групп“, где, исходя из свойств группы Лоренца, выводятся также конкретные релятивистские формулы, и в том числе кинематическое соотношение, соответствующее упоминаемой в настоящем параграфе формуле для „прецессии Томаса“. — *Прим. перев.*

В кинематике это свойство иллюстрируется явлением, называемым *прецессией Томаса* [98]: если, например, преобразование $S_2 \rightarrow S_3$ бесконечно мало, то вращением D определяется прецессия оси S_3 по отношению к S , причем скорость прецессии пропорциональна $[\mathbf{v}_{(12)} \times \dot{\mathbf{v}}_{(12)}] / \mathbf{v}_{(12)}^2$.

Специальное преобразование Лоренца является частным случаем преобразования без поворота. Оно имеет место в случае, когда системы координат выбраны таким образом, что их координатные оси параллельны, а относительная скорость направлена вдоль одной из этих осей.

Общее преобразование Лоренца эквивалентно совокупности трех следующих преобразований:

Чисто пространственного преобразования, для которого остается инвариантным

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (6.52)$$

и которое складывается из переноса начала пространственных осей и из вращения этих осей.

Изменения начала отсчета времени.

Специального преобразования Лоренца, т. е. изменения системы отсчета для того частного случая, когда оси параллельны между собой, а скорость \mathbf{v} направлена вдоль одной из осей (Ox).

Действительно, путем смещения четырех переменных можно добиться того, чтобы начальные точки систем $S(x, y, z)$ и $S'(x', y', z')$ совпадали и чтобы начальные моменты времени были одинаковыми. Далее, путем поворота пространственных осей можно обеспечить совпадение направлений осей Ox и Ox' с направлением скорости \mathbf{v} относительного движения двух систем отсчета. После этого поворот системы S' вокруг оси Ox' даст возможность сделать оси Oy' и Oz' параллельными (и одинаково направленными) осям Oy и Oz . В результате мы придем к случаю специального преобразования Лоренца; оно сводится к повороту, при котором в соответствии с соотношениями

$$y' = y, \quad z' = z$$

плоскости xOy и xOz (совпадающие с $x'Oy'$ и $x'Oz'$) не меняются.

Но именно таким свойством обладает поворот в мнимой плоскости x^1Ox^4 [см. (5.68)]

$$x'^1 = x^1 \cos \psi + x^4 \sin \psi,$$

$$x'^4 = x^4 \cos \psi - x^1 \sin \psi.$$

Как мы знаем, угол ψ здесь должен быть мнимым, так что $\operatorname{tg} \psi = i\beta$.

Таким образом, общее преобразование Лоренца всегда можно заменить на специальное преобразование, если дополнительно осуществить пространственное преобразование (складывающееся из смещения и вращения), при котором $d\sigma^2$ инвариантно, и изменить начало отсчета времени.

В том и только в том случае, когда имеют место специальные преобразования, последовательное проведение двух преобразований S без поворота ($S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$) приводит к преобразованию того же типа.

§ 7. Выражение для коэффициентов общего преобразования Лоренца

Общее преобразование Лоренца определяется формулами

$$e_{\mu} = a_{\mu}^{\nu'} e'_{\nu}, \quad e'_{\mu} = a_{\mu}^{\nu} e_{\nu}, \quad (6.39a)$$

$$x^{\mu} = a_{\nu'}^{\mu} x'^{\nu}, \quad x'^{\mu} = a_{\nu}^{\mu'} x^{\nu}, \quad (6.39b)$$

где

$$a_{\mu}^{\rho'} a_{\rho'}^{\nu} = a_{\mu}^{\rho} a_{\rho}^{\nu'} = \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (6.40)$$

что связано с наличием ограничений

$$a_{\mu}^{\rho'} g_{\rho\nu} = a_{\nu}^{\rho'} g_{\mu\rho}, \quad (6.42)$$

вытекающих из ортонормированности координатных осей.

Если $g_{\mu\nu} = \pm \delta_{\mu\nu}$ (т. е. если используются *мнимые* координаты), то условие (6.42) запишется в виде

$$a_{\mu}^{\nu'} = a_{\nu}^{\mu'}, \quad (6.42a)$$

а условие (6.40) примет следующий вид:

$$\sum_{\rho} a_{\rho}^{\rho'} a_{\nu}^{\rho'} = \sum_{\rho} a_{\mu}^{\rho} a_{\rho}^{\rho'} = \delta_{\mu\nu}. \quad (6.40a)$$

Если же $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (т. е. если используются *действительные* координаты), то условие (6.42) дает

$$x_{\mu}^{\rho} \eta_{\rho\nu} = a_{\nu}^{\rho'} \eta_{\mu\rho}.$$

т. е.

$$a_{\rho}^q = a_q^{p'}, \quad a_0^0 = a_0^{0'}, \quad a_{\rho}^0 = -a_0^{\rho'}, \quad a_0^{\rho} = -a_{\rho}^{0'}, \quad (6.426)$$

а условие (6.40) записывается в виде

$$\sum_r a'_p a'_q - a^0_p a^0_q = \delta_{pq},$$

$$-\sum_r a^0_r a^0_r + (a^0_0)^2 = 1, \quad -\sum_r a'_p a^0_r + a^0_p a^0_0 = 0. \quad (6.40б)$$

В этом параграфе мы ограничимся *действительными координатами* и, следовательно, примем условия (6.42б) и (6.40б).

Воспользуемся выражением (5.78) для общего преобразования координат. Вводя компоненты четырехмерного вектора x^μ [$x = x^p$, $x^0 = ct$], мы получили

$$x'^p = D^{-1}x^p + D^{-1}v^p \left\{ \frac{\alpha}{v^2} (x \cdot v) - \frac{x^0}{c\sqrt{1-\beta^2}} \right\}, \quad (5.78a)$$

$$x'^0 = \frac{x^0 - (x \cdot v/c)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (5.78б)$$

где

$$v = (v^p), \quad v_p = -v^p, \quad v^2 = \sum_p (v^p)^2, \quad (6.53)$$

$$x \cdot v = \sum_r x^r v^r = -x^r v_r, \quad (6.54)$$

и

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1.} \quad (5.75)$$

Поскольку dt не является инвариантом, то величины $v^p = dx^p/dt$ не являются пространственными составляющими четырехмерного вектора. Заменим их на составляющие четырехмерного вектора $u^\mu = dx^\mu/ds$ (где ds — инвариант), так что

$$u^p = \frac{dx^p}{ds} = \frac{dx^p}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = c \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (6.55)$$

Тогда (5.78a) и (5.78б) запишутся в виде

$$x'^p = D^{-1}x^p - D^{-1}u^p \left\{ \alpha \left(\frac{1-\beta^2}{\beta^2} \right) x^r u_r + x^0 \right\}, \quad (6.55a)$$

$$x'^0 = x^0 u_0 + x^p u_p. \quad (6.55б)$$

Обозначим через α^p_q коэффициенты пространственного поворота D^{-1} , так что

$$D^{-1}x^p = \alpha^p_q x^q. \quad (6.56)$$

Сравнивая с (6.396), получаем

$$x'^p = a_{\nu'}^{p'} x^{\nu} = a_q^{p'} x^q + a_0^{p'} x^0, \quad (6.56a)$$

$$x'^0 = a_{\nu'}^{0'} x^{\nu} = a_q^{0'} x^q + a_0^{0'} x^0. \quad (6.56b)$$

Сопоставление с (6.55) дает

$$a_q^{p'} = a_{p'}^q = \alpha_q^p - \alpha \left(\frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \right) \alpha_r^p u^r u_q = \alpha_q^p - \frac{\alpha}{v^2} \alpha_r^p v^r v_q, \quad (6.57)$$

$$a_0^{p'} = -a_{p'}^0 = -\alpha_r^p u^r, \quad a_p^{0'} = -a_0^{p'} = -u_p. \quad (6.58)$$

Полученные формулы представляются в виде

$$(a_{\mu'}^{\nu'}) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \gamma_1^r & \alpha_2^2 \gamma_1^r & \alpha_3^3 \gamma_1^r & -u^1 \\ \alpha_1^1 \gamma_2^r & \alpha_2^2 \gamma_2^r & \alpha_3^3 \gamma_2^r & -u^2 \\ \alpha_1^1 \gamma_3^r & \alpha_2^2 \gamma_3^r & \alpha_3^3 \gamma_3^r & -u^3 \\ -\alpha_r^1 u^r & -\alpha_r^2 u^r & -\alpha_r^3 u^r & u^0 \end{pmatrix}, \quad (6.59a)$$

$$(a_{\mu'}^{\nu}) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \gamma_1^r & \alpha_1^1 \gamma_2^r & \alpha_1^1 \gamma_3^r & \alpha_r^1 u^r \\ \alpha_2^2 \gamma_1^r & \alpha_2^2 \gamma_2^r & \alpha_2^2 \gamma_3^r & \alpha_r^2 u^r \\ \alpha_3^3 \gamma_1^r & \alpha_3^3 \gamma_2^r & \alpha_3^3 \gamma_3^r & \alpha_r^3 u^r \\ u^1 & u^2 & u^3 & u^0 \end{pmatrix}, \quad (6.59b)$$

где в соответствии с (6.57), (6.58) и (5.75) имеем

$$\gamma_p^r = \delta_p^r + \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \beta^2) u^r u^p = \delta_p^r + \frac{V \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta^2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) u^r u^p, \quad (6.60)$$

или

$$\gamma_p^r = \delta_p^r + \frac{\alpha}{v^2} v^r v^p.$$

Обратим внимание на то, что нижний индекс у $a_{\mu'}^{\nu'}$ или $a_{\mu'}^{\nu}$ всегда соответствует строкам матриц (6.59), а верхний индекс всегда относится к столбцам.

Замечание. В менее общем случае преобразования Лоренца без поворота (см. гл. 5, § 15)

$$\alpha_p^q = \delta_p^q. \quad (6.61)$$

При этом формулы (6.57) и (6.58) запишутся в виде

$$a_p^q = a_p^q = \delta_p^q + \frac{\alpha}{v^2} v^p v^q, \quad a_0^0 = a_0^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = u_0, \quad (6.62)$$

$$\begin{aligned} a_0^p &= -a_p^0 = -\frac{v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} = -u^p, \\ a_p^0 &= -a_0^p = -\frac{v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} = -u^p, \end{aligned} \quad (6.63)$$

т. е.

$$(a_{\mu}^{\nu'}) = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \gamma_1^3 & -u^1 \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 & \gamma_2^3 & -u^2 \\ \gamma_3^1 & \gamma_3^2 & \gamma_3^3 & -u^3 \\ -u^1 & -u^2 & -u^3 & u^0 \end{pmatrix}, \quad (6.64)$$

$$(a_{\mu}^{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \gamma_1^3 & u^1 \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 & \gamma_2^3 & u^2 \\ \gamma_3^1 & \gamma_3^2 & \gamma_3^3 & u^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & u^0 \end{pmatrix}.$$

§ 8. Применение специального преобразования Лоренца

Рассмотрим частный случай *специального преобразования Лоренца*

$$|v| = v^1, \quad v^2 = v^3 = 0. \quad (6.65)$$

При этом в (6.62) и (6.63) будут отличны от нуля только следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_1^1 &= a_1^1 = 1 + \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, & a_2^2 &= a_2^2 = a_3^3 = a_3^3 = 1, \\ a_0^1 &= -a_1^0 = \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, & a_1^0 &= -a_0^1 = \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ a_0^0 &= a_0^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Приведенные значения полностью совпадают с теми, которые можно непосредственно получить из специального преобразования,

представляемого, например, в виде (5.64). Полагая $\text{th } \varphi = \beta$, будем иметь

$$\begin{aligned} (a_{\mu}^{\nu'}) &= \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & 0 & 0 & -\text{sh } \varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\text{sh } \varphi & 0 & 0 & \text{ch } \varphi \end{pmatrix}, \\ (a_{\mu'}^{\nu}) &= \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & 0 & 0 & \text{sh } \varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sh } \varphi & 0 & 0 & \text{ch } \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Замечание. Если воспользоваться мнимыми координатами (6.14) ($x^4 = ict$) и положить $\text{tg } \psi = i\beta$, то формулы специального преобразования (5.68) приводят к следующим значениям коэффициентов $a_{\mu}^{\nu'}$ и $a_{\mu'}^{\nu}$:

$$\begin{aligned} (a_{\mu}^{\nu'}) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}, \\ (a_{\mu'}^{\nu}) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.68)$$

§ 9. Примеры

1. Преобразование вектора A . Выберем координаты действительными. Из

$$A'^{\mu} = a_{\mu}^{\nu'} A^{\nu}, \quad A'_{\mu} = a_{\mu'}^{\nu} A_{\nu}, \quad (6.69)$$

получаем соотношения для контравариантных компонент

$$A'^P = a_q^{P'} A^q + a_0^{P'} A^0 = \alpha_r^P \gamma_q^r A^q - \alpha_r^P u^r A^0, \quad (6.70a)$$

$$A'^0 = a_p^{0'} A^p + a_0^{0'} A^0 = -\sum_p u^p A^p + u^0 A^0 \quad (6.70б)$$

и для ковариантных компонент

$$A'_p = a_p^q A_q + a_p^0 A_0 = \sum_q \alpha_r^p \gamma_q^r A_q + \alpha_r^p u^r A_0, \quad (6.71a)$$

$$A'_0 = a_0^p A_p + a_0^0 A_0 = u^p A_p + u^0 A_0. \quad (6.71б)$$

Для частного случая преобразования Лоренца *без поворота*, согласно (6.61), имеем $\left(\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$

$$A'^p = \left[\delta_q^p + \sum_q \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \beta^2) u^p u^q \right] A^q - u^p A^0, \quad (6.72a)$$

$$A'^0 = - \sum_p u^p A^p + u^0 A^0, \quad (6.72b)$$

$$A'_p = \left[\delta_p^q + \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \beta^2) u^p u^q \right] A_q + u^p A_0, \quad (6.73a)$$

$$A'_0 = u^p A_p + u^0 A_0. \quad (6.73b)$$

Для *специального преобразования* Лоренца, для которого

$$u = u^1 = \frac{v^1}{c \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u^2 = u^3 = 0, \quad (6.74)$$

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

формулы (6.72) и (6.73) дают

$$A'^1 = \frac{A^1 - \beta A^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A'^2 = A^2, \quad A'^3 = A^3, \quad A'^0 = \frac{A^0 - \beta A^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (6.75)$$

$$A'_1 = \frac{A_1 + \beta A_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A'_2 = A_2, \quad A'_3 = A_3, \quad A'_0 = \frac{A_0 + \beta A_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (6.76)$$

Приведем также обратные формулы:

$$A^1 = \frac{A'^1 + \beta A'^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3, \quad A^0 = \frac{A'^0 + \beta A'^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (6.77)$$

$$A_1 = \frac{A'_1 - \beta A'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3, \quad A_0 = \frac{A'_0 - \beta A'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (6.78)$$

Формулы (6.75), (6.76) и (6.77), (6.78), разумеется, непосредственно вытекают из выражений (6.66) или (6.67) для коэффициентов специального преобразования¹⁾.

¹⁾ Из (6.68) непосредственно вытекают формулы преобразования для случая, когда используются мнимые координаты ($x^4 = ict$);

$$A'^1 = \frac{A^1 + i\beta A^4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A'^2 = A^2, \quad A'^3 = A^3, \quad A'^4 = \frac{A^4 - i\beta A^1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$A'_1 = \frac{A_1 + i\beta A_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A'_2 = A_2, \quad A'_3 = A_3, \quad A'_4 = \frac{A_4 - i\beta A_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

и обратные формулы

$$A^1 = \frac{A'^1 - i\beta A'^4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3, \quad A^4 = \frac{A'^4 + i\beta A'^1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$A_1 = \frac{A'_1 - i\beta A'_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3, \quad A_4 = \frac{A'_4 + i\beta A'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Преобразование антисимметричного тензора $A^{\mu\nu}$ (см. гл. 14, § 3). Из соотношений

$$A'^{\mu\nu} = a_{\rho}^{\mu'} a_{\sigma}^{\nu'} A^{\rho\sigma}, \quad A'_{\mu\nu} = a_{\mu}^{\rho} a_{\nu}^{\sigma} A_{\rho\sigma} \quad (6.79)$$

следует

$$A'^{pq} = \frac{1}{2} (a_r^{p'} a_s^{q'} - a_s^{p'} a_r^{q'}) A^{rs} - (a_0^{p'} a_r^{q'} - a_r^{p'} a_0^{q'}) A^{r0}, \quad (6.80a)$$

$$A'^{p0} = \frac{1}{2} (a_r^{p'} a_s^{0'} - a_s^{p'} a_r^{0'}) A^{rs} + (a_s^{p'} a_0^{0'} - a_0^{p'} a_r^{0'}) A^{r0}, \quad (6.80b)$$

так что, согласно (6.59a) и (6.60),

$$A'^{pq} = \alpha_m^p \alpha_n^q \left[A^{mn} - \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \beta^2) u_r (u^n A^{mr} + u^m A^{rn}) + A^{n0} u^m - A^{m0} u^n \right]. \quad (6.81a)$$

$$A'^{p0} = \alpha_m^p \left[A^{ms} u_s + A^{m0} u_0 + u^m u_r A^{r0} - \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \beta^2) u^m u_r u_0 A^{r0} \right]. \quad (6.81b)$$

Для ковариантных компонент имеем выражения

$$A'_{pq} = \frac{1}{2} (a_p^r a_q^s - a_p^s a_q^r) A_{rs} + (a_p^r a_q^0 - a_p^0 a_q^r) A_{r0}, \quad (6.81в)$$

$$A'_{p0} = \frac{1}{2} (a_p^r a_0^s - a_p^s a_0^r) A_{rs} + (a_p^r a_0^0 - a_p^0 a_0^r) A_{r0}, \quad (6.81г)$$

т. е., согласно (6.59б) и (6.60),

$$A'_{pq} = \sum_{rs} \alpha_r^p \alpha_s^q \left[A_{rs} - \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \beta^2) (A_{rn} u_s - A_{sn} u_r) u^n - (A_{r0} u_s - A_{s0} u_r) \right], \quad (6.82a)$$

$$A'_{p0} = \sum_r \alpha_r^p \left[u^s A_{rs} + u^0 A_{r0} + u^m u_r A_{m0} - \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \beta^2) u_r u^m u^0 A_{m0} \right]. \quad (6.82b)$$

Для преобразования *без поворота*, следовательно,

$$A'^{pq} = A^{pq} - \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \beta^2) u_r (u^q A^{pr} - u^p A^{qr}) + A^{q0} u^p - A^{p0} u^q, \quad (6.83a)$$

$$A'^{p0} = A^{ps} u_s + A^{p0} u_0 + \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \beta^2) u^p u_r A^{r0} \quad (6.83b)$$

и

$$A'_{pq} = A_{pq} - \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \beta^2) u^s (u_q A_{ps} - u_p A_{qs}) + (u_p A_{q0} - u_q A_{p0}), \quad (6.84a)$$

$$A'_{p0} = A_{pr} u^r + A_{p0} u^0 + \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \beta^2) u^r u_p A_{r0}. \quad (6.84b)$$

Для *специального преобразования*, для которого

$$u^1 = u = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad u^2 = u^3 = 0, \quad (6.85)$$

получим

$$\begin{aligned} A'^{1q} &= \frac{A^{1q} - \beta A^{0q}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & A'^{23} &= A^{23}, \\ A'^{0p} &= \frac{A^{0p} - \beta A^{1p}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & A'^{10} &= A^{10} \quad \text{для } p \neq 1 \end{aligned} \quad (6.86)$$

и

$$\begin{aligned} A'_{1q} &= \frac{A_{1q} + \beta A_{0q}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & A'_{23} &= A_{23}, \\ A'_{0p} &= \frac{A_{0p} + \beta A_{1p}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & A'_{01} &= A_{01}, \quad p \neq 1. \end{aligned} \quad (6.87)$$

§ 10. Сложение скоростей и общее преобразование Лоренца

Пусть имеются две галилеевы системы S и S' и движущаяся точка, скорость которой по отношению к S равна $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, а по отношению к S' равна $\mathbf{v}' = d\mathbf{x}'/dt'$. Во избежание недоразумений скорость системы S' по отношению к системе S будем здесь обозначать через \mathbf{w} . Положим

$$\beta = \frac{w}{c}. \quad (6.88)$$

Из

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \sum_p (dx^p)^2 = c^2 dt'^2 - \sum_p (dx'^p)^2 \quad (6.89)$$

следует

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{dt'}{dt}\right)^2 \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right), \quad (6.90)$$

где

$$v^p = \frac{dx^p}{dt}, \quad v'^p = \frac{dx'^p}{dt'}, \quad v^2 = \sum_p (v^p)^2, \quad v'^2 = \sum_p (v'^p)^2. \quad (6.91)$$

Таким образом,

$$\frac{dt'}{dt} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}, \quad (6.92)$$

С другой стороны, преобразование координат

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad x^{\mu} = a^{\mu}_{\nu'} x'^{\nu'} \quad (6.93)$$

запишется также в виде

$$x'^0 = a^0_p x^p + a^0_0 x^0, \quad x^0 = a^0_p x'^p + a^0_0 x'^0, \quad (6.94a)$$

$$x'^p = a^p_q x^q + a^p_0 x^0, \quad x^p = a^p_q x'^q + a^p_0 x'^0, \quad (6.94b)$$

так что

$$\frac{dx'^0}{dx^0} = \frac{dt'}{dt} = a_p^{0'} \frac{v^p}{c} + a_0^{0'}, \quad \frac{dx^0}{dx'^0} = \frac{dt}{dt'} = a_p^0 \frac{v'^p}{c} + a_0^0, \quad (6.95a)$$

$$\frac{dx'^p}{dx^0} = a_q^{p'} \frac{v^q}{c} + a_0^{p'}, \quad \frac{dx^p}{dx'^0} = a_q^p \frac{v'^q}{c} + a_0^p. \quad (6.95b)$$

Таким образом, из (6.92) и (6.95) получим

$$\frac{dt'}{dt} = a_p^{0'} \frac{v^p}{c} + a_0^{0'} = \frac{1}{a_p^0 \frac{v'^p}{c} + a_0^0} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}. \quad (6.96)$$

Из (6.95b), с другой стороны, следует

$$\begin{aligned} \frac{v'^p}{c} \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} &= a_q^{p'} \frac{v^q}{c} + a_0^{p'}, \\ \frac{v^p}{c} \sqrt{\frac{1 - \frac{v'^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} &= a_q^p \frac{v'^q}{c} + a_0^p. \end{aligned} \quad (6.97)$$

§ 11. Применение. Случай, когда одна из систем является собственной

Предположим (случай 1), что S' является собственной системой, связанной с материальной точкой. В этом случае

$$\mathbf{v}'_{(1)} = 0, \quad \mathbf{v}_{(1)} = \mathbf{w}, \quad (6.98)$$

где \mathbf{w} — скорость системы S' по отношению к системе S .

Из (6.96) непосредственно получим

$$a_0^{0'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad a_p^{0'} \frac{v_{(1)}^p}{c} = -\frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.99)$$

или

$$a_p^{0'} = \frac{-v_{(1)}^p}{c \sqrt{1 - \beta^2}} = -u^p \quad (6.100)$$

и, согласно (6.97),

$$\frac{v_{(1)}^p}{c \sqrt{1 - \beta^2}} = a_0^p, \quad (6.101)$$

$$a_q^{p'} \frac{v_{(1)}^q}{c} = -a_0^p. \quad (6.102)$$

Теперь предположим (случай 2), что собственной системой материальной точки является система S , т. е. что

$$\mathbf{v}_{(2)} = 0, \quad \mathbf{v}'_{(2)} = \boldsymbol{\omega}' = -D^{-1}\boldsymbol{\omega} = -D^{-1}\mathbf{v}_{(1)} = -D^{-1}\mathbf{v}, \quad (6.103)$$

где $\boldsymbol{\omega}'$ — скорость системы S по отношению к системе S' .

С помощью (6.96) получим

$$a_0^{0'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$a_{p'}^0 = -\frac{v'_{(2)}{}^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{D^{-1}v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\alpha_q^p v^q}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \alpha_q^p u^q \quad (6.104)$$

или с учетом (6.97)

$$a_0^{p'} = \frac{v'_{(2)}{}^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} = u'_{(2)}{}^p = -D^{-1}u^p = -\alpha_q^p u^q \quad (6.105)$$

и

$$a_{q'}^p \frac{v'^q}{c} = -a_0^{p'}. \quad (6.106)$$

Подставляя в (6.102) значения $a_0^{p'}$, определяемые из (6.105), а в (6.106) значения $a_0^{p'}$, определяемые из (6.101), находим

$$a_{q'}^{p'} \frac{v^q}{c} = \alpha_q^p u^q, \quad (6.107)$$

$$a_{q'}^p \frac{v'^q}{c} = -u^p. \quad (6.108)$$

Эти уравнения допускают следующие решения для $a_{q'}^{p'}$ и $a_{q'}^p$:

$$a_{q'}^{p'} = \alpha_q^p + \frac{\alpha}{v^2} \alpha_r^p v^r v^q, \quad (6.109)$$

$$a_{q'}^p = \alpha_p^q + \frac{\alpha}{v^2} \alpha_r^q v^r v^p. \quad (6.110)$$

В самом деле, подставляя (6.109) в (6.107), получаем

$$a_{q'}^{p'} \frac{v^q}{c} = \alpha_q^p \frac{v^q}{c} + \frac{\alpha}{v^2} \alpha_r^p v^r \left(\frac{v^2}{c}\right) = (1+\alpha) \alpha_q^p \frac{v^q}{c} = \frac{\alpha_q^p v^q}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \alpha_q^p u^q, \quad (6.111)$$

а подстановка (6.110) в (6.108) дает

$$\begin{aligned} a_{q'}^p \frac{v'^q}{c} &= \sum_q \left(\alpha_p^q \frac{v'^q}{c} + \frac{\alpha}{v^2} \alpha_r^q v^p v^r \frac{v'^q}{c} \right) = \\ &= D^{-1} \frac{v'^p}{c} + \sum_r \frac{\alpha}{v^2} (D^{-1} v'^r) v^p \frac{v^r}{c} = \\ &= -\frac{v^p}{c} - \frac{\alpha}{v^2} v^p \left(\frac{v^2}{c}\right) = -\frac{v^p}{c} (1+\alpha) = \frac{v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} = -u^p, \end{aligned} \quad (6.112)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1. \quad (5.75)$$

Таким образом, соотношения (6.107) и (6.108) оказываются выполненными.

Наконец, значения коэффициентов общего преобразования Лоренца определяются, согласно (6.57) и (6.59). Таким образом, они получаются с помощью результатов из гл. 5, т. е. путем обобщения специального преобразования Лоренца (метод Мёллера). Здесь [см. (6.109) и (6.110)] они находятся путем применения формул преобразования к частному случаю, когда система S (или S') совпадает с собственной системой отсчета. Общие формулы сложения скоростей с необходимостью приводят к соотношениям, связанным с общим преобразованием Лоренца.

ГЛАВА 7

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

А. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

В дальнейшем мы все время будем использовать действительные координаты

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^0 = ct \quad (7.1)$$

и будем применять в несобственном евклидовом четырехмерном пространстве прямолинейные оси, характеризуемые четырьмя единичными векторами e_μ (e_1, e_2, e_3, e_0), ортонормированными с помощью условий

$$g_{\mu\nu} = (e_\mu \cdot e_\nu) = \eta_{\mu\nu}, \quad (7.2)$$

где

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

При этих условиях четырехмерный элементарный интервал сводится к виду

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (dx^0)^2 - \sum_p (dx^p)^2. \quad (7.4)$$

§ 1. Четырехмерный вектор скорости

Компоненты скорости материальной точки

$$v^p = \frac{dx^p}{dt} \quad (7.5)$$

не преобразуются как пространственные составляющие вектора, так как dt не является инвариантом. Вместо (7.5) вводится четырехмерный вектор с компонентами

$$\boxed{\bar{u}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (\mu = 1, 2, 3, 0),} \quad (7.6)$$

где $d\tau$ является инвариантным дифференциалом собственного времени. Аналогично определяется четырехмерный вектор с компонентами

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\bar{u}^\mu}{c}, \quad (7.7)$$

где принято во внимание, что, согласно (5.58),

$$ds^2 = c^2 d\tau^2. \quad (7.8)$$

Пользуясь тем, что

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \sum_p (dx^p)^2 = c^2 dt^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \sum_p \left(\frac{dx^p}{dt} \right)^2 \right] = c^2 dt^2 (1 - \beta^2), \quad (7.9)$$

плучаем

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7.10)$$

Подставляя это выражение в (7.7), будем иметь

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (7.11)$$

Таким образом, компоненты четырехмерной скорости u^p и u^0 выражаются через v^p следующим образом:

$$u^p = \frac{v^p}{c\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (7.12a)$$

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7.12b)$$

Они подчинены условию нормировки

$$u_\mu u^\mu = (u^0)^2 - \sum_p (u^p)^2 = \frac{1 - \sum_p (v^p/c)^2}{1 - \beta^2} = 1. \quad (7.13)$$

§ 2. Изменение скоростей при преобразовании Лоренца

Рассмотрим частицу, которая по отношению к галилеевой системе отсчета S движется прямолинейно и равномерно со скоростью \mathbf{v} . Четырехмерная скорость частицы $u^\mu = dx^\mu/ds$ выражается через $v^p = dx^p/dt$ при помощи (7.12). Если перейти от системы S к галилеевой системе отсчета S' , движущейся по отношению к S

со скоростью $\boldsymbol{\omega}$ ($\beta = \omega/c$), то u^μ будут преобразовываться как компоненты четырехмерного вектора:

$$u'^{\mu} = a_{\nu}^{\mu'} u^{\nu} = a_q^{\mu'} u^q + a_0^{\mu'} u^0 \quad \left(\begin{array}{l} \mu, \nu = 1, 2, 3, 0 \\ p, q = 1, 2, 3 \end{array} \right) \quad (7.14)$$

и обратно

$$u^{\mu} = a_{\nu}^{\mu} u'^{\nu} = a_q^{\mu} u'^q + a_0^{\mu} u'^0. \quad (7.15)$$

Поэтому с учетом (7.12) для $\mu = p = 1, 2, 3$, а затем для $\mu = 0$ получим

$$\frac{v'^p}{c \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = a_q^{p'} \frac{v^q}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + a_0^{p'} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7.16a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = a_q^{0'} \frac{v^q}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + a_0^{0'} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.16b)$$

С помощью (7.15) определяются обратные преобразования:

$$\frac{v^p}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = a_q^{p'} \frac{v'^q}{c \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} + a_0^{p'} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}, \quad (7.17a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = a_q^{0'} \frac{v'^q}{c \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} + a_0^{0'} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}. \quad (7.17b)$$

Из формул преобразований (7.16b) и (7.17b) непосредственно следует, что ¹⁾

$$a_q^{0'} \frac{v^q}{c} + a_0^{0'} = \frac{1}{a_q^{0'} \frac{v'^q}{c} + a_0^{0'}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}. \quad (7.18)$$

¹⁾ Это соотношение было получено в предыдущей главе в результате дифференцирования формулы Лоренца:

$$\frac{dt'}{dt} = a_p^{0'} \frac{v^p}{c} + a_0^{0'} = \frac{1}{a_p^{0'} \frac{v'^p}{c} + a_0^{0'}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}.$$

Подставляя это выражение в (7.16) и (7.17), получаем

$$\frac{v'^p}{c} = \frac{a_q^{p'} \frac{v^q}{c} + a_0^p}{a_r^{0'} \frac{v^r}{c} + a_0^{0'}} \quad (7.19)$$

и

$$\frac{v^p}{c} = \frac{a_q^p \frac{v'^q}{c} + a_0^p}{a_r^0 \frac{v'^r}{c} + a_0^0}. \quad (7.20)$$

§ 3. Преобразование Лоренца и общая формула сложения скоростей

В результате применения преобразования Лоренца к четырехмерному вектору u^μ мы нашли

$$v' = \varphi(v, a_\mu^{v'}), \quad (7.21)$$

$$v = \varphi(v', a_\mu^v). \quad (7.22)$$

Входящие в (7.21) и (7.22) коэффициенты $a_\mu^{v'}$ и a_μ^v определяют переход от системы S' к S и обратно. В том частном случае, когда одна из систем S и S' совпадает с собственной системой частицы S_0 , эти коэффициенты определяют также переход от системы S' к S_0 или от системы S к S_0 . В этом частном случае имеем:

$$\text{если } S' \equiv S_0, \text{ то } v'_{(1)} = 0, \quad v_{(1)} = w,$$

$$\text{если } S \equiv S_0, \text{ то } v_{(2)} = 0, \quad v'_{(2)} = w' = -D^{-1}w.$$

Рассматривая соотношения (7.21) и (7.22) для соответствующего частного случая, можно определить зависимость коэффициентов $a_\mu^{v'}$ и a_μ^v от относительной скорости двух систем отсчета w . Это было сделано в гл. 6. При этом

$$a_\mu^{v'} = f_{(S' \equiv S_0)}(v_{(1)}, v'_{(1)}) = f'_0(v = w, v'_{(1)} = 0), \quad (7.23)$$

$$a_\mu^v = f_{(S \equiv S_0)}(v_{(2)}, v'_2) = f_0(v'_2 = -D^{-1}w, v_2 = 0), \quad (7.24)$$

где значения коэффициентов общего преобразования Лоренца определяются формулами (6.101)–(6.110).

Подставляя (7.21) в (7.22), получаем

$$v' = \varphi(v, f'_0(w)), \quad (7.25)$$

$$v = \varphi(v', f_0(-D^{-1}w)). \quad (7.26)$$

Фактически проводя эту операцию, т. е. подставляя в (7.19) и (7.20) значения коэффициентов преобразования (6.59) и (6.60) ¹⁾, получаем

$$\frac{v'^p}{c} = \frac{\alpha_r^p \gamma_q^r \frac{v^q}{c} - \alpha_r^p u^r}{-\sum_m u^m \frac{v^m}{c} + u^0}, \quad (7.27)$$

$$\frac{v^p}{c} = \frac{\sum_q \alpha_r^q \gamma_p^r \frac{v'^q}{c} + u^p}{\sum_m \alpha_s^m u^s \frac{v'^m}{c} + u^0}, \quad (7.28)$$

где ²⁾

$$\begin{aligned} \gamma_p^r &= \delta_p^r + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2} (1 - \sqrt{1-\beta^2}) u^r u^p = \\ &= \delta_p^r + \frac{(1 - \sqrt{1-\beta^2}) w^r w^p}{v'^2 \sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

В случае, когда имеет место преобразование Лоренца без поворота, в (7.28) и (7.27) для коэффициентов преобразования мы должны будем подставлять значения (6.62) и (6.63). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{v'^p}{c} &= \frac{\left(\gamma_q^p \frac{v^q}{c} - u^p\right) \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \sum_m \frac{v^m w^m}{c^2}} = \\ &= \frac{\frac{v^p}{c} \sqrt{1-\beta^2} + \frac{w^p}{c} \left[\sum_q \frac{w^q v^q}{w^2} (1 - \sqrt{1-\beta^2}) - 1 \right]}{1 - \sum_m \frac{v^m w^m}{c^2}} \end{aligned} \quad (7.30)$$

¹⁾ Во всех формулах, относящихся к сложению скоростей, скорость системы отсчета S' по отношению к S мы всегда будем обозначать через w ($\beta = w/c$), с тем, чтобы не смешивать ее с величинами v и v' , обозначающими значения скорости материальной точки в системах S и S' .

²⁾ Напомним, что

$$u^p = \frac{w^p}{c \sqrt{1-\beta^2}}, \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{w}{c}\right).$$

и

$$\begin{aligned} \frac{v^p}{c} &= \frac{\left(\sum_q \gamma_p^q \frac{v'^q}{c} + u^p \right) \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \sum_m \frac{v'^m w^m}{c^2}} = \\ &= \frac{\frac{v'^p}{c} \sqrt{1-\beta^2} + \frac{w^p}{c} \left[\sum_q \frac{w^q v'^q}{w^2} (1 - \sqrt{1-\beta^2}) + 1 \right]}{1 + \sum_m \frac{v'^m w^m}{c^2}}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

В векторных обозначениях выражения (7.30) и (7.31) переписутся в виде

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} \sqrt{1-\beta^2} + \boldsymbol{\omega} \left[\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}}{w^2} \right) (1 - \sqrt{1-\beta^2}) - 1 \right]}{1 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega})}{c^2}} \quad (7.32)$$

и

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}' \sqrt{1-\beta^2} + \boldsymbol{\omega} \left[\left(\frac{\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\omega}}{w^2} \right) (1 - \sqrt{1-\beta^2}) + 1 \right]}{1 + \frac{(\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\omega})}{c^2}}. \quad (7.33)$$

Наконец, в том еще более частном случае, когда оси обеих систем отсчета параллельны между собой и относительная скорость этих систем направлена вдоль одной из этих осей (Ox), в выражениях (7.19) и (7.20) следует подставить значения $a_{\mu}^{v'}$ и a_{μ}^v , соответствующие специальному преобразованию. Тогда с учетом (6.66) получим ($\beta = w/c$)

$$v'_x = \frac{v_x - w}{1 - \frac{\beta}{c} v_x}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c} v_x}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c} v_x}, \quad (7.34)$$

и наоборот

$$v_x = \frac{v'_x + w}{1 + \frac{\beta}{c} v'_x}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\beta}{c} v'_x}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\beta}{c} v'_x}. \quad (7.35)$$

Эти формулы непосредственно получаются из (7.32) и (7.33), если положить

$$|\boldsymbol{\omega}| = w_x, \quad w_y = w_z = 0, \quad (7.36)$$

В случае специального преобразования Лоренца формулы сложения скоростей непосредственно получаются из самих формул преобразования. Из

$$x' = \frac{x - wt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{w}{c}\right)$$

получим

$$dt' = \frac{dt - \frac{\beta}{c} dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{\beta}{c} v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

и

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \left(\frac{v_x - w}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right) \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c} v_x},$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dt'} = v_y \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c} v_x},$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{v_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c} v_x}.$$

§ 4. Величина и направление вектора скорости

Будем исходить из выражений (6.59а) и (6.59б), определяющих коэффициенты преобразования $a_q^{0'}$, $a_{q'}^0$, $a_0^{0'}$ и a_0^0 . Подставляя их в (7.18), получаем

$$-\sum_q \frac{u^q v^q}{c} + u^0 = \frac{1}{\sum_q \alpha_q^q u^q \frac{v'^q}{c} + u^0} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}. \quad (7.37)$$

Ограничимся случаем преобразования Лоренца без поворота. Тогда (7.37) запишется в виде

$$\frac{1 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w})}{c^2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}. \quad (7.38)$$

Возводя в квадрат и перемножая два первых члена в (7.38), получаем

$$\frac{1 + \frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w})}{c^2}}{1 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c^2}} = \frac{1 - \frac{v'^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1 - \beta^2}{\left(1 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(1 + \frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w})}{c^2}\right)^2}{1 - \beta^2}. \quad (7.39)$$

Отсюда имеем

$$v^2 = c^2 \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)(1 - \beta^2)}{\left(1 + \frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w})}{c^2}\right)^2} \right] \quad (7.40a)$$

и обратно

$$v'^2 = c^2 \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(1 - \beta^2)}{\left(1 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c^2}\right)^2} \right]. \quad (7.40b)$$

Эти выражения, разумеется, получаются также из (7.32) и (7.33).

Обозначим угол между направлением скорости \mathbf{v} и осью Ox через θ , а угол между направлением скорости \mathbf{v}' и осью Ox' через θ' . Ограничимся специальным преобразованием Лоренца и предположим, что скорость \mathbf{w} параллельна осям Ox и Ox' . Тогда

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\sqrt{v_y'^2 + v_z'^2}}{v_x'} \quad (7.41)$$

и

$$\sin \theta' = \frac{\sqrt{v_y'^2 + v_z'^2}}{v'}, \quad \cos \theta' = \frac{v_x'}{v'}, \quad (7.42)$$

а также

$$v^2 = \frac{v'^2 + w^2 + 2v'w \cos \theta' - \left(\frac{v'w}{c} \sin \theta'\right)^2}{\left(1 + \frac{v'w}{c^2} \cos \theta'\right)^2} \quad (7.43)$$

и

$$v'^2 = \frac{v^2 + w^2 + 2vw \cos \theta - \left(\frac{vw}{c} \sin \theta\right)^2}{\left(1 - \frac{vw}{c^2} \cos \theta\right)^2}. \quad (7.44)$$

Ограничимся случаем специального преобразования Лоренца и выберем координатные оси таким образом, чтобы скорость \mathbf{v}' лежала в плоскости xOy ($v_z' = 0$). Согласно (7.35), $v_z = 0$ и \mathbf{v} также лежит в плоскости xOy .

Если через θ и θ' обозначить углы в этой плоскости, образуемые скоростями \mathbf{v}' и \mathbf{v} с осью Ox , то в результате сравнения соотношений (7.41) и (7.42) с формулами преобразования (7.34)

получим

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{v_x - w} = \frac{v \sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta}{v \cos \theta - w}, \quad (7.45)$$

$$v' \sin \theta' = v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c} v_x}, \quad v' \cos \theta' = \frac{v_x - w}{1 - \frac{\beta}{c} v_x}. \quad (7.46)$$

Из (7.45) следует

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta}{\cos \theta - \frac{w}{v}}, \quad (7.47)$$

а из (7.47)

$$\sin \theta' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta}{\left(1 + \frac{w^2}{v^2} - \frac{2w}{v} \cos \theta - \beta^2 \sin^2 \theta\right)^{1/2}}, \quad (7.48)$$

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{w}{v}}{\left(1 + \frac{w^2}{v^2} - \frac{2w}{v} \cos \theta - \beta^2 \sin^2 \theta\right)^{1/2}}.$$

Возводя затем обе части каждой из формул (7.46) в квадрат и складывая, непосредственно получаем

$$v'^2 = \frac{v_y^2 (1 - \beta^2) + (v_x - w)^2}{\left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)^2}, \quad (7.49)$$

т. е.

$$v' = v \frac{\left[1 + \frac{w^2}{v^2} - \frac{2w}{v} \cos \theta - \beta^2 \sin^2 \theta\right]^{1/2}}{1 - \frac{\beta v}{c} \cos \theta}. \quad (7.50)$$

Формулу (7.50) можно также переписать в виде

$$v' = v \frac{\left[\left(\frac{\beta c}{v} - \cos \theta\right)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta\right]^{1/2}}{1 - \frac{\beta v}{c} \cos \theta}. \quad (7.51)$$

Скорость v можно в свою очередь выразить через v' и θ' :

$$v = v' \frac{\left[1 + \frac{w^2}{v'^2} + \frac{2w}{v'} \cos \theta' - \beta^2 \sin^2 \theta'\right]^{1/2}}{1 + \frac{\beta v'}{c} \cos \theta'}. \quad (7.52)$$

§ 5. Предельная скорость

Из закона сложения скоростей непосредственно следует утверждение о существовании предельной скорости c .

Если сложить две скорости, каждая из которых меньше c , то результирующая скорость также будет меньше c . В самом деле, если $v' < c$ и $w < c$, то, согласно (7.40), всегда $v < c$.

Если сложить две скорости, из которых по крайней мере одна равна c , то и результирующая скорость будет также равна c . В самом деле, если имеет место одно из равенств $v' = c$, $w = c$ или $v' = w = c$, то результирующая скорость, согласно (7.40), будет равна c .

Разумеется, понятие о предельной скорости имеет смысл лишь постольку, поскольку справедливы преобразования Лоренца, т. е. лишь в том случае, когда „скорость“ определяется в обычном смысле и считаются справедливыми основные положения специальной теории относительности.

Во-первых, это понятие применимо в случае равномерного движения материальных тел или, более обще, равномерного распространения различных видов энергии. Но оно, например, не относится к фазовой скорости электромагнитных волн, которая может превышать c ¹⁾. Напротив, групповая скорость, соответствующая переносу энергии, всегда меньше c (см. § 10 настоящей главы, а также работы Зоммерфельда [99—101] и Бриллюэна [102, 103]).

Во-вторых, оно предполагает, что можно эффективно определять галилеевы системы отсчета. Поэтому понятие о предельной скорости не может возникать при описании движения одной галактики по отношению к системе отсчета, связанной с другой галактикой. При таком описании возникают значительные трудности в определении даже понятия о „расстоянии“ (см. книгу Мак-Витти [104]) и об абсолютных космических промежутках времени. Относительные скорости двух галактик пропорциональны расстоянию между ними (закон Хаббла) и в соответствии с принимаемым определением могут превышать c .

Если же ограничиваться основными положениями и определениями специальной теории относительности, то здесь скорость *всегда* является четырехмерным времени-подобным вектором и c с необходимостью является ее предельным значением.

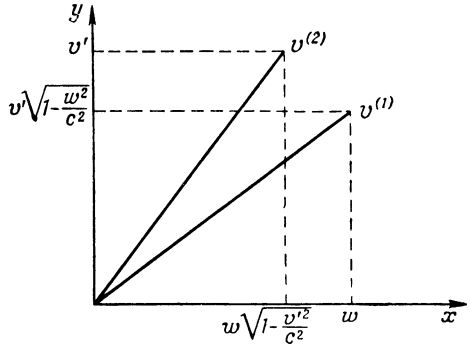
¹⁾ Фазовую скорость u , входящую, например, в уравнение $(1/u^2) \times \times (\partial^2 \varphi / \partial t^2) = (\partial^2 \varphi / \partial x^2)$, определяют как величину, *аналогичную скорости*. Но определение (7.5) для нее, очевидно, не справедливо.

§ 6. Отсутствие симметрии между „относительной“ скоростью и скоростью увлечения

Если поменять местами относительную скорость \mathbf{v}' и скорость увлечения \mathbf{w} , не меняя при этом их величину и направление, то направление результирующей скорости \mathbf{v} изменится.

Чтобы показать это, для простоты предположим, что скорость \mathbf{v}' параллельна оси Oy ($v'_y = |\mathbf{v}'|$, $v'_x = v'_z = 0$). Если скорость \mathbf{w} направлена вдоль оси Ox , то из формул (7.35) имеем

$$v_x^{(1)} = w, \quad v_y^{(1)} = v' \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}. \quad (7.53)$$



Фиг. 29. Отсутствие симметрии в понятиях „относительной“ скорости и скорости увлечения.

Если теперь скорость \mathbf{v}' (все время направленная вдоль оси Oy) будет скоростью движения трехгранника S' по отношению к трехграннику S , а скорость \mathbf{w} (все время направленная вдоль оси Ox) — относительной скоростью движущегося тела в системе S' , то в формулах (7.53) нужно будет поменять местами v' и w , а также Ox и Oy . В результате получим

$$v_x^{(2)} = w, \quad v_y^{(2)} = v' \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}. \quad (7.54)$$

Таким образом, если складываемые скорости не параллельны, то абсолютная величина результирующей скорости

$$v^2 = v'^2 + w^2 - \frac{v'^2 w^2}{c^2} \quad (7.55)$$

не изменяется, но направление этой скорости меняется.

§ 7. Частный случай: сложение параллельных скоростей

Формулы (7.35) упрощаются в том случае, когда относительная скорость \mathbf{v}' , соответствующая движению по отношению к S' , параллельна скорости увлечения. В самом деле, при этом

$$v'_y = v'_z = 0, \quad v'_x = v' \quad (7.56)$$

и (7.35) переписывается в виде

$$v = \frac{v' + w}{1 + \frac{v'w}{c^2}}. \quad (7.57)$$

Если, как и в (5.66), положить

$$\operatorname{tg} \psi = i \frac{v}{c}, \quad \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{iw}{c}, \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{iv'}{c}, \quad (7.58)$$

то из (7.57) имеем

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \psi_1 + \operatorname{tg} \psi_2}{1 - \operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \psi_2} = \operatorname{tg}(\psi_1 + \psi_2). \quad (7.59)$$

Предположим, что $\beta = w/c$ и $\beta' = v'/c$ малы по сравнению с единицей. Тогда в результате сложения параллельных скоростей v' и w приближенно получим

$$v \approx (w + v')(1 - \beta\beta'). \quad (7.60)$$

Эта скорость отличается от классического выражения на член $\beta\beta'(w + v')$.

В частности, если $v' = c/n$ (где $n > 1$), то, согласно (7.60), получаем, пренебрегая членами порядка $1/c^2$, следующее выражение:

$$v \approx \left(w + \frac{c}{n}\right) \left(1 - \frac{w}{nc}\right) \approx \frac{c}{n} + w \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \quad (7.61)$$

Это формула Физо, которую мы здесь получили путем применения закона сложения скоростей к фотонам, движущимся со скоростью c/n , где n — показатель преломления среды.

Б. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

§ 8. Распространение плоской волны в преломляющих средах, одна из которых движется по отношению к другой с постоянной скоростью

Предположим, что плоская волна распространяется в среде с показателем преломления n , и обозначим через xOy плоскость, перпендикулярную к различным волновым плоскостям. Пусть скорости волнового фронта, т. е. фазовые скорости¹⁾ по отношению

¹⁾ Как и в гл. 3, фазовые скорости обозначаются через u и u' . Фазовую скорость u легко отличить от четырехмерной скорости u , которая фактически входит только через посредство своих компонент $u^\mu = dx^\mu/ds$.

к двум галилеевым системам отсчета S и S' , совпадающим в момент $t=0$, равны u и u' . Обозначим относительную скорость двух этих систем через w , причем будем считать, что эта скорость направлена вдоль Ox .

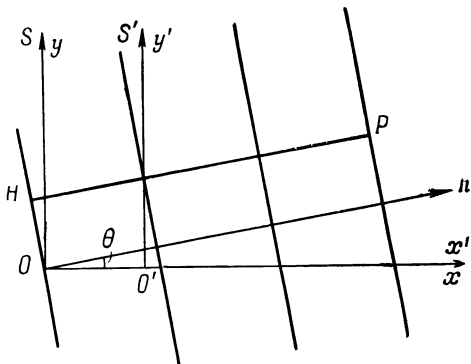
Рассмотрим волновой фронт, в момент $t=0$ проходящий через начальную точку O (фиг. 30). Точки P он достигает через промежутки времени

$$t_0 = \frac{PH}{u} = \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{u}, \quad (7.62)$$

который мы вычисляем в системе S .

Таким образом, число волн, которые к моменту времени t достигнут наблюдателя, расположенного в точке P , равно

$$\begin{aligned} \nu(t - t_0) &= \\ &= \nu \left(t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{u} \right). \end{aligned} \quad (7.63)$$



Фиг. 30. Распространение плоской волны в двух галилеевых системах отсчета S и S' .

Это число не может зависеть от галилеевой системы отсчета, в которой оно определяется. Если исходить из системы отсчета S' , то координаты точки P будут равны x' , y' , время t заменится на t' , но число волн будет таким же, как прежде:

$$\nu(t' - t'_0) = \nu(t - t_0). \quad (7.64)$$

Следовательно,

$$\nu \left(t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{u} \right) = \nu \left(t' - \frac{x' \cos \theta' + y' \sin \theta'}{u'} \right). \quad (7.65)$$

Подставляя в (7.65) значения, определяемые с помощью формул Лоренца

$$x = \frac{x' + wt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad t = \frac{t' + \frac{\beta}{c} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{w}{c} \right), \quad (7.66)$$

получаем выражение, в котором коэффициенты при x' , y' , t' тождественно обращаются в нуль. Это следует из того, что равенство чисел волн, очевидно, не зависит ни от выбранной

точки P , ни от рассматриваемого момента времени t . Таким образом,

$$\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{wv \cos \theta}{u \sqrt{1-\beta^2}} = v', \quad (7.67)$$

$$\frac{\beta v}{c \sqrt{1-\beta^2}} - \frac{v \cos \theta}{u \sqrt{1-\beta^2}} = - \frac{v' \cos \theta'}{u'}, \quad (7.68)$$

$$\frac{v \sin \theta}{u} = \frac{v' \sin \theta'}{u'}. \quad (7.69)$$

Отсюда, во-первых, следует, что

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2} \sin \theta}{\cos \theta - \frac{\beta u}{c}}, \quad (7.70)$$

т. е.

$$\sin \theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2} \sin \theta}{\sqrt{\left(\frac{\beta u}{c} - \cos \theta\right)^2 + (1-\beta^2) \sin^2 \theta}}, \quad (7.71)$$

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - (\beta u/c)}{\sqrt{\left(\frac{\beta u}{c} - \cos \theta\right)^2 + (1-\beta^2) \sin^2 \theta}} \quad (7.72)$$

и, во-вторых, что

$$u' = \frac{u - \beta c \cos \theta}{\sqrt{\left(\frac{\beta u}{c} - \cos \theta\right)^2 + (1-\beta^2) \sin^2 \theta}}. \quad (7.73)$$

В гл. 10 мы увидим, что эти соотношения характеризуют релятивистский эффект Допплера и явления аберрации.

Интересно отметить, что если положить

$$\frac{u}{c^2} = \frac{1}{v}, \quad (7.74)$$

то соотношения (7.70) и (7.73) будут совпадать с формулами (7.47) и (7.51) сложения скоростей для частицы.

Таким образом, преобразование фазовой скорости u плоской волны выводится из преобразования скорости $v = c^2/u$, которой обладает сопоставленная волне частица¹⁾. В частном случае, когда

¹⁾ Это свойство дает возможность релятивистским образом охарактеризовать соответствие между волной и частицей.

Каждой частице, имеющей постоянную скорость v , сопоставляется плоская волна, фазовая скорость которой равна $u = c^2/v$ и, следовательно, длина волны

$$\lambda = \frac{u}{v} = \frac{c^2}{v} \frac{h}{W} = \frac{h}{mv},$$

где мы в соответствии с де-Бройлем (см., например, [105]) полагаем, что энергия частицы равна $W = h\nu = mc^2$ (см. гл. 8).

$v = c$, фазовая скорость u волны равна

$$u = \frac{c^2}{v} = c, \quad (7.75)$$

т. е. имеет такую же величину, как и скорость частицы, которой эта волна соответствует.

§ 9. Принцип Гюйгенса и специальная теория относительности ¹⁾

Теперь предположим, что из центра O' , совпадающего с началом галилеевой системы отсчета S' , выходит сферическая волна и что она распространяется в среде с показателем преломления n , покоящейся по отношению к S' . В этой среде, а значит и в системе S' , скорость распространения световой волны V' равна фазовой скорости:

$$V' = u' = \frac{c}{n}. \quad (7.76)$$

В системе S' световая волна в момент времени t' совпадает со сферой радиуса $r' = u't'$:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - u'^2 t'^2 = 0. \quad (7.77)$$

Рассмотрим теперь систему отсчета S , которая в начальный момент совпадает с S' и которая движется по отношению к S' с постоянной скоростью w . Направим ось Ox' вдоль вектора w . Если в системе S' точка имеет координаты (x', y', z', t') , то ее координаты (x, y, z, t) в системе S можно получить из (x', y', z', t') при помощи преобразований (7.66). В момент t волновая поверхность определится из уравнения

$$\frac{(x - at)^2}{b} + y^2 + z^2 - bu'^2 t^2 = 0, \quad (7.78)$$

в котором

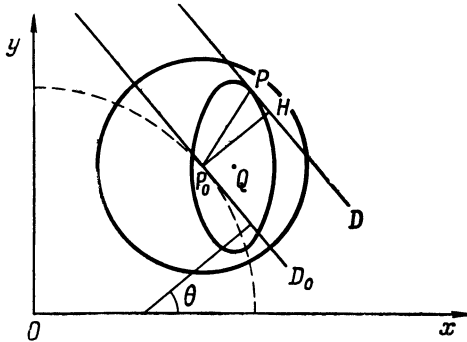
$$a = w \frac{1 - \frac{u'^2}{c^2}}{1 - \frac{\beta^2 u'^2}{c^2}}, \quad b = \frac{1 - \beta^2}{1 - \frac{\beta^2 u'^2}{c^2}} \quad \left(\beta = \frac{w}{c} \right). \quad (7.79)$$

Уравнение (7.78) получается из (7.77) с помощью преобразований (7.66). Если выполняется условие $n > 1$, т. е. если $u' < c$, то уравнение (7.78) будет уравнением эллипсоида, так как из (7.79) следует, что для данного случая всегда

$$0 < a < c, \quad 0 < b < 1. \quad (7.80)$$

¹⁾ Здесь мы пользуемся методом и в значительной степени обозначениями Мёллера (см. [92]).

Исследуем теперь распространение вторичной волны, в момент времени t'_0 вышедшей из точки $P'_0(x'_0, y'_0, 0)$, которая находится на волновой поверхности. В системе S в момент времени $t'_0 + \Delta t'$ эта вторичная волна будет иметь форму небольшой сферы (см.



Фиг. 31. Распространение сферической волны в двух галилеевых системах отсчета.

фиг. 31), которая пересекается с плоскостью xOy по окружности, характеризуемой уравнением

$$(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 - u'^2 \Delta t'^2 = 0. \quad (7.81)$$

Центр окружности совпадает с начальной точкой (x'_0, y'_0) , в которой происходит элементарное возбуждение.

В системе S вторичная волна, выходящая из той же самой точки $P_0(x_0, y_0)$, будет пересекаться с плоскостью xOy по эллипсу, который, согласно (7.78), характеризуется уравнением

$$f(x, y) \equiv \frac{(x - x_0 - a \Delta t)^2}{b} + (y - y_0)^2 - bu'^2 \Delta t^2 = 0. \quad (7.82)$$

Таким образом величины полуосей эллипса будут соответственно равны: $bu' \Delta t$ — для малой оси, параллельной Ox , и $\sqrt{b} u' \Delta t$ — для большой оси, параллельной Oy . Следовательно, в направлении движения вторичные волны будут сплющиваться. С другой стороны, их центр $Q(x_0 + a \Delta t, y_0)$ не будет совпадать с точкой P_0 , в которой они возникли и которая в системе S' является центром вторичных сферических волн. Центр вторичных сферических волн Q распространяется вдоль направления движения со скоростью a .

Теперь будем предполагать, что плоская волна распространяется перпендикулярно к плоскости xOy . В системе S пересечение плоскости xOy с волновым фронтом, проходящим через начало вторичных волн P_0 , даст прямую D_0 , перпендикуляр к которой образует с осью Ox угол θ .

Уравнение этой прямой в системе S имеет вид

$$x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta = \text{const.} \quad (7.83)$$

Если же угол, образуемый перпендикуляром к D_0 с осью $Ox = Ox'$, определять в системе S' , то он будет равен уже не θ , а θ' . Действительно, из соотношения, обратного к (7.70), следует, что

$$\text{tg } \theta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta'}{\cos \theta' + \frac{\beta u'}{c}}. \quad (7.84)$$

Допустим, что в момент t прямая D_0 проходит через точку $P_0(x_0, y_0)$, из которой выходят вторичные волны. Согласно принципу Гюйгенса, примененному к системе S' , прямая D' , полученная из D_0 путем смещения на $u' \Delta t'$ (где u' — фазовая скорость в системе S'), является огибающей семейства окружностей [см. (7.81)].

Если принцип Гюйгенса совместим с требованиями теории относительности, то прямая D , получаемая из прямой D_0 при помощи смещения на $u \Delta t$ (где u — фазовая скорость в системе S), должна также являться и огибающей семейства эллипсов E , определяемых согласно (7.82).

Пусть P — точка, в которой эллипс E касается своей огибающей D . Тогда расстояние P_0P по определению является произведением Δt на скорость распространения плоской волны V :

$$P_0P = V \Delta t, \quad (7.85)$$

т. е.

$$x - x_0 = V_x \Delta t, \quad y - y_0 = V_y \Delta t, \quad (7.86)$$

где x и y являются координатами точки P в системе S .

С другой стороны, огибающая семейства эллипсов легко получается из (7.82) и (7.83) путем варьирования параметров x_0 и y_0 . Действительно, эта огибающая подчиняется уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \sin \theta - \frac{\partial f}{\partial y_0} \cos \theta = 0, \quad (7.87)$$

где $\partial f / \partial x_0$ и $\partial f / \partial y_0$ определяются из (7.82). Отсюда следует, что

$$(x - x_0 - a \Delta t) \sin \theta - b (y - y_0) \cos \theta = 0. \quad (7.88)$$

Уравнения (7.82), (7.83) и (7.88) определяют параметрическое представление семейства эллипсов E . Исключая из них параметры x_0, y_0 , получаем следующее уравнение для огибающей:

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \text{const} + [a + u' \sqrt{b^2 + b^2 \text{tg}^2 \theta}] \Delta t \cos \theta. \quad (7.89)$$

Таким образом, согласно (7.89), расстояние P_0H между двумя плоскими волнами D_0 и D равно

$$P_0H = [a + u' \sqrt{b^2 + b \operatorname{tg}^2 \theta}] \Delta t \cos \theta. \quad (7.90)$$

Если фазовая скорость плоской волны равна u , то это расстояние должно также равняться $u \Delta t$. Сравнивая с (7.90), получаем

$$[a + u' \sqrt{b^2 + b \operatorname{tg}^2 \theta}] \cos \theta = u. \quad (7.91)$$

Заменяя в этом уравнении величины a , b , $\cos \theta$ и $\operatorname{tg}^2 \theta$ на их выражения, определяемые согласно (7.79) и (7.84), будем иметь

$$u = \frac{(u' + \beta c \cos \theta')}{\sqrt{\left(\frac{\beta u'}{c} + \cos \theta'\right)^2 + (1 - \beta^2) \sin^2 \theta'}}, \quad (7.92)$$

т. е. соотношение, обратное по отношению к (7.73).

С другой стороны, для координат x_0 и y_0 имеют место уравнения (7.82) и (7.88). С учетом (7.86) перепишем эти уравнения в виде

$$(V_x - a)^2 \frac{\Delta t^2}{b} + V_y^2 - b u'^2 \Delta t^2 = 0, \quad (7.93)$$

$$(V_x - a) \Delta t \sin \theta - b V_y \Delta t \cos \theta = 0. \quad (7.94)$$

Отсюда имеем

$$V_x = \frac{a + u' \sqrt{b^3}}{\sqrt{b + \operatorname{tg}^2 \theta}}, \quad V_y = \frac{u' \sqrt{b} \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{b + \operatorname{tg}^2 \theta}}. \quad (7.95)$$

Принимая во внимание (7.79), (7.84), а также (7.76), получаем следующие выражения, определяющие в соответствии с принципом Гюйгенса, преобразование $V \rightarrow V'$, которому подвергаются скорости распространения световых лучей:

$$V_x = \frac{V'_x + \omega}{1 + \frac{\beta V'_x}{c}}, \quad V_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} V'_y}{1 + \frac{\beta V'_x}{c}}. \quad (7.96)$$

Формулы (7.96) совпадают с (7.35), поэтому скорость распространения V преобразуется как скорость частицы. Если плоская монохроматическая волна распространяется в среде S' с показателем преломления n , движущейся по отношению к S со скоростью ω , то формулы преобразования для скоростей распространения тождественны формулам (7.32) и (7.33), в которых \boldsymbol{v} и \boldsymbol{v}' характеризуют скорости частиц. Таким образом, в этих формулах нужно заменить \boldsymbol{v} и \boldsymbol{v}' на V и V' и учесть, что

$$V' = \frac{c}{n}. \quad (7.97)$$

§ 10. Фазовая скорость и скорость распространения¹⁾

Если явления протекают в преломляющей среде, характеризующейся показателем преломления n , то величина скорости распространения плоской волны V обычно отличается от величины фазовой скорости u .

В самом деле, фазовая скорость u , согласно (7.73), выражается через u' и θ следующим образом:

$$u = \frac{u' \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta\right]^{1/2} + \omega \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right) \cos \theta}{1 - \frac{\omega^2}{c^4} u'^2}. \quad (7.98)$$

Если в увлекаемой преломляющей среде (система S') $u' = c/n$, то, следовательно,

$$u = \frac{\frac{c}{n} \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sin^2 \theta\right]^{1/2} + \omega \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cos \theta}{1 - \frac{\omega^2}{c^2 n^2}}. \quad (7.99)$$

Пренебрегая членами порядка ω^2/c^2 , получаем

$$u \approx \frac{c}{n} + \omega \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cos \theta. \quad (7.100)$$

С другой стороны, согласно полученным ранее результатам, скорости распространения плоской волны V и V' связаны между собой таким же образом, как и скорости частицы v и v' . Чтобы провести сравнение с (7.98), с помощью (7.50) представим V в виде функции от V' и θ :

$$V = \frac{V' \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{V'^2} \left(1 - \frac{V'^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta\right]^{1/2} + \omega \left(1 - \frac{V'^2}{c^2}\right) \cos \theta}{1 - \frac{V'^2 \omega^2}{c^4} - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{V'^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta}. \quad (7.101)$$

¹⁾ Под скоростью распространения мы подразумеваем скорость сигнала V . Она может быть скоростью волнового фронта, групповой скоростью (скоростью распространения амплитуды волнового пакета; см. гл. 3, § 11) или, наконец, скоростью передачи энергии (или скоростью распространения вектора Умова — Пойнтинга). В этом параграфе мы рассматриваем скорость распространения волнового фронта, но на практике в большинстве случаев смешиваются различные определения скорости сигнала.

Если в увлекаемой преломляющей среде $V' = c/n$, то из (7.101) получим

$$V = \frac{\frac{c}{n} \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{w^2}{c^2} - \frac{w^2 n^2}{c^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sin^2 \theta\right]^{1/2} + w \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cos \theta}{1 - \frac{w^2}{c^2 n^2} - \frac{w^2}{c^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sin^2 \theta}, \quad (7.102)$$

или, пренебрегая членами порядка w^2/c^2 ,

$$V \approx \frac{c}{n} + w \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cos \theta. \quad (7.103)$$

Сравнение выражений (7.98) и (7.101) [или (7.99) и (7.102)] показывает, что в произвольной галилеевой системе отсчета величина скорости распространения V отличается от величины фазовой скорости u . Совпадают только приближенные выражения (7.100) и (7.103) (справедливые при $w^2/c^2 \ll 1$).

Однако выражения для фазовой скорости и скорости распространения становятся полностью тождественными между собой в следующих двух случаях.

Если распространение происходит в *пустоте* ($n = 1$), то из соотношения (7.76) следует, что

$$V' = u' = c. \quad (7.104)$$

В системе S' фазовая скорость и скорость распространения световых лучей будут одновременно равняться c . Однако в данном случае ($n = 1$) выражения для преобразования скоростей распространения совпадают с соответствующими выражениями для фазовых скоростей. Поэтому в соответствии с основными положениями специальной теории относительности равенство фазовой скорости и скорости распространения в пустоте будет иметь место для всех галилеевых систем отсчета.

Мёллер¹⁾ справедливо указал на разницу между этим выводом и тем выводом, который может быть получен, исходя из теории, основывающейся на понятии об абсолютном пространстве. Если в такой теории пользоваться выделенной системой отсчета, связанной с неподвижным эфиром, то фазовая скорость будет совпадать со скоростью распространения, тогда как во всех других системах эти скорости будут различными. Из самой природы специальной теории относительности вытекает совершенно другой

¹⁾ См. книгу Мёллера [92], где $u' = c$, $a = 0$ и $b = 1$. При этом вектор Умова — Пойнтинга, характеризующий поток плотности энергии и, следовательно, связанный со скоростью распространения, во всех инерциальных системах отсчета, как и фазовая скорость, будет перпендикулярен к плоскости волны.

вывод: какой бы галилеевой системой отсчета мы ни пользовались, в пустоте свет будет распространяться изотропно и иметь скорость c . Поэтому волновые поверхности будут сферическими вне зависимости от того, выбирается ли система S или S' .

Распространение происходит в среде с показателем преломления n в случае, когда направление нормали к плоской волне совпадает с направлением относительной скорости среды w . При этом $\theta = 0$, так что из (7.73) или (7.96) для V' (или u') $= c/n$ следует

$$u = V = \frac{\frac{c}{n} \pm w}{1 \pm \frac{w}{nc}}, \quad (7.106)$$

или (если пренебречь членами порядка $1/c^2 \ll 1$)

$$u = V \approx \left(\frac{c}{n} \pm w \right) \left(1 \mp \frac{w}{nc} \right) \approx \frac{c}{n} \pm w \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (7.107)$$

В результате снова получается формула Физо. Это связано с тем, что в опыте Физо складываются две параллельные скорости — скорость света в прозрачной среде с показателем преломления n , равная $V = c/n$, и скорость движения среды w .

Полученная нами для данного случая приближенная формула (7.107) фактически обосновывает результаты, которые были получены в опыте Физо.

Согласно теории Френеля, формула Физо является следствием частичного увлечения эфира; по теории Лоренца она объясняется увлечением волн (векторов индукции и поляризации) в неподвижном эфире. Из теории Эйнштейна формула Физо вытекает более непосредственным образом — она является следствием простых кинематических соображений и не связана с какими-либо гипотезами о строении вещества¹⁾.

Отметим, что входящий в (7.107) показатель преломления $n(v')$ является функцией частоты v' плоской волны в системе S' , которая вместе с преломляющей средой движется со скоростью w . Этот показатель отличается от показателя преломления $n(v)$, зависящего от частоты v в связанной с наблюдателем системе S .

¹⁾ Такое различие в истолковании одной и той же формулы и одного и того же опыта служит иллюстрацией утверждения Анри Пуанкаре, согласно которому в физике не существует „решающих“ (crucial) опытов, имеющих абсолютное значение. Истолкование этих опытов зависит от подразумеваемых постулатов (в данном случае кинематических), лежащих в основе физики.

Действительно, из (7.67) и (7.68) получим

$$v' = \frac{v\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{w}{u'} \cos \theta'}, \quad (7.108)$$

и если $u' = c/n$, то

$$v' = \frac{v\sqrt{1-\beta^2}}{1 + n\beta \cos \theta'} \approx v(1 - n\beta \cos \theta'), \quad (7.109)$$

где мы пренебрегли членами порядка $\beta^2 = w^2/c^2$.

Из (7.109) следует, что

$$\begin{aligned} n(v') &= n(v) + \frac{dn}{dv} dv = n(v) - \frac{dn}{dv} v\beta n \cos \theta' = \\ &= n(v) \left[1 - \frac{dn}{dv} v\beta \cos \theta' \right], \end{aligned} \quad (7.110)$$

$$\frac{1}{n(v')} = \frac{1}{n(v)} \left(1 + \frac{dn}{dv} v\beta \cos \theta' \right). \quad (7.111)$$

После подстановки в (7.107) в данном приближении получим

$$V = \frac{c}{n} + \left[1 - \frac{1}{n^2} + \frac{v}{n} \frac{dn}{dv} \right] w \cos \theta'. \quad (7.112)$$

Этот теоретический вывод с большой точностью был подтвержден Зеemanом [54]. Путем измерения скорости света V в движущемся кварцевом стержне Зееману удалось обнаружить дисперсию, характеризуемую формулой (7.112).

В гл. 10 будет дано объяснение эффекта Допплера и явлений абберации. Они также являются непосредственным следствием положений, лежащих в основе релятивистской кинематики.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

А. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 1. Импульс, энергия и собственная масса частицы

В нерелятивистской механике импульс частицы, имеющей скорость $\mathbf{v}(v^1, v^2, v^3)$, определяется как

$$\mathbf{p}_н. = m_0 \mathbf{v}, \quad (8.1)$$

где m_0 — характерная для частицы постоянная, называемая ее *инертной массой*.

В релятивистской теории $\mathbf{p}_н.$ так же, как и \mathbf{v} , не сводится только к пространственным компонентам вектора и вместо (8.1) мы должны будем определить импульс ковариантным образом.

Взяв действительные координаты $x^\mu(x^1, x^2, x^3, x^0 = ct)$, мы примем условие ортонормированности (6.28):

$$g_{\mu\nu} = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) = \eta_{\mu\nu}, \quad (8.2)$$

в связи с чем основная форма сводится к виду

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \sum_p (dx^p)^2. \quad (8.3)$$

Исходя из четырехмерной скорости

$$\bar{u}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \text{или} \quad u^\mu = \frac{\bar{u}^\mu}{c} = \frac{dx^\mu}{ds} \quad \left(u^0 = \frac{dt}{d\tau}\right), \quad (8.4)$$

определим теперь четырехмерный импульс:

$$\boxed{P^\mu = m_0 \bar{u}^\mu = m_0 c u^\mu \quad (u^\mu u_\mu = 1),} \quad (8.5)$$

где

$$\boxed{u^p = \frac{v^p}{c \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right),} \quad (8.6)$$

а m_0 является характерной для частицы постоянной, так называемой *собственной массой*.

Из (8.5) и (8.6) имеем

$$P^q = m_0 \bar{u}^q = \frac{m_0 v^q}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m v^q, \quad (8.5a)$$

$$P^0 = m_0 \bar{u}^0 = m_0 c u^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m c, \quad (8.5b)$$

где мы положили

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (8.7)$$

Для малых скоростей ($\beta \ll 1$) m сводится к постоянной m_0 , а (8.5a) — к нерелятивистскому определению (8.1); m_0 является *собственной массой*, или *массой покоя*, частицы.

Из (8.5) следует, что компоненты p^μ подчиняются соотношению¹⁾

$$P_\mu P^\mu = (P^0)^2 - \sum_q (P^q)^2 = \frac{m_0^2 c^2}{1 - \beta^2} \left(1 - \sum_q \frac{(v^q)^2}{c^2} \right) = m_0^2 c^2. \quad (8.8)$$

Таким образом, если

$$p^2 = \sum_q (p^q)^2 = \sum_q (P^q)^2, \quad \text{где } \mathbf{p} = (P^1, P^2, P^3), \quad (8.9)$$

то

$$(P^0)^2 = p^2 + m_0^2 c^2. \quad (8.10)$$

Положив

$$\frac{W}{c} = P^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m c \quad (8.11)$$

или

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m c^2, \quad (8.12)$$

мы можем также переписать (8.10) в виде

$$\frac{W^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2. \quad (8.13)$$

¹⁾ С помощью формул Лоренца нетрудно проверить, что из определения $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, где $m = m_0/\sqrt{1 - \beta^2}$, следует сохранение полного импульса. Это можно показать, например, рассматривая процесс столкновения двух одинаковых частиц.

Обратно, можно показать, что если принять гипотезу о сохранении при столкновениях полного импульса, определяемого в виде $\mathbf{p} = m(m_0, \mathbf{v})\mathbf{v}$, и если считать справедливыми формулы Лоренца, то отсюда следует, что $m = m_0/\sqrt{1 - \beta^2}$. См. книги Мёллера [92] и Бергмана [106].

Как мы увидим, величина W , определяемая согласно (8.12), отличается от кинетической энергии частицы T на постоянный член, соответствующий внутренней энергии:

$$W_0 = m_0 c^2. \quad (8.14)$$

W_0 равна значению W в собственной системе отсчета ($\beta_0 = 0$).

§ 2. Сила Минковского. Основной закон релятивистской динамики

Основной закон ньютоновской механики материальной точки имеет вид

$$\mathbf{f}_n = \frac{d\mathbf{p}_n}{dt} = m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (8.15)$$

Отсюда следует

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_0 v^2 \right) = (\mathbf{f}_n \cdot \mathbf{v}), \quad (8.16)$$

что соответствует закону сохранения энергии: изменение dT кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (8.17)$$

равно работе внешних сил $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$.

Закон (8.15) не является релятивистским, так как по отношению к преобразованию Лоренца \mathbf{f}_n не ведет себя как пространственная составляющая вектора, а dt не является инвариантом. Чтобы получить закон, ковариантный по отношению к преобразованию Лоренца, заменим \mathbf{v} на четырехмерную скорость, а dt на инвариантный дифференциал собственного времени. Тогда сила \mathbf{F} , называемая *силой Минковского*, будет четырехмерным вектором:

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = m_0 \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau}.} \quad (8.18)$$

Компоненты этого вектора равны

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{d\bar{u}^\mu}{d\tau} = m_0 c \frac{du^\mu}{d\tau} \quad (8.19)$$

или

$$F^\mu = m_0 c \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{du^\mu}{dx^\rho} = m_0 c^2 u^\rho \frac{du^\mu}{dx^\rho}. \quad (8.20)$$

С учетом (8.5) (или $\bar{u}^\mu \bar{u}_\mu = c^2$) для скалярного произведения $F_\mu u^\mu$ отсюда будем иметь

$$F_\mu u^\mu = 0 \quad (\text{или } F_\mu \bar{u}^\mu = 0), \quad (8.21)$$

Для компонент F^p , согласно (8.19) и (8.6), получим следующие выражения:

$$F^p = m_0 c \frac{du^p}{d\tau} = m_0 \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \frac{v^p}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{v^p}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (8.22a)$$

$$F^0 = m_0 c \frac{du^0}{d\tau} = m_0 c \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (8.22b)$$

Обозначим через \mathbf{f} пространственный вектор (f^1, f^2, f^3) с компонентами

$$f^q = m_0 \frac{d}{dt} \frac{v^q}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (8.23)$$

переходящий в ньютоновскую силу \mathbf{f}_n , если величиной β по сравнению с единицей можно пренебречь. Принимая во внимание (8.23), а также определение (8.5a), получаем

$$\boxed{\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}}, \quad (8.24)$$

и, согласно (8.22a),

$$\boxed{F^p = \frac{f^p}{\sqrt{1-\beta^2}}}. \quad (8.25)$$

С другой стороны, согласно (8.21), (8.6) и (8.25),

$$F_0 u^0 = -F_p u^p = \frac{-f_p v^p}{c(1-\beta^2)} \quad (8.26)$$

или $[\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3)]$

$$\boxed{F_0 = \frac{-f_p v^p}{c \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c \sqrt{1-\beta^2}}}. \quad (8.27)$$

Сравнивая с выражением F^0 , входящим в (8.22b), и принимая во внимание определение (8.12), перепишем (8.27) в другом виде:

$$\boxed{(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dW}{dt}}. \quad (8.28)$$

Учитывая соотношение (8.5a), согласно которому

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad \text{где } \mathbf{p} = (p^1, p^2, p^3) = (P^1, P^2, P^3), \quad (8.29)$$

можно записать (8.24) в виде

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (8.30)$$

Подставляя (8.7) в (8.28), получаем также

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c^2}, \quad (8.31)$$

откуда после подстановки в (8.30)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \left(\frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \mathbf{v}. \quad (8.32)$$

Таким образом, направление силы, действующей на частицу, в общем случае не совпадает с направлением ускорения этой частицы. Однако оба эти направления совпадают в том случае, когда сила параллельна скорости или перпендикулярна ¹⁾ к ней $[(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) = 0]$.

§ 3. Эквивалентность массы и энергии

В результате сравнения релятивистской формулы (8.28)

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) = \frac{dW}{dt}$$

с соотношением (8.16), имеющим место в ньютоновской динамике, мы приходим к следующему определению кинетической энергии частицы:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \text{const}. \quad (8.33)$$

Для малых скоростей ($\beta \ll 1$) это выражение сводится к виду

$$T = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots + \text{const}. \quad (8.34)$$

Если положить

$$\text{const} = - m_0 c^2, \quad (8.35)$$

то отсюда получается формула (8.17).

При этом кинетическая энергия частицы будет равна

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2, \quad (8.36)$$

¹⁾ Последнее имеет место в случае движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле \mathbf{H} , когда $\mathbf{f} = \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$. При этом закон Ньютона имеет вид

$$\mathbf{f} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

или, согласно (8.7), (8.12) и (8.14),

$$T = (m - m_0) c^2 = W - W_0, \quad (8.37)$$

$$\boxed{m = m_0 + \frac{T}{c^2}}. \quad (8.38)$$

Согласно (8.37), кинетическая энергия частицы после добавления постоянного члена $W_0 = m_0 c^2$, соответствующего внутренней энергии частицы, будет, таким образом, равна (8.12):

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m c^2.$$

Масса покоя частицы m_0 эквивалентна энергии W_0/c^2 . И наоборот, любая собственная энергия W_0 эквивалентна собственной массе

$$\boxed{m_0 = \frac{W_0}{c^2}}, \quad (8.39)$$

причем частица, движущаяся со скоростью \mathbf{v} , обладает количеством движения

$$P^q = p^q = \frac{m_0 v^q}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{W_0}{c} = \frac{v^q}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (8.40a)$$

$$P^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{W_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (8.40b)$$

Закон эквивалентности массы и энергии, установленный Эйнштейном (1905 г.), называют также *законом инертности энергии*.

В частности, если свободная частица ($\mathbf{v} = \text{const}$) излучает энергию $F = h\nu$, то ее масса становится равной m' . В собственной системе отсчета из закона сохранения энергии

$$W_0 = W'_0 + E_0, \quad (8.41)$$

таким образом, следует

$$m_0 = m'_0 + \frac{E_0}{c^2}, \quad (8.42)$$

где мы приняли во внимание (8.13) и условие $\mathbf{p} = 0$.

В противоположность ньютоновской динамике больше уже не существует закона сохранения массы, независимого от закона сохранения энергии. Изменение собственной массы

$$\Delta m_0 = m_0 - m'_0 = \frac{E_0}{c^2} \quad (8.43)$$

равно частному от деления излучаемой энергии на c^2 , что непосредственно следует из закона сохранения энергии.

§ 4. Изменение скоростей и основных динамических величин (импульса, энергии, силы) при преобразовании Лоренца

1. Импульс и энергия. В системе S четырехмерной скорости $\bar{u}^\mu = cu^\mu$ соответствует четырехмерный вектор энергии — импульса

$$P^\mu = m_0 \bar{u}^\mu = m_0 cu^\mu.$$

В системе S' , движущейся по отношению к S с постоянной скоростью \boldsymbol{w} , имеем

$$P'^\mu = m_0 \bar{u}'^\mu = a_\nu^\mu m_0 \bar{u}^\nu = a_\nu^\mu P^\nu,$$

причем

$$P^\mu = a_\nu^\mu P'^\nu.$$

Таким образом,

$$p'^q = a_r^q p^r + a_0^q \frac{W}{c}, \quad (8.44a)$$

$$\frac{W'}{c} = a_r^0 p^r + a_0^0 \frac{W}{c}, \quad (8.44b)$$

и наоборот

$$p^q = a_r^q p'^r + a_0^q \frac{W'}{c}, \quad (8.45a)$$

$$\frac{W}{c} = a_r^0 p'^r + a_0^0 \frac{W'}{c}. \quad (8.45b)$$

Подставим теперь в эти формулы выражения коэффициентов a_μ^ν и a_ν^μ , соответствующие общему преобразованию Лоренца (6.57a) и (6.57b), преобразованию Лоренца без поворота (6.62) и (6.63) и специальному преобразованию Лоренца (6.66). В частности, для преобразования Лоренца без поворота [см. (6.46a)]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}' &= \boldsymbol{p} + \boldsymbol{w} \left\{ \frac{\alpha}{w^2} (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{w}) - \frac{W}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \right\}, \quad \beta = \frac{w}{c}, \\ W' &= \frac{W - (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{w})}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned} \quad (8.46b)$$

где, как и в (5.75),

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1,$$

а для специального преобразования Лоренца

$$p'^1 = \frac{p^1 - \frac{W}{c^2} w}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p'^2 = p^2, \quad p'^3 = p^3, \quad (8.47a)$$

$$W' = \frac{W - (\boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{w})}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (8.47b)$$

Обратные формулы для преобразования Лоренца без поворота или для специального преобразования непосредственно получаются из (8.46) [или (8.47)] в результате замены \boldsymbol{p} на \boldsymbol{p}' , \boldsymbol{v} на \boldsymbol{v}' и \boldsymbol{w} на $-\boldsymbol{w}$.

2. Сила. При переходе от системы S к системе S' компоненты силы Минковского F^μ преобразуются по формуле

$$F'^\mu = a_\nu^{\mu'} F^\nu = a_q^{\mu'} F^q + a_0^{\mu'} F^0, \quad (8.48)$$

или с учетом (8.25) и (8.27) по формуле

$$\frac{f'^p}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = a_q^{p'} \frac{f^q}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + a_0^{p'} \frac{(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v})}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (8.49)$$

Таким образом, согласно (6.96) или (7.18),

$$f'^p = \frac{a_q^{p'} f^q + a_0^{p'} \left(\frac{\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}}{c} \right)}{a_r^{0'} \frac{v^r}{c} + a_0^{0'}}. \quad (8.50)$$

В частности, если в выражении (8.50) для коэффициентов $a_\mu^{\nu'}$ взять значения (6.62) и (6.63), соответствующие преобразованию Лоренца без поворота, то ¹⁾

$$\boxed{f' = \left\{ \boldsymbol{f} + \boldsymbol{w} \left[\frac{\alpha}{w^2} (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{w}) - \frac{\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \right] \right\} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}}{c^2}}}, \quad (8.51)$$

где $\beta = w/c$.

Наконец, в случае специального преобразования Лоренца в формулу (8.50) для коэффициентов $a_\mu^{\nu'}$ следует подставить частные значения (6.66). При этом

$$f'^1 = \frac{f^1 - \beta \left(\frac{\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}}{c} \right)}{1 - \frac{\beta v^1}{c}}, \quad f'^2 = \frac{f^2 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{\beta v^1}{c}}, \quad f'^3 = \frac{f^3 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{\beta v^1}{c}}. \quad (8.52)$$

¹⁾ Формула (8.51) получается также в результате вычисления $f' = dp'/dt'$, где зависимость p' от p определяется с помощью (8.44). При нахождении правой части нужно принять во внимание, что $\frac{d}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt}$, где $\frac{dt'}{dt}$ определяется согласно (6.92).

Обратные формулы можно получить при помощи соотношения

$$F^{\mu} = a_{\nu}^{\mu} F'^{\nu}, \quad (8.53)$$

откуда

$$f^p = \frac{a_q^p f'^q + a_0^p \left(\frac{f' \cdot v'}{c} \right)}{a_r^0 \frac{v'^r}{c} + a_0^0}. \quad (8.54)$$

Они непосредственно получаются также из (8.51) и (8.52), если заменить f на f' , v на v' и w на $-w$.

§ 5. Система свободных частиц

1. Энергия, количество движения, собственная масса системы свободных частиц. Рассмотрим систему, состоящую из n невзаимодействующих между собой частиц. Обозначим через p и W суммы импульсов и энергий n частиц:

$$p = \sum_i p_{(i)}, \quad W = \sum_i W_{(i)}. \quad (8.55)$$

Из соотношений (8.33), имеющих место для каждой из частиц, получим

$$W = \sum_i (T_{(i)} + m_{0(i)} c^2) = T + m_0 c^2, \quad (8.56)$$

где

$$T = \sum_i T_{(i)}, \quad m_0 = \sum_i m_{0(i)}. \quad (8.57)$$

Собственной системой отсчета для ансамбля, состоящего из n частиц, мы будем называть такую систему S_0 , для которой

$$p_0 = 0. \quad (8.58)$$

Такой выбор всегда возможен, так как если $n > 1$, то $p^2 - W^2/c^2 < -\sum_i (m_{0(i)} c^2) < 0$. Действительно,

$$p^2 - \frac{W^2}{c^2} = \left(p + \frac{W}{c} \right) \left(p - \frac{W}{c} \right) = \sum_i \left(p_{(i)} - \frac{W_{(i)}}{c} \right) \sum_j \left(p_{(j)} + \frac{W_{(j)}}{c} \right).$$

В любом случае

$$(i) \quad -\frac{W_{(i)}}{c} < 0, \text{ поскольку } \left(p_{(i)} - \frac{W_{(i)}}{c} \right) \left(p_{(i)} + \frac{W_{(i)}}{c} \right) = -m_{0(i)} c^2 < 0,$$

так что

$$\begin{aligned} \sum_i \left(p_{(i)} - \frac{W_{(i)}}{c} \right) \sum_j \left(p_{(j)} + \frac{W_{(j)}}{c} \right) &\leq \\ &\leq \sum_i \left(p_{(i)} - \frac{W_{(i)}}{c} \right) \left(p_{(i)} + \frac{W_{(i)}}{c} \right) = \sum_i \left(p_{(i)}^2 - \frac{W_{(i)}^2}{c^2} \right), \end{aligned}$$

Окончательно

$$p^2 - \frac{W^2}{c^2} \leq \sum_i \left(p_{(i)}^2 - \frac{W_{(i)}^2}{c^2} \right) = - \sum_i (m_{0(i)} c^2) < 0.$$

Если v — постоянная скорость центра тяжести системы частиц по отношению к галилеевой системе отсчета S (т. е. скорость системы S_0 по отношению к S), то, отождествляя S_0 с системой S' , согласно (8.45), получаем

$$p^q = a_r^q p'^r + a_0^q p'^0 = a_0^q \frac{W_0}{c}, \quad (8.59a)$$

$$p^0 = a_r^0 p'^r + a_0^0 p'^0 = a_0^0 \frac{W_0}{c}. \quad (8.59б)$$

При этом мы учли, что, поскольку системы S' и S_0 тождественно равны ($S' \equiv S_0$),

$$p'^r = p^{(0)r} = 0, \quad p'^0 = \frac{W_0}{c}.$$

Если же S' — собственная система отсчета, т. е. если $dx'^r/dx'^0 = v^r/c = 0$, то, по аналогии с (6.101), будем иметь ¹⁾

$$a_0^q = a_0^0 \frac{v^q}{c}; \quad (8.60)$$

подставляя это соотношение в (8.59), получаем

$$p^q = a_0^0 \frac{W_0}{c^2} v^q, \quad W = a_0^0 W_0. \quad (8.61)$$

Поэтому положим

$$M = a_0^0 \frac{W_0}{c^2}, \quad (8.62)$$

в связи с чем соотношения (8.61) перепишутся в виде

$$p^q = M v^q, \quad W = M c^2. \quad (8.63)$$

Но из (6.100) следует, что всегда

$$a_0^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (8.64)$$

Следовательно,

$$M = \frac{W_0}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{W}{c^2}. \quad (8.65)$$

¹⁾ В самом деле,

$$dx^q = a_r^q dx'^r + a_0^q dx'^0, \quad dx^0 = a_r^0 dx'^r + a_0^0 dx'^0,$$

и если $dx'^r/dx'^0 = 0$ (собственная система отсчета), то

$$\frac{dx^0}{dx'^0} = a_0^0, \quad \frac{dx^q}{dx'^0} = \frac{dx^q}{dx^0} \frac{dx^0}{dx'^0} = a_0^0 \frac{v^q}{c} = a_0^q.$$

Таким образом, собственная масса системы частиц

$$M_0 = \frac{W_0}{c^2}, \quad (8.66)$$

согласно (8.65), обладает тем свойством, что

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (8.67)$$

При этом из определений (8.66) и (8.56) следует, что

$$M_0 = m_0 + \frac{T_0}{c^2}. \quad (8.68)$$

Замечания. а) В случае системы, состоящей из *свободных* частиц, всегда имеют место соотношения

$$f_{(i)} = \frac{dp_{(i)}}{dt} \equiv 0. \quad (8.69)$$

Если предположить, что описание производится в системе S , системы S' и S_0 тождественно равны и скорости отдельных частиц малы по сравнению со скоростью c , то собственное время каждой из частиц приближенно совпадает с собственным временем систем S и S' . Таким образом,

$$p = \sum_i (p)_{(i)} = \text{const}. \quad (8.70)$$

Аналогично

$$M = \text{const}, \quad W = m_0 c^2 + T = \text{const}, \quad (8.71)$$

где W равно полной энергии H системы частиц, складывающейся из кинетической энергии T и суммы собственных энергий отдельных частиц, а p и M являются полным импульсом и полной массой системы свободных частиц.

б) В общем случае ¹⁾

$$\boxed{M_0 - m_0 = \frac{T_0}{c^2} > 0} \quad \text{или} \quad \boxed{M_0 > \sum_i m_{0(i)}}. \quad (8.72)$$

Масса покоя системы больше суммы собственных масс отдельных составляющих ее частиц. Разность между ними связана с наличием внутренней кинетической энергии системы, которая всегда положительна.

в) Из (8.63) и (8.67) вытекает также соотношение

$$p^2 - \frac{W^2}{c^2} = -M_0^2 c^2. \quad (8.73)$$

¹⁾ Если свободные частицы движутся с одинаковой скоростью, то в этих формулах знак неравенства нужно заменить на знак равенства, так что, строго говоря, в (8.72) должен стоять знак \geq .—Прим. перев.

2. Столкновения между системами свободных частиц. Эквивалентность массы и энергии. Теперь предположим, что система свободных частиц Σ_1 сталкивается с другой системой частиц Σ_2 , а момент количества движения и энергия системы Σ , измеряемые до столкновения в двух галилеевых системах отсчета S и S' , равны соответственно p и p' , W и W' . Пусть после столкновения момент количества движения и энергия системы Σ_1 , измеряемые в тех же галилеевых системах отсчета, будут равны $p + \Delta p$, $p' + \Delta p'$, $W + \Delta W$ и $W' + \Delta W'$. Принимая во внимание линейный характер формул преобразования Лоренца, для случая перехода от системы S к S' будем иметь

$$\Delta p^q = a_r^q \Delta p'^r + a_0^q \frac{\Delta W'}{c}, \quad (8.74a)$$

$$\Delta \frac{W}{c} = a_r^0 \Delta p'^r + a_0^0 \frac{\Delta W'}{c}. \quad (8.74b)$$

Если система S' совпадает с собственной системой S_0 , так что

$$\Delta p' = \Delta p_{(0)} = 0, \quad (8.75)$$

т. е. если в системе S_0 момент количества движения $p' = \Sigma p'_{(t)}$ в результате столкновения не меняется, то аналогично (8.59) получим

$$\Delta p^q = a_0^q \frac{\Delta W_0}{c} = a_0^q \frac{\Delta W_0}{c^2} v^q = \Delta M \cdot v^q, \quad (8.76a)$$

$$\Delta W = a_0^0 \Delta W_0 = \Delta M \cdot c^2, \quad (8.76b)$$

где

$$\Delta M = a_0^0 \frac{\Delta W_0}{c^2} = \frac{\Delta W_0}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta W}{c^2}. \quad (8.77)$$

Имеем также

$$\Delta M = \frac{\Delta M_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (8.78)$$

поскольку

$$M_0 = \frac{W_0}{c^2}. \quad (8.79)$$

Считая справедливым закон сохранения энергии и количества движения, получаем, что энергия и количество движения системы Σ_2 возрастают на ΔW и Δp . Это эквивалентно добавлению к системе частицы с собственной массой ΔM_0 , движущейся по отношению к системе S со скоростью v .

Принимая во внимание соотношение (6.45) между коэффициентами a_{μ}^{ν} , согласно (8.74), имеем

$$(\Delta p)^2 - \left(\frac{\Delta W}{c}\right)^2 = (\Delta p')^2 - \left(\frac{\Delta W'}{c}\right)^2. \quad (8.80)$$

Переходя к собственной системе отсчета ($\Delta p' = 0$, $\Delta W' = \Delta W_0 = c^2 \Delta M_0$), получаем также

$$(\Delta p)^2 - \left(\frac{\Delta W}{c}\right)^2 = -(\Delta M_0)^2 c^2. \quad (8.81)$$

3. Применение к процессу аннигиляции. Допустим, что возможна аннигиляция частицы с собственной массой m_0 , связанная с выделением энергии W . Обозначим через S_0 собственную систему частицы, а через S — другую галилееву систему отсчета. Можно считать, что система частиц Σ_1 сводится к данной частице, так что в системе S_0

$$\Delta p_0 = 0, \quad \Delta W_0 = W_0, \quad (8.82)$$

а в системе S

$$\Delta p = p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Delta W = W = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (8.83)$$

Подставляя эти выражения в (8.76), получаем

$$\frac{\dot{m}_0 v^q}{\sqrt{1-\beta^2}} = a_0^q \frac{W_0}{c^2} v^q = \frac{W_0}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} v^q, \quad (8.84a)$$

$$W = a_0^q W_0 = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (8.84b)$$

Эти соотношения будут тождественно выполняться, если

$$W_0 = m_0 c^2. \quad (8.85)$$

Таким образом, закон сохранения энергии, применяемый к случаю релятивистского процесса аннигиляции, связанного с выделением энергии W , приводит к необходимости приписать частице внутреннюю энергию $W_0 = m_0 c^2$.

Эти выводы полностью подтверждаются опытами, связанными с превращением излучения в вещество и вещества в излучение.

Положительные электроны или позитроны (по поводу их открытия см. работы Андерсона [107], Блэккета и Оккиалини [108]) с отрицательными электронами могут образовывать пары, при аннигиляции которых возникает излучение (см. книгу Дирака [109]). В свою очередь электромагнитное излучение может исчезать, но при этом возникает пара электронов противоположных знаков (см. Андерсон и Неддермейер [110], Разетти, Майтнер и Филлип [111], Кюри и Жолио [112]). Эти явления, особенно часто наблюдаемые в космических лучах, были предсказаны дираковской релятивистской теорией электронов со спином.

Если энергия излучения, с которой приходится иметь дело в процессах превращения излучения в вещество, равна $E = h\nu$, то,

применяя в собственной системе отсчета S_0 закон сохранения энергии

$$W_0 = W'_0 + E_0, \quad \text{где } W_0 = 2m_0c^2, \quad W'_0 = 0, \quad (8.86)$$

получаем следующее соотношение между собственной массой частиц и собственной частотой излучения:

$$2m_0c^2 = h\nu_0. \quad (8.87)$$

§ 6. Система связанных частиц

Теперь предположим, что частицы взаимодействуют между собой. Будем считать, что движение частиц можно рассматривать в таких галилеевых системах отсчета S и S' , что по отношению к ним скорость движения каждой из частиц мала по сравнению с c . При этих условиях собственное время отдельной частицы приближенно совпадает с временем в системе отсчета, в которой описывается система частиц, а силы взаимодействия являются функциями от пространственных координат частиц и определяются заданием потенциальной энергии V . Следовательно, в этом приближении получим

$$\mathbf{f}_{(i)} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v})_{(i)} = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_{(i)}} \quad (8.88)$$

и

$$\sum_i \mathbf{f}_{(i)} \mathbf{v}_{(i)} = \frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)_{(i)} = - \frac{dV}{dt}, \quad (8.89)$$

т. е.

$$T + V = H = \text{const}. \quad (8.90)$$

Если частицы удалить друг от друга на бесконечное расстояние, то взаимодействие будет отсутствовать и V станет постоянной. Положим $V_\infty = 0$, так что $H = T_\infty$. При этих условиях, если частицы связаны, то потенциальная энергия V всегда отрицательна, так что $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = -dV > 0$. Из (8.90) следует, что в общем случае кинетическая энергия T не является постоянной, а зависит от времени.

Определим теперь систему отсчета S_0 , которая обладает указанными выше свойствами [скорости $(v_i)_0 \ll c$] и для которой

$$\mathbf{p}_{(0)} = \sum_i \mathbf{p}_{(i)(0)} = 0. \quad (8.91)$$

В соответствии с (8.59), для другой галилеевой системы S ($v_i \ll c$)

$$\mathbf{p}^q = \alpha_0^q P'^0 = \alpha_0^q \frac{W_0}{c^2} = \alpha_0^0 v^q \frac{W_0}{c^2} = \frac{W}{c^2} v^q = \mu v^q, \quad (8.92a)$$

$$\frac{W}{c} = \alpha_0^0 P'^0 = \alpha_0^0 \frac{W_0}{c} = \mu c, \quad (8.92b)$$

где мы положили

$$\mu = a_0^0 \frac{W_0}{c^2} = \frac{W_0}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W}{c^2}, \quad (8.93)$$

т. е.

$$\mu = \frac{\mu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (8.94)$$

и

$$\mu_0 = \frac{W_0}{c^2} = m_0 + \frac{T_0}{c^2}. \quad (8.95)$$

Однако теперь кинетическая энергия T (и, в частности, T_0) не постоянна; это же имеет место и для величины μ_0 , входящей в (8.95). Таким образом, для системы взаимодействующих частиц μ_0 , μ и \mathbf{p} являются функциями от времени и не могут характеризовать полную энергию и момент количества движения.

Для определения относительного импульса Π системы частиц заменим выражение для энергии

$$W_0 = m_0 c^2 + T_0 \quad (8.96)$$

на выражение

$$\Omega_0 = m_0 c^2 + T_0 + V_0 = m_0 c^2 + H_0, \quad (8.97)$$

т. е. в формулах (8.95) и (8.92) заменим T_0 на H_0 , а W_0 на Ω_0 . Из (8.90) следует, что для взаимодействующих между собой частиц выражение (8.97) постоянно, а (8.96) зависит от времени. В случае свободных частиц ($V=0$) энергия Ω_0 сводится к величине W_0 , которая будет при этом оставаться постоянной.

По аналогии с (8.92), определим полный импульс следующим образом:

$$\Pi^q = a_0^0 v^q \frac{\Omega_0}{c^2} = \frac{(m_0 c^2 + H_0) v^q}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{M_0 v^q}{\sqrt{1-\beta^2}} = M v^q, \quad (8.98a)$$

и энергию

$$\Omega = a_0^0 \Omega_0 = \frac{(m_0 c^2 + H_0)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = M c^2, \quad (8.98b)$$

где вместо (8.95)

$$M_0 = m_0 + \frac{H_0}{c^2}, \quad (8.99)$$

а M_0 , M , Π^q и Ω являются постоянными.

1. Система находится в стабильном состоянии. В этом случае всегда

$$H_0 = T_0 + V_0 < 0. \quad (8.100a)$$

Поэтому для того, чтобы разделить систему связанных частиц на отдельные части, ей нужно сообщить энергию

$$\Delta E = -H_0 > 0. \quad (8.101)$$

Согласно (8.99),

$$\boxed{\Delta m = m_0 - M_0 = \frac{\Delta E}{c^2} > 0} \quad \text{или} \quad \boxed{M_0 < \sum_i m_{0(i)}} \quad (8.102a)$$

Собственная масса системы частиц меньше суммы собственных масс отдельных частиц. Разностью между ними определяется дефект массы системы.

Таким образом, для любых стабильных ядер масса ядра меньше суммы масс составляющих его нуклонов.

2. Система находится в нестабильном состоянии. При этом

$$H_0 = T_0 + V_0 > 0. \quad (8.100b)$$

В этом случае при распадении системы на отдельные части выделится энергия $\Delta E = H_0 > 0$ и

$$\boxed{\Delta m = m_0 - M_0 = -\frac{\Delta E}{c^2} < 0} \quad \text{или} \quad \boxed{M_0 > \sum_i m_{0(i)}} \quad (8.102b)$$

Таким образом, для нестабильных ядер собственная масса ядра больше суммы собственных масс нуклонов и при распаде ядра на составные части будет выделяться энергия $\Delta E/c^2$.

Б. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА НЕПРЕРЫВНЫХ СРЕД

§ 7. Нерелятивистские уравнения жидкости в ортогональной системе координат

Рассмотрим непрерывную среду, плотность вещества которой равна μ , имеющую в точке $P(x)$ скорость \mathbf{v} . Величины μ и \mathbf{v} связаны уравнением непрерывности, которое означает, что изменение плотности в объеме $d\mathcal{V}$ определяется потоком вещества, пересекающего замкнутую поверхность dS , ограничивающую этот объем:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t} d\mathcal{V} = - \int_S \mu \mathbf{v}_n dS = - \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} (\mu \mathbf{v}) d\mathcal{V}, \quad (8.103)$$

или

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} (\mu \mathbf{v}) = 0. \quad (8.104)$$

Элемент массы $dm = \mu d\mathcal{V}$, находящийся внутри объема \mathcal{V} , будет находиться в равновесии. При этом на него действуют следующие силы:

Сила инерции

$$dm \cdot \Upsilon = \mu \Upsilon d\mathcal{V}, \quad (8.105)$$

где

$$\Upsilon = (\Upsilon^1, \Upsilon^2, \Upsilon^3), \quad \Upsilon^r = \frac{\partial v^r}{\partial t}. \quad (8.106)$$

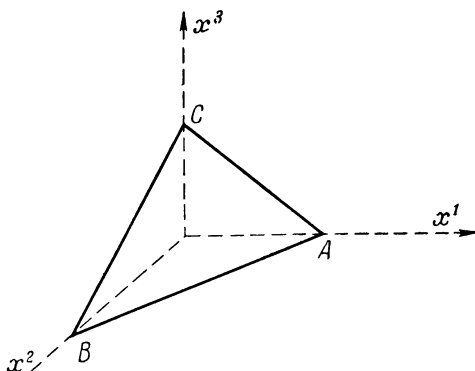
Результирующая внешних сил, действующая на элемент объема $d\mathcal{V}$:

$$f d\mathcal{V}.$$

Результирующая поверхностных сил, характеризующая взаимодействия (давления или натяжения) между элементами, расположенными с обеих сторон поверхности dS , и равная $-p dS$. Можно показать, что составляющие поверхностных сил записываются также в виде

$$P^r dS = p^{rq} d\sigma_q, \quad (8.107)$$

где $d\sigma_q$ — компоненты вектора, направленного по нормали к элементу поверхности dS .



Фиг. 32. Элементарный тетраэдр.

Рассмотрим, например, элементарный тетраэдр (фиг. 32), у которого площади граней OBC , OCA и OAB равны соответственно

$$dS^{23} = \alpha_1 dS, \quad dS^{31} = \alpha_2 dS, \quad dS^{12} = \alpha_3 dS,$$

где α — единичный вектор, направленный по нормали к dS . Поверхностные силы, приложенные к четырем граням тетраэдра, будут при этом равны

$$\pi_{23} dS^{23}, \quad \pi_{31} dS^{31}, \quad \pi_{12} dS^{12}, \quad -P dS.$$

Условия равновесия для этого тетраэдра примут следующий вид:

$$\pi_{23} dS^{23} + \pi_{31} dS^{31} + \pi_{12} dS^{12} - P dS + f d\mathcal{V} = \mu \Upsilon d\mathcal{V}.$$

Если тетраэдр берется бесконечно малым и dV/dS стремится к нулю, то в пределе получим

$$\alpha_1 \pi_{23} + \alpha_2 \pi_{31} + \alpha_3 \pi_{12} - P = 0,$$

т. е.

$$P dS = \pi_{23} dS^{23} + \pi_{31} dS^{31} + \pi_{12} dS^{12} = \frac{1}{2} \varepsilon^{pqr} \pi_{pq} d\sigma_r,$$

где

$$dS^{pqr} = \varepsilon^{pqr} d\sigma_r$$

и ε^{pqr} равняется $+1$, -1 или 0 в зависимости от того, будут ли индексы p, q, r образовывать четную перестановку чисел $1, 2, 3$, нечетную перестановку этих же чисел или же два из этих индексов будут равны между собой.

Таким образом, составляющие $P^r dS$ вектора $P dS$ будут линейными функциями от $d\sigma_r$ и их можно записать в виде

$$P^r dS = p^{rq} d\sigma_q,$$

где

$$p^{rq} = \frac{1}{2} \varepsilon^{rps} \pi_{ps}^q.$$

См., например, книгу Лихнеровича [113].

Условия равновесия для объема \mathcal{V} получаются в результате приравнивания нулю полной силы, а также момента соответствующих элементарных сил

$$f^r d\mathcal{V}^r - p^{rq} d\sigma_q - \mu \gamma^r d\mathcal{V}^r = 0. \quad (8.108)$$

Таким образом, в ортогональной системе координат

$$\int_{\mathcal{V}} (f^r - \mu \gamma^r) d\mathcal{V}^r - \int_S p^{rq} d\sigma_q = 0, \quad (8.109)$$

$$\int_{\mathcal{V}} [x^s (f^r - \mu \gamma^r) - x^r (f^s - \mu \gamma^s)] d\mathcal{V}^r - \int_S (x^s p^{rq} - x^r p^{sq}) d\sigma_q = 0. \quad (8.110)$$

Преобразуя с помощью формулы Грина поверхностный интеграл в интеграл по объему, получаем

$$f^r - \mu \gamma^r - \partial_q p^{rq} = 0, \quad (8.111)$$

где мы учли, что соотношение (8.109) должно иметь место при любом выборе объема \mathcal{V} . Принимая во внимание (8.111), найдем, что выражение (8.110) всегда будет выполняться, если только

$$p^{rq} = p^{qr}. \quad (8.112)$$

§ 8. Релятивистские уравнения для непрерывной среды

Воспользуемся прямоугольной системой координат (собственной системой), связанной с рассматриваемым элементом объема dV . Тогда

$$v^q = 0, \quad (8.113)$$

хотя производные от v^q в общем случае отличны от нуля.

Рассмотрим нерелятивистские уравнения динамики непрерывных сред (8.105) и (8.111). В них входит импульс

$$p^q = \mu v^q, \quad (8.114)$$

для которого в соответствии с определением (8.106)

$$\frac{\partial p^q}{\partial t} = \mu \frac{\partial v^q}{\partial t} = \mu \gamma^q. \quad (8.115)$$

Эти уравнения можно записать также в виде

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \partial_r p^r = 0, \quad (8.116)$$

$$\frac{\partial p^r}{\partial t} + \partial_q p^{rq} = f^r. \quad (8.117)$$

В релятивистскую теорию входит импульс p^r , соответствующий всем формам энергии. Мы ограничимся здесь той его частью, которая связана только с веществом, так что, например, вклад, имеющий электромагнитное происхождение, не рассматривается. Тогда вектор импульса P^r будет складываться из упоминавшейся выше части $p^r = \mu v^r$ и из потока энергии, связанного с взаимодействиями внутри среды.

Согласно (8.107), работа поверхностных сил, соответствующая смещению $v_r dl$, равна

$$P^r dS v_r dl = p^{rq} d\sigma_q v_r dl. \quad (8.118)$$

Через поверхность dS протекает поток энергии $-p^{rq} v_q$, которому в релятивистской теории соответствует количество движения $-(1/c^2) p^{rq} v_q$.

В связи с этим в уравнениях (8.116) и (7.117) компоненты p^r целесообразно заменить на

$$P^r = p^r - \frac{1}{c^2} p^{rq} v_q = \mu v^r - \frac{1}{c^2} p^{rq} v_q. \quad (8.119)$$

В результате получим

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \partial_r \left(\mu v^r - \frac{1}{c^2} p^{rq} v_q \right) = 0 \quad (p, q, r = 1, 2, 3), \quad (8.120)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu v^r - \frac{1}{c^2} p^{rq} v_q \right) + \partial_q p^{rq} = f^r. \quad (8.121)$$

Мы хотим найти релятивистские уравнения для собственной системы отсчета, т. е. для такой системы, в которой

$$u^p = 0, \quad u^0 = 1. \quad (8.122)$$

Поскольку u^μ являются компонентами нормированного вектора ($u^\mu u_\mu = 1$), то в любой системе отсчета

$$u_\mu \partial_\lambda u^\mu = 0. \quad (8.123)$$

С учетом (8.123) для собственной системы отсчета получим

$$\partial_\lambda u^p = \frac{1}{c} \partial_\lambda v^p, \quad \partial_\lambda u^0 = 0. \quad (8.124)$$

Введем теперь вектор и тензор, компоненты которых F^μ и $P^{\mu\nu}$ в собственной системе отсчета принимают следующие значения:

$$F^p = f^p, \quad F^0 = 0, \quad (8.125)$$

$$P^{pq} = P^{qp}, \quad P^{p0} = P^{0p} = P^{00} = 0. \quad (8.126)$$

Следовательно, принимая во внимание (8.122), будем иметь

$$P^{\mu\nu} u_\nu \equiv 0, \quad F^\mu u_\mu = 0. \quad (8.127)$$

Теперь видно, что уравнения (8.120) и (8.121) объединяются в следующую систему:

$$\boxed{\partial_\mu (\mu c^2 u^\mu u^\rho + P^{\mu\rho}) = F^\rho} \quad (\mu, \rho = 1, 2, 3, 0). \quad (8.128)$$

В самом деле, для $\rho = r = 1, 2, 3$ получим

$$\partial_q (\mu c^2 u^q u^r + P^{qr}) + \partial_0 (\mu c^2 u^r + P^{0r}) = f^r, \quad (8.129a)$$

а для $\rho = 0$

$$\partial_r (\mu c^2 u^r + P^{r0}) + \partial_0 (\mu c^2 + P^{00}) = 0, \quad (8.129b)$$

т. е., согласно (8.122), (8.124) и (8.126), для собственной системы отсчета будем иметь

$$\partial_q p^{qr} + \mu \frac{\partial v^r}{\partial t} + \partial_0 P^{0r} = f^r, \quad (8.130)$$

$$\mu c \partial_r v^r + \partial_r P^{r0} + c \frac{\partial \mu}{\partial t} + \partial_0 P^{00} = 0. \quad (8.131)$$

Поскольку, согласно (8.127),

$$\partial_\lambda (P^{\mu\nu} u_\nu) = 0, \quad (8.132)$$

то в собственной системе отсчета

$$\partial_\lambda P^{\mu 0} + \frac{P^{\mu q}}{c} \partial_\lambda v_q = 0, \quad (8.133)$$

т. е.

$$\partial_\lambda P^{r0} = -\frac{P^{rq}}{c} \partial_\lambda v_q, \quad \partial_\lambda P^{00} = 0. \quad (8.134)$$

Подставив (8.134) в (8.130) и (8.131), в результате получим уравнения (8.120) и (8.121).

Уравнения (8.128) были установлены для собственной системы отсчета S_0 . Однако они имеют ковариантную форму (по отношению к преобразованиям Лоренца), а это обеспечивает их справедливость для любой галилеевой системы отсчета. Поэтому они характеризуют движение непрерывной среды по отношению к любой ортонормированной системе координатных осей, используемой в специальной теории относительности.

С другой стороны, уравнения (8.120) и (8.121) получаются из (8.128) в результате перехода к собственной системе отсчета. Уравнение (8.121) и уравнение непрерывности (8.120), вообще говоря, будут, таким образом, иметь место только в системе S_0 .

§ 9. Тензор энергии — импульса вещества

Тензор энергии — импульса материальной среды мы определим следующим образом:

$$\boxed{M^{\rho\sigma} = \mu_0 c^2 u^\rho u^\sigma + P^{\rho\sigma}.} \quad (8.135)$$

Компоненты $P^{\rho\sigma}$ характеризуют взаимодействия внутри среды и для них, согласно (8.127), имеют место соотношения

$$P^{\rho\sigma} u_\sigma \equiv 0, \quad \partial_\lambda (P^{\rho\sigma} u_\sigma) = 0. \quad (8.136)$$

Движение жидкости определяется при этом уравнениями

$$F^\sigma = \partial_\rho M^{\rho\sigma}. \quad (8.137)$$

Принимая во внимание соотношения (8.136) и условие нормировки $u^\mu u_\mu = 1$, нетрудно проверить, что для тензора $M^{\rho\sigma}$ всегда выполняются соотношения

$$M^{\rho\sigma} u_\sigma = \mu_0 c^2 u^\rho. \quad (8.138)$$

С другой стороны, из (8.127) и (8.136) получим также

$$F^\sigma u_\sigma = u_\sigma \partial_\rho (\mu_0 c^2 u^\rho u^\sigma + P^{\rho\sigma}) = 0. \quad (8.139)$$

Учитывая условия нормировки

$$u_\sigma u^\sigma = 1, \quad u_\sigma \frac{du^\sigma}{dx^\rho} = u^\sigma \frac{du_\sigma}{dx^\rho} = 0, \quad (8.140)$$

перепишем (8.139) в виде

$$\mu_0 c^2 \partial_\rho u^\rho + u_\sigma \partial_\rho P^{\rho\sigma} = 0. \quad (8.141)$$

Подставляя это выражение в (8.137), получаем

$$F^\sigma = \partial_\rho (\mu_0 c^2 u^\rho u^\sigma + P^{\rho\sigma}) = \mu_0 c^2 u^\rho \partial_\rho u^\sigma + (\delta_\lambda^\sigma - u^\sigma u_\lambda) \partial_\rho P^{\rho\lambda}. \quad (8.142)$$

§ 10. Случай идеальной жидкости

Непрерывную среду называют *идеальной жидкостью*, если давления p^{r^q} представляются в виде функций от скаляра p , называемого *внутренним давлением* идеальной жидкости.

Если воспользоваться прямолинейной системой координат, ортонормированных с помощью условия (8.2):

$$g_{\mu\nu} = (e_\mu \cdot e_\nu) = \eta_{\mu\nu},$$

то

$$p^{rs} = -p\eta^{rs}$$

и компонентами p^{rs} , отличными от нуля, будут только $p^{11} = p^{22} = \dots = p^{33} = p$.

Таким образом, для собственной системы отсчета, согласно (8.126), получим

$$P^{rs} = p^{rs} = -p\eta^{rs}, \quad P^{r0} = P^{0r} = P^{00} = 0. \quad (8.144)$$

Для произвольной галилеевой системы отсчета тензор $P^{\mu\nu}$ определяется с помощью условий

$$P^{\rho\sigma} = -p(\eta^{\rho\sigma} - u^\rho u^\sigma), \quad (8.145)$$

которые для собственной системы S_0 переходят в (8.144). Компоненты $P^{\mu\sigma}$ тождественно удовлетворяют соотношениям (8.136).

Для идеальной жидкости, согласно (8.135) и (8.145), тензор энергии — импульса принимает вид

$$\boxed{M^{\rho\sigma} = (\mu_0 c^2 + p) u^\rho u^\sigma - p\eta^{\rho\sigma}} \quad (8.146)$$

Замечание. Если взаимодействиями внутри среды можно пренебречь, то тензор $P^{\mu\nu}$ обращается в нуль и тензор энергии — импульса жидкости определяется одним членом:

$$M^{\rho\sigma} = \mu_0 c^2 u^\rho u^\sigma. \quad (8.147)$$

В частности, если для идеальной жидкости внутренним давлением можно пренебречь, то тензор энергии — импульса вещества характеризуется выражением (8.147). В соответствии с (8.142) в этом случае аналогично (8.20) получим

$$F^\sigma = \mu_0 c^2 u^\rho \partial_\rho u^\sigma. \quad (8.148)$$

В. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

В случае четырехмерного несобственно евклидова пространства (пространства Минковского) динамические или электромагнитные явления, происходящие в значительной области пространства, всегда можно описывать в системе координат, ортонормированной с помощью условий (8.2). В результате получаются уравнения, приведенные в начале этой главы и в конце следующей главы. Эти уравнения ковариантны по отношению к преобразованию Лоренца.

В таком несобственно евклидовом пространстве можно, и зачастую удобно, пользоваться также произвольными криволинейными координатами. (В качестве примера можно указать на часто применяемые полярные координаты.) Но, разумеется, изменение системы отсчета больше не должно связываться с соотношением (6.42), характеризующим группу Лоренца и применимым только к галилеевым системам.

В гл. 15 мы увидим, что формализм, с которым приходится иметь дело при описании несобственно евклидова пространства в криволинейных координатах общего вида, без существенных изменений переносится также на случай риманова пространства. Однако последнее отличается от евклидова пространства в том отношении, что для значительных областей этого пространства становится уже необходимым применение обобщенных координат. Именно поэтому такой формализм нередко излагается лишь в связи с изучением неевклидовых теорий, где обойтись без него невозможно. Тем не менее уже в этой главе мы запишем уравнения динамики, имеющие место для евклидова пространства, с помощью произвольных криволинейных координат. Чтобы при таком формализме учесть требования специальной теории относительности, т. е. чтобы можно было применять преобразования Лоренца, вначале, разумеется, нужно перейти к ортонормированной системе координатных осей (что всегда возможно)¹⁾; в результате мы вернемся к соотношениям, полученным в разделах А и Б этой главы.

§ 11. Траектория материальной точки, выраженная в произвольных криволинейных координатах

Определим для векторного евклидова пространства систему произвольных криволинейных координат (y^{μ}). В каждой точке

¹⁾ Преобразования Лоренца можно выразить в произвольных криволинейных координатах. Фактически специальная теория относительности основывается на том, что уравнения физики, выраженные в произвольных координатах, должны быть инвариантны по отношению к преобразованиям из группы Лоренца. См. наше дополнение в конце книги. — *Прим. перев.*

определяется естественный репер e_{μ} , образованный единичными векторами, касательными к y^{μ} . В связи с этим во всех предыдущих определениях удобно заменить обычную производную на ковариантную производную, определенную в гл. 14 (§ 10).

Скорость движущейся материальной точки, являющаяся функцией от параметра λ , определяется четырехмерным вектором

$$u = \frac{dM}{d\lambda} \quad (8.149)$$

с компонентами

$$u^{\mu} = \frac{dy^{\mu}}{d\lambda}. \quad (8.150)$$

Поскольку для естественного репера e_{μ} контравариантные компоненты du равны ∇u^{μ} [см. (14.104)], то ускорение движущейся точки

$$\gamma = \frac{du}{d\lambda} \quad (8.151)$$

характеризуется компонентами

$$\gamma^{\mu} = \frac{\nabla u^{\mu}}{d\lambda} = u^{\rho} \nabla_{\rho} u^{\mu}. \quad (8.152)$$

Таким образом,

$$\gamma^{\mu} = \frac{d}{d\lambda} \left(u^{\mu} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} u^{\nu} dy^{\sigma} \right) = \frac{du^{\mu}}{d\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} u^{\nu} u^{\sigma}. \quad (8.153)$$

Если ускорение рассматриваемой точки все время равно нулю, то в евклидовом пространстве она будет двигаться по прямой линии. Уравнение этой же прямой в произвольных координатах имеет вид

$$\frac{du^{\mu}}{d\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} u^{\nu} u^{\sigma} = 0 \quad (8.154)$$

или вне зависимости от выбора криволинейных координат

$$\frac{d^2 y^{\mu}}{d\lambda^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} \frac{dy^{\nu}}{d\lambda} \frac{dy^{\sigma}}{d\lambda} = 0. \quad (8.155)$$

За параметр λ можно взять абсциссу s , или же скалярным параметром можно считать время t ¹⁾.

В прямолинейных координатах (которые могут быть как косоугольными, так и прямоугольными) $g_{\mu\nu}$ постоянны и $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ обращаются в нуль. Поэтому в прямолинейных координатах (x^{μ}) траектории свободных материальных точек записываются в виде

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} = 0. \quad (8.156)$$

¹⁾ Разумеется, время можно считать скалярным параметром только в нерелятивистском случае. — *Прим. перев.*

В галилеевой системе отсчета эти уравнения характеризуют прямолинейное и равномерное движение тела:

$$\frac{d^2 x^p}{dt^2} = 0. \quad (8.157)$$

Уравнения для прямолинейных траекторий ($\gamma^\mu = 0$), записанные в произвольных координатах

$$\boxed{u^\rho \nabla_\rho u^\mu = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{d^2 y^\mu}{d\lambda^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} \frac{dy^\nu}{d\lambda} \frac{dy^\sigma}{d\lambda} = 0}, \quad (8.158)$$

показывают, что определяемые с их помощью прямые являются также геодезическими несобственно евклидова векторного пространства.

§ 12. Основной закон динамики точки

Если на материальную точку действует сила, то по-прежнему будет справедлив релятивистский закон (8.18)

$$\mathbf{F} = m_0 \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} = m_0 c^2 \frac{d\mathbf{u}}{ds},$$

который в § 2 записывался в галилеевой системе координат. Но только при использовании произвольных криволинейных координат приращения du^μ нужно заменить на абсолютные дифференциалы ∇u^μ . В результате получим

$$F^\mu = m_0 c^2 \frac{\nabla u^\mu}{ds}, \quad (8.159)$$

т. е.

$$F^\mu = m_0 c^2 \frac{dy^\sigma}{ds} \nabla_\sigma u^\mu = m_0 c^2 u^\rho \nabla_\rho u^\mu. \quad (8.160)$$

Выражение (8.159) записывается также в виде

$$F^\mu = m_0 c^2 \left(\frac{du^\mu}{ds} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} u^\nu \frac{dy^\sigma}{ds} \right) \quad (8.161)$$

или

$$\boxed{F^\mu = m_0 c^2 \left(\frac{d^2 y^\mu}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} \frac{dy^\nu}{ds} \frac{dy^\sigma}{ds} \right)}. \quad (8.162)$$

Если к материальной точке приложена сила \mathbf{F} , то эта точка будет двигаться уже не по прямой, в произвольных координатах характеризуемой уравнениями (8.158), а по траектории, определяемой из (8.162). В частности, если на заряженную материальную точку действует электромагнитное поле, то компоненты F^μ будут соответствовать силе Лоренца, определяемой из (9.35).

§ 13. Движение однородной жидкости. Тензор энергии — импульса вещества

Выше мы ввели [см. (8.135)] симметричный тензор второго ранга, названный *тензором энергии — импульса вещества*:

$$M^{\rho\sigma} = \mu_0 c^2 u^\rho u^\sigma + P^{\rho\sigma}.$$

Здесь μ_0 плотность массы, а $P^{\rho\sigma}$ характеризует взаимодействия (давления или натяжения) внутри однородной жидкости. При этом в соответствии с (8.127) имеем

$$P^{\rho\sigma} u_\sigma = 0, \quad (8.163)$$

а из условия $u^\sigma u_\sigma = 1$ в соответствии с (8.138) получаем

$$M^{\rho\sigma} u_\sigma = \mu_0 c^2 u^\rho. \quad (8.164)$$

В частности, если речь идет об идеальной жидкости, то выражения для компонент тензора

$$P^{\rho\sigma} = p(u^\rho u^\sigma - g^{\rho\sigma}) \quad (8.165)$$

получаются из (8.145) в результате замены компонент $\gamma^{\rho\sigma}$, характеризующих галилееву систему отсчета, на компоненты $g^{\rho\sigma}$, соответствующие произвольным криволинейным координатам. Отсюда, согласно (8.135), получим

$$M^{\rho\sigma} = (\mu_0 c^2 + p) u^\rho u^\sigma - p g^{\rho\sigma}. \quad (8.166)$$

Условие (8.163) для идеальной жидкости тождественно выполняется, как это следует из выражения (8.165) для компонент $P^{\rho\sigma}$.

Для компонент силы F^μ , действующей на элемент объема однородной жидкости, имеют место соотношения, аналогичные (8.137). Заменяя частные производные на ковариантные, получаем

$$F^\mu = \nabla_\rho M^{\mu\rho}, \quad (8.167)$$

т. е.

$$F^\mu = \mu_0 c^2 (u^\rho \nabla_\rho u^\mu + u^\mu \nabla_\rho u^\rho) + \nabla_\rho P^{\mu\rho}. \quad (8.168)$$

Компоненты F^μ четырехмерного вектора \mathbf{F} должны в соответствии с (8.127) подчиняться условию ортогональности

$$F^\mu u_\mu = 0. \quad (8.169)$$

Применяя это условие к (8.168), с учетом соотношений

$$u_\mu u^\mu = 1, \quad u^\mu \nabla_\rho u_\mu = u_\mu \nabla_\rho u^\mu = 0 \quad (8.170)$$

получаем

$$u_\mu \nabla_\rho P^{\mu\rho} + \mu_0 c^2 \nabla_\rho u^\rho = 0. \quad (8.171)$$

Если же мы имеем дело с идеальным газом, то из выражения (8.165) для $P^{\mu\rho}$ следует, что

$$u_{\mu}\nabla_{\rho}P^{\mu\rho} = u_{\mu}\nabla_{\rho}p(u^{\mu}u^{\rho} - g^{\mu\rho}) = p\nabla_{\rho}u^{\rho}. \quad (8.172)$$

Таким образом, для идеального газа условие (8.169) [а, следовательно, и (8.171)] будет выполняться в том случае, если имеет место уравнение непрерывности

$$\nabla_{\rho}u^{\rho} = 0. \quad (8.173)$$

§ 14. Уравнения сохранения и движения

Следующие уравнения характеризуют движение однородной жидкости.

1. Уравнение сохранения. Оно выводится из предыдущих выражений в результате интегрирования инвариантной плотности (см. гл. 14, § 11).

$$\sqrt{-g}u_{\mu}F^{\mu} = \sqrt{-g}u^{\mu}\nabla_{\rho}M_{\mu}^{\rho} \quad (8.174)$$

по элементу объема четырехмерного пространства $d\tau = dy^1 \times dy^2 \times dy^3 \times dy^0$. В результате получаем

$$\int (u^{\mu}\nabla_{\rho}M_{\mu}^{\rho}) \sqrt{-g} d\tau = 0. \quad (8.175)$$

2. Уравнения движения. Они получаются при помощи тензорной плотности, образованной из соотношения (8.167):

$$\sqrt{-g}F^{\rho} = \sqrt{-g}\nabla_{\rho}M^{\rho\rho}. \quad (8.176)$$

Ее нужно проинтегрировать по элементам пространственного объема $d\mathcal{V} = dy^1 \times dy^2 \times dy^3$. В результате уравнения движения произвольной однородной жидкости запишутся в виде

$$\int F_{\rho} \sqrt{-g} d\mathcal{V} = \int (\nabla_{\rho}M_{\rho}^{\rho}) \sqrt{-g} d\mathcal{V}. \quad (8.177)$$

Чтобы преобразовать это выражение, воспользуемся следующим тождеством, справедливым для любого симметричного тензора $M_{\rho}^{\rho} = g_{\rho\lambda}M^{\lambda\rho}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}\nabla_{\rho}M_{\rho}^{\rho} &= \sqrt{-g}\left(\partial_{\rho}M_{\rho}^{\rho} - \left\{\begin{matrix} \sigma \\ \rho\rho \end{matrix}\right\}M_{\sigma}^{\rho} + \left\{\begin{matrix} \rho \\ \sigma\rho \end{matrix}\right\}M_{\rho}^{\sigma}\right) = \\ &= \partial_{\rho}M_{\rho}^{\rho} - \frac{\sqrt{-g}}{2}M^{\lambda\rho}(\partial_{\rho}g_{\rho\lambda} + \partial_{\rho}g_{\rho\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\rho\rho}) = \partial_{\rho}M_{\rho}^{\rho} - \\ &\quad - \frac{1}{2}M^{\lambda\rho}\partial_{\rho}g_{\lambda\rho}, \quad (8.178) \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{M}_\mu^\rho = \sqrt{-g} M_\mu^\rho, \quad \mathcal{M}^{\lambda\rho} = \sqrt{-g} M^{\lambda\rho}. \quad (8.179)$$

С учетом тождества (8.178) уравнения движения (8.177) переписутся в виде

$$\int F_p \sqrt{-g} d\mathcal{V} = \int \left(\partial_\rho \mathcal{M}_p^\rho - \frac{1}{2} \mathcal{M}^{\lambda\rho} \partial_\rho g_{\lambda\rho} \right) d\mathcal{V}. \quad (8.180)$$

§ 15. Частный случай: уравнение сохранения и уравнения движения для идеальной жидкости

1. Уравнение сохранения. В случае идеальной жидкости мы можем воспользоваться выражениями (8.166) для компонент тензора энергии — импульса $M^{\rho\sigma}$. Тогда

$$M_\mu^\rho = (\mu_0 c^2 + p) u_\mu u^\rho - p \delta_\mu^\rho, \quad (8.181)$$

и уравнение сохранения (8.175), с учетом условий (8.170), переписывается в виде

$$\int \sqrt{-g} \left(\mu_0 + \frac{p}{c^2} \right) \nabla_\rho u^\rho d\tau = 0. \quad (8.182)$$

При этом интеграл (8.182) равен

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-g} \left(\mu_0 + \frac{p}{c^2} \right) \nabla_\rho u^\rho d\tau &= \\ &= \int \partial_\rho (\mu_0 \sqrt{-g} u^\rho) d\tau + \int \frac{p}{c^2} \partial_\rho (\sqrt{-g} u^\rho) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (8.183)$$

Проинтегрируем (8.183) по трубке четырехмерного пространства, определяемой линией тока и ограничиваемой двумя пространственными сечениями Σ и Σ' . С помощью теоремы Грина первый интеграл преобразуется в интеграл по поверхности; он будет характеризовать поток вектора $\mu_0 \sqrt{-g} u^\rho$ через замкнутую поверхность, образуемую стенкой L четырехмерной трубки и двумя сечениями Σ и Σ' . Полагая

$$dS_\rho = \frac{\sqrt{-g}}{6} \varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma} dy^\mu \times dy^\nu \times dy^\sigma, \quad (8.184)$$

перепишем (8.183) в виде

$$\int_{L+\Sigma-\Sigma'} \mu_0 \sqrt{-g} u^\rho dS_\rho + \int \frac{p}{c^2} \partial_\rho (\sqrt{-g} u^\rho) d\tau = 0. \quad (8.185)$$

Интегрирование по стенке L , образуемой линиями тока, не дает никакого вклада. Если же давление внутри жидкости обращается в нуль ($p = 0$), то из (8.185) следует

$$m = m', \quad (8.186)$$

где

$$m = \int_{\Sigma} \mu_0 \sqrt{-g} u^p dS_p = \int_{\Sigma} \mu dS_0 \quad (8.187)$$

и

$$\mu = \mu_0 \sqrt{-g} u^0. \quad (8.188)$$

2. Уравнения движения. Уравнения движения получаются из (8.180) в результате замены M_p^p на выражение, определяемое из (8.181). Действительно, с учетом (8.106) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p^q &= \sqrt{-g} \left[c^2 \left(\mu_0 + \frac{p}{c^2} \right) u_p u^q - p \delta_p^q \right] = \\ &= \sqrt{-g} \left[c^2 \left(\mu_0 + \frac{p}{c^2} \right) v_p \frac{v^q (u^0)^2}{c^2} - p \delta_p^q \right], \end{aligned} \quad (8.189)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p^0 &= \sqrt{-g} c^2 \left(\mu_0 + \frac{p}{c^2} \right) u_p u^0 = \\ &= \sqrt{-g} c^2 \left(\mu_0 + \frac{p}{c^2} \right) \frac{v_p (u^0)^2}{c}. \end{aligned} \quad (8.190)$$

Поскольку из (8.189) и (8.190) следует

$$\mathcal{M}_p^q = \mathcal{M}_p^0 \frac{v^q}{c} - p \sqrt{-g} \delta_p^q, \quad (8.191)$$

то будем также иметь

$$\begin{aligned} \partial_p \mathcal{M}_p^p &= \partial_0 \mathcal{M}_p^0 + \partial_q \mathcal{M}_p^q = \partial_0 \mathcal{M}_p^0 + \frac{v^q}{c} \partial_q \mathcal{M}_p^0 - \partial_p (\sqrt{-g} p) = \\ &= \partial_0 \mathcal{M}_p^0 - \partial_p (\sqrt{-g} p). \end{aligned} \quad (8.192)$$

Уравнения движения (8.180) принимают теперь следующий вид:

$$\begin{aligned} \int F_p \sqrt{-g} d\mathcal{V} &= \int \partial_0 \mathcal{M}_p^0 d\mathcal{V} - \int \partial_p (\sqrt{-g} p) d\mathcal{V} - \\ &- \frac{1}{2} \int \mathcal{M}^{\lambda\rho} \partial_p g_{\lambda\rho} d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (8.193)$$

Поскольку в (8.193) член с дивергенцией обращается в нуль, то окончательно

$$\int F_p \sqrt{-g} d\mathcal{V} = \int \frac{d\mathcal{L}_p}{dt} d\mathcal{V} - \frac{1}{2} \int \mathcal{M}^{\lambda\rho} \partial_p g_{\lambda\rho} d\mathcal{V}, \quad (8.194)$$

где

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{c} \mathcal{M}_p^0 = \sqrt{-g} \left(\mu_0 + \frac{p}{c^2} \right) v_p (u^0)^2. \quad (8.195)$$

Таким образом, из уравнений движения идеальной жидкости, записанных в произвольных криволинейных координатах, следует, что величины $\mathcal{L}_p = \frac{1}{c} \mathcal{M}_p^0$ ведут себя как компоненты импульса.

ГЛАВА 9

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

А. КОВАРИАНТНАЯ ФОРМА ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА

§ 1. Электромагнитное поле и тензоры второго ранга

Воспользуемся действительными координатами x^μ ($x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^0 = ct$). При записи уравнений электромагнитной теории мы будем пользоваться условиями ортонормированности

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu},$$

так что

$$g_{pq} = g^{pq} = -\delta_{pq}, \quad g_{p0} = -g^{p0} = 0, \quad g_{00} = g^{00} = 1.$$

Запишем вновь уравнения Максвелла (3. I) и (3. III)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi \mathbf{I}}{c}, \quad (9. \text{Ia})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (9. \text{Iб})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (9. \text{IIa})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (9. \text{IIб})$$

Если воспользоваться обозначениями

$$\partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p} \quad (p = 1, 2, 3), \quad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad (9.1)$$

и ввести четырехмерный вектор плотности тока, компоненты которого равны

$$J_\mu = \left(-\frac{4\pi \mathbf{I}}{c}, 4\pi\rho \right), \quad (9.2)$$

то системы уравнений (9. I) и (9. III) переписываются также в виде

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \\ \partial_p H_q - \partial_q H_p - \partial_0 D_r = -J_r, \\ \sum_p \partial_p D_p = J_0, \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{(б)} \\ \partial_p E_q - \partial_q E_p + \partial_0 B_r = 0, \\ \sum_p \partial_p B_p = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(9. I)} \\ \text{(9. III)} \end{array}$$

где $p, q, r = 1, 2, 3$ и в (9. I) индексы p, q, r образуют циклическую перестановку индексов 1, 2, 3.

Уравнения (9. I) и (9. III) не меняются при специальном преобразовании Лоренца

$$x'^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3, \quad x'^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (9.3)$$

т. е. они по-прежнему записываются в виде

$$\begin{array}{l} \partial'_p H'_q - \partial'_q H'_p - \partial'_0 D'_r = -J'_r, \\ \sum_p \partial'_p D'_p = J'^0, \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \partial'_p E'_q - \partial'_q E'_p + \partial'_0 B'_r = 0, \\ \sum_p \partial'_p B'_p = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(9. I')} \\ \text{(9. III')} \end{array}$$

если только при этом $J(J_r, J_0)$ преобразуются как компоненты четырехмерного вектора:

$$J'_1 = \frac{J_1 + \beta J_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad J'_2 = J_2, \quad J'_3 = J_3, \quad J'_0 = \frac{J_0 + \beta J_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9.4)$$

и если векторы H, D и B, E преобразуются следующим образом:

$$\begin{array}{l} D'_1 = D_1, \quad D'_2 = \frac{D_2 - \beta H_3}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad D'_3 = \frac{D_3 + \beta H_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ E'_1 = E_1, \quad E'_2 = \frac{E_2 - \beta B_3}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E'_3 = \frac{E_3 + \beta B_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{array} \quad (9.5a)$$

$$\begin{array}{l} H'_1 = H_1, \quad H'_2 = \frac{H_2 + \beta D_3}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad H'_3 = \frac{H_3 - \beta D_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ B'_1 = B_1, \quad B'_2 = \frac{B_2 + \beta E_3}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad B'_3 = \frac{B_3 - \beta E_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{array} \quad (9.5б)$$

В качестве упражнения проверим, что обе группы уравнений Максвелла не меняют своего вида в результате преобразования Лоренца. Согласно (9.3),

$$\partial_1 = \frac{\partial'_1 - \beta \partial'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \partial_2 = \partial'_2, \quad \partial_3 = \partial'_3, \quad \partial_0 = \frac{\partial'_0 - \beta \partial'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

поскольку

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \partial'_\lambda.$$

Таким образом, уравнения из групп (9.5а) и (9.5б) записываются в виде

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \left\{ \begin{array}{l} \text{(а)} \quad \left. \begin{array}{l} \partial'_2 H_3 - \partial'_3 H_2 - \\ \quad - \left(\frac{\partial'_0 - \beta \partial'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) D_1 = -J_1, \\ \partial'_3 H_1 - \left(\frac{\partial'_1 - \beta \partial'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) H_3 - \\ \quad - \left(\frac{\partial'_0 - \beta \partial'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) D_2 = -J_2, \\ \left(\frac{\partial'_1 - \beta \partial'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) H_2 - \partial'_2 H_1 - \\ \quad - \left(\frac{\partial'_0 - \beta \partial'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) D_3 = -J_3, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(б)} \quad \left. \begin{array}{l} \partial'_2 E_3 - \partial'_3 E_2 + \\ \quad + \left(\frac{\partial'_0 - \beta \partial'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) B_1 = 0, \\ \partial'_3 E_1 - \left(\frac{\partial'_1 - \beta \partial'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) E_3 + \\ \quad + \left(\frac{\partial'_0 - \beta \partial'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) B_2 = 0, \\ \left(\frac{\partial'_1 - \beta \partial'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) E_2 - \partial'_2 E_1 + \\ \quad + \left(\frac{\partial'_0 - \beta \partial'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) B_3 = 0, \end{array} \right\} \\ \\ \text{(II)} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial'_1 - \beta \partial'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) D_1 + \partial'_2 D_2 + \\ \quad + \partial'_3 D_3 = J_0, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left(\frac{\partial'_1 - \beta \partial'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) B_1 + \partial'_2 B_2 + \\ \quad + \partial'_3 B_3 = 0. \end{array} \end{array} \right.$$

Если теперь воспользоваться соотношениями (9.5), или обратными соотношениями

$$\begin{array}{l} D_1 = D'_1, \quad D_2 = \frac{D'_2 + \beta H'_3}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ \quad \quad \quad D_3 = \frac{D'_3 - \beta H'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ H_1 = H'_1, \quad H_2 = \frac{H'_2 - \beta D'_3}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ \quad \quad \quad H_3 = \frac{H'_3 + \beta D'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{array} \left| \begin{array}{l} E_1 = E'_1, \quad E_2 = \frac{E'_2 + \beta B'_3}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ \quad \quad \quad E_3 = \frac{E'_3 - \beta B'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ B_1 = B'_1, \quad B_2 = \frac{B'_2 - \beta E'_3}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ \quad \quad \quad B_3 = \frac{B'_3 + \beta E'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{array} \right.$$

и подставить эти выражения в (9. I) и (9. III), то получим

$$\begin{array}{l}
 \text{(I)} \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)'} \\ \text{(б)'} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \partial'_2 H'_3 - \partial'_3 H'_2 - \partial'_0 D'_1 + \\ \quad + \beta \sum_p \partial'_p D_p = -J_1 \sqrt{1 - \beta^2}, \\ \partial'_3 H'_1 - \partial'_1 H'_3 - \partial'_0 D'_2 = -J_2, \\ \partial'_1 H'_2 - \partial'_2 H'_1 - \partial'_0 D'_3 = -J_3, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \partial'_2 E'_3 - \partial'_3 E'_2 + \partial'_0 B'_1 - \\ \quad - \beta \sum_p \partial'_p B'_p = 0, \\ \partial'_3 E'_1 - \partial'_1 E'_3 + \partial'_0 B'_2 = 0, \\ \partial'_1 E'_2 - \partial'_2 E'_1 + \partial'_0 B'_3 = 0, \end{array} \right. \\
 \text{(III)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_p \partial'_p D'_p + \beta [(\partial'_2 H'_3 - \partial'_3 H'_2) - \\ \quad - \partial'_0 D'_1] = J_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \\ \sum_p \partial'_p B'_p - \beta [(\partial'_2 E'_3 - \partial'_3 E'_2) + \\ \quad + \partial'_0 B'_1] = 0. \end{array} \right.
 \end{array}$$

Сравнивая (а)'(I) и (а)'(III), (б)'(I) и (б)'(III) при выполнении условия (9.4) получим уравнения (9. I') и (9. III').

Как видно, формулы преобразования (9.5а) и (9.5б) совпадают с формулами (6.87), определяющими преобразование антисимметричного тензора второго ранга. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить

$$H_p = \epsilon_{pqr} f^{qr}, \quad D_p = f_{p0} = -f^{p0}, \quad (9.6)$$

т. е.

$$\begin{aligned}
 H_1 = f_{23} = f^{23}, \quad H_2 = f_{31} = f^{31}, \quad H_3 = f_{12} = f^{12}, \\
 D_1 = f_{10} = -f^{10}, \quad D_2 = f_{20} = -f^{20}, \quad D_3 = f_{30} = -f^{30},
 \end{aligned}$$

и

$$B_p = \epsilon_{pqr} \varphi^{qr}, \quad E_p = \varphi_{p0} = -\varphi^{p0}, \quad (9.7)$$

т. е.

$$\begin{aligned}
 B_1 = \varphi_{23} = \varphi^{23}, \quad B_2 = \varphi_{31} = \varphi^{31}, \quad B_3 = \varphi_{12} = \varphi^{12}, \\
 E_1 = \varphi_{10} = -\varphi^{10}, \quad E_2 = \varphi_{20} = -\varphi^{20}, \quad E_3 = \varphi_{30} = -\varphi^{30},
 \end{aligned}$$

после чего формулы (9.5) будут тождественны формулам (6.87). [В (9.6) и (9.7) p, q, r принимают значения 1, 2, 3, а ϵ_{pqr} равняется $+1$ или -1 в зависимости от того, будут ли индексы образовывать четную или нечетную перестановку чисел 1, 2, 3, или равняться нулю, если два из индексов равны между собой.]

Таким образом, компоненты векторов напряженности магнитного поля \mathbf{H} и электрической индукции \mathbf{D} являются компонентами антисимметричного тензора второго ранга $f_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 0$). Аналогично компоненты векторов напряженности электрического поля и магнитной индукции объединяются в единый тензор $\varphi_{\mu\nu}$.

Выражения (9.6) и (9.7) можно переписать также в виде

$$\begin{aligned}
 (f_{\mu\nu}) &= \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & D_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & D_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & D_3 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 & 0 \end{pmatrix}, \\
 (\varphi_{\mu\nu}) &= \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{9.8}$$

Если воспользоваться этими обозначениями, то уравнения (9. Ia) и (9. IIIa) примут вид

$$\boxed{\partial_\rho f^{\mu\rho} = J^\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, 0. \tag{9. IVa}$$

Уравнения (9. Ia) соответствуют значениям $\mu = \rho = 1, 2, 3$, а уравнение (9. IIIa) — значению $\mu = 0$.

Уравнения (9. Ib) и (9. IIIb) принимают следующий вид:

$$\boxed{\partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\mu \varphi_{\nu\rho} = 0}. \tag{9. IVб}$$

Уравнения (9. Ib) получаются в том случае, если один из индексов μ, ν, ρ равен нулю, а (9. IIIб) — если $\mu, \nu, \rho = 1, 2, 3$.

Наконец, из (9. IVa) непосредственно следует *уравнение непрерывности*

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu = 0}, \tag{9.9}$$

получающееся при переходе в (9. III') к четырехмерным обозначениям.

§ 2. Электромагнитный потенциал

Воспользуемся соотношениями (3. IV), с помощью которых \mathbf{E} и \mathbf{B} выражаются через электромагнитный потенциал:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{3. IVa}$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \tag{3. IVб}$$

Вводя обозначения

$$\varphi_\mu = (\mathbf{A}, -V), \tag{9.10}$$

можно переписать (3. IV) следующим образом:

$$E_p = \partial_p \varphi_0 - \partial_0 \varphi_p, \quad (9.11a)$$

$$B_p = \partial_q \varphi_r - \partial_r \varphi_q, \quad (9.11б)$$

где p, q, r образуют циклическую перестановку индексов 1, 2, 3.

Принимая во внимание (9.7), объединим эти уравнения в одну систему

$$\boxed{\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu}, \quad (9. IVв)$$

откуда при μ или $\nu = 0$ получается (9.11a), а при μ или $\nu \neq 0$ — (9.11б).

Таким образом, электромагнитный потенциал образует четырехмерный вектор с компонентами φ_μ . Из (9. IVв) непосредственно видно, что этот четырехмерный вектор определяется только с точностью до градиента. Это связано с тем, что поле $\varphi_{\mu\nu}$ не изменится, если φ_μ заменить на

$$\overline{\varphi}_\mu = \varphi_\mu - \partial_\mu \psi. \quad (9.12)$$

Преобразование (9.12), введенное Вейлем для характеристики изменений эталона длины, называется калибровочным преобразованием¹⁾. Говорят, что электромагнитный потенциал определен только с точностью до преобразования калибровки.

§ 3. Уравнения Максвелла и общее преобразование Лоренца

Уравнения Максвелла можно привести к одной из двух следующих эквивалентных форм:

$$\boxed{\partial_\rho f^{\mu\rho} = J^\mu,} \quad (9. IVa)$$

$$\partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\mu \varphi_{\nu\rho} = 0, \quad (9. IVб)$$

или

$$\boxed{\partial_\rho f^{\mu\rho} = J^\mu,} \quad (9. IVa)$$

$$\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu. \quad (9. IVв)$$

Действительно, из условий (9. IVв) непосредственно получаются условия (9. IVб), связывающие компоненты тензора напряженности

¹⁾ Часто применяется также термин „градиентное преобразование“. — *Прим. перев*

поля $\varphi_{\mu\nu}$. Из (9.IVв) следует, что

$$\partial^\mu \varphi_{\mu\nu} = \square \varphi_\nu - \partial_\nu \partial^\mu \varphi_\mu, \quad (9.13)$$

где

$$\square = \partial^\rho \partial_\rho = \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma = \partial_0^2 - \sum_\rho \partial_\rho^2.$$

Если для электромагнитного потенциала выполняется условие Лоренца (3.VII) (см. гл. 3, § 6), т. е. если ¹⁾

$$\partial^\mu \varphi_\mu = 0, \quad (9.14)$$

то (9.13) принимает вид

$$\square \varphi_\nu = \partial^\mu \varphi_{\mu\nu}. \quad (9.15)$$

Для среды с незначительной дисперсией диэлектрическая проницаемость ϵ и магнитная проницаемость μ обладают свойствами

$$\epsilon\mu = 1, \quad \varphi_{\mu\nu} = \mu f_{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon} f_{\mu\nu},$$

и

$$\square \varphi_\nu = -\mu J_\nu. \quad (9.16)$$

Определяя с помощью условия (9.IVв) выражение $\square \varphi_{\mu\nu}$ и используя при этом (9.16), получаем

$$\square \varphi_{\mu\nu} = -\mu (\partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu). \quad (9.17)$$

Часто уравнение Максвелла оказывается удобным записывать с помощью тензора „дуального“ поля ²⁾

$$\varphi^{\mu\nu*} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma}, \quad \varphi_{\mu\nu}^* = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma}, \quad (9.18)$$

где в зависимости от того, образуют ли индексы μ, ν, ρ, σ четную перестановку чисел 1, 2, 3, 0, нечетную перестановку этих же

¹⁾ Условие Лоренца $\partial^\mu \varphi_\mu = \partial^\mu \varphi_\mu^- = 0$ накладывает на калибровку ограничение, так как ψ должно будет подчиняться ограничительному условию $\square \psi = 0$.

²⁾ Действительно, определение дуального тензора позволяет записать

$$\varphi^{\mu\nu*} = \frac{1}{2\sqrt{-\eta}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma}, \quad \varphi_{\mu\nu}^* = -\frac{\sqrt{-\eta}}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma}.$$

В принятой нами системе координат $\sqrt{-\eta} = 1$. Величина η представляет собой детерминант, образованный из компонент $\eta_{\mu\nu}$ метрики Минковского. С выбором именно этой метрики получается определение дуального тензора в форме (9.18).

чисел или, наконец, какие-либо два из этих индексов равны между собой, имеет место одна из следующих трех возможностей:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, \\ -1, \\ 0. \end{cases} \quad (9.19)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi^{*23} &= \varphi_{23}^* = \varphi_{10} = -\varphi^{10}, & \varphi^{*10} &= -\varphi_{10}^* = \varphi_{23} = \varphi^{23}, \\ \varphi^{*31} &= \varphi_{31}^* = \varphi_{20} = -\varphi^{20}, & \varphi^{*20} &= -\varphi_{20}^* = \varphi_{31} = \varphi^{31}, \\ \varphi^{*12} &= \varphi_{12}^* = \varphi_{30} = -\varphi^{30}, & \varphi^{*30} &= -\varphi_{30}^* = \varphi_{12} = \varphi^{12}, \end{aligned} \quad (9.20)$$

и уравнения (9. IVб) переписываются в виде

$$\boxed{\partial_\rho \varphi^{*\mu\nu} = 0.} \quad (9. IVб)^*$$

Если производится общее преобразование Лоренца

$$x^\mu = a^\mu_\nu x'^\nu, \quad x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu,$$

то коэффициенты $a^\mu_\nu = \partial x^\mu / \partial x'^\nu$ и $a^\mu_\nu = \partial x'^\mu / \partial x^\nu$ будут связаны характерными для преобразования Лоренца соотношениями, а величины

$$\varphi_{\mu\nu}, J_\mu \text{ и } \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} = a^\lambda_\mu \partial'_\lambda$$

будут преобразовываться как компоненты четырехмерных векторов. С другой стороны, тензоры индукции и напряженности поля $f^{\mu\nu}$ и $\varphi^{\mu\nu}$ будут преобразовываться в соответствии с (6.86) и (6.87), т. е. как компоненты антисимметричных тензоров второго ранга:

$$f'_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (a^\rho_\mu a^\sigma_\nu - a^\sigma_\mu a^\rho_\nu) f_{\rho\sigma}, \quad f'^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (a^\mu_\rho a^\nu_\sigma - a^\sigma_\rho a^\mu_\nu) f^{\rho\sigma}, \quad (9.21)$$

$$\varphi'_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (a^\rho_\mu a^\sigma_\nu - a^\sigma_\mu a^\rho_\nu) \varphi_{\rho\sigma}, \quad \varphi'^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (a^\mu_\rho a^\nu_\sigma - a^\sigma_\rho a^\mu_\nu) \varphi^{\rho\sigma}. \quad (9.22)$$

Этим обеспечивается ковариантность уравнений Максвелла (9. IVа), (9. IVб) [или (9. IVб) *] и (9. IVв) ¹⁾.

¹⁾ Ковариантность уравнений Максвелла по отношению к преобразованиям Лоренца была установлена в работах Пуанкаре [89, 114], Эйнштейна [83] и Минковского [115].

§ 4. Электронная теория Лоренца. Тензор энергии — импульса

1. „Микроскопические“ напряженности поля в четырехмерный вектор тока. Уравнения Лоренца для микроскопических напряженностей

$$\text{rot } \mathbf{h} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, \quad (9.23)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0, \quad (9.24)$$

$$\text{div } \mathbf{e} = 4\pi\rho, \quad (9.25)$$

$$\text{div } \mathbf{h} = 0, \quad (9.26)$$

непосредственно записываются при помощи четырехмерного релятивистского формализма, если только положить

$$(\varphi_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & h_3 & -h_2 & e_1 \\ -h_3 & 0 & h_1 & e_2 \\ h_2 & -h_1 & 0 & e_3 \\ -e_1 & -e_2 & -e_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.27)$$

$$j^\mu = \left(\frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, 4\pi\rho \right), \text{ где } \mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3). \quad (9.28)$$

При этом уравнения (9.23) — (9.26) переписываются в виде

$$\partial_\rho \varphi^{\mu\rho} = j^\mu, \quad (9. \text{Va})$$

$$\partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\mu \varphi_{\nu\rho} = 0, \quad (9. \text{Vб})$$

где (9. Va) объединяет уравнения (9.23) и (9.25), в которых правая часть не равна нулю, а (9. Vб) объединяет уравнения (9.24) и (9.26), в которых правая часть равна нулю.

Из (9. Va) следует уравнение непрерывности

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (9.29)$$

Согласно (9.28), ток j_μ пропорционален четырехмерной скорости:

$$j_\mu = 4\pi\rho_0 u_\mu, \quad (9.30)$$

где ρ_0 — плотность заряда в собственной системе отсчета, т. е. та плотность заряда, которую отмечает наблюдатель, по отношению к зарядам остающийся неподвижным. Действительно, из (9.30) и (7.12) следует, что

$$j_p = 4\pi\rho_0 u_p = -\frac{4\pi\rho_0 v^p}{c\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{4\pi\rho}{c} v^p, \quad (9.31a)$$

$$j_0 = 4\pi\rho_0 u_0 = \frac{4\pi\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = 4\pi\rho, \quad (9.31b)$$

где

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (9.32)$$

Согласно соотношениям (5.43) и (9.32), количество электричества, содержащееся в объеме $d\mathcal{V}$, таким образом, будет равно

$$dq = \rho d\mathcal{V} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}} d\mathcal{V}_0 \sqrt{1-\beta^2} = \rho_0 d\mathcal{V}_0 = dq_0, \quad (9.33)$$

т. е. является *инвариантом*. В частности, в любой лоренцевой системе отсчета заряд электрона q имеет одно и то же значение.

2. Сила Лоренца. С помощью векторного выражения для силы Лоренца

$$\mathbf{f} = \rho \left(\mathbf{e} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{h} \right] \right) \quad (9.34)$$

можно определить три пространственные компоненты f^p четырехмерного вектора

$$f^\mu = \frac{1}{4\pi} \varphi^{\rho\mu} j_\rho. \quad (9.35)$$

Действительно,

$$f^p = \frac{1}{4\pi} (\varphi_{pq} j^q + \varphi_{p0} j^0), \quad (9.36)$$

и, согласно (9.27) и (9.31),

$$f^p = \rho \left(e_p + \varphi_{pq} \frac{v^q}{c} \right) = \rho \left(e_p + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{h} \right]_p \right). \quad (9.37)$$

Четвертая компонента записывается в виде

$$f^0 = \frac{1}{4\pi} \varphi^{p0} j_p = \frac{\rho}{c} \varphi_{p0} v^p = \rho \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{e} \right). \quad (9.38)$$

Согласно (9.37), она характеризует работу $\mathbf{f} \cdot (d\mathbf{l}/dx^0)$, совершаемую электромагнитными силами за единицу времени.

3. Тензор энергии — импульса или тензор Максвелла. Рассмотрим тензор второго ранга

$$\tau'_\mu = -\varphi_{\mu\rho}\varphi^{\lambda\rho} + \frac{1}{4}\delta_\mu^\lambda\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma} \quad (9.39)$$

или

$$\tau_{\mu\nu} = g_{\nu\lambda}\tau_\mu^\lambda = -\varphi_{\mu\rho}\varphi_\nu^\rho + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}, \quad (9.40)$$

где

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} (-1, -1, -1, +1). \quad (9.41)$$

Этот тензор симметричен:

$$\tau_{\mu\nu} = \tau_{\nu\mu}, \quad (9.42)$$

и значения его компонент будут, согласно (9.27), определяться из следующей таблицы:

$$(\tau_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} & -4\pi s_1 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} & -4\pi s_2 \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} & -4\pi s_3 \\ -4\pi s_1 & -4\pi s_2 & -4\pi s_3 & 4\pi w \end{pmatrix}, \quad (9.43)$$

где

$$\tau_{pq} = - (e_p e_q + h_p h_q) + \frac{1}{2} \delta_{pq} (e^2 + h^2), \quad (9.44)$$

$$s_p = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{e} \times \mathbf{h}]_p, \quad (9.45)$$

$$w = \frac{1}{8\pi} (e^2 + h^2). \quad (9.46)$$

Таким образом, компоненты τ_{p0} тензора $\tau_{\mu\nu}$ характеризуют *плотность импульса*, соответствующую распределению зарядов, а величиной τ_{00} определяется *плотность энергии*.

Беря дивергенцию от выражения (9.39), получаем

$$\partial_\lambda \tau'_\mu = - (\partial_\lambda \varphi_{\mu\rho}) \varphi^{\lambda\rho} - \varphi_{\mu\rho} \partial_\lambda \varphi^{\lambda\rho} + \frac{1}{4} \partial_\mu (\varphi_{\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma}), \quad (9.47)$$

или, учитывая антисимметричность по отношению к λ , ρ и определение тока (9. Va),

$$\partial_\lambda \tau'_\mu = - \frac{1}{2} (\partial_\lambda \varphi_{\mu\rho} + \partial_\rho \varphi_{\lambda\mu}) \varphi^{\lambda\rho} + \varphi_{\mu\rho} j^\rho + \frac{1}{4} \partial_\mu (\varphi_{\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma}). \quad (9.48)$$

Но из второй группы уравнений Максвелла (9. IVб) следует, что

$$\partial_\lambda \tau'_\mu = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_{\rho\lambda}) \varphi^{\lambda\rho} + \varphi_{\mu\rho} j^\rho + \frac{1}{4} \partial_\mu (\varphi_{\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma}). \quad (9.49)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_{\rho\lambda}) \varphi^{\lambda\rho} &= \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} \eta^{\rho\tau} (\partial_\mu \varphi_{\rho\lambda}) \varphi_{\sigma\tau} = \frac{1}{4} \eta^{\lambda\sigma} \eta^{\rho\tau} \partial_\mu (\varphi_{\rho\lambda} \varphi_{\sigma\tau}) = \\ &= \frac{1}{4} \partial_\mu (\varphi_{\rho\lambda} \varphi^{\lambda\rho}) = -\frac{1}{4} \partial_\mu (\varphi_{\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma}), \end{aligned} \quad (9.50)$$

то уравнение (9.49) переписывается также в виде

$$\boxed{\partial_\lambda \tau_\mu^\lambda = \varphi_{\mu\rho} j^\rho.} \quad (9.51)$$

Принимая во внимание (9.35), получаем, что в правую часть уравнения (9.51) входит четырехмерный вектор

$$4\pi f_\mu = \varphi_{\rho\mu} j^\rho, \quad (9.52)$$

три пространственные компоненты которого соответствуют силе Лоренца. Поэтому

$$\partial_\lambda \tau_\mu^\lambda = -4\pi f_\mu \quad (9.53)$$

и четвертое соотношение (9.53) записывается в виде

$$\partial_\rho \tau_0^\rho + \partial_0 \tau_0^0 = -4\pi f_0, \quad (9.54)$$

т. е., согласно (9.43) и (9.38),

$$\boxed{\frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{s} = -\rho \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{e} \right).} \quad (9.55)$$

Это есть не что иное, как теорема Пойнтинга (3.52), перенесенная в теорию Лоренца. Таким образом, соотношение (9.53) включает как определение силы Лоренца, так и условие сохранения, которому должна подчиняться электромагнитная энергия.

§ 5. Уравнения Лоренца и уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла выводятся из микроскопических уравнений Лоренца при предположении, что среда находится в покое (см. книгу Лоренца [32], а также гл. 4, § 5 настоящей книги). Таким образом, уравнения Максвелла (3.1), (3. II), (3. III) и (3. V) имеют место для системы отсчета, связанной со средой, т. е. с проводником или диэлектриком. Именно для этой специальной системы отсчета выполняются соотношения между векторами напряженности и индукции $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Величины, относящиеся к указанной собственной системе отсчета, будем характеризовать

нулевым индексом. Так же, как в гл. 4, для этой системы получим следующие уравнения:

$$\operatorname{rot}^{(0)} \mathbf{H}^{(0)} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}^{(0)}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}^{(0)}, \quad \left| \operatorname{rot}^{(0)} \mathbf{E}^{(0)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(0)}}{\partial t} = 0, \quad (9.1)^0 \right.$$

$$\operatorname{div}^{(0)} \mathbf{D}^{(0)} = 4\pi\rho^{(0)}, \quad \left| \operatorname{div}^{(0)} \mathbf{B}^{(0)} = 0, \quad (9.11)^0 \right.$$

$$\mathbf{D}^{(0)} = \varepsilon \mathbf{E}^{(0)}, \quad (9.11a)^0$$

$$\mathbf{B}^{(0)} = \mu \mathbf{H}^{(0)}, \quad (9.11б)^0$$

$$\mathbf{I}^{(0)} = c_e \mathbf{E}^{(0)}, \quad (9.11в)^0$$

В частности, соотношение (9.11в)⁰ представляет собой закон Ома для системы, связанной со средой.

В § 1 настоящей главы было показано, что системы уравнений (9.1) и (9.11) инвариантны по отношению к преобразованию Лоренца, причем J_μ преобразуются как компоненты вектора, а (\mathbf{H}, \mathbf{D}) и (\mathbf{E}, \mathbf{B}) образуют два антисимметричных тензора второго ранга. Поэтому положим

$$(f_{\mu\nu}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & H_3^{(0)} & -H_2^{(0)} & D_1^{(0)} \\ -H_3^{(0)} & 0 & H_1^{(0)} & D_2^{(0)} \\ H_2^{(0)} & -H_1^{(0)} & 0 & D_3^{(0)} \\ -D_1^{(0)} & -D_2^{(0)} & -D_3^{(0)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.56)$$

$$(f_{\mu\nu}'^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & B_3^{(0)} & -B_2^{(0)} & E_1^{(0)} \\ -B_3^{(0)} & 0 & B_1^{(0)} & E_2^{(0)} \\ B_2^{(0)} & -B_1^{(0)} & 0 & E_3^{(0)} \\ -E_1^{(0)} & -E_2^{(0)} & -E_3^{(0)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_\mu^{(0)} = \left(-\frac{4\pi}{c} I^{(0)}, 4\pi\rho^{(0)} \right), \quad (9.57)$$

после чего уравнения (9.1)⁰, (9.11)⁰ и (9.11)⁰ примут вид

$$\partial_\rho^{(0)} f^{\mu\rho (0)} = J^\mu (0) \quad (9.1Va)^0$$

$$\partial_\rho^{(0)} \varphi_{\mu\nu}^{(0)} + \partial_\nu^{(0)} \varphi_{\rho\mu}^{(0)} + \partial_\mu^{(0)} \varphi_{\nu\rho}^{(0)} = 0, \quad (9.1Vб)^0$$

$$\left. \begin{aligned} f_{\rho 0}^{(0)} &= \varepsilon \varphi_{\rho 0}^{(0)}, \\ f_{\rho q}^{(0)} &= \frac{1}{\mu} \varphi_{\rho q}^{(0)}, \\ J_\rho^{(0)} &= -\frac{4\pi\sigma}{c} \varphi_{\rho 0}^{(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1Vг)^0$$

При применении общего преобразования Лоренца из (9. IVa)⁰ и (9. IVб)⁰ получаются системы уравнений (9. IVa) и (9. IVб), справедливые для произвольной лоренцевой системы отсчета (см. Минковский [115]):

$$\partial_\rho f^{\mu\rho} = J^\mu, \quad (9. IVa)$$

$$\partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\mu \varphi_{\nu\rho} = 0. \quad (9. IVб)$$

Вместе с тем уже из самой записи соотношений (9. IVг)⁰ видно, что они не инвариантны по отношению к преобразованию Лоренца. Приведенные выражения пригодны только для собственной, но не для произвольной галилеевой системы отсчета.

1. Четырехмерный вектор тока. Четырехмерный вектор тока J_μ , входящий в уравнения (9. IVa), получается из связанного со средой четырехмерного вектора $J_\mu^{(0)}$ при помощи преобразования Лоренца. Если составляющие $J^{(0)}$ обозначить через $\rho^{(0)}$ и $I^{(0)}$, то ими будут характеризоваться средние значения плотности заряда $\bar{\rho}$ и плотности тока проводимости $\bar{\mathbf{v}}$, входящих в микроскопическую теорию.

Взяв собственную систему отсчета за исходную и производя преобразование Лоренца, получим

$$J_\mu = a_\mu^\lambda J_\lambda^{(0)} = a_\mu^0 J_0^{(0)} + a_\mu^p J_p^{(0)}. \quad (9.58)$$

В частности, если производится преобразование Лоренца без поворота [с коэффициентами преобразования в виде (6.62) и (6.63)], то, согласно (9.58)¹⁾,

$$J_p = J_p^{(0)} - v_p \left\{ J_r^{(0)} v^r \frac{\alpha}{v^2} - \frac{J_0^{(0)}}{c \sqrt{1-\beta^2}} \right\}, \quad (9.59a)$$

$$J_0 = \frac{J_0^{(0)} - (J_r^{(0)} v^r / c)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (9.59)$$

где

$$v^2 = \sum_r (v^r)^2, \quad \beta^2 = \frac{v^2}{c^2}, \quad (9.60)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1. \quad (9.61)$$

¹⁾ В самом деле,

$$a_0^0 = u_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad a_p^0 = a_0^p = u_p,$$

$$a_p^r = a_r^p = \delta_p^r + \frac{\alpha u_p}{u_s u^s} u^r,$$

откуда непосредственно получают соотношения (9.59a) или (9.59б).

Вводя компоненты четырехмерной скорости, перепишем (9.59) также в виде ¹⁾

$$J_p = J_0^{(0)} u_p + J_p^{(0)} + \frac{\alpha u_p}{u_s u^s} (J_r^{(0)} u^r), \quad (9.62a)$$

$$J_0 = J_0^{(0)} u_0 - J_r^{(0)} u^r. \quad (9.62b)$$

Формулу (9.62a) можно привести к следующему виду:

$$J_p = J_p^{(0)} + \rho_1 u_p, \quad (9.63)$$

где

$$\rho_1 = J_0^{(0)} + \frac{\alpha}{u_s u^s} J_r^{(0)} u^r. \quad (9.64)$$

Однако выражение (9.63) не является ковариантным по отношению к преобразованию Лоренца (см. книгу Мёллера [92]).

Ковариантное выражение для (9.62) получится в том случае, если положить

$$\boxed{J_\mu = J_0^{(0)} u_\mu + I_\mu}, \quad (9.65)$$

где I_μ являются компонентами четырехмерного вектора

$$I_\mu = a_\mu^r{}^{(0)} J_r^{(0)} = (a_p^r{}^{(0)} J_r^{(0)}, -J_r^{(0)} u^r), \quad (9.66)$$

которые в собственной системе отсчета ($u^r = 0$) сводятся к $J_r^{(0)}$:

$$I_\mu^{(0)} = (J_r^{(0)}, 0). \quad (9.67)$$

Следовательно, если даже в собственной системе отсчета плотность заряда равна нулю ($J_0^{(0)} = 0$), то в другой галилеевой системе отсчета возникает плотность заряда

$$J_0 = I_0 = -J_r^{(0)} u^r, \quad (9.68)$$

связанная с тем, что в собственной системе отсчета имеется ток проводимости с компонентами $J_r^{(0)}$.

Наконец, если в собственной системе отсчета ток проводимости равен нулю ($J_r^{(0)} = 0$), что имеет место для изолятора, то

$$J_\mu = J_0^{(0)} u_\mu. \quad (9.69)$$

В этом случае компоненты тока пропорциональны компонентам четырехмерной скорости.

¹⁾ Разумеется, если имеет место специальное преобразование Лоренца, то $u = u_1$ и (9.59) сводится к виду

$$J_1 = \frac{J_1^{(0)} - \beta J_0^{(0)}}{\gamma \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad J_2 = J_2^{(0)}, \quad J_3 = J_3^{(0)}, \quad J_0 = \frac{J_0^{(0)} - \beta J_1^{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

2. Соотношения между тензорами напряженности и индукции. Ковариантными являются только уравнения (9. I) и (9. III), тогда как соотношения (9. II) при преобразовании Лоренца меняют свой вид, так что соотношения (9. IV Γ)⁰ имеют место только в собственной системе отсчета.

В связи с этим для произвольной галилеевой системы отсчета введем четырехмерные векторы

$$\bar{E}_\mu = \varphi_{\mu\rho} u^\rho, \quad \bar{B}_\mu = \varphi_{\mu\rho}^* u^\rho, \quad (9.70)$$

$$\bar{D}_\mu = f_{\mu\rho} u^\rho, \quad \bar{H}_\mu = f_{\mu\rho}^* u^\rho. \quad (9.71)$$

которые выражаются через определяемые в соответствии с (9.8) тензоры $\varphi_{\mu\rho}$, $f_{\mu\rho}$ и через дуальные тензоры (9.18).

Принимая во внимание выражения (9.8) для $\varphi_{\mu\rho}$ и $f_{\mu\rho}$, компоненты \bar{E}_μ , \bar{B}_μ , \bar{D}_μ и \bar{H}_μ можно записать в виде

$$\bar{E}_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\tilde{E}, \left(\tilde{E} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right), \quad \bar{B}_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\tilde{B}, \left(\tilde{B} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right), \quad (9.72)$$

$$\bar{D}_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\tilde{D}, \left(\tilde{D} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right), \quad \bar{H}_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\tilde{H}, \left(\tilde{H} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right), \quad (9.73)$$

где

$$\tilde{E} = E + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times B \right), \quad \tilde{B} = B + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times E \right), \quad (9.74)$$

$$\tilde{D} = D + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times H \right), \quad \tilde{H} = H + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times D \right). \quad (9.75)$$

Таким образом, в собственной системе отсчета ($\mathbf{v} = 0$) четырехмерные векторы (9.72) и (9.73) сводятся к виду

$$\bar{E}_\mu = (E^{(0)}, 0), \quad \bar{B}_\mu = (B^{(0)}, 0), \quad (9.76)$$

$$\bar{D}_\mu = (D^{(0)}, 0), \quad \bar{H}_\mu = (H^{(0)}, 0). \quad (9.77)$$

Следовательно, для произвольной галилеевой системы отсчета два первые уравнения (9. IV Γ) принимают вид

$$\tilde{D} = \varepsilon \tilde{E}, \quad \tilde{H} = \frac{1}{\mu} \tilde{B}, \quad (9.78)$$

т. е.

$$\bar{D}_\rho = \varepsilon E_\rho, \quad \bar{H}_\rho = \frac{1}{\mu} \bar{B}_\rho, \quad (9.79)$$

или

$$f_{\rho\sigma} u^\sigma = \varepsilon \varphi_{\rho\sigma} u^\sigma, \quad (9.80)$$

$$f_{\rho\sigma}^* u^\sigma = \frac{1}{\mu} \varphi_{\rho\sigma}^* u^\sigma. \quad (9.81)$$

Уравнение (9.81) записывается также следующим образом:

$$f_{\mu\nu}u_\rho + f_{\rho\mu}u_\nu + f_{\nu\rho}u_\mu = \frac{1}{\mu} (\varphi_{\mu\nu}u_\rho + \varphi_{\rho\mu}u_\nu + \varphi_{\nu\rho}u_\mu). \quad (9.82)$$

Наконец, третье уравнение (9. IVг) приводится к виду

$$\boxed{J^\rho - u^\rho (J^\mu u_\mu) = -\frac{4\pi\sigma c}{c} \varphi^{\rho\sigma} u_\sigma.} \quad (9.83)$$

Действительно, первый член в этом уравнении характеризует ток проводимости, равный разности между полным током J^ρ и конвекционным током

$$u^\rho (J^\mu u_\mu) = u^\rho (J^\mu u_\mu)^{(0)} = u^\rho J^0{}^{(0)}. \quad (9.84)$$

Таким образом, это уравнение означает, что ток проводимости $-(4\pi/c)I^\rho$ пропорционален напряженности $\varphi^{\rho\lambda}u_\lambda = \overline{E}^\rho$ (с множителем пропорциональности $-(4\pi/c)\sigma_c$), что приводит к *релятивистскому выражению для закона Ома*.

Переходя к векторным обозначениям и разрешая (9.80) и (9.82) по отношению к \mathbf{D} и \mathbf{B} , получаем

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1 - \epsilon\mu\beta^2} \left\{ \epsilon(1 - \beta^2)\mathbf{E} + (\epsilon\mu - 1) \left[\left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right] - \epsilon \frac{\mathbf{v}}{c} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E} \right) \right] \right\}, \quad (9.85)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{1 - \epsilon\mu\beta^2} \left\{ \mu(1 - \beta^2)\mathbf{H} - (\epsilon\mu - 1) \left[\left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right] - \mu \frac{\mathbf{v}}{c} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{H} \right) \right] \right\}. \quad (9.86)$$

Эти соотношения являются обобщением векторных уравнений (9. II)⁰ на случай произвольной галилеевой системы отсчета.

Для среды без дисперсии

$$\epsilon\mu = 1, \quad (9.87)$$

так что в этом частном случае для любой галилеевой системы отсчета имеем

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (9.88)$$

Величины $f_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$ можно взаимно выразить друг через друга при сохранении тензорных обозначений (см. Фам Мау Кван [116]). Чтобы сделать это, умножим соотношение (9.82) на u^ρ и просуммируем. Учитывая нормировочные условия (9.13) для четырехмерной скорости

$$u_\rho u^\rho = 1,$$

получаем

$$f_{\mu\nu} + (f_{\rho\mu}u_\nu + f_{\nu\rho}u_\mu)u^\rho = \frac{1}{\mu}\varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu}(\varphi_{\rho\mu}u_\nu + \varphi_{\nu\rho}u_\mu)u^\rho, \quad (9.89)$$

откуда с помощью (9.82) имеем

$$\boxed{f_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu}\varphi_{\mu\nu} + \left(\frac{1-\epsilon\mu}{\mu}\right)(\varphi_{\rho\mu}u_\nu + \varphi_{\nu\rho}u_\mu)u^\rho.} \quad (9.90)$$

И наоборот

$$\varphi_{\mu\nu} = \mu f_{\mu\nu} - \left(\frac{1-\epsilon\mu}{\epsilon}\right)(f_{\rho\mu}u_\nu + f_{\nu\rho}u_\mu)u^\rho. \quad (9.91)$$

Для среды без дисперсии ($\epsilon\mu = 1$) получим

$$f_{\mu\nu} = \epsilon\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu}\varphi_{\mu\nu}. \quad (9.92)$$

§ 6. Тензор энергии — импульса

Определим несимметричный тензор второго ранга

$$(\tau_\mu^\nu)_{\text{М.}} = -\varphi_{\mu\rho}f^{\nu\rho} + \frac{1}{4}\delta_\mu^\nu\varphi_{\rho\sigma}f^{\rho\sigma}, \quad (9.93)$$

который для пустого пространства ($f_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}$) сводится к симметричному тензору Максвелла. Взяв от этого тензора дивергенцию типа (9.48), получим уже не выражение (9.51), а

$$\partial_\nu(\tau_\mu^\nu)_{\text{М.}} = \varphi_{\mu\rho}J^\rho + \frac{1}{4}(\varphi^{\rho\sigma}\partial_\mu f_{\rho\sigma} - f_{\rho\sigma}\partial_\mu\varphi^{\rho\sigma}). \quad (9.94)$$

Принимая во внимание (9.90) и считая ϵ и μ постоянными, находим

$$\varphi^{\rho\sigma}\partial_\mu f_{\rho\sigma} - f_{\rho\sigma}\partial_\mu\varphi^{\rho\sigma} = 4\left(\frac{1-\epsilon\mu}{\mu}\right)\varphi^{\rho\sigma}\varphi_{\sigma\lambda}u^\lambda\partial_\mu u_\rho, \quad (9.95)$$

так что

$$\partial_\nu(\tau_\mu^\nu)_{\text{М.}} = \varphi_{\mu\rho}J^\rho - \left(\frac{1-\epsilon\mu}{\mu}\right)\varphi^{\sigma\rho}\varphi_{\sigma\lambda}u^\lambda\partial_\mu u_\rho. \quad (9.96)$$

Если речь идет о среде с малой дисперсией ($\epsilon\mu \approx 1$), то, как и для тензора Максвелла, получим

$$\partial_\nu(\tau_\mu^\nu)_{\text{М.}} = \varphi_{\mu\rho}J^\rho. \quad (9.97)$$

Чтобы найти явные выражения для компонент $(\tau_\mu^\nu)_{\text{М.}}$, положим

$$(\tau_\mu^\rho)_{\text{М.}} = g^{\rho\nu}(\tau_{\mu\nu})_{\text{М.}} = \eta^{\rho\nu}(\tau_{\mu\nu})_{\text{М.}}, \quad \eta^{\rho\nu} = \delta^{\rho\nu}(-1, -1, -1, +1), \quad (9.98)$$

где

$$(\tau_{\mu\nu})_M = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} & -4\pi s_{10} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} & -4\pi s_{20} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} & -4\pi s_{30} \\ -4\pi s_{01} & -4\pi s_{02} & -4\pi s_{03} & 4\pi\tau_w \end{pmatrix}. \quad (9.99)$$

Согласно (9.93), имеем

$$\tau_{pq} = -(E_p D_q + H_p B_q) + \frac{1}{2} \delta_{pq} [(E \cdot D) + (H \cdot B)], \quad (9.100)$$

$$s_{p0} = \frac{1}{4\pi} [D \times B]_p, \quad s_{0p} = \frac{1}{4\pi} [E \times H]_p, \quad (9.101)$$

$$W = \frac{1}{8\pi} (E \cdot D + H \cdot B). \quad (9.102)$$

Тензор (9.93) называется *тензором Минковского*. Его предлагалось заменить на тензор второго ранга

$$(\tau_{\mu}^{\nu})_S = -\frac{1}{2} (\varphi_{\mu\rho} f^{\nu\rho} + f_{\mu\rho} \varphi^{\nu\rho}) + \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\nu} \varphi_{\rho\sigma} f^{\rho\sigma}, \quad (9.103)$$

получаемый из (9.93) при помощи симметризации. Тогда вместо выражения (9.94) получим

$$\begin{aligned} \partial_{\nu} (\tau_{\mu}^{\nu})_S &= \varphi_{\mu\rho} J^{\rho} - \frac{1}{2} (f_{\mu\rho} \partial_{\nu} \varphi^{\nu\rho} - \varphi_{\mu\rho} \partial_{\nu} f^{\nu\rho}) - \\ &\quad - \frac{1}{4} (\partial_{\nu} f_{\mu\rho} + \partial_{\rho} f_{\nu\mu} + \partial_{\mu} f_{\rho\nu}) \varphi^{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (9.104)$$

Для среды с малой дисперсией, когда $\epsilon_{\mu} \approx 1$,

$$(\tau_{\mu}^{\nu})_M = (\tau_{\mu}^{\nu})_S, \quad (9.105)$$

и если ϵ и μ постоянны, то

$$\partial_{\nu} (\tau_{\mu}^{\nu})_S = \partial_{\nu} (\tau_{\mu}^{\nu})_M = \partial_{\nu} \tau_{\mu}^{\nu} = \varphi_{\mu\rho} J^{\rho}. \quad (9.106)$$

§ 7. Применение произвольных криволинейных координат

До настоящего времени при описании электромагнитных явлений мы пользовались координатами, ортонормированными с помощью условия

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} (-1, -1, -1, +1).$$

В этих координатах форма ds^2 , инвариантная по отношению к преобразованиям Лоренца, сводилась к виду (6.22).

1. Уравнения Максвелла. Выберем в евклидовом пространстве произвольную систему криволинейных координат. Уравнения Максвелла, справедливые для ортонормированной системы координат, в общем случае не будут ковариантными по отношению к переходу к произвольным координатам. Ковариантный формализм, связанный с применением произвольных координатных осей, был рассмотрен в гл. 6; для него характерно то, что координаты $g_{\mu\nu}$ меняются при переходе от одной точки к другой и что обычные частные производные должны быть заменены на *ковариантные производные*.

Таким образом, вместо уравнений (9. IVa) — (9. IVb) будем иметь

$$\boxed{\nabla_{\rho} f^{\mu\rho} = J^{\mu}}, \quad (9.107)$$

а также одну из двух эквивалентных систем уравнений

$$\boxed{\partial_{\rho} \varphi_{\mu\nu} + \partial_{\nu} \varphi_{\rho\mu} + \partial_{\mu} \varphi_{\nu\rho} = 0} \quad (9. IVб)$$

или

$$\boxed{\varphi_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \varphi_{\nu} - \partial_{\nu} \varphi_{\mu}}. \quad (9. IVв)$$

Действительно, из-за симметричности коэффициентов аффинной связности в уравнениях (9. IVб) и (9. IVв) ковариантные производные можно заменить на обычные, т. е. в выражении

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} \varphi_{\mu\nu} + \nabla_{\nu} \varphi_{\rho\mu} + \nabla_{\mu} \varphi_{\nu\rho} \equiv & \partial_{\rho} \varphi_{\mu\nu} + \partial_{\nu} \varphi_{\rho\mu} + \partial_{\mu} \varphi_{\nu\rho} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \varphi_{\sigma\nu} + \\ & + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} \varphi_{\mu\sigma} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} \varphi_{\sigma\mu} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \varphi_{\rho\sigma} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \rho\mu \end{matrix} \right\} \varphi_{\nu\sigma} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} \varphi_{\sigma\rho} \end{aligned}$$

члены с $\{ \}$ взаимно сокращаются, что следует из их симметричности по двум нижним индексам и антисимметричности $\varphi_{\mu\nu}$.

Аналогично

$$\varphi_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} \varphi_{\nu} - \nabla_{\nu} \varphi_{\mu} = \partial_{\mu} \varphi_{\nu} - \partial_{\nu} \varphi_{\mu} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} \varphi_{\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \varphi_{\sigma} = \partial_{\mu} \varphi_{\nu} - \partial_{\nu} \varphi_{\mu}.$$

Контравариантные тензоры $f^{\mu\nu}$ и J^{μ} удобно заменить на тензорные плотности

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} f^{\mu\nu}, \quad (g = \det g_{\mu\nu}), \quad (9.108)$$

$$\mathcal{J}^{\mu} = \sqrt{-g} J^{\mu}. \quad (9.109)$$

При этом уравнение (9.107) записывается в виде

$$\partial_{\rho} \mathcal{F}^{\mu\rho} = \mathcal{J}^{\mu}. \quad (9. VIa)$$

Согласно (14.132),

$$\begin{aligned} \partial_\rho \mathcal{F}^{\mu\rho} &= \partial_\rho (\sqrt{-g} f^{\mu\rho}) = \sqrt{-g} \left(\partial_\rho f^{\mu\rho} + f^{\mu\rho} \frac{\partial_\rho \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \right) = \\ &= \sqrt{-g} \left(\partial_\rho f^{\mu\rho} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} f^{\mu\sigma} \right). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\nabla_\rho f^{\mu\rho} \equiv \partial_\rho f^{\mu\rho} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} f^{\sigma\rho} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} f^{\mu\sigma}.$$

Если мы имеем дело с антисимметричным тензором, то второй член в последнем выражении равен нулю и

$$\nabla_\rho f^{\mu\rho} \equiv \partial_\rho f^{\mu\rho} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} f^{\mu\sigma}.$$

Таким образом,

$$\partial_\rho \mathcal{F}^{\mu\rho} = \sqrt{-g} \nabla_\rho f^{\mu\rho} = \sqrt{-g} J^\mu = \mathcal{J}^\mu.$$

С другой стороны, определение „дуальных“ тензоров (9.18) заменяется следующим определением:

$$\varphi^{\mu\nu*} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma}, \quad \varphi_{\mu\nu}^* = -\frac{\sqrt{-g}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma}, \quad (9.110)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ определяется в соответствии с (9.19). Поэтому уравнения (9. IVб) можно переписать также в виде

$$\partial_\rho (\sqrt{-g} \varphi^{\mu\rho*}) = 0 \quad (9. IVв)^*$$

или

$$\nabla_\rho \varphi^{\mu\rho*} = 0. \quad (9.111)$$

Таким образом, уравнения Максвелла оказываются эквивалентными двум следующим системам уравнений:

$$\nabla_\rho f^{\mu\rho} = J^\mu \quad \text{или} \quad \partial_\rho (\sqrt{-g} f^{\mu\rho}) = \mathcal{J}^\mu; \quad (9. IVа)$$

$$\nabla_\rho \varphi^{\mu\rho*} = 0 \quad \text{или} \quad \partial_\rho (\sqrt{-g} \varphi^{\mu\rho*}) = 0. \quad (9. IVб)^*$$

Отсюда следует уравнение непрерывности

$$\nabla_\mu J^\mu = 0. \quad (9.112)$$

Далее, если $\varepsilon\mu = 1$, где ε и μ — постоянные, то, согласно (9. IVв), имеем

$$\nabla^\nu \varphi_{\mu\nu} = \nabla^\nu \nabla_\mu \varphi_\nu - \nabla^\nu \nabla_\nu \varphi_\mu. \quad (9.113)$$

Из (9.92) и (9.107) вытекает, что первый член в правой части равен $\mu \nabla^\nu f_{\mu\nu} = \mu J_\mu$. Следовательно, для евклидова пространства¹⁾

$$\mu J_\mu = \nabla_\mu \nabla^\nu \varphi_\nu - \square \varphi_\mu \quad (9.114)$$

¹⁾ В евклидовом пространстве, кривизна в котором равна нулю, ковариантные производные можно брать в любом порядке:

$$\nabla^\nu \nabla_\mu \varphi_\rho = \nabla_\mu \nabla^\nu \varphi_\rho$$

[см. (15.135)].

или

$$\square \varphi_{\mu} = -\mu J_{\mu}, \quad (9.115)$$

где мы приняли во внимание условие Лоренца

$$\nabla^{\nu} \varphi_{\nu} = 0 \quad (9.116)$$

и положили

$$\square = \nabla^{\rho} \nabla_{\rho} = g^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} \nabla_{\sigma}. \quad (9.117)$$

Подставляя (9.115) в (9. IVв), получаем также

$$\square \varphi_{\mu\nu} = -\mu (\partial_{\mu} J_{\nu} - \partial_{\nu} J_{\mu}). \quad (9.118)$$

2. Траектория заряженной материальной точки. Из релятивистской динамики известны уравнения (8.159)

$$F^{\mu} = m_0 c^2 u^{\rho} \nabla_{\rho} u^{\mu},$$

определяющие траекторию материальной точки, на которую действует какая-либо сила. Здесь u^{μ} — четырехмерная скорость, определяемая в произвольной системе координат:

$$u^{\mu} = \frac{dy^{\mu}}{ds}. \quad (9.119)$$

Уравнения (8.159) можно записать в виде

$$F^{\mu} = m_0 c^2 \left(\frac{d^2 y^{\mu}}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \frac{dy^{\sigma}}{ds} \frac{dy^{\rho}}{ds} \right). \quad (9.120)$$

В случае заряженной частицы F^{μ} сводится к силе Лоренца (9.35):

$$f^{\mu} = \frac{1}{4\pi} \varphi^{\rho\mu} j_{\rho},$$

которую можно получить также из тензора Максвелла (9.39)

$$\tau_{\mu}^{\nu} = -\varphi_{\mu\rho} \varphi^{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\nu} \varphi_{\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma},$$

где, как и в (9.53), положено

$$4\pi f_{\mu} = -\nabla_{\nu} \tau_{\mu}^{\nu}. \quad (9.121)$$

Таким образом,

$$m_0 c^2 \left(\frac{d^2 y^{\mu}}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \frac{dy^{\sigma}}{ds} \frac{dy^{\rho}}{ds} \right) = \frac{1}{4\pi} \varphi^{\rho\mu} j_{\rho}. \quad (9.122)$$

Для пустоты ток j_{ρ} пропорционален четырехмерной скорости частицы. Согласно (9.30),

$$j_{\rho} = 4\pi\rho_0 u_{\rho},$$

и (9.122) переписывается в виде

$$\frac{d}{ds} \left(u^\mu + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} u^\sigma dy^\rho \right) = \frac{\rho_0}{m_0 c^2} \varphi^{\rho\mu} u_\rho, \quad (9.123)$$

или

$$\frac{dy^\lambda}{ds} \left(\partial_\lambda u^\mu + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\lambda \end{matrix} \right\} u^\sigma \right) = \frac{\rho_0}{m_0 c^2} \varphi^{\rho\mu} u_\rho, \quad (9.124)$$

т. е.

$$\boxed{u^\lambda \nabla_\lambda u^\mu = \frac{\rho_0}{m_0 c^2} \varphi^{\rho\mu} u_\rho.} \quad (9.125)$$

Уравнения из настоящего параграфа, справедливые для произвольной системы координат, инвариантны по отношению к общему преобразованию координат

$$y'^\mu = a_\nu^{\mu'} y^\nu, \quad y^\mu = a_\mu^{\nu'} y'^{\nu'}$$

где

$$a_\mu^{\rho'} a_\rho^{\nu'} = a_\mu^\rho a_\rho^{\nu'} = \delta_\mu^{\nu'}$$

а также $a_\nu^{\mu'} = \partial y'^{\mu'} / \partial y^\nu$ и $a_\mu^{\nu'} = \partial y^\mu / \partial y'^{\nu'}$ являются функциями от координат.

Напомним, что в евклидовом пространстве всегда можно перейти к прямолинейным координатам, ортонормированным с помощью (6.28). При этом уравнения Максвелла примут вид (9. IVa) — (9. IVb). Они будут инвариантны по отношению к преобразованию Лоренца, для которого коэффициенты $a_\nu^{\mu'}$ и $a_\mu^{\nu'}$, характеризующие изменение галилеевой системы отсчета, являются постоянными и подчинены условиям (6.42б).

Б. ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА

§ 8. Вывод уравнений Максвелла из принципа стационарного действия

Рассмотрим в произвольной системе криволинейных координат интеграл

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L} d\tau, \quad d\tau = dy^1 \times dy^2 \times dy^3 \times dy^0, \quad (9.126)$$

образованный при помощи скалярной плотности¹⁾

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} L. \quad (9.127)$$

¹⁾ Из-за наличия скалярной плотности обеспечивается инвариантность $\int \mathcal{L} d\tau = L \sqrt{-g} d\tau$, поскольку $\sqrt{-g} d\tau$ здесь является инвариантом [см. (14.128)]. В ортонормированной системе \mathcal{L} сводится к L .

Предположим, что L — инвариант, зависящий от потенциала или непосредственно, или через посредство напряженности электромагнитного поля

$$\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu. \quad (9.128)$$

Переменным φ_μ придадим приращения $\delta\varphi_\mu$, которые на границах области интегрирования обращаются в нуль. Найдем условия, при выполнении которых для любых приращений $\delta\varphi_\mu$

$$\delta\mathcal{A} = 0. \quad (9.129)$$

Полагая

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\mu\nu}}, \quad \mathcal{J}^\mu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu}, \quad (9.130)$$

получаем¹⁾

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \int \delta \mathcal{L} d\tau = \int \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\mu\nu}} \delta\varphi_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu} \delta\varphi_\mu \right) d\tau = \\ &= \int \left(\frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\nu} \delta\varphi_{\mu\nu} - \mathcal{J}^\mu \delta\varphi_\mu \right) d\tau. \end{aligned} \quad (9.131)$$

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \int \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta\varphi_\nu - \partial_\nu \delta\varphi_\mu) - \mathcal{J}^\mu \delta\varphi_\mu \right] d\tau = \\ &= - \int \partial_\nu (\mathcal{F}^{\mu\nu} \delta\varphi_\mu) d\tau + \int (\partial_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu} - \mathcal{J}^\mu) \delta\varphi_\mu d\tau. \end{aligned} \quad (9.132)$$

Первый интеграл в правой части имеет вид дивергенции. Поскольку, согласно сделанному предположению, на границах области интегрирования $\delta\varphi_\mu$ равно нулю, то этот интеграл равен нулю. Поэтому из (9.129) следует

$$\partial_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \mathcal{J}^\mu. \quad (9.133)$$

Точно так же, постулируя определение (9.128) для напряженности электромагнитного поля и применяя к инвариантной плотности \mathcal{L} (не уточняя ее формы) принцип стационарного действия, получаем максвелловские уравнения (9.133). Не уточняя вида \mathcal{L} , мы можем записать

$$d\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\nu} d\varphi_{\mu\nu} - \mathcal{J}^\mu d\varphi_\mu. \quad (9.134)$$

Тогда (9.134) будет вытекать из определения (9.130).

Если $\varepsilon = \mu = 1$ ($f_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}$), то в отсутствие заряда и тока можно положить

$$\boxed{L = \frac{1}{4} \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}.} \quad (9.135)$$

¹⁾ Поскольку $\varphi_{\mu\nu} = -\varphi_{\nu\mu}$, то переменные, входящие в вариацию $\delta\mathcal{L}$, не будут независимыми. С этим связано появление множителя $1/2$.

При этом в ортонормированной системе отсчета L сводится к инварианту $H^2 - E^2$.

Исходя из произвольной плотности $\mathcal{L}(\varphi_{\mu\nu}, \varphi_\mu)$, можно получить уравнения (9.133), соответствующие уравнениям (9. VIa) теории Максвелла, однако отсюда еще не следует каких-либо соотношений между напряженностью и индукцией, которые характерны для электромагнитной теории. Для получения таких соотношений *нужно уточнить зависимость \mathcal{L} от напряженности и потенциалов.*

Если принять определение плотности в виде (9.135), то получим

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\mu\nu}} = \sqrt{-g} \varphi^{\mu\nu}, \quad (9.136)$$

однако использование лишь вариационного принципа еще не приводит с необходимостью к линейным соотношениям между векторами напряженности и индукции, наличие которых предполагается в теории Максвелла. Вместе с тем при соответствующем выборе \mathcal{L} можно получить *нелинейные* соотношения, что позволяет устранить некоторые трудности, характерные для теории Максвелла. На этом основаны электромагнитные теории, развивавшиеся Ми и Борном — Инфельдом.

§ 9. Теория Ми¹⁾

При наличии среды плотность энергии электромагнитного поля в теории Максвелла характеризуется компонентой τ_0^0 тензора Минковского (9.93). Этим тензором характеризуются чисто электромагнитные действия, но в него не включаются энергия и импульс самого вещества. Как мы увидим, в общей теории относительности это положение не меняется: динамика и электродинамика остаются независимыми друг от друга.

Можно, наоборот, отказаться от такого противопоставления и предположить, что как энергия вещества, так и электромагнитная энергия в обоих случаях имеют электромагнитное происхождение. Это предположение лежит в основе теории Ми, которая ставит своей целью, исходя из свойств поля, вывести свойства и характеристики зарядов. В противоположность этому в электронной теории Лоренца существование зарядов удастся объяснить только путем введения сил неэлектромагнитного происхождения. Чтобы избавиться от таких сил, в теории Ми вводится единый взгляд на поле и вещество.

Ми предположил, что состояние поля полностью характеризуется десятью величинами. Первоначально за такие основные

¹⁾ См. работы Ми [117].

величины он принял векторы индукции \mathbf{D} , \mathbf{B} , векторный потенциал \mathbf{A} и плотность электричества ρ . Другие используемые в теории величины, а именно векторы напряженности \mathbf{E} , \mathbf{H} , скалярный потенциал V и вектор тока \mathbf{I} , являются функциями от \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{A} и ρ . При этом постулировалось, что для основных величин имеют место уравнения

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{I}, \quad (9.137)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad (9.138)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } V = -\mathbf{E}, \quad (9.139)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \frac{\mathbf{I}}{c} = 0. \quad (9.140)$$

Эти уравнения совпадают с соотношениями (3. I), (3. IVa) и (3. III) теории Максвелла, но только в последней предполагается, что уравнения (9.139) и (9.138) выводятся из уравнений $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho$, тогда как здесь величины \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{A} и ρ считаются независимыми.

Получаемые в теории Максвелла уравнения (9.97), связанные с сохранением энергии, для среды с малой дисперсией приводят при значении индекса $\mu = 0$ к следующему векторному соотношению:

$$\mathbf{H} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \text{div } [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{I} \cdot \mathbf{E}). \quad (9.141)$$

Если скалярно умножить обе части (9.137) на \mathbf{E} , а (9.138) на \mathbf{H} и результаты сложить, то такое же соотношение получится и в теории Ми. Если же скалярно умножить обе части уравнения (9.139) на $(4\pi/c)\mathbf{I}$, а уравнение (9.140) на $4\pi V$ и результаты сложить, то получим

$$4\pi \left(\frac{\mathbf{I}}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{V}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \text{div } (\mathbf{I}V) = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{I} \cdot \mathbf{E}). \quad (9.142)$$

Однако истолкование соотношения (9.141) значительно отличается от истолкования подобного соотношения в теории Максвелла. В теории Ми любая энергия будет энергией электромагнитного происхождения, поэтому член $-(4\pi/c)(\mathbf{I} \cdot \mathbf{E})$, соответствующий переходу энергии поля в энергию неэлектромагнитного происхождения, не может иметь физического смысла. Напротив, если из уравнения (9.142) вычесть (9.141), то получится соотношение, в котором член $-(4\pi/c)(\mathbf{I} \cdot \mathbf{E})$ отсутствует. Именно оно

обладает физическим смыслом и выражает закон сохранения энергии

$$\frac{1}{c} \frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \Sigma = 0, \quad (9.143)$$

где

$$dW = E dD + H dB - 4\pi \left(\frac{I}{c} dA + V d\rho \right), \quad (9.144)$$

$$\Sigma = [E \times H] - \frac{4\pi}{c} (I \cdot V). \quad (9.145)$$

Таким образом возникает задача об определении W , которая эквивалентна задаче нахождения величины

$$L = - (E \cdot D) + 4\pi\rho V + W, \quad (9.146)$$

исходя из соотношения

$$dL = H dB - D dE + 4\pi \left(\rho dV - \frac{I}{c} dA \right) = \frac{1}{2} f^{\mu\nu} d\varphi_{\mu\nu} - J^\mu d\varphi_\mu, \quad (9.147)$$

где мы приняли во внимание (9.8) и (9.2).

Вывод уравнений поля из скалярной плотности

$$d\mathcal{L} = d\sqrt{-g} L(\varphi_{\mu\nu}, \varphi_\mu) = \frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\nu} d\varphi_{\mu\nu} - \mathcal{J}^\mu d\varphi_\mu, \quad (9.148)$$

выражение для которой остается неопределенным, сводится к задаче, рассматривавшейся в предыдущем параграфе. Соотношения, вытекающие из (9.148) в связи с применением принципа стационарного действия, справедливы для „области вне зарядов“. Что же касается теории Ми, то в ней предполагается, что области, внешней по отношению к зарядам, строго говоря, не существует, и что допущение $J_\mu = 0$ соответствует предельному случаю. Поэтому инвариант (9.148) нужно видоизменить, положив

$$\boxed{L_m = \frac{1}{4} \varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} - f(\pm \sqrt{\varphi_\mu \varphi^\mu})}, \quad (9.149)$$

где f — инвариант, зависящий от компонент электромагнитного потенциала.

Рассмотрим частный случай сферически-симметричного статического решения. При этом уравнения (9.137) — (9.140) допускают следующее решение:

$$E = - \operatorname{grad} V, \quad H = I = 0. \quad (9.150)$$

Из (9.130) и (9.150) получим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{pq}} = 0 \quad (p, q = 1, 2, 3).$$

Инвариант L_m в статическом случае сводится к следующему выражению:

$$L_m = -\frac{1}{2} \sum_r \varphi_{r0} \varphi_{r0} - f(V), \quad \varphi_0 = -V. \quad (9.151)$$

Применяя к (9.151) определения (9.130), будем иметь

$$f^{p0} = \frac{\partial L_m}{\partial \varphi_{p0}} = \varphi^{p0}, \quad (9.152)$$

$$j^0 = 4\pi\rho = -\frac{\partial L_m}{\partial \varphi_0} = f'(\varphi_0) = -f'(V). \quad (9.153)$$

Из выражений (9.152), (9.150) и (9.153) следует, что уравнения (9.137) — (9.140), где теперь $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$, дают

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} V = -f'(V). \quad (9.154)$$

Если поле создается сферически-симметричным источником, то в сферических координатах

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = f'(V). \quad (9.155)$$

Таким образом, нам нужно найти конечные и непрерывные решения (9.154), для которых при $r \rightarrow \infty$ $V \rightarrow 0$. При этом заряд частицы равен интегралу от плотности заряда по всему пространству¹⁾:

$$\begin{aligned} q &= \int \int \int \rho \sqrt{-g} dr d\theta d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \int \int r^2 f'(V) \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^\infty r^2 f'(V) dr = \int \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) dr = \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right]_0^\infty. \end{aligned} \quad (9.156)$$

В то же время масса частицы равна интегралу от плотности энергии по всему пространству:

$$m = \frac{1}{c^2} \int \int \int W \sqrt{-g} dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^\infty W r^2 dr, \quad (9.157)$$

¹⁾ Мы учитываем, что в сферических координатах

$$ds^2 = -dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + c^2 dt^2,$$

$$g_{11} = -g_{00} = -1, \quad g_{22} \sin^2 \theta = g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta,$$

так что

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta.$$

где, согласно (9.146), (9.149) и (9.153),

$$W = \frac{E^2}{2} - f(V) + Vf'(V). \quad (9.158)$$

Таким образом,

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int r^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 - f(V) + Vf'(V) \right] dr. \quad (9.159)$$

Интегрируя по частям и учитывая (9.155), получаем

$$\begin{aligned} \int r^2 \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 dr &= \int \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 V \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \right. \\ &\quad \left. - V \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] dr = - \int Vr^2 f'(V) dr, \end{aligned} \quad (9.160)$$

или

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int r^2 \left[\frac{V}{2} f'(V) - f(V) \right] dr. \quad (9.161)$$

Следовательно, в статическом случае масса и заряд частицы, являющейся источником поля, выражаются только через скалярный потенциал V . Согласно представлениям теории Ми, электрон не является частицей, локализованной в одной точке, а распределен по всему пространству. Что же касается пространственных интегралов, характеризующих заряд и массу, то путем соответствующего выбора функции $f(V)$ можно добиться того, что они будут принимать конечные значения.

Одно из основных возражений, выдвигавшихся против данной теории, связано с той ролью, которая приписывается электромагнитному потенциалу. Потенциал, согласно обычным представлениям, определяется лишь с точностью до градиента и не имеет такого же физического смысла, как напряженности поля. С другой стороны, выражение (9.149) для L_m представляется весьма искусственным, а выбор функции f остается в большой степени произвольным.

В теории Борна — Инфельда была сделана попытка преодолеть эти серьезные трудности путем задания величин, характеризующих источники, в виде функций не от потенциалов, а от напряженностей. В результате выражение для действия становится еще менее похожим на инвариант теории Максвелла, так как изменения не ограничиваются появлением дополнительных членов, как это имеет место при введении функции f . Вместе с тем, хотя теория Борна — Инфельда и связана с естественным выбором функции действия и с отказом от произвольных гипотез о выборе $f(V)$, наиболее удовлетворительное решение соответствующих вопросов было получено лишь в единой теории Эйнштейна — Шредингера.

§ 10. Теория Борна — Инфельда¹⁾

Воспользуемся произвольной системой координат x^μ ($x' = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^0 = ct$) и обозначим метрический тензор через $g_{\mu\nu}$. Предположим, что основными величинами являются 6 компонент напряженности электромагнитного поля $\varphi_{\mu\nu}$ (а не 10 компонент $\varphi_{\mu\nu}$, φ_μ , как это было в теории Ми). Контравариантные компоненты тензора напряженности поля обозначим через

$$\varphi^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \varphi_{\rho\sigma}, \quad (9.162)$$

а компоненты дуального тензора определим обычным образом:

$$\varphi^{\mu\nu*} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma}, \quad \varphi_{\mu\nu}^* = -\frac{\sqrt{-g}}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma} \quad (\varphi^{\mu\nu*} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \varphi_{\rho\sigma}^*), \quad (9.163)$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \pm 1$, 0 обычный символ Леви-Чивита.

Следуя Борну и Инфельду, введем действие, являющееся скалярной плотностью:

$$\mathcal{L}_B = (\sqrt{-\pi} - \sqrt{-g}), \quad (9.164)$$

где g — детерминант, образованный из компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$, а π — детерминант, элементами которого являются компоненты тензора

$$\pi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}. \quad (9.165)$$

π можно выразить через детерминанты g и φ . Если положить

$$g g^{\mu\nu} = \text{минор } g_{\mu\nu}, \quad (9.166)$$

где $g^{\mu\nu}$ — обычные контравариантные компоненты метрического тензора ($g_{\mu\rho} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\nu$), то из свойств детерминантов в результате простых вычислений получим

$$\pi = g + \varphi + \frac{g}{2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \varphi_{\mu\nu} \varphi_{\rho\sigma}. \quad (9.167)$$

Выражение (9.164) можно записать также в виде

$$\boxed{\mathcal{L}_B = \sqrt{-g} (L_B - 1)}, \quad (9.168)$$

¹⁾ См. работы Борна [118] и Борна и Инфельда [119].

где ¹⁾

$$L_B = \left(1 + \frac{\varphi}{g} + \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \varphi_{\mu\nu} \varphi_{\rho\sigma} \right)^{1/2}. \quad (9.169)$$

Как видно, L_B является функцией от двух основных инвариантов теории Максвелла:

$$F = H^2 - E^2 = \frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \varphi_{\mu\nu} \varphi_{\rho\sigma}, \quad (9.170)$$

$$G = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) = \frac{1}{4} \varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu*} = \frac{1}{8 \sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{\mu\nu} \varphi_{\rho\sigma} = \sqrt{\frac{\varphi}{-g}}. \quad (9.171)$$

Таким образом, выражение для действия принимает вид

$$L_B = (1 + F - G^2)^{1/2}. \quad (9.172)$$

Отсюда можно получить компоненты тензора, сопряженного тензору $\varphi_{\mu\nu}$:

$$\sqrt{-g} f^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \varphi_{\mu\nu}} = \sqrt{-g} \left(2 \frac{\partial L}{\partial F} \varphi^{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial G} \varphi^{\mu\nu*} \right), \quad (9.173)$$

т. е.

$$f^{\mu\nu} = \frac{\varphi^{\mu\nu} - G \varphi^{\mu\nu*}}{L}. \quad (9.174)$$

Таким образом, тензоры сопряженных между собой полей $f^{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}$ связаны нелинейными соотношениями (9.174).

Предположим, что для компонент тензора основного поля имеют место соотношения

$$\varphi_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\mu \varphi_{\nu\rho} + \partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} = 0, \quad (9.175)$$

т. е.

$$\partial_\rho (\sqrt{-g} \varphi^{\mu\rho*}) = 0. \quad (9.176)$$

Тогда компоненты $\varphi_{\mu\nu}$ будут определяться заданием потенциала

$$\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu. \quad (9.177)$$

Применяя к \mathcal{L}_B вариационный принцип, мы придем к результатам, сходным с теми, которые были получены в § 8 настоящей

¹⁾ Если напряженности невелики ($\varphi_{\mu\nu} \ll 1$), то

$$L_B \approx 1 + \frac{1}{4} \varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_B = \frac{\sqrt{-g}}{4} \varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu},$$

т. е. получается выражение, вводимое в теории Максвелла для случая вакуума.

главы. При этом нужно учитывать, что \mathcal{L}_B зависит от потенциалов φ_μ через посредство $\varphi_{\mu\nu}$. Если

$$\sqrt{-g} f^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \varphi_{\mu\nu}}, \quad (9.178)$$

то вместо (9.133) будем иметь

$$\partial_\rho (\sqrt{-g} f^{\mu\rho}) = 0. \quad (9.179)$$

В связи с тем, что потенциал непосредственно в выражение для действия не входит, уравнения Максвелла (9.133) заменяются на уравнения (9.179), отличающиеся тем, что в них член в правой части обращается в нуль. Но особенно существенно то, что выражение (9.172) для L_B , в противоположность максвелловскому случаю, приводит к нелинейным соотношениям (9.174) между компонентами тензоров напряженности и индукции.

Плотность тока характеризуется четырехмерным вектором

$$\mathcal{J}^\mu = \partial_\rho (\sqrt{-g} \varphi^{\mu\rho}). \quad (9.180)$$

Согласно (9.179),

$$\partial_\rho (\sqrt{-g} f^{\mu\rho}) = \partial_\rho \left[\sqrt{-g} \left(2 \frac{\partial L}{\partial F} \varphi^{\mu\rho} + \frac{\partial L}{\partial G} \varphi^{\mu\rho*} \right) \right] = 0. \quad (9.181)$$

Принимая во внимание (9.181), получаем

$$-j^\mu = \frac{1}{2(\partial L/\partial F)} \left[2\varphi^{\mu\rho} \partial_\rho \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right) + \varphi^{\mu\rho*} \partial_\rho \left(\frac{\partial L}{\partial G} \right) \right]. \quad (9.182)$$

Частным случаем является *сферически-симметричное статическое поле*. Предположим, что электромагнитное поле создается статическим распределением зарядов, обладающим сферической симметрией. Тогда целесообразно воспользоваться сферическими координатами

$$y^1 = r, \quad y^2 = \theta, \quad y^3 = \varphi, \quad y^0 = ct. \quad (9.183)$$

Следовательно,

$$ds^2 = -dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + c^2 dt^2, \quad (9.184)$$

что получается из общего выражения

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu, \quad (9.185)$$

если положить

$$\begin{aligned} g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = -1, & \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = -r^2, \\ g_{33} = \frac{1}{g^{33}} = -r^2 \sin^2\theta, & \quad g_{00} = \frac{1}{g^{00}} = 1, \end{aligned} \quad (9.186)$$

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin\theta. \quad (9.187)$$

В данной системе координат компоненты тензора напряженности статического поля $\varphi_{\mu\nu}$ сводятся к $\varphi_{\mu 0}$, а компоненты тензора индукции $f^{\mu\nu}$ — к $f^{\mu 0}$. Если же учесть допущение о сферической симметрии, то отличными от нуля будут только компоненты φ_{10} и f^{10} . Таким образом, согласно (9.179) и (9.187),

$$\partial_1(r^2 f^{01}) = \partial_1(r^2 g^{00} g^{11} f_{01}) = \partial_1(r^2 f_{10}) = 0, \quad (9.188)$$

так что

$$f_{10} = g_{11} g_{00} f^{10} = -f^{10} = \frac{k}{r^2}, \quad (9.189)$$

где k — постоянная интегрирования.

В рассматриваемом частном случае нелинейные соотношения (9.174) перепишутся в виде

$$f^{10} = \frac{\varphi^{10}}{\sqrt{1 + \varphi^{10} \varphi_{10}}}, \quad G = 0. \quad (9.190)$$

Отсюда получим также

$$f^{10} f_{10} = \frac{\varphi^{10} \varphi_{10}}{1 + \varphi^{10} \varphi_{10}} \quad (9.191)$$

и, следовательно,

$$\varphi_{10} \varphi^{10} = \frac{f^{10} f_{10}}{1 - f^{10} f_{10}}, \quad (9.192)$$

т. е., принимая во внимание соотношение (9.189), будем иметь

$$\varphi_{10} = -\varphi^{10} = \frac{f^{01}}{\sqrt{1 - f^{01} f_{01}}} = \frac{k}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 + (k^2/r^4)}}. \quad (9.193)$$

Обозначим через b отношение значений полевых величин, взятых в обычных системах единиц (т. е. E, B, H, D), к значениям этих же величин ($\varphi_{\mu\nu}, f^{\mu\nu}$) в естественной системе единиц

$$E = b(\varphi_{10}, \varphi_{20}, \varphi_{30}), \quad B = b(\varphi_{23}, \varphi_{31}, \varphi_{12}), \quad (9.194)$$

$$D = b(f_{10}, f_{20}, f_{30}), \quad H = b(f_{23}, f_{31}, f_{12}). \quad (9.195)$$

Таким образом, согласно (9.189) и (9.193),

$$D_r = b f_{10} = b \frac{k}{r^2}, \quad (9.196)$$

$$E_r = b \varphi_{10} = \frac{bk}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 + (k^2/r^4)}}. \quad (9.197)$$

Положив

$$kb = q, \quad b = \frac{q}{r_0^2}, \quad (9.198)$$

получим следующие выражения для радиальных компонент:

$$D_r = \frac{q}{r^2}, \quad E_r = \frac{q}{r_0^2} \frac{1}{\sqrt{1 + (r/r_0)^4}}. \quad (9.199)$$

В начале координат ($r=0$) напряженность E_r остается конечной и ее величина здесь будет равна

$$b = \frac{q}{r_0^2} = (E_r)_{r=0}. \quad (9.200)$$

Постоянной b характеризуется „абсолютное поле“.

Таким образом, источники можно рассматривать или как точечные сингулярности, приводящие к существованию индукции D_r , которая в начале координат бесконечна, или как непрерывное пространственное распределение, описываемое конечной в начале координат напряженностью E_r . Очевидно, именно при последней интерпретации становится особенно ясным отсутствие противопоставления между полем и частицей. Таким образом, существенным следствием теории Борна является то, что поле и источники не противопоставляются друг другу, а это в свою очередь связано с наличием нелинейных соотношений между напряженностью и индукцией, вытекающих из принятой в теории формы лагранжиана (9.165) или (9.172).

Заряд в данной теории в принципе оказывается распределенным по всему пространству. Его характеристики полностью определяются заданием напряженности поля (а не потенциала, как это было в теории Ми). Определяемая согласно (9.180) векторная плотность \mathcal{J}^{μ} также дает возможность представить плотность свободных зарядов и токов в виде функции не от координат, а от напряженностей.

В частности, заряд частицы можно определить путем интегрирования свободной плотности \mathcal{J}^0 по всему пространству, включая начало координат. Возможность получить конечное значение для этого интеграла, характеризующего заряд q , связана с тем, что в начале координат величина напряженности E остается конечной.

В самом деле, если речь идет о сферически-симметричном статическом поле, то выражение (9.182) сводится к следующему:

$$\begin{aligned} -j^0 &= \frac{1}{\sqrt{1+(k^2/r^4)}} \varphi^{01} \partial_1 \left(\sqrt{1 + \frac{k^2}{r^4}} \right) = \\ &= \frac{k}{r^2} \frac{1}{1+(k^2/r^4)} \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{1 + \frac{k^2}{r^4}}, \quad (9.201) \end{aligned}$$

где приняты во внимание соотношения (9.186), (9.187) и (9.183). Соотношение (9.201) можно записать также в виде

$$j^0 = \frac{2k^3}{r^7 \left(1 + \frac{k^2}{r^4}\right)^{3/2}} = \frac{1}{r \left(1 + \frac{r^4}{k^2}\right)^{3/2}}, \quad (9.202)$$

и для плотности $\rho = b \mathcal{J}^0$ получим тогда следующее значение:

$$\rho = \frac{b}{4\pi} \mathcal{J}^0 = \frac{b}{4\pi} \sqrt{-g} j^0 = \frac{qr^2 \sin \theta}{r_0^2 2\pi r \left(1 + \frac{r^4}{r_0^4}\right)^{3/2}}. \quad (9.203)$$

В результате путем интегрирования по всему пространству, включая и сингулярную область около начала координат, получаем

$$\begin{aligned} \int \rho dr d\theta d\varphi &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho dr d\theta d\varphi = \\ &= \frac{2q}{r_0^3} \int_0^\infty \frac{r^2 dr}{\frac{r}{r_0} \left(1 + \frac{r^4}{r_0^4}\right)^{3/2}} = q \int_0^{\pi/2} \cos \psi d\psi = q, \end{aligned} \quad (9.204)$$

где

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r^2}{r_0^2}. \quad (9.205)$$

Таким образом, взяв интеграл по всему пространству от плотности свободных зарядов ρ , получим конечное выражение для заряда частицы. Здесь этот результат, как и вытекающее из него понимание смысла заряда, обусловлен нелинейностью соотношений, связывающих между собой компоненты тензоров напряженности и индукции.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

К числу экспериментальных подтверждений специальной теории относительности относятся не только те опыты, которые непосредственно обосновывают справедливость основных положений теории, но также и опыты, подтверждающие выводы из специальной теории относительности. В настоящее время подобные подтверждения связаны с выводами, относящимися к очень большому числу областей классической и квантовой физики. Фактически постулаты специальной теории-относительности служат основой для построения или видоизменения многочисленных теорий, так что сравнение следствий из них с опытом дает возможность косвенным образом проверить первоначальные гипотезы.

Среди подобных построений одной из наиболее известных является релятивистская квантовая теория электрона, сформулированная Дираком в 1928 г. Эта теория применима ко всем быстро движущимся заряженным частицам со спином $1/2$. Релятивистский формализм теории приводит к необходимости наличия у электрона собственного момента или спина (и связанного с ним магнитного момента), который ранее довольно произвольным образом уже вводился в нерелятивистских теориях. В релятивистскую теорию спин входит автоматически и опытные подтверждения этой теории служат косвенным подтверждением специальной теории относительности. В частности, опытные данные, полученные при измерении тонкой структуры спектральных линий H_{α} и D_{α} водорода и дейтерия, находятся в хорошем соответствии с теоретическими кривыми, характеризующими распределение интенсивности согласно релятивистской теории тонкой структуры.

Видоизмененная теория Дирака может служить основой для построения релятивистской теории частиц с произвольным спином, который может быть как целым, так и полуцелым. Совершенно другим путем к удовлетворительной релятивистской формулировке приходит квантовая теория полей, связанная с работами Швингера, Фейнмана, Дайсона. Ее частным случаем является квантовая электродинамика, служащая продолжением релятивистской электродинамики.

Мы здесь не будем рассматривать связь теории относительности с опытами, подтверждающими вытекающие из нее выводы более или менее косвенного характера, а остановимся только на некоторых непосредственных подтверждениях основных положений. В предыдущих главах мы уже отмечали некоторые из таких подтверждений; здесь мы более подробно рассмотрим ряд других.

А. ЗАМЕДЛЕНИЕ ЧАСОВ

Собственное время $\Delta\tau$, измеряемое часами, закрепленными в системе отсчета S' , связано соотношением (5.44) с временем Δt , отмечаемым наблюдателем в другой галилеевой системе отсчета S :

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} > \Delta\tau. \quad (10.1)$$

Таким образом промежуток времени $\Delta\tau$, в течение которого происходит событие, измеренный в собственной системе отсчета, всегда будет меньше промежутка Δt , измеренного в другой системе: для наблюдателя, связанного с другой галилеевой системой отсчета, часы из движущейся системы идут с замедлением.

§ 1. Теория эффекта Допплера и замедление часов

Рассмотрим часы, образованные колеблющимся атомом с собственной частотой (т. е. частотой, измеренной в системе отсчета связанной с этим атомом), равной ν_0 . Согласно (10.1), в любой другой системе отсчета эта частота будет равна

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1-\beta^2} < \nu_0. \quad (10.2)$$

Таким образом, наблюдатель отметит уменьшение частоты, т. е. увеличение длины волны, излучаемой атомом, движущимся по отношению к спектрографу. С помощью последнего можно будет обнаружить, что спектр, испускаемый этим атомом, *смещается в красную сторону*.

Однако на изменение частоты, характеризующее формулой (10.2) (и являющееся величиной второго порядка, так как оно зависит от β^2), накладывается классический эффект Допплера (см. стр. 111). Последний является эффектом первого порядка и им маскируется релятивистское замедление (10.2).

Если угол между направлением движения источника и направлением наблюдения равен θ , то эффект Допплера, предсказываемый нерелятивистской теорией, должен привести к замене ν_0 на

$$\nu = \frac{\nu_0}{1-\beta \cos \theta}. \quad (10.3)$$

Наложение релятивистского замедления (10.2) и классического эффекта Доплера (10.3) приводит к следующему выражению для наблюдаемой частоты:

$$\nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}. \quad (10.4)$$

Релятивистская поправка (10.2) называется *поперечным эффектом Доплера*. В самом деле, если $\theta = \pi/2$, то классический эффект Доплера отсутствует и имеет место только формула (10.2).

Выражение (10.4) очень просто получается из общей релятивистской теории эффекта Доплера. Оно непосредственно вытекает из формул гл. 7, § 7, применяемых к тому частному случаю, когда $n = 1$, т. е. когда предполагается, что световые волны распространяются в пустоте (причем это условие приближенно можно считать справедливым также для воздуха).

Предположим, что источник движется вдоль Ox и что испускаемый свет наблюдается в направлении On ($\widehat{xOn} = \theta$) (см. фиг. 30 на стр. 185). Пусть наблюдатель P связан с системой $S(Ox, Oy)$. В системе S его координатами будут (x, y) , а в системе $S'(O'x', O'y')$, связанной с движущимся источником, он будет иметь координаты (x', y') . Будем считать, что система S' , ось которой $O'x'$ движется вдоль Ox со скоростью w , в начальный момент совпадает с системой S .

Время, за которое фронт первой волны проходит от O до P , равно

$$t_1 = \frac{l}{c} = \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c}. \quad (10.5)$$

Таким образом число волн, достигающих точки P к определяемому в системе S моменту времени t , будет равно

$$\nu(t - t_1).$$

Но поскольку для любой системы отсчета это число одинаково, то

$$\nu \left(t - \frac{l}{c} \right) = \nu' \left(t' - \frac{l'}{c} \right), \quad (10.6)$$

где ν' — частота в связанной с источником системе S' . Поэтому

$$\nu' = \nu_0. \quad (10.7)$$

С другой стороны, l'/c равняется времени, в течение которого волна OM достигает точки P и которое определяется теперь в системе S' . По аналогии с (10.5) l'/c можно представить в виде

функции от координат точки P , которые в системе S' равны x' , y' :

$$\frac{t'}{c} = \frac{x' \cos \theta' + y' \sin \theta'}{c}, \quad (10.8)$$

где θ' — угол, который следует определить.

Из (10.6) получим

$$\nu \left(t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c} \right) = \nu' \left(t' - \frac{x' \cos \theta' + y' \sin \theta'}{c} \right). \quad (10.9)$$

Поскольку значения ν' и θ' , очевидно, не зависят от того, каким образом выбирается положение точки P , то, подставляя в (10.9) формулы Лоренца

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad t = \frac{t' + \frac{\beta}{c} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (10.10)$$

получаем выражение, в котором коэффициенты при x' , y' и t' должны тождественно обращаться в нуль. Следовательно,

$$\frac{\nu(1 - \beta \cos \theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \nu', \quad \frac{\nu(\beta - \cos \theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\nu' \cos \theta', \quad (10.11)$$

$$\nu \sin \theta = \nu' \sin \theta'.$$

Это есть не что иное, как соотношения (7.67)–(7.69), записанные для $n = 1$, т. е. для случая, когда $u = u' = c$. Отсюда имеем

$$\boxed{\nu' = \frac{\nu(1 - \beta \cos \theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}}, \quad (10.12)$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta}{\cos \theta - \beta}}, \quad (10.13)$$

т. е.

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \sin \theta' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta}.$$

Но $\nu' = \nu_0$ есть собственная частота атома, так что

$$\boxed{\nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}}. \quad (10.14)$$

Эта формула, связывающая ν_0 и ν , характеризует эффект Доплера в теории относительности.

Замена θ' на θ соответствует явлениям абберации, приводящим к изменению направления световых лучей из-за относительного движения источника и наблюдателя.

Если наблюдение производится в направлении движения источника (продольный эффект Доплера), то $\theta = 0$ и из (10.11) следует

$$\theta' = 0, \quad \nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \quad (10.15)$$

В этом случае явления абберации отсутствуют.

Если наблюдение производится в направлении, перпендикулярном к направлению движения источника (поперечный эффект Доплера), то $\theta = \pi/2$ и

$$\cos \theta' = -\beta, \quad \nu = \nu_0 \sqrt{1-\beta^2}. \quad (10.16)$$

Таким образом эффект Доплера однозначно определяется релятивистским эффектом замедления часов.

§ 2. Опыты Айвса и Стилуэлла (1941 г.)¹⁾

Сравнение формул (10.15) и (10.16) показывает, что нерелятивистский эффект Доплера является эффектом первого порядка, тогда как поправки, связанные с замедлением часов, относятся к эффектам второго порядка. Если проводить наблюдения в направлении, перпендикулярном к направлению движения, то эффекты первого порядка, разумеется, можно исключить. Однако в этом случае влияние членов порядка β^2 полностью маскируется ошибками в определении угла θ , что делает проверку формулы Эйнштейна иллюзорной.

Опыты Айвса и Стилуэлла заключаются в проведении одновременно наблюдений над излучением, распространяющимся из одного и того же источника в двух противоположных направлениях. В результате наблюдаются частоты

$$\nu_1 = \frac{\nu_0 \sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos \theta}, \quad \nu_2 = \frac{\nu_0 \sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta \cos \theta}. \quad (10.17)$$

На практике угол наблюдения выбирается очень малым. Поэтому наблюдаемые длины волн λ_1 и λ_2 подчиняются следующим соотношениям:

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{\lambda_0 (1 - \beta \cos \theta)}{2\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\lambda_0 (1 + \beta \cos \theta)}{2\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (10.18)$$

¹⁾ См. работы Айвса и Стилуэлла [48, 120] и Леннюира [121].

Отсюда разность между начальной длиной волны и длиной волны, соответствующей центру тяжести двух получаемых линий, равна

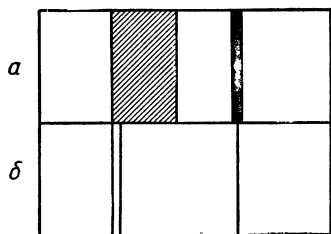
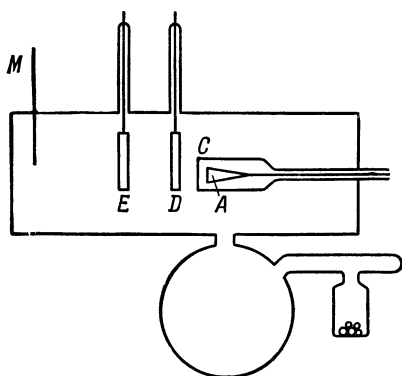
$$\Delta_2\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda_0 \approx \lambda_0 \frac{\beta^2}{2}. \quad (10.19)$$

С другой стороны, эффекты первого порядка можно измерить, наблюдая излучение, испускаемое в направлении θ , образующем очень малый угол с направлением движения источника. При этом

$$\Delta_1\lambda \approx \lambda_0\beta. \quad (10.20)$$

Опыт состоял в сравнении $\Delta_1\lambda$ и $\Delta_2\lambda$.

Айвс и Стилуэлл использовали трубки каналовых лучей, модифицированные Бато и Демпстером [122]. Эти трубки дают возможность получить атомы с одинаковой кинетической энергией, и длина волны λ_0 оказывалась настолько хорошо определенной, что можно было заметить отклонение $\Delta_2\lambda$. Между двумя очень близко расположенными друг к другу электродами D и E прикладывалась большая разность потенциалов (до 40 000 в), ускоряющая молекулы водорода, ионизованные электронами, испускаемыми из раскаленной нити. Давление поддерживалось довольно низким, чтобы в небольшом пространстве DE не происходило



Фиг. 33. Опыты Айвса и Стилуэлла.

столкновений молекул водорода между собой и изменения их заряда. При диссоциации ионизованных молекул H^2 и H^3 получались нейтральные атомы. В результате оказывалось возможным наблюдать излучение (полосы серии Бальмера) атомов, имеющих одинаковую кинетическую энергию.

В обычных установках для получения каналовых лучей кинетическая энергия атомов не одинакова, и линии сильно расширяются из-за эффекта Доплера первого порядка. При этом отношение между несмещенными и смещенными компонентами оказывается аналогичным тому, как это изображено в нижней части фиг. 33 (схема a). В противоположность этому в установке, использованной Айвсом и Стилуэллом, полосы получаются очень

тонкими, что дает возможность обнаружить смещение центра тяжести $\Delta_2\lambda$, являющееся величиной второго порядка. [Дублет, изображенный на фиг. 33 (схема б), обусловлен движущимися с ускорением атомами H^2 и H^3].

Излучение наблюдается в направлении, образующем с направлением движения каналовых лучей угол 7° . Это излучение попадает в щель спектрографа, расположенную в центре кривизны вогнутого зеркала М. Ось этого зеркала совпадает с направлением наблюдения. Следовательно, излучение каждого атома проходит в двух направлениях вдоль прямых, проходящих через точки зеркала и щель спектрографа. В условиях опыта была применима формула (10.18).

После включения ускоряющего потенциала линия $\text{H}_\beta = 4861 \text{ \AA}$ из-за эффекта Допплера смещается на $\Delta_1\lambda = 20 \text{ \AA}$. Например, для данной установки ускоряющему потенциалу $20\,000 \text{ в}$, первоначально применявшемуся Айвсом и Стиллуэллом, соответствует смещение 2 м.м. Согласно (10.20),

$$\beta \approx \frac{20}{5000} = 0,004. \quad (10.21)$$

Предсказываемый эффект второго порядка равен

$$\Delta_2\lambda = \frac{\lambda_0}{2} \beta^2 = \frac{\Delta_1\lambda}{2} \beta = \frac{20}{2} \times 0,004 = 0,04 \text{ \AA}. \quad (10.22)$$

Таким образом, он приводит к смещению

$$\frac{2 \times 0,04}{20} = 0,004 \text{ м.м.}$$

По порядку величины в точности такой явится наблюдаемая полуширина линии H_β , причем тонкая структура не проявится. Поэтому может возникнуть вопрос, не объясняется ли наблюдаемый эффект разностью между относительными интенсивностями неразделенных компонент линии H_β . Учитывая подобные критические замечания, Айвс и Стиллуэлл повторили свои опыты, доведя ускоряющий потенциал до $43\,000 \text{ в}$.

После того, как были приняты все эти (и некоторые другие) предосторожности, было получено отличное согласие между значениями $\Delta_2\lambda$, вычисленными по (10.19), и опытными значениями, получаемыми для различных ускорений, т. е. для различных β , причем максимальная величина β была равна $0,007$. Таким образом, наблюдаемые значения совпадают с теми, которые предсказываются формулой Эйнштейна ¹⁾.

¹⁾ Новое подтверждение релятивистского эффекта Допплера недавно было получено также с помощью эффекта Мессбауэра [см. § 10 гл. 12 книги, а также статьи в журнале УФН, 72, вып. 4 (1960)]. — *Прим. перев.*

§ 3. Средняя продолжительность жизни мезонов¹⁾

Мезоны, обнаруживаемые в космических лучах, являются заряженными или нейтральными частицами, масса которых лежит между массой электрона и массой протона. В среднем по истечении времени τ μ -мезон (масса которого приблизительно в 200 раз больше массы электрона) распадается на электрон, нейтрино и антинейтрино. Этот самопроизвольный распад наблюдался в 1940—1941 гг. на снимках, полученных с камерой Вильсона (Вильямс и Робертс [123]), а также с помощью счетчиков (см. работы Оже и Маза [124], Маза и Шаминада [125], Шаминада, Фреона и Маза [126]).

Счетчики дают возможность измерить среднее время жизни τ_0 покоящегося мезона. Для этого мезоны останавливают в металлическом блоке. С помощью счетчиков можно зарегистрировать время попадания мезона в блок и время выхода электрона, возникшего в результате распада. На практике используют смещение моментов включения входного и выходного счетчиков до тех пор, пока импульсы от них не совпадут. Если промежуток времени между попаданием мезона и его распадом равен Δt , то таким путем можно определить число мезонов $N(\Delta t)$, распавшихся за время t .

Таким образом получим

$$y = -\frac{\Delta t}{\tau_0} + \text{const}, \quad \text{где} \quad y = \ln \frac{N(\Delta t)}{t}. \quad (10.23)$$

По наклону кривой $y = -(1/\tau_0)\Delta t$ можно определить среднее время жизни τ_0 покоящегося мезона. В результате было получено значение $\tau_0 = 2,15 \pm 0,07 \cdot 10^{-6}$ сек (Нересон и Росси [127]) и $\tau_0 = 2,7 \pm 0,5 \cdot 10^{-6}$ сек (Качиапуоти и Ричиони [128]). Таким образом, среднее время жизни мезона приближенно равно

$$\tau_0 \approx 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ сек}. \quad (10.24)$$

В верхних слоях атмосферы мезоны движутся в среднем со скоростью, близкой к c , и до своего распада проходят много километров. Поскольку мезоны проходят в среднем такой большой путь, то необходимо допустить, что среднее время жизни движущихся в верхних слоях атмосферы мезонов значительно больше среднего времени жизни покоящихся мезонов. В самом деле среднему времени жизни $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ сек соответствует путь

$$L = v\tau_0 \approx c\tau_0 \approx 3 \cdot 10^8 \times 2,2 \cdot 10^{-6} = 600 \text{ м}. \quad (10.25)$$

¹⁾ По этому вопросу укажем также на работу Ленньюира [121].

Фактически τ_0 равняется среднему времени жизни мезона, измеряемому в его собственной системе отсчета. В любой другой системе отсчета это время увеличивается:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (10.26)$$

и ему соответствует средняя величина свободного пути, равная

$$L = \tau v \approx \frac{\tau_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} = W \frac{\tau_0}{m_0 c}, \quad (10.27)$$

где

$$W = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (10.28)$$

Таким образом,

$$\frac{L}{W} = \frac{\tau_0}{m_0 c} = \text{const.} \quad (10.29)$$

Эту формулу проверяли в 1941 г. Росси и Холл [129]. Они измеряли путь L , проходимый мезонами с определенной энергией W . Для $W = (5,0 \pm 0,7) \cdot 10^8$ эв было найдено

$$L = (4,5 \pm 0,6) \cdot 10^5 \text{ см}, \quad (10.30)$$

откуда следует, что если масса мезона в 200 раз превышает массу электрона (Лепренс-Ринге и Городецкий [130]), то

$$\tau_0 = (2,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-6} \text{ сек.} \quad (10.31)$$

Согласно (10.27), энергии

$$W = 5 \cdot 10^8 \text{ эв}$$

соответствует

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\tau_0 c}{L} = \frac{2,4 \cdot 10^{-6} \times 3 \cdot 10^{10}}{4,5 \cdot 10^5}, \quad (10.32)$$

т. е. $\beta = 0,99$.

Таким образом закон замедления часов был подтвержден для широкого интервала скоростей, начиная от

$$\beta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{1}{250} \approx 0,004$$

(опыт Айвса и Стилуэлла) и вплоть до $\beta = 0,99$.

Б. ИЗМЕНЕНИЕ МАССЫ СО СКОРОСТЬЮ

§ 4. Движение заряженной частицы в электромагнитном поле

Движение частицы в силовом поле описывается при помощи релятивистских уравнений (8.24):

$$f = \frac{dp}{dt}.$$

Если на заряженную частицу действует электромагнитное поле, то выражение для f^p выводится из силы Лоренца. В самом деле, согласно (8.25), (9.35) и (9.30),

$$F^p = \frac{f^p}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{4\pi} \varphi^{pp} j_p = \rho \varphi^{pp} u_p, \quad (10.33)$$

и, согласно (7.12),

$$u^p = \frac{v^p}{c \sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = \sum_p \frac{(v^p)^2}{c^2}, \quad (10.34)$$

где

$$u^p = \frac{dx^p}{ds}, \quad v^p = \frac{dx^p}{dt}. \quad (10.35)$$

Таким образом, (10.33) можно переписать в виде

$$f^p = \frac{\rho}{c} \varphi^{pp} v_p. \quad (10.36)$$

Если сила f обусловлена действием на заряженную частицу электромагнитного поля, то уравнения движения (10.36) примут следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v^p}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{q}{c} \varphi^{pp} v_p. \quad (10.37)$$

Умножая (10.37) на v_p и суммируя по p , получаем

$$v_p \frac{d}{dt} \frac{m_0 v^p}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{q}{c} v_p \varphi^{pp} v_p = \frac{q}{c} v_p \varphi^{0p} v_0, \quad (10.38)$$

где

$$v_p v^p = - \sum_p (v^p)^2 = -c^2 \beta^2 \quad (10.39)$$

и

$$\varphi^{p0} = \partial^p \varphi^0 - \partial^0 \varphi^p. \quad (10.40)$$

Таким образом, уравнение (10.38) переписывается в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2 \beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) - \frac{m_0 c^2}{2\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\beta^2}{dt} = q (v_p \partial^p \varphi^0) - q (v_p \partial^0 \varphi^p), \quad (10.41)$$

где

$$m_0 c^2 \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = q \left(\frac{d\varphi^0}{dt} - \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} \right) - \frac{q}{c} v_p \frac{\partial \varphi^p}{\partial t} \quad (10.42)$$

и учтено, что

$$\frac{d\varphi^0}{dt} = \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} + v^p \frac{\partial \varphi^0}{\partial x^p}. \quad (10.43)$$

В конечном итоге уравнение, описывающее движение заряженной частицы, примет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - q\varphi^0 \right) = -q \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial t} + \frac{v_p}{c} \frac{\partial \varphi^p}{\partial t} \right). \quad (10.44)$$

Допустим, что начальная скорость частицы практически равна нулю и что ускорение обусловлено электростатическим потенциалом V . Такое положение, например, имеет место для ускорителя Ван-де-Граафа. Из (10.44) сразу же получим

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - q\varphi^0 = \text{const}, \quad (10.45)$$

т. е. при учете начальных условий

$$m_0 c^2 + qV = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (10.46)$$

Отсюда легко найти скорость

$$v = \frac{\sqrt{\frac{2qV}{m_0} \left(1 + \frac{qV}{2m_0 c^2} \right)}}{1 + \frac{qV}{m_0 c^2}}. \quad (10.47)$$

§ 5. Отклонение заряженной частицы под действием параллельных электрического и магнитного полей, перпендикулярных к начальной скорости частицы¹⁾

Уже в электронной теории Лоренца предсказывалось, что масса должна зависеть от скорости по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (10.48)$$

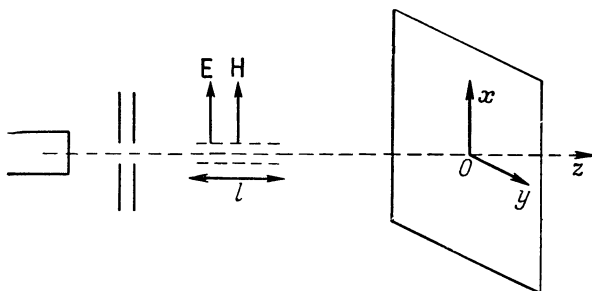
Опыт Релея и Брэйса, ставивший своей целью обнаружить существование эфирного ветра, фактически должен был установить, каким образом сокращение длин влияет на показатель преломления прозрачных движущихся тел. При этом отрицательные результаты этого опыта можно объяснить с помощью предположения, что эффекты сокращения компенсируются изменением массы, вытекающим из (10.48).

Гипотеза зависимости массы от скорости (10.48) непосредственно вытекает из теории деформируемого электрона, введенной Лоренцом вместо представления о твердом электроде, предлагавшегося Абрагамом. Поэтому первоначально казалось, что опыты,

¹⁾ См. работу Герлаха [33].

ставящие своей целью проверить соотношение (10.48), позволят выбрать одну из двух упомянутых моделей электрона. В большинстве из таких опытов¹⁾ пучок ограниченных узкой диафрагмой катодных лучей подвергается действию параллельных между собой электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , направление которых перпендикулярно к начальной скорости пучка (фиг. 34).

В отсутствие поля катодные лучи попадают в точку O . Поле \mathbf{E} приводит к отклонению $x = \frac{1}{2}(e/m) E (l^2/v^2)$, где l — промежуток



Фиг. 34. Отклонение электронного пучка под действием параллельных электрического и магнитного полей.

длины, на котором напряженности полей \mathbf{E} и \mathbf{H} отличаются от нуля. Поле \mathbf{H} приводит к отклонению, перпендикулярному к плоскости, определяемой вектором \mathbf{H} и направлением пучка: $y = \frac{1}{2}(e/mc) H (l^2/v)$. Поэтому если одновременно существуют оба поля, то при произвольном значении v отклонения x и y будут связаны соотношением

$$\frac{y^2}{x} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{H^2}{E} \frac{l^2}{c^2}. \quad (10.49)$$

Частицы с одинаковым значением отношения e/m , но с различными скоростями будут распределяться на экране по параболе

$$\frac{y^2}{x} = \frac{e}{m} \frac{H^2}{E} \frac{l^2}{2c^2} = \text{const}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} x = \frac{e}{2m} E \frac{l^2}{v^2}, \\ y = \frac{e}{2mc} H \frac{l^2}{v}. \end{cases} \quad (10.50)$$

Если учесть возможное изменение массы со скоростью, то точки попадания на экран частиц с одинаковым значением e/m

¹⁾ Сошлемся, например, на работы Кауфмана [131], Бюхерера [132], Неймана [133], Гюи и Лаванши [134] и Герлаха [33].

будут распределяться уже не по параболе, а по кривой 4-го порядка, которая получается при исключении скорости v из двух уравнений:

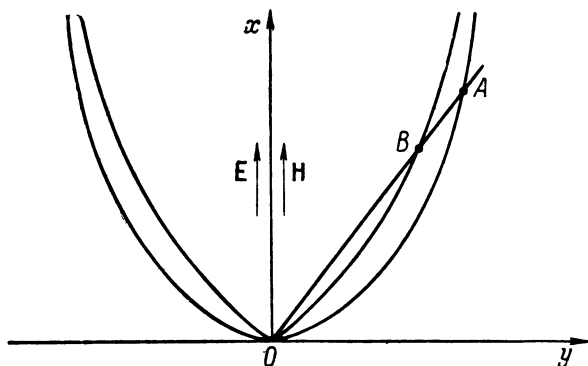
$$x = \frac{eE}{2m} \frac{l^2}{v^2} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (10.51a)$$

$$y = \frac{eE}{2mc} \frac{l^2}{v} \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (10.51b)$$

Таким образом,

$$\frac{y^2}{x} = \sqrt{1 - \beta^2} \left(\frac{y^2}{x} \right)_{\text{параб.}}. \quad (10.52)$$

Теперь ось Oy уже не служит касательной к этим кривым в начале координат. Впрочем и этому началу теперь соответ-



Фиг. 35. Распределение точек падения для частиц с одинаковым значением отношения e/m .

ствует не бесконечное значение v , как было в нерелятивистской теории, а $v = c$. При этом

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{y}{x} \right)_{v \rightarrow c} = \frac{H}{E}, \quad (10.53)$$

где через α обозначен угол, образуемый осью Ox с касательной к кривой в точке O .

С другой стороны, точки попадания на экран частиц с различными массами, но с одинаковой скоростью всегда располагаются по прямым

$$\frac{y}{x} = \frac{H}{E} \frac{v}{c}, \quad (10.54)$$

проходящим через начало координат.

При изменении массы со скоростью точка попадания на экран частицы с заданным значением $\beta = v/c$ будет определяться пересечением прямой (10.54), соответствующей этому значению β , и

кривой, которая, согласно (10.52), получается из классической параболы в результате умножения y^2/x на $\sqrt{1-\beta^2}$. Этому соответствует переход от точки A к точке B .

Что касается практических измерений, то Гюи и Лаванши [134, 135] в своих опытах добивались постоянных отклонений двух пучков катодных лучей, соответствующих различным скоростям, выбирая для разных пучков различные значения напряженности электрического и магнитного полей. Таким путем по отношению напряженностей можно определить отношение масс m и m' . Гюи и Лаванши проводили опыты с электронами, скорости которых лежали в пределах $0,22 < \beta < 0,49$.

Наккен [136] в 1935 г. усовершенствовал эти измерения. Он использовал электроны с энергией около 200 кэв, соответствующей значению $\beta \approx 0,7$. Оказалось, что нерелятивистские вычисления, основанные на гипотезе Абрагама, не согласуются с опытными результатами, тогда как формула (10.48) очень хорошо подтверждается опытом. Таким образом, изменение массы со скоростью можно считать установленным.

Этот результат учитывается при разработке методов ускорения тяжелых частиц (протонов, дейтронов, α -частиц) в магнитном поле. Для ускорения таких заряженных частиц используются циклотроны. Под влиянием магнитного поля, перпендикулярного к скорости частиц, частицы движутся по круговой траектории. Если m не меняется, то частота обращения остается постоянной¹⁾ и радиус описываемого круга ($v = r\omega$) после каждого приращения энергии будет возрастать. При больших скоростях частиц (для дейтронов с энергией 20 Мэв величина $\beta = 0,145$) из-за возрастания массы со скоростью значение v начинает убывать. В результате возникает эффект торможения, который может нарушить синхронизацию между действием ускоряющего поля и движением заряженной частицы. Поэтому приходится использовать или изменение напряженности поля, которая с увеличением m должна возрастать (синхрофазотрон), или же изменение частоты ускоряющего поля, которая с увеличением m должна убывать (синхроциклотрон, или фазотрон).

§ 6. Упругое столкновение двух частиц

Рассмотрим в лабораторной системе отсчета S упругое столкновение двух частиц с одинаковыми массами покоя m_0 (фиг. 36).

¹⁾ В самом деле, согласно (9.34),

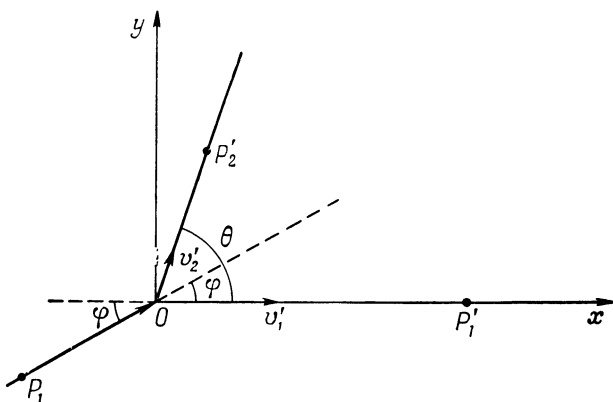
$$f = m\dot{\phi} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{h}], \quad m\omega^2 r = \frac{e}{c} \omega r H,$$

т. е.

$$v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{eH}{2\pi mc}.$$

В системе S одна из этих частиц P_0 покоится в точке O , а другая частица P_1 имеет постоянную скорость \mathbf{v}_1 . После столкновения в точке O частицы по отношению к S будут двигаться в направлениях OP'_1 и OP'_2 со скоростями \mathbf{v}'_1 и \mathbf{v}'_2 .

Выберем декартову систему координат таким образом, чтобы оси Ox и Oy лежали в плоскости OP_1, OP'_1 , а направление Ox совпадало с OP'_1 , т. е. с направлением \mathbf{v}'_1 . Из закона сохранения



Ф и г. 36. Упругое столкновение двух частиц.

количества движения следует, что скорость \mathbf{v}'_2 должна также лежать в плоскости xOy . Скоростям $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1$ и \mathbf{v}'_2 соответствуют векторы момента количества движения $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1$ и \mathbf{p}'_2 .

Обозначим через φ и θ углы, образуемые прямыми OP_1 и OP'_2 с осью Ox ; тогда θ будет равняться также углу $\widehat{OP'_1, OP'_2}$ между траекториями двух частиц после их столкновения. Проецируя векторное соотношение, соответствующее закону сохранения момента количества движения, на оси Ox и Oy , получаем

$$p_1 \cos \varphi = p'_1 + p'_2 \cos \theta, \quad (10.55)$$

$$p_1 \sin \varphi = p'_2 \sin \theta. \quad (10.56)$$

Отсюда следует, что

$$2p'_1 p'_2 \cos \theta = p_1^2 - p'^2_1 - p'^2_2. \quad (10.57)$$

С другой стороны, из закона сохранения энергии имеем

$$m_1 + m_0 = m'_1 + m'_2. \quad (10.58)$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{W^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2 \quad \text{или} \quad \frac{p^2}{c^2} = m^2 - m_0^2 \quad (10.59)$$

и учитывая (10.57), получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{c^2} p'_1 p'_2 \cos \theta &= (m_1^2 - m_0^2) - (m_1'^2 + m_2'^2 - 2m_0^2) = \\ &= m_1^2 + m_0^2 - m_1'^2 - m_2'^2. \end{aligned} \quad (10.60)$$

Но из (10.58) следует

$$m_1 = m_1' + m_2' - m_0, \quad (10.61)$$

так что

$$\frac{2}{c^2} p'_1 p'_2 \cos \theta = 2(m_0^2 + m_1' m_2' - m_1' m_0 - m_2' m_0) \quad (10.62)$$

или

$$\frac{p'_1 p'_2}{c^2} \cos \theta = (m_2' - m_0)(m_1' - m_0). \quad (10.63)$$

В нерелятивистской механике всегда $m_0 = m_1' = m_2'$, откуда

$$\cos \theta = 0 \quad (\text{если } p'_1 p'_2 \neq 0) \quad \text{и} \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (10.64)$$

После столкновения траектории частиц образуют между собой прямой угол.

В релятивистской механике угол θ между траекториями частиц определяется из соотношения

$$\cos \theta = c^2 \frac{(m_2' - m_0)(m_1' - m_0)}{p'_1 p'_2} \quad (10.65)$$

или, согласно (10.59), из соотношения

$$\cos \theta = \frac{(m_2' - m_0)(m_1' - m_0)}{\sqrt{(m_1'^2 - m_0^2)(m_2'^2 - m_0^2)}} = \sqrt{\frac{(m_2' - m_0)(m_1' - m_0)}{(m_2' + m_0)(m_1' + m_0)}}. \quad (10.66)$$

Если $p'_1 p'_2 \neq 0$, то

$$m_2' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} > m_0, \quad m_1' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} > m_0, \quad (10.67)$$

т. е.

$$(m_2' - m_0)(m_1' - m_0) > 0 \quad (10.68)$$

или

$$\cos \theta > 0, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (10.69)$$

Таким образом, угол θ между направлениями, по которым частицы движутся после столкновения при релятивистских скоростях, всегда является острым.

Если ввести углы φ и ψ , образуемые прямыми OP'_1 и OP'_2 с направлением движения падающей частицы OP_1 , то полученные результаты можно записать несколько иначе. Имеем

$$\theta = \varphi + \psi, \quad (10.70)$$

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} (\theta - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad (10.71)$$

и, согласно (10.66), (10.55), (10.56) и (10.59),

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{2m_0(m'_1 + m'_2)}{(m'_2 - m_0)(m'_1 - m_0)}, \quad (10.72)$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\sin^2 \theta}{\left(\frac{p'_1}{p_2} + \cos \theta\right)^2} = \frac{2m_0(m'_2 - m_0)}{(m'_1 - m_0)(m'_1 + m'_2)}. \quad (10.73)$$

Подставляя эти выражения в (10.71) и учитывая соотношение (10.58), получаем

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi = \frac{2m_0}{m'_1 + m'_2} = \frac{2m_0}{m_0 + m_1}. \quad (10.74)$$

Если массы покоя частиц P_0 и P_1 одинаковы, то

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \quad \left(\beta = \frac{v_1}{c}\right), \quad (10.75)$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi = \frac{2\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10.76)$$

В ньютоновском приближении ($\beta \rightarrow 0$) отсюда снова получается формула (10.64):

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} (\varphi + \psi) \rightarrow \infty, \quad \text{т. е. } \theta = \varphi + \psi \rightarrow \frac{\pi}{2}. \quad (10.77)$$

Приведенные результаты находятся в очень хорошем согласии с опытом.

Так, если скорость падающей частицы мала по сравнению с c , то траектории OP'_1 и OP'_2 , по которым частицы движутся после столкновения, будут в соответствии с выводами классической механики взаимно перпендикулярными. Именно это наблюдается в камере Вильсона, когда α -частица сталкивается с ядром гелия.

Если же скоростью падающей частицы нельзя пренебречь по сравнению с c , то опыт будет подтверждать предсказания релятивистской механики. Например, если в камере Вильсона наблюдается столкновение между электроном, движущимся с большой скоростью, и покоящимся электроном, то можно отметить, что после столкновения угол между траекториями двух частиц будет меньше $\pi/2$. Опыты Чемпиона [137], в которых непосредственно измерялись углы θ и φ для частиц, сталкивающихся с различными скоростями, позволили систематически проверить справедливость формулы (10.69). Особенно замечательные подтверждения этих результатов были получены на фотографиях, сделанных с помощью камеры Вильсона. На одной из таких фотографий, полученных Жолио (см. книгу М. Кюри [138], фото XVI), зафиксировано столкновение движущегося электрона, для которого $\beta = 0,968$, с покоящимся электроном; при этом угол, под которым расходятся электроны, равен 60° . На другой фотографии (см. диссертацию Лепренс-Ринге [139], фото VI), где движущийся электрон до столкновения с неподвижным электроном имеет $\beta = 0,93$, этот угол равен 72° .

§ 7. Эффект Комптона

Постараемся теперь уточнить, каким образом происходит столкновение между покоящимся электроном и фотоном, обладающим энергией

$$E = h\nu. \quad (10.78)$$

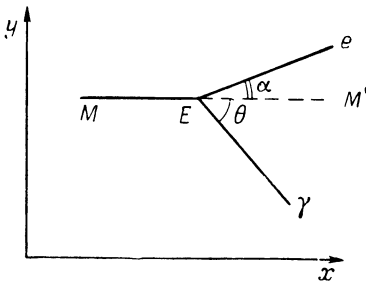
Поскольку для фотона $\beta = 1$, то здесь нельзя применять релятивистские формулы, содержащие члены с множителем $1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Однако в этом случае по-прежнему остается справедливым соотношение

$$\frac{W^2}{c^2} = p^2 + \mu_0^2 c^2, \quad (10.79)$$

в котором только массу покоя μ_0 фотона следует считать равной нулю. При этом для γ -лучей ($\mu_0 = 0$)

$$p = \frac{W}{c} = \frac{h\nu}{c}. \quad (10.80)$$



Фиг. 37. Столкновение фотона с электроном.

Предположим, что сталкивающийся фотон движется по прямой MM' , параллельной оси Ox (фиг. 37). После столкновения он будет двигаться по направлению $E\gamma$, тогда как электрон, покоившийся в точке E , будет двигаться по прямой Ee .

Обозначим частоту, энергию и момент количества движения фотона, падающего на электрон, через ν , W , \mathbf{p} , а эти же величины для фотона после столкновения через ν' , W' , \mathbf{p}' . Если масса покоя и скорость электрона равны m_0 и \mathbf{v} , то из законов сохранения энергии и количества движения вытекают следующие соотношения:

$$W + m_0 c^2 = W' + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\beta = \frac{v}{c}), \quad (10.81)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10.82)$$

Проекция векторов \mathbf{p} , \mathbf{p}' и \mathbf{v} на оси Ox и Oy дает в обозначениях фиг. 37 следующие два соотношения:

$$p = p' \cos \theta + \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cos \alpha, \quad (10.83a)$$

$$0 = -p' \sin \theta + \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sin \alpha. \quad (10.83b)$$

Найдем с помощью (10.83a) и (10.83b) выражение для $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ и затем в полученном таким образом соотношении заменим p и p' на их значения (10.80). В результате будем иметь

$$\frac{m_0^2 v^2 c^2}{1 - \beta^2} = h^2 (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos \theta). \quad (10.84)$$

С другой стороны, (10.81) можно записать в виде

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = h(\nu - \nu') + m_0 c^2. \quad (10.85)$$

Возводя (10.85) в квадрат и вычитая из полученного выражения (10.84), находим

$$m_0^2 c^4 = -2h^2 \nu \nu' (1 - \cos \theta) + m_0 c^2 [m_0 c^2 + 2h(\nu - \nu')], \quad (10.86)$$

т. е.

$$2h\nu\nu' \sin^2 \frac{\theta}{2} = m_0 c^2 (\nu - \nu'). \quad (10.87)$$

Заменяя ν и ν' на c/λ и c/λ' , получаем, таким образом,

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (10.88)$$

Изменение длины волны при эффекте Комптона будет максимальным, если $\theta = \pi$, т. е. если фотон рассеется назад. В этом случае новая длина волны будет равна

$$\lambda' = \lambda + \frac{2h}{m_0 c}. \quad (10.89)$$

Если $\theta = \pi/2$, т. е. если фотон рассеется под прямым углом, то изменение длины волны

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c} \quad (10.90)$$

будет равно комптоновской длине волны.

В результате видоизменения квантовых теорий с учетом требований релятивистского формализма удалось получить множество правильных предсказаний, служащих подтверждением основных положений как квантовой теории, так и теории относительности. Чтобы не выходить за пределы классических теорий, мы здесь указали лишь на одно из наиболее простых подтверждений, каковым является эффект Комптона. Дальнейшими замечательными и плодотворными подтверждениями специальной теории относительности явились определение тонкой структуры спектра атома водорода (Зоммерфельд), построение релятивистской квантовой механики, которая *ipso facto* ввела спин электрона (Дирак) и, наконец, создание ковариантного формализма квантовой теории полей.

В. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МЕЖДУ МАССОЙ И ЭНЕРГИЕЙ

§ 8. Дефект массы и ядерная энергия

Релятивистское выражение для энергии системы связанных частиц приводит к следующему выводу (см. гл. 8, § 6).

Стабильная система связанных частиц имеет массу покоя M_0 , которая меньше суммы масс отдельных входящих в систему частиц $m_0 = \sum_i (m_i)_0$. Дефекту массы

$$\Delta m = \sum_i (m_i)_0 - M_0 = \frac{\Delta E}{c^2} > 0 \quad (10.91)$$

соответствует *энергия связи* ΔE , равная энергии, которую необходимо сообщить системе, чтобы разделить ее на составные части.

Если же система связанных частиц *не стабильна*, то

$$\Delta m = \sum_i (m_i)_0 - M_0 = -\frac{\Delta E}{c^2} < 0. \quad (10.92)$$

Если $\sum_i (m_i)_0 < M_0$, то при распадении системы на составные части выделится энергия ΔE .

На опыте дефект массы проявляется в установках, применяемых в ядерной физике, где приходится иметь дело с очень большими энергиями связи между нуклонами. При помощи масс-

спектрографии наиболее стабильных ядер, т. е. ядер, у которых энергия связи особенно высока, удается проверить справедливость соотношения

$$\Delta m = \sum_i (m_i)_0 - M_0 > 0. \quad (10.93)$$

Простым примером служит дейтрон D_1^2 , являющийся ядром атома тяжелого водорода¹⁾. В системе единиц, в которой атом кислорода обладает массой 16, его масса будет равна

$$M_0 = 2,01417.$$

Дейтрон состоит из протона ($m_p = 1,00757$) и из нейтрона ($m_n = 1,00893$), так что

$$\Delta m = \sum_i m_i - M_0 = 0,00233 \text{ атомных единиц массы,}$$

т. е.

$$\Delta m = 0,0387 \cdot 10^{-25} \text{ г.}$$

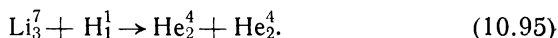
§ 9. Баланс ядерных реакций

Проверка соотношения

$$\Delta E = \Delta mc^2 \quad (10.94)$$

осуществляется с помощью измерений, выполняемых с использованием ядерных реакций, в которых система с некоторым дефектом массы переходит в другую систему с другим дефектом массы. Происходящее в результате ядерной реакции уменьшение массы²⁾ должно быть эквивалентно энергии, выделяемой при этой реакции.

а) Известно (см. Кокрофт и Уолтон [141]), что в результате бомбардировки лития Li_3^7 быстрыми протонами образуется нестабильная система, при распаде которой возникают две α -частицы:



Значения масс Li_3^7 , H_1^1 и He_2^4 можно определить при помощи методов масс-спектрографии. Полагая $m_0 = 16$, получаем (см. Бэйнбридж и Иордан [142], Бете и Ливингстон [143])

$$\Delta m = 7,0166 + 1,0076 - (2 \times 4,0028) = 0,0186 \text{ а. е. м.}, \quad (10.96)$$

чему соответствует

$$\Delta m = 0,309 \cdot 10^{-25} \text{ г}, \quad (10.97)$$

$$\Delta m \cdot c^2 = 27,7 \cdot 10^{-6} \text{ эрг.} \quad (10.98)$$

¹⁾ См. книгу Бете [140]. (См. также Г. Бете и Ф. Моррисон, Элементарная теория ядра, ИЛ, 1959. — Прим. перев.)

²⁾ Здесь и далее под массой подразумевается масса покоя. — Прим. перев.

Эта энергия должна равняться разности между кинетической энергией α -частиц, возникающих в результате реакции, и кинетической энергией протона, вызывающего реакцию. Определяя на опыте величину каждой из этих кинетических энергий, получаем следующий результат (см. Смит [144]):

$$\Delta E = 17,28 \pm 0,03 \text{ Мэв} = (27,6 \pm 0,05) \cdot 10^{-6} \text{ эрг.} \quad (10.99)$$

Сравнение величин (10.98) и (10.99) служит отличным подтверждением соотношения (10.94).

б) Предположим, что ядро N_0 , покоящееся в системе S , бомбардируется быстрыми частицами P_1 . При переходе образующейся таким образом нестабильной системы в новое ядро N_3 выделяется легкая частица P_2 . Реакция идет по следующему типу:



Для проверки соотношения (10.94) необходимо, во-первых, при помощи методов масс-спектрографии измерить уменьшение массы в процессе реакции и, во-вторых, определить выделяющуюся в результате ядерной реакции энергию E , которая равна разности кинетических энергий системы до и после реакции. При этом из законов сохранения энергии и момента количества движения следует, что

$$E = T_2 + T_3 - T_1 \quad (T_0 = 0), \quad (10.101)$$

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 \quad (\mathbf{p}_0 = 0), \quad (10.102)$$

где символами T_0 , T_1 , T_2 и T_3 обозначены кинетические энергии, а \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3 — моменты количества движения соответственно N_0 , P_1 , P_2 и N_3 .

Предположим, что ядро N_3 настолько тяжелое и его скорость настолько мала, что его кинетическую энергию можно вычислять по законам классической механики. Тогда

$$p^2 = m^2 v^2 = 2mT. \quad (10.103)$$

Если угол между направлениями движения бомбардирующей частицы P_1 и испускаемой частицы P_2 равен θ , то из (10.102) следует

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta, \quad (10.104)$$

т. е., согласно (10.103),

$$m_3 T_3 = m_1 T_1 + m_2 T_2 - 2 \sqrt{m_1 T_1 m_2 T_2} \cos \theta. \quad (10.105)$$

Большей частью наблюдают частицы, испускаемые под углом $\theta = \pi/2$. В этом случае

$$T_3 = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_3}. \quad (10.106)$$

После подстановки в (10.101) получаем

$$E = T_2 + \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_3} - T_1 = \frac{(m_3 + m_2)}{m_3} T_2 - \frac{(m_3 - m_1)}{m_3} T_1. \quad (10.107)$$

Таким образом, для определения E достаточно измерить энергии бомбардирующей и испускаемой частиц T_1 и T_2 . Для заряженной частицы энергия T_2 определяется по известному среднему пробегу частицы в данном веществе.

При этом для протонов и дейтронов зависимость среднего пробега от энергии можно определить заранее, непосредственно вычисляя энергию при помощи метода, связанного с измерением отклонений в магнитном поле, наблюдаемых для частиц, которые выделяются при радиоактивном распаде. Энергия испускаемых нейтронов определяется иным способом, а именно, путем измерения средних пробегов протонов, возникающих при бомбардировке этими нейтронами водородосодержащего вещества.

Полученные результаты находятся в прекрасном соответствии с соотношением (10.94). Их точность для очень большого числа реакций различных типов зачастую превышает 1%.

в) Наконец, опыты, в которых квант электромагнитного излучения с энергией $E_0 = h\nu_0$ превращается в пару противоположно заряженных частиц с общей энергией $2m_0c^2$, а также опыты, в которых наблюдается противоположный процесс: превращение вещества в излучение ($2m_0c^2 \rightarrow h\nu_0$), позволяют придать смысл соотношению (10.94) также и в том случае, когда в результате реакции масса¹⁾ возникает из излучения или же, наоборот, полностью исчезает и превращается в излучение.

Задача

Рассмотрим заряженную частицу из космического излучения, имеющую скорость, близкую к скорости света.

а) Вычислить компоненты напряженности электромагнитного поля E , H , возникающего при движении заряженной частицы.

б) Показать, что определяемое таким путем электромагнитное поле аналогично полю короткого пакета монохроматических волн (См. Бергман [106].)

Указание. а) Определим сначала напряженность поля в связанной с частицей собственной системе отсчета S' . Такое поле будет чисто электростатическим, так что

$$\varphi', p^0 = \partial'^p \left(\frac{q}{r'} \right) = \frac{q x'^p}{r'^3} \quad \left(r'^2 = \sum_p (x'^p)^2 \right). \quad (1)$$

¹⁾ Точнее, масса покоя. — Прим. перев.

Затем перейдем к лабораторной системе отсчета S , движущейся по отношению к S' со скоростью $-v$. Если скорость v направлена вдоль оси Ox , то из формул (9.5) имеем

$$\begin{aligned}\varphi^{10} &= \varphi'^{10}, & \varphi^{20} &= \frac{\varphi'^{20}}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \varphi^{30} &= \frac{\varphi'^{30}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \varphi^{23} &= 0, & \varphi^{31} &= -\frac{\beta\varphi'^{20}}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \varphi^{12} &= \frac{\beta\varphi'^{30}}{\sqrt{1-\beta^2}}.\end{aligned}\quad (2)$$

Далее, формулы специального преобразования Лоренца позволяют выразить φ^{p0} в произвольной галилеевой системе отсчета:

$$\begin{aligned}\varphi'^{10} &= q \left[\frac{(x-vt)^2}{(1-\beta^2)} + y^2 + z^2 \right]^{-3/2} \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \varphi'^{20} &= qy \left[\frac{(x-vt)^2}{(1-\beta^2)} + y^2 + z^2 \right]^{-3/2}, \\ \varphi'^{30} &= qz \left[\frac{(x-vt)^2}{(1-\beta^2)} + y^2 + z^2 \right]^{-3/2}.\end{aligned}\quad (3)$$

После подстановки в (2) окончательно получим

$$\begin{aligned}\varphi^{10} &= q \frac{(x-vt)^2}{\rho^3}, & \varphi^{20} &= \frac{qy}{\rho^3}, & \varphi^{30} &= \frac{qz}{\rho^3}, \\ \varphi^{23} &= 0, & \varphi^{31} &= -\frac{\beta qy}{\rho^3}, & \varphi^{12} &= \frac{\beta qz}{\rho^3},\end{aligned}$$

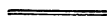
$$\rho = (1-\beta^2)^{1/6} \left(\frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2 \right)^{1/2}.$$

б) Если $v = c$, то $|E| = \sqrt{\sum_p E_p^2}$ будет максимальна при $t_0 = x/v$.

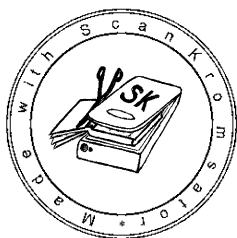
Для $t = t_0$ $|E| = |H|$ и вектор E направлен вдоль оси Ox и перпендикулярен к H .

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ



Эта страница пуста



ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А. ЗАКОН ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА

§ 1. Закон тяготения Ньютона и опыт

Закон Ньютона определяет выражение для силы притяжения между двумя телами. Если такими телами будут две материальные точки, удаленные друг от друга на расстояние r , то эта сила оказывается обратно пропорциональной r^2 и зависящей от двух постоянных M и M' , характеризующих каждое из тел:

$$F = -K \frac{MM'}{r^2}. \quad (11.1)$$

Постоянная M является *гравитационной массой* соответствующего тела, а K — универсальная постоянная, численное значение которой зависит от системы единиц, в которой выражаются M и M' .

1. Расхождения между законом Ньютона и опытом. Применимость закона Ньютона к опытным явлениям, казалось, не имеет ограничений. Пуанкаре, например, смог написать, что у небесной механики нет другой цели, кроме подтверждения ньютоновского закона притяжения. В середине XIX века было известно множество блестящих подтверждений этого закона, и заметные расхождения, как казалось, возникают единственно только в случае движения больших планет¹⁾.

Примерно в 1850 г., продолжая работы Лапласа, Леверье изучил известные в то время движения планет солнечной системы. В частности, он показал, что перигелий Меркурия движется с опережением на 38 дуговых секунд в столетие по сравнению с тем, что предсказывают ньютоновские таблицы. В работах Ньюкомба (приблизительно в 1880 г.), основанных на более многочисленных и точных наблюдениях, было подтверждено наличие аномалии, обнаруженной Леверье, но смещение перигелия Меркурия было найдено равным 42,9 дуговых секунды в столетие. Кроме того, Ньюкомб указал на два других возможных расхождения с теорией

¹⁾ См. Шази [87].

Ньютона — на смещение перигелия Марса, отличающееся от вычисленного значения на 8 дуговых секунд в столетие и в три раза превышающее вероятную ошибку, и на опережение в движении линии узлов Венеры, равное 10 дуговых секунд в столетие и в 5 раз превышающее вероятную ошибку¹⁾.

Если не считать этих трех расхождений, существенно связанных с движением больших планет, то остающиеся расхождения теории Ньютона с опытом весьма сомнительны. Главные из них связаны с движением Луны и кометы Энке.

В движении Луны проявляется вековое ускорение, отмеченное еще Галлеем (1693 г.). Очень вероятно, что оно объясняется гипотезой об изменении эксцентриситета Земли (Лаплас) или же замедлением вращения Земли, связанным с влиянием морских приливов.

Что же касается движения кометы Энке, то здесь также обнаруживается переменное ускорение, которое объясняется (Баклунд) переменным влиянием метеорного потока.

Резюмируя, можно сказать, что заметные и необъяснимые расхождения между опытом и предсказаниями ньютоновских таблиц обнаруживаются только в движениях больших планет, и, в первую очередь, в смещении перигелия Меркурия.

2. „Ньютоновские“ объяснения расхождений. Для объяснения расхождений между предсказаниями теории Ньютона и опытом были предложены различные гипотезы; поскольку в них не предполагается отказа от основного закона действия на расстоянии, то их можно назвать „ньютоновскими“.

Кольцо малых планет. Лавуазье был вынужден предположить, что смещение перигелия Меркурия объясняется существованием планеты, орбита которой расположена внутри орбиты Меркурия. Но в таком случае по вероятным характеристикам этой планеты она должна была бы наблюдаться. Скорее следовало предполагать наличие внутри орбиты Меркурия кольца малых планет. Однако если с помощью этой гипотезы можно было объяснить аномалии в движении Марса, то дать одновременное объяснение наблюдаемых расхождений в движениях Венеры и Марса не удавалось.

Несферичность Солнца или солнечной короны. Небольшой сплюснутости фотосферы было бы достаточно, чтобы с ее помощью можно было объяснить смещение перигелия Меркурия.

¹⁾ Эти значения были с определенностью подтверждены в работах Дулитла (1912 г.) и Росса. Пуанкаре считал, что среди трех установленных расхождений с предсказаниями теории Ньютона, обнаруженных в движениях больших планет, расхождение, связанное со смещением перигелия Меркурия, является несомненным, связанное с движением Венеры — вероятным, а связанное со смещением перигелия Марса — очень сомнительным.

К сожалению, сравнение экваториального и полярного диаметров Солнца, измерявшихся Оверсом (1832 г.), по-видимому, опровергает эту гипотезу. С другой стороны, существование такой сплюснутости привело бы к вековому отставанию движения линии узлов Меркурия, по величине почти равному опережению его перигелия, а этого не наблюдалось.

Зодиакальный свет и гипотеза Зеелигера. Существование зодиакального света указывает на то, что Солнце окружено облаком рассеянных частиц, имеющим форму двояковыпуклой линзы. Такое облако рассеянных частиц, плотность которых постепенно убывает, простирается вплоть до орбиты Земли, причем плоскость эклиптики является ее плоскостью симметрии. Предположения об облаке рассеянных частиц достаточно для объяснения смещения перигелия Меркурия.

Эта гипотеза, возрожденная Зеелигером, смогла объяснить одновременные расхождения в движении больших планет только при определенном уточнении характера распределения масс, вызывающих появление зодиакального света. Такое распределение, вероятно, не точное, в то же время, несомненно, остается произвольным. Впрочем эта гипотеза до некоторой степени эквивалентна гипотезе о существовании внутри орбиты Меркурия кольца малых планет, и так же, как последняя, произвольна.

Таким образом, „ньютоновские“ гипотезы, объясняющие три основных расхождения, представляются одновременно недостаточными и произвольными.

3. Законы тяготения „не ньютоновского типа“. Расхождения между опытом и законом Ньютона можно попытаться объяснить наличием малых поправок к этому закону, которые должны быть найдены из опытных данных.

Закон Холла. Первый закон не ньютоновского типа был предложен Холлом (1895 г.). Ньютоновское выражение для силы дальнего действия было заменено выражением

$$F(r) = -K \frac{MM'}{r^N}. \quad (11.2)$$

Нетрудно видеть, что движение перигелия будет опережающим или запаздывающим в зависимости от того, будет ли N больше или меньше 2¹⁾.

Из опытных данных, относящихся к перигелию Меркурия, величина N найдена равной 2,00000016. Но, к сожалению, при

¹⁾ Для любой планеты опережающее смещение перигелия будет определяться величиной $\pi(N-2)$.

данном значении коэффициента K этот закон нельзя применить к движению Луны.

Закон Ньютона с поправочным членом. Можно предположить, что к ньютоновскому члену $1/r^2$ следует добавить поправочный член, изменяющийся как $1/r^n$ (где n равно 3, 4 или 5). В связи с этим силу притяжения предлагалось записывать в виде

$$F = -K \frac{MM'}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^n}\right); \quad (11.3)$$

для того чтобы движение перигелия было опережающим, а не запаздывающим, величина α должна быть положительной. Нетрудно видеть, что никакое значение α не может приводить к приемлемым результатам одновременно для Меркурия, для других планет и для случая опережающего движения перигея Луны.

Частным случаем закона (11.3) будет формула, предложенная Декомбом,

$$F(r) = -K \frac{MM'}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^3}\right). \quad (11.4)$$

По его мнению поправка обусловлена электрическими силами и α должна быть функцией от массы и радиуса планеты, а также от электрической индукции.

Укажем, наконец, на закон притяжения другого вида:

$$F(r) = -K \frac{MM'}{r^2} e^{-ar}. \quad (11.5)$$

Это выражение, введенное Лапласом, напоминает видоизмененное выражение для кулоновской силы, выводимое из потенциала Юкавы для случая ядерных взаимодействий.

Введение неевклидова пространства. Можно, наконец предположить, что закон Ньютона относится не к евклидову, а к эллиптическому или сферическому пространству. В этом случае расстояние r между притягивающимися массами следует заменить выражением для такого расстояния в сферическом или эллиптическом пространстве. В сферическом пространстве радиуса R это расстояние будет равно $R \arcsin(r/R)$, так что

$$F(r) = -\frac{KMM'}{R^2 \left(\arcsin \frac{r}{R}\right)^2} \approx -\frac{KMM'}{r^2} \left(1 + \frac{r^2}{3R^2}\right). \quad (11.6)$$

Однако с этой гипотезой трудно согласиться, так как тогда для получения правильного смещения перигелия Меркурия радиусу сферического пространства R пришлось бы приписать недопустимое значение.

§ 2. Гравитационный потенциал и его свойства. Эквивалентность гравитационной и инертной масс

Ньютоновский закон действия на расстоянии, записанный в виде (11.1):

$$F = -K \frac{MM'}{r^2},$$

содержит гравитационные массы M и M' двух взаимодействующих тел. Эти массы играют такую же роль, как и заряды в законе Кулона.

С другой стороны, в основной закон динамики

$$F = m\gamma \quad (11.7)$$

входит постоянная m , характеризующая пробное тело. Величина m , определяющая противодействие, оказываемое пробным телом ускоряющей силе, называется инертной массой.

Известно, что в пустоте все тела падают с одинаковой скоростью. Сопоставляя (11.1) и (11.7), из этого опытного факта можно сделать вывод о том, что ускорение $\gamma = -(M/m)[K(M'/r^2)]$ не зависит от природы пробного тела. В связи с этим мы должны будем *принять*, что с точностью до постоянного множителя, одинакового для всех тел, гравитационная масса M равна инертной массе m .

Если положить

$$\frac{M}{m} = C, \quad (11.8)$$

то закон Ньютона (11.1) запишется в виде

$$F = -KC^2 \frac{mm'}{r^2} = -G \frac{mm'}{r^2}, \quad \text{где } G = KC^2. \quad (11.9)$$

Если, далее, вместе с Ньютоном, постулировать *тождество* гравитационной и инертной масс, то

$$C = 1, \quad M = m, \quad K = G \quad \text{или} \quad F = -G \frac{MM'}{r^2}, \quad (11.10)$$

обычно это условие предполагается выполненным¹⁾.

¹⁾ Разумеется, можно положить также

$$C = \sqrt{G}, \quad M = \sqrt{G}m, \quad K = 1 \quad \text{или} \quad F = -\frac{MM'}{r^2}.$$

Во всяком случае, закон тяготения Ньютона записывается с помощью инертных масс m и m' следующим образом:

$$\boxed{F = -G \frac{mm'}{r^2}} \quad (11.11)$$

Его можно записать также в виде

$$\boxed{F = m \operatorname{grad} U}, \quad (11.12)$$

где

$$\boxed{U = G \frac{m'}{r}} \quad (11.13)$$

и G является *ньютонической гравитационной постоянной*. Ее численное значение, определяемое из (11.11), равно

$$\boxed{G = 6,664 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}} \quad (11.14)$$

Величина U называется *ньютонским гравитационным потенциалом*. Градиент этого потенциала равен ускорению пробного тела под действием гравитационных сил, которое не зависит от природы и, в частности, от массы пробного тела:

$$\gamma = \operatorname{grad} U. \quad (11.15)$$

Из гипотезы Ньютона (11.8) о равенстве гравитационной и инертной масс вытекает, что ускорение γ *не зависит от пробного тела*.

С точки зрения теории этот результат очень интересен¹⁾. Фактически он основывается на классических опытах, связанных с падением тел. Эти опыты, обосновывающие гипотезу Ньютона (11.8), первоначально были слишком грубы, поэтому равенство гравитационной и инертной масс впоследствии проверялось различными способами.

Еще самим Ньютоном, а затем Бесселем были проведены опыты с колебанием маятника, подтверждающие равенство гравитационной

¹⁾ Этот результат существенно отличается от того, с чем мы, например, имеем дело в электростатике, где

$$F = -q \operatorname{grad} V \quad \text{и} \quad F = m\gamma,$$

т. е.

$$\gamma = -\frac{q}{m} \operatorname{grad} V$$

и ускорение зависит от отношения q/m , различного для разных типов частиц.

и инертной масс. Опыты совершенно другого типа поставили Этвеш, Зеeman и Саузернс. В опытах Саузернса [145] использовались радиоактивные свойства окиси урана, обладающего большим дефектом. Но наиболее убедительные результаты, подтверждающие равенство гравитационной и инертной масс, были получены в работах Этвеша и др. [146, 147] и Зеemана [148]. Коротко рассмотрим существо проведенных этими авторами опытов, выводы из которых лежат в основе эйнштейновского понимания гравитации¹⁾.

Два тела A_1 и A_2 с незначительно отличающимися гравитационными массами M_1 и M_2 и с инертными массами m_1 и m_2 располагаются на концах коромысла крутильных весов. На каждое из этих тел действует, с одной стороны, сила тяжести, направленная к центру Земли и по определению пропорциональная гравитационной массе:

$$\begin{aligned} F_1 &= M_1\gamma, \\ F_2 &= M_2\gamma, \end{aligned} \quad (11.16)$$

а с другой — центробежная сила, связанная с вращением Земли. Такая сила f_1 пропорциональна инертной массе m_1 и направлена по перпендикуляру HA_1 к оси вращения Земли. Если ω — угловая скорость вращения, а φ — широта места наблюдения, то

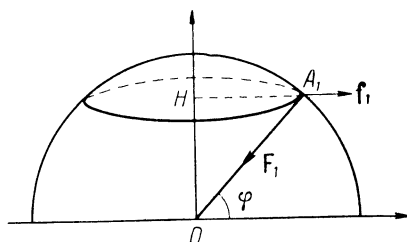
$$\begin{aligned} f_1 &= m_1\omega^2 A_1 H = m_1\omega^2 R \cos \varphi, \\ f_2 &= m_2\omega^2 R \cos \varphi. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Силы F и f уравниваются натяжением нити. Результирующий момент этих сил приводит к закручиванию нити и вызывает поворот коромысла весов на угол α . Если тела A_1 и A_2 поменять местами, то угол поворота станет равным α' . Измеряя разность $\alpha - \alpha'$, можно вычислить разность $(M_1/m_1) - (M_2/m_2)$. Все опыты, основанные на этом принципе, с большой степенью точности показывают, что α и α' равны между собой. Таким образом, отношение M/m оказывается одинаковым, независимо от того, для какого тела оно измеряется и как это тело ориентируется по отношению к Земле.

§ 3. Закон Пуассона

Если внутри объема \mathcal{V} , ограничиваемого поверхностью S , имеются массы m_i , то с помощью теоремы Гаусса мы получим

¹⁾ Более подробные вычисления, относящиеся к данному опыту, можно найти в книге Лауэ [149], том II.



Фиг. 38. Опыт Этвеша и Зеemана.

результаты, аналогичные тем, которые имеют место в электростатике¹⁾.

Силовой поток через поверхность S пропорционален сумме масс, находящихся внутри объема \mathcal{V} :

$$\int_S \gamma_n dS = 4\pi G \sum m_i, \quad (11.18)$$

где \mathbf{n} — нормаль к элементу поверхности dS .

В самом деле

$$\int_S \gamma_n dS = \int_S |\gamma| \cos(\widehat{\gamma, \mathbf{n}}) dS = \int_S |\gamma| dS_n = \int_{\omega} |\gamma| r^2 d\omega,$$

где dS_n — проекция dS на плоскость, перпендикулярную к \mathbf{n} , а $d\omega$ — телесный угол конуса с основанием dS .

Но, согласно (11.13) и (11.15), т. е. согласно закону Ньютона,

$$|\gamma| = |\text{grad } U| = G \frac{m_i}{r^2},$$

так что

$$\int_S \gamma_n dS = G m_i \int_{\omega} d\omega = 4\pi G m_i.$$

Для непрерывного распределения с плотностью μ аналогичным путем получим

$$\int_S \gamma_n dS = 4\pi G \int_{\mathcal{V}} \mu d\mathcal{V}. \quad (11.19)$$

Таким образом,

$$\int_{\mathcal{V}} \text{div } \gamma d\mathcal{V} = 4\pi G \int_{\mathcal{V}} \mu d\mathcal{V}, \quad (11.20)$$

откуда получается локальное соотношение

$$\text{div } \gamma = 4\pi G \mu. \quad (11.21)$$

Учитывая (11.15), находим

$$\text{div grad } U = 4\pi G \mu, \quad (11.22)$$

т. е.

$$\boxed{\Delta U = 4\pi G \mu,}$$

где

$$\Delta = \sum_p \frac{\partial^2}{(\partial x^p)^2}, \quad p = 1, 2, 3. \quad (11.23)$$

¹⁾ Теорема Гаусса в форме (11.18) или (11.19) выводится здесь из (11.13) и (11.15), т. е. из закона Ньютона. Если при построении теории Максвелла не прибегать к принципу дальнего действия, то в электростатике подтверждаемая на опыте теорема Гаусса будет рассматриваться как исходное положение, следствием из которого является закон Кулона.

Это *формула Пуассона*. Если учесть определение U , то она будет эквивалентна закону Ньютона. Она инвариантна по отношению к преобразованиям Галилея, но не инвариантна по отношению к преобразованиям Лоренца.

§ 4. Закон Ньютона и принцип специальной относительности

Закон Ньютона не удовлетворяет требованиям специальной теории относительности, поэтому естественно попытаться найти такую форму закона тяготения, которая была бы инвариантна по отношению к преобразованиям Лоренца. При этом закон Ньютона должен будет получаться в качестве приближения.

Однако далеко не очевидно, каким образом следует искать релятивистскую формулировку закона тяготения. Например, результаты классической электродинамики, основанные на электронной теории Лоренца, не так-то легко перенести на случай, когда требуется объяснить взаимодействие масс.

В частности, при всех релятивистских обобщениях формулы Пуассона (11.23) оператор Лапласа $\Delta \equiv \sum_P \partial^2 / (\partial x^P)^2$ заменяется оператором Даламбера $\square \equiv (1/c^2) (\partial^2 / \partial t^2) - \Delta$. Поэтому в криволинейной системе координат

$$\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma U = 4\pi G\mu, \quad (\rho, \sigma = 1, 2, 3, 0). \quad (11.24)$$

При использовании в электростатике теоремы Гаусса применяется плотность заряда ρ , играющая роль, аналогичную роли μ . Но ρ есть временная составляющая четырехмерного вектора j^μ , поэтому релятивистское выражение для теоремы Гаусса получается в результате замены электростатического потенциала V четырехмерным потенциалом A^μ . В релятивистской динамике непрерывных сред получаются существенно другие выводы. Плотность μ не является здесь ни скаляром, ни компонентой четырехмерного вектора; согласно специальной теории относительности, μc^2 связывается с энергией W , т. е. [см. (8.147)] является компонентой M_{00} симметричного тензора второго ранга $M_{\mu\nu}$.

Но тогда и гравитационный потенциал должен представляться в виде тензора второго ранга, а ньютоновский потенциал U должен быть одной из его компонент. Как мы увидим, общая теория относительности приводит именно к такому выводу.

Эйнштейн получил релятивистское обобщение закона тяготения путем обобщения принципа относительности. Поэтому такое обобщение нельзя считать поправкой к существующему закону; оно связано с естественным развитием идей, лежащих в основе специальной теории относительности.

Б. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ВВЕДЕНИЕ НЕЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Принцип относительности выражает эквивалентность систем отсчета, используемых для описания физических явлений и для формулировки законов, которым они подчиняются. В специальной теории относительности эта эквивалентность ограничивается инерциальными системами, с которыми связываются галилеевы системы отсчета, тогда как в общей теории относительности эквивалентными считаются также ускоренные системы. В результате постулат эквивалентности, или общая теория относительности, позволяет включить в единое описание эффекты, связанные с так называемыми „фиктивными“ силами, т. е. с силами, возникающими в ускоренных системах; в то же время, как мы увидим, он приводит к введению неевклидовой геометрии.

Вместе с тем такая обобщенная, но ограничивающаяся только силами инерции эквивалентность оставляет негеометризованными так называемые „действительные“ силы и, в частности, силы тяготения. Фактически принцип эквивалентности, послуживший основой первого обобщения принципа относительности (1911 г.), связывался с локальной эквивалентностью гравитационных и инерциальных сил. В конечном итоге такая локальная эквивалентность позволила придать физический смысл принципу общей относительности (1916 г.): объединение ускоренных и инерциальных систем и объяснение сил инерции в терминах неевклидовой структуры пространства — времени позволяет свести силы тяготения к локальным свойствам неевклидова пространства. При этом закон тяготения связывается со структурными условиями, накладываемыми на пространство.

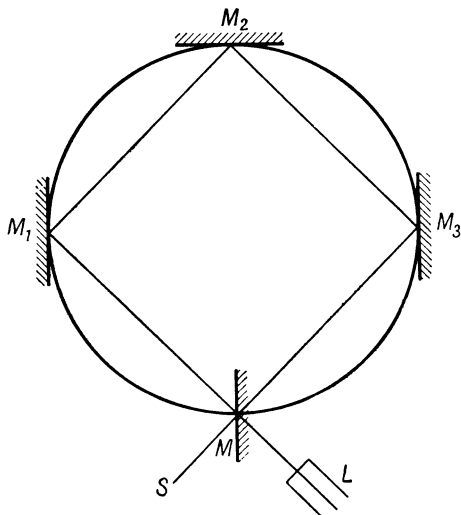
Таким образом, принцип эквивалентности складывается из нескольких частей. С одной стороны, сведение сил тяготения к силам инерции до некоторой степени устраняет различие между действительными и фиктивными силами и позволяет в малых областях заменить притяжение на соответствующим образом подбираемое ускорение. С другой стороны, принцип общей относительности говорит об эквивалентности инерциальных и ускоренных систем, а следовательно, об эквивалентности инерциальных систем и систем, в которых имеются силы тяготения, что позволяет дать таким силам новую интерпретацию. Разумеется, в общей теории относительности сила Лоренца и ядерные силы сохраняют феноменологический характер, т. е. остаются чуждыми какой-либо геометризации. Попытки полного сведения к геометрии, чего требуют как принцип относительности наиболее общего вида, так и задача о разработке более совершенной теории чистого поля, относятся к области единых теорий.

§ 5. Системы отсчета с ускорением и „фиктивные“ силы инерции. Ограниченность принципа специальной относительности

Принцип специальной относительности выражает ковариантность законов физики по отношению к преобразованиям Лоренца. Он связан с предположением о невозможности при помощи каких-либо опытов обнаружить, находится ли система отсчета в состоянии равномерного и прямолинейного движения.

Эта невозможность, очевидно, не относится к случаю движения с ускорением¹⁾, которое, напротив, может проявляться как в механических (маятник Фуко), так и в оптических опытах (опыты Харреса [151] и Саньяка [152]).

1. Маятник Фуко. Если маятник помещен на полюсе, то при отсутствии трения плоскость его колебаний за сутки повернется на 360° в направлении, противоположном направлению вращения Земли. Этот опыт, детали проведения которого зависят от широты места, где он производится, позволяет сделать очевидным вращение самой Земли. Таким образом, с помощью механического опыта можно определить, вращается ли система отсчета, относительно которой описывается этот опыт.



Фиг. 39. Опыт Саньяка.

2. Опыты Харреса, Саньяка, Погани. Эти опыты являются оптическими аналогами опыта с маятником Фуко. Их задача заключается в том, чтобы при помощи оптического опыта установить наличие у диска вращательного движения. Световой пучок, выходящий из источника L , разделяется в точке M полупрозрачным зеркалом, расположенным под углом 45° (фиг. 39), на два. Оба пучка в противоположных направлениях проходят по одному и тому же оптическому пути: или в стеклянных призмах (Харрес [151])

¹⁾ По поводу оптических эффектов, связанных с прямолинейным ускоренным движением, см. работы Дюрана [150].

или же в трубке, наполненной водой, расположенных на вращающемся диске (опыт Погани). Можно также использовать установку из зеркал, расположенных по окружности диска (Саньяк [152]); тогда оптический путь световых пучков в воздухе имеет форму многоугольника, который в пределе стремится к окружности, лежащей на ограничивающей поверхности \mathcal{S} . Во всех случаях интерференционная установка позволяет определить разность времен прохождения одного и того же оптического пути двумя пучками, движущимися в противоположных направлениях. Источник света и интерферометр связаны с вращающимся диском и вместе с зеркалами образуют единую вращающуюся систему. Наблюдаемые полосы показывают, что световой луч, распространяющийся в направлении вращения диска, в собственной системе отсчета, связанной с вращающимся диском, совершает полный оборот скорее, нежели луч, распространяющийся в противоположном направлении.

Если угловая скорость вращения диска постоянна и равна ω , то в собственной системе отсчета, связанной с вращающимся диском, разность времен прохождения лучей равна

$$\Delta t = 4 \frac{\omega \mathcal{S}}{c^2}. \quad (11.25)$$

Таким образом, из этих опытов, относящихся к системам с ускорением, вытекает следующее. При наличии движений с ускорением, по-видимому, оказывается возможным определить абсолютное движение. При отсутствии систем отсчета, образованных другими твердыми телами, необходимо допустить, что такие абсолютные движения (например, вращение Земли в опыте с маятником Фуко) происходят по отношению к пустоте, т. е. к абсолютному пространству.

В соответствии с критическими замечаниями, высказанными в связи со специальной теорией относительности, этот вывод нужно считать мало удовлетворительным и может возникнуть вопрос, не связано ли такое абсолютное движение необходимым образом с наличием других масс, т. е. с существованием удаленных звезд. Такой точки зрения придерживался Мах.

§ 6. Локальная эквивалентность сил тяготения и сил инерции

1. Предшественники Эйнштейна — Герц, Мах. Ньютон допускал, что *действительные силы*, зависящие от физических свойств создающих их систем, отличаются от *фиктивных сил*, возникающих при переходе к ускоренной системе отсчета.

Силы инерции (центробежная сила, сила Кориолиса) обладают совершенно особыми свойствами — они создают ускорение, не за-

висящее от свойств тел, на которые они действуют, и, в частности, от их массы. Поскольку представляется, что такие силы можно исключить путем перехода к системе отсчета, выбранной соответствующим образом, то с этим и связано название *фиктивных*. В этом смысле абсолютное пространство характеризуется выделенной системой отсчета, использование которой позволяет исключить фиктивные силы инерции, которые были введены искусственно с целью учета ускоренного движения применяемой системы отсчета. В абсолютном пространстве существуют только *действительные* силы, а физические законы принимают свое естественное выражение. В связи с этим наличие абсолютного пространства позволяет обосновать как принцип инерции, так и возможность разделения сил.

В противоположность этому Герц, а затем Мах, отказались от представления об абсолютном пространстве и попытались обосновать введение сил инерции, исходя из других соображений.

Герц хотел свести электрические и магнитные действия на расстоянии к действию при соприкосновении. Это же он должен был попытаться сделать и в случае сил тяготения. Вместе с тем прямолинейное движение свободных масс определяется законом инерции. Различие в движении, связанное с влиянием сил инерции, согласно Герцу, объясняется связями с другими массами. Траектории определяются по таким связям, исходя из принципа наименьшего принуждения Гаусса: фактически осуществляется такое движение, которое в наименьшей возможной степени отличается от прямолинейного равномерного движения. Таким образом, принцип инерции является частным случаем принципа наименьшего принуждения — он соответствует не отсутствию сил, а отсутствию скрытых масс.

Мах объяснял привилегированный характер инерциальных систем наличием удаленных масс, влияние которых устранить мы не можем. При отсутствии удаленных звезд (например, если бы в пространстве была только Земля), все системы отсчета оказались бы эквивалентными и являлись бы инерциальными системами. Следовательно, в этом идеальном случае нельзя было бы обнаружить вращение маятника Фуко. Как видим, здесь возникает понятие о возможной эквивалентности между фиктивными силами инерции и действительными силами тяготения, связанными с влиянием удаленных звезд. Такая эквивалентность послужила основой теории Эйнштейна.

2. Формулировка принципа локальной эквивалентности между силами инерции и силами тяготения¹⁾. В критических высказываниях Эйнштейна обращалось внимание на то обстоятель-

¹⁾ См. работы Эйнштейна [84, 153].

ство, что если рассматривать ограниченную область пространства — времени, то различие между фиктивными силами инерции и силами тяготения будет иллюзорным. Этот вывод вытекает из той существенной особенности сил тяготения, что они, как и силы инерции, сообщают пробному телу ускорение, которое не зависит от его массы. Таким образом, *именно доказанная на опыте эквивалентность гравитационной и инертной масс лишает смысла локальное различие между силами инерции и силами тяготения.*

При таких условиях можно предвидеть, что силы тяготения, так же как и силы инерции, в результате соответствующего выбора системы отсчета могут быть видоизменены и в отдельных случаях исключены. Сошлемся на классический пример с шариком, находящимся внутри свободно падающего лифта: по отношению к лифту этот шарик будет оставаться неподвижным, т. е. расстояние от него до пола лифта будет оставаться одним и тем же. Если лифт будет двигаться с ускорением, превышающим ускорение силы тяжести g , то шарик прижмется к потолку, если же лифт будет двигаться с ускорением, меньшим g , то шарик „упадет“ на пол.

Таким образом, выбор соответствующим образом ускоряемой системы, которой в данном случае будет лифт, для наблюдателя, связанного с системой, приведет к появлению сил инерции, которые видоизменяют, а в некоторых случаях и исключают влияние силы тяжести. Другими словами, движение ускоряемой системы невозможно обнаружить при помощи каких-либо опытов, проводимых внутри системы, так как в результате соответствующего изменения значения силы тяжести в данном месте можно будет считать справедливым предположение о неподвижности системы. Поэтому *в ограниченной области пространства невозможно отличить фиктивные силы инерции от действительных гравитационных сил. Между ними имеется локальная эквивалентность.*

Для более значительной области пространства такая эквивалентность до некоторой степени уже теряет силу. Например, в достаточно большой области пространства существование гравитационного поля проявляется в сходимости силовых линий. Поэтому полностью заменить гравитационное поле на поле сил инерции оказывается невозможным. Но эффекты, обуславливаемые обоими полями, окончательно не разделяются и можно утверждать только то, что совокупность двух полей нельзя считать полностью полем сил инерции.

Таким образом, принцип локальной эквивалентности формулируется следующим образом.

Гравитационное поле в ограниченной области пространства эквивалентно силовому полю (полю сил инерции), возникаю-

щему при ускоренном движении. Никакой местный опыт не сможет различить между собой эти два поля.

Это утверждение приводит к принципу обобщенной относительности. Согласно специальной теории относительности, эквивалентными являются только галилеевы системы отсчета, а относительным оказывается понятие скорости. Приведенное выше утверждение говорит более обще о локальной эквивалентности систем, обладающих ускорением, что связано с учетом сил тяготения, или, как мы увидим в дальнейшем, с видоизменением геометрии. Таким образом, относительным становится и понятие ускорения.

§ 7. Понятия, приводящие к введению неевклидова мира

К 1913 г. Эйнштейн пришел к мысли, что эквивалентность сил тяготения и сил инерции должна приводить к видоизменению геометрии. При этом он допустил, что мир может не являться евклидовым. Однако результаты, полученные в 1911 г., не давали возможности показать, каким образом закон тяготения связывается со структурными условиями, накладываемыми на риманово пространство (1917 г.). Это удалось сделать только при помощи соблазнительных интуитивных соображений, позволивших привести полученные до того времени результаты в стройную систему.

Прежде чем излагать теорию тяготения, основывающуюся на свойствах риманова пространства, в этом и следующем параграфах мы хотим показать, каким образом мы приходим к неевклидовой теории, т. е. каким образом локальная эквивалентность сил тяготения и сил инерции, а также постулат обобщенной эквивалентности произвольных движущихся с ускорением систем отсчета приводят к введению неевклидовой геометрии.

Оставаясь в рамках ньютоновской механики, можно показать, что влияние силы F может отражаться на геометрических свойствах¹⁾.

Формулировка принципа инерции основывается на понятии о равноправных галилеевых системах отсчета.

Если движение материальной точки рассматривать в системе отсчета с соответствующим образом подобранным ускорением, то можно добиться того, что принцип инерции будет иметь прежний вид также и в том случае, когда материальная точка движется в силовом поле F .

В самом деле, пусть v и $v + F dt$ будут значениями скорости для моментов времени t и $t + dt$, определяемыми в фиксированной системе отсчета S_0 . Отнесем движение к двум трехгранникам S и S' , равноправным с системой S_0 и движущимся по отношению

¹⁾ Мы здесь следуем работе Картана [154].

к ней со скоростями u и u' . Если

$$u' - u = F dt, \quad (11.26)$$

то скорость движущейся точки $v - u$, определяемая в системе $S(t)$, будет равна скорости этой же точки $v + F dt - u'$ в системе $S'(t + dt)$.

Поскольку компоненты скорости движущейся точки, определяемые в двух собственных равноправных системах отсчета, являются постоянными, то в рассматриваемом случае принцип инерции будет всегда справедлив. Однако, высказывая это утверждение, мы должны будем изменить смысл слова „равноправный“: две системы отсчета с началами в бесконечно близких друг к другу точках будут называться равноправными, если они в обычном геометрическом смысле эквивалентны между собой и, кроме того, одна из них движется по отношению к другой прямолинейно и равномерно со скоростью $F dt$.

В общем случае неоднородного гравитационного поля равноправность двух галилеевых систем отсчета, которая для бесконечно малого смещения определяется однозначно, будет зависеть от пути в многообразии пространства — времени, связывающего два начала систем отсчета.

„Строго говоря, — замечает Картан, — под видом объяснения здесь просто вводится условие терминологии, но это как раз и показывает, что при развитии науки разумный выбор терминологии имеет важное значение“.

Однако ньютоновская механика требует такого определения неравноправности, которое несовместимо с основами специальной теории относительности. В последней на пространство и время накладываются условия совершенно другого типа. В самом деле, если e_p (e_1, e_2, e_3) — единичные векторы, направленные вдоль прямолинейных пространственных осей, и если e_0 — единичный вектор, проведенный вдоль оси времени, то обычная равноправность проявляется в том, что три приращения de_p обращаются в нуль. Поэтому имеют место соотношения

$$de_p = 0, \quad de_0 = F^p e_p dt, \quad (11.27)$$

которые не сохраняются при релятивистском преобразовании, обменивающим приращения разного типа между собой. Равноправность, позволяющую в ньютоновской механике сформулировать обобщенный принцип инерции, невозможно совместить с принципом релятивистской инвариантности.

Если, вслед за Эйнштейном, брать за основу инвариантность, то для того, чтобы форма закона тяготения оставалась одной и той же в любой галилеевой системе отсчета, этот закон нужно

изменить. Он примет вид соотношения между величинами, характеризующими неевклидов мир. Как мы увидим, такой закон определяется только кривизной пространства — времени, причем гравитационное поле задается мировыми линиями различных материальных точек, т. е. геодезическими линиями рассматриваемого пространства — времени. При этом динамические задачи сводятся к кинематическим, но кинематика оказывается связанной с геометрическими понятиями, эквивалентными понятию силы.

При геометрическом истолковании сил инерции, а следовательно, и сил тяготения, постулируется существование неевклидова многообразия, в котором частицы, подверженные действию силы, ведут себя как свободные частицы. Их траектории, согласно закону инерции, должны быть обобщением прямых линий евклидова пространства. Но на искривленной поверхности кратчайшими расстояниями между двумя точками являются геодезические линии. Таким образом, в общей теории относительности связь со скрытыми массами теории Герца и влияние фиксированных звезд, вводимое в теорию Маха, выражаются в более сложной структуре пространства — времени, что вынуждает частицу двигаться в неевклидовом многообразии по геодезической линии. Эквивалентность между силами инерции и силами тяготения основывается на геометрической структуре мира, а влияние материальных тел проявляется не в том, что они создают силы, а в искривлении пространства. Что же касается евклидова пространства, то оно является миром, лишенным вещества.

Следовательно, введение неевклидова мира позволяет обобщить принцип относительности на случай систем, движущихся с ускорением и определяющих произвольные криволинейные реперы. Другими словами, уравнения физики должны быть ковариантными не только по отношению к преобразованиям Лоренца, но и по отношению к произвольным преобразованиям координат.

Разумеется, и в евклидовом пространстве можно определить произвольные системы координат и ввести произвольные преобразования. Однако при этом можно также добиться того, что для всего пространства оба описания будут эквивалентными. В противоположность этому, эквивалентность между системой, движущейся с ускорением, и инерциальной системой носит *чисто локальный характер*. Так обстоит дело в неевклидовом пространстве, где подобная эквивалентность приводит к тому, что *малую область аффинного многообразия можно заменить евклидовым пространством, касательным к этому многообразию в одной из его точек*.

Введение неевклидова пространства, и особенно риманова пространства, дает возможность уточнить не только смысл, но и границы применимости принципа эквивалентности.

§ 8. Изучение частного случая вращающегося диска

Рассмотрим два коаксиальных диска S и S_0 и предположим, что относительно S_0 диск S вращается вокруг общей оси с постоянной угловой скоростью ω . Диск S_0 будем считать галилеевой системой, представленной, например, лабораторной системой координат.

Допустим, что наблюдения в системах S и S_0 производятся наблюдателем из S_0 , у которого, следовательно, имеется эталон длины, и что такие наблюдения дают ему основание считать геометрию евклидовой.

Попытаемся сравнить измерения длины и времени в системах S и S_0 .

1. Геометрия на вращающемся твердом теле. Измерение длин. К вращающемуся диску, не являющемуся инерциальной системой, постулат специальной относительности, приводящий к формулам преобразований Лоренца, вообще говоря, больше неприменим. Однако этот постулат можно обобщить следующим образом.

Связанные с вращающимся диском S измерительные инструменты (стержни и часы) испытывают деформацию, обусловленную центробежной силой. Это связано с тем, что уже согласно основным положениям специальной теории относительности, абсолютно твердых тел не существует. Указанные силы изменяют эталоны длины и времени, значения которых по отношению к системе S будут определяться с учетом всех поправок, которые возникают из-за имеющихся в ускоренных системах собственных сил.

При этих условиях предположим, что отношение длин dl и dl_0 у стержней, связанных с системами S и S_0 , будет таким же, как отношение длин стержней в S' и S_0 , где S' — галилеева система, связанная в рассматриваемый момент времени со стержнем dl . Это сводится к допущению, что, при учете поправок, вызванных ускорениями, связанные с вращающимся диском стержни испытывают сокращение, однозначно определяемое формулами Лоренца.

Воспользуемся цилиндрической системой координат (r, θ) . Расстояние между двумя бесконечно близкими точками (r, θ) и $(r + dr, \theta + d\theta)$ в системе S , измеренное с помощью эталона длины из системы S_0 , для наблюдателя из S_0 всегда равно

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (11.28)$$

С точки зрения наблюдателя из S_0 эталон длины dl системы S , направленный вдоль радиуса ($v = 0$), будет по-прежнему иметь единичную длину. Если же этот эталон направлен перпендикулярно

к радиусу в точке P , где $OP = r$, то его скорость равна $v = \omega r$, и если в состоянии покоя его длина равна $dl = dl_0$, то теперь, с точки зрения S_0 , она станет равной $dl_0 \sqrt{1 - (\omega^2 r^2 / c^2)}$. Расстояние между двумя точками (r, θ) и $(r + dr, \theta + d\theta)$, измеряемое при помощи эталона длины из ускоренной системы S , для наблюдателя из S_0 будет равно

$$d\sigma^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\theta^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}. \quad (11.29)$$

В частности, если измерения производятся при помощи эталонов, связанных с ускоренной системой, то длина окружности с

$$r = \text{const} \quad (11.30)$$

уже не будет равна

$$s_0 = \int ds_0 = r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r, \quad (11.31)$$

как это имеет место при измерении с помощью эталонов из галилеевой системы S_0 ($\omega = 0$). Длина окружности будет теперь равна

$$s = \int d\sigma = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{s_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} > s_0, \quad (11.32)$$

а площадь круга

$$\mathbb{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} dr = \frac{2\pi c^2}{\omega^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \right), \quad (11.33)$$

т. е. если скорость $v = r\omega$ мала по сравнению с c ,

$$\mathbb{S} \approx \pi r^2 \left(1 + \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} \right). \quad (11.34)$$

При любых измерениях, которые производятся при помощи связанных с ускоренной системой эталонов, будут получаться результаты (11.29), (11.32) и (11.33). Но такими эталонами будут естественные эталоны, которые выбирает наблюдатель, связанный с вращающимся диском S . Следовательно, для этого наблюдателя *естественная геометрия, построенная при помощи*

применяемых в его системе эталонов, не является евклидовой геометрией¹⁾.

Таким образом, для наблюдателя на диске S отношение длины окружности к ее диаметру будет больше π :

$$\frac{s}{2r} = \frac{s_0}{2r \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} > \pi. \quad (11.35)$$

Естественная геометрия на вращающемся диске больше уже не будет евклидовой, причем отклонение будет тем больше, чем дальше удалена точка P от центра диска.

*Геодезические линии*²⁾. Геометрия в системе S определяется элементом длины двумерного пространства

$$d\sigma^2 = g_{ab} dy^a dy^b, \quad a, b = 1, 2. \quad (11.36)$$

Положив

$$y^1 = r, \quad y^2 = \theta, \quad (11.37)$$

согласно (11.29), получим

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = \frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}, \quad g_{12} = g_{21} = 0. \quad (11.38)$$

В системе S свободная материальная точка должна двигаться по геодезической линии. Согласно (15.154), для таких линий имеют место уравнения

$$\frac{d^2 y^c}{d\sigma^2} + \left\{ \begin{matrix} c \\ ab \end{matrix} \right\} \frac{dy^a}{d\sigma} \frac{dy^b}{d\sigma} = 0. \quad (11.39)$$

Символы Кристоффеля

$$\left\{ \begin{matrix} c \\ ab \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}), \quad a, b, c, d = 1, 2 \quad (11.40)$$

легко находятся по известным значениям g_{ab} , определяемым из

¹⁾ Этот вывод, разумеется, основывается на следующей гипотезе: наблюдатель из системы S принимает, что измерения в системах S и S_0 , осуществляемые при помощи галилеевых эталонов из S_0 , приводят к евклидовой геометрии. Сама эта гипотеза основывается на привилегированном характере наблюдений в галилеевой системе и, следовательно, на возможности обнаружить „абсолютное“ движение системы S . Указанная возможность, о существовании которой говорит опыт, очевидно, противостоит принципу эквивалентности галилеевых систем и наличию соответствия между выводами в каждой из них, что тоже подтверждается на опыте.

²⁾ См. работы Ланжевена [155], а также книги Коста де Борегара [82], Арзелье [41], Мёллера [92], Эддингтона [156] и работу Куршунуглу [157]. В частности, используемый нами метод применялся Мёллером (у которого постоянная K обозначалась через α) и Арзелье (который использовал для нее обозначение A).

(11.38). В самом деле, согласно (11.38),

$$\begin{aligned} g^{11} &= \frac{1}{g} (\text{минор } g_{11}) = \frac{g_{22}}{g} = 1, \\ g^{22} &= \frac{1}{g} (\text{минор } g_{22}) = \frac{g_{11}}{g} = \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right) r^{-2}, \\ g^{12} &= g^{21} = \frac{1}{g} (\text{минор } g_{12}) = 0, \end{aligned} \quad (11.41)$$

и, следовательно, ненулевые значения символов равны

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{22} = \frac{-r}{\left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)^2}, \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} = \frac{1}{r \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)}. \end{aligned} \quad (11.42)$$

В результате, подставляя в (11.39), получаем

$$\text{для } c = 1 \quad \frac{d^2 r}{d\sigma^2} - \frac{r}{\left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)^2} \left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 = 0; \quad (11.39a)$$

$$\text{для } c = 2 \quad \frac{d^2 \theta}{d\sigma^2} + \frac{2}{r \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)} \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\theta}{d\sigma} = 0 \quad (11.39b)$$

$$\text{или} \quad \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} \frac{d\theta}{d\sigma} \right) = 0. \quad (11.43)$$

$$\text{Из (11.43) имеем} \quad \frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} \frac{d\theta}{d\sigma} = K \quad (11.44)$$

и, подставляя в (11.29),

$$\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 = 1 - \frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} \left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 = 1 - \frac{K^2}{r^2} \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right) \quad (11.45)$$

или

$$\frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{dr}{d\theta} \frac{K}{r^2} \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right) = \pm \sqrt{1 - \frac{K^2}{r^2} \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)}. \quad (11.46)$$

$$\text{Если } K = 0, \text{ то } \frac{dr}{d\sigma} = 1, \quad \frac{d\theta}{d\sigma} = 0.$$

Таким образом, геодезическими на диске будут кривые $\theta = \text{const}$, т. е. радиусы диска S .

Если $K \neq 0$, то дифференциальное уравнение для геодезических линий запишется в виде

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{1}{K} \frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} \sqrt{1 + \frac{K^2 \omega^2}{c^2} - \frac{K^2}{r^2}}. \quad (11.47)$$

Положив

$$\rho = \frac{r}{K} \sqrt{1 + \frac{\omega^2 K^2}{c^2}}, \quad (11.48)$$

перепишем (11.47) в виде

$$\frac{1}{\rho^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}}} \frac{d\rho}{d\theta} = \pm 1 + \frac{K^2 \omega^2 / c^2}{1 + \frac{K^2 \omega^2}{c^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}}} \frac{d\rho}{d\theta}, \quad (11.49)$$

или, интегрируя,

$$\text{Arccos} \frac{1}{\rho} = \pm (\theta - \theta_0) + \frac{K^2 \omega^2 / c^2}{1 + \frac{K^2 \omega^2}{c^2}} \sqrt{\rho^2 - 1}. \quad (11.50)$$

Выбрав начало так, чтобы $\theta_0 = 0$, получим

$$\theta = \pm \text{Arccos} \frac{a}{r} \mp \frac{a\omega^2}{c^2} \sqrt{r^2 - a^2}, \quad (11.51)$$

где

$$a = \frac{K}{\sqrt{1 + \frac{K^2 \omega^2}{c^2}}}. \quad (11.52)$$

В частности, если $K = 0$, то, согласно (11.44), $\theta = \text{const}$, и геодезическими в системе S будут радиусы.

Нетрудно видеть, что сумма углов криволинейного треугольника, образованного тремя геодезическими (фиг. 40), заключена между 0 и π . В самом деле, известно, что угол между двумя такими кривыми, проходящими через пары точек $M(y^a)$,

$$M + dM(y^a + dy^a) \text{ и } M(y^a), \\ M + \delta M(y^a + \delta y^a), \text{ равен} \\ \cos \varphi = \frac{g_{ab} dy^a \delta y^b}{d\sigma \delta \sigma}, \quad a, b = 1, 2, \quad (11.53)$$

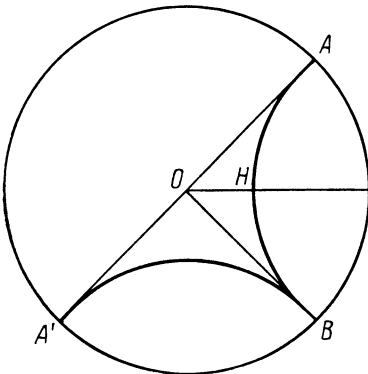
где

$$d\sigma^2 = g_{ab} dy^a dy^b, \\ \delta\sigma^2 = g_{ab} \delta y^a \delta y^b. \quad (11.54)$$

См., например, книгу Мёллера [92] где формула (11.53) выводится следующим образом.

Двумерная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, описываемая заданием декартовых координат (x, y, z) , допускает следующее параметрическое описание:

$$x^1 = f(y^1 y^2), \quad x^2 = g(y^1 y^2), \quad x^3 = h(y^1 y^2), \quad (A)$$



Фиг. 40. Геодезический треугольник.

где f , g и h — функции от параметров y^1 и y^2 .

Расстояние между двумя точками на поверхности, которые соответствуют значениям параметров y^a и $y^a + dy^a$ ($a = 1, 2$), будет равно

$$ds^2 = \sum_p (dx^p)^2 \quad (p = 1, 2, 3). \quad (\text{Б})$$

Его можно записать также в виде

$$ds^2 = g_{ab} dy^a dy^b, \quad (\text{В})$$

где

$$g_{ab} = \frac{\partial f}{\partial y^a} \frac{\partial f}{\partial y^b} + \frac{\partial g}{\partial y^a} \frac{\partial g}{\partial y^b} + \frac{\partial h}{\partial y^a} \frac{\partial h}{\partial y^b}. \quad (\text{Г})$$

С другой стороны, косинус угла между двумя направлениями, характеризуемыми заданием dx^p и δx^p , равен

$$\cos \theta = \frac{dx^p}{ds} \frac{\delta x^p}{\delta s}, \quad ds = \sqrt{\sum (dx^p)^2},$$

$$\delta s = \sqrt{\sum (\delta x^p)^2} \quad (p = 1, 2, 3). \quad (\text{Д})$$

Дифференцируя (А), найдем выражение для этого косинуса в виде функции от приращений dy^a и δy^a :

$$\cos \theta = \frac{g_{ab} dy^a \delta y^b}{ds \delta s} = \frac{g_{ab} dy^a \delta y^b}{\sqrt{g_{cd} dy^c dy^d} \sqrt{g_{ef} \delta y^e \delta y^f}} \quad (a, b, \dots = 1, 2). \quad (\text{Е})$$

В (11.54) параметры выбраны так, что $y^1 = r$, $y^2 = \theta$. Учитывая (11.38), получаем

$$\cos \varphi = \frac{dr}{d\sigma} \frac{\delta r}{\delta \sigma} + \frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} \frac{d\theta}{d\sigma} \frac{\delta \theta}{\delta \sigma} \quad (11.55)$$

и с учетом (11.44) и (11.45)

$$\cos \varphi = \sqrt{1 + \frac{K_1^2 \omega^2}{c^2} - \frac{K_1^2}{r^2}} \sqrt{1 + \frac{K_2^2 \omega^2}{c^2} - \frac{K_2^2}{r^2}} + K_1 K_2 \frac{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}{r^2}, \quad (11.56)$$

где через K_1 и K_2 обозначены значения K , соответствующие $[(dr/d\sigma)(d\theta/d\sigma)]$ и $[(\delta r/\delta \sigma)(\delta \theta/\delta \sigma)]$.

Рассмотрим геодезический треугольник $ОНА$ (см. фиг. 40), где $НА$ — геодезическая линия, перпендикулярная к радиус-вектору, а точка $А$ расположена на граничной окружности радиусом $R = c/\omega$. Найдем, чему равны K_1 , K_2 и K_3 для геодезических линий $ОН$, $НА$ и $ОА$.

Для линий $ОН$ и $ОА$ производная $d\theta/d\sigma = 0$. Поэтому, согласно (11.44),

$$K_1 = K_3 = 0.$$

Для линии HA в точке H $(dr/d\sigma) = 0$. Согласно (11.43),

$$K_2 = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}}}, \quad \text{где } r_0 = OH.$$

Подставляя это значение K_2 в (11.44), для точки H на геодезической линии HA в результате получаем

$$\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)_H = K_2 \frac{1 - \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2}}{r_0^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}}}{r_0}.$$

Чтобы при помощи найденных значений K_1 , K_2 и K_3 в точках H (r_0 , $\theta = 0$) и A ($r = c/\omega$, θ) определить углы φ_H и φ_A геодезического треугольника, можно теперь воспользоваться выражением (11.55). В результате получим

$$\begin{aligned} \text{для точки } H \quad & \left(r = r_0, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}}} \right) \\ & \cos \varphi_H = 0, \quad \text{т. е. } \varphi_H = \frac{\pi}{2}; \end{aligned} \quad (11.57)$$

$$\begin{aligned} \text{для точки } A \quad & \left(r = \frac{c}{\omega}, \quad K_1 = \frac{-r_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}}}, \quad K_3 = 0 \right) \\ & \cos \varphi_A = 1, \quad \text{т. е. } \varphi_A = 0. \end{aligned} \quad (11.58)$$

Наконец, для точки O , где геометрия является евклидовой,

$$\varphi_0 < \frac{\pi}{2}. \quad (11.59)$$

Таким образом,

$$\varphi_{OHA} = \varphi_0 + \varphi_H + \varphi_A < \pi, \quad (11.60)$$

т. е. сумма углов треугольника всегда заключена между 0 и π ¹⁾.

2. Измерение времени. Локальное время. Сравним измерения времени в системах S и S_0 .

Две пары часов H и H_0 , связанных с системами S и S_0 , синхронизируются для того выбираемого в качестве начала отсчета момента, когда они пространственно совпадают. Пусть для последующего момента часы H и H_0 показывают время t и t_0 . Тогда можно

¹⁾ В частности, все углы геодезического треугольника $AA'B$, построенного на диаметре, равны нулю, т. е. $\varphi_{AA'B} = 0$.

сформулировать постулат, аналогичный тому, который применялся при измерении длины.

Отношение значений времени t к t_0 совпадает с отношением показаний часов H' и H_0 , где часы H' связаны с инерциальной системой S' , постоянная скорость движения которой в рассматриваемый момент времени равна скорости часов H . Это равносильно предположению, что время t , показываемое часами H , получается из t_0 с помощью формулы Лоренца

$$t = t_0 \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}. \quad (11.61)$$

Предположим, что часы H возвращаются к часам H_0 и быстро останавливаются. Наблюдатели как из системы S , так и из системы S_0 заметят, что часы H запаздывают, что является частным случаем парадокса часов. Наблюдатель из S_0 объяснит это запаздывание влиянием ускорения, испытываемого часами H во время движения. Что же касается наблюдателя из S , то для него часы H все время находятся в покое. Поэтому он придет к предположению, что в системе S , относительно которой он неподвижен, существует гравитационное поле. Оно определяется потенциалом $U = -\omega^2 r^2/2$ и изменяет ход часов так, что

$$t = t_0 \sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}}. \quad (11.62)$$

В системе S изменение времени t зависит от положения часов H . При этом любые часы, расположенные на одинаковом расстоянии от оси, будут показывать одно и то же время.

Время t , определяемое согласно (11.61), называется *локальным временем* в системе S^1).

Если скорость света определять при помощи локального времени, то нетрудно показать, что в системе S она не будет постоянной. Действительно, в инерциальной системе S_0 для световой волны имеем

$$ds_0^2 = -dx_0^2 - dy_0^2 - dz_0^2 + c^2 dt_0^2 = 0, \quad (11.63)$$

или, если воспользоваться цилиндрическими координатами ($x_0 = r_0 \cos \theta_0$, $y_0 = r_0 \sin \theta_0$, z_0),

$$ds_0^2 = -dr_0^2 - r_0^2 d\theta_0^2 - dz_0^2 + c^2 dt_0^2 = 0. \quad (11.64)$$

¹⁾ Укажем здесь на терминологию, принятую Арзелье [40]. Он заменяет локальное время центральным временем t_c , которое равно времени, показываемому часами, движущимися в $\sqrt{1 - (r^2 \omega^2 / c^2)}$ раз медленнее. Центральное время t_c совпадает с тем временем, которое показывают часы из системы S_0

$$t_c = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} = t_0.$$

Поскольку система S_0 вращается по отношению к S с угловой скоростью $-\omega$,

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_0 - \omega t_0, \quad z = z_0. \quad (11.65)$$

Подставляя эти значения в (11.64), получаем

$$-dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2 \mp 2\omega r^2 d\theta dt_0 + c^2 \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right) dt_0^2 = 0, \quad (11.66)$$

или, согласно (11.61),

$$-dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2 \mp \frac{2\omega r^2 d\theta dt}{\sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}} + c^2 dt^2 = 0, \quad (11.67)$$

т. е.

$$d\sigma_e^2 \pm \frac{2\omega r^2}{\sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}} d\theta dt - c^2 dt^2 = 0, \quad (11.68)$$

где $d\sigma_e^2$ определяет элемент длины в евклидовом пространстве

$$d\sigma_e^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2. \quad (11.69)$$

С помощью локального времени скорость света в системе S будет определяться по формуле

$$V = \frac{d\sigma_e}{dt}. \quad (11.70)$$

Поэтому, согласно (11.68),

$$V^2 = c^2 \mp \frac{2\omega r^2}{\sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}} \frac{d\theta}{dt}. \quad (11.71)$$

Естественное время. В формулу (11.68) входит элемент длины $d\sigma_e$ евклидова пространства. Что же касается естественной геометрии на диске, то она определяется неевклидовым элементом длины

$$d\sigma^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\theta^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} + dz^2. \quad (11.72)$$

Подставляя (11.72) в (11.66), получаем

$$-d\sigma^2 + c^2 d\tau^2 = 0, \quad (11.73)$$

где

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} \left(dt_0 \pm \frac{\omega r^2 d\theta}{c^2 \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)} \right). \quad (11.74)$$

Величиной τ определяется *естественное время*, связанное с естественной геометрией на диске. Если применять время τ , то скорость света будет всегда равна c . При этом в результате обмена

световыми сигналами часы в системе S можно будет сверить с начальными показаниями часов H_1 . В начальный момент времени синхронизуем часы H_1 с теми часами из S_0 , которые находятся в той же точке пространства, что и H_1 . Часы H из системы S , сверенные с часами H_1 при помощи световых сигналов, покажут время τ , которое, согласно (11.74), зависит от пути, связывающего часы H_1 и H . Оно получится в результате интегрирования (11.74) при предположении, что $dt_0 = 0$. В частности, если переход от H_1 к H осуществляется в результате перемещения по окружности радиуса r , то

$$\tau_0 = \frac{\pm r^2 \omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}} \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{\pm 2\pi \omega r^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} = \pm \frac{2\omega \mathcal{S}}{c^2 \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}, \quad (11.75)$$

где \mathcal{S} — площадь круга радиуса r .

Если $v = \omega r$ мала по сравнению с c , то

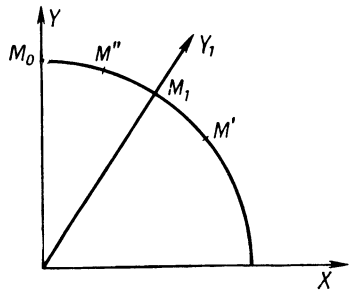
$$\tau_0 = \pm \frac{2\omega \mathcal{S}}{c^2}. \quad (11.76)$$

Если часы H сверяются с часами H_1 при помощи световых сигналов, проходящих q раз по окружности, центр которой совпадает с центром диска, то показания часов H будут отличаться от показаний часов H_1 на $q\tau_0 = \pm 2\omega q \mathcal{S}/c^2$. Поэтому естественное время в одной и той же точке будет определяться с точностью до слагаемого $q\tau_0$ ¹⁾.

Если два световых луча в противоположных направлениях проходят по пути, имеющему вид многоугольника, близкого к окружности радиуса r , то разность между временами прохождения в том и другом направлении будет равна

$$\Delta\tau = \frac{4\omega \mathcal{S}}{c^2}. \quad (11.77)$$

Рассмотрим тело M , движущееся от точки M_0 (фиг. 41) и перемещающееся по окружности радиуса r с постоянной скоростью, равной V_0 по отношению к системе S_0 и V по отношению к системе S . За время dt_0 связанная с системой S ось OY перейдет в положение OY_1 , и в зависимости от того, движется ли тело в направлении вращения или в противоположном направлении, оно перейдет в точку M' или M'' .



Ф и г. 41. Движущееся тело M и вращающийся диск.

¹⁾ Если сверенные с часами H_1 часы перемещаются по окружности на S настолько медленно, что движение не сказывается на их ходе, то их показания при возвращении к H_1 , разумеется, будут совпадать с показаниями часов H_1 , но будут отличаться на $q\tau_0$ от показаний часов H .

В системе S_0 тело пройдет путь

$$d\sigma_0 = V_0 dt_0 = dl_0 \pm r_0 \omega dt_0, \quad (\text{A})$$

где dl_0 — расстояние $M_1 M'$ (или $M_1 M''$) в системе S_0 . Поэтому

$$V_0 = \frac{dl_0}{dt_0} \pm r_0 \omega. \quad (\text{Б})$$

В системе S

$$V = \frac{dl}{d\tau}. \quad (\text{В})$$

Пользуясь естественной геометрией на диске и применяя естественное время, получаем

$$dl = \frac{dl_0}{\sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}}, \quad (\text{Г})$$

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} \left(dt_0 \mp \frac{\omega r^2 d\theta}{c^2 \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)} \right)$$

и

$$dl \sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} = r d\theta. \quad (\text{Д})$$

Сравнивая формулы (Б) — (Д), находим

$$V = \frac{V_0 \mp r\omega}{1 \mp \frac{\omega r}{c^2} V_0}, \quad V_0 = \frac{V \pm r\omega}{1 \pm \frac{\omega r}{c^2} V}. \quad (\text{Е})$$

Если два тела, одновременно начавшие двигаться от точки M_0 , имеют относительно системы S постоянные по величине скорости $+V$ и $-V$, то, согласно формулам (Е) и (А), на прохождение пути dl_0 они затратят соответственно время

$$(dt_0)_1 = \frac{dl_0}{(V_0)_1 - r\omega} = \frac{dl_0}{V} \frac{1 + \frac{\omega r}{c^2} V}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}},$$

$$(dt_0)_2 = \frac{dl_0}{(V_0)_2 - r\omega} = \frac{-dl_0}{V} \frac{1 - \frac{\omega r}{c^2} V}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}.$$

Разность времен

$$\Delta t_0 = (dt_0)_1 - (dt_0)_2 = \frac{2 dl_0}{c^2} \frac{\omega r}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}.$$

не зависит от значения скорости V . Когда движущиеся тела проходят полный оборот по окружности $\left(\int dl_0 = 2\pi r\right)$, эта разность будет равна

$$\Delta t_0 = \frac{4\omega \mathfrak{S}}{c^2 \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)} \approx \frac{4\omega \mathfrak{S}}{c^2}.$$

В связанной с диском системе S разность времен движения тел M_1 и M_2 будет равна нулю, если при ее вычислении пользоваться естественными временами систем, связанных с каждым телом. (Действительно, двигаясь с одинаковой скоростью, тела M_1 и M_2 проходят одинаковое расстояние.) При этом естественные времена должны измеряться двумя связанными с движущимися телами часами H_1 и H_2 , которые в начальный момент синхронизируются с неподвижными в системе S часами H , а затем сверяются с часами H при помощи световых сигналов. Когда движущиеся тела M_1 и M_2 возвратятся в начальную точку, часы H_1 и H_2 будут показывать одно и то же время. Но по отношению к H часы H_1 , двигавшиеся в направлении вращения диска, будут запаздывать на $2\omega R/c^2$, а часы H_2 — двигаться с опережением на $2\omega R/c^2$ [см. (11.76)]. Таким образом, полный оборот по окружности тело M_1 , двигавшееся в направлении вращения диска, совершит за больший промежуток времени, чем тело M_2 . Разность времен обхода, вычисленная в естественном времени диска и измеряемая при помощи часов H , будет равна $4\omega R/c^2$.

Но это как раз тот результат, который получается в опыте с распространением светового луча в воздухе (опыт Саньяка).

Если рассматривать не распространение фотонов, движущихся со скоростью c , а движение по отношению к вращающемуся диску двух тел со скоростями $+V$ и $-V$, то мы получим тот же результат: независимо от того, какова величина V , разность времен движения всегда будет выражаться формулой (11.77). В частности, если световые лучи распространяются в стеклянных призмах (опыт Харреса) или же в трубке с водой (опыт Погани), укрепленных на вращающемся диске, то результат опыта не будет зависеть от величины $V = c/n$. Опыт с интерференцией подтвердил формулу (11.77)¹⁾.

В. ЗАКОН ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Силы тяготения, в соответствии с основными положениями общей теории относительности (Эйнштейн [158]), локально должны определяться заданием соответствующим образом выбранного неевклидова пространства — времени. Эйнштейн предположил, что таким пространством является четырехмерное риманово простран-

¹⁾ Детальное изучение движения движущихся тел на вращающемся диске провел, в частности, Арзелье [40], который пользовался различными системами отсчета и разными определениями времени. [Полученные Арзелье результаты вызвали ряд критических замечаний, в связи с чем он их пересмотрел. См. „Addendum“ к книге H. Arzeliés, *Milieux conducteurs ou polarisables en mouvement*, Paris, 1959. — Прим. перев.]

Сравнение измерений, проведенных в системе S_0 и в какой-либо ускоренной системе S , имеется в книге Мёллера [92]. Мы рекомендуем читателям ознакомиться с примерами, изученными Мёллером.

ство, которое отличается от евклидова пространства наличием кривизны, характеризуемой тензором Римана — Кристоффеля $G_{\mu\nu\sigma}^{\rho}$ [см. (15.110)].

Риманово пространство полностью определяется метрическим тензором $g_{\mu\nu}$. В самом деле, в каждой точке пространства коэффициенты аффинной связности $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ совпадают с символами Кристоффеля

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}), \quad (11.78)$$

а тензор кривизны

$$G_{\mu\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\sigma} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} - \partial_{\nu} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} \quad (11.79)$$

выражается через $g_{\mu\nu}$ и их производные первого и второго порядков. Поэтому все свойства риманова пространства будут определяться по заданному элементарному интервалу

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dy^{\mu} dy^{\nu}. \quad (11.80)$$

§ 9. Закон тяготения для области без вещества

Для области, в которой вещество отсутствует, закон тяготения принимает вид структурных условий, т. е. на тензор кривизны, существование которого только и отличает риманово пространство от евклидова, накладываются ограничения.

Такие условия получаются в результате приравнивания нулю некоторых линейных комбинаций от компонент тензора кривизны. Эйнштейн ввел следующие 10 соотношений, накладывающих ограничения на компоненты тензора кривизны

$$G_{\mu\nu\rho}^{\rho} = G_{\mu\nu 1}^1 + G_{\mu\nu 2}^2 + G_{\mu\nu 3}^3 + G_{\mu\nu 0}^0 = 0. \quad (11.81)$$

Свернутый тензор кривизны $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu\rho}^{\rho}$ называется *тензором Риччи*. Согласно (11.79), компоненты этого тензора выражаются следующим образом:

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu\rho}^{\rho} = \partial_{\rho} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} - \partial_{\nu} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\}. \quad (11.82)$$

Как видим, гипотеза Эйнштейна заключается в предположении, что в области без вещества закон тяготения получается в результате приравнивания нулю компонент тензора Риччи

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 0.} \quad (11.83)$$

A priori представляется, что эти условия накладывают слишком большие ограничения, так как здесь мы имеем дело с десятью

дифференциальными уравнениями для десяти компонент $g_{\mu\nu}$. Кажется бы, что в результате можно будет определить метрический тензор $g_{\mu\nu}$ теоретически, что предопределил выбор системы отсчета. Но поскольку выбор системы отсчета должен, разумеется, оставаться произвольным, то такой вывод представляется парадоксальным¹⁾. Однако можно все же ввести условия (11.83), так как компоненты $G_{\mu\nu}$ связаны следующими четырьмя тождественными соотношениями:

$$\nabla_{\rho} \left(G_{\mu}^{\rho} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\rho} G \right) \equiv 0, \quad (11.84)$$

где

$$G_{\mu}^{\rho} = g^{\rho\sigma} G_{\mu\sigma}, \quad G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}. \quad (11.85)$$

Таким образом, число вытекающих из условия (11.83) независимых уравнений как раз равно $10 - 4 = 6$, что оставляет требуемый произвол в выборе системы отсчета.

В более общем виде предположим, что уравнения тяготения выражаются условиями

$$\boxed{S_{\mu}^{\rho} = 0}, \quad (11.86)$$

где компоненты S_{μ}^{ρ} , равные $g^{\rho\nu} S_{\mu\nu}$, являются функциями только от компонент $g_{\mu\nu}$ и их частных производных первого и второго порядков. Предположим также, что компоненты S_{μ}^{ρ} подчиняются уравнениям сохранения

$$\boxed{\nabla_{\rho} S_{\mu}^{\rho} \equiv 0}, \quad (11.87)$$

так что десять условий (11.86) сводятся к шести и у нас остается произвол в выборе системы отсчета.

Картан показал, что таким условиям удовлетворяет только тензор S_{μ}^{ρ} , имеющий вид²⁾

$$\boxed{S_{\mu}^{\rho} = G_{\mu}^{\rho} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\rho} G}, \quad (11.88)$$

¹⁾ См. работу Гильберта [159].

²⁾ Точнее, тензор S_{μ}^{ρ} , определяемый заданием компонент $g_{\mu\nu}$ и производных от них первого и второго порядков и подчиняющийся условиям (11.87), имеет вид

$$S_{\mu}^{\rho} = h \left[G_{\mu}^{\rho} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\rho} (G - 2\lambda) \right].$$

Здесь мы полагаем $\lambda = 0$ и $h = 1$.

где $G_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, определяемый согласно (11.82). Из (11.86) следует $G = 0$, так что эти условия переписываются также в виде (11.83)

$$G_{\mu\nu} = 0.$$

В результате получаются уравнения тяготения для области без вещества и в отсутствие электромагнитного поля.

§ 10. Закон тяготения при наличии вещества или электромагнитного поля

Наличие вещества или электромагнитного поля выражается в существовании тензора энергии — импульса T_{μ}^{ν} , подчиняющегося закону сохранения

$$\nabla_{\rho} T_{\mu}^{\rho} = 0. \quad (11.89)$$

В данном случае закон тяготения заключается в приравнении тензоров S_{μ}^{ρ} и T_{μ}^{ρ} , причем оба они подчиняются закону сохранения, но первый носит геометрическое происхождение, тогда как второй не имеет геометрического характера, так как он связан с существованием вещества (тензор вещества), электромагнитного поля или какого-либо другого поля, обладающего негравитационной энергией.

Таким образом, закон тяготения записывается в виде

$$\boxed{S_{\mu}^{\rho} = \chi T_{\mu}^{\rho}}, \quad (11.90)$$

где χ — постоянная, связанная с гравитационной постоянной G .

При этом закон сохранения для тензора T_{μ}^{ρ} получается из тождеств (11.87), из которых следует (11.89). Беря для S_{μ}^{ρ} выражение (11.88), получаем

$$G_{\mu}^{\rho} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\rho} G = \chi T_{\mu}^{\rho} \quad (11.91)$$

или

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \chi T_{\mu\nu}. \quad (11.92)$$

§ 11. Траектории незаряженной частицы в гравитационном поле являются геодезическими линиями риманова пространства

Если вещество состоит, например, из незаряженных частиц и электромагнитные (или тепловые и т. п.) эффекты отсутствуют, то тензор T_{μ}^{ρ} сводится к тензору вещества M_{μ}^{ρ} . Пользуясь выражением (8.166), относящимся к идеальному газу, и полагая $p = 0$,

можно записать

$$M_{\mu}^{\rho} = \mu_0 c^2 u_{\mu} u^{\rho}. \quad (11.93)$$

С другой стороны, если вещество состоит из заряженных частиц, то электромагнитное поле существует. Если это поле подчиняется уравнениям Максвелла, то тензором энергии — импульса поля будет тензор Максвелла

$$\tau_{\mu}^{\rho} = -\varphi_{\mu\sigma} \varphi^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\rho} \varphi_{\lambda\sigma} \varphi^{\lambda\sigma}. \quad (11.94)$$

При этом уравнение $\nabla_{\rho} T_{\mu}^{\rho} = 0$ примет вид

$$\nabla_{\rho} (M_{\mu}^{\rho} + \tau_{\mu}^{\rho}) = 0, \quad (11.95)$$

т. е., согласно (11.93) и (11.94),

$$u^{\rho} \nabla_{\rho} u_{\mu} = -\frac{1}{\mu_0 c^2} \varphi_{\mu\rho} j^{\rho} = -\frac{4\pi\rho_0}{\mu_0 c^2} \varphi_{\mu\rho} u^{\rho} = \frac{4\pi}{\mu_0 c^2} f_{\mu}, \quad (11.96)$$

где мы положили

$$j^{\rho} = \nabla_{\sigma} \varphi^{\rho\sigma}, \quad f_{\mu} = \frac{1}{4\pi} \varphi_{\rho\mu} j^{\rho}. \quad (11.97)$$

Таким образом, траектория незаряженной частицы ($\rho = 0$) будет определяться из уравнения

$$u^{\rho} \nabla_{\rho} u_{\mu} = 0, \quad (11.98)$$

или, учитывая, что по определению $u^{\mu} = dy^{\mu}/ds$, из уравнения

$$\boxed{\frac{d^2 y^{\rho}}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dy^{\mu}}{ds} \frac{dy^{\nu}}{ds} = 0.} \quad (11.99)$$

Эта траектория получается также из вариационного принципа [см. (15.154)]:

$$\boxed{\delta \int ds = 0,} \quad (11.100)$$

где

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dy^{\mu} dy^{\nu}. \quad (11.101)$$

Мы видим, что траектории незаряженной частицы, определяемые уравнениями (11.98), совпадают с кратчайшими линиями (т. е. с геодезическими) риманова пространства, элементарный интервал в котором определяется формулой (11.101). Таким образом, риманово пространство, структурой которого определяется гравитационное поле, обладает геодезическими линиями, совпадающими с траекториями незаряженных частиц. Эти частицы здесь можно считать свободными частицами, движущимися по геодезическим линиям, определяемым уравнением (11.99).

Траектории свободных частиц при переходе к произвольным криволинейным координатам всегда определяются из уравнений (11.99). Этот вывод справедлив для любого пространства, в котором коэффициенты аффинной связности характеризуются символами $\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$, т. е. как для риманова, так и для евклидова пространства. Но в евклидовом пространстве всегда можно выбрать ортонормированную систему координат $\left(\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} = 0 \right)$ и в этой системе описывать интересующие нас явления, происходящие в значительной области пространства. В этой специальной системе $d^2x^\mu/ds^2 = du^\mu/ds = 0$, т. е. компоненты четырехмерной скорости являются постоянными и свободная материальная точка движется по прямой линии с постоянной скоростью.

В противоположность этому в случае риманова пространства координаты для всех точек пространства невозможно выбрать таким образом, чтобы уравнение геодезической (11.99) сводилось к уравнению $u^\mu = \text{const}$. В римановом пространстве уравнение (11.99) описывает движение такой „свободной“ материальной точки, которая при переходе к эквивалентному описанию в евклидовом пространстве представляется в виде материальной точки (незаряженной частицы), подверженной только действию сил тяготения. Что же касается движения заряженной частицы ($\rho \neq 0$), то оно определяется уравнением (11.96) и отличается от уравнения для геодезической членом в правой части (11.96)¹⁾.

¹⁾ Можно показать, что траектории заряженных частиц являются геодезическими в пространстве Финслера, характеризуемом элементарным интервалом

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu} + \frac{e}{m} \varphi_\mu dy^\mu.$$

Каждое пространство Финслера характеризуется значением e/m , которое определяется видом частицы (см., например, Лихнерович [160]).

РАЗВИТИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И НЕКОТОРЫЕ ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ НЕЕ СЛЕДСТВИЯ

А. ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Гравитационный потенциал в ньютоновском приближении

Предположим, что гравитационное поле настолько слабо, что пространство — время мало отличается от евклидова пространства. Тогда можно выбрать такую специальную систему координат x^μ , что $g_{\mu\nu}$ будут мало отличаться от галилеевых значений

$$\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} (-1, -1, -1, +1). \quad (12.1)$$

Поэтому мы положим

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \quad (12.2)$$

и будем пренебрегать квадратами и произведениями от величин $h_{\mu\nu}$ и их производных.

Геодезические линии риманова пространства определяются из уравнений

$$\frac{d^2 x^p}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} p \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (12.3)$$

описывающих траектории, по которым в гравитационном поле движется нейтральная частица. Предположим, что скорость этой частицы мала по сравнению со скоростью света

$$\frac{dx^p}{dt} \ll c, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dx^p}{dx^0} \ll 1 \quad (x^0 = ct), \quad (12.4)$$

где латинские индексы p, q, r по-прежнему изменяются от 1 до 3, а греческие индексы μ, ν, ρ, \dots принимают значения 1, 2, 3, 0. Тогда

$$\left(\frac{ds}{dx^0} \right)^2 = g_{pq} \frac{dx^p}{dx^0} \frac{dx^q}{dx^0} + 2g_{p0} \frac{dx^p}{dx^0} + g_{00} \approx g_{00}, \quad (12.5)$$

$$(p, q = 1, 2, 3),$$

так что, согласно (12.4) и (12.2),

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} p \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &\approx \left\{ \begin{matrix} p \\ 00 \end{matrix} \right\} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 \approx \\ &\approx \frac{g^{pq}}{2g_{00}} (2\partial_0 g_{0q} - \partial_q g_{00}) \approx - \left(\partial^0 g_{0p} - \frac{1}{2} \partial_p g_{00} \right). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Если массы движутся достаточно медленно, то производные по времени $\partial_0 = (1/c)(\partial/\partial t)$ будут малы по сравнению с производными по пространственным координатам $\partial_p = \partial/\partial x^p$ и ими по сравнению с последними можно будет пренебречь. В результате три первых уравнения (12.3) запишутся в виде

$$\frac{d^2 x^p}{ds^2} = -\frac{1}{2} \partial_p g_{00}, \quad (12.7)$$

или с учетом (12.5)

$$\frac{d^2 x^p}{ds^2} \approx \frac{d^2 x^p}{(dx^0)^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^p}{dt^2}. \quad (12.8)$$

Таким образом, сравнивая (12.7) и (12.8), приближенные уравнения геодезических линий можно записать в виде

$$\boxed{\frac{d^2 x^p}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \partial_p g_{00} = \frac{\partial U}{\partial x^p}}, \quad (12.9)$$

где

$$\boxed{U = -\frac{c^2}{2} h_{00} + \text{const.}} \quad (12.10)$$

Следовательно, если массы малы и движутся достаточно медленно ($v \ll c$), то траектории частиц (геодезические линии) будут приближенно совпадать с траекториями частиц в классической ньютоновской механике — они будут определяться заданной силой, являющейся градиентом потенциала U .

В рассматриваемом приближении в уравнения движения входит только компонента g_{00} ; именно поэтому ее можно связать со скаляром U и не принимать во внимание истинный тензорный характер гравитационного потенциала. В строгой теории этот потенциал будет задаваться симметричным тензором второго ранга. Движение масс будет определяться десятью компонентами $g_{\mu\nu}$.

§ 2. Уравнения гравитационного поля в изотермических и квази-галилеевых координатах

Рассмотрим уравнения поля (11.90) при наличии „содержимого“ (вещества или электромагнитного поля), в которых правая часть не равна нулю

$$S_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \chi T_{\mu\nu}. \quad (12.11)$$

В эти уравнения входит тензор Риччи

$$G_{\mu\nu} = \partial_\rho \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} - \partial_\nu \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} \quad (12.12)$$

и скалярная кривизна

$$G = g^{\lambda\nu} G_{\mu\nu}. \quad (12.13)$$

Нетрудно проверить, что выражения (12.12) и (12.13) для $G_{\mu\nu}$ и G могут быть переписаны в виде

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sigma^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (g_{\mu\rho} \partial_\nu \sigma^\rho + g_{\nu\rho} \partial_\mu \sigma^\rho) + \\ + g^{\lambda\tau} g^{\rho\sigma} (\partial_\rho g_{\mu\lambda} \partial_\sigma g_{\nu\tau} - [\lambda\rho, \mu] [\tau\sigma, \nu]), \quad (12.14)$$

и

$$G = -g^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma \ln \sqrt{-g} - \sigma^\rho \partial_\rho \ln \sqrt{-g} - \\ - \partial_\rho \sigma^\rho - \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} \partial_\lambda g^{\rho\sigma}, \quad (12.15)$$

где

$$[\mu\nu, \rho] = g_{\rho\sigma} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (12.16)$$

а через σ^λ обозначено выражение ¹⁾

$$\sigma^\lambda = -g^{\rho\sigma} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\lambda}). \quad (12.17)$$

Выражения (12.14) и (12.15) примут более простой вид, если систему координат выбрать так, чтобы

$$\sigma^\lambda = 0. \quad (12.18)$$

Получаемые таким путем координаты специального вида y^ρ называются *изотермическими* ²⁾. Они определяются также следующим образом. Выражения (12.17) для σ^λ запишем в виде

$$\square f^{(\lambda)} = g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \nabla_\sigma f^{(\lambda)} = g^{\rho\sigma} \left(\partial_\rho \partial_\sigma - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} \partial_\tau \right) f^{(\lambda)} = \\ = -g^{\rho\sigma} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} = \sigma^\lambda, \quad (12.19)$$

¹⁾ Действительно,

$$-g^{\rho\sigma} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} g^{\lambda\tau} (2\partial_\rho g_{\sigma\tau} - \partial_\tau g_{\rho\sigma}) = \\ = -\partial_\rho (g^{\rho\sigma} g^{\lambda\tau} g_{\sigma\tau}) + g_{\sigma\tau} \partial_\rho (g^{\rho\sigma} g^{\lambda\tau}) + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \frac{\partial_\rho g}{g} = \\ = -\partial_\rho g^{\rho\lambda} + \delta_\tau^\rho \partial_\rho g^{\lambda\tau} + \delta_\sigma^\lambda \partial_\rho g^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \frac{\partial_\rho g}{g} = \\ = \partial_\rho g^{\rho\lambda} + g^{\lambda\rho} \frac{\partial_\rho \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} g^{\lambda\rho}),$$

где мы учли, что $g^{\rho\sigma} g_{\sigma\tau} = \delta_\tau^\rho$ и $dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$ (см. гл. 15, § 5).

²⁾ Координатную систему, для которой имеют место соотношения (12.18), иногда называют также гармонической (см. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, М.—Л., 1955, § 53). — *Прим. перев.*

где

$$\partial_\tau f^{(\lambda)} = \partial_\tau y^\lambda = \delta_\tau^\lambda.$$

Если четыре функции $y^\lambda = f^{(\lambda)}$ являются решениями (12.18), т. е. если $\square f^{(\lambda)} = 0$, то ими будет определяться изотермическое многообразие, для которого $f^{(\lambda)} = \text{const}$. Следовательно, условие изотермичности основано на таком выборе координат ¹⁾, что

$$\square y^\lambda = 0, \quad \text{где} \quad \square = \nabla^\rho \nabla_\rho = g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \nabla_\sigma. \quad (12.20)$$

При этом условии уравнения тяготения (12.11) принимают простой вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu} + g^{\lambda\tau} g^{\rho\sigma} (\partial_\rho g_{\mu\lambda} \partial_\sigma g_{\nu\tau} - [\lambda\rho, \mu][\tau\sigma, \nu]) + \\ & + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma \ln \sqrt{-g} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} \partial_\lambda g^{\rho\sigma} = \chi T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Квази-галилеево приближение. Предположим, что гравитационное поле мало. Тогда координаты можно выбрать таким образом, что $g_{\mu\nu}$ будут мало отличаться от галилеевых значений (12.1)

$$\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} (-1, -1, -1, +1).$$

Таким образом, положим ²⁾

$$g_{00} = 1 + h_{00} = 1 + \varepsilon^2 h_{00} + 0 (\varepsilon^4), \quad (12.22a)$$

$$g_{p0} = h_{p0} = \varepsilon^3 h_{p0} + 0 (\varepsilon^5) \quad (p, q = 1, 2, 3), \quad (12.22b)$$

$$g_{pq} = -\delta_{pq} + h_{pq} = -\delta_{pq} + \varepsilon^2 h_{pq} + 0 (\varepsilon^4), \quad (12.22в)$$

где

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{c^2}. \quad (12.23)$$

Про систему уравнений мы будем говорить, что это система *второго порядка*, если в ней имеются только бесконечно малые ε^2 и ε^3 . В такую систему уравнений входят только члены с h и h , ² ³ тогда как их произведениями (которые $\leq \varepsilon^4$) можно пренебречь.

Можно показать, что *квази-галилеевы координаты всегда могут быть выбраны таким образом, что они одновременно будут изотермическими* (см. Шази [87]). В этом случае переход к квази-галилеевым координатам будет связан с обращением σ^λ

¹⁾ По поводу выбора изотермических координат сошлемся на Дарму [161], Де-Дондера [162] и Шази [87].

²⁾ Разложение $h_{\mu\nu}$ по бесконечно малым величинам ε , ε^2 , ε^3 здесь произвольно. Мы увидим, что такой выбор определяется порядком величины членов, характеризующих тензор энергии [см. (12.13)].

в нуль в приближении любого порядка. При этом условии уравнения тяготения будут по-прежнему иметь простой вид (12.21), причем вместо $g_{\mu\nu}$ в них можно будет подставить разложения (12.22).

Одновременно нужно учесть следующие соотношения, которые легко получаются из (12.22):

$$g = (\text{детерм. } g_{\mu\nu}) = -1 - \varepsilon^2 \left(h_{00} - \sum_p h_{2pp} \right) + 0(\varepsilon^4), \quad (12.24)$$

$$g^{00} = \frac{1}{g} \text{ (минор } g_{00}) = 1 - \varepsilon^2 h_{00} + 0(\varepsilon^4), \quad (12.25a)$$

$$g^{0p} = \frac{1}{g} \text{ (минор } g_{0p}) = \varepsilon^3 h_{3p0} + 0(\varepsilon^5), \quad (12.25b)$$

$$g^{pq} = \frac{1}{g} \text{ (минор } g_{pq}) = -\delta_{pq} - \varepsilon^2 h_{2pq} + 0(\varepsilon^4). \quad (12.25b)$$

Подставляя соотношения (12.22), (12.24) и (12.25) в (12.21), в рассматриваемом приближении получаем

$$-\frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma \left[h_{00} - \frac{1}{2} \left(h_{00} - \sum_p h_{2pp} \right) \right] = \frac{\chi}{\varepsilon^2} T_{00}, \quad (12.26a)$$

$$-\frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h_{3p0} = \frac{\chi}{\varepsilon^3} T_{p0}, \quad (12.26b)$$

$$-\frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma \left[h_{2pq} + \frac{1}{2} \delta_{pq} \left(h_{00} - \sum_r h_{2rr} \right) \right] = \frac{\chi}{\varepsilon^2} T_{pq}. \quad (12.26b)$$

К этим уравнениям следует добавить условие изотермичности (12.18), которое мы запишем в виде

$$\sigma_\mu = g_{\mu\nu} \sigma^\nu = -g^{\rho\sigma} [\rho\sigma, \mu] = 0, \quad (12.27)$$

т. е.

$$\sigma_\mu = -g^{\rho\sigma} \left(\partial_\rho g_{\sigma\mu} - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\rho\sigma} \right) = 0. \quad (12.28)$$

Таким образом, в квази-галилеевых координатах

$$\sigma_\mu = \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho h_{\sigma\mu} - \frac{1}{2} \partial_\mu h = 0, \quad (12.29)$$

где

$$h = \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}. \quad (12.30)$$

Выражение (12.28) можно записать также в виде

$$\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \left[h_{\sigma\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\sigma\mu} h \right] = 0. \quad (12.31)$$

Если гравитационное поле мало, то при использовании изотермических квази-галилеевых координат в приближении второго порядка оно будет подчиняться уравнениям (12.26) и (12.31).

Если положить

$$\gamma_{\rho}^{\mu\nu} = h_{\rho}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h_{\rho} \quad (h = \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}), \quad (12.32)$$

и, наоборот,

$$h_{\rho}^{\mu\nu} = \gamma_{\rho}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \gamma_{\rho} \quad (\gamma = \eta^{\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma}), \quad (12.33)$$

то уравнения (12.26) и (12.31) примут вид

$$-\frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} \partial_{\rho} \partial_{\sigma} \gamma_{\rho}^{\rho 00} = \frac{\chi}{\varepsilon^2} T_{00}, \quad (12.34a)$$

$$-\frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} \partial_{\rho} \partial_{\sigma} \gamma_{\rho}^{\rho 0p} = \frac{\chi}{\varepsilon^2} T_{p0}, \quad (12.34b)$$

$$-\frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} \partial_{\rho} \partial_{\sigma} \gamma_{\rho}^{\rho pq} = \frac{\chi}{\varepsilon^2} T_{pq} \quad (12.34b)$$

и

$$\eta^{\rho\sigma} \partial_{\rho} \gamma_{\sigma\mu} = 0. \quad (12.35)$$

Эти соотношения переписываются также в виде

$$\square \gamma_{\mu\nu} = -2\chi T_{\mu\nu}, \quad (12.36)$$

$$\eta^{\rho\sigma} \partial_{\rho} \gamma_{\sigma\mu} = 0, \quad (12.37)$$

где

$$\square = \eta^{\rho\sigma} \partial_{\rho} \partial_{\sigma} = \partial_0^2 - \sum_p \partial_p^2 \quad (12.38)$$

и

$$\gamma_{pq} = \varepsilon^2 \gamma_{pq}, \quad \gamma_{p0} = \varepsilon^3 \gamma_{p0}, \quad \gamma_{00} = \varepsilon^2 \gamma_{00}. \quad (12.39)$$

§ 3. Применение к непрерывной материальной среде, сходной с идеальным газом

Тензором $T_{\mu\nu}$ характеризуется влияние источников поля. Предположим, что такими источниками являются незаряженные частицы, образующие непрерывную среду, сходную с идеальным газом. Тогда $T_{\mu\nu}$ не будет содержать членов электромагнитного происхождения (характеризуемых тензором Максвелла $\tau_{\mu\nu}$) и будет сводиться к тензору для идеальной жидкости $M_{\mu\nu}$ [см. (8.166)]:

$$T_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} = (\mu_0 c^2 + p) u_{\mu} u_{\nu} - p g_{\mu\nu}. \quad (12.40)$$

В это выражение входят компоненты четырехмерной скорости

$$u_p = g_{pq} u^q + g_{p0} u^0 = \left(g_{pq} \frac{v^q}{c} + g_{p0} \right) u^0 \quad (p, q = 1, 2, 3), \quad (12.41a)$$

$$u_0 = g_{p0} u^p + g_{00} u^0 = \left(g_{p0} \frac{v^p}{c} + g_{00} \right) u^0, \quad (12.41b)$$

где

$$v^p = \frac{dx^p}{dt}, \quad u^p = \frac{dx^p}{ds}, \quad u^0 = \frac{dx^0}{ds} = c \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (12.42)$$

Подставляя (12.41) в (12.40) и ограничиваясь наибольшими членами, получаем

$$M_{00} \approx \mu_0 c^2, \quad (12.43a)$$

$$M_{p0} \approx \mu_0 v_p c, \quad (12.43б)$$

$$M_{pq} \approx \mu_0 v_p v_q + p \delta_{pq}. \quad (12.43в)$$

Подставляя (12.43) в три уравнения (12.34), с точностью до величин второго порядка получаем

$$\square \gamma_{200} = -2\chi \mu_0 c^4, \quad (12.44a)$$

$$\square \gamma_{3p0} = -2\chi \mu_0 v_p c^4, \quad (12.44б)$$

$$\square \gamma_{2pq} = -2\chi c^2 (\mu_0 v_p v_q + p \delta_{pq}). \quad (12.44в)$$

Правые части в (12.44) будут конечными, если χ имеет порядок величины $\epsilon^4 = 1/c^4$. Полагая

$$\chi = \epsilon^4 \chi_1 = \frac{\chi_1}{c^4}, \quad (12.45)$$

уравнения (12.44) запишем в виде

$$\square \gamma_{200} = -2\chi_1 \mu_0, \quad (12.46a)$$

$$\square \gamma_{3p0} = -2\chi_1 \mu_0 v_p, \quad (12.46б)$$

$$\square \gamma_{2pq} = 0. \quad (12.46в)$$

1. Статические решения. Найдем статические решения уравнений (12.46), т. е. такие решения $h_{\mu\nu}$, которые не зависят от времени. Для этого мы должны будем решить систему уравнений

$$\Delta \gamma_{200} = 2\chi_1 \mu_0, \quad (12.47a)$$

$$\Delta \gamma_{3p0} = 2\chi_1 \mu_0 v_p, \quad (12.47б)$$

$$\Delta \gamma_{2pq} = 0, \quad (12.47в)$$

которая получается при учете

$$\square = \overset{\circ}{\Delta} - \Delta, \quad \Delta = \sum_p \partial_p^2. \quad (12.48)$$

Уравнение (12.47) допускает решение

$$\gamma_{2pq} = h_{2pq} - \frac{1}{2} \eta_{pq} h_2 = h_{2pq} + \frac{1}{2} \delta_{pq} \left(h_{00} - \sum_r h_{2rr} \right) = 0, \quad (12.49)$$

откуда в результате суммирования будем иметь

$$\sum_p \gamma_{2pp} = \frac{3}{2} h_{00} - \frac{1}{2} \sum_p h_{2pp} = 0. \quad (12.50)$$

Как и в (12.10), положим

$$U = -\frac{c^2}{2} h_{00} = -\frac{1}{2} h_{00} + 0(\epsilon^4). \quad (12.51)$$

Тогда, согласно (12.50),

$$h_{00} = -2U, \quad (12.52)$$

$$\sum_p h_{2pp} = -6U, \quad (12.53)$$

и после подстановки в (12.49) и (12.32) получим

$$h_{2pq} = -2U \delta_{pq}, \quad (12.54)$$

$$\gamma_{200} = h_{200} - \frac{1}{2} \eta_{00} \left(h_{00} - \sum_r h_{2rr} \right) = \frac{1}{2} \left(h_{00} + \sum_r h_{2rr} \right) = -4U. \quad (12.55)$$

Таким образом, уравнение (12.47а) запишется в виде

$$\Delta U = -\frac{\chi_1}{2} \mu_0. \quad (12.56)$$

Оно будет совпадать с вытекающим из ньютоновского закона тяготения уравнением Пуассона (11.23)

$$\Delta U = -4\pi G \mu_0,$$

если

$$\chi_1 = 8\pi G, \quad (12.57)$$

т. е.

$$\boxed{\chi = \frac{\chi_1}{c^4} = \frac{8\pi G}{c^4}.} \quad (12.58)$$

Часто полагают $\chi = 8\pi G/c^2$. Эта величина соответствует выбору для тензора вещества не соотношения (12.40), а

$$M_{\mu\nu} = \mu_0 u_\mu u_\nu.$$

С другой стороны, можно перейти к новой системе единиц, для которой

$$c = 1, G = 1.$$

С этой целью нужно изменить единицы времени и массы, сохраняя при этом единицу длины.

В такой новой системе единиц

$$[L]' = [L] = 1 \text{ см},$$

$$[T]' = [T] \frac{c'}{c} = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} = 3,33 \cdot 10^{-11} \text{ сек},$$

$$[M]' = [M] \frac{G'}{G} \frac{[T]^2}{[T']^2} = \frac{(3 \cdot 10^{10})^2}{6,66 \cdot 10^{-8}} = 1,35 \cdot 10^{28} \text{ г}.$$

В этой новой системе единиц формула (11.90) переписется в виде

$$S_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = 8\pi T_{\mu\nu}.$$

Учитывая, что, согласно (11.14),

$$G = 6,664 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}, \quad (12.59)$$

для χ получим значение

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4} = 2,073 \cdot 10^{-48} \text{ см}^{-1} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^2. \quad (12.60)$$

Система уравнений (12.47) теперь запишется в виде

$$\Delta U = -\frac{\chi c^4}{2} \mu_0 = -4\pi G \mu_0, \quad (12.61)$$

$$\Delta \gamma_{p0} = 2\chi c^4 \mu_0 v_p = 16\pi G \mu_0 v_p. \quad (12.62)$$

Для данного приближения потенциал U в точке $P(r)$, создаваемый непрерывным статическим распределением вещества в элементах объема dV' около $M'(r')$, будет равен

$$U = \frac{\chi c^4}{8\pi} \int \frac{\mu_0(r') dV'}{|r - r'|}. \quad (12.63)$$

Таким образом, потенциал U , создаваемый в точке $P(r)$ N телами A, B, \dots с плотностями массы μ_A, μ_B, \dots будет равен

$$U = \sum_{A=1}^N U_A, \quad (12.64)$$

где через U_A обозначено решение уравнения

$$\Delta U_A = -\frac{\chi c^4}{2} \mu_A = -4\pi G \mu_A \quad (12.65)$$

и

$$\mu_0 = \sum_{A=1}^N \mu_A. \quad (12.66)$$

Если, далее, v_p^A являются компонентами скорости тела A , то с учетом (12.65) уравнение (12.62) можно переписать в виде

$$\Delta \gamma_{3p0} = 16\pi G \sum_{A=1}^N \mu_A^A v_p^A = -4 \sum_{A=1}^N v_p^A \Delta U_A. \quad (12.67)$$

Поскольку для тела A величины v_p^A практически постоянны, то

$$\Delta \gamma_{3p0} = -4 \sum_{A=1}^N \Delta (v_p^A U_A), \quad (12.68)$$

т. е.

$$\gamma_{3p0} = h_{3p0} = -4 \sum_{A=1}^N v_p^A U_A = 4 \sum_{A=1}^N v^p U_A. \quad (12.69)$$

Отметим, что в уравнение (12.47) плотность μ_0 входит через посредство тензора вещества $M_{\mu\nu}$. Поэтому она является *плотностью инертной массы*. С другой стороны, в соответствии с определением ньютоновского потенциала, μ характеризует *плотность гравитационной массы*. Из основных положений теории следует, таким образом, равенство гравитационной и инертной масс.

2. Равенство гравитационной и инертной масс. Инертная масса частицы проявляется в ее *реакции на силы инерции*. Аналогично *гравитационная масса* пробной частицы характеризует *реакцию* этой частицы по отношению к действующим на нее *силам тяготения*. Но, кроме того, из самой формы ньютоновского закона тяготения следует, что ею определяется также *способность тела создавать гравитационное поле*.

В зависимости от того, идет ли речь о поведении пробной частицы в гравитационном поле или же о создании поля одним или несколькими источниками, принцип эквивалентности выражается в одной из двух следующих форм:

Если на незаряженную частицу действует только гравитационное поле, то она будет двигаться по геодезической линии риманова пространства. Свойства этого риманова пространства специального вида и, в частности, траектория пробной частицы определяются

уравнениями $S_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$, которые не зависят от величин, характеризующих пробную частицу.

Что касается пробной частицы, принцип эквивалентности между силами инерции и силами тяготения находит свое выражение в постулате о геодезических линиях. Этот принцип приводит к отождествлению инертной и гравитационной масс, где последняя определяется по действию сил тяготения на пробную частицу. Какое-либо отличие гравитационной массы от инертной по самому определению лишается смысла.

Если же гравитационное поле проявляется, например, внутри непрерывной среды, то свойства поля определяются из уравнений (11.92)

$$S_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \chi T_{\mu\nu},$$

так что при наличии материальной среды риманово пространство становится пространством специального вида.

Вместе с тем в тензор энергии — импульса $T_{\mu\nu}$, с которым приходится иметь дело в уравнениях (11.92), в соответствии с (12.40) входят создающие поле *инертные массы* частиц m_i (или *плотность инертной массы* среды μ_0).

Приближенные уравнения (12.47) или (12.56) допускают решение вида (12.63). Считая, что поле, создаваемое достаточно удаленными телами A, B, C, \dots , слабое, получаем

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} h_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} = -2\delta_{\mu\nu} \sum_{A=1}^N U_A, \quad (12.70)$$

где

$$U_A = \frac{\chi c^4}{8\pi} \int \frac{(\mu_A)_i dV'}{|r-r'|} \approx \frac{\chi c^4}{8\pi r} (m_A)_i. \quad (12.71)$$

Величинами $(m_A)_i$ характеризуются *инертные массы* создающих поле тел A .

С другой стороны, если закон тяготения применяется к внешней области, то имеем (11.83)

$$G_{\mu\nu} = 0$$

и приближенное уравнение (12.56) принимает вид

$$\Delta U = 0. \quad (12.72)$$

Отсюда определяется решение

$$U_A = \frac{G \sum_{A=1}^N (m_A)_g}{r}, \quad (12.73)$$

где $(m_A)_g$ — постоянная, появляющаяся при интегрировании уравнения (12.72). Эта постоянная интегрирования зависит только от свойств тел, создающих гравитационное поле, поэтому с точностью до множителя, которым является универсальная постоянная G , ею определяется гравитационная масса тела $(m_A)_g^1$.

В рассматриваемом приближении (когда поле слабое и массы достаточно удалены) решения (12.71) и (12.73) совпадают между собой. Поэтому

$$Gm_g = \frac{\chi c^4}{8\pi} m_i, \quad (12.74)$$

$$\text{т. е.} \quad m_g = m_i, \quad (12.75)$$

$$\text{если } ^2) \quad \chi = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (12.58)$$

Таким образом, для случая полей, создаваемых распределением вещества, принцип эквивалентности выражается в виде условий, согласно которым решения (11.92) и (11.83), соответствующие областям, расположенным внутри и вне вещества, должны переходить друг в друга³⁾. При специальном выборе универсальных постоянных эти условия приводят к тому, что у частиц или у распределения вещества, создающих гравитационное поле, инертная и гравитационная массы оказываются тождественными между собой.

§ 4. Уравнения для пустого пространства

Уравнения для гравитационного поля в отсутствие вещества и электромагнитного поля легко получаются из (12.47), если приравнять нулю тензор $T_{\mu\nu}$.

1. Статические решения. Если ограничиться статическим случаем и ньютоновским приближением, то для пустого пространства вместо (12.47) получим

$$\Delta \gamma_{\mu\nu} = 0. \quad (12.76)$$

При этом не меняется условие изотермичности (12.37).

¹⁾ В данном приближении этот же результат получается также из решения Шварцшильда, выраженного в *изотропных* координатах.

²⁾ Или, если воспользоваться системой единиц, для которой $G = 1$, $c = 1$, то $\chi = 8\pi$.

³⁾ Конечно, считать выражения (12.71) и (12.73) совпадающими друг с другом, значит практически спутать (12.71) с формулой Пуассона (11.23), где μ — плотность гравитационной массы. Но формула Пуассона выводится из закона ньютоновского притяжения, в котором постулируется тождественность гравитационной и инертной масс.

Частное решение этих уравнений можно искать в виде линейной комбинации с произвольными постоянными коэффициентами членов $1/r$, $\partial_p(1/r)$ и $\partial_p\partial_q(1/r)$ ¹⁾. В результате получим

$$\gamma_{200} = -\frac{4a}{r}, \quad a = \text{const}, \quad (12.77)$$

тогда как остальные компоненты $\gamma_{2\mu\nu}$ равны нулю. Таким образом, с учетом определений (12.33) и (12.30), получим

$$h_{200} = \gamma_{200} - \frac{1}{2} \eta_{00} \gamma_{200} = \frac{1}{2} \gamma_{200}, \quad (12.78)$$

$$h_{2pq} = \gamma_{2pq} - \frac{1}{2} \eta_{pq} \gamma_{200} = \frac{1}{2} \delta_{pq} \gamma_{200}. \quad (12.79)$$

Следовательно, отличны от нуля только

$$h_{211} = h_{222} = h_{233} = h_{200} = -\frac{2a}{r}. \quad (12.80)$$

Или, согласно (12.10),

$$U = -\frac{c^2}{2} h_{00} = -\frac{1}{2} h_{200} = -\frac{1}{4} \gamma_{200} = \frac{a}{r}.$$

Поэтому для потенциала, создаваемого массой m' , положим

$$a = Gm', \quad (12.81)$$

так что

$$\frac{a}{r} = \frac{Gm'}{r} = U. \quad (12.82)$$

Для используемых координат в данном приближении

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} h_{\mu\nu} + 0(\epsilon^4).$$

Значение ds^2 , соответствующее (12.80), примет простой вид

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)c^2 dt^2. \quad (12.83)$$

2. Гравитационные волны. Если перейти к рассмотрению нестатических решений для пустого пространства, то можно предвидеть существование гравитационных волн, возникающих при быстром изменении гравитационного поля. Таким волнам нет аналога в ньютоновской теории.

Если ограничиться приближенными уравнениями

$$\square \gamma_{\mu\nu} = 0, \quad (12.84)$$

¹⁾ См., например, книгу Бергмана [106], где приводятся разложения решений уравнений (12.76) и (12.37).

то можно будет найти решения в виде плоских волн. Плоская волна, распространяющаяся вдоль оси Ox , характеризуется решениями вида

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}(x^1 - x^0). \quad (12.85)$$

Координатные условия дают возможность ввести дальнейшие ограничения. Можно показать¹⁾, что в результате преобразования координат плоские волны оказывается возможным описывать таким образом, что отличными от нуля будут только компоненты

$$\gamma_{22} = -\gamma_{33} \quad \text{или} \quad \gamma_{23}. \quad (12.86)$$

Впрочем, если оси координат повернуть вокруг Ox на угол $\pi/4$, то второй тип волн сведется к случаю, когда отличны от нуля только компоненты $\gamma_{22} = -\gamma_{33}$.

Если рассматривать точные уравнения гравитационного поля, то для них решений в виде плоских волн больше уже не существует. Вместе с тем для таких уравнений существуют точные решения в виде цилиндрических волн. Эти волны в 1937 г. изучались Эйнштейном и Розеном [163] и позднее, уже в 1957 г., Боннором [164]. Бергман [106] предложил следующее объяснение отсутствия плоских гравитационных волн: эти волны переносят энергию, создающую стационарное гравитационное поле.

Таким образом, согласно основным положениям теории, это приводит к изменению геометрии. Плоская волна переносит энергию, которая во всех точках конечна, и деформация пространства — времени (по отношению к евклидову пространству) может возрастать во всех направлениях до бесконечности.

Отметим, что гравитационные волны не были обнаружены на опыте, и до настоящего времени они представляют значительный интерес главным образом с чисто теоретической точки зрения²⁾.

§ 5. Уравнения поля и движение источников

Уравнения гравитационного и электромагнитного полей относятся к уравнениям разного типа, и из них вытекают различные следствия. В первом случае уравнения нелинейны: в них входят произведения гравитационных потенциалов и производных от них первого порядка. Во втором случае мы имеем дело с системой линейных уравнений, в которой не содержатся произведения на-

¹⁾ См. также исследование плоских волн в книге Бергмана [106].

²⁾ Обратим внимание на результаты, недавно полученные Пирани [165] и Лихнеровичем [166].

пряженностей или производных от них первого порядка, по крайней мере в пределе, когда применим формализм теории Максвелла.

Следовательно, в обеих теориях связь между полем и источниками будет далеко не одинакова.

Рассмотрим, например, систему заряженных частиц. В принципе полное электромагнитное поле можно отделить от создаваемого частицей полного поля. В самом деле, напряженности каждого из этих полей, а также их разность, являются решениями линейной системы уравнений электромагнитного поля¹⁾. С другой стороны, выражение для силы, действующей на заряженную частицу (сила Лоренца), совершенно не зависит от уравнений Максвелла. Поэтому введение силы неэлектромагнитного происхождения не приведет к изменению уравнений поля.

В противоположность этому, невозможно провести строгое отделение гравитационного поля, действующего на определенную частицу, от полного поля, создаваемого системой частиц. Разность между двумя этими полями не будет являться решением нелинейных уравнений гравитационного поля. Кроме того, уравнения поля не независимы по отношению к силе притяжения, действующей на тяжелую частицу: если на эту частицу действует сила негравитационного происхождения, то она изменит тензор $T_{\mu\nu}$, а следовательно, и уравнения поля.

Движение частицы, которое в классической электродинамике уравнениями поля не определяется, в нелинейной теории, какой является общая теория относительности, оказывается, таким образом, тесно связанным с уравнениями поля. И действительно, двумя совершенно различными способами можно показать, что уравнения движения незаряженной частицы выводятся из нелинейных уравнений гравитационного поля. При этом уравнения движения принимают вид условий, которые с необходимостью должны выполняться в любом приближении, чтобы имели место соответствующие уравнения поля.

1. Вывод уравнений движения из уравнений поля без правой части или метод сингулярностей. *а) Уравнения поля в приближениях различных порядков.* Метод сингулярностей был развит главным образом в работах Эйнштейна, Инфельда и Гофмана [167—172]²⁾. Он относится к уравнениям поля для *пустого пространства*, где тензор вещества $M_{\mu\nu}$ равен нулю. При этом источники рассматриваются в качестве сингулярностей поля, а уравнения без правой части имеют место для пространства, из которого с помощью замкнутых поверхностей исключены области, прилегающие к сингулярностям.

¹⁾ Фактически разделение поля на две части не является однозначным

²⁾ См. также диссертацию Фам Тан-хонга [173].

Уравнения поля (11.83)

$$G_{\mu\nu} = 0$$

оказывается удобным заменить эквивалентной системой уравнений

$$S_{\mu\nu}^* \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} G_{\rho\sigma} = 0, \quad (12.87)$$

где в соответствии с (12.1) и (12.2) положено

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} (-1, -1, -1, +1). \quad (12.88)$$

При подстановке (12.88) в (12.87) появляются выражения

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}, \quad (12.89)$$

которые в приближении второго порядка определяются согласно (12.32). Подставляя (12.88) в (12.87), получаем следующую систему уравнений ¹⁾:

$$\partial_p^2 \gamma_{00} + 2\Lambda_{00} = 0, \quad (12.90a)$$

$$\partial_p^2 \gamma_{0r} - \partial_p \partial_r \gamma_{0p} + 2\Lambda_{0r} = 0, \quad (12.90б)$$

$$\partial_p^2 \gamma_{rs} - \partial_p \partial_r \gamma_{ps} - \partial_p \partial_s \gamma_{pr} + \delta_{rs} \partial_p \partial_q \gamma_{pq} + 2\Lambda_{rs} = 0, \quad (12.90в)$$

где

$$2\Lambda_{00} = -\partial_p \partial_q \gamma_{pq} + G'_{pp} + G'_{00}, \quad (12.91a)$$

$$2\Lambda_{0r} = \partial_r \partial_0 \gamma_{00} - \partial_0 \partial_p \gamma_{pr} + 2G'_{0r}, \quad (12.91б)$$

$$2\Lambda_{rs} = \partial_0^2 (\delta_{rs} \gamma_{00} - \gamma_{rs}) - 2\delta_{rs} \partial_0 \partial_p \gamma_{p0} + \\ + \partial_0 \partial_r \gamma_{s0} + \partial_0 \partial_s \gamma_{r0} + 2 \left(G'_{rs} + \frac{1}{2} \delta_{rs} (G'_{00} - G'_{pp}) \right). \quad (12.91в)$$

Величины $G'_{\mu\nu}$ являются выражениями, квадратичными по отношению к $g_{\mu\nu}$ и к производным от них первого порядка.

Если гравитационное поле все время считать слабым ($h_{\mu\nu} \ll 1$), то можно воспользоваться квази-галилеевой системой отсчета и при этом, как и в (12.22), разложить $g_{\mu\nu}$ в ряд по степеням бесконечно малого параметра $\epsilon = 1/c$. В соответствии с результатами предыдущего параграфа для $\gamma_{\mu\nu}$ получим разложения вида

$$\gamma_{00} = \epsilon^2 \gamma_{00}^2 + \dots + \epsilon^{2l-2} \gamma_{00}^{2l-2} + 0 (\epsilon^{2l}), \quad (12.92a)$$

$$\gamma_{0p} = \epsilon^3 \gamma_{0p}^3 + \dots + \epsilon^{2l-1} \gamma_{0p}^{2l-1} + 0 (\epsilon^{2l+1}), \quad (12.92б)$$

$$\gamma_{pq} = \epsilon^4 \gamma_{pq}^4 + \dots + \epsilon^{2l} \gamma_{pq}^{2l} + 0 (\epsilon^{2l+2}). \quad (12.92в)$$

¹⁾ Везде в этом параграфе при наличии одинаковых индексов подразумевается суммирование, включая даже и тот случай, когда оба одинаковых индекса расположены сверху или внизу.

Подставим эти выражения в (12.90) и ограничимся *квазистатическим приближением*, т. е. предположим, что порядок величины производных $\partial_0 = (1/c)(\partial/\partial t)$ на единицу выше порядка величины производных $\partial_p = \partial/\partial x^p$. При этом допущении (12.90) приводится к приближенным уравнениям порядка l :

$$\frac{\partial_p^2 \gamma_{00}}{2l-2} + \frac{2\Lambda_{00}}{2l-2} = 0, \quad (12.93a)$$

$$\frac{\partial_p^2 \gamma_{0r}}{2l-1} - \partial_p \partial_r \gamma_{0p} + \frac{2\Lambda_{0r}}{2l-1} = 0, \quad (12.93б)$$

$$\frac{\partial_p^2 \gamma_{rs}}{2l} - \partial_p \partial_r \gamma_{ps} - \partial_p \partial_s \gamma_{pr} + \delta_{rs} \partial_p \partial_q \gamma_{pq} + \frac{2\Lambda_{rs}}{2l} = 0. \quad (12.93в)$$

б) *Интегрирование уравнений поля*. Предположим, что вещество состоит из $1, \dots, k, \dots, n$ сингулярностей и проинтегрируем уравнения (12.93) по замкнутой поверхности S , окружающей все сингулярности, соответствующие координатам ξ^p .

Из уравнения (12.93а), в котором значение Λ_{00} известно в приближении любого порядка, можно найти γ_{00} , но при этом в приближении $2l-2$ порядка γ_{00} можно определить лишь с точностью до функции $\psi = 1/r$. Поэтому можно ожидать появления k полюсов ($\bar{\gamma}_{00}^{(p)}$) и k диполей ($\bar{\gamma}_{00}^{(d)}$), проявляющихся в решениях

$$\bar{\gamma}_{00} = \bar{\gamma}_{00}^{(p)} + \bar{\gamma}_{00}^{(d)}. \quad (12.94)$$

Следовательно, одним из решений (12.93а) будет

$$\bar{\gamma}'_{00} = \bar{\gamma}_{00} + \bar{\gamma}_{00}', \quad (12.95)$$

где чертой сверху обозначаются решения, соответствующие наличию сингулярностей.

Чтобы найти решения при наличии частиц, предположим, что величины $\bar{\gamma}_{00}^{(p)}$ и $\bar{\gamma}_{00}^{(d)}$, соответствующие полюсам и диполям, имеют вид

$$\bar{\gamma}_{00}^{(p)} = -4 \frac{m^k \psi^k}{2l-2}, \quad (12.96)$$

$$\bar{\gamma}_{00}^{(d)} = -S_r^k \partial_r \psi^k, \quad (12.97)$$

где m^k и S_r^k — функции от времени, а ψ^k — функция от координат (ξ^p) k -го диполя, имеющая вид

$$\psi^k = \frac{1}{r^k}, \quad \text{где} \quad \left(r^k\right)^2 = \left(x^p - \xi^p\right) \left(x^p - \xi^p\right). \quad (12.98)$$

Проинтегрируем теперь (12.93б) и (12.93в) по поверхности S , причем для учета влияния сингулярностей заменим $\gamma_{\mu\nu}$ и $\Lambda_{\mu\nu}$ на $\gamma'_{\mu\nu}$ и $\Lambda'_{\mu\nu}$.

Прежде всего отметим, что члены в (12.93б) и (12.93в), отличные от $\Lambda'_{\mu r}$, в поверхностный интеграл не вносят никакого вклада. Действительно, эти члены всегда могут быть записаны в виде

$$\partial_p \{F_{\mu [rp]}\} = \partial_p \{\partial_p \gamma_{\mu r} - \partial_r \gamma_{\mu p} + \delta_{\mu r} \partial_s \gamma_{ps} - \delta_{\mu p} \partial_s \gamma_{rs}\}, \quad (12.99)$$

где $F_{\mu [rp]}$ антисимметричны по отношению к r и p . Что же касается интеграла по поверхности от дивергенции $F_{\mu [rp]}$, то он тождественно равен нулю.

Таким образом, мы должны будем взять поверхностные интегралы только от выражений $\Lambda'_{\mu r}$, после чего эти интегралы следует приравнять нулю. Уравнения (12.93б) и (12.93в) можно будет проинтегрировать, если

$$\frac{1}{4\pi} \int \Lambda'_{\mu r} n_r dS \equiv \frac{1}{4\pi} \int \Lambda_{\mu r} n_r ds + \frac{1}{4\pi} \int \bar{\Lambda}_{\mu r} n_r dS = 0, \quad (12.100)$$

где $\Lambda_{\mu r}$ соответствуют решениям без сингулярностей; $\bar{\Lambda}_{\mu r}$ учитывают роль сингулярностей, включая полюса и диполи, а n_r являются компонентами единичного вектора, направленного по нормали к поверхности в точке x^r :

$$n_r = \cos(\widehat{x^r, \mathbf{n}}). \quad (12.101)$$

Рассмотрим сначала интеграл, содержащий $\Lambda_{\mu r}$. Можно показать, что он не зависит от формы поверхности S , а зависит только от времени.

В самом деле, предположим, что в приближении порядка $2l-2$ уравнения поля выполняются

$$S_{2l-2}^{\mu, \nu} = 0. \quad (A)$$

В этом случае тождества (11.84), имеющие место для $S_{2l-1}^{\mu, \nu}$ и соответствующие законам сохранения, сводятся к

$$\partial_r S_{2l-1}^{0r} = 0, \quad (B)$$

так как добавочные члены, входящие в эти тождества, выражаются через члены $S_{2l-2}^{\mu, \nu}$, которые, согласно (A), равны нулю. Если принять во внимание уравнения (A) и определение $S_{\mu, \nu}^*$ (12.87), то в приближении порядка $2l-2$ условие (B) запишется также в виде $\partial_r S_{0r} = 0$. Точное выражение для S_{0r}^* определяется по (12.90б), в связи с чем из условия (B) с необходимостью следует

$$\partial_r \Lambda_{0r} = 0. \quad (B)$$

Если наряду с уравнениями (А) к числу уравнений поля отнести также уравнения

$$S_{0m} = 0, \quad (\Gamma)$$

то из тождеств, соответствующих законам сохранения, в применении к S_{rs} аналогичным путем получим

$$\partial_r S_{rs} = 0, \quad (\Delta)$$

так как другие члены из-за уравнений поля (А) и (Г) обращаются в нуль. Наконец, условие (Д) эквивалентно условию $\partial_r S_{rs} = 0$ или, в соответствии с выражением (12.90в) для S_{rs}^* , условию

$$\partial_r \Lambda_{rs} = 0. \quad (\text{Е})$$

Следовательно, четыре тождества, соответствующие законам сохранения, приводят к тому, что из справедливости уравнений поля вплоть до порядков $2l - 2$ и $2l - 1$ вытекают условия (В) и (Е), имеющие место в приближении порядка $2l - 1$ и $2l$.

Эти условия, которые всегда выполняются из-за уравнений поля, выражают тот факт, что поверхностные интегралы от $\Lambda_{\mu r}$ не зависят от формы поверхности, а зависят только от времени. Таким образом, (12.102) являются следствием тождеств (11.84), соответствующих законам сохранения.

Таким образом,

$$\frac{1}{4\pi} \int \Lambda_{\mu r} n_r ds \equiv c_\mu(\tau), \quad (12.102)$$

и условие интегрируемости (12.100) принимает вид

$$c_\mu(\tau) = -\frac{1}{4\pi} \int \bar{\Lambda}_{\mu r} n_r dS, \quad (12.103)$$

где $c_\mu(\tau)$ в общем случае не равно нулю. Именно из-за этого обстоятельства условия интегрируемости (12.93) требуют введения полюсов и диполей.

При дополнительных условиях $S_r = 0$, которые в приближении порядка $2l - 2$ приводят к исключению диполей, уравнениями (12.103) обеспечивается интегрируемость (12.93в). В приближении порядка $2l$ этими тремя условиями определяется движение сингулярностей. Таким образом, уравнения движения сингулярностей вытекают из условий интегрируемости уравнений поля (12.93) в приближении соответствующего порядка.

в) *Выбор системы координат.* Специальным выбором координат можно упростить уравнения поля и облегчить их интегрирование. Возможность подобного выбора связана с наличием четы-

рех произвольных величин, существующих в приближении любого порядка ¹⁾.

Рассмотрим, например, систему изотермических координат, определяемую следующими условиями [см. (12.18)]:

$$g_{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu, \nu \end{matrix} \right\} = 0 \quad \text{или} \quad \partial_\rho (\sqrt{-g} g^{\mu\rho}) = 0. \quad (12.104)$$

Нетрудно убедиться, что для $l=2$ уравнения (12.104) в первом приближении дают

$$\partial_0 \gamma_{00} - \partial_p \gamma_{0p} = 0, \quad (12.105a)$$

$$\partial_0 \gamma_{0r} - \partial_s \gamma_{rs} = 0. \quad (12.105b)$$

Поэтому воспользуемся такой системой координат, для которой справедливы уравнения (12.105) ²⁾.

При таком выборе координат уравнения поля (12.93a) — (12.93в) принимают более простой вид:

$$\partial_p^2 \gamma_{00} + 2\Lambda_{00} = 0, \quad (12.106a)$$

$$\partial_p^2 \gamma_{0r} - \partial_p \partial_r \gamma_{0p} + 2\Lambda_{0r} = 0, \quad (12.106b)$$

$$\partial_p^2 \gamma_{rs} - \partial_r \partial_0 \gamma_{0s} - \partial_s \partial_0 \gamma_{0r} + \delta_{rs} \partial_p \partial_0 \gamma_{0p} + 2\Lambda_{rs} = 0, \quad (12.106в)$$

где

$$\frac{2\Lambda_{00}}{2l-2} = -\partial_p \partial_0 \gamma_{0p} + \frac{G'_{pp}}{2l-2} + \frac{G'_{00}}{2l-2}, \quad (12.107a)$$

$$\frac{2\Lambda_{0r}}{2l-1} = \partial_0 \partial_r \gamma_{00} - \frac{\partial_0^2 \gamma_{0r}}{2l-3} + \frac{2G'_{0r}}{2l-1}, \quad (12.107b)$$

¹⁾ Если γ_{00}^* , γ_{0m}^* и γ_{mn}^* являются решениями (12.93), то

$$\gamma_{00} = \gamma_{00}^*$$

$$\gamma_{0m} = \gamma_{0m}^* + \partial_m a_0$$

$$\gamma_{mn} = \gamma_{mn}^* + \partial_n a_m - \partial_m a_n - \delta_{mn} \partial_r a_r + \delta_{mn} \partial_0 a_0$$

при произвольных a_m , a_0 также будут решениями (12.93).

²⁾ У Эйнштейна и Инфельда были выбраны условия

$$\partial_0 \gamma_{00} - \partial_r \gamma_{0r} = 0, \quad \partial_r \gamma_{rs} = 0.$$

Вычисления, основанные на условиях изотермичности (12.104), приближенно представляемых в виде (12.105), проводились в диссертации Фам Тан-хонга [173].

$$2\Lambda_{2lrs} = -\frac{\partial_0^2}{2}(\delta_{rs}\gamma_{2l-2}^{00} + \gamma_{2l-2}^{rs}) + \partial_0 \partial_r \gamma_{2l-1}^{s0} + \partial_0 \partial_s \gamma_{2l-1}^{r0} + \\ + 2 \left[G'_{2lrs} + \frac{1}{2} \delta_{rs} (G'_{2l00} - G'_{2lpp}) \right]. \quad (12.107в)$$

2) *Приближение второго порядка.* В приближении второго порядка ($l=2$) из (12.107а) — (12.107в) и (12.92а) — (12.92в) получим

$$2\Lambda_{200} = 0, \quad (12.108а)$$

$$2\Lambda_{20r} = \partial_0 \partial_r \gamma_{200}, \quad (12.108б)$$

$$2\Lambda_{2rs} = -\frac{\partial_0^2}{4} \delta_{rs} \gamma_{200} + \partial_0 \partial_r \gamma_{20s} + \\ + \partial_0 \partial_s \gamma_{20r} + \frac{1}{4} \partial_r \gamma_{200} \partial_s \gamma_{200} + \frac{1}{2} \gamma_{200} \partial_{rs}^2 \gamma_{200} - \frac{3}{8} \delta_{rs} \partial_p \gamma_{200} \partial_p \gamma_{200}, \quad (12.108в)$$

где три последние члена являются вкладом от $G'_{\mu\nu}$.

Подставляя (12.108а) и (12.108б) соответственно в (12.106а) и 12.106б) и учитывая (12.105а), получаем уравнения

$$\partial_p^2 \gamma_{200} = 0, \quad (12.109а)$$

$$\partial_p^2 \gamma_{20r} = 0, \quad (12.109б)$$

которые при отсутствии сингулярностей допускают решения

$$\gamma_{200} = 0, \quad \gamma_{20r} = 0. \quad (12.110)$$

Отсюда с учетом (12.108) следует, что интегралы (12.102) равны нулю

$$c_0(\tau) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \Lambda_{0r} n_r dS = 0, \quad c_4(\tau) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \Lambda_{rs} n_s dS = 0. \quad (12.111)$$

В приближении второго порядка уравнения движения, таким образом, имеют вид

$$c_0(\tau) \equiv -\frac{1}{4\pi} \int \bar{\Lambda}_{0r} n_r dS = 0, \quad (12.112)$$

$$c_4(\tau) \equiv -\frac{1}{4\pi} \int \bar{\Lambda}_{rs} n_s dS = 0. \quad (12.113)$$

В этом приближении они являются условиями интегрируемости уравнений (12.93б) и (12.93в).

Рассмотрим теперь решение уравнения (12.93а):

$$\bar{\gamma}_{00}^{\dot{k}k} = -4m\dot{\psi}^{\dot{k}k}, \quad (12.114)$$

соответствующее существованию \dot{k} полюсов и отсутствию диполей. В этом случае $\dot{\psi}^{\dot{k}k}$ имеют вид (12.98), а $\dot{m}^{\dot{k}k}$ является функцией от $\tau = x$. После подстановки в (12.108) получим

$$2\bar{\Lambda}_{0r}^{\dot{k}k} \approx -4\partial_r \left(\dot{m}^{\dot{k}k} \right), \quad (12.115)$$

где мы полагаем

$$\dot{m}^{\dot{k}k} = \frac{\partial \dot{m}^{\dot{k}k}}{\partial \tau} \quad (12.116)$$

и пренебрегаем членами более высокого порядка малости, чем $(\dot{r}^{\dot{k}k})^{-2}$. Согласно (12.98), такими членами будут

$$\partial_0 \dot{\psi}^{\dot{k}k} = \partial_0 \left(\frac{1}{\dot{r}^{\dot{k}k}} \right) = -\frac{1}{2(\dot{r}^{\dot{k}k})^3} \partial_0 (\dot{r}^{\dot{k}k})^2 = \frac{(x^p - \dot{\xi}^p)^{\dot{k}k}}{(\dot{r}^{\dot{k}k})^3} \dot{\xi}^p = -\frac{\dot{\xi}^p}{\dot{\xi}^p} \partial_p \dot{\psi}^{\dot{k}k}, \quad (12.117)$$

где

$$\dot{\xi}^p = \frac{\partial \dot{\xi}^p}{\partial \tau}. \quad (12.118)$$

Подставляя (12.115) в (12.112), непосредственно получаем, что это уравнение будет выполняться, если

$$\dot{m}^{\dot{k}k} = 0, \quad \dot{m}^{\dot{k}k} = \text{const}. \quad (12.119)$$

Для приближения $l=2$ массы не зависят от времени.

Теперь обратимся к условию (12.113), которое соответствует уравнениям движения. Для нахождения $\bar{\Lambda}_{rs}$ нужно, согласно (12.108в), наряду с $\bar{\gamma}_{00}^{\dot{k}k}$ знать также выражение для $\bar{\gamma}_{0r}^{\dot{k}k}$.

В приближении (12.105) условия изотермичности дают

$$\partial_p \bar{\gamma}_{0p}^{\dot{k}k} = \partial_0 \bar{\gamma}_{00}^{\dot{k}k} = -4m \partial_0 \dot{\psi}^{\dot{k}k}. \quad (12.120)$$

Поэтому с учетом (12.117) получим

$$\partial_p \bar{\gamma}_{0p}^{\dot{k}k} = 4m \dot{\xi}^p \partial_p \dot{\psi}^{\dot{k}k}, \quad (12.121)$$

т. е.

$$\bar{\gamma}_{0p} = 4m \frac{k}{2} \frac{k}{1} \frac{k}{p} \psi, \quad (12.122)$$

и (12.108в) принимает простой вид

$$\bar{\Lambda}_{rs} = 2m \partial_0 \partial_s \frac{k}{2} \frac{k}{1} \frac{k}{r} \psi + 2 \partial_r U \partial_s U + 4U \partial_{rs}^2 U - 3 \delta_{rs} \partial_p U \partial_p U, \quad (12.123)$$

где

$$U = \frac{1}{4} \bar{\gamma}_{00} = -Gm \frac{k}{2} \psi. \quad (12.124)$$

Чтобы найти квадратичные члены, разложим функцию U в окрестности точки $x^p = \xi^p$.

Для $l \neq k$ получим

$$U = \tilde{U} + (x^p - \xi^p) \tilde{\partial}_p U + \frac{1}{2!} (x^p - \xi^p)(x^q - \xi^q) \tilde{\partial}_{pq}^2 U + \dots, \quad (12.125)$$

где волнистая черта означает, что U , $\partial_p U$ и $\partial_{pq}^2 U$ определяются в точке $x^p = \xi^p$.

Вычисляя различные члены в (12.123), находим

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{rs} \approx 2m \partial_s \frac{k}{2} \frac{k}{1} \frac{k}{r} \psi + 2 \left(\partial_r \tilde{U} \sum_l' \tilde{\partial}_s U + \partial_s \tilde{U} \sum_l' \tilde{\partial}_r U \right) + \\ + 4 \partial_{rs} \tilde{U} \sum_l' (x^p - \xi^p) \tilde{\partial}_p U - 6 \delta_{rs} \partial_p \tilde{U} \sum_l' \tilde{\partial}_p U, \end{aligned} \quad (12.126)$$

где мы пренебрегли членами более высокого порядка малости и через \sum_l' обозначили символ суммирования по $l \neq k$.

Проинтегрируем (12.126) по поверхности S с центром в $x^p = \xi^p$. В результате получим

$$c_r(\tau) = -\frac{1}{4\pi} \int \bar{\Lambda}_{rs} n_s dS = -2Gm \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} \xi^r + \sum_l' \tilde{\partial}_r U \right). \quad (12.127)$$

Таким образом, для $l=2$ условие (12.113) запишется в виде

$$\boxed{\frac{k}{2} \xi^r = - \sum_l' \tilde{\partial}_r U.} \quad (12.128)$$

Это есть не что иное, как уравнения движения классической механики: на материальную точку с координатами $x^p = \xi^p$

действует сила, определяемая заданием потенциала $-\sum_t U^t$.

Переходя к последующим приближениям, где приходится иметь дело с вычислениями, аналогичными приведенным выше, из уравнений поля можно найти уравнения движения в приближении более высокого порядка.

2. Вывод уравнений движения из уравнений поля с отличной от нуля правой частью или метод тензора энергии. Этот метод получения уравнений движения в основном связан с работами Дармуа [161] и Де-Дондера [162]. Различные способы нахождения решений были предложены в работах Фока [174], Паппетру [175], Петровой [176] и Хеннекена [177]¹⁾.

В основу берутся уравнения поля для случая непрерывного распределения незаряженного и неполяризованного вещества. Как и в § 3, можно предположить, что вещество аналогично идеальной жидкости и что его вклад определяется тензором вещества

$$M_{\mu\nu} = (\rho_0 c^2 + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}. \quad (12.129)$$

Уравнения поля в данном случае принимают вид

$$S_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \chi M_{\mu\nu}. \quad (12.130)$$

Воспользуемся системой изотермических координат, определяемых условиями (12.18). Выражение для $S_{\mu\nu}$ в этих координатах уже было вычислено в § 2. При этом уравнения поля имеют вид (12.21).

Далее перейдем к квази-галилеевой системе отсчета, что дает возможность разложить $g_{\mu\nu}$ по формулам (12.22) и записать уравнения (12.130) в приближении любого порядка. В приближении второго порядка эти уравнения совпадают с (12.47), и их решения, найденные в § 3, будут определяться формулами (12.52), (12.54) и (12.69), т. е. ²⁾

$$h_{2pq} = -2\delta_{pq} \sum_A U_A, \quad h_{200} = -2 \sum_A U_A, \quad (12.131)$$

$$h_{p0} = 4 \sum_A v^p U_A, \quad (12.132)$$

¹⁾ См. также В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, М. — Л., 1955. — *Прим. перев.*

²⁾ Здесь мы обозначаем через a^p координаты центра тяжести тел A . Если пользоваться методом сингулярностей, то этим координатам будут соответствовать ξ^p , обозначающие координаты k -го тела. Отсюда следует, что величинам ξ^p и $G \sum' m^k$ соответствуют \ddot{a}^p и $\sum' U_B(A)$. Чтобы облегчить чтение оригинальных работ, мы сохраняем оба способа обозначений (каждый из которых имеет свои преимущества).

где U_A — потенциал, создаваемый телом A с плотностью μ_A . Этот потенциал подчиняется уравнению

$$\Delta U_A = -\frac{\chi}{2} c^4 \mu_A = -4\pi G \mu_A. \quad (12.133)$$

После того как $h_{\mu\nu}$ будут определены для приближений различных порядков, значения (12.131) и (12.132) могут быть подставлены в уравнения движения идеальной жидкости. Движение незаряженной идеальной жидкости, которая находится в гравитационном поле, характеризуемом потенциалами $g_{\mu\nu}$, описывается уравнением (8.194), в котором $F_p = 0$. Таким образом, получим

$$\frac{d}{dt} \int \mathcal{M}_p^0 d\mathcal{V} = \frac{c}{2} \int \mathcal{M}^{\rho\sigma} \partial_p g_{\rho\sigma} d\mathcal{V}. \quad (12.134)$$

Ограничиваясь приближением второго порядка, будем иметь

$$\frac{1}{c} \mathcal{M}_p^0 = \frac{\sqrt{-g}}{c} (\mu_0 c^2 + p) u_p u^0 \approx -\mu_0 v^p \quad (12.135)$$

и

$$\mathcal{M}^{\rho\sigma} \partial_p g_{\rho\sigma} = \sqrt{-g} [(\mu_0 c^2 + p) u^{\rho} u^{\sigma} \partial_p g_{\rho\sigma} - p g^{\rho\sigma} \partial_p g_{\rho\sigma}] \approx -2\mu_0 \partial_p U, \quad (12.136)$$

где приняты во внимание соотношения (8.191) и (12.52) и учтены выражения для u_p и u_0 , найденные в (12.41).

Таким образом, в приближении второго порядка движение тела A , определяемое по (12.134), описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt} \int \mu_A^A v_p^A d\mathcal{V}_A = \int \mu_A \partial_p U d\mathcal{V}_A. \quad (12.137)$$

В данном приближении¹⁾

$$m_A = \int \mu_A d\mathcal{V}_A \quad (12.138)$$

и v_p^A в пределах тела A остаются постоянными. Таким образом, (12.137) записывается в виде

$$\frac{d}{dt} (m_A v_p^A) = \int \mu_A \partial_p U d\mathcal{V}_A. \quad (12.139)$$

Потенциал U имеет вид

$$U = U_A + \sum' U_B(A), \quad (12.140)$$

¹⁾ Для массы было бы естественно принять определение (8.187), вытекающее из уравнений сохранения. Однако для приближения, рассматриваемого в настоящем параграфе, это определение эквивалентно (12.138).

где U_A — потенциал, создаваемый в точке $x(A)$ самим телом A ; $U_B(A)$ — потенциал, создаваемый в точке $x(A)$ телами B и в пределах A остающийся практически постоянным; \sum' — символ суммирования по всем телам, за исключением тела A . Из (12.140), таким образом, имеем

$$\int \mu_A \partial_p U d\mathcal{V}_A = m_A \partial_p (\sum' U_B(A)) + \int \mu_A \partial_p U_A d\mathcal{V}_A \quad (12.141)$$

и движение тела A определяется из уравнения

$$m_A \ddot{a}^p = m_A \partial_p (\sum' U_B(A)) + \int \mu_A \partial_p U_A d\mathcal{V}_A, \quad (12.142)$$

где через a^p обозначены координаты центра тяжести тела A .

Если тело A обладает сферической симметрией, то уравнение (12.142) упрощается. В этом случае

$$\partial_p U_A = \frac{\partial U_A}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x^p} = \frac{\partial U_A}{\partial r} \frac{x^p - a^p}{r}, \quad (12.143)$$

где

$$r^2 = (x^p - a^p)(x^p - a^p). \quad (12.144)$$

Поэтому

$$\int \mu_A \partial_p U_A d\mathcal{V}_A = \int \mu_A \frac{\partial U_A}{\partial r} \frac{x^p - a^p}{r} d\mathcal{V}_A = 0. \quad (12.145)$$

Таким образом, уравнения движения, которые общая теория относительности дает возможность получить из уравнений поля, согласно (12.142), записываются в виде

$$\ddot{a}^p = \partial_p (\sum' U_B(A)). \quad (12.146)$$

Эти уравнения совпадают с ньютоновскими уравнениями движения.

В приближениях более высокого порядка вычисления проводились в работах уже упоминавшихся авторов [174—177]. Результаты оказываются аналогичными тем, которые могут быть получены при помощи метода сингулярностей.

Б. ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ, ИМЕЮЩЕГО СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВИД; РЕШЕНИЕ ШВАРЦШИЛЬДА

§ 6. Гравитационное поле вблизи массы, обладающей сферической симметрией

Чтобы получить следствия из общей теории относительности, допускающие сравнение с опытом, исключительно важно определить точно гравитационное поле, создаваемое незаряженной массой,

обладающей сферической симметрией. Впервые такое поле было найдено Шварцшильдом [178] в 1916 г.

Фактически определяемое при этом решение лишь приближенно характеризует поле, создаваемое поблизости от большинства небесных тел. Вблизи таких тел структура риманова пространства полностью определяется элементарным интервалом

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu. \quad (12.147)$$

Чтобы уточнить вид $g_{\mu\nu}$, воспользуемся уравнениями гравитационного поля вблизи притягивающих масс, т. е. десятью дифференциальными уравнениями

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{\rho} = \partial_\rho \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} - \partial_\nu \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} = 0. \quad (12.148)$$

Эти уравнения, как известно, не являются независимыми: они связаны четырьмя тождествами (11.84). Поэтому уравнения (12.148) дают возможность определить $10 - 4 = 6$ гравитационных потенциалов. Произвол в выборе четырех компонент $g_{\mu\nu}$ связан с произволом в выборе системы координат.

Вычисление символов Кристоффеля

$$\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (12.149)$$

очень упрощается, если создающая поле масса обладает сферической симметрией. Тогда поблизости от этой массы ds^2 также обладает сферической симметрией, так что можно а priori уточнить вид ds^2 и уменьшить число подлежащих определению функций $g_{\mu\nu}$.

Действительно, выберем следующие переменные:

$$y^1 = r, \quad y^2 = \theta, \quad y^3 = \varphi, \quad y^0 = ct. \quad (12.150)$$

Для чисто статического случая риманов интервал ds^2 , обладающий сферической симметрией, можно записать в следующем виде:

$$ds^2 = -\alpha dr^2 - \beta (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \sigma c^2 dt^2. \quad (12.151)$$

В более общем виде можно искать такое обладающее сферической симметрией решение, что

$$ds^2 = g_{00} (dy^0)^2 + 2g_{p0} dy^p dy^0 + g_{pq} dy^p dy^q, \quad (A)$$

где координатами y^p определяется

$$r^2 = \sum_{p=1}^3 (y^p)^2.$$

Выражение (А) можно записать в виде

$$ds^2 = g_{00} (dy^0)^2 - g_{pq} dy^p dy^q, \quad (\text{Б})$$

где

$$g_{pq} = \delta_{pq} - D(r) \chi_p \chi_q, \quad \chi_p = \frac{y^p}{r}.$$

В результате получим следующее статическое решение:

$$g_{00}(r) = 1 - \frac{2Gm}{rc^2},$$

$$g_{pq} = -\delta_{pq} - \frac{2Gm/rc^2}{1 - (2Gm/rc^2)} \chi_p \chi_q, \quad g_{p0} = 0.$$

(См. книгу Бергмана [106].)

Если гравитационное поле отсутствует или если r стремится к бесконечности, то должны выполняться предельные условия

$$\alpha \rightarrow 1, \quad \beta \rightarrow r^2, \quad \sigma \rightarrow 1, \quad (12.152)$$

и выражение (12.151) для ds^2 будет соответствовать евклидову пространству, отнесенному к сферическим координатам. Задача об определении $g_{\mu\nu}$

$$g_{11} = -\alpha, \quad g_{22} = -\beta, \quad g_{33} = -\beta \sin^2 \theta, \quad g_{00} = \sigma \quad (12.153)$$

сводится, таким образом, к задаче об определении трех функций α , β и σ , которые в статическом случае будут функциями только от r .

Если с помощью (12.153) образовать символы Кристоффеля (12.149), а затем в соответствии с (12.148) приравнять нулю записанные с помощью этих символов компоненты тензора Риччи, то окажется, что одна из функций α , β или σ остается произвольной. Это обстоятельство, вытекающее из наличия тождеств (11.84), соответствующих законам сохранения, дает возможность произвольно выбрать α , β или σ ¹⁾. Обычно полагают

$$\beta = r^2. \quad (12.154)$$

Удобно воспользоваться обозначениями

$$\alpha = e^{2l}, \quad \sigma = e^{2n}. \quad (12.155)$$

Вычисляя символы Кристоффеля для случая, когда

$$g_{11} = -e^{2l}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{00} = e^{2n}, \quad (12.156)$$

¹⁾ Десять компонент $G_{\mu\nu}$ тензора Риччи сводятся сначала к трем компонентам, не зависящим в частном случае от интервала ds^2 , обладающего сферической симметрией. С другой стороны, десять тождеств (11.87) при тех же условиях сводятся к одному тождеству. Таким образом, существует $3 - 1 = 2$ независимых компоненты $G_{\mu\nu}$. Следовательно, можно записать лишь два уравнения Эйнштейна для трех функций α , β и σ .

получаем

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} &= l', & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} \cos^2 \theta = -re^{2l} \cos^2 \theta, \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 00 \end{matrix} \right\} &= n'e^{2(n-l)}, \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \right\} &= \sin \theta \cos \theta, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 13 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \\ \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 23 \end{matrix} \right\} &= -\operatorname{tg} \theta, & \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 10 \end{matrix} \right\} &= n'. \end{aligned} \right\} \quad (12.157)$$

Подставляя эти выражения в (12.148), находим, что компоненты тензора Риччи, которые тождественно не обращаются в нуль, будут только

$$G_{11} \equiv -n'' - n'^2 + l' \left(\frac{2}{r} + n' \right) = 0, \quad (12.158a)$$

$$G_{22} = \frac{G_{33}}{\cos^2 \theta} = 1 + re^{-2l} \left(l' - \frac{1}{r} - n' \right) = 0, \quad (12.158б)$$

$$G_{00} = e^{2(n-l)} \left(n'' + n'^2 - n' \left[l - \frac{2}{r} \right] \right) = 0. \quad (12.158в)$$

Складывая компоненту (12.158a), умноженную на $\exp [2(n-l)]$, с компонентой (12.158в), получаем

$$l' + n' = 0, \quad \text{т. е.} \quad \ln \alpha \sigma = \text{const.} \quad (12.159)$$

Отсюда имеем

$$\alpha \sigma = \text{const} = 1, \quad (12.160)$$

так как, согласно (12.152), при $r \rightarrow \infty$

$$\alpha \sigma \rightarrow 1.$$

Поэтому положим

$$l + n = 0. \quad (12.161)$$

После подстановки в (12.158б) получим два уравнения, которые сводятся к

$$e^{2n} (2rn' + 1) = 1 \quad (12.162)$$

и к соотношению, получаемому из (12.162) путем дифференцирования. Для выполнения предельных условий (12.159), имеющих место при $n' = 0$, нужно положить $k^2 = 1$. Таким образом, достаточно проинтегрировать (12.162), что дает

$$e^{2nr} = r - \frac{2a}{c^2}, \quad (12.163)$$

т. е.

$$\sigma = 1 - \frac{2a}{c^2 r} = \frac{1}{\alpha}, \quad (12.164)$$

где a/c^2 — постоянная интегрирования.

Таким образом, вблизи статической массы, обладающей сферической симметрией, для риманова интервала ds^2 имеется точное решение

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - (2a/rc^2)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2a}{rc^2}\right) c^2 dt^2. \quad (12.165)$$

Если r стремится к бесконечности, то это решение удовлетворяет предельным условиям (12.152), и интервал ds^2 становится евклидовым.

Вместо того чтобы выражать ds^2 в сферических координатах (12.150), можно взять координаты r_1 , θ , φ , где

$$r = \left(1 + \frac{a}{2r_1c^2}\right)^2 r_1. \quad (12.166)$$

При таком определении

$$dr = \left(1 - \frac{a^2}{4r_1^2c^4}\right) dr_1, \quad \sigma = \frac{\left(1 - \frac{a}{2r_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{a}{2r_1}\right)^2}. \quad (12.167)$$

Подставляя это выражение в (12.165), получаем

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{a}{2r_1c^2}\right)^4 (dr_1^2 + r_1^2 d\theta^2 + r_1^2 \sin^2\theta d\varphi^2) + \frac{\left(1 - \frac{a}{2r_1}\right)^2 c^2 dt^2}{\left(1 + \frac{a}{2r_1}\right)^2}. \quad (12.168)$$

Введем теперь так называемые *изотропные координаты*

$$x^1 = r_1 \sin\theta \cos\varphi, \quad y^1 = r_1 \sin\theta \sin\varphi, \quad z^1 = r_1 \cos\theta. \quad (12.169)$$

С их помощью выражение (12.168) для ds^2 можно записать в виде

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{a}{2r_1c^2}\right)^4 [(dx^1)^2 + (dy^1)^2 + (dz^1)^2] + \frac{\left(1 - \frac{a}{2r_1}\right)^2 c^2 dt^2}{\left(1 + \frac{a}{2r_1}\right)^2}. \quad (12.170)$$

Если r_1 достаточно велико, то ds^2 приближенно можно записать в виде

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) [(dx^1)^2 + (dy^1)^2 + (dz^1)^2] + \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dt^2, \quad (12.171)$$

где

$$U = \frac{a}{r_1}. \quad (12.172)$$

Выражение (12.171) совпадает с выражением (12.83) для ds^2 , полученным в § 4 с помощью приближенного метода. Потенциал U , входящий в (12.83), является ньютоновским потенциалом

$$U = \frac{KM'}{r}, \quad \text{т. е.} \quad a = KM'. \quad (12.173)$$

С другой стороны, постоянная интегрирования a , согласно (12.164), связана с характеристиками тел, создающих гравитационное поле; ею характеризуется инертная масса m' . Таким образом,

$$a = K_1 m', \quad M' = \frac{K_1}{K} m',$$

и закон Ньютона переписывается в виде

$$F = -K \frac{MM'}{r^2} = -\frac{K_1^2}{K} \frac{mm'}{r^2} = -G \frac{mm'}{r^2}.$$

Полагая $K_1 = K$, отсюда получаем

$$M' = m', \quad K_1 = K = G, \quad a = GM' = Gm',$$

т. е.

$$\sigma \approx \frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{2Gm}{c^2 r}. \quad (12.174)$$

Замечание. Вместо того чтобы рассматривать статический случай, можно было бы искать такие сферически-симметричные решения, которые зависят от времени. Тогда $g_{\mu\nu}$ будут функциями от r и t . Можно показать, что такого рода решение с необходимостью сводится к решению релятивистских уравнений для статического случая ¹⁾.

§ 7. Поле вблизи заряженной сферически-симметричной частицы

В данном случае уравнения гравитационного поля содержат отличную от нуля правую часть, характеризующую вклад электромагнитного поля. Предполагается, что при наличии этого поля для области, где вещество отсутствует, его вклад характеризуется тензором Максвелла $\tau_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} = -\varphi_{\mu\rho}\varphi_{\nu}^{\rho} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}. \quad (12.175)$$

Поэтому вместо (12.148) будем иметь

$$S_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = \chi T_{\mu\nu} = \chi\tau_{\mu\nu}. \quad (12.176)$$

¹⁾ См. Биркгоф [179] и Минер [180]; цель этой работы заключалась в том, чтобы представить гравитационное поле пульсирующих цефеид в виде сферически-симметричного нестатического решения.

Умножая (12.176) на $g^{\mu\nu}$ и суммируя, получаем

$$-G = \chi T, \text{ где } T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad (12.177)$$

или после подстановки в (12.176)

$$G_{\mu\nu} = \chi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (12.178)$$

Но нетрудно видеть, что инвариант τ , образованный из тензора Максвелла, тождественно равен нулю

$$\tau = g^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} = -\varphi_{\mu\rho} \varphi^{\mu\rho} + \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\mu} \varphi_{\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma} \equiv 0. \quad (12.179)$$

Таким образом, уравнения для области, в которой отсутствует вещество и имеется только электромагнитное поле, принимают вид

$$G_{\mu\nu} = \chi \tau_{\mu\nu}. \quad (12.180)$$

Ограничимся статическими решениями. Тогда в сферических координатах среди компонент напряженности электростатического поля отличны от нуля только

$$\varphi_{10} = \frac{e}{r^2}. \quad (12.181)$$

а неравные нулю компоненты $g_{\mu\nu}$ имеют вид (12.153). После подстановки в (12.175) получим

$$\tau_{11} = \frac{1}{4} g_{11} (2\varphi_{10} g^{11} g^{00} \varphi_{10}) - \varphi_{10} g^{00} \varphi_{10} = -\frac{1}{2} g^{00} \varphi_{10} \varphi_{10} = -\frac{1}{2\alpha} \frac{e^2}{r^4}, \quad (12.182a)$$

$$\tau_{22} = \frac{\tau_{33}}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{4} g_{22} (2\varphi_{10} g^{11} g^{00} \varphi_{10}) = \frac{1}{2\alpha} \frac{e^2}{r^2}, \quad (12.182b)$$

$$\tau_{00} = \frac{1}{4} g_{00} (2\varphi_{10} g^{11} g^{00} \varphi_{10}) - \varphi_{01} g^{11} \varphi_{01} = -\frac{1}{2} g^{11} \varphi_{01} \varphi_{01} = \frac{1}{2\alpha} \frac{e^2}{r^4}, \quad (12.182в)$$

тогда как все остальные $\tau_{\mu\nu}$ равны нулю. Эти выражения нужно подставить в правую часть уравнений (12.180). С помощью вычислений, аналогичных вычислениям, приведенным в предыдущем параграфе, приходим к следующему решению (Джеффри [181], Рас-снер [182], Вейль [183]):

$$\beta = r^2, \quad \sigma = \frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{2Gm}{c^2 r} + \frac{\chi e^2}{2r^2}. \quad (12.183)$$

Следовательно, постоянные e и m , характеризующие частицу, создающую гравитационное поле, вводятся совершенно различным образом; величина m есть постоянная интегрирования, появляющаяся при решении самих уравнений, а e вводится через посредство тензора Максвелла, т. е. постоянная e оказывается посторонней величиной по отношению к полю, которое она изменяет.

§ 8. Траектория незаряженной частицы вблизи статической сферически-симметричной массы

В гравитационном поле траекториями незаряженной частицы являются геодезические линии риманова пространства

$$\frac{d^2 y^\rho}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} = 0. \quad (12.184a)$$

В том частном случае, когда гравитационное поле создается статической сферически-симметричной массой, символы $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ целесообразно заменить их значениями, вычисленными с помощью потенциалов

$$g_{00} = -\frac{1}{g_{11}} = \left(1 - \frac{2mG}{c^2 r}\right), \quad g_{22} = \frac{g_{33}}{\sin^2 \theta} = -r^2. \quad (12.185)$$

Запишем (12.184) сначала для $\rho = 2$. Полагая $y^1 = r$, $y^2 = \theta$, $y^3 = \varphi$, получаем

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0. \quad (12.184б)$$

Систему координат выберем таким образом, чтобы в начальные моменты времени движение происходило в плоскости $\theta = \pi/2$, так что из начальных условий $d\theta/ds = 0$, $\cos \theta = 0$ будет следовать $d^2\theta/ds^2 = 0$. Тогда и для любых последующих моментов времени движение будет происходить в плоскости $\theta = \pi/2$. Уравнения (12.184) при $\rho = 3$ и $\rho = 0$ записываются в виде

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{ds} \frac{dr}{ds} = 0, \quad (12.184в)$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0 \quad \left(\sigma' = \frac{d\sigma}{dr}\right). \quad (12.184г)$$

В результате интегрирования получим

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{c}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{\sigma c^2}, \quad (12.186)$$

где h и k — две постоянные интегрирования.

Теперь можно проинтегрировать (12.184) для $\rho = 1$. При этом можно воспользоваться выражением (12.165) для ds^2

$$ds^2 = -\frac{1}{\sigma} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \sigma c^2 dt^2, \quad (12.187)$$

исключив из него dt и ds с помощью (12.186). Тогда получим

$$\frac{1}{\sigma} \left(\frac{h}{r^2 c} \frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2 c^2} - \frac{k^2}{\sigma c^2} = -1. \quad (12.188)$$

Положим теперь

$$\frac{1}{r} = u. \quad (12.189)$$

С учетом (12.174) выражение (12.188) запишется в виде

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + u^2 = -\frac{c^2}{h^2} \left(1 - \frac{k^2}{c^4}\right) + \frac{2Gm}{h^2} u + \frac{2Gm}{c^2} u^3. \quad (12.190)$$

Уравнение для траектории получается путем дифференцирования по φ и сравнения с (12.188)

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{Gm}{h^2} + \frac{3Gmu^2}{c^2}, \quad (12.191)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{c}, \quad (12.192)$$

или, согласно (12.186),

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{h\gamma c}{k} = \frac{hc}{k} \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right), \quad (12.193)$$

Эти уравнения с хорошим приближением применимы в задачах небесной механики. Вместе с тем они лишь в том случае могут служить для проверки общей теории относительности, если с их помощью можно будет получить предсказания, существенно отличающиеся от предсказаний, даваемых теорией Ньютона; тогда опытные данные дадут возможность с определенностью высказаться в пользу одной из этих двух теорий.

В ньютоновской механике уравнения, определяющие траекторию исследуемого тела, находящегося в создаваемом статической сферически-симметричной массой поле тяготения, имеют вид

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{Gm}{h^2}, \quad (12.194)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = h. \quad (12.195)$$

Они отличаются от уравнений (12.191) и (12.192), вытекающих из общей теории относительности, членом $(3Gm/c^2)u^2$. Если скорость исследуемого тела мала по сравнению с c , то в общем случае этот член будет слишком мал, чтобы возникающие от него поправки имели заметную величину. В самом деле

$$\frac{3Gmu^2/c^2}{Gm/h^2} = \frac{3h^2 u^2}{c^2} = 3 \left(r \frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 3 \left(\frac{r}{c} \frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \quad (12.196)$$

и величина $r(d\varphi/d\tau)$, равная тангенциальной составляющей скорости планеты, будет мала по сравнению с c .

Однако влияние дополнительного члена (12.191) можно обнаружить в некоторых частных случаях, которые мы и собираемся теперь рассмотреть.

§ 9. Опытная проверка пригодности решения Шварцшильда

1. Смещение перигелия планет в направлении движения.

Как мы уже отмечали, одно из главных несоответствий между предсказаниями ньютоновской механики и опытом относится к движению планеты Меркурий, перигелий которой смещается в направлении движения на 43 угловых секунды в столетие. Указанное предсказание получается из ньютоновского уравнения (12.194), решение которого имеет вид

$$u_0 = \frac{mG}{h^2} [1 + A \cos(\varphi - \bar{\omega})]; \quad (12.197)$$

здесь A и $\bar{\omega}$ — постоянные интегрирования, характеризующие эксцентриситет планеты и длину ее перигелия.

Действительно, классическое уравнение эллипса с осями a и b , записанное в сферической системе координат, начало которой совпадает с одним из фокусов эллипса, имеет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \varphi}{a(1 - e^2)} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \varphi), \quad (12.198)$$

где эксцентриситет эллипса

$$e = \frac{r_{\text{макс.}} - r_{\text{мин.}}}{r_{\text{макс.}} + r_{\text{мин.}}}, \quad (12.199)$$

а параметр эллипса

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2). \quad (12.200)$$

Таким образом, сравнивая (12.197) и (12.198), можно положить

$$\frac{Gm}{h^2} = \frac{1}{p}, \quad A = e, \quad (12.201)$$

а из (12.201) получаем

$$h^2 = (Gm)p = Gma(1 - e^2). \quad (12.202)$$

Теперь обратимся к уравнению (12.191), выведенному из общей теории относительности. Решения этого уравнения найдем методом последовательных приближений, подставив (12.197), являющееся приближенным решением (12.191), в добавочный член этого уравнения. В результате получим

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \approx + \frac{6G^3m^3}{c^2h^4} e \cos(\varphi - \bar{\omega}), \quad (12.203)$$

тогда как влиянием дальнейших членов можно пренебречь. Что же касается входящего в (12.203) члена с $\cos(\varphi - \bar{\omega})$, то он зависит от собственного периода и может приводить к явлениям резонанса.

При этом уравнение (12.203) допускает частное решение

$$u_1 = \frac{3G^3 m^3}{c^2 h^4} e \varphi \sin(\varphi - \bar{\omega}). \quad (12.204)$$

Во втором приближении решение представляется в виде суммы (12.197) и (12.204)

$$u = u_0 + u_1 = \frac{mG}{h^2} [1 + e \cos(\varphi - \bar{\omega} - \delta\bar{\omega})], \quad (12.205)$$

где

$$\bar{\delta\omega} = \frac{3m^2 G^2}{c^2 h^2} \varphi. \quad (12.206)$$

Сравнивая с (12.202), получаем

$$\frac{\bar{\delta\omega}}{\varphi} = \frac{3m^2 G^2}{c^2 h^2} = \frac{3mG}{ac^2(1-e^2)}. \quad (12.207)$$

Таким образом, при полном обороте планеты, т. е. при $\varphi = 2\pi$, перигелий планеты смещается в направлении движения на

$$\delta\bar{\omega} = \frac{6\pi mG}{ac^2(1-e^2)}. \quad (12.208)$$

В том частном случае, когда вращение происходит вокруг Солнца

$$m_{\text{Солнце}} = 1,983 \cdot 10^{33} \text{ г}, \quad (12.209)$$

$$\frac{2mG}{c^2} = \frac{2 \times 1,983 \cdot 10^{33} \times 6,66 \cdot 10^{-8}}{9 \cdot 10^{20}} = 2,95 \cdot 10^5 \text{ см} \quad (12.210)$$

и

$$\begin{aligned} \delta\bar{\omega} &= \frac{3\pi \cdot 2,95 \cdot 10^5}{a(1-e^2)} \text{ рад} = \frac{360 \times 3600}{2\pi} \cdot \frac{3\pi \times 2,95 \cdot 10^5}{a(1-e^2)} \text{ дуговых секунд} = \\ &= \frac{57,348 \cdot 10^{10}}{a(1-e^2)} \text{ дуговых секунд}. \end{aligned} \quad (12.211)$$

Если период оборота планеты, выраженный в звездных сутках, равен T , то за столетие смещение перигелия на небе будет равно

$$d\Omega = \frac{100T_{\text{Земля}}}{T} \delta\bar{\omega} = \frac{36525\delta\bar{\omega}}{T}, \quad (12.212)$$

или

$$d\Omega = \frac{20946,357 \cdot 10^{12}}{a(1-e^2)T} \text{ дуговых секунд}. \quad (12.213)$$

Для малых планет (a мало) с большим эксцентриситетом поправка $\delta\bar{\omega}$ может иметь значительную величину. Эксцентриситет является наибольшим у планеты Меркурий, для которой

$$\begin{aligned} a &= 5,8 \cdot 10^{12} \text{ см}, \\ e &= 0,2056 \\ T &= 87,97 \text{ оней}. \end{aligned} \quad (12.214)$$

Отсюда находим

$$a(1 - e^2) = 5,555 \cdot 10^{12} \quad (12.215)$$

и после подстановки в (12.213) для векового смещения перигелия получаем

$$d\Omega = \frac{20946,36 \cdot 10^{12}}{5,55 \cdot 10^{12} \times 87,97} = 42,9 \text{ дуговых секунд.} \quad (12.216)$$

Это значение находится в очень хорошем соответствии с опытными результатами.

2. Отклонение световых лучей под действием гравитационного поля. Решение Шварцшильда справедливо также в том частном случае, когда имеется гравитационное поле, создаваемое статическим сферически-симметричным телом, но рассматривается не движение пробного тела с массой m , а движение света. Для этого случая траектории световых лучей по-прежнему будут геодезическими линиями, на которых, однако, длина равна нулю. В соответствии с (12.192) из условия

$$ds = 0 \quad (12.217)$$

следует

$$h \rightarrow \infty, \quad (12.218)$$

Согласно (12.191) и (12.218), уравнение для траекторий световых лучей будет иметь вид

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3Gmu^2}{c^2}. \quad (12.219)$$

Будем по-прежнему интегрировать (12.219) методом последовательных приближений. Решение уравнения типа (12.219), но без правого члена, имеет вид

$$u_0 = \frac{\cos \varphi}{R}, \quad (12.220)$$

где R — постоянная интегрирования. Подставим это решение в член $3Gmu^2/c^2 \ll 1$. Получаемое таким путем уравнение с отличной от нуля правой частью допускает частное решение

$$u_1 = \frac{G}{c^2} \frac{m}{R^2} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi). \quad (12.221)$$

Таким образом, в приближении второго порядка решение уравнения (12.219) имеет вид

$$u = u_0 + u_1 = \frac{\cos \varphi}{R} + \frac{G}{c^2} \frac{m}{R^2} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi), \quad \left(u = \frac{1}{r}\right). \quad (12.222)$$

Применяя декартовы координаты ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$), находим уравнение траекторий

$$x = R - \frac{mG}{c^2 R} \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (12.223)$$

Последний член характеризует отклонение световых лучей от прямой $x = R$. Угол, которым измеряется это отклонение, равен

$$\alpha = \frac{2mG}{c^2 R} \left(\frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_{y \gg x} = \frac{4mGy}{c^2 R}. \quad (12.224)$$

Это значение в два раза больше того, которое получается по теории Ньютона. В самом деле,

$$\gamma = \text{grad } U, \quad \text{где } U = \frac{Gm}{r}. \quad (12.225)$$

Если частица движется параллельно оси Oy и проходит от тела с массой m на расстоянии $x = R$ и если ее скорость равна скорости света, то

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = Gm \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{Gm}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{Gmx}{r^3} \quad (12.226)$$

и

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = c. \quad (12.227)$$

Таким образом, при $x = R$ ускорение будет равно

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 x}{dy^2} = - \frac{GmR}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \quad (12.228)$$

и приближенно

$$x = R - \frac{Gmy}{c^2 R}. \quad (12.229)$$

Поэтому измеряемый угол отклонения световых лучей будет равен

$$\alpha' = \frac{2mG}{c^2 R}. \quad (12.230)$$

Опытное измерение отклонения световых лучей в достаточно сильном гравитационном поле производится путем наблюдения фиксированных звезд, видимое положение которых находится, например, вблизи от Солнца. Наблюдение возможно проводить в момент затмения, когда яркость Солнца достаточно ослаблена. В этом случае можно наблюдать звезды, видимое положение которых находится вблизи Солнца и лучи света от которых могут незначительно отклоняться в гравитационном поле. Если такое отклонение имеет место, то должно наблюдаться кажущееся отклонение положения этих звезд на небесной сфере. Из-за искривления световых лучей те звезды, которые при предположении

о прямолинейном распространении света должны были бы быть закрыты Солнцем, могут стать видимыми.

Во время солнечного затмения 1919 г. наблюдались отклонения световых лучей от звезд из скопления Гиад, видимое положение которых находилось в то время вблизи от Солнца. Были получены значения, находящиеся в хорошем соответствии с теорией Эйнштейна. Но, разумеется, речь здесь идет только о порядке величины, так как в поле Солнца отклонения малы (в данном случае $\alpha \approx 1,75$ дуговых секунд).

Приведем также результаты (в дуговых секундах), полученные Кэмпбеллом и Трамплером [184]¹⁾ при помощи фотоснимков двух видов

$$\alpha_1 = 1,72 \pm 0,11, \quad \alpha_2 = 1,82 \pm 0,15. \quad (12.231)$$

Тем не менее наблюдаемые отклонения лежат в пределах ошибок опыта.

3. Другое следствие, вытекающее из общей теории относительности: красное смещение спектральных линий. Опыты, относящиеся к смещению перигелия Меркурия или к отклонению световых лучей вблизи от тяжелого тела, по сути дела, являются проверкой решения Шварцшильда. С другой стороны, хотя красное смещение спектральных линий *можно* объяснить некоторыми свойствами этого решения, это смещение *не обязательно* должно связываться с рассматриваемой в общей теории относительности задачей о траекториях вблизи сферической массы.

Прежде всего необходимо различать красное смещение, которое мы будем рассматривать в настоящем параграфе, от красного смещения, открытого Хэбблом в 1929 г. в спектре внегалактических туманностей. Последнее смещение, имеющее значительную величину, в настоящее время все еще трудно объясняется. Делались попытки объяснить его с помощью теорий двух типов: космологических теорий, в которых были предложены различные модели расширяющейся Вселенной, и теории „старения“ света при его прохождении через межзвездное пространство.

В этой книге мы не будем изучать эффект Хэббла, а ограничимся рассмотрением лишь такого красного смещения спектральных линий, которое происходит под действием гравитационного поля, создаваемого *одной* статической сферически-симметричной массой, например, под действием гравитационного поля Солнца.

Атомы газа, входящие в состав атмосферы фиксированной звезды, являются осцилляторами, помещенными в гравитационное поле звезды. Каждый из них представляет собой своего рода часы,

¹⁾ См. также Овенден [185] и Митчелл [186].

где собственное время атома измеряется числом колебаний. Собственная частота такого атома ν_0 равна числу колебаний, происходящих за единицу собственного времени

$$\nu_0 = \frac{dN}{d\tau}, \quad \text{где } ds^2 = c^2 d\tau^2. \quad (12.232)$$

Воспользуемся системой координат, по отношению к которой звезда покоится. Средняя скорость атома в такой системе равна нулю и для соответствующей точки интервал ds^2 равен

$$ds^2 = g_{00} c^2 dt^2. \quad (12.233)$$

Наблюдатель из определяемой таким путем системы отсчета припишет рассматриваемому атому частоту

$$\nu = \frac{dN}{dt} = \nu_0 \sqrt{g_{00}}. \quad (12.234)$$

Вблизи звезды величина интервала ds^2 определяется решением Шварцшильда для случая, когда имеется лишь член, пропорциональный dt^2 . Согласно (12.164),

$$g_{00} = \sigma = 1 - \frac{2m}{rc^2} G, \quad (12.235)$$

и, подставляя это выражение в (12.234), получаем

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{2m}{rc^2} G} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{mG}{rc^2}\right). \quad (12.236)$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = - \frac{mG}{rc^2}. \quad (12.237)$$

Для земного наблюдателя атом, находящийся на поверхности Солнца, будет, таким образом, иметь частоту, которая меньше собственной частоты этого атома на $\Delta\nu$. Если масса и радиус Солнца равны M и R , то

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = - \frac{MG}{c^2 R}. \quad (12.238)$$

Что касается собственной частоты ν_0 , то она приближенно равна частоте атома этого же вещества, находящегося на Земле. Действительно, расстояние от этого „земного“ атома до звезды настолько велико, что g_{00} почти не отличается от единицы и $\Delta\nu$ практически равно нулю.

Таким образом, спектральные линии атома, находящегося на звезде, смещаются в красную сторону по отношению к спектральным линиям атома того же вещества, находящегося на Земле.

Возникающее при этом смещение будет заметно лишь в том случае, когда гравитационное поле звезды достаточно велико. Например, для Солнца

$$M = 1,983 \cdot 10^{33} \text{ г}, \quad R = 6,95 \cdot 10^{10} \text{ см}, \quad (12.239)$$

так что

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = -2,10 \cdot 10^{-6}. \quad (12.240)$$

В тридцать раз больший результат получается при наблюдении спектра атома, находящегося на спутнике Сириуса, плотность которого равна плотности воды. Проведенные измерения находятся в удовлетворительном согласии с теоретическими предсказаниями (см. Сент-Джон, Адамс, Адам и Поппер [187—190]).

Отметим также, что смещение в красную сторону однозначно определяется выражением (12.235) для потенциала g_{00} , т. е. выражением

$$g_{00} = 1 + U. \quad (12.241)$$

Это же смещение вполне совместимо с теорией, предсказывающей изменение частоты по формуле (12.236). Этим свойством обладает евклидова теория тяготения Биркгофа — Мошинского [191]. Поэтому хотя смещение спектральных полос в красную сторону вытекает из общей теории относительности, оно, тем не менее, не может служить доказательством геометрической природы тяготения. Его можно объяснить также в рамках пространства Минковского, исходя из основных положений специальной теории относительности.

Добавим также, что хотя три изученных эффекта приводят к подтверждениям общей теории относительности, два последних из них лежат на границе опытных возможностей ¹⁾.

Наиболее сильными основаниями общей теории относительности является ее внутренняя связность, простота основных положений, естественность обобщения исходных положений специальной теории относительности, а вовсе не то, что к ней приводят, хотя и не с необходимостью, опытные данные. Фактически только в этой теории дается естественное объяснение тождества гравитационной и инертной масс. При этом она представляет собой наиболее замечательный пример истинной теории поля, т. е. такой

¹⁾ Недавнее открытие эффекта Мёссбауэра привело к расширению возможностей проверки эффектов, предсказываемых теорией относительности. Сошлемся, например, на работу Паунда [УФН, 72, 673 (1960)], которому с хорошей точностью удалось измерить гравитационное красное смещение фотонов, предсказываемое общей теорией относительности. — *Прим. перев.*

теории, в которой движение источников определяется свойствами поля.

Поэтому чрезвычайно заманчиво включить в эту объединяющую теорию также электромагнитное поле, которое остается глубоко чуждым геометризации. Электромагнитную теорию, послужившую путеводной нитью для создания специальной теории относительности, оказалось трудно примирить с основными положениями общей теории относительности: максвелловское поле, проявляющееся через посредство тензора $\tau_{\mu\nu}$ и носящее чисто феноменологический характер, остается чуждым этой теории. Движение зарядов определяется заданием силы, которая остается независимой по отношению к гравитационному полю.

Несмотря на это, можно было бы надеяться, что в результате геометризации обобщенного поля окажется возможным перенести на заряженные частицы те результаты, которые до этого были получены только для нейтральных частиц; тогда их движение определялось бы условиями совместности самих уравнений поля. Казалось бы, что такое выдвигание поля на первый план могло бы служить предпосылкой для создания теории чистого поля, в которой свойства частиц полностью определяются свойствами поля. Однако все эти большие ожидания до сих пор не оправдались даже в чисто классической области. Что же касается понятий, введенных квантовыми теориями, то они в значительной степени остались чуждыми даже по отношению к обычной общей теории относительности. Квантование нелинейных уравнений, каковыми являются уравнения гравитационного поля, выдвигает трудные и нерешенные проблемы, пути подхода к которым остаются далеко не ясными.

§ 10. Измерения смещения спектральных линий при помощи эффекта Мёссбауэра

1. Определение частот в общей теории относительности¹⁾.

Во избежание каких-либо недоразумений, времена испускания и частоты мы всегда будем обозначать символами t_{ij} , ν_{ij} , снабженными двумя индексами: первый из них (i) характеризует точку P_i , из которой выходит сигнал, а второй (j) — начало системы отсчета S_j , в которой этот сигнал воспринимается.

Элементарный интервал в точке P_i , отнесенный к обобщенным координатам x_j^M , характеризующим S_j , запишется в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = (g_{pq})_i dx_i^p dx_i^q + 2 (g_{p0})_i dx_i^p dx_{ij}^0 + (g_{00})_i (dx_{ij}^0)^2. \quad (12.242)$$

¹⁾ По поводу излагаемой теории частот в общей теории относительности см. работы Тоннела [192, 193].

Его можно записать следующим образом:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = -d\sigma_{ij}^2 + (g_{00})_i (dx^0)_{ij}^2 \left[1 + \left(\frac{g_{0p}}{\sqrt{g_{00}}} \right)_i \frac{v_{ij}^p}{c} \right]^2, \quad (12.243)$$

$$d\sigma_{ij}^2 = -(\gamma_{pq})_i dx^p dx^q; \quad (\gamma_{pq})_i = (g_{pq})_i - \frac{(\gamma_{p0})_i (\gamma_{q0})_i}{(\gamma_{00})_i}, \quad (12.244)$$

$$v_{ij}^p = \frac{dx^p}{dt_{ij}} \quad (p, q = 1, 2, 3). \quad (12.245)$$

Формула (12.244), разумеется, носит сугубо локальный характер. С ее помощью определяется локальное координатное время $(dt_{ij})_j$, для которого

$$d\tau = (dt_{ij})_j \left\{ -\frac{v_{ij}^2}{c^2} + (g_{00})_i \left[1 + \left(\frac{g_{0p}}{\sqrt{g_{00}}} \right)_i \frac{v_{ij}^p}{c} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (12.246)$$

Если $\mathbf{v} = 0$, то координатное время называется локальным временем в точке P_i

$$d\tau = \sqrt{(g_{00})_i} dt_{ii}. \quad (12.247)$$

Когда в точке P_i гравитационное поле отсутствует, dt_{ii} совпадает с собственным временем $d\tau$.

Число колебаний источника S_i , отнесенное к промежутку времени $(dt_{ij})_j$, мы будем называть частотой этого источника и обозначим ее v_{ij}^e :

$$v_{ij}^e = \frac{dN^e}{dt_{ij}}. \quad (12.248)$$

В частности, собственная абсолютная частота v_{00} равна числу колебаний, имевших место за единицу собственного времени

$$v_{00} = \frac{dN^e}{d\tau}. \quad (12.249)$$

Умножая правую и левую части (12.246) на v_{00} , получаем

$$dN^e = v_{00} d\tau = v_{ij}^e dt_{ij}, \quad (12.250)$$

где

$$v_{ij}^e = v_{00} \left\{ -\frac{v_{ij}^2}{c^2} + (g_{00})_i \left[1 + \left(\frac{g_{0p}}{\sqrt{g_{00}}} \right)_i \frac{v_{ij}^p}{c} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (12.251)$$

Числу колебаний dN^e источника S_i , находящегося в точке P_i , соответствуют промежутки времени $d\tau$ (собственное время), dt_{ii} (локальное время), dt_{ij} (координатное время).

Измерительный прибор, расположенный в точке P_j , регистрирует частоту

$$v_{ij}^a = \frac{dN_{ij}^a(d\tau_j)}{d\tau_j}, \quad (12.252)$$

в общем случае отличную от v_{ij}^e . Действительно, число колебаний, воспринимаемое прибором в течение промежутка локального времени $d\tau_j = dt_{jj}$, равно $dN_{ij}^a(d\tau_j)$. Величины $d\tau_j$ и $dN_{ij}^a(d\tau_j)$, разумеется, можно заменить пропорциональными им величинами d'_{ij} и $dN_{ij}^a(dt_{ij})$. Поэтому

$$v_{ij}^a = \frac{dN_{ij}^a(d\tau_j)}{d\tau_j} = \frac{dN_{ij}^a(dt_{ij})}{dt_{ij}} = \frac{dN_{ij}^a}{dN_{ij}^e} \frac{dN_{ij}^e(dt_{ij})}{dt_{ij}}, \quad (12.253)$$

т. е., согласно (12.248) и (12.251),

$$v_{ij}^a = v_{ij}^e \frac{dN_{ij}^a}{dN_{ij}^e}, \quad (12.254)$$

или

$$v_{ij}^a = v_{00} \left\{ -\beta_{ij}^2 + (g_{00})_i \left[1 + \left(\frac{g_{0p}}{\sqrt{g_{00}}} \right)_i \beta_{ij}^p \right]^2 \right\}^{1/2} \frac{dN^a}{dN^e}. \quad (12.255)$$

В общем случае $dN_{ij}^a \neq dN_{ij}^e$ и $v_{ij}^a \neq v_{ij}^e$.

Отношение dN^a/dN^e — числа воспринимаемых колебаний к числу колебаний источника для одного и того же времени — должно вычисляться для различных частных случаев по-разному. Например, известно, что когда плоская волна распространяется в евклидовом пространстве,

$$dN^a = \frac{dN^e}{1 - \beta_{ij} \cos \theta} \quad \left(\beta_{ij} = \frac{v_{ij}}{c} \right). \quad (12.256)$$

Это классический эффект Допплера, являющийся эффектом первого порядка относительно $\beta = v/c$. Если источник и наблюдатель находятся в относительном покое, то

$$dN^a = dN^e \quad (12.257)$$

и изменение частоты $v_{00} \rightarrow v_{ij}^a$ будет связано только с существованием гравитационного поля. Если в точке P_i , в которой расположен источник, гравитационное поле обращается в нуль, то (12.255) приводит к обычной формуле для релятивистского эффекта Допплера [см. (10.14)]:

$$v_{ij}^a = \frac{v_0 \sqrt{1 - \beta_{ij}^2}}{1 - \beta_{ij} \cos \theta}. \quad (12.258)$$

Формулой (12.255) определяется общее выражение для смещения частот. Однако до последнего времени возможности для ее опытной проверки можно было искать только в области внеземных явлений. Одни из таких явлений связывались со свойствами галактик (эффект Хэббла), другие относились к области космологических теорий.

Опыты, которые были проведены с помощью чрезвычайно точных атомных часов (мазеров) или основанные на эффекте Мёссбауэра, позволили вернуться к земным явлениям, где свойства используемых атомных источников известны несравненно лучше.

2. Эффект Мёссбауэра. а) *Общие основы.* При изучении спектра испускания, возникающего при наличии в газообразном веществе возбужденных ядер, приходится иметь дело, во-первых, с расширением „естественных“ линий, обязанным своим происхождением тепловому движению молекул газа, и, во-вторых, со смещением на шкале энергий. В самом деле, максимум испускания должен соответствовать не энергии возбужденного состояния E_0 , а энергии $E_0 - R$, где R — энергия, поглощаемая при отдаче ядра. Аналогично, чтобы γ -излучение могло быть поглощено, оно должно обладать энергией $E_0 + R$, складывающейся из энергии возбужденного состояния E_0 и энергии отдачи ядра.

В связи с этим очень трудно осуществить резонансное поглощение γ -излучения, испускаемого возбужденными атомами газа. Действительно, при резонансном поглощении γ -излучение должно обладать в точности энергией E_0 , соответствующей возбужденному состоянию. Вместо этого имеет место разница энергий, равная

$$E_0 + R - (E_0 - R) = 2R. \quad (12.259)$$

В 1958 г. Мёссбауэр [194] показал, что если возбужденные атомы находятся в кристалле при очень низкой температуре, то с их помощью можно осуществить резонансное поглощение γ -излучения. Он объяснил это тем, что при температуре жидкого азота возбужденный атом, связанный со всем кристаллом, не может испытывать свободной отдачи, вследствие чего для аналогичного кристалла резонансное поглощение γ -излучения может оказаться возможным.

б) *Проведение опытов.* В первых опытах Мёссбауэра [194] использовалось γ -излучение ядер Ir^{191} , появившихся в результате β -распада Os^{191} . Получаемое при этом γ -излучение обладает энергией

$$E_0 = 129 \text{ кэВ.}$$

Монохроматичность источника Q является функцией естественной ширины линии Γ и среднего времени жизни τ

$$Q = \frac{\nu}{2\Delta\nu} = \frac{E_0}{2h\Delta\nu} = \frac{E_0}{2\Gamma}, \quad (12.260)$$

где

$$\Gamma\tau = \hbar = 6,56 \cdot 10^{-16} \text{ эв} \cdot \text{сек.} \quad (12.261)$$

Путем определения эффективного сечения можно, таким образом, найти Γ , а затем и τ .

Во второй серии опытов Мёссбауэра [195] величина Γ определялась компенсированием соответствующего отклонения $\Delta\nu/\nu$. Чтобы добиться этого, использовался дополнительно эффект Допплера, возникающий, когда источник (или поглотитель) движется со скоростью v , определяемой из соотношения

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \beta = \frac{v}{c}. \quad (12.262)$$

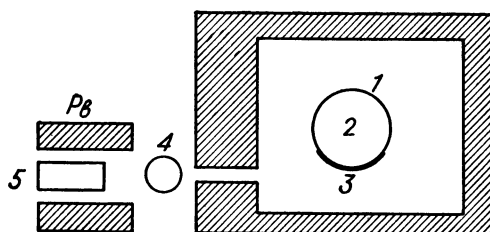
При этих условиях

$$\Gamma = E_0 \frac{\Delta\nu}{\nu} = E_0 \beta. \quad (12.263)$$

Используя γ -излучение, испускаемое ядрами Ir^{191} , можно при очень малых скоростях добиться смещения резонансной линии на ширину Γ . При этом для Ir^{191} скорость

$$v = \frac{\Gamma_c}{E_0} = \frac{6 \cdot 10^{-6} \times 3 \cdot 10^{10}}{129000} = 1,4 \text{ см/сек.} \quad (12.264)$$

Применявшаяся установка изображена на фиг. 42. Начертив кривую, характеризующую зависимость $J_{\text{погл.}}/J_{\text{исп.}}$ от скорости, можно определить Γ и τ .



Ф и г. 42. Опыт Мессбауэра.

1 — источник, 2 — мотор, 3 — используемая часть траектории, 4 — поглотитель, 5 — детектор.

Число подобных экспериментов стало быстро возрастать, причем они были проведены для ядер W^{182} , Sn^{119} , Fe^{57} , Zn^{67} и Ag^{107} . Эти эксперименты помогли обнаружить сверхтонкую структуру эффекта Зеемана, соответствующую различным возбужденным уровням. Таким образом, эффектом Мёссбауэра можно воспользоваться для определения структуры кристаллов. Здесь нас будет интересовать только применение этого эффекта для измерения гравитационного смещения.

3. Измерения гравитационного смещения. а) *Точность, необходимая для измерения смещения.* Рассмотрим два источника γ -излучения, один из которых, S_i , находится на некоторой высоте от поверхности земли, а другой, S_j , — на самой поверхности. Оба источника находятся в относительном покое ($N_{ij} = 0$). В этом случае общая формула (12.255) приобретает более простой вид, так как

$$\beta_{ij} = 0, \quad dN^a = dN^e. \quad (12.265)$$

Согласно (12.255), частоты колебаний, испускаемых источниками S_i и S_j и поглощаемых приемником на поверхности земли, будут равны

$$\nu_{ij} = \nu_{00} \sqrt{(g_{00})_i}, \quad \nu_{jj} = \nu_{00} \sqrt{(g_{00})_j}. \quad (12.266)$$

При этом мы знаем, что $(g_{00})_i$ и $(g_{00})_j$ выражаются в виде функций от соответствующих ньютоновских потенциалов U_i и U_j

$$(g_{00})_i = 1 - \frac{2U_i}{c^2}, \quad (g_{00})_j = 1 - \frac{2U_j}{c^2}, \quad (12.267)$$

где

$$U_i = \frac{GM}{R+H}, \quad U_j = \frac{GM}{R}. \quad (12.268)$$

Здесь R и M — соответственно радиус и масса Земли; H — разность уровней S_i и S_j ; G — ньютоновская гравитационная постоянная.

Из (12.266) и (12.267) следует, что

$$\nu_{ij} = \nu_{jj} \sqrt{\frac{1 - \frac{2U_i}{c^2}}{1 - \frac{2U_j}{c^2}}}, \quad (12.269)$$

т. е.

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_{ij} - \nu_{jj}}{\nu_{jj}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2U_i}{c^2}}{1 - \frac{2U_j}{c^2}}} - 1 \approx \frac{GMH}{c^2 R^2}. \quad (12.270)$$

Обозначив через

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

величину ускорения силы тяжести на поверхности Земли, мы перепишем (12.270) в виде

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gH}{c^2}. \quad (12.271)$$

Например, если разность уровней $H = 1$ м, то смещение будет равно

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{981 \times 100}{9 \cdot 10^{20}} = 1,09 \cdot 10^{-16}.$$

Его можно будет обнаружить лишь при условии применения таких источников, у которых естественная ширина линии, по порядку величины, не превышает это значение.

Естественная ширина линий у источников, с которой приходится иметь дело в эффекте Мёссбауэра, имеет такой же порядок величины. Например, для γ -излучения ядер Zn^{67} имеем

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Gamma}{E_0} \approx 10^{-16}. \quad (12.272)$$

Таким образом, этот эффект может быть использован для измерения обычных гравитационных смещений.

б) *Поставленные опыты.* На возможность применения эффекта Мёссбауэра для измерения гравитационных смещений первыми указали Паунд и Ребка [196]. После этого английской группой (Крэншоу, Шиффер, Уайтхед [197]) были поставлены опыты, обсуждавшиеся Паундом и Ребкой [198]. В этих опытах в качестве источника γ -излучения применялись атомы Fe^{57} , разность уровней составляла

$$H = 12,50 \text{ м.}$$

Добавочный эффект Доплера состоял в попеременном движении источника вверх и вниз. Резонансное поглощение становится максимальным, когда эффект Доплера, возникающий при движении источника, компенсируется гравитационным смещением, связанным с разностью уровней H . Теоретическая величина этого смещения равна

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gH}{c^2} = \frac{981 \times 1250}{9 \cdot 10^{20}} = 1,36 \cdot 10^{-15}.$$

Полученные результаты составляют $0,96 \pm 0,45$ теоретического смещения. Теория, таким образом, подтверждается с большой степенью точности [197]. Однако Паунд и Ребка [198] обратили внимание на то, что важную роль может играть также асимметрия, связанная с разностью температур источника и поглотителя, для исключения которой было предложено менять относительные положения источника и поглотителя. Опыты, в которых по-прежнему использовались атомы Fe^{57} , а разность уровней равнялась 74 фут. т. е.

$$H = 0,304 \times 74 = 22,496 \text{ м,}$$

соответствуют теоретическому смещению

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = - \frac{2 \times 2249,6 \times 981}{9 \cdot 10^{20}} = - 4,9 \cdot 10^{-15}.$$

Среднее значение наблюдавшегося смещения после внесения температурной поправки оказывается равным

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = - (5,13 \pm 0,51) \cdot 10^{-15}.$$

Таким образом,

$$\frac{(\Delta\nu)_{\text{опытн}}}{(\Delta\nu)_{\text{теорет.}}} = 1,02 \pm 0,12.$$

в) *Смещение частот в ускоренной системе.* Укажем, наконец, на опыты Хэя, Шиффера, Крэншоу и Эгелстафа [199], в которых была предпринята попытка обнаружить смещение частот в ускоренной системе.

Источник $\text{Co}^{57} \xrightarrow{\beta} \text{Fe}^{57}$ помещался на поверхности цилиндра диаметром 0,8 см. Поглотителем являлось такое же вещество, помещенное на внутренней поверхности другого цилиндра, коаксиального с первым и имеющего диаметр 13,28 см. Когда система начинает вращаться с угловой скоростью ω , то все происходит так, словно в точках P_i и P_j , в которых находятся источник и поглотитель, возникает гравитационное поле

$$(g_{00})_i = 1 - \frac{\omega^2 r_i^2}{c^2}, \quad (g_{00})_j = 1 - \frac{\omega^2 r_j^2}{c^2}. \quad (12.273)$$

В результате для собственных относительных частот

$$\nu_{ii} = \nu_{00} \sqrt{(g_{00})_i}, \quad \nu_{jj} = \nu_{00} \sqrt{(g_{00})_j} \quad (12.274)$$

возникает смещение

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_{ii} - \nu_{jj}}{\nu_{jj}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega^2 r_i^2}{c^2}}{1 - \frac{\omega^2 r_j^2}{c^2}}} - 1 \approx \frac{\omega^2}{2c^2} (r_j^2 - r_i^2). \quad (12.275)$$

Если $r_j = 6,64$ см, $r_i = 0,4$ см, $\omega = 200$ об/сек, то теоретическое значение смещения будет равно

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 2,44 \cdot 10^{-20} \omega^2.$$

По-видимому, это предсказание подтверждается, хотя здесь требуются еще дальнейшие уточнения.

Резюмируя, можно сказать, что эффект Мёссбауэра открывает интереснейшие перспективы для измерения смещения частот, возникающего под влиянием гравитационного поля. Наряду с другими возможностями, он, таким образом, открывает пути для проверки теории, предсказывающей подобное смещение. Эти опыты проводятся с чисто земными источниками, поэтому они вызывают большой и все возрастающий интерес,

ГЛАВА 13

ЕДИНЫЕ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА И ГРАВИТАЦИИ

ОСОБЕННОСТИ ТЕОРИИ ЧИСТОГО ПОЛЯ

Единые теории и недуалистические теории

Под единой теорией обычно подразумевают такую теорию, в которой дается одинаковое, большей частью геометрическое, истолкование электромагнитных и гравитационных явлений. Получаемые при этом уравнения поля являются структурными условиями, выполняющимися для неевклидова пространства.

Кроме того, единой называют также такую теорию, в которой предпринимается попытка свести понятие поля и понятие частицы только к одному из этих двух понятий.

В принципе, если не считать вызывающего сожаления сходства в названиях, эти два вида единых теорий не имеют между собой ничего общего. Однако предпринимались также попытки создать теории, приводящие к двойному синтезу — к геометризации электромагнитного и гравитационного полей и одновременно к выводу характеристик источников из свойств обобщенного поля. Но в настоящее время теории подобного рода не удалось построить даже для чисто классической области. Тем не менее можно полагать, что, не создав истинной теории чистого поля, можно с помощью единой теории гравитационно-электромагнитного поля вывести из уравнений обобщенного поля движение сингулярностей, являющихся источниками поля. И хотя наличие сингулярностей не вытекает из существования поля, движение сингулярностей определяется накладываемыми на поле условиями.

Таким образом, между двумя видами синтеза существует некоторое сходство, связанное с общей интерпретацией полей, но имеется и большее различие: в одном случае источники поля сводятся к самому полю, а в другом — движение источников определяется свойствами обобщенного поля.

Во избежание каких-либо недоразумений, *едиными теориями* мы будем называть такие теории, в которых предпринимается попытка *объединить электромагнетизм и гравитацию в единое целое*. *Недуалистическими* мы будем называть такие теории, в которых предпринимается попытка свести источники поля к самому полю,

А. ЕДИНЫЕ ТЕОРИИ

§ 1. Единые теории, существовавшие до создания общей теории относительности

Прежде всего можно задать вопрос, в какой мере необходимо существование связи между электромагнитными и гравитационными явлениями? Для зарядов и для масс действие на расстоянии передается по закону $1/r^2$. Тем не менее, несмотря на указанную формальную аналогию, никогда не удавалось построить единой теории, в которой заряд q играл бы такую же роль, как и гравитационная масса.

Вместе с тем была предпринята попытка описать тяготение на основе модели электрических действий на расстоянии (Феппл — Вин). При этом имелось в виду представить силу тяготения в виде силы, до некоторой степени компенсирующей взаимодействие между зарядами, и таким путем построить теорию тяготения с помощью модели, основанной на электронной теории Лоренца. К сожалению, различие законов в выражениях для ньютоновской и кулоновской сил (где в последнем случае имеются в виду два заряда с одинаковыми знаками) приводит к существенному различию между двумя этими теориями, что, по-видимому, делает невозможным сведение одной из них к другой.

После развития специальной теории относительности еще более настоятельно стала ощущаться необходимость создания единой теории или по крайней мере такой теории, которая бы привела к релятивистскому закону тяготения, сходному с законами оптики.

В самом деле, именно оптика одержала верх в конфликте, возникшем между нею и механикой. Основой, на которой строилась новая релятивистская физика, стали уравнения Максвелла, остающиеся инвариантными по отношению к преобразованиям Лоренца. В связи с этим теории дальнего действия, занимавшие доминирующее положение в физике начала XIX века, лишились своей ведущей роли и уступили место релятивистским теориям поля. Соответственно и теория тяготения, казалось бы, должна была бы быть перестроена по образцу оптики.

Однако остроумные попытки в этом направлении ни к чему не привели, и построить какую-либо приемлемую релятивистскую теорию тяготения не удалось. В частности, предпринимавшим такие попытки Минковскому, Виньевскому и Пуанкаре пришлось столкнуться с тем, что в специальной теории относительности заряд и масса, очевидно, ведут себя не одинаково: заряд сохраняется, а масса с изменением скорости меняется. Все попытки создания единых теорий, предпринимавшиеся до 1916 г., т. е.,

до создания общей теории относительности, несмотря на значительный интерес некоторых из них, потерпели, таким образом, неудачу.

§ 2. Общая теория относительности и единые теории

В связи с созданием общей теории относительности Эйнштейн предложил глубокую и оригинальную интерпретацию гравитационных явлений. Закон тяготения приобрел релятивистский характер и стал сводиться к структурным условиям, которым должно подчиняться риманово пространство. В первом приближении этот закон, кроме того, дал возможность получить результаты теории Ньютона, и с их помощью удалось добиться лучшего соответствия с наблюдаемыми явлениями, среди которых наиболее известным является остававшееся необъясненным смещение перигелия Меркурия.

Однако проблема связи с электромагнитной теорией сразу же была перенесена в другую плоскость. Геометрическое истолкование гравитационных явлений резко выделяет их из остальных физических явлений, в частности, относящихся к области электромагнитной теории. Поэтому задача единой теории должна заключаться уже не в том, чтобы связывать между собой явления из двух более или менее различных областей, а в том, чтобы приписать электромагнитным явлениям присущие гравитации геометрические свойства. В противном случае нужно будет допустить, что гравитационные явления носят привилегированный характер и что при движении заряженной частицы они проявляются совершенно особым образом.

§ 3. Интерпретация электромагнитного и гравитационного полей, предлагаемая едиными теориями

После создания общей теории относительности целью большинства единых теорий стало, таким образом, перенесение геометризации, которая для гравитационного поля привела к положительным результатам, на случай электромагнитного поля.

В общей теории относительности законы гравитации оказались включенными в 10 структурных условий, накладываемых на тензор кривизны четырехмерного риманова многообразия. Фактически компоненты тензора кривизны являются единственными характеристиками этого многообразия. И хотя таким путем законы гравитации могут быть представлены в виде геометрических условий, здесь уже не остается места для аналогичного истолкования элект-

ромагнитных явлений. В самом деле, выбор структуры риманова пространства невозможно связать с дополнительными условиями, совпадающими с уравнениями Максвелла. Чтобы свести электромагнетизм к геометрическим свойствам пространства, нужно выйти за рамки четырехмерного риманова пространства, применяемого в общей теории относительности. При этом имеются два совершенно различных направления.

1. Римановы теории для пространства более чем четырех измерений. Продолжая считать пространство римановым, можно предположить, что оно имеет пять или даже шесть измерений. Это направление, начало которому положил своей работой Калуза [200] в 1921 г., с некоторыми видоизменениями развивалось в теории Эйнштейна — Майера [201] в 1931—1932 гг. и в проективных теориях Фелбена [202] и Паули [203] в 1933 г. Укажем также на более поздние теории Иордана [204] и Тири [205], в которых рассматривается поле с 15 переменными, и на теорию шестимерного многообразия Подоланского [206].

Вспомогательная роль пятимерного континуума особенно ясно проявляется в проективных теориях. Здесь истинный физический смысл имеет только это вспомогательное многообразие, которое само, однако, не является физическим пространством. В этой связи интересно противопоставить данную интерпретацию и интерпретацию, предлагаемую, например, в теории Эйнштейна — Бергмана — Баргмана [207] или в теории Подоланского [206]. В этих теориях, которые выглядят более сложными, предпринималась попытка представить пятимерный (или шестимерный) континуум в качестве истинного физического пространства, построенного, однако, довольно специальным образом. Например, в теории Эйнштейна — Бергмана — Баргмана пятимерное пространство является замкнутым по отношению к пятому измерению; физическое пространство Подоланского фактически имеет шесть измерений, но оно состоит из таких слоев, что все точки одного слоя соответствуют одной и той же точке четырехмерного пространства — времени. Эти попытки находятся в соответствии с характером общей теории относительности: их целью является введение такого риманова пространства, которое не только приводит к единому формализму, но и имеет смысл истинного физического пространства¹⁾.

Пятимерные теории имеют то большое преимущество, что они легко позволяют представлять траектории заряженных частиц в виде семейств геодезических линий пятимерного пространства,

¹⁾ См. также теорию Румера (Ю. Б. Румер, Исследования по 5-оптике, М—Л, 1956), где пятой координатой считается действие.— *Прим. перев.*

классифицируемых по значениям e/m . Это приводит к обобщению результатов общей теории относительности, имевших место для случая незаряженных частиц.

Однако несмотря на это, результаты, полученные с помощью подобного формализма, многим физикам представлялись слишком искусственными. Успехи принятой терминологии, связанной с введением пятимерного многообразия, не могли скрыть несостоятельность попыток обобщить четырехмерное пространство, которое одно только и сохраняло смысл истинного физического пространства. В частности, ахиллесовой пятой пятимерной теории оставалось условие цилиндричности. Это условие отражает тот факт, что с физической точки зрения наблюдаемые величины зависят от четырех, а не от пяти параметров. Но тогда это условие с необходимостью приводит к ограничению ковариантности уравнений, так как координата x^5 должна играть особую роль. Поэтому оно влечет за собой невозможность полного синтеза, приводящего к включению различных величин в единую теоретическую схему и аналогичного, например, осуществленному в теории Максвелла синтезу электрического и магнитного полей.

2. Четырехмерные римановы теории. В противоположность предыдущим теориям, имеется возможность сохранить условие, что физическое пространство является существенно четырехмерным. Но тогда для нахождения дополнительных геометрических условий нужно будет отказаться от того, чтобы приписывать этому пространству риманову структуру.

Таким образом, оказывается необходимым усложнить геометрию четырехмерного многообразия. Общее многообразие аффинной связности может обладать кручением и двумя видами кривизны.

Обычная *риманова кривизна*, или *кривизна вращения*, определяется тензором Римана — Кристоффеля

$$\Omega_{\mu}^{\rho} = R_{\mu\sigma}^{\rho} [dy^{\sigma} \delta y^{\rho}].$$

Кривизна гомотетии определяется инвариантом

$$\Omega = \Omega_{\mu}^{\mu} = R_{\mu\sigma}^{\mu} [dy^{\sigma} \delta y^{\mu}].$$

Наконец, *кручение*, введенное Картаном, связано с несимметричностью коэффициентов аффинной связности $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$, обобщающих символы Кристоффеля $\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$

$$\Omega^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} [dy^{\mu} \delta y^{\nu}].$$

Фактически большинство авторов первоначально не обратило внимания на существование ряда величин (двух видов кривизны

и кручения), которые характеризуют структуру пространства и которыми можно было бы распорядиться. Именно из-за этого единые теории долгое время являлись несколько произвольными, основывающимися на такой геометрии, которая могла бы допускать в значительной степени искусственные видоизменения.

Однако, если при построении единых теорий оставаться в рамках многообразия аффинной связности, то фактически окажется возможным подбор только трех элементов, характеризующих структуру многообразия: двух видов кривизны и кручения. Например, могут существовать теории, в которых кручение равно нулю, но имеются два вида кривизны (теория Вейля [208, 209]), или, наоборот, кручение не равно нулю, но отсутствует какая-либо кривизна (теория Эйнштейна [210], 1929 г.), что приводит к сохранению абсолютного параллелизма. Наконец, можно воспользоваться многообразием аффинной связности общего вида, в котором α и ρ не равны нулю как кручение, так и оба вида кривизны. С помощью гипотез, соответствующих теориям последнего типа, Эйнштейну удалось создать единую теорию, обладающую большей общностью и дающую возможность получить наиболее естественное обобщение теории гравитации ¹⁾.

§ 4. Классические единые теории и возможность новых предсказаний

Для классической области бесспорный интерес представляет систематизация, основывающаяся на единых теориях. Эти теории, приводящие к широкому геометрическому синтезу, дают возможность довольно естественным образом получать уравнения гравитации и электромагнетизма.

Тем не менее теориям подобного рода зачастую предъявляли упрек в том, что, легко удовлетворяя требованиям геометрического синтеза, они в то же время не ставят своей задачей получение новых выводов. Однако если объединение уравнений Максвелла и формализма Эйнштейна представляет действительный интерес, то было бы странно только на этом и остановиться. Напротив, естественно полагать, что объединение электромагнетизма и гравитации в рамках единой теории должно было бы иметь важное

¹⁾ См. книгу Эйнштейна [211], Приложение II, а также книгу Тоннелла [212]. [Следует отметить, что на русском языке имеется перевод четвертого издания книги Эйнштейна, где Приложение II носит название „Обобщение теории тяготения“. В последнем, пятом, издании книги, вышедшем уже после смерти Эйнштейна, это приложение полностью переработано и названо „Релятивистская теория несимметричного поля“. В результате этой переработки содержание теории не изменилось, но ее изложение стало более простым и ясным. — *Прим. перев.*]

значение для создания новых теорий. К сожалению, в случае единых теорий часто бывает затруднительным выйти за пределы чистой систематизации.

Что касается теорий поля с 15 переменными, к которым относится последняя теория Эйнштейна — Шредингера, то по отношению к ним эти критические замечания, по-видимому, уже теряют силу. Не ограничиваясь только простым синтезом отдельных теорий, они приводят к новым законам, из которых в первом приближении получаются теории Эйнштейна и Максвелла.

Основываясь на теории поля с 15 переменными, можно, например, принять, что гравитационный множитель χ больше уже не является постоянным (см. диссертацию Тири [205]) или что существует поляризация пустого пространства (см. книгу Лихнеровича [160]), или, наконец, что целесообразно ввести конформное пространство (см. диссертацию Хеннекена [177]). Вытекающие из такой теории уравнения поля приводят к уравнениям движения заряженной частицы. Эти уравнения можно решать как точно, так и методом последовательных приближений.

Теория Эйнштейна — Шредингера приводит, далее, к нелинейным электромагнитным уравнениям, в которых имеются члены, характеризующие гравитацию. Это, таким образом, говорит о существовании значительно более тесной взаимосвязи между электромагнетизмом и гравитацией. Единая теория, наконец, дает возможность избежать отдельных трудностей, присущих линейной электромагнитной теории.

Если бы предсказываемые эффекты не лежали за пределами опытных возможностей, то указанные теории можно было бы подвергнуть опытной проверке. Возможность опытного опровержения делает эти теории не вполне обоснованными, и в этом их главная слабость.

Рассмотрим, например, изменение гравитационного множителя χ в зависимости от множителя e/m , с которым приходится иметь дело при отдельных истолкованиях теорий поля с 15 переменными. Этому предсказанию могло бы соответствовать существование магнитных явлений, связанных с вращением, т. е. появление магнитного поля при вращении незаряженных масс ($\mu \neq 0$, $\rho = 0$). В точности такой характер носит эффект Блэккета, аналитическое выражение для которого было получено эмпирическим путем¹⁾.

¹⁾ См. работу Блэккета [УФН, 33, 1 (1947)], где (на основе очень ограниченного числа опытных данных) высказывается гипотеза о пропорциональности между магнитным и механическим моментом небесных тел. В настоящее время в связи с созданием космических ракет, как известно, появилась возможность непосредственно измерить магнитные моменты небесных тел, что заставляет пересмотреть представления о границах опытных возможностей, о которых говорится в этой книге. — *Прим. перев.*

Но, к сожалению, если имеют место магнитные явления, связанные с вращением, то соответствующие эффекты должны быть значительно более слабыми, чем предсказанные формулой Блэккета. Поэтому если опыт покажет, что формула Блэккета не выполняется или что ее нужно каким-то образом видоизменить, то это не будет служить опровержением истолкования, предлагаемого в теории Иордана — Тири. Разумеется, это не будет служить и его подтверждением.

То же самое можно сказать о взаимном влиянии друг на друга гравитационного и электромагнитного полей, предсказываемого теорией Эйнштейна — Шредингера. Например, утверждение о том, что только одно искривление пространства уже будет приводить к существованию тока, относится к явлениям, лежащим за границами опытных возможностей. Специфические эффекты, предсказываемые этой единой теорией, слишком слабы, чтобы их можно было обнаружить на опыте, и слишком специальные, чтобы служить основой для физической интерпретации рассматриваемых в теории геометрических величин. Эти трудности связаны с недостаточностью опытных данных для той области явлений, которая рассматривается в теориях подобного рода.

§ 5. Единые теории и квантовые теории

Наиболее серьезным возражением, с которым приходится сталкиваться при построении единых теорий, является уже само существование квантовых теорий. Действительно, все попытки объединения гравитационного поля и квантованного электромагнитного поля до сих пор остаются в зачаточной стадии. Возникает вопрос, квантуется ли гравитационное поле и, более того, имеет ли смысл пытаться его квантовать?

Попытки квантования гравитационного поля сталкиваются с большими трудностями, причем подход к этой проблеме зависит от лежащего в основе классического описания.

Линейные теории гравитационного поля исходят из предположения о том, что гравитационные явления *строго* описываются системой линейных уравнений. Их можно вывести из закона Ньютона в квази-галилеевом приближении, а также чисто эвристическим путем, не зависящим, в принципе, от какой-либо точной неевклидовой интерпретации. Линейные уравнения гравитации можно вывести также из уравнений поля, создаваемого частицами со спином, равным 2, или из уравнений для корпускулярных волн, соответствующих этой частице.

При этих условиях значительно легче представить себе сближение между уравнениями данного вида и электромагнитными уравнениями, которые также являются линейными. Кроме того, по-

сколько рассматривается ковариантность для пространства Минковского, т. е. только по отношению к преобразованиям Лоренца, квантование линейных уравнений гравитации, в принципе, производится без затруднений.

Но после отказа от геометрической интерпретации, являющейся основой общей теории относительности, уравнения, которые предлагается квантовать, к сожалению, остаются в значительной степени произвольными. Их простота обманчива, так как они далеко не очевидны и не вытекают из опыта. Ограничиваясь только одним примером, укажем, что, исходя по меньшей мере из сомнительного существования гравитационных волн, приходят к выводу о том, что формализм теории якобы должен стать явно линейным.

В *нелинейных теориях* гравитационного поля постулируется, что оно подчиняется вытекающим из теории Эйнштейна нелинейным дифференциальным уравнениям, но выводам из общей теории относительности приписывается новый смысл.

В этих теориях либо высказывается предположение, что, хотя уравнения Эйнштейна приводят к приемлемому формализму, этот формализм связан с *чисто евклидовым пространством*; при этом постулируется существование ограниченной ковариантности по отношению только к преобразованиям Лоренца (см., например, Гупта [213]), либо линейные уравнения рассматриваются с точки зрения предложенной Эйнштейном *неевклидовой интерпретации*. При этом нужно допустить общую ковариантность уравнений, имеющую место по отношению к любым преобразованиям координат. Но в этом случае еще более возрастают трудности, связанные с квантованием. В настоящее время представляется, что определить однозначным образом правила квантования гравитационного поля невозможно.

Таким образом, если даже предположить, что квантование гравитационного поля желательно без каких-либо оговорок, то осуществить его удовлетворительным образом все же не удастся. Фактически такое квантование приходится проводить для линейных уравнений, остающихся в большой степени произвольными, или же приходится сталкиваться с трудностями, связанными с произволом самой процедуры квантования. В то же время квантование других полей представляется неизбежным. Можно также согласиться с тем выводом, что если оставаться в классической области, то естественно возникает задача о создании единых теорий. Во многих отношениях они являются источниками прогресса, так как позволяют строить нелинейную электромагнитную теорию, обладающую всеми преимуществами (как, впрочем, и недостатками), связанными с нелинейностью. Единая теория дает возможность более удовлетворительно объяснить движение источников и делает очевидной взаимозависимость полей. Наконец, появляется

возможность устранить произвол, имевший место в общей теории относительности и связанный с выбором электромагнитного тензора $T_{\mu\nu}$, вводимого чисто феноменологическим путем. Единая теория, таким образом, должна была бы являться естественным обобщением теорий поля, и нужно лишь добиться того, чтобы она была более тесно связана с опытными данными.

Для области квантовых явлений построить удовлетворительную единую теорию или даже только квантовую теорию гравитации до сих пор не удалось. Быть может, такое построение вообще невозможно, и поиски подобной теории лишены смысла.

В теоретической физике в последние годы особенно важную роль стали играть квантовые теории полей. С их помощью удалось добиться очень хорошего соответствия между теоретическими предсказаниями и опытными данными, а успех теории в первую очередь и определяется возможностью правильных предсказаний. Тем не менее не вызывает сомнения, что предсказания не должны относиться только к одной, нередко довольно ограниченной, области опытных данных и что при этом не следует терять из виду самой необходимости их объяснения.

Наличие дедуктивных теорий, вытекающих из простых геометрических положений и допускающих логически последовательное развитие в различных направлениях, должно напоминать о том, что существуют другие пути, которые хотя пока и не привели к практическим результатам, тем не менее заманчивы, так как они являются естественным завершением классических теорий поля. Поэтому можно надеяться, что с помощью классических единых теорий в конечном итоге удастся получить новые предсказания, доступные опытной проверке, и что их удастся лучше согласовать с квантовой электродинамикой. Может быть, именно в этом направлении имеются пути правильного подхода, и, хотя систематическая работа в этом направлении связана с большими трудностями, она может привести к гармоническому развитию теорий поля.

Б. НЕДУАЛИСТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

§ 6. Поле и источники поля

Одной из наиболее трудных проблем, стоящих перед электродинамикой как в классической, так и в квантовой областях, является вопрос о связи между полем и источниками поля. Предельно упрощая проблему, можно сказать, что идея о точечном источнике наталкивается на известные трудности с бесконечной собственной энергией, тогда как представление о протяженном источнике противоречит требованиям теории относительности и нередко связано с довольно произвольными гипотезами.

Многочисленные теории, относящиеся к данному вопросу, можно разделить на *дуалистические* и *недуалистические*.

В дуалистических теориях предполагается, что частицы, являющиеся источниками поля и характеризующиеся такими величинами, как масса и заряд, отличаются от самого поля. К этому направлению можно, например, отнести работы, в которых трудности с бесконечной энергией преодолеваются путем введения двух компенсирующих полей. После этого разрабатывались теории, исходящие из совершенно других положений и послужившие основой для развития современной классической электродинамики.

В противоположность этому, в недуалистических теориях предполагается, что источники поля по существу не отличаются от самого поля.

Чтобы избежать структурных гипотез, характерных для более старых релятивистски инвариантных теорий, строились теории с несколькими временами и нелинейные теории. Впрочем, те и другие плохо поддаются процедурам квантования.

В гл. 9 мы, например, рассматривали основные положения теории Ми и теории Борна — Инфельда. Последняя из этих теорий основывается на существовании нелинейных соотношений между напряженностью и электромагнитной индукцией. Эта нелинейность дает возможность определить такую напряженность электромагнитного поля, которая остается конечной во всех точках, включая и начало координат. Вместо максвелловского электростатического поля, становящегося в точечных источниках бесконечным, мы получаем такое поле, которое в этих точках остается конечным.

При этом величины, характеризующие саму частицу (т. е. заряд, а в отдельных случаях также и массу), можно определить таким образом, что они будут функциями от величин, характеризующих поле. В результате свободные плотности заряда, тока и массы сводятся только к величинам поля.

Указанное объединение возможно только в том случае, если напряженность электрического поля, характеризующая плотность заряда, остается в начале координат конечной, а само это свойство является следствием нелинейности основных уравнений.

Теория Борна, разумеется, является теорией чисто электромагнитной и чисто евклидовой. К проблеме разработки единых теорий прямого отношения она не имеет.

§ 7. Нелинейность и характерные особенности теории чистого поля

Электродинамика Борна и теории гравитации имеют одно общее свойство — нелинейность. Из результатов, полученных в общей теории относительности, следует, что такая нелинейность есть не-

обходимое, хотя и не достаточное условие того, чтобы движение сингулярностей можно было вывести из самих уравнений поля¹⁾.

1. Вывод уравнений движения. Классическая электродинамика основывается на уравнениях Максвелла, являющихся уравнениями в частных производных первого порядка. Эти уравнения линейны (в них не входят произведения компонент векторов напряженностей или производных от этих компонент). Поэтому сумма (или разность) двух решений этих уравнений поля снова будет решением этих уравнений.

Если две заряженные частицы независимо друг от друга создают электромагнитные поля, являющиеся решениями уравнений Максвелла, то и результирующее поле, получаемое в результате суперпозиции двух элементарных полей, также будет решением уравнений Максвелла. Но тогда с помощью одних только уравнений Максвелла невозможно получить дополнительное условие, характеризующее взаимодействие этих двух частиц, т. е. невозможно получить закон Кулона. Фактически оказывается необходимым, чтобы поля, создаваемые двумя частицами, подчинялись уравнениям Максвелла в том и *только* в том случае, если выполняется такое условие. Уравнения движения как раз и дают такое условие совместности, накладываемое на уравнения поля. Но из линейной теории это условие с необходимостью не вытекает, так как сумма частных решений по-прежнему остается допустимым решением.

Таким образом, из уравнений поля нельзя пока вывести подобного дополнительного условия, и его нужно накладывать независимо. Именно таким путем мы приходим к выражению для силы Лоренца.

Если в противоположность предыдущему случаю уравнения поля нелинейны, то при суперпозиции двух полей, каждое из которых является решением основных уравнений, больше уже не будет получаться решение этих уравнений. Полное поле, создаваемое двумя частицами, может быть приемлемо только в том случае, когда выполняются условия совместности. Что же касается последних, то ими могут определяться уравнения движения частиц. В результате требование совместности основных уравнений дает возможность из самих уравнений поля вывести уравнения движения частиц.

Предложенные Эйнштейном уравнения гравитации не являются линейными. Первый член в $S_{\mu\nu}$ есть функция от вторых производных гравитационного потенциала $g_{\rho\sigma}$ и от произведения первых производных $S_{\mu\nu}(\partial_\lambda^2 g_{\rho\sigma}, \partial_\lambda g_{\rho\sigma}, g_{\rho\sigma})$. Второй член в $T_{\mu\nu}$ характери-

¹⁾ Здесь необходимо также, чтобы уравнения поля подчинялись, по меньшей мере, четырем тождествам, а это условие в электродинамике, даже в нелинейной, не имеет места. См. книгу Бергмана [106].

зует влияние вещества, создающего гравитационное поле. Из уравнений гравитационного поля, таким образом, оказывается возможным получить уравнения движения, а в первом приближении — закон Ньютона. Именно это дает основание считать, что общая теория относительности представляет собой более совершенную теорию поля, чем электродинамика.

2. Сведение источников поля к самому полю. В своих последних работах Эйнштейн пытался объединить поле и частицы в единое целое, обладающее структурой поля. „Мы могли бы рассматривать вещество как бы составленным из таких частей пространства, в которых поле чрезвычайно интенсивно... С этой точки зрения, брошенный камень образован таким изменяющимся полем, область наибольшей интенсивности которого перемещается со скоростью камня. В такой новой физике нет больше места одновременно как для поля, так и для вещества, так как единственной реальностью становится поле“.

Эйнштейн фактически предпринял попытку истолковать вещество (характеризуемое правой частью $T_{\mu\nu}$ в уравнениях поля) при помощи геометрических свойств (характеризуемых компонентами $S_{\mu\nu}$) обобщенного поля. Для этого, очевидно, нужно, чтобы в отдельных случаях величинами $S_{\mu\nu}$ определялось также и электромагнитное поле. Следовательно, общая теория относительности указывает на то, что истинная недуалистическая теория, в которой источники сводятся к полю, с необходимостью должна являться также единой теорией, объединяющей электромагнитное поле с гравитационным.

Таким образом, представляется вероятным, что последовательная единая теория должна приводить к синтезу, во-первых, электромагнитного и гравитационного полей, в результате чего она должна будет включить классическую электродинамику, и, во-вторых, получаемого таким путем обобщенного поля и частиц, с тем, чтобы свойства последних определялись свойствами поля.

„В последовательной теории поля, — пишет Эйнштейн, — все ее элементы должны существенно обладать непрерывностью... Отсюда следует, что в теории поля материальную частицу нельзя рассматривать в качестве основного понятия. Поэтому теория Максвелла, даже независимо от того, что она не включает гравитацию, не может рассматриваться в качестве законченной теории“.

В. ЕДИНЫЕ НЕДУАЛИСТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

Интересно сравнить между собой выводы Эйнштейна с выводами, вытекающими, например, из электродинамики Борна — Инфельда.

В обоих случаях предпринимается попытка свести источники поля к самому полю (недуалистические теории). Чтобы добиться этого в обоих случаях используются нелинейные уравнения.

Существенным условием, при выполнении которого можно получить уравнения движения, является требование нелинейности уравнений поля. Вместе с тем это требование является только необходимым, но не достаточным. Например, одна только электродинамика Борна — Инфельда не дает возможности получить закон Кулона. Этот закон, определяющий движение заряженных частиц, будет получаться из уравнений гравитационного поля, правые части которых характеризуют влияние электромагнитного поля.

Единая теория типа Эйнштейна — Шредингера дает возможность перейти к последовательной теории чистого поля. Как и теория Борна, она является недудалистической и нелинейной. Но в то время, как теория Борна — Инфельда относится только к электродинамике, данная теория приводит к единой интерпретации электромагнитного и гравитационного полей. Кроме того, лежащая в основе теории геометрическая интерпретация дает возможность воспользоваться интуицией и избежать произвола, имеющего место при новых определениях действия и обобщенного тензора энергии — импульса.

При переходе к теории, являющейся единой в двух отношениях (т. е. одновременно единой и недудалистической), трудности интерпретации, разумеется, значительно возрастают. Многочисленные примеры этому дает уже теория Эйнштейна — Шредингера, столкнувшаяся с рядом затруднений, преодолеть которые не удалось. Тем не менее здесь имеются указания на способ, пользуясь которым, вероятно, после внесения каких-то видоизменений можно прийти к интересным результатам.

Такие поиски единства, связанные с классическими теориями поля, не означают приверженности Эйнштейна к какой-то вполне определенной теории и не говорят о его „непоколебимой привязанности к классической теории“. В самом деле, что означает термин „классическая теория“, спрашивает Эйнштейн. Теория Ньютона, основывающаяся на представлении о силах, уступила место теории непрерывного поля Герца — Максвелла, которая в других отношениях также является классической. Общая теория относительности указала еще на один путь построения классической теории, который, однако, не привел к успеху. Тем не менее, добавляет Эйнштейн, классическая теория существует, но „она существует в качестве программы“. Вместе с тем она не дает решающих аргументов против взглядов тех исследователей, которые высказывают сомнение по поводу целесообразности применения самого понятия о континууме. „Такое сомнение заслуживает уважения, но где искать другого пути?“

Можно ли проверить справедливость геометрии, или, точнее, физической теории, составной частью которой является геометрия? Этот вопрос характеризуется такой же степенью произвола, как и вопрос о справедливости остальной части физики. Требование единства, очевидно, приводит к тому, что поиски ответа на этот вопрос будут определяться теми сведениями, которые известны для каждой эпохи, а также математической структурой теории. Нередко математический формализм опережает интуитивную интерпретацию результатов, которые получаются с его помощью. В этом случае возникают трудности, связанные с тем, что опытные результаты нередко истолковываются неоднозначно и остается недостаточно ясным, что они подтверждают (космологические теории), а также трудности согласования с формализмом другого типа (например, с формализмом, который применяется в квантовых теориях).

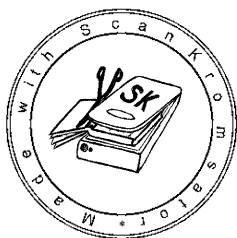
Пути, открытые едиными теориями, требуют не столько дальнейшего развития, сколько анализа с более глубокой точки зрения. При этом условии в конечном итоге они смогут привести к нелегкому, но необходимому синтезу.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ



Эта страница пуста



ВВЕДЕНИЕ КООРДИНАТ В ЕВКЛИДОВОМ ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ¹⁾

Пространство n измерений мы будем называть *векторным*, если элементы этого пространства A, B, \dots имеют n составляющих и обладают обычными свойствами векторов — коммутативностью, ассоциативностью, дистрибутивностью. Элементы A, B, \dots называются *векторами* этого пространства.

Векторное пространство называется *евклидовым*, если определена операция, соответствующая обычному *скалярному произведению* векторов и ставящая в соответствие двум векторам число (A, B) .

Условие о суммировании. Мы всегда будем пользоваться следующим условием суммирования: *если в одном и том же выражении некоторый индекс повторяется вверху и внизу, то подразумевается, что по этому индексу производится суммирование, в связи с чем соответствующий знак суммы \sum опускается.* Например,

$$A_{\mu}B^{\mu} = A_1B^1 + A_2B^2 + \dots + A_nB^n.$$

Такой характеризующий суммирование индекс, называемый *немым индексом*, может обозначаться произвольной буквой ($A_{\mu}B^{\mu} = = A_{\lambda}B^{\lambda}$).

Результаты настоящей главы имеют место для евклидова пространства n измерений, но при их применении нам достаточно

¹⁾ Результаты раздела А настоящей главы используются в гл. 6, посвященной четырехмерному формализму специальной теории относительности. Однако там при изложении специальной теории относительности на предположения из раздела А накладываются ограничения, связанные с применением только ортонормированных базисных векторов. Тем не менее, как мы отмечали в начале гл. 6, в евклидовом пространстве оказывается полезным введение более общих координат. Изучению этих вопросов, перенесенных в математическое дополнение, как раз и посвящена настоящая глава.

ограничиться частным случаем четырехмерного евклидова пространства. При этом, как обычно, греческие индексы $\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$ будут принимать значения 1, 2, 3, 0¹⁾.

А. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

§ 1. Ковариантные и контравариантные компоненты

Пусть система отсчета S определяется заданием прямолинейных координатных осей x^μ . На каждой из этих осей проведем единичный вектор e_μ .

Произвольный вектор A представляется в виде

$$A = A^\mu e_\mu. \quad (14.1)$$

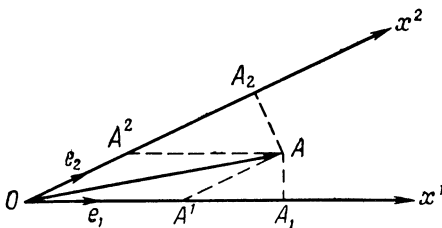
Величины A^μ являются составляющими вектора A , получаемыми в результате *параллельного проектирования на координатные*

оси. Они по определению называются *контравариантными компонентами вектора A* .

С другой стороны, можно определить величины

$$A_\mu = A e_\mu. \quad (14.2)$$

Они являются ортогональными проекциями вектора A на координатные оси и называются *ковариантными компонентами вектора A* .



Фиг. 43. Применение косоугольных осей; ковариантность и контравариантность.

Обозначим через $g_{\mu\nu}$ *скалярное произведение базисных векторов*

$$(e_\mu \cdot e_\nu) = g_{\mu\nu}. \quad (14.3)$$

В случае выбранных нами прямолинейных координатных осей величины $g_{\mu\nu}$, так же как и базисные векторы, *являются постоянными*. По самому определению всегда

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \quad (14.4)$$

При помощи $g_{\mu\nu}$ ковариантные компоненты вектора легко выражаются через контравариантные компоненты

$$A_\mu = A \cdot e_\mu = A^\nu (e_\nu \cdot e_\mu) = g_{\mu\nu} A^\nu. \quad (14.5)$$

¹⁾ В ряде работ вместо индекса 0 часто используется также индекс 4. — *Прим. перев.*

Наконец, с учетом (14.3) определим величины $g^{\mu\nu}$, для которых

$$g_{\mu\rho}g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (14.6)$$

Из (14.5) и (14.6) получим

$$g^{\mu\rho}A_{\rho} = g^{\mu\rho}g_{\rho\sigma}A^{\sigma} = \delta_{\sigma}^{\mu}A^{\sigma} = A^{\mu}. \quad (14.7)$$

Таким образом, переход от ковариантных компонент вектора к контравариантным и обратно производится при помощи соотношений

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu}A^{\nu}, \quad A^{\mu} = g^{\mu\nu}A_{\nu}. \quad (14.8)$$

Обозначим через g детерминант, образованный из величин $g_{\mu\nu}$:

$$g = \text{Det } g_{\mu\nu}. \quad (14.9)$$

С учетом (14.6) нетрудно проверить, что

$$\text{минор } g_{\mu\nu} = g g^{\mu\nu}. \quad (14.10)$$

Частный случай. *Применение ортогональных реперов*¹⁾. Евклидово пространство можно отнести к ортогональной системе координат. Для этого случая, согласно предыдущим определениям, получим

$$e_{\mu} \cdot e_{\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad (14.11)$$

где

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \neq \nu, \\ 1 & \text{если } \mu = \nu. \end{cases} \quad (14.12)$$

Поэтому

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad (14.13)$$

и

$$A^{\mu} = A_{\mu}. \quad (14.14)$$

Если в евклидовом пространстве используется *ортогональная система координат* ($g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$), то это не позволяет различать контравариантные компоненты вектора от его ковариантных компонент. Таким образом, в этом случае ковариантные и контравариантные компоненты — это то же самое. Поэтому, если в трехмерном евклидовом пространстве пользоваться ортогональными координатными осями, что всегда возможно, то нет необходимости различать эти два вида компонент.

¹⁾ Ортогональным репером в евклидовом пространстве называется совокупность базисных векторов, для которых имеют место условия (14.11) (или же характеризующая этими векторами система координат). — *Прим. перев.*

§ 2. Норма вектора. Скалярное произведение двух векторов

По определению, в векторном пространстве *скалярное произведение* двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} равно

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^\mu \mathbf{e}_\mu) \cdot (B^\nu \mathbf{e}_\nu) = A^\mu B^\nu (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu), \quad (14.15)$$

т. е., согласно (14.3),

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu. \quad (14.16)$$

Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = 0. \quad (14.17)$$

Скалярное произведение вектора на самого себя называется *нормой вектора*. Таким образом, норма является квадратом длины вектора

$$|\mathbf{A}|^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu. \quad (14.18)$$

Если норма вектора равна единице, то вектор называется *нормированным* или *единичным*. Если норма любого ненулевого вектора положительна, то пространство называется *собственно евклидовым*.

В частности, квадрат вектора $d\mathbf{s}$ с компонентами dx^μ равен

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (14.19)$$

Частный случай: *Применение ортогональных реперов*. Если четырехмерное пространство отнесено к прямоугольной системе координат, то, согласно (14.13),

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}.$$

Скалярное произведение векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} принимает простой вид

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = \sum_{\mu} A^\mu B^\mu, \quad (14.20)$$

а „норма“, т. е. квадрат длины вектора, согласно (14.20), становится равной

$$|\mathbf{A}|^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \sum_{\mu} (A^\mu)^2. \quad (14.21)$$

В частности,

$$ds^2 = \sum_{\mu} (dx^\mu)^2. \quad (14.22)$$

Выражения (14.20) — (14.22) обобщают определения скалярного произведения, длины вектора и расстояния между двумя бесконечно близкими точками $M(x^\mu)$ и $M'(x^\mu + dx^\mu)$, принятые в трехмерном пространстве, в котором используется прямоугольная система координат.

§ 3. Изменение прямолинейных координатных осей

Изменим в четырехмерном евклидовом пространстве систему базисных осей. В связи с этим перейдем от единичных векторов e_μ , направленных вдоль прямолинейных координатных осей x^μ , к новым векторам e'_μ , направленным вдоль прямолинейных осей x'^μ :

$$e'_\mu = a^y_\mu e_y. \quad (14.23)$$

Здесь a^y_μ , — постоянные коэффициенты, характеризующие изменение косоугольных осей.

Новые базисные векторы e'_μ будут независимыми, если

$$a = |a^y_{\mu'}| \neq 0. \quad (14.24)$$

Обратно, e_μ выражаются через e'_μ по формулам

$$e_\mu = a^{y'}_\mu e'_y, \quad (14.25)$$

где

$$a' = |a^{y'}_\mu| \neq 0. \quad (14.26)$$

Таким образом, комбинируя (14.23) и (14.25), получаем

$$e'_\mu = a^y_\mu e_y = a^y_\mu a^{\rho'}_y e'_\rho, \quad e_\mu = a^{y'}_\mu e'_y = a^{y'}_\mu a^{\rho'}_y e'_\rho. \quad (14.27)$$

Это дает так называемое условие ортогональности

$$a^y_\mu a^{\rho'}_y = a^{\rho'}_\nu a^y_\nu = \delta^{\rho'}_\mu, \quad (14.28)$$

где

$$\delta^{\rho'}_\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \neq \rho, \\ 1, & \text{если } \mu = \rho. \end{cases} \quad (14.29)$$

Условия (14.28) эквивалентны соотношениям между a^y_μ и $a^{\rho'}_\nu$, получаемым в результате решения линейных уравнений (14.23) и обратных к ним уравнений. В самом деле,

$$a^{y'}_\mu = \frac{\text{минор } a^{\mu}_y}{[a]}, \quad a^y_\mu = \frac{\text{минор } a^{\mu}_y}{[a']}, \quad (14.30)$$

откуда и вытекают условия (14.28). В частности, из свойств детерминантов получим

$$[a] \cdot [a'] = 1. \quad (14.31)$$

Рассмотрим теперь вектор

$$x = x^\mu e_\mu, \quad (14.32)$$

у которого в прямолинейной системе координат, характеризуемой базисными векторами e_μ , контравариантные компоненты равны x^μ ,

а в системе координат с базисными векторами e'_μ они равны x'^μ .
Имеем

$$\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu = x'^\mu \mathbf{e}'_\mu, \quad (14.33)$$

т. е.

$$x^\mu a'_\mu{}^\nu e'_\nu = x'^\mu e'_\mu, \quad x'^\mu a'_\mu{}^\nu e_\nu = x^\mu e_\mu \quad (14.34)$$

при любом выборе базисов \mathbf{e}_μ и \mathbf{e}'_μ .

Отсюда получаем формулы преобразования

$$x^\mu = a'^\mu{}_\nu x'^\nu \quad (14.35)$$

и обратно

$$x'^\mu = a^{\mu'}{}_\nu x^\nu. \quad (14.36)$$

§ 4. Инварианты, 4-векторы, тензоры

Инвариантом называется величина, не меняющая своего вида при изменении (14.23) системы базисных векторов, причем в настоящей главе преобразование (14.23) относится к случаю прямолинейных координатных осей, когда $a'^\mu{}_\nu$ и $a^\nu{}_\mu$ постоянны. Инвариантными будут выражения

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu, \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x^\mu}. \quad (14.37)$$

Вектором A называется величина, ковариантные компоненты которой при изменении системы отсчета в данной точке преобразуются таким же образом, как и базисные векторы \mathbf{e}_μ . Контравариантные компоненты вектора преобразуются как координаты x^μ .

Действительно, для ковариантных компонент имеем

$$A_\mu = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\mu = A a'^\nu{}_\mu e'_\nu = a'^\nu{}_\mu A'_\nu \quad (14.38)$$

и обратно

$$A'_\mu = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}'_\mu = A a^\nu{}_\mu e_\nu = a^\nu{}_\mu A_\nu. \quad (14.39)$$

С другой стороны, вводя контравариантные компоненты, можно записать

$$\mathbf{A} = A^\mu \mathbf{e}_\mu = A'^\mu \mathbf{e}'_\mu, \quad (14.40)$$

т. е.

$$A^\mu a'_\mu{}^\nu e'_\nu = A'^\mu e'_\mu, \quad A'^\mu a^\nu{}_\mu e_\nu = A^\mu e_\mu. \quad (14.41)$$

Отсюда для контравариантных компонент получаем формулы преобразования, аналогичные (14.38):

$$A^\mu = a^\mu{}_\nu A'^\nu, \quad A'^\mu = a^{\mu'}{}_\nu A^\nu. \quad (14.42)$$

При помощи ковариантных или контравариантных компонент двух векторов A и B можно образовать выражения

$$C_{\mu\nu} = A_{\mu} B_{\nu}, \quad C^{\mu\nu} = A^{\mu} B^{\nu}, \quad C_{\mu}^{\nu} = A_{\mu} B^{\nu}. \quad (14.43)$$

Они преобразуются следующим образом:

$$C'_{\mu\nu} = A'_{\mu} B'_{\nu} = a_{\mu}^{\rho} a_{\nu}^{\sigma} A_{\rho} B_{\sigma} = a_{\mu}^{\rho} a_{\nu}^{\sigma} C_{\rho\sigma}, \quad (14.44)$$

$$C'^{\mu\nu} = A'^{\mu} B'^{\nu} = a_{\rho}^{\mu} a_{\sigma}^{\nu} A^{\rho} B^{\sigma} = a_{\rho}^{\mu} a_{\sigma}^{\nu} C^{\rho\sigma}, \quad (14.45)$$

$$C'_{\mu}{}^{\nu} = A'_{\mu} B'^{\nu} = a_{\mu}^{\rho} a_{\sigma}^{\nu} A_{\rho} B^{\sigma} = a_{\mu}^{\rho} a_{\sigma}^{\nu} C_{\rho}^{\sigma}. \quad (14.46)$$

Любая величина, которая при преобразовании систем базисных векторов преобразуется по данному закону, называется *тензором*. Более обще, *тензором ранга n* называется величина, компоненты которой характеризуются n индексами и преобразуются по закону

$$A'_{\mu\nu \dots \rho\sigma} = a_{\mu}^{\alpha} a_{\nu}^{\beta} \dots a_{\rho}^{\gamma} a_{\sigma}^{\lambda} A_{\alpha\beta \dots \gamma\lambda}, \quad (14.47)$$

$$A'^{\mu\nu \dots \rho\sigma} = a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\nu} \dots a_{\gamma}^{\rho} a_{\lambda}^{\sigma} A^{\alpha\beta \dots \gamma\lambda}, \quad (14.48)$$

$$A'_{\mu\nu} \dots{}^{\rho\sigma} = a_{\mu}^{\alpha} a_{\nu}^{\beta} \dots a_{\gamma}^{\rho} a_{\lambda}^{\sigma} A_{\alpha\beta} \dots{}^{\gamma\lambda} \quad (14.49)$$

и обратно

$$A_{\mu\nu \dots \rho\sigma} = a_{\mu}^{\alpha'} a_{\nu}^{\beta'} \dots a_{\rho}^{\gamma'} a_{\sigma}^{\lambda'} A'_{\alpha\beta \dots \gamma\lambda}, \quad (14.50)$$

$$A^{\mu\nu \dots \rho\sigma} = a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\nu} \dots a_{\gamma}^{\rho} a_{\lambda}^{\sigma} A'^{\alpha\beta \dots \gamma\lambda}, \quad (14.51)$$

$$A_{\mu\nu} \dots{}^{\rho\sigma} = a_{\mu}^{\alpha'} a_{\nu}^{\beta'} \dots a_{\gamma}^{\rho} a_{\lambda}^{\sigma} A'_{\alpha\beta} \dots{}^{\gamma\lambda}. \quad (14.52)$$

§ 5. Симметричность, антисимметричность

Тензор называется *симметричным* по отношению к индексам μ и ν , если его компоненты $A_{\mu\nu} \dots$ (или $A^{\mu\nu} \dots$) таковы, что

$$A_{\mu\nu} \dots = A_{\nu\mu} \dots \quad (14.53)$$

Тогда такие компоненты обозначают $A_{(\mu\nu)}$ (или иногда $A_{\underline{\mu\nu}}$).

Тензор называется *антисимметричным* по отношению к индексам μ и ν , если его компоненты $A_{\mu\nu} \dots$ и $A_{\nu\mu} \dots$ таковы, что

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}. \quad (14.54)$$

Тогда такие компоненты обозначают $A_{[\mu\nu]}$ (или иногда $A_{\overline{\mu\nu}}$).

Произвольный тензор всегда можно разложить на сумму симметричного и антисимметричного тензоров

$$A_{\mu\nu} \dots = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) = A_{(\mu\nu)} + A_{[\mu\nu]}. \quad (14.55)$$

Нетрудно проверить, что свойство тензора быть симметричным или антисимметричным не меняется при переходе к другой системе базисных векторов.

Существенное замечание. Каждый тензор является независимым геометрическим объектом. Это означает, что при преобразовании косоугольных осей, характеризуемом формулой (14.23), новые компоненты полностью определяются заданием старых компонент и коэффициентов a_{μ}^{ν} , или $a_{\mu}^{\nu'}$.

§ 6. Преобразование метрического тензора. Частный случай ортогональных реперов

Из определения (14.3) непосредственно вытекает закон преобразования симметричного тензора $g_{\mu\nu}$:

$$g'_{\mu\nu} = (e'_{\mu} \cdot e'_{\nu}) = a_{\mu}^{\rho} a_{\nu}^{\sigma} (e_{\rho} \cdot e_{\sigma}) = a_{\mu}^{\rho} a_{\nu}^{\sigma} g_{\rho\sigma}. \quad (14.56)$$

Обратно

$$g_{\mu\nu} = (e_{\mu} \cdot e_{\nu}) = a_{\mu}^{\rho'} a_{\nu}^{\sigma'} (e'_{\rho} \cdot e'_{\sigma}) = a_{\mu}^{\rho'} a_{\nu}^{\sigma'} g'_{\rho\sigma}. \quad (14.57)$$

Связь между контравариантными компонентами $g'^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ непосредственно получается из (14.56) и (14.57), если только учесть (14.6) Имеем

$$g'^{\mu\nu} = a_{\rho}^{\mu'} a_{\sigma}^{\nu'} g'^{\rho\sigma} \quad (14.58)$$

и обратно

$$g^{\mu\nu} = a_{\rho}^{\mu} a_{\sigma}^{\nu} g'^{\rho\sigma}. \quad (14.59)$$

В самом деле, из (14.6) и (14.56) имеем

$$g'_{\rho\sigma} g'^{\rho\tau} = a_{\rho}^{\lambda} a_{\sigma}^{\delta} g_{\lambda\delta} g'^{\rho\tau} = \delta_{\sigma}^{\tau}$$

Умножим на $a_{\tau}^{\nu} a_{\pi}^{\sigma'}$, просуммируем и воспользуемся (14.6):

$$a_{\tau}^{\nu} a_{\pi}^{\sigma'} a_{\rho}^{\lambda} a_{\sigma}^{\delta} g_{\lambda\delta} g'^{\rho\tau} = \delta_{\sigma}^{\tau} a_{\tau}^{\nu} a_{\pi}^{\sigma'} = a_{\sigma}^{\nu} a_{\pi}^{\sigma'} = \delta_{\pi}^{\nu},$$

$$\delta_{\pi}^{\delta} a_{\tau}^{\nu} a_{\rho}^{\lambda} g_{\lambda\delta} g'^{\rho\tau} = a_{\tau}^{\nu} a_{\rho}^{\lambda} g_{\lambda\pi} g'^{\rho\tau} = \delta_{\pi}^{\nu}.$$

Умножая на $g^{\mu\pi}$, получаем (14.59)

$$g^{\mu\pi} a_{\tau}^{\nu} a_{\rho}^{\lambda} g_{\lambda\pi} g'^{\rho\tau} = g^{\mu\pi} \delta_{\pi}^{\nu}$$

$$\delta_{\lambda}^{\mu} a_{\tau}^{\nu} a_{\rho}^{\lambda} g'^{\rho\tau} = a_{\rho}^{\mu} a_{\tau}^{\nu} g'^{\rho\tau} = g^{\mu\nu}.$$

Инвариантность интервала

$$ds^2 = dx_{\mu} dx^{\mu} \quad (14.60)$$

следует из (14.56)

$$ds'^2 = g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = ds^2. \quad (14.61)$$

Частный случай. *Применение ортогональных реперов.* Если реперы, определяемые векторами e_μ и e'_μ , ортогональны, то

$$g_{\mu\nu} = (e_\mu \cdot e_\nu) = \delta_{\mu\nu}, \quad g'_{\mu\nu} = (e'_\mu \cdot e'_\nu) = \delta_{\mu\nu}, \quad (14.62)$$

откуда следует

$$\delta_{\mu\nu} = a^{\rho}_{\mu} a^{\sigma}_{\nu} \delta_{\rho\sigma} = \sum_{\rho} a^{\rho}_{\mu} a^{\rho}_{\nu}, \quad (14.63)$$

Умножая на a^{λ}_{ν} , суммируя по ν и учитывая условия ортогональности (14.28), получаем

$$a^{\lambda\nu} \delta_{\mu\nu} = a^{\lambda\nu} \sum_{\rho} a^{\rho}_{\mu} a^{\rho}_{\nu} = a^{\lambda}_{\mu}, \quad (14.64)$$

т. е.

$$a^{\lambda\mu} = a^{\lambda}_{\mu}. \quad (14.65)$$

Из этого соотношения вытекает равенство детерминантов $[a]$ и $[a']$:

$$[a'] = [a]. \quad (14.66)$$

С другой стороны, согласно (14.28), детерминанты $[a]$ и $[a']$, соответствующие преобразованию от одних базисных векторов к другим, всегда подчиняются соотношению

$$[a] \cdot [a'] = 1. \quad (14.31)$$

Сравнивая (14.31) и (14.66), в результате получаем

$$[a] = [a'] = \pm 1. \quad (14.67)$$

§ 7. Вращение осей в четырехмерном евклидовом пространстве

Рассмотрим преобразования осей

$$e'_{\mu} = a^{\nu}_{\mu} e_{\nu}, \quad e_{\mu} = a^{\nu'}_{\mu} e'_{\nu}, \quad (14.23)$$

ограниченные условиями

$$a^{\rho}_{\mu} a^{\nu}_{\rho} = \delta^{\nu}_{\mu}, \quad (14.28)$$

которые обеспечивают инвариантность длины вектора.

Преобразование косоугольных осей будет называться вращением, если выполняются два следующих условия:

Скалярные произведения $g_{\mu\nu}$ и $g'_{\mu\nu}$ равны между собой

$$g'_{\mu\nu} = (e'_{\mu} \cdot e'_{\nu}) = (e_{\mu} \cdot e_{\nu}) = g_{\mu\nu}. \quad (14.68)$$

В связи с этим

$$a_{\mu}^{\rho} a_{\nu}^{\sigma} g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}, \quad (14.69)$$

откуда, умножая на $a_{\lambda}^{\nu'}$, суммируя и учитывая (14.28), будем иметь

$$a_{\mu}^{\rho} g_{\rho\lambda} = a_{\lambda}^{\nu'} g_{\mu\nu}. \quad (14.70)$$

Обычно рассматривают случай ортогональных реперов (соответствующих декартовым системам координат), когда условие (14.70) с учетом $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ дает (14.65)

$$a_{\mu'}^{\lambda} = a_{\lambda}^{\mu'}.$$

Должно быть

$$[a] = [a'] = \pm 1. \quad (14.71)$$

Действительно, из предыдущего параграфа известно, что из условий (14.65) и (14.31) следует $[a] = [a'] = \pm 1$.

Если принять предположение (14.71), то системы базисных векторов e_{μ} и e'_{μ} будут принадлежать к одному и тому же классу и переход от одной из этих систем к другой будет осуществляться при помощи вращения.

Если же $[a] = [a'] = -1$, то две системы векторов будут, по определению, принадлежать к различным классам и переход от одной из этих систем к другой будет осуществляться при помощи отражения.

Таким образом, *вращение ортогональных осей* в четырехмерном евклидовом пространстве будет определяться соотношениями

$$\boxed{e'_{\mu} = a_{\mu}^{\nu} e_{\nu}, \quad e_{\mu} = a_{\mu}^{\nu'} e'_{\nu}}, \quad (14.23)$$

где

$$\boxed{a_{\mu}^{\rho} a_{\rho}^{\nu'} = \delta_{\mu}^{\nu'}} \quad (14.28)$$

и

$$\boxed{a_{\mu'}^{\lambda} = a_{\lambda}^{\mu'}} \quad (14.65)$$

$$\boxed{[a] = [a'] = 1}. \quad (14.71)$$

Соотношения (14.23) и (14.28) имеют место для любых линейных преобразований косоугольных осей.

Условием (14.65) обеспечивается сохранение ортогональности осей.

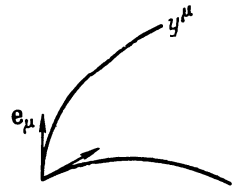
Наконец, (14.71) приводит к тому, что рассматриваемое преобразование становится вращением.

Б. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

§ 8. Переход в евклидовом векторном пространстве от одной системы криволинейных координат к другой

Мы изучали преобразования одного прямолинейного репера (x^μ) в другой прямолинейный репер (x'^μ). В случае евклидова векторного пространства явления, происходящие в большой области пространства, всегда можно описывать в системе координат, характеризуемой прямолинейным ортогональным репером. При этом ds^2 приводится к виду (14.22).

Вместе с тем эти же явления возможно, а в некоторых случаях и желательно, описывать в произвольных криволинейных координатах (y^μ). Чтобы можно было переходить от компонент тензора $A_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ в системе (M, y^μ) к компонентам этого же тензора $A'_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}$ в системе (M', y'^μ) , прежде всего необходимо установить связь между двумя системами отсчета (M, y^μ) и (M', y'^μ) . Другими словами, нужно уметь по реперу (M, y^μ) находить репер (M', y'^μ) . Теперь мы собираемся перейти к рассмотрению подобных вопросов, связанных с введением обобщенных координат.



Фиг. 44. Ассоциированный естественный репер.

Криволинейные координаты и естественный ассоциированный репер. Рассмотрим в точке M евклидова векторного пространства систему (y^μ) и ассоциированный репер, образованный касательными к y^μ единичными векторами e_μ (фиг. 44).

Более точно, e_μ направлены по касательным к „координатным кривым“ y^μ . „Координатной кривой“ называется такая кривая, которая получается, если изменяется только одна из координат, а другие не меняются. Координатные кривые в криволинейной системе координат мы обозначаем через y^μ .

Если, например, взять систему сферических координат (r, θ, φ) , то координатные кривые, проходящие через точку M (фиг. 45), будут идти по радиус-вектору, по меридиану и по параллели. В точке M эти кривые взаимно перпендикулярны, и ассоциированный естественный репер, образованный единичными касательными векторами e_μ , является ортогональным репером. Тем не менее в системе координат $y^\mu (r, \theta, \varphi)$ компоненты $g_{\mu\nu}$ не равны $\delta_{\mu\nu}$, а зависят от координат точки M . В самом деле, за единичные векторы нужно принять векторы e_μ , которые служат

эталоны длины. Рассмотрим, например, декартову систему координат x', y', z' , начало которой расположено в точке M и которая эквивалентна системе $Oxuz$. Тогда

$$(e_1')^2 = 1, \quad (e_2')^2 = 1, \quad (e_3')^2 = 1, \quad (A)$$

$$g'_{pq} = e'_p \cdot e'_q = \delta_{pq}.$$

Нетрудно видеть, что при переходе от векторов e'_μ к e_μ , которые по-прежнему определяются как касательные векторы к координатным кривым u_r, u_θ, u_φ , эталоны длины, определяемые каждым из реперов e_μ , уже не удастся приравнять единице. В самом деле, согласно (14.25),

$$e_p = a_p^{q'} e'_q \quad (B)$$

и поскольку векторы e'_q взаимно перпендикулярны и их норма равна единице, то

$$(e_p^2) = (a_p^{1'})^2 + (a_p^{2'})^2 + (a_p^{3'})^2. \quad (B)$$

Отсюда получим значения $a_p^{q'} = \partial x'^q / \partial x^p$, где

$$\begin{aligned} x'^1 &= x, & x'^2 &= y, & x'^3 &= z, \\ x^1 &= r, & x^2 &= \theta, & x^3 &= \varphi \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x = x'^1 &= r \sin \theta \cos \varphi, & y = x'^2 &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = x'^3 &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (Г)$$

Подставляя их в (B), получаем

$$(e_1)^2 = 1, \quad (e_2)^2 = r^2, \quad (e_3)^2 = r^2 \sin^2 \theta, \quad (Д)$$

откуда определяются значения $g_{\mu\nu} = (e_\mu \cdot e_\nu)$ в точке M для системы координат r, θ, φ (см. Лихнерович [113]).

По определению¹⁾

$$dM = e_\mu dy^\mu. \quad (14.72)$$

Система прямолинейных координатных осей в точке M , соответствующих векторам e_μ , образует *естественный репер, ассоциированный с криволинейными координатами* (y^μ).

Если в точке M выбрать другую систему координат (y'^μ), то с ней должен ассоциироваться новый естественный репер, обра-

¹⁾ Если каждому значению параметра ξ соответствует одна и только одна точка M , то dM в сокращенном виде характеризует дифференциал

$$dOM = dO'M = \xi' d\xi,$$

который зависит только от точки M , но не зависит от произвольно выбираемого начала O или O' .

зованный касательными к y'^{μ} единичными векторами e'_{μ} . Таким образом,

$$dM = e'_{\mu} dy'^{\mu}, \quad (14.73)$$

т. е.

$$e'_{\mu} = \frac{\partial M}{\partial y'^{\mu}} = \frac{\partial M}{\partial y^{\nu}} \frac{\partial y^{\nu}}{\partial y'^{\mu}} = a^{\nu}_{\mu} e_{\nu}, \quad (14.74)$$

где

$$a^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial y^{\nu}}{\partial y'^{\mu}}. \quad (14.75)$$

Обратно

$$e_{\mu} = a^{\nu}_{\mu} e'_{\nu} \quad (14.76)$$

где

$$a^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial y'^{\nu}}{\partial y^{\mu}}. \quad (14.77)$$

В криволинейной системе координат (y^{μ}) или (y'^{μ}) для интервала ds^2 будем теперь иметь

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dy^{\mu} dy^{\nu} = g'_{\mu\nu} dy'^{\mu} dy'^{\nu}, \quad (14.78)$$

где, как и в (14.3),

$$g_{\mu\nu} = (e_{\mu} \cdot e_{\nu}), \quad g'_{\mu\nu} = (e'_{\mu} \cdot e'_{\nu}). \quad (14.79)$$

Значения величин $g_{\mu\nu}$, которые в ортонормированной системе координат сводятся к $\delta_{\mu\nu}$, в точке M будут определяться естественным репером, образованным ассоциированными с y^{μ} и характеризующимися векторами e_{μ} косоугольными осями. Для общего случая

$$g_{\mu\nu} = (e_{\mu} \cdot e_{\nu}) = a^{\rho}_{\mu} a^{\sigma}_{\nu} (e'_{\rho} \cdot e'_{\sigma}) = a^{\rho}_{\mu} a^{\sigma}_{\nu} g'_{\rho\sigma}. \quad (14.80)$$

Рассмотрим теперь в евклидовом векторном пространстве две бесконечно близкие точки M и M' , так что $OM' = OM + dM$. Для краткости OM' и OM будем обозначать через M' и M . В системе криволинейных координат y^{μ} точке M соответствует естественный репер e_{μ} , а точке $M + dM$ — естественный репер $e_{\mu} + de_{\mu}$. Чтобы связать между собой системы векторов $(M + dM, e_{\mu} + de_{\mu})$ и (M, e_{μ}) , нужно выразить dM и de_{μ} через естественный репер точки M :

$$dM = \omega^{\mu} e_{\mu}, \quad (14.81)$$

$$de_{\mu} = \omega^{\nu}_{\mu} e_{\nu}, \quad (14.82)$$

где

$$\omega^\mu = dy^\mu, \quad \omega^\nu = \Gamma_{\mu\rho}^\nu dy^\rho. \quad (14.83)$$

Поскольку ω_μ^ν являются линейными функциями приращений dy^ρ , то

$$dM = dy^\mu e_\mu, \quad (14.84)$$

$$de_\mu = \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_\nu dy^\rho. \quad (14.85)$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} dg_{\mu\nu} = d(e_\mu \cdot e_\nu) &= \Gamma_{\mu\rho}^\lambda (e_\lambda \cdot e_\nu) dy^\rho + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda (e_\mu \cdot e_\lambda) dy^\rho = \\ &= (\Gamma_{\mu\rho, \nu} + \Gamma_{\nu\rho, \mu}) dy^\rho, \end{aligned} \quad (14.86)$$

где мы положили

$$\Gamma_{\mu\rho}^\lambda g_{\lambda\nu} = \Gamma_{\mu\rho, \nu}. \quad (14.87)$$

С другой стороны, согласно (14.84),

$$\partial_\mu M = e_\mu. \quad (14.88)$$

Условия

$$\partial_\nu (\partial_\mu M) = \partial_\mu (\partial_\nu M), \quad \text{т. е.} \quad \partial_\nu e_\mu = \partial_\mu e_\nu \quad (14.89)$$

с учетом (14.85) перепишутся в виде

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda e_\lambda \quad (14.90)$$

или

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda, \quad \Gamma_{\mu\nu, \rho} = \Gamma_{\nu\mu, \rho}. \quad (14.91)$$

Как видим, коэффициенты $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ симметричны относительно μ и ν . Если (14.86) записать в виде

$$\Gamma_{\mu\rho, \nu} + \Gamma_{\nu\rho, \mu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} \quad (14.92a)$$

и если в (14.90) поменять местами μ и ρ , а затем ν и ρ :

$$\Gamma_{\rho\mu, \nu} + \Gamma_{\nu\mu, \rho} = \partial_\mu g_{\rho\nu}, \quad (14.92б)$$

$$\Gamma_{\mu\nu, \rho} + \Gamma_{\rho\nu, \mu} = \partial_\nu g_{\mu\rho}, \quad (14.92в)$$

то, вычитая (14.92a) из суммы (14.92б) и (14.92в) и учитывая, что, согласно (14.91), коэффициенты $\Gamma_{\mu\nu, \rho}$ по первым двум индексам симметричны, получаем

$$\Gamma_{\mu\nu, \rho} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (14.93)$$

Наконец, полагая

$$[\mu\nu, \rho] = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (14.94)$$

$$\{\overset{\rho}{\mu\nu}\} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \quad (14.95)$$

коэффициенты $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ можно записать в виде

$$\Gamma_{\mu\nu, \rho} = [\mu\nu, \rho], \quad \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \{\overset{\rho}{\mu\nu}\}. \quad (14.96)$$

Выражения (14.94) и (14.95) называется *символами Кристоффеля первого и второго рода*. Таким образом, коэффициенты $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, которые оказываются тождественными символам Кристоффеля, представляются в виде функций от $g_{\mu\nu}$ и их производных, т. е. определяются по известному реперу для точки M . Следовательно, приращения dM и de_μ выражаются в системе отсчета, определенной для точки M , и закон перехода от системы (M, e_μ) к системе $(M + dM, e_\mu + de_\mu)$ оказывается полностью определенным.

З а м е ч а н и е 1. Коэффициенты $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, позволяющие определить приращения de_μ , т. е. устанавливающие связь между естественными реперами в двух бесконечно близких точках пространства, называются *коэффициентами аффинной связности*. При этом величины $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ не являются компонентами тензора.

В самом деле, при переходе к другой системе криволинейных координат в соответствии с (14.25) для точки M можно написать соотношение

$$e_\mu = a_\mu^{\nu'} e_{\nu'} \quad (A)$$

или

$$de_\mu = a_\mu^{\nu'} de_{\nu'} + (da_\mu^{\nu'}) e_{\nu'}, \quad (B)$$

и, согласно (14.82),

$$de_\mu = a_\mu^{\nu'} \omega_{\nu'}^\rho e_\rho + (da_\mu^{\nu'}) e_\rho = (da_\mu^{\nu'} + a_\mu^{\nu'} \omega_{\nu'}^\rho) e_\rho = (da_\mu^{\nu'} + a_\mu^{\nu'} \omega_{\nu'}^\rho) a_\rho^\sigma e_\sigma. \quad (B')$$

Но для точки M мы имеем также

$$de_\mu = \omega_\mu^\sigma e_\sigma. \quad (Г)$$

Сравнивая условия (B) и (Г), в результате получаем

$$\omega_\mu^\sigma = \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma dy^\lambda = (da_\mu^{\nu'} + a_\mu^{\nu'} \omega_{\nu'}^\rho) a_\rho^\sigma, \quad (Д)$$

т. е., поскольку $\omega_{\nu'}^\rho = \Gamma_{\nu'\tau}^\rho dy^\tau = \Gamma_{\nu'\lambda}^\rho a_\lambda^{\tau'} dy^\lambda$,

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma = (\partial_\lambda a_\mu^{\nu'} + a_\mu^{\nu'} \Gamma_{\nu'\tau}^\rho a_\lambda^{\tau'}) a_\rho^\sigma. \quad (E)$$

Паряду с членами $a_{\mu}^{\nu'} a_{\lambda}^{\tau'} a_{\rho}^{\sigma}$, $\Gamma_{\nu\tau}^{\rho}$, которые имелись бы в случае, если бы $\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}$ преобразовывались как компоненты тензора, при преобразованиях координат появляются также члены $a_{\rho}^{\sigma} \partial_{\lambda} a_{\mu}^{\rho'} = a_{\rho}^{\sigma} \partial_{\lambda} \partial_{\mu} y^{\rho}$. Таким образом, коэффициенты аффинной связности при изменении криволинейных координат не преобразуются как компоненты тензора.

В приведенном выводе не использовались какие-либо свойства симметрии коэффициентов $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$. Если предположить, что $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ не симметричны, то антисимметричные части коэффициентов связности $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = 1/2 (\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho})$ будут преобразовываться как компоненты тензора, так как в этом случае в формулах преобразования дополнительные члены типа $\partial_{\mu} \partial_{\nu} - \partial_{\nu} \partial_{\mu}$ обратятся в нуль.

Замечание 2. Если евклидово векторное пространство описывать в произвольной системе криволинейных координат, то ассоциированный естественный репер при переходе от одной точки к другой будет изменяться. Величины $g_{\mu\nu}$, по определению равные $g_{\mu\nu} = (e_{\mu} \cdot e_{\nu})$, зависят от y^{μ} и изменяются при переходе от одной точки к другой.

При этом коэффициенты аффинной связности, определяющие соответствие между естественными реперами, выражаются через символы Кристоффеля.

Если евклидово векторное пространство описывать в прямолинейной системе координат, то в каждой точке естественные реперы будут одинаковы. Поэтому величины $g_{\mu\nu} = (e_{\mu} \cdot e_{\nu})$ в любой точке будут иметь одно и то же значение, а коэффициенты $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$, характеризующие изменение естественного репера при переходе от одной точки к бесконечно близкой соседней точке, будут тождественно обращаться в нуль. В еще более частном случае, когда прямолинейные координатные оси в то же время взаимно ортогональны, постоянные $g_{\mu\nu}$ становятся равными $\delta_{\mu\nu}$.

§ 9. Дифференциальные соотношения между компонентами метрического тензора

Обозначим через g детерминант, образованный из ковариантных компонент $g_{\mu\nu}$ (14.9):

$$g = \det g_{\mu\nu}.$$

Как и в (14.10), получим

$$\text{минор } g_{\mu\nu} = g g^{\mu\nu},$$

где использовано определение

$$\sum_{\mu} g_{\mu\rho} \text{ минор } g_{\mu\nu} = g \delta_{\rho\nu}$$

и соотношение (14.6)

$$g_{\mu\rho}g^{\mu\sigma} = \delta_{\rho}^{\sigma}.$$

Согласно определению,

$$dg = \sum_{\mu\nu} \text{минор } g_{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = gg^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}, \quad (14.97)$$

или, учитывая (14.6),

$$dg = -gg_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}. \quad (14.98)$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} dg_{\mu\nu} &= d(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}g^{\rho\sigma}) = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}dg^{\rho\sigma} + \delta_{\nu}^{\rho}dg_{\mu\rho} + \delta_{\mu}^{\sigma}dg_{\nu\sigma} = \\ &= g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}dg^{\rho\sigma} + 2dg_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (14.99)$$

Таким образом,

$$dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}dg^{\rho\sigma}, \quad (14.100)$$

а также

$$dg^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}dg_{\rho\sigma}. \quad (14.101)$$

Обратимся теперь к определению символов Кристоффеля (14.95). Если $\rho = \nu$, то

$$\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_{\mu} g_{\rho\sigma}, \quad (14.102)$$

и, учитывая (14.97), запишем ¹⁾

$$\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g} \partial_{\mu} g = \partial_{\mu} \ln \sqrt{|g|}. \quad (14.103)$$

§ 10. Ковариантная производная

а) При изменении репера $(M, e_{\mu}) \rightarrow (M + dM, e_{\mu} + de_{\mu})$ будут изменяться как *контравариантные компоненты* вектора A^{μ} , так и естественный репер, определяемый криволинейными координатами в точке M . Поскольку (14.1)

$$A = A^{\mu} e_{\mu},$$

то

$$dA = dA^{\mu} \cdot e_{\mu} + A^{\mu} de_{\mu} = (dA^{\mu} + \omega_{\rho}^{\mu} A^{\rho}) e_{\mu} = \nabla A^{\mu} \cdot e_{\mu}. \quad (14.104)$$

Отсюда видно, что контравариантные компоненты приращения dA вектора A , выраженные через естественный репер точки M , имеют вид

$$\nabla A^{\mu} = dA^{\mu} + \omega_{\rho}^{\mu} A^{\rho} = dA^{\mu} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} A^{\sigma} dy^{\rho}. \quad (14.105)$$

¹⁾ Если в евклидовом пространстве, отнесенном к ортонормированным осям, координаты выбрать действительными ($x^0 = ct$), то

$$g = g_{11}g_{22}g_{33}g_{00} = -1,$$

По определению, эти приращения ∇A^μ являются компонентами вектора. Поэтому величины

$$\nabla_\rho A^\mu \equiv \frac{\nabla A^\mu}{dy^\rho} = \partial_\rho A^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu A^\sigma \quad (14.106)$$

являются компонентами тензора.

Напротив, член $\Gamma_{\sigma\rho}^\mu A^\sigma$ не является компонентами тензора, поэтому не будет ими и обычная частная производная $\partial_\rho A^\mu$.

Величина $\nabla_\rho A^\mu$ называется *ковариантной* или *абсолютной производной* от контравариантных компонент A^μ . Выражение ∇A^μ называется *абсолютным дифференциалом* от A^μ ; оно характеризует *полное приращение вектора A , вычисленное в системе координат (y^μ) , связанной с точкой M* . Такое „полное“ приращение складывается из изменения компонент A^μ и из вклада, возникающего в результате изменения естественного репера при переходе от точки $M(y^\mu)$ к бесконечно близкой точке $M + dM(y^\mu + dy^\mu)$. Как абсолютный дифференциал, так и ковариантная производная обладают тензорными свойствами.

б) Как следует из (14.104), абсолютный дифференциал ∇A^μ от контравариантных компонент вектора A характеризует контравариантные компоненты $(dA)^\mu$ приращения dA .

Аналогично, *абсолютным дифференциалом ∇A_μ от ковариантных компонент A* определяются *ковариантные компоненты $(dA)_\mu$ того же приращения dA* . Таким образом,

$$\nabla A_\mu = (dA)_\mu = dA \cdot e_\mu, \quad (14.107)$$

т. е. с учетом (14.2) и (14.82)

$$\nabla A_\mu = d(A \cdot e_\mu) - A de_\mu = dA_\mu - A \omega_\mu^\sigma e_\sigma, \quad (14.108)$$

или

$$\nabla A_\mu = dA_\mu - \omega_\mu^\sigma A_\sigma = dA_\mu - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma A_\sigma dy^\rho. \quad (14.109)$$

Следовательно, ковариантные производные от компонент A_μ имеют вид

$$\nabla_\rho A_\mu \equiv \frac{\nabla A_\mu}{dy^\rho} = \partial_\rho A_\mu - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma A_\sigma. \quad (14.110)$$

Заметим, что из (14.109) вытекает также

$$\nabla e_\mu \equiv de_\mu - \omega_\mu^\sigma e_\sigma \equiv 0, \quad (14.111)$$

или, согласно формулам (14.79), определяющим $g_{\mu\nu}$ в рассматриваемом евклидовом пространстве ¹⁾,

$$\nabla g_{\mu\nu} \equiv 0. \quad (14.112)$$

При помощи метрического тензора можно, разумеется, установить связь между определениями (14.104) и (14.107). Действительно, из (14.107) имеем

$$(dA)_\mu = dA \cdot e_\mu = \nabla A^\rho (e_\rho \cdot e_\mu) = g_{\mu\rho} \nabla A^\rho. \quad (14.113)$$

Поэтому, сравнивая (14.107) и (14.113), находим ²⁾

$$\nabla A_\mu = g_{\mu\rho} \nabla A^\rho. \quad (14.114)$$

в) *Ковариантная производная тензора.* Ковариантная или абсолютная производная тензора получается в результате обобщения (14.106) и (14.110), причем каждому контравариантному индексу соответствует знак плюс, а каждому ковариантному индексу — знак минус:

$$\nabla_\rho A_{\mu\nu}^{\sigma\tau} = \partial_\rho A_{\mu\nu}^{\sigma\tau} + \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma A_{\mu\nu}^{\lambda\tau} + \Gamma_{\lambda\rho}^\tau A_{\mu\nu}^{\sigma\lambda} + \dots - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda A_{\lambda\nu}^{\sigma\tau} - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda A_{\mu\lambda}^{\sigma\tau} - \dots \quad (14.115)$$

г) *Ковариантная производная метрического тензора.* Применяя (14.115) к ковариантным компонентам $g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu$ метрического тензора, получаем

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma g_{\mu\sigma}. \quad (14.116)$$

¹⁾ В неевклидовом многообразии формулы (14.79) больше уже не являются простым определением компонент $g_{\mu\nu}$ и не обязательно будут справедливы соотношения (14.112), получаемые из этих формул в результате дифференцирования. Если $\nabla g_{\mu\nu} \neq 0$, то во всех точках многообразия невозможно определить одну и ту же единицу длины [см. (15.76)].

²⁾ Исходя из (14.114) и (14.105), можно непосредственно вывести выражение для абсолютного дифференциала ∇A_μ . В самом деле,

$$\begin{aligned} \nabla A_\mu &= g_{\mu\rho} (dA^\rho + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho A^\sigma dy^\lambda) = dA_\mu - A^\rho (dg_{\mu\rho}) + g_{\mu\rho} \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho A^\sigma dy^\lambda = \\ &= dA_\mu - A^\rho (\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma g_{\sigma\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma g_{\mu\sigma}) dy^\lambda + g_{\mu\sigma} \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma A^\rho dy^\lambda = dA_\mu - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma A_\sigma dy^\lambda, \end{aligned}$$

где мы учли, что

$$dg_{\mu\rho} = d(e_\mu \cdot e_\rho) = e_\mu \cdot \omega_\rho^\sigma e_\sigma + e_\rho \cdot \omega_\mu^\sigma e_\sigma = (\Gamma_{\rho\lambda}^\sigma g_{\mu\sigma} + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma g_{\rho\sigma}) dy^\lambda.$$

Но при использовании этого метода предполагается, что можно дифференцировать обе части формулы $g_{\mu\rho} = e_\mu \cdot e_\rho$ или, что то же самое, что $\nabla g_{\mu\rho} = 0$. Это возможно в евклидовом пространстве, рассматриваемом в настоящей главе, но такой вывод нельзя непосредственно обобщить на произвольное неевклидово многообразие.

В самом деле, коэффициенты аффинной связности риманова пространства по определению совпадают с символами Кристоффеля. Поэтому

$$\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = \partial_{\rho} g_{\mu\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} g_{\sigma\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} g_{\mu\sigma} \quad (14.117)$$

Из определения (14.95) символов $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ следует, что выражение (14.117) тождественно равно нулю. Для евклидова векторного пространства всегда

$$\boxed{\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} \equiv 0.} \quad (14.118)$$

Аналогично для контравариантных компонент

$$\boxed{\nabla_{\rho} g^{\mu\nu} \equiv 0.} \quad (14.119)$$

§ 11. Тензорные плотности

Тензорная плотность является произведением тензора на $\sqrt{-g}$, где g — детерминант, образованный из компонент метрического тензора. Положим

$$\mathcal{A}_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} A_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \quad (14.120)$$

В частности, скалярная плотность определяется заданием скаляра

$$\mathcal{A} = \sqrt{-g} A. \quad (14.121)$$

При изменении координат скалярная плотность преобразуется как $\sqrt{-g}$. При этом

$$g'_{\mu\nu} = a_{\mu}^{\rho} a_{\nu}^{\sigma} g_{\rho\sigma}, \quad (14.122)$$

т. е.

$$g' = a^2 g, \quad a = \det a_{\mu}^{\rho} = \frac{1}{a'} \quad (a' = \det a_{\mu}^{\rho'}). \quad (14.123)$$

Следовательно, скалярная плотность \mathcal{A} преобразуется следующим образом:

$$\mathcal{A}' = \sqrt{-g'} A' = a \sqrt{-g} A = a \mathcal{A}. \quad (14.124)$$

Таким образом, мы приходим к замене элемента объема

$$d\tau = dy^1 \times dy^2 \dots \times dy^n \quad (14.125)$$

на инвариант

$$\sqrt{-g} d\tau = \sqrt{-g} dy^1 \times dy^2 \dots \times dy^n. \quad (14.126)$$

Действительно, по теореме Якоби элемент (14.125) преобразуется в виде

$$d\tau' = d\tau \cdot \det \frac{dy'^\rho}{dy^\sigma} = a' d\tau = \frac{1}{a} d\tau. \quad (14.127)$$

Следовательно, на самом деле (14.126) является инвариантом

$$\sqrt{-g'} d\tau' = a \sqrt{-g} \frac{1}{a} d\tau = \sqrt{-g} d\tau. \quad (14.128)$$

Введение тензорных плотностей зачастую упрощает уравнения поля, записанные в римановом пространстве или в евклидовом пространстве, в котором применяются криволинейные координаты произвольного вида.

Действительно, если взять ковариантную производную от плотности $\mathcal{A}^{\mu\nu\dots} = \sqrt{-g} A^{\mu\nu\dots}$, то получим

$$\begin{aligned} \nabla_\rho \mathcal{A}^{\mu\nu\dots} &= \sqrt{-g} \nabla_\rho A^{\mu\nu\dots} = \\ &= \sqrt{-g} \left(\partial_\rho A^{\mu\nu\dots} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} A^{\sigma\nu\dots} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} A^{\mu\sigma\dots} \right), \end{aligned} \quad (14.129)$$

или

$$\begin{aligned} \nabla_\rho \mathcal{A}^{\mu\nu} &= \partial_\rho \mathcal{A}^{\mu\nu} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \mathcal{A}^{\sigma\nu} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \mathcal{A}^{\mu\sigma} - \mathcal{A}^{\mu\nu} \frac{\partial_\rho \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \\ &= \partial_\rho \mathcal{A}^{\mu\nu} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \mathcal{A}^{\sigma\nu} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \mathcal{A}^{\mu\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \mathcal{A}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (14.130)$$

Рассмотрим, в частности, антисимметричный тензор второго ранга, контравариантные компоненты которого равны $A_{\check{\nu}}^{\mu\nu}$. Беря дивергенцию от соответствующей плотности, из (14.130) получаем

$$\nabla_\rho \mathcal{A}_{\check{\nu}}^{\mu\rho} = \partial_\rho \mathcal{A}_{\check{\nu}}^{\mu\rho} \quad (14.131)$$

или

$$\boxed{\nabla_\rho A_{\check{\nu}}^{\mu\rho} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} A_{\check{\nu}}^{\mu\rho})}. \quad (14.132)$$

Таким образом, в рассматриваемом частном случае введение тензорных плотностей позволяет свести формализм ковариантных производных к формализму обычных производных.

Аналогично, если вектору A^p соответствует плотность $\mathcal{A}^p = \sqrt{-g} A^p$, то из (14.130) непосредственно получим

$$\nabla_p \mathcal{A}^p = \partial_p \mathcal{A}^p, \quad (14.133)$$

т. е.

$$\boxed{\nabla_p A^p = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_p \mathcal{A}^p,} \quad (14.134)$$

Задачи

1. Показать, что общее преобразование координат не меняет свойство тензоров быть симметричными или антисимметричными.

2. Проверить формулу (E) на стр. 399, подставив вместо символов Кристоффеля их явные выражения

$$\frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}).$$

3. Показать, что величины

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu\nu} &= \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu, \\ \varphi_{\mu;\nu\rho} &= \partial_\mu \varphi_{\nu\rho} + \partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} \end{aligned}$$

преобразуются как компоненты тензоров.

4. Оператор Лапласа в произвольной системе координат определяется выражением

$$\Delta f = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu f.$$

а) Записать это выражение при помощи символов Кристоффеля.

б) Показать, что его можно представить в виде дивергенции

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} V^\rho).$$

в) Записать Δ в ортогональной системе координат, в которой

$$ds^2 = \sum c_i \left(\sum_i h_i^2 \right) (d\xi^i)^2,$$

где h_i — функции от ξ^i (по Бергману [106]).

**ВВЕДЕНИЕ КООРДИНАТ В НЕЕВКЛИДОВОМ МЕТРИЧЕСКОМ
МНОГООБРАЗИИ. ПРИМЕНЕНИЕ К РИМАНОВУ
ПРОСТРАНСТВУ**

§ 1. Метрическое пространство и касательное евклидово пространство

Метрическое пространство характеризуется тем свойством; что в каждой его точке произвольным образом может быть введен эталон длины. При переходе от одной точки к другой этот эталон, вообще говоря, изменяется.

Пусть y^μ — система координат с началом в принадлежащей многообразию точке M_0 . По определению элемент расстояния между двумя бесконечно близкими точками многообразия $M_0(y^\mu)$ и $M'(y^\mu + dy^\mu)$ определяется выражением

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu \quad (15.1)$$

или

$$dM^2 = g_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu. \quad (15.2)$$

Величины $g_{\mu\nu}$, входящие в (15.1), являются десятью непрерывными дифференцируемыми функциями от y^μ .

Рассмотрим теперь евклидово пространство, ассоциированное с точкой $M_0 \equiv m_0$, и введем в этом пространстве выходящую из m_0 систему прямолинейных осей, на каждой из которых выбрана одна и та же единица длины. Такой выбор возможен, поскольку для каждой точки нами определена единица длины. Выберем в точке m_0 систему единичных векторов $(e_\mu)_0$, для которых имеют место соотношения

$$(e_\mu)_0 (e_\nu)_0 = (g_{\mu\nu})_0. \quad (15.3)$$

Здесь $(g_{\mu\nu})_0$ являются значениями, которые принимают десять функций $g_{\mu\nu}$ в точке $M_0 \equiv m_0$.

Как показывают формулы (15.2) и (15.3), в окрестности точки M_0

$$(dM)_0^2 = (g_{\mu\nu})_0 dy^\mu dy^\nu = (e_\mu)_0 (e_\nu)_0 dy^\mu dy^\nu = (e_\mu dy^\mu)_0^2, \quad (15.4)$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y^\mu} \right)_0 = (e_\mu)_0. \quad (15.5)$$

Векторы $(e_\mu)_0$, направленные по касательным к кривым y^μ , проходящим через M_0 , определяют естественный репер в точке M_0 . Таким образом, система векторов $(e_\mu)_0$ относится к пространству, которое в точке M касается неевклидова многообразия.

Касательное пространство, которое строится для каждой точки метрического многообразия, является евклидовым пространством.

Элементарный интервал в ассоциированном евклидовом пространстве

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu, \quad (15.6)$$

вычисленный поблизости от точки $M_0 \equiv m_0$, соответствует квадрату расстояния между точками m_0 и $m = m_0 + dm_0$ этого пространства. В выражение (15.6) входят коэффициенты

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \bar{e}_\mu \cdot \bar{e}_\nu, \quad (15.7)$$

которые в точке m_0 для репера, характеризуемого векторами $(e_\mu)_0$, имеют следующие значения:

$$(\bar{g}_{\mu\nu})_0 = (e_\mu)_0 (e_\nu)_0. \quad (15.8)$$

Таким образом, сравнивая (15.3) и (15.8), получаем

$$(g_{\mu\nu})_0 = (\bar{g}_{\mu\nu})_0. \quad (15.9)$$

Как видим, система координат может быть выбрана таким образом, что метрики многообразия и ассоциированного евклидова пространства в точке $M = m_0$ будут тождественны; говорят, что в этой точке метрики касаются.

§ 2. Аффинная связность

Для двух бесконечно близких точек метрического многообразия $M_0(y_0^p)$ и $M(y_0^p + dy^p)$ определим единичные векторы $(e_\mu)_0$ и e_μ , выходящие из M_0 и M и касательные соответственно к y_0^p и y^p (фиг. 46). Системы векторов $(e_\mu)_0$ и e_μ образуют естественные реперы в M_0 и M и определяют евклидовы пространства, касательные к этим точкам многообразия.

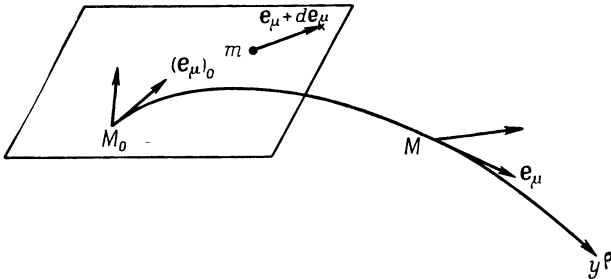
Мы хотим установить соответствие между точкой M , векторами e_μ , принадлежащими касательному в точке M евклидову пространству, и величинами m , e_μ , принадлежащими касательному в точке M_0 пространству. Это позволит связать между собой локальные реперы, которыми последовательно определяются касательные к многообразию евклидовы пространства:

Когда переменные y^p изменяются и становятся равными $y'^p = y^p + dy^p$, то точка $M(y^p)$ и векторы $e_\mu(y^p)$ тоже изменяются, причем в касательном евклидовом пространстве

$$dM = dy^\mu e_\mu, \tag{15.10}$$

$$de_\mu = \omega_\mu^\nu e_\nu = \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_\nu dy^\rho. \tag{15.11}$$

Поставим в соответствие принадлежащей многообразию точке M „отображенную точку“ $m = m_0 + dm$ евклидова пространства,



Фиг. 46. Система координатных осей в бесконечно близкой точке касательного пространства.

касательного в точке M_0 , а вектору $e_\mu(M)$ многообразия — „отображенный вектор“ $e_\mu + de_\mu$ в этом же касательном пространстве. Таким образом, в евклидовом касательном в точке M_0 пространстве мы получим изображение многообразия вблизи точки M_0 . Коэффициенты $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$, позволяющие установить соответствие между касательными пространствами в данной и в бесконечно близкой точке, называются *коэффициентами аффинной связности многообразия*.

§ 3. Изображение первого порядка

Запишем соотношения (15.10) и (15.11) применительно к точке $M_0 \equiv m_0$ евклидова пространства, касательного в точке M_0 :

$$(dM)_0 = dy^\mu (e_\mu)_0, \tag{15.12}$$

$$(de_\mu)_0 = (\Gamma_{\mu\rho}^\nu)_0 (e_\nu)_0 dy^\rho. \tag{15.13}$$

Если $dy^\nu = y^\nu - y_0^\nu$ — бесконечно малая величина первого порядка, то и соответствие, устанавливаемое (15.12) и (15.13), будет тоже первого порядка.

С другой стороны, если от точки m перейти к бесконечно близкой точке $m + dm$, то в естественном репере точки m векторы $\bar{e}'_\mu(m')$ евклидова пространства выражаются в виде $\bar{e}_\mu + d\bar{e}_\mu$. В этом репере

$$dm = dy^\mu \bar{e}_\mu, \quad (15.14)$$

$$d\bar{e}_\mu = \omega_{\mu\nu}^{\bar{\nu}} \bar{e}_\nu = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\nu} \\ \mu\rho \end{array} \right\} \bar{e}_\nu dy^\rho, \quad (15.15)$$

где черта над e_α означает, что образованные с помощью $g_{\mu\nu}$ символы Кристоффеля берутся для евклидова пространства.

В частности, для евклидова пространства, касательного к многообразию в точке M_0 , имеем

$$(dm)_0 = dy^\mu (e_\mu)_0, \quad (15.16)$$

$$d(e_\mu)_0 = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\nu} \\ \mu\rho \end{array} \right\} (e_\nu)_0 dy^\rho, \quad (15.17)$$

В самом деле, по предположению

$$(\bar{e}_\mu)_0 = (e_\mu)_0. \quad (15.18)$$

Сравнивая (15.12) и (15.16), получаем

$$(dM)_0 = (dm)_0 \quad (15.19)$$

или

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y^\mu} \right)_0 = \left(\frac{\partial m}{\partial y^\mu} \right)_0 = (e_\mu)_0. \quad (15.20)$$

Результаты, полученные в § 1, имеют место в том случае, когда многообразии с точностью до величин первого порядка отображается на ассоциированное евклидово пространство.

Евклидово пространство касается многообразия в точке $M_0 \equiv m_0$. С другой стороны, в общем случае имеем

$$(de_\mu)_0 \neq d(e_\mu)_0. \quad (15.21)$$

Действительно, векторы e_μ , касательные к находящимся на многообразии кривым y^μ , совпадают с векторами \bar{e}_μ , характеризующими естественный евклидов репер в точке $M_0 \equiv m_0$, однако для бесконечно близкой точки совпадения уже нет: в пространстве, касательном в точке M_0 , векторы $(e_\mu)_0 + (de_\mu)_0$, соответствующие смещению dy^ρ в многообразии, в общем случае не равны векторам $(e_\mu)_0 + d(e_\mu)_0$, соответствующим смещению dy^ρ в касательном пространстве.

Следовательно, согласно (15.13) и (15.17),

$$(\Gamma_{\mu\nu}^\rho)_0 \neq \left\{ \begin{array}{c} \bar{\rho} \\ \mu\nu \end{array} \right\}_0. \quad (15.22)$$

Но, если мы полагаем

$$(de_{\mu})_0 = d(e_{\mu})_0, \quad (15.23)$$

то в результате скалярного умножения на $(e_{\mu})_0 = \bar{(e_{\mu})}_0$ и симметризации получаем

$$(e_{\nu})_0 (de_{\mu})_0 + (e_{\mu})_0 (de_{\nu})_0 = (e_{\nu})_0 d(e_{\mu})_0 + (e_{\mu})_0 d(e_{\nu})_0, \quad (15.24)$$

т. е.

$$d(e_{\mu})_0 (e_{\nu})_0 = (de_{\mu} e_{\nu})_0 \quad (15.25)$$

или

$$(dg_{\mu\nu})_0 = d(e_{\mu})_0 (e_{\nu})_0 = d(g_{\mu\nu})_0. \quad (15.26)$$

Таким образом, опуская нулевой индекс, вблизи произвольной точки M имеем

$$dg_{\mu\nu} = d(e_{\mu} \cdot e_{\nu}). \quad (15.27)$$

§ 4. Изображение второго порядка

Если мы хотим рассмотреть в евклидовом пространстве, касательном к метрическому многообразию в точке M , два бесконечно малых перемещения, то нам нужно обратиться к изображению второго порядка.

Например, предположим, что точка M перемещается в многообразии по бесконечно малому замкнутому контуру. Чтобы получить изображение последовательных приращений dM и de_{μ} , следует рассмотреть их в одном и том же касательном евклидовом пространстве. Точку $m_0 \equiv M_0$ удобно выбрать внутри контура, так что она будет находиться на бесконечно малом расстоянии от всех его точек. Каждому положению принадлежащей многообразию точки M будет теперь соответствовать точка m евклидова пространства, касательного к многообразию в m_0 . Единичные векторы, касательные к кривым y^{μ} в точке M , будут изображаться в евклидовом пространстве, касательном в точке M_0 , следующим образом:

$$e_{\mu} = (e_{\mu})_0 + (\omega_{\mu}^{\nu})_0 (e_{\nu})_0 = (e_{\mu})_0 + (\Gamma_{\mu\rho}^{\nu})_0 (y^{\rho} - y_0^{\rho}) (e_{\nu})_0; \quad (15.28)$$

здесь мы воспользовались (15.13).

При переходе от точки M и векторов $e_{\mu}(M)$ к бесконечно близким точке M' и векторам естественного репера $e'_{\mu}(M')$ приращения векторов, отнесенных к касательной плоскости в точке $M \equiv m$, характеризуются формулами (15.10) и (15.11)

$$dm = \omega^{\mu} e_{\mu} = dy^{\mu} e_{\mu},$$

$$de_{\mu} = \omega_{\mu}^{\nu} e_{\nu} = \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} e_{\nu} dy^{\rho}.$$

Относя эти приращения к плоскости, касательной в фиксированной точке $M_0 \equiv m_0$, и подставляя (15.28) в (15.10) и (15.11), получаем

$$(dm)_0 = [dy^\mu + (\Gamma_{\nu\rho}^\mu)_0 (y^\rho - y_0^\rho) dy^\nu] (e_\mu)_0, \quad (15.29)$$

$$(de_\mu)_0 = [\omega_\mu^\nu + (\Gamma_{\sigma\rho}^\nu)_0 (y^\rho - y_0^\rho) \omega_\mu^\sigma] (e_\nu)_0. \quad (15.30)$$

Такое соответствие, при котором необходимо учитывать произведения $(y^\rho - y_0^\rho) dy^\nu$ бесконечно малых величин, называется *изображением второго порядка*. Из (15.29) имеем

$$\left(\frac{\partial^2 m}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \right)_0 = (\Gamma_{\nu\mu}^\rho)_0 (e_\rho)_0, \quad (15.31)$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial^2 m}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \right)_0 \neq \left(\frac{\partial^2 m}{\partial y^\nu \partial y^\mu} \right)_0. \quad (15.32)$$

В общем случае dm не является полным дифференциалом.

Если сравнить (15.29) и (15.30) с приращениями векторов в евклидовом пространстве, найденными с точностью до величин второго порядка,

$$dm_0 = [dy^\mu + \left\{ \overline{\mu} \right\}_{\nu\rho} (y^\rho - y_0^\rho) dy^\nu] (e_\mu)_0, \quad (15.33)$$

$$d(e_\mu)_0 = \left[\left\{ \overline{\nu} \right\}_{\sigma\rho} + \left\{ \overline{\nu} \right\}_{\sigma\rho} \right] (y^\rho - y_0^\rho) (\omega_\mu^\sigma)_0 (e_\nu)_0, \quad (15.34)$$

то получим

$$\frac{\partial^2 m}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \neq \left(\frac{\partial^2 m}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \right)_0, \quad \frac{\partial (e_\nu)_0}{\partial y^\mu} = \left(\frac{\partial e_\nu}{\partial y^\mu} \right)_0. \quad (15.35)$$

Таким образом, произвольное метрическое многообразие в любой точке является касательным к евклидовому пространству $[(\partial M / \partial y^\mu)_0 = (\partial m / \partial y^\mu)_0]$, но вместе с тем в общем случае оно не является соприкасающимся к этому пространству.

§ 5. Векторы и тензоры, связанные с метрическим многообразием

С каждой точкой M метрического многообразия свяжем естественный репер. В результате определяются касательные евклидовы пространства, соответствующие последовательным точкам многообразия. Исходя из реперов, характеризующих такие пространства, введем величины $g_{\mu\nu}$, для которых имеет место (15.9)

$$(\overline{g}_{\mu\nu})_0 = (g_{\mu\nu})_0.$$

В каждом из касательных евклидовых пространств, у которых указанным выше образом введены системы координатных осей, зададим компоненты вектора или тензора. Таким образом, мы получим для многообразия *векторное* или *тензорное поле*.

При переходе к другим координатам и, следовательно, при изменении естественного репера в данной точке M компоненты вектора или тензора преобразуются по формулам (14.44)—(14.52). Разумеется, при переходе от одной точки многообразия к другой коэффициенты a_{μ}^{ν} , и $a_{\mu}^{\nu'}$ изменяются.

Результаты гл. 14 можно применять к евклидову пространству, касательному в любой принадлежащей многообразию точке M . Для любых базисных векторов e_{μ} можно ввести *контравариантные компоненты* A^{μ} , так что

$$A = A^{\mu} e_{\mu}. \quad (15.36)$$

Умножая затем скалярно на e_{μ}

$$A \cdot e_{\mu} = A_{\mu}, \quad (15.37)$$

найдем *ковариантные компоненты* вектора A . Таким образом, аналогично (14.5)

$$A_{\mu} = (A^{\rho} e_{\rho}) \cdot e_{\mu} = g_{\mu\rho} A^{\rho}. \quad (15.38)$$

Контравариантные компоненты метрического тензора определяются так же, как и в (14.6),

$$g_{\mu\rho} g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (15.39)$$

Соотношения, обратные (15.38), имеют тот же вид, что и в гл. 14:

$$g^{\mu\rho} A_{\rho} = g^{\mu\rho} g_{\rho\sigma} A^{\sigma} = \delta_{\sigma}^{\mu} A^{\sigma} = A^{\mu}. \quad (15.40)$$

И так же как и там, формулы (15.38) и (15.40) обобщаются на тензоры, имеющие p ковариантных и q контравариантных индексов:

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} A^{\rho\sigma}, \quad A^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} A_{\rho\sigma}, \quad (15.41)$$

$$A_{\rho\sigma\dots}^{\mu\nu\dots} = g^{\mu\lambda} g^{\nu\tau} \dots g_{\rho\delta} g_{\sigma\epsilon} \dots A_{\lambda\tau\dots}^{\delta\epsilon\dots}. \quad (15.42)$$

Наконец, *скалярное произведение* двух векторов определяется формулой (14.16)

$$A \cdot B = A^{\mu} B_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu}. \quad (15.43)$$

Отсюда для *нормы* или *квадрата длины* вектора A получается выражение

$$|A|^2 = A_{\mu} A^{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu}. \quad (15.44)$$

В частности, в касательном в точке M евклидовом пространстве квадрат длины вектора $dM(dy^{\rho})$ равен

$$|dM|^2 = dy_{\mu} dy^{\mu} = g_{\mu\nu} dy^{\mu} dy^{\nu}. \quad (15.45)$$

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ в принадлежащей многообразию точке M обладает свойствами, характеризуемыми (14.97) и следующими далее формулами гл. 14.

Если g — детерминант, образованный из $g_{\mu\nu}$,

$$g = \det g_{\mu\nu}, \quad (15.46)$$

то, как и в (14.10) [т. е., как в (15.39)], получим

$$\text{Минор } g_{\mu\nu} = g g^{\mu\nu}. \quad (15.47)$$

Из свойств детерминантов отсюда получаются соотношения (14.97), (14.98) и (14.100), т. е. для произвольной принадлежащей многообразию точки M имеем

$$dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} \quad (15.48)$$

и

$$dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} dg^{\rho\sigma}, \quad (15.49)$$

$$dg^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} dg_{\rho\sigma}. \quad (15.50)$$

Связать между собой векторы или тензоры, определяемые для двух бесконечно близких точек многообразия, будет возможно в том случае, если мы сможем связать между собой последовательные касательные евклидовы пространства, т. е. если мы сможем определить аффинную связность многообразия.

§ 6. Ковариантная производная

По определению, вектор $e'_{\mu}(M')$, „соответствующий“ вектору $e_{\mu} + de_{\mu}$ из касательного в точке M пространства, считается *эквивалентным* вектору $e_{\mu}(M)$; говорят также, что он получается из вектора $e_{\mu}(M)$ при помощи *параллельного переноса*.

Вектор A определим заданием в каждой точке его контравариантных компонент. При этом мы установим соответствие между компонентами вектора $A(y^{\rho})$ с началом в точке M и компонентами вектора $A'(y'^{\rho})$ с началом в бесконечно близкой точке M' . Чтобы это сделать, вектору A' мы поставим в соответствие вектор $A + dA$ из пространства, касательного в M . Величина dA , соответствующая переходу из M в M' , называется *истинным или абсолютным приращением вектора A* . Это приращение обуславливается, во-первых, изменением контравариантных компонент при переходе

от M к M' и, во вторых, связанным с перемещением изменением локального репера.

Учитывая, что (15.36)

$$A = A^\mu e_\mu,$$

для касательного в точке M пространства получаем

$$dA = dA^\mu \cdot e_\mu + A^\mu de_\mu = (dA^\mu + \omega_\rho^\mu A^\rho) e_\mu = DA^\mu \cdot e_\mu. \quad (15.51)$$

Таким образом, в пространстве, касательном в точке M , абсолютные приращения контравариантных компонент вектора A имеют вид

$$DA^\mu = dA^\mu + \omega_\rho^\mu A^\rho = dA^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu A^\sigma dy^\rho. \quad (15.52)$$

Из (15.51) следует, что эти приращения есть компоненты тензора, тогда как приращения dA^μ , согласно (15.52), свойствами компонент тензора не обладают. Абсолютные дифференциалы DA^μ от контравариантных компонент A^μ характеризуют абсолютное изменение, не зависящее от того, каким образом изображается переход от M к M' .

Ковариантными производными от компонент A^μ (обозначаемыми $D_\rho A^\mu$ или $A^\mu_{;\rho}$) называются отношения абсолютных приращений DA^μ и приращений переменных dy^ρ

$$D_\rho A^\mu \equiv A^\mu_{;\rho} \equiv \frac{DA^\mu}{dy^\rho} \equiv \partial_\rho A^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu A^\sigma. \quad (15.53)$$

Ковариантные производные, как и DA^μ , преобразуются как компоненты тензора.

Абсолютные дифференциалы DA^μ являются контравариантными компонентами $(dA)^\mu$ приращения dA в касательном в точке M пространстве, взятыми в системе координат, характеризуемой базисными векторами e_μ . Аналогично, абсолютные дифференциалы DA_μ от ковариантных компонент определяют компоненты $(dA)_\mu$ этого же приращения dA , отнесенного к системе базисных векторов e_μ .

$$DA_\mu = (dA)_\mu = dA \cdot e_\mu. \quad (15.54)$$

Это соотношение записывается также в виде

$$DA_\mu = d(A \cdot e_\mu) - A \cdot de_\mu \quad (15.55)$$

или с учетом (15.37) и (15.11)

$$DA_\mu = dA_\mu - \omega_\mu^\sigma A \cdot e_\sigma. \quad (15.56)$$

Таким образом, получим

$$DA_\mu = dA_\mu - \omega_\mu^\sigma A_\sigma = dA_\mu - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma A_\sigma dy^\rho. \quad (15.57)$$

Отсюда непосредственно находятся выражения для ковариантных производных $D_\rho A_\mu$ (или, что то же самое, $A_{\mu;\rho}$)

$$D_\rho A_\mu \equiv A_{\mu;\rho} = \frac{DA_\mu}{dy^\rho} = \partial_\rho A_\mu - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma A_\sigma. \quad (15.58)$$

Из определения (15.58), разумеется, следует

$$De_\mu \equiv de_\mu - \omega_\mu^\sigma e_\sigma \equiv 0. \quad (15.59)$$

Далее, учитывая, что, согласно (15.54) и (15.51),

$$(dA)_\mu = dA \cdot e_\mu = (DA^\rho) e_\rho \cdot e_\mu = g_{\mu\rho} DA^\rho \quad (15.60)$$

и сравнивая с определением (15.54), получаем

$$DA_\mu = g_{\mu\rho} DA^\rho. \quad (15.61)$$

В метрическом многообразии, в котором $A_\mu = g_{\mu\rho} A^\rho$, необходимым и достаточным условием совместности (15.53) и (15.58) будет

$$Dg_{\mu\nu} = 0. \quad (15.62)$$

Если $Dg_{\mu\nu} = 0$, что имеет место в том и только в том случае, когда $g_{\mu\nu} = (e_\mu \cdot e_\nu)$ дифференцируемы, формула (15.58) получается в результате подстановки (15.52) в (15.62).

Определения (15.53) и (15.58) легко обобщаются на случай тензора $A_{\mu\nu}^{\lambda\sigma\dots}$. В этом случае ковариантная производная будет равна

$$D_\rho A_{\mu\nu}^{\lambda\sigma\dots} \equiv A_{\mu\nu}^{\lambda\sigma\dots}{}_{;\rho} = \partial_\rho A_{\mu\nu}^{\lambda\sigma\dots} - \Gamma_{\mu\rho}^\tau A_{\tau\nu}^{\lambda\sigma\dots} - \Gamma_{\nu\rho}^\tau A_{\mu\tau}^{\lambda\sigma\dots} + \Gamma_{\tau\rho}^\lambda A_{\mu\nu}^{\tau\sigma\dots} + \Gamma_{\nu\rho}^\tau A_{\mu\nu}^{\lambda\tau\dots}. \quad (15.63)$$

В частности, для компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ имеем

$$D_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma g_{\mu\sigma}. \quad (15.64)$$

Отсюда видно, что условие (15.60) запишется в виде

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\rho}^\sigma (e_\sigma \cdot e_\nu) + \Gamma_{\nu\rho}^\sigma (e_\mu \cdot e_\sigma) \quad (15.65)$$

и из (15.11) получим

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = (\partial_\rho e_\mu) \cdot e_\nu + (e_\mu \cdot \partial_\rho e_\nu) = \partial_\rho (e_\mu \cdot e_\nu). \quad (15.66)$$

Таким образом, условие (15.60) означает, что соотношение $g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu$, имеющее место для точки M , дифференцируемо.

В следующем параграфе мы увидим, что это свойство соответствует возможности определения абсолютной единицы длины, одинаковой для всех точек многообразия¹⁾.

§ 7. Параллельный перенос вектора

Будем считать, что условие (15.60) или (15.66) выполнено. Тогда, согласно (15.52) и (15.57), абсолютные приращения компонент вектора, соответствующие изменениям переменных dy^{ρ} , можно записать в виде

$$DA^{\mu} = dA^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} A^{\nu} dy^{\rho} = (A^{\mu} + dA^{\mu}) - (A^{\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} A^{\nu} dy^{\rho}), \quad (15.67)$$

$$DA_{\mu} = dA_{\mu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} A_{\sigma} dy^{\rho} = (A_{\mu} + dA_{\mu}) - (A_{\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} A_{\sigma} dy^{\rho}). \quad (15.68)$$

Они складываются из двух частей. Первая часть $A^{\mu} + dA^{\mu}$ (или $A_{\mu} + dA_{\mu}$) равна значению компонент A^{μ} (или A_{μ}), которое они будут иметь, когда вектор A произвольным образом перемещается из M в M' . Вторая часть $A^{\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} A^{\nu} dy^{\rho}$ (или $A_{\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} A_{\sigma} dy^{\rho}$) по определению будет равна значению компонент A^{μ} (или A_{μ}), которое они приобретут при параллельном переносе вектора из точки M в точку M' . Таким образом, если вектор переносится параллельно самому себе, то приращения его компонент будут равны

$$(dA^{\mu})_{\parallel} = - \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} A^{\nu} dy^{\rho}, \quad (15.69)$$

$$(dA_{\mu})_{\parallel} = \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} A_{\sigma} dy^{\rho}. \quad (15.70)$$

В результате абсолютные приращения компонент A^{μ} и A_{μ} принимают вид

$$DA^{\mu} = dA^{\mu} - (dA^{\mu})_{\parallel}, \quad (15.71)$$

$$DA_{\mu} = dA_{\mu} - (dA_{\mu})_{\parallel}. \quad (15.72)$$

Они равны разности между приращениями компонент вектора, переносимого из точки M в точку M' произвольным образом, и приращениями, имеющими место при параллельном переносе.

Если вектор $A'(M')$ получается из $A(M)$ в результате параллельного переноса, то $dA^{\mu} = (dA^{\mu})_{\parallel}$ и, согласно (15.71) и (15.72),

$$DA^{\mu} \equiv 0, \quad (15.73)$$

$$DA_{\mu} \equiv 0. \quad (15.74)$$

¹⁾ Это связано с предположением, что для многообразия кривизна гомотетии равна нулю [см. стр. 423, формулы (У) и (Ф)].

Если вектор переносится параллельно самому себе, то абсолютные дифференциалы от его компонент, а следовательно, и ковариантные производные, равны нулю.

Из определения (15.51) следует, что если переход $A \rightarrow A'$ осуществляется при параллельном переносе, то вектор $A + dA$, находящийся в касательном плоском пространстве и соответствующий вектору $A' (M')$, будет равен вектору A . Следовательно, при переходе к касательному евклидову пространству параллельность векторов для двух бесконечно близких точек будет сводиться к параллельности в обычном смысле (т. е. к равенству компонент вектора A и компонент вектора $A + dA$, соответствующего A').

Наконец, заметим, что если вектор A переносится параллельно самому себе, то при нахождении изменения квадрата длины этого вектора мы должны будем учесть, что [см. (15.74)]

$$DA^\mu = 0 \quad \text{или} \quad dA^\mu = -\Gamma_{\sigma\rho}^\mu A^\sigma dy^\rho.$$

Подставляя (15.74) в

$$d(l^2) = d(g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu) = dg_{\mu\nu} A^\mu A^\nu + 2g_{\mu\nu} A^\nu dA^\mu \quad (15.75)$$

и учитывая (15.64), получаем

$$\begin{aligned} d(l^2) &= dg_{\mu\nu} A^\mu A^\nu - 2g_{\mu\nu} A^\nu \Gamma_{\sigma\rho}^\mu A^\sigma dy^\rho = \\ &= (dg_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda g_{\lambda\nu} dy^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda g_{\lambda\mu} dy^\rho) A^\mu A^\nu = (Dg_{\mu\nu}) A^\mu A^\nu. \end{aligned} \quad (15.76)$$

Таким образом, из условия (15.60) $Dg_{\mu\nu} = 0$ вытекает, что если вектор переносится параллельно самому себе, то его длина остается неизменной.

В частности, по определению, единичные векторы e_μ всегда переносятся параллельно самим себе ($De_\mu \equiv de_\mu - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma e_\sigma dy^\rho = 0$). Поэтому во всех точках многообразия они всегда сохраняют одну и ту же длину и при помощи (15.60) можно определить абсолютную единицу длины.

§ 8. Условия интегрируемости и структура пространства

1. Евклидово пространство. Пространство будет евклидовым, если выполняются условия интегрируемости для приращений (15.10) и (15.11)

$$\begin{aligned} dm &= e_\mu dy^\mu, \\ de_\mu &= \omega_\mu^\nu e_\nu = \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_\nu dy^\rho. \end{aligned}$$

В результате интегрирования по бесконечно малому замкнутому контуру мы должны иметь

$$\int dm = 0, \quad (15.77)$$

$$\int de_\mu = 0. \quad (15.78)$$

Пусть *приращение* dm *интегрируемо*. Это приводит к условиям симметрии, накладываемым на коэффициенты аффинной связи.

Действительно, из независимости приращения dm от пути, при перемещении по которому в касательном евклидовом пространстве осуществляется переход от m_0 к m , следует

$$\partial_\mu \partial_\nu m = \partial_\nu \partial_\mu m, \quad (15.79)$$

или, согласно (15.10),

$$\partial_\mu e_\nu = \partial_\nu e_\mu. \quad (15.80)$$

Учитывая (15.11), как и в случае (14.90), получаем

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho, \quad (15.81)$$

т. е. ¹⁾

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho. \quad (15.82)$$

Пусть *приращение* de_μ *интегрируемо*. Это приводит к ограничениям, накладываемым на $g_{\mu\nu}$ и их частные производные первого порядка²⁾. Если системе координат можно ввести таким образом, что в ней на $g_{\mu\nu}$ будут наложены такие ограничения, то пространство будет евклидовым.

В гл. 14 подобные ограничивающие условия мы не выписывали, однако мы учитывали вытекающее из них следствие, которое в свою очередь влечет за собой интегрируемость de_μ :

Единица длины l , определяющая в касательном пространстве некоторый эталон длины, *не изменяется, когда этот эталон* A *переносится параллельно самому себе по бесконечно малому замкнутому контуру*³⁾. Таким образом, согласно (15.76),

$$d(l^2) = (Dg_{\mu\nu}) A^\mu A^\nu,$$

¹⁾ Данное свойство соответствует тому, что у евклидова пространства кривизна равно нулю [см. стр. 422, формула (Д)].

²⁾ Эти ограничения связаны с обращением в нуль кривизны, точнее, с обращением в нуль тензора $R_{\mu\rho\sigma}^\nu$ [см. стр. 422, формула (З)].

³⁾ Это требование предполагает выполнение следующего структурного условия: у пространства кривизна гомотетии равна нулю. Определяемый формулой (H) тензор (см. стр. 422) обращается в нуль.

где

$$Dg_{\mu\nu} = dg_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} g_{\lambda\nu} dy^{\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} g_{\mu\lambda} dy^{\rho}, \quad (15.83)$$

а $d(l^2)$ будет равно нулю, если $Dg_{\mu\nu} = 0$, т. е. если [см. (15.66)]

$$d_{\rho} g_{\mu\nu} = d_{\rho} (e_{\mu} \cdot e_{\nu}).$$

Таким образом, соотношение $g_{\mu\nu} = (e_{\mu} \cdot e_{\nu})$ оказывается дифференцируемым.

В гл. 14 [см. формулу (14.86)] при нахождении зависимости коэффициентов аффинной связности от компонент $g_{\mu\nu}$ и их частных производных, мы уже неявно пользовались имеющими место для евклидова пространства соотношениями (15.82) (15.66). Фактически для нахождения коэффициентов аффинной связности оказываются достаточными только эти соотношения. В самом деле, выписывая (15.66) в явном виде, получаем

$$d_{\rho} g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} g_{\mu\sigma}, \quad \text{т. е. } D_{\rho} g_{\mu\nu} = 0 \quad (15.84)$$

и, поступая так же, как в случае (14.92), с учетом (15.82) найдем выведенную ранее формулу

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}, \quad (15.85)$$

где

$$\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_{\mu} g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}). \quad (15.86)$$

В каждой точке евклидова пространства коэффициенты аффинной связности равны символам Кристоффеля.

Однако это условие необходимо, но не достаточно, чтобы пространство было евклидовым. Действительно, оно вытекает из соотношений (15.82) и (15.66), т. е. из (15.77) и из следствия соотношения (15.78). Но чтобы выполнялось условие (15.78) и чтобы пространство было евклидовым, необходимо, чтобы определяемые по формуле (15.85) коэффициенты аффинной связности дополнительно подчинялись определенным условиям, связанным с равенством кривизны нулю. В противном случае, если коэффициенты связности $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ не подчиняются условиям, вытекающим из (15.78), пространство будет римановым.

2. Риманово пространство. В случае риманова пространства имеет место следующее:

Приращение dt интегрируемо. Значит, согласно

$$\int dt = 0, \quad (15.77)$$

имеем

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}. \quad (15.82)$$

Можно ввести абсолютную единицу длины. Согласно (15.66), это условие запишется в виде

$$D_{\rho}g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{или} \quad d_{\rho}g_{\mu\nu} = d_{\rho}(e_{\mu}^* \cdot e_{\nu}). \quad (15.87)$$

Принимая во внимание (15.82) и (15.87), как и в случае евклидова пространства, получаем

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}. \quad (15.85)$$

Однако *приращение* de_{μ} *не интегрируемо*. Поэтому невозможно выбрать такую систему координат, чтобы для $g_{\mu\nu}$ удовлетворялись условия, вытекающие из (15.78). Следовательно, *пространство имеет кривизну*; вопрос о том, как она выражается и каковы ее свойства, будет рассмотрен в § 9.

3. Произвольное метрическое многообразие. Прежде чем перейти к частному случаю риманова пространства, остановимся на произвольном метрическом многообразии общего вида. В таком многообразии приращения dm и de_{μ} не являются интегрируемыми, т. е.

$$\int dm \neq 0, \quad (15.88)$$

$$\int de_{\mu} \neq 0. \quad (15.89)$$

Над интегралами (15.88) и (15.89) можно провести такие же преобразования, как и в § 9, где будет рассмотрен частный случай риманова пространства. Рассмотрим замкнутый контур, являющийся бесконечно малым параллелограммом со сторонами, характеризуемыми приращениями d и δ . Площадь, ограничиваемая этим контуром, равна

$$ds^{\sigma\rho} = \frac{1}{2} (dy^{\sigma} \delta y^{\rho} - dy^{\rho} \delta y^{\sigma}). \quad (A)$$

При помощи теоремы Стокса криволинейные интегралы (15.88) и (15.89), взятые по данному контуру, можно преобразовать в поверхностные интегралы. В результате получим

$$\int dm = \int \int (dm)', \quad \int de_{\mu} = \int \int (de_{\mu})', \quad (B)$$

где мы положили

$$(dm)' = d\delta m - \delta dm, \quad (de_{\mu})' = d\delta e_{\mu} - \delta de_{\mu} \quad (B)$$

С помощью соотношений (15.29) и (15.30), имеющих место для евклидова пространства, касательного в фиксированной точке M_0 , которая находится на бесконечно малом расстоянии от всех точек контура, можно без труда вычислить входящие в (B) приращения $(dm)'$ и $(de_\mu)'$. Подставляя (15.29) и (15.30) в выражение (B) и пренебрегая бесконечно малыми третьего порядка, получаем:

Во-первых,

$$(dm)' = \Omega^{\rho} e_{\rho}, \quad (\Gamma)$$

где

$$\Omega^{\rho} = -(\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) ds^{\mu\nu} \quad (\Delta)$$

и Ω^{ρ} — компоненты вектора, характеризующего *кручение* многообразия. Таким образом, из (15.82) будет следовать, что кручение обращается в нуль. Обратное, из соотношения (Δ) вытекает, что если кручение равно нулю, то коэффициенты аффинной связности симметричны.

Во-вторых,

$$(d\lambda_{\mu})' = \Omega_{\mu}^{\nu} e_{\nu}, \quad (\text{E})$$

где

$$\Omega_{\mu}^{\nu} = -R_{\mu\rho\sigma}^{\nu} ds^{\rho\sigma} \quad (\text{Ж})$$

и

$$R_{\mu\rho\sigma}^{\nu} = \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\rho}^{\nu} - \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\sigma}^{\nu} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\rho}^{\nu}. \quad (\text{З})$$

Тензор Ω_{μ}^{ν} (или $R_{\mu\rho\sigma}^{\nu}$) характеризует *кривизну многообразия*. В частности,

$$\int dl = l \int \int \Omega, \quad (\text{И})$$

где

$$\Omega = \Omega_{\mu}^{\mu} = -R_{\mu\rho\sigma}^{\mu} ds^{\rho\sigma}. \quad (\text{К})$$

Инвариант Ω называется *кривизной гомотетии* или *сегментарной кривизной* многообразия. Тензор Ω_{μ}^{ν} , из которого этот инвариант получается, называется также *кривизной вращения*. Из соотношений (K) и (З) имеем

$$\Omega = -(\partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\rho}^{\mu} - \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\mu}) ds^{\rho\sigma}. \quad (\text{Л})$$

Поэтому эталон длины не меняется ($\int dl = 0$), если

$$\Gamma_{\mu\rho}^{\mu} = \partial_{\rho}\psi, \quad (\text{M})$$

где ψ — произвольная функция.

Условие (M) всегда выполняется как для евклидова, так и для риманова пространства. В самом деле [см. (14.103)],

$$\Gamma_{\mu\rho}^{\mu} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \partial_{\rho} g_{\mu\sigma} = \frac{1}{2g} \partial_{\rho} g = \partial_{\rho} \ln \sqrt{-g}. \quad (\text{H})$$

Таким образом, метрическое многообразие общего вида характеризуется равенством нулю кручения и двух видов кривизны

$$\boxed{\Omega^\mu \neq 0, \quad \Omega^\nu \neq 0, \quad \Omega \neq 0,} \quad (O)$$

так что

$$\boxed{\Gamma_{\mu\nu}^\rho \neq \Gamma_{\nu\mu}^\rho, \quad R_{\nu\rho\sigma}^\mu \neq 0, \quad d_\rho g_{\mu\nu} \neq d_\rho (e_\mu \cdot e_\nu).} \quad (P)$$

У риманова многообразия кручение равно нулю, а неравной нулю будет только кривизна одного вида. Поэтому для него структурными условиями будут

$$\boxed{\Omega^\mu = 0, \quad \Omega^\nu \neq 0, \quad \Omega = 0,} \quad (P)$$

откуда следует

$$\boxed{\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho, \quad R_{\mu\rho\sigma}^\nu \neq 0, \quad d_\rho g_{\mu\nu} = d_\rho (e_\mu \cdot e_\nu).} \quad (C)$$

Наконец, в евклидовом многообразии dt и de_μ интегрируемы и как кривизна, так и кручение обращаются в нуль

$$\boxed{\Omega^\mu = 0, \quad \Omega^\nu = 0, \quad \Omega = 0,} \quad (T)$$

что эквивалентно условиям

$$\boxed{\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho, \quad R_{\nu\rho\sigma}^\mu = 0, \quad d_\rho g_{\mu\nu} = d_\rho (e_\mu \cdot e_\nu).} \quad (Y)$$

Как мы видели, из первого и третьего условий (C) или (Y), одинаковых для риманова и евклидова многообразия, следует

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}. \quad (\Phi)$$

(См. работу Картана [154] и книгу Тоннела [212]).

Из (15.88) видно, что для бесконечно малого замкнутого контура „соответствующий“ ему в касательном евклидовом пространстве контур не будет замкнутым: *пространство обладает кручением.*

С другой стороны, согласно (15.89), эталон длины невозможно ориентировать определенным образом и, вообще говоря, переносить: *кривизна вращения многообразия* не равна нулю, а если эталон длины нельзя переносить, то не равна нулю также инвариантная форма — *сегментарная кривизна* (или кривизна гомотетии). Если последняя не равна нулю, то невозможно определить абсолютную единицу длины, имеющую одинаковое значение для всех точек многообразия. Вместе с тем сегментарная кривизна может обращаться в нуль (и, следовательно, может быть определена абсолютная

единица длины) также и тогда, когда $d\mathbf{e}_\mu$ не интегрируемы. В этом случае говорят, что существует инвариантность калибровки (Вейль). Если же кручение обращается в нуль, то многообразие будет обладать структурой риманова пространства.

§ 9. Кривизна риманова пространства. Тензор Римана — Кристоффеля

В римановом, так же как и в евклидовом, пространстве из интегрируемости $d\mathbf{t}$ и инвариантности калибровки следует (15.85)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}.$$

Различие между евклидовым и римановым пространством будет проявляться в случае, когда вдоль бесконечно малого замкнутого контура берется интеграл

$$\int d\mathbf{e}_\mu. \quad (15.90)$$

Если систему координат можно выбрать таким образом, что (15.90) обращается в нуль, то пространство будет евклидовым. Если же такой выбор невозможен, то с учетом, что $\int d\mathbf{e}_\mu \neq 0$, можно определить кривизну, характеризующую свойства риманова пространства.

Когда переменные возрастают на dy^ρ , вектор $\mathbf{e}_\mu(M)$ переходит в $\mathbf{e}'_\mu(y^\rho + dy^\rho)$. Поскольку для риманова многообразия коэффициенты аффинной связности определяются выражением (15.85), то в касательном в точке M пространстве этому вектору соответствует вектор $\mathbf{e}_\mu + d\mathbf{e}_\mu$, где

$$d\mathbf{e}_\mu = \omega_\mu^\nu \mathbf{e}_\nu = \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \mathbf{e}_\nu dy^\sigma. \quad (15.91)$$

Аналогично тому, как это делалось в § 4, последовательные приращения \mathbf{e}_μ мы рассмотрим в евклидовом пространстве, касательном в точке M_0 , которая находится на бесконечно малом расстоянии от всех точек контура.

В соответствии с (15.30) получим

$$(d\mathbf{e}_\mu)_0 = \left[\omega_\mu^\nu + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\}_0 (y^\rho - y_0^\rho) \omega_\mu^\sigma \right] (\mathbf{e}_\nu)_0. \quad (15.92)$$

Проинтегрируем (15.92) по контуру C , который мы возьмем в виде бесконечно малого параллелограмма со сторонами d и δ . С помощью теоремы Стокса можно перейти от криволинейного интеграла (15.90)

к поверхностному интегралу

$$\int d\mathbf{e}_\mu = \int \int d\delta \mathbf{e}_\mu - \delta d\mathbf{e}_\mu = \int \int (d\mathbf{e}_\mu)', \quad (15.93)$$

где

$$(d\mathbf{e}_\mu)' = d\delta \mathbf{e}_\mu - \delta d\mathbf{e}_\mu. \quad (15.94)$$

Подставляя (15.92), перепишем это выражение в виде

$$(d\mathbf{e}_\mu)' = d \left[\omega_\mu^\nu(\delta) + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\}_0 (y^\rho - y_0^\rho) \omega_\mu^\sigma(\delta) \right] (\mathbf{e}_\nu)_0 - \\ - \delta \left[\omega_\mu^\nu(d) + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\}_0 (y^\rho - y_0^\rho) \omega_\mu^\sigma(d) \right] (\mathbf{e}_\nu)_0, \quad (15.95)$$

т. е.

$$(d\mathbf{e}_\mu)' = \left[(\omega_\mu^\nu)' + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\}_0 [dy^\rho \omega_\mu^\sigma(\delta) - \delta y^\rho \omega_\mu^\sigma(d)] \right] + \\ + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\}_0 (y^\rho - y_0^\rho) \omega_\mu^\sigma(\mathbf{e}_\nu)_0, \quad (15.96)$$

где

$$(\omega_\mu^\nu)' = d\omega_\mu^\nu(\delta) - \delta\omega_\mu^\nu(d). \quad (15.97)$$

Во втором слагаемом из (15.96) два первых члена будут второго порядка малости относительно d и δ . Пренебрегая членами третьего порядка, т. е. третьим слагаемым в (15.96) и разностью между $\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}$ и $\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}_0$, получаем

$$(d\mathbf{e}_\mu)' = \left[(\omega_\mu^\nu)' + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} [dy^\rho \omega_\mu^\sigma(\delta) - \delta y^\rho \omega_\mu^\sigma(d)] \right] (\mathbf{e}_\nu)_0. \quad (15.98)$$

С учетом соотношений (15.91), которые можно записать в виде

$$\omega_\mu^\nu(d) = \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} dy^\rho, \quad \omega_\mu^\nu(\delta) = \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \delta y^\rho, \quad (15.99)$$

выражение (15.98) сводится к

$$(d\mathbf{e}_\mu)' = \{ (\omega_\mu^\nu)' + \omega_\sigma^\nu(d) \omega_\mu^\sigma(\delta) - \omega_\sigma^\nu(\delta) \omega_\mu^\sigma(d) \} (\mathbf{e}_\nu)_0. \quad (15.100)$$

или

$$(d\mathbf{e}_\mu)' = \{ (\omega_\mu^\nu)' - [\omega_\mu^\sigma \omega_\sigma^\nu] \} (\mathbf{e}_\nu)_0, \quad (15.101)$$

где

$$[\omega_\mu^\sigma \omega_\sigma^\nu] = \omega_\mu^\sigma(d) \omega_\sigma^\nu(\delta) - \omega_\mu^\sigma(\delta) \omega_\sigma^\nu(d). \quad (15.102)$$

Таким образом, выражение (15.100) для приращения $(d\mathbf{e}_\mu)'$ дает основание ввести тензор второго ранга с компонентами

$$\mathfrak{Q}_\mu^\nu = (\omega_\mu^\nu)' - [\omega_\mu^\sigma \omega_\sigma^\nu]. \quad (15.103)$$

При этом полное приращение вектора $d\mathbf{e}_\mu$ будет равно

$$\int d\mathbf{e}_\mu = \int \mathcal{Q}_\mu^y \mathbf{e}_\nu. \quad (15.104)$$

Тензором \mathcal{Q}_μ^y определяется кривизна риманова пространства.

Записывая соотношение (15.103) в явном виде и учитывая (15.99), компоненты тензора можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\mu^y = & d \left(\left\{ \begin{matrix} y \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \delta y^\rho \right) - \delta \left(\left\{ \begin{matrix} y \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} dy^\rho \right) - \\ & - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} dy^\rho \left\{ \begin{matrix} y \\ \sigma\lambda \end{matrix} \right\} dy^\lambda + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \delta y^\rho \left\{ \begin{matrix} y \\ \sigma\lambda \end{matrix} \right\} dy^\lambda. \end{aligned} \quad (15.105)$$

Формулу (15.105) можно записать также в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\mu^y = & \left(\partial_\lambda \left\{ \begin{matrix} y \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} y \\ \sigma\lambda \end{matrix} \right\} \right) dy^\lambda \delta y^\rho - \left(\partial_\lambda \left\{ \begin{matrix} y \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} + \right. \\ & \left. + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} y \\ \sigma\lambda \end{matrix} \right\} \right) dy^\rho \delta y^\lambda, \end{aligned} \quad (15.106)$$

переставляя в двух последних членах немые индексы ρ и λ , получаем

$$\mathcal{Q}_\mu^y = \left(\partial_\lambda \left\{ \begin{matrix} y \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} - \partial_\rho \left\{ \begin{matrix} y \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} y \\ \sigma\lambda \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} y \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \right) dy^\lambda \delta y^\rho. \quad (15.107)$$

Выражение в круглых скобках антисимметрично относительно λ и ρ . Поэтому можно ввести площадь бесконечно малого параллелограмма, построенного на d и δ ,

$$ds^{\lambda\rho} = \frac{1}{2} (dy^\lambda \delta y^\rho - dy^\rho \delta y^\lambda). \quad (15.108)$$

Тогда

$$\mathcal{Q}_\mu^y = \left(\partial_\lambda \left\{ \begin{matrix} y \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} - \partial_\rho \left\{ \begin{matrix} y \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} y \\ \sigma\lambda \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} y \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \right) ds^{\lambda\rho}. \quad (15.109)$$

Положим

$$G_{\mu\rho\lambda}^y = \partial_\lambda \left\{ \begin{matrix} y \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} - \partial_\rho \left\{ \begin{matrix} y \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} y \\ \sigma\lambda \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} y \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\}. \quad (15.110)$$

В результате для компонент \mathcal{Q}_μ^y тензора кривизны получим выражение¹⁾

$$\boxed{\mathcal{Q}_\mu^y = - G_{\mu\rho\lambda}^y ds^{\rho\lambda}.} \quad (15.111)$$

¹⁾ Тензор $G_{\mu\rho\lambda}^y$ равен тензору $R_{\mu\rho\lambda}^y$ ($\{ \}$) для многообразия общего вида, у которого коэффициенты связности $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ заменены частными выражениями $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ [см. формулу (3), стр. 422].

Тензор кривизны, компоненты которого равны $G'_{\mu\rho\lambda}$, называется *тензором Римана — Кристоффеля*.

Из (15.110) следует в общем случае

$$G'_{\mu\rho\lambda} = \partial_\lambda \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} - \partial_\rho \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\}. \quad (15.112)$$

Принимая во внимание выражения для символов Кристоффеля

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \partial_\rho g_{\mu\sigma} = \frac{1}{2g} \partial_\rho g = \frac{1}{2} \partial_\rho \ln g \quad (15.113)$$

и подставляя эти выражения в (15.112), получаем

$$G'_{\mu\rho\lambda} \equiv \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\rho \ln g - \partial_\rho \partial_\lambda \ln g) \equiv 0. \quad (15.114)$$

Следовательно,

$$\Omega = \Omega'_\mu = -G'_{\mu\rho\lambda} ds^{\rho\lambda} = 0. \quad (15.115)$$

Образованный из тензора Римана — Кристоффеля инвариант Ω характеризует кривизну гомотетии [см. формулу (Л), стр. 422]. В римановом пространстве этот инвариант тождественно равен нулю.

Итак, мы видим, что аффинная связность в римановом пространстве, как и в евклидовом, определяется формулой (15.85). Как и в случае евклидова пространства, для риманова пространства кривизна всегда равно нулю

$$\Omega^\mu = 0 \quad (\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho).$$

Кривизна гомотетии также равна нулю

$$\Omega = 0.$$

Вместе с тем для риманова пространства кривизна отлична от нуля:

$$\Omega_\mu^\nu = -G_{\mu\rho\sigma}^\nu ds^{\rho\sigma} \neq 0.$$

Таким образом, когда в римановом пространстве вектор A параллельно самому себе перемещается по бесконечно малому замкнутому контуру, то из приращений ковариантных компонент

$$dA_\mu = \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} A_\nu dy^\rho, \quad (DA_\mu)_\parallel = 0, \quad (15.116)$$

складывается полное приращение

$$\int dA_\mu = \int \int (dA_\mu)'. \quad (15.117)$$

Согласно (15.103),

$$\int dA_\mu = \int \int \Omega_\mu^\nu A_\nu = - \int \int G_{\mu\rho\sigma}^\nu A_\nu ds^{\rho\sigma}. \quad (15.118)$$

С другой стороны, из приращений контравариантных компонент

$$dA^\mu = - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} A^\sigma dy^\rho \quad (15.119)$$

в результате интегрирования по контуру возникает приращение

$$\int dA^\mu = \int \int (dA^\mu)', \quad (15.120)$$

так что ¹⁾

$$\int dA^\mu = \int \int \Omega_\nu^\mu A^\nu = - \int \int G_{\nu\rho\sigma}^\mu A^\nu ds^{\rho\sigma}. \quad (15.121)$$

Резюмируя, можно сказать, что условия, определяющие структуру риманова пространства, соответственно приводят к следующим различным свойствам такого пространства:

Из равенства кручения нулю ($\Omega^\mu = 0$) вытекает, что коэффициенты аффинной связности симметричны

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho. \quad (15.82)$$

Кривизна гомотетии равна нулю ($\Omega = \Omega_\mu^\mu = 0$), в связи с чем при параллельном переносе вектора по бесконечно малому замкнутому контуру длина вектора не меняется. Отсюда следует, что систему координат можно выбрать таким образом, чтобы единица длины во всех точках пространства была одинаковой. Вводя в соответствии с (15.64) обозначение $Dg_{\mu\nu}$, из (15.76) получаем

$$dl^2 \equiv (Dg_{\mu\nu}) A^\mu A^\nu = 0. \quad (15.122)$$

Из этого условия следует, что систему координат можно выбрать так, что

$$D_\rho g_{\mu\nu} = 0. \quad (15.123)$$

¹⁾ В самом деле, согласно (15.52),

$$(dA^\mu)' = d \delta A^\mu - \delta dA^\mu = -d \left(\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} A^\sigma \delta y^\rho \right) + \delta \left(\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} A^\sigma dy^\rho \right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (dA^\mu)' &= - \left[\partial_\tau \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \sigma\tau \end{matrix} \right\} \right] A^\sigma dy^\tau \delta y^\rho + \\ &+ \left[\partial_\tau \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\tau \end{matrix} \right\} \right] A^\lambda \delta y^\tau dy^\rho = \\ &= \left[\partial_\rho \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \lambda\tau \end{matrix} \right\} - \partial_\tau \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\tau \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} \right] A^\lambda \delta y^\rho dy^\tau = \\ &= \frac{1}{2} G_{\lambda\tau\rho}^\mu A^\lambda (dy^\tau \delta y^\rho - \delta y^\tau dy^\rho) = G_{\lambda\tau\rho}^\mu A^\lambda ds^{\tau\rho} = - \Omega_\lambda^\mu A^\lambda. \end{aligned}$$

Из (15.82) и (15.123) выводится выражение для коэффициентов аффинной связности в виде функции от $g_{\mu\nu}$ и их частных производных первого порядка

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}. \quad (15.124)$$

Из отличия от нуля кривизны вращения ($\Omega_{\mu}^{\nu} \neq 0$) следует, что невозможно найти такую систему координат, в которой $g_{\mu\nu}$ и их частные производные первого и второго порядков были бы связаны условиями

$$\Omega_{\mu}^{\nu} = 0 \quad \text{или} \quad G_{\mu\rho\sigma}^{\nu} = 0, \quad (15.125)$$

выполняющимися в случае евклидова пространства.

Структура риманова пространства полностью определяется перечисленными свойствами. Заметим, что характерные особенности такого пространства, зависящие от кривизны, будут определяться только величинами $g_{\mu\nu}$ и их производными до второго порядка включительно. Поэтому свойства риманова пространства полностью определяются заданием основного интервала

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dy^{\mu} dy^{\nu}. \quad (15.126)$$

§ 10. Свойства тензора Римана — Кристоффеля

Кривизна риманова пространства определяется заданием тензора Римана — Кристоффеля (15.110)

$$G_{\mu\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\sigma} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} - \partial_{\nu} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\}.$$

Опуская индекс ρ , получаем тензор

$$G_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\lambda} G_{\nu\rho\sigma}^{\lambda}. \quad (15.127)$$

С помощью (15.110) для этого тензора находим

$$\boxed{G_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\rho} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} \partial_{\sigma} g_{\mu\rho} - \partial_{\mu} \partial_{\sigma} g_{\nu\rho} - \partial_{\nu} \partial_{\rho} g_{\mu\sigma}) + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} [\rho\mu, \lambda] - \left[\begin{matrix} \lambda \\ \sigma\mu \end{matrix} \right] [\nu\rho, \lambda].} \quad (15.128)$$

Компоненты тензора антисимметричны по отношению к индексам ρ, σ или μ, ν и не меняются при перестановке между собой пар индексов $\mu\nu, \rho\sigma$

$$G_{\mu\nu\rho\sigma} = -G_{\mu\nu\sigma\rho}, \quad G_{\mu\nu\rho\sigma} = -G_{\nu\mu\rho\sigma}, \quad (15.129)$$

$$G_{\mu\nu\rho\sigma} = G_{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (15.130)$$

1. Тензор Риччи. Тензором Риччи называется тензор второго ранга, получаемый в результате свертывания $G_{\mu\nu\sigma}^{\rho}$ по индексам ρ и σ ,

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu\rho}^{\rho} = \partial_{\rho} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} - \partial_{\nu} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\}.$$

(15.131)

[В римановом пространстве свернутый тензор $G_{\rho\mu\nu}^{\rho}$ всегда равен нулю; см. (15.114).]

Тензор $G_{\mu\nu}$ симметричен

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}. \quad (15.132)$$

Наконец, при помощи этого тензора можно определить скалярную риманову кривизну

$$G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu\rho}^{\rho} = G_{\nu\rho}^{\rho\nu}. \quad (15.133)$$

2. Замечательные тождества. Вследствие наличия кривизны разность между двумя производными второго порядка $\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma}$ и $\nabla_{\sigma}\nabla_{\rho}$, взятыми от компонент тензора, не равна нулю. Исходя из определений (15.63), можно показать, что ¹⁾

$$(\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\rho}) A^{\nu} = -G_{\tau\rho\sigma}^{\nu} A^{\tau}, \quad (15.134)$$

$$(\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\rho}) A_{\mu} = G_{\mu\rho\sigma}^{\tau} A_{\tau}, \quad (15.135)$$

и, следовательно,

$$(\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\rho}) A_{\mu}^{\nu} \dots = -G_{\tau\rho\sigma}^{\nu} A_{\mu}^{\tau} \dots + G_{\mu\rho\sigma}^{\tau} A_{\tau}^{\nu} \dots. \quad (15.136)$$

Применяя эту формулу к тензору $A_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} A_{\nu}$, получаем

$$(\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\rho}) \nabla_{\mu} A_{\nu} = G_{\mu\rho\sigma}^{\tau} \nabla_{\tau} A_{\nu} + G_{\nu\rho\sigma}^{\tau} \nabla_{\mu} A_{\tau}. \quad (15.137)$$

¹⁾ В самом деле,

$$\begin{aligned} (\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\rho}) A^{\nu} &= \left[\partial_{\rho} (\nabla_{\sigma} A^{\nu}) - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \nabla_{\lambda} A^{\nu} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} \nabla_{\sigma} A^{\lambda} \right] - \\ &- \left[\partial_{\sigma} (\nabla_{\rho} A^{\nu}) - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} \nabla_{\lambda} A^{\nu} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} \nabla_{\rho} A^{\lambda} \right] = \\ &= \left[\partial_{\rho} \partial_{\sigma} A^{\nu} + \partial_{\rho} \left(\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} A^{\lambda} \right) - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \nabla_{\lambda} A^{\nu} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} \partial_{\sigma} A^{\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \tau\sigma \end{matrix} \right\} A^{\tau} \right] - \\ &- \left[\partial_{\sigma} \partial_{\rho} A^{\nu} + \partial_{\sigma} \left(\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} A^{\lambda} \right) - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} \nabla_{\lambda} A^{\nu} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} \partial_{\rho} A^{\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \tau\rho \end{matrix} \right\} A^{\tau} \right] = \\ &= \left[\partial_{\rho} \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} - \partial_{\sigma} \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \tau\rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \tau\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} \right] A^{\lambda} = G_{\lambda\sigma\rho}^{\nu} A^{\lambda} = -G_{\tau\rho\sigma}^{\nu} A^{\tau}. \end{aligned}$$

Прибавляя к (15.137) два других аналогичных уравнения, получаемых в результате циклической перестановки ρ, σ, ν , найдем соотношение, в котором нужно приравнять нулю отдельно коэффициенты при $\nabla_\mu A_\nu$ и A_ν . В результате получим тождества

$$G_{\nu\rho\sigma}^\tau + G_{\sigma\nu\rho}^\tau + G_{\rho\sigma\nu}^\tau \equiv 0, \quad (15.138)$$

$$\nabla_\rho G_{\mu\sigma\nu}^\tau + \nabla_\nu G_{\mu\rho\sigma}^\tau + \nabla_\sigma G_{\mu\nu\rho}^\tau \equiv 0. \quad (15.139)$$

Тождество (15.139) обычно называется *тождеством Бианки*.

Если путем умножения на компоненты $g^{\mu\lambda}$ (ковариантные производные от которых равны нулю) поднять индекс μ и затем просуммировать по μ , то получим

$$\nabla_\rho G_{\sigma\nu}^{\tau\lambda} + \nabla_\nu G_{\rho\sigma}^{\tau\lambda} + \nabla_\sigma G_{\nu\rho}^{\tau\lambda} \equiv 0. \quad (15.140)$$

Свертывание по λ, σ и τ, ν дает

$$\nabla_\rho G_{\sigma\nu}^{\sigma\nu} + \nabla_\nu G_{\rho\sigma}^{\sigma\nu} + \nabla_\sigma G_{\nu\rho}^{\sigma\nu} \equiv 0. \quad (15.141)$$

Принимая во внимание свойства симметрии компонент $G_{\rho\sigma}^{\mu\nu}$ (15.129) и учитывая определения (15.131) и (15.133), в результате получаем

$$\nabla_\rho G - 2\nabla_\nu G_\rho^\nu \equiv 0 \quad (15.142)$$

или

$$\nabla_\nu \left(G_\rho^\nu - \frac{1}{2} \delta_\rho^\nu G \right) \equiv 0. \quad (15.143)$$

В общей теории относительности это тождество имеет фундаментальное значение. Тензор

$$\boxed{S_\rho^\nu = G_\rho^\nu - \frac{1}{2} \delta_\rho^\nu G} \quad (15.144)$$

называется тензором Эйнштейна. Его дивергенция тождественно равна нулю

$$\boxed{\nabla_\nu S_\rho^\nu \equiv 0.} \quad (15.145)$$

§ 11. Геодезические линии риманова пространства. Прямые евклидова пространства в произвольной системе координат

В произвольной системе координат элементарный интервал четырехмерного метрического пространства записывается в виде

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu. \quad (15.146)$$

Если свойства пространства полностью определяются заданием ds^2 , то пространство будет или евклидовым (если тензор Римана — Кристоффеля равен нулю), или римановым.

Геodesическими линиями риманова пространства мы будем называть „кратчайшие“ линии, обладающие тем свойством, что для них $\int ds$ имеет стационарное значение. Для евклидова пространства геodesические линии будут прямыми.

Таким образом, геodesическая линия определяется при помощи условия

$$\delta \int ds = 0. \quad (15.147)$$

Учитывая, что, согласно (15.146),

$$2 ds (\delta ds) = (\delta g_{\mu\nu}) dy^\mu dy^\nu + g_{\mu\nu} dy^\nu (\delta dy^\mu) + g_{\mu\nu} dy^\mu (\delta dy^\nu), \quad (15.148)$$

перепишем (15.147) в виде

$$\delta \int ds = \frac{1}{2} \int \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^\rho} \delta y^\rho \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} + g_{\rho\nu} \frac{dy^\nu}{ds} \frac{d \delta y^\rho}{ds} + g_{\mu\rho} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{d \delta y^\rho}{ds} \right] ds. \quad (15.149)$$

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \int \delta ds = \frac{1}{2} \int \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^\rho} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} - \frac{d}{ds} \left(g_{\rho\nu} \frac{dy^\nu}{ds} + g_{\mu\rho} \frac{dy^\mu}{ds} \right) \right] \delta y^\rho ds + \\ + \frac{d}{ds} \left(g_{\rho\nu} \frac{dy^\nu}{ds} \delta y^\rho + g_{\mu\rho} \frac{dy^\mu}{ds} \delta y^\rho \right) ds. \end{aligned} \quad (15.150)$$

Если предположить, что на границах области интегрирования δy^ρ обращаются в нуль, то последний член в (15.150) будет равен нулю. Поскольку (15.150) должно выполняться тождественно при любых приращениях δy^ρ , то из условия (15.147) получим

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^\rho} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} - \frac{d}{ds} \left(g_{\rho\nu} \frac{dy^\nu}{ds} + g_{\mu\rho} \frac{dy^\mu}{ds} \right) = 0. \quad (15.151)$$

Из этого выражения легко найдем

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial y^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial y^\nu} \right) \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} - g_{\rho\nu} \frac{d^2 y^\nu}{ds^2} - g_{\mu\rho} \frac{d^2 y^\mu}{ds^2} = 0, \quad (15.152)$$

причем два последних члена здесь равны между собой. Умножая на $g^{\rho\sigma}$, окончательно получаем

$$\frac{d^2 y^\sigma}{ds^2} + \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial y^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial y^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^\rho} \right) \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} = 0 \quad (15.153)$$

или

$$\boxed{\frac{d^2 y^\sigma}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} = 0.} \quad (15.154)$$

Это уравнение часто записывают в несколько иной форме. Положим

$$u^\mu = \frac{dy^\mu}{ds}. \quad (15.155)$$

Тогда (15.154), выраженное с помощью u^μ , дает

$$\frac{du^\sigma}{ds} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} u^\mu u^\nu = 0. \quad (15.156)$$

Учитывая определение абсолютного дифференциала

$$\nabla u^\sigma = du^\sigma + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} u^\mu dy^\nu, \quad (15.157)$$

перепишем (15.156) в виде

$$\frac{\nabla u^\sigma}{ds} = \frac{du^\sigma}{ds} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} u^\mu u^\nu = 0, \quad \frac{dy^p}{ds} \frac{\nabla u^\sigma}{dy^p} = 0, \quad (15.158)$$

т. е.

$$\boxed{u^\rho \nabla_\rho u^\sigma = 0.} \quad (15.159)$$

Уравнения (15.154) или (15.159) определяют геодезические линии в римановом или в евклидовом пространстве. В случае евклидова пространства эти уравнения всегда можно записать в галилеевой системе координат, в которой

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \quad (15.160)$$

В такой специальной системе координат (15.158) примет вид

$$\frac{du^p}{ds} = 0, \quad \frac{du^0}{ds} = 0 \quad (15.161)$$

и, согласно (7.12),

$$u^p = \frac{v^p}{c} u^0, \quad u^0 = c \frac{dt}{ds}. \quad (15.162)$$

Таким образом, в галилеевой системе координат уравнения (15.154) или (15.159) дают

$$v^p = \frac{dy^p}{dt} = \text{const}, \quad y^p = v^p t + a^p. \quad (15.163)$$

Это есть не что иное, как уравнение прямой линии в ортонормированной системе координат.

Задачи

1. Пусть имеется многообразие с аффинной связностью общего вида (когда $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ не симметричны).

Показать, что

$$D_\rho \ln g = 2 \left[\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} - \Gamma_{\mu\rho}^\mu \right],$$

$$D_\rho \mathcal{A} = \partial_\rho \mathcal{A} - \mathcal{A} \Gamma_{\mu\rho}^\mu,$$

$$D_\rho A^{\mu\rho} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho \mathcal{A}^{\mu\rho} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu A^{\sigma\rho} + 2A^{\mu\sigma} \Gamma_\sigma - A^{\mu\sigma} D_\sigma \ln \sqrt{-g},$$

где

$$\mathcal{A} = \sqrt{-g} A, \quad \mathcal{A}^{\mu\rho} = \sqrt{-g} A^{\mu\rho}, \quad \Gamma_\rho = \Gamma_{\rho\mu}^\mu.$$

2. Показать, что предыдущие соотношения упрощаются, если $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ (что имеет место для риманова или евклидова пространства) или если тензор $A^{\mu\rho}$ антисимметричен.

3. Рассмотреть задачу 3 из гл. 14, предположив, что коэффициенты аффинной связности несимметричны.

Представить

$$\Phi_{\mu\nu} = D_\mu \varphi_\nu - D_\nu \varphi_\mu,$$

$$\Phi_{\mu\nu\rho} = D_\mu \varphi_{\nu\rho} + D_\rho \varphi_{\mu\nu} + D_\rho \varphi_{\nu\mu}$$

в виде функций от $\varphi_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu\rho}$.

4. Пусть имеется двумерное многообразие, образованное поверхностью сферы радиуса R . Взяв систему координат, для которой

$$ds^2 = f(\xi^2 + \eta^2) (d\xi^2 + d\eta^2), \quad f(0) = 1$$

найти $f(\xi^2 + \eta^2)$ и выражения для ξ и η в виде функций от R , θ и φ .

Ответ:

$$f = \frac{R^2}{R^2 + \frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)}, \quad \xi = \frac{2R \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \cos \theta, \quad \eta = \frac{2R \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \sin \theta.$$

5. Записать (15.134) и (15.135) в явном виде и для пространства, в котором наряду с кривизной имеется кручение ($\Gamma_{\mu\nu}^\rho \neq \Gamma_{\nu\mu}^\rho$), найти тождества, обобщающие (15.138) и (15.139).

ЛИТЕРАТУРА

Рекомендованная литература

К части I

- Becker R., *Electronentheorie*, Leipzig, 1933. (См. перевод: Беккер Р., Теория электричества, т. 2, Электронная теория, М. — Л., 1941.)
- Bloch L., *Précis d'électricité théorique*, Paris, 1919.
- Durand E., *Électrostatique et magnétostatique*, Paris.
- Jouguet M., *Le champ électromagnétique*, Paris, 1954.
- Jouguet M., *Électrostatique*, Paris, 1952.
- Jouguet M., *Électrocinétique et magnétostatique*, Paris, 1955.
- Lorentz H. A., *The Theory of Electrons*, Leipzig, 1916. (См. перевод: Г. А. Лоренц, Теория электронов, М. — Л., 1956.)
- Slater C., Frank N. H., *Electromagnetism*, New York, 1947.
- Stratton J. A., *Electromagnetic Theory*, New York, 1941. (См. перевод: Страттон Дж. А., Теория электричества, М. — Л., 1948.)
- *Тамм И. Е., *Основы теории электричества*, М. — Л., 1957.
- *Ландау Е. М., Лифшиц Е. М., *Электродинамика сплошных сред*, М. — Л., 1957.
- *Умов Н. А., *Уравнения движения энергии в телах*, Одесса, 1874; *Избранные сочинения*, М. — Л., 1950.
- *Волькенштейн М. В., *Строение молекул*, Изд-во АН СССР, 1955.

К части II

- Arzeliès H., *Cinématique Relativiste*, Paris, 1955.
- Bergmann P. G., *Introduction to the Theory of Relativity*, New York, 1942.
- Born M., *La Théorie de la Relativité d'Einstein*, Paris, 1923.
- Costa de Beauregard O., *La Théorie de la Relativité Restreinte*, Paris, 1949.
- Einstein A., *Ann. d. Phys.*, 17, 891 (1905).
- Einstein A., *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Braunschweig, 1917. (См. перевод: Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, 1955.)
- Lorentz H. A., Einstein A., Minkowski H., *Das Relativitätsprinzip*, 4 Aufl., Leipzig, 1922. (См. перевод в сборнике „Принцип относительности“, М. — Л., 1935.)

¹⁾ Звездочкой отмечены работы, добавленные переводчиком.

- Laue M., La Théorie de la Relativité, v. I, Paris, 1924.
 Møller C., The Theory of Relativity, Oxford, 1952.
 Papapetrou A., Spezielle Relativitätstheorie, Berlin, 1955.
 Synge J. L., Relativity: The Special Theory, Amsterdam, 1956.
 *Arzeliés H., La dynamique relativiste et ses applications, Fasc. 2, Problèmes de mouvement en dynamique du point faiblement accéléré, Paris, 1958.
 *Философские вопросы современной физики, Изд-во АН СССР, 1959.
 *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М. — Л., 1960.
 *Паули В., Теория относительности, ИЛ, 1947.
 *Мессбауэр Р. Л., УФН, 72, 658 (1960).
 *Falicov L. M., Nuovo Cimento, 16, 247 (1960).

К части III

- Bergmann P. G., Introduction to the Theory of Relativity, New York, 1942. (См. перевод: Бергман П. Г., Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947.)
 Møller C., The Theory of Relativity, Oxford, 1952.
 Chazy J., La Théorie de la Relativité et la Mécanique Céleste, v. I, II, Paris, 1930.
 Darmon G., Les équations de la gravifique Einsteinienne, Mém. des Sc. Math. XXV, 1926.
 De Donder Th., Introduction à la gravifique Einsteinienne, Théorie du champ gravifique, Mém. des Sci. Math., VIII, 1925.
 Eddington A. S., The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge, 1954. (См. перевод первого издания: Эддингтон А. С., Теория относительности, М., 1934.)
 Einstein A., Berl. Ber., 778, 799, 844 (1915); Ann. d. Phys., 49, 769 (1916); Les fondements de la Relativité Générale, Paris, 1933.
 Laue M., La Théorie de la Relativité, v. II, Paris, 1924.
 Lichnerowicz A., Théories Relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Paris, 1955.
 Tonnelat M. A., Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation, Paris, 1959.
 Weyl H., Raum. Zeit. Materie, Berlin, 1920.
 *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М. — Л., 1960.
 *Паули В., Теория относительности, ИЛ, 1947.
 *Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, М. — Л., 1961.
 *Arzeliés H., Milieux conducteurs ou polarisables en mouvement, Paris, 1959.
 *Паунд Р. В., УФН, 72, 673 (1960).
 *Румер Ю. Б., Исследования по 5-оптике, М. — Л., 1956.
 *Блэккет П. М., УФН, 33, 1 (1947).

К части IV

- Eddington A. S., *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge, 1954, Ch. II.
- Tonnellat M. A., *Les Théories unitaires de l'électromagnétisme et de la Gravitation*, Paris, 1959, Ch. I.
- Brillouin L., *Les Tenseurs en Mécanique et en élasticité*, Paris, 1938.
- Cartan E., *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, 1928. (См. перевод: Картан Э., *Геометрия римановых пространств*, М. — Л., 1936.)
- Cartan E., *Les espaces à connexion affine et la théorie de la Relativité Générale*, Ann. Ec. Norm., 40, 23.
- Cartan E., *La méthode du repère mobile*, Paris, 1935.
- Eisenhart, L. P., *Riemanian geometry*, Princeton, 1926. (См. перевод: Эйзенхарт Л. П., *Риманова геометрия*, ИЛ, 1948.)
- Eisenhart L. P., *Non Riemanian geometry*, Amer. Coll. Publ., 8 (1927).
- Levi Civita T., *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque*, Rend. del Circ. Mat., Palermo, 1917, p. 173.
- Lichnerowicz A., *Éléments de calcul tensoriel*, Paris, 1957.
- Mavridès S., *Algèbre et Analyse tensorielle, Structure des variétés à connexion affine*, Publications du C. E. M. A., Ch. IV.
- *Веблен О., *Инварианты дифференциальных квадратичных форм*, ИЛ, 1948.
- *Норден А. П., *Пространства аффинной связности*, М. — Л., 1950.
- *Рашевский П. К., *Риманова геометрия и тензорный анализ*, М. — Л., 1953.
- *Розенфельд Б. А., *Неевклидовы геометрии*, М. — Л., 1955.

Цитированная литература

1. Slater C., Frank N. H., *Electromagnetism*, New York, 1947.
2. Stratton J. A., *Electromagnetic Theory*, New York, 1941. (См. перевод: Страттон Дж. А., *Теория электромагнетизма*, М. — Л., 1948.)
3. Birge, *Rep. Progr. Phys.*, 8, 90 (1941).
4. Bergstrand E., *Handbuch der Physik*, Bd. 24, 1956, S. 1.
5. Bergstrand E., N. P. L., *Rec. Dev. Stand. London*, 1952, p. 75.
6. Costa de Beauregard O., *Revue des questions Scientif.*, 1957, p. 5.
7. Bergstrand E., *Ark. Phys.*, 2, 119 (1950).
8. Aslakson C. I., *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.* 77, 1 (1951).
9. Aslakson C. I., *Trans Amer. geophys. Un.*, 32, 813 (1951).
10. Jastram, C., *Phys. Rev.*, 84, 271 (1951).
11. Essen L., Jordan-Smith A. C., *Proc. Roy. Soc.*, 194, 348 (1943).
12. Essen L., Jordan-Smith A. C., *Proc. Roy. Soc.*, 204, 260 (1950).
13. Essen L., Jordan-Smith A. C., *Nature*, 175, 793 (1955).
14. Culshaw, *Proc. Phys. Soc.*, B66, 597 (1953).
15. Froome K. D., *Proc. Roy. Soc.*, 213, 123, 223 (1952).

16. Froome K. D., Proc. Roy. Soc., 214, 195 (1954).
17. Florman E. F., Journ. of Res. N. B. S., 54, 335 (1955).
13. Rank D. H., Van der Sluis Ruth, Phys. Rev. 86, 799 (1952).
19. Rank D. H., Van der Sluis Ruth, Journ. Opt. Soc. Amer., 42, 693 (1952).
20. Townes N. K., Phys. Rev., 86, 798 (1952).
21. Rank D. H., Shearer, Wiggins, Phys. Rev., 94, 575 (1954).
22. Rank D. H., Bennett, Bennett, Phys. Rev., 100, 993 (1955).
23. Rank D. H., Guenther, Shearer, Journ. Opt. Soc. Amer., 47, 148 (1957).
24. Hansen-Bol, Phys. Rev., 80, 298 (1950).
25. Plyler E. K., Journ. Opt. Soc. Amer., 44, 507 (1954).
26. Weber W., Kohlrusch R., Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, No 2, 1856.
27. Röntgen W. C., Ann. d. Phys., 35, 268 (1888).
28. Эйхенвальд А. А., Ann. d. Phys., 11, 1, 421 (1903).
29. Becker R., Théorie des électrons, Paris, 1938. (См. перевод: Беккер Р., Теория электричества, т. 2, Электронная теория, М.—Л., 1941.)
30. Wilson H. A., Phil. Trans., 204, 121 (1904).
31. Bloch L., Précis d'électricité théorique, Paris, 1919.
32. Lorentz H. A., The Theory of Electrons, Leipzig, 1916. (См. перевод: Г. А. Лоренц, Теория электронов, М.—Л., 1956).
33. Gerlach W., Handbuch der Physik, Bd. 22, 1933, S. II-2.
34. Rosenfeld L., Theory of Electrons, Amsterdam, 1951.
35. Millikan A., Phys. Rev., 14, 136, 796 (1913).
36. Regener E., Zs. f. Phys., 39, 247 (1926).
37. Regener E., Berl. Ber., 948 (1909).
38. Schottky W., Ann. d. Phys., 65, 541 (1918); 68, 157 (1922).
39. Costa de Beauregard O., Bull. Astron., XV, Fasc. 2, 159 (1950).
40. Arzeliès H., Cinématique relativiste, Paris, 1955.
41. Döppler Ch., Abhandl. Kgl. Bochmischen Gesell. Wiss., (5) 2, 465—482 (1941—1942).
42. Bradley J., Phil. Trans., 35, 637 (1728).
43. Airy G. B., Proc. Roy. Soc., A20, 35 (1871); 21, 121 (1873).
44. Airy G. B., Phil. Mag., 43, 310 (1872).
45. Stark S., Ann. d. Phys., 21, 40 (1906).
46. Stark J., Siegel K., Ann. d. Phys., 21, 457 (1906).
47. Stark S., Hermann W., Kinoshita S., Ann. d. Phys., 21, 462 (1906).
48. Ives H. E., Stillwell G. R., Journ. Opt. Soc. Amer., 28, 215 (1938).
49. Stokes G. G., Phil. Mag., 27, 9 (1845).
50. Stokes G. G., Math. Phys. Papers, 1, 134 (1880).
51. Arago D. F., Compt. Rend., 8, 326 (1839); 36, 38 (1853).
52. Fizeau H., Compt. Rend., 33, 349 (1851); Ann. Phys. Chem. Erg., 3, 457 (1853).

53. Michelson A. A., Morley E. W., Amer. Journ. Sci., 31, 377 (1886).
54. Zeeman P., Amst. Versl., 23, 245 (1914); 24, 18 (1915).
55. Hoek M., Arch. néerland. Sci. exactes naturelles, 3, 180 (1868).
56. Fresnel A. J., Ann. de Chem. Phys. 9, 57 (1818); Oeuvres complètes, v. 2, Paris, 1866—1870, p. 627.
57. Mascart E., Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., (2) 1, 157 (1872); 3, 363 (1874).
58. Mascart E., Traité d'optique, Paris, 1893, Ch. XV, p. 38.
59. Veltmann W., Astr. Nachr., 75, 145 (1870); 76, 129 (1870); Ann. Phys. Chem., 150, 491 (1873).
60. Potier A., Journ. Phys., 3, 201 (1874).
61. Bloch L., Précis d'électricité théorique, Paris, 1919.
62. Born M., La théorie de la relativité restreinte, Paris, 1949. (См. перевод: Борн М., Теория относительности Эйнштейна и физические основы, М., 1938.)
63. Michelson A. A. Amer. Journ. Sci., 22, 20 (1881).
64. Michelson A. A., Morley E. W., Amer. Journ. Sci., 34, 333 (1887).
65. Kennedy R. J., Proc. Nat. Acad., 12, 621 (1926).
66. Illingsworth K. K., Phys. Rev., 30, 692 (1927).
67. Piccard A., Stahel E., Naturwiss., 14, 935 (1926); 16, 25 (1928).
68. Joos G., Ann. d. Phys., 7, 385 (1930).
69. Miller D. C., Rev. Mod. Phys., 5, 203 (1933).
70. Trouton F. T., Noble H. R., Proc. Roy. Soc., 72, 132 (1903).
71. Trouton F. T., Rankine A., Proc. Roy. Soc., 80, 420 (1908).
72. Chase C. T., Phys. Rev., 30, 516 (1927).
73. Tomashek R., Ann. d. Phys., 73, 105 (1924); 78, 743 (1925); 80, 509 (1926); 84, 161 (1927).
74. Ritz W., Ann. Chim. et phys., 13, 145 (1908).
75. Sitter W., Phys. Zs., 14, 429 (1913).
76. Sitter W., Phys. Zs., 14, 1267 (1913).
77. Lodge O., London Trans., A184, 727 (1893).
78. Lorentz H. A., Amest. Verh. Akad. wer., 1, 74 (1892).
79. Rayleigh, Phyl. Mag., 4, 678 (1902).
80. Brace D. B., Phil. Mag., 317 (1904).
81. Wood A. B., Tomlison G. A., Essex L., Proc. Roy. Soc., 158, 606 (1937).
82. Costa de Beauregard O., La Théorie de la Relativité Restreinte, Paris, 1949.
83. Einstein A., Ann. d. Phys., 17, 891 (1905).
84. Einstein A., Jahrbuch d. Radioakt. u. Electronik, 4, 411 (1907).
85. Poincaré H., La valeur de la Science Ouvres de Henri Poincaré, Paris, 1934.
86. Poincaré H., Rev. Meta et Morale, VI, 1, 28, p. 1.
87. Chazy J., La théorie de la Relativité et la Mécanique Céleste, v. II, Paris, 1930.

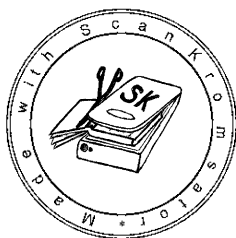
88. Borel E., Introduction géométrique à quelques théories physiques Paris, 1914.
89. Poincaré H., Rend. Pal., 12, 129 (1906).
90. Minkowski H., Phys. Zs., 10, 104 (1909).
91. Synge J. L., Relativity: the special theory, Amsterdam, 1956.
92. Møller C., The theory of relativity, Oxford, 1952.
93. Langevin P., Scientia, 10, 31 (1911).
94. Mac Crea W. H., Proc. Roy. Dublin Soc., 26, 27 (1952).
95. Lalan V., Compt. Rend., 203 1491 (1936).
96. Lalan V., Bull. Soc. Math. Fr., 65, 98 (1937).
97. Metz A., Compt. Rend., 237, 29 (1953).
98. Thomas L. W. Phil. Mag., 3, 1 (1927).
99. Sommerfeld A., Phys. Zs., 8, 841 (1907).
100. Sommerfeld A., Phys. Zs., 33, 413 (1932).
101. Sommerfeld A., Ann. d. Phys., 44, 177 (1914).
102. Brillouin L., Ann. d. Phys., 44, 303 (1914).
103. Brillouin L., Comptes Rendus du Congrès International de l'Électricité, II, 753 (1932).
104. Mac Vittie G. C., General Relativity and Cosmology, New York, 1956. (См. перевод: Мак-Витти Дж., Общая теория относительности и космология, ИЛ, 1961.)
105. de Broglie L., Thèse.
106. Bergmann P. G., Introduction to the Theory of Relativity, New York, 1942. (См. перевод: Бергман П. Г., Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947.)
107. Anderson C. D., Science, 76, 238 (1932).
108. Blackett P. M. S., Occhialini G. P. S., Proc. Roy. Soc., A139, 699 (1933).
109. Dirac P. A. M., The principles of quantum Mechanics, 3 ed., Oxford, 1947, § 73. (См. перевод второго издания: Дирак П. А. М., Основы квантовой механики, М.—Л., 1937.)
110. Anderson C. D., Neddemeyer, Phys. Rev., 43, 1034 (1933).
111. Rasetti F., Meitner L., Philipp K., Naturwiss., 21, 286 (1933).
112. Curie I., Joliot F., Compt. Rend., 196, 158 (1933).
113. Lichnerowicz A., Elements de calcul Tensoriel, Paris, 1957.
114. Poincaré H., Compt. Rend., 140, 1504 (1905).
115. Minkowski H., Gött. Nachricht., 53 (1908); Math. Ann., 68, 472 (1910).
116. Pham Mau Quan, Journ. Rat. Mech. Anal., 5, 473 (1956).
117. Mie G., Ann. d. Phys., 37, 511 (1912); 39, 1 (1912); 40, 1 (1913).
118. Born M., Proc. Roy. Soc., A143, 410 (1934); Ann. Inst. H. Poincaré. 1937.
119. Born M., Infeld L., Proc. Roy. Soc., A144, 425 (1934).
120. Ives H. E., Stillwell G. R., Journ. Opt. Soc. Amer., 31, 369 (1941).
121. Lennuier R., Rev. Sci., 85, 740 (1947).
122. Batho H. F., Dempster A. J., Astr. Journ., 75, 34 (1932).
123. Williams, Roberts, Nature, 145, 102 (1940):

124. Auger P., Maze, *Compt. Rend.*, **213**, 381 (1941).
125. Maze, Chaminade, *Compt. Rend.*, **214**, 266 (1942).
126. Chaminade, Fréon, Maze, *Compt. Rend.*, **218**, 402 (1944).
127. Nereson, Rossi, *Phys. Rev.*, **64**, 199 (1943).
128. Cacciapuoti, Riccioni, *Ricerca Sci.*, **12**, 874 (1941).
129. Rossi, Hall, *Phys. Rev.*, **59**, 223 (1941).
130. Leprince-Ringuet L., Gorodetzky S., *Compt. Rend.*, **213**, 756 (1941).
131. Kaufmann W., *Gött. Nachr. Math. Nat. Klasse*, 143 (1901).
132. Bücherer A. H., *Vern. Deutsch., Phys. Ges.*, **6**, 688 (1908).
133. Neumann G., *Ann. d. Phys.*, **45**, 529 (1914).
134. Guye Ch. E., Lavanchy Ch., *Arch. de Genève*, **41**, 353, 441 (1916).
135. Guye Ch. E., Lavanchy Ch., *Arch. Sc. Phys. Nat. Genève*, **41**, 286 (1916).
136. Nacken M., *Ann. d. Phys.*, **25**, 313 (1935).
137. Champion F. C., *Proc. Roy. Soc.*, **A136**, 630 (1932).
138. Curie M., *Radioactivité*, v. I, Paris, 1935.
139. Leprince Ringuet L., *Thèse*, Paris, 1936.
140. Bethe H. A., *Elementary Nuclear Theory*, New York, 1947. (См. перевод: Бете Г., *Лекции по теории ядра*, ИЛ, 1949.)
141. Cockcroft J. D., Walton G. T. S., *Proc. Roy. Soc.*, **A137**, 229 (1932).
142. Bainbridge K. T. Jordan E. B., *Phys. Rev.*, **51**, 384 (1937).
143. Bethe H., Livingston M. S., *Rev. Mod. Phys.*, **9**, 370 (1937).
144. Smith N. M., *Phys. Rev.*, **56**, 548 (1939).
145. Southern L., *Proc. Roy. Soc.*, **A84**, 325 (1910).
146. Eötvös R. V., *Math. u. Naturwiss. Ber. aus Ungarn.*, **8**, 65 (1890); *Ann. d. Phys.*, **59**, 354 (1896).
147. Eötvös R. V., Pekar D., Fekete E., *Ann. d. Phys.*, **68**, 11 (1922).
148. Zeeman P., *Proc. Roy. Amst.*, **20**, 542 (1917).
149. Von Laue M., *La Théorie de la Relativité*, v. II, Paris, 1924.
150. Durand E., *Ann. de Phys.*, **20**, 535 (1945); **21**, 216 (1946).
151. Harres F., *Dissertation*, Iena, 1912.
152. Sagnac G., *Compt. Rend.*, **157**, 708, 1410 (1913); *Journ. Phys.* **4**, 177 (1914).
153. Einstein A., *Ann. d. Phys.*, **35**, 898 (1911); **38**, 443 (1912); *Phys. Zs.* **14**, 1249 (1913).
154. Cartan E., *Ann. Ec. Norm.*, **40**, 325 (1923).
155. Langevin P., *Compt. Rend.*, **173**, 831 (1921).
156. Eddington A. S., *The mathematical Theory of Relativity*, Cambridge, 1954. (См. перевод первого издания: Эддингтон А. С., *Теория относительности*, М., 1934).
157. Kursunoglu B., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **47**, 177 (1951).
8. Einstein A., *Berl. Ber.*, 778, 799, 844 (1915); *Ann. d. Phys.*, **49**, 769 (1916).

159. Hilbert D., Gött. Nachr., 395 (1915).
160. Lichnerowicz A., Théories Relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Paris, 1955.
161. Darmois G., Les équations de la gravifique Einsteinienne, Mém des Sc. Math., XXV, 1926.
162. De Donder Th., Introduction à la gravifique Einsteinienne, Théorie du champ gravifique, Mém. des Sc. Math, VIII, 1925.
163. Einstein A., Rosen, Journ. Frankl. Inst., 223, 43 (1937).
164. Bonnor W. B., Ann. de l'Inst. H. Poincaré, 15, III, 146 (1957); Nature, 181, 1196 (1958).
165. Pirani, Actes du Congrès sur la gravitation, Chapel Hill, 1957.
166. Lichnerowicz A., Compt. Rend., 249 (Juillet 1958).
167. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B., Ann. Math., 39, 65 (1938).
168. Einstein A., Infeld L., Ann. Math., 41, 455 (1940).
169. Einstein A., Infeld L., Canad. Journ. Math., 1, 209 (1949).
170. Infeld L., Wallace P. R., Phys. Rev., 57, 797 (1940).
171. Infeld L., Schild A., Rev. Mod. Phys., 21, 408 (1949).
172. Infeld L., Acta Phys. Polo, XIII, 187 (1954).
173. Pham Tan Hoang, Thèse, Paris, 1957.
174. Фок В. А., Journ. of Phys. (USSR), 1, 81 (1939).
175. Papapetrou A., Proc. Phys. Soc., 64, 37 (1951).
176. Петрова Н. М., ЖЭТФ, 19, 989 (1949).
177. Hennequin F., Thèse de doctorat, Paris, 1956.
178. Schwarzschild, Berl. Ber., 189 (1916).
179. Birkhoff, Relativity and Modern Physics, Harvard, 1923.
180. Mineur H., Bull. Soc. Math de France, 56, 50 (1928).
181. Jeffery G. B., Proc. Roy. Soc., A99, 123.
182. Rassner H., Ann. d. Phys., 50, 106 (1916).
183. Weyl H., Ann. d. Phys., 54, 117 (1917).
184. Campbell W., Trumpler R., Lick Observat. Bull., 11, 41 (1923); 13, 130 (1928).
185. Ovenden M. W., Sci. Progr., 40, 645 (1952).
186. Mitchell S. A., Eclipses of the Sun, New York, 1951.
187. Saint-John, Astrophys. Journ., 67, 195 (1928).
188. Adams, Proc. Nat. Acad., 11, 383 (1925).
189. Adam M. G., Mon. Not. R. Astr. Soc., 108, 446 (1948).
190. Popper D. M., Astrophys. Journ., 120, 316 (1954).
191. Birkhoff, Proc. Nat. Acad., 29, 231 (1943).
192. Tonnelat M. A., Ann. de l'Inst. H. Poincaré, 1961; Revue d'Optique, 1961.
193. Tonnelat M. A., Les vérifications expérimentales de la Relativité Générale, Paris (в печати).
194. Mössbauer R. Zs. f. Phys., 151, 24 (1958); Naturwiss., 45, 1538 (1958).
195. Mössbauer R., Zs. Naturforsch., 14a, 211 (1959).
196. Pound Rebka, Phys. Rev. Lett., 3, 439, 554 (1959).

197. Cranshaw, Shiffer, Whitehead, Phys. Rev. Lett., 4, 163 (1960).
198. Pound, Rebka, Phys. Rev. Lett., 4, 337 (1960).
199. Hay H. J., Schiffer J. P., Cranshaw T. E., Egelstaff P. A. Phys. Rev. Lett., 4, 165 (1960).
200. Kaluza, Sitzungber. d. Preuss. Akad. Wiss., 966 (1921).
201. Einstein, Mayer, Berl. Ber., 541 (1931); 130 (1932).
202. Veblen O., Projektive Relativitätstheorie, Berlin, 1933.
203. Pauli W., Ann. d. Phys., 18, 305 (1933).
204. Jordan, Ann. d. Phys., 219 (1947).
205. Thiry Y. R., Compt. Rend., 226, 216, 1881 (1948); Thèse, Paris, 1950.
206. Podolanski, Proc. Roy. Soc., 201, 234 (1950).
207. Einstein A., Bargmann V., Bergmann P. G., Theodore von Kármán Anniversary volume, Pasadena, 1941, p. 212.
208. Weyl H., Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. Wiss., 465 (1918); Ann. d. Phys., 59, 101 (1919).
209. Weyl H., Raum. Zeit. Materie, Berlin, 1920.
210. Einstein A., Théorie unitaire du champ physique, Ann. Inst. H. Poincaré, 1, 1 (1930).
211. Einstein A., The Meaning of Relativity, Princeton, 1953. (См. перевод четвертого издания: Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, 1955.)
212. Tonnelat M. A., Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation, Paris, 1959.
213. Gupta, Proc. Phys. Soc., 65, 161 (1952).

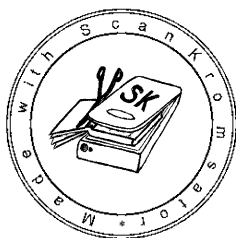
Эта страница пуста



ДОПОЛНЕНИЕ



Эта страница пуста



О СВЯЗИ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ С ТЕОРИЕЙ ГРУПП

Г. А. Зайцев

Между теорией относительности и теорией групп существуют тесные и глубокие связи, знакомство с которыми имеет важное значение как для ряда областей физики (особенно для области квантовых теорий), так и для лучшего понимания самой теории относительности. Настоящее дополнение ставит своей целью указать на подобные связи и кратко познакомить читателя с теми результатами теории групп, которые необходимы для более глубокого понимания теории относительности. Предварительно кратко излагаются основы теории групп, имея в виду ее использование при решении многочисленных конкретных задач, связанных с теорией относительности.

§ 1. Понятие о группе и его связь с задачей об изучении инвариантных свойств геометрических объектов

Множество G элементов a, b, c, \dots называется *группой*, если произведение ab любых двух таких элементов (в общем случае не равное произведению ba) также является элементом из G и если выполняются следующие три аксиомы:

1) имеет место условие ассоциативности, т. е. для любых трех элементов a, b, c из G $(ab)c = a(bc)$;

2) в G существует такой элемент e , называемый единицей, что $ea = a$ для любого элемента a из G ;

3) для любого элемента a из G существует обратный элемент a^{-1} , для которого $a^{-1}a = e$.

Из приведенных аксиом следует, что $aa^{-1} = e$ [ибо $(a^{-1})^{-1} \times (a^{-1}a)a^{-1} = aa^{-1} = e$] и что $ae = a$ [ибо $a(a^{-1}a) = (aa^{-1})a = a$].

В физике и геометрии элементами группы обычно являются преобразования (которые для отличия от абстрактных групповых элементов мы будем обозначать заглавными латинскими буквами,

например E, T_1, T_2, \dots), причем особенно важную роль играют группы, содержащие бесконечное число элементов.

Примерами групп являются группа трехмерных вращений $M^{(3)}$, элементы которой можно характеризовать, например, заданием углов Эйлера; группа трехмерных смещений $N^{(3)}$, элементы которой характеризуются обычными трехмерными векторами, и шестипараметрическая группа евклидовых движений $L^{(6)}$, состоящая из совокупности всех трехмерных вращений и трехмерных смещений¹⁾.

Несколько более общим примером является группа $G^{(6)}$, определяемая исходя из требования, чтобы преобразования из $G^{(6)}$ не меняли расстояние между двумя любыми точками трехмерного пространства

$$(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 = inv. \quad (1)$$

Группы $M^{(3)}, N^{(3)}$ и $L^{(6)}$ являются подгруппами группы $G^{(6)}$ (подгруппой называется такое подмножество элементов, которое само является группой). Однако $G^{(6)}$ содержит еще и дополнительные элементы, а именно линейные преобразования компонент векторов с детерминантом, равным -1 , которые называют также несобственными вращениями или отражениями. Примером отражений служит преобразование S_3 , при котором в формуле (1) x^3 и y^3 заменяются на $-x^3$ и $-y^3$, остальные компоненты векторов не меняются. Произвольное трехмерное несобственное вращение можно представить в виде произведения одного из них, например S_3 , на некоторое собственное вращение, являющееся элементом из $M^{(3)}$.

На приведенных примерах можно проиллюстрировать значение выделения подгрупп, относительным расположением и свойствами которых во многом определяются важнейшие свойства группы.

Подгруппа N группы G называется нормальным делителем, если для произвольного элемента a из G и произвольного элемента b из N величина aba^{-1} является элементом из N . Например, в группе $L^{(6)}$ одним из нормальных делителей (а именно максимальным нормальным делителем, отличным от группы $L^{(6)}$) является $N^{(3)}$. В то же время по отношению к группе $G^{(6)}$ подгруппа $L^{(6)}$ является нормальным делителем.

При переходе от трехмерного евклидова пространства к четырехмерному несобственно евклидову пространству специальной теории относительности группа трехмерных вращений $M^{(3)}$ заменяется на 6-параметрическую группу однородных преобразований Лоренца, которую мы обозначим $M^{(6)}$, группа трехмерных смещений — на группу четырехмерных смещений $N^{(4)}$, а группа евкли-

¹⁾ Индекс справа вверху, заключенный в круглые скобки, указывает на число непрерывных параметров группы,

довых движений $L^{(6)}$ — на 10-параметрическую группу неоднородных преобразований Лоренца $L^{(10)}$. Непрерывная группа $L^{(10)}$ и ее подгруппы $M^{(6)}$ и $N^{(4)}$ *связны*, т. е. каждый элемент из этих групп можно непрерывным образом связать с единичным элементом группы, соответствующим тождественному преобразованию. Что же касается группы преобразований $G^{(10)}$, для которой ¹⁾

$$(x^1 - x^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 - (x^0 - y^0)^2 = inv, \quad (2)$$

т. е. группы преобразований, не меняющих обобщенного расстояния между двумя произвольными точками четырехмерного несобственно евклидова пространства, то она, как и $G^{(6)}$, несвязна. Примерами элементов из $G^{(10)}$, которые непрерывным образом нельзя связать с единичным преобразованием, являются преобразование пространственной инверсии S , при котором x^s и y^s ($s = 1, 2, 3$) одновременно меняют знак, тогда как x^0 и y^0 остаются неизменными, и преобразование временного отражения (или временной инверсии) S_4 , в результате которого изменяется знак только у x^0 и y^0 ²⁾.

Нетрудно показать (см., например, Наймарк, Гельфанд и др. [1, 2]), что группа $G^{(10)}$ получается из $L^{(10)}$ путем замены подгруппы $M^{(6)}$ на подгруппу, получаемую в результате добавления к $M^{(6)}$ преобразований S и S_4 , так что произвольное преобразование из $G^{(10)}$ оказывается или преобразованием из $L^{(10)}$, или произведением преобразования из $L^{(10)}$ на S , S_4 или $S \cdot S_4$. Три другие группы, являющиеся подгруппами $G^{(10)}$ и в то же время включающие в себя неоднородную группу Лоренца $L^{(10)}$ в качестве нормальных делителей, будут получаться из $L^{(10)}$ в результате добавления к $M^{(6)}$ только одного из преобразований S , S_4 или $S \cdot S_4$ ³⁾.

¹⁾ Если $x^\nu - y^\nu = dx^\nu$ бесконечно малы, то условие (2) переходит в рассматриваемое в книге условие инвариантности основной квадратичной формы (6.1).

²⁾ Преобразованию S_4 соответствует не рассмотренный в книге случай, когда $a_0^0 < 0$. Су цествование такого преобразования (вопреки замечаниям, сделанным в гл. 6, § 5), разумеется, не противоречит тому, что группа $G^{(10)}$ содержит тождественное преобразование.

³⁾ В книге Тоннела группа $M^{(6)}$ называется общей группой Лоренца (см. гл. 5, § 15). В других работах нередко применяется другая терминология. В частности, авторы работ в [1, 2] называют группу $M^{(6)}$ собственной группой Лоренца, группу, полученную в результате добавления к $M^{(6)}$ преобразования S , — полной группой Лоренца, а группу, полученную из $M^{(6)}$ путем добавления преобразований S и S_4 , — общей группой Лоренца.

Тот факт, что группы $L^{(6)}$ и $L^{(10)}$ являются нормальными делителями групп $G^{(6)}$ и $G^{(10)}$, далеко не случаен. Можно показать, что если исходить из непрерывных связных групп $L^{(6)}$ и $L^{(10)}$, то группы $G^{(6)}$ и $G^{(10)}$ будут однозначно определяться заданием своих связных нормальных делителей $L^{(6)}$ и $L^{(10)}$. Если назвать *автоморфизмом* изоморфное отображение¹⁾ группы самой на себя, то $G^{(6)}$ и $G^{(10)}$, рассматриваемые в качестве абстрактных групп, будут изоморфны группам всех автоморфизмов групп $L^{(6)}$ и $L^{(10)}$.

В геометрии понятие о группе приобрело основное значение после работ Феликса Клейна и Софуса Ли. В своей Эрлангенской программе [3] (1872 г.) в качестве „обобщения геометрии“ (т. е. обычной евклидовой геометрии) Клейн сформулировал следующую задачу: „Дано многообразие и в нем группа преобразований; нужно исследовать те свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются от преобразований группы“.

В качестве примера, иллюстрирующего основную идею Клейна, возьмем обычную евклидову геометрию, в основу которой можно положить группу евклидовых движений $L^{(6)}$ или, более обще, группу преобразований $G^{(6)}$, не меняющую расстояний между двумя точками. В евклидовой геометрии нас не интересуют пространственные положения фигур, так что две геометрические фигуры, одна из которых получается из другой в результате преобразования, принадлежащего группе $L^{(6)}$ или $G^{(6)}$, считаются равными. Это как раз и означает, что задачей геометрии является изучение только тех свойств фигур, которые инвариантны по отношению к преобразованиям из данной группы.

С точки зрения Клейна главное в геометрии — это группа преобразований, тогда как свойства преобразуемых объектов, а также число измерений многообразия — вещи второстепенные.

Роль группы в качестве основного понятия особенно отчетливо проявилась также в физике. При переходе от классической релятивистской механики к релятивистской квантовой теории значение группы Лоренца сохранилось, хотя свойства преобразуемых объектов претерпели коренные изменения.

§ 2. Основные результаты и прикладные формулы теории групп Ли

Создателем эффективного аппарата теории непрерывных групп с конечным числом параметров, позволяющего проводить более

¹⁾ Изоморфным отображением (или изоморфизмом) одной группы на другую называется такое взаимно однозначное отображение, при котором произведению двух элементов первой группы отвечает произведение двух соответствующих им элементов второй группы.

глубокое исследование и решать многочисленные задачи, является Софус Ли (см. [4]), по имени которого непрерывные группы с конечным числом параметров получили название группы Ли [5, 6]. Проще всего основные результаты локальной теории групп Ли можно получить с помощью метода Кэмпбелла—Хаусдорфа (см. Кэмпбелл [7], Хаусдорф [8], Дынкин [9], Чеботарев [10]), который основан на представлении конечных групповых преобразований, лежащих в окрестности единичного преобразования, в виде экспоненциалов от операторов инфинитезимальных преобразований. При выводе основных формул теории групп Ли, лежащих в основе практических приложений, мы воспользуемся этим методом, внося в него ряд существенных упрощений, в частности, связанных с простым способом нахождения производных от экспоненциалов.

В теории групп Ли вводятся линейные операторы \hat{x}_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, r$; r — число непрерывных параметров группы), линейно независимые над полем действительных чисел, для которых выполняется закон ассоциативности умножения, т. е.

$$\hat{x}_{\lambda_1} (\hat{x}_{\lambda_2} \hat{x}_{\lambda_3}) = (\hat{x}_{\lambda_1} \hat{x}_{\lambda_2}) \hat{x}_{\lambda_3}, \tag{3}$$

и которые связаны между собой перестановочными соотношениями

$$[\hat{x}_{\lambda_1}, \hat{x}_{\lambda_2}] = \hat{x}_{\lambda_1} \hat{x}_{\lambda_2} - \hat{x}_{\lambda_2} \hat{x}_{\lambda_1} = c_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3} \hat{x}_{\lambda_3}, \tag{4}$$

где $c_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3}$ — постоянные действительные числа, так называемые *структурные постоянные*, а по одинаковым индексам, *стоящим вверху и внизу*, как обычно, подразумевается суммирование (в данном случае от 1 до r). Постоянные $c_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3}$, как это следует из (4), антисимметричны по нижним индексам и связаны между собой тождествами, которые являются следствием вытекающих из (3) „тождеств Якоби“ $[[\hat{x}_{\lambda_1}, \hat{x}_{\lambda_2}], \hat{x}_{\lambda_3}] + [[\hat{x}_{\lambda_2}, \hat{x}_{\lambda_3}], \hat{x}_{\lambda_1}] + [[\hat{x}_{\lambda_3}, \hat{x}_{\lambda_1}], \hat{x}_{\lambda_2}] = 0$.

Метод Кэмпбелла—Хаусдорфа основывается на том доказываемом в цитированных выше работах результате, что если $\hat{x} = \xi^\lambda \hat{x}_\lambda$ ($= \sum_{\lambda=1}^r \xi^\lambda \hat{x}_\lambda$), где ξ^λ — параметры, перестановочные с \hat{x}_λ , и если

$$T_\xi = e^{\hat{x}} = 1 + \frac{\hat{x}}{1!} + \frac{\hat{x}^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{x}^n}{n!}, \tag{5}$$

то при условиях (3) и (4) произведение двух операторов $T_{\xi_{(1)}}$ и $T_{\xi_{(2)}}$, имеющих вид (5), при достаточно малых $\xi_{(1)}^\lambda$ и $\xi_{(2)}^\lambda$ будет оператором такого же вида

$$e^{\xi_{(1)}^\lambda \hat{x}_{\lambda_1}} e^{\xi_{(2)}^\lambda \hat{x}_{\lambda_2}} = e^{\xi^\lambda \hat{x}_\lambda}. \tag{6}$$

Здесь параметры ξ^λ зависят только от $\xi_{(1)}^{\lambda_1}$, $\xi_{(2)}^{\lambda_2}$ и от структурных постоянных $c_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3}$, но не зависят от конкретного вида операторов \widehat{x}_λ . Из (6) следует, что операторы T_ξ образуют r -параметрическую непрерывную группу, причем определяемые в соответствии с (5) параметры ξ^λ называются *каноническими параметрами группы Ли* (или, по терминологии Понтрягина [11], каноническими координатами 1 рода). Конечные преобразования T_ξ можно характеризовать также не каноническими параметрами ξ^λ , а обобщенными координатами a^λ , являющимися произвольными обратимыми функциями от ξ^λ (так что детерминант $\left| \frac{\partial \xi^{\lambda_1}}{\partial a^{\lambda_2}} \right|$ не равен нулю).

В теории групп Ли доказывается также обратное положение: для произвольной r -параметрической непрерывной группы можно ввести инфинитезимальные операторы \widehat{x}_λ , связанные соотношениями (3), (4) (это утверждение соответствует второй основной теореме Ли), и любые групповые преобразования, близкие к единичному преобразованию, можно представить в виде (5). Таким образом, локальные свойства группы Ли полностью определяются заданием структурных постоянных $c_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3}$, а групповые преобразования, близкие к единичному преобразованию — заданием системы параметров ξ^λ . При этом величины $\xi^\lambda \widehat{x}_\lambda$ называют элементами *алгебры Ли*; они характеризуются следующим свойством:

$$[\xi_{(1)}^{\lambda_1} \widehat{x}_{\lambda_1}, \xi_{(2)}^{\lambda_2} \widehat{x}_{\lambda_2}] = (c_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3} \xi_{(1)}^{\lambda_1} \xi_{(2)}^{\lambda_2}) \widehat{x}_{\lambda_3}. \quad (7)$$

Множество элементов алгебры Ли, которыми полностью определяется множество соответствующих элементов связной непрерывной группы, мы будем обозначать такой же буквой, что и саму группу.

Поскольку структурные постоянные непрерывной группы определяются только свойствами самой группы и не зависят от того, какие величины подвергаются групповым преобразованиям, то при их нахождении достаточно рассмотреть преобразования величин какого-либо специального вида. В качестве примера найдем структурные постоянные $c_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3}$ для неоднородной группы Лоренца $L^{(10)}$. Для этого рассмотрим преобразования скалярных функций $f(x^\nu)$ от четырех действительных координат x^1, x^2, x^3 и $x^0 = ct$. При четырехмерных смещениях, когда x^ν заменяются на $x^\nu + \xi^\nu$, функция $f(x^\nu)$ примет вид

$$f(x^\nu + \xi^\nu) = f(x^\nu) + (\xi^{\nu_1} \partial_{\nu_1}) f(x^\nu) + \frac{1}{2} (\xi^{\nu_1} \partial_{\nu_1})^2 f(x^\nu) + \dots = T_\xi f(x^\nu), \quad (8)$$

где $\partial_{v_1} = \partial/\partial x^{v_1}$. Отсюда, сравнивая с (5), находим, что для рассматриваемых преобразований операторы подгруппы четырехмерных смещений $N^{(4)}$ имеют вид

$$\hat{P}_v = \partial_v = \frac{\partial}{\partial x^v}. \quad (9)$$

Аналогично, рассматривая преобразования, принадлежащие подгруппе однородных преобразований Лоренца $M^{(6)}$, получаем, что соответствующие операторы имеют вид

$$\hat{M}_{v_1 v_2} = x_{v_1} \partial_{v_2} - x_{v_2} \partial_{v_1}, \quad \text{где } x_{v_1} = g_{v_1 v_2} x^{v_2}. \quad (10)$$

Чтобы операторы подгруппы трехмерных вращений $M^{(3)}$ совпадали с соответствующими тремя операторами из однородной группы Лоренца $M^{(6)}$, целесообразно компоненты метрического тензора $g_{v_1 v_2}$ выбирать таким образом, чтобы¹⁾

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad g_{33} = 1, \quad g_{00} = -1, \quad \text{остальные } g_{v_1 v_2} = 0. \quad (11)$$

Из (9) и (10) в результате элементарных выкладок (с учетом тождества $[\partial_{v_1}, x_{v_2}] = g_{v_2 v_1}$, $[\partial_{v_1}, x^{v_2}] = g_{v_1 v_2}$) находим следующие перестановочные соотношения между операторами группы $L^{(10)}$:

$$[\hat{P}_{v_1}, \hat{P}_{v_2}] = 0, \quad [\hat{P}_{v_1}, \hat{M}_{v_1 v_3}] = g_{v_1 v_2} \hat{P}_{v_2} - g_{v_1 v_3} \hat{P}_{v_2}, \quad (12)$$

$$[\hat{M}_{v_1 v_2}, \hat{M}_{v_3 v_4}] = g_{v_1 v_4} \hat{M}_{v_2 v_3} + g_{v_2 v_3} \hat{M}_{v_1 v_4} - g_{v_1 v_3} \hat{M}_{v_2 v_4} - g_{v_2 v_4} \hat{M}_{v_1 v_3}. \quad (13)$$

Соотношениями (12) и (13) определяются структурные постоянные группы Лоренца.

Операторы группы $L^{(10)}$ можно нумеровать также индексом λ , принимающим значения от 1 до 10, положив

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{M}_{23}, & \hat{x}_2 &= \hat{M}_{31}, & \hat{x}_3 &= \hat{M}_{12}, & \hat{x}_4 &= \hat{M}_{01}, & \hat{x}_5 &= \hat{M}_{02}, \\ \hat{x}_6 &= \hat{M}_{03}, & \hat{x}_7 &= \hat{P}_1, & \hat{x}_8 &= \hat{P}_2, & \hat{x}_9 &= \hat{P}_3, & \hat{x}_{10} &= P_0. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом удобно разделить значения, принимаемые индексом λ , на три части, считая, что $s, p, q = 1, 2, 3$; $i, j = 4, 5, 6$; $\alpha, \beta = 7, 8, 9, 10$ и что при наличии вверху и внизу каких-либо двух одинаковых индексов из какой-либо части подразумевается

¹⁾ Выбор (11) отличается от одного из рассмотренных в книге выборов [см. (6.27) — (6.28)] только общим знаком у всех $g_{v_1 v_2}$, что приводит к изменению знака у ds^2 в (6.1). Это различие совершенно несущественно и фактически сводится лишь к незначительному изменению обозначений.

суммирование по всем значениям индекса из соответствующей части. Таким образом, для $L^{(10)}$

$$T_{\xi} = e^{\xi^{\lambda} \hat{x}_{\lambda}} = \exp [\xi^s \hat{x}_s + \xi^i \hat{x}_i + \xi^{\alpha} \hat{x}_{\alpha}], \quad (15)$$

где, например, $\xi^i \hat{x}_i = \xi^4 \hat{x}_4 + \xi^5 \hat{x}_5 + \xi^6 \hat{x}_6$ и т. д.

Если в (15) положить $\xi^s = 0$, $\xi^i = 0$, то, как мы видели, оператор T_{ξ} будет характеризовать преобразование смещения. Аналогично, если $\xi^i = 0$, $\xi^{\alpha} = 0$, то T_{ξ} будет характеризовать вращение, причем трехмерный вектор ω с компонентами $\omega^s = \xi^s$ будет направлен по оси вращения, а его длина ω будет равна углу поворота. Вопрос о физическом смысле параметров для неоднородного преобразования Лоренца наиболее общего вида, требующий учета ряда дополнительных математических результатов, будет рассмотрен позднее.

Для получения основных прикладных формул теории групп Ли прежде всего найдем производные от $T_{\xi} = e^{\hat{x}}$ по ξ^{λ} ; при этом необходимо учитывать, что операторы \hat{x}_{λ} не перестановочны между собой. С этой целью введем матрицы-строки:

$$\hat{x} = (\hat{x}_1 \hat{x}_2 \dots \hat{x}_r), \quad \partial = (\partial_1 \partial_2 \dots \partial_r), \quad (16)$$

элементы которых являются соответственно операторами \hat{x}_{λ} и ∂_{λ} . Матрицы-строки (16) по обычным правилам (см., например, Мальцев [12], Хидинг [13]), можно умножать на другие матрицы или „скалярные“ операторы (к числу последних относится $\hat{x} = \xi^{\lambda} \hat{x}_{\lambda}$), так что, например,

$$\partial \hat{x} = (\partial_1 \hat{x} \partial_2 \hat{x} \dots \partial_r \hat{x}) = \hat{x}, \quad (17)$$

но только при этом нужно следить за порядком перемножаемых элементов. Так, если обозначить через C_{ξ} квадратную матрицу с элементами

$$(C_{\xi})_{\lambda_2}^{\lambda_1} = c_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_1} \xi^{\lambda_1}, \quad (18)$$

где в соответствии с обозначением (16) нижний индекс у матрицы характеризует номер столбца, а верхний — номер строки, то с учетом того, что

$$[\hat{x}, \hat{x}_{\lambda_2}] = c_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_1} \xi^{\lambda_1} \hat{x}_{\lambda_1} = (\hat{x} C_{\xi})_{\lambda_2},$$

имеем

$$\hat{x} \hat{x} - \hat{x} \hat{x} = \hat{x} C_{\xi} = (\hat{x}_1 \hat{x}_2 \dots \hat{x}_r) \begin{pmatrix} (C_{\xi})_1^1 & (C_{\xi})_1^2 & \dots \\ (C_{\xi})_2^1 & (C_{\xi})_2^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Докажем по индукции справедливость при $n \geq 1$ следующих формул:

$$\partial \hat{x}^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \hat{x} (C_\xi)^{n-k-1} \hat{x}^k, \quad (20)$$

$$\partial \hat{x}^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \hat{x}^k \hat{x} (-C_\xi)^{n-k-1}. \quad (21)$$

Для $n=1$ формула (20) совпадает с (17) и поэтому верна. Если же она верна для некоторого n , то она будет верна и для $n+1$, так как с учетом (19) и того, что

$$n!/k!(n-k)! + n!/(k-1)!(n-k+1)! = (n+1)!/k!(n+1-k)!,$$

имеем

$$\begin{aligned} \partial \hat{x}^{n+1} &= \hat{x} \hat{x}^n + \hat{x} (\partial \hat{x}^n) = \hat{x} \hat{x}^n + (\hat{x} \hat{x} - \hat{x} \hat{x}) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} (C_\xi)^{n-k-1} \hat{x}^k + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \hat{x} (C_\xi)^{n-k} \hat{x}^k = \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \hat{x} (C_\xi)^{n-k} \hat{x}^k. \end{aligned}$$

Точно таким же образом убеждаемся в справедливости (21).

Чтобы найти выражения для производных от $T_\xi = e^{\hat{x}}$, воспользуемся тем, что если суммирование по строкам бесконечной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_0^1 & 0 & 0 & \dots \\ a_1^2 & a_0^2 & 0 & \dots \\ a_2^3 & a_1^3 & a_0^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

заменить на суммирование по диагоналям (что можно делать при абсолютной сходимости двойной суммы), то получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_k^{n+k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{n+k}. \quad (22)$$

Из (20) и (22) имеем

$$\begin{aligned} \partial (e^{\hat{x}}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!(n-k)!} \hat{x} (C_\xi)^{n-k-1} \hat{x}^k = \\ &= \hat{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_\xi^{n-1}}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{x}^k}{k!} \right) = \hat{x} U(-\xi) e^{\hat{x}}, \quad (23) \end{aligned}$$

где

$$U(\xi) = \frac{E - e^{-C\xi}}{C\xi}, \quad U(-\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C\xi^{n-1}}{n!} = \frac{E - e^{C\xi}}{-C\xi} = e^{C\xi} U(\xi). \quad (24)$$

Аналогично из (21) и (22) получим

$$\partial(e^{\hat{x}}) = e^{\hat{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x} \frac{(-C\xi)^{n-1}}{n!} = e^{\hat{x}} \hat{x} U(\xi). \quad (25)$$

Формулы (23) и (25) можно переписать также в виде

$$\partial_{\lambda} e^{\hat{x}} = \frac{\partial}{\partial \xi^{\lambda}} e^{\xi^{\lambda_1} \hat{x}_{\lambda_1}} = \hat{x}_{\lambda_1} U(-\xi)_{\lambda}^{\lambda_1} e^{\hat{x}}, \quad (26)$$

$$\partial_{\lambda} e^{\hat{x}} = \frac{\partial}{\partial \xi^{\lambda}} e^{\xi^{\lambda_1} \hat{x}_{\lambda_1}} = e^{\hat{x}} U(\xi)_{\lambda}^{\lambda_1} \hat{x}_{\lambda_1}. \quad (27)$$

Приравнивая друг другу эти выражения и учитывая (24), имеем

$$e^{\hat{x}} \hat{x}_{\lambda_1} e^{-\hat{x}} = (e^{C\xi})_{\lambda_1}^{\lambda_2} \hat{x}_{\lambda_2}. \quad (28)$$

Из (26) и (27) легко получаются основные формулы, лежащие в основе практических приложений локальной теории групп Ли.

Вычисляя с помощью (27) $\partial_{\lambda_1} \partial_{\lambda_2} e^{\hat{x}}$, а затем $\partial_{\lambda_2} \partial_{\lambda_1} e^{\hat{x}}$ и приравнивая найденные выражения, с учетом (4), находим

$$\partial_{\lambda_2} U(\xi)_{\lambda_1}^{\lambda} - \partial_{\lambda_1} U(\xi)_{\lambda_2}^{\lambda} = U(\xi)_{\lambda_1}^{\lambda_3} U(\xi)_{\lambda_2}^{\lambda_4} c_{\lambda_3 \lambda_4}^{\lambda}. \quad (29)$$

Аналогично, с помощью (26) [или заменяя в (29) ξ^{λ} на $-\xi^{\lambda}$] получаем

$$\partial_{\lambda_2} U(-\xi)_{\lambda_1}^{\lambda} - \partial_{\lambda_1} U(-\xi)_{\lambda_2}^{\lambda} = -U(-\xi)_{\lambda_1}^{\lambda_3} U(-\xi)_{\lambda_2}^{\lambda_4} c_{\lambda_3 \lambda_4}^{\lambda}. \quad (30)$$

Если преобразования T_{ξ} характеризовать не каноническими параметрами ξ^{λ} , а обобщенными координатами a^{λ} , и если положить

$$A(a)_{\lambda_2}^{\lambda_1} = U(\xi)_{\lambda}^{\lambda_1} \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial a^{\lambda_2}}, \quad (31)$$

то уравнения (29) дают

$$\frac{\partial A_{\lambda_1}^{\lambda}}{\partial a^{\lambda_2}} - \frac{\partial A_{\lambda_2}^{\lambda}}{\partial a^{\lambda_1}} = A_{\lambda_1}^{\lambda_3} A_{\lambda_2}^{\lambda_4} c_{\lambda_3 \lambda_4}^{\lambda}. \quad (32)$$

Уравнения (32), называемые уравнениями Маурера — Картана, можно переписать в другом виде, если положить ¹⁾

$$\begin{aligned} \omega^\lambda &= A_{\lambda_1}^\lambda da^{\lambda_1} = \omega^\lambda(d), & \omega^\lambda(\delta) &= A_{\lambda_1}^\lambda \delta a^{\lambda_1}, \\ (\omega^\lambda)' &= d\omega(\delta) - \delta\omega(d). \end{aligned} \quad (33)$$

Если теперь воспользоваться введенным Картаном символом внешнего произведения

$$[da^{\lambda_1} da^{\lambda_2}] = da^{\lambda_1} \delta a^{\lambda_2} - da^{\lambda_2} \delta a^{\lambda_1}, \quad [\omega^{\lambda_1} \omega^{\lambda_2}] = A_{\lambda_3}^{\lambda_1} A_{\lambda_4}^{\lambda_2} [da^{\lambda_3} da^{\lambda_4}], \quad (34)$$

то уравнения (32) переписутся в эквивалентном виде:

$$(\omega^\lambda)' = \frac{1}{2} c_{\lambda_1 \lambda_2}^\lambda [\omega^{\lambda_1} \omega^{\lambda_2}]. \quad (35)$$

Уравнения (35), называемые уравнениями структуры Картана, лежат в основе применения групп Ли в дифференциальной геометрии (см. Картан [14], Фавар [15]).

Из формул для производных от T_ξ столь же просто можно получить и другие основные прикладные формулы теории групп Ли. Так, если операторы \hat{x}_λ , подчиняющиеся условиям (4), имеют вид

$$\hat{x}_\lambda = V(x_0^1, x_0^2, \dots)_\lambda^i \frac{\partial}{\partial x_0^i}, \quad (36)$$

частным случаем которого будут рассмотренные выше выражения (9) и (10) для операторов группы Лоренца, то $x^i = T_\xi x_0^i$. Тогда, согласно (27) и (5), получаем

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^\lambda} = U(\xi)_\lambda^i T_\xi V(x_0)_\lambda^i = U(\xi)_\lambda^i V(x)_\lambda^i. \quad (37)$$

Или, переходя к обобщенным координатам a^λ и учитывая (31) получаем

$$\frac{\partial x^i}{\partial a^\lambda} = V(x)_\lambda^i A(a)_{\lambda_1}^{\lambda_1}, \quad (38)$$

что совпадает с первой основной теоремой Ли.

Если, далее, ξ^λ являются функциями от $\xi_{(1)}^\lambda$ и $\xi_{(2)}^\lambda$, определяемыми из (6), то при фиксированных значениях $\xi_{(2)}^\lambda$ (или $\xi_{(1)}^\lambda$) величины $\xi_{(1)}^\lambda$ (или соответственно $\xi_{(2)}^\lambda$), очевидно, можно будет считать параметрами группы. Поэтому

$$\xi^\lambda = \left(e^{\xi_{(1)}^{\lambda_1} \hat{r}_{\lambda_1}} \right)_{\xi_{(2)}^\lambda} = \left(e^{\xi_{(2)}^{\lambda_1} \hat{z}_{\lambda_1}} \right)_{\xi_{(1)}^\lambda}, \quad (39)$$

¹⁾ Эти обозначения, заимствованные из теории внешних форм Картана, где $(\omega)'$ называется внешней производной дифференциальной формы, соответствуют также обозначениям, применяемым в книге (см. гл. 14 и 15).

где $\hat{Y}_{\lambda_1} = Y(\xi_{(2)})_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial}{\partial \xi_{(2)}^{\lambda_2}}$ и $\hat{Z}_{\lambda_1} = Z(\xi_{(1)})_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial}{\partial \xi_{(1)}^{\lambda_2}}$ — инфинитезимальные операторы так называемых первой и второй параметрических групп. Из (39) видно, что

$$Y(\xi_{(2)})_{\lambda_1}^{\lambda_2} = \left. \frac{\partial \xi^{\lambda_2}}{\partial \xi_{(1)}^{\lambda_1}} \right|_{\xi_{(1)}^{\lambda_1}=0}; \quad Z(\xi_{(1)})_{\lambda_1}^{\lambda_2} = \left. \frac{\partial \xi^{\lambda_2}}{\partial \xi_{(2)}^{\lambda_1}} \right|_{\xi_{(2)}^{\lambda_1}=0}. \quad (40)$$

Продифференцировав (6) по $\xi_{(1)}^{\lambda_1}$ и $\xi_{(2)}^{\lambda_2}$ и воспользовавшись соотношениями (26) и (27), найдем

$$U(-\xi_{(1)})_{\lambda_1}^{\lambda_2} = U(-\xi)_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial \xi^{\lambda_2}}{\partial \xi_{(1)}^{\lambda_1}}, \quad U(\xi_{(2)})_{\lambda_1}^{\lambda_2} = U(\xi)_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial \xi^{\lambda_2}}{\partial \xi_{(2)}^{\lambda_1}}. \quad (41)$$

Отсюда с учетом (40) получаем

$$\hat{Y}_{\lambda} = U^{-1}(-\xi_{(2)})_{\lambda}^{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial \xi_{(2)}^{\lambda_1}}, \quad \hat{Z}_{\lambda} = U^{-1}(\xi_{(1)})_{\lambda}^{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial \xi_{(1)}^{\lambda_1}}. \quad (42)$$

Умножая обе части (29) слева на $(U^{-1})_{\lambda_2}^{\lambda_1} (U^{-1})_{\lambda_1}^{\lambda_2} (U^{-1})_{\lambda}^{\lambda_3}$ и суммируя по λ_1, λ_2 и λ , в результате простых преобразований получаем соотношение, соответствующее третьей основной теореме Ли:

$$\hat{Z}_{\lambda_1} \hat{Z}_{\lambda_2} - \hat{Z}_{\lambda_2} \hat{Z}_{\lambda_1} = c_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3} \hat{Z}_{\lambda_3}. \quad (43)$$

Аналогично, из (30) находим

$$\hat{Y}_{\lambda_1} \hat{Y}_{\lambda_2} - \hat{Y}_{\lambda_2} \hat{Y}_{\lambda_1} = -c_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3} \hat{Y}_{\lambda_3}. \quad (44)$$

С помощью (42) можно определять ξ^{λ} , задаваемые неявной формулой (6), по известным структурным постоянным $\xi_{(1)}^{\lambda_1}$ и $\xi_{(2)}^{\lambda_2}$. Согласно (39),

$$\xi^{\lambda} = \xi_{(2)}^{\lambda} + \xi_{(1)}^{\lambda_1} U^{-1}(-\xi_{(2)})_{\lambda_1}^{\lambda} + \frac{1}{2} \xi_{(1)}^{\lambda_1} \xi_{(1)}^{\lambda_2} U^{-1}(-\xi_{(2)})_{\lambda_1}^{\lambda_3} \frac{\partial}{\partial \xi_{(2)}^{\lambda_3}} U^{-1}(-\xi_{(2)})_{\lambda_2}^{\lambda} + \dots, \quad (45)$$

$$\xi^{\lambda} = \xi_{(1)}^{\lambda} + \xi_{(2)}^{\lambda_1} U^{-1}(\xi_{(1)})_{\lambda_1}^{\lambda} + \frac{1}{2} \xi_{(2)}^{\lambda_1} \xi_{(2)}^{\lambda_2} U^{-1}(\xi_{(1)})_{\lambda_1}^{\lambda_3} \frac{\partial}{\partial \xi_{(1)}^{\lambda_3}} U^{-1}(\xi_{(1)})_{\lambda_2}^{\lambda} + \dots \quad (46)$$

§ 3. Группа, характеризующая инвариантные свойства физических явлений, и ее структура

Создание специальной теории относительности оказалось связанным с выяснением свойств физических объектов по отношению к различным инерциальным системам отсчета и с установлением

инвариантности законов физики по отношению к группе преобразований, соответствующих переходам от описания в одной инерциальной системе отсчета к описанию в другой эквивалентной системе отсчета. В дальнейшем при развитии релятивистской квантовой механики пришлось столкнуться также с вопросом об инвариантности по отношению к более общим преобразованиям, таким, как замена всех частиц на античастицы, истолкование которых с помощью понятия о преобразовании системы отсчета физически мало приемлемо. Но даже и в классической теории обычное истолкование будет сталкиваться с трудностями при переходе от изучения инвариантности по отношению к связанной группе Лоренца $L^{(10)}$ к изучению инвариантности по отношению к несвязанной группе $G^{(10)}$, содержащей преобразование „отражения времени“¹⁾. Поэтому возникает необходимость в несколько более общем понимании смысла инвариантности законов физики (см. Зайцев [16]), выдвигающем на первое место понятие о группе, по отношению к которой имеет место инвариантность (и, в частности, объясняющем переход от нерелятивистского описания к релятивистскому только требованием изменения основной группы, характеризующей инвариантные свойства физических явлений).

Основой для подобной более общей формулировки понятия инвариантности служит тот факт, что в математическом отношении изучение группы преобразований системы отсчета, по отношению к которой задаются какие-то математические фигуры, эквивалентно изучению группы преобразований этих фигур при неизменной системе отсчета²⁾. Это обстоятельство, в частности, позволяет дать новое истолкование специальной теории относительности, которое математически полностью эквивалентно обычному истолкованию, основанному на изучении преобразований системы отсчета.

Рассмотрим группу G преобразований величин, характеризующих различные физические объекты, обладающую тем свойством, что для всех физических величин может быть установлен закон их изменения по отношению к преобразованиям T из данной группы и что если некоторые величины характеризуют физическую систему, то и преобразованные величины также могут характеризовать некоторую другую физическую систему. Законы и уравнения физики позволяют по одним величинам, которые мы назовем *задаваемыми* и обозначим Φ_0 , находить другие величины Φ , которые можно назвать *определяемыми*. Вопрос о том, какие величины считать задаваемыми, а какие — определяемыми, зависит от

1) В частности, соображения в конце § 5 гл. 6 по вопросу о необратимости времени, очевидно, являются необоснованными.

2) См., например, Картан [14], гл. 5.

конкретных практических условий, и в разных задачах их выбор может быть различным. Законы и уравнения физики мы будем считать *инвариантными* по отношению к преобразованиям из группы G , если в любой физической задаче, в которой по заданным Φ_0 определяются Φ , преобразование T из G , примененное к системе задаваемых величин Φ_0 , переводит Φ_0 в такую новую физически возможную систему задаваемых величин $T\Phi_0$, для которой определяемыми величинами будут $T\Phi$ ¹⁾.

Отсюда следует, что структура основной группы G , характеризующей инвариантные свойства физических явлений, теснейшим образом связана с особенностями основных законов и уравнений физики, причем наличие инвариантности относительно той или иной группы накладывает жесткие ограничения на возможный выбор основных физических уравнений. Более того, поскольку и сами физические величины должны определяться не произвольно, а с учетом законов физики, так как в противном случае эти величины не могли бы иметь достаточно широкую область применимости, то замена одной основной группы на другую должна приводить также к необходимости изменения определений основных понятий и величин. Изменение понятий о свойствах пространства и времени, предложенное Эйнштейном в связи с созданием специальной теории относительности, как раз и связано с указанным обстоятельством.

Пусть L — группа Ли, являющаяся связной компонентой группы G , характеризующей инвариантные свойства физических явлений. Структура группы G будет определяться заданием структурных постоянных $c_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3}$. Если G включает группу автоморфизмов группы L , то свойства такой расширенной группы будут также полностью определяться заданием структурных постоянных (см. Гантмахер [18]). Таким образом, если при предельном переходе от одной физической теории к другой основная группа меняется, как это имеет место, например, при переходе от релятивистской механики к классической, то этому должен соответствовать предельный переход у соответствующих структурных постоянных.

Чтобы для достаточно общего случая рассмотреть предельный переход от одной физической теории к другой, учтем, что одну и ту же группу Ли можно описывать как с помощью параметров ξ^λ и операторов \hat{x}_λ , так и с помощью параметров $a^\lambda \xi^\lambda$ (суммирование по λ здесь не производится) и операторов $(1/a^\lambda) \hat{x}^\lambda$. Из соотно-

¹⁾ При данном определении инвариантности оказываются учтенными критические замечания, высказывавшиеся А. Д. Александровым [17] по поводу обычного истолкования смысла специальной теории относительности.

шения (4) следует, что новые значения структурных постоянных равны:

$$\tilde{c}_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3} = \frac{a^{\lambda_3}}{a^{\lambda_1} a^{\lambda_2}} c_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3}. \quad (47)$$

Предельный переход от одной группы к другой будет осуществляться в том случае, если некоторые из a^λ стремятся к нулю или к бесконечности, и притом таким образом, чтобы определяемые по формуле (47) предельные значения структурных постоянных оставались конечными.

В качестве примера возьмем неоднородную группу Лоренца L^{10} , положим $a^t = c$ ($t = 4, 5, 6$), $a^{10} = 1/c$, остальные $a^\lambda = 1$, и устремим c к ∞ . Тогда, обозначив

$$\hat{H} = c\hat{P}_4, \quad \hat{N}_s = \frac{1}{c} \hat{M}_{0s}, \quad \hat{M}_1 = \hat{M}_{23}, \quad \hat{M}_2 = \hat{M}_3, \quad \hat{M}_3 = \hat{M}_{12}, \quad (48)$$

в пределе из группы Лоренца с перестановочными соотношениями (12), (13) получим группу Галилея, структурные постоянные которой определяются из

$$[\hat{H}, \hat{P}_s] = 0, \quad [\hat{H}, \hat{M}_s] = 0, \quad [\hat{H}, \hat{N}_s] = -\hat{P}_s, \quad (49)$$

$$[\hat{P}_{s_1}, \hat{P}_{s_2}] = 0, \quad [\hat{N}_{s_1}, \hat{P}_{s_2}] = 0, \quad [\hat{N}_{s_1}, \hat{N}_{s_2}] = 0, \quad (50)$$

$$[\hat{P}_1, \hat{M}_2] = -[\hat{P}_2, \hat{M}_1] = -\hat{P}_3, \dots, \quad (51)$$

$$[\hat{N}_1, \hat{M}_2] = -[\hat{N}_2, \hat{M}_1] = -\hat{N}_3, \dots,$$

$$[\hat{M}_1, \hat{M}_2] = -\hat{M}_3, \dots,$$

где многоточие обозначает аналогичные соотношения, получаемые в результате циклической перестановки индексов 1, 2, 3. Входящая в перестановочные соотношения для группы Лоренца, записанные в обозначениях (48), универсальная постоянная c , численная величина которой совпадает со скоростью света, имеет глубокий инвариантный смысл, так как ею характеризуется переход от одной фундаментальной группы к другой.

В свою очередь и сама группа Лоренца получается с помощью предельного перехода из группы движений пространства Фридмана [19] постоянной отрицательной кривизны радиуса R , структурные постоянные которой определяются из соотношений

$$[\hat{P}_{\nu_1}, \hat{P}_{\nu_2}] = -\frac{1}{R^2} \hat{M}_{\nu_1 \nu_2}, \quad (52)$$

$$[\hat{P}_{\nu_1}, \hat{M}_{\nu_2 \nu_3}] = g_{\nu_1 \nu_2} \hat{P}_{\nu_3} - g_{\nu_1 \nu_3} \hat{P}_{\nu_2},$$

Переходу к группе Лоренца соответствует предельный переход $R \rightarrow \infty^1$).

В физическом отношении важную роль играют такие подалгебры Ли (или соответствующие им подгруппы), которые обладают некоторыми *специальными* свойствами и применение которых дает возможность выводить конкретные соотношения между величинами, имеющими непосредственный физический смысл. В связи с этим введем понятие о *специальной подалгебре* Ли (или соответственно *специальной подгруппе*), которую мы определим как такую подалгебру M алгебры Ли L , базисные операторы которой \hat{x}_μ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) и базисные операторы \hat{x}_ν ($\nu = m + 1, \dots, r$) подмножества N алгебры Ли L , дополняющего M до полной алгебры L , можно выбрать таким образом, чтобы структурные постоянные подчинялись условиям

$$c_{\mu_1 \mu_2}^\nu = 0, \quad c_{\mu_2 \nu}^\mu = 0 \quad (53)$$

(первые из которых являются просто следствием того, что M — подалгебра Ли)²). В ряде случаев свойство подгруппы или подалгебры быть специальной не меняется при предельном переходе; в частности, согласно (12), (13) и (49) — (52), подгруппа трехмерных вращений будет одновременно специальной подгруппой для группы Галилея, группы Лоренца и группы движений пространства Фридмана, а 6-параметрическая группа однородных преобразований Лоренца — специальной подгруппой группы неоднородных преобразований Лоренца и группы движений пространства Фридмана.

Важнейшее свойство специальных подалгебр, лежащее в основе их применения, заключается в том, что если $\xi_{(k)}$ характеризует элемент из подалгебры M (т. е. $\xi_{(k)}^\nu = 0$), что мы будем кратко записывать в виде $\xi_{(k)} \in M$, то, согласно (53) и (18), матрица $C_{\xi_{(k)}}$ и все матричные функции от нее, имеющие вид степенных рядов, распадаются на два диагональных блока, так что, например,

$$(C_{\xi_{(k)}}^\mu)_\nu = 0, \quad (C_{\xi_{(k)}})_\mu^\nu = 0, \quad U^{-1}(\xi_{(k)})_\mu^\nu = 0, \quad U^{-1}(\xi_{(k)})^\mu_\nu = 0 \quad (54)$$

¹) Более подробное исследование предельного перехода для группы движений пространства Фридмана — де-Ситтера имеется в работах Фантапы [20] и Розенфельда [21], причем, как показал Розенфельд, если исходить из группы, соответствующей выражению (52), то наше трехмерное пространство будет пространством Лобачевского.

²) Разложение алгебры Ли L на сумму подалгебры M и подмножества N в частном случае, а именно, когда N — радикал и M — полупростая подалгебра (см. [22], гл. V, § 4), будет совпадать с известным из теории алгебр Ли разложением Леви — Мальцева (хотя в общем случае, с которым приходится иметь дело в физических приложениях, подалгебра M может не являться полупростой, а подмножество N не являться ни идеалом, ни подалгеброй).

и т. д. Отсюда, в частности, следует, что

$$e^{\xi_{(3)}^{\mu} \hat{x}_{\mu}} e^{\xi_{(1)}^{\nu} \hat{x}_{\nu}} e^{\xi_{(2)}^{\mu} \hat{x}_{\mu}} = e^{\xi_{(1)}^{\nu} \hat{x}_{\nu}} e^{\xi_{(3)}^{\mu} \hat{x}_{\mu}} e^{\xi_{(2)}^{\mu} \hat{x}_{\mu}}, \quad (55)$$

где, согласно (28),

$$\tilde{\xi}_{(1)}^{\nu} = (e^{C_{\xi_{(3)}}})_{\nu}^{\nu} \xi_{(1)}^{\nu} = \xi_{(1)}^{\nu} + \frac{1}{1!} (c_{\mu\nu}^{\nu} \xi_{(3)}^{\mu}) \xi_{(1)}^{\nu} + \dots \quad (56)$$

Формулы (55) и (56) указывают на то, что для упрощения нахождения произведений типа $T_{\xi_{(3)}} T_{\xi}$, где $\xi_{(3)} \in M$, $\xi \in L$, целесообразно пользоваться не каноническими параметрами ξ^{λ} , а параметрами $\xi_{(1)}^{\nu}$ и $\xi_{(2)}^{\mu}$, определяемыми из

$$T_{\xi} = e^{\xi^{\lambda} \hat{x}_{\lambda}} = e^{\xi_{(1)}^{\nu} \hat{x}_{\nu}} e^{\xi_{(2)}^{\mu} \hat{x}_{\mu}}. \quad (57)$$

Когда T_{ξ} умножается слева на $T_{\xi_{(3)}}$, новые значения $\xi_{(1)}^{\nu}$ будут определяться с помощью простой формулы (56), после чего задача сведется к нахождению произведения преобразований из подгруппы M .

В качестве простейшего нетривиального примера применения разложения (57), которое мы назовем *специальным*, можно указать на группу трехмерных вращений, структурные постоянные которой определяются последними соотношениями (51). Из (51) следует, что подгруппа вращений вокруг оси Oz , характеризуемая оператором \hat{M}_3 , является специальной. Поскольку, согласно (18) и (51),

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{\psi C_3} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (58)$$

и произвольное вращение T_{ω} вокруг вектора ω можно характеризовать заданием углов Эйлера φ , θ , ψ , то с помощью (55) найдем

$$T_{\omega} = e^{\psi \hat{M}_3} e^{\theta \hat{M}_1} e^{\varphi \hat{M}_3} = e^{\theta \cos \psi \cdot \hat{M}_1 - \theta \sin \psi \cdot \hat{M}_2} e^{(\varphi + \psi) \hat{M}_3}. \quad (59)$$

Как видим, *введение углов Эйлера оказывается тесно связанным со специальным разложением групповых преобразований.*

Если подгруппа M сама содержит некоторую специальную подгруппу, то преобразования из M в свою очередь также можно представить в виде, аналогичном (57), так что при наличии цепочки последовательно входящих друг в друга специальных подгрупп L_i мы получим специальное разложение групповых преобразований, являющееся обобщением (57). Для всех трех рассмотренных выше

групп — группы (52), группы Лоренца (12), (13) и группы Галилея (49) — (51) — можно ввести *единую цепочку специальных подгрупп, которая не меняется при предельном переходе*. Первой из них является 6-параметрическая подгруппа, характеризуемая операторами \hat{M}_{v_1, v_2} [или в обозначениях (48) \hat{N}_s и \hat{M}_s], второй — входящая в нее подгруппа трехмерных вращений и, наконец, третьей — входящая в последнюю подгруппа вращений вокруг оси Oz .

§ 4. Случай, когда основной группой является группа Галилея или группа Лоренца. Применение теории групп для вывода основных формул релятивистской кинематики

Группа Галилея служит предельным случаем группы Лоренца и в то же время является основной группой классической механики. Поскольку последняя является наиболее известной последовательной физической теорией, то рассмотренные выше общие результаты мы прежде всего проиллюстрируем на ее примере.

В классической механике уравнения движения, записанные с помощью обобщенных координат и импульсов q_k и p_k ($k = 1, 2, \dots, 3n$, n — число частиц), имеют вид

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (60)$$

и для изолированных механических систем (которые мы только и будем рассматривать) гамильтониан H является функцией от q_k , p_k и не зависит явно от времени (см., например, Голдстейн [23]). Положим

$$\{F, \Phi\} = \sum_{k=1}^{3n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} \right) = \hat{F}\Phi, \quad (61)$$

т. е.

$$\hat{F} = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right).$$

Из тождества Якоби $\{F_1, \{F_2, \Phi\}\} - \{F_2, \{F_1, \Phi\}\} = \{\{F_1, F_2\}, \Phi\}$, примененного к произвольной функции Φ от p_k и q_k , следует, что

$$\{\widehat{F_1}, \widehat{F_2}\} = \hat{F}_1 \hat{F}_2 - \hat{F}_2 \hat{F}_1 = [\hat{F}_1, \hat{F}_2] \quad (F_{1,2} = F_{1,2}(q_k, p_k)), \quad (62)$$

где символ $\{ \}$, согласно (61), обозначает скобку Пуассона. В механике задаваемыми величинами являются q_k и p_k , взятые для начального момента времени $t = 0$ или, более обще, произвольные функции от них Φ_0 , а определяемыми величинами — функции Φ_i

от координат и импульсов q_k и p_k , взятых для момента времени t . Кроме того, задаваемыми (и „определяемыми“) величинами являются также выражения для сил взаимодействия между частицами, однако их следует принимать во внимание лишь при переходе к релятивистской механике и электродинамике, так как в классической механике выражения для сил с течением времени не меняются.

Явная формула, позволяющая по задаваемым величинам находить определяемые, имеет вид

$$\Phi_t = e^{t\hat{H}}\Phi_0, \quad \text{где} \quad \hat{H} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right). \quad (63)$$

Если отождествить функцию Φ с q_k , а затем с p_k и заменить t на dt , то (63) будет совпадать с уравнениями движения (60).

Формулой (63) определяется явное выражение для оператора временного смещения \hat{H} , входящего в перестановочные соотношения группы Галилея (49) — (51). Аналогично убеждаемся, что если P_s и M_s — значения компонент векторов полного импульса и полного момента количества движения системы, а N_s — координаты центра масс системы, умноженные на $-m$, где m — полная масса системы, то операторы пространственного смещения \hat{P}_s , вращения \hat{M}_s и увеличения скорости \hat{N}_s также определяются по формуле (61)¹⁾. При этом формула (62) позволяет установить физический смысл перестановочных соотношений между операторами группы Галилея: в формуле (49) первая система соотношений соответствует закону сохранения полного импульса (этот закон с помощью скобок Пуассона записывается в виде $\{H, P_s\} = \hat{H}P_s = 0$), вторая система соотношений соответствует закону сохранения полного момента количества движения и, наконец, третья система перестановочных соотношений из (49) эквивалентна закону прямолинейного и равномерного движения центра масс системы. Что же касается перестановочных соотношений (51), то они эквивалентны требованию о том, чтобы по отношению к трехмерным вращениям соответствующие величины преобразовывались как компоненты векторов.

¹⁾ Например, если система состоит из одной частицы, то индексы k и s можно отождествить и по определению этих операторов

$$\hat{P}_s = \frac{\partial}{\partial q_s} = \frac{\partial}{\partial p_s} (p_s) \frac{\partial}{\partial q^s}, \quad \hat{N}_s = m \frac{\partial}{\partial p_s} = - \frac{\partial}{\partial q_s} (-mq_s) \frac{\partial}{\partial p_s},$$

$$\hat{M}_3 = q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} = \frac{\partial (q_1 p_2 - q_2 p_1)}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial (q_1 p_2 - q_2 p_1)}{\partial p_2} \frac{\partial}{\partial q_2}, \dots$$

где $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$.

Перестановочные соотношения (49) и (51) при переходе от группы Галилея к группе Лоренца не меняются, что связано с тем, что при переходе к релятивистской механике по-прежнему остаются справедливыми закон инерции и законы сохранения импульса и момента количества движения, а также что величины, по отношению к трехмерным вращениям ведущие себя как векторы, в релятивистской теории сохраняют это свойство. С другой стороны, соотношения (50) характерны только для группы Галилея. Если для операторов группы Лоренца $L^{(10)}$ воспользоваться обозначениями (48), то из (12) и (13) следует, что соотношения (49) и (51) останутся теми же самыми, а вместо (50) для группы Лоренца будем иметь соотношения

$$\begin{aligned} [\hat{P}_{s_1}, \hat{P}_{s_2}] &= 0, & [\hat{N}_{s_1}, \hat{P}_{s_2}] &= \frac{1}{c^2} \delta_{s_1 s_2} \hat{H}, \\ [\hat{N}_1, \hat{N}_2] &= \frac{1}{c^2} \hat{M}_3, \dots, \end{aligned} \quad (64)$$

которые при $c \rightarrow \infty$ переходят в (50).

Пользуясь цепочкой специальных разложений, введенной в конце предыдущего параграфа сразу для всех трех групп — группы Галилея (49) — (51), группы Лоренца (12) и (13) [или (49), (51), (64)] и группы движений четырехмерного пространства постоянной отрицательной кривизны (52), — можно представить общее групповое преобразование T в виде

$$T = T_r \cdot {}_t T_u T_\omega = e^{x^s \hat{P}_s + t \hat{H}} e^{u^s \hat{N}_s} e^{\omega^s \hat{M}_s}, \quad (65)$$

причем последнее преобразование T_ω в свою очередь допускает специальное разложение (59), связанное с введением углов Эйлера.

Чтобы для группы Галилея и группы Лоренца установить физический смысл всех параметров, входящих в (65), прежде всего учтем, что одно преобразование $T_{r', t'}$ по определению соответствует переходу от системы, рассматриваемой в момент времени $t=0$, к той же системе, рассматриваемой в момент времени t' и пространственно смещенной на r' . Далее, как следует из (54), матрица C_u распадается на диагональные блоки, причем та ее часть, которая действует на компоненты x^s и t , согласно (49) и (50) [или (64)], соответственно для групп Галилея и Лоренца имеет вид

$$C_u^\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & u^1 \\ 0 & 0 & 0 & u^2 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad C_u^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & u^1 \\ 0 & 0 & 0 & u^2 \\ 0 & 0 & 0 & u^3 \\ \frac{u^1}{c^2} & \frac{u^2}{c^2} & \frac{u^3}{c^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Поэтому при действии на $T_{r', t'}$ слева преобразования T_u (что для группы Галилея приводит к одинаковому изменению на v скоростей у всех частиц системы, а в общем случае соответствует переходу к описанию в системе отсчета, движущейся в противоположном направлении с постоянной скоростью $-v$) оператор $T_{r', t'}$ заменится на

$$T_u T_{r', t'} = (T_u T_{r', t'} T_u^{-1}) T_u = T_{r, t} T_u, \quad (67)$$

где r, t выражаются соответственно через r', t' и матрицу (66) по формуле (56). Для группы Галилея $(C_u^r)^2 = 0$, откуда следует, что

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u^1 \\ 0 & 1 & 0 & u^2 \\ 0 & 0 & 1 & u^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \\ t' \end{pmatrix}, \quad \text{т. е. } r = r' + ut, \quad t = t'. \quad (68)$$

Формулы (68) показывают, что для группы Галилея вектор u можно отождествить с вектором скорости v . Если координаты частицы характеризовать вектором смещения r , соединяющим начало системы отсчета с той точкой, в которой находится частица, то формулы (68) будут совпадать с формулами преобразования Галилея.

Что касается входящего в общее выражение (65) вектора ω , то (для определенности выбирая ось Oz направленной вдоль ω) с помощью (58) и (54) — (56) аналогичным путем убеждаемся, что для любой из рассматриваемых групп направление вектора ω совпадает с направлением оси вращения, а его абсолютная величина совпадает с величиной угла поворота.

Для группы Лоренца матрицу C_u^r следует заменить на C_u^L [см. (66)]. Воспользовавшись тем, что, согласно (66), $(C_u^L)^3 = (u^2/c^2)C_u^L$, где $u^2 = v^2$, так что

$$\begin{aligned} e^{C_u^L} &= E + \left[\frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} \left(\frac{u}{c}\right)^2 + \frac{1}{5!} \left(\frac{u}{c}\right)^4 + \dots \right] C_u^L + \\ &+ \left[\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} \left(\frac{u}{c}\right)^2 + \dots \right] (C_u^L)^2 = E + \frac{\text{sh } \frac{u}{c}}{\frac{u}{c}} C_u^L + \frac{\text{ch } \frac{u}{c} - 1}{\left(\frac{u}{c}\right)^2} (C_u^L)^2, \quad (69) \end{aligned}$$

и полагая

$$u = \frac{u}{v} v, \quad \text{где } \text{sh } \frac{u}{c} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \text{ch } \frac{u}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (70)$$

вместо (68) получаем

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & v^1 \\ 0 & 0 & 0 & v^2 \\ 0 & 0 & 0 & v^3 \\ \frac{v^1}{c^2} & \frac{v^2}{c^2} & \frac{v^3}{c^2} & 0 \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{(v)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \begin{pmatrix} v^1 v^1 & v^1 v^2 & v^1 v^3 & 0 \\ v^2 v^1 & v^2 v^2 & v^2 v^3 & 0 \\ v^3 v^1 & v^3 v^2 & v^3 v^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (v)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \\ t' \end{pmatrix}, \quad (71)$$

или в векторных обозначениях

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathbf{v} t' + \mathbf{v} \left[\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{(v)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \right]; \quad t = \frac{t' + \left(\frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (72)$$

что совпадает с обычными формулами преобразований Лоренца, записанными в векторном виде ¹⁾. Это в свою очередь показывает, что вектор \mathbf{u} совпадает с вектором скорости \mathbf{v} только в нерелятивистском пределе, тогда как в релятивистском случае эти два вектора только пропорциональны между собой. Коэффициент пропорциональности, определяемый в соответствии с (70) из $\beta = v/c = \text{th}(u/c)$, равен

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{\beta} \text{Arth } \beta = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} = 1 + \frac{\beta^2}{3} + \frac{\beta^4}{5} + \dots \quad (73)$$

Релятивистская формула сложения скоростей $\mathbf{v}_{(1)}$ и $\mathbf{v}_{(2)}$ будет определяться из соотношения

$$e^{u^s_{(1)} \hat{N}_s} e^{u^s_{(2)} \hat{N}_s} = e^{u^s \hat{N}_s} e^{v^s \hat{M}_s}. \quad (74)$$

Наличие в правой части соотношения (74), записанной в виде специального разложения, множителя, который характеризует результирующий поворот, является чисто релятивистским эффектом, связанным с неравенством нулю правых частей у последних перестановочных соотношений (64).

В том частном случае, когда векторы $\mathbf{v}_{(1)}$ и $\mathbf{v}_{(2)}$, а следовательно, и $\mathbf{u}_{(1)}$, $\mathbf{u}_{(2)}$ параллельны между собой, в формуле (74)

¹⁾ См. в настоящей книге формулы (5.72).

$\omega^s = 0$, $u = u_{(1)} + u_{(2)}$. Из $u = u_{(1)} + u_{(2)}$ с помощью (70) получим

$$\frac{v}{c} = \beta = \text{th} \left(\frac{u_{(1)}}{c} + \frac{u_{(2)}}{c} \right) = \frac{\beta_{(1)} + \beta_{(2)}}{1 + \beta_{(1)}\beta_{(2)}} = \frac{1}{c} \frac{v_{(1)} + v_{(2)}}{1 + \frac{v_{(1)}v_{(2)}}{c^2}}, \quad (75)$$

что, как и следовало ожидать, совпадает с обычной релятивистской формулой для сложения параллельных скоростей.

До рассмотрения общего случая заметим, что формулы теории групп Ли, выведенные в § 2, дают возможность легко находить результат произведения преобразований типа (74) для случая, когда параметры одного из преобразований бесконечно малы. Например, для специального разложения общего вида

$$e^{d\xi_{(1)}^\nu \hat{x}_\nu} e^{\xi_{(2)}^\nu \hat{x}_\nu} = e^{\xi_{(2)}^\nu \hat{x}_\nu} e^{d\xi_{(1)}^\mu \hat{x}_\mu}, \quad (76)$$

откуда, применяя формулы (45) и (46) и учитывая, что с точностью до бесконечно малых величин $U^{-1}(\xi) = U^{-1}(\xi_{(2)})$, получаем

$$\xi_{(2)}^\nu + U^{-1}(-\xi_{(2)})_{\nu_1}^\nu d\xi_{(1)}^{\nu_1} = \xi^\nu + U^{-1}(\xi_{(2)})_{\mu}^\nu d\xi_{(1)}^\mu, \quad (77)$$

$$U^{-1}(-\xi_{(2)})_{\nu}^\mu d\xi_{(1)}^\nu = U^{-1}(\xi_{(2)})_{\mu_1}^\mu d\xi_{(1)}^{\mu_1}. \quad (78)$$

Формула (78) даёт возможность по заданным $d\xi_{(1)}^\nu$ и $\xi_{(2)}^\nu$ однозначно определить $d\xi_{(1)}^\mu$, откуда далее с помощью (77) однозначно определяются ξ^ν . При этом вычисление элементов матриц U^{-1} существенно облегчается тем, что для всех рассматривавшихся выше групп (группы Галилея, группы Лоренца и группы движений пространства Фридмана), как нетрудно проверить, $(C_\xi)^3 = q(\xi)C_\xi$, где $q(\xi)$ — положительное или отрицательное число. Отсюда следует,

что если $f(x)$ — произвольная функция вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то

$$f(C_\xi) = f(0) + \frac{f(\sqrt{q}) + f(-\sqrt{q})}{2\sqrt{q}} C_\xi + \frac{f(\sqrt{q}) + f(-\sqrt{q}) - 2f(0)}{2q} C_\xi^2. \quad (79)$$

Этой формулой мы фактически уже пользовались при вычислении матриц, входящих в (58), (68) и (69).

Возвращаясь к формуле сложения скоростей (74), заметим, что для общего случая выражения для u^s и ω^s через $u_{(1)}^s$ и $u_{(2)}^s$ проще всего найти, исходя из того, что, согласно (64), перестановочные соотношения между операторами $(c/i)\hat{N}_1$, $(c/i)\hat{N}_2$, \hat{M}_3 совпадают

с перестановочными соотношениями между \hat{M}_1 , \hat{M}_2 , \hat{M}_3 . Это дает возможность исходить из пространственных вращений и по формулам для результирующего поворота, записанным в виде специального разложения типа (59), сразу находить соответствующие выражения для параметров из (74). В частности, поскольку для трехмерных вращений, согласно формуле (79),

$$U^{-1}(C_\omega) = \frac{C_\omega}{E - e^{C_\omega}} = E + \frac{1}{2} C_\omega + \frac{2 - \omega \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}}{2\omega^2} C_\omega^2, \quad (80)$$

то с помощью (78) получим

$$\begin{aligned} e^{d\omega_{(1)}^1 \hat{M}_{(1)} + d\omega_{(1)}^2 \hat{M}_2} e^{\omega_{(2)}^1 \hat{M}_1 + \omega_{(2)}^2 \hat{M}_2} &= \\ &= e^{\omega^1 \hat{M}_1 + \omega^2 \hat{M}_2} \exp \left[\frac{(\omega_{(2)}^1 d\omega_{(1)}^2 - \omega_{(2)}^2 d\omega_{(1)}^1)}{\omega_{(2)} \operatorname{ctg} (\omega_{(2)}/2)} \hat{M}_3 \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

Отсюда путем замены в (81) $d\omega_{(1)}^s$ на $(i/c)u_{(1)}^s$, $\omega_{(2)}^s$ на $(i/c)u_{(2)}^s$ и $\omega_{(2)}$ на $(i/c)u_{(2)}$ находится выражение для компонент ω^s из (74) для случая, когда $v_{(1)}^s$ бесконечно малы (и равны $dv_{(1)}^s$):

$$\omega = \frac{[d\mathbf{v}_{(1)} \times \mathbf{v}_{(2)}^{(1)}]}{(v_{(2)})^2} \left(\frac{u_{(2)}}{v_{(2)}} \right) (1 - \sqrt{1 - \beta_{(2)}^2}), \quad (82)$$

где \times — знак векторного произведения. Формула (82) дает явное выражение для величины эффекта, соответствующего так называемой „прецессии Томаса“¹⁾.

Как видим, применение основных формул теории групп Ли и использование специального разложения групповых преобразований дает возможность легко получить все основные формулы релятивистской кинематики, *учитывая при этом только структуру основной группы*, но не выдвигая каких-либо специальных гипотез о свойствах преобразуемых объектов. В частности, из этих формул [таких, как (75)] вытекает утверждение о предельном характере скорости света, так что *единственное требование, которое может быть положено в основу специальной теории относительности, это требование о замене группы Галилея на группу Лоренца*.

Вместе с тем учет сформулированного выше требования инвариантности приводит к тому, что с заменой одной основной группы на другую может связываться не только изменение кинематических соотношений, но и изменение всей физической картины мира. Так, переход от группы Галилея к группе Лоренца заставляет изменить представление о том, какие физические величины могут

¹⁾ См. в настоящей книге гл. 6 § 6.

быть задаваемыми и определяемыми, в связи с чем механическое представление о силах дальнего действия приходится заменить на представление о поле, распространяющемся с конечной скоростью.

§ 5. Возможности обобщения и связь с общей теорией относительности

Развитие квантовой теории элементарных частиц и математическая разработка понятий, возникших в связи с созданием общей теории относительности, приводят, с одной стороны, к проблеме о расширении группы Лоренца, а с другой — к обобщению отдельных групповых понятий. Не входя в детали математических построений, что заняло бы много места, мы здесь очень кратко рассмотрим лишь принципиальные стороны соответствующих вопросов, что позволит лучше уяснить связи, существующие между теорией групп и теорией относительности.

В релятивистской квантовой теории, имеющей дело с взаимными превращениями частиц, по задаваемым величинам, характеризующим систему частиц перед взаимодействием или рассеянием, определяются величины, характеризующие систему после взаимодействия. По сравнению с классической теорией физический смысл задаваемых и определяемых величин в корне меняется, так как они теперь уже носят вероятностный характер и задача заключается в изучении матрицы рассеяния или S -матрицы, связывающей амплитуды вероятности начального и конечного состояний (см., например, Боголюбов и Ширков [24], Ахиезер и Берестецкий [25], Мэтьюс [26]). Вместе с тем полностью сохраняет свое значение понятие о релятивистской инвариантности в формулировке, приведенной в § 3.

Указанная формулировка инвариантности, в основу которой кладется только понятие об основной группе, подсказывает также пути для возможного обобщения, основанного на замене группы Лоренца на более общую „расширенную“ группу. Поскольку одно только допущение о том, что в качестве основной группы должна браться не группа Галилея, а группа Лоренца, приводит к коренному изменению многих физических понятий и к замене классической механики на релятивистскую механику и электродинамику Максвелла, то естественной становится гипотеза о том, что переход от современной релятивистской квантовой теории к более глубокой теории может оказаться связанным только с заменой группы Лоренца на другую, пока еще не известную группу, содержащую большее число параметров.

Первые указания на то, что группу Лоренца, быть может, следует расширить и ввести дополнительные параметры непрерывных преобразований, появились еще в квантовой электродинамике, где

сохранение заряда связывается с инвариантностью по отношению к однопараметрической группе калибровочных преобразований, инфинитезимальный оператор которой перестановочен со всеми операторами группы Лоренца $L^{(10)}$. В дальнейшем при изучении реакций с мезонами, нуклонами и гиперонами пришлось столкнуться также с инвариантностью по отношению к ряду других непрерывных преобразований, проявляющейся в законах сохранения целого ряда величин (аналогично тому, как в механике инвариантность по отношению к трехмерным смещениям и поворотам приводит к сохранению полного импульса и момента количества движения). В связи с этим во многих работах по теории элементарных частиц (см., например, [27—38]; некоторые дополнительные ссылки можно найти в работах [26, 39]) на первое место стало выдвигаться изучение группы, характеризующей инвариантные свойства частиц.

Примерами конкретных групп, предложенных в качестве расширения группы Лоренца, являются 15-параметрическая группа конформных преобразований, вводимая в связи с нелинейной теорией Гейзенберга (см. [36, 37]), и 16-параметрическая группа Ахмаваары [38], где изотопический спин объясняется добавлением к операторам из $L^{(10)}$ шести операторов, связанных между собой и с операторами из $N^{(4)}$ такими же перестановочными соотношениями, как и в случае однородной группы Лоренца $M^{(6)}$. Указанные попытки, расширения группы Лоренца связываются или со специальным формализмом и с изучением инвариантных свойств уравнений частного вида, или с предварительным изучением того, какие расширения группы Лоренца математически допустимы. Но они пока носят ограниченный и сугубо предварительный характер и не связываются с вопросом о пересмотре и уточнении смысла отдельных физических понятий.

Если переход к более глубокой теории действительно можно будет связать с требованием замены основной группы, характеризующей инвариантные свойства физических явлений, то, как и в случае со специальной теорией относительности, это должно будет привести к дальнейшему изменению всей физической картины мира и, в связи с этим, к более глубокому изменению существующих физических теорий.

Переходя к общей теории относительности, прежде всего следует отметить, что для не слишком большой области риманово пространство переменной кривизны приближенно можно аппроксимировать пространством постоянной кривизны (см. Розенфельд [21] гл. VII, § 3). Именно таким путем, исходя из уравнения Эйнштейна [40] с космологическим членом, в физике можно вводить понятие о пространстве Фридмана. При этом знак перед $(1/R^2) \hat{M}_{\nu,\nu}$, в перестановочных соотношениях (52), характеризующих группу

движений этого пространства, а также величина постоянной R , определяются значением скорости разбегания галактик (находимой по величине красного смещения) и средней плотностью звездной материи. Независимо от этого группа движений пространства Фрийдмана может рассматриваться также в качестве возможной более глубокой основной группы, в предельном случае переходящей в группу Лоренца. Формулы, выведенные в предыдущих параграфах, позволяют легко получить для этой группы все основные кинематические соотношения.

Вместе с тем общая теория относительности не связана с обобщением группы, характеризующей инвариантные свойства физических систем; имеющееся в ней обобщение, соответствующее замене евклидова пространства на риманово, носит принципиально другой характер. Это обстоятельство специально подчеркивал Картан [41], который писал, что с созданием общего принципа относительности в геометрии возникли большие затруднения и что в физику и философию был перенесен антагонизм между принципами Римана и Клейна. Этот же факт послужил основой для предложенной В. А. Фоком [42] новой интерпретации эйнштейновской теории тяготения. Не касаясь некоторых других выдвинутых при этом Фоком положений (отрицание значения принципа эквивалентности, приписывание особой роли гармоническим системам координат), которые вызвали возражения у ряда исследователей (см., например, М. Ф. Широков [43]), необходимо признать, что учет этого обстоятельства необходим для правильного понимания как результатов общей теории относительности, так и связей между этой теорией и специальной теорией относительности¹⁾.

Что касается математической стороны упомянутого антагонизма между геометрическим подходом Клейна и Римана, то для преодоления возникших при этом затруднений Картан ввел понятие о группе голономии, характеризующей изменения репера в данной точке в результате обхода по замкнутым контурам. Отсылая читателя за деталями к математическим работам (см. Картан [44, 45], Лихнерович [46], Номидзу [47]), отметим, что развитый при этом формализм дает возможность для различных основных групп совершать переход к неголономным пространствам, обобщающий переход от специальной теории относительности к общей.

¹⁾ Мы здесь не касаемся вопроса о группе движений риманова пространства, который может играть важную роль при изучении уравнений общей теории относительности. По этому вопросу отсылаем читателя к монографии А. З. Петрова [48], где имеется также подробная библиография.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, М. — Л., 1958.
2. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, М. — Л., 1958.
3. Клейн Ф., в сборнике „Об основаниях геометрии“, М. — Л., 1956, стр. 399.
4. Леви-Чивита Т., Умальди У., Курс теоретической механики, т. 2, ч. 2, ИЛ, 1951.
5. Lie S., Math. Ann., 25, 71 (1885); Arch. Math. og Natuv., 10, 74, 353 (1886).
6. Lie S., Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig, Bd., 1, 2, 1888; Bd. 3, 1893.
7. Campbell J. E., Introductory treatise on Lie theory of finite continuous transformation groups, Oxford, 1903.
8. Hausdorff F., Ber. Sachs. Ges., 58, 19 (1906).
9. Дынкин Е. Б., ДАН СССР, 57, 323 (1947); Усп. матем. наук, 5, 135 (1950).
10. Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, М. — Л., 1940.
11. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М. — Л., 1954.
12. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, М. — Л., 1956.
13. Heading J., Matrix theory for physicists, Glasgow, 1958.
14. Cartan E., La théorie des groupes finis et continus et la Geometrie differentielle traiteés par la methode du repère mobile, Paris, 1937.
15. Фавар Ж., Курс локальной дифференциальной геометрии, ИЛ, 1960.
16. Зайцев Г. А., Сборник рецензий „Новые книги за рубежом“, ИЛ, Сер. А, № 4, 32 (1960) (рецензия на книгу L. De-Broglie, Éléments de théorie des quanta et de mecanique ondulatoire, 1959).
17. Александров А. Д., в сборнике „Философские вопросы современной физики“, Изд-во АН СССР, 1959, стр. 269.
18. Гантмахер Ф., Математический сборник, 5, 47, 101 (1939).
19. Friedmann A., Zs. f. Phys., 10, 377 (1922).
20. Fantappiè L., Atti Acad. naz. Lincei Rend., Cl. sci. fis. mat. e. natur., 17, 158 (1954).
21. Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии, М. — Л., 1955.
22. Щевалле К., Теория групп Ли, том 3, ИЛ, 1958.

23. Голдстейн Г., Классическая механика, М. — Л., 1957.
24. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М. — Л., 1957.
25. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, М. — Л., 1959.
26. Мэтьюс П., Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц, ИЛ, 1959.
27. Pais A., Proc. U. S. Nat. Acad. Sci., **40**, 484 (1954).
28. D'Espagnat B., Prentki J., CERN, Rep. № 11, July 15, 1955.
29. Gürsey F., Nuovo Cimento, **7**, 411 (1958).
30. Buchdahl H. A., Nuovo Cimento, **11**, 496 (1959).
31. Wess J. E., Nuovo Cimento, **15**, 52 (1960).
32. Salam A., Polkinghorn J. C., Nuovo Cimento, **2**, 685 (1955); **15**, 166 (1960).
33. Lukierski J., Nuovo Cimento, **13**, 410 (1959).
34. Touschek B., Nuovo Cimento, **5**, 1281 (1957).
35. Rzewuski, Bull. Acad. Polon. sci., Sè. sci. mat., astron. et phys., **7**, 571 (1959).
36. Ворт Ф., Ann. d. Phys., **4**, 96 (1959).
37. Гейзенберг В. и др., в сборнике „Нелинейная квантовая теория поля“, ИЛ, 1959, стр. 332.
38. Ahmavaara J., Ann Acad. Sci. Fennicae, Helsinki, AVI, № 60, 31 (1960).
39. Иваненко Д., Старцев А., УФН, **72**, 765 (1960).
40. Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, 1955, Приложение 1.
41. Cartan E., L'Enseignement mathématique, **26**, 200 (1927). (См. перевод в сборнике „Об основаниях геометрии“, М. — Л., 1956.)
42. Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, М. — Л., 1955.
43. Широков М. Ф., ЖЭТФ, **30**, 180 (1956); Сборник „Философские вопросы современной физики“, Изд-во АН СССР, 1959, стр. 324.
44. Cartan E., L'Enseignement mathématique, **24**, 1 (1925).
45. Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, ИЛ, 1949.
46. Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономии, ИЛ, 1960.
47. Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, ИЛ, 1960.
48. Петров А. З., Пространства Эйнштейна, М. — Л., 1961.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакции	5
Предисловие автора к русскому изданию	7
Введение	11

Часть первая

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

Глава 1. Электростатика	23
§ 1. Экспериментальные законы. Закон Кулона	23
§ 2. Общие законы электростатики	25
§ 3. Первый закон. Теорема Гаусса	26
§ 4. Применения. Напряженность электрического поля на поверхности проводника. Электростатическое давление	27
§ 5. Второй закон. Определение потенциала	28
§ 6. Решения уравнений Лапласа и Пуассона	29
§ 7. Уравнение Пуассона и граничные условия	30
§ 8. Применения	33
§ 9. Диэлектрики	35
§ 10. Диэлектрики и диполи	37
§ 11. Поляризация и смещение	38
Глава 2. Магнетостатика	41
§ 1. Состояния, не меняющиеся с течением времени. Опытный закон Био — Савара	41
§ 2. Общие законы магнитных явлений	42
§ 3. Магнитные диполи	46
§ 4. Намагничивающиеся среды	48
§ 5. Магнитный момент листка. Магнитная проницаемость и восприимчивость	50
Глава 3. Электромагнетизм	53
А. Электромагнитная индукция и ток смещения	54
§ 1. Опытный закон Фарадея	54
§ 2. Ток проводимости. Ток смещения	55

Б. Уравнение Максвелла	57
§ 3. Система единиц	57
§ 4. Основные уравнения	58
§ 5. Потенциал	59
§ 6. Уравнения распространения. Запаздывающие потенциалы	60
В. Электромагнитная энергия. Поток энергии	62
§ 7. Плотность энергии электрического и магнитного полей	62
§ 8. Вектор Пойнтинга и теорема Пойнтинга	65
Г. Электромагнитные волны	66
§ 9. Уравнения распространения поля	66
§ 10. Плоские волны	67
§ 11. Пакеты волн	71
§ 12. Сферические волны	73
Д. Уравнения электромагнитной теории, справедливые для медленно движущихся ненамагниченных тел	77
§ 13. Применение теории Максвелла к движущимся телам	77
§ 14. Движение проводника или изолятора в электрическом поле	77
§ 15. Перемещение проводника или изолятора в магнитном поле	79
§ 16. Гипотезы Герца и Лоренца	80
Глава 4. Источники электромагнитного поля. Теория Лоренца	83
§ 1. „Микроскопические“ напряженности поля и потенциалы, связанные с электроном	84
§ 2. „Структура“ электрона Лоренца	86
§ 3. Потенциалы и напряженности поля, создаваемого электронами	91
§ 4. Уравнения для сред и макроскопическая теория Максвелла	94
§ 5. Истолкование смысла применяемых в теории Максвелла векторов напряженности и индукции. Уравнения теории электромагнетизма для случая покоящегося вещества	95
§ 6. Теория Лоренца и электродинамика движущихся тел	97

Часть вторая

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Глава 5. Принцип относительности	107
А. Принцип относительности до Эйнштейна	107
§ 1. Принцип относительности в классической механике	107
§ 2. Принцип относительности в электродинамике	109

§ 3. Экспериментальные возможности обнаружить абсолютное движение при помощи оптических методов	110
§ 4. Эффекты первого порядка. Гипотеза о частичном увлечении света прозрачными телами	114
§ 5. Электронная теория Лоренца и эффекты первого порядка. Гипотеза неподвижного эфира	118
§ 6. Эффекты второго порядка	120
§ 7. Гипотеза Фицджералда — Лоренца	124
Б. Принцип специальной относительности	126
§ 8. Основной постулат Эйнштейна	126
§ 9. Критика понятия одновременности	128
§ 10. Преобразование Лоренца	130
§ 11. Следствия из формул преобразования	132
§ 12. Собственное время	136
§ 13. Геометрическое представление формул Лоренца	137
§ 14. Запись специального преобразования Лоренца в другом виде	140
§ 15. Общее преобразование Лоренца. Метод Мёллера	141
§ 16. Изменение собственной системы отсчета для одного и того же движущегося тела. Парадокс часов	146
Глава 6. Четырехмерный формализм специальной теории относительности	150
§ 1. Несобственно евклидово пространство специальной теории относительности	150
§ 2. Применяемые условия	152
§ 3. Выражения для формы ds^2 в специальной теории относительности	153
§ 4. Пространственно-подобные, времени-подобные и изотропные четырехмерные векторы	156
§ 5. Инвариантность ds^2 и группа движений четырехмерного евклидова пространства	157
§ 6. Общее и специальное преобразования Лоренца	160
§ 7. Выражение для коэффициентов общего преобразования Лоренца	162
§ 8. Применение специального преобразования Лоренца	165
§ 9. Примеры	166
§ 10. Сложение скоростей и общее преобразование Лоренца	169
§ 11. Применение. Случай, когда одна из систем является собственной	170
Глава 7. Релятивистская кинематика	173
А. Релятивистский закон сложения скоростей	173
§ 1. Четырехмерный вектор скорости	173
§ 2. Изменение скоростей при преобразовании Лоренца	174

§ 3. Преобразование Лоренца и общая формула сложения скоростей	176
§ 4. Величина и направление вектора скорости	179
§ 5. Предельная скорость	182
§ 6. Отсутствие симметрии между „относительной“ скоростью и скоростью увлечения	183
§ 7. Частный случай: сложение параллельных скоростей	183
Б. Распространение волн и релятивистская кинематика	184
§ 8. Распространение плоской волны в преломляющих средах, одна из которых движется по отношению к другой с постоянной скоростью	184
§ 9. Принцип Гюйгенса и специальная теория относительности	187
§ 10. Фазовая скорость и скорость распространения	191
Глава 8. Релятивистская динамика	195
А. Релятивистская динамика материальной точки	195
§ 1. Импульс, энергия и собственная масса частицы	195
§ 2. Сила Минковского. Основной закон релятивистской динамики	197
§ 3. Эквивалентность массы и энергии	199
§ 4. Изменение скоростей и основных динамических величин (импульса, энергии, силы) при преобразовании Лоренца	201
§ 5. Система свободных частиц	203
§ 6. Система связанных частиц	208
Б. Релятивистская динамика непрерывных сред	210
§ 7. Нерелятивистские уравнения жидкости в ортогональной системе координат	210
§ 8. Релятивистские уравнения для непрерывной среды	213
§ 9. Тензор энергии — импульса вещества	215
§ 10. Случай идеальной жидкости	216
В. Использование произвольных криволинейных координат	217
§ 11. Траектория материальной точки, выраженная в произвольных криволинейных координатах	217
§ 12. Основной закон динамики точки	219
§ 13. Движение однородной жидкости. Тензор энергии — импульса вещества	220
§ 14. Уравнения сохранения и движения	221
§ 15. Частный случай: уравнение сохранения и уравнения движения для идеальной жидкости	222
Глава 9. Релятивистская теория электромагнетизма	224
А. Ковариантная форма теории Максвелла	224
§ 1. Электромагнитное поле и тензоры второго ранга	224
§ 2. Электромагнитный потенциал	228

§ 3. Уравнения Максвелла и общее преобразование Лоренца	229
§ 4. Электронная теория Лоренца. Тензор энергии — импульса	232
§ 5. Уравнения Лоренца и уравнения Максвелла	235
§ 6. Тензор энергии — импульса	241
§ 7. Применение произвольных криволинейных координат	242
Б. Обобщения теории Максвелла	246
§ 8. Вывод уравнений Максвелла из принципа стационарного действия	246
§ 9. Теория Ми	248
§ 10. Теория Борна — Инфельда	253
Глава 10. Экспериментальные подтверждения специальной теории относительности	259
А. Замедление часов	260
§ 1. Теория эффекта Допплера и замедление часов	260
§ 2. Опыт Айвса и Стилуэлла (1941 г.)	263
§ 3. Средняя продолжительность жизни мезонов	266
Б. Изменение массы со скоростью	267
§ 4. Движение заряженной частицы в электромагнитном поле	267
§ 5. Отклонение заряженной частицы под действием параллельных электрического и магнитного полей, перпендикулярных к начальной скорости частицы	269
§ 6. Упругое столкновение двух частиц	272
§ 7. Эффект Комптона	276
В. Эквивалентность между массой и энергией	278
§ 8. Дефект массы и ядерная энергия	278
§ 9. Баланс ядерных реакций	279

Часть третья

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Глава 11. Общая теория относительности	285
А. Закон тяготения Ньютона	285
§ 1. Закон тяготения Ньютона и опыт	285
§ 2. Гравитационный потенциал и его свойства. Эквивалентность гравитационной и инертной масс	289
§ 3. Закон Пуассона	291
§ 4. Закон Ньютона и принцип специальной относительности	293
Б. Принцип эквивалентности и введение неевклидова пространства	294

§ 5. Системы отсчета с ускорением и „фиктивные“ силы инерции. Ограниченность принципа специальной относительности	295
§ 6. Локальная эквивалентность сил тяготения и сил инерции	296
§ 7. Понятия, приводящие к введению неевклидова мира	299
§ 8. Изучение частного случая вращающегося диска . . .	302
В. Закон тяготения Эйнштейна	313
§ 9. Закон тяготения для области без вещества	314
§ 10. Закон тяготения при наличии вещества или электромагнитного поля	316
§ 11. Траектории незаряженной частицы в гравитационном поле являются геодезическими линиями риманова пространства	316
Глава 12. Развитие общей теории относительности и некоторые вытекающие из нее следствия	319
А. Приближенные уравнения	319
§ 1. Гравитационный потенциал в ньютоновском приближении	319
§ 2. Уравнения гравитационного поля в изотермических и квази-галилеевых координатах	320
§ 3. Применение к непрерывной материальной среде, сходной с идеальным газом	324
§ 4. Уравнения для пустого пространства	330
§ 5. Уравнения поля и движение источников	332
Б. Исследование точного решения уравнений поля, имеющего специальный вид; решение Шварцшильда	344
§ 6. Гравитационное поле вблизи массы, обладающей сферической симметрией	344
§ 7. Поле вблизи заряженной сферически-симметричной частицы	349
§ 8. Траектории незаряженной частицы вблизи статической сферически-симметричной массы	351
§ 9. Опытная проверка пригодности решения Шварцшильда	353
§ 10. Измерения смещения спектральных линий при помощи эффекта Мёссбауэра	360
Глава 13. Единые теории электромагнетизма и гравитации	368
Особенности теории чистого поля	368
Единые теории и недуалистические теории	368
А. Единые теории	369
§ 1. Единые теории, существовавшие до создания общей теории относительности	369

§ 2. Общая теория относительности и единые теории . . .	370
§ 3. Интерпретация электромагнитного и гравитационного полей, предлагаемая едиными теориями	370
§ 4. Классические единые теории и возможность новых предсказаний	373
§ 5. Единые теории и квантовые теории	375
Б. Недуалистические теории	377
§ 6. Поле и источники поля	377
§ 7. Нелинейность и характерные особенности теории чистого поля	378
В. Единые недуалистические теории	380

Часть четвертая

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

Глава 14. Введение координат в евклидовом векторном пространстве	385
А. Применение прямолинейных координатных осей	386
§ 1. Ковариантные и контравариантные компоненты	386
§ 2. Норма вектора. Скалярное произведение двух векторов	388
§ 3. Изменение прямолинейных координатных осей	389
§ 4. Инварианты, 4-векторы, тензоры	390
§ 5. Симметричность, антисимметричность	391
§ 6. Преобразование метрического тензора. Частный случай ортогональных реперов	392
§ 7. Вращение осей в четырехмерном евклидовом пространстве	393
Б. Применение произвольных криволинейных координат	395
§ 8. Переход в евклидовом векторном пространстве от одной системы криволинейных координат к другой	395
§ 9. Дифференциальные соотношения между компонентами метрического тензора	400
§ 10. Ковариантная производная	401
§ 11. Тензорные плотности	404
Глава 15. Введение координат в неевклидовом метрическом многообразии. Применение к риманову пространству	407
§ 1. Метрическое пространство и касательное евклидово пространство	407
§ 2. Аффинная связность	408
§ 3. Изображение первого порядка	409
§ 4. Изображение второго порядка	411

§ 5. Векторы и тензоры, связанные с метрическим многообразием	412
§ 6. Ковариантная производная	414
§ 7. Параллельный перенос вектора	417
§ 8. Условия интегрируемости и структура пространства	418
§ 9. Кривизна риманова пространства Тензор Римана — Кристоффеля	424
§ 10. Свойства тензора Римана — Кристоффеля	429
§ 11. Геодезические линии риманова пространства. Прямые евклидова пространства в произвольной системе координат	431
Литература	435

Дополнение

Г. А. Зайцев о связи теории относительности с теорией групп

§ 1. Понятие о группе и его связь с задачей об изучении инвариантных свойств геометрических объектов	447
§ 2. Основные результаты и прикладные формулы теории групп Ли	450
§ 3. Группа, характеризующая инвариантные свойства физических явлений, и ее структура	458
§ 4. Случаи, когда основной группой является группа Галилея или группа Лоренца Применение теории групп для вывода основных формул релятивистской кинематики	464
§ 5. Возможности обобщения и связь с общей теорией относительности	471
Литература	474

Мари-Антуанетт Тоннела

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА И ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Редактор А. К. Бурцев Художник В. И. Телепнев Технический редактор М. П. Грибова

Сдано в производство 23/II-1962 г. Подписано к печати 24/VI-1962 г. Бумага 60×90¹/₂, = 15,3 бум. л. 30,5 печ. л. Уч.-изд. л. 23,5. Изд. № 2/0890 Цена 1 р. 85 к. Зак. 213.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29.

М.-А.
ТОННЕЛА

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОИЗМА
И ТЕОРИИ ПОТОКОВ